Modélisation des champs "diffus" en acoustique architecturale et urbaine par un processus de diffusion de l'énergie sonore

Judicaël Picaut

▶ **To cite this version:**

Judicaël Picaut. Modélisation des champs "diffus" en acoustique architecturale et urbaine par un processus de diffusion de l'énergie sonore. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, Le Mans., 2006. tel-02519581

HAL Id: tel-02519581
https://hal.science/tel-02519581

Submitted on 7 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes - Faculté des Sciences de l'Université du Maine

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée par

Judicaël Picaut

Chargé de Recherche
au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Modélisation des champs « diffus » en acoustique architecturale et urbaine par un processus de diffusion de l'énergie sonore

soutenue le 17 novembre 2006 devant le jury composé de

M.	M. Bérengier	Directeur de recherche, LCPC
M.	B. Castagnède	Professeur, Université du Maine
M.	D. Duhamel	Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, ENPC-LAMI
M.	J.-J. Embrechts (rapporteur)	Professeur, Université de Liège (Belgique)
Mme	D. Habault	Directeur de Recherche, GdR CNRS 2493
M.	M. Hodgson (rapporteur)	Professeur, University of British Columbia (Canada)
M.	J. Kergomard (rapporteur)	Directeur de Recherche, LMA UPR CNRS 7051
M.	L. Simon	Professeur, Université du Maine

Table des matières

Table des figures **7**

Chapitre 1 – Introduction générale **11**
1.1 Parcours scientifique et activités de recherche . . . 11
1.1.1 Déroulement de carrière . . . 11
1.1.2 Problématique du « bruit urbain » . . . 11
1.1.3 Organisation des travaux de recherche . . . 12
1.2 Présentation du document . . . 14

Chapitre 2 – Modélisation des champs sonores (état de l'art) **17**
2.1 Introduction . . . 17
2.2 Différentes approches en acoustique des salles et urbaines . . . 17
2.2.1 Équation d'onde et théorie modale . . . 17
2.2.2 Éléments de frontière, éléments finis, différences finies . . . 18
2.2.3 Théorie classique de la réverbération . . . 19
2.2.4 Méthodes des sources-images et des récepteurs-images . . . 19
2.2.5 Méthodes du tracé de rayons et de faisceaux sonores . . . 21
2.2.6 Méthode de la radiosité . . . 22
2.2.7 Méthode numérique du suivi de particules sonores . . . 24
2.2.8 Modèles de transport de particules sonores (analytiques) . . . 24
2.2.8.1 Équation de Boltzmann . . . 25
2.2.8.2 Utilisation d'un processus de Markov . . . 28
2.2.8.3 Utilisation d'une équation de diffusion . . . 29
2.2.8.4 Utilisation de la théorie des probabilités . . . 32
2.2.9 Autres approches et compléments . . . 34
2.3 Conclusion . . . 34
2.3.1 Principales limitations des approches actuelles . . . 34
2.3.2 Principales motivations de nos travaux . . . 36

Chapitre 3 – Diffusion de façade **39**
3.1 Introduction . . . 39
3.1.1 État de l'art sur la diffusion de façade . . . 39
3.1.2 Travaux de recherche sur la diffusion de façade . . . 40
3.2 Étude qualitative de la diffusion de façade . . . 41
3.2.1 Critère de Rayleigh . . . 41
3.2.2 Diffraction par les arêtes de la façade . . . 44
3.2.3 Champ proche et champ lointain . . . 46
3.2.4 Zones actives de réflexion . . . 46
3.2.4.1 Principe d'Huygens . . . 47
3.2.4.2 Zones de Fresnel . . . 47

3.2.4.3 Bilan énergétique . . . 52
3.2.4.4 Zone active de réflexion d'une façade . . . 53
3.2.5 Conclusion de l'étude qualitative . . . 53
3.3 Effets de la diffusion de façade . . . 55
3.3.1 Introduction . . . 55
3.3.2 Modélisation de la réflexion de façade par des tirages aléatoires . . . 56
3.3.2.1 Généralités . . . 56
3.3.2.2 Modélisation de la réflexion par tirage aléatoire . . . 56
3.3.2.3 Formalisme des lois de réflexion dans le concept particulaire . . . 57
3.3.2.4 Modes de réflexion . . . 58
3.3.3 Effet des réflexions sur la propagation du son à l'échelle d'un quartier . . . 66
3.3.3.1 Géométrie du quartier . . . 66
3.3.3.2 Propagation des particules sonores dans le quartier . . . 66
3.3.3.3 Processus de diffusion à l'échelle d'une ville . . . 73
3.3.4 Effet des réflexions sur la propagation du son à l'échelle d'une rue . . . 73
3.3.4.1 Géométrie de la rue . . . 75
3.3.4.2 Résultats . . . 75
3.3.5 Conclusion . . . 80
3.4 Caractérisation des lois de réflexion de façades urbaines . . . 80
3.4.1 Introduction . . . 80
3.4.2 Modèle géométrique élémentaire d'une façade urbaine . . . 81
3.4.3 Caractérisation théorique de la diffraction par une fenêtre dans une façade . . . 81
3.4.3.1 Étude bibliographique . . . 81
3.4.3.2 Définition des champs de pression . . . 83
3.4.3.3 Conditions aux limites . . . 86
3.4.3.4 Transmission et réflexion par l'embrasure . . . 88
3.4.3.5 Approximation - Cas limites . . . 89
3.4.3.6 Implantation numérique . . . 92
3.4.3.7 Applications . . . 98
3.4.3.8 Conclusion . . . 105
3.4.4 Caractérisation expérimentale sur maquette . . . 105
3.4.4.1 Principe des mesures . . . 107
3.4.4.2 Validation et résultats . . . 108
3.4.5 Conclusion . . . 116
3.5 Conclusion sur la diffusion de façade . . . 116

Chapitre 4 – Modélisation des champs « diffus » en acoustique urbaine 119
4.1 Introduction . . . 119
4.2 Modèle de transport . . . 120
4.2.1 Concept particulaire . . . 120
4.2.2 Modélisation de la propagation par une équation de transport . . . 122
4.2.2.1 Définition des variables . . . 122
4.2.2.2 Fonction de distribution à une particule . . . 122
4.2.2.3 Équation de transport . . . 124
4.2.3 Conditions aux limites (façades) . . . 124
4.3 Approche asymptotique pour une rue étroite . . . 128
4.3.1 Modèle simplifié d'une rue étroite . . . 128
4.3.2 Développement asymptotique de l'équation de transport . . . 130
4.3.2.1 Changement de variables . . . 130
4.3.2.2 Développement de l'équation de transport . . . 131

4.3.2.3 Séparation des variables . . . 131
4.4 Application du modèle et validation . . . 132
4.4.1 Rue avec des façades présentant des réflexions non rasantes . . . 132
4.4.1.1 Diffusion *normale* . . . 132
4.4.1.2 Calcul du coefficient de diffusion . . . 133
4.4.1.3 Solution de l'équation de diffusion . . . 136
4.4.1.4 Validation numérique . . . 137
4.4.2 Rue avec des façades présentant des réflexions rasantes . . . 140
4.4.2.1 Diffusion *anormale* . . . 140
4.4.2.2 Validation numérique . . . 144
4.4.2.3 Validation expérimentale . . . 144
4.5 Mise en forme numérique . . . 147
4.5.1 Introduction . . . 147
4.5.2 Principe de l'approche numérique . . . 148
4.5.2.1 Logiciel COMSOL Multiphysics™ . . . 148
4.5.2.2 Mise en forme du modèle de transport dans le logiciel . . . 149
4.5.3 Application à des géométries urbaines réalistes . . . 153
4.5.3.1 Introduction . . . 153
4.5.3.2 Rue en « U » . . . 154
4.5.3.3 Rue en « U » à section variable . . . 154
4.5.3.4 Intersection de deux rues en « U » . . . 156
4.5.3.5 Intersections de trois rues en « U » . . . 156
4.5.4 Conclusion sur le modèle numérique . . . 159
4.6 Conclusion et perspectives sur le modèle de transport . . . 161
4.6.1 Conclusion . . . 161
4.6.2 Perspectives . . . 163

Chapitre 5 – Modélisation des champs « diffus » en acoustique des salles 165
5.1 Introduction . . . 165
5.2 Modèle de diffusion en acoustique des salles . . . 165
5.2.1 Analogie avec la diffusion par des particules diffractantes . . . 165
5.2.1.1 Modèle équivalent d'une salle diffuse . . . 165
5.2.1.2 Libre parcours moyen dans la salle . . . 166
5.2.1.3 Équation de diffusion pour le champ sonore . . . 167
5.2.1.4 Mise en évidence numérique de la diffusion dans une salle . . . 169
5.2.2 Modélisation des sources acoustiques dans le modèle de diffusion . . . 171
5.2.2.1 Source volumique . . . 171
5.2.2.2 Source surfacique . . . 171
5.2.3 Conditions aux limites du modèle de diffusion . . . 171
5.2.3.1 Absorption acoustique uniforme au niveau des parois . . . 172
5.2.3.2 Absorption acoustique non uniforme au niveau des parois . . . 172
5.2.3.3 Cas des absorptions élevées . . . 172
5.2.3.4 Transmission acoustique à travers une paroi . . . 173
5.2.4 Prise en compte de l'encombrement dans le modèle de diffusion . . . 173
5.2.5 Extension du modèle de diffusion pour des salles non-diffuses . . . 174
5.2.6 Prise en compte de l'atténuation atmosphérique . . . 175
5.2.7 Relation avec la théorie classique des champs diffus . . . 175
5.3 Applications et validation du modèle de diffusion . . . 177
5.3.1 Mise en forme numérique du modèle de diffusion . . . 177
5.3.2 Champ sonore dans une salle avec des réflexions diffuses . . . 179

5.3.2.1 Salles cubiques . . . 179
5.3.2.2 Couloirs . . . 182
5.3.2.3 Locaux plats . . . 182
5.3.3 Champ sonore dans une salle avec des réflexions mixtes . . . 182
5.3.4 Champ sonore dans des salles couplées . . . 187
5.3.4.1 Comparaison avec la théorie statistique . . . 187
5.3.4.2 Validation expérimentale . . . 187
5.3.5 Champ sonore dans des locaux encombrés . . . 192
5.3.5.1 Validation numérique . . . 192
5.3.5.2 Validation expérimentale . . . 193
5.4 Conclusion . . . 197

Chapitre 6 – Conclusions et perspectives **199**

Chapitre A – Publications : méthodes numériques **201**

Chapitre B – Publications : expérimentations **261**

Chapitre C – Publications : diffusion en acoustique urbaine **303**

Chapitre D – Publications : diffusion en acoustique des salles **339**

Bibliographie **351**

Acronymes **363**

Table des figures

2.1 Principe de la méthode des sources-images . . . 20
2.2 Illustration des méthodes du tracé de rayons et de faisceaux sonores . . . 22
2.3 Illustration de la méthode de radiosité . . . 23
2.4 Propagation des phonons dans une salle réverbérante . . . 26
2.5 Illustration de la méthode des particules (équation de Boltzmann) . . . 28
2.6 Illustration de la méthode des particules (processus de Markov) . . . 30
2.7 Illustration de la méthode des particules (processus de Markov) . . . 30
2.8 Illustration de la méthode des particules (équation de diffusion) . . . 32
2.9 Illustration de la méthode des particules (théorie des probabilités) . . . 33

3.1 Illustration du phénomène de diffusion . . . 40
3.2 Représentation géométrique du critère de Rayleigh . . . 42
3.3 Critère de Rayleigh . . . 43
3.4 Illustration de la réflexion du son par une façade . . . 43
3.5 Angle d'incidence sur une façade . . . 44
3.6 Décomposition d'une façade de type Poissonnienne en éléments de base . . . 45
3.7 Limite champ proche-champ lointain pour une façade . . . 47
3.8 Ellipsoïde de Fresnel . . . 48
3.9 Ellipsoïde (image) de Fresnel . . . 49
3.10 Représentation des zones de Fresnel . . . 49
3.11 Représentation des zones de Fresnel sur une façade . . . 50
3.12 Centre de la première zone de Fresnel . . . 51
3.13 Surface des zones de Fresnel . . . 52
3.14 Première zone de Fresnel . . . 54
3.15 Surface de la première zone de Fresnel . . . 55
3.16 Géométrie élémentaire d'une réflexion par une façade . . . 57
3.17 Loi de réflexion . . . 59
3.18 Distribution des angles de réflexion (1) . . . 60
3.19 Distribution des angles de réflexion (2) . . . 64
3.20 Diffraction par une surface rugueuse . . . 65
3.21 Distribution des angles de réflexion (3) . . . 67
3.22 Modèle élémentaire d'un quartier . . . 68
3.23 Processus de diffusion dans le milieu . . . 70
3.24 Processus de diffusion avec une loi de réflexion uniforme . . . 71
3.25 Processus de diffusion avec une loi de réflexion de Lambert . . . 71
3.26 Processus de diffusion avec une loi de réflexion semi-diffuse . . . 72
3.27 Exemple de géométries urbaines . . . 74
3.28 Géométrie de la rue dans le cadre des simulations . . . 75
3.29 Champ sonore sur la ligne longitudinale de la rue ($d = 0$, $\alpha = 0$) . . . 77
3.30 Champ sonore sur la première ligne transversale de la rue ($d = 0$, $\alpha = 0$) . . . 78

3.31 Champ sonore sur la seconde ligne transversale de la rue ($d = 0$, $\alpha = 0$) . . . 79
3.32 Photos de façades . . . 82
3.33 Modèle de façade . . . 83
3.34 Diffraction et transmission acoustique par une fenêtre . . . 84
3.35 Bilan d'énergie dans une ouverture . . . 88
3.36 Géométrie du champ lointain. . . . 90
3.37 Calcul d'intégrales par des méthodes de quadratures . . . 95
3.38 Convergence du champ acoustique diffracté . . . 97
3.39 Champ de pression total devant la facade lorsque l'embrasure est ouverte . . . 99
3.40 Champ de pression diffracté par l'embrasure lorsque l'embrasure est ouverte . . . 100
3.41 Champ de pression dans l'embrasure lorsque l'embrasure est ouverte . . . 101
3.42 Géométrie d'un balcon dans une façade. . . . 101
3.43 Champ de pression devant une façade et à l'intérieur d'un balcon . . . 102
3.44 Champ de pression devant une façade et à l'intérieur d'un balcon . . . 103
3.45 Loi de réflexion d'un balcon . . . 104
3.46 Comparaison de lois de réflexion . . . 106
3.47 Photographie d'une maquette au 1/5 d'une façade . . . 107
3.48 Système expérimental pour la mesure de la loi de réflexion d'une façade . . . 109
3.49 Zone active de la maquette . . . 111
3.50 Réflexion du son par une façade . . . 112
3.51 Comparaison de mesures réalisées sur une maquette de façade . . . 113
3.52 Configurations de mesure. . . . 114
3.53 Illustration de lois de réflexion mesurées sur une maquette de façade . . . 115

4.1 Propagation de particules sonores . . . 121
4.2 Représentation de l'espace des phases . . . 123
4.3 Diagrammes polaires des lois de réflexion . . . 126
4.4 Diagrammes polaires de différentes lois de réflexion . . . 127
4.5 Approximation par un processus de diffusion (cas 1) . . . 129
4.6 Approximation par un processus de diffusion (cas 2) . . . 129
4.7 Modélisation d'une rue étroite . . . 130
4.8 Évolution du coefficient de diffusion (réflexion non rasante) . . . 135
4.9 Uniformité du champ sonore dans une section de rue (cas 1) . . . 138
4.10 Uniformité du champ sonore dans une section de rue (cas 2) . . . 139
4.11 Comparaison modèle/simulation pour des réflexions non rasantes (cas 1) . . . 141
4.12 Comparaison modèle/simulation pour des réflexions non rasantes (cas 2) . . . 142
4.13 Décomposition du trajet d'une particule . . . 143
4.14 Comparaison modèle/simulation pour des réflexions rasantes (Lambert) . . . 145
4.15 Comparaison modèle/mesure pour les temps de réverbération dans une rue . . . 146
4.16 Comparaison modèle/mesure pour les niveaux sonores dans une rue . . . 146
4.17 Modélisation du milieu de propagation . . . 150
4.18 Comparaison des configurations pour $n = 2$, $d = 0$, $2L = 4$ m . . . 151
4.19 Comparaison des 3 configurations pour $n = 2$, $d = 0$, $2L = 4$ m, à 15 m . . . 152
4.20 Comparaison des 3 configurations pour $n = 4$, $d = 0.7$, $2L = 10$ m, à 15 m . . . 152
4.21 Rue en « U » : décroissances longitudinales pour 3 couples de valeur (K, h) . . . 154
4.22 Rue en « U » à section variable : vue de dessus . . . 155
4.23 Cartographie sonore horizontale dans la rue en « U » à section variable . . . 155
4.24 Décroissance sonore suivant un axe dans la rue en « U » à section variable . . . 156
4.25 Intersection de deux rues en « U » : vue de dessus . . . 157
4.26 Cartographie sonore d'une intersection : coupe horizontale . . . 157

4.27 Décroissance sonore à travers une intersection, suivant deux axes 158
4.28 Intersections de trois rues en « U » : vue de dessus 158
4.29 Cartographie sonore horizontale de 2 intersections 159
4.30 Décroissance sonore à travers 2 intersections, suivant un axe particulier 160
4.31 Décroissance temporelle du niveau sonore aux points d'observation 160
4.32 Cartographie sonore horizontale de 2 intersections, avec 2 sources 161

5.1 Analogie entre la diffusion dans une salle et la diffusion dans un milieu diffusant 166
5.2 Mise en évidence du processus de diffusion dans des couloirs 170
5.3 Décroissance sonore dans un couloir 170
5.4 Prise en compte de l'atténuation atmosphérique dans le modèle de diffusion 176
5.5 Illustration de l'application du modèle avec le logiciel COMSOL Multiphysics™ 178
5.6 Niveau sonore en régime permanent dans une salle cubique 180
5.7 Temps de réverbération dans une salle cubique 181
5.8 Validation exp. du modèle dans une salle réverbérante (géométrie) 183
5.9 Validation exp. du modèle dans une salle réverbérante (résultats) 184
5.10 Temps de réverbération dans l'axe d'un couloir 185
5.11 Niveau sonore dans un local plat 185
5.12 Niveau sonore dans un local plat vide 186
5.13 Différence des niveaux sonores entre deux salles couplées 188
5.14 Comparaison du modèle de diffusion avec la théorie statistique (salles couplées) 189
5.15 Configuration de mesure dans deux salles couplées 190
5.16 Différence moyenne des niveaux sonores entre deux salles couplées 191
5.17 Niveau sonore dans deux salles couplées 192
5.18 Évolution du temps de réverbération à travers une surface de couplage 193
5.19 Niveau sonore dans une salle encombrée 194
5.20 Temps de réverbération dans une salle encombrée 195
5.21 Niveau sonore dans un local encombré 196

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Parcours scientifique et activités de recherche

1.1.1 Déroulement de carrière

Depuis le début de mon activité scientifique, mes travaux de recherche ont presque essentiellement porté sur l'acoustique urbaine, avec des applications en acoustique des salles[1]. Initiés pendant ma thèse (1994-1998) au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613 (LAUM), intitulée « *Modélisation des champs diffus par une équation de diffusion : Application à l'acoustique des salles et à l'acoustique urbaine* » [191], ces travaux se sont ensuite poursuivis dans le cadre de mes fonctions de Chargé de Recherche au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), au sein de la Division Entretien, Sécurité et Acoustique des Routes (ESAR) (Section Acoustique Routière et Urbaine (ARU)), depuis 1998.

1.1.2 Problématique du « bruit urbain »

Le principal objectif de ces travaux est d'apporter une meilleure compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans la propagation du son en milieu urbain, notamment afin d'améliorer la pertinence des modèles prévisionnels. En effet, en se replaçant dans un contexte plus législatif, notamment depuis la loi n°92-1444 du 31 décembre 1992, dite loi « bruit »[2], premier texte global en la matière, les pouvoirs publics se sont sérieusement penchés sur la réduction des nuisances sonores, notamment en milieu urbain, mais également sur l'amélioration du cadre de vie des citadins à travers l'amélioration de la qualité des ambiances sonores urbaines. Si le premier aspect, qui repose avant tout sur des « connaissances physiques », se traduit bien souvent par des arrêtés fixant des seuils réglementaires d'émission et de réception acoustique[3], le second aspect demeure toutefois plus difficile à appréhender, puisqu'il fait appel aux sciences sociales et humaines, ainsi qu'à la psychologie de l'environnement, donc à des connaissances intrinsèquement « non-exactes ».

Au niveau européen, la directive européenne 2002/49/CE sur l'évaluation et la gestion du bruit dans l'environnement a confortée cette prise en compte des nuisances sonores, en permettant une évaluation harmonisée dans les vingt-cinq États européens, de l'exposition au bruit dans l'environnement, au moyen

1. La modélisation des champs sonores en acoustique urbaine est très proche de celle des champs sonores en acoustique des salles. Même si nos applications ont été très orientées « acoustique urbaine », la plupart de nos travaux ont concerné simultanément les deux domaines.

2. Également appelée loi « Royal », *« Cette loi constitue sans doute le premier effort notable de formulation d'un texte fondateur renforçant la législation existante sans forcément remanier ni remplacer les textes précédents »* . Source Centre d'Information et de Documentation sur le Bruit (CIDB) : `www.CIDB.org`. Détail de la loi en ligne à l'adresse `http://www.legifrance.gouv.fr/texteconsolide/UPEFM.htm`.

3. Ces lois se traduisent également par une meilleur prise en compte des nuisances sonores dans les documents de référence des villes : Plan Local d'Urbanisation (PLU), Plan de Déplacement Urbain (PDU), Plan d'Occupation des Sols (POS), Schéma de Cohérence Territoriale (SCoT), etc.

de cartes de bruit stratégiques[4]. Dans le cadre de cette directive, les grandes agglomérations de plus de 250 000 habitants devront ainsi réaliser au plus tard en 2006 leurs cartes de bruit, puis définir en 2007 leurs plans d'action. Dès 2012-2013, les grandes agglomérations seront rejointes par les villes de plus de 100 000 habitants. L'élaboration de ces cartes de bruit constitue donc un enjeu majeur pour les villes, avec des impacts socio-économico-environnementaux évidents. D'un point de vue pratique, la réalisation de ses cartes fait appel à des méthodes de calcul bien définies, et notamment à la « nouvelle méthode de prévision du bruit-routes-1996 »[5] pour les infrastructures routières. Il est en effet important de noter que seules les sources sonores routières de type véhicules légers et trains routiers sont considérées dans les cartes de bruit (avec le cas échéant le bruit ferroviaire et le bruit des avions), laissant de coté d'autres sources sonores prépondérantes en milieu urbain, tels que les deux-roues motorisés, les bruits de chantier, les transports en commun (bus, tramway), les sources d'origine humaine, etc.

Cette présentation succincte des aspects réglementaires souligne donc trois points importants. D'une part, compte tenu des conséquences qu'elles pourraient engendrer, il est impératif que ces cartes de bruit soient les plus « justes » possible. Compte tenu des méthodes de calcul utilisées et de leur intégration dans les logiciels de calcul, on peut en effet s'interroger sur la pertinence des résultats, et ce d'autant plus que les incertitudes[6] en sont souvent omises. Par ailleurs, la représentativité de ces cartes de bruit en milieu urbain peut également nous interpeller, dans la mesure où une grande partie des sources spécifiquement urbaines n'y sont pas représentées. Enfin, la représentation de la gène (autrement appelée « nuisance », ou « confort » suivant les domaines d'étude) n'est pas systématiquement corrélée avec les indicateurs physiques que présentent ces cartes, tels que niveaux sonores équivalents.

1.1.3 Organisation des travaux de recherche

Nos travaux de recherche se sont donc organisés autour de ces trois problématiques « émission », « propagation » et « réception », avec des contributions très différentes :

- **La caractérisation et la modélisation des sources sonores urbaines, et leur interaction avec les aménagements urbains.** Sur cet aspect, il s'agit principalement d'un travail d'encadrement d'un projet de recherche mené par plusieurs unités[7] du Réseau Scientifique et Technique du ministère en charge de l'équipement (RST), dans le cadre de l'opération de recherche 11F022 du LCPC *« Aménagement et ambiances urbaines »* (2002-2004). Ces travaux ont ainsi permis d'apporter de nouvelles connaissances sur des sources sonores urbaines (deux-roues motorisés et tramways), ainsi que sur quelques sources sonores d'origine humaine (écoles, marchés, rues piétonnes). Les principaux résultats de cette opération sont disponible dans l'ouvrage [196]. Un travail de recherche, plus personnel, a également été entrepris plus récemment sur la modélisation de l'impact sonore des aménagements urbains. En particulier, nous travaillons sur le développement d'un outil logiciel permettant de modéliser l'impact sonore des véhicules légers dans des giratoires, des zones à vitesse limitée, des chicanes, etc. Un travail préliminaire a d'ailleurs été publié dans la référence [198], mais l'essentiel des travaux sur le sujet est actuellement en cours.
- **La caractérisation et la modélisation des ambiances sonores urbaines.** Là encore, il s'agit surtout d'un travail d'encadrement, dans le cadre de l'opération de recherche citée plus haut. Nous noterons toutefois un travail plus personnel sur le développement d'un protocole d'enquête et de

4. Ces cartes de bruit sont destinées à prévenir et à réduire les bruits excessifs au moyen de plans d'action, à protéger les zones calmes, à faire en sorte que l'information et la participation du public soient au cœur du processus. Source CIDB : `www.CIDB.org`. Détail de la directive et de son application en France sur le site internet du Ministère de l'Écologie et du Développement Durable (MEDD) : `http://www.ecologie.gouv.fr/rubrique.php3?id_rubrique=789`.

5. L'arrêté du 4 avril 2006 relatif à l'établissement des cartes de bruit et des plans de prévention du bruit dans l'environnement fixe la méthode d'élaboration des cartes de bruit. Détail de l'arrêté en ligne : `http://www.ecologie.gouv.fr/IMG/pdf/joe_20060405_0081_0039.pdf`.

6. Les logiciels de cartographie produisent des niveaux sonores, sans exprimer les incertitudes associées : incertitude des modèles, incertitudes des mesures, etc.

7. Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées (LRPC) et Centre d'Études Techniques de l'Équipement (CETE).

mesure pour la caractérisation des ambiances sonores urbaines. Ce protocole a été réalisé à partir des travaux de thèse de M. Raimbault [211], et a été largement utilisé dans le RST. Les principaux résultats sur la caractérisation des ambiances sonores urbaines de quelques sites représentatifs devraient être publiés courant 2006.

– **La modélisation de la propagation du son en milieu urbain.** Cet axe de recherche constitue l'essentiel de nos activités de recherche depuis 1994. Nos travaux ont consisté avant tout à mieux appréhender les phénomènes mis en jeu dans la propagation du son en milieu urbain (les réflexions diffuses de façade notamment), et à proposer des modèles de propagation plus adaptés à la complexité de la morphologie architecturale urbaine. Au cours de ce travail, nous avons ainsi développé un modèle de propagation qui s'applique aussi bien à l'acoustique urbaine, qu'à l'acoustique des salles. Ce document se focalisera essentiellement sur ces travaux.

Il est important de replacer nos travaux dans un cadre de recherche beaucoup plus général :

– Ces travaux ont d'abord été initiés sous l'impulsion du Centre de Recherche Méthodologique d'Architecture, UMR CNRS 1563 (CERMA) de l'École d'Architecture de Nantes[8], dans le cadre de la création en 1994 de la **Fédération de Recherche 73 du CNRS « Physique et images de la Ville » (FR73)**. Ce regroupement de laboratoires, avec notamment pour la partie « acoustique »[9], le LAUM, le LCPC et le CERMA, avait été créé sous l'égide du Programme Interdisciplinaire de Recherche sur la Ville (PIR-Ville) du CNRS (1994-1998). Plus précisément, le projet de recherche, intitulé *« Vers un logiciel prédictif des ambiances sonores urbaines »* , visait à produire de nouvelles connaissances en matière d'émission sonore urbaine, de propagation du son en milieu urbain, d'ambiances sonores urbaines et de morphologie urbaine. A la fin du PIR-Ville en 1998, les recherches de la FR73 ont donné lieu à un autre projet (1999-2001) sous l'égide du PREDIT, intitulé *« Étude du traitement des ambiances sonores à l'aide de méthodes simplifiées appliquées à des configurations urbaines »* , auquel nous avons également participé.
– **Au niveau du LCPC**, nos travaux de recherche se sont inscrits dans le cadre de l'opération de recherche 11F022 *« Aménagement et ambiances urbaines »* (2002-2004), dont j'ai assuré l'animation pour la partie « acoustique ». Depuis 2006, nos travaux s'inscrivent dans une nouvelle opération, *« Prévoir le bruit en milieu urbain »* (opération 11M061, 2006-2009), co-animée avec G. Dutilleux du Laboratoire Régional des ponts et chaussées de Strasbourg (LRS). Si dans le cadre la première opération, les résultats ont apporté une meilleure compréhension des phénomènes physiques et un nouveau modèle de propagation, dans la nouvelle opération, nous nous focalisons beaucoup plus sur le développement d'outils opérationnels, tels que des logiciels pour le calcul de l'impact sonore en milieu urbain.
– En parallèle à ces opérations de recherche, ces travaux s'inscrivent également au niveau national dans le cadre du **Groupement de Recherche CNRS 2493 « Bruit des transports » (GdR)**[10]. En particulier, j'ai assuré la co-animation de la thématique *« Spécificité du bruit des transports dans l'espace urbain »* de 2003 à 2005. Enfin, au niveau régional une partie de nos travaux s'intègrent dans le projet de recherche de l'**Institut de Recherche des Sciences et Techniques de la Ville**[11] (IRSTV), notamment dans le projet de recherche fédératif *« Ambiances sonores urbaines »* , dont j'assure l'animation avec P. Woloszyn[12] depuis 2005.

Au niveau contractuel, la plupart de ces travaux de recherche a été réalisée dans le cadre de **deux projets PREDIT 2** (1999-2000 et 2000-2001) financés par l'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de

8. Nouvelle appellation : École Nationale Supérieure d'Architecture de Nantes (ENSAN).
9. D'autres domaines étaient également représentés.
10. Plus d'informations sur le site du GdR : `http://www.GdR2493.cnrs-mrs.fr/`.
11. Ce groupement de laboratoires et d'organismes de recherche, en cours de création, est le résultat de la transformation de la FR73 en Institut de recherche (avec un élargissement du nombre de partenaires).
12. Chargé de recherche CNRS au laboratoire CERMA de l'ENSAN.

l'Énergie (ADEME) et le Ministère de l'Environnement, puis plus récemment dans le cadre d'un **projet PREDIT 3** *« Effets de la réflexion diffuse des façades sur la propagation acoustique et sur la représentation de l'environnement sonore en milieu urbain »* (2003-2005), financé par le MEDD, et dont j'ai assuré le pilotage. Enfin, une importante collaboration, financée en partie par l'ADEME, a été entreprise depuis 2002 avec le Laboratoire d'Étude des Phénomènes de Transfert Appliqués au Bâtiment (LEPTAB) de l'Université de La Rochelle, sur le développement d'un code de calcul pour la modélisation des champs sonores en acoustique du bâtiment[13].

1.2 Présentation du document

Comme nous l'avons évoqué plus haut, il est difficile d'appréhender la propagation du son en milieu urbain sans s'intéresser simultanément au cas de l'acoustique des salles : les phénomènes de réflexion, d'absorption, de diffusion acoustique, etc., sont les mêmes ; les modèles et les approches sont donc très similaires dans les deux cas. Par ailleurs, par manque d'information et de données expérimentales pour valider les approches « urbaines » au début de nos travaux, nous avons presque systématiquement choisi d'appliquer nos modèles, d'abord à l'acoustique des salles, puis à l'acoustique urbaine. Dans ce document, nous présentons donc les deux aspects. Pour des raisons pratiques, nous avons également fait le choix de ne pas tout présenter, pour nous focaliser uniquement sur la modélisation des champs sonores en acoustique architecturale et urbaine. Les aspects expérimentaux (mesure sur maquette [203], mesure *in situ* [200]) et les aspects numériques [193, 195], qui ont été une part importante de notre travail, ne sont pas détaillés dans le corps du document, mais présentés dans les publications jointes en annexes B et A.

Dans le chapitre 2, nous proposons d'abord un état de l'art sur la modélisation des champs sonores en acoustique architecturale et urbaine, en insistant notamment sur les modèles utilisant une approche particulaire, approche que nous reprenons par la suite. Nous montrons la multiplicité des modèles, ainsi que leurs avantages et limitations. A l'issue de ce travail, nous montrons qu'il n'existe pas d'approche réellement adaptée à la complexité de la morphologie urbaine et des nombreux phénomènes physiques mis en jeu (diffusion par les façades et les objets présents dans le milieu de propagation, effets micrométéorologiques, etc.). Plus globalement, il n'existe pas d'approche générale « unique » qui puisse s'appliquer à l'ensemble des situations rencontrées aussi bien en acoustique des salles qu'en acoustique urbaine (couloirs, salles couplées, rues, quartiers, etc.) alors que les phénomènes sont les mêmes. Cette recherche d'un modèle « générique » a donc été l'une des motivations de notre travail.

Parmi les phénomènes ayant un effet sur la propagation du son en milieu urbain, la diffusion de façade est sans doute le plus important. Le chapitre 3 présente donc une étude à la fois qualitative et quantitative sur ce phénomène de diffusion, résultant des multiples diffractions et réflexions des ondes sonores sur les irrégularités de façades. Nous montrons ainsi que ces effets de diffusion peuvent engendrer des comportements particuliers de la propagation du son en milieu urbain, en termes d'atténuation sonore et de réverbération dans une rue. Nous montrons également que dans certains cas, le processus classique de « propagation du son » peut se ramener à un « processus de diffusion de l'énergie », au sens de l'existence d'une équation de diffusion.

Dans le chapitre 4, nous appliquons ce résultat, en proposant d'abord un modèle de transport d'énergie sonore, puis un modèle de diffusion d'énergie dans une rue. Ces travaux sont fondés sur une approche énergétique « particules sonores », qui permet d'intégrer le phénomène de diffusion par les façades directement dans les conditions aux limites du problème. Nous montrons ainsi que le champ sonore dans une rue peut être modélisé par une équation de diffusion, dont le coefficient de diffusion est donné par la morphologie urbaine (largeur des rues et lois de réflexion des façades). Cette approche est ensuite

13. Projet de recherche *« Nouvelle méthode de prévision du bruit par analogie avec la théorie de la diffusion et validation dans les locaux couplés »* , de 2003 à 2005, dirigé par A. Sakout du LEPTAB.

validée par comparaison avec des simulations numériques et des données expérimentales. Une mise en forme numérique du modèle, nécessaire pour obtenir un outil opérationnel, est également proposée.

Une approche similaire est aussi présentée dans le cadre de l'acoustique des salles (chapitre 5). En se basant cette fois sur une analogie entre la diffusion de paroi et la diffusion d'une particule élémentaire dans un milieu diffusant, constitué de particules cibles, nous montrons là encore que le champ sonore peut être modélisé par une équation de diffusion. Une mise en forme numérique est également proposée et montre l'intérêt de l'approche face à des méthodes plus classiques, comme celles du tracé de rayons. Dans ce même chapitre nous présentons des extensions du modèle, pour prendre en compte d'autres phénomènes, comme les réflexions mixtes au niveau des parois (diffuses et spéculaires), l'atténuation atmosphérique, la présence d'encombrements, et la transmission acoustique. Enfin, une part importante de ce chapitre est consacrée à la validation de ce modèle dans des configurations très diverses (salles de cours, couloirs, locaux plats, locaux couplés, avec ou sans encombrement).

Finalement, le chapitre 6 conclut nos travaux en acoustique des salles et urbaine, et en présente les principales perspectives.

Chapitre 2

Modélisation des champs sonores en acoustique architecturale et urbaine : état de l'art

2.1 Introduction

La modélisation des champs sonores en acoustique des salles et en acoustique urbaine est un problème extrêmement difficile. En effet, la répartition de l'absorption au niveau des surfaces [66], la forme des salles ou des rues, les problèmes de couplage entre différentes enceintes [4, 175, 248], la présence d'ouvertures, les effets de diffraction et d'interférences sur les parois du domaine de propagation [45, 5, 159, 222, 250], la présence d'encombrements ou d'obstacles dans le milieu [96, 131, 183], les effets micro-météorologiques [88, 178], les effets de sol et des discontinuités d'impédance [10, 11], etc. concourent à donner naissance à un champ sonore dont la détermination est très complexe. Le milieu de propagation est le siège d'un mélange énergétique à l'origine, notamment en acoustique des salles, de la perception auditive du lieu [232]. Depuis les premiers travaux de W.C. Sabine [9, 212] qui ont posé, dès le début du XX^{e} siècle, les bases scientifiques de l'acoustique des salles, les acousticiens se sont attachés à décrire au mieux les différents phénomènes physiques qui interviennent lors de la propagation du son dans les espaces clos ou semi-clos. Les approches théoriques sont multiples, chacune avec ses propres limitations et difficultés de mise en oeuvre. A l'inverse, les approches opérationnelles sont beaucoup moins nombreuses, en particulier pour le milieu urbain.

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons l'essentiel des démarches connues, en insistant notamment sur celles qui ont donné lieu à des outils opérationnels. A chaque démarche, nous associons également une liste de références bibliographiques, non-exhaustive en ce qui concerne l'acoustique des salles, mais en principe beaucoup plus complète concernant l'acoustique urbaine. Au fur et à mesure de cette présentation, nous insisterons sur les principales limitations de ces méthodes, qui seront ensuite regroupées et discutées au paragraphe 2.3.

Au terme de cette description nous évoquerons l'intérêt du développement d'un modèle unique, prenant en compte l'ensemble des phénomènes physiques rencontrés lors de la propagation, aussi bien pour le milieu urbain, qu'en acoustique des salles.

2.2 Différentes approches en acoustique des salles et urbaines

2.2.1 Équation d'onde et théorie modale

Les méthodes de décomposition modale [12, 21, 22, 50, 164, 164, 173], couramment employées pour la recherche de solutions de l'équation des ondes ou d'Helmholtz dans des milieux clos, est difficile

à appliquer en acoustique des salles et en acoustique urbaine. En effet, cette démarche qui consiste à décomposer le champ sonore sur les modes propres de l'enceinte, est utilisée uniquement pour des géométries simples (souvent rectangulaires) dont les caractéristiques acoustiques, comme l'absorption acoustique, sont supposées uniformes au niveau des surfaces. De plus, les longueurs d'ondes doivent être de l'ordre des dimensions du milieu de propagation [134, 173]. Cependant, en acoustique architecturale, les longueurs d'onde rencontrées sont petites par rapport aux dimensions du milieu de propagation. Dans ces conditions, cette théorie ne convient plus en raison du nombre trop important de modes à prendre en compte pour décrire le champ sonore de manière précise [20].

Plus encore en milieu urbain, la résolution de l'équation d'onde ou la décomposition modale semble impossible du fait de la présence d'ouvertures notamment (toit et extrémités). Toutefois, Bullen et coll. [21, 22] ont proposé une approche à deux dimensions pour des rues de longueurs infinies (de manière à s'affranchir des ouvertures) constituées de façades parfaitement réfléchissantes, basée sur une décomposition du champ de pression en fonctions de Hankel du premier type. Cette approche a été appliquée à des rues en « U » de section variable, ainsi qu'en présence d'une intersection. En dépit des nombreuses hypothèses, les courbes d'atténuations sonores du modèle ont été comparées avec un bon accord à des données expérimentales sur maquette. Néanmoins la complexité de la méthode ne permet pas de la généraliser à des milieux urbains réels et la rend donc inutilisable en pratique.

2.2.2 Éléments de frontière, éléments finis, différences finies

Les méthodes numériques des éléments de frontière (BEM pour *Boundary Element Method*) [36], des éléments finis (FEM pour *Finite Element Method*) [61] ou des différences finies dans le domaine temporel (FDTD pour *Finite Difference - Time Domain*) s'avèrent, en pratique, impossibles à appliquer aux gammes de fréquence étendues rencontrées en acoustique architecturale (de 500 à 5 000 Hz) [45]. De plus, la description numérique de la morphologie des façades nécessiterait la création d'un maillage complexe. Dans ce cas, le nombre de nœuds deviendrait extrêmement élevé et conduirait à des temps de calcul très longs ou à la nécessité de recourir à des ordinateurs aux capacités énormes.

Récemment, Ögren et coll. ont proposé une approche numérique alternative, moins coûteuse numériquement, fondée sur des sources équivalentes (ESM pour *Equivalent Sources Method*) pour modéliser le rayonnement acoustique d'une rue en « U » (coupe d'une rue en deux dimensions) [178, 179]. La méthode repose sur la séparation du domaine de propagation en deux parties, la première étant constituée par l'intérieur de la rue, et la seconde étant définie par l'espace au-dessus de la rue. Le rayonnement au-dessus de la rue est alors modélisé par une intégrale de Rayleigh, tandis que le champ acoustique dans la rue est obtenu par une approche modale. Le couplage entre les deux approches est réalisé en considérant une distribution de sources sonores entre les deux domaines, et en assurant une continuité de la vitesse et de la pression acoustique. Les résultats sont relativement proches de ceux obtenus par une méthode BEM, mais avec des temps de calcul plus courts, dans la mesure où seule la frontière doit être maillée. Néanmoins, la méthode reste tout de même limitée aux basses fréquences (jusqu'à 1 600 Hz dans les articles de références), à des coupes de rues en deux dimensions et à des milieux de propagation homogènes.

Plus récemment encore, Heimann a proposé une approche cette fois en trois dimensions, basée sur la résolution de l'équation d'Euler linéarisée, par une méthode FDTD [88]. Dans cet article, le modèle est appliqué à l'étude de l'effet de masque par un bâtiment, en fonction de la forme de la toiture, de la nature du sol et des effets micro-météorologiques (vent et turbulence). L'intérêt de cette approche repose sur la possibilité de croiser facilement les effets micro-météorologiques dans le calcul du champ de pression acoustique, y compris pour des milieux de propagation inhomogènes et en mouvement. Néanmoins, la méthode reste limitée aux basses fréquences (250 Hz pour l'article cité en référence) pour des raisons de coût numérique. A noter, que pour diminuer ces temps de calcul, certains auteurs proposent maintenant de coupler la méthode FDTD à une méthode de propagation acoustique reposant sur l'équation parabolique (PE pour *Parabolic Equation*) [235].

La limitation majeure de toutes ces méthodes est clairement le temps de calcul, qui augmente considérablement avec la fréquence (en f^2 pour la méthode des sources équivalentes), et ce, en raison de la finesse du maillage nécessaire en haute fréquence (en $\lambda/6$ ou $\lambda/10$ en pratique, λ désignant la longueur d'onde). C'est d'ailleurs la raison pour laquelle ces méthodes sont souvent limitées à deux dimensions. Toutefois, avec l'évolution rapide de la puissance de calcul des ordinateurs, on peut toujours s'interroger sur le temps que peut encore tenir ce type de limitation.

2.2.3 Théorie classique de la réverbération

La théorie classique (ou théorie statistique) de la réverbération, dont les fondements datent des travaux de W.C. Sabine [134, 173, 212], est couramment employée en acoustique des salles. La méthode est énergétique, et décompose la densité d'énergie du champ sonore, en la somme du champ direct et du champ réverbéré, chacun étant défini par la puissance de la source, la position du récepteur par rapport à la source, et l'aire d'absorption moyenne. Proche de la source, le champ direct domine et n'est pas affecté par les limites du domaine. Cette partie du champ est alors caractérisée par une décroissance, liée au caractère sphérique de l'onde (loi en $1/r^2$), avec une décroissance de -6 dB par doublement de distance. Au delà d'une distance « critique », les multiples réflexions des ondes sonores par les surfaces de l'enceinte sont à l'origine de la création d'un champ sonore diffus quasi-stationnaire, qui ne varie pas avec la distance source/récepteur. En régime impulsionnel, l'évolution temporelle du champ diffus montre une décroissance logarithmique linéaire proportionnelle au volume de la pièce et inversement proportionnelle à son aire d'absorption équivalente et de l'atténuation atmosphérique. A noter également que pour généraliser la théorie classique de la réverbération, certains auteurs [134] ont introduit le concept de libre parcours moyen.

En milieu urbain, la présence d'ouvertures ne permet pas de définir un « volume de propagation », ni le libre parcours moyen : une onde sonore peut en effet « partir » à l'infini sans rencontrer d'obstacle. Pour autant le phénomène de réverbération existe bel et bien en milieu urbain [124, 222, 250]. Son origine se justifie par la présence de réflexions spéculaires et diffuses, par l'atténuation atmosphérique, par l'encombrement dans le milieu de propagation ainsi que par la dispersion des bâtiments. La théorie classique de la réverbération n'est donc pas applicable à première vue. Toutefois, en délimitant l'espace de propagation à la hauteur des bâtiments dans le cadre d'une unique rue, Schröder [216] et Yeow [251] ont pu appliquer la théorie statistique au calcul du temps de réverbération dans une rue.

Cependant, les limites de la théorie classique de la réverbération sont importantes. En effet, l'hypothèse d'un champ diffus n'est souvent pas vérifiée [149]. D'autre part, les résultats obtenus par cette théorie divergent des observations expérimentales à mesure que la forme de la salle s'écarte d'une géométrie cubique [81, 117]. Son utilisation est également restreinte à des milieux de propagation qui présentent une absorption faible et uniforme [93, 95]. De plus, l'utilisation de cette approche suppose que la décroissance énergétique est linéaire, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique, notamment dans le cas de salles couplées [248] et en milieu urbain [216], où apparaissent des courbes de décroissance à double pente. Dans le cas particulier des locaux couplés, des développements ont toutefois permis d'appliquer cette théorie, et ainsi d'établir des transmissions d'énergie d'une pièce à une autre en supposant l'énergie sonore uniforme dans chaque local [133, 43, 44]. Il est alors possible d'obtenir des ordres de grandeur de la différence de niveau sonore entre les deux salles, ou de la réverbération dans chacune des salles (avec éventuellement des doubles pentes de décroissance). La méthode n'est toutefois plus applicable dès que l'un des locaux est de forme allongée (*a fortiori* une rue) ou de forme complexe.

2.2.4 Méthodes des sources-images et des récepteurs-images

La méthode des sources-images (ISM pour *Image Source Method*) [2, 18, 113, 134] est issue de l'acoustique géométrique et repose sur des conditions de réflexion spéculaire au niveau des parois. Cette approche suppose que la longueur d'onde est plus petite que la plus petite des dimensions des parois, mais plus grande que les irrégularités présentes sur ces parois. On qualifie traditionnellement cette méthode

d'approche « haute fréquence », dont la limite inférieure est classiquement donnée aux alentours de quelques centaines[1] de Hertz.

Cette méthode énergétique est basée sur la construction de sources-images qui simulent l'effet des réflexions spéculaires successives de l'énergie sonore sur les parois de l'enceinte (figure 2.1) et s'applique assez bien pour calculer la densité d'énergie sonore dans un milieu de propagation clos ou partiellement clos. Ces sources-images sont construites de manière géométrique par symétrie par rapport aux parois du domaine [225]. Leur contribution en termes énergétiques à un point de réception fixé, est celle habituellement rencontrée dans le cas de la propagation en champ libre et suit alors une loi en $1/r^2$. Les effets d'absorption au niveau des murs sont simulés par une diminution de l'amplitude des sources-images proportionnelle au coefficient d'absorption des surfaces. A noter également qu'il existe aussi la méthode des récepteurs-images qui n'est autre que la réciproque de la méthode des sources-images. En ce qui concerne les applications en acoustique des salles, cette méthode est assez réductrice car les effets de diffraction par les angles et la diffusion par les parois sont assez souvent omis.

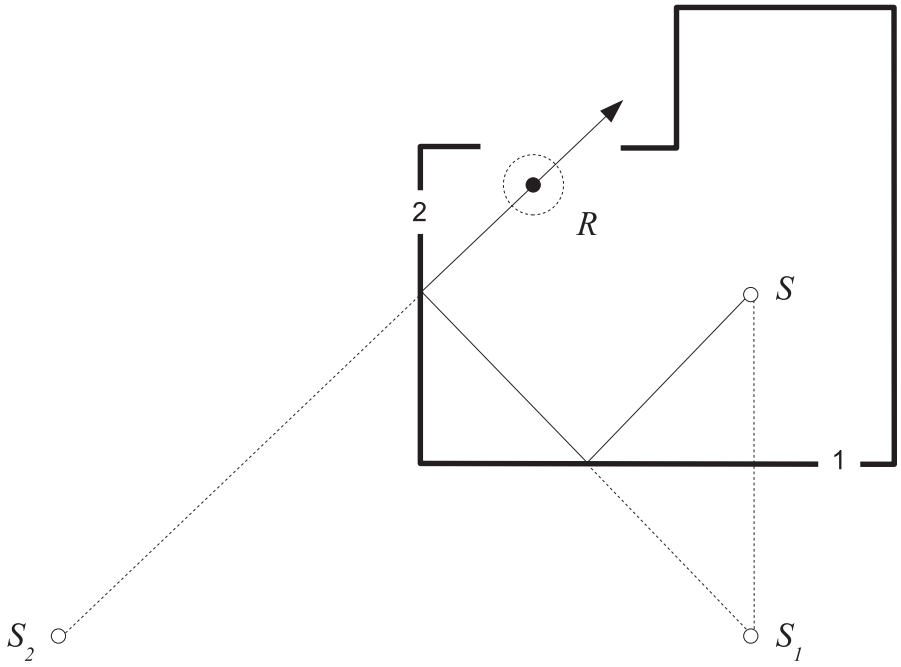


FIG. 2.1 — *Modélisation de la réflexion de l'énergie sonore en deux dimensions à l'aide de la méthode des sources-images. S désigne la source sonore (une voiture par exemple) et R le récepteur. La source-image S_1 est l'image de la source S par la paroi* 1 *(source-image d'ordre* 1*). La source-image S_2 est l'image de la source S_1 par la paroi* 2 *(source-image d'ordre* 2*). Les sources-images d'ordre supérieur à* 2 *ne sont pas représentées ici.*

En acoustique urbaine, Wiener et coll. [244], ont été le premier à appliquer la méthode des sources-images à la propagation du son dans une rue en « U », en distinguant le champ réverbéré issus des multiples réflexions spéculaires (somme des contributions d'une infinité de sources-images) et du champ direct (source réelle). Cette approche a ensuite été généralisée à un ensemble de rues en « U » constituant un quartier, par SCHLATTER [214], LEE [147] et DONAVAN [57]. Quelques années plus tard, VINOKUR [236] et SERGEEV [218] ont également proposé des formulations analytiques approchées du champ réverbéré pour un point d'observation et une source au milieu de la rue. Plus récemment, KANG [116, 117] a généralisé

1. Il est relativement difficile de déterminer une limite de validité exacte. La plupart des logiciels basés sur les méthodes des sources-images, des rayons sonores, etc., autorisent des calculs en prenant en compte les propriétés acoustiques des matériaux dès la bande d'octave 63 Hz, ce qui à notre avis est discutable.

l'approche, en régime stationnaire et impulsionnel, quelles que soient la position de la source et du récepteur.

Remarquant que les effets de réflexions diffuses sur les façades étaient responsables des écarts entre ces modèles et les mesures [159], Davies [49] a été le premier à associer un modèle de champ diffus, reposant sur une balance énergétique de l'énergie dans une rue, à ces méthodes de sources-images[2]. Ce modèle mixte de champ diffus et de sources-images a d'ailleurs été utilisé par la suite par Chew [30] pour modéliser avec succès le bruit du trafic routier entre deux bâtiments. Cette association d'un modèle de champ diffus avec la théorie des sources images a ensuite été reprise par d'autres auteurs. On citera notamment l'approche de Wu [246], intégrant le modèle de réflexion diffuse proposé par Chien et coll. [33] pour des surfaces rugueuses. D'autres auteurs ont proposé des modifications des méthodes des sources-images et des récepteurs-images pour intégrer les phénomènes d'interférences [157] ou les effets de diffraction sur les angles des bâtiments [180]. Dans ce dernier cas, il est intéressant de noter que le modèle a été validé par des comparaisons avec des données expérimentales issues de nos propres travaux [203].

Pour des géométries simples (une salle rectangulaire, un couloir, une rue en « U »), la détermination des sources-images étant aisée, le problème peut entièrement être décrit analytiquement. Pour des géométries plus complexes, la détermination des sources images est obtenue numériquement. Pour ce type d'environnement complexe, les tests de visibilité [3] peuvent cependant entraîner des temps de calcul importants. Pour des raisons pratiques, l'ordre des réflexions[4] à prendre en compte devient alors vite limité. La longueur de la réponse impulsionnelle calculée est donc courte, ce qui rend pratiquement impossible la simulation de la phase d'extinction du son pourtant nécessaire au calcul du temps de réverbération. Pour traiter ce dernier point, des méthodes d'extension ou de compensation [247] de la réponse impulsionnelle peuvent être utilisées, mais elles sont fondées sur des décroissances linéaires de l'énergie, c'est-à-dire sur les hypothèses de la théorie classique de la réverbération. Elles présentent donc les mêmes limitations (*cf.* §2.2.3).

2.2.5 Méthodes du tracé de rayons et de faisceaux sonores

Cette méthode du tracé de rayons (*ray-tracing methods*), développée initialement en acoustique des salles [113, 126, 130], a également été largement appliquée en acoustique urbaine [19, 37, 98]. La plupart des logiciels actuels de prévision en acoustique des salles comme en acoustique urbaine, est d'ailleurs basée sur cette approche. Cette méthode énergétique, qui repose sur les mêmes hypothèses que la méthode des sources-images, suppose que l'énergie sonore est distribuée à un certain nombre de rayons rectilignes émis à partir d'une source S et déviés de manière spéculaire lors de leur rencontre avec les parois du milieu de propagation (figure 2.2). Il s'agit donc là encore d'une approche « haute fréquence ». Le calcul de l'énergie sonore au niveau d'un volume récepteur (*i.e.* un point de mesure) est réalisé par comptage du nombre de rayons qui le traversent. Le problème majeur réside dans la définition de la taille de ce volume, le plus souvent une sphère. En effet, il doit être représentatif du récepteur réel mais doit également permettre de comptabiliser suffisamment de rayons sonores pour déterminer le niveau d'énergie de manière précise [80]. Pour éviter ce problème, le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB) a proposé une approche inverse dans le logiciel MITHRA (prévision acoustique en milieu extérieure), considérant le récepteur comme le point de départ du processus de tracé de rayons. Il est alors plus facile de déterminer si le rayon sonore rencontre une source sonore, et ainsi d'obtenir la contribution énergétique de cette source au point récepteur. Cette technique inverse est surtout adaptée au cas d'une ligne source. Pour une source ponctuelle, le problème reste le même.

2. Par principe, la méthode des sources-images ne permet pas de considérer des réflexions autres que spéculaires. La prise en compte des réflexions diffuses ne peut donc être réalisées qu'en ajoutant un modèle spécifique pour le champ diffus.

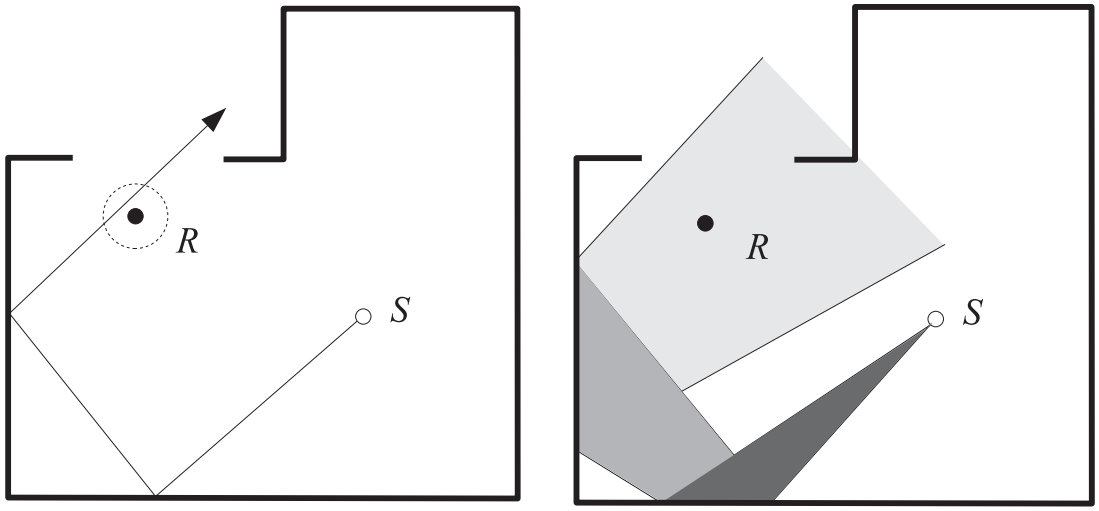
3. Les tests de visibilité ont pour but de déterminer la réalité physique des sources-images.

4. L'ordre des réflexions fixe le nombre maximum de réflexions de l'onde sonore à considérer lors des simulations. Ce choix est arbitraire et fixé par la précision recherchée des résultats.

Dans certaines approches, pour simuler les effets de diffusion par les surfaces, un tirage aléatoire permet de déterminer la direction du rayon réfléchi [139]. Le plus souvent ce tirage est conforme à la loi de LAMBERT ou parfois suivant une loi de réflexion uniforme [98]. Nous reviendrons sur ces lois dans le chapitre suivant.

Plus récemment, les méthodes reposant sur les rayons sonores ont laissé place à des méthodes de tracé de faisceaux (*beam tracing*), ayant la forme de cônes (*cone tracing*) ou de pyramides (*pyramidal beam*) [73, 226]. Ces méthodes sont plus précises mais également plus coûteuses en temps de calcul, notamment pour le suivi de chaque faisceau, puisqu'un même faisceau peut être réfléchi par plusieurs parois en même temps.

Enfin, des méthodes hybrides [125, 152, 237, 249] définies par un couplage de la méthode du tracé de rayons/faisceaux avec la méthode des sources-images ou de la radiosité (*cf.* §2.2.6), permettent une diminution des temps de calcul par rapport à la méthode des sources-images seule, en réduisant les tests de visibilité des sources.



(a) Méthode du tracé de rayons sonores (b) Méthode du tracé de faisceaux sonores

FIG. 2.2 — *Illustration des méthodes du tracé de rayons 2.2(a) et de faisceaux sonores 2.2(b). L'énergie au point R est calculée en comptabilisant l'énergie portée par le rayon ou le faisceau sonore issu de la source S.*

2.2.6 Méthode de la radiosité

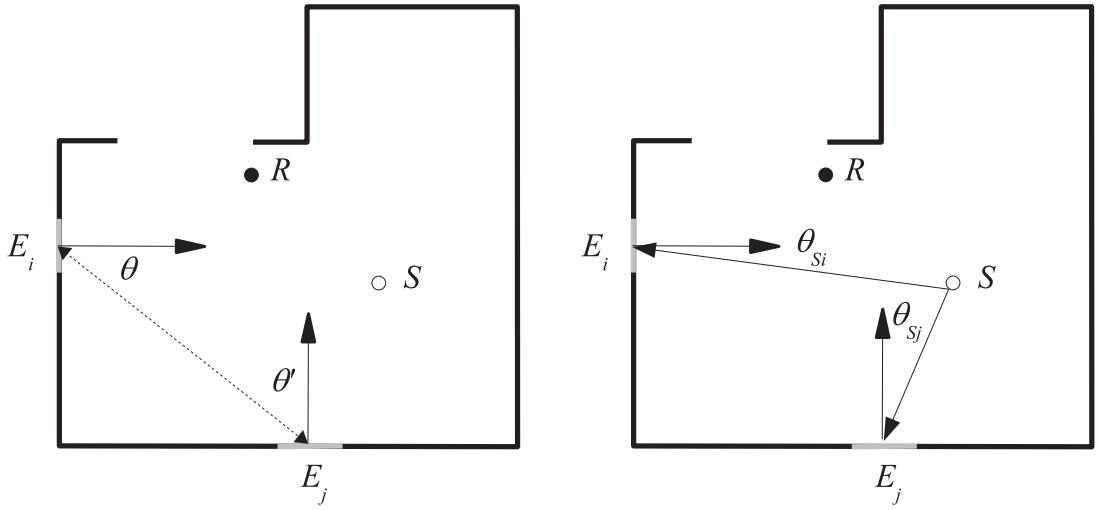
Dans la méthode de radiosité [25, 133, 134, 135], l'énergie sonore reçue par un élément de surface, délimitant un domaine, est restituée au milieu de propagation selon le principe du rayonnement de la chaleur. Les échanges énergétiques entre les différents éléments de surface sont exprimés à travers des facteurs de forme (figure 2.3). Pour des milieux de forme complexe, le bilan énergétique est décrit par une équation intégrale qui n'a malheureusement pas de solution analytique exacte. Le calcul est alors effectué de manière numérique en discrétisant les différentes parois du domaine en un nombre fini de surfaces planes, assimilées à des nœuds. Ces derniers forment un réseau dans lequel s'établit un transfert énergétique, qui peut être mis sous forme matricielle. Par construction, la méthode de radiosité est également une approche « haute fréquence ».

Cette méthode a été appliquée en acoustique urbaine principalement par KANG [118, 117] et a ensuite été validée avec des données expérimentales issues de nos propres travaux [203]. Ce modèle a ensuite été largement utilisé par KANG pour évaluer l'influence de différents paramètres (répartition de l'absorption,

largeur et hauteur des rues, nature des parois, effets d'intersections de rues) sur l'atténuation sonore et la réverbération dans une rue.

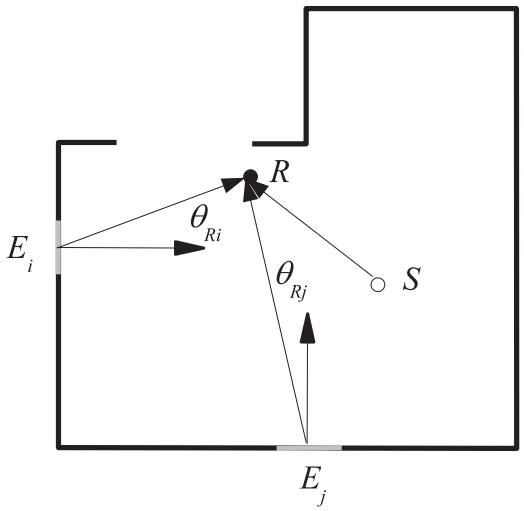
Par construction, ce modèle néglige les réflexions spéculaires, primordiales dans la caractérisation du champ sonore précoce. Pour être complet, il doit donc être associé à un modèle de sources-images ou de récepteurs images. Le Bot a d'ailleurs proposé une généralisation de la méthode de la radiosité, incluant les réflexions spéculaires *via* une technique de sources-images [143].

Cette approche de radiosité en acoustique est encore limitée à des géométries simples (salles rectangulaires, rue en « U », intersection de rues en « U »). Dans le cas de géométries plus complexes, la discrétisation des surfaces et le calcul des facteurs de forme entraînent des temps de calculs très longs.



(a) Calcul des facteurs de forme

(b) Initialisation des énergies



(c) Calcul de l'énergie au point récepteur

Fig. 2.3 — *Illustration de la méthode de radiosité. La surface du domaine est discrétisée en éléments de surface. (a) dans un premier temps, les échanges énergétiques entre chaque élément de surface E_i et E_j sont calculés à partir des facteurs de forme ; (b) l'état initial de chaque élément de surface est défini à partir de l'énergie émise par la source ; (c) l'énergie au point de réception est calculée en sommant les contributions de la source et des éléments de surface.*

2.2.7 Méthode numérique du suivi de particules sonores

Cette méthode, également énergétique et issue de l'acoustique géométrique (approche « haute fréquence »), est similaire sur le principe aux méthodes de tracé de rayons, mais permet de prendre en compte la plupart des phénomènes physiques participant à la propagation du son, à travers des procédures de tirage aléatoire. Bien que cette approche ait largement été développée dans le cadre de nos propres travaux, les premières études datent des années 80-90, en particulier avec celles de Stephenson [223, 225]. Ce dernier a, d'une part, pressenti l'énorme potentialité de la méthode pour modéliser des phénomènes complexes comme la diffraction, la réfraction et la diffusion par des méthodes de Monte-Carlo et, d'autre part, montrer que ce type d'approche est plus rapide que les méthodes de tracé de rayons [223]. Un autre élément intéressant tient au fait que ces méthodes de simulation sont très peu affectées par l'augmentation du nombre de sources dans le milieu, à l'inverse de la méthode des sources-images. De plus, ces méthodes sont simples à mettre en oeuvre dans des domaines aux formes complexes et permettent de prendre en compte un ordre de réflexion élevé [225].

Des simulations utilisant le concept de particules sonores ont ainsi été mises en oeuvre pour l'étude du champ sonore dans des salles de concert supposées vides [87, 90, 139, 217, 223, 224], et en milieu extérieur, pour étudier la répartition de l'énergie sonore dans des zones remplies d'objets diffractants comme des aires péri-urbaines [137], des forêts [151].

Bien que d'intérêt indéniable, notamment pour la prise en compte des phénomènes de diffraction et de diffusion, il faut reconnaître que cette méthode a été peu développée par la suite. Son utilisation dans des logiciels commerciaux est restée très marginale, de loin devancée par les méthodes basées sur les rayons sonores (*cf.* §2.2.5). Dans le cadre de nos propres travaux, nous avons proposé une approche numérique qui a largement été validée et qui pourrait donner lieu à un outil opérationnel ([195], *cf.* annexe A, page 202).

Il convient également de citer l'article très récent de Heimann et Gross [89], dans lequel un modèle à deux dimensions (AKU-MET) est présenté et appliqué à une étude sur le couplage des effets micro-météorologiques et des niveaux sonores dans une vallée étroite. Ce modèle très évolué permet de considérer la plupart des phénomènes physiques impliqués dans la propagation du son en milieu extérieur, tels que la réfraction (effets du vent et des gradients de température), les effets de sols, l'atténuation atmosphérique, les effets de turbulence et la diffraction. Par ailleurs, la pression acoustique « portée » par chaque particule est fractionnée en fonction de la fréquence et de l'émission acoustique. Il ne s'agit donc pas d'une approche énergétique, mais d'une approche « pression ». L'application de ce modèle à l'acoustique des salles et à l'acoustique urbaine paraît intéressante.

2.2.8 Modèles de transport de particules sonores (analytiques)

En parallèle à l'approche numérique, certains auteurs ont également proposé une démarche entièrement analytique et probabiliste[5]. Une étude approfondie de la littérature a mis en évidence l'intérêt d'une telle démarche et a confirmé nos propres orientations. Pour bien comprendre ces méthodes, nous présentons ci-après une bibliographie détaillée, réalisée dans le cadre de la thèse de Thierry Le Pollès [144]. Cette étude nous a permis de classer ces modèles en plusieurs catégories, en fonction des développements mathématiques considérés, à savoir :

- une équation de Boltzmann [136, 137] ;
- un processus de Markov [129, 128] ;
- une équation de diffusion [23, 132, 153, 191] ;

5. Il est important de bien noter la différence entre les modèles numériques basées sur une approche géométrique, et les modèles analytiques. Dans le premier cas, l'approche consiste à « suivre » individuellement le déplacement de particules sonores dans le milieu de propagation, à l'image de ce qui est fait avec les logiciels de tracé de rayons sonores. Dans le second cas, l'objectif est de modéliser la répartition d'un grand nombre de particules sonores, par des approches statistiques, se ramenant bien souvent à l'utilisation d'équations de transport ou de diffusion. Cela n'empêche toutefois pas d'avoir une résolution numérique des approches analytiques, comme nous le verrons aux chapitres 4 et 5.

– la théorie des probabilités (théorie de la limite centrale) [155, 156].

La plupart du temps, ces modèles sont appliqués pour décrire le champ sonore produit par une distribution aléatoire d'objets diffractants présents au sein du domaine de propagation. Ces objets diffractants peuvent être, selon les cas, des habitations, des diffuseurs placés dans des salles réverbérantes, des arbres ou encore des machines placées dans des halls industriels. Les effets de réflexion diffuse sur les parois, considérées planes, ne sont pas toujours pris en compte. La réflexion y est souvent traitée de manière spéculaire à l'aide de la méthode des classiques sources-images (ou équivalent). Afin de bien distinguer les différences entre ces approches et les développements que nous détaillerons dans la suite du document, il nous a semblé important de détailler les modèles rencontrés dans la littérature.

2.2.8.1 Approches analytiques basées sur l'utilisation de l'équation de Boltzmann

L'utilisation d'une équation de Boltzmann permet de décrire le champ sonore en termes de densité locale de particules. Son application à l'acoustique a été traitée uniquement par Kuttruff et appliquée dans le cas de salles réverbérantes [136] et de zones péri-urbaines [137]. Le modèle permet une description analytique précise du phénomène de transport des particules sonores.

Application au calcul du champ sonore dans des chambres réverbérantes [136] Dans cette application, Kuttruff utilise le concept de particule sonore pour déterminer le nombre optimum de diffuseurs à placer dans une chambre réverbérante afin d'éviter la présence d'ondes stationnaires et améliorer ainsi le mélange de l'énergie sonore. Le but est d'obtenir un champ sonore suffisamment uniforme pour pouvoir appliquer correctement les formules du temps de réverbération de la théorie classique (*cf.* §2.2.3) et en déduire ainsi le coefficient d'absorption α d'un matériau placé dans la chambre réverbérante.

Le milieu de propagation considéré ici, est une salle rectangulaire de hauteur H remplie de diffuseurs disposés de manière aléatoire. Les parois y sont totalement réfléchissantes excepté le sol où se situe le matériau absorbant à tester. Cette absorption est prise en compte de manière probabiliste par un coefficient d'absorption α qui représente la probabilité que la particule ne soit pas réinjectée dans le milieu après réflexion. Les réflexions spéculaires sur les murs parfaitement réfléchissants sont traitées par la méthode des sources-images (figure 2.4). Dans ce cas, les effets de diffusion sur les parois ne sont pas inclus dans le modèle. Les réflexions sur le sol absorbant sont prises en compte de manière analytique. Dans ces conditions, le transport des particules sonores dans la chambre réverbérante est équivalent à la propagation de particules sonores dans une couche infinie d'épaisseur $2h = 2H/\lambda$, formée par le réseau de salles, images de la salle réelle. Les diffuseurs étant disposés de manière aléatoire, le problème est axisymétrique par rapport à un axe perpendiculaire au réseau de salles images et peut donc être résolu dans une coupe transversale. La position de la particule sonore est alors repérée par la variable adimensionnée $\xi = x/\lambda$, où λ est le libre parcours moyen des phonons.

La propagation de l'énergie sonore dans la chambre réverbérante est modélisée par une marche aléatoire de particules sonores dans la couche d'épaisseur $2h$ remplie de particules cibles[6]. Les particules sonores subissent de nombreuses collisions sans absorption excepté en $\xi = +h$ et $-h$, limites du domaine où sont appliquées des conditions de type flux locaux, exprimant le flux de particules réfléchies en fonction du flux de particules incidentes. L'ensemble du processus est alors régi par une équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + f + \mu \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\rho}{4\pi}, \tag{2.1}$$

où $f(\xi, \mu, \tau)$ est la fonction de distribution à une particule et où

$$\rho(\xi, \tau) = 2\pi \int_{-1}^{1} f(\xi, \mu, \tau) d\mu, \tag{2.2}$$

6. Les particules cibles modélisent, ici, les diffuseurs présents dans le milieu de propagation. Après les chocs, les particules sonores sont réfléchies de manière isotrope par les diffuseurs.

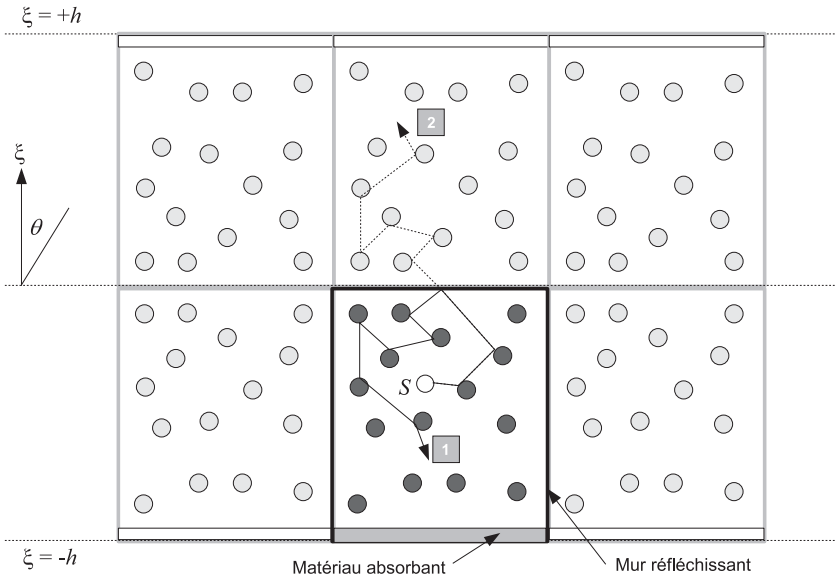


FIG. 2.4 — *Représentation du milieu équivalent pour la propagation des particules sonores dans une salle aux parois totalement réfléchissante (excepté le sol représenté en trait gras grisé) et remplie d'objets diffusants. Les réflexions sur les parois sont prises en compte par la méthode des sources-images tandis que les réflexions sur le sol sont décrites de manière analytique. La source S est omnidirectionnelle. Le trajet N^o1 représente le parcours réel d'une particule sonore dans une salle réverbérante. Le trajet N^o2 est l'image du trajet N^o1 dans la couche d'épaisseur $2h$.*

correspond à la densité locale de particules sonores, avec $\tau = c\,t/\lambda$ et où μ correspond à $\cos\theta$.

Ce problème n'ayant pas de solution analytique exacte, KUTTRUFF propose une approximation polynômiale de l'equation (2.1) en développant la fonction de distribution à une particule sur la base de polynômes de LEGENDRE. Finalement, la densité locale de phonons s'exprime par :

$$\rho(\xi,\tau) = A\,\cos(k\,\xi)\,\exp(-2\delta\,\tau), \tag{2.3}$$

avec $k = [6\delta(1-2\delta)]^{1/2}$, où le terme δ est déterminé par la relation :

$$kh\tan(kh) = \frac{3\alpha h}{2(2-\alpha)}(1-2\delta). \tag{2.4}$$

Les résultats analytiques ont été comparés avec un bon accord à des simulations numériques de Monte Carlo, mais à aucune donnée expérimentale. Par ailleurs, les effets de diffusion au niveau des parois ne sont pas pris en compte, les réflexions étant traitées uniquement de manière spéculaire. Enfin, l'expression (2.3) est valable uniquement dans le cas où la densité de diffuseurs est importante. Lorsque cette densité devient faible, le champ diffus créé par les objets diffractants n'est plus assez conséquent. A la limite, lorsque cette densité est nulle, seule une approche géométrique est envisagée par l'auteur pour le calcul de la décroissance d'énergie.

Application à la modélisation de la propagation du son en zone péri-urbaine [137] La seconde application de l'équation BOLTZMANN par KUTTRUFF a porté sur l'étude de la propagation du son dans des banlieues ou des aires péri-urbaines, formées de petites maisons ou d'immeubles bas séparés par des jardins ou des ruelles. Le milieu de propagation est alors le siège de multiples réflexions et de nombreux effets de diffusion. L'énergie sonore totale est considérée comme la somme de l'énergie du son direct et

de l'énergie du champ sonore diffracté par les constructions, cette dernière étant assimilée à la densité locale de particules sonores. Dans cette approche, Kuttruff montre que la variation temporelle et spatiale de cette densité de phonons, notée f, est régie en milieu infini par une équation de transport :

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r,\varphi)\,\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} f(r,\varphi)\,\sin\varphi + \frac{f(r,\varphi)}{\lambda} = \frac{(1-\alpha)}{2\pi\lambda}\rho\,(r), \tag{2.5}$$

où la particule sonore est définie par la distance r par rapport à la source, ainsi que par sa vitesse, de norme du vecteur vitesse égale à la célérité du son c et de direction φ par rapport à l'axe r. La résolution de cette équation à partir d'une décomposition de la fonction f sur une base de fonction de Hankel, permet ensuite de déterminer l'expression de la densité du champ diffracté sous la forme :

$$u_s\,(r) = \left[\frac{2-\alpha}{2\,\pi\,h\,c\,\lambda}\right] \mathcal{P}_{cd} K_0(k\,r). \tag{2.6}$$

Dans cette expression, la propagation de l'énergie sonore sur la hauteur moyenne h des immeubles, est ramenée à la propagation dans le plan $z = 0$, de l'énergie moyenne sur cette même hauteur h. $\mathcal{P}_{cd}$ désigne la puissance du champ diffracté, fonction du nombre de particules et l'énergie portée par chaque particule. λ désigne le libre parcours moyen des particules, et k est fonction du coefficient d'absorption des objets diffractants.

Par ailleurs, le champ direct émis par une source sonore sphérique de puissance W, placée sur le sol totalement réfléchissant en $r = 0$, aura pour expression

$$u_d(r) = \frac{W}{2\pi hc\,r}\,\arctan(h/r)\,\exp(-\lambda r), \tag{2.7}$$

où $\exp(-\lambda r)$ désigne la probabilité que les particules n'aient subi aucun choc lors de leur trajet sur la distance r.

Dans l'article de référence, le modèle est comparé à des lois empiriques obtenues par des calculs numériques simulant la marche aléatoire des phonons, à l'aide d'une méthode de Monte Carlo. La comparaison des résultats numériques et des résultats analytiques montre un écart systématique de 1 dB pour le niveau sonore et un bon accord sur la forme des décroissances entre les deux approches (figure 2.5). Malheureusement, aucune comparaison avec des mesures n'a été réalisée.

Ce modèle traite le problème de manière « macroscopique ». En effet, les objets diffractants sont décrits par des valeurs moyennes telles que la hauteur h et la section diffractante Q des constructions. La géométrie des habitations est donc totalement omise. Ensuite, le fait d'assimiler la répartition des immeubles et des maisons à leur densité surfacique n et de ramener la totalité de ces sources secondaires à une source unique de puissance $\mathcal{P}_{cd}$ placé en $r = 0$, néglige complètement la localisation des constructions. De plus, le caractère omnidirectionnel des sources secondaires néglige les effets d'ombre acoustique derrière les constructions. Ce modèle n'est donc pas applicable dans des zones urbaines avec des immeubles très longs qui forment des barrières acoustiques naturelles. Dans ce modèle, la séquence des collisions subie par la particule sonore suit une loi de Poisson. Dans ces conditions, la taille des objets diffractants doit être petite par rapport au libre parcours moyen. Les objets diffractants qui sont ici des immeubles bas et des maisons doivent donc être assez éloignés. Ce traitement du milieu de propagation implique une répartition assez homogène des constructions. D'autre part, le calcul des niveaux d'énergie n'est possible que pour des libres parcours moyen λ, très supérieurs à la hauteur moyenne h des habitations. Dans ces conditions, ce modèle n'est pas applicable dans des centres-villes et dans des quartiers résidentiels, où la hauteur des constructions est supérieure au libre parcours moyen.

A noter qu'une approche similaire a également été proposée par Thorsson [229]. Dans cet article, Thorsson présente une application de l'équation de Boltzmann, *via* une formulation intégrale du flux d'énergie, en deux dimensions, dans le milieu de propagation. Une résolution numérique par éléments finis est proposée et appliquée à une partie de la ville de Stockholm, mais aucune validation expérimentale n'est présentée. Dans cet article, Thorsson propose également un développement mathématique très

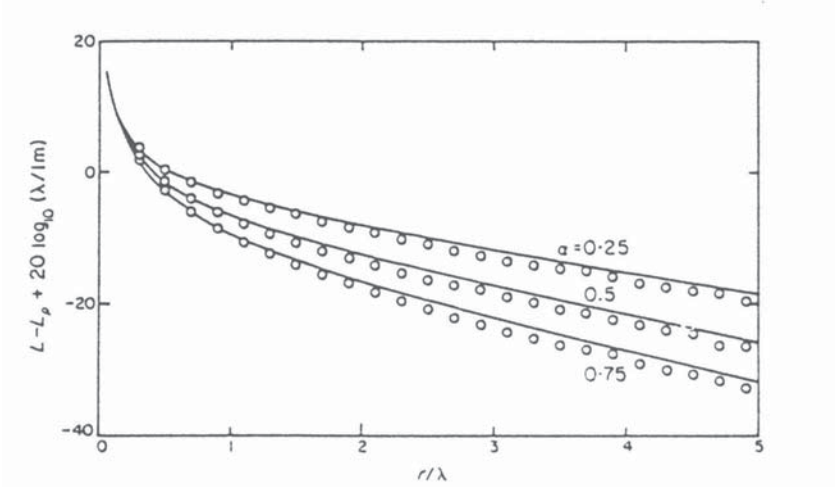


FIG. 2.5 — *Illustration de la méthode des particules (équation de* BOLTZMANN*) en milieu péri-urbain. Atténuation des niveaux sonores en fonction de la distance r/λ (i.e. en fonction de l'encombrement du milieu et par rapport à la source), pour $h/\lambda = 0,1$. (—), résultats théoriques, (○) résultats numériques par une méthode de Monte Carlo. D'après [137, p. 121, figure 2].*

intéressant décrivant le passage de l'équation d'HELMHOLTZ à l'équation de BOLTZMANN, sous réserve que les objets diffractants ne soient pas trop proches les uns des autres. Dans le cas contraire, THORSSON suggère plutôt d'utiliser une équation de diffusion qui semble plus adaptée au problème. Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur ce point au chapitre 4.2.

2.2.8.2 Approche analytique basée sur l'utilisation d'un processus de MARKOV

La modélisation de la propagation de l'énergie sonore par un processus de MARKOV a été initiée par GERLACH et MELLERT [78] puis développée par KRUZINS [129, 128] pour l'étude du champ sonore dans une enceinte vide, en régime stationnaire. Cette méthode statistico-géométrique repose sur la marche aléatoire de phonons émis par une source omnidirectionnelle. Elle est mise en oeuvre pour déterminer la densité locale de particules sonores et, par extension, la densité locale d'énergie sonore sur les parois du milieu de propagation. Le calcul du niveau d'énergie sonore à l'intérieur de l'enceinte, est ensuite réalisé par la méthode de radiosité (*cf.* §2.2.6). Par construction, le modèle s'applique pour des longueurs d'onde petites comparées aux dimensions caractéristiques de la salle, et si les réflexions sur les parois de la salle sont diffuses et obéissent à une loi de LAMBERT. Ces hypothèses permettent l'établissement d'un champ diffus après un nombre minimum de réflexions, et suite à un mélange énergétique suffisant.

Dans ce modèle, l'état du système (*i.e.* l'état des n parois) après k transitions (*i.e.* k pas de temps) est caractérisé sous la forme d'un vecteur E^k, défini par les éléments e^j_k représentant la probabilité de trouver un phonon sur la paroi j au moment k. Cette probabilité est fonction de l'état du système au moment $k-1$ ainsi que des probabilités de transition $\langle j|p|m\rangle$, traduisant la possibilité pour un phonon de se déplacer de l'élément de surface m vers l'élément j. En définissant la matrice de transition P telle que $P_{ij} = \langle j|p|m\rangle$, dont la somme des éléments de chaque colonne est égale à l'unité, l'état complet du système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$E^k = E^0\, P^k, \tag{2.8}$$

où E^0 est l'état initial, défini par la rayonnement direct de la source. Cette expression peut également être modifiée pour prendre en compte l'absorption α_j des parois, ainsi que l'atténuation atmosphérique, en multipliant respectivement, avant la $(k+1)^{ieme}$ transition, la densité e^k_j par le coefficient $(1-\alpha_j)$ et par le facteur d'atténuation de l'air $R_{ij} = exp(-m\overline{r}_{ij})$. Les termes m et $\overline{r}_{ij}$ représentent respectivement

le coefficient d'atténuation atmosphérique et la distance moyenne entre les surfaces i et j. Finalement, l'expression (2.8) devient :

$$E^k = E^0\, T^k, \tag{2.9}$$

où T est appelée matrice de transition

$$T = R \otimes (AP), \tag{2.10}$$

dans laquelle

$$A_{ij} = \begin{cases} (1-\alpha_i) & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j\,, \end{cases} \tag{2.11}$$

et où $\otimes$ représente un produit matriciel.

L'intensité sonore totale, après k réflexions diffuses au point (R, θ, ϕ), est la somme des contributions des n surfaces soit

$$I = 2 \sum_{j=1}^{n} e^k_j \omega / \pi^2, \tag{2.12}$$

où ω désigne l'angle solide de sommet (r, θ, ϕ) sous-tendu par la n^{e} surface.

Après résolution numérique du système (2.9), il est possible de tracer des courbes d'isovaleurs pour les niveaux de pression sonore à l'intérieur d'un local. Cette approche permet donc de déceler les zones de concentration de l'énergie sonore et d'étudier l'influence de la géométrie réelle du milieu de propagation. Un exemple est donné sur la figure 2.6.

Kruzins a comparé ce modèle à la théorie classique de la réverbération (*cf.* §2.2.3) dans le cas d'un milieu de propagation cubique de 20 m de côté (figure 2.7(a)). Les résultats montrent un bon accord entre les deux approches. Le modèle semble toutefois plus précis près des murs puisqu'il modélise mieux le phénomène de hausse du niveau sonore près des parois, à l'inverse de la théorie statistique classique (figure 2.7(b)). Le modèle a également été comparé à des mesures effectuées sur maquette. Malgré des écarts systématiques de l'ordre de 3 à 6 dB, l'allure des courbes est respectée, même dans le cas de pièces où les cloisons forment des géométries complexes ou lorsque l'absorption au niveau des murs est importante.

Cependant, cette méthode s'applique uniquement dans des milieux vides, c'est-à-dire ne contenant pas d'objets diffractants entre les parois. De plus, ce modèle est une approche statistico-géométrique numérique qui ne fournit pas de solution analytique. Enfin, la réflexion de l'énergie est simulée, de manière intrinsèque, par une loi de Lambert, donc de manière entièrement diffuse.

2.2.8.3 Approches analytiques basées sur un processus de diffusion

Le principe de la modélisation de la propagation du son dans des espaces complexes sous la forme d'un processus de diffusion a été retenu par de nombreux auteurs. Dans la plupart des cas, l'opération consiste à suivre le parcours de particules sonores dans un milieu contenant des objets diffractants (des arbres, de la végétation, des objets, des machines, etc.). En rentrant en collision avec ces objets, les particules sont déviées de leur trajectoire, puis se déplacent à nouveau en ligne droite jusqu'à une nouvelle collision. L'ensemble du phénomène peut ainsi être exprimé à travers une équation de diffusion, dont le coefficient de diffusion dépend des propriétés du milieu diffusant, à savoir la densité des objets diffractants et leur section diffractante. En se basant sur cette approche, nous avons ainsi proposé notre propre modèle de champ diffus en acoustique des salles [191]. Une description mathématique de ce modèle étant proposée dans le chapitre 5, nous nous contenterons ici de présenter d'autres modèles reposant sur cette approche en acoustique architecturale et en propagation extérieure.

Propagation à travers une barrière végétale Dans un article de 1967, Kuttruff a proposé un modèle original pour la modélisation de la propagation du son dans les forêts [132], reposant sur la marche aléatoire de phonons dans un espace comportant des objets diffusants (*i.e.* des arbres) répartis de manière

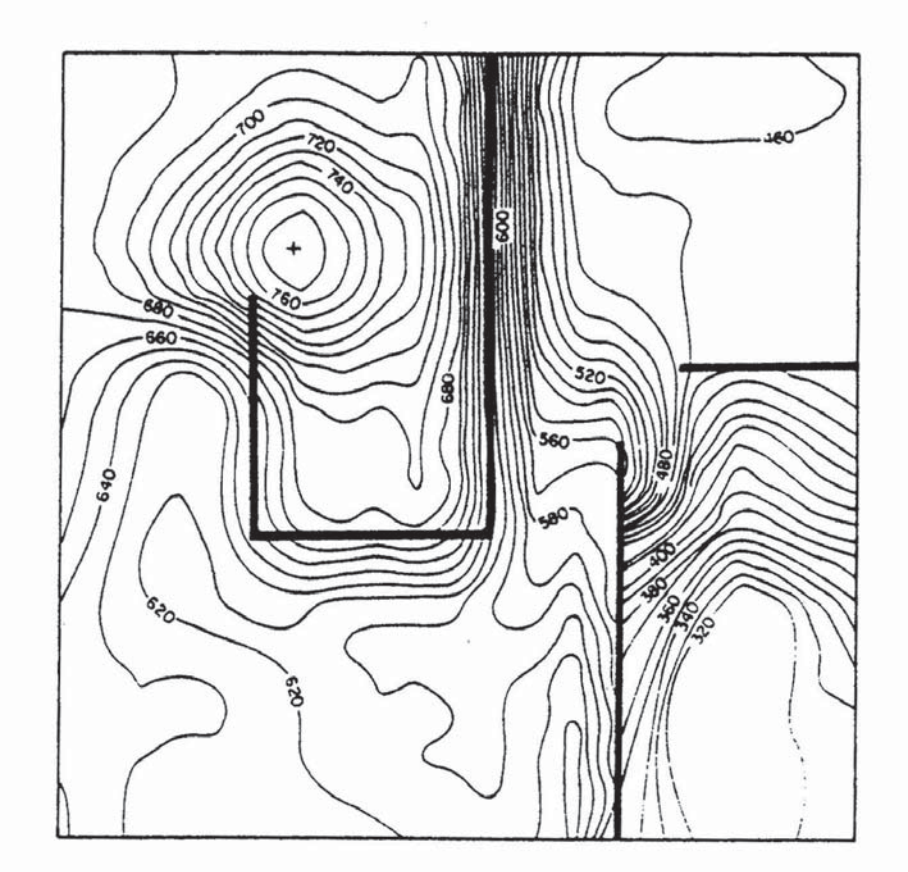
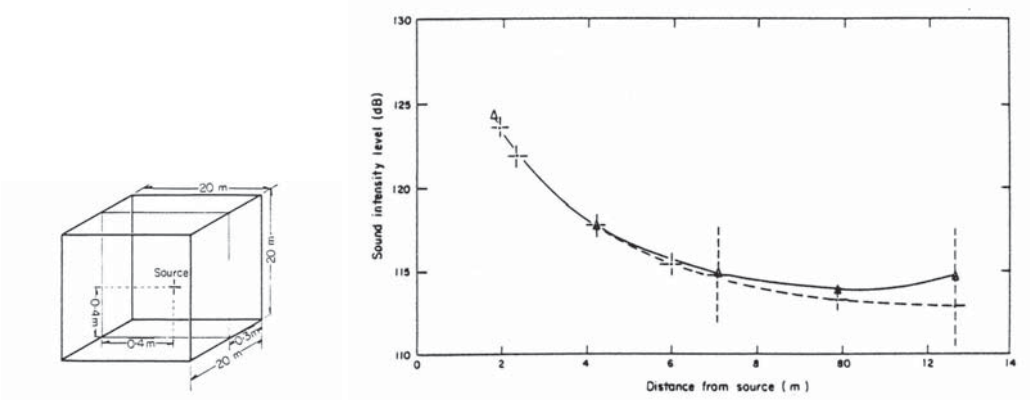


FIG. 2.6 — *Illustration de la méthode des particules via un processus de* MARKOV. *Courbes d'isovaleurs dans une salle, pour les niveaux de pression sonore à* 15 *cm au-dessus du sol, à* 1 *kHz et pour une source sonore de puissance* 0.8 *W. D'après [129, p.* 560*, figure 8]. L'échelle correspond à des dB*×10*.*



(a) Le milieu de propagation (b) Comparaison entre le modèle et la théorie statistique

FIG. 2.7 — *Validation du modèle* MARKOVIEN. *La figure (a) présente de manière schématique le milieu de propagation étudié. La figure (b) donne le niveau sonore dans un axe de la salle : (△) modèle, (+) théorie statistique. D'après [129, p. 558, figure 5].*

aléatoire. En utilisant la fonction caractéristique associée à la densité de probabilité qu'une particule sonore effectue un parcours élémentaire sans collision, il montre ainsi que la densité de particules dans le milieu suit l'expression

$$W(R,t) = \sqrt{\frac{3nQ^3}{4\pi c\, t}} \exp\left(-\frac{3nQ}{4c\, t}R^2\right), \tag{2.13}$$

où R désigne la distance du point d'observation depuis la source. Ce dernier résultat n'est autre que la solution de l'équation de diffusion en trois dimensions et dans un milieu infini,

$$\Delta W = \frac{1}{D}\frac{\partial W}{\partial t}, \tag{2.14}$$

où le terme $D = c/3nQ$ définit le coefficient de diffusion. Il intègre les caractères géométriques et morphologiques du milieu de propagation au travers de la section diffractante Q et de la densité n des objets diffractants. Néanmoins, ces deux termes correspondent à une description approximative du milieu de propagation sous la forme de valeurs moyennes. De plus, ce coefficient n'est valide que dans des milieux à forte concentration d'objets diffractants et dans la mesure où les effets de diffraction peuvent être considérés identiques dans toutes les directions, ce qui n'est pas forcément évident en pratique.

Cette démarche a été appliquée par Kuttruff au cas de la propagation du son dans une forêt et comparée à des données expérimentales. Le problème majeur de cette approche reste la détermination des paramètres intrinsèques au modèle analytique et notamment la section diffractante qui intervient directement dans l'expression du coefficient de diffusion D. Cette démarche est néanmoins intéressante car elle donne un résultat analytique rapide.

Quelques années plus tard, Bullen [23] a également proposé le principe d'un processus de diffusion pour l'étude de l'atténuation du son par une barrière végétale. La propagation de l'énergie sonore est assimilée à une marche aléatoire de phonons dans un milieu rempli de particules cibles (*i.e.* des arbres) de densité surfacique N, de section efficace de diffraction σ_s et de section efficace d'absorption σ_A. Ces deux paramètres sont reliés respectivement au diamètre des troncs et au feuillage des arbres. Dans le cas d'une barrière végétale large et d'une absorption faible, Bullen montre que les variations spatiale et temporelle de la densité de phonons sont régies par une équation de diffusion :

$$\nabla^2 I - \frac{2}{L_A L_s} I + \frac{2}{L_s c}\, Q = \frac{2}{L_s c}\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{2.15}$$

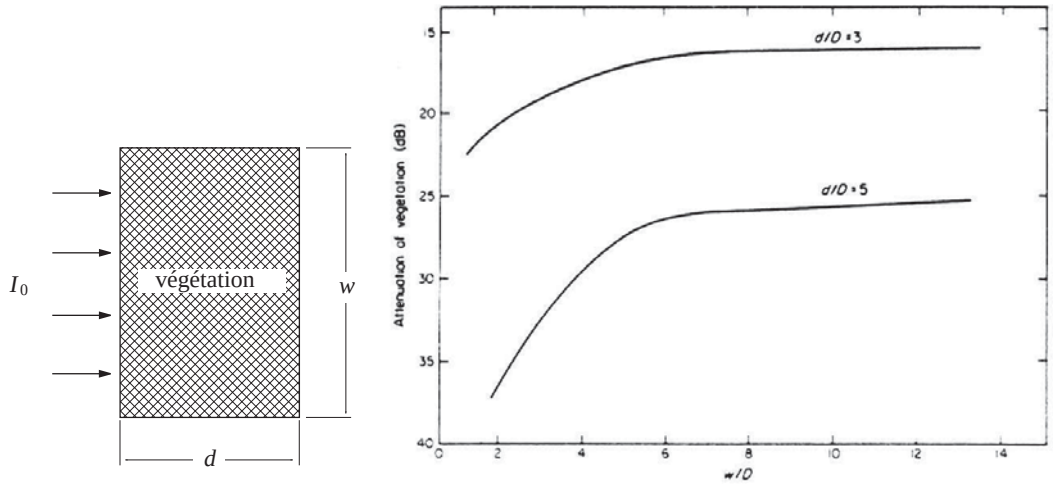
qui donne, en régime permanent,

$$\mathcal{K}\nabla^2 I - I = -\frac{2\mathcal{K}Q}{L_s c}, \tag{2.16}$$

où $\mathcal{K} = \frac{1}{2}L_A L_s$ est le coefficient de diffusion du problème. Ce coefficient fait intervenir l'influence de la répartition des arbres au travers du libre parcours moyen de diffraction L_s et l'influence de l'absorption par le feuillage au travers du libre parcours moyen d'absorption L_A.

Des solutions analytiques ont été proposées pour des conditions aux limites particulières, permettant de déterminer le facteur d'atténuation en dB de la zone végétale qui est égal à $10\log[I(d)/I_0]$, où $I(d)$ est l'intensité sonore en d et I_0 l'intensité de l'onde incidente (figure 2.8(b)). Comme pour le modèle de Kuttruff, il est important de noter que l'utilisation de cette équation de diffusion est valide, uniquement dans le cas d'une densité d'arbres importante pour permettre un grand nombre de diffractions, et pour une répartition homogène de ces végétaux.

Propagation du son dans des halls industriels Nous citerons uniquement ce modèle [131] qui sera détaillé ultérieurement dans ce document (*cf.* §5.2.4). Sur le principe, le modèle est très similaire à ceux présentés ci-dessus. L'auteur utilise une approche commune où les objets diffractants sont représentés par leur section diffractante, où la séquence de collisions des particules sonores suit une loi de Poisson. Dans ces conditions, la densité d'énergie sonore dans le hall industriel s'exprime également sous la forme d'une équation de diffusion, dont le coefficient de diffusion est fonction de la densité et de la taille des objets diffractants.



(a) Le milieu de propagation (b) Atténuation sonore

FIG. 2.8 — *Illustration de la méthode des particules via une équation de diffusion. La figure (a) présente le milieu de propagation. I_0 est l'intensité incidente d'une onde plane et d est la largeur de la barrière. La figure (b) présente l'atténuation sonore en fonction de la largeur w de la barrière pour deux valeurs du rapport d/D ($D^2 = \mathcal{K}$). D'après [23, p. 15, figure 3].*

Modélisation du champ diffus dans une salle OLLENDORFF [181, 182] a été le premier à proposer un modèle de champ diffus à travers un processus de diffusion. Partant des écarts observés entre la théorie classique de la réverbération de SABINE et les mesures, il proposa de considérer le champ sonore comme un gaz de particules sonores, régi par une équation de diffusion, elle-même caractérisée par un coefficient de diffusion fonction du libre parcours moyen de la salle. Des applications ont été proposées pour une salle rectangulaire, un amphithéâtre [181] et quelques années plus tard pour un tunnel routier [182]. L'absence de comparaisons avec des données expérimentales ne lui a toutefois pas permis de valider son approche originale.

Cette modélisation sous la forme d'un processus de diffusion est à la base de nos propres travaux notamment en acoustique des salles (*cf.* chapitre 5). Au début de nos recherches, nous n'avions d'ailleurs pas eu connaissance des travaux de OLLENDORFF qui étaient restés très confidentiels. Notre propre travail nous a permis de généraliser cette approche, en repartant des équations de base de la diffusion de particules dans un milieu diffusant, puis de l'appliquer et de la valider très largement en acoustique des salles. Ce travail sera présenté au chapitre 5.

2.2.8.4 Approche analytique basée sur la théorie des probabilités

Le concept de particules sonores est utilisé ici pour évaluer l'efficacité de l'application de matériaux absorbants sur les murs ou le plafond de halls d'usines où sont disposées des machines à l'origine de nombreux effets de diffraction des ondes sonores [155]. Le modèle s'attache à trouver l'expression de la densité locale de particules sonores dans ce milieu clos rempli d'objets diffractants. Le développement mathématique considère tout d'abord un milieu infini rempli d'objets disposés aléatoirement. Dans cette configuration, l'originalité de l'approche repose sur le calcul de la densité de probabilité pour la norme $|\mathbf{L}(t)|$ du vecteur position des particules, à un instant t donné, à l'aide de théories probabilistes et notamment l'application du théorème de la limite centrale. Cette densité de probabilité permet ensuite de remonter à la densité d'énergie sonore. L'effet des parois de l'enceinte est ensuite pris en compte par la

méthode des sources-images. Le milieu de propagation est alors modélisé comme un milieu infini formé par un réseau de salles, images de la salle d'origine.

A $t = 0$, une impulsion libère dans le milieu une quantité d'énergie sonore à travers l'émission d'un grand nombre de phonons, qui vont ensuite subir des collisions sur les objets présents à l'intérieur du domaine d'étude. Le trajet des particules sonores est décrit par une succession de vecteurs $\mathbf{R}_i$ dont la norme $|\mathbf{R}_i|$ représente la distance parcourue entre le i^{e} et le $(i-1)^{\text{e}}$ impact (figure 2.9).

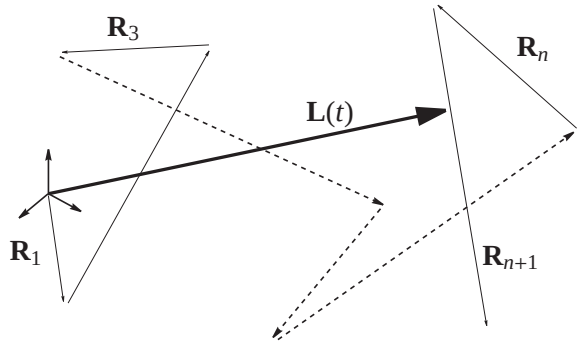


Fig. 2.9 — *Illustration de la méthode des particules par la théorie des probabilités. Représentation schématique du parcours d'un phonon dans un milieu rempli d'objets diffractants.*

La position $\mathbf{L}(t)$ du phonon au temps t est un vecteur de l'espace qui s'exprime par :

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i + [\, ct - Y_{n(t)} \,] \frac{\mathbf{R}_{n(t)+1}}{\left|\mathbf{R}_{n(t)+1}\right|}, \tag{2.17}$$

avec

$$Y_{n(t)} = \sum_{i=1}^{k} |\mathbf{R}_i| \,, \tag{2.18}$$

la distance totale parcourue jusqu'à la i^{e} collision, et

$$n(t) = \max \left\{ n : \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{R}_i| < c\,t \right\}, \tag{2.19}$$

le nombre de collisions subies par les phonons, qui suit par hypothèse une loi de Poisson de paramètre $\nu\, c\, t$

$$\mathbf{P}\,[n(t) = k] = \frac{(\nu\, c\, t)^k}{k!} \exp(-\nu\, c\, t) \,, \tag{2.20}$$

où $\nu = n_v\, Q$ correspond à la fréquence de collision.

Sans entrer dans les détails du calcul, l'auteur montre ainsi que la densité de probabilité associée à $|\mathbf{L}(t)|$, notée $f(r)$, est égale à :

$$f\,(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu\, c\, t)^k}{k!} \exp(-\nu\, c\, t) \times \left(\frac{1}{c\, t} \sqrt{\frac{3(k+2)}{2}} \right)^3 \times r^2 \exp\left(-\frac{3(k+2)}{4} \left(\frac{r}{c\, t} \right)^2 \right), \tag{2.21}$$

dont il tire la densité d'énergie sonore $w(r, t)$ pour un champ sonore issu des multiples réflexion sur l'encombrement, égale à la multiplication de l'expression (2.21) par $4\pi / r^2$:

$$w\,(r, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu\, c\, t)^k}{k!} \exp(-\nu\, c\, t) \times \left(\frac{1}{c\, t} \sqrt{\frac{3(k+2)}{2}} \right)^3 \exp\left(-\frac{3(k+2)}{4} \left(\frac{r}{c\, t} \right)^2 \right). \tag{2.22}$$

Le modèle a montré un bon accord avec des mesures effectuées par Lindqvist [155] sur une maquette. Cependant, il n'a pas été confronté à des mesures dans des configurations d'usines réelles. Par ailleurs, cette approche néglige les effets d'ombre acoustique dus aux objets diffractants ainsi que la directivité de l'énergie diffractée par ces mêmes objets. Enfin, l'utilisation de la méthode des sources-images pour modéliser l'effet des réflexions sur les parois du domaine limite le phénomène à des réflexions spéculaires, et impose une symétrie dans la répartition des objets diffractants. Pour un grand nombre d'objets diffractants l'erreur reste faible. Dans le cas contraire, elle augmente quand le nombre d'objets diminue.

2.2.9 Autres approches et compléments

Il est aujourd'hui très difficile d'avoir une vue complète et précise de toutes les approches développées pour modéliser les champs sonores en acoustique des salles et urbaine. Le classement proposé ci-dessus, bien que relativement « classique », n'est sans doute plus exhaustif et certainement plus aussi bien « délimité ». En effet, la plupart des approches récentes tendent plutôt à fusionner plusieurs approches classiques, de manière à profiter des avantages de chacune et ainsi de mieux reproduire les phénomènes réels.

En parallèle, il restera toujours des approches inclassables, ne rentrant pas dans les catégories évoquées ci-dessus. En acoustique urbaine, nous citerons par exemple les modèles de Shaw et Olson [220], Davies et Lyon [50] et Thorsson et coll. [230], modélisant la propagation du son dans une ville à deux dimensions, en prenant en compte des corrections acoustiques entre un point source et point récepteur. Ces corrections traduisent la dispersion géométrique, les effets d'écran, les effets de sol, l'absorption acoustique, etc. Nous pouvons également citer une approche originale qui repose sur les réseaux de neurones, pour prévoir les niveaux sonores en milieu urbain [24]. Concernant l'acoustique des salles, on pourra aussi citer les travaux de Wentang [243] et Le Bot [142] s'inspirant de la SEA (*Statistical Energy Analysis*, [160]).

Pour plus de détails concernant les modèles de prévision acoustique en milieu urbain, le lecteur pourra se reporter à un article récent de Ismail et Oldham [104] concernant les modèles numériques, ainsi qu'à la thèse de Le Polles [144] et à l'article de Walerian et Janczur [239] pour les modèles reposants sur les équations de transport. Concernant l'acoustique des salles, le lecteur pourra se reporter aux ouvrages de Kuttruff [138] et Kang [117], ainsi qu'aux articles de Stephenson [226] et Funkhouser et coll. [73].

2.3 Conclusion

2.3.1 Principales limitations des approches actuelles

Cette étude bibliographique a permis de montrer les limitations des approches les plus courantes en acoustique des salles et urbaine. Concernant les approches « classiques », c'est-à-dire toutes les approches de la section 2.2 excepté celles qui reposent sur des processus de transport de particules sonores, les principales limitations sont exposées dans le tableau 2.1. On distinguera notamment dans ce tableau les démarches basées sur une description ondulatoire, et celles reposant sur une approche énergétique.

Concernant les modèles particulaires, basés sur un processus de transport, l'analyse des travaux issus de la littérature nous a permis de mettre en évidence un certain nombre de limitations. Tout d'abord, bien que ces modèles permettent de traiter la diffraction sur des objets présents au sein du domaine d'étude, les effets de diffusion sur les limites du domaine, pourtant capitaux sur la distribution de l'énergie sonore (*cf.* chapitre 3), ne sont pas pris en compte. En effet, lorsque le milieu de propagation est fini, les réflexions sur les parois sont considérées comme spéculaires et souvent traitées par la méthode des sources-images. De plus, lorsque la densité des diffuseurs est faible ou nulle, ces méthodes analytiques ne sont plus appropriées. Le recours à des méthodes géométriques ou de radiosité est alors nécessaire [25, 133, 134, 135].

TAB. 2.1 — *Principales limitations des modèles « classiques » de prévision des champs sonores rencontrés dans la littérature. D'après [144].*

MODÈLE ACOUSTIQUE	PRINCIPALES LIMITATIONS
ÉQUATION DES ONDES ET THÉORIE MODALE (ONDULATOIRE) (*cf.* §2.2.1)	– application à des géométries simples (rectangulaires) ; – caractéristiques de surface uniformes ; – longueur d'onde de l'ordre des dimensions de la cavité ; – absence de prise en compte des ouvertures.
ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE ET ÉLÉMENTS FINIS (ONDULATOIRE) (*cf.* §2.2.2)	– complexité du maillage du milieu de propagation : temps de calcul élevé ; – application réduite aux basses fréquences.
THÉORIE CLASSIQUE DE LA RÉVERBÉRATION (ÉNERGÉTIQUE) (*cf.* §2.2.3)	– application à des milieux clos uniquement ; – valable principalement pour des géométries quasicubiques ; – valide pour des absorptions faibles.
MÉTHODE DES SOURCES-IMAGES (ÉNERGÉTIQUE) (*cf.* §2.2.4)	– application limitée à des géométries basiques (pièces rectangulaires, locaux plats de petit volume) ; – temps de calcul longs à cause des tests de visibilité pour des géométries complexes ; – phase d'extinction du son difficile à simuler : temps de réverbération approximatif ; – diffusion par les surfaces non traitée ; réflexions uniquement spéculaires.
MÉTHODE DU TRACÉ DE RAYONS ET DE FAISCEAUX SONORES (ÉNERGÉTIQUE) (*cf.* §2.2.5)	– taille du volume récepteur ; – effets de diffusion traités uniquement par une loi de LAMBERT ; – temps de calcul très longs pour des géométries complexes (salles couplées par exemple).
MÉTHODE DE LA RADIOSITÉ (*cf.* §2.2.6)	– temps de calcul important compte tenu de la discrétisation du milieu de propagation pour des géométries complexes ; – effets de diffraction traités principalement par une loi de LAMBERT pour le calcul des facteurs de formes ; – pas de réflexion spéculaire.

Dans la majorité des modèles, les séquences de collisions expérimentées par les particules sonores suivent, par hypothèse, une loi de Poisson. Cependant, cette loi est applicable uniquement dans des zones homogènes à forte concentration de diffuseurs. La validité des modèles est donc liée à l'isotropie des milieux de propagation et à la forte concentration d'objets diffractants. De plus, les réflexions sur ces objets sont isotropes. Les effets d'ombre acoustique en aval du diffuseur sont donc négligés.

Les différents modèles particulaires utilisent une description macroscopique du milieu de propagation. Ils représentent les objets diffractants par des valeurs moyennes telles que leur densité et leur section moyenne diffractante. Dans ces conditions, l'influence de la géométrie et de la localisation propre de ces diffuseurs est omise.

Enfin, la plupart des modèles particulaires manquent de confrontation à des données expérimentales. Dans ces conditions, les limites d'application de ces approches ne peuvent pas être clairement définies et leur validation est difficile. Ces modèles constituent donc, plus des outils d'investigation et de compréhension des phénomènes que des outils de prévisions fiables.

Il faut aussi noter que ces modèles classiques ou particulaires sont souvent spécifiques à des milieux de propagation particuliers. Par exemple, le traitement des locaux plats [131] fait appel à une méthode différente de celle utilisée pour le traitement des couloirs[7] [48, 102, 115] ou des chambres réverbérantes [136, 174]. Il n'existe aucune approche générale applicable simultanément à l'ensemble des problèmes rencontrés en acoustique des salles et en acoustique urbaine.

2.3.2 Principales motivations de nos travaux

Face à ces nombreuses limitations, il nous est apparu nécessaire de développer un modèle « générique » de propagation qui puisse intégrer l'ensemble des phénomènes mis en jeu pendant la propagation du son (absorption acoustique, atténuation atmosphérique, diffusion de paroi, diffraction par des objets), quel que soit la géométrie du milieu (salles, couloirs, salles couplées) et valable également pour le milieu urbain. L'intérêt opérationnel est évident, puisqu'il ne serait alors plus nécessaire de « jongler » entre différents modèles en fonction des applications. Par ailleurs, le développement d'un tel modèle offrirait de nouvelles possibilités, comme le couplage de la propagation acoustique entre le milieu extérieur (dans une rue) et l'intérieur des bâtiments, ce qui n'est pas possible aujourd'hui (où tout au moins de manière simple).

Comme nous le verrons dans la suite de ce document, le développement d'un tel modèle n'a rien d'utopique. Nos développements en acoustique urbaine (chapitre 4) et en acoustique des salles (chapitre 5) nous ont, en effet, déjà permis d'établir un modèle de propagation unique, fondé sur une équation de diffusion, et dont le couplage ne pose aucun problème sur le principe. Par ailleurs, et comme nous le verrons, les temps de calcul sont de loin inférieurs aux approches numériques actuelles. Bien que sans lien direct, on pourra d'ailleurs noter que démarche est assez similaire à l'approche SEA (*Statistical Energy Analysis*) développée en vibro-acoustique [160], puisqu'elle vise à modéliser un phénomène d'origine ondulatoire sous la forme d'une approche purement énergétique, régie par une équation de diffusion.

Il est important de noter dès maintenant que nous nous focalisons uniquement sur le champ sonore résultant des multiples diffusions sur les parois et les objets du milieu de propagation. Le champ sonore direct et les premières réflexions ont un caractère déterministe, si bien que leur calcul ne pose en général pas de problème. A l'inverse, le champ sonore qui nous intéresse est plutôt « aléatoire », et est en général qualifié de *champ réverbéré* en acoustique architecturale et urbaine. Nous utiliserons parfois également le terme *champ diffus*, même si en principe cette expression est réservée pour exprimer le champ sonore issu de la théorie statistique de la réverbération[8].

7. Des modèles spécifiques ont été développés, mais ne sont pas présentés dans ce document.

8. Le modèle que nous proposons peut être vu comme une extension de la théorie classique de la réverbération. L'utilisation du terme *champ diffus*, pour caractériser le champ sonore issu de la diffusion en acoustique des salles et urbaine, n'est donc pas vraiment un abus de language.

Avant de détailler plus en profondeur ce modèle « générique » dans les chapitres 4 et 5, le prochain chapitre présentera nos travaux sur un des phénomènes majeurs en milieu urbain à savoir la diffusion de façade[9].

9. Comme en acoustique des salles, avec la diffusion de parois.

Chapitre 3

Caractérisation et modélisation de la diffusion de façades

3.1 Introduction

3.1.1 État de l'art sur la diffusion de façade

La diffusion de façade est un phénomène primordial dans la modélisation de la propagation du son en milieu urbain[1]. Lyon [159] a été le premier à montrer la nécessité de prendre en compte cette diffusion en plus de la réflexion spéculaire, dans le calcul du niveau sonore dans une rue. En effet, à travers ses études, il observa de grandes différences entre les résultats des modèles simplifiés fondés sur des approches classiques sources-images (avec des réflexions spéculaires sur les façades) et des données expérimentales, qu'il attribua aux effets de diffraction et diffusion par les nombreuses irrégularités de façades.

Depuis, de nombreux chercheurs ont proposé de modéliser la propagation du son par des façades, en considérant simultanément des réflexions spéculaires et des réflexions diffuses. Ainsi, en s'inspirant des travaux issus de l'acoustique des salles, la plupart des auteurs suppose qu'une partie de l'énergie sonore incidente sur une façade est réfléchie spéculairement tandis qu'une autre partie est réfléchie dans toutes les directions de l'espace [30, 49] (figure 3.1). La quantité d'énergie réfléchie en dehors de la réflexion spéculaire est définie par le coefficient de diffraction de la façade (*scattering coefficient* en anglais), que nous noterons s dans ce document. La quantité d'énergie réfléchie dans la direction spéculaire est alors égale à $(1 - s)$ [163]. Ce même coefficient s'appelle parfois *coefficient de réflexion diffuse* en acoustique des salles [94]. En pratique le coefficient de diffraction s est obtenu en mesurant la quantité d'énergie dans la direction spéculaire, ou en moyennant l'énergie dans toutes les autres directions (à partir de la réponse polaire du « diffuseur »).

Ce coefficient ne doit pas être confondu avec le *diffusion coefficient* (en anglais), noté d_ψ, défini également en acoustique des salles, pour traduire l'uniformité de la réflexion par une surface, pour une incidence ψ donnée. Si la même énergie est réfléchie simultanément dans toutes les directions de l'espace, alors $d_\psi = 1$. Si l'énergie est réfléchie dans une seule direction, alors $d_\psi = 0$. Ce coefficient est obtenu en mesurant la réponse polaire, qui est ensuite ramenée à une « valeur moyenne » pour l'ensemble des directions de réflexion.

Il faut toutefois signaler que certains logiciels d'acoustique des salles ont entretenu la confusion entre ces deux termes. Ce dernier coefficient ne doit pas non plus être confondu avec le coefficient de diffusion associé à une équation de diffusion. Pour plus de détails sur le *diffusion coefficient* et le *scattering coefficient*, le lecteur est invité à se reporter à la publication très récente de Cox et coll. [41]).

1. C'est également le cas en acoustique des salles, concernant la diffusion de parois.

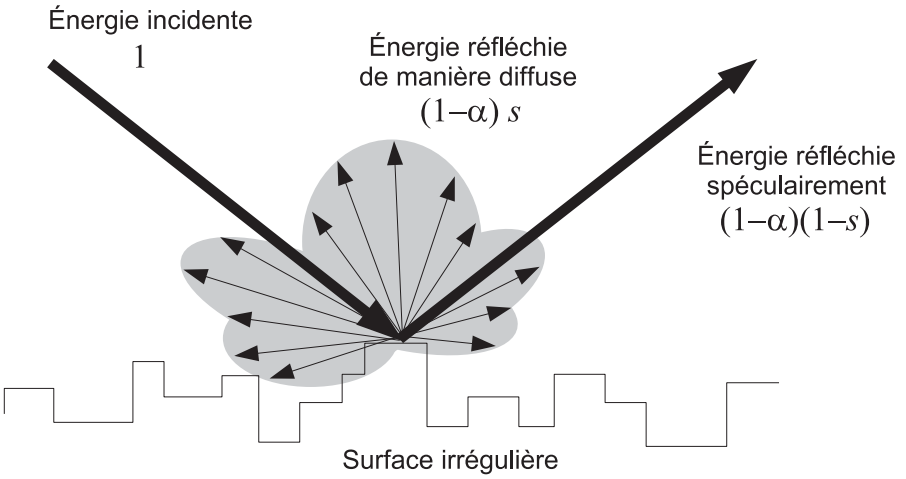


FIG. 3.1 — *Illustration de la diffusion de façade. L'énergie sonore incidente sur une paroi peut être réfléchie simultanément dans plusieurs directions de l'espace, en plus de la direction spéculaire.*

Malgré tout, bien qu'il soit *a priori* évident que la loi de réflexion[2] puisse varier en fonction de la rugosité des façades, les applications en acoustique urbaine [163, 162, 246] ne font référence qu'à une seule loi, la loi de LAMBERT (loi de réflexion en $\cos\theta$, θ désignant l'angle de réflexion par rapport à la normale à la façade), déjà utilisée pour modéliser les champs diffus en acoustique des salles [138]. Sur le principe, cette loi modélise une réflexion diffuse idéale. Il faut pourtant préciser qu'elle n'a jamais été vérifiée pour des façades réelles, ni par des mesures, ni par des modèles théoriques. Elle n'a donc pas *a priori* de sens physique pour une façade dont les irrégularités sont en général disposées périodiquement. D'autre part, l'utilisation de cette loi en acoustique des salles fait déjà l'objet d'un certain nombre de critiques [92].

La littérature fait également état d'un certain nombre de publications sur l'influence d'une façade sur le niveau sonore routier calculé en un point d'observation dans la rue [29, 32, 31, 53, 91, 100, 162, 161, 228]. Ces références donnent quelques indications sur l'augmentation du niveau sonore en présence d'une façade, mais les modèles développés considèrent une nouvelle fois ces façades uniquement comme des plans réfléchissants et/ou diffus (au sens de la loi de LAMBERT).

Enfin, pour être complet, il faut également citer l'article de HOTHERSALL [99] sur l'utilisation de la méthode des éléments de frontière (*cf.* §2.2.2) pour étudier l'effet de la diffraction du son par des balcons, pour des points d'observation situés à 1 m devant la façade (étude à 2 dimensions). D'autres études, expérimentales et numériques, sur l'effet du traitement acoustique des balcons sur le niveau sonore dans les habitations, méritent également d'être cités, mais ne donnent pas d'information sur le niveau sonore réfléchi devant la façade [85, 86, 62, 63, 127, 154, 165, 169].

3.1.2 Travaux de recherche sur la diffusion de façade

En l'absence de connaissances suffisantes, nous nous sommes attachés à mieux appréhender et modéliser les effets de diffusion par des façades urbaines. Dans un premier temps, nous avons d'abord cherché à évaluer qualitativement la correspondance entre les irrégularités de façade et les effets de réflexion et diffraction des ondes sonores. Ce travail, publié dans la référence [197], sera présenté à la section 3.2. Nous verrons ainsi, que la présence de motifs architecturaux répartis dans une zone active de réflexion,

2. La loi de réflexion peut être assimilée à la réponse polaire de la façade, ou par analogie avec la diffusion de la lumière, à une BRDF.

est bien à l'origine d'un phénomène de diffusion acoustique, caractérisé par la taille et la distribution des irrégularités, ainsi que par la fréquence de l'onde sonore.

Suite à cette étude qualitative, nous nous sommes interrogés sur les effets de cette diffusion de façade sur la propagation du champ sonore à l'échelle d'un quartier, puis à l'échelle d'une rue. Cette étude, qui sera présentée à la section 3.3, amènera deux résultats importants. Tout d'abord, nous verrons au paragraphe 3.3.3 que ces effets de diffusion sur les façades peuvent engendrer un champ sonore complexe en milieu urbain, qui peut être modélisé dans certains cas par une équation de diffusion. Le paramètre fondamental de cette équation de diffusion, le coefficient de diffusion, est alors fonction des conditions de diffusion sur les parois, ainsi que des dimensions de la rue. A l'échelle d'une rue (*cf.* §3.3.4), nous verrons ensuite que ces mêmes effets de diffusion influent sur l'atténuation sonore et la réverbération : un changement des conditions de réflexion peut être à l'origine de variations importantes des courbes d'atténuation et de la réverbération dans la rue.

Ces derniers résultats montrent donc que quel que soit le modèle de propagation utilisé pour le milieu urbain, ce dernier doit intégrer au mieux les conditions de diffusion réelles au niveau des façades, ce qui n'est malheureusement pas le cas actuellement. Dans les approches classiques et opérationnelles, basées notamment sur des méthodes de tracé de rayons, cette prise en compte des conditions de réflexion peut toutefois être envisagée en introduisant des lois de réflexion (autres que la loi de Lambert) dans l'approche. Au contact avec une paroi, un rayon sonore peut alors être réfléchi dans une direction en accord avec la loi de réflexion de la façade, elle-même fonction de la fréquence sonore, de la taille des irrégularités de façade et de la zone active de réflexion. En pratique, malgré quelques études encore marginales que nous évoquerons à la section 3.4, il n'existe pas de telles lois de réflexion. A cet effet, nous nous sommes attachés à produire ces lois de réflexion, en suivant simultanément une piste théorique, une piste numérique et une piste expérimentale. Cette dernière étude sera présentée à la section 3.4.

3.2 Étude qualitative de la diffusion de façade

3.2.1 De la réflexion spéculaire à la diffusion : critère de Rayleigh

Bien avant de proposer un modèle théorique pour la diffraction d'une onde sonore par une surface irrégulière, il faut s'interroger sur l'origine du phénomène, notamment sur le lien entre la taille des irrégularités de façade et la longueur d'onde. Une réponse assez simple à cette question a été formulée par Rayleigh [8], et repose sur le calcul de la différence de phase entre deux rayons sonores. Considérons deux rayons sonores (figure 3.2) de longueur d'onde λ en incidence oblique (angle d'incidence θ) sur une surface plane, constituée par une cavité de profondeur d. La différence de trajet entre ces deux rayons se calcule aisément :

$$\Delta r = 2d\,\cos\theta, \tag{3.1}$$

ainsi que la différence de phase :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta r = \frac{4\pi\,d}{\lambda}\,\cos\theta. \tag{3.2}$$

Si la différence de phase est petite ($\Delta\phi \approx 0$, d petit), les deux rayons sont pratiquement en phase : l'onde sonore « voit » uniquement une surface parfaitement plane de telle sorte que la réflexion est purement spéculaire. Lorsque la valeur de Δr augmente, les deux rayons interfèrent de plus en plus jusqu'à ce qu'ils soient en opposition de phase ($\Delta\phi = \pi$). Il n'y a donc pas d'énergie sonore réfléchie dans la direction spéculaire, l'énergie étant alors diffractée dans toutes les autres directions. Dans ce dernier cas, il s'agit alors d'une diffraction diffuse. La limite entre la réflexion spéculaire ($\Delta\phi = 0$) et la diffraction diffuse ($\Delta\phi = \pi$) est choisie arbitrairement à $\Delta\phi = \pi/2$ (critère de Rayleigh). D'après la relation (3.2), on peut alors définir la quantité

$$d_\ell = \frac{\lambda}{8\,\cos\theta} \tag{3.3}$$

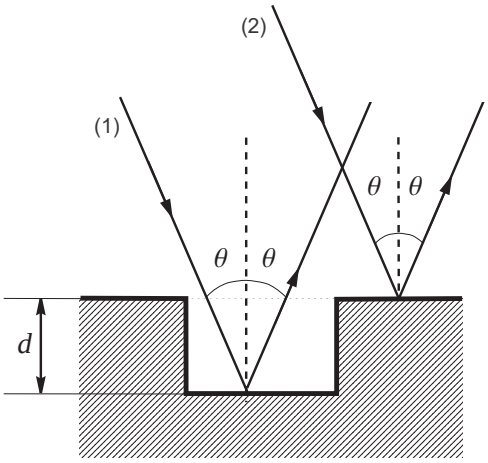


FIG. 3.2 — *Représentation géométrique du critère de* RAYLEIGH. *Les rayons sonores (1) et (2) se réfléchissent spéculairement sur le fond de la cavité et sur le plan de référence, respectivement.*

comme valeur limite de la taille de la cavité, pour passer d'une réflexion diffuse à une réflexion spéculaire. A noter que la fréquence de coupure bien connue

$$F_c = \frac{c}{4d}, \tag{3.4}$$

définissant la limite[3] des basses et hautes fréquences, c-à-d. respectivement entre la réflexion spéculaire et la diffraction diffuse, correspond en fait au cas où $\Delta\phi = \pi$ en incidence normale ($\theta = 0$). Les conventions ne sont donc pas les mêmes.

Au-dessus de la valeur limite ($d > d_\ell$) la surface est considérée comme irrégulière et produit une diffraction diffuse. Inversement en deçà de cette valeur limite ($d < d_\ell$), la surface est considérée comme parfaitement plane ; nous sommes alors en présence d'une réflexion spéculaire.

Il est important de préciser qu'en accord avec le principe des rayons sonores, le critère de RAYLEIGH ne s'applique pas si la taille des irrégularités de surface est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Si $d \simeq \lambda$, nous sommes en présence d'une « diffraction pure » ou « diffraction locale ».

A titre d'illustration, nous avons représenté à la figure 3.3, la valeur limite d_ℓ en fonction de la fréquence (sur la gamme de fréquence du bruit routier), pour différents angles d'incidence. Pour un angle d'incidence donné, la zone située en-dessous de la courbe détermine la zone de réflexion spéculaire : le plan contenant l'irrégularité se comporte comme une surface parfaitement plane. Au-dessus de cette même courbe, l'irrégularité de surface provoque un déphasage entre les rayons sonores réfléchis par le plan et par le fond de la cavité, provoquant une interférence destructive dans la direction spéculaire, source d'une diffraction diffuse.

La zone de « diffraction pure » se trouve au niveau de la courbe de légende « λ », correspondant aux valeurs de d telles que $d = \lambda$ (figure 3.4). En-dessous de cette courbe, les irrégularités sont plus petites que la longueur d'onde : il y a réflexion spéculaire. Au-dessus de cette courbe, les irrégularités sont donc de plus grandes dimensions que la longueur d'onde, et sont sources d'une « diffraction pure ».

Comme attendu, plus l'incidence est rasante ($\theta \to 90°$), plus la profondeur de la cavité devra être grande pour produire une diffraction diffuse. La courbe correspondant à un angle d'incidence de 60° peut être considérée comme une courbe de référence en incidence aléatoire. Certains auteurs [170] considèrent

3. Cette relation signifie simplement que lorsque la taille d des irrégularités ne dépasse pas le quart de la longueur d'onde ($d < \lambda/4$), la réflexion est considérée comme spéculaire [74].

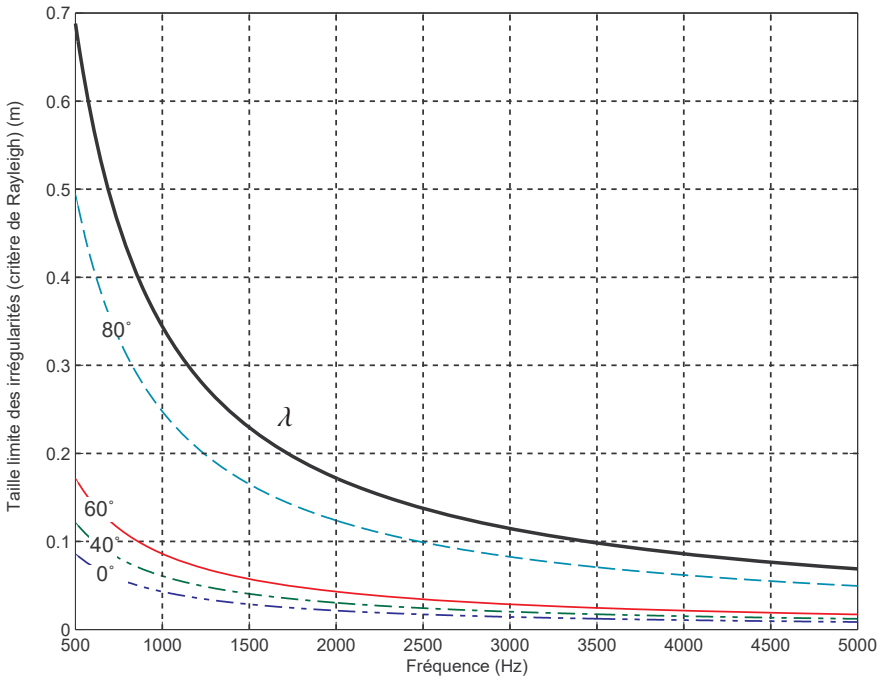


FIG. 3.3 — *Critère de* RAYLEIGH *(limite de réflexion spéculaire) en fonction de la fréquence et de l'angle d'incidence θ par rapport à la normale au plan ($c = 344$ m/s) :* — – – – *incidence normale ($\theta = 0°$),* — – – *$\theta = 40°$,* — *incidence aléatoire ($\theta = 60°$),* – – *$\theta = 80°$,* —— *$d = \lambda = c/F$.*

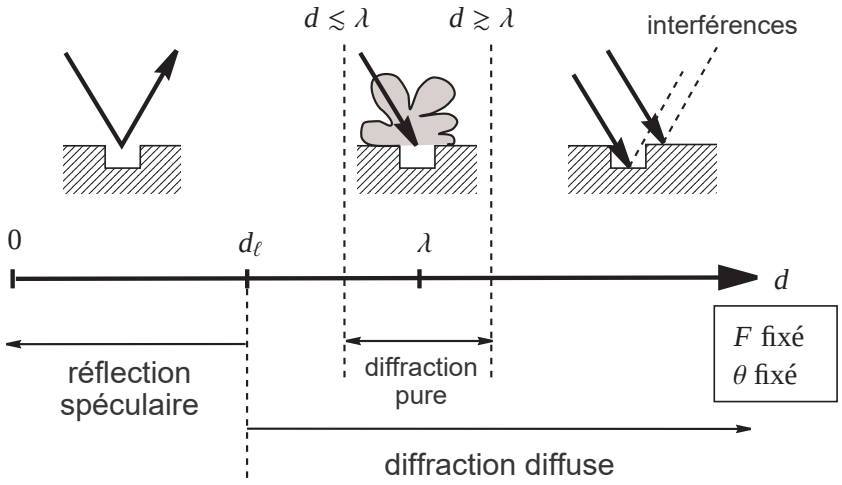


FIG. 3.4 — *Représentation schématique des « modes » de réflexion du son par une façade, en fonction de la taille des irrégularités : réflexion spéculaire, « diffraction pure » et diffraction diffuse (diffusion).*

en effet que les valeurs obtenues pour un angle d'incidence de 60° sont assez bien représentatives du phénomène d'absorption, *a fortiori* de la réflexion, en incidence aléatoire.

Cette courbe en incidence aléatoire montre très clairement que les irrégularités de taille supérieure à 17 cm environ participent à la diffraction en basse fréquence (500 Hz). En haute fréquence (5 000 Hz), les objets de taille supérieure à 2 cm participent à la diffraction diffuse.

Néanmoins, compte tenu des distances source-récepteur (plusieurs dizaines de mètres) que l'on peut rencontrer en milieu urbain, la condition d'incidence rasante ($\theta > 80°$) est très souvent vérifiée (figure 3.5), notamment lorsque la source et le récepteur sont proches de la façade. Ceci sous-entend que vraisemblablement, seuls les objets de grande taille (5 cm à 5 000 Hz et 50 cm à 500 Hz) seront prépondérants dans le phénomène de diffraction diffuse.

Enfin, pour des objets de taille inférieure au centimètre, toutes fréquences d'étude confondues, et quel que soit l'angle d'incidence, la réflexion est considérée comme spéculaire : l'onde sonore ne « voit » pas ces irrégularités.

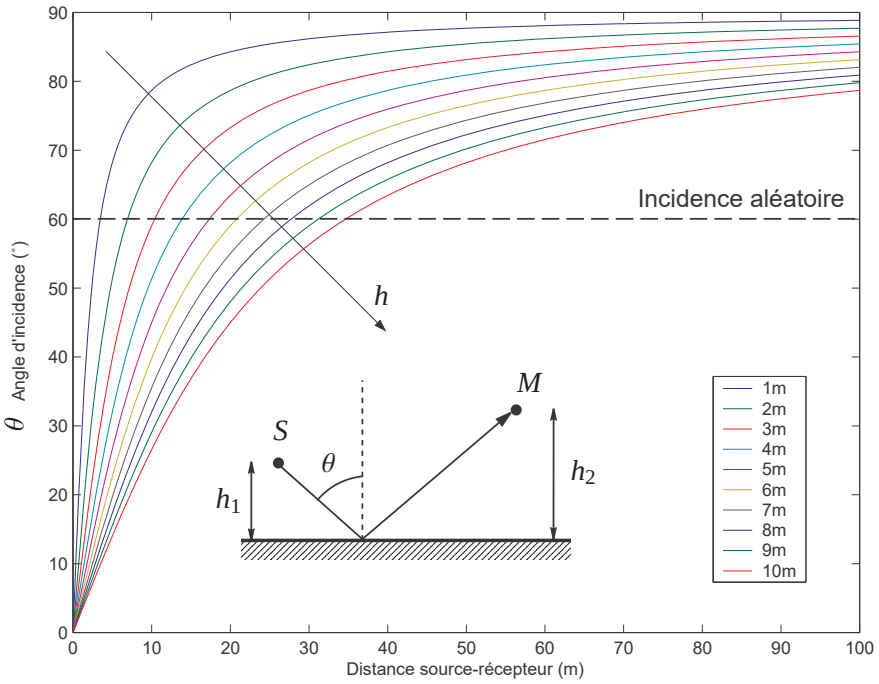


FIG. 3.5 — *Angle d'incidence sur une façade en fonction de la distance source-récepteur et pour plusieurs valeurs de $h = h_1 = h_2$ (de 1 m à 10 m). Dans cet exemple $h_1 = h_2 = h$.*

L'analyse d'une façade réelle en termes de surface relative (par rapport à l'ensemble de la façade) et de retrait par rapport au plan « zéro » (figure 3.6 pour une façade POISSONNIENNE par exemple), montre que la diffusion de façade peut être générée simultanément par différents éléments architecturaux. La réflexion spéculaire ne peut donc pas être considérée comme l'unique phénomène.

3.2.2 Diffraction par les arêtes de la façade

En première approximation, une façade peut être caractérisée comme un panneau plan, de dimension finie. Lorsque la longueur d'onde est petite devant les dimensions de la façade, la diffraction par les arêtes de la façade est négligeable. A l'inverse, lorsque la longueur est de l'ordre de grandeur des dimensions de la façade, la diffraction par les arêtes est bien présente. Cette limite peut être déterminée par une

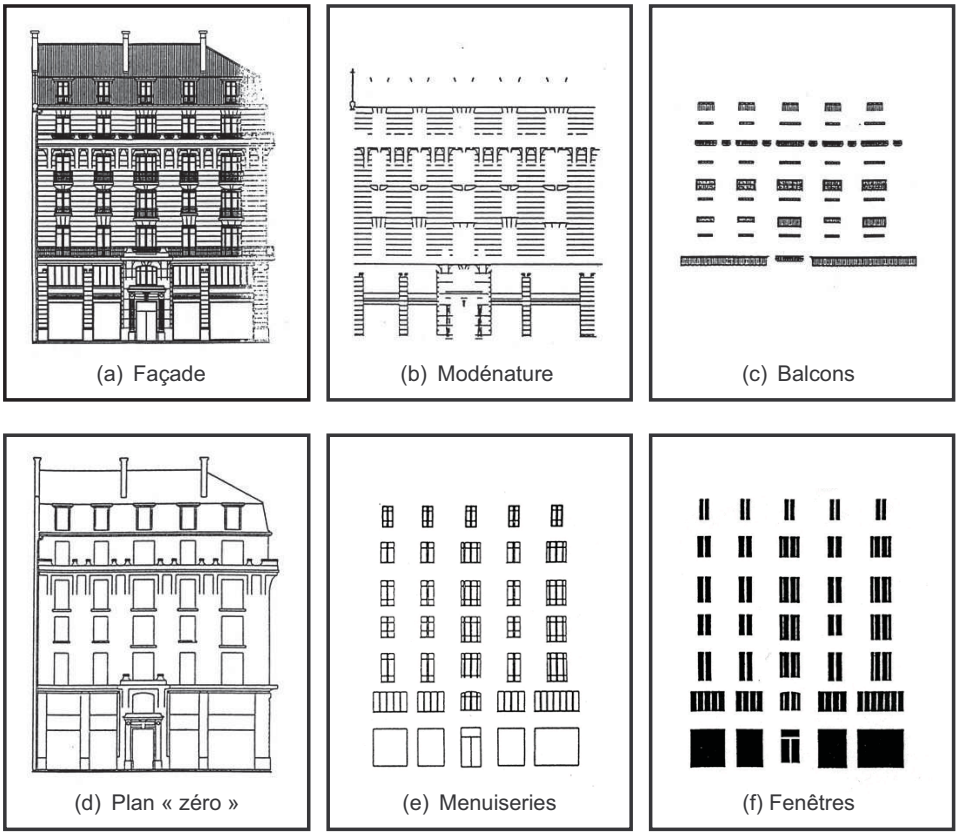


FIG. 3.6 — *Décomposition d'une façade de type* POISSONNIENNE *en éléments de base : (a) façade originale, (b) modénature [*18%,40 *cm], (c) balcons [*9%,80 *cm], (d) plan « zéro » [*35%,0 *cm], (e) menuiseries [*8%,−50 *cm], (f) vitres [*30%,−60 *cm]. D'après les données fournies par* P. WOLOSZYN *(CERMA).*

fréquence de coupure dont l'expression pour un panneau rectangulaire prend la forme [40] :

$$f_c = \frac{c\, d^*}{2\,(2a\cos\beta)^2}, \tag{3.5}$$

avec

$$d^* = \frac{2h_1\, h_2}{h_1 + h_2}, \tag{3.6}$$

où β désigne l'angle entre la direction d'incidence sur la façade et la direction de réflexion, a la demi-longueur (ou demi-largeur) du panneau, et où h_1 et h_2 sont les distances entre la source sonore et la façade, et entre le récepteur et la façade (figure 3.5). Un calcul rapide pour des dimensions de l'ordre de celles pouvant être rencontrées en milieu urbain ($h_1 = h_2 = 5$ m, pour une rue de 50 m de longueur), montre que la diffraction apparaît pour quelques Hz uniquement, donc bien en-dessous des fréquences qui nous intéressent. On peut donc considérer que la diffraction par une façade (vue comme un panneau plan) n'est pas un phénomène prépondérant dans la gamme de fréquence qui nous occupe. Il ne faut pas confondre ce phénomène avec la diffraction par une arrête de la façade qui elle pourra être présente.

3.2.3 Champ proche et champ lointain

La diffraction d'une onde sonore par une surface peut être envisagée en considérant la formulation intégrale des problèmes aux limites linéaires de l'acoustique [20]. Cette formulation permet d'exprimer le champ sonore total à partir dune équation intégrale faisant intervenir la fonction de Green du problème, solution de l'équation d'Helmholtz. Appliquée à la diffraction acoustique par une façade (vue comme un panneau), la résolution du problème intégral se trouve très simplifiée en considérant les deux hypothèses de Kirchhoff, stipulant que les champs de pression et de vitesse acoustique sont nuls sur la surface, et que le champ de pression dans le volume d'émission n'est pas perturbé par la présence de l'écran. La formulation intégrale ainsi simplifiée peut ensuite être développée au premier ordre et au second ordre pour donner respectivement les solutions de Fraunhofer et de Fresnel [79]. Cox a montré que ces solutions sont valables principalement en champ lointain, tant que la distance entre le récepteur et le panneau est supérieure à [40] :

$$d_{\ell_1} = 0.4 \times k\, a^2, \tag{3.7}$$

où a est la demi-longueur de la plus grande des dimensions du panneau. Plus exactement, cette relation définit la limite de validité de la solution de Fraunhofer. Dans une autre référence Cox propose également la relation plus générale [42, §8.4.1] :

$$d_{\ell_2} = \frac{a^2}{\lambda} \approx 0.2 \times k\, a^2. \tag{3.8}$$

La relation (3.8) définit plus précisément la limite entre le champ proche et le champ lointain, en incidence normale. Néanmoins, comme le montre Cox, cette limite est en pratique beaucoup plus difficile à appréhender [42, §4.4.1 et §8.4.1]. En-dessous de cette limite (*i.e.* en champ proche), la réflexion sonore peut être envisagée par des méthodes classiques des sources-images. Au-dessus de cette limite (*i.e.* en champ lointain), la diffraction par l'écran devra être envisagée par une approche ondulatoire. La figure 3.7 montre que cette distance limite est en général très grande dès les basses fréquences. En pratique, nous pouvons donc considérer que l'approche champ proche est la plus adaptée à la modélisation de la réflexion du son par une façade.

3.2.4 Zones actives de réflexion

Une autre information importante réside dans la détermination de la surface de la façade qui participe le plus activement à la réflexion de l'énergie sonore en regard de l'énergie réfléchie par l'ensemble de la façade. Cette surface définit la zone active de réflexion de la façade. L'aspect pratique est évident,

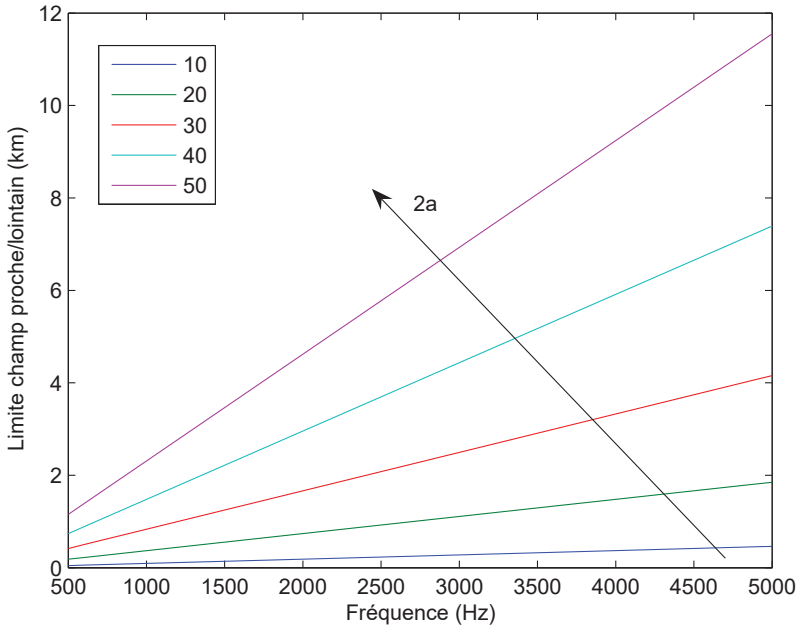


FIG. 3.7 — *Limite champ proche-champ lointain pour une façade de longueur* $2a = 10, 20, 30, 40, 50$ *m. D'après la relation (3.8).*

puisqu'il ne sert à rien de considérer la totalité de la façade si seule une partie contribue presque en totalité à la réflexion. En réponse à cette question, il est usuel de considérer que seule la première zone de FRESNEL participe activement au champ total [8].

Dans toute cette partie, nous ne prendrons pas en compte la réflexion par le sol, pour nous concentrer uniquement sur la réflexion du son par la façade.

3.2.4.1 Principe d'HUYGENS

Pour bien déterminer la zone active de réflexion, il faut se replonger dans la définition des zones de FRESNEL, mais également dans le principe d'HUYGENS. Considérons une source S ponctuelle omnidirectionnelle au-dessus d'un plan parfaitement réfléchissant (P). Appliquant le principe d'HUYGENS, l'onde sonore réfléchie peut être construite en considérant chaque point du plan comme une source secondaire, dont l'amplitude et la phase sont égales à l'amplitude et à la phase du front d'onde incident au point du plan considéré [43, 215]. Le champ total en un point d'observation M est alors la somme de toutes les contributions des sources secondaires. Puisque chaque source secondaire est caractérisée par une relation de phase particulière avec toutes les autres sources secondaires, cette procédure est à même de modéliser les phénomènes d'interférences causés par la présence du plan réfléchissant, phénomènes qui, par construction, ne peuvent pas être prévus par la théorie des rayons sonores. C'est à ce titre, d'ailleurs que le principe d'HUYGENS et les zones de FRESNEL ont été appliqués pour modéliser la diffraction par les écrans, ou plus récemment la propagation d'une onde sonore au-dessus d'un plan absorbant [52].

3.2.4.2 Zones de FRESNEL

Ainsi, compte tenu de ces relations de phase particulières entre toutes ces sources secondaires, il est possible de déterminer sur le plan de réflexion, l'ensemble des points qui, pour une position de source et de récepteur donnée, et pour une fréquence particulière, rayonneront au point récepteur M avec une

différence de marche δ par rapport au champ direct (figure 3.8) :

$$R_1 + R_2 = R + \delta = \text{constante}, \tag{3.9}$$

où R est la distance entre la source et le récepteur. Cette relation définit l'équation d'une ellipsoïde de foyers S et M. Ainsi, l'ensemble des sources secondaires Q du plan de réflexion qui auront la même relation de phase au point récepteur M est situé à l'intersection de cette ellipsoïde avec le plan (P). Cette intersection est une ellipse caractérisée par son centre[4] x_0

$$x_0 = \frac{r}{2}\left\{1 - \frac{\frac{h_2^2 - h_1^2}{r^2}}{[\frac{\delta}{r} + \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{r}\right)^2}]^2 - 1}\right\}, \tag{3.10}$$

ainsi que par son grand axe a et son petit axe b $(a > b)$:

$$a = b\sqrt{1 + \frac{1}{[\frac{\delta}{r} + \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{r}\right)^2}]^2 - 1}}, \tag{3.11}$$

et

$$b = \frac{r}{2}\sqrt{\left(\frac{\delta}{r}\right)^2 + \frac{2\delta}{r}\sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{r}\right)^2}} \times \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{h_2 + h_1}{r}\right)^2}{[\frac{\delta}{r} + \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{r}\right)^2}]^2 - 1}}. \tag{3.12}$$

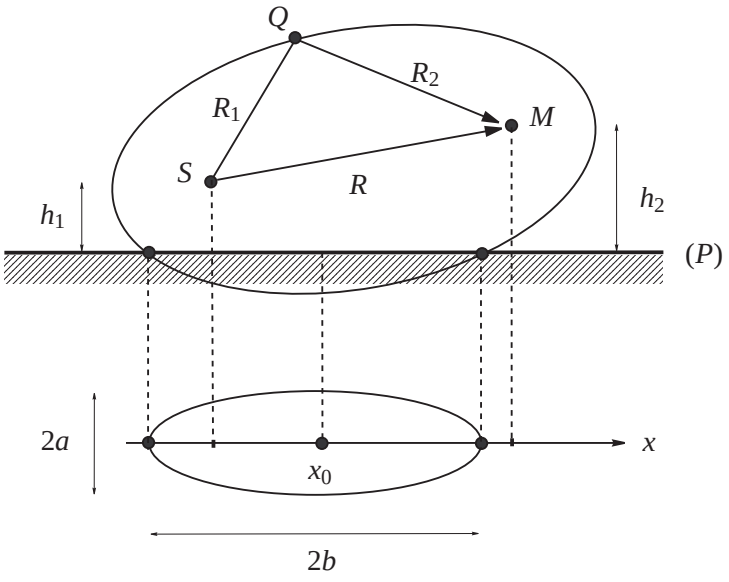


FIG. 3.8 — *Intersection d'une ellipsoïde de foyer S et M avec le plan (P).*

L'ensemble des points sources (donc les ellipses) correspondant à une différence de marche de

$$\delta \equiv \delta_n = n\frac{\lambda}{2} \tag{3.13}$$

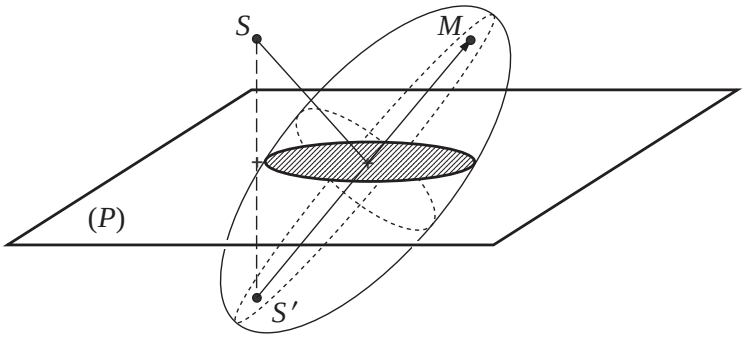


FIG. 3.9 — *Intersection d'une ellipsoïde de foyer S' et M avec le plan (P). Principe de la source image.*

rayonneront donc en phase (n pair) ou en opposition de phase (n impair) avec le champ direct.

Ainsi pour déterminer les points Q du plan, on peut réécrire la relation (3.9) sous la forme

$$R_1 + R_2 = R + \delta_n. \tag{3.14}$$

Pour déterminer explicitement ces ellipses, il est usuel de considérer la source image S' de S par rapport au plan de réflexion (figure 3.9). Dans ce cas, c'est l'excès de différence de marche avec le rayon spéculaire et la réflexion, qu'il faut prendre en compte :

$$\delta_n = \delta_0 + n\frac{\lambda}{2} \tag{3.15}$$

où δ_0 est la différence de marche entre le rayon spéculaire et le rayon direct. Par définition, la n^{e} zone de FRESNEL est définie par la région (couronne) séparant deux ellipses successives (figure 3.10).

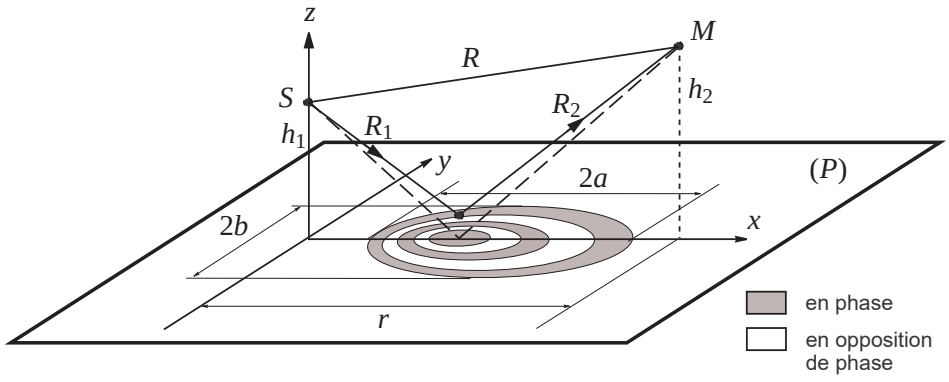


FIG. 3.10 — *Réflexion par un plan réfléchissant* (*P*). *Représentation des* 5 *premières zones de* FRESNEL.

4. La relation donnant le centre de cette ellipse est différente de celle que le lecteur pourra trouver dans le livre de BECKMANN [8] ou celui de KERR [122], mais qui semble erronée. En ce qui concerne le grand axe a et le petit axe b, les formules sont correctes.

A titre d'exemple, la figure 3.11 montre les 5 premières zones de FRESNEL d'un plan parfaitement réfléchissant, pour une configuration source-récepteur particulière ($h_1 = 5$ m, $h_2 = 2$ m, $r = 10$ m) à 1 000 Hz. Nous avons également représenté sur le plan de réflexion la « trace » d'un réseau de fenêtres de dimension et de répartition arbitraire (fenêtres de 1 m×1.50 m disposées périodiquement avec un pas $\Delta x = 2.50$ m et $\Delta y = 3$ m).

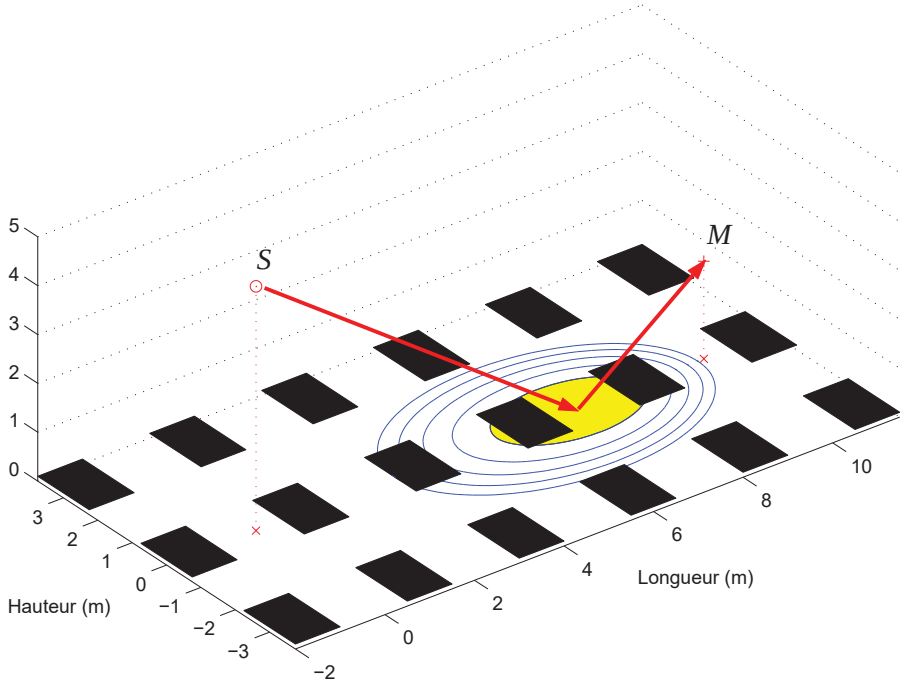


FIG. 3.11 — *Représentation des* 5 *premières zones de* FRESNEL *pour une configuration source S - récepteur M définie par* $h_1 = 5$ *m,* $h_2 = 2$ *m,* $r = 10$ *m (1 000 Hz). La première zone de* FRESNEL *est représentée en jaune.*

On remarquera que le centre de chaque ellipse dépend en particulier de la longueur d'onde, donc de la fréquence (*cf.* relation 3.10)). Néanmoins, en première approximation, et comme le montre la figure 3.12, le centre de chacune de ces ellipses est très proche du point de réflexion spéculaire, notamment en haute fréquence et lorsque le récepteur s'éloigne de la façade. On remarquera également que lorsque le récepteur et la source sont à égale distance de la façade ($h_1 = h_2$), le point de réflexion spéculaire et le centre de la première zone de FRESNEL sont confondus en $x_0 = r/2$.

Lorsque la distance r est grande devant la longueur d'onde λ et les hauteurs h_1 et h_2 (ce qui est le cas en pratique), les relations donnant le centre x_{0n} et les axes a_n et b_n des zones de FRESNEL s'écrivent plus simplement [122] :

$$x_{0n} \approx \frac{r}{2} \frac{1 + \frac{2h_1(h_1+h_2)}{n\lambda r}}{1 + \frac{(h_1+h_2)^2}{n\lambda r}}, \tag{3.16}$$

$$a_n \approx \frac{r}{2} \frac{\sqrt{1 + \frac{2\delta_0}{n\lambda}}}{1 + \frac{(h_1+h_2)^2}{n\lambda r}}, \tag{3.17}$$

et

$$b_n \approx \frac{\sqrt{n\lambda r}}{2} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\delta_0}{n\lambda}}{1 + \frac{(h_1+h_2)^2}{n\lambda r}}} \tag{3.18}$$

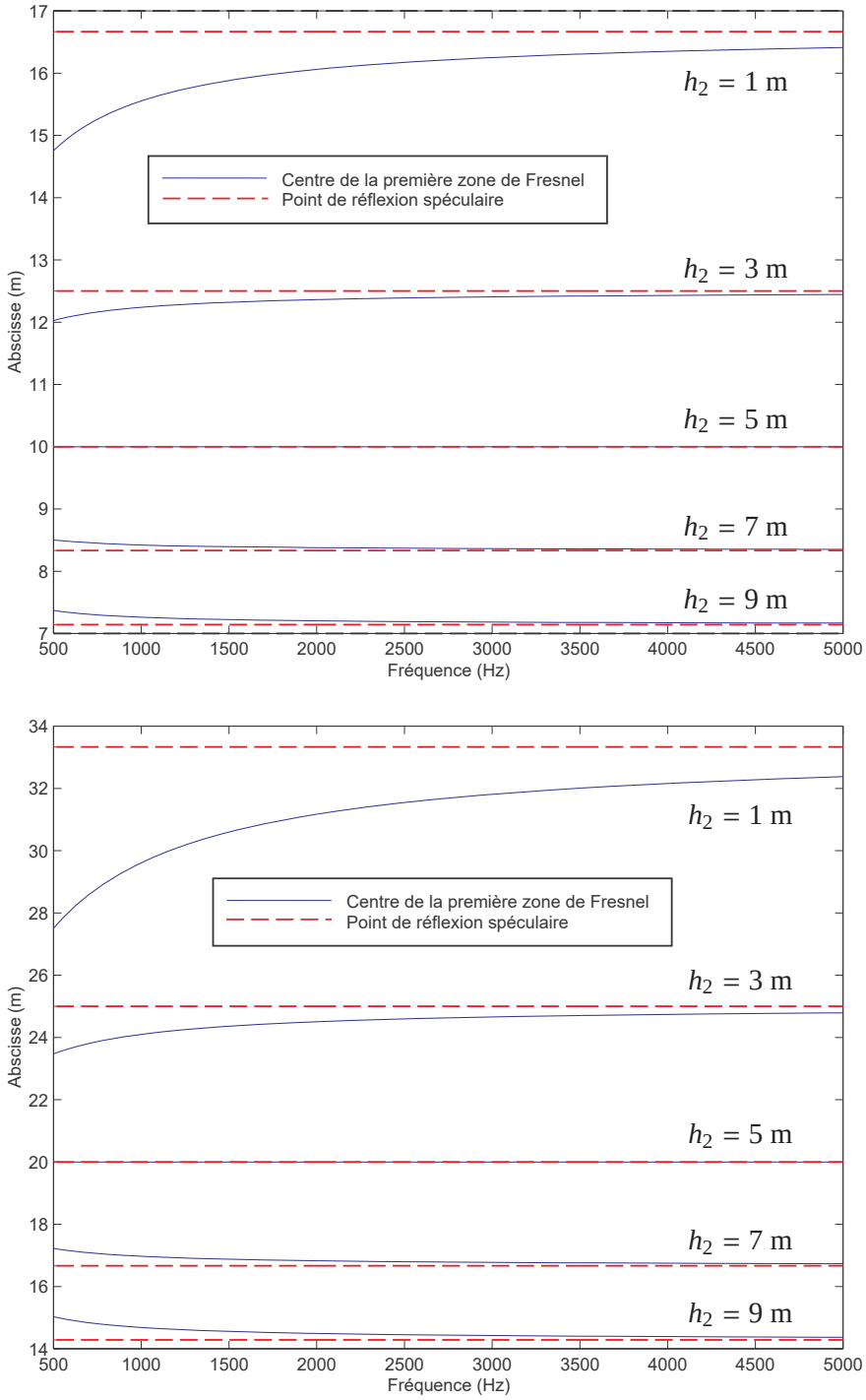


FIG. 3.12 — *Evolution de la position du centre de la première zone de* FRESNEL *(courbe continue), en fonction de la fréquence, pour une distance source S - récepteur M égale à* 20 *m (en haut) et* 40 *m (en bas), et pour plusieurs écartements du récepteur par rapport à la façade ($h_1 = 5$ m, $h_2 = 1, 3, 5, 7, 9$ m). La courbe discontinue (– –) illustre la position du point de réflexion spéculaire.*

3.2.4.3 Bilan énergétique

La première zone de FRESNEL ($n = 1$) détermine donc l'ensemble des points du plan qui seront en phase avec la réflexion spéculaire. Dans la mesure

- où la surface s_i de chaque zone est approximativement égale à la surface de la zone précédente (figure 3.13, $s_{i+1}/s_i \approx 1$),
- que sur chacune de ces zones, l'amplitude et la phase de chaque source secondaire sont constantes,
- et que l'amplitude des sources secondaires diminue progressivement d'une zone à l'autre,

on en déduit que les sources disposées dans la zone $i+1$ annulent[5] en partie l'effet des points sources de la zone i : la contribution des points de la zone 1 est annulée en partie par la zone 2 et ainsi de suite pour toutes les autres zones, qui s'annulent mutuellement partiellement.

Pour se convaincre de la première hypothèse, il suffit de reprendre les relations (3.11) et (3.12). Sachant que la surface s_i d'une ellipse i a pour expression $\pi\, a_i b_i$, et remarquant que pour r grand $\delta_{i+1}/r \approx \delta_i$, on a tout simplement :

$$\frac{s_{i+1}}{s_i} = \left(\frac{b_{i+1}}{b_i}\right)^2 \approx 1. \tag{3.19}$$

La seconde hypothèse repose uniquement sur le fait que les zones de FRESNEL sont relativement petites. La troisième est évidente, puisque le chemin parcouru augmente peu à peu.

On montre ainsi[6] que l'amplitude du champ sonore réfléchi est, en première approximation, produit presque essentiellement par la première moitié de la première zone de FRESNEL [8, 43, 52], les autres zones s'annulant deux à deux.

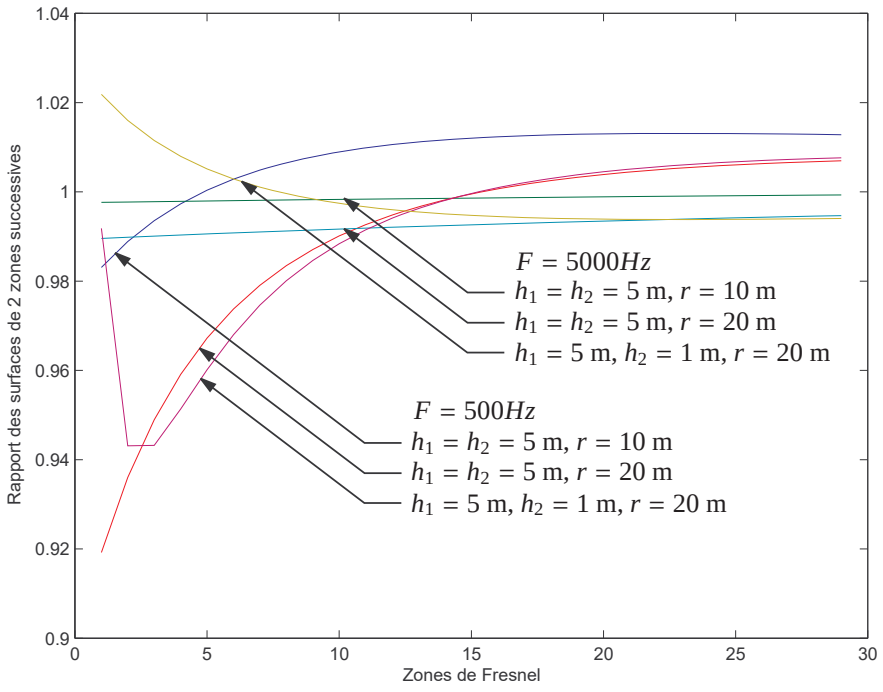


FIG. 3.13 — *Rapport des deux zones de* FRESNEL *successives :* s_2/s_1, $s_3/s_2 \cdots$ s_n/s_{n-1}, s_i *désignant la surface de la zone de* FRESNEL *i.*

5. Il s'agit donc bien d'une interférence.
6. Un calcul analytique est proposé dans la référence [101].

3.2.4.4 Zone active de réflexion d'une façade

Dans la mesure où la première zone de Fresnel contribue presque essentiellement au champ total en un point récepteur, la zone active de réflexion d'une façade urbaine, peut être définie comme la première zone de Fresnel. A titre d'illustration, nous avons représenté sur la figure 3.14, la première zone de Fresnel d'un plan réfléchissant sur lequel nous avons également représenté la trace d'un réseau de fenêtres, pour différentes configurations de source et de récepteur, ainsi que pour différentes fréquences.

Comme attendu, nous observons que la première zone de Fresnel diminue lorsque la fréquence augmente : les hautes fréquences sont « énergétiquement » plus directives que les basses fréquences : les ondes sonores peuvent être dans ce cas assimilées à des rayons sonores, réfléchis spéculairement. Ceci justifie d'ailleurs le concept des rayons sonores en haute fréquence.

D'autre part, l'étendue de la première zone de Fresnel augmente avec la distance source-récepteur (figures 3.14 et 3.15) : plus l'incidence est rasante, plus la zone active de la façade sera grande dans la direction source-récepteur (variation longitudinale). La variation transversale de la première zone de Fresnel varie beaucoup plus lentement que la variation longitudinale. En effet, reprenant les relations (3.11) et (3.12), le rapport

$$\frac{a}{b} = \sqrt{1 + \frac{1}{[\frac{\delta}{r} + \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{r}\right)^2}]^2 - 1}} \tag{3.20}$$

est toujours supérieur à l'unité. Reprenant cette fois les relations approchées (3.17) et (3.18), on a également

$$\frac{b}{a} \approx \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \sqrt{1 + \frac{(h_1 + h_2)^2}{\lambda r}}. \tag{3.21}$$

Le rapport b/a diminue donc lorsque la fréquence ou la distance r augmentent.

A mesure que le point récepteur s'approche de la façade (réciproquement s'éloigne), la première zone de Fresnel se déplace vers la projection du point récepteur sur la façade (réciproquement, se rapproche vers la projection du point source)[7]. L'étalement longitudinal de la première zone de Fresnel augmente lorsque le point d'observation (ou la source) se rapproche du plan de la façade.

Aux ordres de grandeurs géométriques considérées dans une configuration urbaine (sources et récepteurs à 5 m de la façade, éloignés de quelques dizaines de mètres l'un de l'autre), les schémas de la figure 3.14 montrent bien que seuls les éléments architecturaux situés entre les projections de la source et du récepteur sur la façade, participent au champ total réfléchi. Lorsque la source ou le récepteur sont proches de la façade (relativement l'un de l'autre), seule une faible partie de cette zone longitudinale participe à la réflexion.

Toutefois, il est important de signaler que ces considérations qualitatives, qui reposent sur le principe des zones de Fresnel, n'ont de sens que pour un plan infini parfaitement réfléchissant ou uniformément rugueux (*i.e.* tous les points du plan considéré ont les mêmes propriétés). Lorsque, le plan est constitué d'une distribution spatiale particulière d'objets architecturaux, de dimensions diverses (ce qui est le cas pour le milieu urbain), l'importance relative de chaque zone de la façade ne peut être évaluée explicitement que par le calcul de l'intégrale de Kirchhoff [8]. Néanmoins, le calcul de la première zone de Fresnel donne une information sur la zone la plus active de la façade.

3.2.5 Conclusion de l'étude qualitative

Cette partie nous a permis de caractériser qualitativement le phénomène de réflexion du son par une façade. Nous avons ainsi montré que la présence des irrégularités de façades sont sources de multiples diffractions (en fonction de la taille des irrégularités et de la fréquence), générant une diffusion sonore

7. La première zone de Fresnel étant centrée, en première approximation, sur la réflexion spéculaire, le déplacement du point d'observation provoque le déplacement du point de réflexion spéculaire et donc de la première zone de Fresnel.

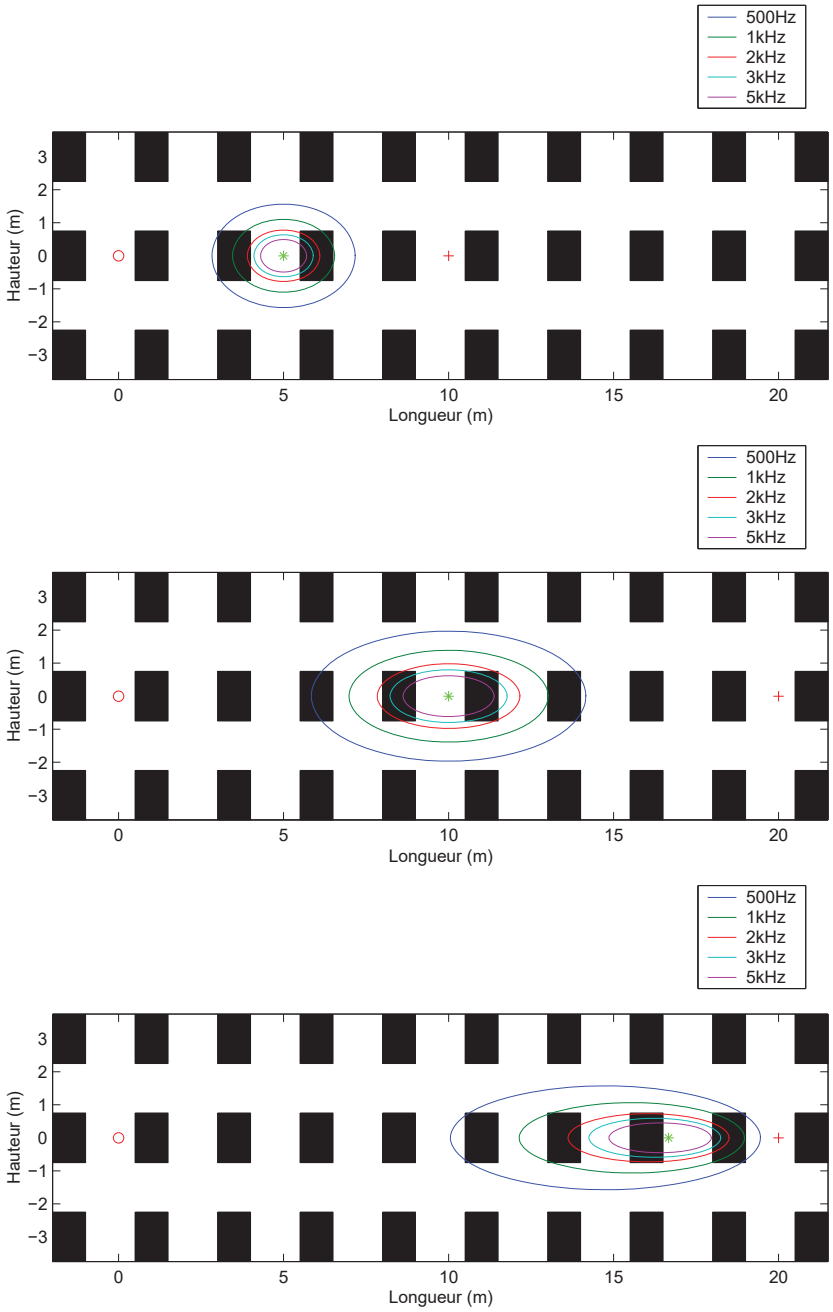


FIG. 3.14 — *Représentation de la première zone de* FRESNEL *(n = 1) pour plusieurs configurations de sources (∘) et de récepteurs (+), en fonction de la fréquence. En haut : $h_1 = h_2 = 5$ m, $r = 10$ m. Au milieu : $h_1 = h_2 = 5$ m, $r = 20$ m. En bas : $h_1 = 5$ m, $h_2 = 1$ m, $r = 20$ m. La surface de la première zone de* FRESNEL *diminue quand la fréquence augmente.*

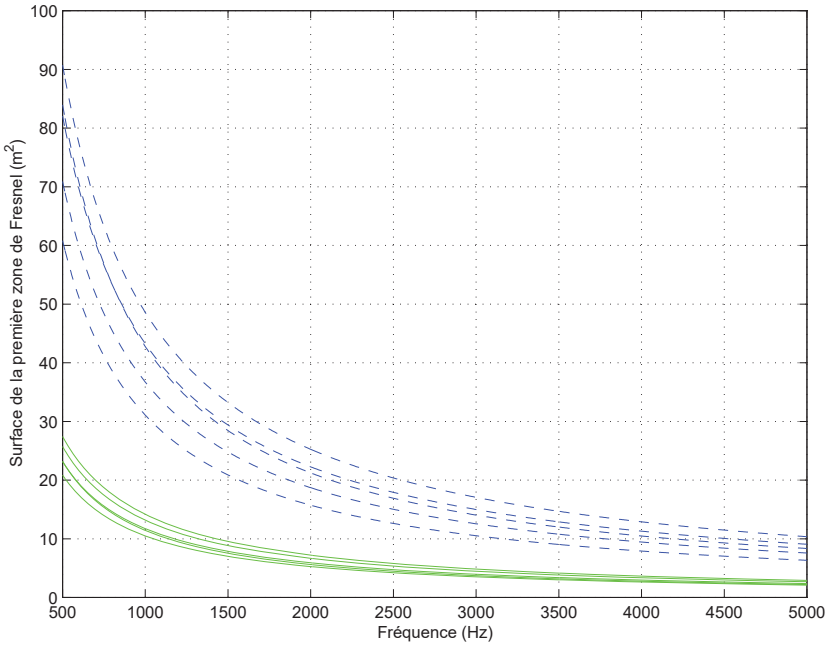


FIG. 3.15 — *Evolution de la surface de la première zone de* FRESNEL *en fonction de la fréquence, pour différentes distances source-récepteur (— —, 40 m ; —, 20 m) et pour plusieurs écartements h_2 du récepteur par rapport à la façade ($h_1 = 5$ m, $h_2 = 1, 3, 5, 7, 9$ m).*

à l'échelle de la façade. Une autre étude nous a permis de quantifier plus finement la zone active de réflexion de la façade, qui se limite bien souvent à des ellipses de quelques mètres de longueur et de largeur, soit une surface englobant par exemple une ou deux fenêtres. Cette étude a très bien montré qu'une part très faible de la surface totale d'une façade, participe réellement à la réflexion du son. Enfin, compte tenu des distances usuelles entre les sources sonores et les points réceptions en milieu urbain (face à la dimension de la façade), il semble qu'une approche de type « champ proche » soit la plus adaptée pour caractériser la réflexion du son par une façade.

3.3 Effets de diffusion de façade sur la propagation du son en milieu urbain

3.3.1 Introduction

Cette partie présente une étude numérique montrant les effets de la diffusion par des façades urbaines sur la propagation du son dans une rue. Les simulations numériques reposent sur une approche « particule sonore » que nous avons présentées au paragraphe 2.2.7 et qui sera détaillée au chapitre 4. L'objectif de ces simulations est d'évaluer la répartition spatiale au cours du temps des particules sonores, en fonction des dimensions du milieu de propagation, et des lois de réflexion de façades. Deux échelles différentes ont ainsi été envisagées.

Dans un premier temps (*cf.* §3.3.3), nous nous sommes intéressés à la propagation des particules sonores à l'échelle d'un quartier urbain (en deux dimensions), caractérisé par un arrangement périodique de rues en « U ». Comme nous le verrons au paragraphe 3.3.3, cette approche a permis de mettre en évidence le caractère diffusif de la distribution des particules dans le milieu de propagation. C'est d'ailleurs sur la base de ces résultats que nous avons fondé l'ensemble des développements, en acoustique urbaine comme en acoustique des salles, que nous présenterons dans les prochains chapitres.

Dans un second temps (*cf.* §3.3.4), nous nous sommes focalisés sur la propagation des particules sonores à l'échelle de la rue, de manière à mieux appréhender les effets de la diffusion de façades sur l'atténuation sonore et sur la réverbération dans la rue. Les résultats ont confirmé l'importance de la prise en compte de ces effets dans les outils prévisionnels en acoustique urbaine.

Le point essentiel et l'originalité de ces simulations repose sur la modélisation des effets de diffusion de façade. Nous avons ainsi été amené à développer des procédures numériques basées sur des méthodes de Monte-Carlo (*i.e.* des méthodes de tirages aléatoires), pour simuler différentes conditions de réflexion sur les façades. Ces procédures sont préalablement présentées dans le paragraphe 3.3.2 qui suit.

3.3.2 Modélisation de la réflexion de façade par des tirages aléatoires

3.3.2.1 Généralités

Au contact d'une paroi définie par un coefficient d'absorption en énergie α, une onde sonore sera en partie absorbée par le matériau constituant la paroi (pour une part α) et en partie réfléchie (pour une part $1-\alpha$). D'autre part, suivant la forme, la taille et la distribution des irrégularités de la paroi, l'onde sonore pourra être réfléchie simultanément dans la direction spéculaire et dans d'autres directions. Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.1.1, il est commun de considérer qu'une fraction $1-s$ de l'énergie sonore sera réfléchie dans la direction de réflexion spéculaire, tandis qu'une fraction s de l'énergie sera réfléchie dans les autres directions de l'espace, suivant une loi de réflexion caractérisée par les irrégularités de la paroi [65]. Dans ce dernier cas, on parle alors de réflexion « diffuse », s étant appelé coefficient de diffraction[8] (ou *scattering coefficient* en anglais). Pour pouvoir déterminer exactement la direction de la réflexion diffuse, il est donc nécessaire de connaître la forme de la loi de réflexion de la paroi. En acoustique des salles, de nombreuses études théoriques et expérimentales sont actuellement en cours pour caractériser ou mesurer ces lois de réflexion [41, 238]. En acoustique urbaine, malgré quelques approches que nous présenterons dans la section 3.4, ce type d'étude reste plus marginal[9]. Toutefois, on peut considérer que cette loi de réflexion est définie par la forme, la taille et la distribution des irrégularités qui constituent la paroi.

Par la suite, et de manière à être homogène avec les travaux sur la modélisation des champs diffus que nous présenterons au chapitre 4, nous utiliserons plutôt le coefficient d'accommodation d, tel que $d = 1 - s$, au lieu du *scattering coefficient* s. Chaque paroi du domaine doit donc être caractérisée par son coefficient d'absorption α et son coefficient d'accommodation d ($d = 1$ pour une réflexion spéculaire et $d = 0$ pour une réflexion « diffuse »).

3.3.2.2 Modélisation de la réflexion par tirage aléatoire

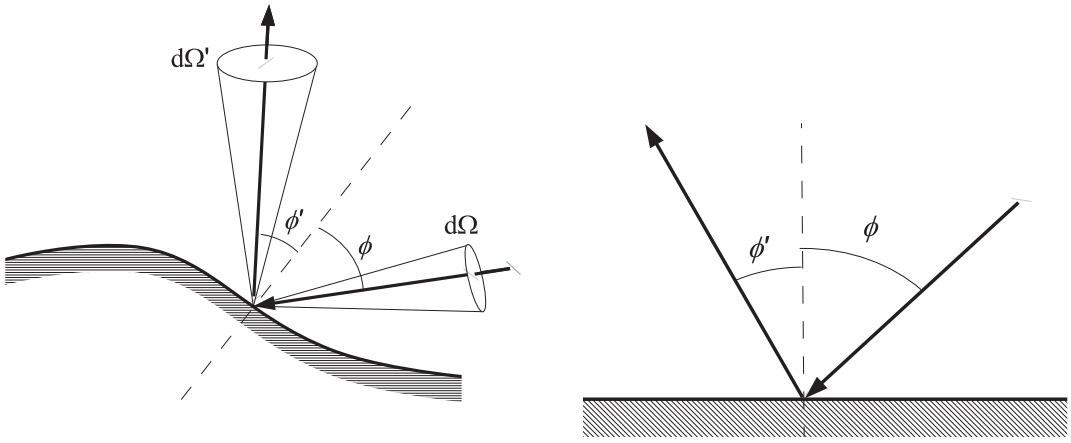
Une particule sonore entrant en collision avec une paroi pourra donc, soit être absorbée par la paroi (avec une probabilité α), soit être réfléchie dans une nouvelle direction de propagation (avec une probabilité $1-\alpha$). En pratique, le choix absorption/réflexion est réalisé en tirant aléatoirement un nombre u entre 0 et 1, suivant une distribution uniforme. Si ce nombre est inférieur à α (au point considéré), la particule est absorbée et disparaît du milieu de propagation. Si ce nombre est supérieur à α, la particule est réfléchie et poursuit sa propagation dans une nouvelle direction de l'espace. Pour déterminer le type de réflexion (spéculaire ou diffuse), un nouveau tirage aléatoire v est réalisé entre 0 et 1. Si ce nombre est inférieur à la valeur de d (*i.e.* $v < d$) au point considéré, la particule est réfléchie spéculairement, conformément aux lois de Snell-Descartes bien connues. Dans le cas contraire (*i.e.* $v > d$), la réflexion est « diffuse », la direction de réflexion « diffuse » étant à nouveau obtenue par des tirages aléatoires sur la loi de réflexion. Suivant l'expression analytique de la loi de réflexion, nous pouvons utiliser soit la

8. Voir la discussion à la page 39.

9. Les recherches en « acoustique urbaine » sont beaucoup plus récentes et donc beaucoup moins nombreuses qu'en « acoustique des salles ». Les premières études en acoustique des salles remontent au début des années 1920 [212], tandis qu'elles datent des années 60 en acoustique urbaine [244].

méthode de la distribution cumulative inverse, soit la méthode du rejet (ou de réjection). Pour plus de précision sur la méthode, le lecteur pourra se reporter à l'article [195] présenté à l'annexe A (page A).

3.3.2.3 Formalisme des lois de réflexion dans le concept particulaire



(a) Représentation en 3D (b) Représentation en 2D

Fig. 3.16 — *Géométrie élémentaire d'une réflexion par une façade. Représentation en 3D (a) : ϕ et ϕ' désignent respectivement les angles d'incidence et de réflexion par rapport à la normale à la paroi. Les angles θ et θ' (dans le plan tangent) des directions d'incidence et de réflexion, ne sont pas représentés ($\phi, \phi' \in [0, \pi/2]$ et $\theta, \theta' \in [0, 2\pi]$). Représentation en 2D (b) : les directions d'incidence et de réflexion sont définies uniquement par les angles ϕ et ϕ', compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.*

Considérons une particule sonore incidente sur une paroi, dont la direction incidente est définie par les coordonnées sphériques (θ, ϕ) (figure 3.16). Cette particule a une probabilité $P(\theta, \phi; \theta', \phi') \equiv P(\Omega, \Omega')$ d'être réfléchie dans l'angle solide élémentaire $d\Omega' = \sin\phi'\, d\phi'\, d\theta'$ [108, 109, 110, 144]. $P(\Omega, \Omega')\, d\Omega'$ représente en fait la fraction de la puissance sonore incidente qui est réfléchie dans l'angle solide $d\Omega'$. Soit $j(\theta, \phi)$ le flux incident de particules. Le flux de particules réfléchies $j'(\theta', \phi')$ a pour expression

$$j'(\theta', \phi') \cos\phi' = \int P(\theta, \phi; \theta', \phi')\, j(\theta, \phi) \cos\phi\, d\Omega. \tag{3.22}$$

En définissant la loi de réflexion $R(\theta, \phi; \theta', \phi') \equiv R(\Omega, \Omega')$ de la manière suivante

$$R(\theta, \phi; \theta', \phi') = \frac{P(\theta, \phi; \theta', \phi')}{\cos(\phi')}, \tag{3.23}$$

la relation (3.24) s'écrit encore

$$j'(\theta', \phi') = \int R(\theta, \phi; \theta', \phi')\, j(\theta, \phi) \cos\phi\, d\Omega. \tag{3.24}$$

Il est important de souligner la différence entre la loi de réflexion R et la probabilité P. P désigne une probabilité de réflexion d'une particule sonore par angle solide élémentaire, tandis que R désigne lune probabilité de réflexion dans une direction ϕ', pour un flux incident dans la direction ϕ.[10]

10. Il est important de noter la confusion possible entre la loi de réflexion R et la probabilité de réflexion P. Dans les travaux que nous présenterons au chapitre 4, nous sommes amenés à imposer la condition de réflexion suivante :

$$\int \mathcal{R}\, d\Omega' = 1, \tag{3.25}$$

La première loi de la thermodynamique imposent la conservation du flux sur la surface (en l'absence d'absorption). La loi de réflexion $R(\Omega, \Omega')$ et la probabilité $P(\Omega, \Omega')$ doivent donc vérifier la condition suivante :

$$\int P(\Omega, \Omega')\, d\Omega' = \int R(\Omega, \Omega') \cos\phi'\, d\Omega' = 1, \tag{3.26}$$

ou encore en coordonnées sphériques,

$$\iint R(\theta, \phi; \theta', \phi') \cos\phi' \sin\phi'\, d\phi'\, d\theta' = 1. \tag{3.27}$$

La seconde loi de la thermodynamique impose cette fois :

$$\int P(\Omega, \Omega')\, d\Omega = \int R(\Omega, \Omega') \cos\phi\, d\Omega = 1, \tag{3.28}$$

ou encore en coordonnées sphériques

$$\iint R(\theta, \phi; \theta', \phi') \cos\phi \sin\phi\, d\phi\, d\theta = 1. \tag{3.29}$$

D'autre part, le principe de réciprocité impose que

$$R(\Omega, \Omega') = R(\Omega', \Omega). \tag{3.30}$$

3.3.2.4 Modes de réflexion

Malgré quelques études récentes que nous évoquerons au paragraphe 3.4, il n'existe pas à notre connaissance de lois de réflexion connues pour des façades réelles. Dans cette étude, nous nous sommes limités à des modes de réflexion arbitraires, présentés à la figure 3.17 et détaillées ci-dessous.

Réflexion spéculaire Le mode de réflexion le plus simple est défini par la réflexion spéculaire (figure 3.17(a)), et peut s'écrire en trois dimensions :

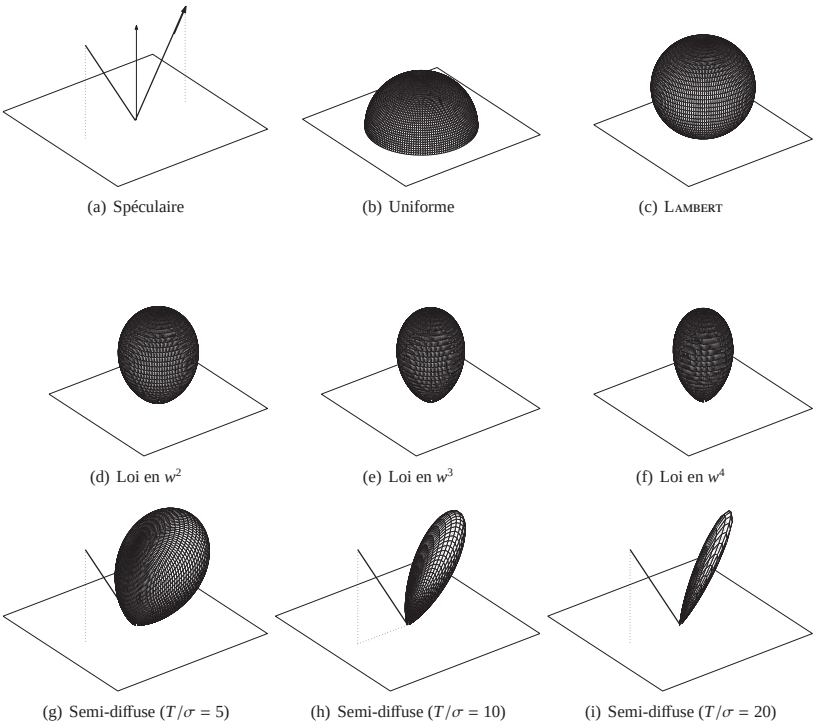
$$R(\theta, \phi; \theta', \phi') = 2\delta(\theta - \theta' \pm \pi)\, \delta(\sin^2\phi - \sin^2\phi'), \tag{3.31}$$

où les couples (θ, ϕ) et (θ', ϕ') désignent respectivement les directions incidentes et réfléchies des particules sonores sur la paroi (figure 3.16). Bien que la forme de cette expression ne soit pas conventionnelle, cette relation vérifie les lois de SNELL-DESCARTES, ainsi que les conditions (3.28) à (3.30).

D'un point de vue numérique, la simulation de cette loi de réflexion ne pose pas de problème majeur, puisque les angles d'incidence de chaque particule sur une façade sont connus. Les deux figures 3.18(a) et 3.18(b) présentent un exemple de simulation, respectivement en 2D et en 3D, pour une direction incidente donnée.

---

où nous allons définir $\mathcal{R}$ comme une loi de réflexion. D'après les relations (3.22) et (3.26) issues de la convention de JOYCE [108, 109, 110], il s'avère que notre fonction $\mathcal{R}$ n'est autre que la probabilité de réflexion et non la loi de réflexion. Ceci est également vérifié en comparant les équations de conservation du flux au niveau de la surface, définies dans la convention de JOYCE et dans le chapitre 4. En effet, l'équation (3.24) exprime la même condition de conservation au niveau de la surface que l'équation (4.14) de la page 128. En comparant ces deux équations, on observe à nouveau que la fonction $\mathcal{R}$ a la même signification que la probabilité P. Par la suite, de façon à ne pas mélanger les deux formalismes, il est indispensable de préciser sur quelle quantité nous travaillons : la loi de réflexion R ou la probabilité de réflexion P. Pour des raisons pratiques et pour être homogène avec les documents de référence, nous conserverons l'appellation « loi de réflexion » au lieu de « probabilité de réflexion » dans le chapitre 4.

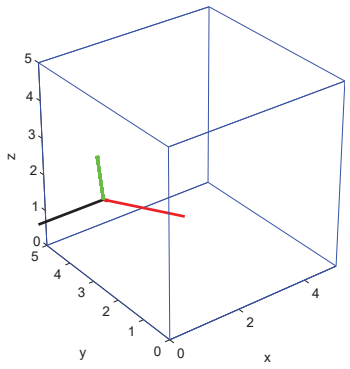


(a) Spéculaire (b) Uniforme (c) Lambert

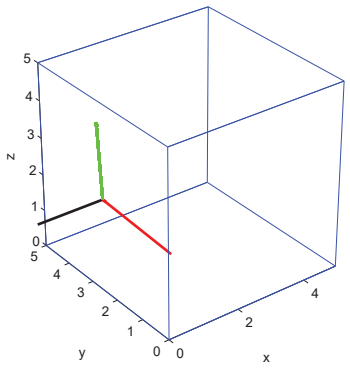
(d) Loi en w^2 (e) Loi en w^3 (f) Loi en w^4

(g) Semi-diffuse ($T/\sigma = 5$) (h) Semi-diffuse ($T/\sigma = 10$) (i) Semi-diffuse ($T/\sigma = 20$)

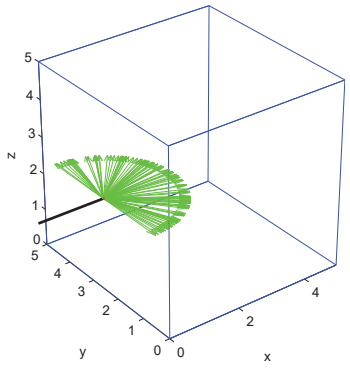
Fig. 3.17 — *Illustration des modes de réflexion utilisés dans notre étude.*



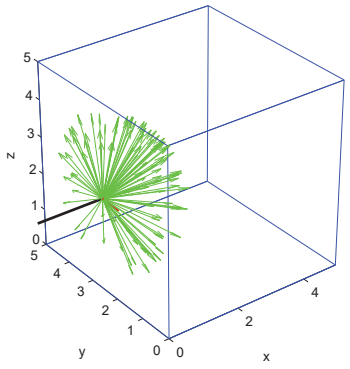
(a) Spéculaire (2D)



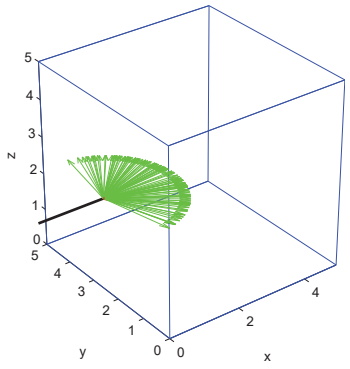
(b) Spéculaire (3D)



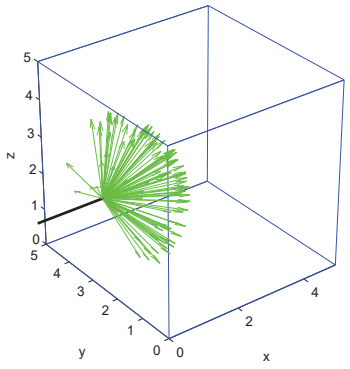
(c) Surface « uniforme » (2D)



(d) Surface « uniforme » (3D)



(e) Surface diffuse (2D)



(f) Surface diffuse (3D)

FIG. 3.18 — *Distribution des angles de réflexion en 2D (plan $z = 0$) et en 3D (*100 *tirages), pour des surfaces (a)-(b) spéculaire, (c)-(d) uniforme, (e)-(f)* LAMBERT *(ou diffuse ou aléatoire). Pour les réflexions uniforme et diffuse, la direction de réflexion est indépendante de la direction incidente. La direction incidente est définie par le vecteur* $(-1/5, 1/3, 0)$ *en 2D et* $(-1/5, 1/3, 1/6)$ *en 3D.*

Surface diffuse (ou aléatoire, ou LAMBERT) Au sens de la lumière, une surface parfaitement diffuse est une surface qui paraît aussi lumineuse quel que soit l'angle d'observation, et quel que soit l'angle d'incidence. Au sens de l'acoustique, une surface parfaitement diffuse réfléchira la même énergie dans toutes les directions quel que soit l'angle d'incidence. D'un point de vue mathématique, cette condition impose que la loi de réflexion R soit indépendante de la direction de réflexion, donc de la direction d'incidence (par réciprocité). Après normalisation la loi de réflexion s'écrit :

$$R(\theta, \phi; \theta', \phi') = \frac{1}{2\pi} \times 2. \tag{3.32}$$

Le coefficient $1/2\pi$ est lié à la normalisation suivant l'angle θ' (distribution uniforme entre 0 et 2π). Le second coefficient (facteur 2) est lié à la normalisation suivant l'angle ϕ'. La probabilité $P(\Omega')\, d\Omega'$ se réduit donc à

$$P(\Omega')\, d\Omega' = R\, \cos\phi'\, \sin\phi'\, d\theta'\, d\phi' = \left[\frac{1}{2\pi}\, d\theta'\right] \left[2 \cos\phi'\, \sin\phi'\, d\phi'\right], \tag{3.33}$$

où l'expression $\cos\phi'$ est relative à la loi de LAMBERT. Il est aisé de vérifier que R satisfait les conditions (3.28) à (3.30). Il est important de souligner la différence entre une surface aléatoire et une surface « uniforme ». La première est conditionnée par une loi de réflexion R aléatoire uniforme, tandis que la seconde est définie par une probabilité P uniforme (*cf.* paragraphe suivant).

D'un point de vue numérique, le tirage aléatoire des angles de réflexion (en trois dimensions) doit être réalisé en accord avec la distribution $P(\Omega')$, à savoir $P(\phi')$ dans notre cas. Appliquant la méthode de la fonction de distribution cumulative inverse, la probabilité $f(\hat{\phi})$ qu'une particule sonore soit réfléchie dans un angle ϕ' compris entre 0 et $\hat{\phi}$ est donnée par la relation suivante :

$$f(\hat{\phi}) = 2 \int_0^{\hat{\phi}} \cos\phi' \sin\phi'\, d\phi' = \sin^2 \hat{\phi}. \tag{3.34}$$

Cette probabilité étant comprise entre 0 et 1, le choix de l'angle $\hat{\phi}$ est réalisé en tirant aléatoirement un nombre $u \in [0, 1]$, tel que :

$$\hat{\phi} = \sin^{-1} \sqrt{u} = \cos^{-1} (1 - u)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.35}$$

En deux dimensions, la condition de réflexion porte uniquement sur l'angle $\phi' \in [-\pi/2, \pi/2]$. Après normalisation, la densité de probabilité $P(\phi')$ en deux dimensions prend la forme suivante :

$$P(\phi')\, d\phi' = [R\, \cos\phi']\, d\phi' = \left[\frac{1}{2} \cos\phi'\right] d\phi', \tag{3.36}$$

ce qui implique que la fonction de distribution cumulative inverse se réduit à

$$f(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\hat{\phi}} \cos\phi'\, d\phi' = \frac{1}{2} \left[\sin\hat{\phi} + 1\right]. \tag{3.37}$$

L'angle de réflexion est alors donné par le tirage suivant :

$$\hat{\phi} = \sin^{-1}(2u - 1). \tag{3.38}$$

Les deux figures 3.18(e) et 3.18(f) présentent un exemple de simulation, respectivement en 2D et en 3D, après plusieurs tirages aléatoires.

Surface « uniforme » Par surface « uniforme », nous définissons une surface dont la distribution des angles de réflexion $P(\Omega')$ est équiprobable. Il ne faut pas confondre avec le cas précédent, pour lequel l'uniformité est vérifiée par la loi de réflexion. Dans le cas d'une surface uniforme, les particules sont réfléchies uniformément dans tout le demi-espace, indépendamment de l'angle d'incidence. Dans ces conditions, la densité de réflexion après normalisation s'écrit :

$$P(\Omega')d\Omega' = P(\theta', \phi')d\Omega' = \left[\frac{1}{2\pi}\, d\theta'\right] \left[\sin\phi'\, d\phi'\right], \tag{3.39}$$

ou encore

$$R(\theta', \phi') = \frac{1}{2\pi\cos\phi'}, \tag{3.40}$$

pour $\theta' \in [0, 2\pi]$ et $\phi' \in [0, \pi/2]$. D'un point de vue numérique, la détermination de l'angle de réflexion est obtenue, là encore, par la méthode de la fonction de distribution cumulative inverse,

$$f(\hat{\phi}) = \int_0^{\hat{\phi}} \sin\phi'\, d\phi' = 1 - \cos\hat{\phi}, \tag{3.41}$$

ce qui donne

$$\hat{\phi} = \cos^{-1}(1 - u), \tag{3.42}$$

où u est un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. Les deux figures 3.18(c) et 3.18(d) présentent un exemple de simulation, respectivement en 2D et en 3D, après plusieurs tirages aléatoires suivant cette loi de réflexion.

En deux dimensions, la densité de probabilité $P(\phi')$ est uniforme. Il suffit alors de choisir aléatoirement un angle $\hat{\phi}$ compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, en appliquant le tirage :

$$\hat{\phi} = u \times \pi - \frac{\pi}{2}. \tag{3.43}$$

Surface en w^n Considérons une loi de réflexion indépendante de la direction incidente et définie uniquement par l'angle de réflexion ϕ' autour de la normale à la paroi (θ' étant uniforme entre 0 et 2π), de la forme :

$$R(\Omega') = R(\theta', \phi') = \frac{1}{2\pi} \times (n+1)\cos^{n-1}\phi' = \frac{n+1}{2\pi}\, w^{n-1}. \tag{3.44}$$

où n est un entier positif. La quantité notée $w = \cos\phi'$ n'est autre que la projection de la direction de réflexion sur la normale à la paroi. Conformément aux notations de ce document, la probabilité P aura donc pour expression :

$$P(\Omega')\, d\Omega' = P(\phi')\, \sin\phi'\, d\theta'\, d\phi' = \left[\frac{1}{2\pi} d\theta'\right] \times \left[(n+1)\cos^n\phi'\, d\phi'\right] = \frac{n+1}{2\pi}\, w^n\, d\theta'\, d\phi', \tag{3.45}$$

ce qui justifie l'appellation en « surface en w^n ». Cette forme de réflexion est identique à celle introduite dans [144]. On peut remarquer que ce type de surface est une forme généralisée de la surface diffuse ($n = 1$) et de la surface uniforme ($n = 0$).

D'un point de vue numérique, le tirage aléatoire des angles de réflexion est réalisé en appliquant la méthode de la fonction de distribution cumulative inverse. La probabilité $f(\hat{\Omega})$ (c'est-à-dire la probabilité $f(\hat{\phi})$ puisque la direction de réflexion ne dépend que de l'angle par rapport à la normale) qu'une particule sonore soit réfléchie dans un angle solide élémentaire compris entre 0 et $\hat{\Omega}$ est alors donnée par la relation

$$f(\hat{\phi}) = (n+1) \int_0^{\hat{\phi}} \cos^n\phi' \sin\phi'\, d\phi' = 1 - \cos^{n+1}\hat{\phi}. \tag{3.46}$$

Cette probabilité étant comprise entre 0 et 1, le choix de l'angle $\hat{\phi}$ est réalisé en tirant aléatoirement un nombre $u \in [0,1]$, tel que :

$$\hat{\phi} = \cos^{-1}(1-u)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{3.47}$$

En deux dimensions, le tirage de la direction de réflexion est réalisé uniquement à partir de l'angle ϕ' suivant la probabilité :

$$P(\phi') = A\cos^n \phi'. \tag{3.48}$$

A étant une constante de normalisation. La méthode de la distribution cumulative inverse n'étant plus applicable (l'intégration de la fonction ci-dessus ne donne pas une relation simple et inversible), il faut alors utiliser la méthode de réjection. A titre d'illustration, des exemples sont présentés en 2D et en 3D à la figure 3.19, pour $n = 2, 3$ et 4.

Surface semi-diffuse Bien que nous ayons très peu d'informations sur le mode de réflexion par une façade urbaine, il est tout à fait légitime de penser qu'une majeure partie de l'énergie sonore soit réfléchie autour de la direction spéculaire. D'après les travaux présentés au paragraphe 3.2, on peut penser que le « lobe » de réflexion autour de la direction spéculaire est *a priori* défini par la fréquence de l'onde sonore, ainsi que la taille et la disposition des irrégularités de facade. Pour modéliser un tel phénomène, nous nous sommes fondés sur la théorie de la diffraction par des surfaces rugueuses [8]. Considérant une paroi de surface A, dont la taille $h(z)$ des irrégularités de surface suit une distribution normale d'écart type σ, et dont la densité d'irrégularités est représentée par la fonction $C(\tau) = \exp\left(-\tau^2/T^2\right)$, T définissant la distance de corrélation (figure 3.20), on montre que la figure de diffraction peut être représentée par la fonction suivante, si $v_z^2\,\sigma^2 \gg 1$ [8, équation (59)]) :

$$\langle \rho\rho^* \rangle = \frac{\pi\, T^2\, F^2}{A\, k_z^2\, \sigma^2} \exp\left[-\frac{\left(v_x^2 + v_y^2\right) T^2}{4\, v_z^2\, \sigma^2}\right], \tag{3.49}$$

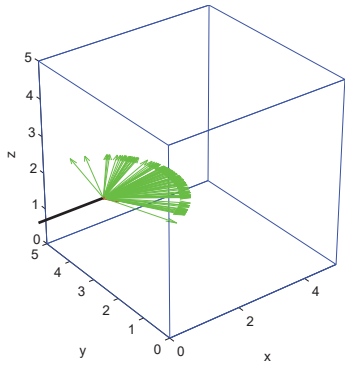
où v_x, v_y et v_z définissent les projections du vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r$ (figure 3.20), $F(\theta, \phi; \theta', \phi')$ un paramètre fonction des angles d'incidence (θ, ϕ) et de réflexion (θ', ϕ'). ρ est défini comme le coefficient de diffraction et $\langle \rho\rho^* \rangle$ désigne le rapport de la puissance totale diffractée par la paroi rugueuse et la puissance réfléchie dans la direction spéculaire par une paroi de même dimension, totalement lisse et réfléchissante, sous les mêmes conditions d'incidence. Normalisant la relation (3.49), nous pouvons ainsi construire une distribution des angles de réflexion L :

$$L = L_0 \exp\left[-\frac{\left(v_x^2 + v_y^2\right) T^2}{4\, v_z^2\, \sigma^2}\right]. \tag{3.50}$$

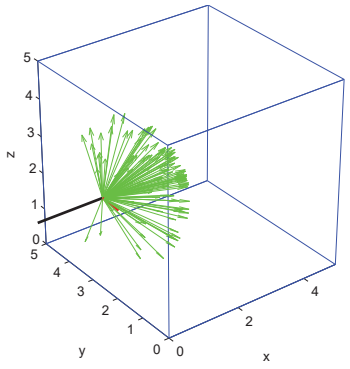
L'intérêt pratique de cette distribution est qu'elle ne dépend que du rapport T/σ. La prise en compte de la fréquence intervient indirectement en considérant le changement d'échelle σ/λ et T/λ (*i.e.* augmenter la fréquence revient à diminuer la rugosité et la distance de corrélation). Ainsi, en faisant varier ce paramètre, il est possible de représenter des figures de diffraction, correspondant à des conditions de rugosités différentes (figure 3.17). Il est nécessaire de préciser que la condition $v_z^2\,\sigma^2 \gg 1$ est assez bien vérifiée en pratique. Dans notre application, nous sommes intéressés aux cas $T/\sigma = 5, 10, 20$, offrant des lobes de réflexion intéressants dans le cadre de notre étude (figures 3.17 et 3.20).

D'un point de vue numérique, nous avons assimilé la relation (3.50) à la probabilité $P(\Omega)$[11]. L'expression (3.50) étant trop complexe pour se prêter à la méthode de la fonction de distribution cumulative inverse, nous avons utilisé la méthode de réjection [209]. La procédure consiste à tirer aléatoirement un couple (x, y), puis de comparer y à $P(x)$. Si $y < P(x)$, la variable x est conservée. Dans le cas contraire, elle est rejetée et il faut tirer un nouveau couple de variables. La méthode est donc plus longue, puisqu'à

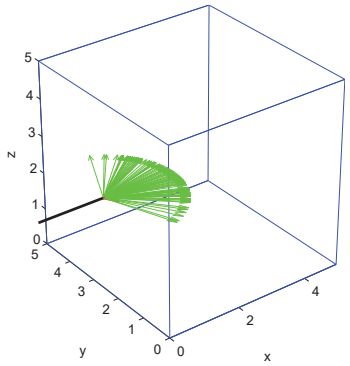
11. La même procédure de tirage a été réalisée en 2D et en 3D (*i.e.* sur la même fonction (3.50)). En toute rigueur, pour les simulations en 3D, il aurait fallu faire un tirage sur la relation (3.50) multiplié par $\sin\phi'$, ce qui n'a pas été fait ici.



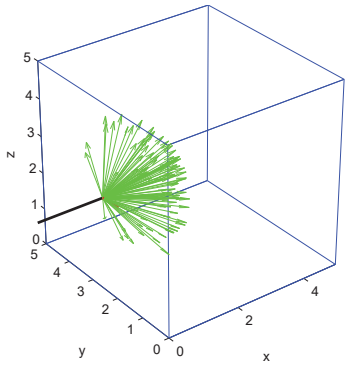
(a) Surface en w^2 (2D)



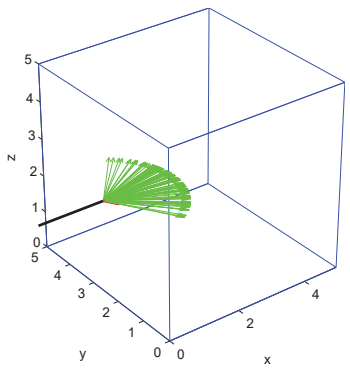
(b) Surface en w^2 (3D)



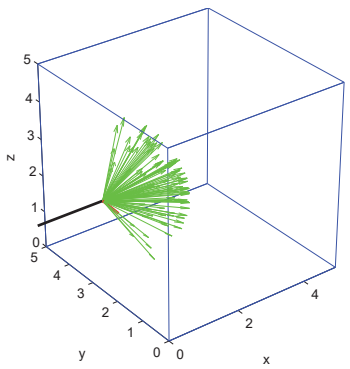
(c) Surface en w^3 (2D)



(d) Surface en w^3 (3D)

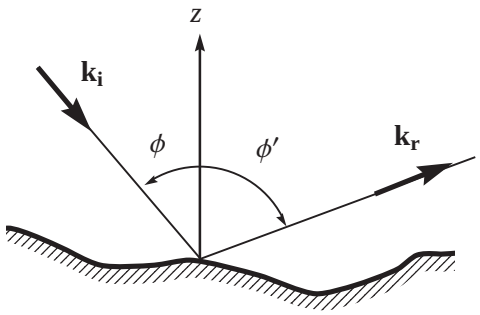


(e) Surface en w^4 (2D)

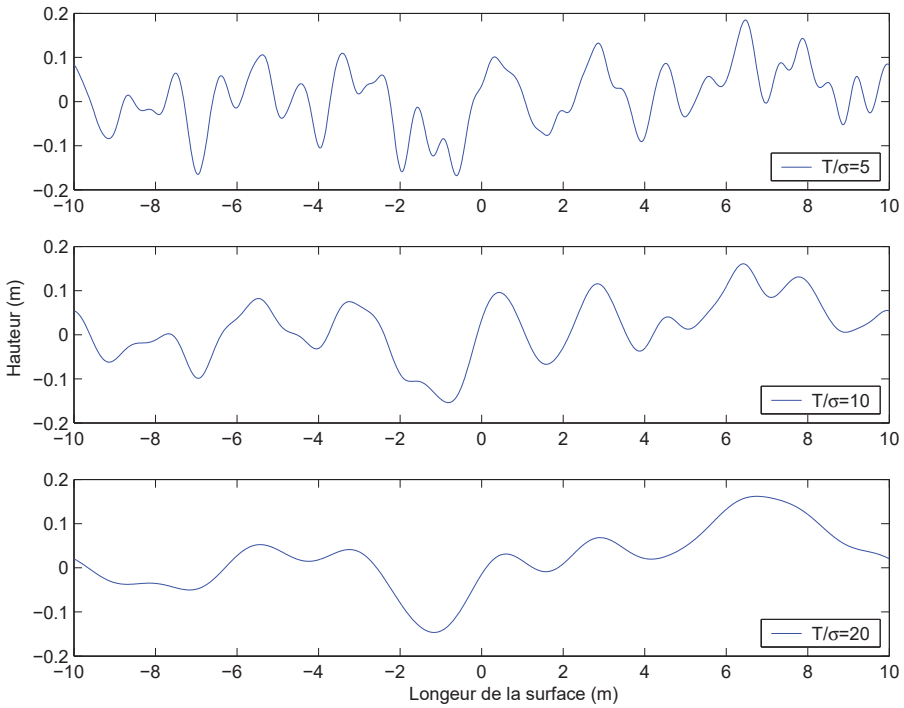


(f) Surface en w^3 (3D)

FIG. 3.19 — *Distribution des angles de réflexion en 2D (plan $z = 0$) et en 3D (*100 *tirages), pour surfaces en w^n : (a)-(b) pour $n = 2$, (c)-(d) pour $n = 3$, (e)-(f) pour $n = 4$. Pour ces modes de réflexion, la direction de réflexion est indépendante de la direction incidente.*



(a) Géométrie (2D)



(b) Illustration d'une surface rugueuse définie par une variance σ^2 et une distance de corrélation T, avec $T/\sigma = 5, 10, 20$

FIG. 3.20 — *Diffraction par une surface rugueuse. Les figures sont présentées en deux dimensions, mais les développements mathématiques sont réalisés en trois dimensions [8].*

la différence de la méthode de la fonction de distribution cumulative inverse, une direction de réflexion n'est pas obtenue à chaque tirage aléatoire. Suivant la forme de la loi de réflexion (définie par plusieurs paramètres), la procédure peut prendre plus ou moins de temps. Des exemples sont présentés en 2D et en 3D à la figure 3.21, pour plusieurs conditions de surface. On peut remarquer que plus T/σ augmente, plus le lobe de réflexion devient étroit.

3.3.3 Effet des réflexions sur la propagation du son à l'échelle d'un quartier (échelle macroscopique)

3.3.3.1 Géométrie du quartier

Nous avons ainsi réalisé une étude numérique à deux dimensions, sur la propagation du son à l'échelle d'un quartier (*i.e.* un ensemble de rues en « U ») [199]. Pour des raisons pratiques évidentes, il n'a pas été possible de considérer un quartier réel. Nous avons ainsi dû recréer un modèle de quartier devant répondre à certaines exigences pour faciliter l'étude numérique. La première contrainte a été d'intégrer une périodicité dans la répartition des bâtiments (et des rues) de manière à pouvoir modéliser la propagation des particules sonores à grande échelle, à partir de quelques règles de propagation à l'échelle d'un motif de base. La seconde contrainte a été de limiter la propagation des particules à l'« infini », c'est-à-dire sans que la particule en question rencontre une façade de bâtiment. En utilisant des bâtiments rectangulaires, ces deux contraintes sont assez difficiles à respecter. Après de nombreux tests, notre choix s'est donc porté vers un réseau de bâtiments hexagonaux (figure 3.22). Cette symétrie nous a ainsi permis de réduire d'un facteur 12 (passant de 108 à 9 configurations d'étude), le nombre de procédures à réaliser pour modéliser la propagation d'une particule depuis une façade d'un bâtiment, vers une autre façade sur un autre bâtiment. La position d'une particule sonore sur le périmètre d'un bâtiment, et la direction de propagation, seules variables nécessaires au suivi des particules, peuvent alors être complètement définies grâce à 9 fonctions analytiques. Par ailleurs, cette forme de quartier permet de considérer des rues parallèles, de même largeur, ainsi que des intersections de rues. Enfin, les dimensions générales du motif de base peuvent varier sur une gamme assez large, tout en interdisant aux particules de se propager à l'infini, ce qui permet de tester de nombreuses configurations géométriques.

Dans cette étude, nous avons considéré quatre types de façade (*cf.* §3.3.2.4) : la surface diffuse (ou Lambert), la surface « uniforme » et deux surfaces semi-diffuses avec $T/\sigma = 5$ et $T/\sigma = 15$.

Les simulations ont été réalisées sous l'environnement Matlab© avec des stations Unix. Pour des raisons de performance limitée des stations de travail et de programmation, nous nous sommes limités dans cette étude à une cinquantaine de particules sonores, chacune subissant une cinquantaine de collisions[12].

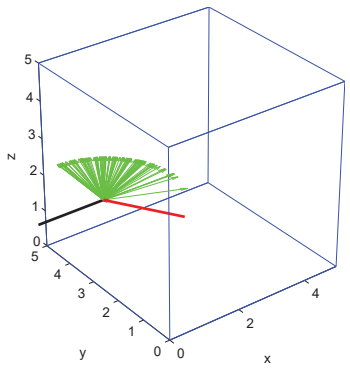
3.3.3.2 Propagation des particules sonores dans le quartier

L'objectif des simulations consiste simplement à suivre les particules sonores tout au long de leur propagation. Dans le cadre de cette première étude, nous nous sommes intéressés uniquement à la distance parcourue par rapport à la position initiale (position de la source).

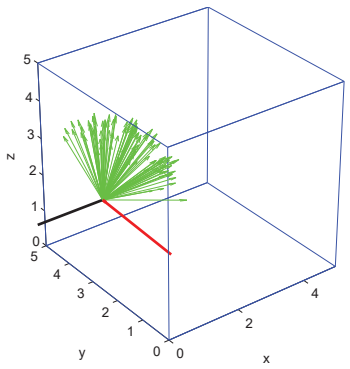
La position $\mathbf{R}_j$ de la particule sonore j après N déplacements dans le réseau de bâtiments hexagonaux est donnée par

$$\mathbf{R}_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i, \tag{3.51}$$

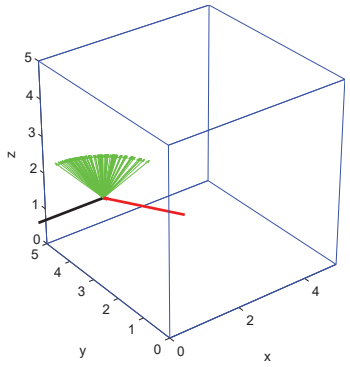
12. Au regard de l'évolution de la performance des stations de travail, cette étude aurait sans doute pu donner lieu à de nouvelles simulations numériques, pour en améliorer la pertinence statistique, sans pour autant en changer les conclusions principales.



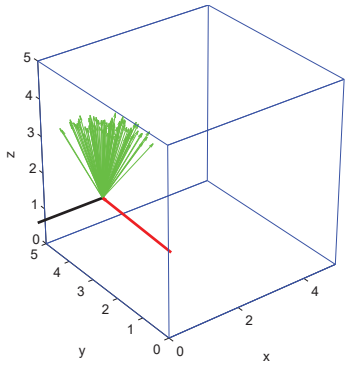
(a) Semi-diffuse avec $T/\sigma = 5$ (2D)



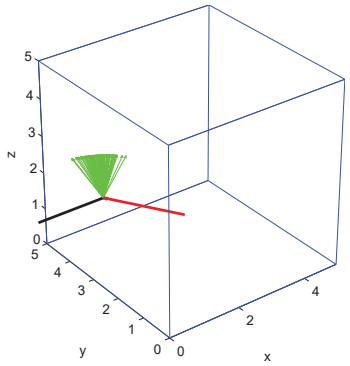
(b) Surface semi-diffuse avec $T/\sigma = 5$ (3D)



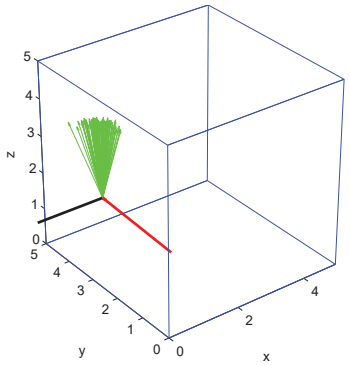
(c) Surface semi-diffuse avec $T/\sigma = 10$ (2D)



(d) Surface semi-diffuse avec $T/\sigma = 10$ (3D)



(e) Surface semi-diffuse avec $T/\sigma = 20$ (2D)



(f) Surface semi-diffuse avec $T/\sigma = 20$ (3D)

FIG. 3.21 — *Distribution des angles de réflexion en 2D (plan $z = 0$) et en 3D (*100 *tirages), pour des surfaces semi-diffuses (a)-(b) avec $T/\sigma = 5$, (c)-(d) avec $T/\sigma = 10$, (e)-(f) avec $T/\sigma = 20$. Pour ces modes de réflexion, la direction de réflexion est fonction de la direction incidente, définie par le vecteur $(-1/5, 1/3, 0)$ en 2D et $(-1/5, 1/3, 1/6)$ en 3D.*

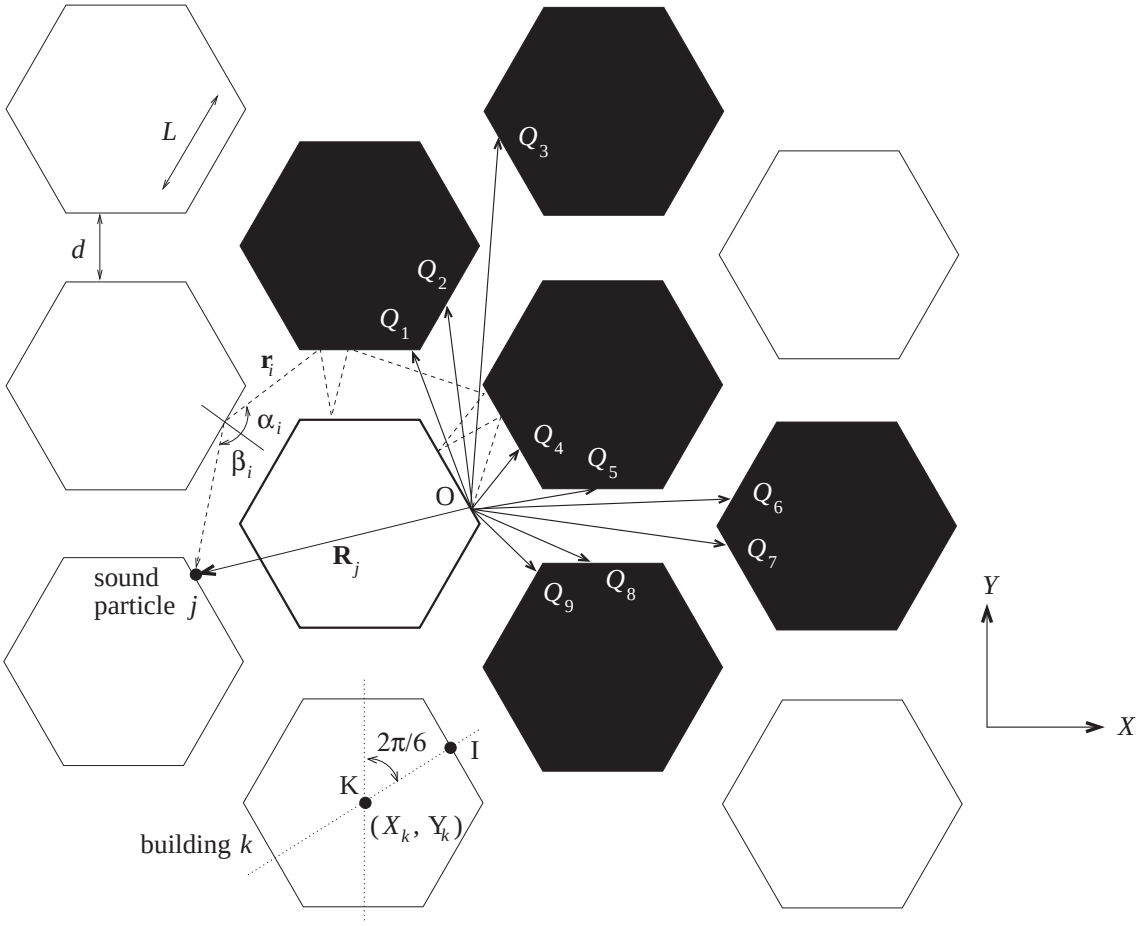


FIG. 3.22 — *Modèle élémentaire d'une ville, sous la forme d'une disposition périodique de bâtiments hexagonaux. Compte tenu de la géométrie périodique du milieu, seuls les* 9 *configurations* $Q_1, Q_2 \cdots Q_9$ *de réflexion/propagation depuis une façade vers une autre façade, sont à considérer. La ligne discontinue illustre la propagation d'une particule sonore* j *dans le milieu. D'après [199].*

où $\mathbf{r}_i$ est le déplacement entre deux collisions successives i et $i+1$ sur des bâtiments (figure 3.22). Le temps t correspondant à N collisions est alors proportionnel à la distance totale parcourue :

$$t = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\mathbf{r}_i|}{c}, \tag{3.52}$$

où c est la vitesse de propagation des particules. Considérant un grand nombre M de particules émis par la source à $t = 0$, et moyennant sur la position des particules (figure 3.23(a)), nous pouvons en déduire la moyenne de la position au carré $\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle$ de la particule au temps t :

$$\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \mathbf{R}_j^2. \tag{3.53}$$

Comme illustré à la figure 3.23(b), l'évolution de cette quantité $\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle$ est approximativement linéaire au cours du temps, excepté pour les temps de propagation les plus importants, où, pour des raisons purement numériques (moyennage insuffisant), elle semble atteindre un palier. De nouvelles simulations numériques pourraient d'ailleurs améliorer ce point. La quantité $\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle$ peut donc finalement être approchée par la relation suivante :

$$\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle = 4Dt, \tag{3.54}$$

résultat typique d'un processus de diffusion [28], D étant défini comme le coefficient de diffusion du système. En supposant l'existence de ce processus de diffusion, la probabilité $W(\mathbf{R}, t)$ qu'une particule sonore arrive au point $\mathbf{R}$ au temps t, peut alors être donnée par la relation suivante :

$$W(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left[-\frac{\mathbf{R}^2}{4Dt} \right], \tag{3.55}$$

solution d'une équation de diffusion de la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} - D\Delta W = 0. \tag{3.56}$$

D'un point de vue macroscopique, $W(\mathbf{R}, t)$ traduit la concentration (ou la distribution) de particules sonores au point $\mathbf{R}$ au temps t.

Le coefficient de diffusion D a été estimé pour plusieurs largeurs de rues, et pour différentes lois de réflexion (figures 3.24 à 3.26). Ces figures montrent clairement que l'évolution du coefficient de diffusion est approximativement linéaire en fonction de la largeur de la rue, quel que soit la loi de réflexion. Cette linéarité serait sans doute encore plus visible en augmentant le nombre de particules sonores dans le milieu de propagation. Comme attendu, plus la rue est large, plus le coefficient est important, et donc plus la particule se diffuse rapidement dans le milieu.

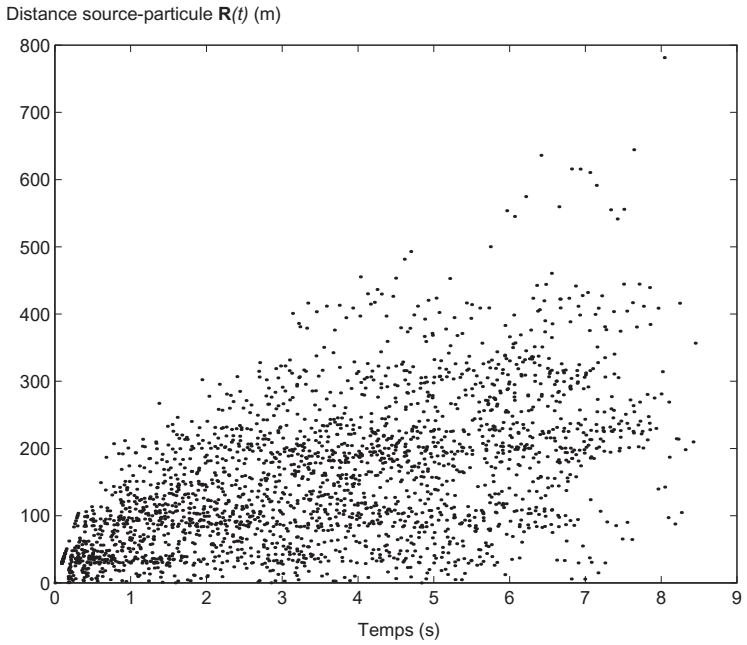
Par ailleurs, dans le cas de la loi uniforme (figure 3.24), le coefficient de diffusion estimé numériquement est très proche de la valeur théorique D_f donnée par la théorie des marches aléatoires, avec une distribution sphérique des déplacements [28] :

$$D_f = \frac{n\langle \mathbf{r}^2 \rangle}{4}, \tag{3.57}$$

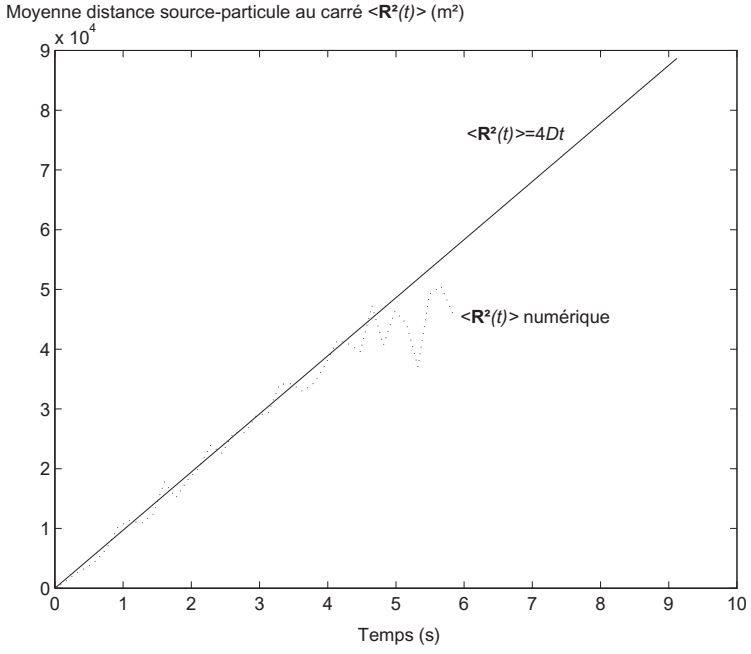
où n est le nombre de déplacement par unité de temps et $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ est la valeur moyenne du carré du déplacement de la particule, estimée par :

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^{M \times N} \mathbf{r}_i^2. \tag{3.58}$$

Les figures 3.24 et 3.25 montrent également que le coefficient de diffusion est plus faible pour la Loi de Lambert que pour la loi uniforme. Dans le premier cas, la probabilité de réflexion étant plus



(a) Distance source-particule $\mathbf{R}^2(t)$



(b) $\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle$

FIG. 3.23 — *Propagation de* 50 *particules sonores dans le milieu (*$L = 113$ *m,* $d = 29.4$ *m), chaque particule comptabilisant* 50 *collisions sur les façades. Chaque point de la figure (a) représente la distance* $\mathbf{R}(t)$ *entre la particule et le point source, au cours du temps et à chaque collision. La figure (b) présente la moyenne de la distance au carré* $\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle$*, ainsi que l'approximation linéaire par une loi de diffusion avec* $D = 2\,431$ m^2/s*. D'après [199].*

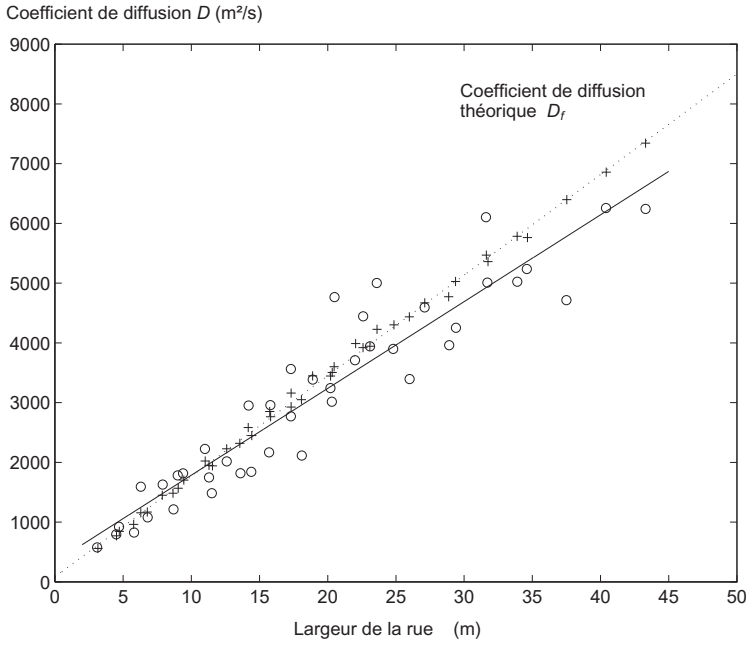


FIG. 3.24 — *Coefficient de diffusion D en fonction de la largeur de rue, pour une loi de réflexion uniforme : (o) estimation numérique de D, (+) coefficient de diffusion théorique D_f calculé à partir de la relation (3.57) avec les valeurs n et $\langle r^2 \rangle$ obtenues numériquement. La ligne en trait plein présente l'approximation linéaire de D. La ligne en pointillé présente l'approximation linéaire de D_f. D'après [199].*

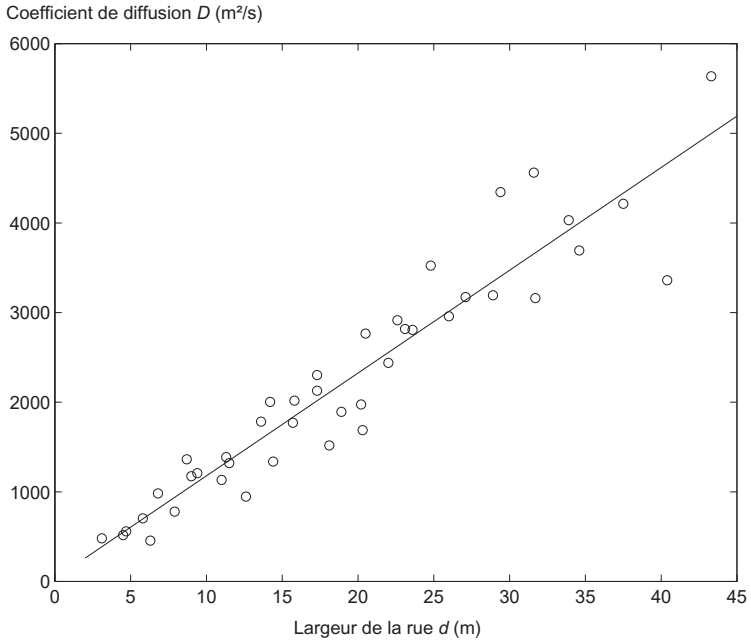
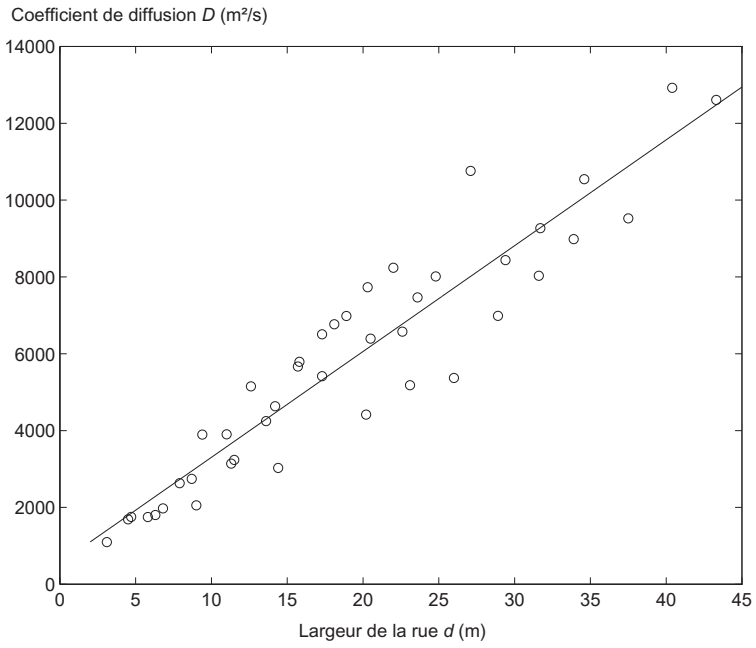
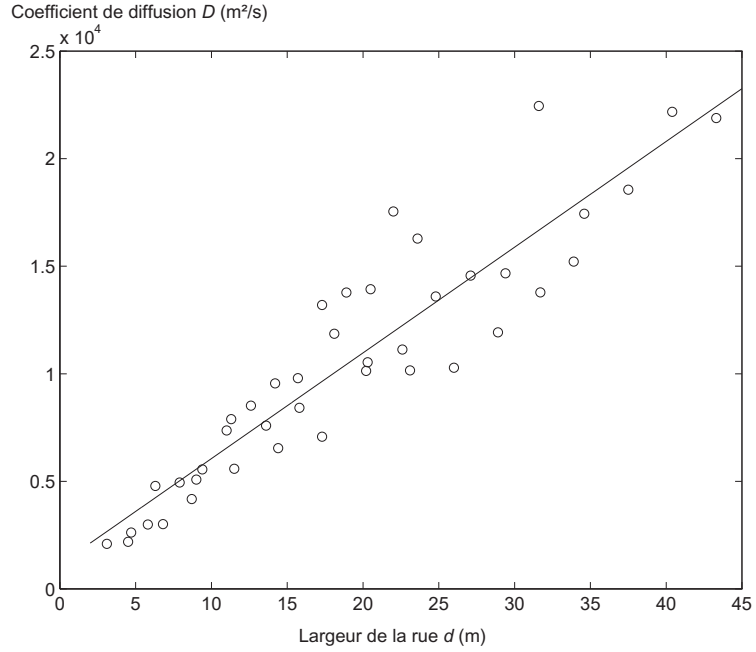


FIG. 3.25 — *Coefficient de diffusion D en fonction de la largeur de rue, pour une loi de réflexion de* LAMBERT *: (o) estimation numérique de D. La ligne en trait plein présente l'approximation linéaire de D. D'après [199].*



(a) $L_c/\sigma = 5$



(b) $L_c/\sigma = 15$

FIG. 3.26 — *Coefficient de diffusion D en fonction de la largeur de rue, pour une loi de réflexion semi-diffuse avec $L_c/\sigma = 5$ (a) et $L_c/\sigma = 15$ (b) : (o) estimation numérique de D. La ligne en trait plein présente l'approximation linéaire de D. D'après [199].*

importante autour de la normale à la façade, les particules sonores restent plus longtemps dans une même rue, et mettent donc plus de temps à s'éloigner de leur point d'émission. Ce résultat semble donc montrer que l'atténuation sonore dans la rue sera plus importante avec la loi uniforme, qu'avec la loi de LAMBERT. Ce résultat est d'ailleurs confirmé dans le prochain paragraphe 3.3.4.

3.3.3.3 Processus de diffusion à l'échelle d'une ville

Ces simulations numériques montrent donc que la propagation des particules sonores dans ce modèle de ville suit, en première approximation, un processus de diffusion, défini par un coefficient de diffusion qui est fonction de la géométrie du milieu (largeur des rues) et des conditions de réflexion sur les façades. La généralisation de cette conclusion à des géométries urbaines réelles, illustrées par exemple sur la figure 3.27 pour quelques villes connues, semble tout à fait acceptable. En effet, le passage d'une géométrie périodique à une géométrie plus complexe donc plus « aléatoire » (excepté pour les villes nord-américaines) devrait amplifier ce processus de diffusion. Dans ces conditions,la densité d'énergie sonore $w(\mathbf{R}, t)$ dans le milieu de propagation (une ville, un quartier, une rue) pourrait être solution d'une équation de diffusion de la forme,

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w + \eta w = S(\mathbf{R}, t), \tag{3.59}$$

où D et η sont respectivement le coefficient de diffusion et un terme d'absorption dans le milieu, caractérisant l'atténuation atmosphérique, l'absorption par les ouvertures, et l'absorption par les façades. La fonction $S(\mathbf{R}, t)$ caractérise la distribution des sources sonores dans le milieu. La solution de cette équation peut alors être obtenue à partir de la fonction de GREEN $G(\mathbf{R}, t)$:

$$G(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi D t} \exp\left[-\frac{\mathbf{R}^2}{4\pi D t} - \eta t\right], \tag{3.60}$$

solution de l'équation de diffusion, avec une source impulsionnelle $\delta(\mathbf{R}, t)$:

$$\frac{\partial G}{\partial t} - D\Delta G + \eta G = \delta(\mathbf{R}, t). \tag{3.61}$$

Notons ici un résultat suggéré par THORSSON [229] (*cf.* §2.2.8). Dans son propre modèle de propagation du son dans une ville (en 2D), THORSSON propose d'utiliser une équation de transport tant que les bâtiments sont relativement éloignés les uns des autres. Dans le cas contraire, il propose plutôt d'utiliser une équation de diffusion, qui semble plus adaptée à un milieu très diffusant. C'est la solution que nous présenterons dans le chapitre 4.

3.3.4 Effet des réflexions sur la propagation du son à l'échelle d'une rue (échelle microscopique)

Alors que dans l'approche précédente, nous nous sommes intéressés à l'éloignement de la particule sonore au cours du temps, nous nous focalisons ici sur leur distribution dans l'espace et au cours du temps, à l'intérieur d'une même rue. A la différence de l'étude précédente, les particules sonores quittant le milieu de propagation formé par la rue ne peuvent donc pas y revenir. L'objectif principal de ces simulations numériques consiste à montrer l'effet des conditions de réflexion des façades sur la propagation acoustique dans une rue, en termes d'atténuation sonore et de réverbération [194].

Par rapport aux travaux présentés dans le paragraphe précédent, datant de 1999 [199], l'évolution des performances en matière de calcul numérique, et une réécriture complète des procédures de tirage aléatoire et du suivi des particules, nous a permis cette fois d'appliquer notre démarche à une rue en trois dimensions, donc avec des conditions de réflexion également en trois dimensions. Ce nouveau code de calcul, appelé SPPS, a d'ailleurs été généralisé et étendu à la modélisation des champs sonores en acoustique architecturale. Ce code de calcul, que nous utiliserons également dans le chapitre 4 pour valider nos modèles de propagation, a été détaillé récemment dans l'article [195] (*cf.* annexe A).

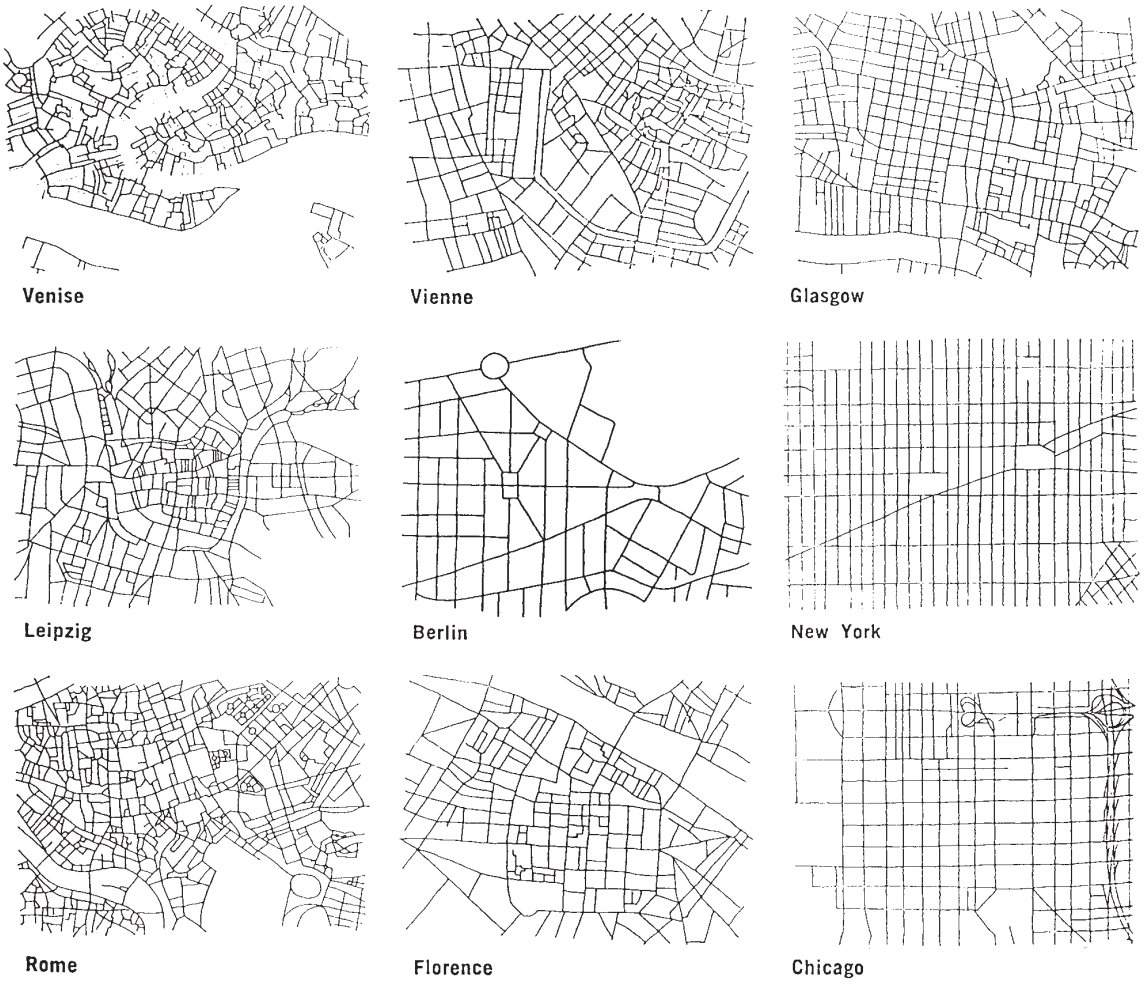


FIG. 3.27 — *Exemple de géométries urbaines [d'après* D. ENGEL, R. JAGALS *et* U.T. JAGALS, *« Analyse structurale de l'espace urbain », L'Architecture d'aujourd'hui* ***153****, 48–53, décembre 1970-janvier 1971].*

3.3.4.1 Géométrie de la rue

Nous considérons ici une rue rectangulaire de 8 m de largeur, 40 m de longueur et 8 m de hauteur (figure 3.28), avec une source impulsionnelle omnidirectionnelle S ($L_W = 0$ dB) au point $(30.5, 6.5, 1.5)$. Le sol est supposé parfaitement réfléchissant ($\alpha = 0$), produisant uniquement des réflexions spéculaires ($d = 1$). Les façades sont supposées uniformément absorbantes et caractérisées par des conditions de réflexion identiques en tout point d'une même façade, et définies au paragraphe 3.3.2.4. Des simulations ont été réalisées pour deux coefficients d'accommodation différents [$d = 0$ pour des réflexions totalement « diffuses » et $d = 0.3$ pour des réflexions mixtes (30 % spéculaire et 70 % « diffuse »)], ainsi que pour plusieurs lois de réflexion. L'atténuation atmosphérique n'est pas prise en compte. La rue est supposée vide.

Les simulations numériques ont été réalisées avec un million de particules. Le pas de temps a été fixé à $\Delta t = 1/c = 2.907$ ms avec une célérité $c = 344$ m/s. La rue a été discrétisée avec des mailles cubiques de 1 m^3. Les résultats présentés à la section suivante correspondent aux points d'observation (mailles) situées sur les lignes transversales de la rue (N1) et (N2) situés respectivement à 25 m et à 5 m de la source et à la même hauteur ($z = 1.5$ m), ainsi que sur l'axe longitudinal (L1) passant par la source ($y = 6.5$ m).

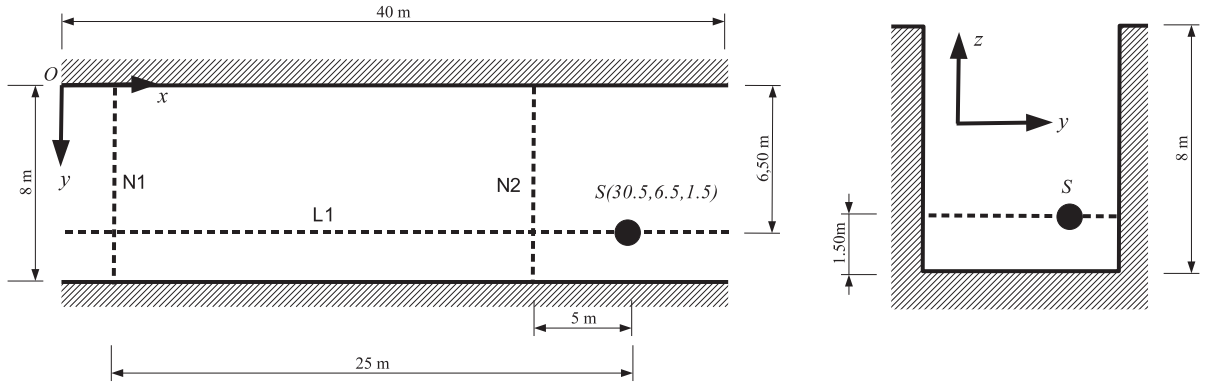


Fig. 3.28 — *Géométrie de la rue dans le cadre des simulations. L'origine des repères est localisé au point O.*

3.3.4.2 Résultats

Les figures 3.29, 3.30 et 3.31 présentent les courbes d'atténuation et les temps de réverbération (EDT et RT20), respectivement pour la ligne longitudinale (L1) et pour les lignes transversales (N1) et (N2), dans le cas d'une rue totalement réfléchissante ($\alpha = 0$) et parfaitement « diffuse » ($d = 0$). D'autres simulations ont également été réalisées pour $(d = 0.3, \alpha = 0)$, $(d = 0.0, \alpha = 0.1)$ et $(d = 0.3, \alpha = 0.1)$, mais ne sont pas présentées ici.

L'ensemble des courbes pour les lignes transversales montrent que les temps de réverbération RT20 et EDT sont quasiment uniformes sur une ligne transversale y compris proche de la source (ligne transversale (N2)). En revanche pour les niveaux sonores, l'uniformité proche de la source (ligne (N2)) est moins bien vérifiée, les écarts étant de l'ordre de 1 à 2.5 dB suivant les lois de réflexion. Quand l'absorption au niveau des parois augmente[13], l'effet de la source est encore plus sensible, les écarts étant cette fois de l'ordre de 1.5 à 3.5 dB suivant les lois de réflexion. En ce qui concerne les courbes suivant la ligne longitudinale, l'augmentation de l'absorption provoque une atténuation plus rapide, ce qui était attendu. Que ce soit, pour les lignes transversales ou la ligne longitudinale, l'augmentation du coefficient d'accommodation de 0.0 à 0.3 ne change pas fondamentalement l'allure des courbes.

13. Les figures ne sont pas présentées dans ce document.

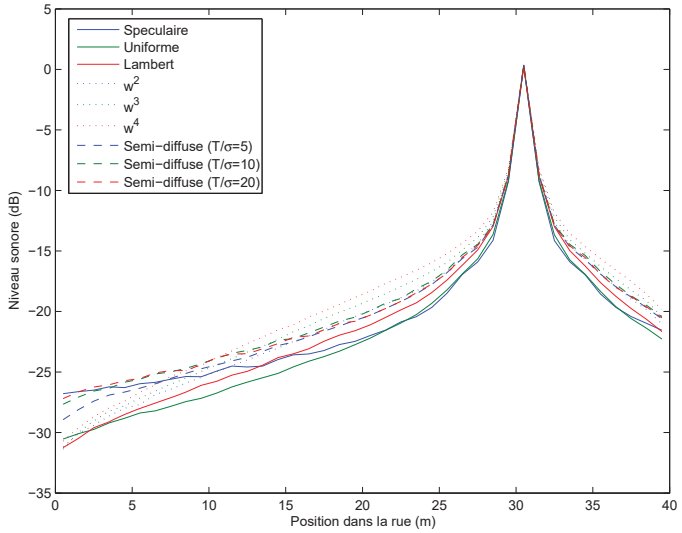
Ces figures montrent de grandes différences de comportement en fonction des modes de réflexion. Les écarts peuvent atteindre jusqu'à 5 dB pour les niveaux sonores, même pour des récepteurs très proches de la source (dès 5 m de la source sur la figure 3.29(a) par exemple). L'allure globale des courbes d'atténuation sur la ligne longitudinale semble également suggérer que ces écarts de niveau pourraient encore augmenter, notamment entre les surfaces semi-diffuses et surfaces en w^n. Concernant les temps de réverbération, les écarts peuvent atteindre un facteur 6 (de 0.5 s à 3 s, par exemple sur la figure 3.29(c)), dès les premiers mètres de propagation.

L'augmentation de l'absorption au niveau des parois a plutôt tendance à rapprocher les différentes courbes entre elles, et donc à réduire les écarts. En présence d'absorption, les écarts de niveau sont plutôt de l'ordre de 2 à 3 dB. Pour les RT20, les valeurs évoluent entre 0.5 et 2 s, soit un facteur 4 dans ce cas. Là encore, la modification du coefficient d'accommodation ne modifie pas les conclusions, puisque les courbes sont relativement similaires entre $d = 0.0$ et $d = 0.3$.

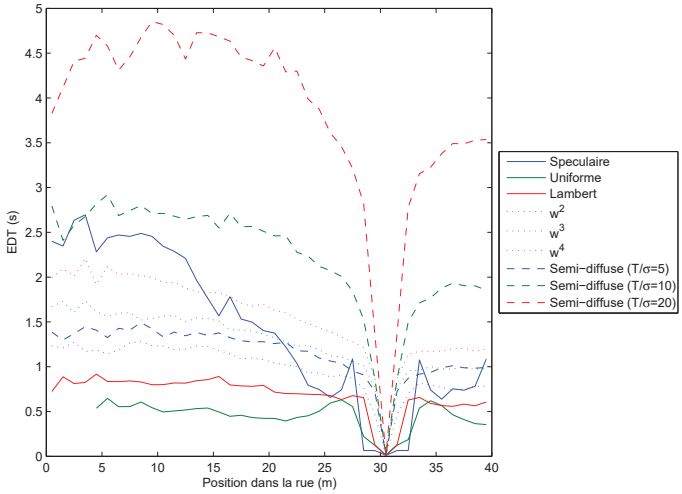
Enfin, on peut également remarquer l'effet de l'ouverture en $y = 0$ sur la courbe de niveau de la figure 3.29(a) pour l'ensemble des lois de réflexion (excepté pour la loi de réflexion spéculaire) : la décroissance de niveau est plus importante entre 30 et 40 m (soit de 0 à 10 m de la source), qu'entre 30 et 20 m (soit de 0 à 10 m de la source, coté opposé). Ce phénomène s'explique par l'effet de la « rétro-diffusion » qui diminue en se rapprochant de l'ouverture (*cf.* annexe B, page 262). En ce qui concerne la réflexion spéculaire, cette rétro-diffusion n'est pas possible, puisque les particules ne peuvent pas revenir vers la source. Ce phénomène semble également négligeable pour la surface « uniforme ». Lorsque les coefficients d'absorption et d'accommodation augmentent, l'effet de la rétro-diffusion diminue très sensiblement également[14].

L'analyse de l'ensemble des courbes montre qu'une surface « uniforme » produit simultanément l'atténuation la plus importante dans la rue (*i.e.* figure 3.29(a)), et la réverbération la plus faible (*i.e.* figure 3.29(c)). Dans une optique « d'optimisation acoustique d'une rue », ce type de surface semble être du plus grand intérêt. La surface diffuse (réflexion de Lambert) semble également intéressante, mais dans une moindre mesure. Nous retrouvons ici un résultat déjà observé à l'échelle d'un quartier (*cf.* paragraphe précédent). Pour ce type de réflexion, la diffusion de l'énergie sonore dans toutes les directions de l'espace, favorise une dispersion plus rapide de l'énergie sonore, permettant ainsi une atténuation plus forte dans l'espace, et plus rapide au cours du temps (*i.e.* une faible réverbération). A l'inverse, les courbes d'atténuation pour la réflexion spéculaire et les réflexions semi-diffuses, bien qu'affichant une décroissance assez importante sur les premiers mètres de propagation, ont tendance à se relever par la suite, pour donner des niveaux sonores supérieurs à ceux obtenus pour les autres modes de réflexion. D'autre part, ces mêmes lois de réflexion produisent presque systématiquement la réverbération la plus importante.

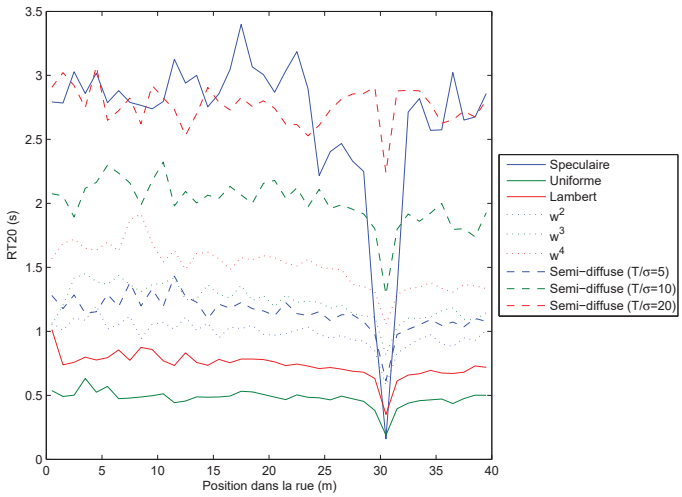
14. Surtout quand l'absorption augmente.



(a) Niveau sur une ligne longitudinale

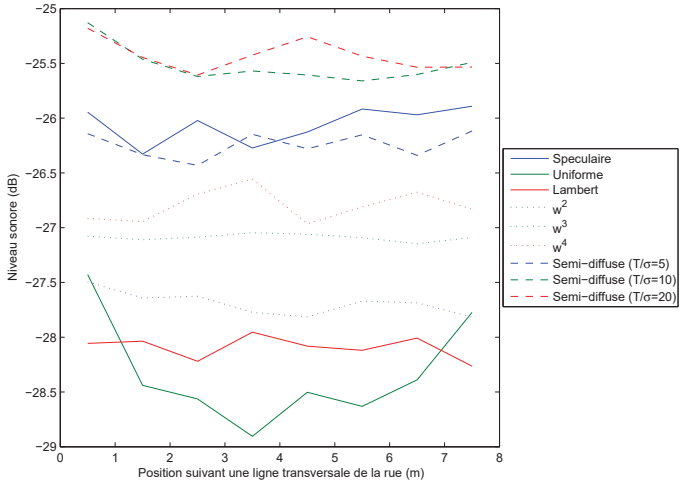


(b) EDT sur une ligne longitudinale

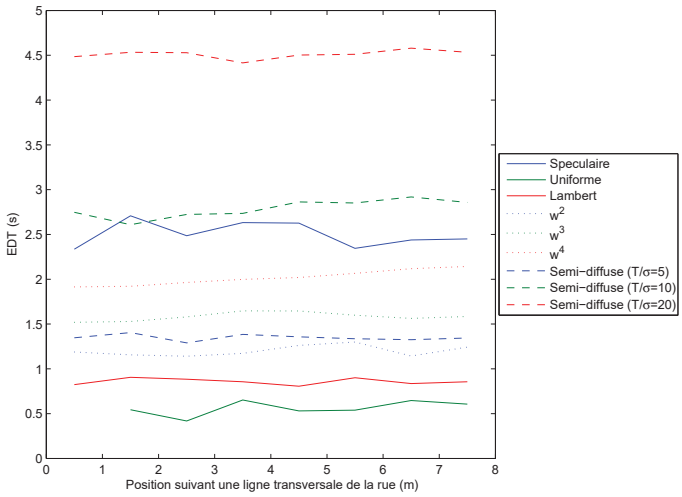


(c) TR sur une ligne longitudinale

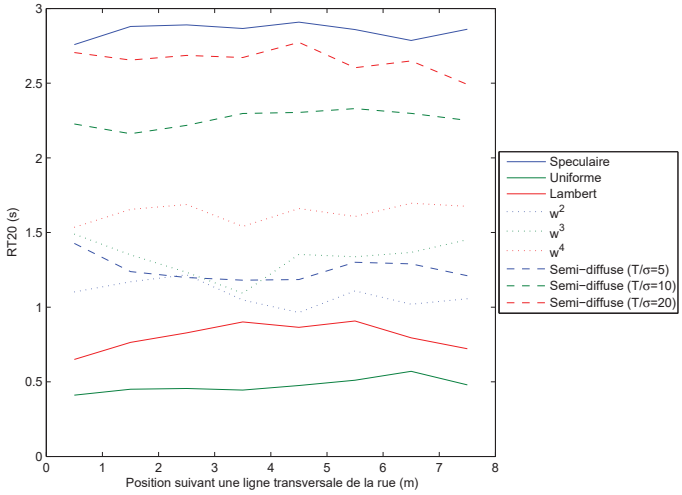
FIG. 3.29 — *Champ sonore sur la ligne longitudinale (cf. figure 3.28) pour différentes conditions de réflexion ($d = 0$) et sans absorption ($\alpha = 0$).*



(a) Niveau sur une ligne transversale (N1)

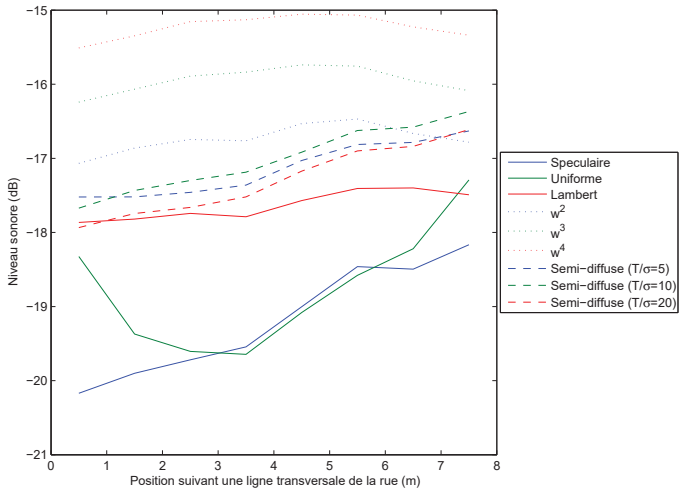


(b) EDT sur une ligne transversale (N1)

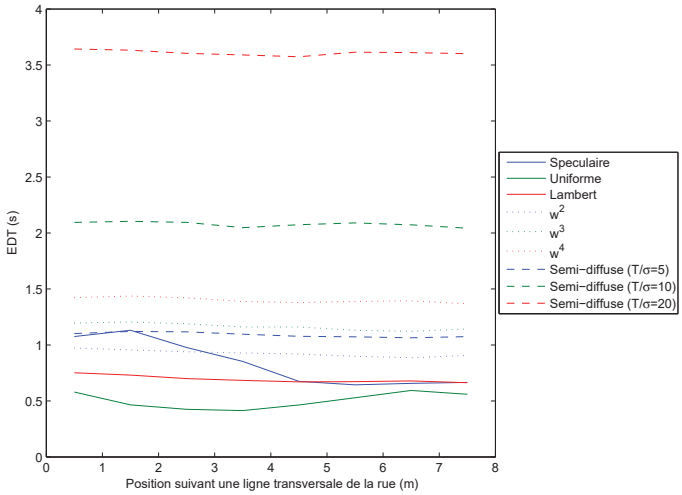


(c) TR sur une ligne transversale (N1)

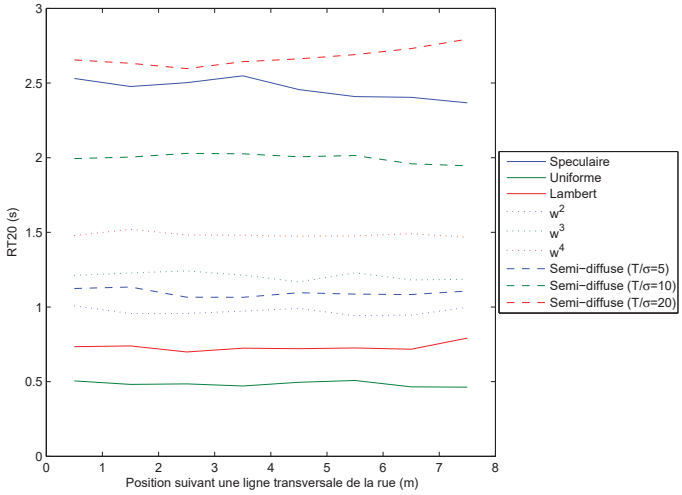
FIG. 3.30 — *Champ sonore sur la ligne transversale (N1) (cf. figure 3.28) pour différentes conditions de réflexion ($d = 0$) et sans absorption ($\alpha = 0$).*



(a) Niveau sur une ligne transversale (N2)



(b) EDT sur une ligne transversale (N2)



(c) TR sur une ligne transversale (N2)

FIG. 3.31 — *Champ sonore sur la ligne transversale (N2) (cf. figure 3.28) pour différentes conditions de réflexion ($d = 0$) et sans absorption ($\alpha = 0$).*

3.3.5 Conclusion

A l'échelle d'un quartier, les simulations numériques que nous avons réalisées montrent très clairement l'effet des lois de réflexion sur la propagation des particules sonores dans le milieu urbain. Alors qu'à l'échelle microscopique (une particule), le phénomène est purement propagatif, à l'échelle macroscopique (l'ensemble des particules sonores), le phénomène devient diffusif. La distribution des particules dans le milieu (donc la densité d'énergie sonore) suit une équation de diffusion. Le coefficient de diffusion est alors fonction des données géométriques du milieu de propagation (les dimensions de la rue) et des conditions de réflexion sur les façades urbaines. Même si ce résultat est la conclusion d'une étude numérique sur un milieu urbain « atypique » (réseau de bâtiment hexagonaux en deux dimensions), on peut supposer que la complexité d'un milieu urbain réel ne peut que favoriser ce phénomène de diffusion.

A l'échelle d'une rue, les simulations numériques montrent également l'influence des conditions de réflexion sur la distribution spatiale et la décroissance temporelle du champ sonore. Dans nos simulations, les écarts observés peuvent atteindre jusqu'à 5 dB sur les niveaux sonores et un facteur 6 sur les temps de réverbération RT20, et ce, dès les premiers mètres de propagation. Néanmoins, en présence d'absorption ces écarts diminuent. Ces résultats prouvent donc la nécessité de prendre correctement en compte les conditions aux limites réelles dans les outils prévisionnels dédiés à l'acoustique urbaine. D'un point de vue « design/optimisation acoustique d'une rue », ces résultats numériques semblent montrer également que les surfaces de type uniforme et de Lambert, sont du plus grand intérêt, en produisant simultanément la plus forte atténuation et la plus faible réverbération. Dans le cadre d'un projet d'aménagement urbain, il pourrait donc être intéressant de mettre en place ce type de surface, soit au niveau des façades (par construction), soit sous forme de diffuseurs urbains. Une étude de faisabilité sur un « diffuseur urbain » est d'ailleurs en cours au LCPC.

Il est important de noter que d'autres recherches ont confirmé ces effets de réflexion diffuses. Ainsi, Kang [116] a également montré à partir de simulations numériques reposant sur un modèle de radiosité, de grandes différences sur le temps de réverbération et l'atténuation sonore dans une rue, entre les réflexions spéculaires et totalement diffuses. Bien que ses conclusions soient plus modérées, Wu [246] avait été également obtenu des résultats similaires.

Plus récemment, on peut également citer les travaux étudiants de Picoux [205] co-encadrés par L. Simon (LAUM), ainsi que ceux de Legallet [148] et Legros [150], encadrés par C. Ayrault (LAUM). Bien que parfois contradictoires sur certains aspects, les résultats obtenus expérimentalement par des mesures sur maquette, ou numériquement à partir d'un logiciel de tracé de rayons sonores autorisant les réflexions diffuses, semblent montrer l'existence des effets de diffusion de façade sur la réverbération et l'atténuation sonore dans une rue, sans toutefois pouvoir les quantifier pleinement.

Les résultats issus de nos travaux sur la diffusion de façade et sur le caractère diffusif du champ sonore (au sens de la répartition de l'énergie dans les rues), sont à la base nos développements sur la modélisation des champs diffus en acoustique architecturale et urbaine. Nos travaux se sont ainsi orientés sur le développement d'un modèle de propagation des champs diffus basé sur une équation de diffusion, tout en essayant de relier le coefficient de diffusion aux conditions de réflexion sur les parois et façades, ainsi qu'aux données géométriques du milieu de propagation. Cette approche sera largement développée au chapitre 4 pour l'aspect acoustique urbaine, et dans la partie 5 pour son application à l'acoustique des salles.

3.4 Caractérisation des lois de réflexion de façades urbaines

3.4.1 Introduction

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la prise en compte des conditions réelles de réflexion par les façades dans les modèles de propagation du son en milieu urbain est primordiale pour assurer la précision et la qualité des résultats prévisionnels, que ce soit en termes de niveaux sonores ou de temps

de réverbération. Dans la plupart des approches opérationnelles, basées sur des méthodes de tracé de rayons sonores, cette prise en compte pourrait être réalisée en considérant des lois de réflexion au niveau des parois, ce qui n'est pas le cas pour l'instant (hormis la loi de LAMBERT dans certains cas). Ces lois de réflexion traduisent alors localement (au point de réflexion), les propriétés de réflexion sur la zone active d'une façade. Le problème actuel vient du qu'il n'existe pas encore de loi de réflexion représentative de façades urbaines. Nous avons ainsi entrepris des travaux visant à établir ce type de lois, à la fois analytiquement (*cf.* §3.4.3) et expérimentalement (*cf.* §3.4.4). L'intérêt d'une description analytique est de pouvoir étudier l'influence des paramètres de la façade (taille et disposition des irrégularités, telles que les fenêtres, les modénatures, etc.) sur la loi de réflexion. Néanmoins, comme nous le verrons dans le paragraphe 3.4.3, une description analytique est difficile à mettre en oeuvre, y compris pour des façades élémentaires. La mesure de la loi de réflexion est une autre solution. Ce point sera discuté dans le paragraphe 3.4.4. Dans un premier temps, nous nous sommes limités à des géométries de façades extrêmement simples, constituées d'une fenêtre ou d'un réseau de fenêtres dans un plan, à deux ou trois dimensions (*cf.* §3.4.2).

3.4.2 Modèle géométrique élémentaire d'une façade urbaine

Le calcul du critère de RAYLEIGH sur la bande de fréquences du bruit routier a montré que tout objet de taille supérieure à 10 cm peut théoriquement participer à la diffraction (*cf.* relation (3.3) du §3.2.1, avec $\theta > 60°$, $F > 1\,000$ Hz). Sur une façade urbaine, il est donc certain qu'un grand nombre d'éléments architecturaux participe à la diffraction de l'onde sonore. Néanmoins, à notre niveau de modélisation, il ne nous paraît pas opportun de considérer un modèle de façade trop compliqué. L'analyse architecturale d'une façade de type « Haussmannienne », (*cf.* §3.2.1) montre que le plan de référence de la façade et les fenêtres occupent à eux seuls 65% de la surface totale. Autrement dit, nous pouvons supposer que l'essentiel de la diffraction sera causé par le couplage de ces deux éléments. Pour certains types de façades, la diffraction causée par des balcons « pleins » n'est certainement pas négligeable. Néanmoins, nous étudierons ce cas ultérieurement.

En première approximation, nous pouvons donc assimiler une façade de bâtiment à un plan constitué d'un arrangement périodique de fenêtres ou balcons (fermés ou ouverts), en deux ou trois dimensions (figure 3.32). Physiquement, notre problème se rapporte donc à l'étude de la diffraction par un plan supposé infini, constitué de cavités rectangulaires ouvertes et/ou fermées, et disposées périodiquement (figure 3.33). Les façades des figures 3.32(a) et 3.32(b) peuvent par exemple être ramenées à l'étude de la géométrie 3.33(b). En trois dimensions, la façade 3.32(a) peut être étudiée à travers la géométrie 3.33(d). C'est donc sur cette base que nous avons entrepris l'étude sur la caractérisation de la réflexion du son par une façade, à la fois théoriquement et expérimentalement.

3.4.3 Développement d'un modèle théorique de diffraction par une fenêtre dans une façade à deux dimensions

3.4.3.1 Étude bibliographique

La connaissance de loi de réflexion d'une façade semble essentielle pour obtenir des prévisions acoustiques fiables en milieu urbain. Dans l'optique d'intégrer les phénomènes de réflexion diffuses dans les outils prévisionnels actuels (méthode de tracé de rayons sonores par exemple) ou dans des modèles analytiques (comme celui que nous présenterons au chapitre 4), il semble indispensable de disposer de formes analytiques de ces lois de réflexion. L'intérêt de l'approche analytique est de pouvoir déterminer directement[15] la forme de la loi de réflexion, en fonction de l'angle d'incidence sur la façade et en

15. Il s'agit bien entendu d'une situation idéale. Toutefois pour des façades « simples », constituées d'un réseau périodique de fenêtre, par exemple, on peut penser que de telles formules analytiques sont accessibles, soit de manière exacte, soit de manière approchée.

(a) Façade à symétrie 2D

(b) Façade à symétrie 2D

(c) Façade avec une périodicité 3D

FIG. 3.32 — *Photographies de façades : (a) Carrières-sous-Poissy (France) ; (b) Paris Sienne Tivoli (France) ; (c) Melun Almont (France).*

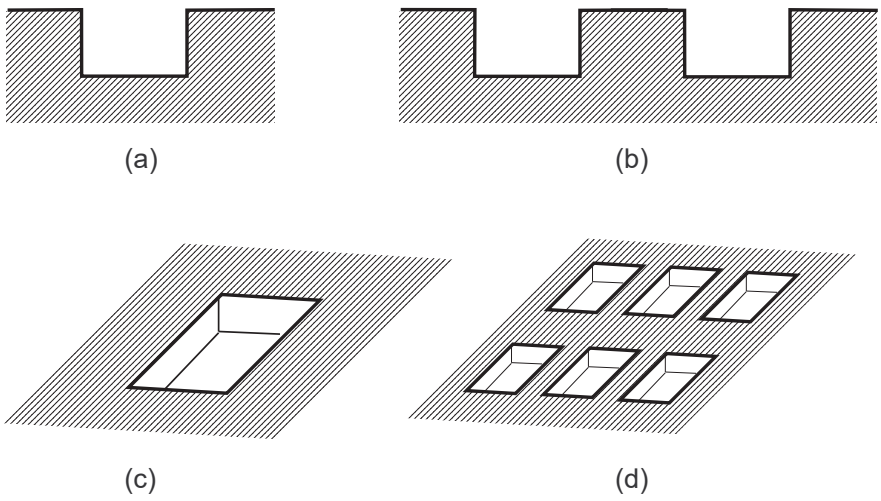


FIG. 3.33 — *Géométrie pour la modélisation de la réflexion du son par une façade. Étude à deux dimensions d'une fenêtre (a) puis d'un réseau de fenêtres (b). Étude à trois dimensions d'une fenêtre (c) puis d'un réseau de fenêtres (d).*

fonction de la disposition et de taille des irrégularités de façade. Cependant, comme nous l'avons présenté au paragraphe 3.1.1) présentant un état de l'art sur la « diffusion de façade », de telles formulations analytiques n'existent pas encore, ce qui nous a amené à proposer nos propres développements.

Ces développements se sont inspirés des études, beaucoup plus nombreuses, portant sur la réflexion du son par des surfaces irrégulières [177], par des protrusions et des cavités dans un plan réfléchissant [186], par des structures périodiques [34, 35, 112, 123, 140, 141, 158, 167, 176, 240], ainsi que sur la transmission et la réflexion du son par une ouverture rectangulaire [185, 186, 213, 231], circulaire [111, 120, 227] ou de forme quelconque [16, 70, 69, 71, 221] dans un plan. A tout cela s'ajoute également bon nombre de modèles numériques reposant sur la méthode des éléments de frontière [36] et utilisés par exemple pour le calcul de la diffraction par un écran acoustique.

Ainsi, au terme d'une étude bibliographique approfondie, notre attention s'est portée sur le modèle théorique de Park [186] pour la diffraction acoustique par une cavité rectangulaire, fermée ou ouverte. Ce modèle est une application des travaux de T.J. PARK, H.H. PARK et H.J. EOM sur la diffraction d'ondes électromagnétiques par des cavités fermées et ouvertes dans un plan parfaitement conducteur [119, 188, 189, 187]. En particulier, la référence [187] traite de la diffraction d'ondes électromagnétiques par un réseau périodique de cavités rectangulaires, problème similaire à la diffraction d'une onde acoustique par une façade constituée d'un réseau périodique de fenêtres. Dans un premier temps, nous avons restreint le modèle à une seule la fenêtre ou balcon dans un plan parfaitement plan. Comme nous le verrons dans la conclusion de cette partie (*cf.* §3.4.3.8), la généralisation de cette approche à des géométries plus complexes ne nous a pas semblé pertinente.

3.4.3.2 Définition des champs de pression

Considérons une cavité rectangulaire, ouverte ou fermée, de largeur $2a$ et de profondeur d, dans un plan infini (figure 3.34), soumise à une onde harmonique plane incidente $p^i(x,z)$ dans le plan $z > 0$ définissant la région (I), de nombre d'onde k et de pulsation[16] ω, telle que :

$$p^i(x,z) = \exp\left(ik_x x - ik_z z\right) \tag{3.62}$$

16. Par la suite le terme $\exp(-i\omega t)$ est supprimé. Dans tout ce travail nous négligerons également l'atténuation atmosphérique.

où $k_x = k\sin\theta$ et $k_z = k\cos\theta$ sont les composantes du nombre d'onde suivant les axes x et z, et où θ désigne l'angle d'incidence de l'onde plane par rapport à la normale à la façade. Par convention, les projections k_x et k_z du nombre d'onde k sont choisies positivement. Le champ de pression total dans la région (I) est la somme du champ sonore incident avec le champ sonore réfléchi par le plan $p^r(x,z)$ et le champ sonore diffracté par la fenêtre $p^s(x,z)$.

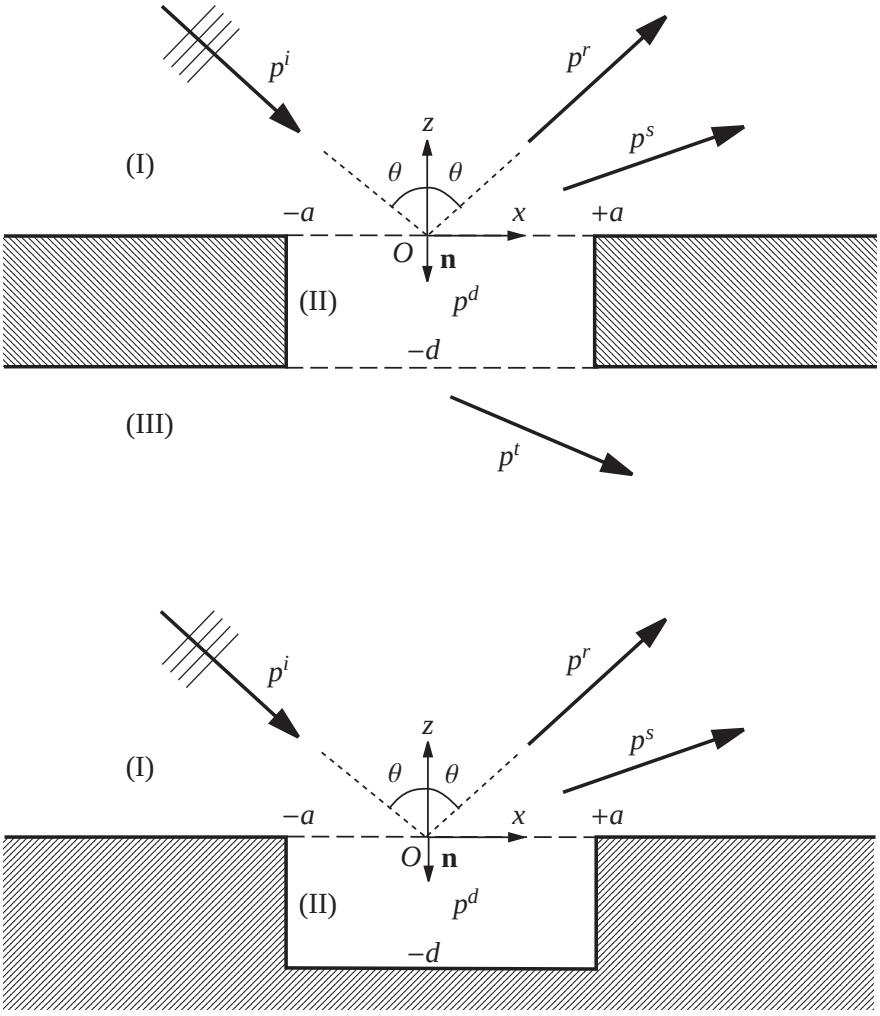


FIG. 3.34 — *Diffraction et transmission acoustique par une fenêtre ouverte (en haut) ou fermée (en bas), de largeur 2a, et de profondeur d, dans un plan infini. Région I : milieu extérieur. Région II : embrasure de la fenêtre. Région III (fenêtre ouverte seulement) : milieu intérieur.*

En dehors de la fenêtre, le plan de réflexion étant considéré comme parfaitement lisse et réfléchissant[17], le champ sonore réfléchi résulte uniquement de la réflexion spéculaire du champ incident :

$$p^r(x,z) = \exp\left(ik_x x + ik_z z\right). \tag{3.63}$$

Le champ sonore diffracté par l'embrasure peut être exprimé sous la forme d'une représentation spectrale angulaire (*angular-spectrum representation*) [55] :

$$p^s(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}^s(\xi)\exp\left(-i\xi x + i\kappa z\right) d\xi \tag{3.64}$$

17. Ce qui est vérifié en pratique pour une façade ordinaire composée de béton et de fenêtres [54].

avec $\kappa = \sqrt{k^2 - \xi^2}$. Cette forme d'expression traduit la décomposition de l'onde diffractée sous la forme d'une combinaison linéaire continue d'ondes planes progressives ($|\xi| < k$) et évanescentes ($|\xi| > k$), d'amplitude $\tilde{p}^s(\xi)$ que l'on cherche à déterminer. On remarque aisément que cette amplitude

$$\tilde{p}^s(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p^s(x,0)\ \exp(i\xi\, x)\ dx \tag{3.65}$$

est la transformée de Fourier inverse de la valeur du champ diffracté sur le plan de la façade ($z = 0$).

Lorsque la cavité rectangulaire est ouverte à son extrémité $z = -d$ (*i.e.* la fenêtre est ouverte), l'onde transmise $p^t(x,z)$ dans la région (III) ($z < -d$) peut s'exprimer de la même manière que pour l'onde diffractée :

$$p^t(x,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}^t(\xi) \exp(-i\xi x - i\kappa(z+d))\, d\xi. \tag{3.66}$$

Enfin, le champ de pression sonore $p^d(x,z)$ dans la région (II) ($0 > z > -d$ et $|x| < a$) peut être développé sur les modes propres de la cavité rectangulaire (principe du recouvrement modal ou *mode matching* en anglais) :

$$p^d(x,z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \cos a_m(a+x)\Big[c_m \cos\xi_m\,(z+d) + d_m \sin\xi_m\,(z+d)\Big], \tag{3.67}$$

avec

$$a_m = \frac{m\pi}{2a} \quad \text{pour} \quad m = 0, 1, 2\ldots, \tag{3.68}$$

et

$$\xi_m = \sqrt{k^2 - a_m^2}. \tag{3.69}$$

Lorsque ξ_m est complexe ($k < a_m$) les ondes dans l'embrasure sont évanescentes. Inversement, pour ξ_m réel ($k > a_m$), les ondes sont propagatives.

Les vitesses particulaires v_z^u ($u = i, s, r, d, t$) associées à chacune des ondes incidente, réfléchie, diffractée et transmise, dans la direction z sont obtenues à partir de l'équation d'Euler :

$$v_z^u = \frac{1}{i\,\omega\rho} \frac{\partial p^u}{\partial z}, \tag{3.70}$$

où ρ désigne la masse volumique de l'air. D'où les expressions suivantes des vitesses dans la direction **n** (le vecteur **n** désignant un vecteur entrant, normal à la façade et orienté dans le sens des z négatifs) :

$$v_n^i(x,z) = -v_z^i(x,z) = \frac{k_z}{\omega\rho}\, p^i(x,z), \tag{3.71}$$

$$v_n^r(x,z) = -v_z^r(x,z) = -\frac{k_z}{\omega\rho}\, p^r(x,z), \tag{3.72}$$

$$v_n^s(x,z) = -v_z^s(x,z) = -\frac{1}{2\pi\,\omega\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa\, \tilde{p}^s(\xi) \exp(-i\xi x + i\kappa z)\, d\xi, \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} v_n^d(x,z) &= -v_z^d(x,z) = -\frac{1}{i\,\omega\rho} \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m\, \cos a_m(a+x) \\ &\quad \times\Big[-c_m \sin\xi_m\,(z+d) + d_m \cos\xi_m\,(z+d)\Big], \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$v_n^t(x,z) = -v_z^t(x,z) = \frac{1}{2\pi\,\omega\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa\, \tilde{p}^t(\xi) \exp(-i\xi x - i\kappa(z+d))\, d\xi. \tag{3.75}$$

3.4.3.3 Conditions aux limites

Les coefficients c_m et d_m, ainsi que la forme des fonctions $\tilde{p}^s(\xi)$ et $\tilde{p}^t(\xi)$ sont déterminées en appliquant les relations de continuité de la pression et de la vitesse sur les frontières entre les régions (I) et (II), ainsi que (II) et (III).

– Continuité de la vitesse en $z = 0$. La continuité du champ de vitesse en $z = 0$ impose donc :

$$v_z^i(x,0) + v_z^r(x,0) + v_z^s(x,0) = v_z^s(x,0) = \begin{cases} v_z^d(x,0) & |x| < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.76}$$

En appliquant la transformée de Fourier sur l'équation (3.76), il vient immédiatement que :

$$\tilde{p}^s(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \sum_{m=0}^{+\infty} F_m(\xi a)\, \xi_m \,(c_m \sin \xi_m d - d_m \cos \xi_m d), \tag{3.77}$$

avec

$$F_m(u) = \frac{(-1)^m \exp i\,u - \exp -i\,u}{(u/a)^2 - a_m^2}. \tag{3.78}$$

– Continuité de la pression en $z = 0$. La continuité du champ de pression en $z = 0$ impose :

$$p^i(x,0) + p^r(x,0) + p^s(x,0) = p^d(x,0) \quad \text{pour} \quad |x| < a. \tag{3.79}$$

En introduisant les équations (3.62), (3.63), (3.64) et (3.67) dans la relation (3.79), il vient immédiatement (d'après la relation (3.77)) :

$$2\, \exp(ik_x x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \sum_{m=0}^{+\infty} F_m(\xi a)\, \xi_m \,(c_m \sin \xi_m d - d_m \cos \xi_m d) \exp(-i\xi x + i\kappa z)\, d\xi$$
$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \cos a_m(a + x) \Big[c_m \cos \xi_m\, d + d_m \sin \xi_m\, d \Big]. \tag{3.80}$$

Multipliant cette dernière relation par $\cos a_m(x + a)$, puis intégrant sur $[-a, a]$ et considérant enfin la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_{-a}^{+a} \cos a_m(x + a) \cos a_p(x + a)\, dx = \begin{cases} 2a & \text{si } m = p = 0 \\ a\, \delta_{mp} & \text{si } m, p \neq 0 \end{cases} \tag{3.81}$$

nous avons alors :

$$\gamma_p + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m\, I_{mp} (c_m \sin \xi_m d - d_m \cos \xi_m d) = \Big[c_p \cos \xi_p\, d + d_p \sin \xi_p\, d \Big] a\, \varepsilon_p, \tag{3.82}$$

avec $\varepsilon_0 = 2$ et $\varepsilon_p = 1\ \forall p \geq 1$. Les quantités γ_p et I_{mp} sont définies respectivement par :

$$\gamma_p = -2i\, k_x\, F_p(k_x a), \tag{3.83}$$

et

$$I_{mp} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} F_m(\xi a)\, F_p(-\xi a)\, d\xi. \tag{3.84}$$

– Continuité de la vitesse en $z = -d$. Lorsque la fenêtre est ouverte, la continuité du champ de vitesse en $z = -d$ impose :

$$v_z^d(x,-d) = \begin{cases} v_z^t(x,-d) & |x| < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.85}$$

Appliquant la transformée de Fourier sur cette dernière relation, il vient ainsi :

$$\tilde{p}^t(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m \, d_m \, F_m(\xi a). \tag{3.86}$$

Fenêtre fermée, la continuité de la vitesse sur la paroi en $z = -d$ impose immédiatement que $d_m = 0$, $\forall m \geq 0$ (champ de vitesse nul). Il n'y a évidemment pas d'onde transmise dans ce cas.

– Continuité de la pression en $z = -d$ (fenêtre ouverte uniquement). La continuité du champ de pression en $z = -d$ impose :

$$p^t(x, -d) = \begin{cases} p^d(x, -d) & |x| < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.87}$$

Utilisant les relations (3.66) et (3.87), il vient alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \sum_{m=0}^{+\infty} d_m \, F_m(\xi a) \, \exp\left(-i\xi x + i\kappa z\right) d\xi = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \cos a_m(x + a). \tag{3.88}$$

Multipliant par $\cos a_p(x + a)$, puis intégrant sur $[-a, a]$, nous avons finalement :

$$\frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m \, d_m \, I_{mp} = a \, \varepsilon_p \, c_p. \tag{3.89}$$

Le couple d'équations (3.82) et (3.89) peut également s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_1^{0,0} c_0 + \psi_1^{1,0} c_1 + \psi_1^{2,0} c_2 + \cdots + \psi_2^{0,0} d_0 + \psi_2^{1,0} d_1 + \psi_2^{2,0} d_2 + \cdots & = \gamma_0 \\ \psi_1^{0,1} c_0 + \psi_1^{1,1} c_1 + \psi_1^{2,1} c_2 + \cdots + \psi_2^{0,1} d_0 + \psi_2^{1,1} d_1 + \psi_2^{2,1} d_2 + \cdots & = \gamma_1 \\ \vdots & \\ \psi_1^{0,p} c_0 + \psi_1^{1,p} c_1 + \psi_1^{2,p} c_2 + \cdots + \psi_2^{0,p} d_0 + \psi_2^{1,p} d_1 + \psi_2^{2,p} d_2 + \cdots & = \gamma_p \\ \vdots & \\ \psi_3^{0,0} c_0 + \psi_3^{1,0} c_1 + \psi_3^{2,0} c_2 + \cdots + \psi_4^{0,0} d_0 + \psi_4^{1,0} d_1 + \psi_4^{2,0} d_2 + \cdots & = 0 \\ \psi_3^{0,1} c_0 + \psi_3^{1,1} c_1 + \psi_3^{2,1} c_2 + \cdots + \psi_4^{0,1} d_0 + \psi_4^{1,1} d_1 + \psi_4^{2,1} d_2 + \cdots & = 0 \\ \vdots & \end{array} \right. \tag{3.90}$$

ou encore, sous forme réduite :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Psi_1} & \mathbf{\Psi_2} \\ \mathbf{\Psi_3} & \mathbf{\Psi_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.91}$$

Les solutions sont obtenues en résolvant ce système (infini) d'équations linéaires et donnent :

$$\mathbf{C} = \left[\mathbf{\Psi_1} - \mathbf{\Psi_2} \cdot \mathbf{\Psi_4}^{-1} \cdot \mathbf{\Psi_3}\right]^{-1} \mathbf{\Gamma}, \tag{3.92}$$

et

$$\mathbf{D} = -\mathbf{\Psi_4}^{-1} \cdot \mathbf{\Psi_3} \left[\mathbf{\Psi_1} - \mathbf{\Psi_2} \cdot \mathbf{\Psi_4}^{-1} \cdot \mathbf{\Psi_3}\right]^{-1} \mathbf{\Gamma}. \tag{3.93}$$

Les matrices $\mathbf{\Psi_i}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{\Gamma}$ sont des matrices de dimension infinie, contenant respectivement les éléments ψ_i^{mp}, c_m, d_m et γ_m. Les éléments ψ_1^{mp}, ψ_2^{mp} et ψ_3^{mp}, ψ_4^{mp} sont définis respectivement à partir des relations (3.82) et (3.89) et s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \psi_1^{mp} & = & -\frac{i}{2\pi} \xi_m \, I_{mp} \sin \xi_m d + a \, \varepsilon_m \, \delta_{mp} \cos \xi_m d \\ \psi_2^{mp} & = & +\frac{i}{2\pi} \xi_m \, I_{mp} \cos \xi_m d + a \, \varepsilon_m \, \delta_{mp} \sin \xi_m d \\ \psi_3^{mp} & = & -a \, \varepsilon_m \, \delta_{mp} \\ \psi_4^{mp} & = & \frac{i}{2\pi} \xi_m \, I_{mp} \end{array} \right. \tag{3.94}$$

δ_{mp} désignant le symbole de Kronecker. Fenêtre fermée ($\mathbf{D} = 0$), les équations se simplifient considérablement et donnent simplement :

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Psi_1}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}. \tag{3.95}$$

3.4.3.4 Transmission et réflexion par l'embrasure

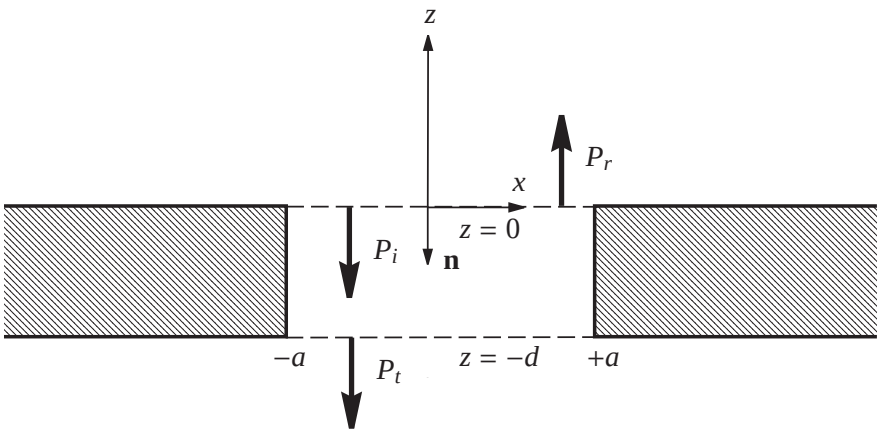


FIG. 3.35 — *Bilan d'énergie dans l'ouverture : puissance réfléchie P_r, puissance transmise P_t, puissance incidente P_i.*

Coefficient de transmission Le coefficient de transmission t est défini comme le rapport de la puissance transmise par l'ouverture sur la puissance incidente dans l'ouverture (en incidence normale).

Par définition, la puissance P à travers une surface S de vecteur normal **n** (vecteur entrant) a pour expression

$$P = \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{dS} = \frac{1}{2} \int_S \mathrm{Re}\Big\{ p\, v_n^* \Big\}\, dS, \tag{3.96}$$

où **I** est l'intensité active (moyenne temporelle de l'énergie instantanée dans la direction **n**), p est le champ de pression, v_n la vitesse dans la direction **n**, $\mathrm{Re}\{\cdots\}$ désigne la partie réelle de $\{\cdots\}$ et où la notation * symbolise l'élément conjugué.

La puissance incidente (figure 3.35) se calcule aisément d'après les relations (3.62) et (3.71) :

$$P_i = \frac{a\, k_z}{\omega \rho}. \tag{3.97}$$

La puissance transmise par l'ouverture en $z = -d$, dans la direction **n**, s'écrit quant à elle

$$P_t = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \mathrm{Re}\Big\{ p^d(x,-d)\, v_n^{d\,*}(x,-d) \Big\}\, dx, \tag{3.98}$$

soit, à partir des expressions (3.67) et (3.75) :

$$\begin{aligned} P_t &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{i}{\omega\rho} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} c_m\, d_p^*\, \xi_p^* \int_{-a}^{+a} \cos a_m(a+x)\, \cos^* a_p(a+x)\, dx \right\}, \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ i\, \frac{a}{\omega\rho} \sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m\, c_m\, d_m^*\, \xi_m^* \right\}, \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{a}{\omega\rho}\,\mathrm{Im}\left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m\, c_m\, d_m^*\, \xi_m^* \right\}, \end{aligned} \tag{3.99}$$

où Im{$\cdots$} désigne la partie imaginaire de {...}. Par définition, le coefficient de transmission t a donc pour expression :

$$t = \frac{P_t}{P_i} = \frac{1}{2k_z}\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m\, c_m\, d_m^*\, \xi_m^*\right\}. \tag{3.100}$$

Si $d_m = 0$ (fenêtre fermée), alors il n'y a pas d'onde transmise ($t = 0$).

Coefficient de réflexion De la même façon, on peut définir le coefficient de réflexion r de l'ouverture, comme le rapport de la puissance réfléchie par l'ouverture dans la direction des z croissants, sur la puissance incidente (en incidence normale). La puissance réfléchie a pour expression :

$$P_r = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} \mathrm{Re}\Big\{p^d(x,0)\, v_z^{d^*}(x,0)\Big\}\, dx, \tag{3.101}$$

soit, après calcul :

$$P_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i\,\omega\rho}\sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m\, \xi_m^*\Big[|c_m|^2\, \cos\xi_m d \sin^*\xi_m d + c_m^*\, d_m\, |\sin\xi_m d|^2 - |d_m|^2\, \cos^*\xi_m d\, \sin\xi_m d - c_m\, d_m^*\, |\cos\xi_m d|^2\Big]\right\}. \tag{3.102}$$

Le coefficient de réflexion r a alors pour expression :

$$r = \frac{P_r}{P_i} = \frac{1}{2k_z}\mathrm{Im}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m\, \xi_m^*\Big[|c_m|^2\, \cos\xi_m d \sin^*\xi_m d + c_m^*\, d_m\, |\sin\xi_m d|^2 - |d_m|^2\, \cos^*\xi_m d\, \sin\xi_m d - c_m\, d_m^*\, |\cos\xi_m d|^2\Big]\right\}. \tag{3.103}$$

Si la fenêtre est fermée ($d_m = 0$), l'expression du coefficient de réflexion se simplifie pour donner :

$$r = \frac{1}{2k_z}\mathrm{Im}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m\, \xi_m^* |c_m|^2\, \cos\xi_m d \sin^*\xi_m d\right\}. \tag{3.104}$$

3.4.3.5 Approximation - Cas limites

Dans certains cas particuliers, il est possible de simplifier les expressions précédentes. Ces cas limites sont présentés ci-dessous.

Expression du champ lointain La connaissance des coefficients c_m et d_m, *via* les équations matricielles (3.92) ou (3.95), permet en théorie de calculer le champ sonore diffracté (*cf.* relation (3.64)) et le champ sonore transmis (*cf.* relation (3.66)) par la fenêtre. Néanmoins, cette determination repose sur le calcul de transformées de Fourier inverses, ce qui est difficilement réalisable en pratique dans notre cas. Lorsque l'observateur est situé loin de la façade[18], il est néanmoins possible de trouver une forme approchée du champ diffracté. On montre ainsi par la méthode des phases stationnaires, le champ diffracté peut s'écrire :

$$p^s(R_S, \theta_S) \approx \sqrt{\frac{k}{2\pi R_S}}\, \cos\theta_S\; \tilde{p}^s(k\sin\theta_S)\, \exp\left(i\left[k R_S - \frac{\pi}{4}\right]\right), \tag{3.105}$$

18. L'expression « champ lointain » est relative ici à la taille de l'embrasure et non à celle de la façade elle-même.

où R_S et θ_S sont les coordonnées du point d'observation M (figure 3.36). Reprenant les expressions (3.77) et (3.78), le champ devant la façade a alors pour expression, après simplification :

$$p^s(R_S,\theta_S) \approx \sqrt{\frac{k}{2\pi R_S}}\,\exp\left(i\left[k R_S - \frac{\pi}{4}\right]\right)\sin\theta_S \times \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \exp(i\,k\,a\sin\theta_S) - \exp(-i\,k\,a\sin\theta_S)}{(k\sin\theta_S)^2 - a_m^2}\,\xi_m\,(c_m \sin\xi_m d - d_m\cos\xi_m d). \quad (3.106)$$

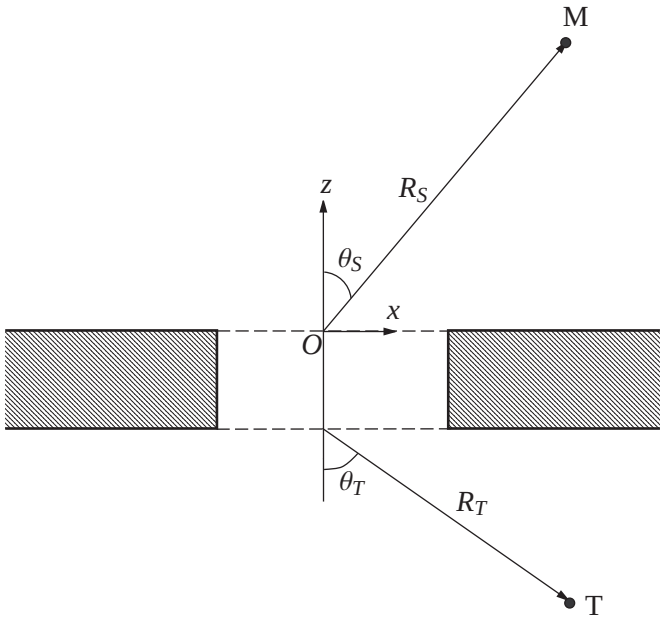


FIG. 3.36 — *Géométrie du champ lointain.*

A la limite, quand la distance R_S tend vers 0, cette expression diverge. De même, lorsque θ_S tend vers 0 (*i.e.* $x = 0$, les points d'observation sont situés sur l'axe z), cette relation pose problème pour le terme correspondant à $m = 0$. Il faut alors considérer la limite du premier terme de ce développement, pour θ_S allant vers 0. Ainsi, on a :

$$p^s(R_S,\theta_S \to 0) \approx \sqrt{\frac{k}{2\pi R_S}}\,\exp\left(i\left[k R_S - \frac{\pi}{4}\right]\right) \times \Big[2i\,a(c_0\sin kd - d_0\cos kd)\Big]. \quad (3.107)$$

De même, le champ transmis à travers la fenêtre, dans l'approximation du champ sonore, s'écrit simplement :

$$p^t(R_T,\theta_T) \approx \sqrt{\frac{k}{2\pi R_T}}\cos\theta_T\;\tilde{p}^t(k\sin\theta_T)\;\exp\left(i\left[k R_T - \frac{\pi}{4}\right]\right), \quad (3.108)$$

soit, grâce aux relations (3.86) et (3.78)

$$p^t(R_T,\theta_T) \approx \sqrt{\frac{k}{2\pi R_T}}\,\exp\left(i\left[k R_T - \frac{\pi}{4}\right]\right)\sin\theta_T \times \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m\,d_m \frac{(-1)^m \exp(i\,k\,a\sin\theta_T) - \exp(-i\,k\,a\sin\theta_T)}{(k\sin\theta_T)^2 - a_m^2}. \quad (3.109)$$

Là encore, cette relation diverge lorsque R_T tend vers 0. A la limite quand θ_t tend vers 0, nous avons

$$p^t(R_T, \theta_T \to 0) \approx \sqrt{\frac{k}{2\pi R_T}} \exp\left(i\left[k R_T - \frac{\pi}{4}\right]\right) \times \left[2i\, a\, d_0\right]. \tag{3.110}$$

Approximation $ka \gg 1$ Lorsque ka devient grand (*i.e.* en haute fréquence et/ou a grand[19]), on observe que les intégrales $I_{1\,mp}$ et $I_{2\,mp}$ introduites à la relation (3.131) sont très inférieures à 0. En première approximation, l'intégrale I_{mp} converge donc vers

$$I_{mp} = \frac{2\pi\, a\, \varepsilon_m}{\sqrt{k^2 - a_m^2}} \delta_{mp}. \tag{3.111}$$

Dans ce cas,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \psi_1^{mp} & = & a\,\varepsilon_m[\cos\xi_m d - i\,\sin\xi_m d]\,\delta_{mp} \\ \psi_2^{mp} & = & a\,\varepsilon_m[\sin\xi_m d + i\,\cos\xi_m d]\,\delta_{mp} \\ \psi_3^{mp} & = & -a\,\varepsilon_m\,\delta_{mp} \\ \psi_4^{mp} & = & i\,a\,\varepsilon_m\,\delta_{mp} \end{array} \right. \tag{3.112}$$

Par conséquent, les matrices $\mathbf{\Psi_i}$ sont diagonales et telles que $\psi_2^{mp} = i\,\psi_1^{mp}$ et $\psi_4^{mp} = -i\,\psi_3^{mp}$. Les coefficients c_m et d_m sont alors obtenus très simplement :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\mathbf{\Psi_1}^{-1}\mathbf{\Gamma}, \tag{3.113}$$

et

$$\mathbf{D} = -\frac{i}{2}\mathbf{\Psi_1}^{-1}\mathbf{\Gamma}. \tag{3.114}$$

On remarque ainsi que

$$c_m = i\,d_m \quad \text{et} \quad d_m = \frac{-i}{2}\frac{\gamma_m}{\psi_1^{mm}} = \frac{-i}{2}\frac{\gamma_m}{a\,\varepsilon_m\,[\cos\xi_m\, d - i\sin\xi_m\, d]}. \tag{3.115}$$

Reportant cette relation dans les expressions du coefficient de transmission (3.100) et du coefficient de réflexion (3.103), nous avons alors :

$$t = -\frac{1}{8k_z\, a^2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m^* \frac{|\gamma_m|^2}{\varepsilon_m}\right\}, \tag{3.116}$$

et

$$r = \frac{1}{8k_z\, a^2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m^* \frac{|\gamma_m|^2}{\varepsilon_m} \exp\left(-2\,\mathrm{Im}\left\{\xi_m\, d\right\}\right)\right\}. \tag{3.117}$$

Mur infiniment mince ($d = 0$) Dans le cas d'un mur d'épaisseur infiniment mince (*i.e.* $d = 0$, fenêtre ouverte dans une paroi mince par exemple), on remarque que (d'après l'expression (3.94)) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{\Psi_1} & = & -\mathbf{\Psi_3} \\ \mathbf{\Psi_2} & = & \mathbf{\Psi_4} \end{array} \right. \tag{3.118}$$

Les matrices **C** et **D** ont donc pour expression :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\mathbf{\Psi_1}^{-1}\mathbf{\Gamma}, \tag{3.119}$$

19. C'est approximation est bine vérifiée en pratique.

et

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{\Psi_2}^{-1}\mathbf{\Gamma}. \tag{3.120}$$

La matrice $\mathbf{\Psi_1}$ étant diagonale, les coefficients c_m s'écrivent simplement :

$$c_m = \frac{1}{2}\frac{\gamma_m}{\psi_1^{mm}} = \frac{1}{2}\frac{\gamma_m}{a\,\varepsilon_m}. \tag{3.121}$$

Les coefficients de transmission et de réflexion, dans le cas d'une paroi infiniment mince, sont alors égaux et ont pour expression :

$$r = -t = -\frac{1}{4k_z\,a}\mathrm{Im}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty} d_m^*\,\xi_m^*\,\gamma_m\right\}. \tag{3.122}$$

3.4.3.6 Implantation numérique

D'un point de vue purement pratique, la résolution du problème passe par la résolution de l'équation matricielle (3.91), que nous pouvons écrire :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}. \tag{3.123}$$

Le calcul des éléments de **B** ne pose aucune difficulté. Par contre, les éléments de **A** sont déterminés par le résultat des intégrales I_{mp} qui n'ont malheureusement pas de solution analytique. Cette intégrale doit donc être estimée numériquement.

Calcul des intégrales I_{mp} Le calcul des intégrales I_{mp} est la principale difficulté dans la résolution des deux équations matricielles (3.92) et (3.95). Nous verrons par la suite, qu'il a été nécessaire de réaliser une procédure numérique pour le calcul d'une partie de cette intégrale. Réécrivons l'intégrale I_{mp} (3.84) sous la forme :

$$I_{mp} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,d\xi \tag{3.124}$$

avec

$$f(\xi) = \frac{\xi^2}{\sqrt{k^2-\xi^2}}\,\frac{(-1)^m\exp(i\,\xi a) - \exp(-i\,\xi a)}{\xi^2 - a_m^2}\,\frac{(-1)^p\exp(-i\,\xi a) - \exp(i\,\xi a)}{\xi^2 - a_p^2}. \tag{3.125}$$

Si m et p sont de parité opposée, alors le numérateur de la fonction $f(\xi)$ se développe pour donner

$$[\pm\exp(i\,\xi a) - \exp(-i\,\xi a)]\,[\mp\exp(-i\,\xi a) - \exp(i\,\xi a)] = \mp 2i\sin 2\xi\,a. \tag{3.126}$$

La fonction $f(\xi)$ est donc impaire et son intégration sur $]-\infty,+\infty[$ est nulle (*i.e.* $I_{mp} = 0$). Si m et p sont de même parité, le numérateur de $f(\xi)$ s'écrit différemment ($\pm$ respectivement si m et p sont paires, et m et p sont impairs) :

$$[\pm\exp(i\,\xi a) - \exp(-i\,\xi a)]\,[\pm\exp(-i\,\xi a) - \exp(i\,\xi a)] = 2[1-(\pm 1)^m\cos 2\xi\,a]. \tag{3.127}$$

L'intégrale I_{mp} à calculer s'écrit alors :

$$I_{mp} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi^2}{\sqrt{k^2-\xi^2}}\,\frac{2[1-(-1)^m\cos 2\xi\,a]}{(\xi^2-a_m^2)\,(\xi^2-a_p^2)}\,d\xi. \tag{3.128}$$

Dans la mesure où l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi^2}{\sqrt{k^2-\xi^2}}\,\frac{\mp 2\sin 2\xi\,a}{(\xi^2-a_m^2)\,(\xi^2-a_p^2)}\,d\xi \tag{3.129}$$

est également nulle, l'intégrale (3.128) peut se mettre sous la forme d'une exponentielle

$$I_{mp} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\xi^2}{\sqrt{k^2-\xi^2}} \frac{[1-(-1)^m \exp(2\,i\,\xi\,a)]}{(\xi^2-a_m^2)(\xi^2-a_p^2)}\,d\xi, \tag{3.130}$$

ce qui facilite son calcul. On remarquera par ailleurs que $I_{mp} = I_{pm}$ puisque p et m sont de même parité. Seuls les éléments I_{mp}, $\forall m$ et $p \geq m$, doivent être calculés, les autres étant obtenus par symétrie. La difficulté principale vient du comportement oscillatoire de l'intégrande de l'intégrale (3.130) [166]. En passant dans le plan complexe par un changement de variable adéquate, et en appliquant la méthode des résidus, on montre que l'intégrale I_{mp} s'écrit [166, 188] :

$$I_{mp} = \frac{2\pi\,a\,\varepsilon_m}{\sqrt{k^2-a_m^2}}\delta_{mp} - (I_{1\,mp} + I_{2\,mp}), \tag{3.131}$$

avec

$$I_{1\,mp} = -4\,(-1)^m \int_{\Gamma_4} \frac{\xi^2 \exp(2\,i\,\xi\,a)}{\sqrt{k^2-\xi^2}\,(\xi^2-a_m^2)(\xi^2-a_p^2)}\,d\xi, \tag{3.132}$$

$$I_{2\,mp} = 4 \int_{\Gamma_4} \frac{\xi^2}{\sqrt{k^2-\xi^2}\,(\xi^2-a_m^2)(\xi^2-a_p^2)}\,d\xi. \tag{3.133}$$

Le premier terme de (3.131) désigne le résidu de l'intégrale I_{mp} au pole $\xi = m\pi/(2a)$ ($\xi_m = 0$) qui n'apparaît que lorsque $m = p$. Le second terme représente la valeur de l'intégrale sur un contour complexe Γ_4 qui définit une ligne d'intégration dans l'espace complexe $k(1+i\,v)$, v allant de 0 à $+\infty$. Effectuant ainsi le changement de variable $\xi = k(1+i\,v)$ et posant $\alpha = a_m/k$ et $\beta = a_p/k$, les deux intégrales $I_{1\,mp}$ et $I_{2\,mp}$ définies dans le plan complexe se transforment en deux intégrales définies sur un contour réel :

$$I_{1\,mp} = -\frac{4i\,(-1)^m}{k^2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+i\,v)^2 \exp(2k\,a(i-v))}{\sqrt{v(v-2i)}\,[(1+i\,v)^2-\alpha^2]\,[(1+i\,v)^2-\beta^2]}\,dv, \tag{3.134}$$

et

$$I_{2\,mp} = \frac{4i}{k^2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+i\,v)^2}{\sqrt{v(v-2i)}\,[(1+i\,v)^2-\alpha^2]\,[(1+i\,v)^2-\beta^2]}\,dv. \tag{3.135}$$

Le calcul[20] analytique de l'intégrale $I_{2\,mp}$ donne (rappel : m et p sont de même parité) :

$$I_{2\,mp} = \begin{cases} \frac{2}{k^2(\alpha^2-\beta^2)}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \ln \frac{\alpha - i\sqrt{1-\alpha^2}}{-\alpha - i\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \ln \frac{\beta - i\sqrt{1-\beta^2}}{-\beta - i\sqrt{1-\beta^2}}\right] & m \neq p \\ \frac{1}{k^2(1-\alpha^2)}\left[2i + \frac{1}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \ln \frac{\alpha - i\sqrt{1-\alpha^2}}{-\alpha - i\sqrt{1-\alpha^2}}\right] & m = p \neq 0 \\ \frac{4i}{k^2} & m = p = 0 \end{cases} \tag{3.136}$$

En ce qui concerne l'intégrale $I_{1\,mp}$, il n'y a pas à notre connaissance de solution analytique. Elle doit être estimée numériquement. Posons

$$I_{1\,mp} = \int_0^{+\infty} g(v)\,dv, \tag{3.137}$$

avec

$$g(v) = -\frac{4i\,(-1)^m}{k^2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+i\,v)^2 \exp(2k\,a(i-v))}{\sqrt{v(v-2i)}\,[(1+i\,v)^2-\alpha^2]\,[(1+i\,v)^2-\beta^2]}\,dv. \tag{3.138}$$

Numériquement, cette intégrale pose deux problèmes. Le premier vient de la borne d'intégration infinie et le second résulte de la présence de la singularité en $v = 0$ (seconde borne d'intégration). La

20. Le détail n'est pas présenté dans ce document.

solution usuelle dans ce cas, consiste alors à séparer cette intégrale en deux intégrales, pour isoler chacun des deux problèmes [208], soit :

$$I_{1\,mp} = \int_0^b g(v)\,dv + \int_b^{+\infty} g(v)\,dv = I_{1\,b-} + I_{1\,b+}, \tag{3.139}$$

en introduisant une borne arbitraire b qui sera déterminée ultérieurement. Pour chacune des deux intégrales, il convient ensuite d'effectuer le changement de variable approprié. Ainsi, pour l'intégrale $I_{1\,b+}$, dans la mesure où cette intégrale décroît en $\exp(-2k\,a\,v)$ il suffit de poser $2k\,a\,v = -\ln t$. Nous passons ainsi d'un intervalle semi-infini $[b, +\infty[$ à un intervalle fini $[0, \exp(-2k\,a\,b)]$:

$$\begin{aligned} I_{1\,b+} &= \frac{1}{2k\,a}\int_0^{\exp(-2k\,a\,b)} \frac{1}{t}\,g\left(\frac{-\ln t}{2k\,a}\right) dt, \\ &= \int_0^{\exp(-2k\,a\,b)} \frac{u^2(-4i)(-1)^m\,(u - i\ln t)^2\,\exp(i\,u)\,dt}{[(u - i\ln t)^2 - (u\,\alpha)^2]\,[(u - i\ln t)^2 - (u\,\beta)^2]\,\sqrt{\ln t\,(2i\,u + \ln t)}}, \end{aligned} \tag{3.140}$$

avec $u = 2\,k\,a$. Néanmoins, la fonction $g(-\ln t/2k\,a)/t$ n'est pas définie lorsque t prend la valeur 0. Cette fonction étant continue sur le domaine d'intégration, il suffit d'imposer la valeur de la fonction à sa limite quand t tend vers 0 :

$$\frac{1}{t}\,g\left(\frac{-\ln t}{2k\,a}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,g\left(\frac{-\ln t}{2k\,a}\right) \equiv \lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln^4 t} = 0. \tag{3.141}$$

En ce qui concerne l'intégrale $I_{1\,b-}$, il suffit de poser le changement de variable $v = t^2$ pour supprimer la singularité en 0 :

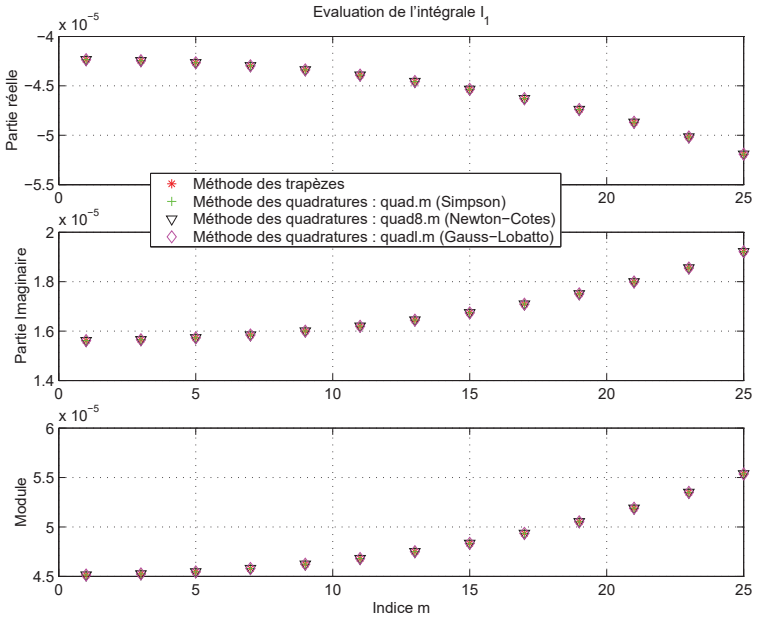
$$\begin{aligned} I_{1\,b-} &= \int_0^{\sqrt{b}} 2t\,g(t^2)\,dt, \\ &= \frac{-8i\,(-1)^m\,\exp(2i\,k\,a)}{k^2}\int_0^{\sqrt{b}} \frac{(1 + i\,t^2)^2\,\exp\left(-2k\,a\,t^2\right)}{\sqrt{t^2 - 2i}\,[(1 + i\,t)^2 - \alpha^2]\,[(1 + i\,t)^2 - \beta^2]}\,dt. \end{aligned} \tag{3.142}$$

Les intégrales ainsi transformées peuvent être estimées numériquement par des méthodes de calcul adéquates.

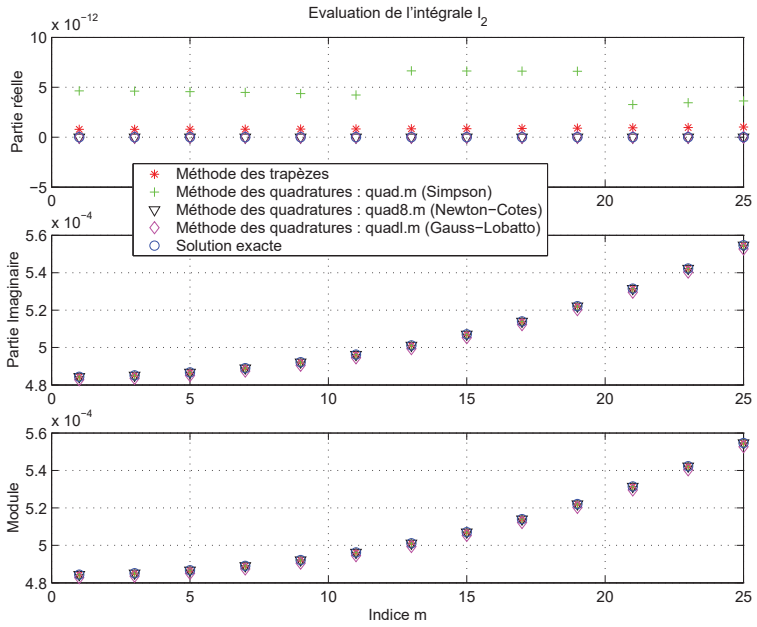
Calcul numérique des intégrales Une procédure numérique a été spécifiquement développée pour réaliser le calcul de l'intégrale $I_{1\,mp}$, à partir des développements qui précédent. Plusieurs possibilités ont été envisagées : une estimation par la méthode des trapèzes ou par la méthode des quadratures (méthode de Simpson [`quad`], méthode de Newton-Cotes [`quad8`], méthode Gauss-Lobatto [`quadl`]). Ces méthodes ont été testées sur l'intégrale $I_{2\,mp}$ dont la solution exacte est parfaitement connue. A titre d'illustration, la figure 3.37 présente un exemple de calcul à 5 000 Hz (a = 1 m, d = 0.5 m). En ce qui concerne l'estimation de $I_{2\,mp}$, les résultats sont tout à fait corrects quelle que soit la méthode. Lorsque les valeurs de l'intégrale sont très petites (*cf.* partie réelle de l'intégrale à 5 000 Hz), les méthodes de quadratures `quad8` et `quadl` semblent donner de meilleurs résultats. Toutefois, à ces ordres de grandeurs, l'erreur commise par les autres méthodes est négligeable. A la différence de la fonction `quad8`, l'utilisation de la fonction `quadl` permet une convergence plus rapide.

Point b de décomposition des intégrales Pour déterminer la valeur de l'intégrale $I_{1\,mp}$, nous avons dû la décomposer en deux intégrales distinctes afin d'éliminer les problèmes de singularité pour la borne inférieure et de borne infinie pour la borne supérieure (relation (3.139)) :

$$I_{1\,mp} = \int_0^b g(v)\,dv + \int_b^{+\infty} g(v)\,dv = I_{1\,b-} + I_{1\,b+}.$$



(a) Évaluation de l'intégrale $I_{1\,mp}$



(b) Évaluation de l'intégrale $I_{2\,mp}$

FIG. 3.37 — *Calcul des intégrales $I_{1\,mp}$ et $I_{2\,mp}$ par les méthodes des quadratures (tolérance fixée à $1e-10$) et des trapèzes (4 000 segments), pour m variant de 1 à 25 et $p = 7$. Comparaison avec la solution exacte (pour $I_{2\,mp}$ seulement). Paramètres de calcul : F =5 000 Hz, $a = 1$ m, $d = 0.5$ m.*

Cette borne étant choisie arbitrairement, il est nécessaire de déterminer la valeur optimale pour garantir les meilleurs résultats. Plusieurs valeurs du paramètre b ont été testées pour le calcul de $I_{2\,mp}$, dans la mesure ou les résultats pouvaient être ensuite comparées à la valeur exacte. Il semble que le choix de b influence effectivement la précision des estimations, mais à des ordres de grandeurs *a priori* négligeables. Dans la mesure où un des changements de variable est différent pour l'intégrale $I_{1\,mp}$, il est assez difficile d'évaluer l'impact de ce paramètre sur cette dernière intégrale. Néanmoins, pour certains calculs[21], des valeurs de b trop grandes (de l'ordre de 1 000) conduisent à des messages d'avertissement sur le calcul des intégrales $I_{1\,mp}$ par la méthode `quadl`. La valeur de b a été fixée à 0.1 dans les simulations qui suivent.

Convergence de la solution Les matrices **A** et **B** sont, par construction, des matrices de dimension infinie (les solutions recherchées sont sous la forme de séries infinies). En pratique, il faut tronquer ces séries jusqu'à un ordre N pour avoir un résultat. Pour évaluer cette valeur et étudier la convergence de la solution, nous avons réalisés différentes simulations, fenêtre ouverte et fermée, à 500 Hz et 5 000 Hz, pour $a = 0.1$ m et 1 m.

L'ordre N étant fixé, il est donc possible de calculer les coefficients c_m et d_m nécessaires au calcul des champs sonores. Les courbes de la figure 3.38 illustrent la convergence de la solution en un point donné ($R = 2$ m, $\theta_R = \pi/4$) devant la façade, fenêtre fermée, en fonction de l'ordre N de calcul, mais également en fonction du nombre de coefficients utilisés pour le calcul de la solution pour un ordre N donné : N étant fixé, il est en effet possible de ne conserver que les coefficients 1 à 1, 1 à 2... 1 à N dans le calcul des solutions. Pour une valeur de ka petite, la convergence est très vite assurée. Lorsque ka augmente, il faut prendre en compte plus de termes dans le calcul de la solution. On remarque que, quelle que soit la valeur de ka, la convergence semble possible pour un nombre de termes supérieur ou égale à la valeur

$$m_c = E[4aF/c] + 1, \tag{3.143}$$

définissant la position du « saut » dans le calcul des intégrales $I_{1\,mp}$ et $I_{2\,mp}$ (*i.e.* $m_c = 6$ pour $F = 500$ Hz, $a = 0.1$ m ; $m_c = 59$ pour $F = 5000$ Hz, $a = 1$ m).

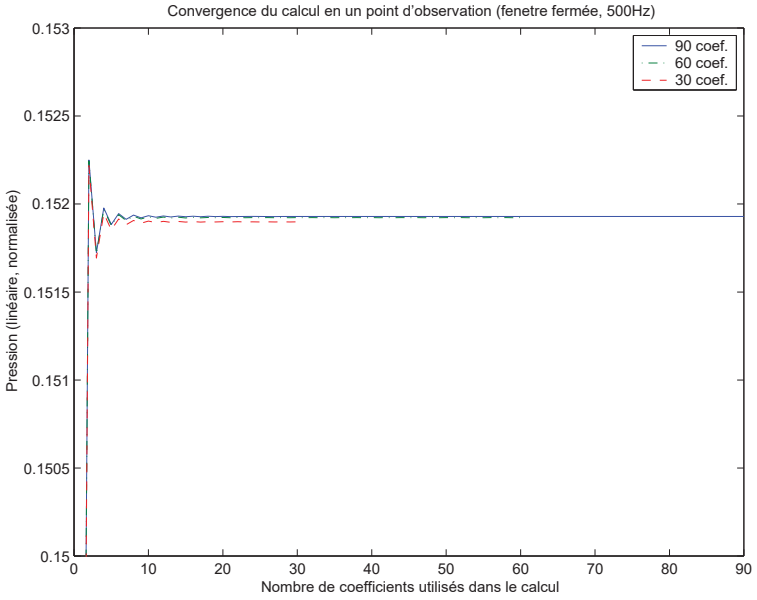
Dans la configuration *fenêtre fermée*, la convergence est établie sans difficulté avec un nombre de coefficients qui dépend, comme attendu, de la fréquence. En haute fréquence, il faut prendre plus de coefficients. La valeur m_c semble un bon critère de convergence, même s'il faudrait prendre en compte un peu plus de coefficients pour une meilleur précision. Néanmoins les écarts sont faibles. Dans la configuration *fenêtre ouverte*, la convergence des solutions n'est pas obtenue. Non seulement les calculs divergent, mais ils ne divergent pas tous ensembles (les résultats étant fonction du nombre de coefficients calculés, puis utilisés). Ceci prouve que les m premiers coefficients **C** et **D** calculés sur une base de N_1 ($m < N_1$) coefficients sont différents des m premiers coefficients avec une autre base N_2 ($m < N_2$). Cette constatation est d'ailleurs également valable dans la configuration *fenêtre fermée* mais à un niveau moindre. Ceci provient du fait que même les m premiers éléments de **C** et **D** sont calculés à partir de l'ordre maximal N choisi, par inversion de la matrice **A**.

Pour les configurations *fenêtre fermée* et *fenêtre ouverte (méthode approchée)*, les résultats sont assez proches d'un ordre à un autre, excepté pour le premier coefficient ($m = 1$) et pour quelques valeurs particulières. Ceci explique pourquoi la convergence est assez bien assurée dans ces cas. En revanche, dans la configuration *fenêtre ouverte*, de très grandes différences sont observées sur les valeurs de c_m et d_m, expliquant la divergence des calculs. De même, pour ka grand, l'approximation *fenêtre ouverte (méthode approchée)* doit en principe s'approcher des valeurs de la configuration *fenêtre ouverte*. Néanmoins, là encore, les résultats ne sont pas équivalents, ce qui peut mettre en doute le calcul des coefficients c_m et d_m dans la configuration *fenêtre ouverte*.

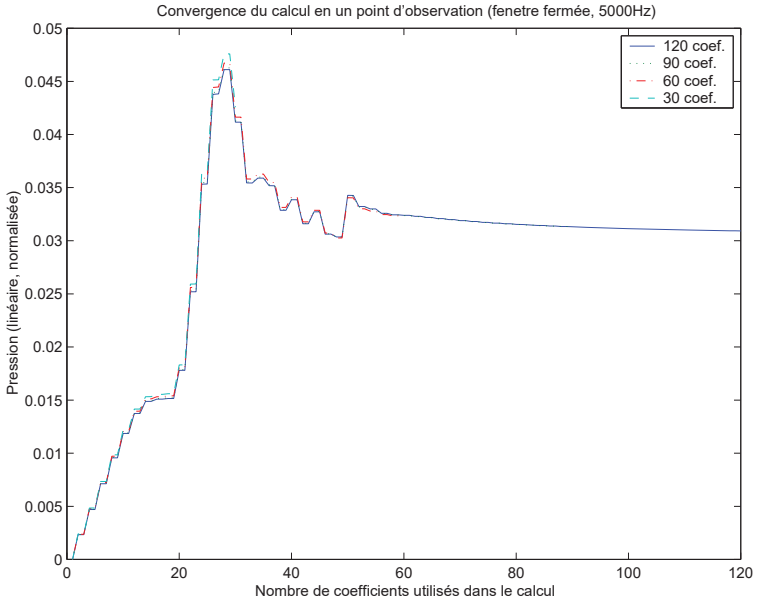
A ce stade, trois hypothèses peuvent expliquer ce problème de convergence :

– la méthode d'estimation des intégrales $I_{1\,mp}$ s'avère toujours insuffisante (hypothèse peu probable tout de même) ;

21. Le programme a été développé dans l'environnement Matlab©.



(a) 500 Hz, $a = 0.1$ m, $d = 0.5$ m



(b) 5000 Hz, $a = 1$ m, $d = 0.5$ m

FIG. 3.38 — *Convergence du champ acoustique diffracté en un point d'observation $R_S = 2$ m et $\theta_S = \pi/4$, pour un angle d'incidence $\theta = \pi/4$, en fonction du nombre N de coefficients calculés et utilisés dans le calcul de la solution (fenêtre fermée) : (a) :* 500 *Hz, $a = 0.1$ m et $d = 0.5$ m ; (b) : 5 000 Hz, $a = 1$ m et $d = 0.5$ m.*

– l'inversion de la matrice **A** est difficile : les éléments qui la composent étant très petits, la matrice est presque singulière, ce qui pose un problème lors de son inversion et donne un résultat incorrect. D'autres méthodes d'inversion, adaptées aux matrices presque singulières, ont été envisagées, mais n'ont pas donné de résultats positifs à ce jour ;
– dans la mesure où dans les configurations *fenêtre fermée* et *fenêtre ouverte (méthode approchée)* (celles qui convergent bien), seul le calcul des éléments ψ_1^{mp} et γ_p est nécessaire, il peut éventuellement y avoir une erreur sur le calcul des autres éléments ψ_2^{mp}, ψ_3^{mp} et/ou ψ_4^{mp}, qui rendrait donc impossible l'inversion de la matrice **A**. Néanmoins, cette hypothèse nous paraît également peu vraisemblable.

Malgré une étude approfondie des algorithmes d'estimation des intégrales et d'inversion des matrices, le problème de convergence dans la configuration *fenêtre ouverte* n'est toujours pas résolu. Seules les configurations *fenêtre fermée* et *fenêtre ouverte (méthode approchée)* sont actuellement utilisables. De nouvelles investigations seraient donc à prévoir s'il fallait poursuivre cette étude.

3.4.3.7 Applications

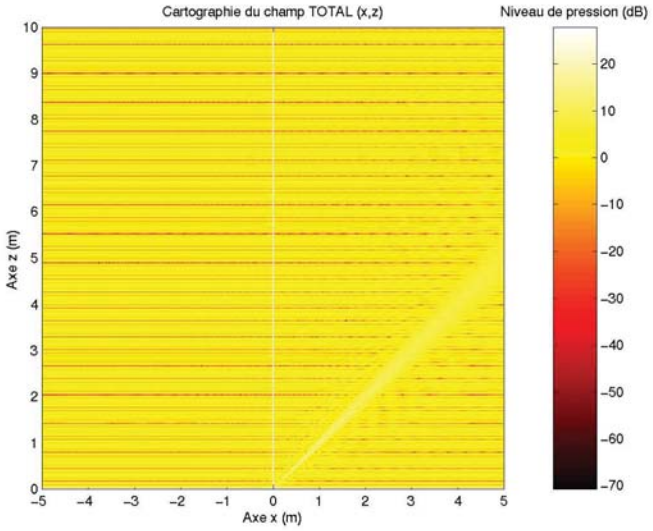
Diffraction par une fenêtre A titre d'illustration, nous avons réalisé deux calculs à 3 500 Hz, pour une fenêtre de largeur 2 m et de profondeur 20 cm, lorsque la fenêtre est fermée puis ouverte (approximation $ka \gg 1$). Les résultats sont présentés aux figures 3.39, 3.40 et 3.41, respectivement pour la pression totale devant la façade ($p^i + p^r + p^s$), pour la pression diffractée par l'embrasure (p^s), et pour la pression dans l'embrasure (p^d).

Comme attendu les phénomènes d'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie sont clairement visibles sur la figure 3.39 : présence de franges d'interférences parallèles au plan de réflexion et distantes de $\lambda/2\cos\theta$ (résultat attendu). La cavité est quant à elle à l'origine d'une figure de diffraction (figure 3.40) dont se dégagent deux directions privilégiées : la direction de réflexion spéculaire, et la direction incidente. La cavité renvoie donc une grande partie de l'énergie dans la direction spéculaire et une partie plus faible dans la direction d'incidence. Des franges d'interférences « classiques », sont également visibles dans plusieurs directions de réflexion.

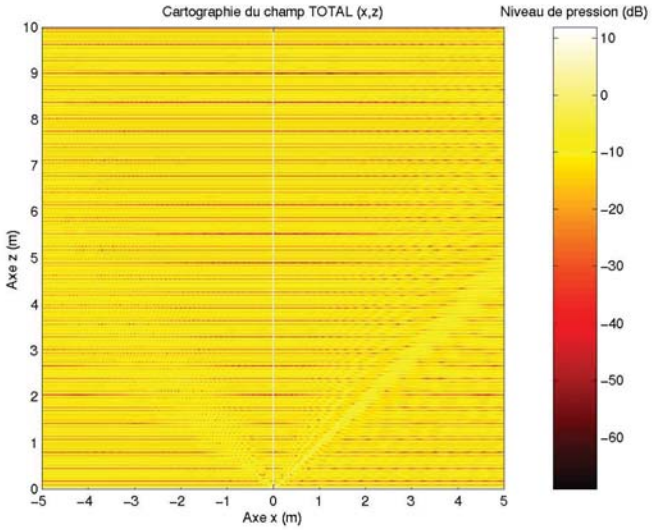
Le champ sonore dans la cavité fait clairement apparaître un réseau d'ondes stationnaires dans la direction x, résultant de la réflexion de l'onde plane sur le coté ($x = a$) de la cavité (figure 3.41). Ce phénomène est essentiellement visible à proximité de cette limite, alors que la répartition de l'énergie semble s'uniformiser à mesure que x tend vers $-a$. Lorsque la cavité est fermée, la réflexion de l'onde plane sur le fond de la cavité est également visible sous la forme d'un réseau d'interférences parallèles à x.

Diffraction par un balcon Nous présentons également un exemple de calcul réalisé pour un balcon [192], en deux dimensions, de 3 m de haut et 1.5 de profondeur dans une façade (figure 3.42). Les figures 3.43 et 3.44 illustrent les champs de pression diffractés devant la façade et à l'intérieur du balcon, à 500 Hz et 5 000 Hz respectivement, pour une onde incidente à $\pi/4$ de la normale à la façade. Comme pour l'exemple de la fenêtre, les figures de diffraction devant la façade présentent des lobes principaux autour de la direction d'incidence et de réflexion spéculaire. A l'intérieur du balcon, les figures de diffraction font apparaître un système d'ondes stationnaires se mettant en place sur le haut du balcon (à droite sur les figures).

Comme nous l'avons précisé plus haut, l'objectif de ces travaux sur la caractérisation de la diffusion par des façades est de proposer des lois de réflexion réelles. Dans le cas présent, ces lois peuvent être obtenues à partir du champ sonore diffracté par le balcon. Ainsi, les figures 3.44(a) et 3.43(a) permettent par exemple d'obtenir les lois de réflexion présentées aux figures 3.45(a) et 3.45(b) respectivement.

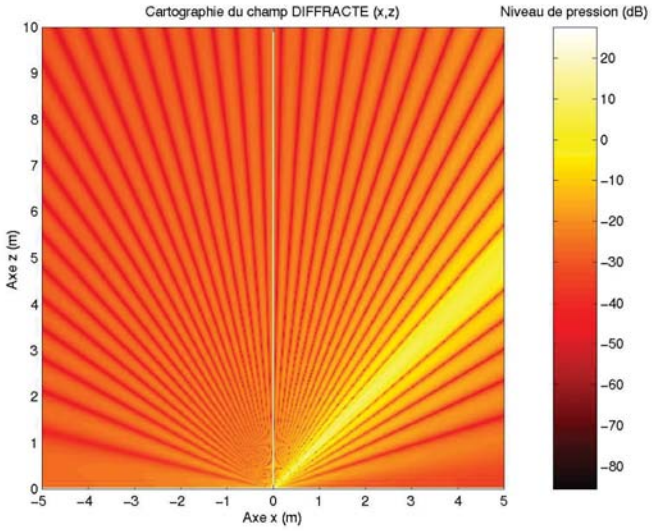


(a) Fenêtre ouverte

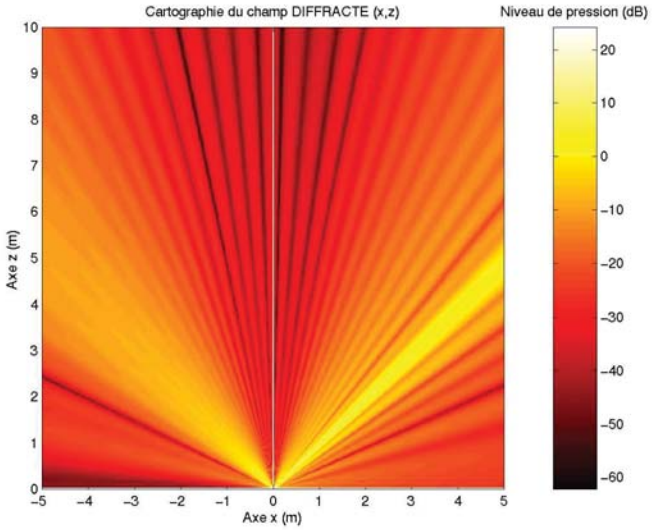


(b) Fenêtre fermée

FIG. 3.39 — *Champ de pression total devant la facade lorsque l'embrasure est ouverte (a) et fermée (b). N =3 500 Hz, $a = 1$ m, $d = 0.2$ m, $\theta = \pi/4$.*

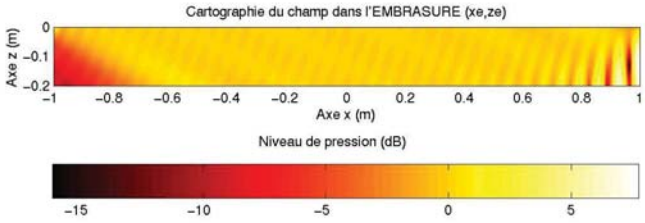


(a) Fenêtre ouverte

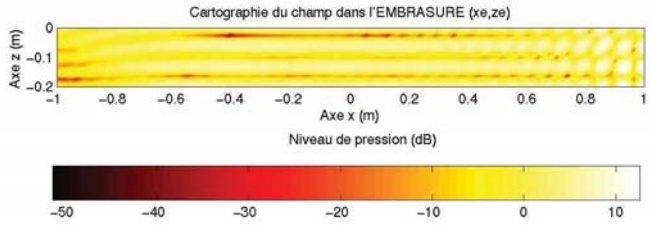


(b) Fenêtre fermée

FIG. 3.40 — *Champ de pression diffracté par l'embrasure lorsque l'embrasure est ouverte (a) et fermée (b). N =3 500 Hz, $a = 1$ m, $d = 0.2$ m, $\theta = \pi/4$.*



(a) Fenêtre ouverte



(b) Fenêtre fermée

FIG. 3.41 — *Champ de pression dans l'embrasure lorsque l'embrasure est ouverte (a) et fermée (b). N =3 500 Hz, $a = 1$ m, $d = 0.2$ m, $\theta = \pi/4$.*

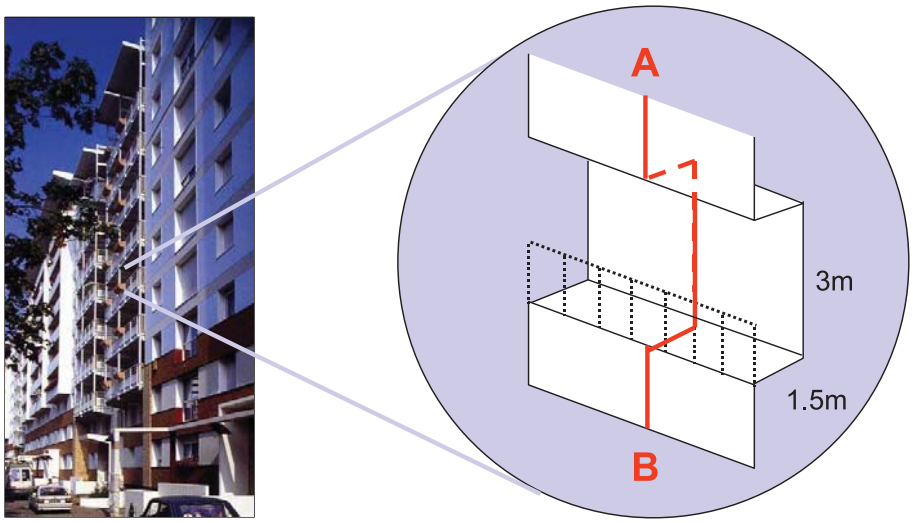
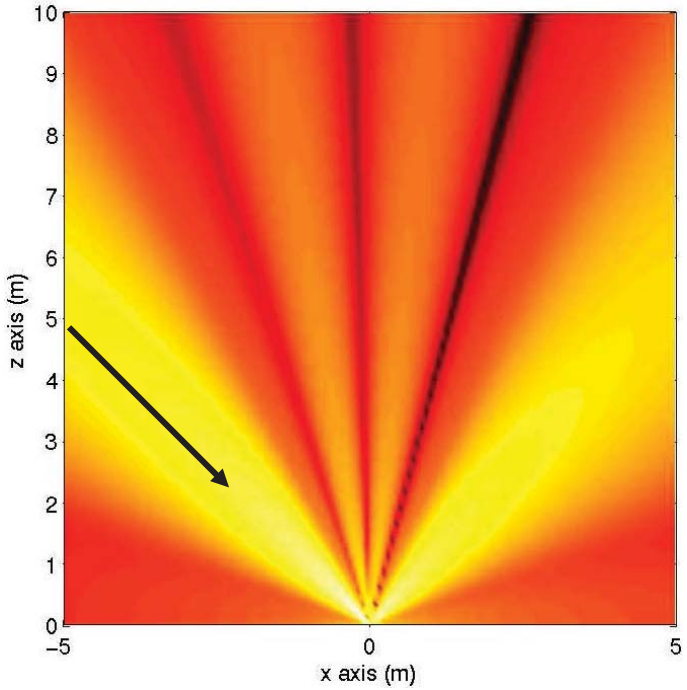
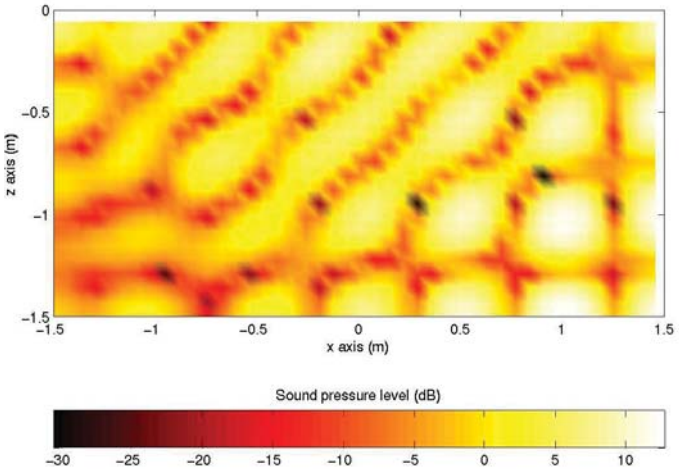


FIG. 3.42 — *Géométrie d'un balcon dans une façade.*

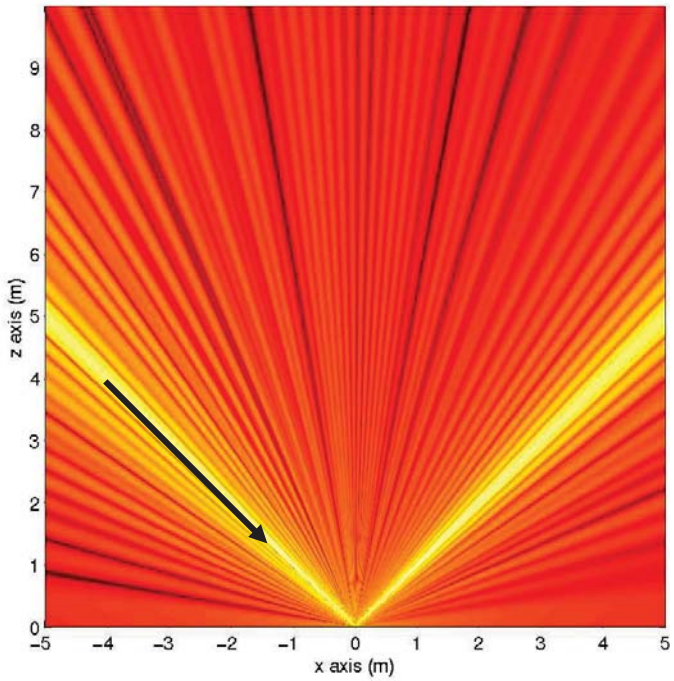


(a) Champ diffracté devant la façade

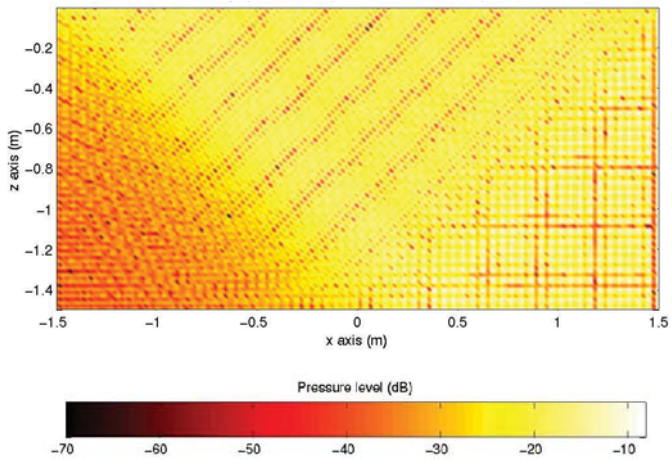


(b) Champ sonore dans le balcon

FIG. 3.43 — *Champ de pression devant la façade et à l'intérieur du balcon : $N = 500$ Hz, $2a = 3$ m, $d = 1.5$ m, $\theta = \pi/4$.*

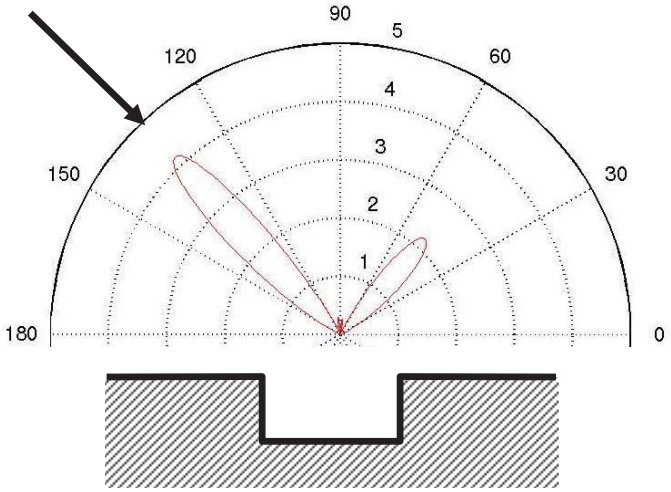


(a) Champ diffracté devant la façade

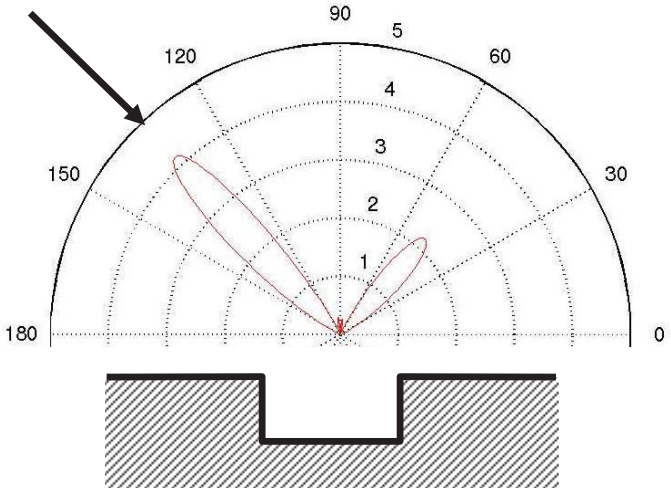


(b) Champ sonore dans le balcon

FIG. 3.44 — *Champ de pression devant la façade et à l'intérieur du balcon : $N = 500$ Hz, $2a = 3$ m, $d = 1.5$ m, $\theta = \pi/4$.*



(a) 5000 Hz



(b) 500 Hz

FIG. 3.45 — *Loi de réflexion d'un balcon à 5000 Hz (a) et* 500 *Hz (b) (*$2a = 3\ m$, $d = 1.5\ m$, $\theta = \pi/4$*).*

3.4.3.8 Conclusion

Nous avons donc proposé un modèle de diffraction par une fenêtre en deux dimensions (fermée et ouverte), dans une façade. Le modèle permet de caractériser aussi bien le champ de pression réfléchi que le champ transmis à travers la fenêtre. Bien que posé analytiquement, le modèle fait toutefois appel à des calculs numériques d'intégrales, dont la convergence n'est pas toujours assurée.

L'application de ce modèle à un réseau de fenêtres en deux dimensions, ou en trois dimensions pour une fenêtre ou un réseau de fenêtres, est toutefois plus complexe. Pour simuler une configuration composée de deux fenêtres, il ne suffit pas, par exemple, d'additionner les champs sonores calculés pour chaque fenêtre indépendamment, du fait des interférences mutuelles. Dans le cas de réseaux périodiques de fenêtres ou de balcons, il est sans doute possible de s'inspirer de travaux similaires en électromagnétisme, à l'image des applications proposées en acoustique par Allard, Kelders et Lauriks [1, 121]. Pour des façades de morphologie plus complexe, il pourrait être intéressant de considérer des modèles de réflexion par des surfaces aléatoires et surfaces rugueuses, reprenant la distribution statistique des irrégularités de façades. Dans ce domaine, les développements mathématiques sont en effet plus nombreux.

Une approche entièrement numérique a également été proposée dans le cadre du stage de fin d'étude d'A. Plichet au CSTB de Grenoble [206], encadré par E. Premat. Les résultats du modèle présenté plus haut (une fenêtre dans un plan) ont ainsi été comparés à des simulations numériques réalisées avec le code de calcul MICADO du CSTB, avec un bon accord. Ce code de calcul repose sur la résolution de l'équation d'Helmholtz par éléments de frontière [105, 106]. A titre d'exemple, la figure 3.46 illustre une comparaison entre les deux approches. Par construction, ce code de calcul est beaucoup plus souple d'utilisation que notre modèle analytique, puisqu'il peut être appliqué à une forme quelconque de façade[22]. A l'inverse les calculs sont plus rapides avec l'approche analytique. Plus récemment encore, dans le cadre du projet du recherche MEDD sur les « Effets de la réflexion diffuse des façades sur la propagation acoustique et sur la représentation de l'environnement sonore en milieu urbain », ce même code a été appliqué sur des coupes réelles de façades urbaines [202]. Avec l'évolution de la puissance de calcul des stations de travail, l'utilisation de ce type de code pose en effet beaucoup moins de problème. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle, nous avons choisi de ne pas poursuivre le développement de notre propre approche analytique.

3.4.4 Caractérisation expérimentale sur maquette

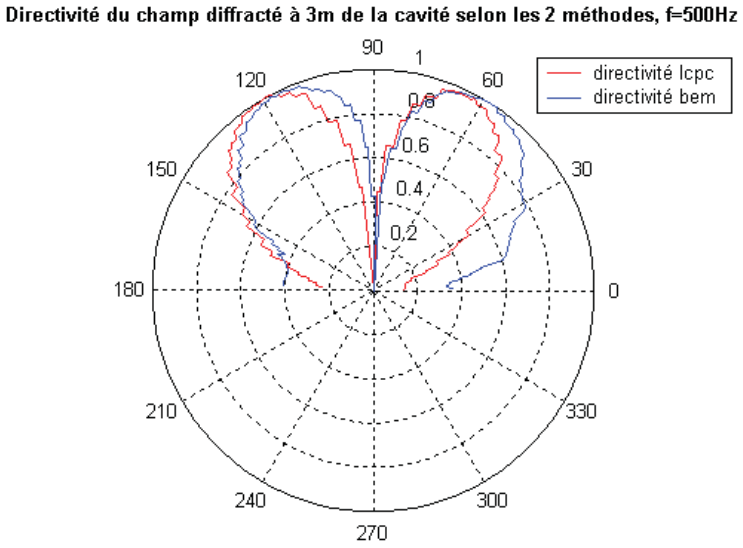
En parallèle à l'approche théorique évoquée dans le paragraphe précédent, nous avons également entrepris une démarche purement expérimentale, consistant à mesurer directement les lois de réflexion sur des façades réelles. Néanmoins, pour que ce type de mesure soit utile et intégrable dans des approches « rayons sonores par exemple », il serait nécessaire de mesurer une loi de réflexion pour chaque angle d'incidence, et pour chaque façade. En pratique, cette solution n'est évidemment pas possible. Dans un premier temps, on peut se limiter à quelques angles d'incidence données et à différents types de façade[23].

La mesure *in situ* étant relativement complexe à mettre en oeuvre[24], nous avons choisi d'utiliser une maquette de façade, mais là encore sur une géométrie simplifiée, de la forme de la figure 3.33(d). Ces travaux ont été réalisés en grande partie au cours des stages de DEA d'Acoustique Appliquée (Université du Maine) de M. Etchessahar [67] et K. Germaix [79], respectivement au LAUM et au LCPC, co-encadrés avec L. Simon.

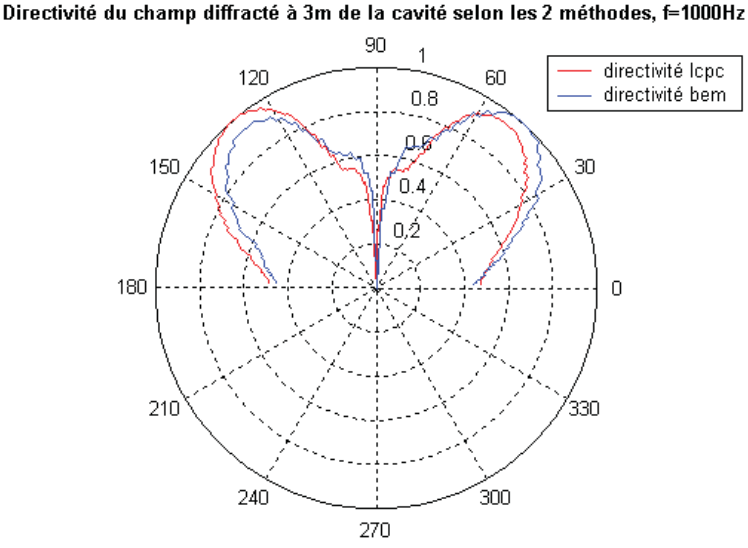
22. Dans le cadre de ce stage, le code de calcul a été appliqué par exemple à une façade composée de deux fenêtres.

23. Ces types étant à définir à partir d'une analyse morphologique des façades rencontrées en milieu urbain, puis à un classement par « famille ».

24. Nous évoquerons ce point au paragraphe 3.4.5.



(a) 500 Hz



(b) 1000 Hz

FIG. 3.46 — *Comparaison des directivités obtenues avec le modèle du LCPC et le code de calcul MICADO du CSTB pour une cavité de largeur* 1 *m et profondeur* 0.50 *m dans une façade, pour une onde sonore d'incidence* $\pi/4$*, à* 500 *Hz (a) et 1 000 Hz (b). D'après [206].*

3.4.4.1 Principe des mesures

Maquette de façade Une maquette de façade conforme à la géométrie présentée à la figure 3.33(d) a été réalisée à l'Université du Maine (LAUM) dans le cadre du stage de M. Etchessahar [67]. Cette maquette au 1/5, de dimension 2.80×1.50 m^2, représente une façade de bâtiment de 14.0×7.50 m^2, soit environ 3 étages. Des fenêtres, de dimension $0.20 \times 0.25 \times 0.06$ m ($1.0 \times 1.25 \times 0.30$ m à l'échelle réelle), ont été disposées sur 3 niveaux, tous les 0.40 m horizontalement et 0.50 m verticalement (respectivement 2 m et 2.50 m à l'échelle réelle). Afin de pouvoir étudier l'influence de la disposition des fenêtres sur le champ réfléchi par la façade, des caches permettent de « combler » les fenêtres. Lorsque tous les caches sont mis en place, la façade peut être supposée comme parfaitement plane. La maquette étant réalisée en medium, l'absorption acoustique est négligeable.

Fig. 3.47 — *Photographie de la maquette au* 1/5 *d'une façade constituée d'un arrangement périodique de fenêtre. La maquette a été réalisée au LAUM dans le cadre du stage de* M. Etchessahar *[67].*

L'utilisation de maquettes acoustiques impose le respect des lois de similitude acoustique. Ainsi, l'utilisation d'une maquette au 1/5, sur une bande de fréquences équivalente à celle du bruit routier $[500, 5000]$ Hz dans notre cas, impose de travailler sur une bande de fréquences translatée d'un facteur 5, soit $[2500, 25000]$ Hz. Cette translation fréquentielle se traduit par des contraintes techniques au niveau de la source sonore, des microphones de mesure et du système d'acquisition acoustique, en termes de réponses fréquentielles et de fréquence d'échantillonnage. A ces contraintes techniques, s'ajoutent également une modification des phénomènes physiques, notamment au niveau de l'atténuation atmosphérique, plus importante à l'échelle de la maquette qu'à l'échelle réelle. Ces aspects sont détaillés très largement dans la référence [203].

Principe des mesures Le principe des mesures consiste à déterminer la réponse impulsionnelle de la façade, pour un point d'observation, et pour une position donnée de la source. Par construction, cette réponse impulsionnelle fait apparaître le champ direct, suivi des réflexions par les éléments de la façade, et éventuellement des réflexions par le sol. Dans le cadre de notre étude, la maquette étant disposée sur

un sol parfaitement absorbant (soit en salle anéchoïque, soit sur un matériau absorbant), les réflexions par le sol sont inexistantes. En faisant varier, la position d'observation sur un arc de cercle centré sur la façade (figure 3.48(a)), et en isolant la partie réfléchie, il est possible de construire la loi de réflexion de la façade (pour une position de source fixée). Cette loi de réflexion peut être représentée en niveau global ou en bandes de fréquence, après analyse spectrale du contenu du signal réfléchi par la façade.

Système expérimental Dans le cadre du travail de M. Etchessahar [67] au LAUM, une technique de mesure utilisant un signal pseudo-aléatoire MLS a été utilisée. Cette technique, couramment employée en acoustique des salles, permet de déterminer la réponse impulsionnelle du système grâce à des calculs de corrélation entre le signal émis (signal source) et le signal mesuré au point d'observation. Le principal intérêt de la méthode réside dans son immunité au bruit de fond. Le choix de la longueur du signal MLS, associé à un moyennage des réponses impulsionnelles permet d'obtenir un bon rapport signal-sur-bruit, par rapport aux techniques classiques à base de sources de bruit blanc ou impulsionnelles.

Sur ce principe, une première mesure en l'absence de la maquette (en environnement anéchoïque) permet de déterminer le champ direct. Une seconde mesure en présence de la maquette permet ensuite de mesurer le champ total (champ direct et champ réfléchi). La soustraction temporelle des deux réponses impulsionnelles permet alors d'extraire le champ réfléchi nécessaire à la construction des lois de réflexion. Cette méthode a permis d'évaluer qualitativement la champ sonore réfléchi dans plusieurs configurations de façades, mais s'est heurtée à des problèmes pratiques (synchronisation temporelle des signaux, mesures de référence en l'absence de la maquette) et à un nombre insuffisant de points de mesure pour construire les lois de réflexion.

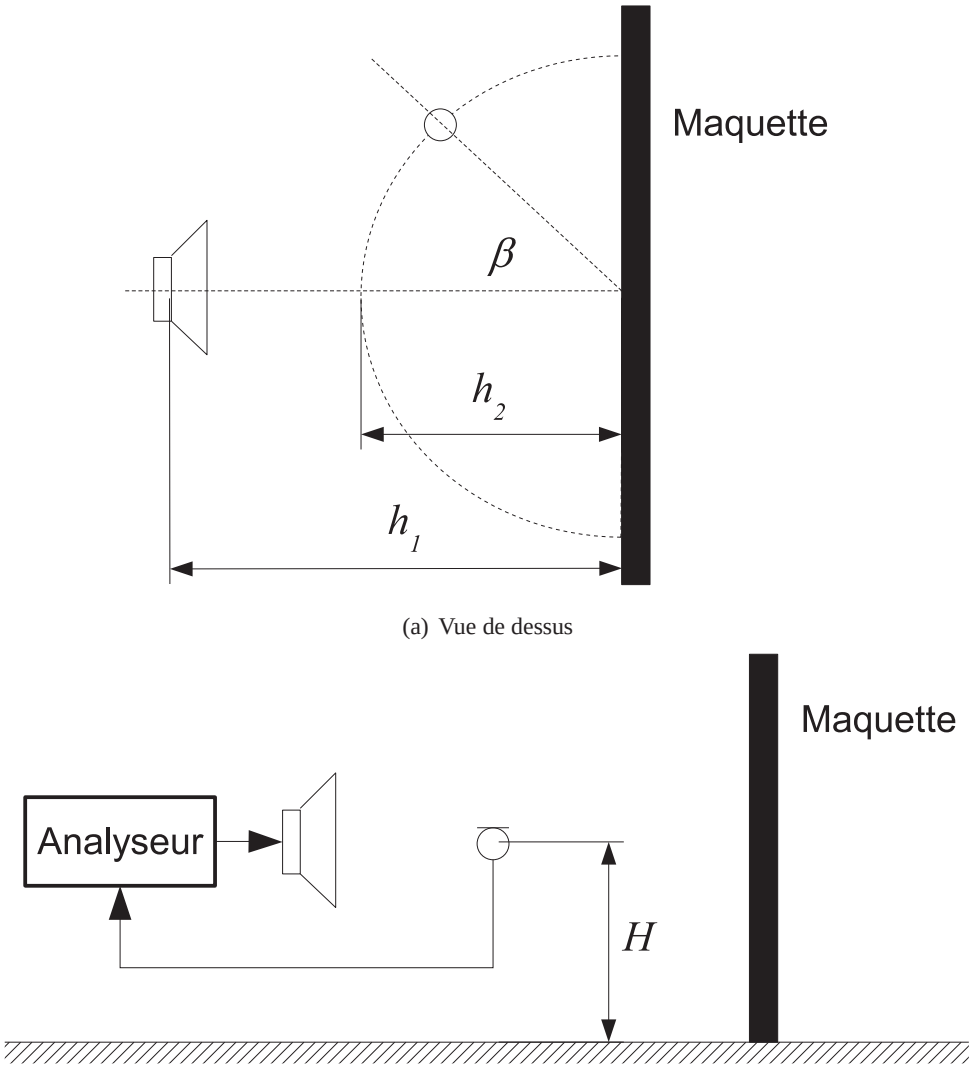
Plus tard, à l'occasion du travail de K. Germaix [79] au LCPC, la procédure de mesure des lois de réflexion a été revue intégralement. Profitant de l'expérience du LCPC en matière de mesure d'impédance des revêtements de chaussées, nous avons ainsi adapté une méthode de mesure existante à notre problème. Cette méthode est basée sur les travaux de M. Garai [74] à base de signaux MLS et de calcul d'inter-corrélations. La méthode a toutefois été modifiée par le LCPC afin d'utiliser un générateur de sinus glissant (*Burst Chirp*). Le principe de la méthode repose sur l'extraction, dans la réponse impulsionnelle mesurée, de la partie du signal qui correspond au signal réfléchi par la façade. Cette méthode n'est néanmoins possible qu'à la seule condition que le champ direct et le champ réfléchi ne se superposent pas. En pratique, pour certaines positions du microphone (en réflexion rasante par exemple), cette opération n'est pas possible. Les résultats de mesure qui suivent, ont été obtenus par cette méthode.

Configuration des mesures Les réponses impulsionnelles ont été obtenues avec une fréquence d'échantillonnage de 65.7 kHz. La bande de fréquences d'étude est limitée à 25.6 kHz, soit 5 120 Hz à l'échelle réelle. Pour augmenter le rapport signal-sur-bruit, les réponses impulsionnelles ont été calculées en considérant un moyennage sur 50 inter-corrélations. Tous les résultats qui suivent ont été obtenus en incidence normale.

3.4.4.2 Validation et résultats

Données qualitatives Dans un premier temps, il semble intéressant d'appliquer l'étude qualitative présentée au paragraphe 3.2 à notre configuration, afin d'évaluer les différents phénomènes mis en jeu :

- La limite entre les phénomènes de réflexion spéculaire et de diffusion de la maquette considérée est donnée par la fréquence de coupure présentée à la relation (3.4), avec $d = 0.06$ m dans notre cas (*i.e.* profondeur des fenêtres), soit une fréquence de 1 430 Hz à l'échelle de la maquette, soit 286 Hz à l'échelle réelle. Au dessous de cette fréquence, la présence des fenêtres n'influe donc pas sur l'onde sonore réfléchie par la façade.
- Les fenêtres étant disposées périodiquement tous les 0.40 m et 0.50 m, horizontalement et verticalement, on peut penser que l'effet de la périodicité risque d'intervenir à des longueurs d'onde de



(a) Vue de dessus

(b) Vue de coté

FIG. 3.48 — *Système expérimental pour la mesure de la loi de réflexion d'une façade : (a) vue de dessus et vue de coté (b). Le système expérimental est composé d'un analyseur Hewlett Packard Dynamic Signal Analyseur 35665A, générant le signal source Burst Chirp au travers d'un haut-parleur Audax HM 17020, via un amplificateur Bruël & Kjær type 2706.* $h_1 = 1.44$ *m,* $h_2 = 0.72$ *m et* $H = 0.75$ *m.*

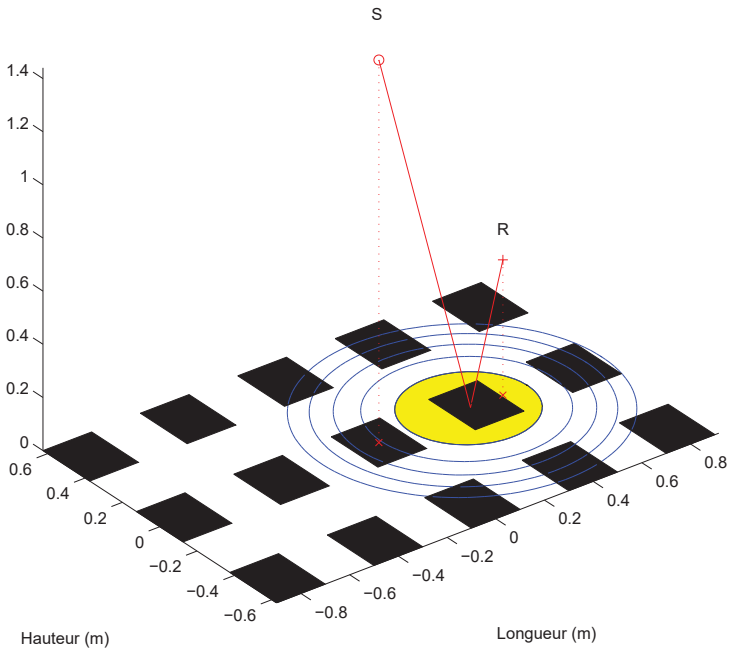
l'ordre de la distance entre deux fenêtres, soit respectivement aux alentours de 850 Hz et 680 Hz respectivement à l'échelle de la maquette, soit environ 210 Hz et 170 Hz à l'échelle réelle.
- La présence de diffraction par les bords de la maquette est donnée par la fréquence de coupure (3.5), soit 21 Hz et 72 Hz pour la largeur et la hauteur de la façade, soit $4,2$ Hz et 14.4 Hz, à l'échelle réelle. Aux fréquences qui nous intéressent, la diffraction par les bords n'interviendra donc pas.
- La limite champ proche/champ lointain est quant elle donnée par la relation (3.7), qui donne dans notre cas 36 m à 2500 Hz (soit 180 m à 500 Hz à l'échelle réelle). Les mesures sont donc réalisées en champ proche.
- La figure 3.49 présente la zone active de réflexion de la façade, pour une source localisée à $h_1 = 1.44$ m de la fenêtre centrale (soit 7.20 m à l'échelle réelle). Le point d'observation est à une distance $h_2 = 0.72$ m (soit 3.60 m à l'échelle réelle) de la fenêtre centrale à $\pi/4$ de la perpendiculaire à la façade passant par la source. En basse fréquence (2 500 Hz, soit 500 Hz à l'échelle réelle), la surface de la zone active est approximativement égale à la surface d'une fenêtre. Pour certaines positions du récepteur, la zone active peut donc englober deux fenêtres différentes. Pour des fréquences plus importantes, la zone active est sensiblement plus réduite. Seule une partie de la fenêtre participe à la réflexion. A ces fréquences plus élevées, et pour certaines positions du point récepteur, seul le plan de la façade participe à la réflexion, de manière spéculaire.

Validation du système Lorsque les fenêtres sont « fermées », la façade est assimilable à une paroi plane, rigide, réfléchissant les ondes sonores uniquement de manière spéculaire. En négligeant les interférences entre le champ direct et les réflexions par la paroi (et éventuellement par le sol), il est possible d'établir un modèle simple de réflexion, fondé sur la méthode des sources-images (puisque nous sommes en champ proche). Dans ces conditions, en prenant en compte la réflexion par la façade et le sol, 3 sources-images sont présentes (figure 3.50(a)). La figure 3.50(b) présente le champ réfléchi uniquement par la façade et sur le sol, ainsi que le champ direct.

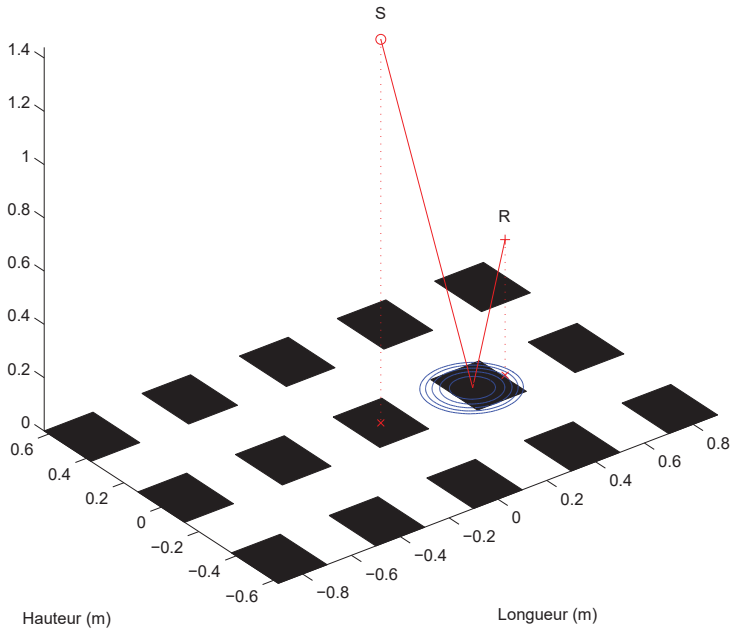
La figure 3.51 présente une comparaison entre les mesures sur la maquette, en configuration fenêtres « fermées », avec le modèle de sources-images et montre un bon accord pour le champ direct et le champ réfléchi. Dans ce dernier cas, les fluctuations autour de la valeur théorique sont probablement dues aux interférences qui ne sont pas prises en compte dans le modèle. Cette étape de validation a par ailleurs permis d'affiner les valeurs des paramètres utilisés dans de traitement des réponses impulsionnelles, notamment la taille et le recouvrement des fenêtres utilisées pour le calcul des densités spectrales de puissance par la méthode du périodogramme de Welch.

Résultats Six configurations de façade ont été testées (figure 3.52), dont les configurations « fermée » et « ouverte ». Pour toutes les configurations, la source est localisée exactement en face de la fenêtre centrale de la façade. Les mesures ont été réalisées en incidence normale. Lorsque le microphone et la source sont en parfait alignement, une analyse fine des réponses impulsionnelles pour chaque configuration de mesure, permet de mettre en évidence la présence des pics de réflexion soit sur la façade (si la fenêtre est fermée), soit sur le fond de la fenêtre (si elle est ouverte), ainsi que les pics de diffraction sur les bords de la fenêtre centrale. Dans cette configuration de mesure (microphone et source alignés), l'analyse des réponses impulsionnelles montrent que seule la fenêtre centrale est responsable de la figure de réflexion, résultat attendu puisque la zone active de réflexion est alors centrée sur cette même fenêtre centrale.

A titre d'illustration, la figure 3.53 présente des lois de réflexion mesurées pour les configurations de façade de la figure 3.52 à 1 025 Hz et 5 123 Hz, soit 205 Hz et 1 280 Hz respectivement à l'échelle réelle. La présence de lobes de directivité les lois de réflexion à 1 025 Hz peut s'expliquer par l'effet de la périodicité des fenêtres et par les interférences entre le champ direct et le champ réfléchi. Aux fréquences supérieures, les minimums d'amplitudes sont souvent situés devant les fenêtres fermées. A l'inverse, les configurations présentant une fenêtre centrale ouverte, présentent également un lobe d'amplitude plus

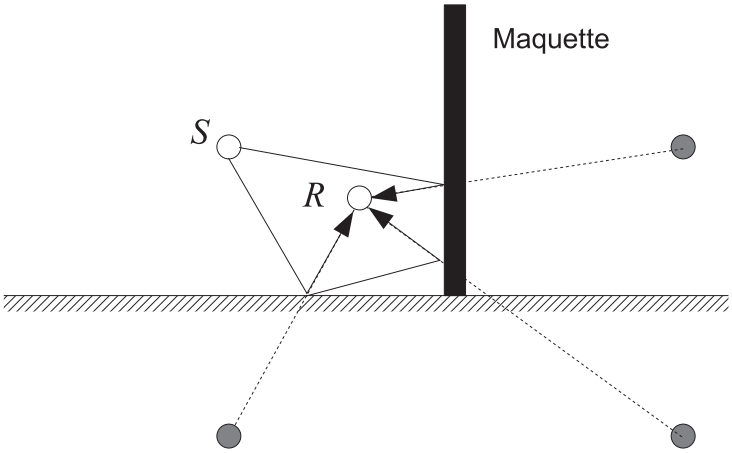


(a) 2 500 Hz

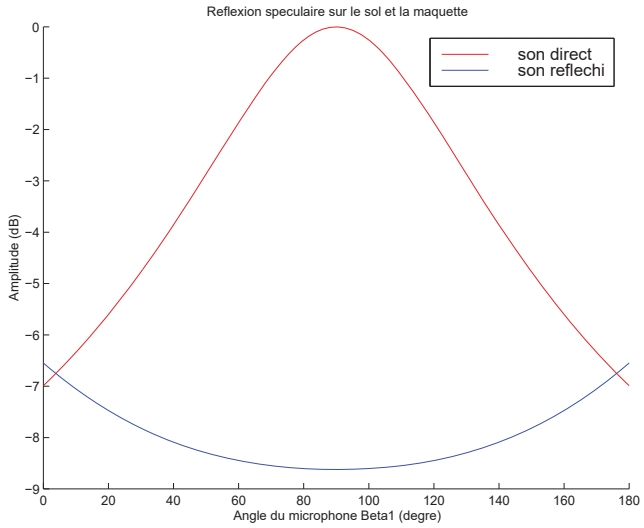


(b) 25 000 Hz

FIG. 3.49 — *Représentation des* 5 *premières zones de Fresnel de la maquette à 3.49(a) 2 500 Hz et 3.49(b) 25 000 Hz (soit 500 Hz et 5 000 Hz à l'échelle réelle). La zone active est représentée en jaune. La source sonore est localisée face à la fenêtre centrale. Le point récepteur fait un angle de* $\pi/4$ *avec la perpendiculaire à la façade passant par la source.* $h_1 = 1.44\ m$, $h_2 = 0.72\ m$



(a) Vue de dessus



(b) Vue de coté

FIG. 3.50 — *Application de la méthode des sources-images à la réflexion du son par une façade et par le sol. Représentation de la loi de réflexion et du champ direct.*

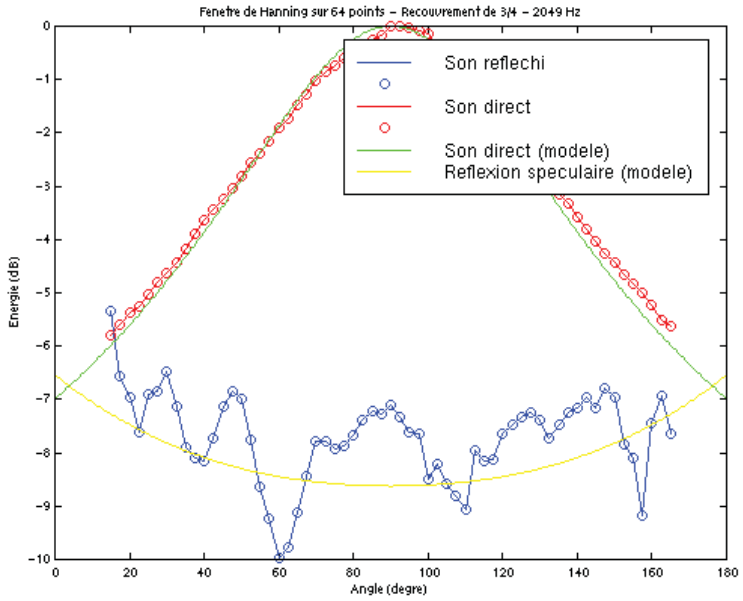


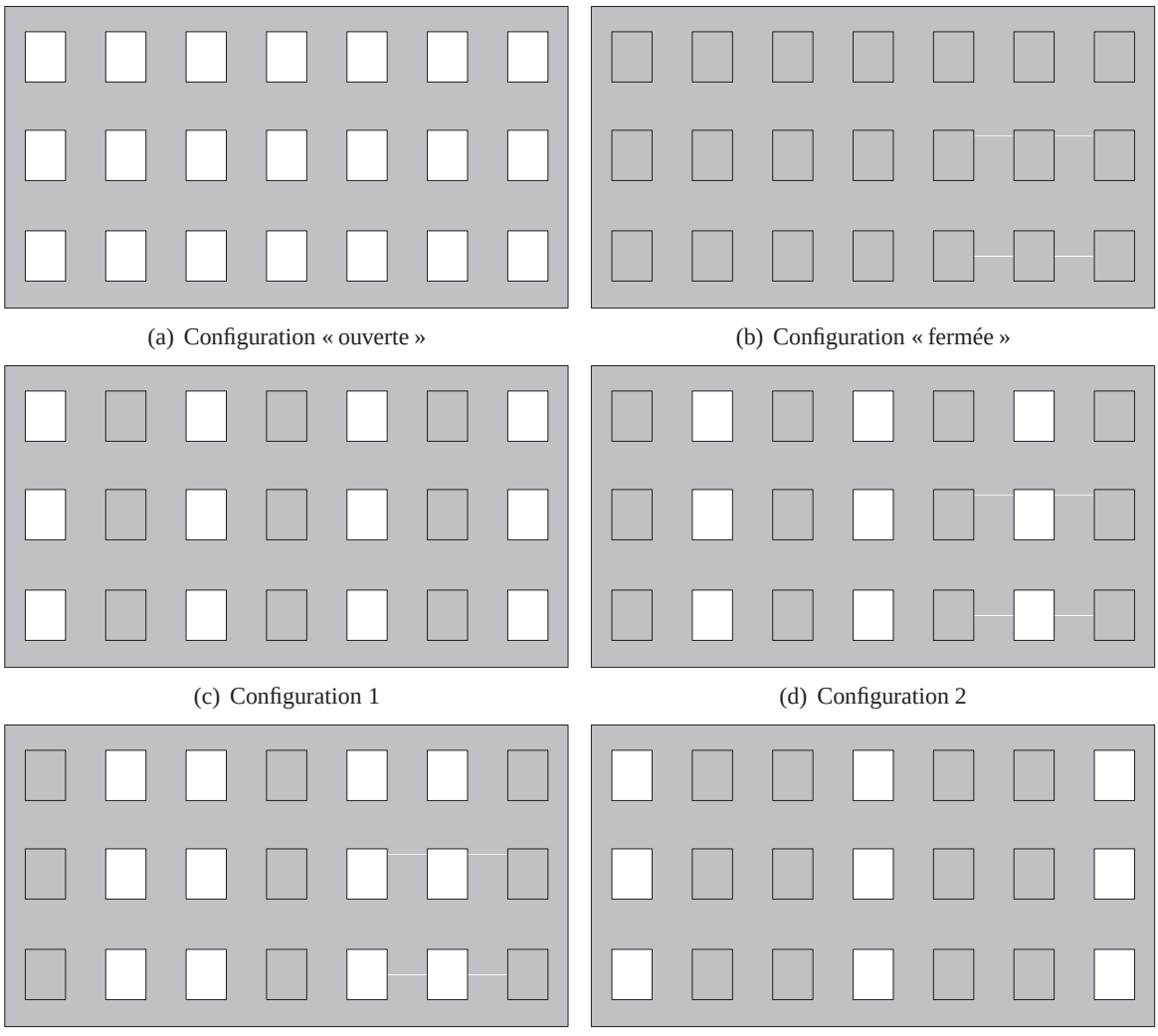
FIG. 3.51 — *Comparaison des mesures réalisées sur la maquette, configuration fenêtres « fermées », avec le modèle de réflexion spéculaire.*

important à 90°, donc exactement devant la fenêtre ouverte. La fenêtre ouverte agit alors comme un « puits » renvoyant l'énergie dans la direction normale.

Toutefois, ces mesures ont également mis en évidence certaines difficultés expérimentales. Lorsque le récepteur est proche de la façade, le champ direct et le champ réfléchi se superposent en partie, ce qui ne permet pas d'évaluer la loi de réflexion. Ce phénomène est visible sur la figure 3.53(a) par exemple, où le champ réfléchi pour la configuration « fermée », comparé au modèle théorique, présente des lobes importants aux alentours de 40° et 140°. Par ailleurs, l'incertitude de mesure semble importante globalement pour ce système expérimental, du fait du matériel utilisé à l'époque et des méthodes de traitement du signal employées. Finalement, seule une étude qualitative a été possible. L'amélioration du système de mesure devrait sans-doute apporter des informations beaucoup plus pertinentes.

Nous avons évoqué plus haut la difficulté pour réaliser de telles expérimentations *in situ*. Néanmoins notre système de mesure a été repris et appliqué à des mesures sur des façades réelles, d'abord par J. BACHELIER [7] dans le cadre d'un stage étudiant encadré par P. WOLOSZYN (CERMA), puis par P. CAULE [26] et S. COLLE [38] dans le cadre de stages encadrés par C. SÉMIDOR (GRECAU). Concernant le travail de J. BACHELIER, le système expérimental a d'abord été appliqué sur une façade plane de l'ENSAN, puis sur la façade de l'Hôtel DEURBROUCQ à Nantes (bâtiment néoclassique de type XVIII^{e}). Le même principe a été testé par M. CAULE [26] sur un diffuseur quadratique et sur une maquette de fronton, puis appliqué par S. COLLE [38] sur deux façades à Lyon, pour plusieurs hauteurs de sources et pour plusieurs angle d'incidence. La quantité de données recueillie par S. COLLE est très importante, mais n'a malheureusement pas encore été dépouillée à ce jour.

Que ce soit sur maquette ou *in situ*, l'interprétation des lois de réflexion est extrêmement complexe. Il est très difficile d'associer la géométrie de la façade aux lobes de directivité observés. Cette interprétation ne semble possible qu'à condition de disposer simultanément d'un modèle analytique ou numérique de réflexion par la façade en question.



(a) Configuration « ouverte »

(b) Configuration « fermée »

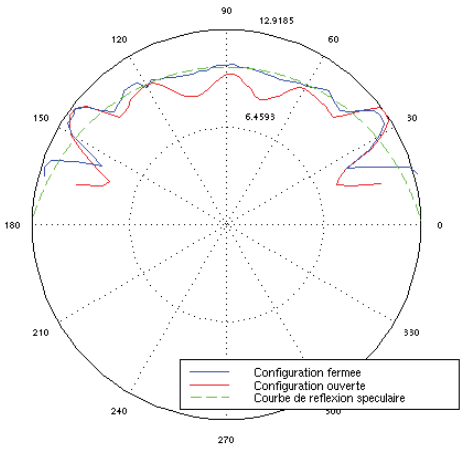
(c) Configuration 1

(d) Configuration 2

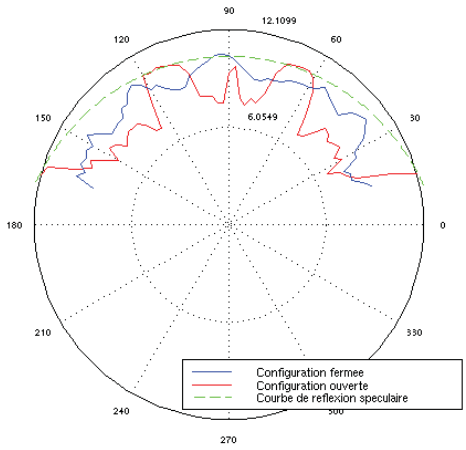
(e) Configuration 3

(f) Configuration 4

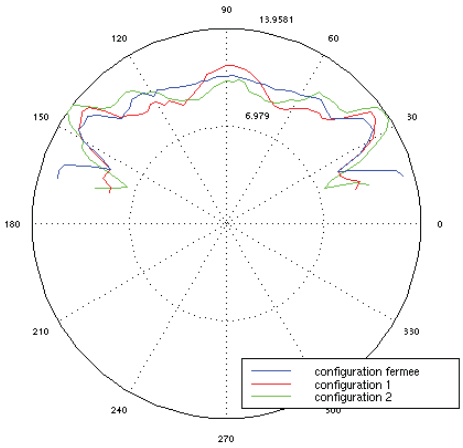
FIG. 3.52 — *Configurations de mesure.*



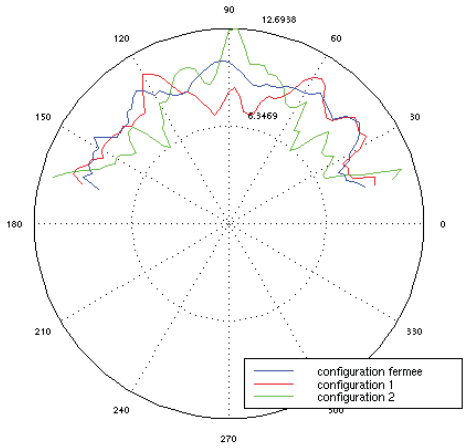
(a) 1025 Hz (205 Hz réel)



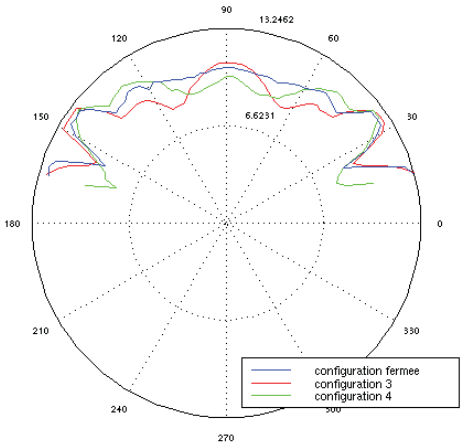
(b) 5123 Hz (1280 Hz réel)



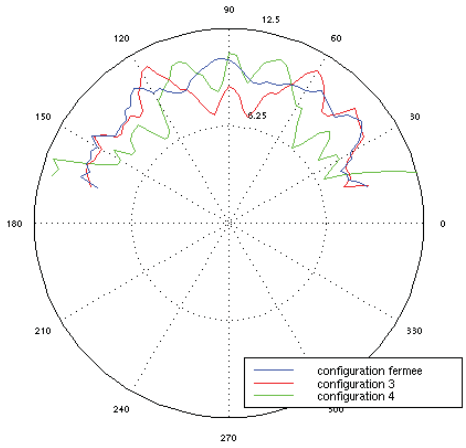
(c) 1025 Hz (205 Hz réel)



(d) 5123 Hz (1280 Hz réel)



(e) 1025 Hz (205 Hz réel)



(f) 5123 Hz (1280 Hz réel)

FIG. 3.53 — *Illustration de lois de réflexion mesurées sur la maquette de façade pour plusieurs configurations, à 1 025 Hz (colonne de gauche) et 5 123 Hz (colonne de droite), soit* 205 *Hz et 1 280 Hz respectivement, à l'échelle réelle.*

3.4.5 Conclusion

Dans les approches classiques basées sur les rayons sonores, la caractérisation de cette diffusion sous forme d'une loi de réflexion semble la solution la plus simple. Néanmoins que ce soit analytiquement ou par la mesure, la détermination de ces lois est très difficile. La complexité architecturale des façades rend le développement de modèles analytiques complexe, voire impossible. Néanmoins, le cas général d'une façade avec un réseau périodique de fenêtres pourrait être envisagé, mais suivant une autre approche que celle que nous avons proposée plus haut. La mesure sur maquette ou *in situ* est une autre solution, mais la pertinence d'un tel système dépend de la qualité du système expérimental et du traitement du signal, surtout pour obtenir des lois de réflexion en trois dimensions. Au vue des nombreux travaux récents sur la mesure des diffuseurs en acoustique des salles, il aujourd'hui serait intéressant de s'inspirer de ces méthodes [41].

Plus récemment, dans le cadre du projet du recherche MEDD sur les « Effets de la réflexion diffuse des façades sur la propagation acoustique et sur la représentation de l'environnement sonore en milieu urbain », nous avons envisagé le développement d'une méthode numérique utilisant comme données d'entrée, les résultats d'une analyse photogrammétrique[25] d'une façade. A l'heure actuelle, des données photogrammétriques en deux dimensions ont été intégrées au code de calcul MICADO du CSTB que nous avons présenté au §3.4.3.8. Ce traitement a permis d'obtenir des lois de réflexion, dont l'interprétation est là encore assez difficile. Par ailleurs, compte-tenu de la durée des calculs, notamment en haute fréquence, le passage en trois dimensions semble difficile à mettre en oeuvre. Une autre approche numérique est actuellement envisagée en collaboration avec le LRS, fondée sur la méthode de la matrice des lignes de transmission (TLM pour *Transmission Line Matrix*). Cette approche a d'abord été développée pour modéliser la propagation d'ondes électromagnétiques [107], puis appliquée à la modélisation des phénomènes acoustiques [207] et en particulier dans le cadre de l'étude de la propagation du son dans les conduits vocaux [64]. Des applications ont également été proposées récemment en acoustique des salles [59] et en milieu extérieur [114, 97]. Utilisée sous la forme d'un code de calcul distribué entre plusieurs stations de travail [60], cette méthode permettrait d'évaluer la réflexion du son par une façade de forme complexe, en trois dimensions, y compris en haute fréquence.

3.5 Conclusion sur la diffusion de façade

Les travaux présentés dans ce chapitre ont montré l'intérêt de la prise en compte du phénomène de « diffusion de façade » dans les modèles prévisionnels en acoustique urbain. En effet, la présence d'objets architecturaux, de distribution et de tailles diverses, sont à l'origine de phénomènes de réflexion et de diffraction, sources de cette diffusion, et responsables de la distribution de l'énergie acoustique dans le milieu de propagation.

Pour prendre en compte cette diffusion dans les outils prévisionnels, nous avons proposé de caractériser le phénomène sous la forme de lois de réflexion qui puissent facilement être intégrées dans les modèles de propagation, notamment ceux reposant sur l'approche « rayons sonores », largement répandues. Toutefois, la détermination de ces lois de réflexion est difficile à mettre en oeuvre face à la complexité de la morphologie architecturale. Une démarche analytique, qui permettrait d'obtenir des lois de réflexion plus facilement intégrables dans les outils prévisionnels, a été envisagée pour une façade simple (une fenêtre dans un plan), mais reste à généraliser pour un réseau périodique de fenêtres dans une façade. Pour des morphologies plus complexes, il pourrait être intéressant de revenir à des modèles de réflexion par des surfaces aléatoires.

Nous avons également envisagé la mesure de ces lois de réflexion sur des façades (sous forme de maquette). Bien que très intéressante pour l'étude du phénomène de diffusion, la méthode n'est sans doute pas la plus adaptée dans une optique d'intégration dans des outils prévisionnels. Il faudrait en effet

25. Ce type d'analyse permet d'obtenir une maquette numérique en trois dimensions, de la façade en question, à partir de prises de vue réalisées sous plusieurs angles.

mesurer une loi de réflexion pour chaque angle d'incidence et pour chaque façade, ce qui n'est évidemment pas possible. Une solution intermédiaire consisterait à mesurer ces lois de réflexion pour quelques angles d'incidence seulement, mesure associée à une méthode d'interpolation des lois de réflexion pour les autres angles d'incidence, et ce pour quelques types de façades uniquement. Une automatisation de ce type de mesure est à notre avis indispensable dans ce cas. Par ailleurs, la méthode de mesure pourrait s'inspirer des techniques récentes et en partie normalisées, mises en oeuvre pour la mesure de la diffusion acoustique par des diffuseurs.

Dans le cadre d'un projet de recherche regroupant plusieurs partenaires, dont le CSTB, nous avons choisi de recourir à une méthode entièrement numérique, à partir d'un code de calcul basé sur des équations intégrales. L'intérêt de la méthode proposée est qu'elle s'applique à des géométries réelles de façade. L'inconvénient majeur repose sur la durée des calculs notamment en haute fréquence. Comme pour l'approche expérimentale, afin de réduire les temps de calcul, il faudrait limiter la détermination de ces lois de réflexion à quelques angles d'incidences et pour quelques façades types. Plus récemment, une autre approche numérique fondée sur la méthode TLM, a été proposée. Cette méthode permettrait de gagner en rapidité par rapport à des approches « éléments de frontière ».

Enfin, suite à ces travaux sur la diffusion par des façades urbaines, nous avons également envisagé le développement de diffuseurs urbains. La mise en place sur des façades réelles de tels équipements faciliterait[26] la « réduction des nuisances sonores » dans les rues, en diminuant la réverbération et en augmentant l'atténuation sonore durant la propagation. Dans cette étude, qui vient de débuter, nous chercherons notamment à déterminer la forme du diffuseur la plus adaptée (en terme de diffusion acoustique et de taille), ainsi que l'influence de la distribution et du nombre de ces diffuseurs sur la propagation du son dans une rue. Au-delà même des aspects « acoustiques », se poseront également des questions sur les aspects « génie civil », de tenue dans le temps, résistance aux intempéries et dégradations, etc.

26. Au moins sur le principe.

Chapitre 4

Modélisation des champs « diffus » en acoustique urbaine

4.1 Introduction

Comme nous l'avons montré dans le chapitre 2 présentant l'état de l'art en matière de modélisation des champs sonores en acoustique urbaine, l'objectif de nos travaux a consisté à proposer un modèle de propagation adapté à la complexité de la morphologie urbaine. En effet, les approches couramment employées en acoustique architecturale, et considérées comme déterministes, se heurtent vite à la complexité des phénomènes de diffraction et de diffusion rencontrés en particulier sur les façades et les objets présents dans les rues. Cependant, et comme nous l'avons vu au chapitre 3 la prise en compte de ces effets, notamment de la diffusion de façade, est primordiale pour obtenir des résultats précis. La prévision de la répartition de l'énergie sonore en acoustique urbaine nécessite donc de modéliser au mieux la morphologie des façades à l'origine de la diffusion du son. Néanmoins, la description, en termes physique et analytique, de la géométrie des surfaces devient vite compliquée et fastidieuse, surtout en milieu urbain. Le recours à une approche probabiliste semble donc le moyen le plus simple pour traiter la réflexion du son. Dans ces conditions et comme l'ont montré certains auteurs (*cf.* §2.2.8), l'utilisation du concept de particules sonores a été à nos yeux la démarche la plus adaptée. Nous nous plaçons donc d'emblée dans le cadre d'une approche « haute fréquence », typiquement au dessus de quelques centaines de Hertz (*cf.* note 1 à la page 20), comprenant en principe l'essentiel du spectre du bruit routier $[500, 5000]$ Hz.

Au moins au niveau des équations de base, nous avons voulu que notre approche soit généraliste, de manière à ce qu'elle puisse s'appliquer aussi bien en acoustique urbaine qu'en acoustique des salles, quel que soit la forme du milieu de propagation. Par ailleurs, nous avons tenu à ce que le modèle proposé puisse intégrer au fur et à mesure de ses développements, l'ensemble des phénomènes présents lors de la propagation du son, à savoir, l'atténuation atmosphérique, les effets micro-météorologiques, l'encombrement du milieu de propagation, etc. Dans un premier temps, nous nous sommes toutefois limités à la prise en compte de la diffusion de façade.

Reprenant le concept des particules sonores sous une forme analytique, nous avons ainsi montré que le problème de la propagation du son dans un milieu « complexe » peut se ramener à un « problème de transport » de particules sonores, régi par une équation de transport et des conditions aux limites faisant intervenir la diffusion de façade (*cf.* §4.2).

La résolution exacte de ces équations de transport n'étant pas possible, nous avons proposé une démarche de résolution asymptotique, bien adaptée au problème de la propagation du son dans des rues « étroites », ce qui constitue la plupart des situations rencontrées en milieu urbain. Cette approche asymptotique a été développée pour deux types de condition de réflexion, des réflexions rasantes et des réflexions non rasantes, respectivement par la théorie des probabilités et par l'analyse fonctionnelle (*cf.* §4.3). Sous cette forme approchée, nous avons ainsi montré que le processus de transport des particules

se ramène à un processus de diffusion, régi par une équation de diffusion dont le coefficient est fonction des conditions de réflexion sur les façades et de la largeur de la rue. Ce modèle a été ensuite validé par des simulations numériques et par comparaison avec des données expérimentales, avec un bon accord général.

Enfin, de manière à rendre cette approche beaucoup plus opérationnelle, nous avons également proposé une mise en forme numérique du modèle (*cf.* §4.5). Cette solution, bien que sous une forme temporaire[1], autorise la simulation de la propagation du son dans des milieux urbains constitués de rues de différentes dimensions et caractérisées par des conditions de réflexion différentes, avec des temps de calcul de très loin inférieurs à ceux des approches actuelles. Par ailleurs, l'approche numérique permet de modéliser une multitude de sources ponctuelles et linéaires réparties dans le milieu de propagation.

Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre (*cf.* §4.6), nous évoquons les perspectives de ce modèle, notamment au niveau de la prise en compte des autres phénomènes mis en jeu lors de la propagation, tels que l'absorption par les façades, les effets micro-météorologiques, l'encombrement dans les rues, etc. Dans la plupart des cas, il semble que le modèle de transport puisse toujours se ramener à une équation de diffusion, point essentiel de l'approche[2].

4.2 Modèle de transport

4.2.1 Concept particulaire

A l'inverse de la théorie acoustique classique où l'étude du champ sonore s'appuie sur la propagation d'une onde dans un milieu matériel continu, l'approche utilisée ici est particulaire [108, 109, 110]. Le champ sonore y est décomposé en une multitude de particules élémentaires, *les particules sonores* ou *phonons*, sans interactions mutuelles et porteuses d'une énergie infinitésimale constante et égale à e. Elles se propagent en ligne droite, à la vitesse du son c, entre deux chocs successifs avec les obstacles du milieu de propagation, comme les façades, le mobilier urbain, les voitures (figure 4.1). Lors d'une collision, elles peuvent être absorbées ou réfléchies. Dans le dernier cas, leur direction est déviée et elles recommencent un nouveau trajet. L'acoustique géométrique devient ainsi un cas particulier de la dynamique des particules où l'énergie du champ sonore peut être assimilée à un gaz de particules sonores. Dans ces conditions, la répartition du champ sonore est assimilée à la répartition des particules sonores dans le milieu : la *densité locale d'énergie sonore* est donc égale à la *densité locale de phonons*. Que ce soit par des méthodes analytiques ou numériques, la principale difficulté réside donc dans cette recherche de la *densité locale de phonons*.

Comme pour les méthodes reposant sur les rayons sonores, l'approche particulaire est une approche énergétique, donc « haute fréquence », basée sur les hypothèses suivantes :

1. la notion de particule sonore est un concept énergétique qui ne permet pas de décrire les relations de phase ;
2. le champ sonore est estimé après un nombre suffisant de réflexions pour permettre un grand mélange énergétique ;
3. le concept des particules sonores s'applique dans des milieux de propagation qui génèrent de nombreux effets de diffraction. Dans ces conditions, le mélange énergétique est tel que les effets d'interférence dus aux relations de phases entre les ondes forment un champ relativement homogène. Il est alors possible d'additionner localement les énergies portées par chaque particule ;

1. Le développement d'un outil opérationnel nécessite une mise en forme spécifique du modèle, et non l'adaptation d'un logiciel existant.

2. La résolution numérique d'une équation de diffusion est parfaitement connue et est très rapide. L'intérêt de ramener le problème de la propagation du son en milieu urbain à un problème de diffusion réside dans la possibilité d'utiliser des outils logiciels et des codes de calcul existant.

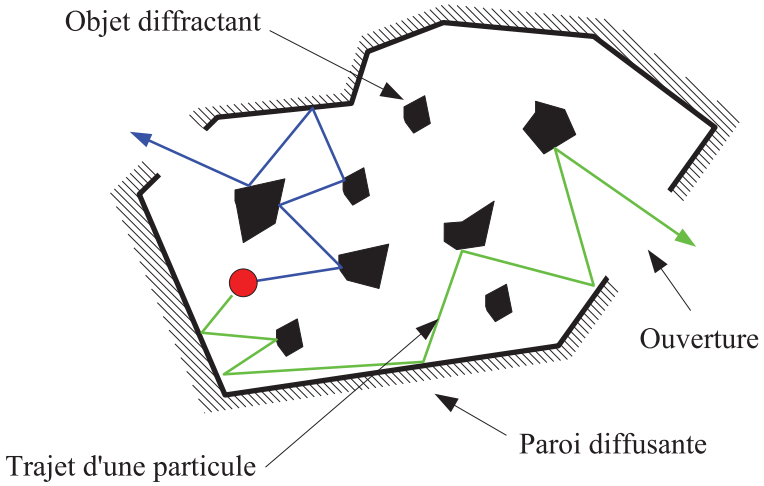


Fig. 4.1 — *Exemple de propagation de particules sonores émises depuis une source S dans une enceinte quelconque. Entre deux collisions successives, les phonons effectuent un parcours en ligne droite à la vitesse du son c. Lors d'une réflexion, les particules sont réfléchies soit de manière spéculaire, soit de manière non spéculaire.*

4. les particules sonores ont une énergie constante et aucune interaction mutuelle. Elles se propagent en ligne droite entre deux collisions sur les parois ou avec les objets diffractants présents dans le milieu de propagation ;
5. les phonons ne pénètrent jamais les frontières du milieu de propagation : ils sont soit absorbés, soit réfléchis ;
6. le concept des particules sonores est valide pour des longueurs d'onde petites comparées aux dimensions caractéristiques du milieu de propagation ;
7. dans le cas d'un milieu rempli d'objets diffractants, la densité de ces diffuseurs doit être assez élevée et homogène pour permettre une description statistique correcte du milieu de propagation et un mélange énergétique suffisant ;
8. la dépendance fréquentielle de la propagation de l'énergie sonore peut être indirectement prise en compte par la dépendance fréquentielle de certains paramètres d'entrée des modèles : par exemple, la valeur du coefficient d'absorption peut être différente selon la fréquence envisagée. De plus, la taille des irrégularités de surface par rapport à la longueur d'onde entraîne soit des réflexions spéculaires soit des réflexions diffuses. Les conditions aux limites seront donc différentes selon la gamme de fréquence retenue.

Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes donc également tournés vers une approche fondée sur le concept de particules sonores. L'état de l'art présenté au paragraphe 2.2.8 nous a permis de mettre en évidence un certain nombre de limitations, aussi bien pour les méthodes analytiques que numériques. Bien que ces modèles permettent de traiter la diffraction sur des objets présents au sein du domaine d'étude, les effets de diffusion sur les limites du domaine, ne sont pas pris en compte. Par ailleurs, dans la majorité de ces modèles, les séquences de collisions expérimentées par les particules sonores suivent, par hypothèse, une loi de Poisson, qui n'est applicable que dans des zones homogènes à forte concentration de diffuseurs, ce qui n'est pas toujours le cas en milieu urbain. D'autre part, les différents modèles particulaires utilisent une description macroscopique du milieu de propagation. Ils représentent les objets diffractants par des valeurs moyennes telles que leur densité et leur section moyenne diffractante. Dans ces conditions, l'influence de la géométrie et de la localisation propre de ces diffuseurs est omise. Pour conclure, il est important de préciser que la plupart de ces modèles n'ont jamais été validés, et même, bien souvent jamais validés.

L'utilisation du concept de particules nous a semblé toutefois intéressante, à condition de choisir une démarche plus adaptée à notre problème (*i.e.* la propagation du son dans des rues). Il nous a en effet paru évident que l'utilisation de la théorie du transport[3] de particules, reposant entre autres sur une *équation de transport* assujettie à des conditions aux limites particulières, doit permettre de décrire de manière analytique précise l'*histoire* (trajets, réflexions) des particules sonores dans le milieu de propagation. En particulier, l'utilisation judicieuse des outils mathématiques de la théorie des transports, doit permettre d'intégrer l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu lors de la propagation du son en milieu urbain, tels que :

1. la diffusion par les façades, au travers de lois de réflexion probabilistes intégrées dans les conditions aux limites ;
2. l'absorption acoustique, à travers une probabilité de disparition de la particule lors d'une collision ;
3. l'atténuation atmosphérique, à travers une probabilité de disparition de la particule lors de son trajet (comme pour l'absorption) ;
4. la diffraction sur des objets urbains répartis dans le milieu ;
5. les effets micro-météorologiques (comme le vent), par la prise en compte d'un terme faisant intervenir le gradient de la vitesse de la particule au sein de l'équation de transport.

Dans le cadre de l'application de cette approche au milieu urbain, nous nous sommes appliqués à décrire précisément et de manière mathématique, le transport des particules sonores dans un milieu vide formé par des parois diffusantes. Seules les deux premiers points listés ci-dessus ont donc été étudiés, les autres pouvant donner lieu à de nouvelles études. Toutefois, l'application de cette même approche sous une forme plus simple dans le cadre de l'acoustique des salles (*cf.* chapitre 5) a permis d'étendre la prise en compte des phénomènes aux 4 premiers points listés ci-dessus.

4.2.2 Modélisation de la propagation du son en milieu urbain par une équation de transport

Notre démarche se fonde donc sur l'équivalence entre la densité locale de l'énergie sonore et la densité locale de particules sonores. L'objectif de nos développements mathématiques est donc de déterminer cette densité locale de particules dans le cas d'une rue, supposée vide et définie par des parois diffuses.

4.2.2.1 Définition des variables

Mathématiquement, le domaine d'espace et le domaine des vitesses sont définis respectivement sur les ensembles $X \in \mathbb{R}^3$ et $V \in [-c, c] \times [-c, c] \times [-c, c]$. Le mouvement de la particule est entièrement caractérisé par son vecteur position $\mathbf{x}$ et son vecteur vitesse $\mathbf{v}$ de norme c, égale à la vitesse du son, tels que

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x, y, z) & \text{avec} \quad (x, y, z) \in X, \\ \mathbf{v} = (u, v, w) & \text{avec} \quad (u, v, w) \in V. \end{cases} \tag{4.1}$$

La frontière du sous ensemble X est notée ∂X et correspond aux limites géométriques du domaine de propagation.

4.2.2.2 Fonction de distribution à une particule

En mécanique statistique classique, les N particules d'un système obéissent aux lois de la mécanique classique basées sur le principe d'action stationnaire de Hamilton [51]. Un état microscopique particulier est défini par la donnée de $3N$ coordonnées de position $(x_1, x_2, ..., x_N)$ et de $3N$ coordonnées de vitesse

3. Il semble d'ailleurs que la théorie des transports soit la forme générique de la plupart des modèles présentés dans le paragraphe 2.2.8.

$(v_1, v_2, ..., v_N)$ [27, 210, 242]. Il est représenté par un point dans un espace à $6N$ dimensions appelé espace des phases, ou espace Γ [83].

Si à un instant t donné, il était possible de connaître la position et la vitesse de chacune des particules, la détermination exacte de leurs positions et de leurs vitesses au temps $t + dt$ serait envisageable. En pratique, cela est impossible, N étant extrêmement grand. Le problème est alors envisagé de manière probabiliste. Ainsi, sous l'hypothèse de particules totalement indépendantes et sans interactions mutuelles, la description microscopique du système à N particules peut être ramenée à la description semi-microscopique d'un système fictif, à 1 particule [84]. Ce passage d'un espace des phases Γ à $6N$ dimensions à un espace des phases μ à 6 dimensions est soumis au respect du critère d'ergodicité du milieu de propagation qui stipule l'égalité entre moyenne spatiale et moyenne temporelle. Que ce soit en acoustique des salles ou en acoustique urbaine, le mélange énergétique dû aux nombreux effets de diffraction sur les parois du domaine est un élément suffisant au vu de la littérature pour considérer ce critère vérifié [109, 110, 149].

Cette approche est à la base de la théorie cinétique des gaz dont l'outil principal est la Fonction de Distribution à une Particule (FDP) $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, telle que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in X, \text{ et } \mathbf{v} \in V\,, \tag{4.2}$$

représente le nombre de particules, au temps t, situées dans un volume $d\mathbf{x}$ centré en $\mathbf{x}$ et dont la vitesse est $\mathbf{v}$ à $d\mathbf{v}$ près (figure 4.2). La connaissance de la fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, qui est l'inconnue du problème, permet de définir plusieurs quantités. Tout d'abord, la densité de particules au point $\mathbf{x}$ et au temps t est la somme de la FDP sur l'espace des vitesses,

$$n(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in X, \text{ et } \mathbf{v} \in V\,. \tag{4.3}$$

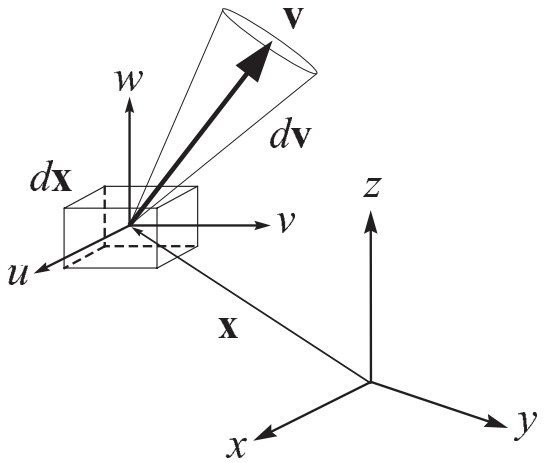


Fig. 4.2 — *Représentation des éléments de l'espace des coordonnées d***x** *et de l'espace des vitesses d***v***.*

Chaque particule étant porteuse d'une énergie élémentaire e, la densité locale d'énergie sonore $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$, au point $\mathbf{x}$ et au temps t, est définie comme le produit de e avec la densité locale de particules (4.3). Le flux local total de particules $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$, c'est-à-dire le nombre de particules traversant une surface unité en une seconde, exprimé au point $\mathbf{x}$ et au temps t, est la somme sur l'espace des vitesses du produit du vecteur vitesse avec la fonction de distribution,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v}\, f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in X, \text{ et } \mathbf{v} \in V\,. \tag{4.4}$$

Cette dernière expression multipliée par l'énergie élémentaire e d'une particule conduit tout naturellement à définir le flux total d'énergie sonore $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ au point $\mathbf{x}$ et au temps t.

4.2.2.3 Équation de transport

Le problème envisagé est monocinétique[4]. Les phonons ont donc tous la même vitesse, constante durant toute l'histoire de la particule et dont la norme est égale à la célérité du son c. Considérons un élément de volume de l'espace des phases $d\mathbf{x}\,d\mathbf{v}$ (figure 4.2) qui contient, à un temps quelconque t, $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{v}$ particules. Au temps $t+dt$, cet élément devient $d\mathbf{x}'\,d\mathbf{v}'$ et contient $f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v}+\delta\mathbf{v},t+dt)\,d\mathbf{x}'\,d\mathbf{v}'$ [5] particules. Par hypothèse, l'espace d'observation reste le même au cours du temps ce qui se traduit par $d\mathbf{x}\,d\mathbf{v} = d\mathbf{x}'\,d\mathbf{v}'$ [84]. Les particules sont indépendantes et n'interagissent pas entre elles. De plus, la présence d'objets diffractants dans le domaine n'est pas prise en compte dans ce travail. Aucun choc ne se produit donc à l'intérieur du milieu de propagation. Par conséquent, la direction et la norme du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ des particules restent constantes au cours du mouvement, ce qui s'exprime par,

$$f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v}+\delta\mathbf{v},t+dt) = f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v},t+dt)\,. \tag{4.5}$$

De plus, en l'absence de source sonore [6] et en négligeant l'absorption atmosphérique, le domaine d'étude n'est le siège d'aucune création et d'aucune disparition spontanée de phonons. Le nombre de particules de vitesse $\mathbf{v}$ en $\mathbf{x}$ est donc égal au nombre de particules de vitesse $\mathbf{v}$ en $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$. Dans ce cas, l'expression (4.5) devient

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v},t+dt)\,, \tag{4.6}$$

ou encore, par ajout du terme nul $-f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v},t)+f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ dans l'équation (4.6),

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) - f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v},t) + f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v},t) - f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathbf{v},t+dt) = 0\,. \tag{4.7}$$

Par définition des dérivées partielles, la relation (4.7) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}\delta\mathbf{x} = 0\,. \tag{4.8}$$

La division de l'expression (4.8) par dt fait apparaître l'expression de la vitesse $\mathbf{v} = \delta\mathbf{x}/dt$. Finalement, la variation spatiale et temporelle de la fonction de distribution à une particule est régie par l'équation de transport suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x}\in X, \text{ et } \mathbf{v}\in V\,, \tag{4.9}$$

qui porte également le nom d'équation du flux moléculaire libre [103, 171, 172, 245]. La variation temporelle de la FDP est directement liée à la variation spatiale de la FDP à travers l'opérateur propagation $\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}$. Cette équation est caractéristique de l'étude des gaz raréfiés (ou gaz de Knudsen [72] pour lesquels le libre parcours moyen des molécules est très supérieur aux dimensions du récipient qui les contient.

4.2.3 Conditions aux limites (façades)

Pour exprimer les conditions aux limites, il est nécessaire de pouvoir identifier les particules incidentes des particules réfléchies au niveau des parois. Le moyen le plus simple est de déterminer, localement, le signe du produit scalaire du vecteur vitesse avec la normale $\mathbf{n}$ extérieure aux parois du domaine.

4. Ce ne serait pas le cas si nous devions prendre en compte les effets micro-météorologiques dans le modèle. En présence de vent, de turbulence atmosphérique ou de gradient vertical de célérité, la célérité du son n'est pas uniforme [76]. Dans le cadre de nos travaux, nous n'avons pas encore intégré ces aspects. Ce point sera discuté dans la conclusion de ce chapitre (*cf.* §4.6.2).

5. $\delta\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$ représente ici le déplacement infinitésimal qu'effectue la particule pendant le temps dt et ne doit pas être confondu avec le volume d'étude $d\mathbf{x}$ de l'espace des phases. De même, $\delta\mathbf{v}$ représente la variation infinitésimale de la vitesse de la particule pendant le temps dt et ne doit pas être confondu avec le volume de l'espace des vitesses $d\mathbf{v}$.

6. La source sonore sera introduite dans les conditions initiales.

En effet, si ce produit scalaire est positif (négatif), les particules ont un vecteur vitesse orienté vers l'extérieur (l'intérieur) du domaine et sont donc incidentes (réfléchies). Au niveau des limites du domaine de propagation, un ensemble Γ, composé de deux sous-ensembles Γ^+ et Γ^-, est défini tel que

$$\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \text{ avec } \Gamma^{\pm} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \ / \ \mathbf{x} \in \partial X,\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, 0 \ < \pm\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\right\} . \tag{4.10}$$

Le sous-ensemble Γ^+ représente les particules incidentes sur la paroi et le sous-ensemble Γ^- les particules réfléchies. Par la suite, la restriction de la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, aux sous-ensembles Γ^+ (Γ^-) est notée $f^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ($f^-(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$).

Coefficient d'absorption. Le coefficient d'absorption $\alpha(\mathbf{x})$ est défini pour $\mathbf{x} \in \partial X$ et caractérise la part de l'énergie incidente absorbée lors de la réflexion sur les parois du domaine de propagation. Il représente la probabilité que la particule soit réinjectée ou non dans le milieu de propagation après réflexion. Ce terme varie entre 0 (pas d'absorption) et 1 (absorption totale).

Coefficient d'accommodation. Le coefficient d'accommodation $d(\mathbf{x})$ est défini pour $\mathbf{x} \in \partial X$ et permet de séparer la part de réflexion de type spéculaire de celle de type non spéculaire (ou diffuse). Dans notre cas, ce coefficient représente la probabilité qu'une particule arrivant sur la paroi soit réfléchie de manière spéculaire. Il est compris entre 0 (réflexion totalement non spéculaire) et 1 (réflexion totalement spéculaire). Ce terme est à rapprocher du *scattering coefficient* s, tel que $s = 1 - d$, qui est présenté plus haut.

Réflexion spéculaire. Le processus de réflexion est traité de manière probabiliste dans notre modèle par l'introduction de lois de réflexion. Dans notre cas, ces lois vont permettre de déterminer la direction du vecteur vitesse de la particule sonore après son choc avec les parois du milieu de propagation. Deux types de réflexion sont envisagés ici, à savoir :

- la réflexion spéculaire qui est totalement déterministe ;
- la réflexion non-spéculaire qui est non déterministe et qui englobe tous les phénomènes complexes de diffraction sur les parois du domaine.

La réflexion spéculaire obéit aux lois de Snell-Descartes, rencontrées en optique géométrique. Elles postulent, notamment, l'égalité entre l'angle d'incidence et l'angle réfléchi ce qui en fait un phénomène totalement déterministe. Le vecteur vitesse réfléchi $\mathbf{v} \in \Gamma^-$ lors d'une réflexion spéculaire, est exprimé en fonction du vecteur vitesse incident $\mathbf{v}^* \in \Gamma^+$ (figure 4.3 (a)), par la relation vectorielle

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* - 2\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^*)\,\mathbf{n} . \tag{4.11}$$

Réflexion non spéculaire (ou diffuse). La nécessité de prendre en compte la diffusion par les façades dans les modèles prévisionnels en acoustique urbaine a clairement été démontrée dans le chapitre 3. Dans le cadre de notre modèle, le phénomène de diffusion sur les façades, a été être pris en compte de manière probabiliste en considérant une loi de réflexion $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}')$ pour $\mathbf{x} \in \partial X$ au niveau des parois (figure 4.3). L'influence sur la répartition de l'énergie sonore, des effets de diffraction au niveau des parois est donc directement intégrée dans la description mathématique du problème, au sein des conditions aux limites. Ces lois de réflexion représentent la probabilité qu'une particule arrivant avec une vitesse $\mathbf{v}'$, en $\mathbf{x} \in \partial X$, reparte du même point avec une vitesse $\mathbf{v}$. Cette loi de réflexion est par définition normée à l'unité et doit vérifier la loi de réciprocité. Ces deux dernières conditions expriment la conservation du flux au niveau des parois (rappel : l'absorption est prise en compte par le coefficient d'absorption α).

En pratique, la forme analytique de la loi $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}')$ doit permettre de simuler au mieux les figures de diffraction réelles générées par les inhomogénéités et la morphologie des surfaces. En l'absence de loi de réflexion réelle (*cf.* §3.4), notre choix s'est porté sur une loi de réflexion, fonction de la composante de la vitesse normale à la paroi, de la forme :

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}') = |\, w \,|^n . \tag{4.12}$$

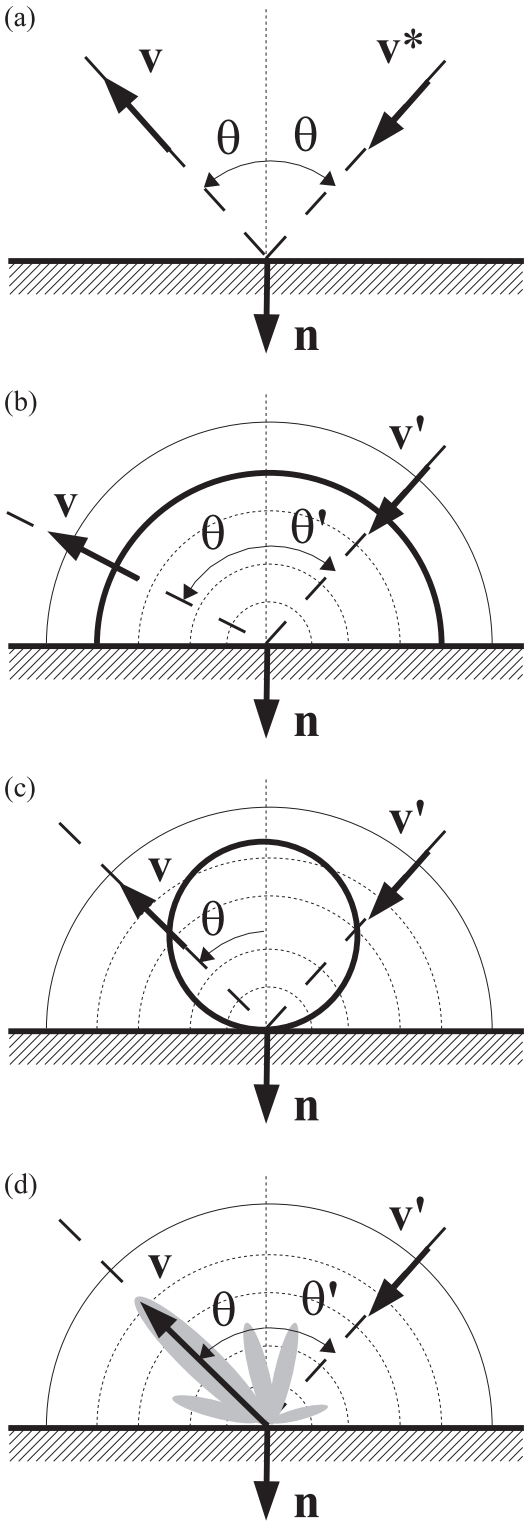


FIG. 4.3 — *Diagrammes polaires schématisant la distribution angulaire de l'intensité de l'énergie réfléchie par une paroi : (a) réflexion spéculaire, (b) loi de réflexion uniforme, (c) loi de* LAMBERT *en* $\cos\beta$*, (d) représentation schématique d'une loi de réflexion réelle* $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}')$.

où n est un entier positif (figure 4.4). Ce type de loi privilégie les directions de réflexion proches de la direction de la normale aux surfaces. Le choix du coefficient n de l'expression (4.12) permet de caractériser l'ouverture du cône de réflexion [7]. Plus la valeur de cette constante est élevée, plus le cône de réflexion est étroit. Les directions des vecteurs vitesse réfléchis sont alors de plus en plus concentrées autour de la direction de la normale **n** à la paroi. Pour $n = 0$ et $n = 1$, nous retrouvons respectivement la loi uniforme et la loi de LAMBERT, dont nous avons parlé précédemment. Pour $n \leq 1$, la loi de réflexion est dite « rasante », c'est-à-dire autorisant des directions de réflexion le long des façades. Pour $n > 1$, la loi de réflexion est dite « non rasante ».

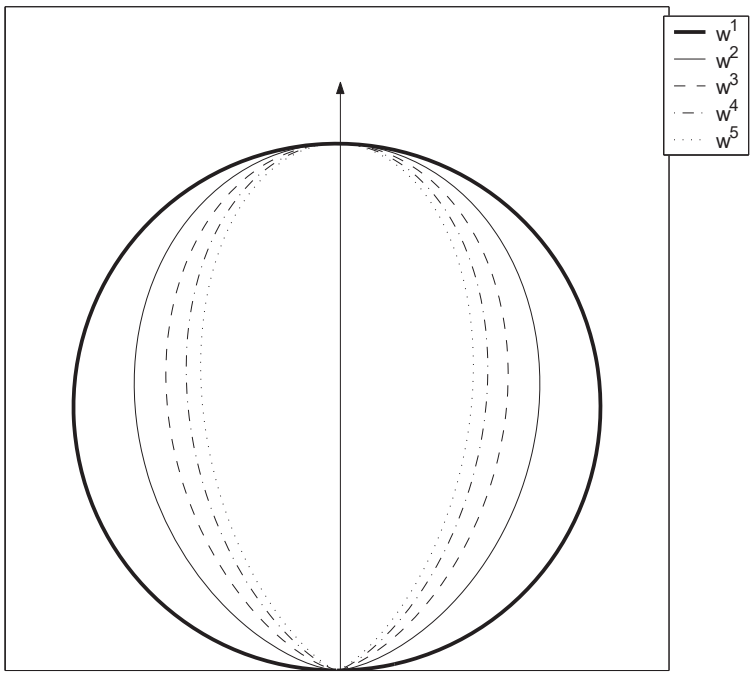


FIG. 4.4 — *Diagrammes polaires de différentes lois de réflexion de la forme $|w|^k$. D'après [146].*

Expression finale des conditions aux limites. Les conditions aux limites de notre problème sont des conditions de flux locaux qui expriment le flux de particules réfléchies en fonction du flux de particules incidentes. Mathématiquement, le flux de particules de vitesse **v**, arrivant sur une surface en $\mathbf{x} \in \partial X$, est égal à la projection de la vitesse **v** sur la normale à la surface, multipliée par la valeur de la fonction de distribution en $\mathbf{x} \in \partial X$ (*cf.* §4.2.2.2). L'expression générale du flux s'écrit donc :

$$|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \, f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \partial X, \text{ et } \mathbf{v} \in V \, . \tag{4.13}$$

Conformément à ce que nous avons présenté plus haut, deux types de réflexion sont envisagés ici, la réflexion de type spéculaire et la réflexion de type non spéculaire, la part des deux types de réflexion étant prise en compte par l'introduction du coefficient d'accommodation d, tandis que l'absorption est

7. Le cône de réflexion est la plage angulaire totale que peut parcourir le vecteur vitesse. Il est centré, dans notre cas, sur la direction de la normale **n** à la paroi.

intégrée dans le coefficient α. La condition aux limites générale s'écrit alors :

$$\underbrace{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|\, f^{-}(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}_{\text{flux réfléchi}} = (1-\alpha(\mathbf{x}))\Big[\underbrace{d(\mathbf{x})\,|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}^{*}|\, f^{+}(\mathbf{x},\mathbf{v}^{*},t)}_{\substack{\text{flux incident}\\ \text{réfléchi spéculairement}}} \tag{4.14}$$

$$+\underbrace{(1-d(\mathbf{x}))\int_{\Gamma^{+}}\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')\,|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}'|\, f^{+}(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)\,d\mathbf{v}'}_{\substack{\text{flux incident}\\ \text{réfléchi non spéculairement}}}\Big] \quad \text{pour } \mathbf{x}\in\partial X, \text{ et } \mathbf{v}\in\Gamma^{-}.$$

4.3 Approche asymptotique pour une rue étroite

Dans la section précédente, nous avons introduit les bases du modèle de transport des particules sonores et notamment l'équation de transport ainsi que les conditions aux limites vérifiées par la fonction de distribution. Cependant, tel qu'il est posé et malgré les nombreux travaux théoriques réalisés encore à ce jour sur ce sujet fondamental, le problème n'admet pas de solution analytique exacte, hormis éventuellement par une voie entièrement numérique (la solution n'est donc plus exacte), mais qui n'apporte pas de connaissances sur la compréhension et la modélisation des phénomènes physiques.

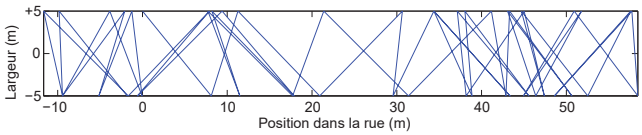
Dans le cadre de cette étude, nous avons fondé notre approche sur l'observation suivante : un milieu urbain classique, de type centre ville, est majoritairement composé de rues et de boulevards dont la largeur est souvent très inférieure à la hauteur. Ce type de milieu de propagation est alors qualifié d'*étroit*. Bien entendu, cette hypothèse n'est pas valable partout, mais principalement dans les grandes villes des pays industrialisés, là même où les problèmes de nuisances sonores urbaines sont les plus importants. Considérant cette hypothèse, notre réflexion s'est donc portée vers la recherche de solutions à l'équation de transport, dans le cas où une des dimensions du milieu de propagation est beaucoup plus petite que les autres.

Au terme d'un travail bibliographique important, il s'est avéré que, dans le cadre de nos hypothèses, la recherche de solutions asymptotiques conduit à considérer l'équation de diffusion comme la limite de l'équation de transport dans le cas de milieux étroits (les développements mathématiques seront détaillés plus loin). Ce résultat peut en effet s'expliquer de manière très simple par le raisonnement suivant. Considérons la propagation de particules sonores entre deux parois parallèles (figure 4.5). Plus la distance entre ces surfaces diminue, plus le libre parcours moyen des particules sonores devient petit et donc, plus la particule va expérimenter de chocs sur un même intervalle de temps, entraînant ainsi une variation rapide des directions des vecteurs vitesses (figure 4.6). Ce dernier phénomène est caractéristique d'un processus de diffusion [190]. Nous retrouvons ici un résultat de notre étude numérique présentée à la section 3.3.3, également souligné par Thorsson [229] (*cf.* §2.2.8) dans son approche à l'échelle d'une ville.

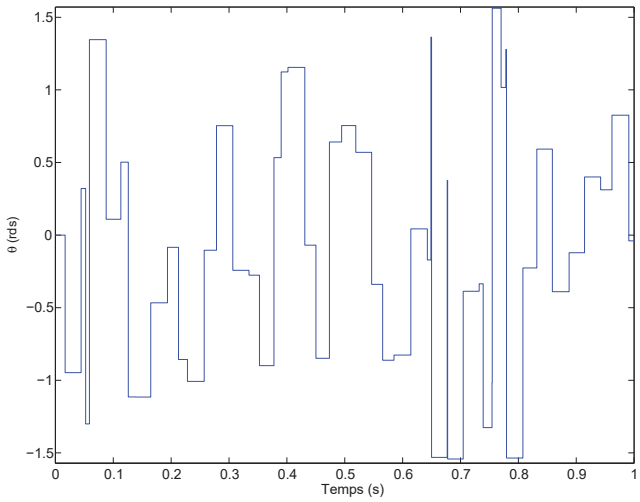
4.3.1 Modèle simplifié d'une rue étroite

Dans notre développement, le milieu de propagation considéré est une rue composée de deux parois irrégulières, de longueur et de hauteur infinies, qui donnent naissance à des effets de diffusion. Ces façades sont parallèles entre elles et perpendiculaires au plan formé par le sol considéré plan, lisse et totalement réfléchissant (figure 4.7(a)). Dans ces conditions, le sol forme un plan de symétrie, ce qui permet, dans le cas d'une source au sol [8], de confondre la source réelle avec son image. La propagation de l'énergie émise par une source S de puissance P entre les parois de la rue peut ainsi être assimilée à

8. Le fait de placer la source au sol est conforme aux études de David Gaulin sur les véhicules légers, [75], comme les deux-roues et les tramways).

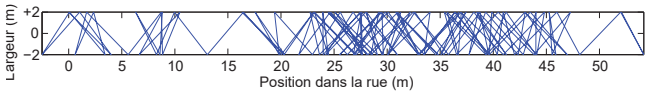


(a)

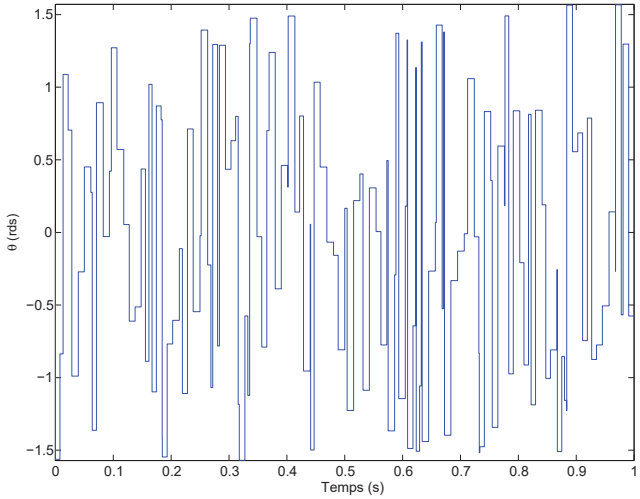


(b)

FIG. 4.5 — *(a) Propagation d'une particle entre deux plans (2D) en $z = -5$ et en $z = +5$ ($2L = 10$ m) : (b) évolution temporelle de l'angle θ entre le plan $z = -5$ et le vecteur vitesse. D'après [146].*



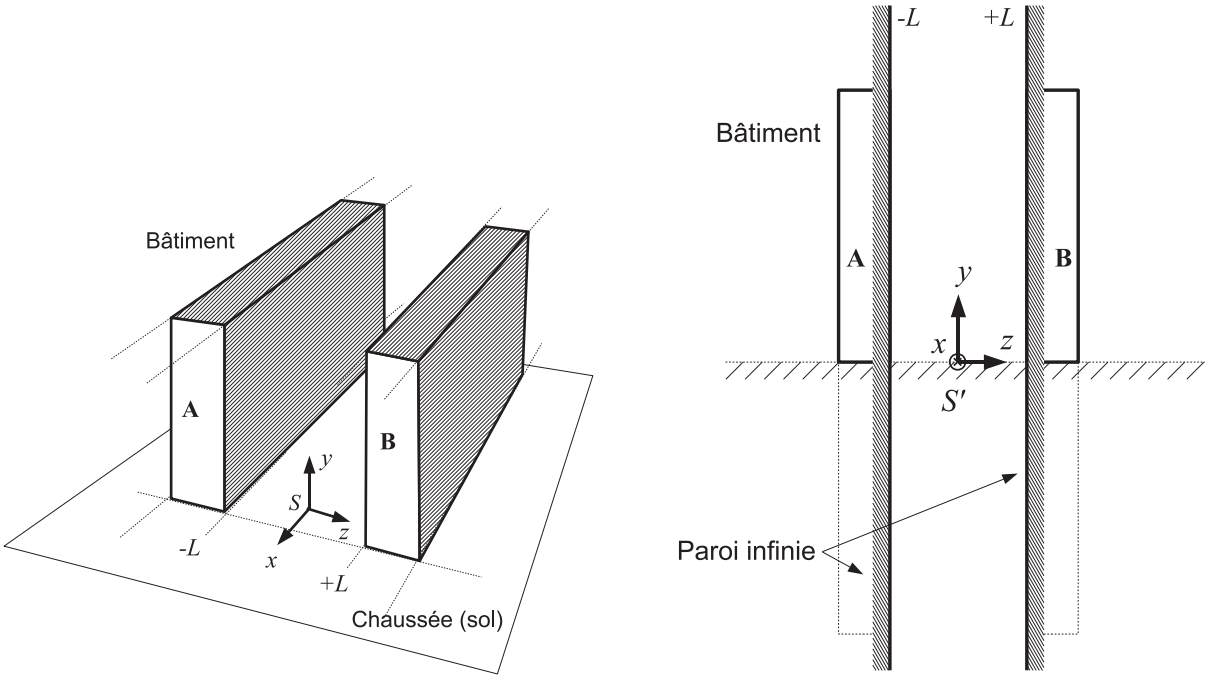
(a)



(b)

FIG. 4.6 — *(a) Propagation d'une particle entre deux plans (2D) en $z = -2$ et en $z = +2$ ($2L = 4$ m) : (b) évolution temporelle de l'angle θ entre le plan $z = -5$ et le vecteur vitesse. D'après [146].*

la propagation de l'énergie émise par une source S' de puissance $2P$ entre deux parois de longueur et de hauteur infinies (figure 4.7(b)). La propagation des particules est alors identique quel que soit la direction envisagée dans un plan même plan parallèle aux parois.



(a) Géométrie d'une rue étroite (b) Modèle de rue étroite

FIG. 4.7 — *Modélisation d'une rue étroite (a) avec une source S au sol (de puissance P), sous la forme de deux plans parallèles infinis (b) avec une source S' de puissance* $2P$. *D'après [146].*

Mathématiquement, le domaine d'espace est défini sur l'ensemble Y composé de deux sous-ensembles X et Z tel que $Y = X \times Z$, avec $X \in \mathbb{R}^2$ et $Z \in]-L, L[$. Le déplacement de la particule est entièrement caractérisé par son vecteur position $\mathbf{x}$ et son vecteur vitesse $\mathbf{v}$ de norme c, égale à la vitesse du son, tel que

$$\begin{cases} \mathbf{x} &= (x, y, z) \quad \text{avec} \quad (x, y) \in X,\ z \in Z\,, \\ \mathbf{v} &= (u, v, w) \quad \text{avec} \quad (u, v, w) \in\ [-c, c\,]^3 = V\,. \end{cases} \tag{4.15}$$

Les variables u, v et w sont les composantes des vitesses associées au repère (x, y, z), vérifiant $u^2+v^2+y^2 = c^2$. La frontière du sous-ensemble Z, notée ∂Z, correspond aux points $z = +L$ et $-L$. La frontière de l'ensemble ∂Y, notée $\partial Y = \partial Z \times X$, représente les limites géométriques du domaine de propagation, soit ici les deux plans parallèles infinis entre lesquels se déplacent les particules.

4.3.2 Développement asymptotique de l'équation de transport

4.3.2.1 Changement de variables

La mise en place du processus de diffusion n'étant pas instantanée, son observation nécessite d'envisager le mouvement d'ensemble des phonons sur un laps de temps assez long. Dans ces conditions, l'introduction du changement de variable temporelle

$$t \longrightarrow \frac{t}{\varepsilon}\,, \tag{4.16}$$

dans l'équation de transport, permet de réaliser une dilatation de l'axe des temps. Ainsi, pour t donné, lorsque ε tend vers 0, t/ε tend vers l'infini. Par ailleurs, comme nous l'avons présenté plus haut, l'obten-

tion d'un processus de diffusion nécessite une augmentation de la variation des directions des vecteurs vitesses. Les particules gardant la même célérité, seul un rapprochement des parois permet un accroissement de la fréquence des chocs à l'origine du changement de direction des vecteurs vitesses. Ainsi la multiplication de la variable z par le paramètre ε

$$z \longrightarrow \varepsilon z\,, \tag{4.17}$$

permet de réaliser une réduction spatiale et ainsi de diminuer la distance parcourue par la particule entre deux collisions. En effet, lorsque ε tend vers 0, εz tend vers 0.

4.3.2.2 Développement de l'équation de transport

La prise en compte du paramètre ε transforme la fonction de distribution en une nouvelle fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t/\varepsilon)$ écrite par la suite $f_\varepsilon(x, y, z, u, v, w, t) \equiv f_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. L'introduction des changements de variable (4.16) et (4.17), dans l'équation de transport conduit maintenant à résoudre l'équation

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\, u\, \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\, v\, \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y} + \frac{w}{\varepsilon^2}\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} = 0\,, \tag{4.18}$$

avec $(x, y, z) \in Y$, $(v, w) \in [-c, c] \times [-c, c]$. Les conditions aux limites pour la nouvelle fonction $f_\varepsilon(x, y, z, u, v, w, t)$ sont identiques à celles de la fonction $f(x, y, z, u, v, w, t)$ car elles agissent uniquement sur les variables de vitesse qui ne sont pas affectées par l'introduction du paramètre ε. Elle s'écrivent d'après (4.14) :

$$\begin{aligned} |w|\, f_\varepsilon(x, y, z, u, v, w, t) &= d\,|w|\, f_\varepsilon(x, y, z, u^*, v^*, w^*, t) \\ &+(1-d)\, \int_{\Gamma^+} \mathcal{R}(z, \mathbf{v}, \mathbf{v}')\, |w'|\, f_\varepsilon(x, y, z, u', v', w', t)\, du'\, dv'\, dw'\,, \end{aligned} \tag{4.19}$$

avec $(x, y, z) \in \partial Y$, $\mathbf{v} \in \Gamma^-$. D'autre part, le milieu de propagation n'étant le siège d'aucun phénomène d'absorption dans l'espace inter-parois ou sur les parois elles mêmes, les conditions initiales vont garantir la conservation du nombre total N de particules. Elles prennent la forme

$$0 < f_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\,, \quad \iint f_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} = \iint F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} = N\,. \tag{4.20}$$

où $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ est la répartition initiale des particules.

4.3.2.3 Séparation des variables pour la fonction de distribution

Par construction, nous pouvons montrer que la fonction $f_\varepsilon(x, y, z, u, v, w, t)$ converge vers une fonction $\mathcal{F}(x, y, z, u, v, w, t)$ lorsque ε tend vers 0, telle que $\mathcal{F}(x, y, z, u, v, w, t)$ est de la forme $q(x, y, t)\, \phi\,(z, u, v, w)$ [144] :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x, y, z, u, v, w, t) = \mathcal{F}(x, y, z, u, v, w, t) = q(x, y, t)\, \phi\,(z, u, v, w)\,. \tag{4.21}$$

où $\phi\,(z, u, v, w)$ est une fonction positive dont la norme est fixée arbitrairement à l'unité, soit

$$\iiint \phi\,(z, u, v, w) dz\, du\, dv\, dw = 1\,, \tag{4.22}$$

et qui vérifie de plus,

$$w \frac{\partial}{\partial z} \phi\,(z, u, v, w) = 0. \tag{4.23}$$

Dans ces conditions, la densité de particules est indépendante de la variable z. Par extension, la densité d'énergie sonore est donc maintenant considérée comme constante sur une ligne transversale de la rue. Nous retrouvons ici mathématiquement le résultat numérique présenté au paragraphe 3.3.4, résultat

également vérifié expérimentalement (*cf.* annexe B, page 262). L'introduction de la relation expression (4.21) dans les conditions aux limites (4.14) pour la fonction de distribution $f(y,z,u,v,w,t)$, permet d'écrire les conditions aux limites vérifiées par la fonction $\phi(z,u,v,w) = \phi(z,\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} |w|\,\phi^-(z,\mathbf{v})\,q(x,y,t) &= d\,|w|\,\phi^+(z,\mathbf{v}^*)\,q(x,y,t) \\ &+(1-d)\int_{\Gamma^+}\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\,|w'|\,\phi^+(z,\mathbf{v}')\,q(x,y,t)\,d\mathbf{v}'\,, \quad \mathbf{v}\in\Gamma^-\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

où $\phi^+(z,\mathbf{v})$ et $\phi^-(z,\mathbf{v})$ sont les restrictions de la fonction de distribution $\phi(z,\mathbf{v})$, aux sous-ensembles Γ^+ (Γ^-).

Cette dernière expression montre que la fonction $\phi(z,\mathbf{v})$ ne peut être déterminée qu'en appliquant les conditions aux limites réelles définies par la fonction $\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$. Suivant la forme de la loi de réflexion, « rasante » ou « non rasante », la nature du développement mathématique pour déterminer la fonction $\phi(z,\mathbf{v})$ est totalement différente. Sous des conditions de réflexion *non rasantes* de la particule sur les surfaces du domaine, le processus de diffusion est dit *normal* et l'approche asymptotique est réalisée à l'aide de l'analyse fonctionnelle [6]. Ce terme de diffusion *normale* est à opposer au terme de diffusion *anormale* [56] qui prend en compte des conditions de réflexion *rasantes*, comme la loi de Lambert. Dans ce cas, une approche reposant sur la théorie des probabilités et notamment sur le théorème de la limite centrale [17] est utilisée. Ces deux développements sont présentés respectivement aux paragraphes 4.4.1 et 4.4.2.

4.4 Application du modèle et validation

Compte tenu de la complexité des développements mathématiques des deux approches évoquées précédemment, il ne nous a pas paru opportun de les détailler intégralement dans cette partie. Les lecteurs pourront se reporter aux travaux détaillé de thèse de T. Le Pollès [144] et de S. Colle [39] sur ce sujet, où à l'article [146]. Nous en présentons ici uniquement le principe.

4.4.1 Rue avec des façades présentant des réflexions non rasantes en $|w|^n$ (diffusion normale)

Ce développement mathématique est tiré des travaux de Babovsky, Bardos et Platkowski [6]. Le but de cette approche asymptotique est de prouver mathématiquement que la fonction $\phi(z,\mathbf{v})$ est solution d'une équation de diffusion dans le cas qui nous concerne, à savoir dans le cas de deux parois proches, diffusantes et caractérisées par des lois de réflexion non rasantes.

Dans la suite de l'étude, nous supposerons que l'absorption au niveau des parois est négligeable. Cette hypothèse est assez bien vérifiée car les matériaux rencontrés dans la pratique sont très réfléchissants (béton, briques, pierres de tailles, etc., de coefficient d'absorption de l'ordre de $\alpha \simeq 0.05$ [31, 53, 91]). Cette hypothèse est nécessaire pour pouvoir appliquer le développement proposé par Babovsky et coll. [6].

Dans un premier temps, la procédure a d'abord été appliquée lorsque les lois de réflexion sont identiques sur chaque façade, avec le même coefficient d'accommodation [144]. Par la suite, les travaux de S. Colle [39] ont permis de généraliser cette même approche, pour des lois de réflexion différentes sur chaque façade, avec des coefficients d'accommodation également différents. Le détail des développements est présenté dans la référence [146] présentée à l'annexe C (page 304).

4.4.1.1 Diffusion *normale*

Un des objectifs de ce développement asymptotique est d'obtenir une grandeur macroscopique observable qui correspond à la densité moyenne locale de particules. Mathématiquement, elle est définie

comme la valeur moyenne de la fonction de distribution, soit :

$$\iiint_{Z\times V} f_\varepsilon(x,y,z,u,v,w,t)\,dz\,du\,dv\,dw\,. \tag{4.25}$$

La première étape du développement correspond donc à la sommation sur l'ensemble $Z\times V$ de l'équation de transport. A la limite de ε tendant vers 0, et compte-tenu des propriétés de la fonction $\phi(z,\mathbf{v})$, on obtient finalement l'expression suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\,q\,(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x}\,\lim_{\varepsilon\to 0}\,\frac{1}{\varepsilon}\iiint u\,f_\varepsilon\,dz\,du\,dv\,dw + \frac{\partial}{\partial y}\,\lim_{\varepsilon\to 0}\,\frac{1}{\varepsilon}\iiint v\,f_\varepsilon\,dz\,du\,dv\,dw = 0\,. \tag{4.26}$$

Pour parvenir au résultat final, il reste à calculer les deux derniers termes de l'équation (4.26) qui sont indéterminés puisque, par construction, ils tendent vers l'infini. La levée de l'indétermination sur chacun des termes de l'équation (4.26) est possible grâce à l'introduction de deux fonctions $D_u(z,u,v,w)$ et $D_v(z,u,v,w)$ (notées simultanément $D_{u,v}(z,u,v,w)$ par la suite), définies respectivement par l'expression :

$$w\,\frac{\partial}{\partial z}D_u\,(z,u,v,w) = u\,\phi\,(z,u,v,w)\,, \tag{4.27}$$

et

$$w\,\frac{\partial}{\partial z}D_v\,(z,u,v,w) = v\,\phi\,(z,u,v,w)\,, \tag{4.28}$$

et satisfaisant d'autre part les conditions aux limites adjointes

$$D^{*+}_{u,v}(z,u,v,w) = d\,D^{*-}_{u,v}(z,u,v,-w) + (1-d)\iint_{\Gamma^-}\mathcal{R}(z,\mathbf{v},\mathbf{v}')D^{*-}_{u,v}\,du'\,dv'\,dw'\,, \tag{4.29}$$

où les exposants $^+$ et $^-$ désignent respectivement la restriction de la fonction D^* aux sous-ensembles Γ^+ et Γ^-. Cette fonction $D^*(z,u,v,w)$ n'a pas de réalité physique à proprement parler (D^* étant la fonction conjuguée de D). Cependant, son introduction est indispensable pour calculer le coefficient de diffusion au passage à la limite de ε tendant vers 0. A la limite de ε tendant vers 0, on montre finalement que l'équation (4.26) peut se mettre sous la forme d'une équation de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial t}q\,(x,y,t) - \left[\mathcal{K}_{uu}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{K}_{uv}\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \mathcal{K}_{vu}\,\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + \mathcal{K}_{vv}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]q(x,y,t) = 0\,, \tag{4.30}$$

avec, pour $a = u,v$ et $b = u,v$,

$$\mathcal{K}_{ab} = \iiint D_a(z,u,v,w)\,b\,dz\,du\,dv\,dw. \tag{4.31}$$

Ce développement mathématique permet donc de montrer que l'équation de diffusion est la limite de l'équation de transport de notre problème. Le coefficient de diffusion associé à l'équation de diffusion est calculé à partir d'une fonction $D\,(z,u,v,w)$, qui dépend des conditions aux limites de notre problème, donc des lois de réflexion. Pour déterminer ce coefficient de diffusion, il est donc d'abord nécessaire de calculer la fonction $\phi\,(z,u,v,w)$, puis les fonctions $D_{u,v}\,(z,u,v,w)$.

4.4.1.2 Calcul du coefficient de diffusion

Considérons une rue étroite, définie par deux façades parallèles, numérotées 1 et 2, en $z = +L$ et $z = -L$, chacune étant caractérisée par un coefficient d'accommodation d_1 et d_2, et par une loi de réflexion $\mathcal{R}_1(\mathbf{v},\mathbf{v}')$ et $\mathcal{R}_2(\mathbf{v},\mathbf{v}')$ telles que :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1(\mathbf{v},\mathbf{v}') & = \mathcal{A}_1 \times |\,w\,|^{n_1} \qquad \text{en } z = +L \\ \mathcal{R}_2(\mathbf{v},\mathbf{v}') & = \mathcal{A}_2 \times |\,w\,|^{n_2} \qquad \text{en } z = -L \end{cases} \tag{4.32}$$

où n_1 et n_2 sont des entiers positifs supérieurs à 2, et où $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des constantes de normalisation définies par les coordonnées sphériques suivantes,

$$\begin{cases} u = c\ \sin\theta\ \cos\varphi, \\ v = c\ \sin\theta\ \sin\varphi, \\ w = c\ \cos\theta, \\ du\,dv\,dw = c^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \end{cases} \tag{4.33}$$

par :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{(n_1+1)}{2\pi c^{n_1+2}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}_2 = \frac{(n_2+1)}{2\pi c^{n_2+2}}, \tag{4.34}$$

où θ et φ désigne les angles de réflexion, en coordonnées sphériques, par rapport à la normale à la façade.

Le calcul de la fonction $\phi(z, \mathbf{v})$ est réalisé d'après les conditions aux limites (4.24), en séparant les cas $z = +L$ ($w > 0$) et $z = -L$ ($w < 0$), ce qui permet d'obtenir les deux équations suivantes :

$$\phi\,(z,u,v,w) = a_+|w|^{n_1-1} + b_+|w|^{n_2-1} \qquad \text{pour } w > 0\,, \tag{4.35}$$

et

$$\phi\,(z,u,v,w) = a_-|w|^{n-1} + b_-|w|^{n_2-1} \qquad \text{pour } w < 0\,, \tag{4.36}$$

où a_+, a_-, b_+ et b_- sont des constantes, déterminées en réintroduisant les expressions (4.35) et (4.36) dans les conditions aux limites :

$$\begin{cases} a_+ &= d_2 a_- \\ b_- &= d_1 \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{1-d_2}{1-d_1}\right) a_- \\ b_+ &= \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{1-d_2}{1-d_1}\right) a_- \end{cases} \tag{4.37}$$

Le calcul des fonctions $D_{u,v}\,(z,u,v,w)$ est quant à lui plus complexe. Le lecteur pourra se reporter à la référence [39] pour le détail. Finalement, on montre que

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{uu} & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iiint c^2 u \sin\theta D_u\,(z,\theta,\varphi) d\theta d\varphi dz & 0 \\ 0 & \iiint c^2 v \sin\theta D_v\,(z,\theta,\varphi) d\theta d\varphi dz \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

En raison de la symétrie du problème en x et y, on montre également que les coefficients de diffusion $\mathcal{K}_{uu}$ et $\mathcal{K}_{vv}$, sont égaux ($\mathcal{K}_{uu} = \mathcal{K}_{vv} = \mathcal{K}$) avec :

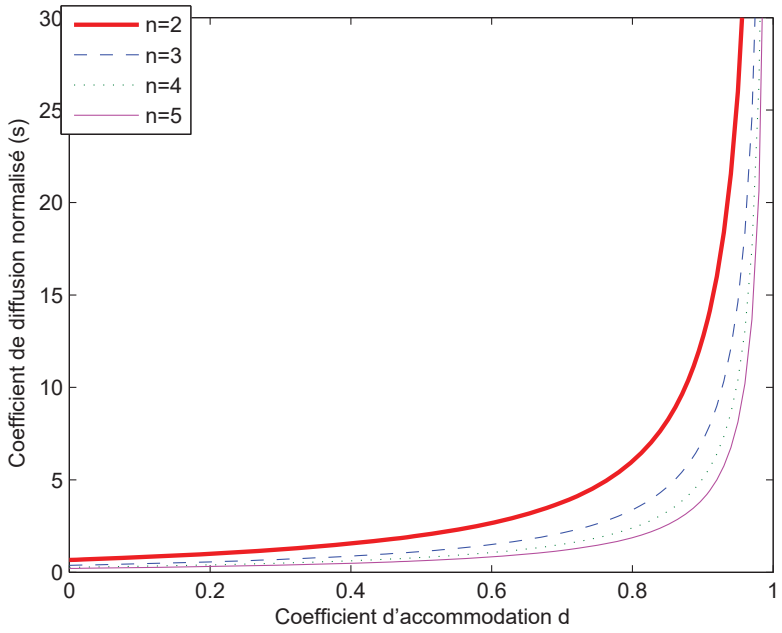
$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{Lc \cdot n_1 n_2}{(1-d_1d_2)\cdot[(1-d_1)\cdot(1+d_2)\cdot n_2\cdot(n_1+1)+(1-d_2)\cdot(1+d_1)\cdot n_1\cdot(n_2+1)]} \\ & \times\left[\left(\frac{1-d_1}{n_1-1}\right)\cdot(d_1d_2^2+3d_1d_2+3d_2+1)+\left(\frac{1-d_2}{n_2-1}\right)\cdot(d_1^2d_2+3d_1d_2+3d_1+1)\right]. \end{aligned} \tag{4.39}$$

En particulier, pour des lois de réflexion et des coefficients d'accommodation identiques sur chaque façade ($n_1 = n_2 = n$, $d_1 = d_2 = d$), cette expression se réduit à :

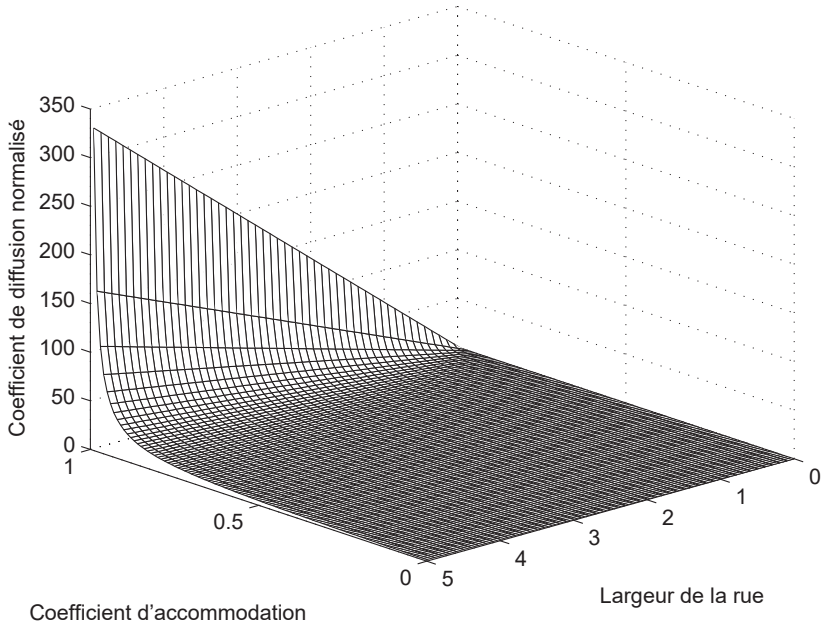
$$\mathcal{K} = \frac{n}{n^2-1} \times \frac{1+d}{1-d} \times Lc. \tag{4.40}$$

Cette dernière relation montre donc que la diffusion d'énergie le long de la rue[9] est fonction de la morphologie des façades, à travers la loi de réflexion (*i.e.* le facteur n dans notre cas) et le coefficient d'accommodation (d dans notre cas). Comme le montre la figure 4.8(a), le coefficient de diffusion diminue avec n. Comme attendu, plus la loi de réflexion concentre l'énergie sonore réfléchie autour de la normale, plus longtemps l'énergie reste présente « localement », et donc plus la diffusion est lente (*i.e.* le coefficient de diffusion diminue). A l'inverse, plus la façade est spéculaire (*i.e.* d augmente), plus la diffusion est rapide (figures 4.8(a) et 4.8(b)). Enfin, la diffusion d'énergie est également liée à la largeur de la rue. Comme attendu, plus la rue est large (*i.e.* L augmente), plus la diffusion est rapide.

9. Nous avons montré plus haut que la densité d'énergie est uniforme sur la section de la rue.



(a)



(b)

FIG. 4.8 — *Évolution du coefficient de diffusion $\mathcal{K}$ (normalisé par Lc), en fonction de la loi de réflexion (exposant n), du coefficient d'accommodation d et de la largeur de la rue 2L. D'après la relation (4.40) pour des façades identiques. D'après [146].*

4.4.1.3 Solution de l'équation de diffusion

Dans la section précédente, nous avons montré que la densité de particules (*i.e.* la densité d'énergie), dans le plan médian de la rue (plan parallèle aux façades, situé au milieu de la rue) est solution d'une équation de diffusion, alors que la densité d'énergie est constante sur une ligne transversale (ligne perpendiculaire aux façades). A ce stade, il nous reste à déterminer l'expression exacte de la densité d'énergie dans le plan médian, en résolvant l'équation de diffusion. Dans le cas le plus simple, on peut résoudre le problème en considérant que la rue est infinie sur la longueur et sur la hauteur. Ce sont par ailleurs, les hypothèses de base de notre modèle. Dans ce premier cas, on qualifiera la solution par le terme *infinie*. Néanmoins, en pratique, la rue possède une longueur et une hauteur limitée (pas nécessairement identiques) responsable d'une absorption totale de l'énergie. Aux extrémités d'une rue et au niveau du « toit », on considère en effet que l'énergie sonore est totalement absorbée et qu'aucune autre énergie sonore ne pénètre dans le milieu. Pour prendre en compte cette absorption dans le modèle, nous avons proposé une autre solution, appelée solution *finie*. Ces deux solutions sont présentées dans les deux paragraphes qui suivent.

Solution en espace infini. En milieu infini, la solution de l'équation de diffusion en deux dimensions ne pose pas de problème et s'écrit très simplement :

$$q(x,y,t) = \frac{1}{4\pi\mathcal{K}t}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{4\mathcal{K}t}\right]. \tag{4.41}$$

Solution en milieu fini. De manière à modéliser l'absorption par les ouvertures (par le toit et les deux extrémités), nous avons introduit des conditions aux limites particulières sur la solution de l'équation de diffusion, sous la forme d'un coefficient d'échange h :

$$\begin{cases} \pm\mathcal{K}\dfrac{\partial q(x,y,t)}{\partial x} = h\,q(x,y,t) & \text{en } x = \mp l_x, \forall y\,, \\ \pm\mathcal{K}\dfrac{\partial q(x,y,t)}{\partial y} = h\,q(x,y,t) & \text{en } y = \mp l_y, \forall x\,, \end{cases} \tag{4.42}$$

où $\mp l_x$ et $\mp l_y$ sont les limites du domaine de propagation suivant respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées [10] de la rue. Ce coefficient d'échange est similaire à celui usuellement introduit en thermique, pour caractériser des échanges de chaleur entre deux matériaux en contact. Afin d'exprimer h, il est nécessaire de réécrire les conditions de flux aux extrémités. Revenant au concept même de particules sonores et notamment à l'expression (4.4) du flux de phonons $J(x,y,z,t)$, le flux de phonons sortant aux extrémités du domaine de propagation, est donné par :

$$J(x,y,z,t) = \int_{\Gamma^+} |\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,|\, f(x,y,z,u,v,w,t)\,du\,dv\,dw\,, \quad \text{pour } (x,y)\in\Omega\,, \forall z\,, \tag{4.43}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure aux plans formés par les ouvertures du milieu de propagation. La fonction de distribution étant le produit de deux fonctions $q(x,y,t)$ et $\phi(z,u,v,w)$, l'expression (4.43) s'écrit plus également, en $(x,y,z) = (l_x,y,z)$:

$$J(l_x,y,z,t) = q(l_x,y,t)\int_{\Gamma^+} u\,\phi(z,u,v,w)\,du\,dv\,dw\,, \tag{4.44}$$

Par ailleurs, si on considère l'expression du flux défini par les relations (4.42), le flux a également pour expression :

$$J(l_x,y,z,t) = \mathcal{K}\frac{\partial q(l_x,y,t)}{\partial x}\int_{\Gamma^+}\phi(z,u,v,w)\,du\,dv\,dw, = h\,q(l_x,y,t)\int_{\Gamma^+}\phi(z,u,v,w)\,du\,dv\,dw\,. \tag{4.45}$$

10. La longueur de la rue est donc égale à $2l_x$, et la hauteur à $2l_y$. Le sol étant considéré comme parfaitement réfléchissant, la rue est assimilée à deux plans parallèles de dimension finie de dimension $2l_x \times 2l_y$.

L'équivalence des deux expressions (4.44) et (4.45) impose finalement que h vérifie la condition suivante :

$$h = \frac{\int_{\Gamma^+} |\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|\,\phi(z,v,w)\,dv\,dw}{\int_{\Gamma^+}\phi(z,v,w)\,dv\,dw}\,. \tag{4.46}$$

L'expression du coefficient d'échange h est obtenue en remplaçant la fonction ϕ par son expression. Le domaine d'intégration Γ^+ (variation des angles θ et φ) est fonction de l'extrémité considérée. Finalement, on montre que le coefficient d'échange h a pour expression :

$$\begin{aligned} h = \left(\frac{2c\cdot n_1 n_2}{\pi}\right)\times\Bigg[&(n_1+1)\cdot(1+d_2)\cdot(1-d_1)\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta|\cos\theta|^{n_1-1}d\theta \\ &+(n_2+1)\cdot(1+d_1)\cdot(1-d_2)\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta|\cos\theta|^{n_2-1}d\theta\Bigg] \\ &\times\left[n_2\cdot(n_1+1)\cdot(1+d_2)\cdot(1-d_1)+n_1\cdot(n_2+1)\cdot(1+d_1)\cdot(1-d_2)\right]^{-1}\,. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Comme attendu, le coefficient d'échange est identique aux 4 extrémités et indépendant de la largeur de la rue, mais est fonction de la loi de réflexion des façades. Moins la loi de réflexion concentre l'énergie autour de la normale à la paroi, plus l'absorption par les ouvertures est importante et plus h augmente. En milieu fini, la solution de l'équation de diffusion, prenant en compte un même coefficient d'échange aux extrémités, est donnée dans la référence [204].

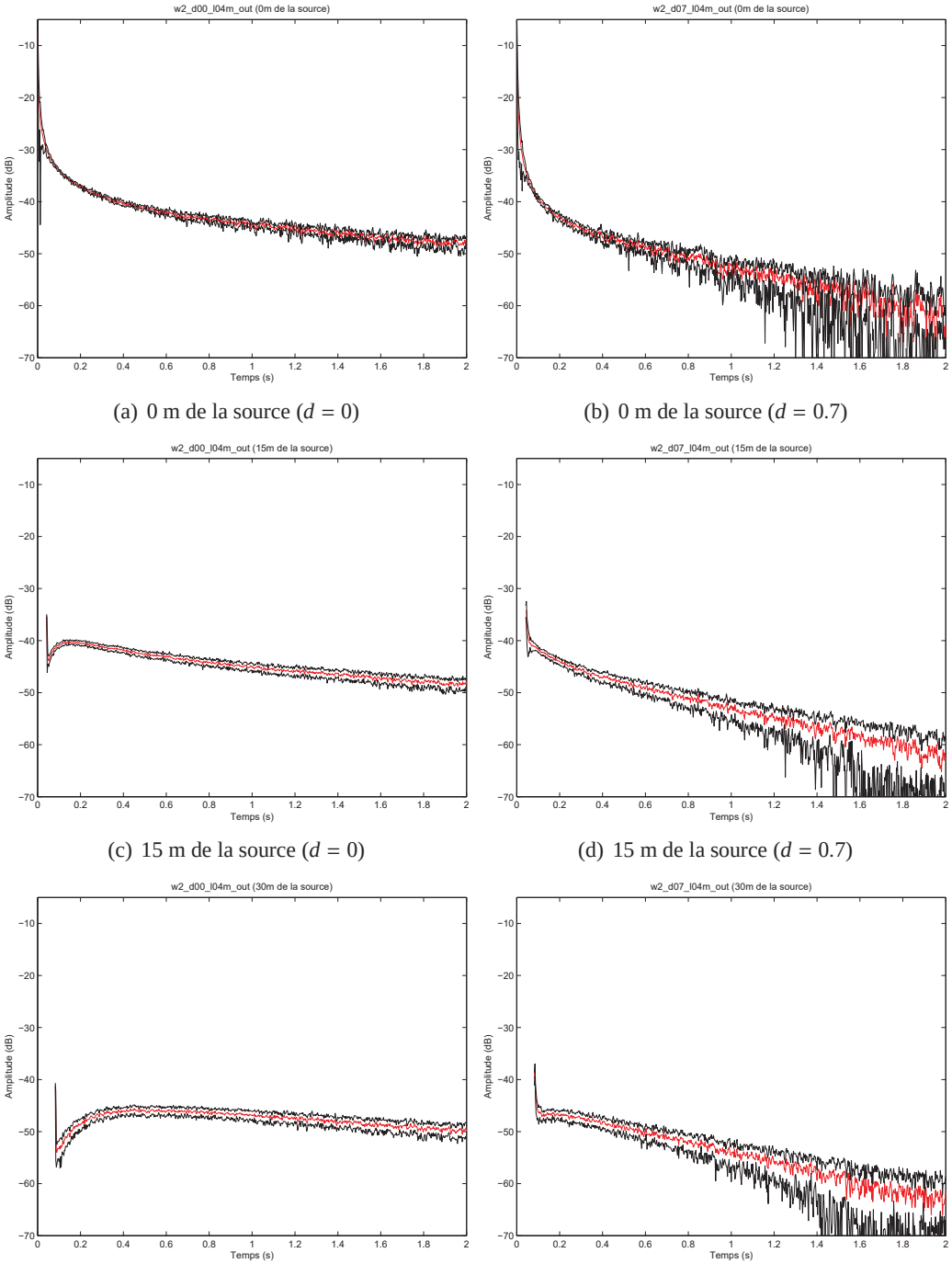
4.4.1.4 Validation numérique

Principe des simulations numériques. Afin de valider l'approche asymptotique de l'équation de transport, et donc de valider la modélisation de l'énergie sonore dans une rue par un processus de diffusion, nous avons comparé les solutions de l'équation de diffusion, à des simulations numériques de la propagation de particules sonores entre deux plans. A cet effet, nous avons utilisé le code SPPS que nous avons déjà présenté dans le chapitre 3. Il est important de rappeler une nouvelle fois la différence entre le code SPPS et le modèle de diffusion (voir également la note 5 à la page 24) : le code SPPS simule la propagation de chaque particule sonore de manière géométrique, tandis que le modèle de diffusion permet de décrire la répartition des particules, à l'échelle macroscopique, en utilisant une équation de diffusion. Les deux approches sont donc totalement indépendantes.

Dans la présente étude, nous avons considéré la propagation de 10^6 particules sonores, entre deux plans parallèles à l'axe (Oxy), avec une source au centre. Compte tenu de la symétrie suivant les axes x et y, nous avons procédé à un moyennage dans les 4 directions de l'espace [Ox), [Oy), (xO] et (yO], pour obtenir une décroissance moyenne du nombre de particules par rapport à la source. Ce moyennage permet d'augmenter virtuellement d'un facteur 4 le nombre de particules sonores, sans augmenter la durée des simulations. La longueur de la rue a été fixée à 100 m et la hauteur à 50 m. Compte tenu des hypothèses de construction de notre modèle de rue, nous avons donc simulé la propagation de particules sonores, entre deux plans carrés de 100 m de long. Plusieurs largeurs de rue, et plusieurs conditions de réflexion ont été testées.

Résultat des comparaisons. A titre d'illustration, les figures 4.9 et 4.10 montrent la répartition des particules sonores sur une section de rue (pour deux largeurs de rue, $2L = 4$ m et $2L = 10$ m,), pour des conditions de réflexion identiques sur chaque façade (loi en w^2), et pour trois distances par rapport à la source sonore (située à l'origine). Comme attendu, plus l'écart entre les parois est petit, plus l'uniformité est vérifiée. Lorsque la largeur L augmente, l'écart type augmente également. De même lorsque le point d'observation s'éloigne de la source. Cet écart-type augmente également lorsque le coefficient d'accommodation augmente, c'est-à-dire quand le milieu devient moins diffus (*i.e.* les parois sont moins diffusantes). A l'inverse, plus la valeur n de la loi de réflexion w^n augmente, plus l'uniformité

Loi en w^2 avec $2L = 4$ m



(a) 0 m de la source ($d = 0$)

(b) 0 m de la source ($d = 0.7$)

(c) 15 m de la source ($d = 0$)

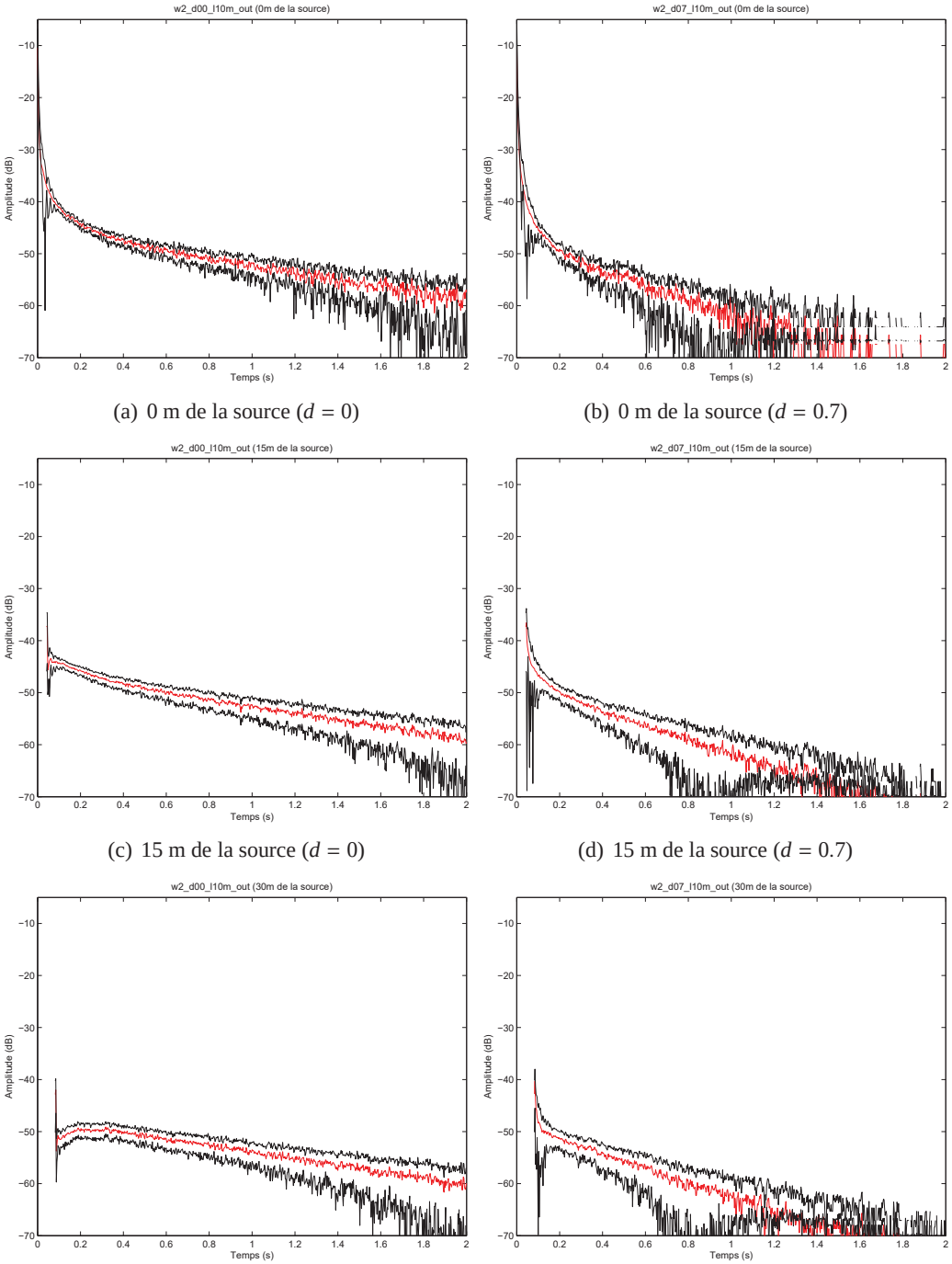
(d) 15 m de la source ($d = 0.7$)

(e) 30 m de la source ($d = 0$)

(f) 30 m de la source ($d = 0.7$)

FIG. 4.9 — *Décroissance d'énergie (résultats numériques) en* 3 *points d'observation pour deux valeurs du coefficient d'accommodation ($d = 0$ et $d = 0.7$). Valeur moyenne (en rouge) et écart type (en noir), sur une ligne transversale. Loi en w^2 avec $2L = 4$ m.*

Loi en w^2 avec $2L = 10$ m



(a) 0 m de la source ($d = 0$)

(b) 0 m de la source ($d = 0.7$)

(c) 15 m de la source ($d = 0$)

(d) 15 m de la source ($d = 0.7$)

(e) 30 m de la source ($d = 0$)

(f) 30 m de la source ($d = 0.7$)

FIG. 4.10 — *Décroissance d'énergie (résultats numériques) en* 3 *points d'observation pour deux valeurs du coefficient d'accommodation ($d = 0$ et $d = 0.7$). Valeur moyenne (en rouge) et écart type (en noir), sur une ligne transversale. Loi en w^2 avec $2L = 10$ m.*

est vérifiée[11]. Ces résultats sont tout à fait conformes à ceux qui étaient attendus. Moins les particules se disperseront rapidement (*i.e.* lorsque la largeur entre les parois est réduite ou lorsque la loi de réflexion privilégie les réflexions autour de la normale, ou encore lorsque le coefficient d'accommodation est faible), plus l'uniformité sur une ligne transversale est vérifiée, et plus les résultats sont conformes au modèle de diffusion.

Les figures 4.11 et 4.12 illustrent la comparaison du modèle de diffusion avec les simulations numériques, en régime impulsionnel, en plusieurs points d'observation et pour différents paramètres et conditions de réflexion (mêmes conditions de réflexion que les figures 4.9 et 4.10). Compte tenu de l'uniformité du nombre de particules sonores sur une section de rue, nous avons moyenné les résultats sur l'axe *z*, pour obtenir une valeur moyenne au centre de la rue. Ces comparaisons montrent un excellent accord entre le modèle en solution finie et les simulations numériques, lorsque les conditions de réflexion sont totalement diffuses ($d = 0$) et lorsque la loi de réflexion est orientée au plus près de la normale à la paroi (w^4 par rapport à w^2 par exemple[12]). En particulier, on peut remarquer que les résultats pour w^4 et $d = 0.7$ sont bien meilleurs que pour w^2 et $d = 0.7$. La modification de la largeur de rue ne change pas ces conclusions. La solution infinie, ne prenant pas en compte les ouvertures, donne de moins bons résultats, notamment quand la rue est plus large et quand les réflexions sont moins diffuses.

4.4.2 Rue avec des façades présentant des réflexions rasantes avec une loi de Lambert (diffusion anormale)

Ce développement mathématique est tiré des travaux de Börgers, Greengard et Thomann [17]. Le but de cette autre approche asymptotique est de prouver mathématiquement que l'équation de diffusion correspond là encore, à la limite de l'équation de transport dans le cadre de parois proches, diffusantes et caractérisées par une loi de réflexion rasante de type Lambert :

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{|w|}{\pi c^3}, \tag{4.48}$$

où en coordonnées sphériques par

$$\mathcal{R}(\theta, \theta') = \frac{|\cos\theta|}{\pi c^2}. \tag{4.49}$$

Si nous avons également choisi cette autre approche (par rapport au cas précédent), c'est d'une part, parce que la loi de Lambert est couramment employée en acoustique architecturale pour simuler la diffusion de façade[13], et d'autre part, parce que cette méthode permet de simuler des lois de réflexion rasante (ce que ne permet pas la précédente approche). Le détail des développements est présenté dans la référence [145] présentée à l'annexe C (page 322).

4.4.2.1 Diffusion *anormale*

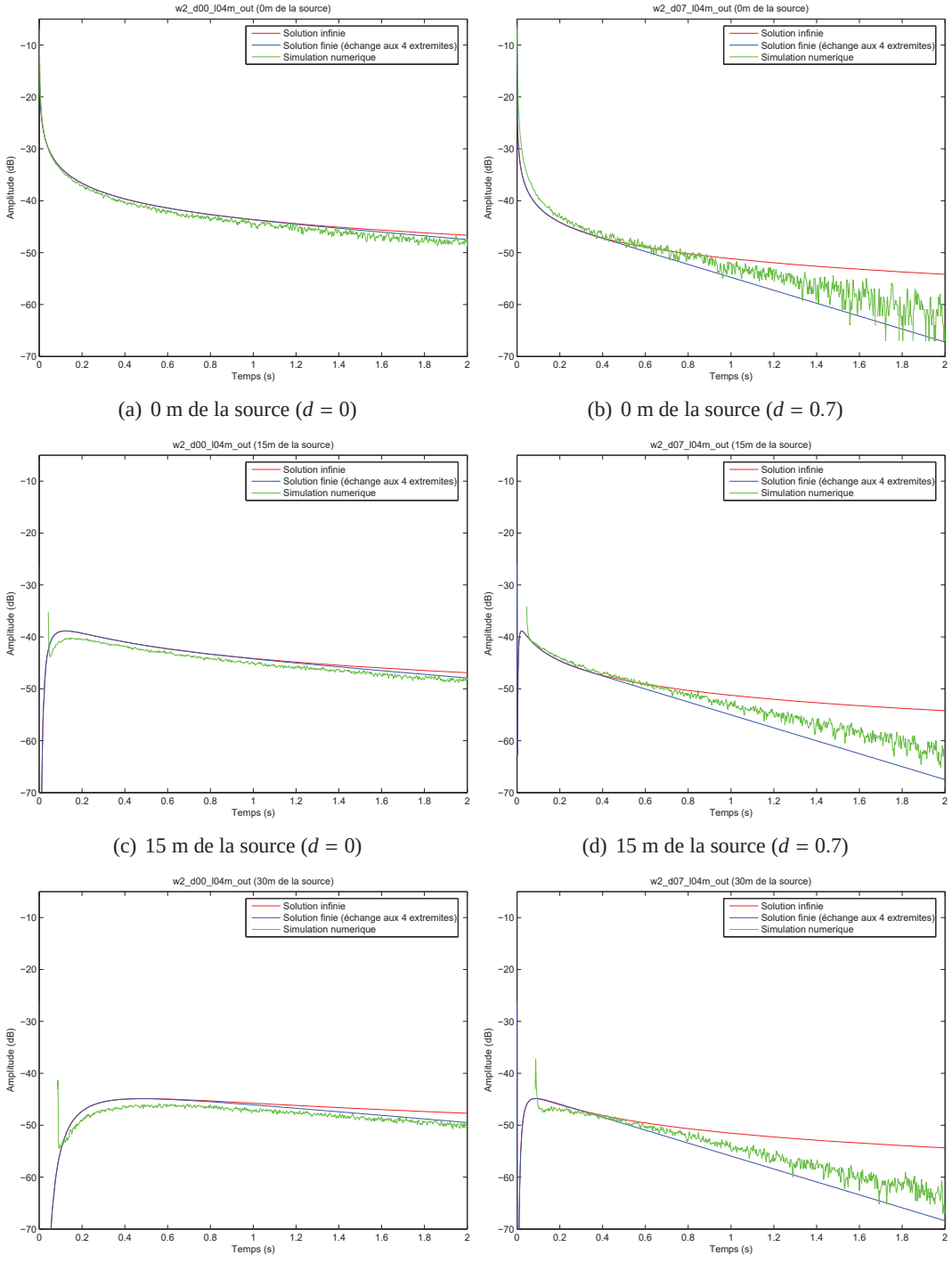
Le développement de base est identique au cas précédent, et repose sur la décomposition de la fonction de distribution en un produit de deux fonctions $q(x, y, t)$ et $\phi(z, u, v, w)$. La détermination de la fonction $\phi(z, u, v, w)$ est semblable, et donne :

$$\phi(z, u, v, w) = a_+ = \frac{1}{4\pi (2L) c^2}. \tag{4.50}$$

La fonction $q(x, y, t)$ est quant à elle obtenue grace à une application du théorème de la limite centrale. Ce calcul comprend plusieurs étapes, dont l'objectif principal est de déterminer la distribution de la projection, dans le plan horizontal, de la distance parcourue par la particule entre plusieurs réflexions diffuses (avec ou sans réflexions spéculaires intermédiaires). Le trajet total est alors décomposé en sous-trajets pour lesquels des fonctions de distribution peuvent être calculées.

11. Les figures ne sont pas présentées ici, mais le lecteur pourra se reporter à la référence [144].
12. Idem note 11.
13. Bien que cela reste à démontrer expérimentalement.

Loi en w^2 avec $2L = 4$ m



(a) 0 m de la source ($d = 0$)

(b) 0 m de la source ($d = 0.7$)

(c) 15 m de la source ($d = 0$)

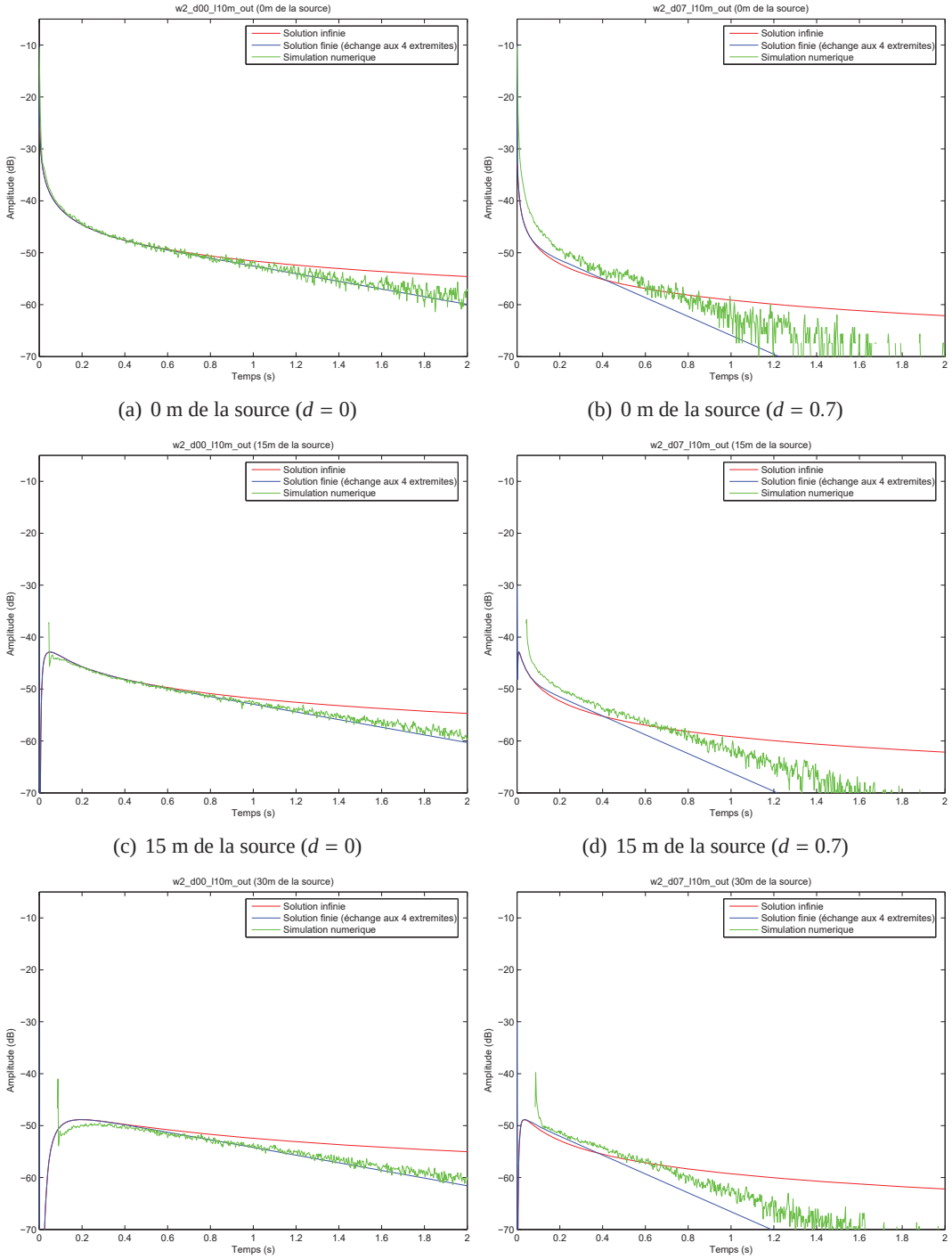
(d) 15 m de la source ($d = 0.7$)

(e) 30 m de la source ($d = 0$)

(f) 30 m de la source ($d = 0.7$)

FIG. 4.11 — *Comparaison du modèle de diffusion (solution finie et infinie) avec les simulations numériques en* 3 *points d'observation et pour deux valeurs du coefficient d'accommodation ($d = 0$ et $d = 0.7$). Loi en w^2 avec $2L = 4$ m.*

Loi en w^2 avec $2L = 10$ m



(a) 0 m de la source ($d = 0$)

(b) 0 m de la source ($d = 0.7$)

(c) 15 m de la source ($d = 0$)

(d) 15 m de la source ($d = 0.7$)

(e) 30 m de la source ($d = 0$)

(f) 30 m de la source ($d = 0.7$)

FIG. 4.12 — *Comparaison du modèle de diffusion (solution finie et infinie) avec les simulations numériques en* 3 *points d'observation et pour deux valeurs du coefficient d'accommodation ($d = 0$ et $d = 0.7$). Loi en w^2 avec $2L = 10$ m.*

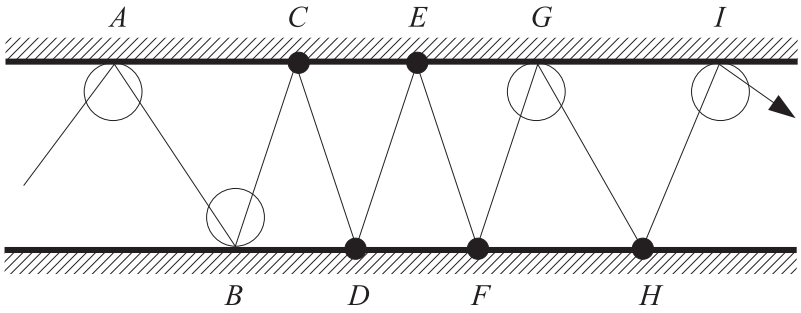


FIG. 4.13 — *Décomposition du trajet d'une particule pour le développement asymptotique dans le cas d'une loi de réflexion rasante. Les cercles schématisent des réflexions selon la loi de* LAMBERT. *Les autres réflexions sont spéculaires. Entre* A *et* B *: trajet entre deux chocs suite à une réflexion diffuse. Entre* B *et* G *: trajet entre deux réflexions diffuses et comportant* 4 *réflexions spéculaires. D'après [145].*

Le principe de l'approche repose sur le suivi d'une particule entre deux plans parallèles et diffusants. Au contact avec une façade, le phonon va subir des collisions et va être réfléchi soit de manière spéculaire soit de manière diffuse selon la loi de LAMBERT, chaque réflexion ayant une certaine probabilité. La probabilité totale d'existence d'un trajet avec n réflexions spéculaires et m réflexions diffuses (LAMBERT) peut donc être exprimée à partir de chacune des probabilités :

– La première étape est le calcul de la fonction de distribution de la distance horizontale, notée $(2L) \times \widetilde{G}(r)$, parcourue par la particule, entre deux chocs successifs après une réflexion diffuse (trajet AB sur la figure 4.13) :

$$(2L) \times \widetilde{G}(r) = (2L)\, \frac{2\,r}{(1+r^2)^2}, \tag{4.51}$$

avec un temps de vol défini par :

$$(2L) \times \mathbb{E}(\widetilde{\tau}) = \frac{2L}{\pi\, c} \int_0^{\pi/2} \tan\theta\, d\theta \int_0^{2\,\pi} d\varphi = 2 \times \frac{2L}{c}. \tag{4.52}$$

– La seconde étape consiste à calculer la fonction de distribution de la distance horizontale parcourue entre deux réflexions diffuses successives entre lesquelles ont lieu n réflexions spéculaires (trajet BC sur la figure 4.13) :

$$(2L) \times G(r) = (2L) \sum_{k=1}^{+\infty} (1-d)\, d^{k-1}\, \frac{1}{k}\, \widetilde{G}\left(\frac{r}{k}\right), \tag{4.53}$$

avec un temps de vol :

$$(2L) \times \mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{1-d} \times 2 \times \frac{2L}{c}. \tag{4.54}$$

– La troisième et dernière étape développe le calcul de la fonction de distribution $q(x, y, t)$ de la distance horizontale parcourue entre plusieurs réflexions diffuses successives, incluant des réflexions spéculaires (trajet AD sur la figure 4.13). En appliquant, le théorème de la limite centrale, on montre que :

$$q(x, y, t) = \frac{1}{2\,\pi\, t\, \sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\,t\,\sigma^2}\right], \tag{4.55}$$

avec

$$\sigma^2 = (2L) \times \frac{(1+d)}{(1-d)}\, \frac{c}{2}. \tag{4.56}$$

Là encore, nous n'avons pas détaillé l'intégralité des développements mathématiques. Le lecteur pourra se reporter à la référence [144] pour plus de détail. A l'issu de ces développements, on montre donc que la fonction $q(x, y, t)$ définie par la relation (4.55) n'est autre que la solution d'une équation de diffusion, que nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x,y,t) - \mathcal{K}\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,y,t) - \mathcal{K}\frac{\partial^2}{\partial y^2}q(x,y,t) = 0, \tag{4.57}$$

où le coefficient de diffusion $\mathcal{K}$ est défini par

$$\mathcal{K} = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{(1+d)}{(1-d)} \times (2L) \times \frac{c}{4}, \tag{4.58}$$

pour une loi de Lambert. Pour une autre loi rasante (loi uniforme par exemple), l'approche aurait été similaire, mais pas l'expression du coefficient de diffusion. Avec une approche totalement différente de celle pour des lois de réflexion non rasantes, on retrouve exactement les mêmes dépendances du coefficients de diffusion, avec la largeur de rue et le coefficient de diffusion, que celles présentées au paragraphe 4.4.1.2 et illustrées sur les figures 4.8(a) et 4.8(b).

Comme pour les réflexions non rasantes, la prise en compte des ouvertures peut être réalisée en considérant un coefficient d'échange aux deux extrémités de la rue et pour le « toit » (et son image), soit dans notre cas :

$$h = \frac{c}{2}. \tag{4.59}$$

4.4.2.2 Validation numérique

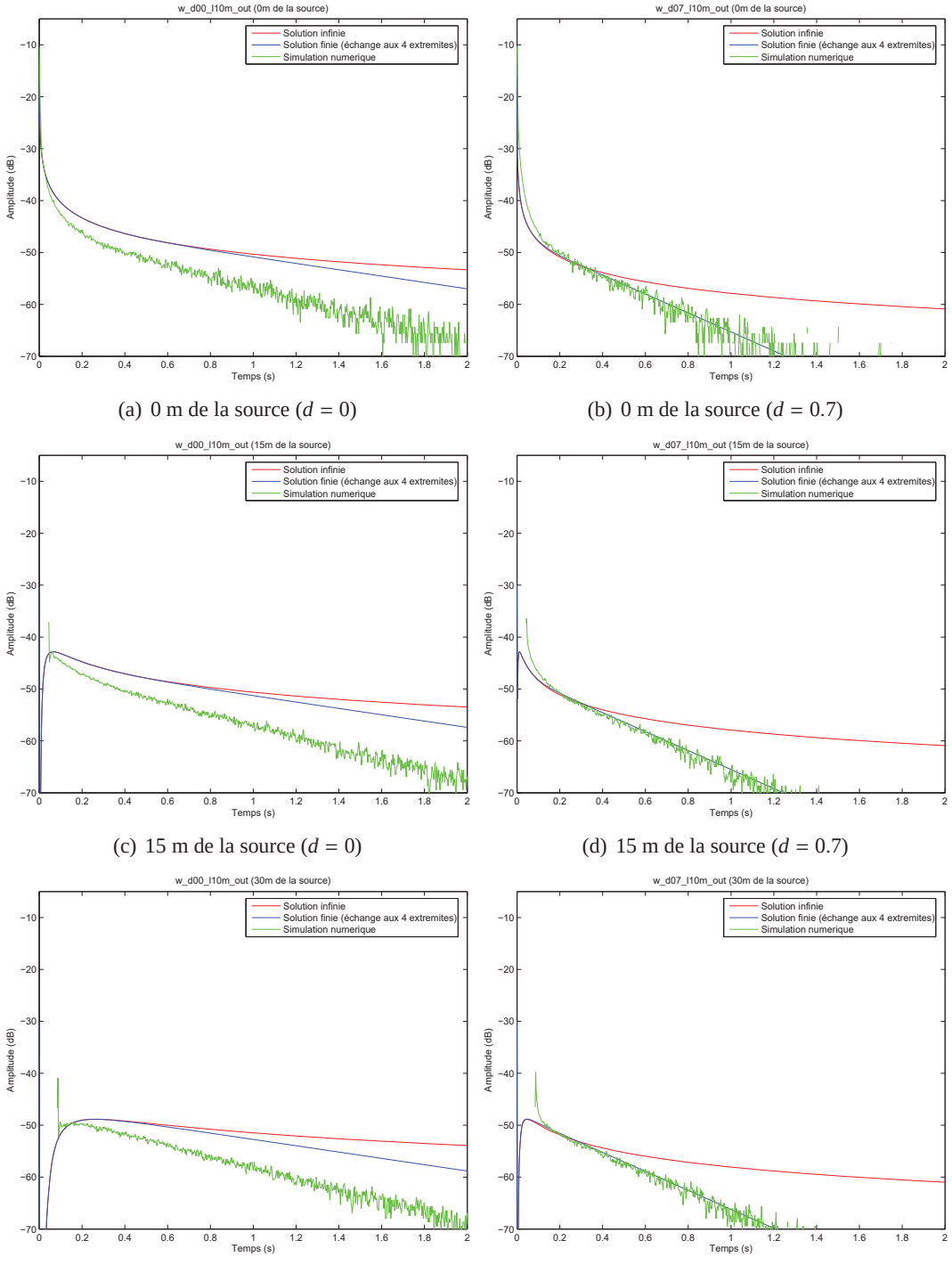
Pour cette approche en réflexion rasante, nous avons également réalisé des simulations numériques, suivant la même méthode que celle présentée au paragraphe 4.4.1.4. A l'inverse du cas précédent (diffusion *normale*), l'accord entre les simulations et le modèle est meilleur lorsque la largeur de rue augmente, et pour un coefficient d'accommodation plus important. En particulier, les résultats sont meilleurs pour $2L = 10$ m avec $d = 0.7$, que pour $2L = 10$ m avec $d = 0.0$, ce qui semble en contradiction avec l'hypothèse initiale de notre approche qui suggère que le processus de diffusion se met en place lorsque les parois sont proches et *a priori* lorsque la diffusion de paroi est importante (en rapport avec la réflexion spéculaire, c'est-à-dire quand le coefficient d'accommodation d est faible).

4.4.2.3 Validation expérimentale

Afin d'évaluer la pertinence de notre modèle, nous avons également réalisé une comparaison avec des données expérimentales, obtenues lors d'une campagne de mesures réalisée en juillet 2002 par le LCPC dans la rue Kervégan à Nantes. Le lecteur pourra se reporter directement à l'article présenté à l'annexe B (page B) pour le descriptif et les résultats de cette campagne expérimentale. Nous préciserons simplement que cette campagne a permis d'établir une « carte » des niveaux sonores, et des temps de réverbération dans une rue rectangulaire (à plusieurs distances de la source, en plusieurs hauteurs par rapport au sol et en plusieurs points sur une même section de rue), en global comme en bande de tiers d'octave, et ce, pour plusieurs positions de source.

Dans le cadre de la validation de notre approche mathématique pour la loi de Lambert, nous avons utilisé les données obtenues lorsque la source sonore est située au milieu de la rue, à 50 cm au-dessus du sol (configuration S1 de la campagne). Pour les courbes d'atténuation sonore, dans la mesure où les résultats expérimentaux semblent similaires pour toutes les bandes de fréquence considérées, nous avons moyenné les courbes d'atténuation sur l'ensemble des bandes de fréquence. Par contre, l'évolution des temps de réverbération n'est pas identique pour toutes les bandes de fréquence. Nous avons considéré dans ce cas les limites « haute » fréquence et « basse » fréquence.

Loi en w avec $2L = 10$ m



(a) 0 m de la source ($d = 0$)

(b) 0 m de la source ($d = 0.7$)

(c) 15 m de la source ($d = 0$)

(d) 15 m de la source ($d = 0.7$)

(e) 30 m de la source ($d = 0$)

(f) 30 m de la source ($d = 0.7$)

FIG. 4.14 — *Comparaison du modèle de diffusion (solution finie et infinie) avec les simulations numériques en* 3 *points d'observation et pour deux valeurs du coefficient d'accommodation ($d = 0$ et $d = 0.7$). Loi en w (*LAMBERT*) avec $2L = 10$ m.*

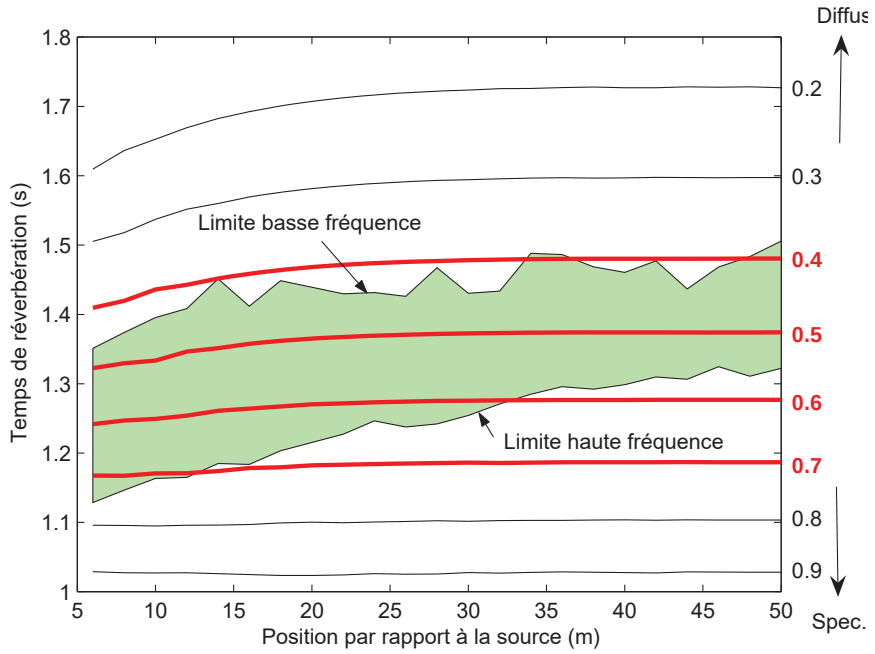


FIG. 4.15 — *Temps de réverbération calculés à partir du modèle de diffusion pour* $d = 0.2, 0.3, \ldots 0.9$*, comparés aux TR mesurés dans la rue Kervégan (zone délimitée par la limite basse et haute fréquence, en vert). Les solutions du modèle de diffusion correspondant à un coefficient d'accommodation compris entre* $d = 0.4$ *et* $d = 0.7$ *(en rouge) semblent compatibles avec les données expérimentales. D'après [145].*

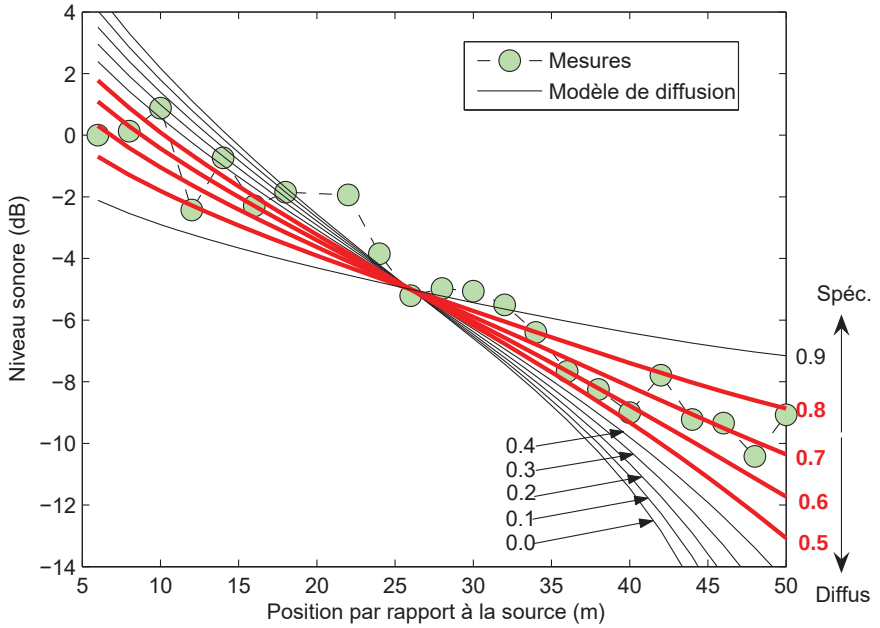


FIG. 4.16 — *Niveaux sonores calculés par le modèle de diffusion pour* $d = 0.0, 0.1, \ldots 0.9$*, comparés aux données expérimentales (en vert). Les solutions du modèle de diffusion correspondant à un coefficient d'accommodation compris entre* $d = 0.5$ *et* $d = 0.8$ *(en rouge) semblent compatibles avec les données expérimentales. D'après [145].*

Les figures 4.15 et 4.16 illustrent la comparaison du modèle de diffusion avec les profils expérimentaux, respectivement pour les temps de réverbération et les niveaux sonores en fonction de la distance source-récepteurs. Les TR et les niveaux sonores théoriques ont été obtenus en considérant la solution de l'équation de diffusion (4.57), avec le coefficient de diffusion (4.58) et le coefficient d'échange (4.59). Cette comparaison suppose bien entendu que les façades de la rue Kervégan puisse être assimilées à des plans parfaitement diffus (*i.e.* suivant une loi de LAMBERT), ce qui n'est absolument pas prouvé[14]. Par ailleurs, en l'absence d'information sur le coefficient d'accommodation réel des façades de la rue Kervégan, ces figures montrent les résultats théoriques pour plusieurs valeurs du coefficient d'accommodation. Compte tenu de ces nombreuses incertitudes, nous ne pouvons entreprendre ici qu'une comparaison qualitative des résultats.

Concernant les temps de réverbération (figure 4.15), un recouvrement des solutions analytiques sur les profils de référence est observé pour $d = 0.4$ à 0.7, ce qui semble prouver la cohérence du modèle. De manière plus précise, ces courbes montrent une diminution des temps de réverbération lorsque le coefficient d'accommodation augmente. En effet, plus d est grand, plus les réflexions spéculaires au niveau des parois sont nombreuses. Dans ces conditions, les particules sonores sortent plus rapidement du milieu de propagation, entraînant une baisse plus rapide de l'énergie sonore au cours du temps. De plus, toute la gamme de fréquence du profil est balayée par les différentes solutions analytiques, ce qui suggère que cette loi de réflexion puissent potentiellement être rencontrée en pratique.

Concernant l'atténuation sonore (figure 4.16), on observe, là encore, un bon comportement du modèle pour d compris entre 0.5 et 0.8. Les courbes montrent une diminution[15] de l'atténuation sonore lorsque le coefficient d'accommodation augmente. Cette plage de variation est pratiquement identique à celle des temps de réverbération, ce qui conforte l'idée que cette loi puisse être représentative d'un phénomène réel. Il s'agit bien entendu d'une possibilité et en aucun cas d'une preuve.

Bien que nous ne l'ayons pas présenté dans ce rapport, nous avons également réalisé une comparaison avec le modèle théorique pour une loi w^2 (diffusion *anormale*). Pour les temps de réverbération, le recouvrement du modèle sur les données expérimentales correspond à des valeurs du coefficient d'accommodation comprises entre 0.6 et 0.9. Cependant, à l'inverse de la loi en w, toute la gamme de fréquence n'est pas couverte par cette loi, en particulier pour les positions du récepteur situées entre 5 et 20 m de la source. Pour l'atténuation sonore, le recouvrement correspond aux valeurs du coefficient d'accommodation comprises entre 0.3 et 0.7, donc sur une plage de variation différente de celle obtenue pour les temps de réverbération. Ce résultat suggère que cette loi n'aurait pas de réalité physique.

4.5 Mise en forme numérique

4.5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, notre travail s'est axé sur des développements mathématiques permettant de déterminer les coefficients de diffusion et d'échange dans une rue non absorbante. Le modèle a largement été validé par des simulations numériques et par des données expérimentales dans de nombreuses configurations de largeur/hauteur de rue et de condition aux limites sur les façades. Même si le modèle n'intègre pas encore tous les phénomènes physiques présents lors la propagation du son en milieu urbain (*cf.* §4.6), nos développements mathématiques basés sur le modèle de transport de particules semblent montrer que le problème pourra toujours se ramener à des équations différentielles qui pourront prendre différentes formes : une équation de transport (*cf.* §4.2.2.3), une équation de diffusion (*cf.* §4.4.1 et §4.4.2) ou tout autre forme (*cf.* §4.6). Par ailleurs, quand la géométrie du milieu de propagation devient complexe (ce qui est le cas en pratique : rue avec des façades non parallèles et de hauteurs différentes, conditions de réflexion différentes au sein d'une même rue, présence d'intersections, etc.), et intégrant

14. C'est une hypothèse assez forte, mais nécessaire faute d'information suffisante sur la forme de réflexion réelle des façades de la rue Kervégan.

15. Il s'agit d'une diminution relative et non absolue, une normalisation par rapport à une distance de référence étant réalisée.

une multitude de sources, la résolution analytique de ces équations devient difficile. Dans ces conditions, la résolution numérique du problème semble être la solution la plus pratique. Dans le cadre de notre problème de transport de particules, cette approche numérique peut être envisagée de deux façons : soit en simulant le phénomène de propagation des particules sonores dans le milieu, tel que nous l'avons proposé avec le code SPPS, soit en résolvant numériquement les équations du modèle.

Concernant la première solution, l'usage du code SPPS est limité par les temps de calcul importants, une géométrie unique (parallélépipède rectangle) et le nombre de lois de réflexion (une seule par surface). Sa généralisation à une géométrie « urbaine » semble difficile pour des raisons purement numériques[16]. Concernant la seconde solution, deux possibilités se sont offertes à nous : soit la résolution numérique de l'équation de transport, soit la résolution de l'équation de diffusion. La complexité des conditions aux limites rend la première approche extrêmement difficile. C'est donc la seconde solution que nous avons choisi.

Un travail préliminaire a permis de valider la mise en forme numérique du modèle de diffusion dans un cas simple [193]. Un second travail, entrepris en collaboration avec le Laboratoire d'Étude des Phénomènes de Transfert Appliqués au Bâtiment (Université de La Rochelle), a permis de généraliser ce travail à des milieux de propagation plus complexes, que ce soit en acoustique urbaine ou en acoustique des salles. Dans cette partie, nous présentons uniquement le principe de l'approche, ainsi que des applications à des configurations urbaines [39]. Le détail et des applications en acoustique des salles seront présentées dans le chapitre 5.

4.5.2 Principe de l'approche numérique

4.5.2.1 Logiciel COMSOL Multiphysics™

Dans cette mise en forme numérique, nous avons choisi d'utiliser un environnement logiciel existant, appelé COMSOL Multiphysics™ (anciennement appelé FEMLAB®). Le développement d'un code spécifique pourra être envisagé plus tard. Ce logiciel est « un environnement interactif pour la modélisation d'applications industrielles et scientifiques reposant sur les Équations aux Dérivées Partielles (EDP), équations fondamentales pour la description de très nombreux phénomènes physiques »[17]. Son utilisation est basée sur un ensemble d'équations mathématiques (EDP), présentées formellement, à la différence des logiciels courants, reposant en général sur une unique équation différentielle adaptée à l'application envisagée. Par ailleurs, ce logiciel permet de modéliser et de résoudre des problèmes combinant plusieurs modèles (*i.e.* plusieurs équations différentielles différentes). Bien que doté d'une interface graphique, le logiciel permet de sauvegarder le problème créé sous forme d'un script, qui peut ensuite être modifié et relancé automatiquement.

D'un point de vue pratique, la résolution d'un problème se fait en respectant la procédure suivante :

- Définition du modèle (`Model Navigator`) : choix du nombre de dimensions (1D, 2D, 3D) et de la nature du problème (choix d'une équation ou d'un modèle physique) ;
- Mise en place de la géométrie du problème (`Draw`), grâce à des outils de CAO intégrés au logiciel ;
- Définition des conditions aux limites (`Boundary Settings`), sous forme mathématique ;
- Définition des équations aux dérivées partielles (`Subdomain Settings`) du problème ;
- Maillage (`Mesh`) : choix du type et de la finesse du maillage ;
- Résolution (`Solve`) ;
- Affichage et sauvegarde des résultats.

16. Le développement du code SPPS pour des problèmes d'acoustique des salles est toutefois envisagé.
17. Source : `http://www.comsol.fr/`.

4.5.2.2 Mise en forme du modèle de transport dans le logiciel

Dans un premier temps, nous avons modélisé une rue étroite conformément au modèle asymptotique[18] en résolvant l'équation de diffusion en 2D dans un plan carré avec une source circulaire, le champ sonore dans la rue étant supposé uniforme sur une ligne transversale.

Néanmoins, ce mode de représentation en 2D (plans parallèles avec une source au centre) est assez loin de la réalité d'une rue (rue en « U » en 3D, avec un sol réel et des façades de dimensions finies). Par ailleurs, l'application du modèle 2D à un ensemble de rues avec des intersections pose également problème, puisqu'il faudrait simuler un ensemble de plans 2D s'intersectant, ce qui ne semble pas possible avec ce logiciel[19]. Pour des raisons pratiques, nous nous sommes donc intéressés à l'extension de cette approche en 3D, c'est-à-dire en appliquant le modèle de diffusion en 3D pour une « vraie rue » avec une source placée au sol. Cette extension semble acceptable à condition que la diffusion suivant tout axe transversal garantisse une quasi-uniformité du champ sonore. La source sonore initialement placée au centre d'un plan 2D, doit également pouvoir être ramenée au sol dans une simulation en 3D. En d'autres termes, il a été nécessaire de vérifier que l'opération inverse de notre approche asymptotique, (3D vers 2D, *cf.* §4.3.2) qui consiste maintenant à passer de l'approche 2D à l'approche 3D est possible, mais numériquement, sans s'écarter des résultats de notre approche théorique.

Pour effectuer ce passage 2D vers 3D, deux points ont dû être vérifiés : la prise en compte réelle d'une source sur le sol (au lieu d'avoir une source entre deux plans) et l'effet de la diffusion « supplémentaire » suivant l'axe transversal de la rue. Différentes simulations 3D ont ainsi été réalisées et comparées à notre approche de référence définie par la simulation 2D d'un plan rectangulaire, avec une longueur de 100 m, une hauteur de 200 m, et une largeur égale à 4 ou 10 m et avec une source en son centre[20]. Cette référence est notée R-C (pour *Rectangle-Cercle*, figure 4.17 (a)).

Pour étudier la prise en compte du sol, nous avons considéré une configuration formée par un plan (figure 4.17(d)), définie par un coefficient d'échange nul à la base (sol parfaitement réfléchissant) et des coefficients d'échange sur les trois autres cotés. Dans cette configuration la source omnidirectionnelle est modélisée en extrudant une partie du sol par un cercle. Cette configuration est notée R-C-EXT (pour *Rectangle-Cercle Extrudé*). Cette extrusion est obligatoire pour avoir une source qui rayonne complètement dans la rue. Pour étudier le passage en trois dimensions, nous avons simplement « étiré » les configurations R-C et R-C-EXT suivant l'axe z (suivant la largeur de la rue) pour former les configurations P-C (*Pavé-Cylindre*, figure 4.17 (b)) et P-C-EXT (*Pavé-Cylindre Extrudé*, figure 4.17(e)). Comme attendu, cette transformation 2D en 3D, transforme la source circulaire en source cylindrique. Pour ces configurations, le sol et les parois latérales sont supposés parfaitement réfléchissants ($q = h = 0$), tandis que les ouvertures sont caractérisées par un coefficient $q = h$ non-nul, défini par la loi de réflexion choisie. Par ailleurs afin de pouvoir simuler des configurations plus réalistes, nous avons également étudié le remplacement d'une source cylindrique par une source sphérique. Ces configurations sont présentées à la figure 4.17 pour le cas P-S (*Pavé-Sphère*, figure 4.17 (c)) et P-S-EXT (*Pavé-Sphère Extrudée*, figure 4.17 (f)).

Les simulations numériques ont été réalisées en considérant plusieurs lois de réflexion en w^n sur les parois et pour deux largeurs de rue (4 et 10 m). Les coefficients de diffusion et d'échange ont donc été

18. Rappel : l'approche asymptotique pour une rue étroite, initialement en 3D, aboutit à la résolution d'une équation de diffusion dans le plan médian de la rue (en 2D), tandis que le champ sonore est supposé uniforme dans l'axe transversal de la rue. Par ailleurs, la solution de l'équation de diffusion s'applique soit en milieu infini (*i.e.* la rue est supposée de longueur et de hauteur infinies), soit de dimension finie. Dans ce dernier cas, un coefficient d'échange est pris en comte dans les conditions aux limites de l'équation de diffusion, aux deux extrémités et au niveau du toit, pour prendre en comte l'absorption par les ouvertures.

19. Toutefois, dans le cadre du développement d'un code spécifique, l'approche 2D pourrait permettre de calculer le champ sonore à l'échelle d'une ville, en ne calculant que le champ sonore dans l'axe de la rue. Le problème se ramène alors simplement à la résolution d'une équation de diffusion pour un ensemble de lignes reliées entre-elles, symbolisant les intersections, d'où un gain de temps indéniable par rapport à une approche 3D.

20. De telles dimensions ne sont pas réalistes en milieu urbain, mais nous cherchons dans un premier temps à tester notre modèle, où la largeur de la rue est très petite devant sa hauteur et sa longueur, conformément à notre approche.

calculés pour chacun des cas à partir des formules analytiques des sections 4.4.1 et 4.4.2, puis appliqués dans les conditions aux limites du modèle numérique FEMLAB®.

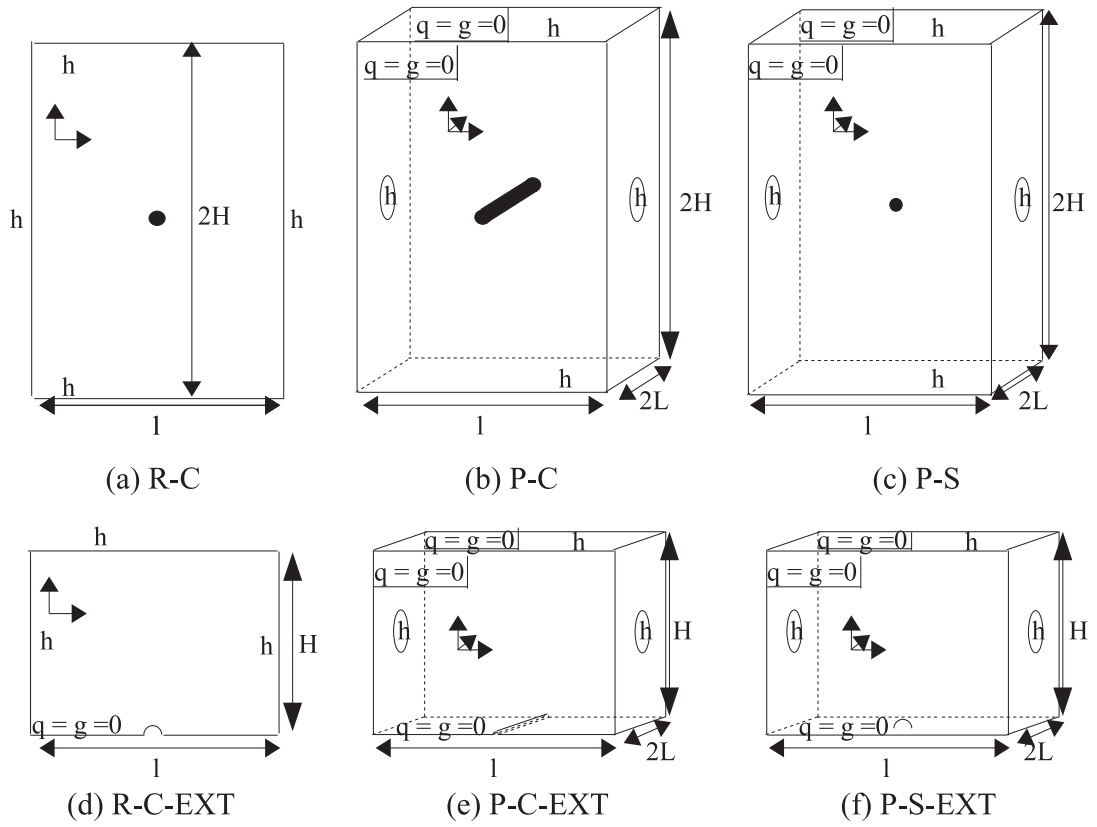


FIG. 4.17 — *Modélisation du milieu de propagation : (a) R-C ; (b) P-C ; (c) P-S ; (d) R-C-EXT ; (e) P-C-EXT ; (f) P-S-EXT. D'après [39].*

Test en régime stationnaire Des simulations numériques ont été réalisées en régime stationnaire pour un grand nombre de configurations de largeur et de hauteur de rue, et pour plusieurs conditions aux limites (plusieurs valeurs du coefficient d'accommodation, et plusieurs lois de réflexion en w^n). Les courbes de niveaux sonores (en dB) pour chaque configuration de test ont été normalisées par rapport au niveau maximum. La figure 4.18 présente un exemple de résultat pour une rue de 4 m de largeur. L'abscisse de la figure correspond à l'axe longitudinal passant par le centre de la source (de 0 à 100 m, la source étant située à 50 m). Cette figure montre en particulier un très bon accord entre les configurations R-C-EXT, P-C et P-C-EXT avec la référence R-C.

La courbe correspondant à la configuration P-S (en bleu ciel) est néanmoins décalée par rapport aux autres courbes, du fait d'un comportement particulier à proximité de la source, et de la normalisation entreprise. En s'éloignant de la source, le champ perd son caractère « sphérique » au profit d'un caractère « cylindrique ». En augmentant le nombre de sources sphériques identiques sur le même axe transversal (configuration notée P-3S par exemple, avec 3 sources), les résultats convergent vers ceux de la configuration P-C.

La figure 4.18 met également en évidence un décalage de la courbe P-S-EXT (en jaune), également causé par un comportement particulier autour de la source, lié à la modélisation de la source sous forme d'un ensemble de surfaces planes, et non d'une sphère. Néanmoins, à quelques mètres de la source, le comportement est identique en régime stationnaire, quelles que soient les configurations testées.

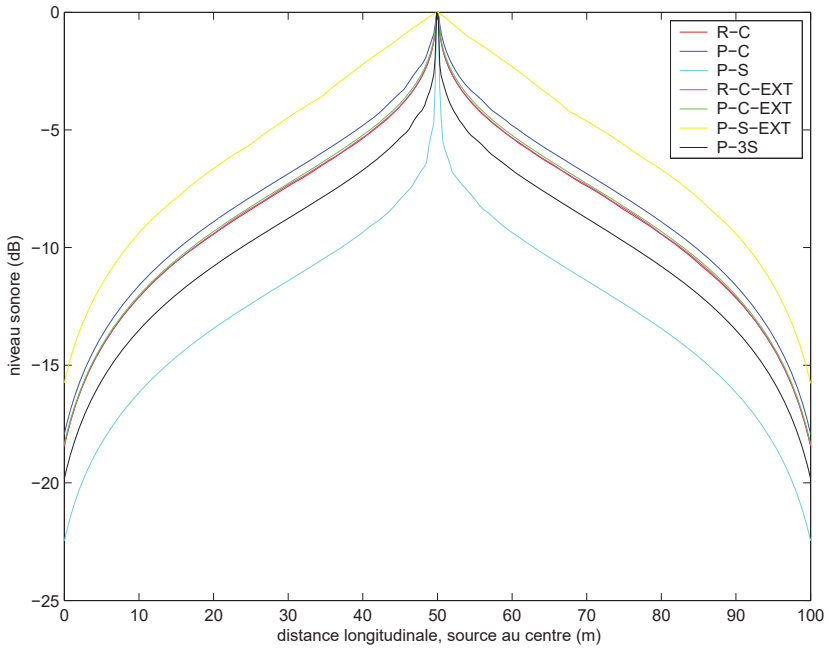


FIG. 4.18 — *Niveaux sonores obtenus par le logiciel de calcul, pour les configurations de test ($n = 2, d = 0, 2L = 4$ m). D'après [39].*

Par ailleurs, les résultats numériques (non présentés ici) montrent également que les amplitudes sur des axes transversaux, mesurées à des distances de la source de 10 et 30 m (à la même hauteur que la source) pour les 4 configurations en 3 dimensions (P-C, P-S, P-C-EXT et P-S-EXT), sont presque uniformes (les différences ne sont que de quelques dixièmes de dB). Ceci prouve que malgré une diffusion suivant l'axe transversal z, l'uniformité du champ sonore est quasiment vérifiée, comme le suppose le modèle analytique.

Test en régime variable En régime variable, seules les trois configurations C-C, P-S et P-C peuvent être testées. Il est en effet impossible de créer une ligne ou une surface émissive impulsionnelle dans le logiciel. Les résultats de ces trois configurations peuvent être comparées aux solutions analytiques infinie et finie de l'équation de diffusion ainsi qu'à la simulation SPPS. Là encore, plusieurs dimensions de rues et plusieurs conditions de réflexion ont été testées.

Sur les figures qui suivent, faute d'avoir normalisé l'émission de la source sonore dans les configurations R-C, P-S et P-C, les résultats numériques ne sont ni normalisés entre eux, ni normalisés avec les solutions analytiques et les résultats SPPS. Seules les solutions finie, infinie et les résultats de SPPS sont normalisés entre eux. Néanmoins, ce problème est limité dans la mesure où nous nous intéressons, dans un premier temps, à l'allure des courbes et non à leur amplitude. Pour pouvoir comparer simultanément l'ensemble des courbes, nous avons donc introduit un décalage manuel en amplitude.

Les figures 4.19 et 4.20 présentent des résultats en régime variable pour différentes configurations spécifiées en légende, à 15 m de la source. Ces figures montrent un bon accord entre les différentes configurations, notamment en ce qui concerne la configuration P-S. Au cours de ces simulations en régime dynamique, nous avons également vérifié que les amplitudes sur des axes transversaux sont quasiment uniformes, tel que le suggère le modèle analytique.

Conclusion L'ensemble des tests que nous venons de présenter montre très l'équivalence entre le modèle 2D et les modèles 3D, et notamment le modèle P-S (sauf à proximité de la source, peut-être). Ce

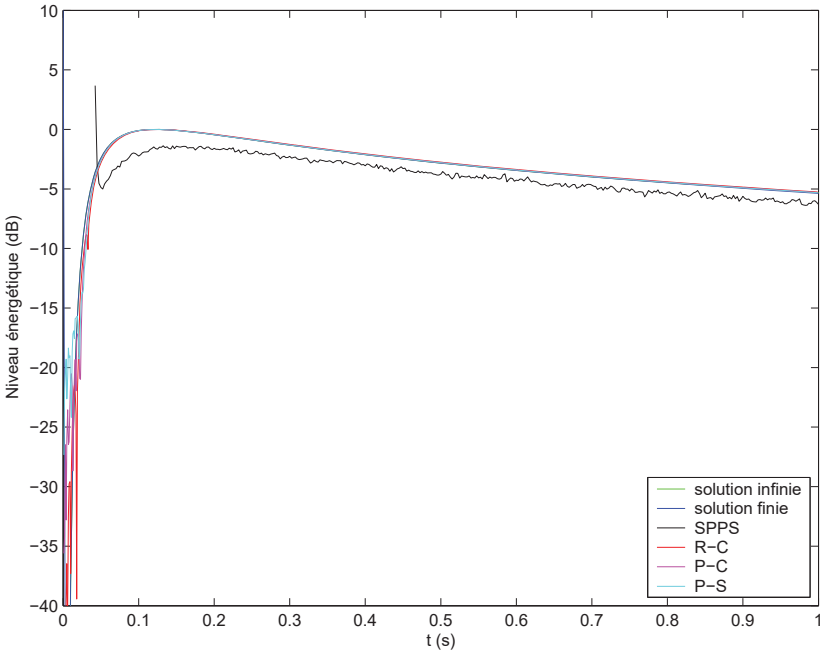


FIG. 4.19 — *Comparaison des solutions analytiques, de la simulation SPPS et des* 3 *configurations numériques pour* $n = 2$, $d = 0$, $2L = 4$ *m, à* 15 *m de la source. D'après [39].*

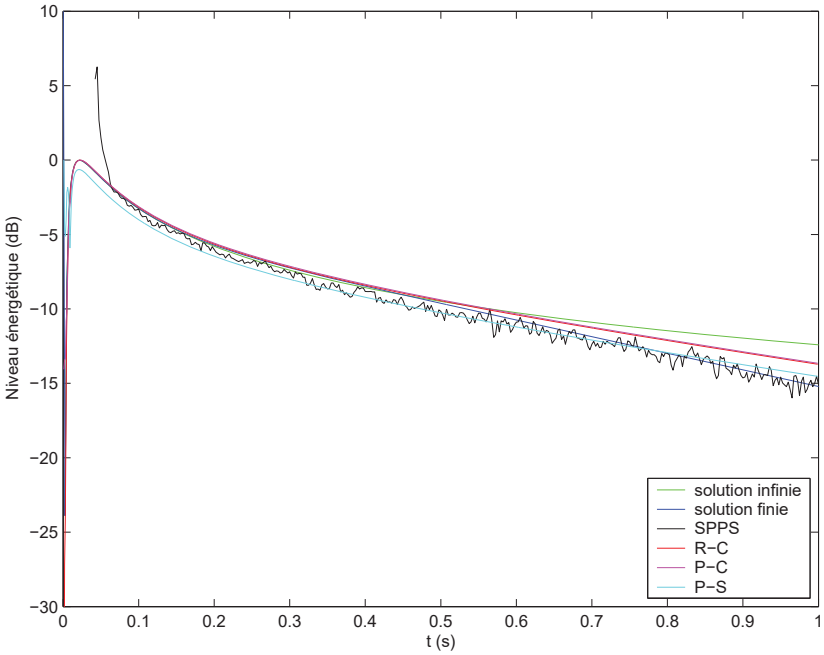


FIG. 4.20 — *Comparaison des solutions analytiques, de la simulation SPPS et des* 3 *configurations numériques pour* $n = 4$, $d = 0.7$, $2L = 10$ *m, à* 15 *m de la source. D'après [39].*

résultat montre que, dans un souci de réalisme, il est tout à fait possible de simuler une configuration urbaine telle qu'elle est en pratique (3D, avec source sphérique en présence d'un sol et de façades de dimensions finies) sans passer par une approche 2D et sans s'écarter du domaine de validité fixé par notre approche.

Par ailleurs, les simulations numériques 2D et 3D ont également été comparées avec succès aux solutions analytiques du modèle de diffusion et aux simulations numériques SPPS.

4.5.3 Application à des géométries urbaines réalistes

4.5.3.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons quelques exemples de simulations numériques pour des géométries urbaines réalistes, que nous avons modélisées de façon assez simple avec ce logiciel. Nous envisagerons ainsi le cas d'une rue en « U » simple (*cf.* §4.5.3.2), d'une rue en « U » de section variable (*cf.* §4.5.3.3), d'une intersection de 2 rues en « U » (*cf.* §4.5.3.4) et enfin de deux intersections de rues en « U » (*cf.* §4.5.3.5). Les propriétés acoustiques et la géométrie de ces configurations urbaines ont été fixées arbitrairement.

Hypothèses préliminaires Cette application numérique repose néanmoins sur un certain nombre d'hypothèses :

- Nous généralisons le modèle de diffusion obtenu pour une rue étroite, à des rues en « U » de taille quelconque ;
- Nous supposons également que la diffusion s'applique à un ensemble de rues, chaque rue étant caractérisée par des coefficients de diffusion et d'échange propres. Le contact entre les deux rues est alors supposé parfait : l'interface est modélisée par une condition de continuité du flux et de l'énergie. Une rue de section variable, dont les façades ne sont pas homogènes sur la longueur de la rue, peut par exemple être découpée en plusieurs tronçons, chaque tronçon étant caractérisé par un coefficient de diffusion et un coefficient d'échange.

Normalisation absolue des résultats numériques Pour permettre une comparaison des résultats issus des simulations numériques avec des données expérimentales (ou provenant de tout autre logiciel de prévision acoustique) en termes de niveau absolu et non plus seulement en termes de décroissance normalisée, nous utilisons la même procédure que celle décrite dans [234] dans le cas d'une source sphérique :

- pour modéliser une source sphérique de volume V_s et de puissance W_s, la puissance w_s attribuée à la source dans FEMLAB® doit être égale à :

$$w_s = \frac{W_s}{V_s}. \tag{4.60}$$

- le résultat du calcul numérique donne alors directement une densité d'énergie sonore notée w_d, qui permet ensuite de calculer le niveau de pression acoustique par la relation suivante :

$$L_P(\mathbf{r}) = 10 \log_{10} \left(\rho c^2 \frac{w_d(\mathbf{r}, t)}{P_{ref}^2} \right), \tag{4.61}$$

où ρ est la densité de l'air (égale à 1.205 kg.m^{-3}), c la célérité du son dans l'air et P_{ref} la pression de référence (égale à $2 \cdot 10^{-5}$ Pa).

- Le champ de pression total est alors égale à la somme du champ direct et du champ diffus :

$$L_P(\mathbf{r}) = 10 \log_{10} \left(\frac{\rho c \left[\frac{W_s}{4\pi r^2} + w_d(\mathbf{r})\, c \right]}{P_{ref}^2} \right). \tag{4.62}$$

4.5.3.2 Rue en « U »

L'objectif de ce premier exemple est de montrer le comportement du modèle de diffusion pour une rue en « U » classique, en fonction du coefficient de diffusion et du coefficient d'échange. Considérons une rue en « U » de largeur 4 m, de longueur et de hauteur 15 m, composée d'un seul tronçon. La source sphérique, de 0.1 m de rayon et de puissance 80 dB, est placée à 1 m au-dessus du sol, dans l'axe de la rue, à 2 m de la première extrémité, et émet en régime permanent.

La figure 4.21 présente les décroissances longitudinales en dB, sur l'axe longitudinal médian de cette rue en « U » pour les couples de valeurs de coefficients de diffusion et d'échange (K, h) (K en $m^2.s^{-1}$ et h en $m.s^{-1}$) égaux à (180, 300) en bleu, à (180, 115) en cyan et à (1800, 115) en magenta. Á coefficient de diffusion égal, les courbes bleue (180, 300) et cyan (180, 115) se superposent parfaitement au niveau de la source (en $x = 2$ m). Du fait d'un coefficient d'échange plus important (l'absorption est plus importante aux extrémités), l'amplitude de la courbe bleue (180, 300) décroît plus rapidement de part et d'autre de la source que la courbe cyan (180, 115). En revanche, dans le cas de la courbe magenta (1800, 115), le niveau sonore au niveau de la source est plus faible, pour une puissance de source pourtant identique, du fait d'une diffusion plus importante. En effet, dans le cas d'un milieu moins diffusant (180, 115), l'énergie sonore va « rester plus longtemps » à proximité de la source, ce qui contribue à augmenter l'énergie au niveau de la source. Si le coefficient de diffusion est grand, la diffusion va homogénéiser l'énergie dans la rue. Ce phénomène se traduit d'une part par un pic d'énergie au niveau de la source qui est moins marqué et, d'autre part, par des variations d'énergie plus faibles dans la rue : le niveau de la courbe magenta (1800, 115) ne décroît donc que très faiblement.

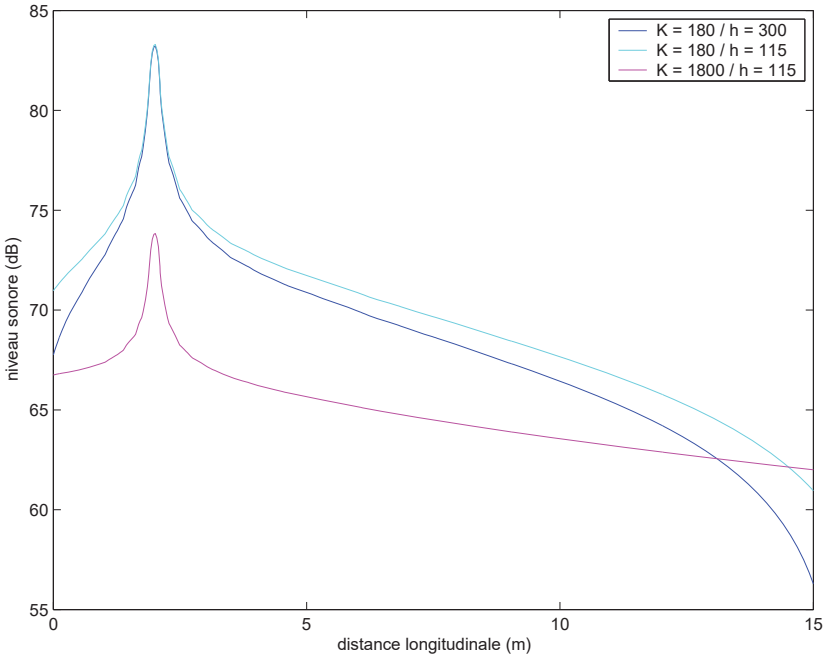


Fig. 4.21 — *Rue en « U » : décroissances longitudinales, passant par la source, à une hauteur de* 1 *m, pour* 3 *couples de valeur (K, h). D'après [39].*

4.5.3.3 Rue en « U » à section variable

Dans cet exemple, nous considérons une rue en « U » composée de trois tronçons placés bout à bout, de longueur égale (15 m) et de hauteur égale (20 m). La largeur des deux tronçons extérieurs est de 5 m alors que celle du tronçon intérieur est de 3 m (figure 4.22). Les deux tronçons extérieurs ont un

coefficient de diffusion de 1700 $m^2.s^{-1}$ et un coefficient d'échange de 144.30 $m.s^{-1}$ ($n = 2$ et $d = 0.5$), alors que le tronçon intérieur a un coefficient de diffusion de 136 $m^2.s^{-1}$ et un coefficient d'échange de 115.44 $m.s^{-1}$. Ce tronçon intérieur est donc moins diffusif que les deux tronçons extérieurs. La source sphérique, en régime permanent, de puissance 80 dB et de 0.1 m de rayon, est placée à 1 m au-dessus du sol, à 2 m de l'extrémité du premier tronçon et au centre des façades.

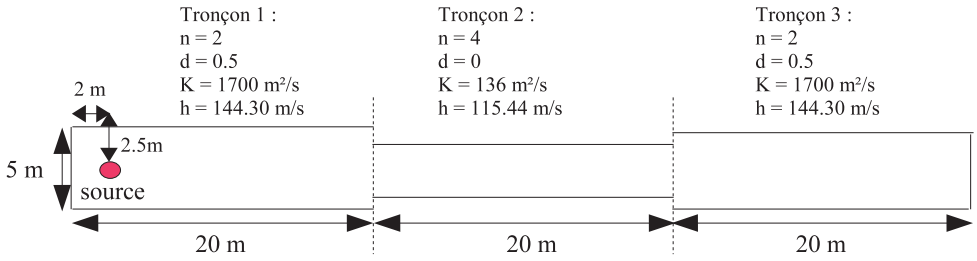


FIG. 4.22 — *Rue en « U » composée de deux tronçons de mêmes dimensions séparés par un troisième, de section inférieure, et de paramètres acoustiques différents (vue de dessus). D'après [39].*

La figure 4.23 présentent les résultats de la simulation respectivement pour le plan de coupe horizontal passant par la source. Plus précisément, la figure 4.24 présente l'atténuation sonore le long de la rue (en rouge sur la figure 4.22) à la hauteur de la source (1 m au-dessus du sol). Nous observons une forte décroissance dans le deuxième tronçon, lorsque la section est la plus étroite, du fait d'un coefficient de diffusion plus faible.

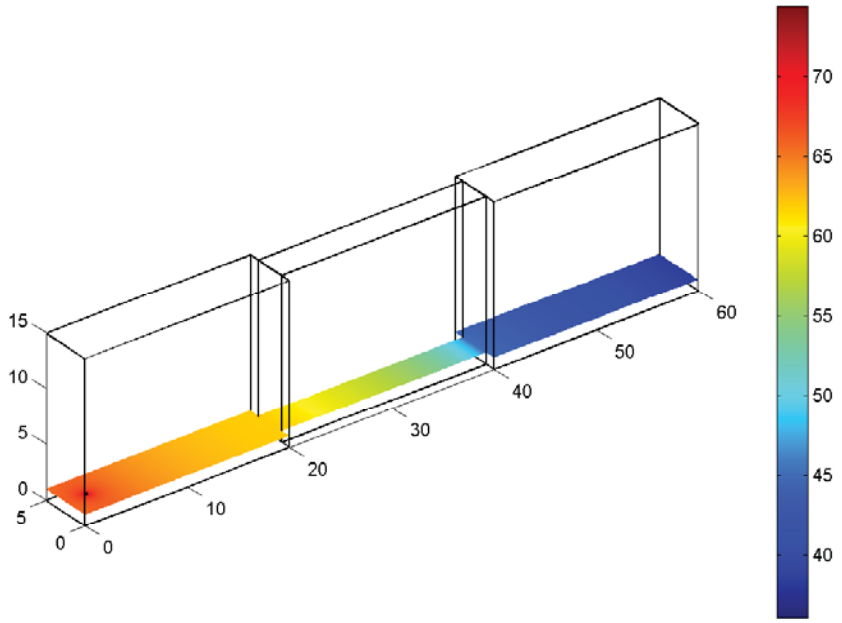


FIG. 4.23 — *Cartographie sonore dans la rue en « U » à section variable (coupe horizontale). L'échelle est en dB. D'après [39].*

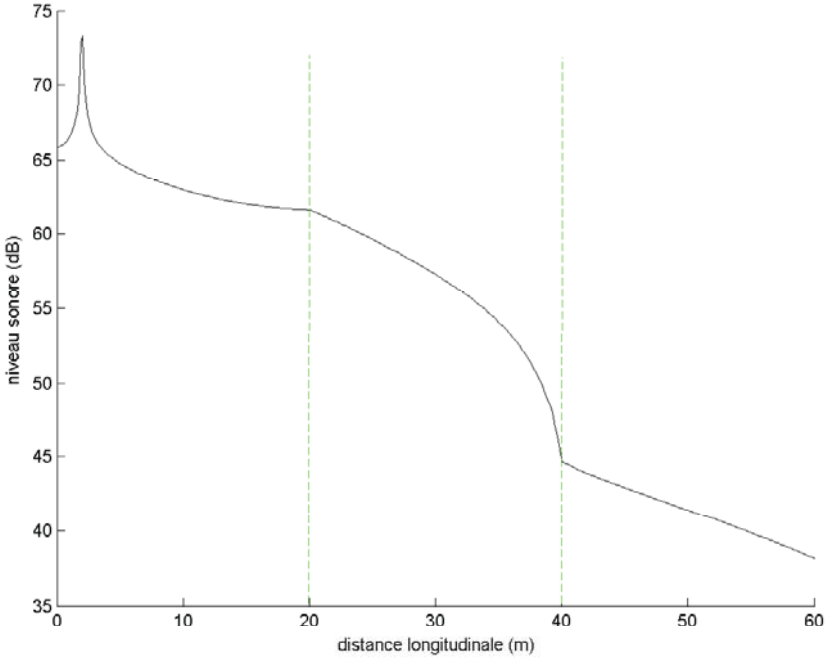


FIG. 4.24 — *Décroissance sonore d'une intersection de deux rues en « U » le long de la rue. L'échelle est en dB. D'après [39].*

4.5.3.4 Intersection de deux rues en « U »

Dans ce nouvel exemple, nous considérons une intersection composée de trois tronçons de rue de largeur 6 m et de hauteur 15 m. Les dimensions et caractéristiques acoustiques des trois tronçons sont données sur la figure 4.25. Le tronçon central présente un caractère plus diffusif ($K = 3858.33$ m^2.s^{-1}) que celui des deux autres ($K = 259.72$ m^2.s^{-1}), du fait de la présence plus importante de réflexions spéculaires ($d = 0.7$). La source sphérique de 0.1 m de rayon et de puissance 80 dB, est placée à 1 m au-dessus du sol, dans le premier tronçon, à égale distance des deux façades et à 2 m du début de la rue.

La figure 4.26 présente les résultats de la simulation en régime permanent respectivement pour le plan de coupe horizontal passant par la source.

La figure 4.27 présente les décroissances sonores le long des axes 1 et 2 (définis à la figure 4.25), à la hauteur de la source ($z = 1$ m). Comme attendu, la décroissance le long de l'axe 1 (courbe noire) présente un palier entre 15 m et 21 m, correspondant au passage dans le second tronçon, plus diffusif. A l'inverse, la décroissance le long de l'axe 2 (courbe bleue, épaisse) montre que l'atténuation sonore est moins rapide et ne semble pas trop perturbée par les premier et troisième tronçons.

4.5.3.5 Intersections de trois rues en « U »

Source sphérique en régime stationnaire Considérons maintenant deux intersections de trois rues en « U » constituées par quatre tronçons de rue de largeur 5 m et de hauteur 15 m. Les dimensions et caractéristiques acoustiques des quatre tronçons sont données à la figure 4.28. Les deuxième et quatrième tronçons, perpendiculaires aux premier et troisième tronçons, présentent un caractère plus diffusif que celui des deux autres. La source sphérique, de 0.1 m de rayon et de puissance 80 dB, est placée à 1 m au-dessus du sol, dans le premier tronçon, à égale distance des deux façades et à 2 m du début de la rue. Les points bleus R1 à R4 précisent la position des points d'observation. La source cylindrique (rouge), représentée sur la figure 4.28, sera utilisée ultérieurement.

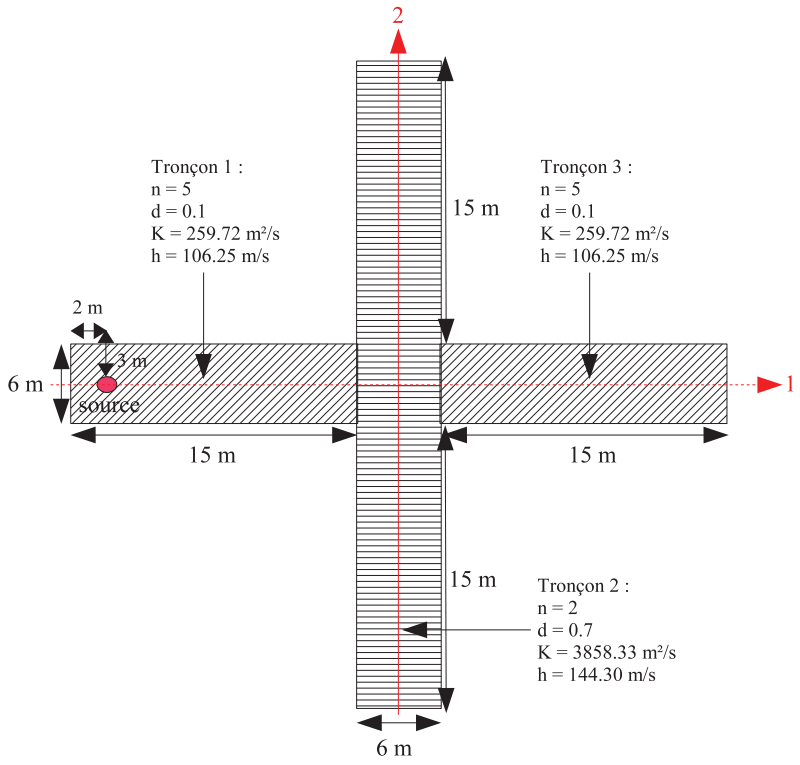


FIG. 4.25 — *Intersection de deux rues en « U » : vue de dessus. D'après [39].*

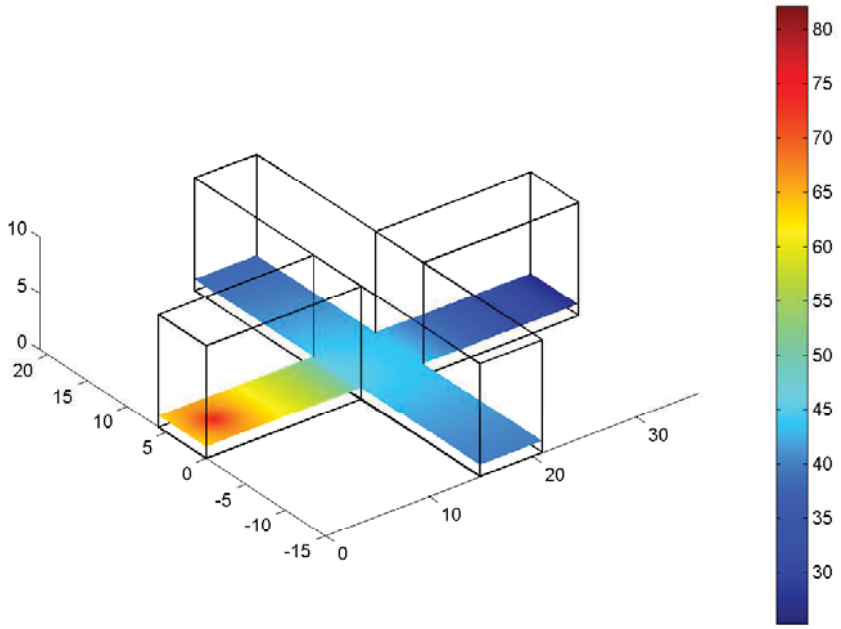


FIG. 4.26 — *Cartographie sonore en présence d'une intersection de deux rues en « U » (coupe horizontale). L'échelle est en dB. La géométrie et les propriétés acoustiques des deux rues sont présentées à la figure 4.25. D'après [39].*

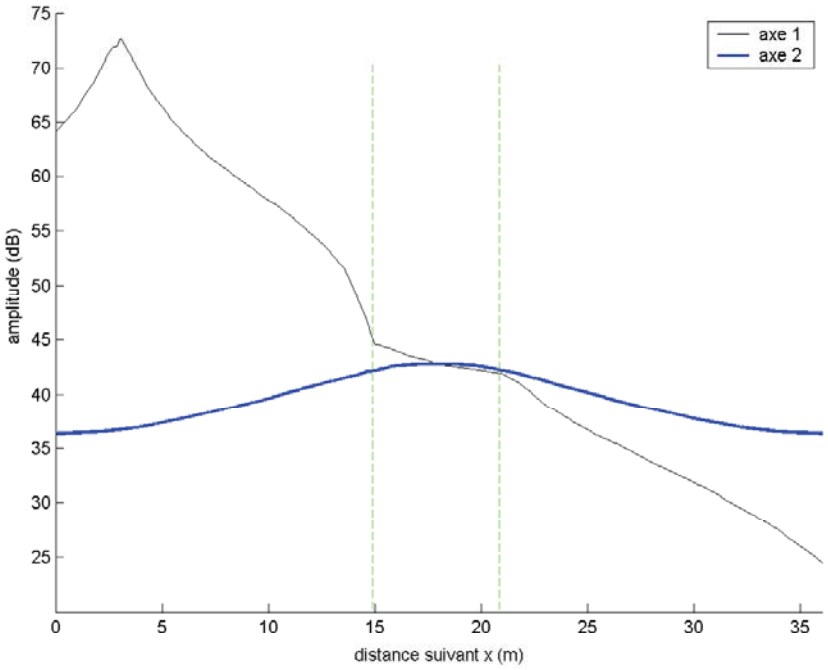


FIG. 4.27 — *Décroissances sonores en présence d'une intersection de deux rues en « U », le long des axes* 1 *et* 2 *présentés à la figure 4.25, à* $z = 1$. *L'échelle est en dB. D'après [39].*

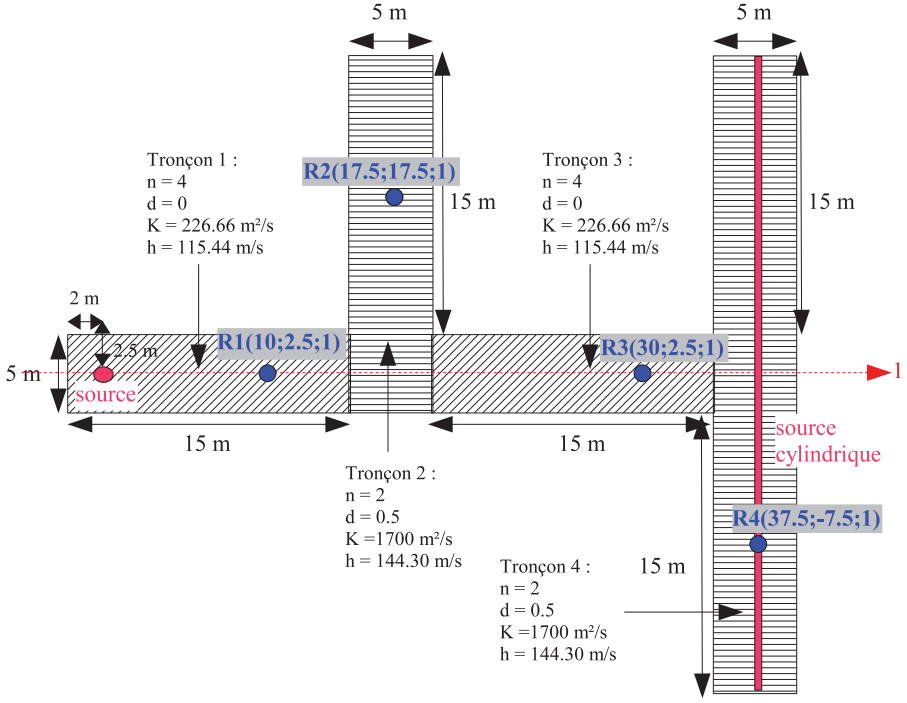


FIG. 4.28 — *Intersections de trois rues en « U » : vue de dessus. D'après [39].*

La figure 4.29 présente les résultats de la simulation en régime permanent pour le plan de coupe horizontal passant par la source. Plus précisément, la figure 4.30 illustre l'atténuation le long de l'axe 1 défini à la figure 4.28, à la hauteur de la source (1 m), et présente les mêmes conclusions que pour les exemples précédents. A chaque passage dans un tronçon de rue présentant un coefficient de diffusion différent, correspond un changement de pente de l'atténuation sonore.

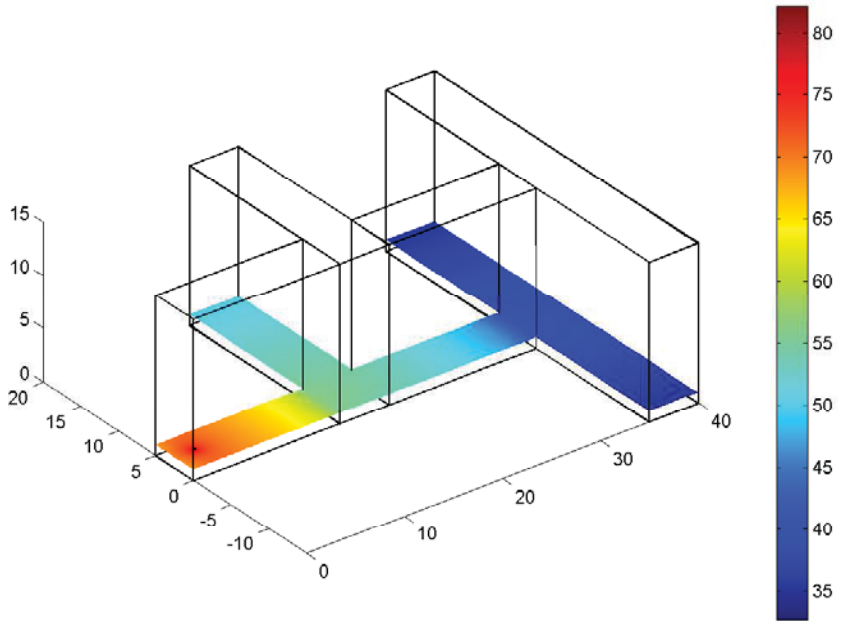


FIG. 4.29 — *Cartographie sonore en présence de deux intersections de rues en « U » (coupe horizontale). L'échelle est en dB. La géométrie et les propriétés acoustiques des rues sont présentées à la figure 4.28. D'après [39].*

Source sphérique en régime impulsionnel La figure 4.31 présente les décroissances d'énergie sonore en dB, dans le cas du régime impulsionnel (la source sphérique a une puissance de 80 dB et n'émet qu'une impulsion à $t = 0$), aux points de réception R1, R2, R3 et R4 (*cf.* figure 4.28). Les temps de réverbération n'ont pas été calculés du fait d'un temps de simulation trop court, néanmoins les courbes de la figure 4.28 indiquent que les décroissances en R1 et R2 sont bien plus rapides que celles obtenues en R3 et R4. Nous retrouvons ainsi un résultat obtenu à la fois expérimentalement [200] et numériquement [117], montrant que le temps de réverbération augmente avec la distance source-récepteur.

Sources sphérique et cylindrique en régime stationnaire Afin d'illustrer la prise en compte d'une source linéique pour modéliser un flux de trafic, nous intégrons dans cet exemple une source cylindrique dans le quatrième tronçon de la rue (figure 4.28), sous la forme d'un cylindre de 0.1 m de rayon, situé au milieu de la rue, à 1 m au-dessus du sol. Par défaut, nous attribuons la même puissance à la source cylindrique et à la source sphérique, les deux sources émettant simultanément en régime stationnaire. La figure 4.32 présente les résultats de la simulation en régime permanent pour le plan de coupe horizontal passant par la source, et met bien en évidence la répartition des sources. Cette procédure peut être généralisée à un nombre quelconque de sources sonores.

4.5.4 Conclusion sur le modèle numérique

Dans ce paragraphe, nous avons montré qu'une mise en forme numérique de notre modèle de transport est facile à mettre en oeuvre. Bien que nous ayons utilisé un logiciel du commerce donné, tout

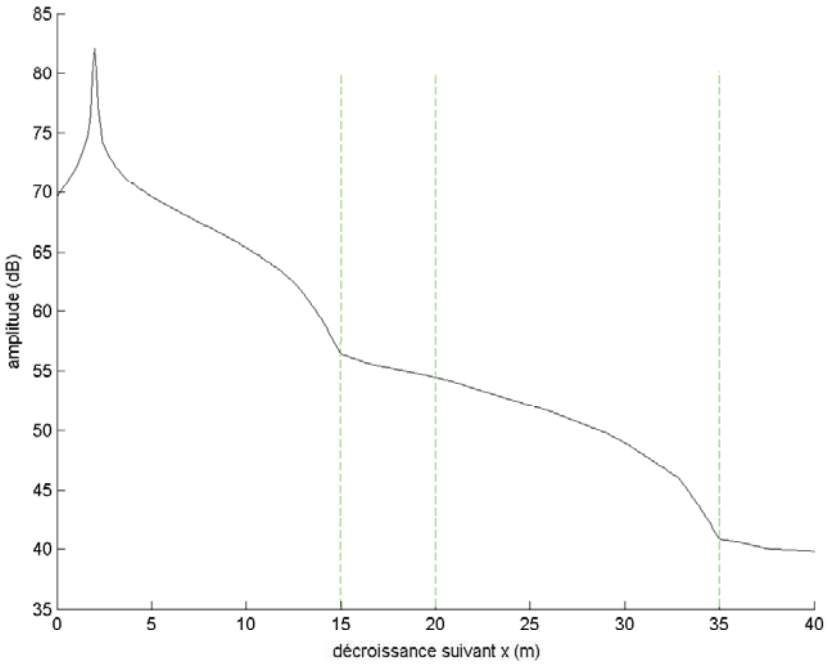


FIG. 4.30 — *Décroissance sonore en présence de deux intersections de rues en « U », le long de l'axe* 1 *(z = 1) présenté à la figure 4.28. L'échelle est en dB. D'après [39].*

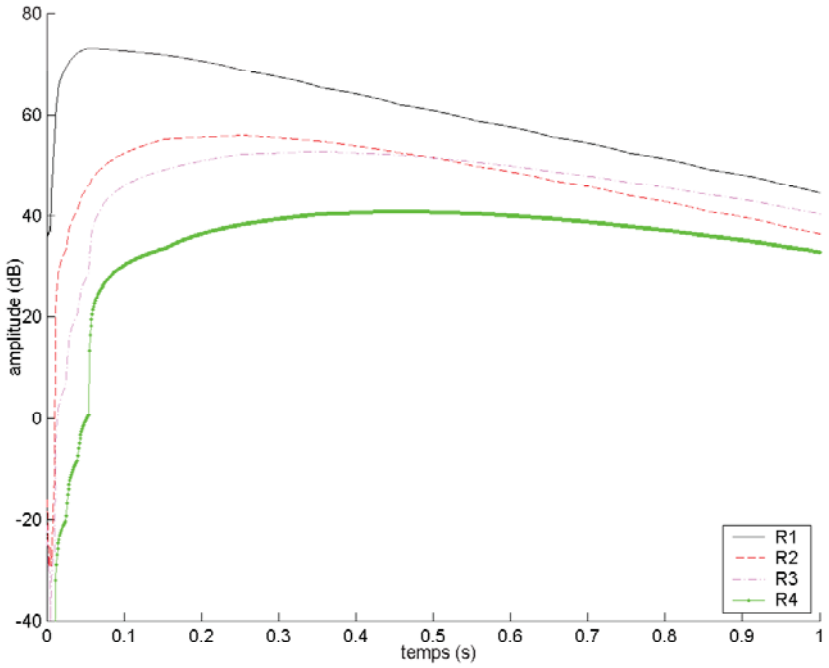


FIG. 4.31 — *Décroissance du niveau sonore aux points R*1 *(*10 *;*2.5 *;*1*), R*2 *(*17.5 *;*17.5 *;*1*), R*3 *(*30 *;*2.5 *;*1*) et R*4 *(*37.5 *;*−7.5 *;*1*) en fonction du temps. L'échelle est en dB. La géométrie et les propriétés acoustiques des rues sont présentées à la figure 4.28. D'après [39].*

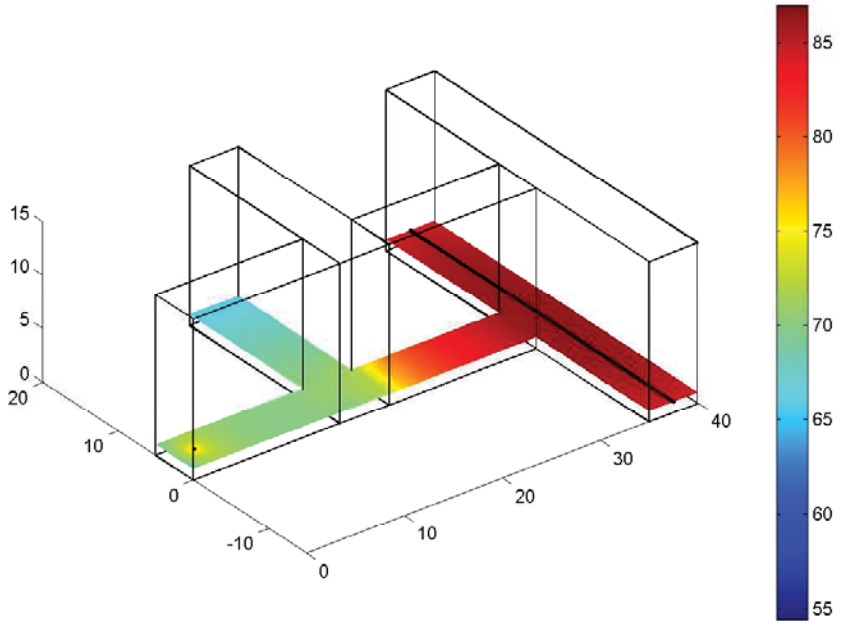


Fig. 4.32 — *Cartographie sonore en présence de deux intersections de rues en « U » (coupe horizontale) en présence de deux sources. L'échelle est en dB. La géométrie et les propriétés acoustiques des rues sont présentées à la figure 4.28. D'après [39].*

logiciel ou code de calcul permettant de résoudre une équation de diffusion, avec des conditions aux limites classiques, intégrant des coefficients d'échange, peut également être utilisé. Le principal intérêt de cette démarche est la rapidité d'exécution des calculs, qui prennent ici quelques secondes à quelques minutes, au lieu de quelques heures avec des logiciels classiques de tracé de rayons.

Pour une utilisation opérationnelle en acoustique urbaine (à opposer à une utilisation « experte »), il pourra toutefois être nécessaire de développer un code de calcul spécifique, intégrant uniquement des aspects acoustiques (un coefficient d'absorption au lieu d'un coefficient d'échange, une puissance réelle de source et non une quantité d'énergie, un calcul du coefficient de diffusion en fonction des conditions aux limites et des dimensions de la rue, etc.).

Toutefois, il conviendra dans l'immédiat de vérifier la validité et les incertitudes associées à ces simulations, notamment en comparant les résultats numériques soit à des modèles classiques (logiciels de rayons sonores), soit, ce qui semble le plus intéressant, à des données expérimentales. Dans ces conditions, le recours à des mesures sur maquettes acoustiques semble le plus à même de valider l'approche pour un grand nombre de configurations urbaines (rues en « U », de section variable, avec intersections, etc.). Enfin, rappelons également que notre approche modélise uniquement un champ sonore issu de multiples réflexions et diffusions sur les parois du domaine. Pour des résultats plus réalistes, il conviendra également de prendre en compte le champ direct et éventuellement les réflexions précoces.

4.6 Conclusion et perspectives sur le modèle de transport

4.6.1 Conclusion

Ce travail a permis de mettre au point un nouveau modèle de propagation de l'énergie sonore en acoustique architecturale. Après une recherche bibliographique sur les modèles existants en acoustique des salles et en acoustique urbaine, l'utilisation du concept de particules sonores s'est avéré être la solution la plus adaptée pour obtenir des solutions analytiques prenant en compte les ouvertures au sein du milieu de propagation et les effets de diffraction sur les parois du domaine. Le fondement du modèle

repose sur l'équivalence entre densité de particules sonores et densité d'énergie sonore. Le problème d'acoustique est ainsi ramené à un problème de dynamique des particules.

La mise en équation du problème a nécessité l'utilisation d'outils mathématiques rencontrés dans la théorie des transports, tels que la fonction de distribution à une particule $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ qui représente la densité locale de particules sonores de vitesse $\mathbf{v}$ au point $\mathbf{x}$ et au temps t. Nous avons ainsi montré que la variation spatiale et temporelle de la densité des particules sonores est régie par une équation de transport analogue à l'équation du flux moléculaire libre. Pour prendre en compte les phénomènes de réflexion spéculaire et de diffraction sur les parois du domaine, nous avons exprimé les conditions aux limites en termes de flux locaux au niveau des surfaces. Ces conditions de flux expriment le flux de particules réfléchies, en fonction de la part du flux de particules incidentes non absorbées, réfléchies pour une part d de manière spéculaire et pour une part $(1-d)$ de manière non spéculaire. Dans ce dernier cas, les effets de diffraction du son par les irrégularités de surface (balcons, moulures, renfoncements de portes et de fenêtres, etc.) sont pris en compte de manière probabiliste à l'aide de lois de réflexion $\mathcal{R}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ qui représentent la probabilité qu'une particule, arrivant sur la paroi avec une vitesse incidente $\mathbf{v}'$, reparte après réflexion, avec une vitesse $\mathbf{v}$.

La prise en compte de l'aspect fréquentiel dans le modèle peut être réalisée en considérant que la forme des lois de réflexion $\mathcal{R}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$, ainsi que les valeurs des coefficients d'absorption α et d'accommodation d, dépendent de la gamme de fréquence envisagée. Le champ sonore total est alors la somme des contributions des solutions analytiques dans chacune des bandes de fréquences considérées, affectées de leurs propres lois de réflexion et de leurs propres coefficients d'accommodation et d'absorption.

Le problème du transport des particules sonores, ainsi posé, n'admettant pas de solutions analytiques exactes, la recherche de solutions s'est portée vers des approches asymptotiques réalisées dans le cas d'un milieu *étroit*, tel qu'une rue. Deux approches ont ainsi pu être envisagées selon la forme des lois de réflexion considérées. Pour des lois de réflexion non rasantes, nous avons utilisé une approche asymptotique qui repose sur l'analyse fonctionnelle. Pour des lois de réflexions rasantes, nous avons opté pour une approche utilisant la théorie des probabilités et notamment l'application du théorème de la limite centrale. Dans les deux cas, nous avons montré que le problème se ramène à la résolution d'une équation de diffusion pour la densité de particules $q(x, y, t)$ dans le plan médian (x, y) parallèle aux parois [21]. L'expression du coefficient de diffusion d'une rue, calculé pour différentes lois de réflexion simples et notamment la loi de Lambert, intègre la géométrie du milieu de propagation à travers sa largeur et la morphologie des façades par l'intermédiaire du coefficient d'accommodation et de la loi de réflexion.

Les solutions analytiques ont été comparées à des résultats de simulations numériques du transport de particules sonores, basées sur des méthodes de Monte Carlo. Afin de prendre en compte la présence des ouvertures aux extrémités du domaine, nous avons également introduit un coefficient d'échange h dans le traitement des conditions aux limites de l'équation de diffusion. Ce coefficient exprime le transfert énergétique entre l'intérieur et l'extérieur du domaine de propagation et dépend de la loi de réflexion considérée. Les simulations numériques ont permis de tester la sensibilité des solutions analytiques à la variation de la géométrie du milieu de propagation et notamment la distance entre les parois. Ces résultats ont montré un excellent comportement du modèle, y compris pour des distances plus « larges » entre les parois du milieu de propagation. Nous avons également comparé les solutions analytiques de l'équation de diffusion à des résultats de mesure obtenus lors d'une campagne expérimentale réalisée dans la rue Kervégan à Nantes, rue relativement étroite et fortement diffractante. Là encore, nous avons observé un bon accord entre le modèle et les courbes expérimentales d'évolution des niveaux sonores et des temps de réverbération.

Plus récemment, nous avons également proposé une mise en forme numérique extrêmement simple du modèle de transport, à partir d'un logiciel du commerce, sans aucune modification. Cette approche numérique a été validée par une série de tests préliminaires et par des comparaisons avec les solutions analytiques du modèle de diffusion et des résultats numériques issues du code SPPS. Sous cette forme, la

21. Il a été démontré que la densité de particules est constante selon l'axe z perpendiculaire aux parois.

répartition de l'énergie sonore et sa décroissance temporelle peuvent être obtenues en quelques minutes, même à l'échelle de plusieurs rues et en prenant en compte simultanément plusieurs sources sonores.

L'ensemble de cette étude montre très l'intérêt du concept de particules sonores qui permet une description mathématique précise et rigoureuse des phénomènes complexes entrant en jeu lors de la propagation du son dans des milieux « diffusants ».

4.6.2 Perspectives

A ce stade de l'étude et dans l'objectif de rendre le modèle complètement opérationnel dans le cadre de l'acoustique urbaine, il reste toutefois encore certains aspects à approfondir et à intégrer :

- **Prise en compte de lois de réflexion réelles** Bien que l'accord entre les résultats analytiques et les données expérimentales soit très satisfaisant, une validation expérimentale rigoureuse du modèle nécessiterait de modéliser de manière précise la forme des lois de réflexion rencontrées dans la pratique. Des recherches ont été menées récemment, soit expérimentalement (mesures sur maquette et *in-situ*), soit analytiquement sur ce sujet, mais elles n'ont pas encore permis de donner une expression mathématique de ces lois [22] (*cf.* chapitre 3). Néanmoins, il est très probable que des lois de réflexion réelles engendreraient une dissymétrie dans la réflexion du son par une paroi, se traduisant sous la forme de lobes de diffraction concentrés principalement autour de la direction de la réflexion spéculaire. Dans cette hypothèse, l'approche asymptotique fondée sur l'analyse fonctionnelle permettrait de prendre en compte ce phénomène [6]. Il semblerait alors que la dissymétrie des conditions aux limites donnent naissance à un phénomène de translation globale du processus de diffusion. Là encore, les solutions analytiques obtenues pourraient être comparées dans un premier temps, à des simulations numériques, puis à des mesures sur maquette ou *in-situ*.
- **Absorption par les parois** Bien que ce travail ne soit pas présenté dans ce document, la prise en compte de l'absorption acoustique au niveau des parois, directement à partir des conditions aux limites de l'équation de transport, a déjà été envisagée pendant les travaux de thèse de S. Colle. Dans un premier temps, il a été montré que le développement asymptotique dans le cadre d'une réflexion non-rasante n'est pas possible en présence d'absorption. Un nouveau développement asymptotique a ainsi été proposé en se basant sur l'introduction d'un nouveau paramètre d'échelle (*cf.* [39, Chapitre 6]). Ce nouveau développement aboutit à une équation différentielle plus complexe, voire à une équation de diffusion, avec un coefficient de diffusion qui doit être estimé numériquement pour le moment. Ce travail est toujours en cours actuellement.
- **Prise en compte des effets atmosphériques et micro-météorologiques** A l'image des problèmes de propagation du son à longue distance [77], l'évolution du champ sonore en milieu urbain est fortement liée aux effets micro-météorologiques (vent, gradients de température) et aux effets d'atténuation atmosphérique. Ce dernier cas pourrait être traité dans notre modèle, par l'introduction d'un terme

  $$\sigma\, f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\,, \tag{4.63}$$

  dans l'équation de transport, où σ représente la probabilité, par unité de temps, qu'une particule soit absorbée durant son trajet. D'autre part, le vent et les gradients de température, représentant des éléments perturbateurs sur la vitesse des phonons, pourraient être pris en compte en introduisant respectivement dans le modèle, un terme agissant comme une force de transport,

  $$F \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\,, \tag{4.64}$$

  et un terme résultant d'un profil de vitesse dans le milieu de propagation,

  $$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\,. \tag{4.65}$$

22. C'est la raison pour laquelle, nous avons décidé de débuter notre travail avec des lois simples et axisymétriques, de la forme $|w|^n$.

– **Prise en compte de la présence d'objets diffractants** La présence d'objets diffractants dans le milieu de propagation (voitures, mobilier urbain, etc.) pourrait également être prise en compte en ajoutant un terme de collision dans le second membre de l'équation de transport

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col}, \tag{4.66}$$

qui traduit la déviation des vecteurs vitesses au sein du domaine après un choc avec un des obstacles. Néanmoins, la densité de ces objets diffractants doit être suffisamment élevée et homogène pour respecter le caractère probabiliste de ce nouveau terme. La présence de quelques objets isolés ne peut nullement entrer dans le cadre de cette approche. Nous verrons plus loin dans le chapitre 5 concernant l'application du modèle de diffusion à l'acoustique des salles, que la prise en compte d'objets encombrants peut également être envisagée en modifiant le coefficient de diffusion de l'équation de diffusion de manière à y intégrer une « diffusion supplémentaire ». Il existe donc très certainement un lien entre le terme de collision ci-dessus et l'expression du coefficient de diffusion dans le développement de l'approche asymptotique.

Au terme de ces perspectives, l'équation de transport pourrait donc prendre une forme plus générale :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f}_{\text{transport}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} f}_{\substack{\text{profil}\\ \text{de vitesse}}} + \underbrace{\sigma f}_{\substack{\text{att.}\\ \text{atm.}}} \underbrace{+F\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}}_{\text{vent}} = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col}}_{\substack{\text{objets}\\ \text{diffractants}}} . \tag{4.67}$$

La principale question est de savoir si le problème peut toujours se ramener à une équation de diffusion, ou si au contraire, il ne va pas aboutir à une autre forme d'équation qui pourrait mêler un caractère propagatif à un caractère diffusif comme dans l'« équation des télégraphistes » [171, 172, 241]. Les potentialités de ce modèle sont donc grandes et prometteuses, mais les démarches mathématiques nécessaires à la recherche de solutions risquent d'être complexes. Dans tous les cas, une approche complètement analytique semble impossible. Le recours à une approche numérique telle que celle que nous avons évoquée au paragraphe 4.5 semble une solution tout à fait acceptable et très pratique d'un point de vue opérationnel. A terme, le développement d'un code de calcul spécifique peut toutefois s'avérer nécessaire.

Chapitre 5

Modélisation des champs « diffus » en acoustique des salles

5.1 Introduction

Dans la continuité du travail sur la modélisation des champs sonores en acoustique urbaine présenté dans le chapitre précédent, nous avons également proposé une approche similaire pour la modélisation des champs sonores en acoustique des salles. Cette approche repose également sur le concept particulaire, mais en utilisant cette fois une analogie avec la propagation de particules élémentaires dans des milieux diffusants (*i.e.* des milieux remplis par des particules diffractantes). Cette analogie, initiée dans les années 70 par Ollendorff ([181, 182], *cf.* §2.2.8.3), nous permet ainsi de modéliser le champ sonore diffus dans une salle à partir d'une équation de diffusion, mais de manière plus directe que pour le modèle de transport développé en acoustique urbaine.

Ce travail, initié dans le cadre de mes travaux de thèse au LAUM [201, 204], et détaillés principalement dans le paragraphe 5.2.1, a été poursuivi dans la cadre d'une collaboration[1] avec le LEPTAB de l'Université de La Rochelle. En particulier, la mise en forme numérique du modèle de diffusion, déjà présentée au paragraphe 4.5 pour l'acoustique urbaine, est issue de cette collaboration. Par ailleurs, le modèle de diffusion a été étendu par les travaux de V. Valeau[2] [233, 234] et A. Billon[3] [13, 15] auxquels nous avons collaboré. Des extensions du modèle ont donc été entreprises notamment en ce qui concerne la prise en compte des fortes absorptions au niveau des parois (*cf.* §5.2.3.3), de la transmission acoustique à travers les parois (*cf.* §5.2.3.4), de l'encombrement dans les salles (*cf.* §5.2.4), de l'atténuation atmosphérique (*cf.* §5.2.6). Une extension du modèle pour des salles non-diffuses a également été envisagée (*cf.* §5.2.5). Le modèle a ensuite été largement validé, à la fois numériquement et expérimentalement (*cf.* §5.3) [15, 13, 233, 234].

5.2 Modèle de diffusion en acoustique des salles

5.2.1 Analogie avec la diffusion par des particules diffractantes

5.2.1.1 Modèle équivalent d'une salle diffuse

Reprenant le concept de particules sonores présentés au paragraphe 4.2.1, le processus de déplacement des particules sonores dans une salle diffuse (*i.e.* dont les parois produisent des réflexions diffuses) est assimilable au déplacement de particules dans un milieu diffusant, constitué de particules diffractantes

1. Une partie de ce travail a été financée par l'ADEME.

2. Maître de Conférences à l'Université de La Rochelle (LEPTAB) jusqu'en septembre 2005, puis à l'Université de Poitiers (LEA).

3. Post-doctorant et ATER à l'Université de La Rochelle (LEPTAB) de 2003 à 2006.

(figure 5.1). Ce processus est similaire à celui de la diffusion de la lumière dans le brouillard, ou de la diffusion d'un électron par les atomes d'un gaz.

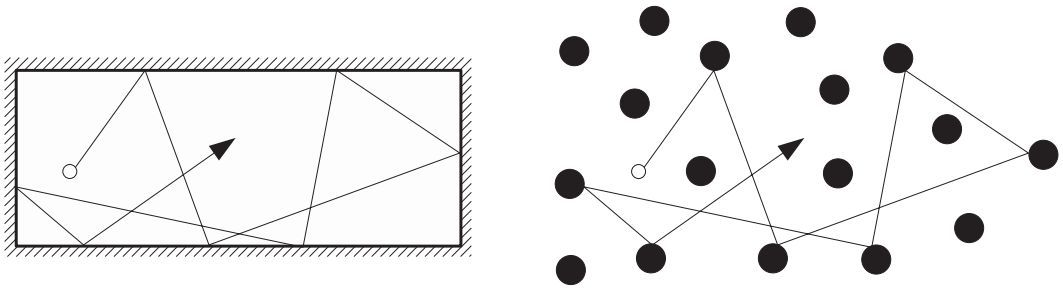


FIG. 5.1 — *Analogie entre la diffusion d'une particule sonore dans une salle et la diffusion d'une particulaire élémentaire dans un milieu diffusant. D'après [201].*

L'analogie entre la diffusion par les parois d'une salle et la diffusion dans un milieu diffusant peut être écrite de la manière suivante. Considérons une salle de volume V, de surface S définie par des parois d'absorption acoustique moyenne $\overline{\alpha}$. Par ailleurs, supposons l'existence d'un milieu diffusant caractérisé par des particules cibles (ou diffractantes) immobiles et indéformables, ayant une surface totale diffractante Q_t et leur nombre par unité de volume n_t. Les particules cibles sont supposées plus massives que les particules élémentaires en déplacement dans le milieu. Nous supposerons également que les collisions entre les particules élémentaires sont négligeables, pour nous focaliser uniquement sur les collisions des particules élémentaires avec les particules cibles. Au contact avec une particule cible (ou une paroi), la particule élémentaire a une probabilité $(1-\overline{\alpha})$ d'être réfléchie dans une nouvelle direction et une probabilité $\overline{\alpha}$ d'être absorbée. En d'autres termes, la section totale de diffraction d'une particule cible Q_t peut être écrite comme la somme d'une surface de diffraction Q_s et d'une surface d'absorption Q_a :

$$Q_t = Q_s + Q_a \equiv (1-\overline{\alpha})Q_t + \overline{\alpha}Q_t. \tag{5.1}$$

En supposant l'isotropie de la diffusion (*i.e.* la réflexion des particules élémentaires est uniforme), les particules cibles peuvent être assimilées à des sphères de surface $s = 4\pi R^2$. Dans ces conditions, la surface diffractante de la particule cible est équivalente à un disque de surface égale à la section de la sphère, à savoir $Q_t = s/4$. Pour vérifier l'analogie entre la salle et le milieu diffusant, il faut donc imposer l'égalité entre la quantité de surface de diffraction du milieu diffusant et de la salle, à savoir :

$$n_t s = \frac{S}{V}. \tag{5.2}$$

5.2.1.2 Libre parcours moyen dans la salle

Soit $P(x)$ la probabilité qu'une particule élémentaire parcoure une distance x dans le milieu diffusant sans collision. Par ailleurs, dans un volume élémentaire de largeur dx et de section unitaire perpendiculaire à la direction de propagation de la particule, il y a $n_t dx$ particules cibles, soit une surface totale de diffraction égale à $Q_t n_t dx$.

La probabilité qu'une particule élémentaire se déplace d'une distance $x + dx$ sans collision, est proportionnelle à la probabilité qu'une particule sonore se déplace d'une distance x sans collision (*i.e.* $P(x)$), multiplié par la probabilité $(1 - Q_t n_t dx)$ qu'il n'y est aucune collision dans l'élément dx. La probabilité $P(x)$ doit donc vérifier l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx}P(x) = -Q_t n_t P(x), \tag{5.3}$$

dont la solution après normalisation prend la forme :

$$P(x) = Q_t n_t \exp(-Q_t n_t x). \tag{5.4}$$

Le libre parcours moyen λ étant défini comme la distance moyenne entre deux collisions sur des particules cibles, il est exprimé par la relation suivante :

$$\lambda = \int_0^{+\infty} xP(x)\,dx = \frac{1}{Q_t n_t} = \frac{4V}{S}, \tag{5.5}$$

expression qui redonne effectivement le libre parcours moyen classique d'une salle, dans l'hypothèse des champs diffus [138]. Dans ces conditions, l'analogie entre les deux milieux est bien vérifiée. A ce stade, il reste à mettre en équation le problème d'acoustique des salles, en se focalisant uniquement sur le milieu équivalent.

5.2.1.3 Équation de diffusion pour le champ sonore

Considérons maintenant le déplacement détaillé d'une particule élémentaire dans le milieu diffusant, définie par sa position $\mathbf{r}$ et sa vitesse $\mathbf{v}$ au temps t. Le déplacement de la particule est entièrement défini dans un espace des phases à 7 dimensions (3 pour la position (espace dV_r), 3 pour la vitesse (espace dV_v) et 1 pour le temps). La vitesse des particules est constante et égale à la célérité du son c. Compte tenu du grand nombre de particules se propageant simultanément dans le milieu, le système peut être défini par la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ qui traduit le nombre de particules au point $\mathbf{r}$, à la vitesse $\mathbf{v}$, au temps t. Par définition l'intégration du cette fonction sur l'espace des vitesses, donne la densité de particules dans le milieu :

$$w(\mathbf{r}, t) = \iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,dV_v. \tag{5.6}$$

Le flux de particules est quant à lui donné par l'intégration de la fonction de distribution multipliée par la vitesse des particules, à savoir :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \iiint \mathbf{v}\, f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,dV_v. \tag{5.7}$$

Toutes les particules localisées dans le même élément de l'espace des phases dV_v se déplacent à la même vitesse $\mathbf{v}$. Par ailleurs, une partie $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)dV_v dV_r$ de ces particules dans l'élément de l'espace dV_r est localisée au point $\mathbf{r}$, au temps t. En l'absence de collision, au temps $t + dt$, ces mêmes particules se sont déplacées et se trouvent désormais au point $\mathbf{r} + \mathbf{v}dt$. Par conséquent, la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ au point $\mathbf{r}$ et au temps t doit être égale à la fonction de distribution au point $\mathbf{r} + \mathbf{v}dt$ et au temps $t + dt$, soit :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v}, t + dt). \tag{5.8}$$

En développant la relation (5.8) sous forme d'une série et en ne retenant que les premiers termes en puissance de dt et $d\mathbf{r}$, nous pouvons écrire la relation de continuité de la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \approx -\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\, f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \tag{5.9}$$

La fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est également modifiée suite aux collisions des particules avec les particules cibles. En effet, suite à ces collisions, certaines particules quittent l'élément dV_v de l'espace des phases, tandis que des particules initialement avec une autre vitesse, sont réfléchies après collision avec une vitesse $\mathbf{v}$, et intègrent l'élément dV_v de l'espace des phases. Morse et Feshbach [171] montrent ainsi qu'à tout instant t, une fraction $Q_s n_t c$ des particules quitte dV_v par collision suivi d'une réflexion, et

qu'une fraction $Q_a n_t c$ des particules sont absorbées (collision puis absorption). Par ailleurs, en considérant toutes ces contributions, ainsi que la relation de continuité (5.9), MORSE et FESHBACH [171] obtiennent la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\mathbf{v} \operatorname{grad} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - n_t \left(Q_s + Q_a\right) c \, f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{n_t Q_s c}{4\pi} \iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \, dV_{v'}. \tag{5.10}$$

Considérant que la dépendance angulaire de la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est faible (isotropie des réflexions), ou bien, ce qui est équivalent, que le flux $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ est faible, la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ peut être développée en puissance de $\mathbf{v}$:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \approx \frac{1}{4\pi} w(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \tag{5.11}$$

La relation (5.10) devient alors [171] :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{3}{v^2} \mathbf{v} \frac{\partial J}{\partial t} \approx -\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} w - \frac{3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}) - Q_a n_t c \, w - \frac{3}{v} (Q_s + Q_a) n_t \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}. \tag{5.12}$$

En raison de la symétrie, cette relation peut être décomposée en deux nouvelles relations, à savoir,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{v}{3 Q_t n_t} \operatorname{grad} w(\mathbf{r}, t) = -\frac{\lambda c}{3} \operatorname{grad} w(\mathbf{r}, t), \tag{5.13}$$

pour les termes qui changent de signe quand la direction de propagation $\mathbf{v}$ est inversée, et

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{3}{v^2} \mathbf{v} \operatorname{grad}(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)) - Q_a n_t v w(\mathbf{r}, t) \tag{5.14}$$

pour les termes qui ne changent pas de signe.

L'équation (5.13) définit la première équation d'un processus de diffusion : un gradient de particules (respectivement un gradient d'énergie) produit un déplacement des particules des zones les plus denses (les plus énergétiques) vers les zones les moins denses (les moins énergétiques). En remplaçant le flux $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ dans l'equation (5.14) par son expression (5.13), et moyennant sur l'ensemble des directions $\mathbf{v}$, nous obtenons par ailleurs l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r}, t) \approx D \Delta w(\mathbf{r}, t) - \sigma w(\mathbf{r}, t), \tag{5.15}$$

que nous écrivons

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r}, t) - D \Delta w(\mathbf{r}, t) + \sigma w(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{5.16}$$

où D est défini comme le coefficient de diffusion :

$$D = \frac{\lambda c}{3} = \frac{4 V c}{3 S}, \tag{5.17}$$

et où le coefficient σ traduit l'absorption acoustique dans le milieu :

$$\sigma = \frac{c \bar{\alpha}}{\lambda} = \frac{c \bar{\alpha} S}{4 V}. \tag{5.18}$$

Cette dernière expression est une approximation de celle proposée par KUTTRUFF [138] quand l'absorption moyenne $\bar{\alpha}$ est faible.

5.2.1.4 Mise en évidence numérique de la diffusion dans une salle

Le passage d'un processus de propagation du champ sonore dans une salle à un processus de diffusion n'est pas trivial. Le développement analytique explicite du passage de l'équation de propagation pour la pression acoustique, à une équation de diffusion pour la densité d'énergie, n'a d'ailleurs pas encore été proposé. Il nous a donc paru nécessaire de vérifier l'existence d'un tel processus de diffusion dans une salle.

Cette étude, présentée dans [201] est fondée sur des simulations numériques du champ sonore diffus à partir d'un modèle intégral de champ diffus proposé par [138] (méthode de la radiosité présenté au §2.2.6), simulations à partir desquelles nous avons recherché à vérifier l'existence d'un tel processus, et en outre, à extraire le coefficient de diffusion. Pour des raisons pratiques, nous nous sommes intéressés uniquement à des couloirs, mais les résultats sont généralisables à d'autres types de salles. Dans un premier temps, nous avons réalisé des simulations numériques en utilisant la méthode de Kuttruff, qui nous ont permis d'évaluer la décroissance spatiale du champ sonore dans l'axe des couloirs. Dans un second temps, nous avons comparé cette décroissance avec la décroissance théorique issue de la solution du modèle de diffusion, pour en extraire le coefficient de diffusion « numérique » (noté D_{num}). Pour des raisons pratiques, nous avons choisi la solution analytique correspondant à un couloir infini (solution à une dimension). Dans ces conditions, la solution de l'équation de diffusion est immédiate, et donne

$$w(x,t) = \frac{w_0}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt} - \sigma t\right), \tag{5.19}$$

en régime impulsionnel pour une source en $x = 0$. L'intégration de cette dernière expression permet également d'établir la solution en régime permanent [82, d'après les relations (3.471-9) et (8.469-3)] :

$$W(x) = \frac{w_0}{2\sqrt{D\sigma}} \exp\left(-x\sqrt{\frac{\sigma}{D}}\right). \tag{5.20}$$

La procédure étant détaillée dans la référence [201], nous ne présentons ici que les principaux résultats. Ainsi, la figure 5.2 présente une comparaison de D_{num} avec le coefficient de diffusion théorique (5.17), pour de nombreux couloirs (chaque couloir étant défini par un libre parcours moyen). L'accord observé est très bon, ce qui montre bel et bien l'existence d'un processus de diffusion dans les couloirs, existence que l'on peut généraliser vraisemblablement à toutes les salles produisant des réflexions diffuses. En complément, la figure 5.3 montre les décroissances temporelles en trois points d'observation dans une salle rectangulaire, obtenues numériquement par le modèle de Kuttruff, et analytiquement par le modèle de diffusion. Dans ce dernier cas, nous avons considéré les coefficients de diffusion « numérique » et théorique. L'accord entre les trois courbes est excellent, notamment proche de la source, ce qui met en évidence une nouvelle fois un processus de diffusion dans cette salle. On peut également remarquer que le choix du coefficient de diffusion (D_{num} et D théorique) a peu d'influence sur les résultats, compte tenu du fait que les deux coefficients sont très proches.

En parallèle, cette figure montre une caractéristique particulière du modèle de diffusion, à savoir une diffusion instantanée de l'énergie dans le milieu de propagation. Dans un processus de propagation classique, il faut nécessairement un certain temps de propagation entre la source et un récepteur. A l'inverse, la diffusion est quant à elle instantanée, ce qui se traduit par une présence d'énergie sonore au point d'observation dès l'émission acoustique à $t = 0$. Bien entendu, ce phénomène n'est pas physique. Il faut considérer que le modèle de diffusion n'a de sens que lorsque le processus qui crée un champ diffus dans une salle est bien installé, c'est-à-dire après un temps de mélange bien supérieur au temps de propagation entre un point source et un point d'observation. Le modèle de diffusion ne caractérise donc que le champ diffus. Pour une description complète du champ sonore dans une salle, il doit être couplé avec le champ direct et éventuellement avec un modèle de réflexion pour les premières réflexions spéculaires, si nécessaire.

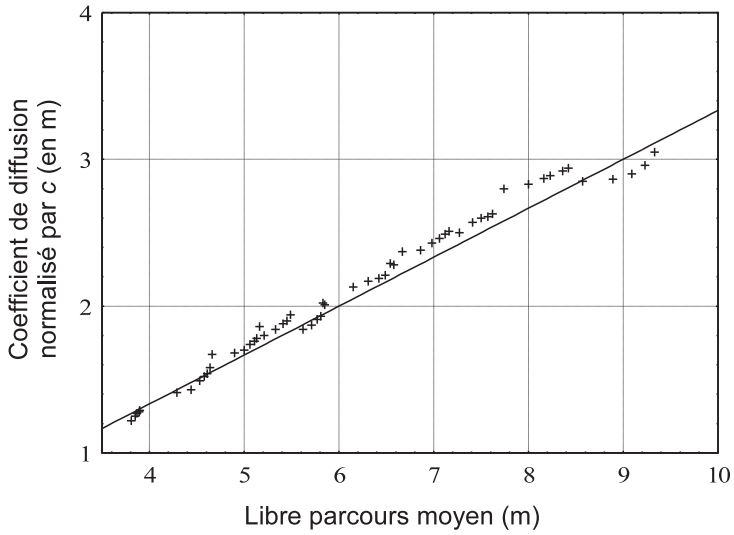


FIG. 5.2 — *Coefficient de diffusion, normalisé par la célérité c, en fonction du libre parcours moyen du couloir λ : (+), coefficient de diffusion numérique D_{num} ; (—), coefficient de diffusion théorique (5.17). D'après [201].*

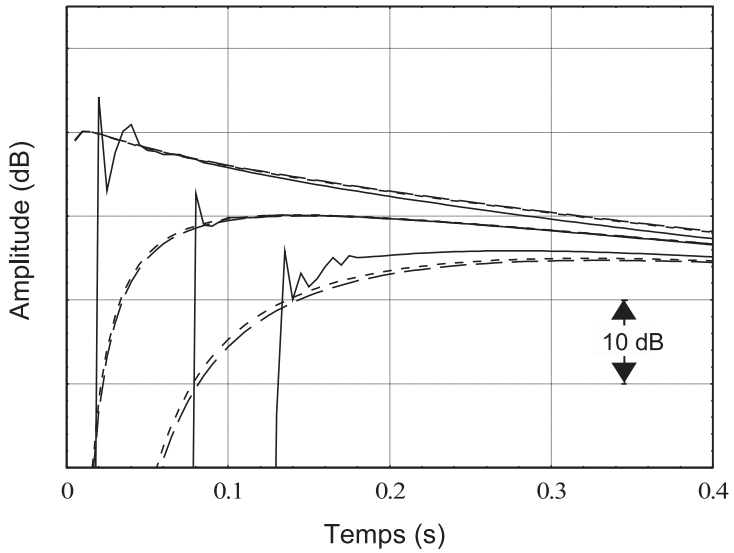


FIG. 5.3 — *Décroissance sonore dans un couloir rectangulaire de dimension* $50 \times 10 \times 10\ m^3$*, d'absorption moyenne* $\bar{\alpha} = 0.1$*, à trois distances (x =* 5, 25 *et* 45 *m ; de haut en bas sur la figure) d'une source sonore impulsionnelle localisée en x = 1 m : (—), simulation numérique par le modèle de* KUTTRUFF *; (– – –), solution de l'équation de diffusion avec D_{num} ; (— —), solution de l'équation de diffusion avec D théorique. Le champ direct n'est pas pris en compte dans les solutions de l'équation de diffusion. D'après [201].*

5.2.2 Modélisation des sources acoustiques dans le modèle de diffusion

5.2.2.1 Source volumique

L'équation (5.15) ne fait pas intervenir explicitement de termes de source. La prise en compte de la source peut intervenir soit dans les conditions initiales de la solution de l'équation, soit en rajoutant un second membre dans l'équation. Considérons par exemple une source sonore de puissance $Q(t)$ localisée au point $\mathbf{r}_S$. L'équation (5.15) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r}, t) - D\Delta w(\mathbf{r}, t) + \sigma w(\mathbf{r}, t) = Q(t)\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S), \tag{5.21}$$

où δ désigne la distribution de Dirac. Dans le cadre de notre analogie, cette source de puissance $Q(t)$ est équivalente à un point source émettant $q(t)$ particules sonores par seconde et par unité de volume. Le cas d'une source de volume v et de puissance $Q(t)$ peut également s'écrire de manière similaire, en considérant le terme source :

$$Q(\mathbf{r}, t) = \frac{Q(t)}{v} f_S(\mathbf{r}), \tag{5.22}$$

où la fonction $f_s(\mathbf{r})$ est nulle en dehors du volume v et égale à l'unité à l'intérieur. On vérifie bien que l'intégration de ce terme sur le volume v est égale la puissance totale de la source $Q(t)$.

Si la source est impulsionnelle (à t_0), l'équation (5.21) est modifiée de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r}, t) - D\Delta w(\mathbf{r}, t) + \sigma w(\mathbf{r}, t) = E_0\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S)\delta(t - t_0), \tag{5.23}$$

où E_0 est l'énergie produite par la source à t_0. En pratique, une source de puissance Q en fonctionnement pendant un temps Δt est à l'origine d'une énergie $E_0 \approx Q\Delta t$.

5.2.2.2 Source surfacique

La source sonore peut également être localisée sur une surface. C'est par exemple le cas si on veut modéliser une fenêtre ouverte dans un mur (pour prendre en compte l'énergie sonore provenant de l'extérieur d'une salle). Dans ces conditions, en notant $\mathbf{n}$ la normale de la surface émissive orientée vers l'extérieur du volume d'étude, et J_{in} le flux d'énergie correspondant orientée vers l'intérieur du volume, l'équation de diffusion sera associée à la condition aux limites suivante :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = -D\frac{\partial w}{\partial n} = -J_{in}. \tag{5.24}$$

Cette approche peut également être utilisée pour modéliser la transmission acoustique à travers une paroi. Ce point sera détaillé au paragraphe 5.2.3.4.

5.2.3 Conditions aux limites du modèle de diffusion

Dans l'approche initiale du modèle de diffusion [201], et pour des raisons de simplification des développements mathématiques, nous avons considéré une absorption moyenne uniforme sur l'ensemble de la surface de la salle. Cette absorption est alors à l'origine du terme σ dans l'équation de diffusion (5.15). La résolution de cette équation suppose alors que les conditions aux limites (au niveau de la surface de la salle) imposent des conditions de réflexion totale (sans absorption) pour ne pas prendre en compte deux fois l'absorption au niveau des parois. Ces conditions aux limites peuvent alors prendre la forme de conditions de Neumann (*cf.* §5.2.3.1). Dans un autre article [191], nous avons proposé une extension du modèle pour des salles non-uniformément absorbantes. Cette extension repose sur une approche simplifiée du modèle dans le cas de couloirs infiniment longs pour lesquels l'essentiel de l'absorption d'énergie est localisée sur les parois latérales. Cette extension, que nous pouvons généraliser à toute géométrie de salle, permet alors d'introduire la notion de coefficient d'échange dans les conditions aux limites, pour prendre en compte des conditions d'absorption particulières (*cf.* §5.2.3.2).

5.2.3.1 Absorption acoustique uniforme au niveau des parois

La résolution de l'équation de diffusion intervenant néanmoins dans le domaine de propagation V, défini par des limites réelles (surface S), il est nécessaire de définir des conditions aux limites particulières. Par analogie, cela revient à considérer que les particules sonores ne peuvent pas quitter le domaine de propagation. Comme nous venons de le préciser, l'absorption, supposée uniforme, est déjà prise en compte dans le terme σ de l'équation de diffusion (5.15). Il convient donc de considérer une condition de réflexion sans absorption, pour ne pas la compter deux fois. Cette condition est donc définie par une condition de réflexion totale, c'est-à-dire une condition de NEUMANN homogène :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad S. \tag{5.25}$$

5.2.3.2 Absorption acoustique non uniforme au niveau des parois

Les conditions aux limites précédentes ne permettent pas de considérer l'absorption acoustique de manière locale et non-uniforme. La distribution de l'absorption dans un local peut pourtant engendrer des répartitions particulières du champ sonore [66]. Dans un article sur l'application du modèle de diffusion aux espaces allongés [191], nous avons ainsi proposé une condition aux limites qui fait intervenir un coefficient d'échange h sur les parois du domaine. Ce coefficient traduit les échanges énergétiques au niveau des parois :

$$-D\frac{\partial w}{\partial n} = h\,w \quad \text{sur} \quad S, \tag{5.26}$$

l'équation de diffusion se limitant alors à l'équation (5.21) sans le terme d'absorption σ :

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\mathbf{r},t) - D\Delta w(\mathbf{r},t) = Q(t)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_S), \tag{5.27}$$

Dans ce même article sur les locaux allongés, nous avons proposé une formulation approchée de ce coefficient d'échange, qui a ensuite été généralisée par V. VALEAU [234]. Ainsi, l'équivalence entre cette condition de réflexion mixte (5.26) associée à l'équation de diffusion (5.27), et la condition de NEUMANN (5.25) associée avec l'équation de diffusion (5.21), est vérifiée à condition que :

$$\int_V \sigma w(\mathbf{r},t)\,dV = \int_{\partial V} h(S)w(\mathbf{r},t)\,dS. \tag{5.28}$$

Si le champ sonore est diffus, au sens classique de l'acoustique des salles, c'est-à-dire si w est uniforme dans la salle, alors la relation (5.18), impose simplement que

$$h = \frac{c\alpha}{4}, \tag{5.29}$$

qui peut être généralisée à

$$h_i = \frac{c\alpha_i}{4}, \qquad i = 1 \ldots N. \tag{5.30}$$

pour une salle d'absorption non-uniforme caractérisée par des coefficients d'absorption α_i pour chaque élément de surface S_i de la salle ($S = \sum_i S_i$).

5.2.3.3 Cas des absorptions élevées

Que ce soit dans l'équation de diffusion (5.21) ou dans la condition aux limites (5.26), le terme d'absorption au niveau des parois fait intervenir le coefficient d'absorption « classique » de SABINE α (ou $\overline{\alpha}$ pour la valeur moyenne). Dans la théorie classique, pour des salles très absorbantes, il est usuel de remplacer le coefficient d'absorption de SABINE α par le coefficient d'absorption EYRING $-\ln(1-\overline{\alpha})$

[68, 168, 219]. A. Billon a ainsi proposé d'appliquer ce même remplacement dans le modèle de diffusion. En particulier, la condition aux limites (5.26) devient :

$$h = -\frac{c\ln(1-\alpha)}{4}. \tag{5.31}$$

Nous verrons plus loin dans les applications (*cf.* §5.3) que ce changement permet d'améliorer les résultats du modèle de diffusion pour des salles d'absorption non-uniforme et présentant des absorptions élevées. Pour des faibles absorptions (α proche de 0), la modification n'apporte rien puisque $-\ln(1-\alpha)$ tend vers α. Au niveau du développement théorique présenté au paragraphe 5.2.1, cette modification revient à considérer que les particules sonores ont une probabilité $-\ln(1-\alpha)$ (au lieu de α) d'être absorbées par les particules diffractantes. Par la suite, on distinguera les deux modèles par les appellations *modèle de diffusion* « Sabine » (ou sous forme réduite *modèle de diffusion*) et *modèle de diffusion* « Eyring » .

5.2.3.4 Transmission acoustique à travers une paroi

Nous avons vu au paragraphe 5.2.2.2 que le cas de la transmission acoustique à travers une paroi peut être modélisée sous la forme d'une source surfacique. Une autre solution plus élégante a également été proposée par [234] sous la forme d'une nouvelle solution de réflexion mixte reprenant l'équation (5.26). Considérons deux salles S_1 et S_2 séparée par une cloison de coefficient de transmission TL (en dB), défini par :

$$TL = 10\log\left(\frac{1}{\tau}\right), \tag{5.32}$$

où τ est le coefficient de transmission. En se plaçant une nouvelle fois dans le cadre d'un champ diffus (toujours au sens classique du terme), le flux incident sur la paroi de la salle S_1 contenant la source est donné par [138] :

$$J_1 = \frac{cw_1}{4}, \tag{5.33}$$

où w_1 est la densité d'énergie dans la salle S_1. Le flux transmis à travers la cloison dans la salle S_2 est donc simplement égal à

$$J_{in} = \frac{\tau c w_1}{4}. \tag{5.34}$$

Finalement la condition aux limites au niveau de la cloison, du coté de la salle S_2, doit également prendre en compte la partie d'énergie absorbée (*cf.* relation (5.26)), pour donner :

$$D\frac{\partial w_2(\mathbf{r},t)}{\partial n} + \frac{c\alpha}{4}w_2(\mathbf{r},t) - \frac{\tau c w_1}{4} = 0, \tag{5.35}$$

où w_2 désigne la densité d'énergie de la salle S_2.

5.2.4 Prise en compte de l'encombrement dans le modèle de diffusion

Très récemment, une nouvelle extension du modèle de diffusion a permis d'intégrer les effets de l'encombrement présent dans le milieu de propagation [233]. En effet, dans le cadre de halls industriels par exemple, la répartition d'objets diffractants et absorbants dans le milieu de propagation a un effet important sur la distribution et la décroissance du champ sonore. De nombreuses recherches ont ainsi permis d'établir des modèles prenant en compte cet encombrement dans des salles définies par des parois spéculaires. En particulier l'approche de Kurze [131], présentée au paragraphe 2.2.8.3, a permis d'établir que le processus de diffraction multiple dans l'encombrement est similaire à un processus de diffusion :

$$D_f\nabla^2 I(\mathbf{r},t) - \sigma_f I(\mathbf{r},t) = -(P/4\pi r^2)\frac{\exp\left(-r/\lambda_f\right)}{\lambda_f}(1-\alpha_f). \tag{5.36}$$

où

$$D_f = \frac{\lambda_f c}{3}, \tag{5.37}$$

désigne le coefficient de diffusion, et où

$$\sigma_f = \frac{\alpha_f c}{\lambda_f}, \tag{5.38}$$

traduit l'absorption acoustique par l'encombrement. α_f désigne le coefficient d'absorption acoustique des objets composant l'encombrement, et P la puissance acoustique d'une source en régime permanent localisée au point $\mathbf{r}_s$. Dans ces expressions, λ_f désigne le libre parcours moyen associé à l'encombrement et est fonction de la section diffractante Q_f et de la densité n_f des objets diffractants.

Par construction ce processus de diffusion acoustique par l'encombrement est similaire au processus de diffusion présenté au paragraphe 5.2.1 pour modéliser le processus de diffusion par les parois du domaine. Partant de cette observation, nous avons ainsi montré que les deux approches peuvent être couplées pour prendre en compte simultanément les deux phénomènes de diffusion [233]. Ainsi, le processus global de diffusion dans une salle diffuse, définie par son libre parcours moyen λ et son absorption moyenne $\bar{\alpha}$, comportant un encombrement, peut être modélisé *via* une unique équation de diffusion :

$$\frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t} - D_t \Delta w(\mathbf{r},t) + \frac{c\alpha_f}{\lambda_f} w(\mathbf{r},t) + \frac{c\bar{\alpha}}{\lambda} w(\mathbf{r},t) = Q(\mathbf{r},t), \tag{5.39}$$

où

$$D_t = \frac{c(\lambda_f \lambda)}{3(\lambda_f + \lambda)} = \frac{D_f D}{D_f + D}. \tag{5.40}$$

désigne le coefficient de diffusion du processus global, résultant du couplage du processus diffusion par la salle (caractérisé par le coefficient de diffusion D défini à la relation (5.17)) et du processus de diffusion créé par l'encombrement (caractérisé par le coefficient de diffusion D_f défini à la relation (5.37)). Pour une salle d'absorption non-uniforme, il faut considérer l'équation (5.27)

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r},t) - D_t \Delta w(\mathbf{r},t) + \frac{c\alpha_f}{\lambda_f} w(\mathbf{r},t) = Q(\mathbf{r},t), \tag{5.41}$$

associée à des conditions de réflexion mixtes

$$-D_t \frac{\partial w}{\partial n} = h\, w \quad \text{sur} \quad S. \tag{5.42}$$

5.2.5 Extension du modèle de diffusion pour des salles non-diffuses

Dans la pratique, les parois d'une salle ne sont pas complètement diffuses, ni d'ailleurs complètement spéculaires. C'est d'ailleurs pour cette raison que la notion de *scattering coefficient* s a été introduite en acoustique des salles [94]. Si $s = 0$, la paroi produit uniquement des réflexions spéculaires. Si $s = 1$ les parois sont supposées totalement diffuses. Dans la pratique s est souvent compris entre 0 et 1. L'expression analytique du coefficient de diffusion, faisant intervenir l'expression classique du libre parcours moyen $\lambda = 4V/S$ associé classiquement à un champ diffus, le modèle de diffusion est donc limité par construction à des salles diffuses.

Une étude, initiée dans [233] est actuellement en cours pour proposer un facteur correctif η sur le coefficient de diffusion, tel que :

$$D_a = \eta D, \tag{5.43}$$

de manière à simuler des salles dans des conditions de réflexion mixtes (spéculaires et diffus). Cette extension[4] repose sur une étude empirique qui vise à interpoler la valeur du coefficient de diffusion en fonction du coefficient s, pour différentes géométries de salle. Un exemple sera proposé au paragraphe 5.3.5.

4. Ce travail fait l'objet de la thèse CIFRE de C. Foy au Centre Expérimental de recherches et d'études du Bâtiment et des Travaux Publics (CEBTP), co-encadrée avec V. Valeau de l'Université de Poitiers et A. Sakout de l'Université de La Rochelle.

5.2.6 Prise en compte de l'atténuation atmosphérique

Dans un travail très récent, A. Billon[5] a proposé une extension du modèle de diffusion pour intégrer l'atténuation atmosphérique dans l'équation de diffusion sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r}, t) - D\Delta w(\mathbf{r}, t) + (mc + \sigma)\, w(\mathbf{r}, t) = Q(t)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S), \tag{5.44}$$

pour le modèle de diffusion associée à une absorption uniforme, et

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r}, t) - D\Delta w(\mathbf{r}, t) + mc\, w(\mathbf{r}, t) = Q(t)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S), \tag{5.45}$$

pour le modèle de diffusion avec une absorption non-uniforme. Dans ces expressions, m désigne le coefficient d'atténuation atmosphérique énergétique en m^{-1}. Cette forme de prise en compte est tout à fait compatible avec la théorie classique de la réverbération. En effet, dans l'hypothèse des champs diffus, et de manière analogue aux développements présentés au paragraphe suivant 5.2.7, cette écriture permet de retrouver l'expression classique de la décroissance d'énergie dans le milieu de propagation :

$$w_s(t) = w_0 \exp - \left[\frac{c\bar{\alpha} S}{4V} + mc \right] (t - t_0). \tag{5.46}$$

Une nouvelle fois, les équations (5.44) et (5.45) ne sont qu'une généralisation de la théorie classique, intégrant cette fois l'atténuation atmosphérique. A titre d'exemple, la figure 5.4 illustre cette prise en compte de l'atténuation atmosphérique dans le modèle de diffusion dans une salle cubique de grande dimension. Dans les conditions de calcul utilisées ici, l'effet de l'atténuation atmosphérique est très important sur la décroissance d'énergie, donc sur le temps de réverbération, montrant l'intérêt de sa prise en compte dans le modèle de diffusion.

5.2.7 Relation avec la théorie classique des champs diffus

Il est possible d'établir une relation entre le modèle de diffusion que nous venons de présenter et la théorie classique des champs diffus (*cf.* §2.2.3). En préliminaire, il faut établir une distinction entre le champ diffus « classique » et le champ sonore issu du modèle de diffusion[6]. Le premier est parfaitement défini par la théorie classique de la réverbération comme un champ uniforme caractérisé par un flux d'énergie nul dans la salle considérée. A l'inverse le champ sonore issu du modèle de diffusion résulte de l'existence d'un flux d'énergie (*cf.* relation (5.13)), des zones les plus énergétiques vers les zones les moins énergétiques. Le champ sonore n'est donc plus uniforme en principe, la distribution d'énergie étant alors fonction de la répartition de l'absorption sur les parois du domaine, de la transmission acoustique à travers les parois, de la position de la source, de la géométrie de salle, etc. Le champ sonore n'est donc plus diffus (au sens classique), mais résulte tout de même des multiples réflexions diffuses sur les parois du domaine.

Il est toutefois intéressant de constater que le modèle de diffusion n'est finalement qu'une extension de la théorie classique [234]. En effet, repartant de l'équation de diffusion (5.21) intégrée sur l'espace de propagation, on peut établir le bilan énergétique suivant dans la salle :

$$\int_V \frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\, dV + \int_V \frac{c\bar{\alpha} S}{4V} w(\mathbf{r}, t)\, dV - D \int_V \Delta w(\mathbf{r}, t)\, dV = Q(t), \tag{5.47}$$

qui, compte tenu de la condition aux limites de Neumann homogène (5.25) pour une salle d'absorption uniforme $\bar{\alpha}$ et du théorème de Gauss, prend la forme :

$$\int_V \frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\, dV + \int_V \frac{c\bar{\alpha} S}{4V} w(\mathbf{r}, t)\, dV = Q(t). \tag{5.48}$$

5. *Prise en compte de l'atténuation atmosphérique dans le modèle de diffusion*, A. Billon, note de travail, 2006.
6. En principe, non-diffus.

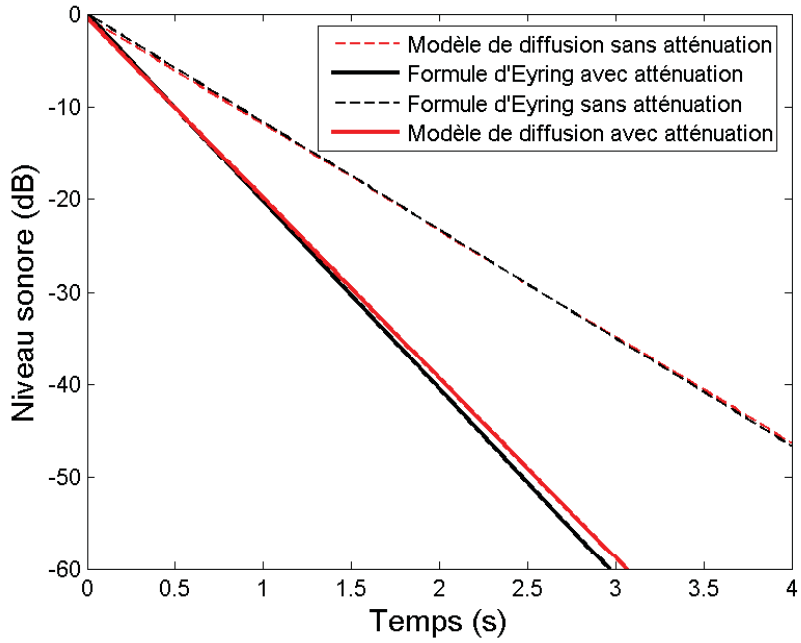


FIG. 5.4 — *Prise en compte de l'atténuation atmosphérique dans le modèle de diffusion (en rouge) et comparaison avec la formule d'*EYRING *(en noir). Décroissances temporelles dans une salle cubique de* $20 \times 20 \times 20\ m^3$ *(*$\overline{\alpha} = 0.1$*), avec une humidité relative de* 50% *à la fréquence 4 000 Hz (*$m = 0.0058\ m^{-1}$*), avec (—) et sans (– –) la prise en compte de l'atténuation atmosphérique.*

En supposant que le champ sonore est effectivement diffus (au sens classique du terme), le terme $w(\mathbf{r},t) = w(t)$ peut sortir des intégrales. Le bilan énergétique (5.48) est alors identique à celui de la théorie classique proposée par exemple par KUTTRUFF [138, relation (5.4), page 119] :

$$V\frac{\partial}{\partial t}w(t) + \frac{cA}{4}w(t) = Q(t). \tag{5.49}$$

avec $A = \bar{\alpha}S$ la surface d'absorption équivalente. En régime permanent, la dérivée temporelle de cette équation est nulle, ce qui permet de retrouver l'expression classique du champ réverbéré :

$$w_s = \frac{4P}{cA}. \tag{5.50}$$

En régime impulsionnel, la source émettant à t_0, l'équation (5.49) permet de retrouver la décroissance temporelle classique du champ sonore dans la salle :

$$w_s(t) = w_0 \exp\left(-\frac{cA}{4V}(t-t_0)\right) = w_0 \exp\left(-\sigma(t-t_0)\right). \tag{5.51}$$

5.3 Applications et validation du modèle de diffusion

Dans cette dernière section, nous présentons une validation générale du modèle de diffusion pour de nombreuses configurations architecturales. Cette validation est basée sur une comparaison des résultats issus du modèle de diffusion, avec des données expérimentales quand elles sont disponibles[7], des modèles mathématiques (fondés notamment sur la théorie statistique), ainsi qu'avec des logiciels d'acoustique des salles reconnus et largement utilisés par la profession.

5.3.1 Mise en forme numérique du modèle de diffusion

Pour des salles rectangulaires (local plat, couloir, salle cubique) d'absorption homogène, il est possible d'obtenir des solutions analytiques à l'équation de diffusion. Nous avons en particulier proposé des expressions analytiques simples pour des couloirs finis, semi-infinis et infinis [204]. Néanmoins, dès lors que la forme de la salle ou les conditions aux limites deviennent complexes, la recherche de solutions analytiques devient très difficile, voire impossible la plupart du temps. Dans ces conditions, il est nécessaire de résoudre numériquement l'équation de diffusion, comme nous l'avons présenté au paragraphe 4.5. Là encore nous avons utilisé le logiciel COMSOL Multiphysics™ pour des raisons pratiques, mais l'utilisation de tout autre code de calcul résolvant une équation de diffusion avec des conditions aux limites « standards » est possible. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans la conclusion de ce chapitre.

Après avoir déterminé la géométrie de la salle, les conditions aux limites et la position des sources sonores, ce code de calcul permet de calculer le niveau sonore en tout point de la salle, soit en régime permanent, soit en régime impulsionnel. Le premier type de calcul permet d'obtenir le niveau sonore en tout point du volume d'étude. Le second calcul permet de remonter à la décroissance temporelle en tout point du milieu de propagation, exprimée la plupart du temps sous la forme d'un TR (RT20, RT30, RT60 et EDT suivant les cas). Un exemple de résultat numérique est présenté à la figure 5.5 dans le cas de deux salles couplées.

Dans certaines conditions, le coefficient de diffusion n'est pas homogène dans l'ensemble du volume d'étude. C'est en particulier le cas pour des salles couplées de dimensions différentes, ou des salles

7. Bien que cela ne soit pas présenté dans ce document, nous avons réalisé de nombreuses campagnes de mesure dans des locaux, en partenariat avec le LEPTAB. Faute de données disponibles dans la littérature ou suffisamment documentées, nous avons dû réaliser des mesures dans des salles de cours, des couloirs et des salles couplées. Ces campagnes expérimentales ont permis d'établir une base de données expérimentales (niveaux sonores, temps de réverbération, critères d'acoustique des salles, en bandes de fréquence) très complète et parfaitement documentée.

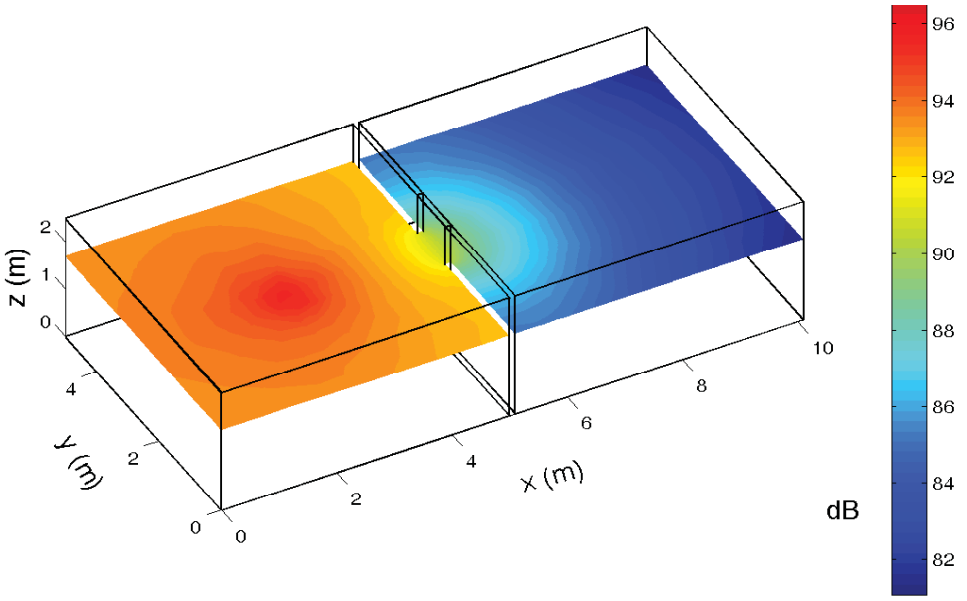


FIG. 5.5 — *Illustration de l'application du modèle de diffusion avec le logiciel COMSOL Multiphysics™, dans le cas de deux salles de même dimension* $5 \times 5 \times 2.5$ m^3 *couplées par une ouverture de* $0.90 \times 0.10 \times 2.5$ m^3 *: distribution du champ sonore en régime permanent. La source sonore de puissance* 100 *dB est simulée par une sphère de rayon* 10 *cm, localisée au centre de la première salle (salle source), à* 1.25 *m de hauteur. Les coefficients d'absorption des deux salles sont respectivement de* 0.1 *et* 0.4 *pour la salle source et la salle couplée. L'ensemble du volume est maillé avec 3 200 éléments de type* LAGRANGE *linéaire. Les temps de calcul sont de l'ordre de* 1 *mn et de* 15 *mn, respectivement en régime permanent et en régime variable, sur un ordinateur de bureau « standard ». D'après [14].*

présentant des encombrements avec des répartitions non-homogènes. La procédure numérique consiste alors à définir un coefficient de diffusion pour chaque sous-domaine concerné (une salle, une zone d'encombrement homogène).

Le modèle de diffusion étant énergétique, la dépendance fréquentielle est uniquement prise en compte dans les conditions aux limites du problème, à travers le coefficient d'absorption, l'atténuation atmosphérique, la puissance de la source, etc. La fréquence n'intervient donc pas explicitement dans la résolution de l'équation de diffusion, ce qui entraîne que, contrairement aux codes de calculs acoustiques classiques, la taille du maillage n'est pas liée à la longueur d'onde considérée. Elle doit être néanmoins de l'ordre de grandeur (ou inférieure) au libre parcours moyen de la salle, de manière à pouvoir reproduire les fluctuations énergétiques spatiales.

5.3.2 Champ sonore dans une salle avec des réflexions diffuses

5.3.2.1 Salles cubiques

Absorption uniforme Le premier exemple que nous proposons est une salle cubique de $10 \times 10 \times 10$ m^3, d'absorption moyenne $\overline{\alpha} = 0.1$, au centre de laquelle est disposée une source sonore de puissance 100 dB [234]. La figure 5.6 illustre la distribution du champ sonore en régime permanent sur un axe transversal de la salle passant par la source, avec et sans le champ direct, comparé à la théorie statistique. Dans cet exemple, nous avons présenté les deux types de résolution possible, soit avec une absorption moyenne intégrée dans l'équation de diffusion associée à une condition de réflexion de type Neumann (*cf.* §5.2.3.1) (que nous appellerons modèle 1 par la suite), soit avec une équation de diffusion sans absorption avec une condition de réflexion mixte (*cf.* §5.2.3.2) (modèle 2). Cette figure montre bien que les deux approches sont similaires, et en accord avec la théorie statistique. La principale différence entre l'approche classique et le modèle de diffusion se situe autour du point source. Dans l'approche statistique, le niveau de pression associé au champ diffus est uniforme (figure 5.7(a)), tandis que le modèle de diffusion prévoit une augmentation du niveau autour de la source. Au point source, le modèle de diffusion présente une singularité[8] qui se retrouve également dans le calcul numérique, de manière plus ou moins importante en fonction de la taille du volume source. Pour un volume source de l'ordre de 20 cm, l'ensemble des simulations numériques que nous avons réalisées semble montrer que l'effet de cette singularité devient négligeable, notamment lorsque le champ direct est également pris en compte.

La figure 5.7 présente l'écart en %, pour le temps de réverbération, entre le modèle de diffusion et la théorie statistique (formule de Sabine, $TR = 0.16/\alpha S$), pour différentes valeurs du coefficient d'absorption moyen, et pour les deux modèles de diffusion. Là encore, le modèle de diffusion donne des résultats en accord avec la théorie statistique, avec des écarts inférieurs à 6% dans les cas les plus défavorables (aux absorptions les plus importantes). Cette figure montre également que le modèle 1 est plus en accord avec la théorie statistique (écart maximum de 4%) que le modèle 2, qui tend à surestimer les temps de réverbération.

Absorption non-uniforme D'autres exemples pour une salle quasi-cubique $4\times5\times3$ m^3 sont également présentés dans la référence [13], pour différents configurations d'absorption, uniformes et non-uniformes sur l'ensemble des murs, allant de 0.01 à 0.95. Là encore, le modèle de diffusion a été comparé à un logiciel de tracé de rayons (CATT-Acoustic[9]). Comme attendu, en condition d'absorption homogène comme non-homogène, le modèle de diffusion « Eyring » (*cf.* §5.2.3.3) donne de meilleurs résultats que modèle de diffusion « Sabine »[10].

8. Singularité de la fonction de Green de l'équation de diffusion en trois dimensions en régime permanent au point source.

9. CATT-Acoustic est un logiciel commercial de tracé de rayons sonores [5], permettant de prendre en compte la diffusion sur les parois du domaine, à travers un coefficient de diffraction (*scattering coefficient*) et une loi de Lambert. Dans les simulations présentée ici, la version V8.0c du logiciel a été utilisée. Le *scattering coefficient* a été fixé à 40% et 10^6 rayons sonores ont été considérés.

10. Pour les deux formulations du modèle de diffusion, les simulations numériques ont été réalisées avec 6 000 éléments.

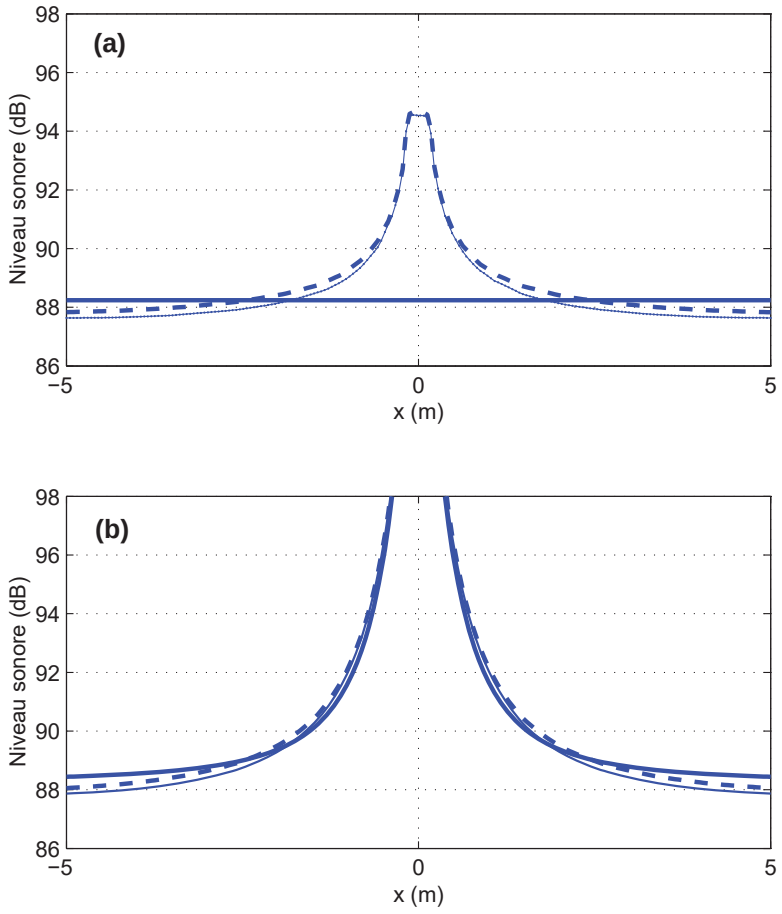


FIG. 5.6 — *Niveau sonore en régime permanent dans une salle cubique* $10 \times 10 \times 10\ m^3$*, d'absorption moyenne* $\bar{\alpha} = 0.1$*, au centre laquelle est disposée une source sonore de puissance* 100 *dB. (—) modèle de diffusion avec des conditions aux limites de* NEUMANN *homogènes (modèle 1), (—) modèle de diffusion avec des conditions aux limites mixtes, (– –) théorie statistique. (a) champ sonore diffus uniquement ; (b) champ sonore total (champ diffus et champ direct). D'après [234].*

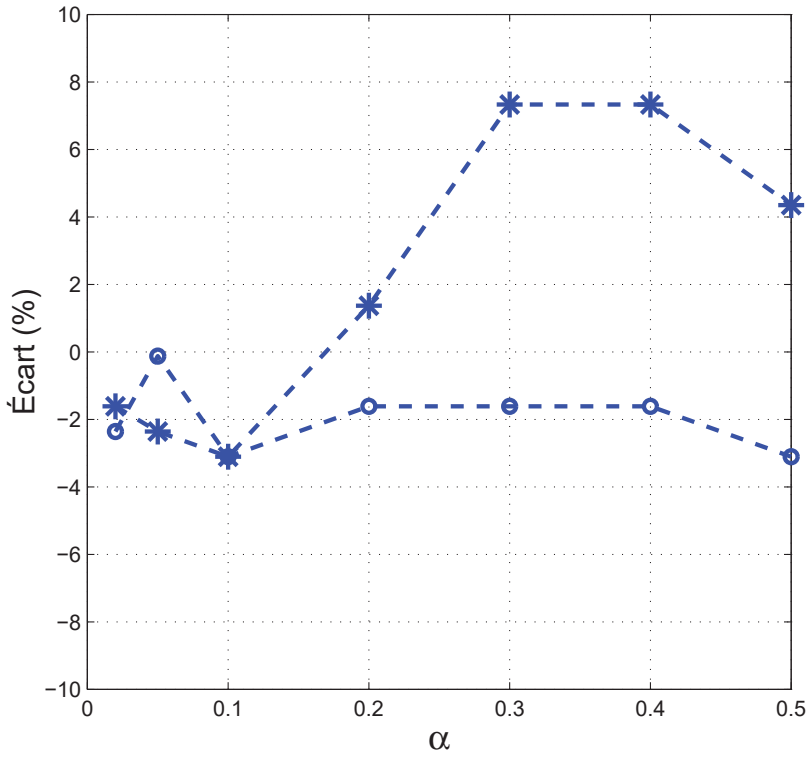


FIG. 5.7 — *Écart (en %) entre le temps de réverbération calculé par le modèle de diffusion et par la théorie statistique, dans une salle cubique* $10 \times 10 \times 10\ m^3$*, en fonction du coefficient d'absorption moyen (Sabine) : (∘) Modèle 1 ; (∗) Modèle 2. D'après [234].*

Absorption non-uniforme Dans cette même référence [13], le modèle de diffusion « EYRING » a également été comparé à des données expérimentales issues de la littérature [58]. Les mesures ont été réalisées dans une salle réverbérante contenant des panneaux absorbants de coefficient d'absorption compris entre 0.35 et 0.95 sur la bande de fréquences $[100, 5000]$ Hz (figure 5.8).

La figure 5.9 présente une comparaison des temps de réverbération expérimentaux pour deux configurations de mesure, avec plusieurs modèles dont les modèles de diffusion « SABINE » et « EYRING », les formules classiques de SABINE et EYRING, des formules issues de la littérature (non-présentées ici), et des résultats numériques avec le logiciel de tracé de rayons CATT-Acoustic. Là encore, le modèle de diffusion « EYRING » donne des résultats très proches des données expérimentales, avec une erreur moyenne de l'ordre de 12.9% et 17.9% respectivement dans les configurations 1 et 2. En comparaison avec les autres formules proposées dans la littérature, le modèle de diffusion donne globalement de meilleurs résultats, par ailleurs très proches des simulations numériques proposées par CATT-Acoustic. Néanmoins, il est utile de rappeler les temps de calcul pour les deux approches, soit environ 30 minutes pour CATT-Acoustic et quelques secondes pour le modèle de diffusion. Cette différence de temps de calcul souligne une nouvelle fois l'intérêt du modèle de diffusion.

5.3.2.2 Couloirs

La figure 5.10 présente une comparaison entre le modèle de diffusion et le logiciel de tracé de rayons sonores RAYSCAT[11], en termes de TR et EDT, dans un couloir de dimensions $4 \times 4 \times 32$ m^3, avec une source sonore localisée en $x = 2$ m [234]. L'accord entre les deux méthodes est tout à fait acceptable puisque les écarts ne dépassent pas 15%, les valeurs obtenues par le modèle de diffusion étant systématiquement plus élevées. Dans les deux cas, nous retrouvons bien le phénomène classique de l'augmentation du temps de réverbération avec la distance source-récepteur, surtout pour l'EDT. D'autres comparaisons avec des données expérimentales sont présentées dans la référence [204], entre des données expérimentales et des solutions analytiques du modèle de diffusion, avec également un bon accord.

5.3.2.3 Locaux plats

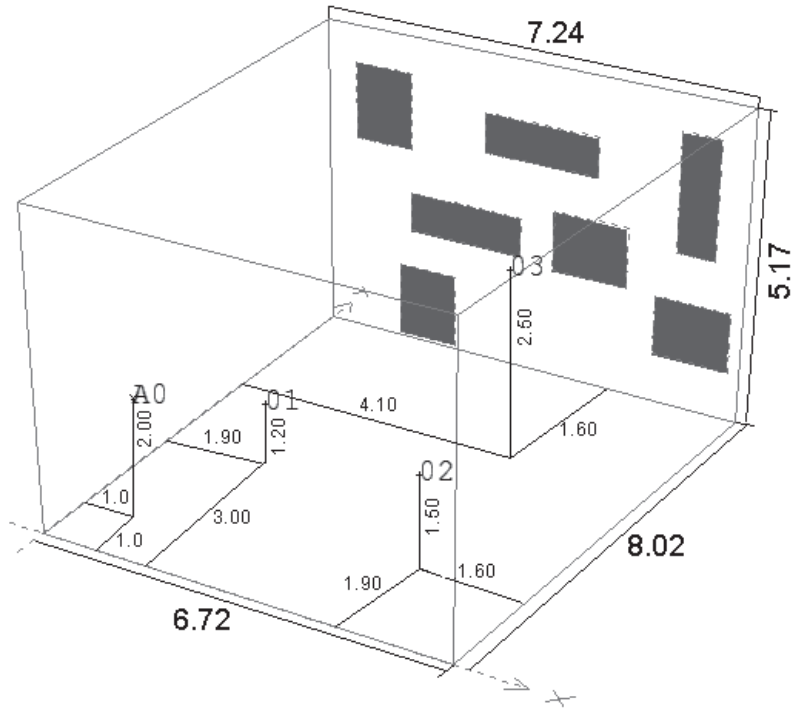
La figure 5.11 illustre une comparaison entre le modèle diffusion et le logiciel de tracé de rayons RAYSCAT, en termes de niveaux sonores le long de deux axes perpendiculaires ($y = 9.5$ m et $x = 4.5$ m) à 1 m au-dessus du sol, dans un local plat $20 \times 20 \times 2.5$ m^3 [234]. La source sonore de puissance 100 dB est localisée en $x = 4$ m et $y = 10$ m, à 1 m au-dessus du sol. Les parois de la salle sont caractérisées par un coefficient d'absorption uniforme de 0.05 excepté au niveau de la paroi en $y = 20$ m définie par $\alpha = 0.5$.

L'accord entre les deux modèles est là encore très bon, puisque les écarts sont inférieurs à 1 dB, les valeurs du modèle de diffusion étant systématiquement au-dessus de celles du logiciel de tracé de rayons (comme pour les niveaux sonores dans les couloirs). Les différences les plus importantes se situent au niveau de l'axe y présentant la différence d'absorption la plus importante.

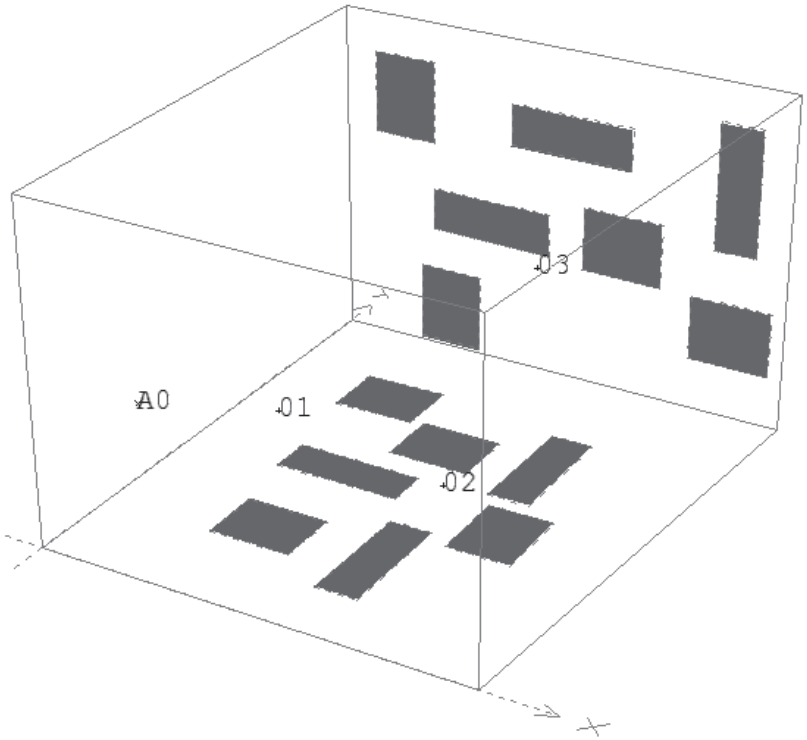
5.3.3 Champ sonore dans une salle avec des réflexions mixtes

Les simulations présentées dans le paragraphe précédent ont montré le bon comportement du modèle de diffusion lorsque les parois des salles sont supposées parfaitement diffuses. En pratique, les conditions de réflexion sont plutôt mixtes, à savoir en partie spéculaire et en partie diffuse. Comme nous l'avons présenté au paragraphe 5.2.5, il est possible d'apporter une correction η au coefficient de diffusion pour

11. RAYSCAT est un logiciel de tracé de rayons sonores intégrant des réflexions diffuses, suivant une loi de LAMBERT [184]. A la différence de CATT-Acoustic, ce logiciel permet également de considérer un encombrement dans le milieu. Dans les simulations en régime permanent présentées dans cette partie, nous avons considéré 10^4 rayons sonores et 20 réflexions par rayon. En régime impulsionnel, nous avons considéré 2×10^4 rayons sonores et 200 réflexions par rayon. Les temps de calculs sont de l'ordre de 20 s en régime permanent et 1 mn en régime impulsionnel.

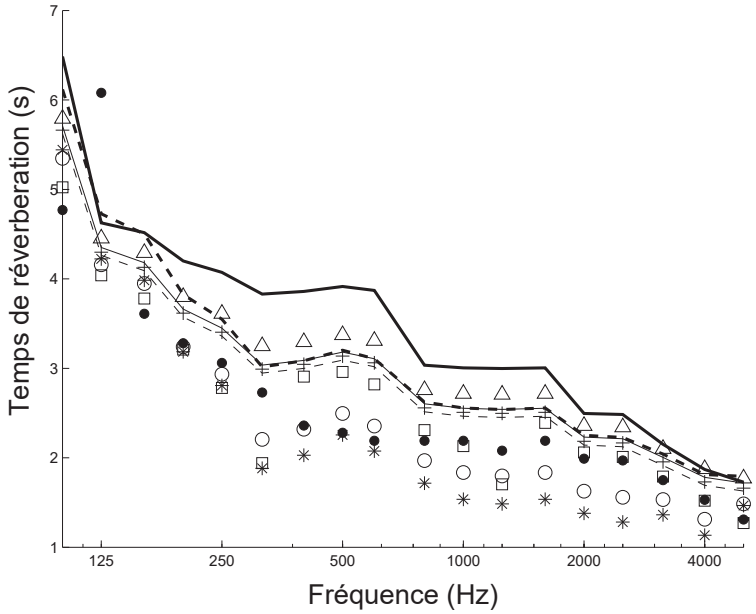


(a) Configuration expérimentale N°1

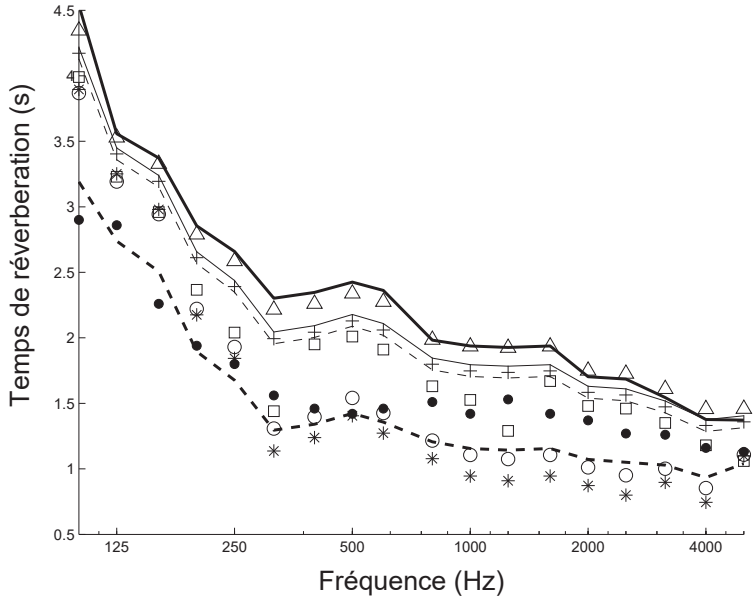


(b) Configuration expérimentale N°2

FIG. 5.8 — *Configurations expérimentales dans une salle réverbérante constituée de (a)* 7 *ou (b)* 14 *panneaux absorbants, de surface* $1.95 \times 0.65\ m^2$ *et* $1.26 \times 1.00\ m^2$. *Le point A*0 *désigne la position du point source (pistolet). Les points* 01, 02 *et* 03 *désignent les points de mesure. Les mesures sont détaillées dans la référence [58]. D'après [13].*



(a) Résultats pour la configuration N°1



(b) Résultats pour la configuration N°2

FIG. 5.9 — *Temps de réverbération en fonction de la fréquence pour les configurations expérimentales (a) et (b) de la figure 5.8 : (•) données expérimentales, (—) formule de* SABINE*, (– –) formule d'*EYRING*, (+) modèle de* ZHANG *[252], (∗) modèle de* DANCE *[47, 46], (⎯⎯) modèle de* ARAU *et* PURCHADES *[3], (– –) Modèle de* CREMER *[43, 44], (□) CATT-Acoustic, (△) modèle de diffusion «* SABINE *», (○) modèle de diffusion «* EYRING *». D'après [13].*

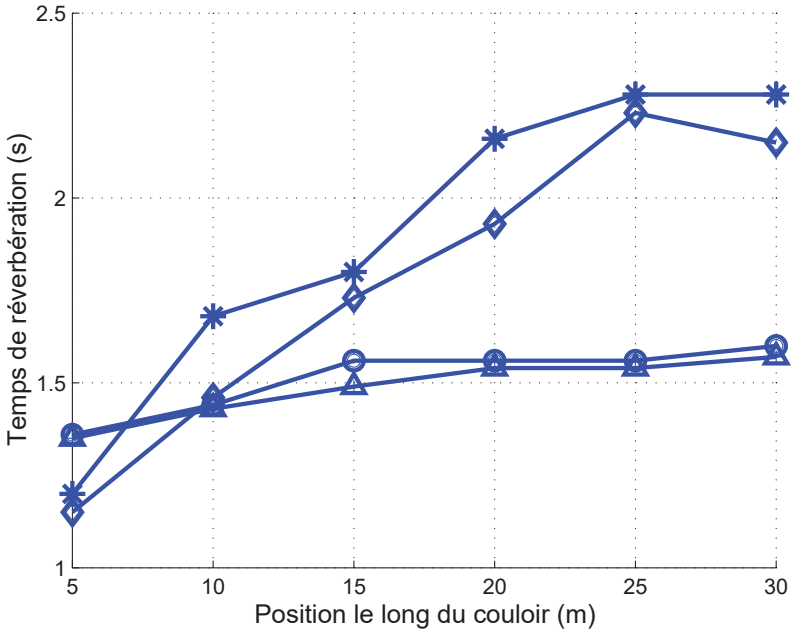


FIG. 5.10 — *Temps de réverbération dans l'axe d'un couloir de dimension* $4 \times 4 \times 32\ m^3$, *passant par la source localisée en* $x = 2$ *m. (∘) TR modèle de diffusion ; (△) TR tracé de rayons ; (∗) EDT modèle de diffusion ; (⋄) EDT tracé de rayons. D'après [234].*

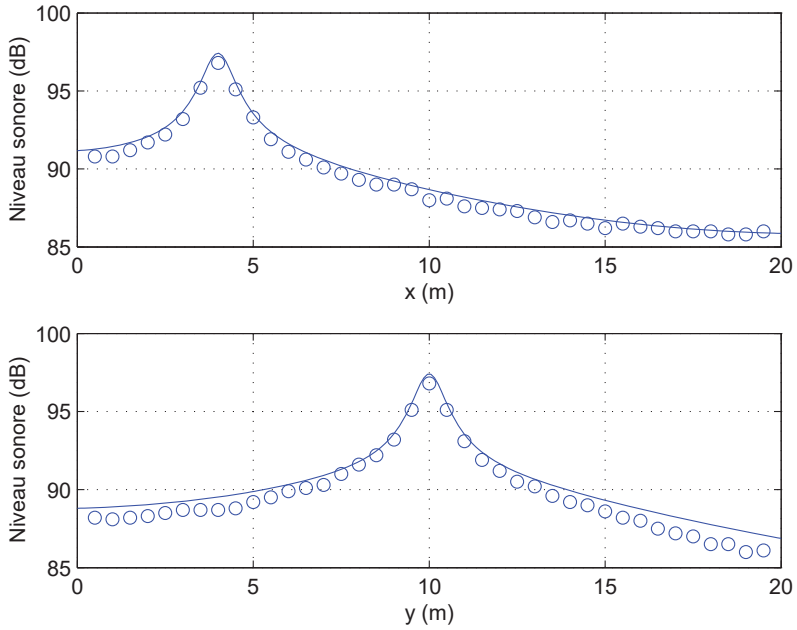


FIG. 5.11 — *Niveau sonore dans un local plat de* $20 \times 20 \times 2.5\ m^3$ *à* 1 *m du sol, le long des axes localisés en (a)* $y = 9.5$ *m et en (b)* $x = 4.5$ *m : (—) modèle de diffusion ; (∘) tracé de rayons. D'après [234].*

modéliser ce type de réflexion mixte. A titre d'illustration, la figure 5.12 montre l'évolution du champ sonore dans deux salles différentes, avec le logiciel de tracé de rayons avec plusieurs valeurs du *scattering coefficient* s, et avec le modèle de diffusion pour plusieurs valeurs de η. En comparant deux à deux les figures 5.12(a) et 5.12(b), ainsi que 5.12(c) et 5.12(d), on vérifie bien l'existence d'une concordance entre les valeurs de s et de κ. Dans ces exemples, la différence entre les deux modèles est inférieure au décibel pour les couples ($s = 1, \eta = 1$) (*i.e.* réflexion 100% diffuse), ($s = 0.5, \eta = 1.8$), et ($s = 0, \eta = 5$) (*i.e.* réflexion 100% spéculaire). Il est important de noter que ces couples de valeurs sont identiques pour les deux salles étudiées, ce qui laisse penser que la correction η est indépendante de la géométrie de la salle, mais fonction des conditions de réflexion. Par ailleurs, cette figure montre également que les courbes du modèle de diffusion et du modèle de tracé de rayons s'intersectent presque exactement au même point (figures 5.12(a) et 5.12(c)), phénomène déjà observé par Hodgson [94]. Bien que la méthode soit pour l'instant empirique, ce résultat confirme bien qu'il est possible de trouver un coefficient d'ajustement η du coefficient de diffusion pour modéliser des modes de réflexion autres que des réflexions 100% diffuses. Des travaux sont actuellement en cours pour généraliser ce résultat.

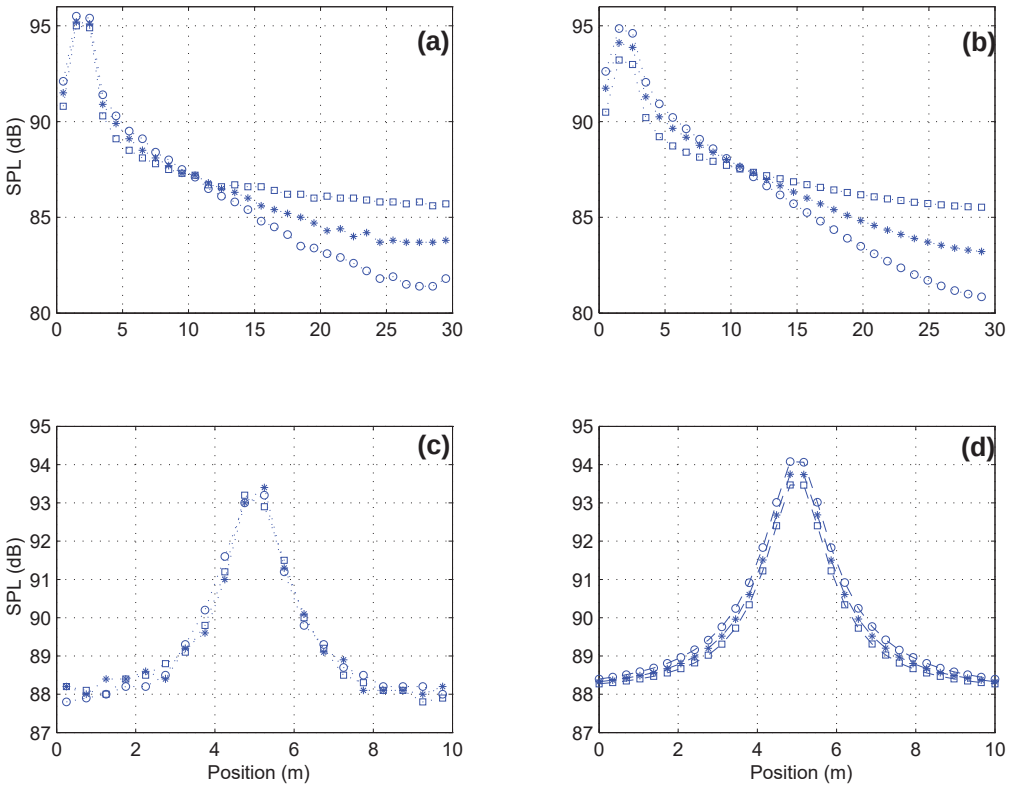


Fig. 5.12 — *Niveau sonore dans un local plat vide de dimension* $30 \times 8 \times 3.85\ m^3$ *(figures (a) et (b)) le long d'un axe* $y = 4\ m$ *à* $1.5\ m$ *de hauteur, et dans une salle vide cubique de dimension* $10 \times 10 \times 10\ m^3$ *(figures (c) et (d)) le long d'un axe* $y = 5.5\ m$ *à* $4.5\ m$ *de hauteur. Les figures (a) et (c) présentent les résultats numériques issus du logiciel de tracé de rayons avec* (○) $s = 1$, (∗) $s = 0.5$ *et* (□) $s = 0$. *Les figures (b) et (d) présentent les résultats numériques issus du modèle de diffusion avec* (○) $\eta = 1$, (∗) $\eta = 1.8$ *et* (□) $\eta = 5$. *D'après [233].*

5.3.4 Champ sonore dans des salles couplées

5.3.4.1 Comparaison avec la théorie statistique

Dans cet exemple, nous reprenons la configuration des deux salles couplées et de la source sonore présentée à la figure 5.5, en faisant varier les coefficients d'absorption de la salle source (contenant la source sonore) et de la salle réceptrice. La figure 5.13 présente la différence de niveaux sonores entre les deux salles, obtenue par le modèle de diffusion, et comparée à la relation donnée par la théorie classique des locaux couplés par [43, 138] :

$$L_S - L_R = -10 \log k_R, \tag{5.52}$$

où k_R désigne le coefficient de couplage (*coupling factor*) de la pièce réceptrice vers la pièce source, et où L_S et L_R représentent les niveaux sonores dans la salle source et dans la salle réceptrice, respectivement. Par définition, le coefficient de couplage k_R est défini par :

$$k_R = \frac{S_c}{S_c + A_R}, \tag{5.53}$$

où S_c et A_R désignent respectivement la surface de couplage et l'aire d'absorption équivalente de la salle réceptrice. Il est possible de définir de la même façon le coefficient de couplage de la pièce source k_S. Finalement, on définit également le coefficient de couplage moyen par $\kappa = \sqrt{k_S\, k_R}$.

Dans la théorie classique des locaux couplés, la différence de niveau est donc uniquement liée au facteur k_R, le champ sonore étant uniforme dans chacune des deux salles[12]. Le modèle de diffusion, quant à lui, donne une distribution non-uniforme du champ sonore dans chacune des salles (*cf.* figure 5.5). La différence de niveau entre les deux salles, pour le modèle de diffusion, est alors obtenue en calculant le niveau moyen dans chacune des salles.

Les résultats de la figure 5.13 sont présentés en fonction de κ, et montrent un comportement similaire entre le modèle de diffusion et la théorie classique des locaux couplés. On observe toutefois un biais systématique de l'ordre de 2 à 3 dB entre les deux approches, qu'il est pour l'instant difficile d'expliquer.

La figure 5.14 présente l'évolution des temps de réverbération dans chacune des salles, en fonction du coefficient de couplage moyen κ, pour les deux configurations (A) et (B) présentées à la figure 5.13. Là encore, les deux approches donnent des résultats tout à fait similaires, avec des écarts de l'ordre de 14% à 21% en fonction des configurations.

Des analyses plus détaillées du comportement du modèle de diffusion, comparé à la théorie classique, en fonction des conditions de couplage (absorption des salles, taille et position de la surface de couplage, etc.) sont présentées dans la référence [14]. L'ensemble des résultats montre que les deux modèles donnent des résultats similaires, à ceci près que le modèle de diffusion permet d'obtenir une distribution du niveau sonore et du temps de réverbération non-uniforme dans chaque salle, ce que ne permet pas la théorie classique.

5.3.4.2 Validation expérimentale

Campagnes de mesure De nombreuses campagnes expérimentales ont été réalisées conjointement par le LCPC et le LEPTAB, afin de valider l'application du modèle de diffusion aux locaux couplés. Ces mesures ont permis de recueillir une quantité considérable de données, sous la forme de niveaux sonores et de temps de réverbération (plus globalement, de réponses impulsionnelles), en de nombreux points dans les salles couplées. Plusieurs configurations ont été étudiées : des salles couplées directement par une ouverture, et des salles couplées *via* un couloir.

Dans ce document nous nous intéresserons uniquement à la configuration définie par deux salles de cours séparées par une ouverture (une porte ouverte), présentée à la figure 5.15. Cette configuration sera notée S1 par la suite. Le détail des mesures est présenté dans les références [14, 15].

12. Cette uniformité du champ sonore dans chaque salle est conforme à la théorie classique de la réverbération dont est issue la théorie des locaux couplés.

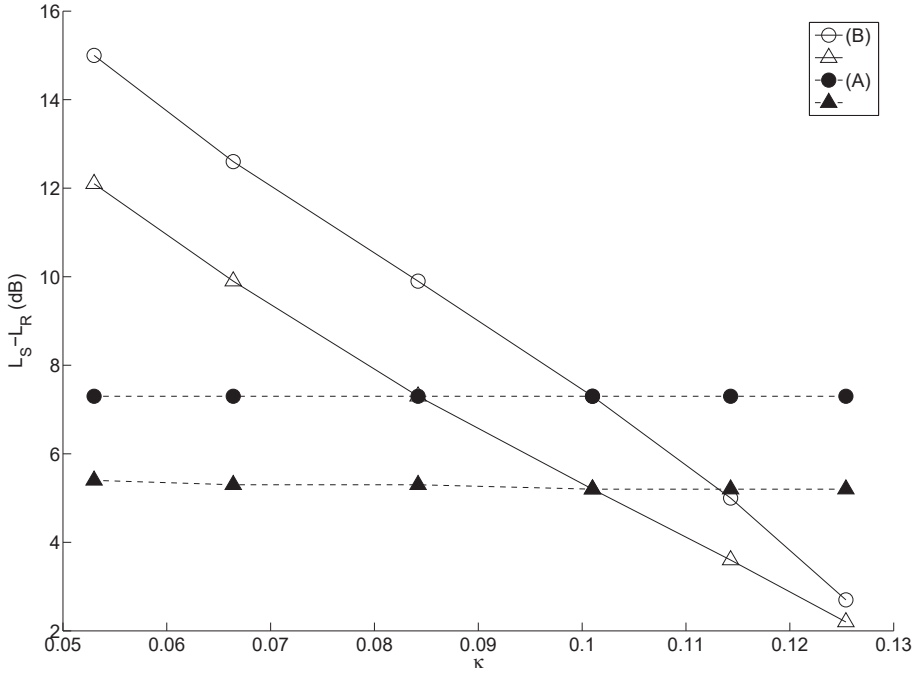
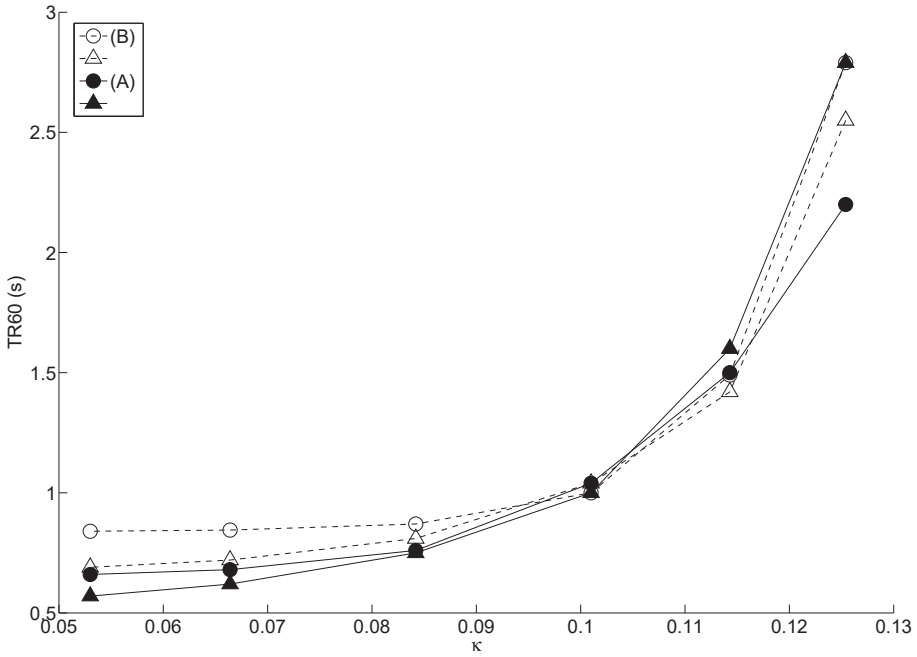
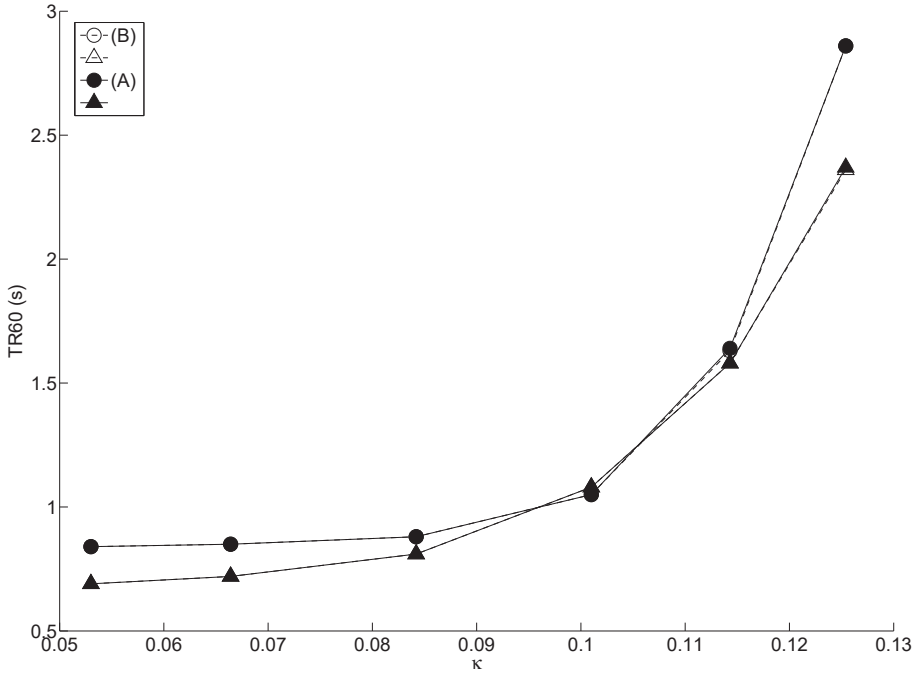


FIG. 5.13 — *Différence des niveaux sonores entre la salle source et la salle réceptrice (champ diffus uniquement), en fonction du coefficient de couplage moyen κ. (A) Le coefficient d'absorption de la salle réceptrice est constant et uniforme (*0.1*), tandis que celui de la salle source varie de* 0.02 *à* 0.7 *: (●) théorie statistique, (▲) modèle de diffusion. (B) Le coefficient d'absorption de la salle source est constant et uniforme (*0.1*) tandis que celui de la salle réceptrice varie de* 0.02 *à* 0.7 *: (○) théorie statistique, (△) modèle de diffusion. D'après [15].*



(a) Salle source



(b) Salle réceptrice

FIG. 5.14 — *Comparaison du modèle de diffusion avec la théorie statistique, pour des salles couplées en régime permanent. Temps de réverbération TR_{60} dans la salle source (a) et dans la salle réceptrice (b). (A) : (●) théorie statistique, (▲) modèle de diffusion ; (B) (○) théorie statistique, (△) modèle de diffusion. Les configurations (A) et (B) sont définies dans la légende de la figure 5.13. D'après [15].*

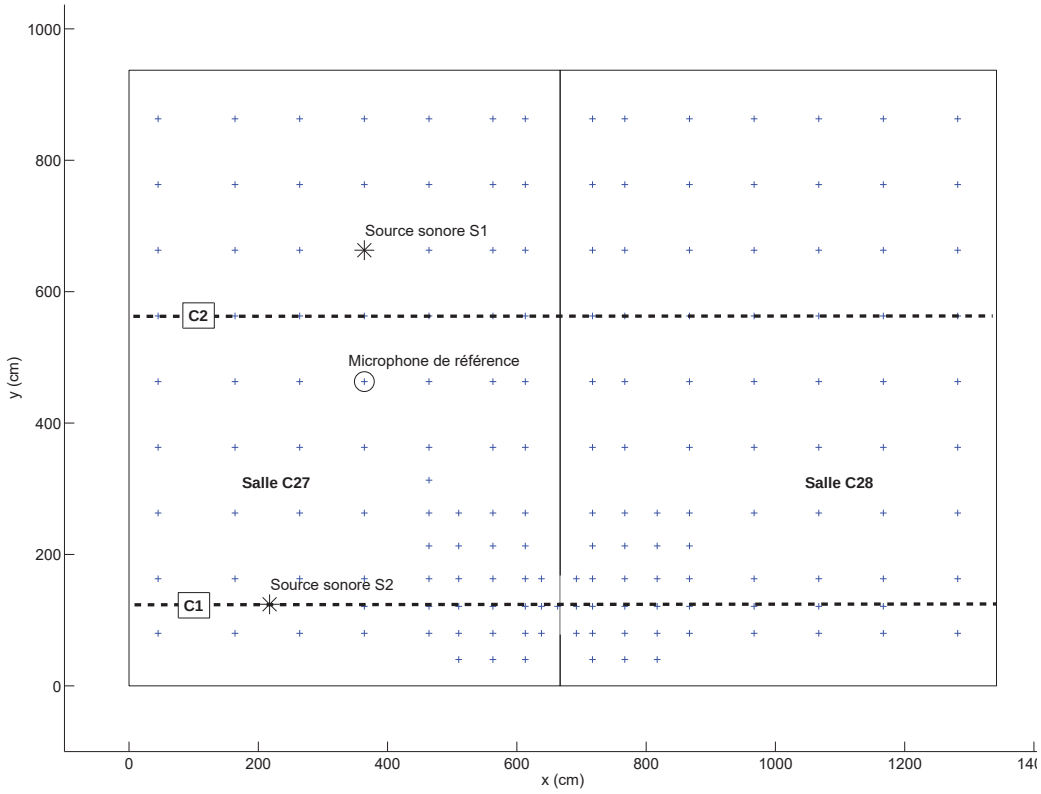


FIG. 5.15 — *Configuration de mesure (notée S1) dans deux salles couplées. La source sonore est localisée dans la salle C27. Un microphone de référence et située à* 2 *m de la source.* 165 *points de mesure (+) sont distribués dans les deux salles (*82 *points dans la salle C27 et* 83 *points dans la salle C28) à* 1.20 *m de hauteur. Une configuration similaire (notée S2) avec une source localisée sur l'axe C1 dans la salle C27 a également été considérée. D'après [15].*

Paramètres de calcul et données numériques La configuration S1 de la figure 5.15 a été simulée avec le modèle de diffusion. Le domaine d'étude à été discrétisé avec 5 400 éléments. Les réponses impulsionnelles en chaque point de mesure ont été calculées sur des intervalles de temps de 1.2 s. En parallèle, nous avons également modélisé cette configuration en utilisant le logiciel de tracé de rayons CATT-Acoustic, avec 20×10^6 rayons sonores pour obtenir une cartographie sonore globale du domaine[13], et 200×10^3 rayons sonores pour chaque point d'observation pour le calcul des temps de réverbération. Les caractéristiques d'absorption de chaque paroi, nécessaires dans la description des conditions aux limites du modèle de diffusion et du logiciel de tracé de rayons ont été obtenues par des mesures complémentaires.

Validation expérimentale du modèle de diffusion A titre d'exemple, la figure 5.16 présente la différence de niveaux sonores mesurée entre les deux salles, en fonction de la fréquence, comparée au modèle de diffusion et à la théorie classique. L'écart moyen entre le modèle de diffusion et les données expérimentales est de l'ordre de 0.5 dB, contre 0.4 dB pour la théorie classique. Cette dernière approche semble donc également très bonne dans cette configuration. Néanmoins, comme nous l'avons précisé au paragraphe 5.3.4.1, la différence de niveaux entre les deux salles prévues par la théorie classique est indépendante de la position de la source. Dans d'autres configurations de mesure, non-présentées ici, cette hypothèse met clairement en défaut l'approche classique, au profit du modèle de diffusion qui respecte mieux le phénomène.

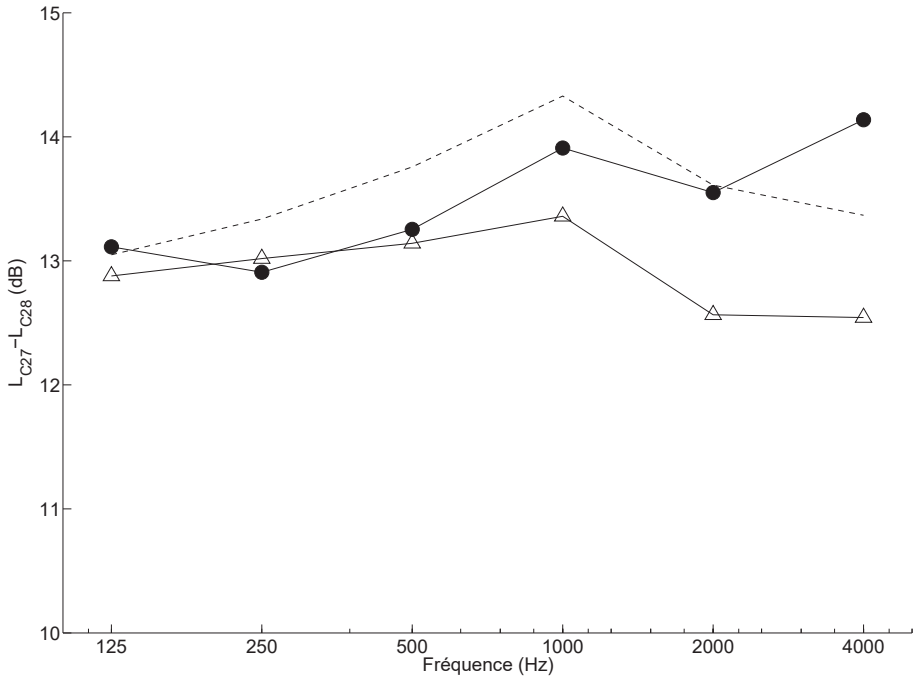


FIG. 5.16 — *Différence moyenne des niveaux sonores entre les deux salles couplées : (•) données expérimentales, (△) modèle de diffusion,(– –) théorie classique. D'après [15].*

La figure 5.17 montre l'évolution expérimentale du niveau sonore à 1 000 Hz, le long de l'axe C1 (figure 5.15), dans la configuration de mesure S2 (*cf.* légende de la figure 5.15), comparée au modèle de diffusion, à la théorie classique, ainsi qu'au logiciel de tracé de rayons CATT-Acoustic. Cette figure montre une nouvelle fois les limitations de la théorie classique qui ne peut pas prendre correctement en compte la transition des niveaux sonores au niveau du couplage entre les deux salles. A l'inverse, les deux

13. Pour garantir une précision suffisante dans la salle réceptrice, il est nécessaire de considérer un grand nombre de rayons sonores. En effet, plus la surface de couplage est petite, plus la probabilité qu'un rayon sonore traverse l'ouverture et soit comptabilisé dans un volume récepteur donné de la salle réceptrice est faible.

approches numériques donnent des résultats très similaires et très proches des donnes expérimentales. Pour des bandes de fréquence plus basses (vers 250 Hz, résultats non présentés ici), l'accord entre les deux modèles numériques est toujours vérifié, mais les résultats s'éloignent globalement des données expérimentales, probablement du fait de la présence de modes propres dans la salle. Pour des bandes de fréquences plus hautes, le modèle de diffusion tend à donner de meilleurs résultats que le logiciel de tracé de rayons. Dans l'ensemble, et pour toutes bandes de fréquence considérées, les écarts sont inférieurs à 2 dB.

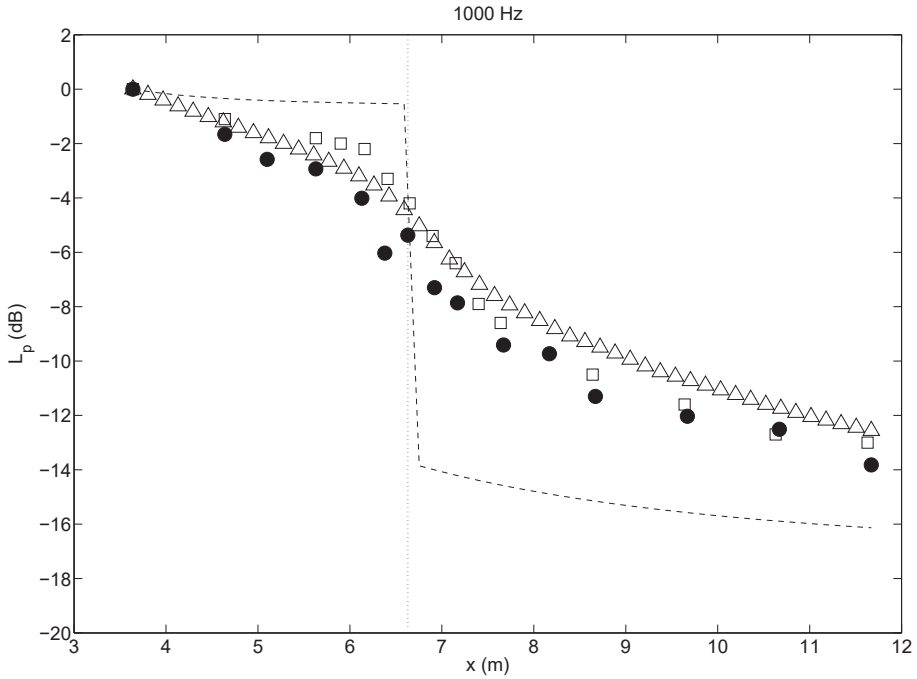


FIG. 5.17 — *Niveau sonore le long de l'axe C2 pour la configuration de mesure S2 à 1 000 Hz : (•) données expérimentales, (△) modèle de diffusion, (– –) théorie classique, (□) tracé de rayons. Le champ direct est pris en compte. D'après [15].*

Concernant les temps de réverbération, la figure 5.18 montre une nouvelle fois le bon comportement du modèle de diffusion et du logiciel de tracé de rayons, face à la théorie classique. L'écart maximum avec les données expérimentales est de l'ordre de 7.5% pour le modèle de diffusion. Ce résultat est généralisable pour l'ensemble des bandes de fréquence étudiées.

Globalement, le comportement du modèle de diffusion est donc excellent et très proche du logiciel de tracé de rayons, aussi bien en régime permanent qu'en régime variable. Néanmoins, le gain en termes de temps de calcul pour le modèle de diffusion est indéniable.

5.3.5 Champ sonore dans des locaux encombrés

5.3.5.1 Validation numérique

La figure 5.19 présente la distribution du niveau sonore dans une salle de dimension $30 \times 8 \times 4$ m^3 ($\lambda = 4.90$ m) d'absorption uniforme ($\overline{\alpha} = 0.1$), pour plusieurs conditions d'absorption et densité d'objets diffractants. Les résultats sont présentés pour le modèle de diffusion et pour le logiciel de tracé de rayons RAYSCAT (10^4 rayons, 100 et 200 réflexions par rayon respectivement en régime permanent et en régime variable). Les temps de calcul sont respectivement de 1 mn pour le logiciel de tracé de rayons pour 30 points d'observation en régime permanent et 30 s par point d'observation en régime variable, contre quelques secondes pour le modèle de diffusion dans les deux cas. Comme attendu, lorsque la salle est

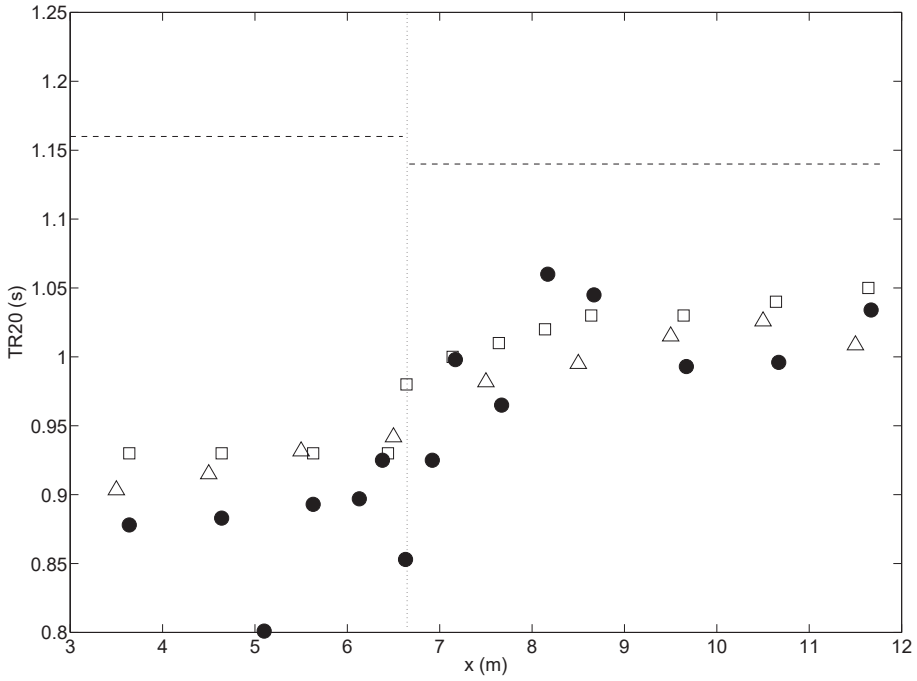


FIG. 5.18 — *Évolution du temps de réverbération TR_{20} à travers la surface de couplage (à $x = 6.70$ m), dans la configuration S2 à 1 000 Hz. (•) données expérimentales, (△) modèle de diffusion, (□) CATT-Acoustic, (– –) théorie classique. D'après [15].*

vide (figure 5.19(a)), les deux modèles donnent des résultats tout-à-fait similaires (écart maximum de 1 dB). Pour des densités d'objets diffractants plus importantes (figures 5.19(b) et 5.19(c), respectivement avec $\lambda/\lambda_f = 1$ et $\lambda/\lambda_f = 5$, l'accord entre les deux modèles est une nouvelle fois bon. Néanmoins, l'écart a tendance à augmenter lorsque l'absorption et la densité des objets diffractants augmentent, passant de 1 dB environ pour $\alpha_f = 0.01$ à quelques décibels pour $\alpha_f = 0.3$, notamment pour les distances sources-récepteurs les plus importantes.

La figure 5.20 présente les temps de réverbération pour trois points d'observation dans la même configuration (avec $\alpha_f = 0.1$), pour 4 densités d'objets diffractants. Lorsque la salle est vide ($\lambda/\lambda_f = 0$), le temps de réverbération augmente légèrement avec la distance source-récepteur pour les deux modèles, en accord avec les observations déjà présentées au paragraphe 5.3.2.2. Lorsque la densité d'objets diffractants augmente, les temps de réverbération diminuent globalement, mais continuent à augmenter avec la distance source-récepteurs. De manière générale, les deux approches donnent des résultats similaires avec des écarts inférieurs à 3%.

5.3.5.2 Validation expérimentale

Le comportement du modèle de diffusion a également été comparé à des données expérimentales. Les mesures ont été réalisées par ONDET et BARBRY [184] dans une salle de dimension $30 \times 8 \times 3.85$ m^3. Le sol, le plafond et les murs ont un coefficient d'absorption de 0.05, 0.15 et 0.10 respectivement. Deux configurations d'encombrement ont été testées : les configurations C et D présentent des objets diffusants uniquement dans la première moitié ($x < 15$ m) et dans la seconde moitié de la salle ($x > 15$ m) respectivement. La résolution de l'équation de diffusion est réalisée en considérant un coefficient de diffusion différent dans chaque zone de la salle. Cet encombrement ($\lambda_f = 3.9$ m) est constitué de blocks de polystyrene de $0.5 \times 0.5 \times 3.0$ m^3 avec un coefficient d'absorption $\alpha_f = 0.3$. Les parois étant supposées

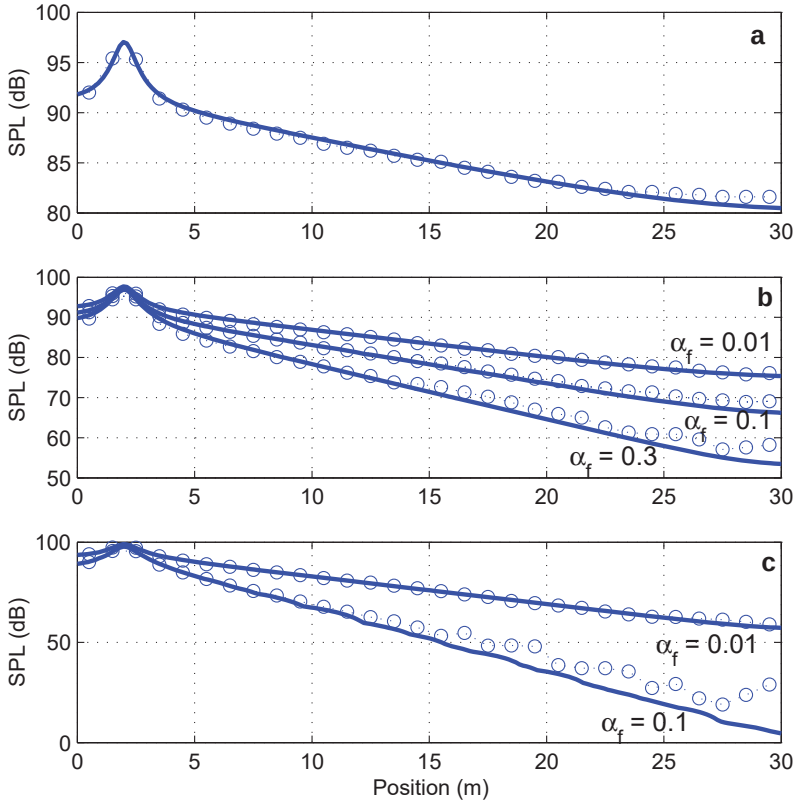


FIG. 5.19 — *Niveau sonore dans une salle de dimension* $30\times8\times4\ m^3$ *d'absorption uniforme* $\bar{\alpha} = 0.1$*, le long d'un axe* $y = 4\ m$ *à* $1.5\ m$ *de hauteur, pour plusieurs configurations d'absorption par les objets diffractants* α_f*. La source sonore de puissance* $100\ dB$ *est localisée au point* $(2, 4, 2)$*. (—) modèle de diffusion ; (○) tracé de rayons. (a) salle vide, (b)* $\lambda/\lambda_f = 1$*, (c)* $\lambda/\lambda_f = 5$*. D'après [233].*

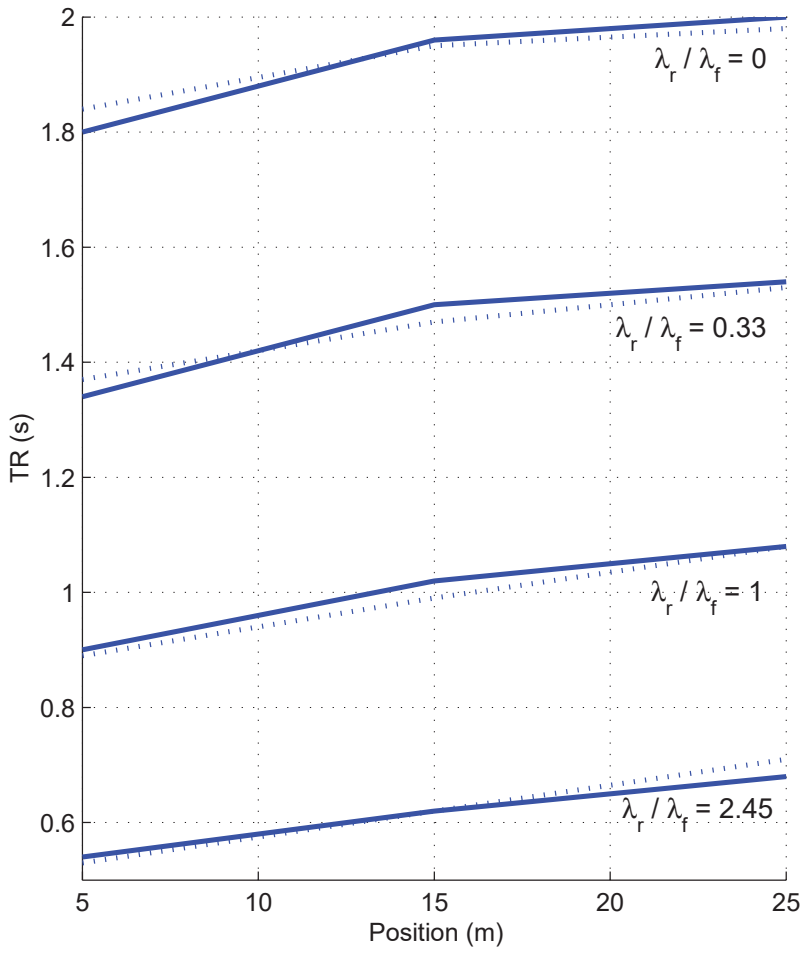


FIG. 5.20 — *Temps de réverbération dans une salle de dimension* $30\times8\times4\ m^3$ *d'absorption uniforme* $\bar{\alpha} = 0.1$*, le long de l'axe* $y = 4\ m$ *aux points* $x = 5, 15$ *et* $25\ m$*, en fonction de* λ/λ_f*. Les objets diffractants ont une absorption* $\alpha_f = 0.1$*. (—) modèle de diffusion, (− − − −) tracé de rayons. D'après [233].*

produire uniquement des réflexions spéculaires, une correction est apportée sur coefficient de diffusion en prenant $\eta = 5$, conformément aux résultats du paragraphe 5.3.3.

La figure 5.21 présente la comparaison des données expérimentales avec le modèle de diffusion et le logiciel de tracé de rayons RAYSCAT, en réflexion spéculaire ($s = 0$ et $\eta = 5$), ainsi qu'en réflexion diffuse ($s = 1$ et $\eta = 1$). Les modèles avec les réflexions spéculaires sont en très bon accord avec les données expérimentales, et en particulier le modèle de diffusion. A l'inverse, en réflexions diffuses les deux modèles sous-estiment les données expérimentales. Une analyse des décroissances temporelles en plusieurs points de la salle (le lecteur pourra se reporter à la référence [233]), permet également de mettre en évidence le phénomène de double pente communs aux deux modèles et identique à celui observé dans des salles couplées. Ce phénomène traduit une décroissance énergétique différentes au cours du temps, du fait d'un transfert d'énergie entre la zone avec encombrement et la zone sans encombrement, au bout d'un certain temps.

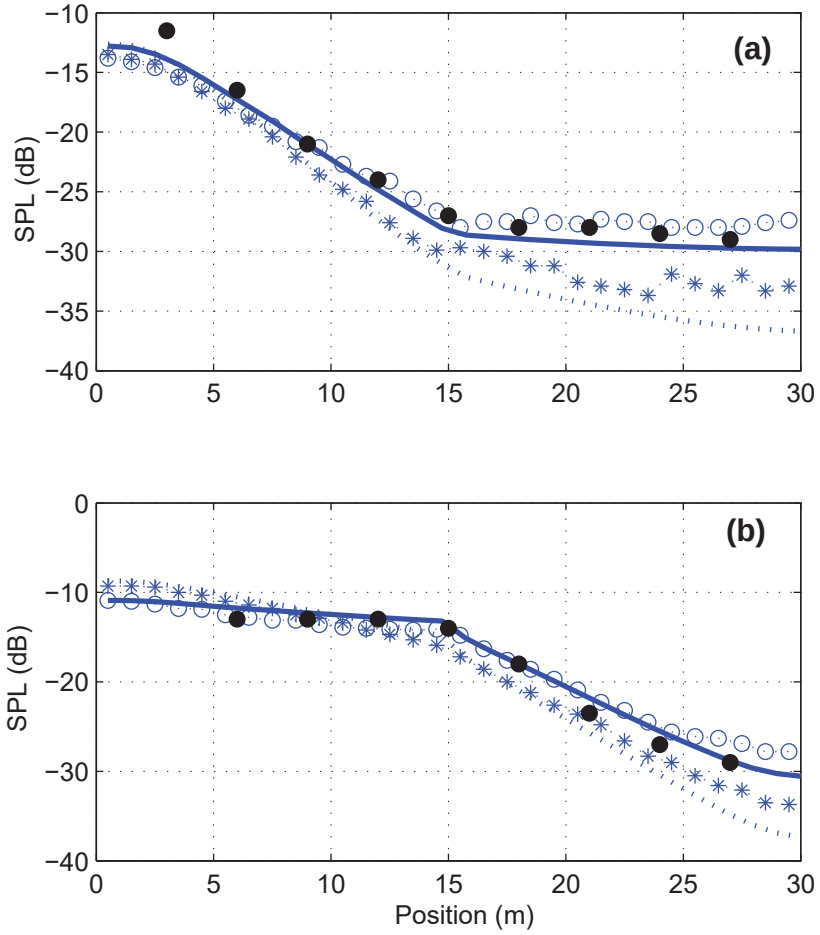


FIG. 5.21 — *Niveau sonore le long d'un axe $y = 4$ m, dans deux configurations d'encombrement : (a) configuration C et (b) configuration D [184].* (•)*, données expérimentales d'après [184], (—) modèle de diffusion avec $\eta = 5$, (. . .) modèle de diffusion avec $\eta = 1$,* (∘) *tracé de rayons avec $s = 0$,* (∗) *tracé de rayons avec $s = 1$. D'après [233].*

5.4 Conclusion

Nous avons donc mis en évidence l'existence d'un processus de diffusion dans des salles constituées de parois diffuses. Nous avons alors montré que le coefficient de diffusion est fonction du libre parcours moyen dans la salle. Ce modèle a été validé dans un premier temps par comparaison avec des données numériques, puis avec quelques données expérimentales.

Dans un second temps, nous avons entrepris une collaboration avec le LEPTAB qui a été d'une très grande richesse et a permis d'étendre le champ d'application du modèle au calcul du champ acoustique dans des salles vides ou encombrées, couplées ou non avec d'autres salles, avec des conditions de réflexions mixtes. Des compléments ont également été apporté pour prendre en compte l'atténuation atmosphérique dans le modèle, ainsi que la transmission acoustique.

Par rapport aux méthodes classiques de prévision du bruit dans les locaux, fondées sur des approches de type rayons sonores, le gain en termes de temps de calcul est très important. Il est ainsi possible d'obtenir une cartographie complète et précise des niveaux sonores et des temps de réverbération, en quelques minutes maximum, y compris pour des domaines de propagation très larges, de formes complexes et éventuellement encombrés. Cette rapidité de calcul est directement liée à l'utilisation d'une équation de diffusion, dont le schéma de résolution par des méthodes d'éléments finis ou de différences finies est parfaitement connu et optimisé. La précision des résultats numériques est avant tout définie par la finesse du maillage. Autour des « points ou des zones sensibles » (espaces de couplage, recoins, etc.), il est nécessaire d'affiner le maillage, mais sans pour autant augmenter les temps de calcul de manière inconsidérée. A l'inverse, les méthodes de tracé de rayons ne peuvent pas être « ajustées » pour ces « zones sensibles » et deviennent donc limitées dès que la géométrie présente des surfaces de couplage faible entre deux salles par exemple ou pour des salles de forme complexe.

Le modèle a largement été validé par des comparaisons avec la théorie classique de la réverbération, avec des logiciels de tracé de rayons et avec des données expérimentales. A ce stade, il reste encore à valider expérimentalement la prise en compte de la transmission acoustique entre les parois (*cf.* §5.2.3.4), phénomène prépondérant lorsque deux salles sont couplées *via* une cloison (sans ouverture) ou un plafond. L'autre point important se situe dans la détermination du coefficient η introduit au paragraphe 5.3.3 pour modéliser une condition de réflexion mixte. Une étude empirique (*cf.* note 4 à la page 174) portant sur un grand nombre de configurations géométriques (salles de dimension homogène, locaux plats, couloirs), pour de nombreuses conditions de réflexion (en fonction du *scattering coefficient* s) a déjà permis d'établir des lois empiriques de la forme $\eta = f(s)$. Néanmoins ce travail doit encore être validé. Une autre possibilité, plus complexe, consisterait à appliquer la même démarche que celle entreprise en acoustique urbaine (chapitre 4), qui a permis d'établir une relation entre les lois de réflexion des façades (en particulier avec le coefficient d'accommodation $d = 1 - s$) et l'expression analytique du coefficient de diffusion.

Dans le cadre du développement et de la validation du modèle de diffusion, l'utilisation du logiciel COMSOL Multiphysics™ a été d'une aide précieuse. Tout autre logiciel du commerce, résolvant une équation de diffusion, aurait d'ailleurs pu être utilisé. Néanmoins, dans un cadre plus opérationnel, dédié à l'acoustique du bâtiment, il conviendrait maintenant de développer un code spécifique. Le vocabulaire utilisé, l'entrée des paramètres acoustiques et leur dépendance fréquentielle, ainsi que le traitement des résultats seraient ainsi facilités.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Le développement d'un modèle de champ sonore adapté à la complexité de la morphologie architecturale urbaine a constitué l'essentiel de nos travaux de recherche. Le modèle repose sur une approche « particules sonores » et sur l'utilisation de la théorie des transports des particules. Une approche asymptotique, bien adaptée au cas des rues « étroites », a alors permis de réduire le processus de « transport » à un processus de « diffusion » de l'énergie acoustique, dont le coefficient de diffusion est fonction de la morphologie urbaine, à travers la largeur des rues et la loi de réflexion des façades. Concernant ce dernier point, nos études ont effectivement montré que le phénomène de diffusion de façade est prépondérant dans la distribution du champ sonore en milieu urbain. Dans notre approche, la diffusion est modélisée sous la forme d'une loi de réflexion, dont la génération à partir de la morphologie réelle de la façade, est difficile à mettre en oeuvre analytiquement, mais qui pourrait être réalisée numériquement dans l'avenir. Le modèle de diffusion a été validé par comparaison avec des simulations numériques et des données expérimentales, mais reste encore à développer pour prendre en compte d'autres phénomènes importants, tels que l'absorption acoustique par les façades, l'atténuation atmosphérique, les effets micro-météorologiques, etc. Face à la complexité de la mesure *in situ*, la validation du modèle pourra être envisagée sur maquette.

En parallèle, nous avons également proposé une approche similaire en acoustique architecturale, pour modéliser les champs sonores dans des configurations complexes (couloirs, réseaux de locaux, etc.). L'analogie entre la diffusion par les parois d'une salle et la diffusion par un milieu composé de particules cibles a ainsi permis d'établir la même équation de diffusion que pour la problématique urbaine. Dans ce cas, le coefficient de diffusion est fonction du libre parcours moyen de la salle. A terme, une approche par la théorie du transport devrait permettre de relier directement ce coefficient aux lois de réflexion des parois, comme nous l'avons fait pour le modèle en acoustique urbaine. Le modèle de diffusion a été validé en acoustique des salles par comparaison avec des données expérimentales et des logiciels de tracé de rayons. Par ailleurs, à la différence de l'approche « urbaine », le modèle de diffusion en acoustique des salles a largement été étendu pour prendre en compte d'autres phénomènes, tels que la transmission acoustique à travers une paroi, la présence d'encombrements, des conditions de réflexion mixtes (spéculaires et diffus), l'atténuation atmosphérique, l'absorption par les parois, etc.

Une implantation numérique de l'équation de diffusion a été proposée dans les deux domaines. Le premier intérêt de l'équation de diffusion, face notamment aux méthodes classiques basées sur les rayons sonores, réside d'abord dans les temps de calcul beaucoup plus courts, y compris pour des espaces complexes. La simulation d'un réseau de rues ou d'un réseau de couloirs, en environnement multi-sources, ne nécessite par exemple que quelques secondes en régime stationnaire et quelques minutes en régime variable. Le second intérêt réside dans la possibilité de coupler les phénomènes de propagation intérieure et extérieure. Les deux approches reposant strictement sur la même équation et sur le même type de conditions aux limites, ce couplage ne pose pas de problème. Cette possibilité de couplage permet d'envisager la simulation du champ sonore dans des configurations particulières, tels que les espaces de transition (halls d'entrée, cages d'escalier), ce qui était difficile, voire impossible, à mettre en oeuvre

avec les logiciels classiques. Pour des raisons pratiques, il sera toutefois nécessaire de proposer une version plus adaptée[1] du code de calcul, intégrant le « vocabulaire classique » d'un acousticien, ainsi que le calcul du champ direct et éventuellement des premières réflexions[2].

Comme nous venons de le signaler, la validation expérimentale des modèles restera un point essentiel. Face à la difficulté de la mesure *in situ*, que ce soit pour l'étude de la propagation du son en ville, ou de la diffusion du son par des façades ou par des diffuseurs urbains, notre choix devrait se porter sur l'utilisation de maquettes acoustiques. A cet effet, le LCPC vient de se doter d'un équipement spécifique et d'une salle semi-anéchoïque au Centre de Nantes.

1. Pour l'instant, nous utilisons le module de transfert thermique d'un logiciel multi-physique.

2. Le modèle de diffusion modélise uniquement le champ sonore résultant des multiples diffractions et diffusions des ondes sonores sur les parois et sur les objets du milieu de propagation, c'est-à-dire le *champ « diffus »* . Les premières réflexions, dont les effets peuvent être importants pour le calcul d'un certains nombre de critères d'acoustique des salles, ainsi que le champ direct doivent être rajoutés.

Annexe A

Publications traitant de méthodes numériques

Application numérique du concept de particules sonores à la modélisation des champs sonores en acoustique architecturale, J. Picaut, *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées* **258-259**, Thématique « Méthodes numériques en génie civil », pages 59-88 (octobre-novembre-décembre 2005).

Numerical modeling of urban sound fields by a diffusion process, J. Picaut, *Applied Acoustics* **63**(9), pages 965-991 (septembre 2002).

Application numérique du concept de particules sonores à la modélisation des champs sonores en acoustique architecturale

Judicaël PICAUT

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Centre de Nantes

RÉSUMÉ

La modélisation des champs sonores en acoustique architecturale est à l'origine de nombreux développements. En raison de la complexité des phénomènes physiques et des formes architecturales, la plupart des applications professionnelles se sont orientées vers des méthodes totalement numériques et, notamment, les méthodes de tracés de rayons. Néanmoins, par construction, ces modèles se heurtent encore aux difficultés de modélisation de certains phénomènes, en particulier les effets des réflexions diffuses au niveau des parois, la diffusion par des encombrements dans le milieu de propagation et la prise en compte des effets météorologiques.

Une alternative aux méthodes numériques classiques, fondée sur le couplage du concept de particules sonores avec des méthodes de tirages aléatoires, est décrite. Elle permet de modéliser l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu lors de la propagation du son. Un algorithme général permettant d'intégrer simultanément l'ensemble de ces phénomènes est proposé et les méthodes de tirage aléatoire utilisées sont détaillées. À titre de validation, plusieurs applications en acoustique des salles sont décrites et comparées à des données expérimentales.

DOMAINE : *Sciences pour le génie civil.*

ABSTRACT

NUMERICAL APPLICATION OF THE CONCEPT OF SOUND PARTICLES TO MODELING SOUND FIELDS IN ARCHITECTURAL ACOUSTICS

The sound field modeling in architectural acoustics lies at the origin of many developments. As a result of the complexity of both physical phenomena and architectural forms, the majority of professional applications have been oriented towards fully-numerical methods, and in particular sound rays based methods. However, by construction, such techniques still encounter difficulties in modeling some phenomena, especially the diffuse reflection by walls, the diffusion by scattering objects in the propagation medium and the meteorological effects.

In this paper, we present an alternative to conventional numerical methods, based on coupling the concept of sound particles with Monte Carlo methods, such approach enables to model most of physical phenomena occuring during sound propagation. A general algorithm that allows simultaneously integrating all these phenomena is proposed and the random drawing methods are detailed. For validation purposes, several applications in room acoustics are discussed and compared with experimental data.

FIELD: *Civil engineering sciences.*

INTRODUCTION

La modélisation des champs sonores en acoustique architecturale est à l'origine d'un nombre considérable d'études, en un premier temps, dans le cadre de l'acoustique des salles, puis plus récemment, en acoustique urbaine. Dans chacun des cas, l'objectif de ces travaux est de proposer un ou plusieurs modèles capables de prévoir avec précision le comportement du champ sonore (réverbération, distribution spatiale), ou, de manière plus aboutie, permettant de simuler virtuellement l'acoustique d'un lieu (*auralisation*). Devant la complexité de la tâche, plusieurs approches ont été envisagées.

- **Les méthodes de décomposition modale et de résolution de l'équation des ondes** [Bruneau, 1998], bien que permettant une approche analytique exacte, sont difficilement applicables dans la majeure partie des situations courantes. En effet, cette démarche qui consiste à décomposer le champ sonore sur les modes propres du milieu de propagation, est utilisée uniquement pour des géométries simples, fermées, vides et avec des caractéristiques d'absorption et de réflexion uniformes au niveau des surfaces, ce qui n'est évidemment pas le cas en pratique. Par ailleurs, les méthodes numériques

fondées sur les éléments finis ou les éléments de frontière deviennent inapplicables à l'échelle d'une salle, notamment en haute fréquence où les longueurs d'ondes sont très petites par rapport aux dimensions du milieu de propagation. Même dans l'état actuel des performances des systèmes informatiques, de tels calculs numériques nécessiteraient la prise en compte d'un nombre considérable d'éléments (nœuds, mailles, etc.) et la résolution numérique de matrices de dimensions incommensurables.

- **La théorie classique de la réverbération** (ou théorie de Sabine), dont les fondements datent des travaux de W.C. Sabine [Cremer et Müller, 1982], est couramment employée en acoustique des salles. Elle décompose la densité d'énergie totale du champ sonore en deux parties : le *champ direct*, résultant du rayonnement direct de la source, et le *champ réverbéré* résultant des multiples réflexions du son sur les parois du domaine. Par construction, la théorie classique de la réverbération impose l'uniformité de la réverbération et l'absence de flux d'énergie dans l'ensemble du milieu de propagation. Autrement dit, l'énergie sonore et le temps de réverbération sont uniformes en tout point de la salle. Ces considérations permettent d'exprimer le temps de réverbération et l'énergie du champ réverbéré dans la salle, sous forme d'expressions analytiques simples, parmi lesquelles les formules de Sabine et d'Eyring bien connues. Malheureusement, cette hypothèse dite de *champ diffus* n'est plus vérifiée en pratique, dès lors que la forme du milieu de propagation n'est plus homogène et que l'absorption acoustique devient importante et non uniforme. De plus, la théorie de la réverbération s'applique mal aux géométries présentant des ouvertures et, en particulier, au cas du milieu urbain.
- **La méthode des sources-images** [Cremer et Müller, 1982 ; Kuttruff, 2000], issue de l'*acoustique géométrique*, permet de calculer la densité d'énergie sonore dans un milieu complexe et repose sur une analogie avec les rayons lumineux. Elle est fondée sur la construction de sources virtuelles, images de sources réelles, simulant l'effet des réflexions successives de l'énergie sonore sur les parois de l'enceinte. La contribution énergétique de chaque source-image en un point donné est celle habituellement rencontrée dans le cas de la propagation en champ libre, pondérée par le coefficient d'absorption des parois considérées. Cette approche, principalement numérique, est néanmoins réductrice dans la mesure où les réflexions sur les parois du domaine sont traitées intégralement de manière *spéculaire* (angle de réflexion égal à l'angle d'incidence), alors que de nombreux auteurs ont montré l'importance des effets des réflexions diffuses dans le calcul du champ sonore [Hodgson, 1991] et dans les procédures liées à l'auralisation [Torres et *al.*, 2001].

60

- **La méthode du tracé de rayons** [Kulowski, 1985], très démocratisée, a donné naissance à de nombreux logiciels commerciaux de prévision du champ sonore, aussi bien en acoustique des salles qu'en milieu extérieur. Cette approche, également géométrique, suppose que l'énergie sonore est distribuée à un certain nombre de rayons rectilignes émis à partir d'une source sonore et déviés de manière spéculaire lors de leur rencontre avec les parois du milieu de propagation. Le calcul de l'énergie sonore au niveau d'un volume récepteur est réalisé par comptage du nombre de rayons qui le traversent. Le problème majeur réside dans la définition de la taille de ce volume, le plus souvent une sphère. En effet, il doit être représentatif d'un récepteur réel, mais doit également permettre de comptabiliser suffisamment de rayons sonores pour déterminer le niveau d'énergie de manière précise, ce qui en pratique nécessite de tirer un grand nombre de rayons sonores, et ce d'autant plus que le milieu de propagation est de forme complexe et constitué de volumes couplés.
- Au-delà de ces méthodes « classiques » qui ont donné lieu à la plupart des outils actuels de prévision des niveaux sonores en acoustique architecturale, on peut également citer d'autres méthodes plus complexes, comme les méthodes hybrides tracé de rayons/sources-images [Korany et *al.*, 2001] et les méthodes de radiosité fondées sur une analogie avec l'éclairage [Kuttruff, 2000 ; Kang, 2002], etc. Néanmoins, la plupart du temps, ces méthodes sont trop complexes à mettre en œuvre et trop coûteuses en temps de calcul.

En plus des limitations propres à chacune de ces approches, la grande variété de configurations potentiellement intéressantes d'un point de vue pratique (couloirs, locaux plats, salles couplées, parkings couverts, rues, etc. présentant des encombrements, des réflexions diffuses, des ouvertures, etc.) est à l'origine d'autant de modèles analytiques ou numériques différents. À notre connaissance, il n'existe pas d'approche générale, même numérique, s'appliquant à l'ensemble des configurations possibles. Enfin, pour être complet, il faut également signaler que la plupart de ces approches, comme celles fondées sur les sources images et le tracé de rayons sonores, prennent difficilement en compte les effets météorologiques tels que le vent, les gradients de célérité du son et la turbulence atmosphérique, pourtant très importants en milieu ouvert [Piercy, 1977 ; Embleton, 1996], mais également en milieu urbain [Ögren 2004].

Que ce soit pour valider les approches mathématiques développées au LCPC ou pour étudier la propagation du son dans des milieux complexes, il a semblé important de pouvoir disposer d'un outil

numérique complet et fiable, qui puisse intégrer l'ensemble des phénomènes physiques et s'appliquer à la plupart des configurations géométriques (rues, salles, couloirs, etc.). Face à cette problématique, nous nous sommes orientés vers une approche originale fondée sur le concept des *particules sonores* (ou *phonons*). Cette méthode, issue de l'acoustique géométrique, est similaire, sur le plan du principe, aux méthodes de tracé de rayons, mais permet de prendre en compte la plupart des phénomènes physiques participant à la propagation du son, à travers des procédures de tirage aléatoire. Bien que cette approche ait largement été développée dans le cadre de nos propres travaux, les premières études datent des années 1980-1990, en particulier avec celles de Stephenson [1985, 1990]. Stephenson a, d'une part pressenti l'énorme potentialité de la méthode pour modéliser des phénomènes complexes comme la diffraction, la réfraction, la diffusion, etc. et, d'autre part, montré que ce type d'approche est plus rapide que les méthodes de tracé de rayons [Stephenson, 1985].

Dans cet article, un algorithme général est proposé pour simuler les champs sonores dans une enceinte encombrée ou non, définie par des parois complexes [Picaut, 2004a]. Nous détaillons plus particulièrement le principe des méthodes de tirage aléatoire utilisées dans cet algorithme et leurs applications aux différents phénomènes. Cet algorithme a par ailleurs déjà été utilisé pour différentes études sur les effets de la diffusion de parois en acoustique des salles [Picaut, 2003] et en milieu urbain [Picaut, 2004b].

Ce travail s'inscrit globalement dans l'approche de Stephenson, mais a néanmoins été étendu à plusieurs phénomènes qui seront détaillés par la suite, dont notamment : la possibilité de considérer une loi de réflexion-diffuse arbitraire au niveau des parois, la prise en compte probabiliste de l'encombrement dans une enceinte et la modélisation de l'atténuation atmosphérique. La seconde évolution majeure porte sur la possibilité de considérer simultanément l'ensemble de ces phénomènes. Les aspects météorologiques, qui constituent une des perspectives de l'approche, seront développés ultérieurement. Le traitement spécifique des réponses impulsionnelles obtenues par les simulations est également présenté.

Dans un premier temps, nous nous sommes limités à des géométries rectangulaires (rues en U, salles rectangulaires, couloirs), qui représentent assez bien la plupart des cas réels, mais cette approche pourra aisément être étendue à des géométries plus complexes.

À titre d'illustration et de validation, nous présentons à la fin de l'article plusieurs applications pour des couloirs, des locaux plats et des locaux encombrés qui montrent le bon comportement du modèle numérique. Ces comparaisons constituent d'ailleurs une autre originalité de l'article, puisque les quelques études présentées dans la littérature ne présentent généralement que des résultats numériques sans autres comparaisons [Stephenson, 1985 et 1990].

Dans la première partie de cet article, le concept de particules sonores et le principe des simulations numériques sont présentés en détail. En particulier, il est montré comment des procédures de tirage aléatoire peuvent modéliser une source sonore, les réflexions sur les parois, les collisions avec l'encombrement ainsi que l'atténuation atmosphérique. Pour exploiter complètement les résultats numériques en termes de niveaux sonores et de temps de réverbération, la seconde partie de ce document montre qu'il est nécessaire de procéder à des traitements spécifiques des données, d'une part pour augmenter la dynamique des simulations et, d'autre part, pour compenser les effets liés à une simulation numérique sur une durée tronquée. Enfin, dans la dernière partie, nous présentons plusieurs applications, ainsi que des comparaisons à des données expérimentales et des modèles classiques.

Particules sonores et simulation numérique de Monte-Carlo

Le concept de particules sonores

À l'inverse de la théorie acoustique classique où l'étude du champ sonore s'appuie sur la propagation d'une onde dans un milieu matériel continu, l'approche utilisée ici est géométrique, et plus particulièrement particulaire [Joyce, 1974]. Dans un domaine de propagation complexe, le champ sonore est alors décomposé en une multitude de particules élémentaires, appelées particules sonores ou phonons, sans interaction mutuelle et porteuses d'une énergie infinitésimale et constante au cours du temps. Ces particules se propagent en ligne droite à la vitesse du son, entre deux chocs successifs avec les obstacles et limites du milieu de propagation (objets diffusants, parois, façades,

voitures, etc.). Lors d'une collision avec un obstacle ou une limite du domaine de propagation, les particules peuvent être absorbées ou réfléchies dans une nouvelle direction de propagation. L'acoustique géométrique devient ainsi un cas particulier de la dynamique des particules, de telle manière qu'un champ sonore peut être assimilé à un gaz de particules sonores. Dans ces conditions, la répartition de l'énergie du champ sonore est assimilée à la répartition des particules sonores. La densité locale d'énergie sonore étant proportionnelle à la densité locale de phonons, la seule difficulté réside dans la détermination de la répartition de ces particules sonores au cours du temps. Bien que des approches analytiques puissent être envisagées dans certaines conditions [Le Pollès, 2003], une approche entièrement numérique a été choisie ici. Avec l'évolution des puissances de calcul, la simulation numérique d'un système composé de plusieurs centaines de milliers de particules n'est plus une difficulté majeure et, au contraire, ouvre des portes considérables en matière de simulation numérique de champs sonores.

Particules sonores et rayons sonores

Ce concept est relativement similaire à ceux des méthodes classiques de « tracé de rayons sonores », implantées dans la plupart des logiciels actuels de prévision de bruit en milieu fermé ou ouvert. On pourra citer par exemple les logiciels ODEON (Brüel et Kjær) ou CATT-Acoustic (CATT) en acoustique des salles, et Mithra (CSTB) ou Predictor (Brüel et Kjær) en milieu extérieur. Néanmoins, même si ces deux méthodes sont comparables dans la forme, les différences majeures se situent au niveau de la gestion de l'énergie sonore portée par les particules sonores et les rayons sonores. En ce qui concerne cette dernière méthode, chaque rayon sonore est porteur d'une intensité dont l'amplitude décroît proportionnellement avec le carré de la distance de propagation, simulant ainsi le rayonnement acoustique d'une source sphérique (dispersion géométrique). À l'inverse, dans le concept des particules sonores, chaque particule est porteuse d'une énergie constante.

Par ailleurs, l'ensemble des phénomènes physiques intervenant pendant la propagation (réflexion, absorption, diffusion, atténuation atmosphérique) ne sont pas considérés de la même manière dans les deux méthodes. Dans l'approche « rayons sonores », ces phénomènes interviennent sous la forme d'une pondération appliquée à l'intensité sonore portée par un rayon. Par exemple, au contact avec une paroi de coefficient d'absorption α, l'intensité du rayon après réflexion sera pondérée par le coefficient $(1-\alpha)$. Dans l'approche « particules sonores », ces phénomènes physiques sont considérés de manière probabiliste. Au contact avec une paroi de coefficient d'absorption α, la particule aura une probabilité $(1-\alpha)$ d'être réfléchie, et une probabilité α d'être absorbée. Dans ce dernier cas, elle disparaît du domaine de propagation.

62

Un des atouts majeurs du concept de particules sonores réside dans la prise en compte des réflexions diffuses sur les parois et de la diffusion par des encombrements. Dans les méthodes de rayons sonores, les réflexions par les parois sont déterminées par des méthodes de sources-images n'autorisant que des réflexions de type « spéculaire », parfaitement déterministes, et interdisant la prise en compte des phénomènes de « réflexion diffuse ». Dans l'approche particulaire, ces réflexions diffuses sont considérées de manière probabiliste, l'angle de réflexion pouvant être choisi suivant une loi quelconque de réflexion arbitraire.

Il en est également de même dans la prise en compte de la diffusion par des objets répartis dans le milieu de propagation (machines dans des locaux industriels par exemple). Dans l'approche « rayons sonores », il est nécessaire de connaître exactement la forme et la position de l'objet pour calculer de manière déterministe l'angle de réflexion d'un rayon sonore sur celui-ci. Dans l'approche particulaire, les objets diffusants peuvent être considérés de manière statistique, sans aucune autre connaissance que leur distribution spatiale et leur forme moyenne, ce qui réduit de manière significative les coûts en termes de calcul et de définition du domaine d'étude.

Cette description probabiliste, généralisable à la plupart des phénomènes physiques entrant en jeu lors la propagation du son, fait donc la grande force de l'approche « particules sonores » face à l'approche « rayons sonores ».

Principe des simulations numériques

Le principe des simulations repose sur le suivi de particules sonores (Fig. 1), porteuses d'une énergie élémentaire ε, émises depuis une source de puissance W (ou de niveau de puissance L_W), dans une enceinte de volume V totalement ou partiellement fermée. Chaque particule se propage en ligne droite jusqu'à la réflexion par une paroi ou la collision avec un objet diffusant. À chaque

réflexion ou collision, la particule sonore peut être absorbée ou réfléchie, en fonction du coefficient d'absorption de la paroi ou de l'objet, suivant une procédure de tirage aléatoire. Si la particule est réfléchie, la direction de réflexion est alors déterminée, à nouveau par tirage aléatoire, suivant une loi de distribution caractérisant la paroi ou l'objet. Par ailleurs, la particule étant soumise à l'atténuation atmosphérique au cours de son trajet, elle peut être absorbée par le milieu de propagation et donc disparaître du système. Là encore, une procédure de tirage aléatoire est nécessaire.

Le traitement des réflexions, des collisions et de l'atténuation atmosphérique étant réalisé par des tirages successifs de nombres aléatoires, cette procédure de simulation est assimilée à une méthode de Monte-Carlo [Burns et *al.*, 1990]. Les phénomènes physiques, simulés par ces tirages de nombres aléatoires, seront d'autant mieux respectés que le nombre de tirages aléatoires sera grand, c'est-à-dire que le nombre initial N de particules sonores sera lui aussi très grand. Néanmoins, plus N sera grand, plus longue sera la durée des simulations. Le choix de N est donc un compromis entre la durée du calcul et la précision des résultats, mais est également fonction de la géométrie et des caractéristiques acoustiques mêmes du domaine de propagation. À titre d'exemple, plus le domaine de propagation sera absorbant (au niveau des parois, des objets diffusants, de l'atténuation atmosphérique), plus il faudra considérer de particules sonores pour avoir une description satisfaisante des phénomènes physiques.

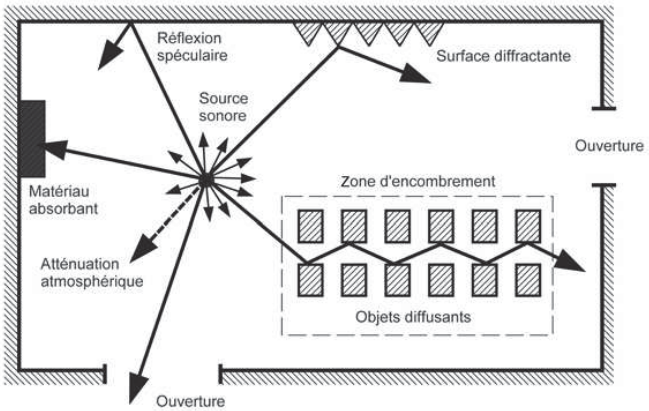


Figure 1

Propagation de particules sonores depuis une source sonore de puissance W, dans un espace partiellement ouvert. Au cours de leur propagation, les particules sonores peuvent être absorbées par des matériaux absorbants (absorption acoustique), être diffractées par des objets diffusants (diffusion) répartis dans une zone d'encombrement, être réfléchies par les parois du domaine (réflexion spéculaire), sortir du milieu de propagation à travers des ouvertures (absorption totale), être diffractées par des surfaces diffractantes (réflexion diffuse) ou disparaître du milieu de propagation (atténuation atmosphérique).

Maillages spatial et temporel

L'utilisation d'une approche numérique empêche une description continue de l'échelle des temps et du domaine de propagation. Il est donc nécessaire de procéder simultanément à un maillage fin de l'espace de propagation et à une discrétisation de l'échelle des temps. Dans le cas considéré ici, la discrétisation temporelle est réalisée avec un pas de temps Δt constant. La position de chaque particule dans le domaine est alors calculée à chaque multiple du pas de temps, ce qui revient à considérer le déplacement de la particule par incrément successif d'une distance élémentaire $d_0 = c\Delta t$, c étant la vitesse de propagation de la particule (en m/s), égale à la célérité du son.

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la densité d'énergie dans un volume élémentaire du domaine de propagation, au temps t, est proportionnelle au nombre de particules présentes dans ce même volume au temps t. Pour des raisons pratiques, il n'est pas possible de considérer un volume récepteur ponctuel, la probabilité de présence d'une particule étant nulle. Le domaine d'étude doit donc être discrétisé en un nombre fini de volumes élémentaires de dimension judicieusement choisie. Dans cette étude, nous nous sommes intéressés uniquement à des domaines de propagation rectangulaires. Bien que la méthode puisse être généralisée à des volumes de forme complexe, ce

type de géométrie offre des simplifications non négligeables en termes d'algorithme et de temps de calcul, tout en représentant un panel de configurations réelles important (locaux d'enseignement, parkings couverts, locaux industriels, bureaux, couloirs, rues, etc.). En considérant une géométrie rectangulaire, le volume de propagation peut être discrétisé avec des mailles rectangulaires. Le nombre total de mailles dans une enceinte de largeur l, hauteur H et longueur L est alors défini par le nombre de mailles N_x, N_y et N_z dans chacune des directions principales (Fig. 2a). Le volume récepteur (volume d'une maille) est alors égal à $V/(N_x \times N_y \times N_z)$.

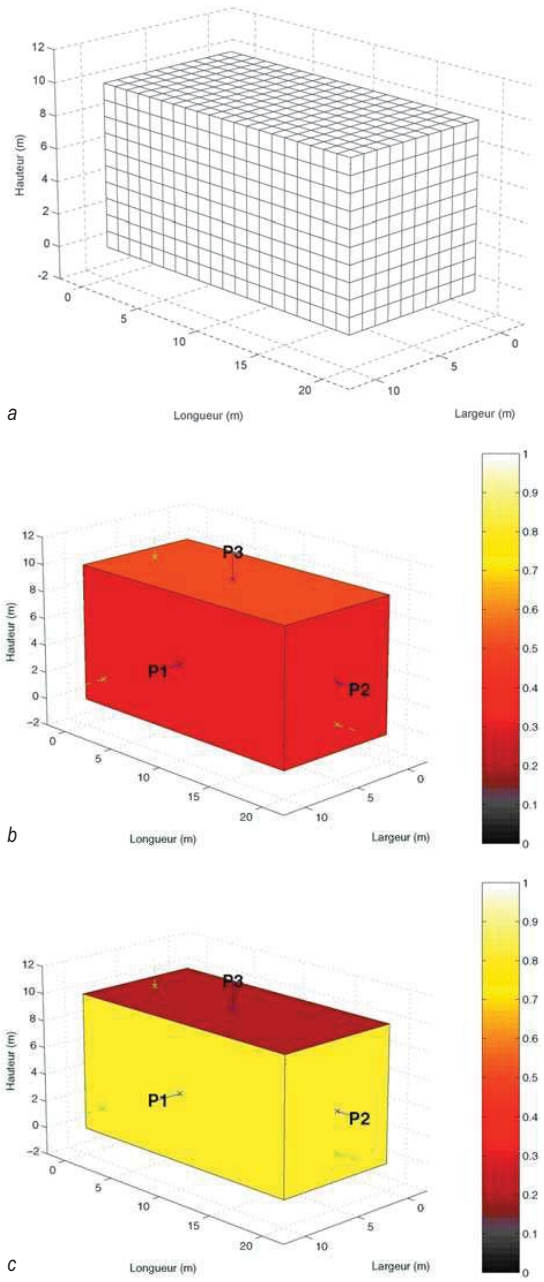


Figure 2

Maillage régulier d'une salle rectangulaire de dimension 10 × 20 × 10 m³ par des cubes de 1 m d'arête, et caractérisation acoustique (absorption et diffusion) des parois P1, P2, ... P6 du domaine. La source est positionnée au point (5,2,2).
a - Maillage d'une enceinte rectangulaire. b - Répartition de l'absorption sur les parois du domaine. c - Répartition de la diffusion (accommodation) sur les parois du domaine.

BULLETIN DES LABORATOIRES DES PONTS ET CHAUSSÉES - 258-259
OCTOBRE-NOVEMBRE-DÉCEMBRE 2005 - RÉF. 4536 - PP. 59-88

Afin d'obtenir une description précise de l'évolution temporelle dans un volume récepteur, il conviendra de choisir un pas de temps petit. En parallèle, pour avoir une description spatiale précise, le volume récepteur devra lui aussi être petit. Néanmoins, plus celui-ci sera petit, plus la probabilité de présence d'une particule sonore dans ce volume sera faible, à moins de considérer un nombre beaucoup plus important de particules. En outre, afin de s'assurer qu'une même particule est bien comptabilisée dans l'ensemble des mailles qu'elle traverse, il est nécessaire de vérifier que la distance élémentaire de propagation d_0 est inférieure à la plus petite des dimensions d'une maille, sous peine d'artefacts numériques dans les résultats. Finalement, le choix du pas de temps Δt et du volume récepteur résulte d'un compromis entre la durée et la précision des calculs.

Modélisation de la source

Revenant au concept même des particules sonores, le problème de l'émission sonore depuis une source ponctuelle revient en fait à attribuer aux particules sonores, à un instant donné (l'origine des temps en principe), à la position exacte de la source, des directions de propagation en accord avec la directivité de la source (Fig. 3a). Dans le cas d'une source sonore omnidirectionnelle, il s'agit de vérifier que les particules sonores, une fois émises, se répartissent uniformément sur une sphère centrée sur la source (en l'absence de tout autre phénomène). La solution la plus immédiate consiste à procéder à une discrétisation déterministe du rayonnement de la source en coordonnées sphériques. Une discrétisation uniforme des angles d'émission ne suffit pas, puisque cela provoquerait une concentration artificielle des particules sonores au niveau des pôles de la sphère symbolisant la source. Il est en fait nécessaire de vérifier l'uniformité du nombre de particules émises par angle solide élémentaire. Bien que cette technique soit facilement réalisable, il a semblé que le choix d'un tirage aléatoire uniforme des directions initiales des particules était plus homogène avec le traitement, lui-même aléatoire, des autres phénomènes physiques. Par ailleurs, concernant le « coût numérique », une procédure de tirage aléatoire sur N particules est beaucoup plus rapide qu'une méthode déterministe.

À titre d'exemple, la figure 3 illustre le rayonnement d'une source omnidirectionnelle. Les directions initiales de propagation sont obtenues en tirant aléatoirement deux nombres compris entre $-\pi$ et π, et entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, correspondant respectivement aux angles θ et ϕ des vecteurs vitesses, l'amplitude étant toujours égale à la célérité c. En pratique, ce tirage est réalisé en utilisant un générateur uniforme de nombres aléatoires (noté rand) compris entre 0 et 1. Grâce à ce générateur, il est alors possible de constituer une suite de nombres γ uniformément répartis sur un intervalle [a, b] (c'est-à-dire $[-\pi, \pi]$ et $[-\pi/2, \pi/2]$ dans notre cas), de la manière suivante :

$$\gamma = a + (a - b) \times \text{rand} \qquad (1)$$

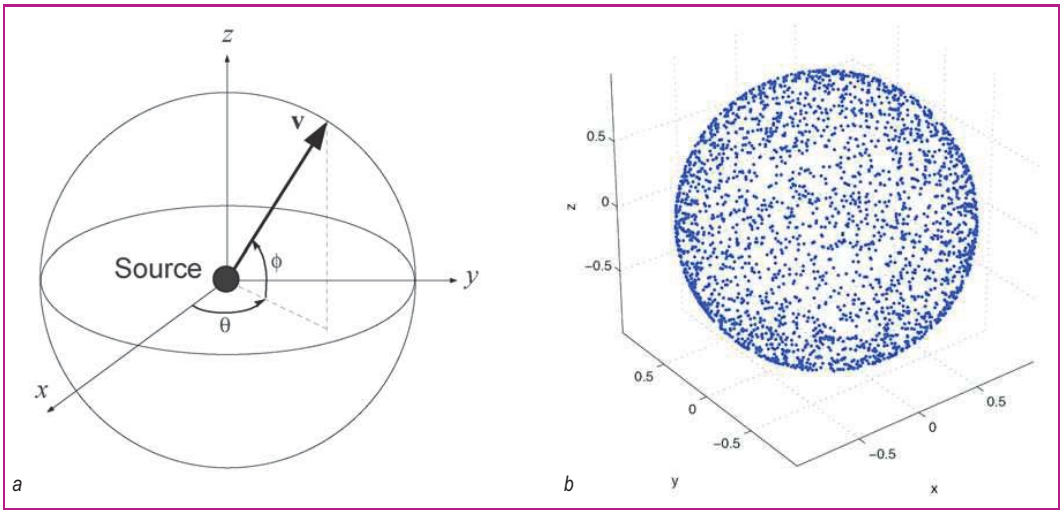


Figure 3

Simulation d'une source sonore omnidirectionnelle. Tirage aléatoire des angles θ et ϕ des vecteurs-vitesses des particules sonores. Exemple d'une simulation numérique avec 2 600 particules sonores : la source est initialement localisée à l'origine. La figure 3b représente la position des particules sonores après un pas de temps. Comme attendu, les particules sonores se répartissent uniformément sur une sphère centrée autour de la source.
a - Géométrie du problème. b - Tirage aléatoire uniforme des directions de propagation.

Pour des lois de distribution plus complexes, c'est-à-dire pour des sources de directivité non uniforme, caractérisées par une loi de distribution S (θ, ϕ), il faut considérer d'autres méthodes de tirage aléatoire, légèrement plus coûteuses en temps de calcul, mais qui ne posent pas de problème majeur [Press et *al.*, 1992]. Certaines de ces méthodes sont d'ailleurs détaillées dans le paragraphe suivant, qui traite de la prise en compte des réflexions sur les parois. Dans le cadre de cette étude, seules des sources omnidirectionnelles ont été considérées.

Enfin, il est important de souligner que la directivité de la source sera d'autant mieux respectée que le nombre de tirages sera grand et que le générateur de nombres aléatoires sera performant. Ce dernier point est fondamental puisqu'il conditionne le compromis entre le nombre de particules sonores à considérer (mais ce n'est pas le seul paramètre) et la performance des simulations.

Traitement des réflexions sur les parois

Au contact d'une paroi définie par son coefficient d'absorption en énergie α, une onde sonore sera en partie absorbée par le matériau constituant la paroi (pour une part α) et en partie réfléchie (pour une part 1-α). En outre, suivant la forme, la taille et la distribution des irrégularités de la paroi, l'onde sonore pourra être réfléchie simultanément dans la direction spéculaire et dans d'autres directions. En acoustique des salles, il est commun de considérer qu'une fraction 1–δ de l'énergie sonore sera réfléchie dans la direction de réflexion spéculaire, tandis qu'une fraction δ de l'énergie sera réfléchie dans les autres directions de l'espace, suivant une loi de réflexion caractérisée par les irrégularités de la paroi [Embrechts et *al.*, 2001]. Dans ce dernier cas, on parle alors de réflexion diffuse, δ étant appelé coefficient de diffusion ou de diffraction. Par la suite, et de manière à être homogène avec les travaux entrepris au LCPC sur la modélisation des champs diffus [Le Pollès, 2003], on utilise le coefficient d'accommodation d, tel que d = 1-δ, au lieu du coefficient de diffusion. Chaque paroi du domaine doit donc être caractérisée par son coefficient d'absorption α (Fig. 2b) et son coefficient d'accommodation d (Fig. 2c).

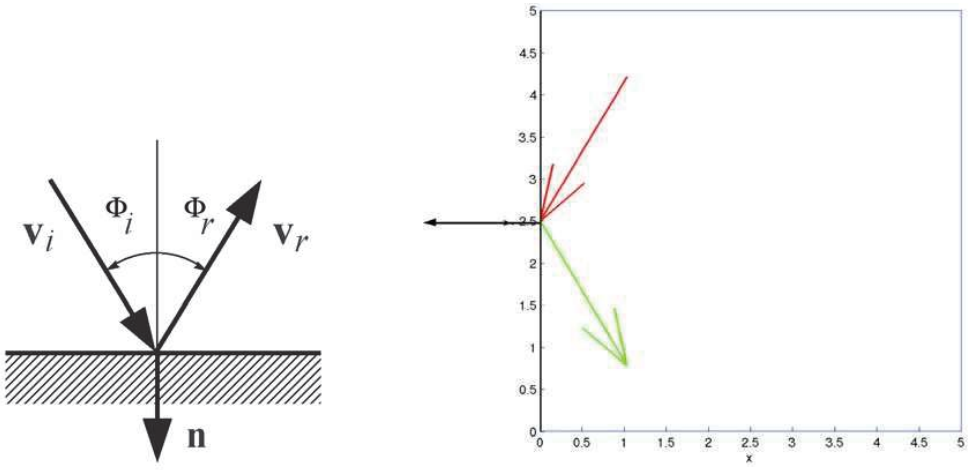
66

Une particule sonore entrant en collision avec une paroi pourra, soit être absorbée par la paroi (avec une probabilité α), soit être réfléchie dans une nouvelle direction de propagation (avec une probabilité 1–α). En pratique, le choix absorption/réflexion est réalisé en tirant aléatoirement un nombre ξ entre 0 et 1. Si ce nombre est inférieur à α (au point considéré), la particule est absorbée et disparaît du milieu de propagation. Si ce nombre est supérieur à α, la particule est réfléchie et poursuit sa propagation dans une nouvelle direction de l'espace. Pour déterminer le type de réflexion (spéculaire ou diffuse), un nouveau tirage aléatoire est réalisé entre 0 et 1. Si ce nombre est inférieur à la valeur de d (ξ < d) au point considéré, la particule est réfléchie spéculairement dans la direction :

$$\mathbf{v_r} = \mathbf{v_i} - 2(\mathbf{v_i} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \qquad (2)$$

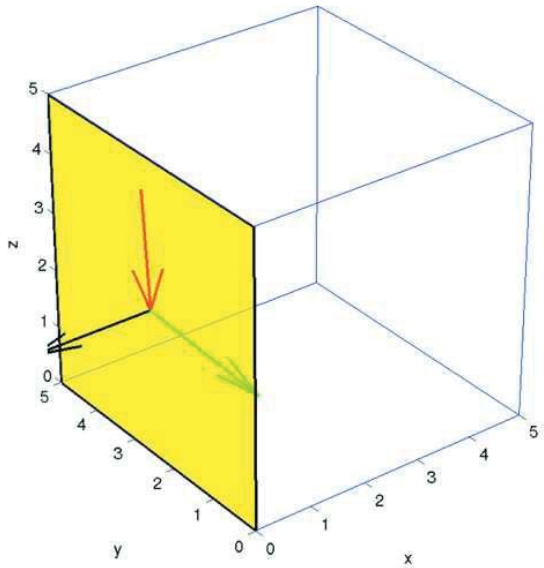
où $\mathbf{v_i}$ est la direction incidente de la particule sur la paroi définie par sa normale $\mathbf{n}$ (Fig. 4a-1). Bien qu'écrite sous une forme non conventionnelle de plusieurs produits scalaires, cette relation exprime simplement que l'angle de réflexion de la particule (par rapport à la normale de la paroi) est égal à l'angle d'incidence, ce qui est conforme aux lois de Snell-Descartes bien connues. Dans le cas contraire (ξ > d), la réflexion est diffuse. Pour pouvoir déterminer la direction de réflexion diffuse, il est alors nécessaire de connaître la forme de la loi de réflexion de la paroi. En acoustique des salles, de nombreuses études théoriques et expérimentales sont actuellement en cours pour caractériser ou mesurer ces lois de réflexion [Vorländer et Mommertz, 2000]. En acoustique urbaine, malgré quelques approches, ce type d'étude reste plus marginal. De manière générale, ces lois de réflexion peuvent se mettre sous la forme générique R ($\mathbf{v_i}$, $\mathbf{v_r}$), exprimant la probabilité que la particule soit réfléchie dans la direction $\mathbf{v_r}$ en fonction de la direction incidente. Cette loi est définie par la forme, la taille et la distribution des irrégularités qui constituent la paroi. Connaissant l'expression analytique de la loi de réflexion de la paroi, la détermination de la direction de réflexion d'une particule peut être réalisée par différentes techniques de tirages aléatoires, comme les méthodes de réjection et la méthode de la fonction de distribution cumulative inverse [Press et *al.*, 1992].

En l'absence de lois de réflexion réalistes et connues, nous avons été amenés dans cette étude à considérer une loi de réflexion particulière, la loi de Lambert (Fig. 4c-1), couramment employée en acoustique des salles pour modéliser les phénomènes de réflexion diffuse [Kuttruff, 2000]. Bien qu'arbitraire et parfois discutée [Hidaka, 1995], cette loi permet de simuler artificiellement les phénomènes de diffusion dans une salle, en assurant un bon accord avec les observations



a-1

a-2



a-3

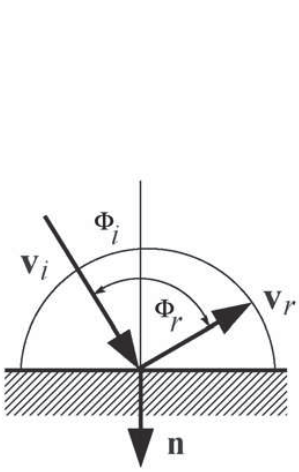
Figure 4

Représentation et simulation numérique d'une loi de réflexion (a) spéculaire, (b) uniforme, (c) Lambert, (d) « complexe », en 2D et en 3D (100 tirages aléatoires). Vecteur incident $\mathbf{v_i}$ *(– 1/5, – 1/3) en 2D et* $\mathbf{v_i}$ *(– 1/5, – 1/3, – 1/4) en 3D. Réflexion sur la paroi* **n** *(– 1,0,0) en jaune. Les vecteurs rouges et verts désignent respectivement les directions incidentes et réfléchies. La normale* **n** *à la paroi de réflexion est représentée par un vecteur de couleur noire. Les lois de réflexion uniforme et Lambert étant indépendantes des directions, le vecteur incident n'est pas représenté.*

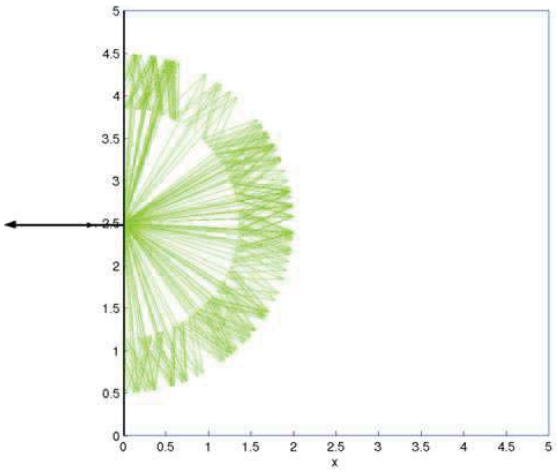
expérimentales. En pratique, cette loi est exprimée en fonction de l'angle de réflexion ϕ_r autour de la normale à la paroi et prend la forme normalisée suivante :

$$R(\mathbf{v_i}, \mathbf{v_r}) \equiv R(\phi_r) = \frac{1}{4\pi}\cos\phi_r \qquad (3)$$

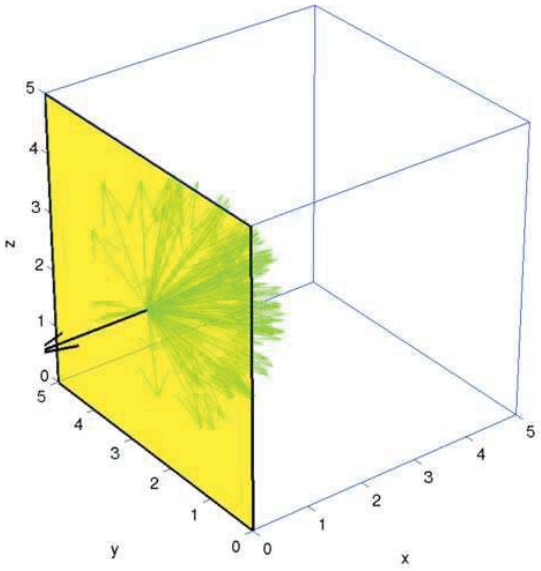
La probabilité de réflexion est donc maximale dans la direction normale à la paroi ($R = 1/4\pi$ pour $\phi_r = 0$) et nulle sur les angles de réflexion « rasants » ($R = 0$ pour $\phi_r = \pi/2$). On remarque également que la direction de réflexion est indépendante de la direction incidente. D'un point de vue du tirage aléatoire de l'angle de réflexion, cette loi est bien adaptée à la technique de la fonction de distribution



b-1



b-2



b-3

Figure 4 (suite)

cumulative inverse. On définit ainsi la fonction de distribution cumulative $p(\hat{x})$ de la fonction R(x) définie sur l'intervalle [a, b] (c'est-à-dire [0, π/2] dans notre cas) :

$$p(\hat{x}) = \frac{\int_a^{\hat{x}} R(x)\,dx}{\int_a^b R(x)\,dx} \tag{4}$$

Cette fonction, positive et normalisée, représente la probabilité d'obtenir un nombre compris entre a et $\hat{x}$. En tirant aléatoirement et uniformément un nombre ξ entre 0 et 1, il est alors possible de déterminer un nombre $\hat{x} = p^{-1}(\xi)$ qui vérifie la densité de probabilité R(x). Dans le cas de la loi de Lambert, la fonction de distribution cumulative inverse $p^{-1}(\xi)$ prend la forme :

$$p^{-1}(\xi) = \arcsin(2\xi - 1) \tag{5}$$

Bien que non présentées dans la présente étude, d'autres lois de réflexion ont également été implémentées dans le programme, telles que la loi de réflexion uniforme (Fig. 4b-1) et des lois de

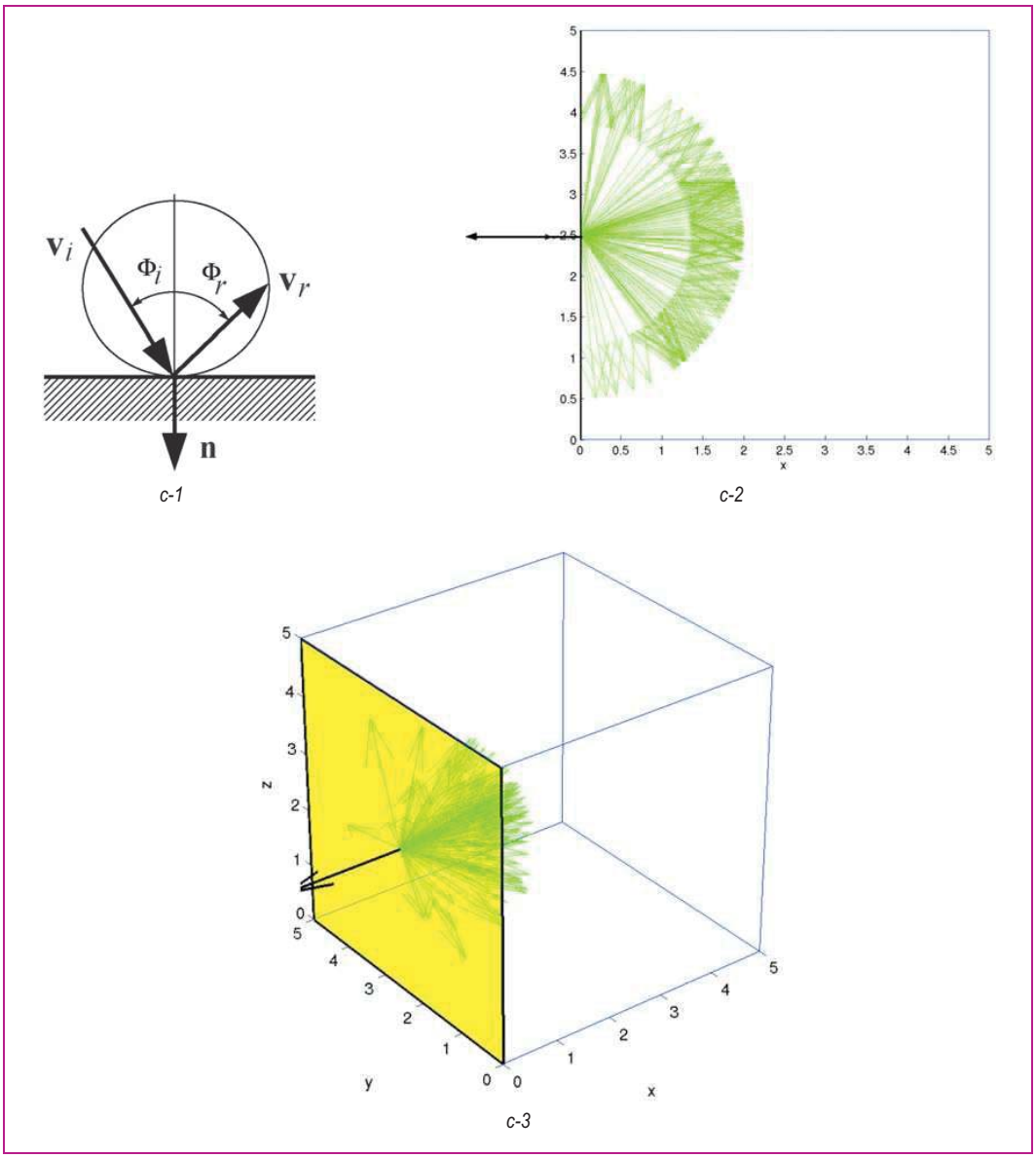


Figure 4 (suite)

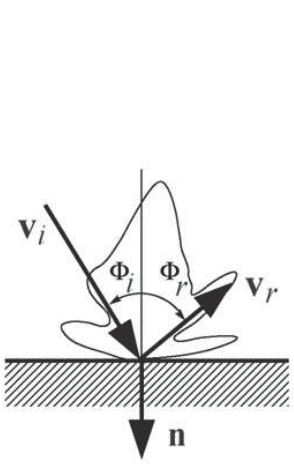
réflexion semi-diffuses (Fig. 4d-1). Des exemples de tirages aléatoires sont présentés sur la figure 4, en 2D et 3D, pour les différentes lois de réflexion évoquées dans ce paragraphe.

Traitement des collisions avec l'encombrement

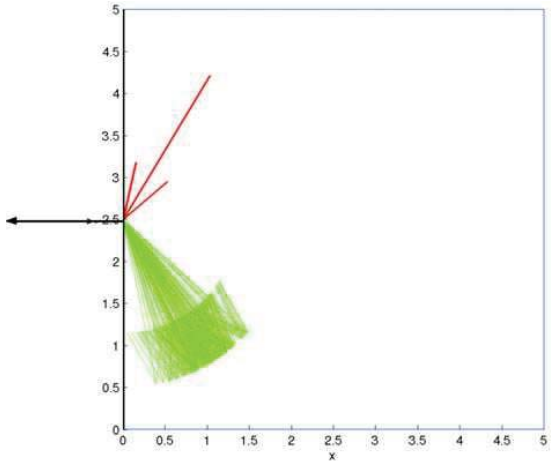
Dans la plupart des situations réelles, le domaine de propagation est souvent rempli d'objets diffusants, tels que des machines dans un local industriel, des voitures dans un parking couvert, des caisses ou des cartons dans un entrepôt, des bureaux dans une salle de cours, etc. Suivant la densité et la répartition de ces objets diffusants, les effets de diffraction, d'absorption et de réflexion multiple peuvent avoir des effets importants sur la distribution du champ sonore.

Afin de prendre en compte ces phénomènes dans l'approche particulaire, nous avons considéré une technique similaire à celle proposée par Ondet et Barbry [1989], elle-même reprise des travaux de Kuttruff [1981], de Auletta [1985, 1986] et de Lindqvist [1982]. Dans cette approche,

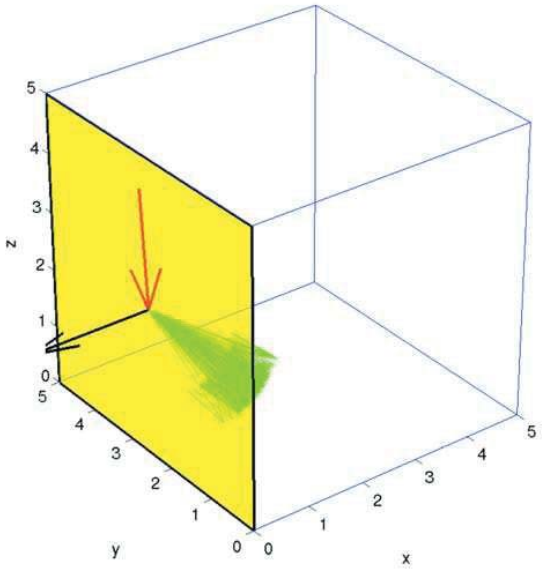
- les objets diffusants sont considérés comme ponctuels. Les particules sont renvoyées dans toutes les directions de l'espace à chaque collision avec un objet diffusant (sauf en cas d'absorption). Cette



d-1



d-2



d-3

Figure 4 (suite)

hypothèse est valide en général quand la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la dimension caractéristique de l'obstacle, ce qui est souvent le cas en pratique dans la bande de fréquence audible ;

- le phénomène de diffusion suit un processus de Poisson, ce qui signifie que la probabilité de collision d'une particule sonore avec un objet diffusant, vérifie une loi de Poisson. Les probabilités de collision sont alors indépendantes les unes des autres : la probabilité de collision pendant les temps t et t + dt est indépendante des collisions avant le temps t.

À l'échelle macroscopique, c'est-à-dire considérant simultanément l'ensemble des particules sonores présentes dans le milieu, il se produit un processus de diffusion, caractérisé par les paramètres suivants :

- le coefficient d'absorption α_c des objets diffusants ;
- la densité d'encombrement n_c dans un volume V_c du milieu de propagation, défini par le nombre N_c d'obstacles présents dans ce même volume :

$$n_c = \frac{N_c}{V_c} \qquad (6)$$

➢ la section moyenne de diffusion q_c, c'est-à-dire la surface moyenne de l'objet diffusant, vue par une particule dans une direction incidente donnée. En pratique, cette donnée est très difficile voire impossible à obtenir, dès lors que les objets diffusants sont de formes complexes et différentes. Dans ces conditions, il est commun d'assimiler l'objet diffusant à une sphère, ayant la même surface externe s_c que l'objet. Quel que soit l'angle d'incidence, la section visible de la sphère (section moyenne de diffusion) sera égale au quart de la surface totale de la sphère, soit :

$$q_c = \frac{s_c}{4} \tag{7}$$

la section moyenne de diffraction par unité de volume ν_c, encore appelée fréquence de diffusion, qui peut être définie par :

$$\nu_c = n_c\, q_c \tag{8}$$

si tous les objets diffusants sont identiques, ou :

$$\nu_c = \frac{1}{V_c} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{s_{ci}}{4} \tag{9}$$

si chaque type d'objets diffusants i est défini par une surface s_{ci}. En pratique, et dans la suite de l'article, les objets diffusants sont supposés uniformes dans un même volume de diffusion. Néanmoins, dans un même volume de propagation, plusieurs volumes de diffusion disjoints peuvent être considérés, ce qui permet de considérer plusieurs types d'encombrement.

Puisque le phénomène de diffusion suit une loi de Poisson, la probabilité qu'une particule sonore subisse k collisions avec des objets diffusants, au bout d'un temps t_k, est égale à :

$$W_k(ct_k) = \frac{(\nu_c\, ct_k)^k}{k!} \exp(-\nu_c\, ct_k) \tag{10}$$

où ct_k est la distance parcourue pendant un temps t_k, pouvant être exprimée à partir de la distance R_n séparant deux collisions (Fig. 5) :

$$ct_k = \sum_{n=1}^{k} R_n \tag{11}$$

Les probabilités de collision étant indépendantes les unes des autres [Ondet et Barbry, 1989], on montre que les variables aléatoires R_n (notée R par la suite) suivent la densité de probabilité f(R) suivante :

$$f(R) = \nu_c \exp(-\nu_c R) \tag{12}$$

Le libre parcours moyen λ_c (distance moyenne entre deux collisions) est obtenu en exprimant le premier moment de la densité de probabilité ci-dessus, à savoir :

$$\lambda_c = \int_0^{\infty} R\, f(R)\, dR = \frac{1}{\nu_c} \tag{13}$$

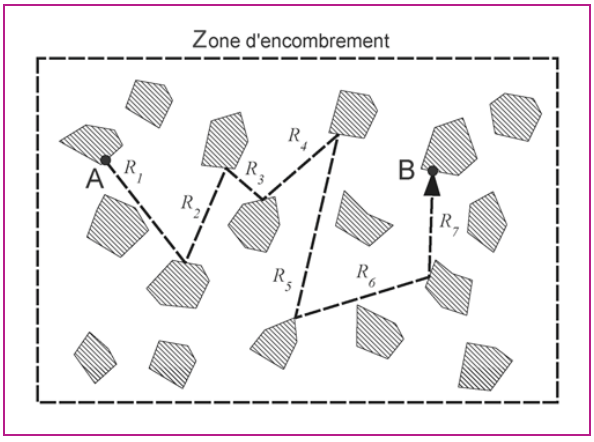


Figure 5

Diffusion d'une particule dans une zone d'encombrement constituée d'objets diffusants. Définition des trajets élémentaires R_n entre deux collisions. Dans cet exemple, le trajet entre le point A et le point B est égal à la somme des trajets élémentaires R_1 à R_7.

La fonction de distribution cumulative, associée à cette densité de probabilité, est définie par la relation suivante :

$$p(\hat{R}) = \int_0^{\hat{R}} f(R)\, dR = 1 - \exp\left(-\nu_c \hat{R}\right) \tag{14}$$

Cette fonction de distribution cumulative exprime simplement la probabilité que la particule subisse une collision avec un objet diffusant durant un trajet de longueur $\hat{R}$. Cette fonction est donc nulle pour $\hat{R} = 0$ et égale à 1 pour $\hat{R} = \infty$.

La simulation numérique du processus de diffusion est extrêmement simple. La première étape consiste à déterminer si la particule va être absorbée ou réfléchie par l'obstacle. Comme pour l'absorption par les parois, il suffit de tirer aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1, puis de le comparer au coefficient d'absorption α_c de l'encombrement. Si ce nombre est inférieur à α_c, la particule est absorbée et disparaît du milieu de propagation. Si ce nombre est supérieur à α_c, la particule est réfléchie et poursuit sa propagation dans une nouvelle direction de l'espace, la nouvelle direction de propagation étant choisie aléatoirement dans toutes les directions de l'espace. Comme pour la prise en compte de la loi de Lambert, la détermination de la distance que va parcourir la particule sonore jusqu'à la prochaine collision utilise le principe de la fonction de distribution cumulative inverse. Dans ce cas, la fonction de distribution cumulée inverse est obtenue en inversant la relation (14), soit :

$$\hat{R} = -\frac{1}{\nu_c} \ln\left[1 - p(\hat{R})\right] \tag{15}$$

La fonction de distribution cumulée étant comprise entre 0 et 1, elle peut être assimilée à une variable aléatoire ξ_i comprise entre 0 et 1. En tirant une succession de variables aléatoires ξ_i, il est alors possible de déterminer une succession de trajets de longueur qui satisfait bien à la fonction de distribution (12) du problème posé :

72

$$R_i = -\frac{1}{\nu_c} \ln\left[1 - \xi_i\right] \tag{16}$$

À titre d'illustration, la figure 6 présente la distribution des trajets R_i obtenus après 50 000 tirages aléatoires. La comparaison avec la distribution théorique (12) montre un excellent comportement de la méthode.

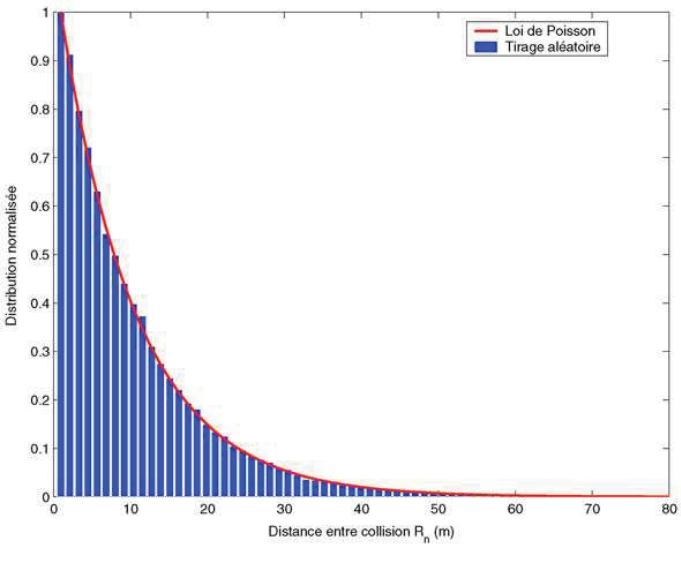


Figure 6

Tirage aléatoire des trajets R_n entre deux collisions par des objets diffusants, par la méthode de la fonction de distribution cumulative inversée (50 000 tirages aléatoires). Comparaison de la distribution des trajets obtenus avec la distribution théorique (loi de Poisson) définie à la relation (12).

Atténuation atmosphérique

Au cours de leur propagation, les ondes sonores sont soumises à l'atténuation atmosphérique provoquée par des effets viscoélastiques dans l'air. Dans l'approche particulaire, cette atténuation est assimilée à une probabilité de disparition de la particule sonore, dont la densité de probabilité est définie à partir du coefficient d'atténuation atmosphérique m et de la distance de propagation r de la particule par :

$$g(r) = \exp(-mr) \tag{17}$$

Le coefficient m (en Np/m) est défini à partir des conditions atmosphériques du milieu de propagation (pression, humidité relative et température) et de la fréquence de l'onde sonore [Bass et *al.*, 1984]. Pour un déplacement nul (r = 0), la particule ne peut pas être absorbée (g(0) = 1). À l'inverse, une particule ne peut pas se déplacer à l'infini (g(∞) = 0).

Dans la mesure où l'échelle des temps est discrétisée avec un pas de temps fixé Δt, la probabilité de disparition de la particule est calculée pour chaque déplacement élémentaire $d_0 = c\Delta t$, et est donc constante. Il est toutefois important de noter que la densité de probabilité est bien indépendante du pas de temps Δt ou, autrement dit, que la probabilité de disparition d'une particule sur un trajet $r_1 + r_2$ est bien égale au produit des probabilités de chacun des trajets :

$$g(r_1 + r_2) = \exp\left[-m(r_1 + r_2)\right] = \exp(-mr_1) \times \exp(-mr_2) = g(r_1) \times g(r_2) \tag{18}$$

D'un point de vue pratique, la prise en compte de l'atténuation atmosphérique dans les simulations est relativement simple et comparable à celle de l'absorption. Il suffit en effet de tirer un nombre aléatoire uniforme ξ compris entre 0 et 1, à chaque pas de temps, et de comparer ce nombre à la densité de probabilité $g(d_0)$ correspondant à la probabilité qu'une particule sonore soit absorbée sur un déplacement élémentaire (c'est-à-dire sur un pas de temps). Si ce nombre ξ est inférieur à $g(d_0)$, il y aura propagation sur le pas de temps considéré. Dans le cas contraire ($\xi > g(d_0)$), la particule est absorbée et disparaît du milieu de propagation.

L'algorithme général et le programme SPPS

73

L'algorithme général des simulations est présenté sur la figure 7.

➢ La première étape, c'est-à-dire au premier pas de temps du calcul (p = 1, correspondant à t = 0), consiste à déterminer la direction et la position initiale des particules sonores, en fonction des caractéristiques acoustiques de la source et de sa position.

➢ Par la suite, et à chaque pas de temps, l'opération consiste :

- à appliquer l'atténuation atmosphérique ;
- puis à repérer les particules qui vont entrer en collision avec les parois du domaine ou avec les objets diffusants. Dans chacun des cas, le tirage successif de plusieurs nombres aléatoires permet de déterminer les particules qui vont être absorbées ou réfléchies, ainsi que les nouvelles directions de propagation.

➢ Les particules absorbées par les parois, par l'encombrement ou du fait de l'atténuation atmosphérique, disparaissent totalement des simulations. Le traitement de la propagation est alors réalisé sur les particules restantes.

➢ Pour déterminer la distribution des particules au cours du temps, un comptage des particules est effectué à chaque pas de temps dans chaque maille du domaine.

➢ La procédure s'arrête lorsqu'il ne reste plus de particules dans le milieu (N = 0), ou lorsque le nombre de pas de temps choisi par l'utilisateur est atteint.

L'algorithme du programme SPPS (Simulation de la Propagation de Particules Sonores) a été implémenté sous l'environnement Matlab®. Une interface graphique (Fig. 8) permet de définir l'ensemble des données nécessaires à l'exécution des simulations (données géométriques, caractéristiques acoustiques, paramètres de la simulation). La version actuelle (V1.2) du programme SPPS permet de réaliser des simulations numériques dans une enceinte rectangulaire, vide ou définie par plusieurs volumes d'encombrement. Chaque encombrement, supposé rectangulaire, peut être défini par sa taille et sa position, un coefficient d'absorption et un libre parcours moyen. Chacune des six parois de l'enceinte est caractérisée par ses propres coefficients d'absorption et d'accommodation, ainsi que par sa propre loi de réflexion (spéculaire, diffuse, uniforme ou complexe). Un exemple de simulation est présenté sur la figure 9, pour une rue de 50 m de longueur et de 10 m de large, définie par des façades mixtes (spéculaires et Lambert) et absorbante (α = 0,1). Les deux extrémités sont supposées totalement absorbantes. Bien que présentées en 2D pour faciliter la lecture des résultats, les

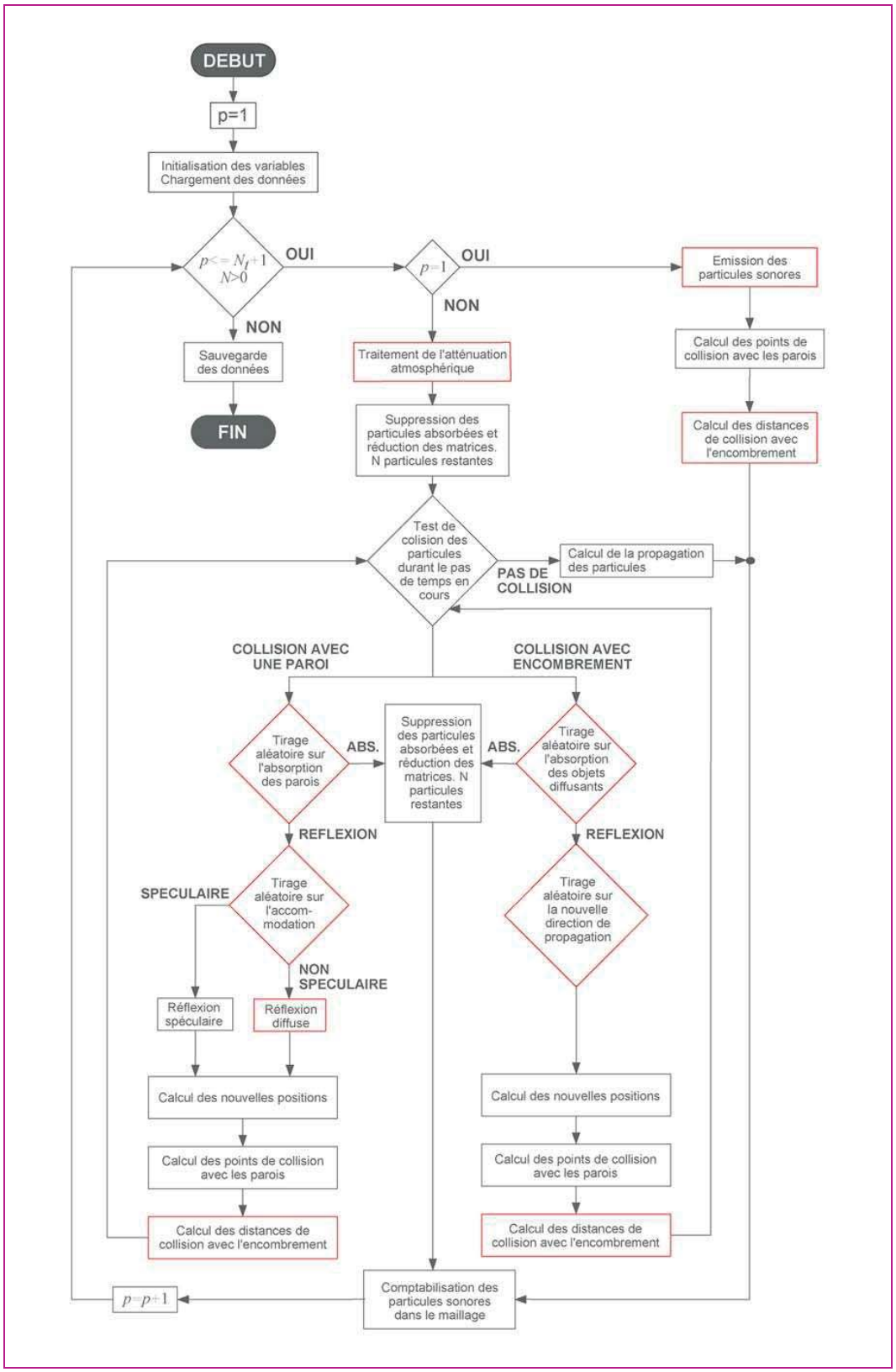


Figure 7

Organigramme du programme SPPS 1.2. Les procédures présentant des tirages aléatoires sont indiquées en rouge. N_t et p désignent respectivement le nombre maximal de pas de temps (fixé par l'utilisateur) et l'indice du pas de temps. N désigne le nombre de particules.

BULLETIN DES LABORATOIRES DES PONTS ET CHAUSSÉES - 258-259
OCTOBRE-NOVEMBRE-DÉCEMBRE 2005 - RÉF. 4536 - PP. 59-88

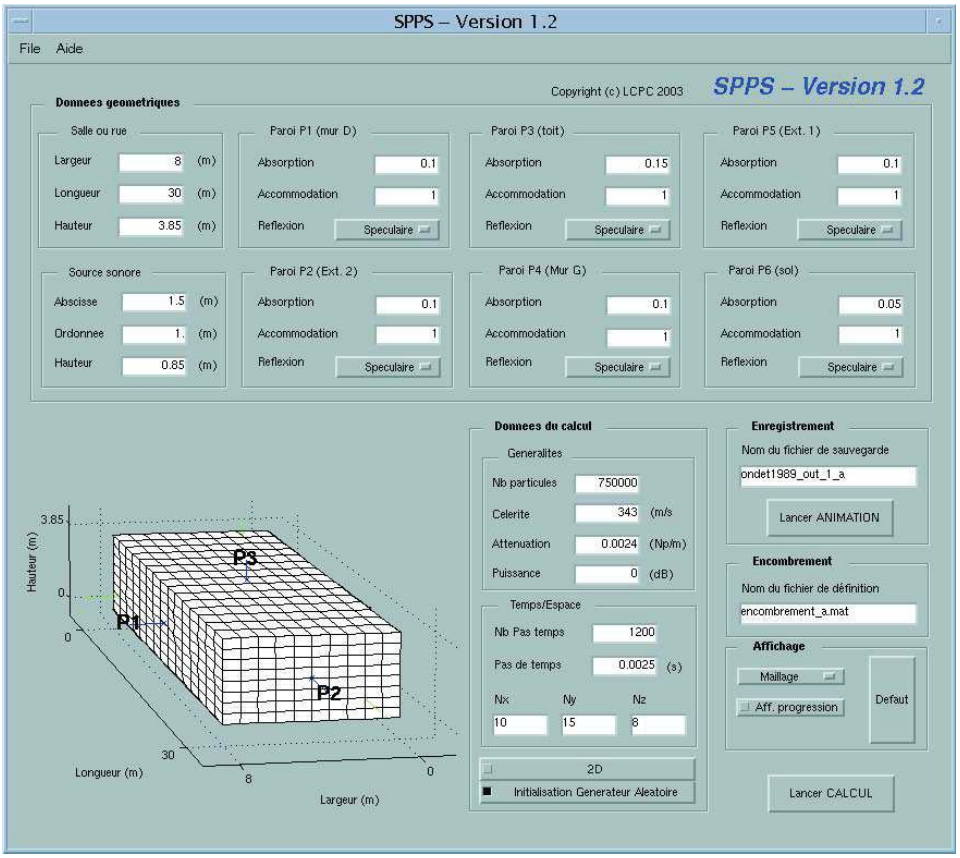


Figure 8
Interface graphique du programme SPPS 1.2 fonctionnant sous Matlab® 6.5.

simulations auraient également pu être réalisées en 3D. Cet exemple fait bien ressortir des « comportements géométriques » typiques de réflexion spéculaire (propagation et réflexion de fronts d'onde), associés au caractère aléatoire des réflexions diffuses. Au fur et à mesure de la propagation, le nombre de particules sonores diminue progressivement, du fait des nombreuses sources d'absorption.

La prise en compte de la fréquence

À ce stade des développements, nous n'avons pas encore introduit de notion de « fréquence » dans les simulations. Le modèle étant énergétique, le caractère ondulatoire de l'onde sonore n'intervient pas directement dans le processus de simulation. Les phénomènes d'interférence ne peuvent donc pas être modélisés. Néanmoins, compte tenu du « mélange énergétique » produit par les nombreuses sources de réflexions et de diffusions multiples dans le milieu, il est admis que les ondes sonores deviennent incohérentes, de telle sorte que les phénomènes d'interférence puissent être négligés. Cette hypothèse est particulièrement vérifiée en haute fréquence où les longueurs d'onde sont petites par rapport aux dimensions caractéristiques du domaine de propagation et des objets diffusants. En basse fréquence, c'est-à-dire en dessous de quelques dizaines de hertz, ce type d'approche énergétique n'est plus valable et doit laisser place à des approches modales, quand elles sont possibles.

Dans la bande de fréquence concernée (au-dessus de 250 Hz), la notion de fréquence peut toutefois être introduite à travers les propriétés acoustiques des parois (absorption, coefficient d'accommodation, loi de réflexion) et du milieu de propagation (atténuation atmosphérique, coefficient d'absorption des objets diffusants). Le principe consiste alors à réaliser une simulation numérique dans une bande de fréquence particulière, puis à répéter l'opération dans les autres bandes de fréquence en modifiant les propriétés acoustiques des parois et du milieu de propagation.

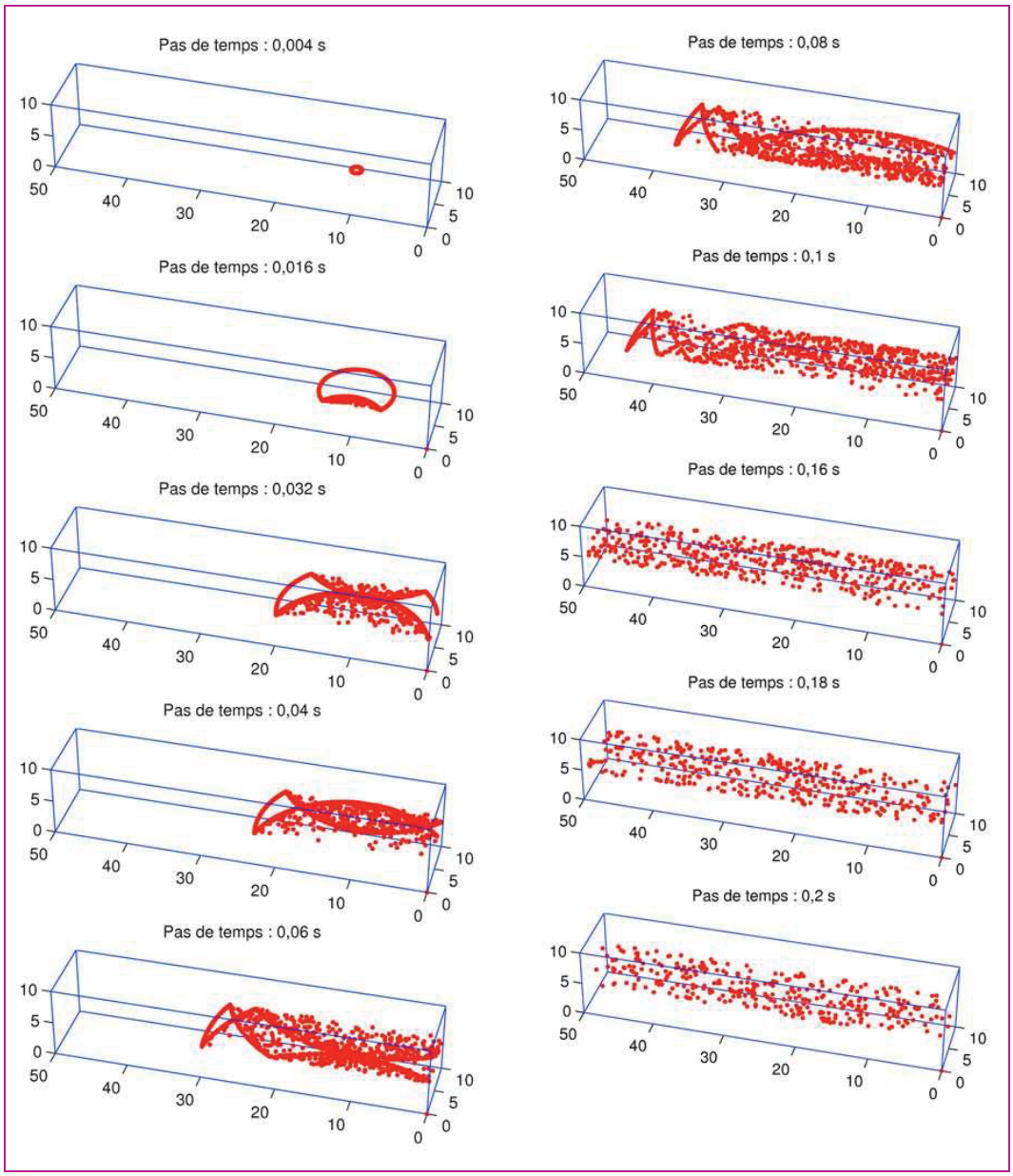


Figure 9

Exemple d'une simulation 2D avec le programme SPPS 1.2. Propagation de particules sonores dans une rue de 50 m de longueur et de 10 m de largeur, à plusieurs pas de temps, dans le plan z = 5. La source impulsionnelle est localisée au point (10,3) et émet 2 000 particules dans la rue. Les deux extrémités de la rue sont totalement absorbantes. Le coefficient d'absorption des façades est fixé à 0,1. Les réflexions sur les façades de la rue sont supposées mixtes (spéculaires et Lambert).

Bien que relativement simple, cette procédure a l'inconvénient de multiplier la durée de calcul par le nombre de bandes de fréquence à considérer.

TRAITEMENT DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Le résultat des simulations SPPS est sauvegardé dans un fichier contenant le nombre de particules sonores dans chacune des mailles du domaine de propagation, à chaque pas de temps. Afin d'obtenir des niveaux sonores et des temps de réverbération exploitables, ces données brutes doivent subir un certain nombre de traitements, détaillés par la suite.

Normalisation énergétique

Comme dans toute simulation numérique nécessitant une discrétisation temporelle et spatiale, il est nécessaire de normaliser les résultats bruts pour s'assurer de la convergence des résultats quels que soient les paramètres des simulations. Dans ce cas, il est nécessaire de normaliser les résultats par le nombre initial de particules sonores, ainsi que par la taille du volume récepteur. Pour des raisons pratiques, il est également important de convertir le nombre n(pΔt) de particules dans chaque maille en une énergie acoustique. Finalement, l'intensité sonore I(pΔt) dans chacune des mailles est obtenue par la relation (en W/m^2) :

$$I(p\Delta t) = \frac{W \times c \times \Delta t}{N} \times \frac{N_x \times N_y \times N_z}{V} \times n(p\Delta t) \qquad (19)$$

où c, W et p sont respectivement la célérité du son, la puissance de la source et l'indice du pas de temps. Le premier et le second terme multiplicateur du membre de droite de l'expression (19) correspondent à la normalisation par rapport au nombre de particules et par rapport au volume récepteur. La quantité W × c × Δt est ensuite introduite pour prendre en compte la puissance de la source et convertir le résultat en une intensité acoustique. De manière classique, on peut également calculer le niveau de pression acoustique $L_P(p\Delta t)$ de la manière suivante (en dB SPL) :

$$L_P(p\Delta t) = 10 \log \frac{\rho c I(p\Delta t)}{\left(20.10^{-6}\right)^2} \qquad (20)$$

ρ étant la masse volumique de l'air. Afin de s'affranchir du niveau de puissance de la source, il est courant de normaliser les résultats de la manière suivante (en dB SPL, normalisé) :

$$SP(p\Delta t) = L_p(p\Delta t) - L_W \qquad (21)$$

L_W étant le niveau de puissance de la source.

Calcul des niveaux sonores et des temps de réverbération

La source sonore étant impulsionnelle et sous réserve que le domaine de propagation présente un minimum d'absorption, les courbes de niveau définies par les relations (20) et (21) décrivent la décroissance d'énergie au cours du temps en un point donné (appelée *réponse impulsionnelle* et notée RI). Le traitement de ces courbes de niveau permet alors de déterminer le temps de réverbération (TR, en seconde), désignant le temps nécessaire à l'énergie sonore pour décroître de 60 dB. Conformément aux règles de calcul usuelles, on peut différencier le calcul du temps de réverbération précoce (Early Decay Time) noté EDT et le temps de réverbération « classique » noté RT30. Le premier est calculé à partir de la courbe de niveau normalisée (0 dB pour le maximum), sur la partie de la courbe située de 0 dB à – 10 dB du maximum. Le second est obtenu sur cette même courbe entre – 5 dB et – 35 dB. Dans les deux cas, les temps correspondants sont ramenés à une décroissance de 60 dB. En pratique, les temps de réverbération sont obtenus en réalisant une interpolation linéaire sur chacun de ces domaines de façon à en extraire la pente.

Dans certains cas, notamment lorsque l'on s'intéresse à la décroissance en un point d'observation donné, les courbes obtenues par la relation (20) peuvent présenter des fluctuations importantes, ce qui rend difficile le calcul des temps de réverbération. Dans ces conditions, afin de lisser ces fluctuations de niveau sonore au cours du temps, il est possible d'utiliser la méthode d'intégration de Schroeder [Schroeder, 1980]. Sous forme discrète, la méthode consiste à calculer la pression acoustique intégrée (en Pa), en sommant la réponse impulsionnelle sur tous les pas de temps compris entre q et le nombre de pas de temps total N_t :

$$SPL(q\Delta t) = \sum_{p=q}^{N_t} \rho c \Delta t I(p\Delta t) \qquad (22)$$

Le niveau en régime permanent est alors simplement donné par la valeur à l'origine (q = 0). Les temps de réverbération EDT et RT30 sont quant à eux déterminés par la même procédure que précédemment, mais sur cette nouvelle courbe (Fig. 10). Si ces temps de réverbération sont calculés à partir de la décroissance de l'énergie en un point donné (dans une maille), le temps TR est défini comme *local*. Si ces temps de réverbération sont calculés à partir de la décroissance totale dans la salle (en sommant sur toutes les mailles), le temps TR est dit *global*.

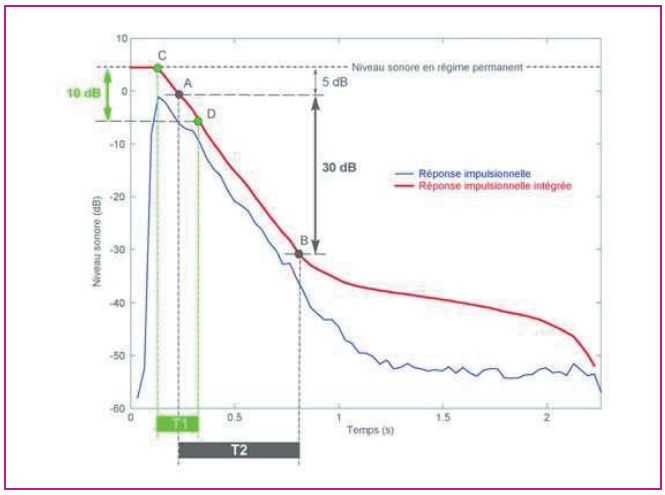


Figure 10
Illustration du calcul des temps de réverbération sur une réponse impulsionnelle intégrée. Le temps de réverbération EDT est calculé sur la partie de la courbe située entre – 0 et –10 dB du maximum (points C et D) : EDT = 6 × T1. Le temps de réverbération RT30 est calculé sur la partie de la courbe située entre – 5 et – 35 dB du maximum (points A et B) : RT30 = 2 × T2.

Recomposition et compensation des réponses impulsionnelles

En pratique, les valeurs de RI obtenues par le programme SPPS ne sont pas infinies, mais limitées au temps $t_0 = N_t\Delta t$ fixé par l'utilisateur. Cette limitation a pour effet de modifier sensiblement l'allure de la courbe SPL(qΔt) puisque l'énergie au-delà du temps t_0 n'est pas comptabilisée [Yang et Shield, 2000]. Si la dynamique de la courbe n'est pas suffisante (ce qui est souvent le cas en pratique), cette omission a pour conséquence de biaiser les calculs des temps de réverbération et du niveau en régime permanent. Afin de résoudre ce problème, nous avons établi une procédure de traitement spécifique des réponses impulsionnelles obtenues par le programme SPPS. La première étape consiste à recomposer artificiellement la décroissance des RI, puis, dans une seconde étape, à compenser la perte d'énergie sur les courbes SPL(qΔt) provoquée par la limitation de la durée des calculs.

78

Recomposition de la réponse impulsionnelle

Comme il l'a été précisé plus haut, la dynamique des courbes de décroissance est déterminée par le nombre N de particules émises par la source et/ou par la durée t_0 du calcul. Si le nombre de particules n'est pas suffisant, les courbes de décroissance s'étendent sur un temps inférieur à t_0. Par ailleurs, la fin des courbes de décroissance ne présentant pas suffisamment de particules sonores n'est pas représentative des phénomènes étudiés. Un exemple de réponse impulsionnelle RI « brute » obtenue par le programme SPPS en un point récepteur est donné sur la figure 11. La fin de la RI n'étant pas

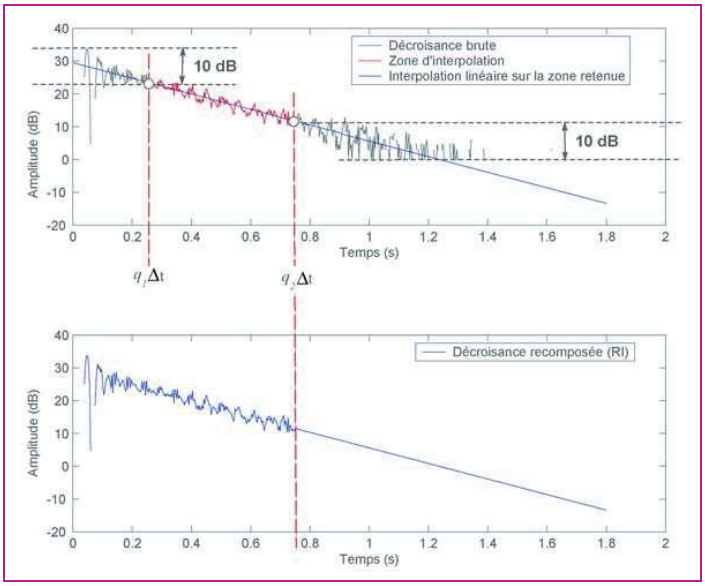


Figure 11
Exemple de recomposition d'une réponse impulsionnelle (RI). Figure du haut : représentation d'une RI brute et exemple d'interpolation linéaire sur le domaine [$q_1\Delta t$, $q_2\Delta t$] (en rouge) de la réponse impulsionnelle « brute ». Figure du bas : construction de la RI recomposée : la RI « brute » est extrapolée à partir du temps $q_2\Delta t$.

APPLICATIONS ET VALIDATION

Dans cette dernière partie, des exemples d'application du programme SPPS sont présentées pour plusieurs configurations de forme et d'encombrement d'une salle, ainsi que pour plusieurs conditions de réflexion au niveau des parois. Dans la mesure où ces applications ont été extraites de la littérature scientifique, pour lesquelles des données expérimentales ou des résultats numériques sont disponibles, nous avons également pu utiliser ces résultats pour valider l'approche particulaire. Toutefois, pour des raisons évidentes, il convient de porter plus d'attention aux comparaisons SPPS/mesures, qu'aux comparaisons SPPS/modèles. Le premier cas permet une validation réelle du programme SPPS (dans la limite des incertitudes de mesure), tandis que le second cas offre plutôt une évaluation qualitative du comportement du programme SPPS par rapport à d'autres modèles.

Salles de dimension homogène

Dans cette partie, nous considérons deux applications du programme SPPS pour des salles quasi-cubiques présentant soit des réflexions spéculaires, soit des réflexions diffuses.

Salle cubique en champ spéculaire (comparaison avec un modèle)

Dans un article récent, Yang et Shield [2000] ont présenté des résultats de simulation (programme de tracé de rayons sonores appelé NORMAL, réflexions spéculaires uniquement) dans une salle quasi-cubique de dimension $8 \times 10 \times 9$ m^3, d'absorption uniforme 0,1, pour une source permanente, de puissance 90 dB, disposée au point (1,1,1) dans la salle. Les niveaux sonores et les temps de réverbération ont été calculés en sept points répartis dans la salle. À titre de comparaison, des simulations avec le programme SPPS ont été réalisées dans une configuration identique, avec deux millions de particules et les paramètres suivants : $N_x = 8$, $N_y = 10$, $Nz = 9$, $\Delta t = 3$ ms, $N_t = 800$, $m = 0$ Np/m (c'est-à-dire que l'atténuation atmosphérique est négligée). Les niveaux sonores et les temps de réverbération SPPS ont été calculés en utilisant la procédure de recomposition et de compensation présentée plus haut. Ces résultats ont été ensuite comparés à ceux du programme NORMAL ainsi qu'aux résultats donnés par la théorie classique de la réverbération (Fig. 13).

En ce qui concerne les niveaux sonores calculés pour les récepteurs de référence localisés dans la salle, les résultats obtenus par SPPS sont très proches de ceux du programme NORMAL. Les écarts maximaux observés avec le programme NORMAL sont de l'ordre de 0,30 dB (0,18 dB en moyenne). La seconde partie de la figure 13 montre également un bon accord entre les temps de réverbération EDT et RT30. Un écart maximal de l'ordre de 0,20 s est obtenu pour l'EDT (0,08 s d'écart moyen) et 0,15 s pour le RT30 (0,10 s d'écart moyen), ce qui prouve le bon comportement du programme SPPS.

Dans cette application, la salle étant de dimension homogène et d'absorption uniforme, les simulations numériques sont également cohérentes avec la théorie classique de la réverbération.

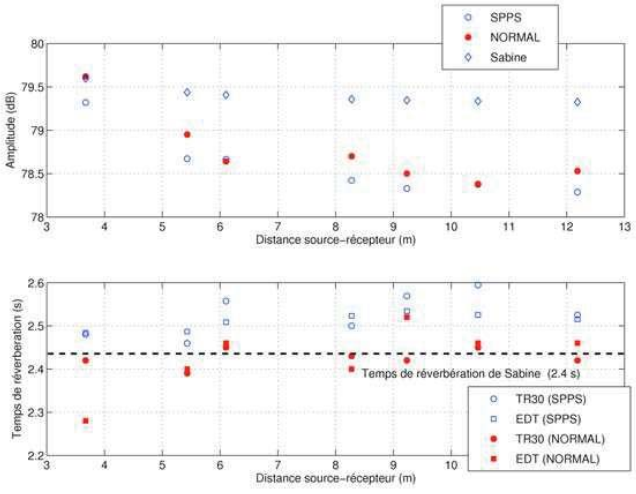


Figure 13

Comparaison des résultats du programme SPPS avec ceux issus du programme NORMAL [d'après Yang et Shield, 2000], pour une salle quasi-cubique de dimension $8 \times 10 \times 9$ m. Les résultats de la théorie classique de la réverbération (Sabine) sont également présentés.

APPLICATIONS ET VALIDATION

Dans cette dernière partie, des exemples d'application du programme SPPS sont présentées pour plusieurs configurations de forme et d'encombrement d'une salle, ainsi que pour plusieurs conditions de réflexion au niveau des parois. Dans la mesure où ces applications ont été extraites de la littérature scientifique, pour lesquelles des données expérimentales ou des résultats numériques sont disponibles, nous avons également pu utiliser ces résultats pour valider l'approche particulaire. Toutefois, pour des raisons évidentes, il convient de porter plus d'attention aux comparaisons SPPS/mesures, qu'aux comparaisons SPPS/modèles. Le premier cas permet une validation réelle du programme SPPS (dans la limite des incertitudes de mesure), tandis que le second cas offre plutôt une évaluation qualitative du comportement du programme SPPS par rapport à d'autres modèles.

Salles de dimension homogène

Dans cette partie, nous considérons deux applications du programme SPPS pour des salles quasi-cubiques présentant soit des réflexions spéculaires, soit des réflexions diffuses.

Salle cubique en champ spéculaire (comparaison avec un modèle)

Dans un article récent, Yang et Shield [2000] ont présenté des résultats de simulation (programme de tracé de rayons sonores appelé NORMAL, réflexions spéculaires uniquement) dans une salle quasi-cubique de dimension $8 \times 10 \times 9$ m^3, d'absorption uniforme 0,1, pour une source permanente, de puissance 90 dB, disposée au point (1,1,1) dans la salle. Les niveaux sonores et les temps de réverbération ont été calculés en sept points répartis dans la salle. À titre de comparaison, des simulations avec le programme SPPS ont été réalisées dans une configuration identique, avec deux millions de particules et les paramètres suivants : $N_x = 8$, $N_y = 10$, $Nz = 9$, $\Delta t = 3$ ms, $N_t = 800$, $m = 0$ Np/m (c'est-à-dire que l'atténuation atmosphérique est négligée). Les niveaux sonores et les temps de réverbération SPPS ont été calculés en utilisant la procédure de recomposition et de compensation présentée plus haut. Ces résultats ont été ensuite comparés à ceux du programme NORMAL ainsi qu'aux résultats donnés par la théorie classique de la réverbération (Fig. 13).

80

En ce qui concerne les niveaux sonores calculés pour les récepteurs de référence localisés dans la salle, les résultats obtenus par SPPS sont très proches de ceux du programme NORMAL. Les écarts maximaux observés avec le programme NORMAL sont de l'ordre de 0,30 dB (0,18 dB en moyenne). La seconde partie de la figure 13 montre également un bon accord entre les temps de réverbération EDT et RT30. Un écart maximal de l'ordre de 0,20 s est obtenu pour l'EDT (0,08 s d'écart moyen) et 0,15 s pour le RT30 (0,10 s d'écart moyen), ce qui prouve le bon comportement du programme SPPS.

Dans cette application, la salle étant de dimension homogène et d'absorption uniforme, les simulations numériques sont également cohérentes avec la théorie classique de la réverbération.

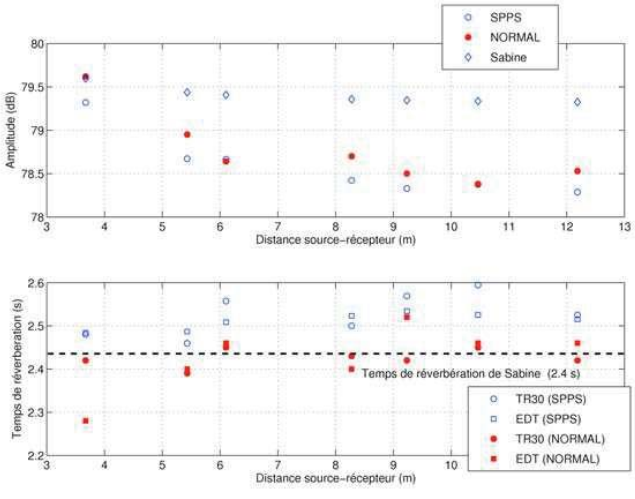


Figure 13

Comparaison des résultats du programme SPPS avec ceux issus du programme NORMAL [d'après Yang et Shield, 2000], pour une salle quasi-cubique de dimension $8 \times 10 \times 9$ m. Les résultats de la théorie classique de la réverbération (Sabine) sont également présentés.

Salle cubique en champ diffus (comparaison avec un modèle)

Au travers de ses nombreux travaux en acoustique des salles, Kuttruff a développé une méthode intégrale pour le calcul du champ sonore dans une salle diffuse [Kuttruff, 2000]. Cette méthode, considérée par la communauté scientifique comme une méthode de référence, a été appliquée dans de nombreuses configurations et a montré un comportement intéressant, même s'il n'en existe à notre connaissance que peu de validations expérimentales. Dans un article récent, Kuttruff [1997] a notamment appliqué cette méthode pour des salles cubiques (10 m d'arête), caractérisées par différentes conditions de répartition de l'absorption acoustique. En particulier, nous nous sommes intéressés à deux configurations, l'une (notée K6) présentant une absorption uniforme ($\alpha = 1/6$) et l'autre (notée K5) ne présentant qu'une seule paroi totalement absorbante. Dans les deux cas, la source sonore est localisée au centre de la salle. Ces deux configurations ont donc été simulées, avec 500 000 particules et les paramètres suivants : $N_x = 10$, $N_y = 10$, $N_z = 10$, $\Delta t = 2{,}9$ ms, $Nt = 700$, $m = 0$ Np/m (c'est-à-dire que l'atténuation atmosphérique est négligée).

Le tableau I donne les résultats des temps TR obtenus par le modèle de Kuttruff et par le programme SPPS (après compensation et recomposition), ainsi qu'avec les formules classiques de Sabine et d'Eyring. En ce qui concerne la configuration cubique caractérisée par une absorption uniforme (K6), les valeurs des temps TR données par SPPS et Kuttruff sont proches de celles de Sabine et d'Eyring. On se trouve ici dans un cas idéal (salle cubique, diffuse et d'absorption uniforme) propice à la création d'un champ diffus conforme à la théorie classique. Pour la configuration cubique d'absorption non uniforme (K5), on note un écart plus important entre l'approche SPPS et celle de Kuttruff (de l'ordre de 0,25 s) qu'il est difficile d'expliquer. Malgré cette réserve, le programme SPPS semble donner des résultats cohérents pour une salle cubique caractérisée par des parois diffuses et d'absorption non uniforme.

TABLEAU I

Comparaison des temps de réverbération (en seconde) obtenus par la théorie classique de la réverbération (Sabine et Eyring), par le modèle de Kuttruff et par les simulations numériques SPPS. Les temps TR30 et EDT ont été calculés sur les décroissances globales recomposées et compensées

Configuration	Absorption	Sabine TR (s)	Eyring TR (s)	Kuttruff TR (s)	SPPS RT30 (s)	SPPS EDT (s)
(K6) $10 \times 10 \times 10$ m^3	Uniforme ($\alpha = 1/6$)	1,63	1,49	1,57	1,73	1,75
(K5) $10 \times 10 \times 10$ m^3	Totale sur une face			1,37	1,62	1,62

Espaces allongés

La modélisation de la propagation du son dans des espaces allongés (couloirs, locaux plats, rues, etc.) a donné naissance à de nombreuses études. Pour ces espaces, où l'une des dimensions est bien souvent très supérieure aux autres, les observations expérimentales ont montré l'absence de champ diffus, au sens de la théorie classique de la réverbération. En d'autres termes, la densité d'énergie et les temps de réverbération ne sont pas homogènes dans l'ensemble du milieu de propagation, ce qui met en défaut la théorie de la réverbération de Sabine. Il résulte de cette observation que les modèles fondés sur la théorie classique des champs diffus ne sont pas applicables et doivent laisser place à d'autres méthodes. Dans cette partie, on propose donc quatre applications du programme SPPS à des espaces allongés (un couloir, une station de métro et deux locaux plats). L'hypothèse des champs diffus n'étant pas vérifiée dans ces espaces, nous n'avons pas appliqué le traitement de compensation et de recomposition des réponses impulsionnelles.

Couloir en champ spéculaire (comparaison avec des mesures)

Dans un ouvrage récent, Kang [2002] a détaillé de nombreuses expérimentations dans des espaces allongés. Nous avons en particulier retenu les mesures réalisées dans un couloir de l'Université de Cambridge (UK), auxquelles ont été comparés les résultats des simulations. Le couloir, de dimension $1{,}56 \times 42{,}5 \times 2{,}83$ m^3, est limité par des parois produisant des réflexions spéculaires (c'est-à-dire de coefficient d'accommodation nul) et définies par une absorption uniforme égale à 0,1 pour les murs

latéraux et 0,5 pour les extrémités. La source sonore est localisée au centre de la section du couloir, à 1,5 m d'une extrémité. Les temps de réverbération RT30 ont été mesurés dans l'axe du couloir, de 5 à 39 m de la source, pour les bandes d'octaves 500 et 1 000 Hz.

La figure 14 illustre la comparaison des mesures de Kang avec les simulations SPPS pour $N_x = 5$, $N_y = 45$, $N_z = 7$, $\Delta t = 2{,}9$ ms, $N_t = 700$, m = 0,003 Np/m et deux millions de particules sonores. Afin de faciliter la comparaison, les mesures de Kang ont également été interpolées (interpolation quadratique) sur l'ensemble des distances sources-récepteurs. Pour des raisons pratiques (dynamique insuffisante des simulations numériques), le temps de réverbération « SPPS » a été estimé sur une décroissance de 20 dB de l'énergie sonore en chaque point récepteur, au lieu des 30 dB classiques. Cela explique la notation RT20 présente sur la figure, mais ne change en rien les conclusions de ces simulations. Malgré tout, les résultats montrent un excellent comportement du programme SPPS, notamment pour des distances sources-récepteurs supérieures à 10 m. Proche de la source, le caractère local et déterministe de certaines réflexions peut engendrer un comportement particulier du champ sonore (présence de diffractions bien définies par exemple), qui n'est pas prévu par une approche probabiliste. Comme attendu, on notera également que la théorie classique des champs diffus, illustrée par les temps de réverbération de Sabine et d'Eyring, est mise en défaut.

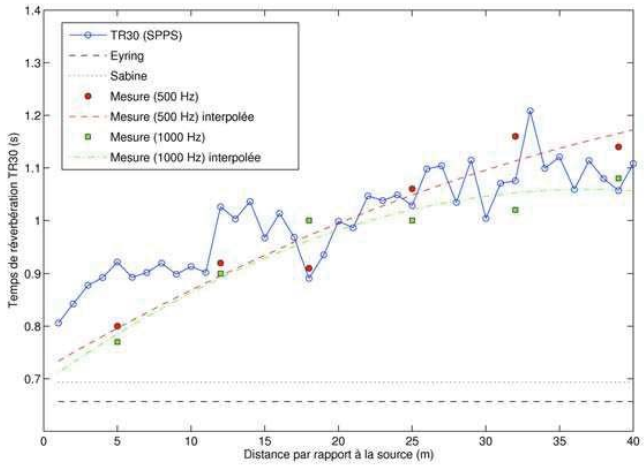


Figure14

Comparaison des résultats du programme SPPS avec les données expérimentales de Kang [2002] obtenues dans un couloir de l'Université de Cambridge (UK), pour les bandes d'octave 500 Hz et 1 000 Hz. Pour des raisons pratiques (dynamique insuffisante), les temps de réverbération SPPS ont été calculés sur une décroissance de 20 dB au lieu des 30 dB usuels. Les résultats issus de la théorie classique de la réverbération (Sabine et Eyring) sont également présentés.

82

Station de métro (comparaison avec des mesures)

Dans ce même ouvrage, Kang a également présenté des résultats de mesure dans une station de métro de Londres (London Euston Square), de section rectangulaire et de dimension $12{,}9 \times 120 \times 5{,}85$ m^3. Ces mesures ont été obtenues avec une source dodécaédrique située à 0,7 m au-dessus du sol, à 25 m d'une extrémité de la station et à 1,8 m du bord du quai. Les temps de réverbération EDT ont été mesurés à 1,5 m de hauteur, 2 m du bord du quai, de 5 à 40 m de la source, pour les bandes d'octaves 250-4 000 Hz. Les simulations numériques ont été réalisées en considérant les parois totalement spéculaires, avec un million de particules sonores et les paramètres suivants : $N_x = 10$, $N_y = 120$, $N_z = 6$, $\Delta t = 2{,}9$ ms, $N_t = 800$, m = 0,003 Np/m. En l'absence de données sur le coefficient d'absorption des parois latérales, les simulations ont été réalisées pour deux valeurs différentes, 0,06 et 0,08 (valeurs proposées par Kang). Les deux extrémités de la station de métro étant ouvertes, les coefficients d'absorption respectifs ont été fixés à 1.

À la différence des simulations du paragraphe précédent, les comparaisons sont réalisées sur les temps de réverbération EDT. La faible dynamique évoquée précédemment n'est plus un problème ici. La figure 15 montre là encore un très bon accord entre le programme SPPS et les données expérimentales. Les deux simulations modélisent assez correctement l'évolution du temps de réverbération EDT dans la station de métro. Des informations complémentaires sur les valeurs de l'absorption permettraient sans doute d'obtenir un meilleur accord avec les données expérimentales.

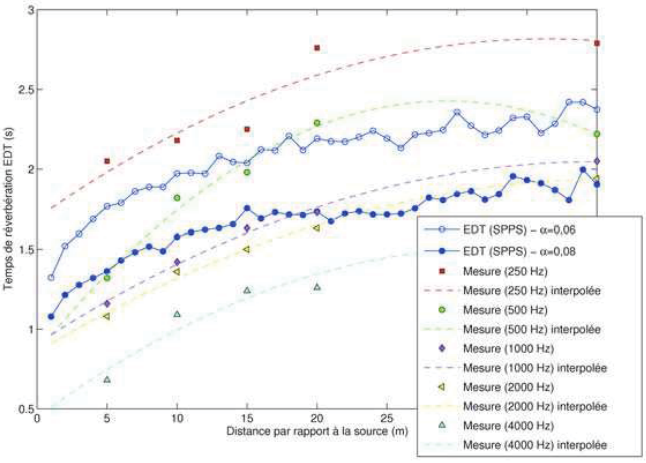


Figure 15

Comparaison des résultats du programme SPPS avec les données expérimentales de Kang [2002] obtenues dans la station de métro « London Euston Square » à Londres, pour les bandes d'octave allant de 250 Hz et 4 000 Hz. Faute de données suffisantes sur l'absorption des parois, les simulations par SPPS ont été réalisées avec les deux coefficients d'absorption différents (0,06 et 0,08) proposés par Kang.

Local plat en champ spéculaire (comparaison avec des mesures)

Ondet et Barbry [1989] ont présenté le résultat d'une expérimentation dans un local plat de dimension 8 × 30 × 3,85 m^3, caractérisé par des parois présentant des réflexions spéculaires et d'absorption égale à 0,05 sur le sol, 0,15 au plafond et 0,1 sur les autres parois. Une source sonore de puissance 102,9 dB a été disposée au point (1,5 ; 1 ; 0,85) dans la salle. Des mesures de niveau sonore ont été réalisées en plusieurs points de la salle, dans la bande d'octave 2 000 Hz. Cette configuration a été simulée avec le programme SPPS en utilisant 750 000 particules sonores et avec les paramètres suivants : $N_x = 5$, $N_y = 15$, $N_z = 4$, $\Delta t = 2{,}5$ ms, $N_t = 1\,200$, m = 0,0024 Np/m.

La figure 16 présente une comparaison des niveaux de pression mesurés par Ondet et Barbry avec ceux calculés par le programme SPPS, ainsi qu'avec la théorie classique de la réverbération (Sabine). Cette figure montre une nouvelle fois le bon comportement du programme SPPS. Là encore, l'inapplicabilité de la théorie classique est vérifiée.

83

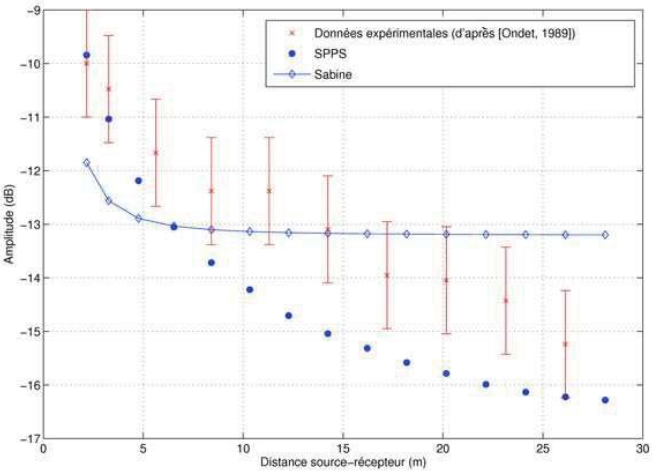


Figure 16

Comparaison des résultats du programme SPPS avec les données expérimentales de Ondet et Barbry [1989], obtenues dans un local plat de dimension 8 × 30 × 3,85 m^3, ainsi qu'avec la théorie classique de la réverbération (Sabine).

Local plat en champ mixte (comparaison avec un modèle)

Plus récemment, Korany et *al.* [2001] ont proposé un nouveau modèle numérique pour la prévision des champs sonores dans des salles, permettant de prendre en compte les phénomènes de diffusion sur les parois du domaine. Ce modèle est une version hybride d'une méthode de

sources-images classique associée à une méthode de radiosité pour la partie diffuse du champ sonore. Dans cet article, les auteurs ont proposé une application de leur modèle numérique dans un local plat de dimension 20 × 30 × 10 m^3, d'absorption égale à 0,9 au sol, 0,1 au plafond, 0,3 sur les murs latéraux et 0,6 aux deux extrémités. Une source sonore normalisée de 0 dB a été disposée au point (2,5 ; 15 ; 3) dans la salle, tandis que le temps de réverbération a été estimé au point (15 ; 10 ; 4). Afin d'évaluer l'évolution du temps de réverbération avec la diffusion des parois, Korany et *al*. ont réalisé des simulations pour six valeurs du coefficient d'accommodation, allant de 0 à 1 par pas de 0,2. Ces configurations ont également été simulées en utilisant le programme SPPS avec un million de particules et les paramètres suivants : $N_x = 20$, $N_y = 30$, $N_z = 10$, $\Delta t = 2{,}9$ ms, $N_t = 400$, m = 0 Np/m.

La figure 17 montre la comparaison des temps de réverbération obtenus par Korany et *al*. avec ceux calculés par le programme SPPS. Faute d'information suffisante sur la nature du temps TR utilisé par les auteurs, nous avons représenté les deux temps TR « standards », à savoir le RT30 et l'EDT obtenus par les simulations. L'allure des courbes est relativement identique entre les deux simulations, même si les temps de réverbération SPPS semblent presque systématiquement surestimer les valeurs de Korany et *al*., excepté au dernier point (d = 1). On notera le comportement particulier de l'EDT (SPPS) pour d = 0,4 par rapport aux valeurs les plus proches, qui peut probablement s'expliquer par une dynamique insuffisante des simulations, faussant le calcul du temps de réverbération. Toutefois, dans l'ensemble, ce résultat souligne une nouvelle fois le bon comportement du programme SPPS et montre là encore l'inapplicabilité des formules classiques de Sabine et d'Eyring, pour ce type de salle.

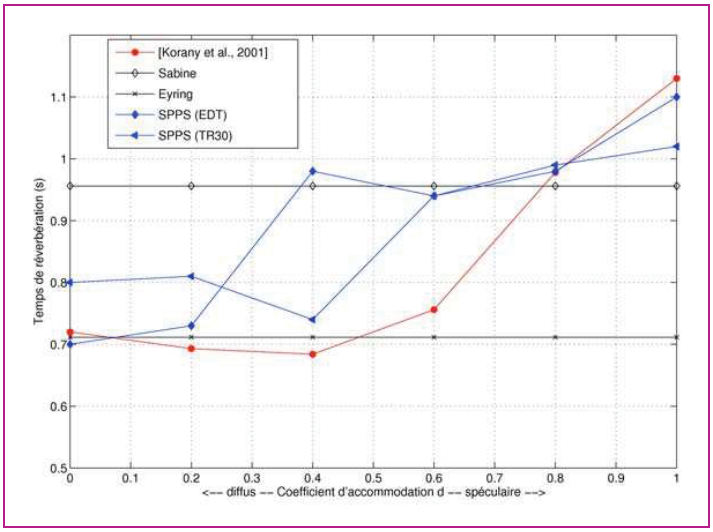


Figure 17

Comparaison des résultats du programme SPPS (EDT et RT30) avec les données expérimentales de Korany et al. [2001] dans un local plat de dimension 20 × 30 × 10 m^3. Les résultats de la théorie classique de la réverbération (Sabine et Eyring) sont également indiqués.

84

Locaux encombrés

Ondet et Barbry [1989] ont également présenté des mesures de champs sonores dans une salle d'essai, pour quatre configurations d'encombrement (Fig. 18), allant de « vide » à « uniformément remplie ». La source sonore a été disposée au point (1,5 ; 1 ; 0,85) dans la salle de dimension 30 × 8 × 3,85 m^3, tandis que les mesures de niveau sonore ont été réalisées en de nombreux points de la salle (Fig. 18a). Ces mêmes configurations ont également été simulées avec le programme SPPS, en utilisant 750 000 particules sonores et les paramètres suivants : $N_x = 5$, $N_y = 15$, $N_z = 4$, $\Delta t = 2{,}5$ ms, $N_t = 1\,200$, m = 0,0024 Np/m. Les résultats des simulations SPPS, comparés aux résultats expérimentaux, sont présentés sur la figure 19. Dans l'ensemble, et bien que les simulations sous-estiment légèrement les mesures, l'accord obtenu est excellent. Des comparaisons avec d'autres données expérimentales (non présentées ici) ont également été réalisées, et ont fourni des résultats similaires.

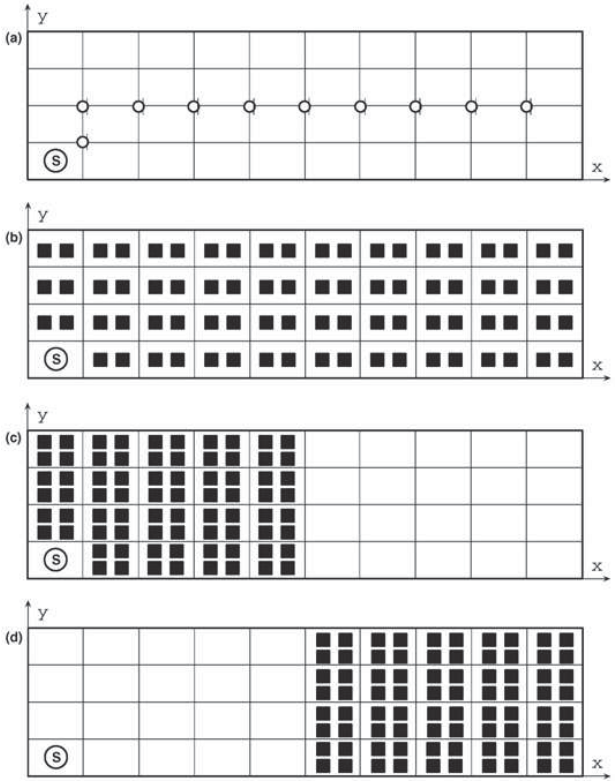


Figure 18

Configurations étudiées par Ondet et Barbry [1989]. Local plat de dimension 30 × 8 × 3,85 m^3, encombré par des obstacles de dimension 0,5 × 0,5 × 3 m^3 : (a) local vide : les microphones de mesure sont disposés à 1,5 m au-dessus du sol, de 3 à 27 m de la source, tous les 3 m. Un microphone de référence est également situé au point (3,2). La source est située au point (1,5 ; 1) à 0,85 m au-dessus du sol ; (b) local plat entièrement encombré (80 obstacles, λ_c = 7,6 m, α_c = 0,3) ; (c) et (d) local plat à demi encombré (80 obstacles, λ_c = 3,9 m, α_c = 0,3).

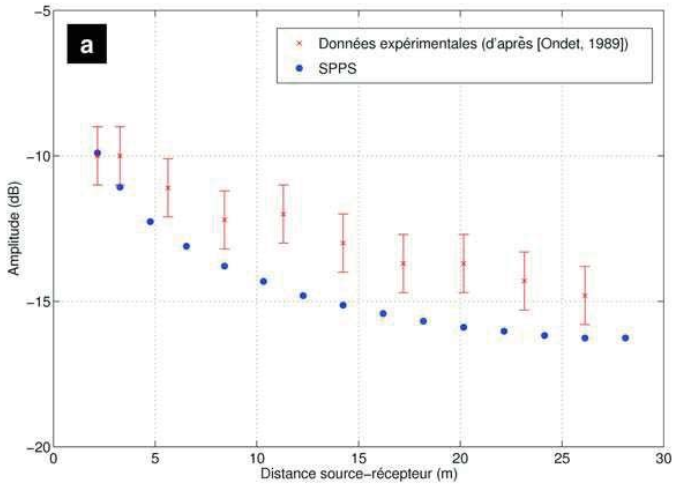


Figure 19

Comparaison des résultats du programme SPPS avec les données expérimentales obtenues par Ondet et Barbry [1989] dans les quatre configurations (a), (b), (c) et (d) de la figure 18, pour la bande d'octave 2 000 Hz. Les incertitudes de mesures ont été estimées à ± 1 dB par les auteurs.

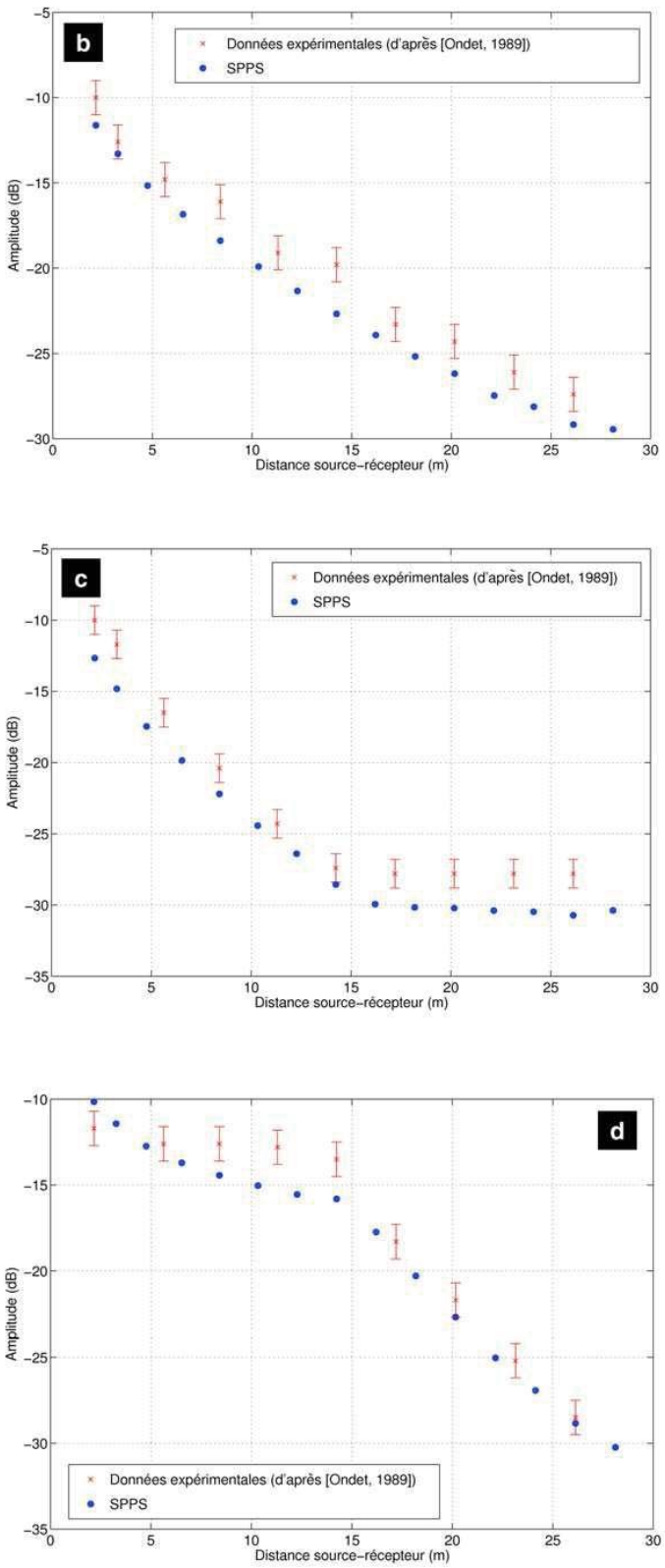


Figure 19 (suite)

Conclusion

Dans cet article, nous avons montré le principe de la modélisation numérique des champs sonores dans une enceinte « complexe », grâce au concept de particules sonores, en modélisant l'ensemble des phénomènes d'absorption, de réflexion, de diffusion, d'atténuation atmosphérique et d'émission par des procédures de tirage aléatoire. L'application à des configurations réelles, pour lesquelles des données expérimentales sont disponibles dans la littérature, a montré un très bon comportement du modèle numérique.

Sous sa forme actuelle, et sans modification majeure, le programme SPPS peut être étendu à un environnement multi-sources, avec des directivités complexes. Cette extension est relativement simple puisqu'il suffit d'opérer une boucle sur le nombre de sources, au premier pas de temps, de façon à définir la position et la direction initiale des particules sonores à l'instant initial. Le reste du déroulement de la procédure est inchangé.

Il est également possible de considérer les effets des parois avec plus de précision. Dans cette version, les propriétés acoustiques (absorption, accommodation et type de réflexion) sont supposées uniformes sur l'ensemble de la paroi, mais peuvent être différentes sur les six parois considérées. En définissant des propriétés acoustiques propres pour chacune des mailles en contact avec une limite du domaine de propagation, la description des parois sera plus fine, autorisant des zones d'absorption et de réflexion différentes sur une même paroi.

Enfin, il est important de souligner qu'à la différence de l'approche « rayons sonores », l'approche « particules sonores » permet de prendre en compte les effets météorologiques dans le processus de propagation des particules sonores. Par exemple, la contribution du vent peut être introduite dans les simulations numériques, en modifiant les composantes du vecteur vitesse des particules de façon à y introduire celle du vent. De la même façon, il est également possible de prendre en compte les effets thermiques, en modifiant la direction de la vitesse des particules au cours du temps et, localement, en fonction de la position des particules. Cette approche permet ainsi de modéliser des trajectoires courbes, conformément aux observations expérimentales.

Comme pour les méthodes de tracé de rayons, la limitation majeure réside dans les temps de calcul. Plus le milieu de propagation est absorbant, de grande dimension, et constitué de nombreuses sources, plus il faudra considérer de particules sonores pour obtenir une dynamique suffisante en chaque point du maillage, et ainsi disposer d'une bonne estimation des temps de réverbération et du niveau sonore. À titre d'exemple, les applications présentées dans ce document ont nécessité des temps de calculs (hors traitement) de plusieurs heures à plus d'un jour, sur une station SUN (SUNW ; Sun-Blade-100 ; sparc ; sun4u) disposant de 1 Go de mémoire vive, fonctionnant sous SunOS 5.8 et en utilisant Matlab® 6.5. Une réécriture du programme SPPS dans un langage de programmation de type C ou C ++, associée à une station de travail plus performante, devrait diminuer considérablement les temps de simulation.

87

L'autre aspect qui limite pour l'instant l'utilisation du programme SPPS porte sur la forme du domaine de propagation, supposée parallélépipédique. L'application à des formes plus complexes (salles de spectacle, salles couplées) nécessiterait également la réécriture complète du programme, au niveau du maillage et du calcul des points de collision des particules avec les parois.

Références bibliographiques

AULETTA N., Contribution à l'étude de la propagation du son dans les locaux industriels encombrés – 1re partie (étude théorique), *Revue d'Acoustique*, vol. 75, **1985,** pp. 477-487.

AULETTA N., Contribution à l'étude de la propagation du son dans les locaux industriels encombrés – 2e partie, *Revue d'Acoustique*, vol. 76, **1986,** pp. 5-18.

BASS F.G., SUTHERLAND L.C., PIERCY J., EVANS L., *Absorption of sound by the atmosphere*, Academic Press Inc., **1984,** dans *Physical Acoustics*, vol. XVII, chapter 3.

BRUNEAU M., *Manuel d'acoustique fondamentale*, **1998,** Hermès, 576 pages.

BURNS P.J., MATLBY J.D., CHRISTON M.A., Large-scale surface to surface transport for phonons and electrons via Monte-Carlo, *Computing Systems in Engineering*, vol. 1, **1, 1990,** pp. 75-99.

CREMER L., MÜLLER H.A., *Principles and applications of room acoustics*, vol. 1, **1982,** Applied Science Publishers, 651 pages.

EMBLETON T.F.W., Tutorial on sound propagation outdoors, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 100, **1, 1996,** pp. 31-48.

EMBRECHTS J.J., ARCHAMBEAU D., STAN G.B., Determination of the scattering coefficient of random rough diffusing surfaces for room acoustics applications, *Acustica/acta acustica*, vol. 87, **2001,** pp. 482-494.

HIDAKA T., Sound field simulation, some considerations of related problems for wave theoretical auralization, Ferrara, *CIARM'95 2nd International Conference on Acoustics and Musical Research*, **1995,** F. Pedrielli, pp. 11-22.

HODGSON M., Evidence of diffuse surface reflections in rooms, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 89, **2, 1991,** pp. 765-771.

JOYCE J., Classical-particle description of photons and phonons, *Physical Review D*, vol. 9, **12, 1974,** pp. 3234-3256.

KANG J., *Acoustics of long spaces*, Thomas Telford, **2002,** 251 pages.

KORANY N., BLAUERT J., ABDEL ALIM O., Acoustic simulation of rooms with boundaries of partially specular reflectivity, *Applied Acoustics*, vol. 62, **2001,** pp. 875-887.

KULOWSKI A., Algorithmic representation of the ray tracing technique, *Applied Acoustics*, vol. 18, **1985,** pp. 449-469.

KUTTRUFF H., Sound decay in reverberation chambers with diffusing elements, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 69, **6, 1981,** pp. 1716-1723.

KUTTRUFF H., Energetic sound propagation in rooms, *Acustica/acta acustica*, vol. 83, **1997,** pp. 622-628.

KUTTRUFF H., *Room acoustics*, Spon Press, **2000,** 349 pages.

LINDQVIST E.A., Sound attenuation in large factory spaces, *Acustica*, vol. 50, **1982,** pp. 313-328.

LE POLLÈS T., *Modélisation des champs diffus en acoustique architecturale par la théorie des transports : application au milieu urbain*, Thèse de doctorat spécialité Acoustique, Université du Maine, Le Mans, **2003,** 185 pages.

ONDET A.M., BARBRY J.L., Modelling of sound propagation in fitted workshops using ray tracing, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 85, **2, 1989,** pp. 787-796.

ÖGREN M., Modelling of a city canyon problem in a turbulent atmosphere using an equivalent sources approach, *Applied Acoustics*, vol. 65, **2004,** pp. 629-642.

PIERCY J.E., EMBLETON T.F.W., SUTHERLAND L.C., Review of noise propagation in the atmosphere, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 61, **6, 1977,** pp. 1403-1418.

PICAUT J., LE POLLÈS T., ARMÉNIO S., Influence des lois de réflexion des parois sur la propagation du son en acoustique des salles. Simulations numériques par une méthode de Monte-Carlo, Lille, *6e Congrès français d'Acoustique*, **2003,** pp. 674-677.

PICAUT J., Numerical sound field modelling in room acoustics and workshops using sound particles, Strasbourg, *7e Congrès français d'Acoustique – 30e Congrès de la Société Allemande d'Acoustique*, **2004a,** pp. 241-242.

PICAUT J., Effects of diffusion on the sound propagation in a street, Prague, *Internoise*, **2004b.**

SCHROEDER M.R., Iterative calculation of reverberation time, *Acustica*, vol. 40, **1980,** pp. 115-119.

PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., FLANERY B.P., *Numerical Recipes in FORTRAN 77, The art of scientific computing*, Cambridge University Press, **1992,** 992 pages.

STEPHENSON U., An acoustic computer simulation technique for calculating parameters relevant to subjective acoustical impression in concert halls, *Acustica*, vol. 59, **1985,** pp. 1-20 (en allemand).

STEPHENSON U., Comparison of the mirror image source method and the sound particle simulation method, *Applied Acoustics*, vol. 29, **1990,** pp. 35-72.

TORRES R.R., SVENSON U.P., KLEINER M., Computation of edge diffraction for more accurate acoustics auralization, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, **2, 2001,** pp. 600-610.

VORLÄNDER M., MOMMERTZ E., Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients, *Applied Acoustics*, vol. 60, **2000,** pp. 187-199.

YANG L.N., SHIELD B.M., Development of a ray tracing computer model for the prediction of the sound field in long enclosures, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 229, **1, 2000,** pp. 133-146.

ELSEVIER

Applied Acoustics 63 (2002) 965–991

applied acoustics

www.elsevier.com/locate/apacoust

Numerical modeling of urban sound fields by a diffusion process

J. Picaut*

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Section Acoustique Routière et Urbaine, Route de Bouaye, BP 4129, 44341 Bouguenais Cedex, France

Received 7 July 2001; received in revised form 23 January 2002; accepted 6 February 2002

Abstract

In this paper, we present the numerical implementation of a sound field model used in urban acoustics. The mathematical model being based on a classic diffusion equation for the sound energy, a simple finite difference scheme is applied. We give also some finite difference equations for simple boundary conditions, like absorption by a wall and at building edges. The two-dimensional numerical scheme is then compared to analytical solutions of the sound field propagation in a rectangular street with a good agreement, both in the steady state and in the time varying state. Finally it is suggested that the adjustment of usual softwares for heat transfer could be an interesting and low cost way to develop powerful acoustic softwares for the prediction of noise in urban areas. © 2002 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

In urban areas, scattering of sound by surface irregularities (balconies, edges...) and multiple reflections by building facades are very complex phenomena. As a consequence, the reverberant sound field which is created, is very difficult to model [1,2]. Many researches have been done to propose solutions to predict such sound fields, but the mathematical models which have been developed are often limited to simple configurations and can not be applied to real situations. To this effect, most of the works have consisted in developing numerical models (for a comprehensive review of sound propagation models and simulations in urban areas, the reader can refer to Ref. [3]. In particular, one may cite the well known sound ray technics

* Tel.: +33-2-40-84-57-89; fax: +33-2-40-84-59-92.
E-mail address: judicael.picaut@lcpc.fr

0003-682X/02/$ - see front matter © 2002 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.
PII: S0003-682X(02)00011-7

based, for example, on the image source method, and which is used in most of the room and urban acoustics softwares. Although they produce acceptable results, some limitations may be noticed, in particular for urban areas:

- Most of the softwares need important computation times to calculate a sound map or to evaluate the sound decay at a receiver for complex geometries.
- The diffraction by facade irregularities is often modeled by considering that the facade is a plane surface on which sound rays are randomly reflected according to an artificial reflection law, like the Lambert's law [4], or reflected in all directions as a secondary sound source [5]. In this case, the real geometry of the building facades is not retained, and the scattering effects are not correctly taken into account.
- Moving point sources or time varying sources, like vehicles, can not be introduced in the calculations.

In order to overcome these limitations, new researches have been carried out on the modeling of sound field in built-up areas. In particular, the main objective was to develop a model that can be easily implemented. For this purpose, in recent papers [6,7], a mathematical and energetical model based on the concept of sound particles and called *diffusion model*, was proposed to predict the sound propagation in rooms and long enclosures with diffusely reflecting boundaries. Considering the statistical propagation of sound particles in a diffuse enclosure, it was shown that the sound energy of the reverberant field may be the solution of a diffusion equation. Then, by solving the diffusion equation both in steady state and in time-varying state, the sound attenuation and the sound decay of the reverberant field can be predicted. The main interest of this model is that the multiple diffuse-scattering reflections, i.e. the boundary conditions, are simply taken into account by introducing only one parameter for the entire enclosure, the *diffusion parameter*, which describes the sound diffusivity of walls. It differs from other mathematical and simulation methods, where the sound reflection must be considered exactly on the boundaries. In the diffusion model, by considering the statistical behaviour of wall reflections, the determination of the sound field in rooms is simplified. From a mathematical point of view, these works have shown that a diffusion model may be seen as a simple extension of the classical theory of a diffuse sound field initiated a century ago by Sabine to model the reverberant field. At this point, it is important to notice that the diffusion model allows us to predict only the part of the sound field generated by the scattering and the multiple diffuse reflections on walls. The direct field must be calculated by classical techniques. Moreover, the model can not be applied to predict sound fields in free space or in spaces with low density of diffuse reflections.

Insofar as facade irregularities also produce diffuse-scattering in streets, the diffusion model can be applied for urban areas. In this case, the diffusion parameter expresses the sound diffusity of building facades. A first application was recently proposed [8], but only for rectangular streets where the diffusion equation may be solved easily, both in the steady state and the time varying state. Nevertheless, the

study of more complicated but realistic geometries requires the development of a numerical version of the diffusion model.

A numerical implementation of the diffusion model is then discussed here. Using the finite difference method, a numerical scheme is proposed both for the steady state (spatial distribution of sound) and the time varying state (sound decay and reverberation). Some comparisons with analytical solutions show a very good agreement. Moreover, since there is an evident analogy between the diffusion of sound in enclosures and heat transfer problems, we also discuss the adjustment of usual softwares for heat transfer problems to develop powerful acoustic softwares.

2. Theory

2.1. Diffusion model

2.1.1. Principle

In room acoustics, the sound field is usually modeled by sound particles having the same constant energy, propagating along straight lines and hitting walls or scattering objects. Consequently, such a process may be easily compared with the movement of a single particle in a gas. In recent papers [6,8] a diffusion theory was developed to model the sound field in rooms and in streets with diffusely reflecting boundaries, through this analogy. It was shown that the energy flow **J** in such spaces, by surface and time unit, follows a diffusion gradient equation

$$\mathbf{J} = -\mathrm{D}\mathrm{grad}w, \tag{1}$$

where w is the sound energy density and **D** is the diffusion coefficient of the enclosure. Eq. (1) is very important, since it allows for a non uniform sound energy in enclosures and, therefore, for an energy flow within absorbing boundaries. Experimental observations of this phenomenon have already been done for a long time, but no suitable mathematical justification was given until now.

2.1.2. Diffusion equation

The fundamental consequence of Eq. (1) is that the energy density in a room or in a street is described by a simple diffusion equation

$$\mathbf{D}\Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0. \tag{2}$$

This last equation is a mathematical extension of the Sabine's classic concept of a diffuse sound field in enclosures with diffusely reflecting boundaries [6]. Here p is the internal sound source, defined by volume and time unit.

2.1.3. Diffusion parameter

For totally closed enclosures (rooms) with uniformly diffuse walls, we have shown [6] that the diffusion coefficient may be expressed from the mean free path λ of the room and the speed of sound c, as

$$\mathbf{D} \equiv D = \frac{\lambda c}{3}. \tag{3}$$

For urban areas, numerical simulations have also shown [3] that the diffusion coefficient depends on the reflection law of building facades, the building size and the direction of propagation, such as it may be written as a set of diffusion coefficients, in three-dimensional cartesian coordinates, by

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} \tag{4}$$

In particular, for rectangular streets, in which dimensions length ℓ_x, width ℓ_y and height ℓ_z are parallel to the axis x, y and z, it was found that the diffusion coefficient is reduced to its diagonal components D_{xx}, D_{yy} and D_{zz} (D_x, D_y and D_z in a simplified notation) following an empirical law [8]:

$$\frac{D_x}{\ell_x} = \frac{D_y}{\ell_y} = \frac{D_z}{\ell_z} = \mathbb{D}_{3D}. \tag{5}$$

Here $\mathbb{D}_{3D}$ is called the three-dimensional (3D) *diffusion parameter* and depends on the roughness of the building facades, and on the frequency. At this time, $\mathbb{D}_{3D}$, which is supposed to be a constant of a street, can be found only by experiments. A method is proposed in Ref. [8] to estimate the diffusion parameter by measuring the sound decay at few locations in a rectangular street with low absorption on building facades and uniform diffusivity. This estimation is based on the analytical form of the solution of the diffusion equation in a rectangular street. In this case the time reverberation T_R may be easily linked to the diffusion parameter by

$$\mathbb{D}_{3D} = \frac{6\ln(10)}{\pi^2 T_R} \frac{4\ell_x \ell_z}{\ell_x + 4\ell_z}. \tag{6}$$

Following the method proposed in [8], it must be remarked that in a two-dimensional problem, the two-dimensional diffusion parameter must be used instead of relation (6):

$$\mathbb{D}_{2D} = \frac{6\ln(10)}{\pi^2 T_R} \ell_x. \tag{7}$$

As an example, first measurements in a Haussmann street scale model [8,9] have given $\mathbb{D}_{3D} = 35$ m/s between 400 Hz and 1.6 kHz, or, what is equivalent, $\mathbb{D}_{2D} = 105$ m/s. However, theoretical works are also in progress to find an analytical expression of the diffusion coefficients, as a function of the reflection laws of walls and building façades [10]. That will make it possible to take into account a non-uniform diffusion in a street, by considering a variable diffusion coefficient. However, these developments are still in progress.

Following this concept of diffusion, each street a, b, c... in an urban area (Fig. 1) may be characterized by its own architectural morphology, and can be defined by a set of diffusion parameters $\mathbb{D}_a$, $\mathbb{D}_b$, $\mathbb{D}_c$.... In this case, the diffusion Eq. (2) must be applied in each street with its own diffusion parameter, while the rate of energy transfer at a junction of two streets will take into account the two corresponding diffusion parameters. On a numerical point of view, this procedure will be detailed later in the paper.

2.2. Boundary equations

2.2.1. Wall absorption

The energy distribution and the sound decay in a room or in a street are found by solving Eq. (2) with the initial and boundary conditions. For walls or building facades with low absorption, an additional parameter, called *exchange coefficient* h, can be introduced in the boundary conditions [7]. According to this, the energy flow on a boundary has to satisfy the following condition:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}\,\mathrm{grad}_n w = hw, \tag{8}$$

where n is the normal to the boundary (set positively to the outside of the boundary) and where h is defined by the absorption coefficient α of the boundary and the sound velocity c, by

$$h = c\frac{\alpha}{4}. \tag{9}$$

One may point out that since the absorption coefficient α is a function of the sound frequency N [$\alpha \equiv \alpha(N)$], the exchange coefficient is also a function of the frequency [$h \equiv h(N)$].

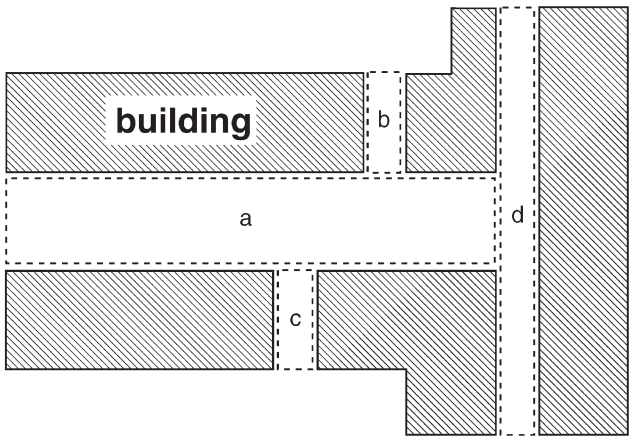


Fig. 1. Example of an urban areas defined by a network of streets, each one characterized by a diffusion parameter $\mathbb{D}_a$, $\mathbb{D}_b$, $\mathbb{D}_c$, $\mathbb{D}_d$.

2.2.2. Infinite boundary

For urban areas, infinite boundary conditions may also be easily simulated by considering that the sound energy w is equal to zero on the domain limit. This condition simply expresses that there is no energy contribution for receivers located far from the sound sources.

3. Numerical implementation

In this section, the implementation of the diffusion model is presented. As is shown by Eq. (2), the problem may be easily compared with heat conduction problems, since they are both characterized by a diffusion equation and a boundary condition defined by an exchange coefficient. It explains why, in the following developments, the choice was made to use a numerical scheme already used for heat transfer problems.

In order to study the behaviour of the numerical model and to simplify the paper, the method is first applied to very simple two-dimensional configurations, and in particular to a rectangular street. As suggested further in the conclusion, the three-dimensional extension may be easily done. It must be noticed that similar developments could be done for rectangular rooms, which is a more simple problem.

According to Eqs. (1) and (2) the two-dimensional equations corresponding to the problem are now written in cartesian coordinates by:

$$\mathbf{J} = -D_x \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{x} - D_y \frac{\partial w}{\partial_y}\mathbf{y}, \tag{10}$$

$$\left[D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] w - \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0, \tag{11}$$

where the diffusion coefficients D_x and D_y satisfy the two-dimensional condition (7):

$$\frac{D_x}{\ell_x} = \frac{D_y}{\ell_y} = \mathbb{D}_{2D}. \tag{12}$$

3.1. Geometry and mesh

As suggested in Fig. 2, showing a simple urban area characterized by buildings with a rectangular geometry, an interesting mesh would consist in very small elements inside the street, where a better accuracy is required for the sound energy, and larger elements around buildings, since they are only introduced to simulate infinite boundary conditions. Moreover, in most of the problems dealing with noise propagation in urban areas, it is often necessary to have also a very good accuracy in particular areas (cross-roads, narrow streets, beginning or end of a street...). This

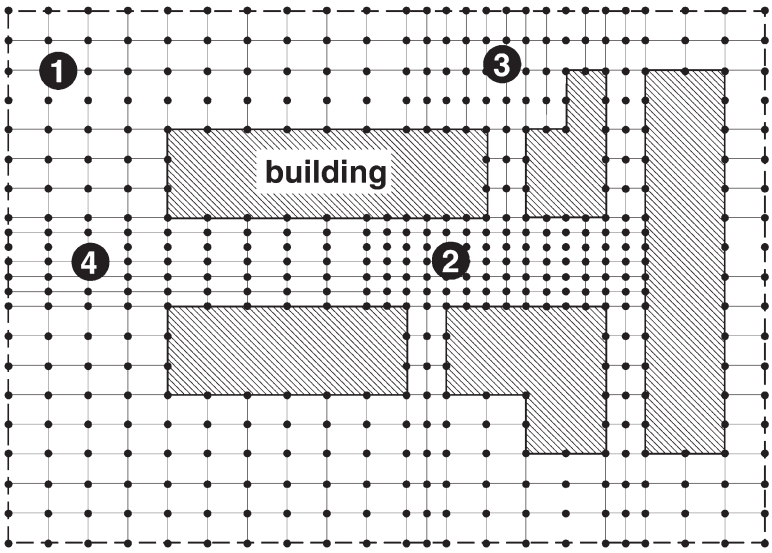


Fig. 2. Example of an elemental mesh for urban areas, with four zones where the grids are different.

can be obtained by reducing the element size. Therefore, the previous remarks suggest that the use of non-uniform rectangular elements is well adapted to the problem.

At this point, it is now necessary to define more exactly the notations of the mesh. Let us consider a rectangular mesh (see Fig. 3) and let $P_{i,j}$ be the node of the element (i,j) of size $\Delta x_{i,j}$ and $\Delta y_{i,j}$. By noting $\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}$, $\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}$, $\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}$ and $\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}$, respectively the distance between two successive nodes $P_{i,j}$ and $P_{i-1,j}$, $P_{i,j}$ and $P_{i+1,j}$, $P_{i,j}$ and $P_{i,j-1}$ and $P_{i,j}$ and $P_{i,j+1}$, the size $\Delta x_{i,j}$ and $\Delta y_{i,j}$ are written by

$$\Delta x_{i,j} = \frac{1}{2}\left[\Delta x_{i-\frac{1}{2},j} + \Delta x_{i+\frac{1}{2},j}\right], \tag{13}$$

$$\Delta y_{i,j} = \frac{1}{2}\left[\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}} + \Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}\right]. \tag{14}$$

3.2. Discretization of the spatial derivative of the energy density

The discretization of the diffusion model is obtained by substituting the partial derivatives in Eq. (10) by finite difference relationships. Using the second order Taylor series expansion of the spatial derivative of w, we can simply write the sound energy density at nodes $P_{i-1,j}$ and $P_{i+1,j}$ by:

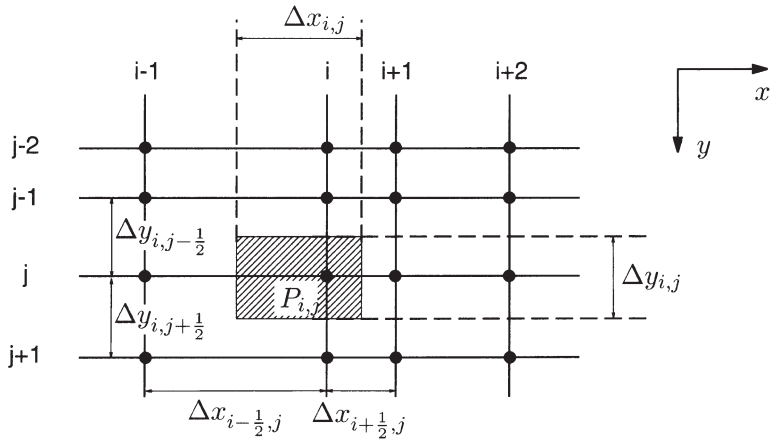


Fig. 3. Rectangular mesh notations for a rectangular element center around a node $P_{i,j}$.

$$w_{i-1,j} \approx w_{i,j} - \Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\right)^2}{2!}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{15}$$

$$w_{i+1,j} \approx w_{i,j} + \Delta x_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2}{2!}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{16}$$

where $w_{i,j}$ is the sound energy density at node $P_{i,j}$. The first order on $\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}$ and $\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}$ gives:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} \tag{18}$$

By multiplying (15) and (16), respectively by $\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}$ and $\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}$, and by adding the resulting relations, the double spatial derivative of w may also be approximated by:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx 2\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j} w_{i-1,j} + \Delta x_{i-\frac{1}{2},j} w_{i+1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}\left[\Delta x_{i+\frac{1}{2},j} + \Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\right]} - 2\frac{w_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} \tag{19}$$

at the second order on $\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}$ and $\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}$. Similar relationships would be found for the single and double spatial derivatives on the coordinate y.

3.3. Finite difference equations for interior nodes

3.3.1. Steady state diffusion

Considering two consecutive nodes $P_{i,j}$ and $P_{i+1,j}$ in a street, and following Eq. (1), the incident flow from the element $(i+1,j)$ to the element (i,j) is written:

$$\varphi_{i+\frac{1}{2},j} = -D_x \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}. \tag{20}$$

In a similar way, the incident flows from the other nearest nodes of $P_{i,j}$ are given by:

$$\varphi_{i,j-\frac{1}{2}} = -D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}, \tag{21}$$

$$\varphi_{i,j+\frac{1}{2}} = -D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}, \tag{22}$$

$$\varphi_{i-\frac{1}{2},j} = -D_x \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}, \tag{23}$$

According to Eqs (20)–(23), and assuming that the element (i,j) also contains an internal sound source $p_{i,j}$ by surface unit, the flow conservation in the steady state, inside the element (i,j) of size $\Delta x_{i,j}$ and $\Delta y_{i,j}$, is written

$$\left(\varphi_{i,j-\frac{1}{2}} + \varphi_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\Delta x_{i,j} + \left(\varphi_{i-\frac{1}{2},j} + \varphi_{i+\frac{1}{2},j}\right)\Delta y_{i,j} + p_{i,j}\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j} = 0, \tag{24}$$

which gives

$$\begin{aligned} &D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} w_{i,j-1} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} w_{i,j+1} + D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} w_{i-1,j} + D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} w_{i+1,j} \\ &- \left[\frac{D_y \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} + \frac{D_y \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} + \frac{D_x \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} + \frac{D_x \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} \right] w_{i,j} + p_{i,j}\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

3.3.2. Time varying state diffusion

For the time derivative of the energy density, one may just consider that the time is discretized with the time increment Δt. The new time axis is then defined by the characteristic times $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t, \ldots$. The time derivative of w is then

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{w([n+1]\Delta t) - w(n\Delta t)}{\Delta t}. \tag{26}$$

By noting $w_{i,j}^n$ for the sound energy at a node $P_{i,j}$ at time $n\Delta t$, the variation of energy density during the time Δt, is

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t}. \tag{27}$$

Rewriting the spatial derivative (19) to include the time dependence (a similar equation will be found for y), we have

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx 2\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j} w_{i-1,j}^{n+1} + \Delta x_{i-\frac{1}{2},j} w_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}\left[\Delta x_{i+\frac{1}{2},j} + \Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\right]} - 2\frac{w_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}. \tag{28}$$

Considering now Eq. (27) for the time derivative, the diffusion Eq. (11) gives

$$\begin{aligned} &w_{i-1,j}^{n+1} D_x \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x_{i,j}\Delta X_{i,j}} + w_{i+1,j}^{n+1} D_x \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_{i,j}\Delta X_{i,j}} + w_{i,j-1}^{n+1} D_y \frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{i,j}\Delta Y_{i,j}} \\ &\quad + w_{i,j+1}^{n+1} D_y \frac{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_{i,j}\Delta Y_{i,j}} - w_{i,j}^{n+1}\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{2D_x}{\Delta X_{i,j}} + \frac{2D_y}{\Delta Y_{i,j}}\right] \\ &\quad = -p_{i,j}^{n+1} - \frac{w_{i,j}^n}{\Delta t}, \end{aligned} \tag{29}$$

with the notations

$$\Delta X_{i,j} = \Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}, \tag{30}$$

$$\Delta Y_{i,j} = \Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

Here $p_{i,j}^{n+1}$ represents the internal sound source in the element (i,j), by surface and time unit.

We can notice that the choice was done to use an implicit scheme in (29) instead of an explicit scheme [12]. With an explicit finite-difference scheme (i.e. the energy density $w_{i,j}^{n+1}$ at the new time is a function of the energy density at the previous time $n\Delta t$), the time increment Δt must be compatible with the space increments. In this case, solutions may become unstable, causing the solution to diverge. With the implicit scheme, the energy density $w_{i,j}^{n+1}$ is a function of the energy density of the nearest nodes $(i+1,j), (i-1,j), (i,j+1), (i,j-1)$ at the same time $(n+1)\Delta t$, but also depends on the energy density $w_{i,j}^n$ at the previous time $n\Delta t$. The analysis of the stability of the implicit finite-difference scheme shows that it is unconditionally stable: the solution remains stable for all space and time increments, and there are, therefore, no restrictions on space and time increments.

Moreover, the use of Eqs. (25) and (26), as well as the equations following in the next sections, supposed that the diffusion coefficients are uniform in the street. However, as suggested in Section 2.1.3, if the building façades are not uniformly

diffuse, the diffusion coefficients may depend on the space coordinates. Then, in future developments, the diffusion coefficients D_x and D_y could be replaced by the corresponding diffusion coefficients $D_x^{i,j}$ and $D_y^{i,j}$, at nodes (i, j), in every finite difference equations.

3.4. Finite difference equations for nodes on building facades

Because of the rectangular geometry of the problem, the boundary conditions are very simple. As shown in Fig. 4, only four boundary conditions must be taken into account:

- (B) the infinite boundary, where the energy density must be equal to zero,
- (C) the wall absorption on a plane surface (building façade), where the energy flow must satisfy Eq. (8),
- (D) the wall absorption on a building edge, where the energy flow must satisfy Eq. (8),
- (E) the wall absorption on a building corner, where the energy flow must satisfy the Eq. (8).

For the infinite boundary condition, the procedure is to set the energy density $w_{i,j}^n$ to zero for all n in the case of the time varying state (or $w_{i,j}$ in the steady state case), for all nodes (i,j) located on the domain limit.

For the wall absorption, the boundary equation is found by considering the energy flow conservation at a node $P_{i,j}$ on the wall. As examples, in Appendix A, we present the method for the boundary conditions (C1), (D1) and (E1). The equations can be easily generalized to all the other boundary conditions.

3.5. Finite difference equations for nodes at a street junction

At the junction of several streets with different diffusion parameters (Fig. 5), the finite difference equations are slightly more complicated than for an interior node. An example is given in the Appendix B for a node between two streets.

3.6. System of linear equations

Let us consider a rectangular mesh with K nodes $P_{i,j}$. For simplification, we change the numbering of nodes, by the use of only one index p, in such a way that the node $P_{i,j}$ may be notice P_p ($p = 1 \ldots K$). As shown by Eqs. (25), (A.4), (A.7), (A.11) for the steady state and Eqs. (29), (A.5), (A.9), (A.12) for the time varying state, the energy at a node P_p is the sum of the energy contribution of the nearest nodes, noted P_i, P_j, P_k and P_l. With this notation, the equations of flow conservation may be written as

$$a_{p,i}w_i + a_{p,j}w_j + a_{p,k}w_k + a_{p,l}w_l + a_{p,p}w_p = b_{p,} \tag{32}$$

in the steady state, or

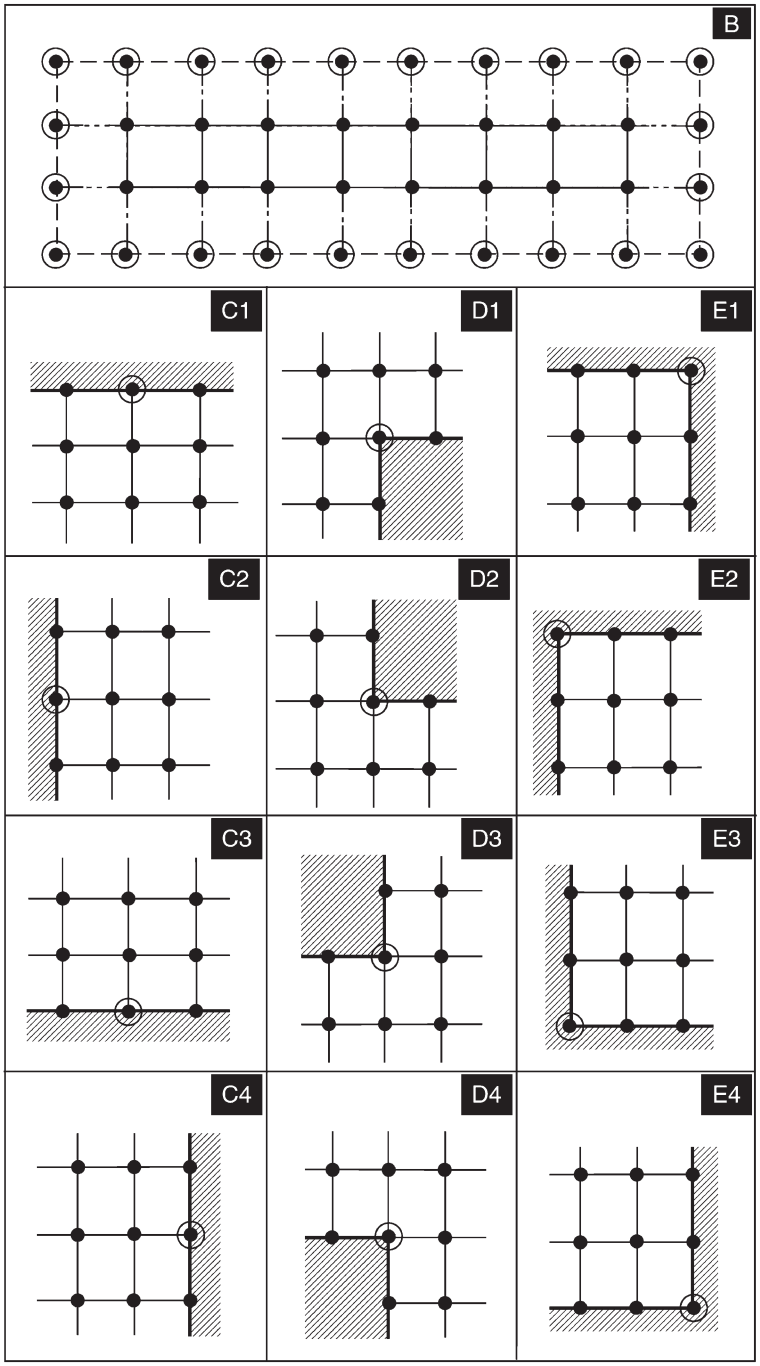


Fig. 4. Boundary conditions for rectangular buildings. (B) infinite boundary; (C) wall absorption on a plane building façade; (D) wall absorption on a building edge; (E) wall absorption on a building corner.

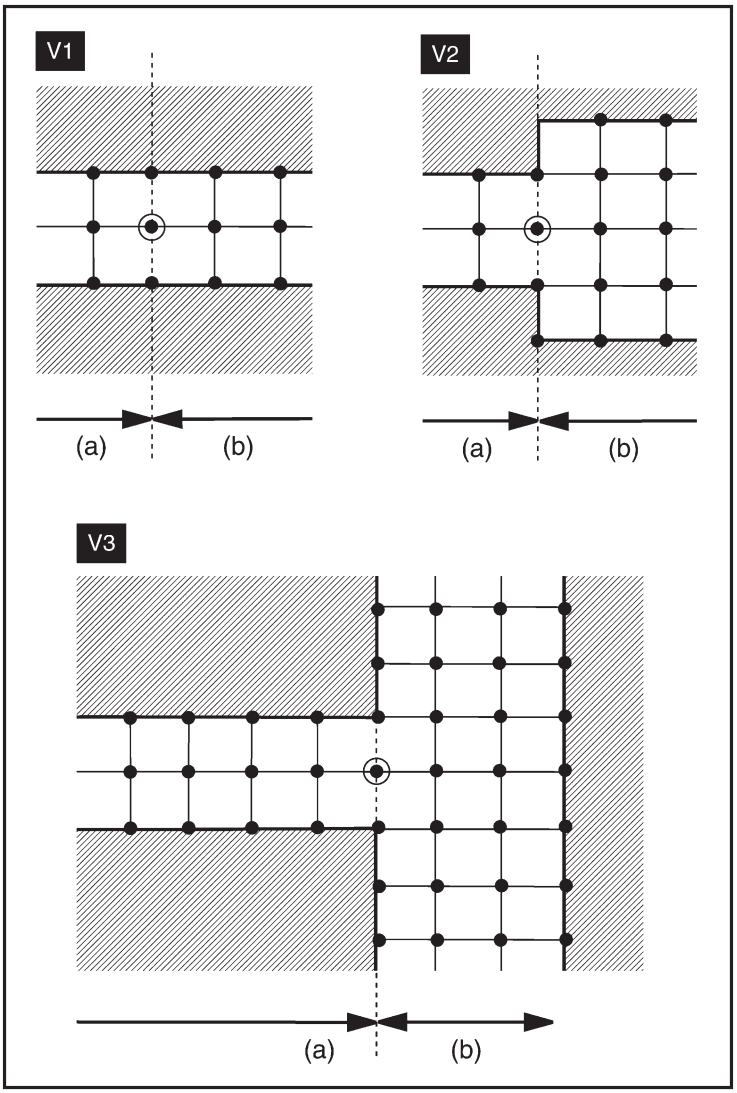


Fig. 5. Simple examples of a junction of two streets (a) and (b). (V1) streets of equal width; (V2) streets of different width; (V3) crossing-roads.

$$a_{p,i}w_i^{n+1} + a_{p,j}w_j^{n+1} + a_{p,k}w_k^{n+1} + a_{p,l}w_l^{n+1} + a_{p,p}w_p^{n+1} = b_p, \tag{33}$$

in the time varying state. In these equations, the term b_p expresses the presence of an internal sound source in the mesh p and (for the time varying state only) the sound energy at previous times. The coefficients $a_{p,u}$ ($u = i,j,k,l,p$) are a function of

- the distance between the node P_p and the nodes P_i, P_j, P_k, P_l,

- the diffusion coefficients D_x and D_y,
- the exchange coefficients h_w or h_{w_1} and h_{w_2} (for $a_{p,p}$ only),
- and the time increment Δt (for $a_{p,p}$ in the time varying state only).

Considering the notation (32), the problem may now be written as a system of linear equations

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \dots & a_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{pmatrix} \tag{34}$$

or in a simplified form as

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{B} \tag{35}$$

where the matrix **A**, **B** and **W** are introduced for the coefficients $a_{p,q}$, b_p and for the energy density w_p.

It can be pointed out that most of the coefficients $a_{p,q}$ are equal to zero since only the nearest four nodes must be taken into account for each node P_p. Moreover, considering the infinite boundary, where it is assumed that the energy density is equal to zero, we can notice that for $k \in \mathbb{F}$, where $\mathbb{F}$ defines the set of nodes located on the infinite boundary, we have

$$w_k = 0. \tag{36}$$

According to this assumption, the system of linear Eq. (35) can be reduced to

$$\mathbf{A}_r \cdot \mathbf{W}_r = \mathbf{B}_r, \tag{37}$$

where the elements of $\mathbf{W}_r$ are not equal to zero. In practice, it consists in re-numbering the elements, to keep only the nodes where the energy density is not equal to zero. Then, the energy at each node of the mesh is found by solving (37) using the Gaussian Elimination method [11].

For the time varying state, the method is similar, but the matrix **B**, then $\mathbf{B}_r$, must be calculated for each time increment Δt.

4. Validation

4.1. Reference geometry

In order to validate this numerical scheme, we have compared the numerical results with analytical solutions for a simple urban configuration (see Fig. 6), defined

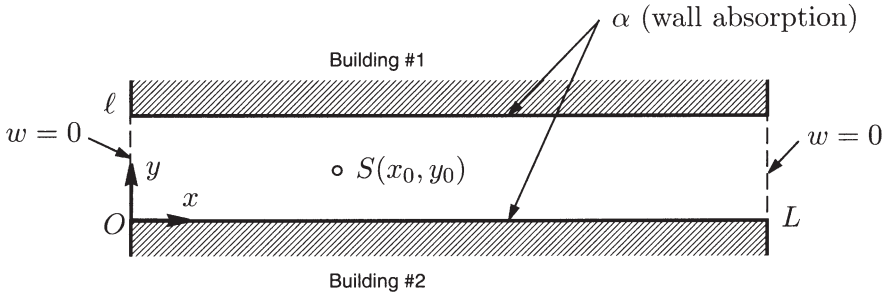


Fig. 6. Rectangular narrow street of length L and width ℓ, with uniform wall absorption α and diffusion. The sound source S is located at (x_0,y_0) inside the street.

by a very long narrow rectangular street of length $L = 96$ m with uniform section $\ell = 8$ m and without crossing. We assume that the diffusion parameter $\mathbb{D}_{2D}$ and the absorption coefficient α (e.g. the exchange coefficient h) are uniform in the street, and defined by the values $\alpha = 0.05$ and $\mathbb{D}_{2D} = 105\,\mathrm{m/s}$.

A steady or impulsive (at $t = 0$) sound source is located at position (x_0,y_0) inside the street. Moreover, we assume a very long street. Consequently, the sound energy at both ends of the street may be neglected ($w = 0$) in comparison with the sound energy inside the street. Finally, it is supposed that there is no sound radiation at both extremities of the street. Although this hypothesis seems to be very strong, previous results [8] have shown that this model can predict the sound energy in a narrow street with a good accuracy.

Consequently, the sound field in the street must satisfy the diffusion equation

- in the time varying state:

$$\left[D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] w - \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \tag{38}$$

with the initial condition

$$w(x, y, t = 0) = w_0 \delta(x_0, y_0). \tag{39}$$

- in the steady state:

$$\left[D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] w = 0, \tag{40}$$

with the source condition

$$w(x_0, y_0) = w_0. \tag{41}$$

Both in the time varying state and in the steady state, the energy density must also satisfy the boundary equations

$$w = 0 \quad \forall x = 0, \quad x = L, \tag{42}$$

$$D_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = hw(x, 0), \tag{43}$$

$$-D_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=\ell} = hw(x, \ell). \tag{44}$$

4.2. Analytical solutions

The analytical solutions can be found easily by the separate variable method. In the steady state, the sound energy density $w(x,y)$ in the street is written

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \frac{u_m \cos(u_m y/\ell) + B \sin(u_m y/\ell)}{k^2\pi^2 D_x/L^2 + u_m^2 D_y/\ell^2}, \tag{45}$$

where the terms c_{km} are defined from the boundary conditions

$$c_{km} = \frac{4w_0}{L\ell} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{L}\right) \frac{u_m \cos(u_m y_0/\ell) + B \sin(u_m y_0/\ell)}{u_m^2 + B^2 + 2B}, \tag{46}$$

and where the values of u_m are solutions of the transcendental equation

$$\left(u^2 - B^2\right)\tan u = 2Bu. \tag{47}$$

The term B is expressed from the exchange coefficient h of the building facade, the diffusion coefficient D_y and the street width ℓ, by

$$B = \frac{h\ell}{D_y}. \tag{48}$$

For the time varying state, the solution is similar and gives

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \exp\left[-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 D_x t - \left(\frac{u_m}{\ell}\right)^2 D_y t\right]. \tag{49}$$

4.3. Comparisons

In this section we present some comparisons between numerical results and the analytical solutions (45) and (49). As previously suggested, we consider a rectangular street with an uniform rectangular mesh, with N_x nodes along the street and N_y nodes in the street width (Fig. 7). In this configuration, only two boundary

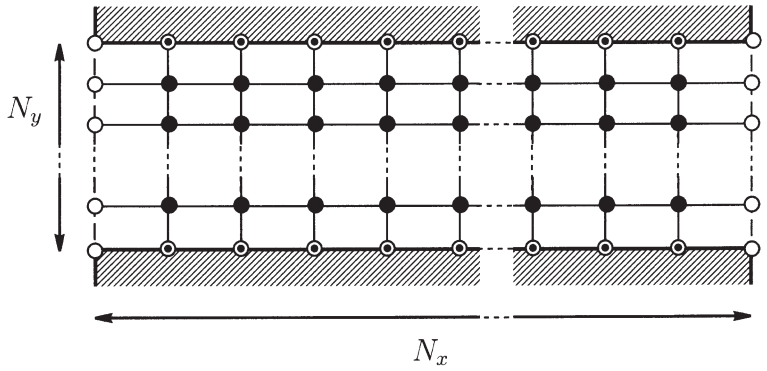


Fig. 7. Uniform rectangular mesh in a rectangular street, with N_x nodes along the street length and N_y nodes on the street width. In this configuration, only two boundary conditions must be consider: ○ infinite boundary ($w=0$), ◉ wall absorption.

conditions must be considered: the sound absorption by the building facade (C1 and C3), and the infinite boundary at both extremities (B).

4.3.1. Steady state

The Fig. 8 shows a comparison between the analytical solution (45) in the steady state and numerical results for several values of N_x and N_y. The top and the bottom curves give the sound levels, respectively along the street at $y=y_0$ and on the street width at $x=x_0$, for a steady source at $x_0=32$ m and $y_0=4$ m. The results show a good agreement, even with only few nodes in the street. It suggests that fast predictions of sound levels in large areas, in steady state, may be achieved without important computation times.

4.3.2. Time varying state

A similar comparison is also proposed in Fig. 9 in the case of the time varying state, with an impulsive sound source at $t=0$ s. The sound decay for a receiver in the street, is presented for different mesh sizes and time increments, and compared with the analytical solution.

As shown in this figure, when the time increment is too small, the decay of sound is underestimated, while, with a smaller time increment, the sound decay seems to be accurate. The best value of the time increment Δt is a function of the diffusion coefficient of the street. If the street is very diffuse (i.e. the diffusion coefficient is large), the sound decay in the street will be faster, requiring a small time increment.

At last, by considering a stationary sound source (from $t=0$) instead of an impulsive source (at $t=0$), we can notice that after a few moments, the sound energy is constant in the street (figures are not presented here). It defines the stationary state, which gives, mathematically, the same results as the steady state. However, since the numerical scheme for the time varying state is developed at the second order on Δx and Δy, instead of the first order (as used for steady state), we can

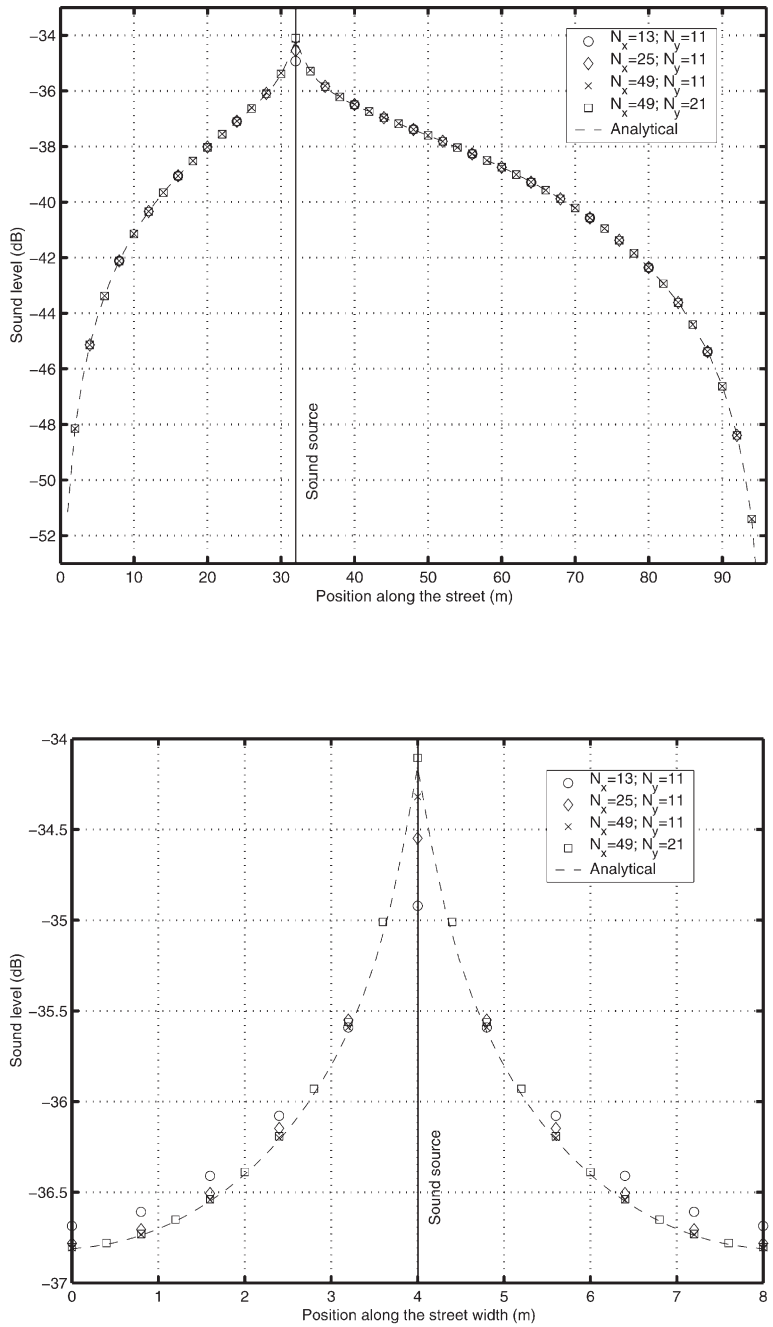


Fig. 8. Sound level along the street axis (top) at $y = y_0$ and in the cross section at $x = x_0$ (bottom), for a steady source at $x_0 = 32$ m and $y_0 = 4$ m ($w_0 = 1$). Comparisons between the analytical solution (45) in the dashed line, and the numerical results with 13×11 nodes, 25×11 nodes, 49×11 nodes and 49×21 nodes.

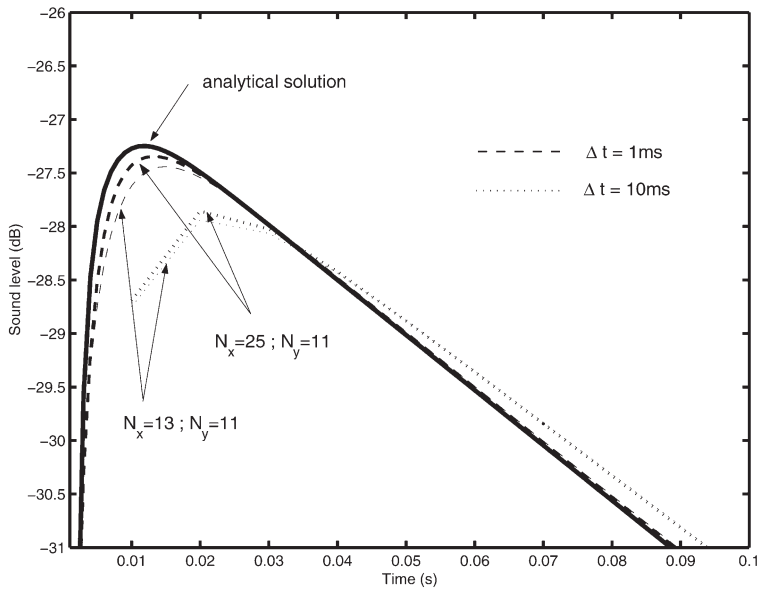


Fig. 9. Sound decay at a receiver in the axis of the street ($x = 4$ m, $y = 48$ m), for a impulsive source ($y_0 = 4$ m, $x_0 = 32$ m) with $w_0 = 1$. Comparisons between the analytical solution (49) in thick line and the numerical results for 3 meshing: $N_y = 11$ and $N_x = 13$, $N_x = 25$. Results computed with two time increments: $\Delta t = 10$ ms and 1 ms.

observe that the convergence towards the analytical solution is better for the stationary state than for the steady state.

5. Conclusion

In this paper we have proposed a numerical scheme to predict the sound distribution and the sound decay in a street with diffusely reflecting facades. This numerical method is based on a new mathematical model (the diffusion model) developed in previous works for rectangular rooms and streets, and based on a diffusion equation. The simplicity of such an equation allows to derive simple finite difference equations, which can be easily computed to predict the sound distribution and the sound reverberation in urban areas. Comparisons with analytical solutions have shown that the numerical solutions have a fast convergence, even if only few nodes are used for the mesh. Although we have given only the two-dimensional finite difference equations, the generalization to three dimensions can be easily done.

However, real urban configurations are more complicated than rectangular streets with rectangular buildings and perpendicular cross-roads. Consequently, the finite difference equations should be more complex than those given in this paper. At this point, it must be pointed out that this numerical model is very similar to heat

transfer problems. The same equations (diffusion equation, convection boundary conditions) and the same terms (diffusion coefficient, exchange coefficient) are used in both problems. Then, the use of heat transfer softwares, working both on steady-state and transient problems, could be an easy way to study more complex acoustic problems, such as in urban areas, without important modifications and with a low cost.

Moreover, although in this paper, we have applied the numerical scheme for a rectangular urban configuration with a single point source, many extensions can also be easily considered, in particular with the use of heat transfer software:

- Other kind of sound sources may be used: two, three or more simultaneous moving point sources or linear sound sources, both in the steady state and the transient state, may be used to predict the sound propagation from moving vehicles and traffic flows.
- By adjusting the mesh with three, four or more nodes, complex building facades can be taken into account.
- As suggested previously, by considering a space-variable diffusion parameter, simultaneous architectural morphology can be considered as well. Indeed, for a large urban scale with many streets and crossroads, it is possible to observe several kinds of building facades (recent or older, plane or with many irregularities ...). Consequently the sound is not reflected or scattered with the same properties. In this case, the diffusion parameter, derived by measurements or by theoretical considerations, could be adjusted for each type of architectural morphology.

Appendix A. Finite-difference equations at a building façade

In this section, we propose to derive the finite-difference equations for nodes located on a plane building facade, as well as on an external and internal corner, using the energy balance method [12].

A.1. Absorption on a building façade (C1)

As shown on Fig. 10, the total energy in the mesh (i,j) depends on the incident energy flows from the nearest nodes $P_{i-1,j}$, $P_{i+1,j}$ and $P_{i,j+1}$, but also depends on the energy rate which is absorbed by the building façade. The energy conservation in the mesh (i,j), in the steady state, may be written:

$$(\varphi_1+\varphi_3)\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}+(\varphi_2-\varphi_w)\Delta x_{i,j}+p_{i,j}\Delta x_{i,j}\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}=0. \tag{A1}$$

Changing, φ_1, φ_2 and φ_3, respectively by $\varphi_{i-\frac{1}{2},j}$, $\varphi_{i,j+\frac{1}{2}}$ and $\varphi_{i+\frac{1}{2},j}$, the energy conservation (A.1) is now written:

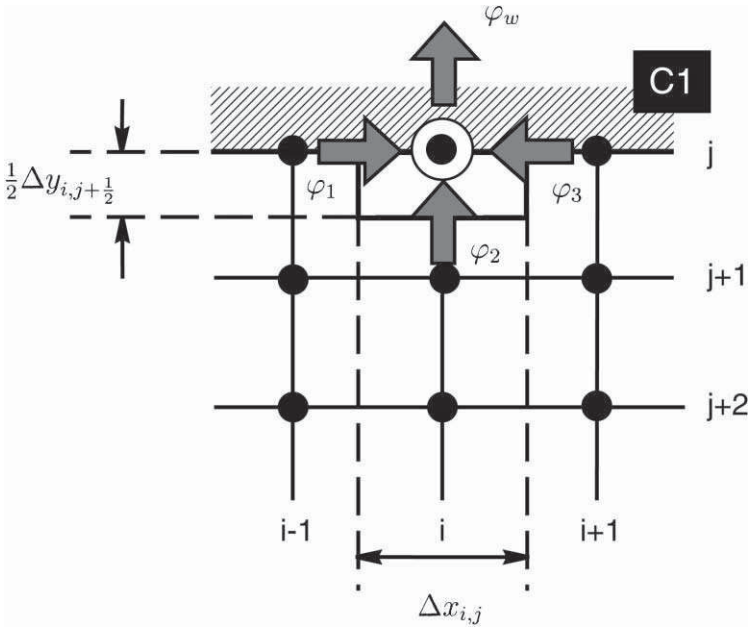


Fig. 10. Absorption on a building façade (C1) defined by an exchange coefficient h_w. Energy conservation in the mesh (i,j).

$$\left(\varphi_{i-\frac{1}{2},j}+\varphi_{i+\frac{1}{2},j}\right)\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}+\left(\varphi_{i,j+\frac{1}{2}}-\varphi_w\right)\Delta x_{i,j}+p_{i,j}\Delta x_{i,j}\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}=0, \tag{A2}$$

where the energy flow φ_w on the wall [from Eq. (8)] is defined by

$$\varphi_w = h_w w_{i,j}. \tag{A3}$$

The exchange coefficient h_w is expressed from the absorption coefficient α of the wall by $h_w = c\alpha/4$. Considering also Eqs. (22), (23) and (20), the boundary condition on the wall can be written as follows:

$$\begin{aligned} &D_y\frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}w_{i,j+1}+D_x\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}w_{i-1,j}+D_x\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}w_{i+1,j}\\ &\quad-\left[\frac{D_y\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}+\frac{D_x\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}+\frac{D_x\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}+h\Delta x_{i,j}\right]w_{i,j}+p_{i,j}\Delta x_{i,j}\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}=0. \end{aligned} \tag{A4}$$

In the time varying state, the boundary condition is found by following the same procedure, and gives:

$$D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} w_{i,j+1}^{n+1} + D_x \frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} w_{i-1,j}^{n+1} + D_x \frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} w_{i+1,j}^{n+1}$$
$$- \left[\frac{D_y \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} + \frac{D_x \Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} + \frac{D_x \Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} + h\Delta x_{i,j} + \frac{\Delta x_{i,j} \dfrac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}}{\Delta t} \right] w_{i,j}^{n+1}$$
$$= -\left(\frac{w_{i,j}^{n}}{\Delta t} + p_{i,j}^{n+1} \right) \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}. \tag{A5}$$

A.2. Absorption on a building edge (D1)

Now, let us consider a node $P_{i,j}$ on a building edge (see Fig. 11). The total energy in the mesh (i,j) around $P_{i,j}$, is a function of the incident flows from the nearest nodes $P_{i-1,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j-1}$ and $P_{i,j+1}$, but is also a function of the part of the energy which is absorbed by the two building facades $(w1)$ and $(w2)$.

The energy conservation on the node $P_{i,j}$, may be written from the incident flows φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 and the energy flows φ_{w1} and φ_{w2} inside the building facades. Replacing

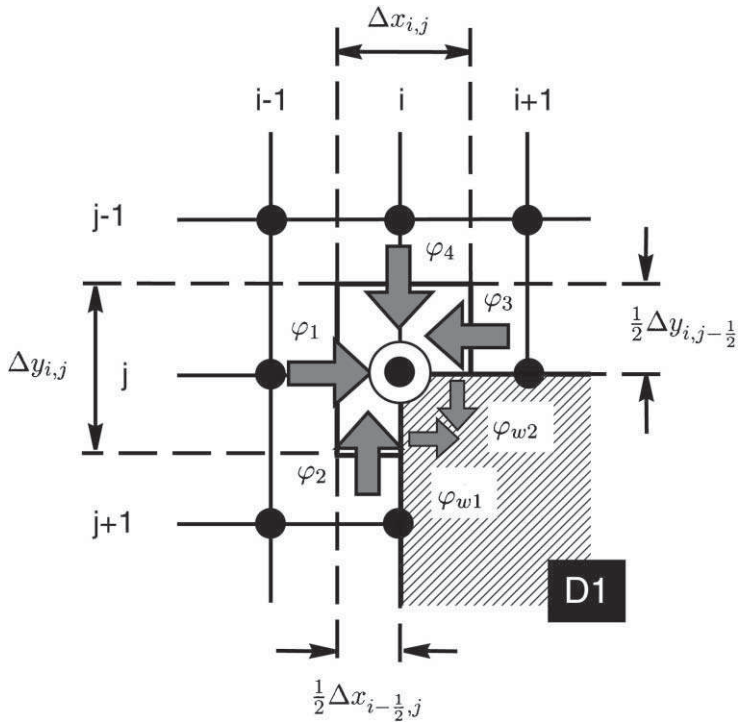


Fig. 11. Absorption on a building edge (D1) defined by two building façades $(w1)$ and $(w2)$ characterized by the exchange coefficients h_{w1} and h_{w2}, respectively.

φ_1, φ_2, φ_3, and φ_4 by their expressions with i and j, the energy conservation in the mesh (i,j) can be written as

$$\left(\varphi_{i+\frac{1}{2},j}-\varphi_{w1}\right)\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}+\left(\varphi_{i,j+\frac{1}{2}}-\varphi_{w2}\right)\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2}+p_{i,j}\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2}\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}=0, \tag{A6}$$

which gives

$$\begin{aligned}&D_y\frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}w_{i,j-1}+D_y\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}w_{i,j+1}+D_x\frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}w_{i-1,j}+D_x\frac{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}w_{i+1,j}\\&\quad-\left[D_y\frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}+D_y\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}+D_x\frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}+D_x\frac{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}+h_{w1}\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}\right.\\&\quad\left.+h_{w2}\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}\right]w_{i,j}+p_{i,j}s_{i,j}=0\end{aligned} \tag{A7}$$

with

$$s_{i,j}=\Delta y_{i,j}\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}+\frac{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}{2}\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2}. \tag{A8}$$

In the time varying state, the last equation must be changed by the following one:

$$\begin{aligned}&D_y\frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}w^{n+1}_{i,j-1}+D_y\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}w^{n+1}_{i,j+1}+D_x\frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}},j}w^{n+1}_{i-1,j}+D_x\frac{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}w^{n+1}_{i+1,j}\\&-\left[D_y\frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}+D_y\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}+D_x\frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}+D_x\frac{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}\right.\\&\left.+h_{w1}\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}+h_{w2}\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{s_{i,j}}{\Delta t}\right]w^{n+1}_{i,j}=-\left(\frac{w^n_{i,j}}{\Delta t}+p^{n+1}_{i,j}\right)s_{i,j}.\end{aligned} \tag{A9}$$

If the external corner is localized at the junction of several streets with different diffusion parameters, the finite-difference equations are a little more complicated, but can be found by the same method. A similar example is given in Appendix B for a node at the interface between two streets.

A.3. Absorption on a building corner

This configuration is equivalent to the last one. The total energy in the mesh i,j around $P_{i,j}$, is a function of the incident flows from the nearest nodes $P_{i-1,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j-1}$ and $P_{i,j+1}$, but is also a function of the part of the energy which is absorbed by the two building facades $(w1)$ and $(w2)$ (Fig. 12). The energy conservation in the mesh (i,j) is then written

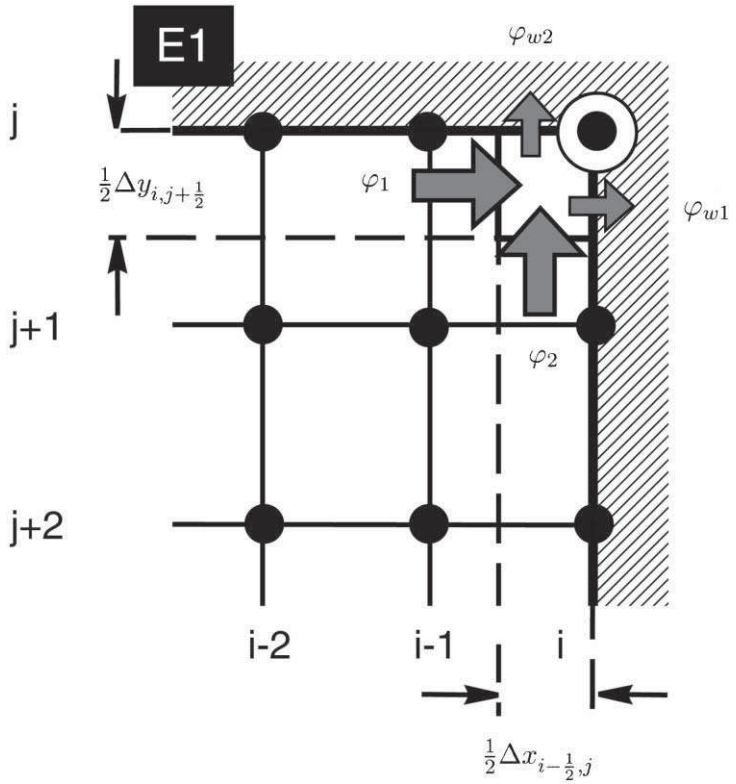


Fig. 12. Absorption on a building corner (E1) defined by two building façades w_1 and w_2 characterized by the exchange coefficients h_{w1} and h_{w2}, respectively.

$$\left(\varphi_{i-\frac{1}{2},j}-\varphi_{w1}\right)\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}+\left(\varphi_{i,j+\frac{1}{2}}-\varphi_{w2}\right)\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}+p_{i,j}\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}=0, \tag{A10}$$

which gives

$$\begin{aligned}&D_y\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}w_{i,j+1}+D_x\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}w_{i-1,j}\\&-\left[D_y\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}+D_x\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}+h_{w1}\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}+h_{w2}\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\right]\\&w_{i,j}+p_{i,j}\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}\frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}=0.\end{aligned} \tag{A11}$$

In the time varying state, we have

$$D_y \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} w_{i,j+1}^{n+1} + D_x \frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} w_{i-1,j}^{n+1} - \left[D_y \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} + D_x \frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} + h_{w1} \Delta y_{i,j+\frac{1}{2}} + h_{w2} \Delta x_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{s_{i,j}}{\Delta t} \right] w_{i,j}^{n+1} = -\left(\frac{w_{i,j}^{n}}{\Delta t} + p_{i,j}^{n+1} \right) s_{i,j}, \tag{A12}$$

with

$$s_{i,j} = \Delta x_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}. \tag{A13}$$

Appendix B. Finite-difference equation at a street junction

Using the same method as in Appendix A, at the junction between two streets a and b, characterized respectively by their diffusion coefficients $\left(D_x^a, D_y^a\right)$ and $\left(D_x^b, D_y^b\right)$ (Fig. 13), the incident flows may be written:

$$\varphi_{i+\frac{1}{2},j}^{b} = -D_x^b \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}, \tag{B1}$$

$$\varphi_{i-\frac{1}{2},j}^{a} = -D_x^a \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}, \tag{B2}$$

$$\varphi_{i,j-\frac{1}{2}}^{a} = -D_y^a \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}, \tag{B3}$$

$$\varphi_{i,j+\frac{1}{2}}^{a} = -D_y^a \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} \tag{B4}$$

$$\varphi_{i,j-\frac{1}{2}}^{b} = -D_y^b \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}, \tag{B5}$$

$$\varphi_{i,j+\frac{1}{2}}^{b} = -D_y^b \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}. \tag{B6}$$

In the steady state, the flow conservation inside the element (i,j) of size $\Delta x_{i,j}$ and $\Delta y_{i,j}$, is then

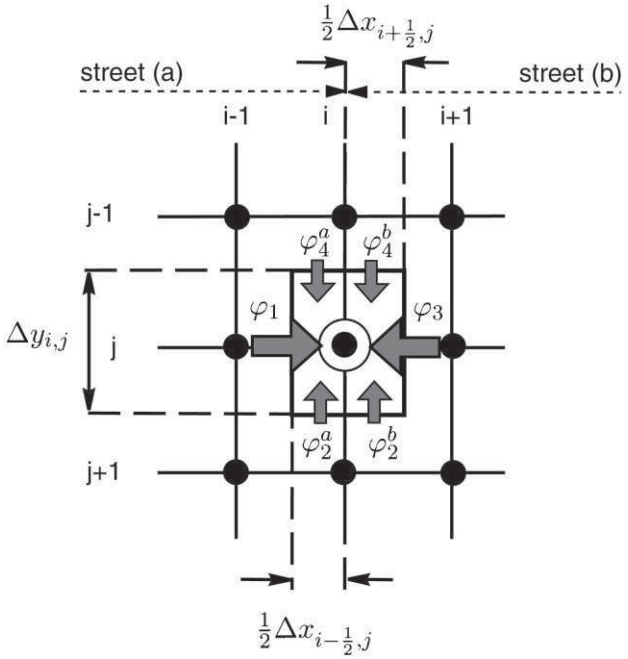


Fig. 13. Energy balance at the interface between two streets (a) and (b), defined by their diffusion coefficients $\left(D_x^a, D_y^a\right)$ and (D_x^b, D_y^b).

$$\left(\varphi^a_{i,j-\frac{1}{2}} + \varphi^a_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2} + \left(\varphi^b_{i,j-\frac{1}{2}} + \varphi^b_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2} + \left(\varphi^a_{i-\frac{1}{2},j} + \varphi^b_{i+\frac{1}{2},j}\right)\Delta y_{i,j} + p_{i,j}\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j} = 0, \tag{B7}$$

which gives

$$\left(D_y^a\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2} + D_y^b\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\right)\frac{w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} + \left(D_y^a\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2} + D_y^b\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\right)\frac{w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} + D_x^a\frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}w_{i-1,j} + D_x^b\frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}w_{i+1,j} - \left[\frac{1}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(D_y^a\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2} + D_y^b\frac{x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\right) + \frac{1}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(D_y^a\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2} + D_y^b\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\right) + \frac{D_x^a\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} + \frac{D_x^b\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}\right] w_{i,j} + p_{i,j}\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j} = 0. \tag{B8}$$

In the time-varying state, the flow conservation (B7) is similar, except that it must take into account the energy variation during the time increment Δt, in the surface $\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j}$. Then, in the implicit form, the final equation gives:

$$\left(D_y^a\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2}+D_y^b\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\right)\frac{w_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}+\left(D_y^a\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2}+D_y^b\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\right)\frac{w_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}$$
$$+D_x^a\frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}w_{i-1,j}^{n+1}+D_x^b\frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}w_{i+1,j}^{n+1}-\left[\frac{1}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(D_y^a\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2}+D_y^b\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(D_y^a\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}{2}+D_y^b\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\right)+\frac{D_x^a\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}+\frac{D_x^b\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}+\frac{\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j}}{\Delta t}\right]w_{i,j}^{n+1}=$$
$$-\left[\frac{w_{i,j}^n}{\Delta t}+p_{i,j}\right]\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j}. \tag{B9}$$

References

[1] Hodgson M. Evidence of diffuse surface reflections in rooms. Journal of the Acoustical Society of America 1991;89(2):765–71.

[2] Lyon RH. Role of multiple reflections and reverberation in urban noise propagation. Journal of the Acoustical Society of America 1974;55(3):493–503.

[3] Picaut J, Hardy J, Simon L. Sound propagation in urban areas: a periodic disposition of buildings. Physical Review E 1999;60:4851–9.

[4] Lam YW. A comparison of three diffuse reflection modeling methods used in room acoustics computer models. Journal of the Acoustical Society of America 1996;100(4):2181–92.

[5] Dalenbäck BYL. Room acoustic prediction based on a unified treatment of diffuse and specular reflection. Journal of the Acoustical Society of America 1996;100(2):899–909.

[6] Picaut J, Simon L, Polack JD. A mathematical model of diffuse sound field based on a diffusion equation. ACUSTICA—Acta Acustica 1997;83:614–21.

[7] Picaut J, Simon L, Polack JD. Sound field in long rooms with diffusely reflecting boundaries. Applied Acoustics 1999;56:217–40.

[8] Picaut J, Simon L, Hardy J. Sound field modeling in streets with a diffusion equation. Journal of the Acoustical Society of America 1999;106(5):2638–45.

[9] Picaut J, Simon L. A scale model experiment for the study of sound propagation in urban areas. Applied Acoustics 2001;62:327–40.

[10] Le Pollès T, Picaut J, Bérengier M. Modelling of diffuse sound field in architectural acoustic using transport theory. In: Proceedings of 17th International Congress on Acoustics. Italy: Rome, 2001.

[11] Press WH, Flannery BP, Teukolsky SA, Vetterling WT. Numerical recipes in C, the art of scientific computing. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[12] Incropera FP, De Witt DP. Fundamentals of heat and mass transfer. John Wiley & Sons, 1990.

Annexe B

Publications traitant d'expérimentations sur maquette et *in situ*

Experimental study of sound propagation in a street, J. Picaut, T. Le Pollès, P. L'Hermite, V. Gary, *Applied Acoustics* **66**(2), numéro spécial « Urban noise », pages 149-173 (février 2005).

A scale model experiment for the study of sound propagation in urban areas, J. Picaut, L. Simon, *Applied Acoustics* **62**(3), pages 327-340 (mars 2001).

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
Applied Acoustics 66 (2005) 149–173
applied acoustics
www.elsevier.com/locate/apacoust

Experimental study of sound propagation in a street

J. Picaut *, T. Le Pollès, P. L'Hermite, V. Gary

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Section Acoustique Routière et Urbaine, Route de Bouaye, BP 4129, 44341 Bouguenais Cedex, France

Abstract

This paper presents an experimental study of the sound propagation in a street, performed during July 2002, in order to measure impulse responses at numerous locations in a street canyon, and, for several positions of the sound source. A specific attention has been paid on the processing of the experimental data, in order to obtain accurate values of the reverberation time and the steady-state sound pressure level, including also the compensation of the atmospheric attenuation. In total, 11 592 useful data have been collected during this experiment, and are available by contacting the corresponding author. Reverberation times and sound levels, in the narrow street, are then analyzed and compared, for the 4 source positions in the street. This experimental study gives interesting results on the behavior of the sound field in the street.
© 2004 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Urban acoustics; Sound propagation; Measurements

1. Introduction

Urban noise is an important problem for people living in cities. For this reason, and in order to investigate the behavior of sound in urban areas, many investigations have been carried out on the theoretical modeling of sound propagation in streets;

* Corresponding author. Tel.: +33 2 40 84 57 89; fax: +33 2 40 84 59 92.
E-mail address: judicael.picaut@lcpc.fr (J. Picaut).

0003-682X/$ - see front matter © 2004 Elsevier Ltd. All rights reserved.
doi:10.1016/j.apacoust.2004.07.014

some works considering, for example, specular reflection on building façades [1–3], others taking into account diffuse reflection by irregularities and protrusions on building surfaces [4–6]. However, as recently suggested by Kang [7], the use of diffuse reflection instead of specular reflection in the modeling of sound propagation in a city street, can reach to considerable differences between the resulting sound fields. The main problem is the insufficiency of comparisons with real data of sound propagation in streets. It is then difficult to determine with accuracy which law to use in the modeling. This is just an example of the need of experimental data, but more generally, the lack of experimental results is a major problem for the validation of the models and the study of the sound propagation in urban areas.

The first measurements of sound propagation in urban areas were performed in the 1940s and in the 1950s, and referred to the problem of the optimal localization of sirens in cities, for air raid alarm signals [8–11]. Concerning the study of the sound propagation in streets especially, the first data were proposed by Wiener et al. in 1965 [1]. They consisted of noise level and reverberation time (RT) measurements with a specific loudspeaker mounted on a truck and with a portable microphone. Afterwards, in the 1970s, most of the works only concerned the measurement of the RTs in built-up areas [12–16]. Unfortunately, information given by the authors, on the experimental system, the acoustics characteristics of the sound source, the position of the receivers, the size of the streets and buildings, are not sufficient. Consequently, most of these data cannot be used to validate models of sound propagation in cities.

The lack of experimental data is mainly due to the complexity of the realization of such experiments in urban areas and particularly for practical reasons: the streets must be closed to traffic; legal authorizations are required; meteorological effects cannot be controlled, etc. Moreover, from an acoustic point of view, large pieces of equipments are required to obtain a full description of the sound field in a street, like a sound map. For this reason, scale model experiments have also been developed to study the noise propagation in urban environment [3,17–23]. However, because of the difficulty to have accurate scale models exactly reproducing the full scale phenomena (sound absorption, diffusion by building irregularities, etc.), the lack of information concerning the scale models measurements, in addition to the low accuracy of such measurements, most of experimental data issued from scale model measurements are still difficult to be used in other works.

Consequently, no data, resulting from in situ measurements with a relevant analysis, is presently available in the literature. The aim of this paper is then, first, to have experimental data, that can be used by the scientific community, and secondly to present an experimental study of the sound propagation in a street. The main idea of our work, was to provide a full description of the experiments and the data processing, and to give numerous useful data, like sound levels and RTs. An experiment has been realized in a street of Nantes (France) during July 2002, for many configurations of sound sources and microphones. This experiment and the data processing are respectively described in Sections 2 and 3. Then, in Section 4, we present an analysis of the experimental results, for several positions of the sound source in the street, in terms of RT and sound level, along the street length and width. It must be noticed that this experimental work is a part of a larger study of the modeling of sound propagation in urban areas [24].

2. Experiments

2.1. Principle

In order to have a full description of the behavior of the sound field in a street, it is necessary to measure simultaneously the sound attenuation and the sound decay in the street. This can be easily done by measuring the impulse response at many locations in the street for many positions of the sound source. Then, the sound pressure level (SPL) in steady-state and the RT can been extracted from the impulse response by an adapted processing which will be presented in Section 3.

This kind of measurements only requires a high power sound source in order to provide a long range of decay. This is particularly the case for the RT measurements. Considering this condition, the use of an alarm pistol is sufficient.

To obtain an accurate description of the sound field in the street, the most intuitive method would consist in distributing microphones everywhere in the street, at various heights. However, it will require too many microphones and an adapted recorder with a large number of channels. For this practical reason, we chose to implement an array of 9 microphones in a section of the street. An accurate description of the sound field in the street can thus be obtained by moving this array along the street. With such an experimental system, the accuracy of the sound field description in the street only depend on the number of microphones mounted on the array.

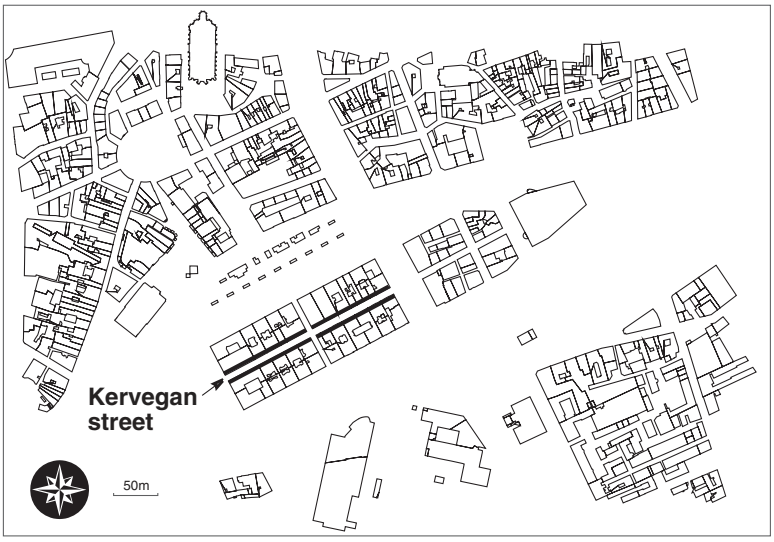
2.2. Kervegan street

Measurements were carried out in the west side of Kervegan street (Fig. 1(a)) in downtown Nantes (France). This is a pedestrian street of 210 m long, constant height (approximately 18 m) and width (7.90 m) and, with only one junction. The experimental zone (Fig. 1 (b)) is defined by the first 50 m of Kervegan street. The west end is opened to a large square (“Petite Hollande” square) without building, and characterized by a very slight traffic flow. This extremity can be easily considered as opened on a free field. The east end (55 m beyond the experimental zone) is crossed by a perpendicular street (Duguesclin street) of 6.58 m width, without traffic.

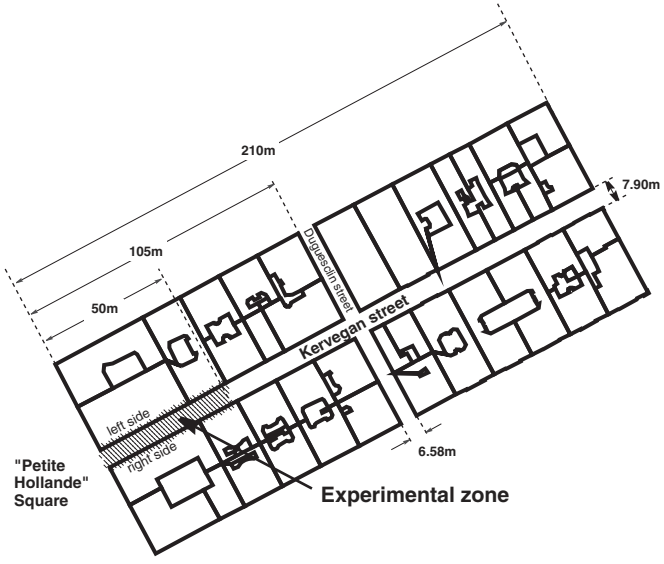
The morphology of the building façades is uniform all along the street, and may be defined as a periodic arrangement of windows. The façades are mainly constituted by stone, glass and woodworks. The sound absorption by building façades, as well as the diffusion, may be supposed to be uniform in the street. The pavement is constituted by cobblestones and can be considered as a perfectly reflecting surface.

2.3. Measurement configurations

Four measurement configurations were considered, each one corresponding to a specific position of the sound source. These configurations (S1–S4) are given in Fig. 2 and are defined by two source heights (0.52 and 1.65 m) and two locations



(a) Location of Kervegan street in downtown Nantes (France).



(b) Experimental zone.

Fig. 1. Kervegan street (Nantes, France) and experimental zone. (a) Location of Kervegan street in downtown Nantes (France). (b) Experimental zone.

of the sound source (at the beginning of the street for the configuration S3 and S4, and in the middle of the street for S1 and S2). For each configuration, a reference microphone M1 was located 2 m from the sound source. It was used also to activate

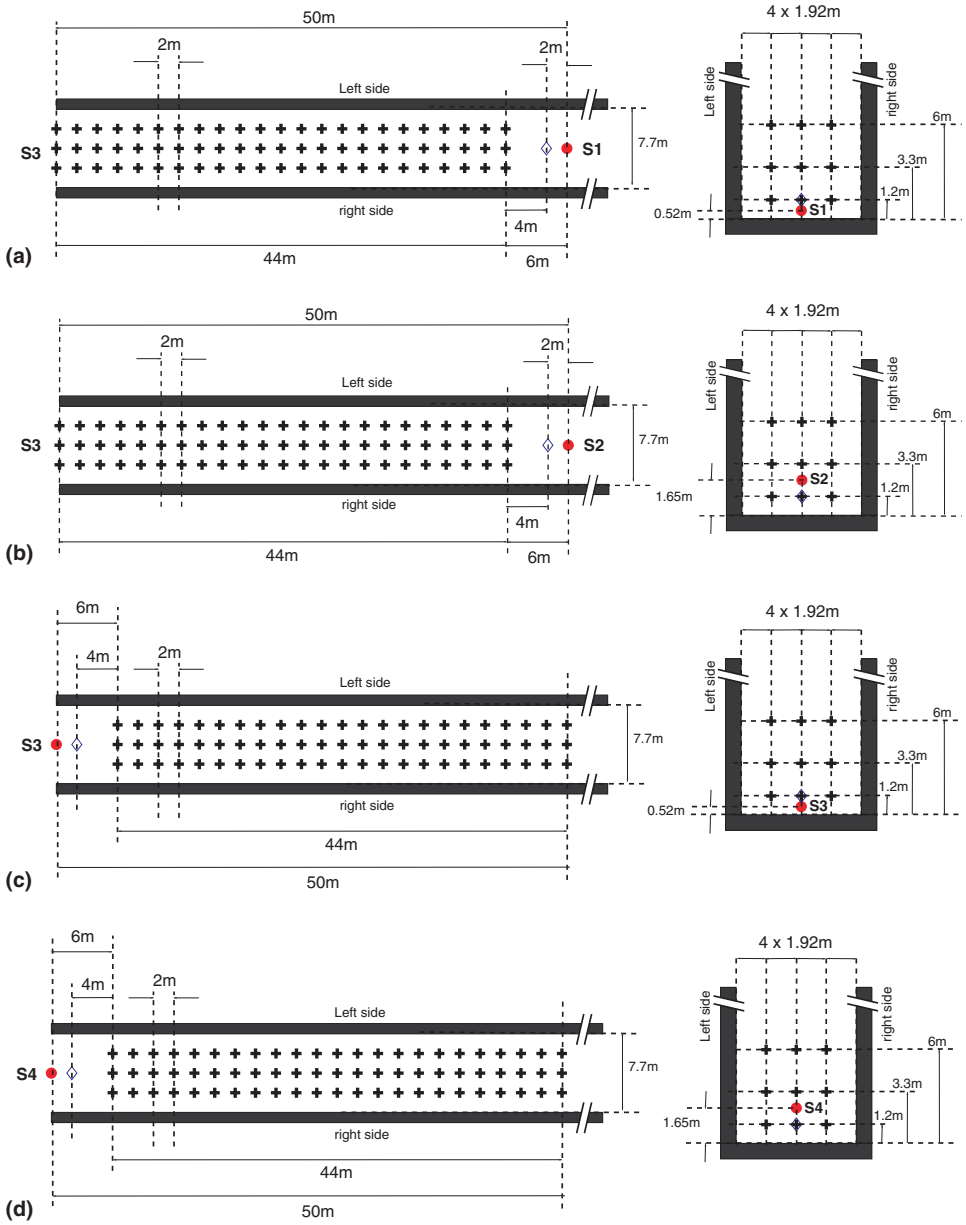


Fig. 2. Measurement configurations in Kervegan street: (a) source S1 in the middle of the street at 0.52 m above the pavement; (b) source S2 in the middle of the street at 1.65 m above the pavement; (c) source S3 at the beginning of the street and 0.52 m above the pavement; (d) source S4 at the beginning of the street and 1.65 m above the pavement. The location of the microphones are given by the symbol (+). The sound sources and the reference microphones are represented respectively by the symbols (●) and (◇).

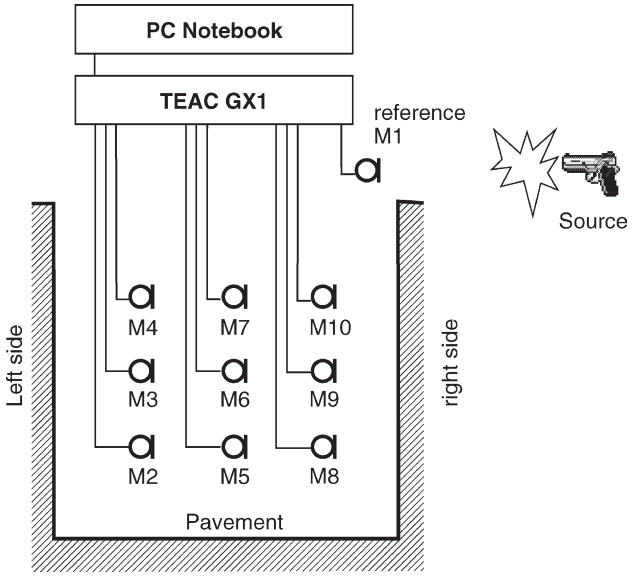


Fig. 3. Typical measurement in a section of Kervegan street: 9 microphones (M2–M10) are located in the street section, and a reference microphone M1 at 2 m from the sound source. See also Fig. 2 for the exact coordinates of the microphones.

the data acquisition. The array of microphones M2–M10 (see Fig. 3) was moved from 6 to 50 m to the sound source, step by step every 2 m.

2.4. The experimental system

The experimental system is presented in Fig. 3. Acoustic measurements were performed with AVM MI17 ICP microphones, Brüel and Kjær microphones type 4135 and 4165, and GRAS microphones type 40AF, fixed on Brüel and Kjær preamplifier type 2619 and 2639. The array of microphones was constituted of three masts, each one with three microphones at 1.20, 3.30 and 6.0 m height. A picture of the array is given in Fig. 4. The sound source (a pistol) was fixed to a support to keep constant the height (1.65 or 0.52 m) and was activated by an operator (Fig. 5).

Measurements were recording on an integrated digital recorder TEAC GX-1 with AR-GXMC and AR-GXPA input amp cards, connected to a PC notebook. The sample frequency and the recording time were respectively 20480 Hz and 3 s. A 10 kHz low pass filter was applied on each acquisition channel.

A meteorological data acquisition system was also disposed in the street for the measurement of the temperature, pressure, humidity and wind speed.

2.5. The measurements

In order to correct the sensitivity of each acquisition channel, including the microphone sensitivity and the whole acquisition system, preliminary

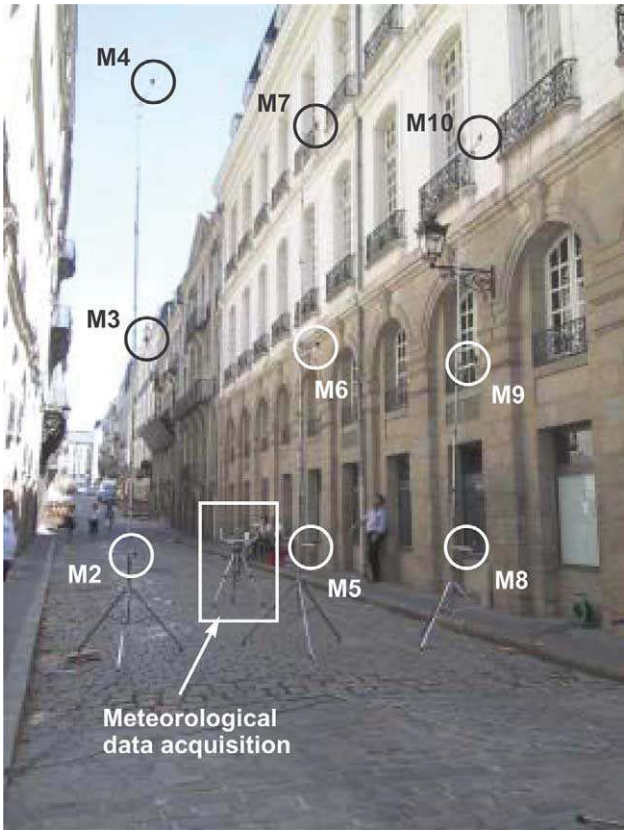


Fig. 4. View of experimental system.

measurements were done using a Brüel and Kjær piston phone calibrator (114 dB, 1000 Hz), just before and after the experiment. By a simple processing, it allows to determine a correction of sensitivity for each data acquisition channel. This coefficient if then applied during the processing of the impulse response.

For practical reasons, the S1/S2 and the S3/S4 measurements were simultaneously realized, according to this procedure:

1. displacement of the array of microphones to the measurement section,
2. activation of the sound source (for example, in the S1 configuration) and data acquisition,
3. validation of the measurements by an operator or back to the previous step,
4. sound source displacement (measurements in the S2 configuration),
5. activation of the sound source and data acquisition,
6. validation of the measurements by an operator or back to the previous step,

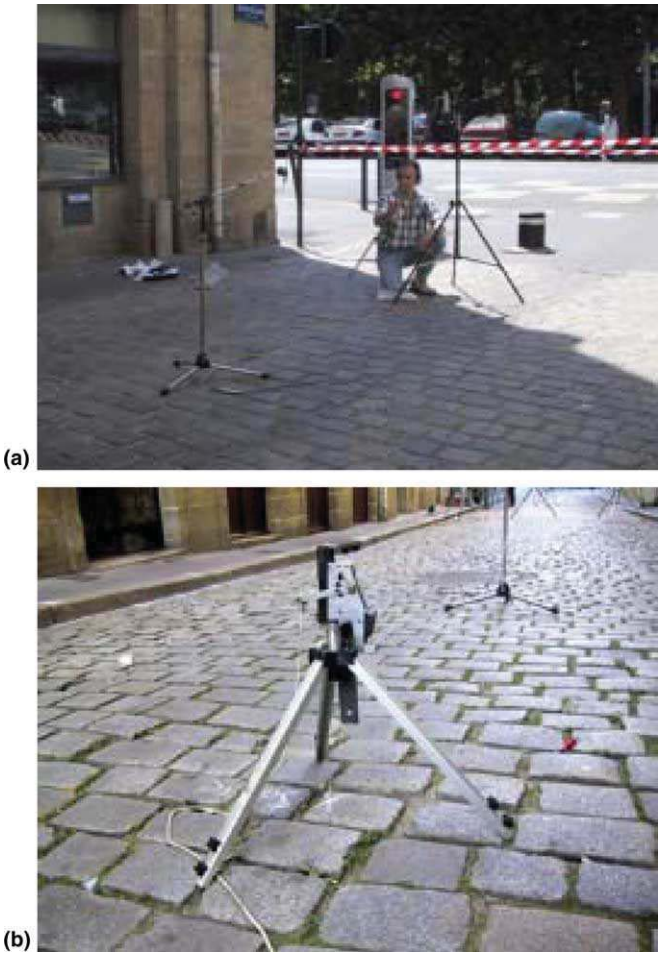


Fig. 5. Sound source (a pistol) and reference microphone: (a) sound source (1.65 m above the pavement) and reference microphone; (b) sound source (0.52 m above the pavement).

7. displacement of the array of microphones to the next measurement section,
8. back to step (2).

The same procedure was also applied to the S3/S4 configurations.

To avoid the small fluctuations of the sound source between consecutive activating, 5 measurements (i.e. 5 pistol shots) were recorded for each sound source position and each location of the microphones array.

In summary, each configuration is defined by 23 measurements sections, 9 microphones per section in addition to the reference microphone, and 5 pistol shots by section. In total, $23 \times (9 + 1) \times 5 = 1150$ data files (i.e. 1150 impulse responses) are then obtained for each configuration. That means, for instance, $1150 \times 4 = 4600$ data files for the whole experiment.

3. Data processing

The main objective of this experiment is to give useful information about the distribution of the sound energy in the street, and its decay with respect to time. For this reason, we used the Schroeder's integrating method [25], which allows to give simultaneously the steady-state SPL and the sound decay, from the impulse responses (IR) measured in the street. Moreover, in order to have a frequency description of the

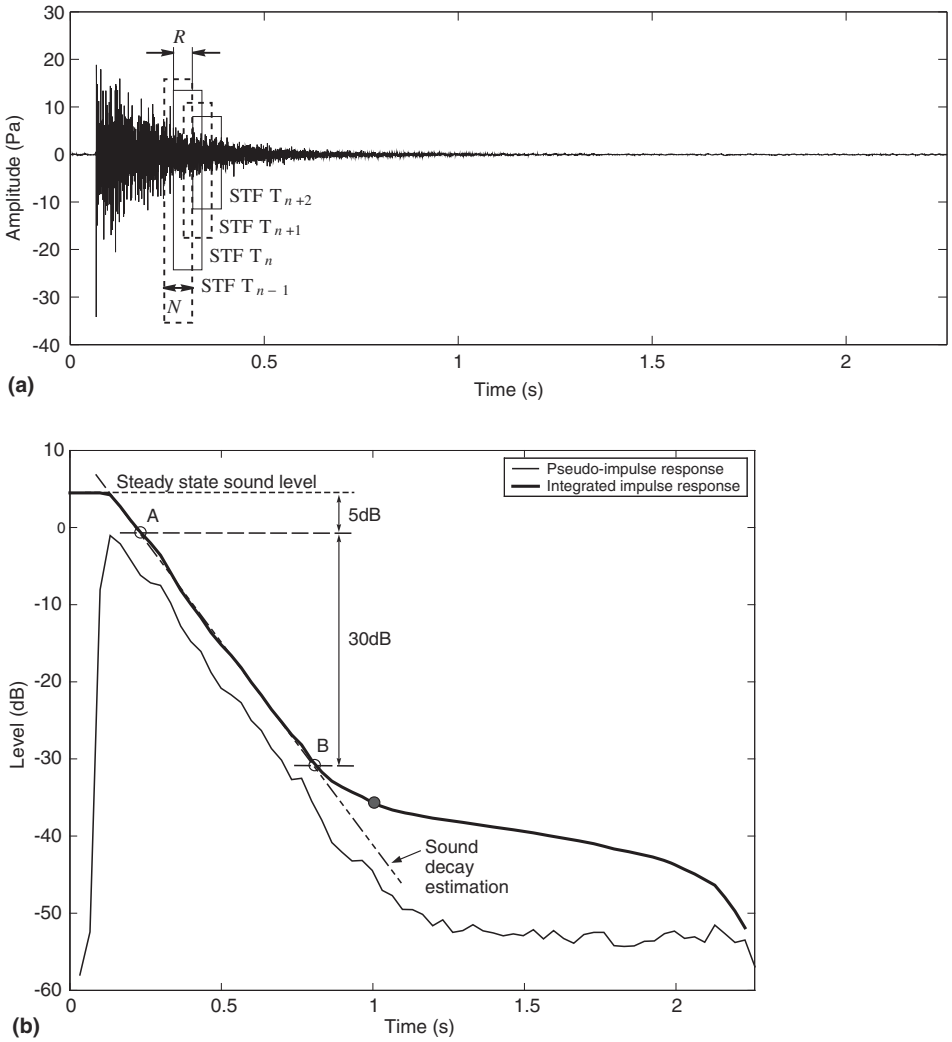


Fig. 6. Example of the processing of an impulse response: (a) STFT decomposition of an IR measured in Kervegan street (configuration S2, microphone M5 at 24 m from the sound source); (b) construction of the pseudo-impulse response and the integrated impulse response in the 1/3 octave band 3150 Hz.

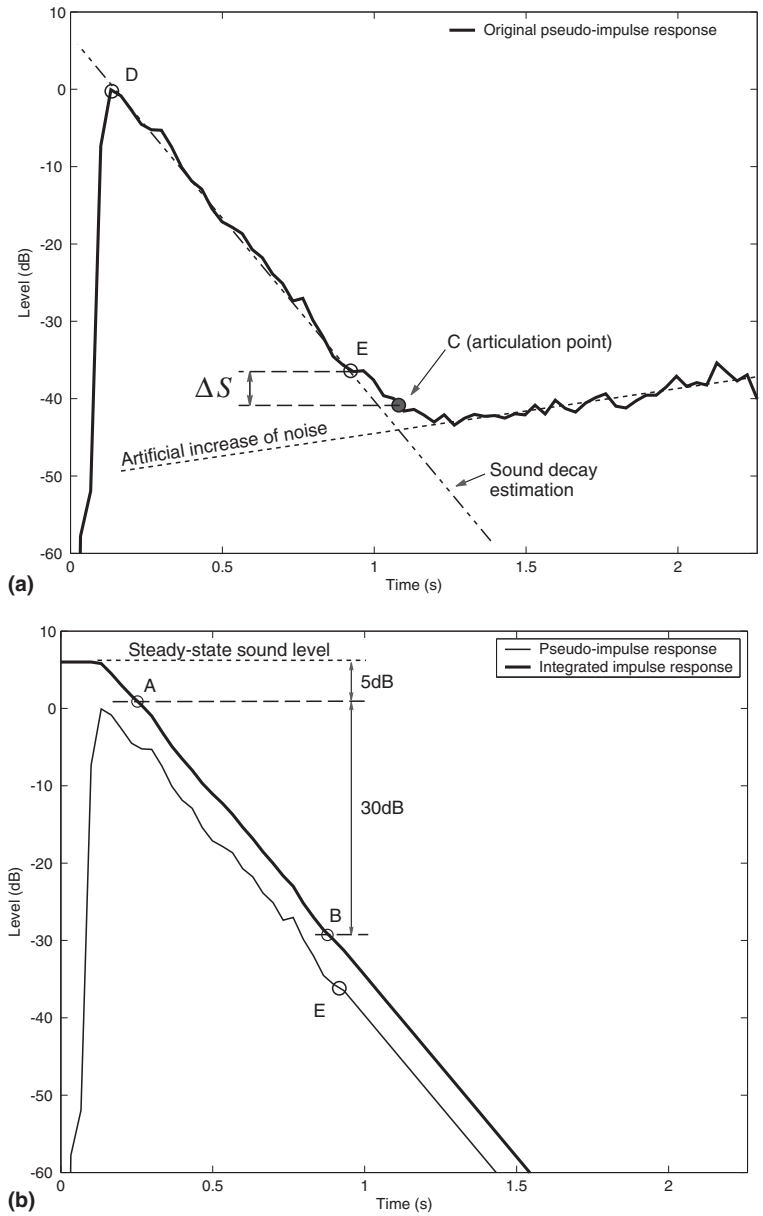


Fig. 7. Compensation of the excess of atmospheric attenuation and extension of sound decay: (a) original pseudo-impulse response with an artificial increase of noise; (b) extended pseudo-impulse response and extended integrated impulse response (configuration S2, microphone M5 at 24 m from the sound source, 1/3 octave band 3150 Hz).

phenomena, we have used a specific processing, recently used for the processing of IR measured in scale models [23].

3.1. Sound decay calculation

The first step of the processing is to apply, firstly, the correction of sensitivity for each acquisition channel, and secondly, a short time Fourier transform (STFT) on the IR (Fig. 6(a)). Then, the sound energy for each frequency band of interest (1/3 octave bands for example) is calculated on each STFT. This allows to built a pseudo-impulse response for each frequency band. The temporal accuracy of this pseudo-impulse response is defined by the parameters of the spectral analysis used in the STFT, like the sectioning of the IR (i.e. the number N of samples used in each fast Fourier transform) and the number of samples R from which the sections overlap. With $N = 2046$ and $R = (2/3) \times N = 1364$, the resulting time step of the pseudo-impulse response is $(1/3) \times N/20\,480 = 33.3$ ms, which is sufficient to estimate the sound decay with time for typical RTs in streets. The Schroeder's integration method is then applied on the pseudo-impulse response in order to have a smooth sound decay (Fig. 6(b)).

3.2. Compensation of the atmospheric attenuation

In the final stage of processing, both pseudo-impulse and integrated IR take into account the effects of atmospheric attenuation by air. However, in order to use these data as references for the validation of mathematical or numerical models of sound propagation in a street, the atmospheric effects should be removed from the experimental data. The compensation of the excess attenuation due to the atmospheric absorption may be realized by filtering each STFT with a compensation filter, defined from the atmospheric conditions (temperature, humidity and pressure) and the distance of propagation (i.e. the time of propagation corresponding to two successive STFT) [23].

Unfortunately, this compensation may produce an artificial increase of noise at the end of the pseudo-impulse response, particularly at high frequencies and for long propagation times (Fig. 7(a)). This is due to the amplitude of the compensation filter which increases drastically at high frequencies, and for large distance of propagation. In this case, the sound decay of the pseudo-impulse response must be estimated on the first part of the decay, then truncated, and extended (Fig. 7(b)). The truncation is realized by determining the articulation point (C), located at the intersection of the main slope and the slope due to the artificial increase of noise [26]. Then, the slope of the original sound decay is estimated between the point (D) corresponding to direct field and the point (E) located at a level ΔS above the articulation point. At last, the pseudo-impulse response is truncated at point (E) and extrapolated from this estimation of the original sound decay. In order to have a correct estimation of the original decay, the value of ΔS must be sufficient so that the part of the pseudo-impulse response between (D) and (E) is not corrupted by the increase of noise. In the present experiment, ΔS was fixed to 7 dB, which seems to be a suitable condition for

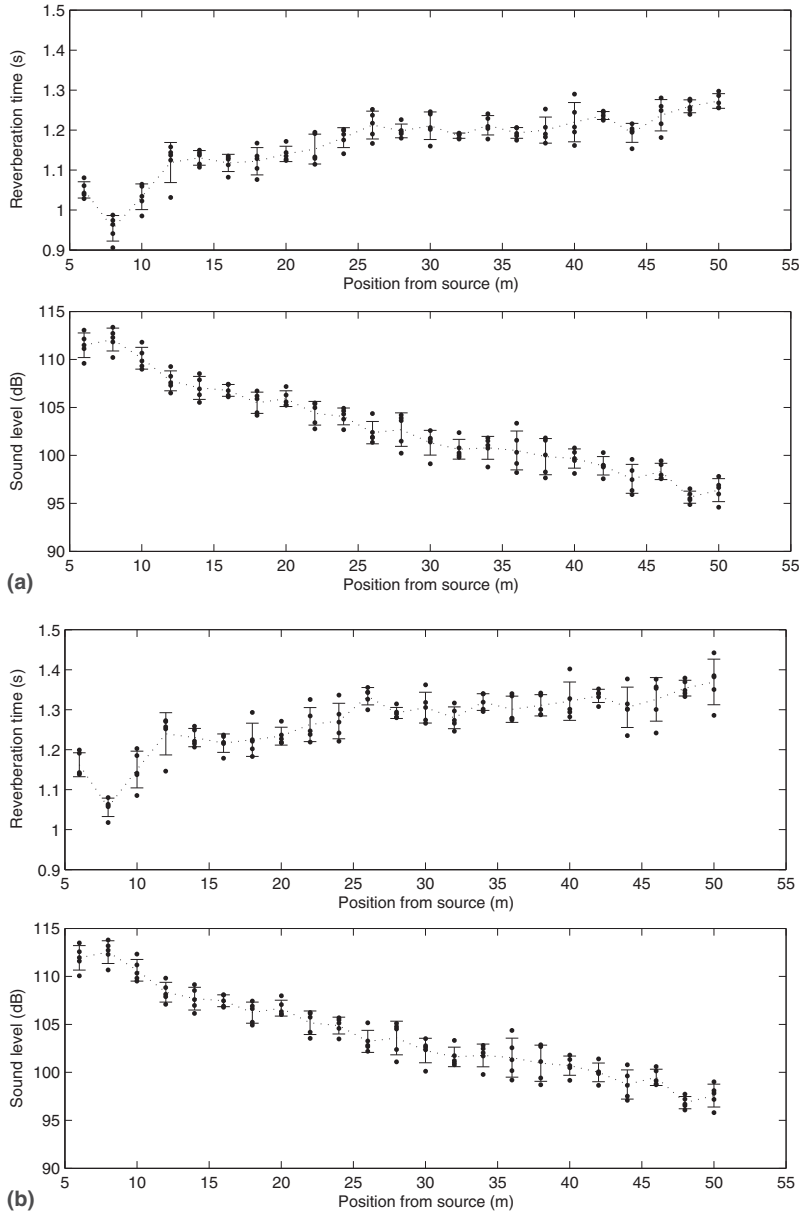


Fig. 8. Example of reverberation times and steady-state sound levels measured at microphone M5 for the S3 configuration, for the 1/3 octave band 2000 Hz, (a) without and (b) with the compensation of the atmospheric attenuation, in function of the distance from the sound source; (●) calculation for each of the 5 shots, (···) mean value over the 5 shots and representation of the standard deviation from the mean value, for the upper limit (⊤) and the lower limit (⊥).

acceptable results. The integrating method is then applied to the extended sound decay to obtain the smooth decay.

3.3. Estimation of the reverberation time and determination of the sound level in the steady-state

The SPL in steady-state can be easily found from the integrated IR, by identifying the sound level corresponding to the horizontal slope of the curves (Figs. 6(b) and 7(b)).

For the RT, a classical method is used. It consists in determining the two points (A) and (B) respectively located at −5 dB and −35 dB from the steady-state. Then, the RT is found by measuring the slope of the decay curve on this range. When the signal-to-noise ratio is small (principally in high frequencies for long distances of propagation), the point (B) cannot be found or is located after the articulation point (C), in the tail of the integrated impulse response. In this case, the method described in Section 3.2 for the extension of the pseudo-impulse, can be used to improve the

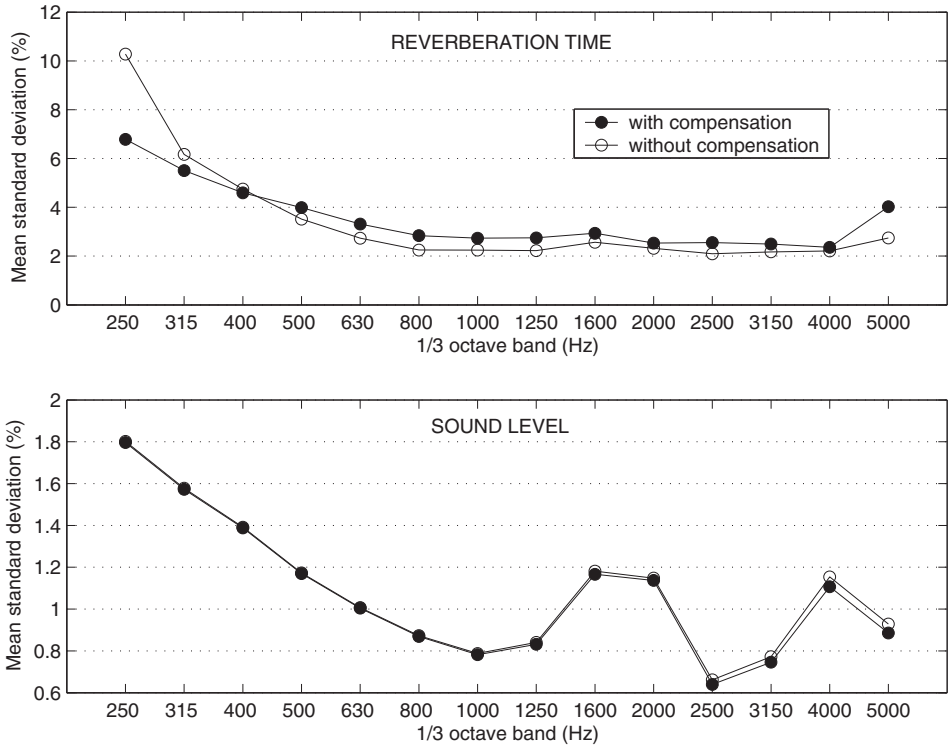


Fig. 9. Representation of the mean standard deviation (in percent) for the reverberation time and the steady-state sound level, in the S3 configuration, on all sections of measurement (microphones M2–M10), in function of frequency, without (○) and with (●) the compensation of the atmospheric attenuation.

estimation of the RT. It consists in determining the new position of (B), at a range ΔS above the articulation point (C). The slope of the sound decay is then estimated between (A) and the new point (B).

3.4. Data averaging

Considering the number of IR for each configuration, an automatic processing was used. In total, 2898 values of RT and sound level were collected during this experimentation for each configuration, corresponding to 23 sections of measurement in the street, with 9 microphones by section and for the 14 third octave bands between 250 and 5000 Hz. The mean values of the steady-state sound level and the RT at each section of the street (microphones M2–M10), are then obtained by averaging data from the 5 measurements (i.e. the 5 shots). As an example, Fig. 8 illustrates this averaging for the S3 configuration at 2000 Hz and shows a good reproducibility of the measurements over the 5 shots. Some significant deviations may however sometimes appear, due to the small fluctuations of the sound source and of the ambient noise. However, the main reason is probably the use of an automatic processing of the IR, whereas some IR would require a direct processing by an

Table 1
Reverberation time (in s) for the configuration S3 at 1000 Hz without compensation of atmospheric attenuation and for each measurement section (see Figs. 2(c) and 3 for the exact position of the microphones)

Position (m)	Reverberation time (s)								
	M3	M9	M2	M4	M5	M6	M7	M8	M10
6	1.19	1.31	1.26	1.17	1.34	1.21	1.17	1.25	1.18
8	1.21	1.16	1.22	1.19	1.33	1.25	1.28	1.27	1.25
10	1.26	1.27	1.31	1.23	1.26	1.24	1.27	1.31	1.28
12	1.23	1.21	1.23	1.32	1.30	1.26	1.27	1.22	1.31
14	1.26	1.20	1.26	1.30	1.30	1.26	1.29	1.26	1.29
16	1.29	1.27	1.27	1.25	1.29	1.19	1.31	1.26	1.24
18	1.26	1.31	1.32	1.28	1.27	1.29	1.31	1.25	1.23
20	1.35	1.32	1.32	1.28	1.31	1.30	1.28	1.31	1.29
22	1.36	1.33	1.22	1.35	1.33	1.34	1.28	1.33	1.31
24	1.30	1.38	1.31	1.33	1.28	1.36	1.34	1.31	1.35
26	1.31	1.27	1.34	1.30	1.34	1.31	1.30	1.31	1.32
28	1.32	1.34	1.30	1.31	1.29	1.37	1.40	1.37	1.37
30	1.32	1.30	1.36	1.38	1.38	1.41	1.33	1.34	1.33
32	1.31	1.37	1.31	1.31	1.36	1.37	1.31	1.34	1.32
34	1.38	1.36	1.34	1.34	1.33	1.34	1.33	1.30	1.37
36	1.31	1.40	1.41	1.28	1.33	1.33	1.37	1.36	1.32
38	1.42	1.31	1.32	1.37	1.36	1.31	1.40	1.34	1.38
40	1.36	1.34	1.38	1.33	1.36	1.38	1.33	1.31	1.35
42	1.37	1.37	1.38	1.36	1.34	1.40	1.38	1.34	1.44
44	1.39	1.34	1.35	1.33	1.35	1.36	1.35	1.34	1.39
46	1.35	1.36	1.33	1.39	1.37	1.35	1.34	1.36	1.39
48	1.36	1.37	1.32	1.34	1.36	1.36	1.39	1.35	1.38
50	1.34	1.42	1.36	1.40	1.32	1.33	1.35	1.33	1.36

operator for a better accuracy. As expected, the compensation of the atmospheric attenuation produces a slight increase of the RT for all positions of measurement, as well as an increase of steady-state sound level with the distance from source.

Overall, the accuracy of the results seem to be greatly satisfactory. As suggested by Fig. 9, the mean value of the standard deviation, over the whole sections of measurement (i.e. all the IR measured on the microphones M2–M10), is less than 4.5% for the RT and 1.25% for the steady-state sound level, from the 1/3 octave band 500 Hz, with or without the compensation of the atmospheric attenuation. Similar data will be found for the other measurement configurations.

The mean values of the RTs and of the steady-state sound levels, have been estimated, for each microphone M2–M10, in each 1/3 octave band between 250 and 5000 Hz, with and without the compensation of the atmospheric attenuation, at each measurement section, and for each configuration. As an example, Tables 1 and 2 give the resulting data for the RTs and the steady-state sound levels, for the 1/3 octave band 1000 Hz, in the S3 configuration, without the compensation of the atmospheric attenuation.

Table 2
Steady state sound pressure level (in dB) for the configuration S3 at 1000 Hz without compensation of atmospheric attenuation and for each measurement section (see Figs. 2(c) and 3 for the exact position of the microphones)

Position (m)	Sound pressure level (dB)								
	M3	M9	M2	M4	M5	M6	M7	M8	M10
6	115.6	115.8	114.4	115.7	114.7	116.3	116.6	114.8	116.7
8	114.0	115.2	113.6	115.2	111.4	115.9	114.9	113.3	114.7
10	113.7	113.0	112.1	114.6	112.9	114.0	114.0	112.6	112.3
12	113.6	112.8	112.5	111.8	111.1	112.8	113.6	113.0	113.5
14	111.7	113.1	111.2	112.7	111.5	111.6	112.3	111.2	112.8
16	111.9	111.4	111.4	112.9	111.9	112.0	112.0	112.1	112.0
18	111.4	110.5	110.8	112.1	111.5	112.1	111.7	111.7	111.7
20	109.3	109.8	110.6	110.6	109.8	111.6	110.3	109.6	111.2
22	107.2	108.6	110.0	109.5	109.6	109.4	109.8	108.6	109.2
24	109.3	108.9	109.1	109.1	109.9	109.4	108.3	109.2	109.3
26	107.5	107.3	108.0	108.1	107.7	107.4	107.9	107.7	108.2
28	106.8	107.1	107.7	107.1	107.8	107.4	106.7	107.2	108.0
30	106.0	107.2	106.7	106.4	106.9	106.5	107.0	106.9	106.9
32	105.4	106.0	106.9	105.8	106.4	105.9	106.6	106.5	106.5
34	106.4	106.0	106.5	105.7	108.0	106.8	106.3	106.1	106.7
36	105.1	105.0	104.4	106.1	105.7	105.6	105.7	106.5	106.1
38	104.1	103.7	104.4	104.9	105.0	106.2	104.0	105.1	103.9
40	103.8	104.5	104.2	103.7	103.8	104.1	103.3	104.9	103.8
42	104.3	103.9	103.8	103.5	103.5	103.8	102.5	104.4	103.3
44	102.0	101.6	103.1	101.8	103.5	102.7	101.9	103.0	102.5
46	104.2	104.7	103.7	103.1	104.7	104.5	104.3	104.0	103.4
48	102.3	103.2	102.7	103.4	102.6	102.4	102.6	102.7	102.6
50	102.7	102.5	102.9	101.9	103.5	103.8	103.0	103.4	102.2

The same processing was also applied to the other configurations, including the compensation of the atmospheric attenuation. It must be noticed that these data are the ''crude'' results, given by the automatic processing and may contain a few abnormal values, which can be easily detected. All the final results are available by contacting the corresponding author. In the next Section, an experimental study of the sound propagation in the street is proposed. From this point, the atmospheric absorption have been compensated in all data.

4. Results

4.1. Sound distribution in a street cross-section

As an example, Fig. 10 presents the evolution of the RT and the sound level, as function of the distance between the measurement cross-section and the sound source, at 2500 Hz, for the S1 configuration. Differences on a same cross-section

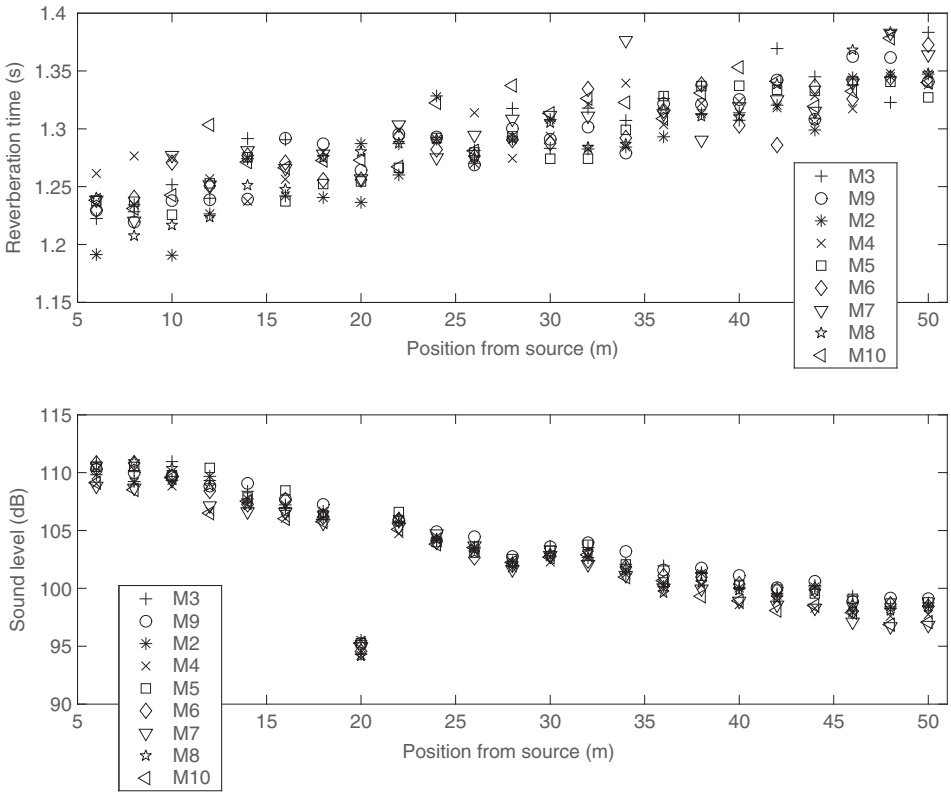


Fig. 10. Reverberation times and sound levels at microphones M2–M10 along the street (S1 configuration at 2500 Hz). A ''abnormal'' value for the sound level at 20 m from the sound source can be observed. This bad estimate in an artefact introduced during the automatic process.

are of the order of 0.05–0.1 s for the RT and almost 2–3 dB for the SPL in most cases. This result shows that the sound decay and the sound level are quite closed in a same cross-section, even near the sound source. It may be noticed that this experimental result is in agreement with recent numerical results [6].

Fig. 11 is another illustration of this result. It gives the mean values of the RT and the sound level for each measurement cross-section, as well as, the standard deviation. In this example, the standard deviation does not exceed 0.032 s for the RT, and 1.16 dB for the SPL. It confirms that the sound distribution in a cross-section is rather uniform.

Over all the frequency range between 250 and 5000 Hz, the mean deviation is less than 0.055 for the RT and 1.1 dB for the SPL (Fig. 12). Fig. 12 shows also that this deviation is almost constant for the RT on the whole measurement sections, while it decreases for the sound level when the distance from source increases. It suggests that the sound level close to the sound source is more dependent on the behavior of the first reflections than for receivers far from the sound source. Near the source, small sound level fluctuations may occur for receivers even close to each other, due to reflections and scattering by particular façade irregularities. On the other hand,

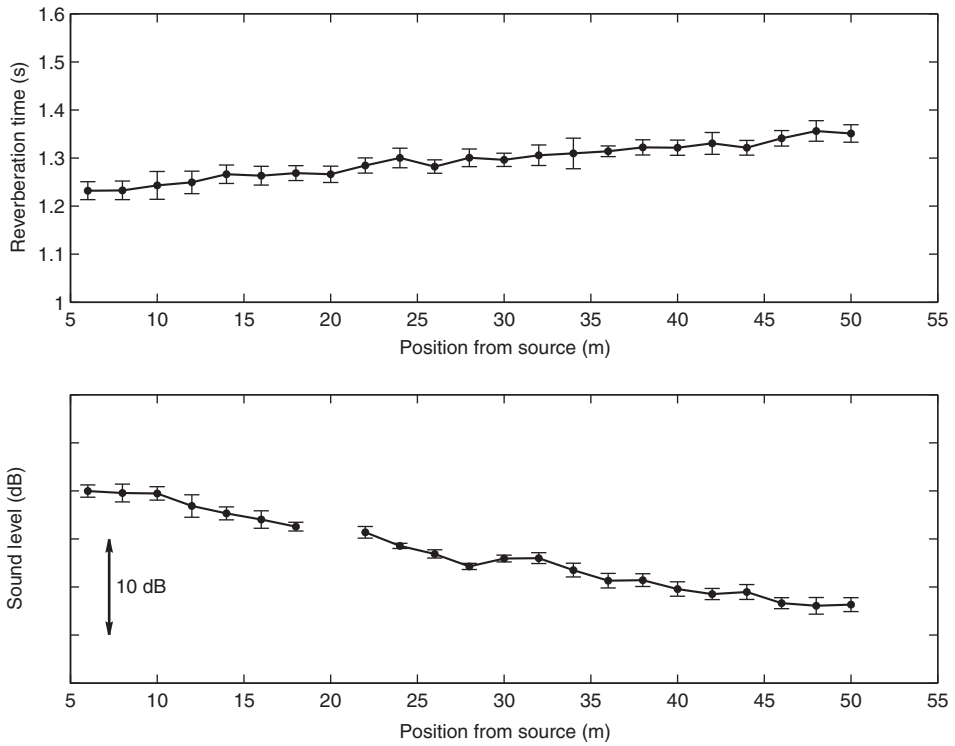


Fig. 11. Mean values and standard deviation of reverberation times and sound levels in a cross-section, along the street (S1 configuration at 2500 Hz). The "abnormal" result for the sound level at 20 m has been removed from the figure.

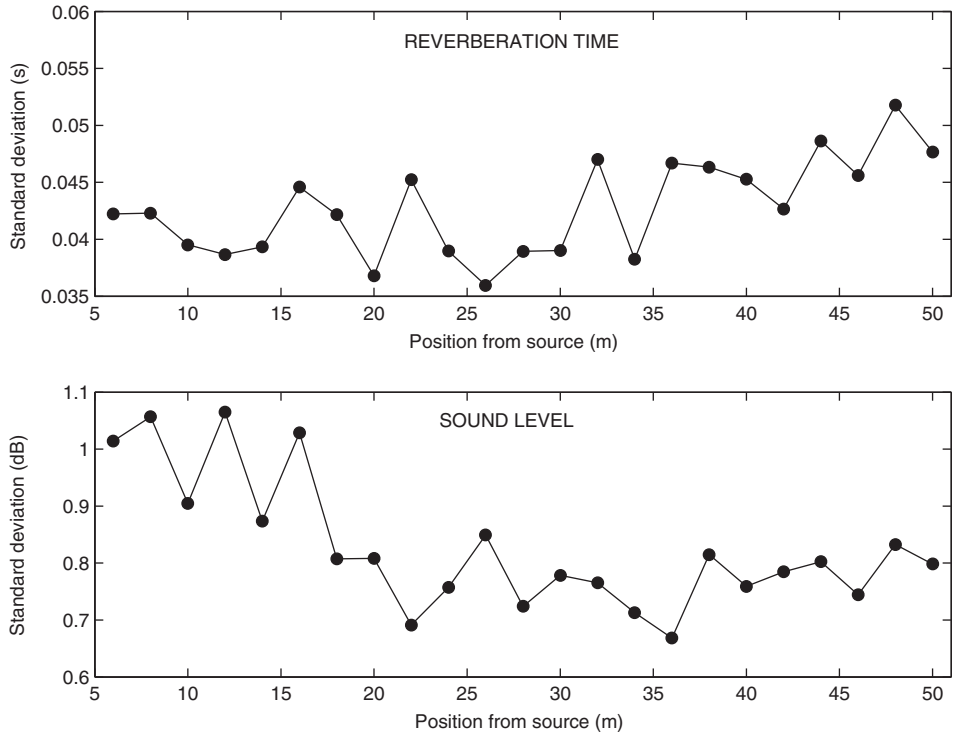


Fig. 12. Evolution of the sound field uniformity in a cross-section, along the street: representation of mean standard deviation of reverberation times and sound levels over the 1/3 octave bands between 250 and 5000 Hz (S1 configuration).

these effects has no influence on the reverberated field far from the source, which is supplied for a large part by the multiple-diffuse reflections by the building façades.

The same conclusions can also be found for the S2–S4 configurations. It suggests that the sound field and its decay with time, is quite uniform in a cross-section of a narrow street, whatever the sound source position and height. From this point, next discussions will only consider the mean value of the RT and the sound level for each cross-section.

Finally, an abnormal value for the sound level at 20 m from the sound source can be observed in Fig. 10. This bad estimation of the real sound level can be explained by an error introduced during the automatic process of the IR and which sometimes fails. A manual control of the results would allow to avoid this artefact. However, this kind of problem does not happened often, is easily identifiable, and can be removed from the results (as done in Figs. 11 and 14 for example).

4.2. Sound distribution along the street

Figs. 13 and 14 respectively present the RT and SPL evolution, function of the source–receiver distance, for each 1/3 octave band in S1 configuration. The first

figure clearly shows that the RT increases with the increase of source–receiver distance. This increase is more important on the first 30 m of propagation. Beyond that, the RT seems to stabilize (for high frequencies mainly).

Moreover, this figure also shows that the RT is higher in low frequency than in high frequency. In other words, the reverberated field is supplied for a long time by low frequencies, while high frequencies are more quickly attenuated. Since the atmospheric attenuation was compensated in all these data, this result suggests that diffuse reflections on building façades contain the low frequencies in the street but scatter the high frequencies out of the street (i.e. favoring sky absorption). In agreement with the common idea, it seems that high frequencies are reflected in more directions than low frequencies.

In terms of sound level, it is not possible to compare the results between 1/3 octave bands. Since the sound source has not been perfectly impulsive, the sound source energy is not equal for each 1/3 octave band. However, considering a reference position, the sound level may be normalized, in order to compare the sound attenuation between each 1/3 octave bands. Fig. 14 presents the sound levels normalized with a reference at 6 m from the sound source. Unlike the sound decay with

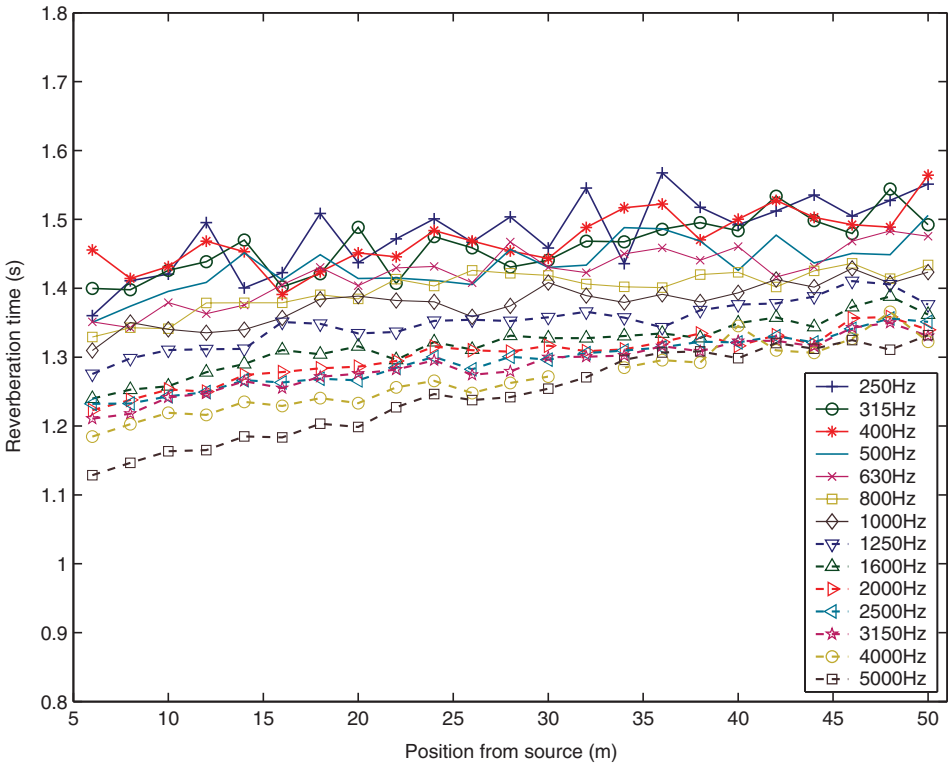


Fig. 13. Evolution of the average reverberation time along the street, for each 1/3 octave band between 250 and 5000 Hz (S1 configuration).

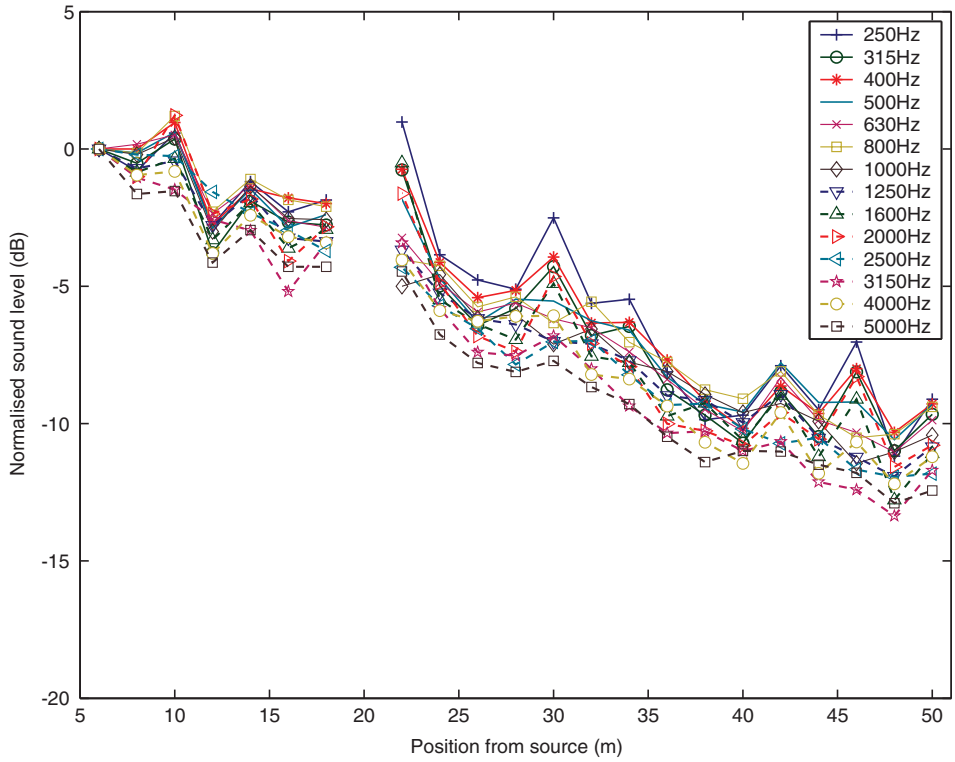


Fig. 14. Evolution of the average sound level along the street, for each 1/3 octave band between 250 and 5000 Hz (S1 configuration). The "abnormal" result for the sound level at 20 m has been removed from the figure.

time, the sound attenuation is not frequency dependent. Except for the atmospheric attenuation (which is compensated in this study), frequency has no effect on the relative attenuation of sound in the street. The shape of the sound attenuation is probably only defined by the street size, particularly by the width and height.

Although we do not present the results for the S2–S4 configurations, similar conclusions could be found, both for the RT and the sound attenuation in the street.

4.3. Effects of the source height

As shown in Figs. 15 and 16, for the S1/S2 and S3/S4 configurations, source height has no effective influence neither for the RT, nor for the sound level. One possible reason is that the two source heights are too closed to produce notable differences. However, it is an interesting result, since the major part of urban sources (road traffic, pedestrian, etc.) are close to the pavement.

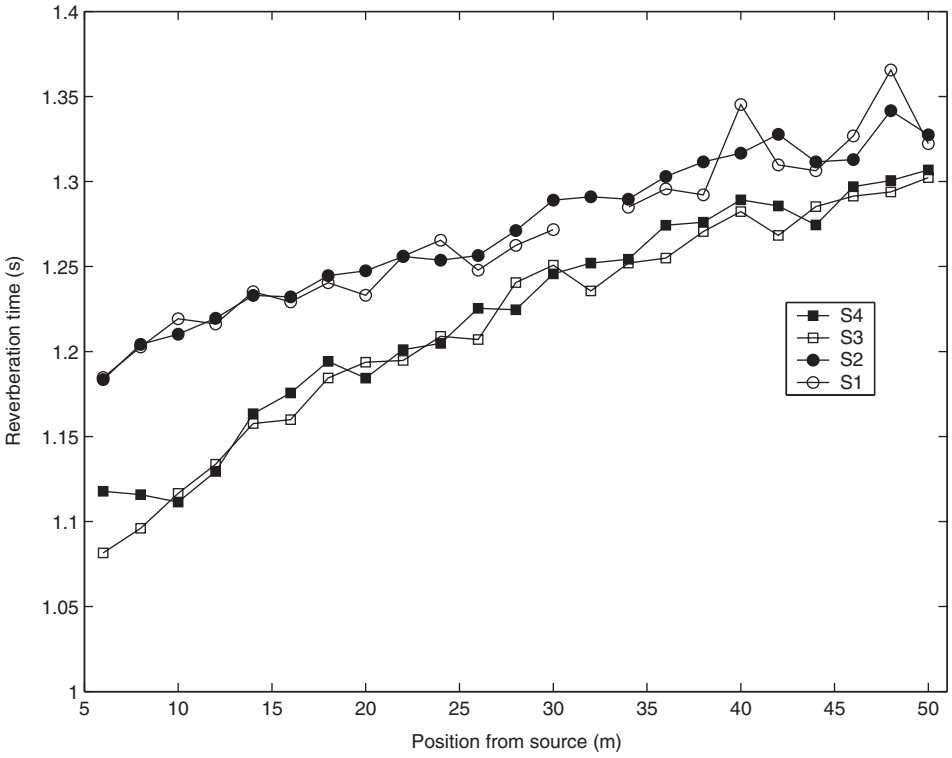


Fig. 15. Evolution of the reverberation times for each measurement configuration S1–S4 (1/3 octave band 4000 Hz).

4.4. Effects of the source position along the street

As an example, Fig. 15 shows that RTs in S1/S2 configurations (source in the street) are larger than for S3/S4 configurations (source at the beginning of the street). In the 1/3 octave band 4000 Hz, differences can reach about 10% near the source, but decreases when the distance from the sound source increases. This results can also be observed in lower 1/3 octave bands, but differences between S1/S2 and S3/S4 configurations are lower. This particular behavior can be explained by considering Fig. 17. When the source is at the beginning of the street (S3/S4 configurations), a large part of the initial sound field is lost through the open end. The sound field in the street is then only supplied by the part of the sound energy which is radiated inside the street. On the other hand, when the source is located inside the street (S1/S2 configurations), the part of the initial sound energy which is radiated by the source in the opposite direction to the receivers, can be reflected towards the receiver (back-diffusion), according to the shape and the disposition of the building irregularities. This can be clearly seen on the IR (before and after integration) calculated

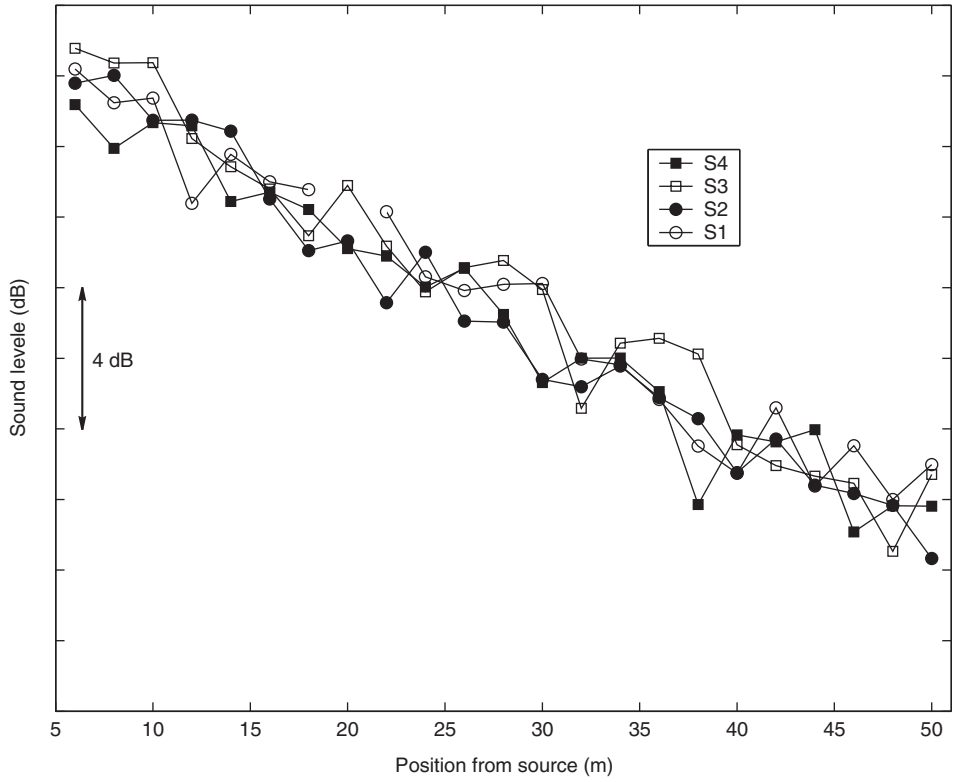


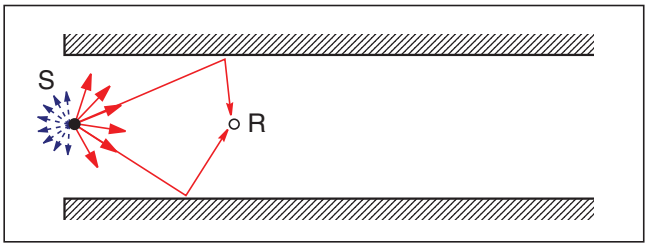
Fig. 16. Evolution of the sound levels for each measurement configuration S1–S4 (1/3 octave band 4000 Hz).

both for the S2 and S4 configurations (Fig. 18). Because of the back-diffusion effect, the sound decay is then smaller for the S2 configuration than for the S4 configuration.

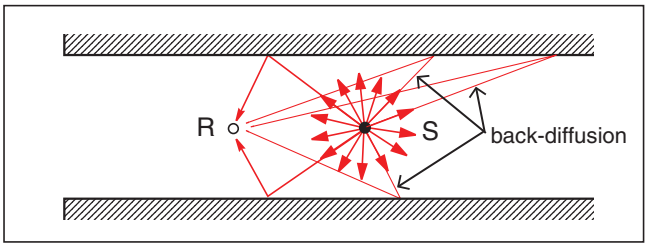
However, Fig. 16 shows that the back-diffusion has no effect on the sound attenuation in the street. Because of the back-diffusion appearing in the late decay, after the direct field and the first reflections, the extra-energy due to the back-diffusion is much smaller than the total energy in the early decay and in the late decay due to the "simple" diffusion (i.e. without back-diffusion).

5. Conclusion

In order to study the sound propagation in urban areas, measurements were realized in a narrow street, for several configurations of sound source and receiver. By analyzing and comparing the results in terms of RT and sound level, many interesting conclusions have been obtained, particularly:



(a) "Simple" diffusion



(a) "Simple" diffusion + back-diffusion

Fig. 17. Schematic representation of the back-diffusion. In the upper illustration (source at the beginning of the street), the sound field propagating outside the street can not participate to the diffuse sound field inside the street. In the lower illustration (sound source in the street), the sound field propagating to the right of the street can potentially supply the sound field on the left-part of the street (back-diffusion).

- The sound field uniformity in a cross-section of the street: sound levels and RTs are quite uniform in a street section, even for a section very close to the sound source. An accurate study of the sound field in a same section has also shown that the sound level deviation decreases when the distance from source increases, while the RT deviation is constant. It suggests that the sound field very close to the source is slightly dependent of the behavior of the early reflections. However, this deviation is very small, less than 1 dB for the sound level and 0.036 s for the RT.
- The increase of RT with the increase of source–receiver distance over the frequency range between 250 and 5000 Hz. Moreover, the sound decay is smaller at low frequency than at high frequency. It can be explained by the "diffuse behavior" of the building façades, which favors high frequency reflection in all directions, increasing sky absorption, while low frequencies are more channeled in the street.
- No frequency effect on the sound attenuation in the street. Whatever the experimental configuration and the frequency range, the shape of the relative sound level attenuation in the street seems to be only dependent on the street width and height.
- No effect of the source height: if existing, such effects should appears for a larger source height.
- The back-diffusion effect on the reverberation in the street.

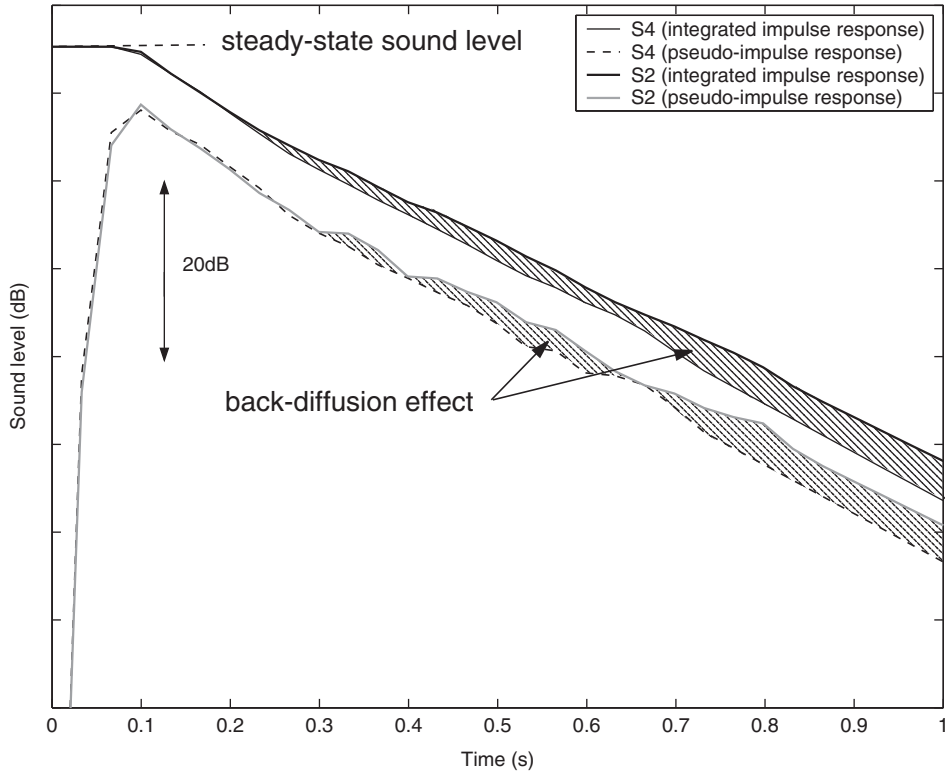


Fig. 18. Illustration of back-diffusion: pseudo-impulse responses and integrated impulse responses at a same distance from source, respectively for the S2 and S4 measurement configurations (1/3 octave band 4000 Hz). The filled zone represents the sound energy due to the back-diffusion in the S2 configuration.

Although the above results should be restricted to the studied street with the experimental configurations which were considered in this study, it is strongly possible that most of the conclusions could be extended to other streets. However, in order to have a more comprehensive parametric study of the sound field in a street, including the effects of the source height, the source position, the back-diffusion, etc. the use of scale models seems to be a simple solution, with the condition that the building façades can be correctly taken into account.

Acknowledgements

The authors thank J.F. Lefur, Y. Pichaud and M. Réche of the Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, for their contribution to the realization of the experiments, and P. Woloszyn from the School of Architecture of Nantes, for architectural data.

References

[1] Wiener FM, Malme CI, Gogos CM. Sound propagation in urban areas. J Acoust Soc Am 1965;37(4):738–47.
[2] Wu S, Kittinger E. On the relevance of sound scattering to the prediction of traffic noise in urban streets. Acustica 1995;81:36–42.
[3] Lu KK, Li KM. The propagation of sound in narrow street canyons. J Acoust Soc Am 2002;112(2):537–50.
[4] Bullen R, Fricke F. Sound propagation in a street. J Sound Vib 1976;46(1):33–42.
[5] Picaut J, Simon L, Hardy J. Sound field modeling in streets with a diffusion equation. J Acoust Soc Am 1999;106(5):2638–45.
[6] Kang J. Numerical modelling of the sound fields in urban streets with diffusely reflecting boundaries. J Sound Vib 2002;258(5):793–813.
[7] Kang J. Sound propagation in street canyons: comparisons between diffusely and geometrically reflecting boundaries. J Acoust Soc Am 2000;107(3):1394–404.
[8] Ball LM. Air raid siren field tests. J Acoust Soc Am 1942;13:10–3.
[9] Volkmann JE, Graham ML. A survey on air raid alarm signals. J Acoust Soc Am 1942;14(1):1–9.
[10] Jones RC. A fifty horsepower siren. J Acoust Soc Am 1946;18(2):371–87.
[11] Baron P. Propagation du son dans l'atmosphère et audibilité des signaux d'avertisseurs dans le bruit ambiant. Cahiers d'Acoustique 1954;66:41–57.
[12] Yeow KW. External reverberation observed in built-up areas. J Sound Vib 1976;48(3):438–40.
[13] Donavan PR. Sound propagation in urban spaces, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1976.
[14] Yeow KW. Decay of sound levels with distance from a steady source observed in a built-up area. J Sound Vib 1977;52(1):151–4.
[15] Steenackers P, Myncke H, Cops A. Reverberation in town streets. Acustica 1978;40:115–9.
[16] Ko NWM, Tang CP. Reverberation time in a high-rise city. J Sound Vib 1978;56(3):459–61.
[17] Delany ME, Rennie AJ, Collins KM. Scale model investigations of traffic noise propagation. J Sound Vib 1977:325–40.
[18] Mulholland KA. The prediction of traffic noise using a scale model. Appl Acoust 1979;12:459–78.
[19] Jones HW, Stredulinsky DC, Vermeulen PJ. An experimental and theoretical study of the modelling of road traffic noise and its transmission in the urban environment. Appl Acoust 1980;13:251–65.
[20] Kerber G, Makarewicz R. An optical scale model of traffic noise propagation in an urban environment. Appl Acoust 1981;14:331–45.
[21] Yamashita M, Yamamoto K. Scale model experiments for the prediction of road traffic noise and the design of noise control facilities. Appl Acoust 1990;31:185–96.
[22] Horoshenkov KV, Hothersall DC, Mercy SE. Scale modelling of sound propagation in a city street canyon. J Sound Vib 1999;223(5):795–819.
[23] Picaut J, Simon L. A scale model experiment for the study of sound propagation in urban areas. Appl Acoust 2001;62:327–40.
[24] Le Pollès T. Modélisation des champs diffus en acoustique architecturale par la théorie des transports: application au milieu urbain, PhD Thesis, Université du Maine, Le Mans, France, 2003.
[25] Schroeder MR. Iterative calculation of reverberation time. Acustica 1980;45:269–73.
[26] Grillon V. Auralisation dans les maquettes: traitement des réponses impulsionnelles, PhD Thesis, Université du Maine, Le Mans, France, 1995.

ELSEVIER

Applied Acoustics 62 (2001) 327–340

applied acoustics

www.elsevier.com/locate/apacoust

Technical Note

A scale model experiment for the study of sound propagation in urban areas

J. Picaut [a,*], L. Simon [b]

[a] *Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Centre de Nantes, B.P. 4129, 44341 Bouguenais Cedex, France*
[b] *Institut d'Acoustique et de Mécanique, LAUM UMR CNRS 6613, 72085 Le Mans Cedex 9, France*

Received 14 June 1999; received in revised form 17 March 2000; accepted 29 March 2000

Abstract

A 1:50 scale model experiment for the study of sound propagation in streets is developed. Special interest is focused on the realization of the scale model in order to reproduce fundamental physical phenomena in streets such as multiple reflections and diffuse-scattering by façade irregularities. Acoustic measurements in the model are achieved using a spark discharge sound source with high level, very good reproducibility and broad band spectra. Digital processing of the measured signals in the scale model are especially developed, first to compensate the excess of atmospheric attenuation in the scale model in relation to the atmospheric attenuation in the full scale model, then, to extend the sound decay of the impulse responses beyond the noise level. The sound attenuation and the reverberation measured in the scale model are compared with real measurements in a street. The validity range of the model experiment is then discussed. © 2001 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

A project on the "City", called *Programme Interdisciplinaire de Recherche sur la Ville (PIR-Villes)* and supported by the Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) was recently carried out. This research includes the modeling of sound propagation in cities with respect to the architectural characteristics of the built-up areas. In particular, an experimental system was specially set up in order to study the effects of the building façade irregularities (like balconies, windows, edges...) on

* Corresponding author Tel.: +33-2-40-84-57-89; fax: +33-2-40-84-59-92.
E-mail address: judicael.picaut@lcpc.fr (J. Picaut).

0003-682X/01/$ - see front matter © 2001 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.
PII: S0003-682X(00)00028-1

the sound diffusion in the street, and consequently on the sound propagation and reverberation. This experimental work is proposed in this technical note.

Because of its major importance for people living in urban areas, the modeling of noise propagation in cities has attracted considerable attention for a long time. For validating theoretical studies or numerical models in order to predict the industrial and traffic noise impact in real urban areas, scale models have often been used. Although few experimental studies have also been done in real urban areas to measure, for example, external reverberation times [1–3] or to investigate the sound propagation in built-up areas [4,5], the use of scale models has some practical advantages in comparison with full scale measurements:

- a perfect control and a flexibility of the studied geometry: size and disposition of buildings, street widths...,
- no special authorization: legal authorizations from police and city administrations are needed for such measurements in towns,
- no parasite sound sources which could corrupt measurements (traffic noise, human sources...),
- no limited time for the experiments,
- no meteorological effects like wind and rain (except the atmospheric attenuation).

However, the use of scale models has also its own restrictions. First, in order to reproduce all phenomena which play a major role in the sound propagation in urban areas (sound absorption, multiple reflections and diffuse-scattering by buildings façades and floor, diffraction by half-plane edges [6,7]), the accuracy of the model reproduction has to be great. Unfortunately, because of the size of the studied urban areas (a street, a block of buildings, an industrial site...), it requires larger scale factors (e.g. 50 or more) than for room acoustics (scale factors 10 to 50 are often used for the measurements of the acoustical properties of theaters, opera houses...). For such scale factors, the laws of acoustic similarity between the full scale and the scale model require the use of ultrasonic sound sources, adapted receivers and signal processing (e.g. transducer equalization, compensation of the excessive atmospheric attenuation in the scale model).

Probably because of experimental complexities, urban scale models have often be used to study the road traffic noise transmission through a lightly built-up environment like a residential area [5,8,9]. In most of these studies, only sound levels like L_{eq} or L_{90} were measured. Excepted Donavan's works [10] in the 1970s, little attention was focused on the measurement of sound attenuation and reverberation in built-up areas with high density of buildings, narrow streets, like in a city center. In this note, an urban scale experiment is specially presented to study the sound propagation in a street. The effects of building façade irregularities on the sound propagation are statistically taken into account in the model. A main focus is also done on the measurement and the digital processing of the impulse responses in the scale model in order to estimate the sound attenuation and the reverberation in a street. Results are compared with full scale measurements and show a good agreement. The

validity range of the experimental system, in frequency and distance from source, is then discussed. Finally, the note concludes with further works to be carried out to study the effects of façade irregularities on the sound propagation in urban areas.

2. Experimental system

2.1. Scale model of a street

A 1:50 scale model of a street of 12 m height with variable length and width was carried out. A smaller scale factor should require a large surface of experiment, which is not workable for the study of sound propagation in urban areas like a block of buildings. At the opposite case, the use of a larger scale factor need both, suitable transducers which limits the upper boundary of the frequency range, and an extensively digital processing of signals measured in the scale model.

Building façades are simulated by an arrangement of wooden cubes (beech) of 5 cm ace of base. Their disposition side by side follows a statistic distribution extracted from a real Haussmann building façade. This kind of French architectural representation, dating from the XIXth, is well widespread in Paris and in most of French cities and explains this particular choice. This architectural model may be easily split into elemental objects like windows, carpentries, balconies, modenature and frontage (Fig. 1). Each one of these elements is characterized both by the rate of its relative surface on the façade, and by its distance (in meters) to the reference plane (see Table 1). This statistical distribution is then reproduced on the building façades of the scale model by disposing the wooden cubes side by side (see Figs. 2 and 3).

In order to satisfy the laws of acoustic similarity for the sound absorption by the building façades, wooden cubes have been varnished to be very reflective. The absorption of the wooden cubes, measured by an ultrasonic method [11], gives mean values of the absorption coefficient from 0.06 at 50 kHz (1 kHz equivalent full scale) to 0.19 at 125 kHz (2.5 kHz equivalent full scale), for incident angles towards 15 to 60° with the normal to a cube. These values are quite in accordance with mean absorption coefficients measured in streets [5]. Road and pavement, which are also very good sound reflectors, were simulated by a wooden varnished rigid plane.

2.2. Sound source

Pneumatic noise sources are often used in urban scale models to simulate traffic noise (a single source or a traffic flow) [5,12]. The use of such sources allows to measure the traffic noise level according to several parameters like the speed and the density of vehicles, the composition of traffic... However, they are not appropriate to estimate the impulse response of a street, which is the only physical quantity which allows to describe a linear-time invariant system, like a street is supposed to be. Robust methods like the time-stretch and compression technique [13] and the cross-correlation techniques using pseudo-random noise [14] have been investigated for

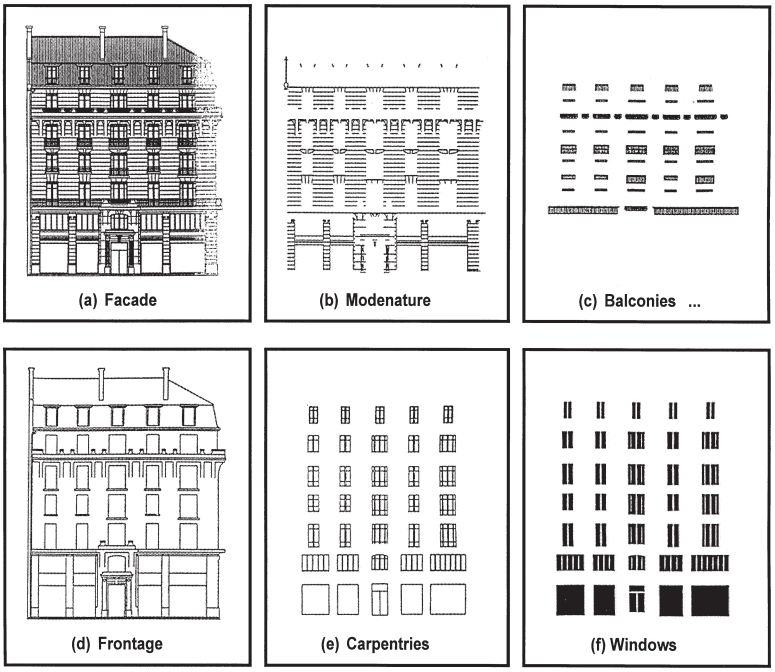


Fig. 1. Simple decomposition of a Haussmann building façade: (a) original building façade, (b) modenature, (c) balconies, (d) frontage, (e) carpentries, (f) windows. See Table 1 for details.

Table 1
Statistical description of a Haussmann building façade

Façade object	Frontage (d)	Balconies (c)	Carpentries (e)	Modenature (b)	Windows (f)
Relative surface (%) on the building façade (a)	35	9	8	18	30
Mean distance (m) from the reference plane (d)	0	0.80	−0.50	0.40	−0.60

the estimation of the impulse response in rooms. However, they need suitable transducers in size and directivity. Unfortunately, such transducers are not designed for scale models for scale factors larger than 50. Studies are now in progress to design sources and receivers with computable directivity [15], but they are not operational at the moment.

In the present experiment, an impulsive spark source was used. Such source is often used to measure physical parameters of theaters, concert halls... from scale models [16]. A three-electrodes spark source was specially designed to give an acceptable directivity and reproducibility with an high acoustic energy level. The intensive use of a spark source brings out two main problems: fragility of the three electrodes and gap adjustment between them. Here the choice was done to use

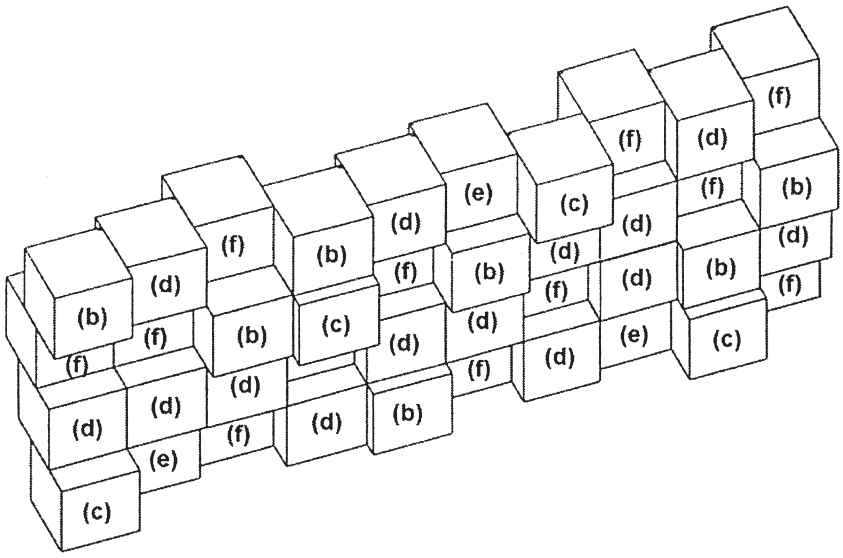


Fig. 2. An arrangement of wooden cubes is proposed to simulate a Haussmann building façade. This distribution is statistically equivalent to the one of Fig. 1 according to data and notations of Table 1.

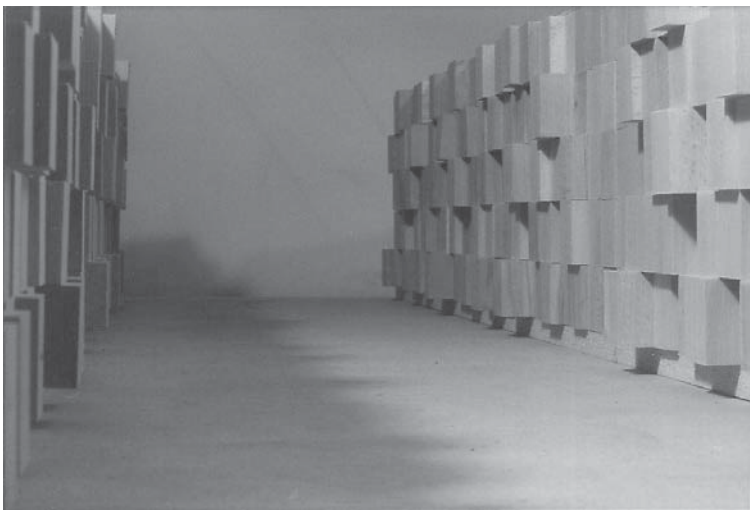


Fig. 3. View in the scale model of the street.

tungsten electrodes of 0.5 mm diameter, controlled by a system allowing to exactly adjust the gap between electrodes. Excepted for the 500 Hz octave-band (full scale frequency), where the forward radiation is maximum, the sound radiation is quite uniform (± 2 dB) around the spark source. Moreover, a good reproducibility is

obtained (Fig. 4). However, in order to avoid small fluctuations and occasional bad discharges of the spark source, a coherent average of impulse responses is required at each location of the microphone. This averaging allows also to increase the signal-to-noise ratio (SNR) by approximately 18 dB, because the doubling of the number of discharges increases the SNR to 3 dB [17].

2.3. Data acquisition system

The receiver is a Brüel & Kjær type 4138 1/8 inch capacitor microphone connected to a preamplifier and a measurement amplifier Brüel & Kjær type 2633 and 2670. The upper frequency boundary of the acquisition chain is estimated by Brüel & Kjær at 160 kHz, which limits the upper 1/3 octave-band of the study to 3150 Hz full scale. In order to minimize variation of microphone sensibility with the incident angle, the preamplifier with the microphone are put vertically (membrane oriented to the floor). Analog-to-digital conversion is realized by a Concurrent Computer Corporation 12-bits converter at the sample frequency 400 kHz (8 kHz full scale), allowing to satisfy the Shannon theorem.

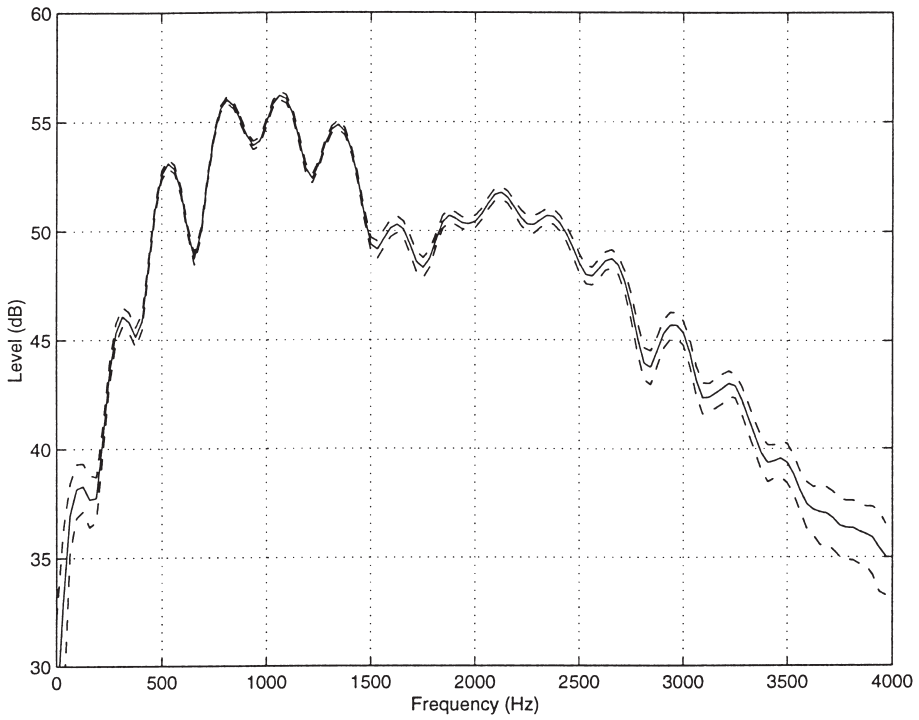


Fig. 4. Spark reproducibility in frequency, measured at 10 cm from the source (full scale frequency). Average spectrum (—) with standard deviations (---) (100 discharges).

2.4. Measurement method

The scale model is put in a semi-anechoic room. Movements of the microphone are controlled by a Charlyrobot 3D-robot via a D/A 16-bits converter. The spark discharge is synchronized with the beginning of acquisition. The whole experiment (sound source, motion of microphone and acquisition) is controlled by a Concurrent Computer Corporation MAXION workstation (Fig. 5).

Since the atmospheric attenuation is important in 1:50 scale models in comparison with full scale, the excess of attenuation has to be corrected (see Section 3). This attenuation depending on atmospheric quantities (temperature, pressure and relative humidity of air), they were measured during all the experiment.

For each microphone position, 100 discharges of the spark source were recorded. In order to estimate a representative impulse response of the scale model at each location, the amplitude of each discharge is compared to a reference value. Only signals which are significant are retained to process the average impulse response of the scale model. In practice, if the maximum deviation between the amplitude of a discharge and the reference value is fixed to 5%, about 95% of the impulse responses are used for the averaging.

3. Processing of impulse responses

3.1. Compensation of the excess of atmospheric attenuation

A limitation in the use of scale model for acoustic measurements is the excess of atmospheric attenuation in the model in comparison with the full scale. The atmospheric attenuation does not verify the scale factor but increases exponentially with it. The usual approach to minimize the atmospheric attenuation in scale models is to fill the model by nitrogen or to dry the air about 2%. Unfortunately the first solution requires special equipment and the second one is not sufficient for accurate

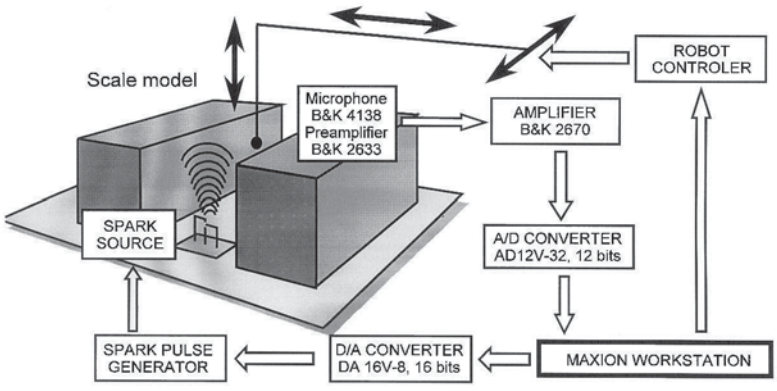


Fig. 5. Schematic representation of the measurement system.

scaling of the air attenuation at high frequencies for 1:50 scale models [16]. In the experiment, the choice was made to digitally filter the measured signal (as already suggested in [18]), the filter being based on the simple theory of the atmospheric attenuation in the air.

Let us consider the propagation of a sound wave of frequency f, from a point A to B in the air. The acoustic pressure p_B at B may be expressed as a function of the acoustic pressure p_A at A by:

$$p_B = p_A \ \exp\left(-\frac{\alpha(f)d}{20\ln e}\right), \tag{1}$$

where d is the distance (in meters) between A and B. $\alpha(f)$ is the attenuation coefficient depending on the frequency f but also on the ambiant atmospheric conditions: pressure P, temperature T and relative humidity h_r [19,20]. The compensation process consists in suppressing or replacing the term corresponding to the atmospheric attenuation. For example, the compensate pressure at point B (resulting from the propagation between A and B) is simply:

$$p_B^{'} = p_B \times \exp\left(\frac{\alpha(f)d}{20\ln e}\right) = p_A \exp\left(-\frac{\alpha(f)d}{20\ln e}\right) \times \exp\left(\frac{\alpha(f)d}{20\ \ln\ e}\right) = p_A \tag{2}$$

Using the same principle, it is also possible to replace the real atmospheric attenuation (e.g. characterized in the 1:K scale model by P, T and h_r) by the atmospheric attenuation in "virtual" conditions (e.g. the equivalent attenuation in a full scale model whose atmospheric conditions are defined by P', T' and $h_r^{'}$):

$$p_B^{''} = p_B \times \exp\left(\frac{\alpha(f)d}{20\ln e}\right) \times \exp\left(-\frac{\alpha'(f)d \times K}{20\ln e}\right) \tag{3}$$

where α' is the new atmospheric attenuation coefficient defined by P', T' and $h_r^{'}$.

In practice, since the atmospheric attenuation depends on the distance of propagation of the sound wave, it also depends on the propagation time. The filter to apply to an impulse response measured in the scale model, in order to compensate the excess of atmospheric attenuation is therefore, time-varying. The compensation process (Fig. 6) consists first in analyzing the measured signal $y(t)$ with the short-time Fourier transform (STFT). Then, for a given window W_i of the STFT, defined by its central instant t_i and its width T, the compensation filter H_i is designed by calculating for each frequency f, the attenuation coefficient $\alpha_i(f)$ for a mean time of propagation t_i. The filter H_i is then applied to the current window of the STFT.

3.2. Extension of the sound decay

Unfortunately, an important bias is produced by the compensation of the excess of air attenuation, specially at the end of the impulse response (for large time values)

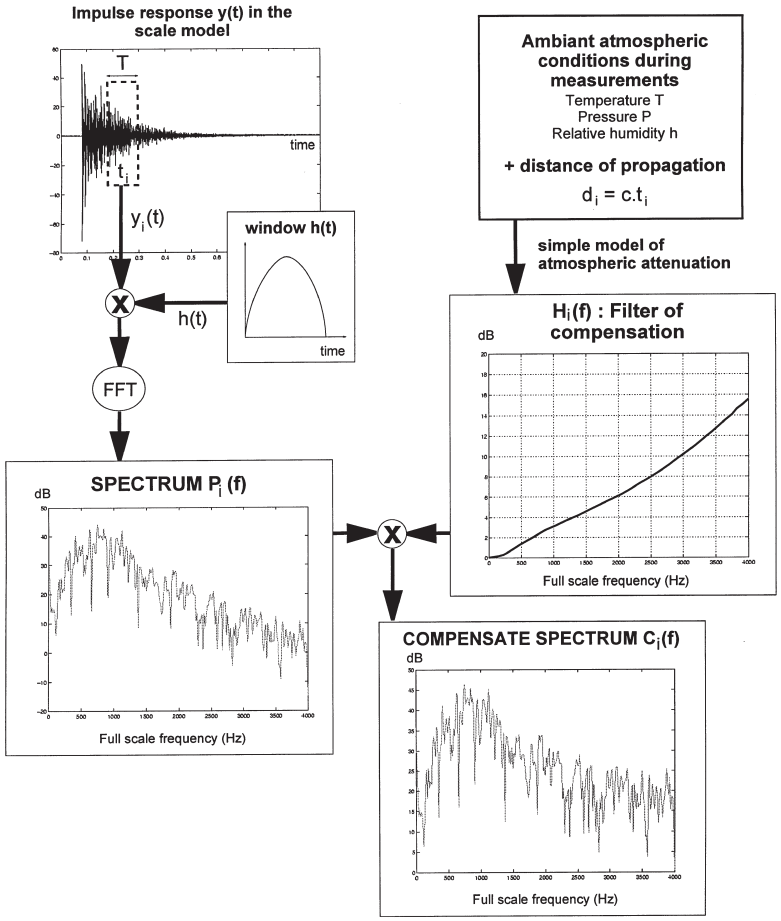


Fig. 6. Schematic representation of the compensation process. The signal $y(t)$ is analyzed by the short-time Fourier transform. The filter $H_i(f)$ is calculated as a function of the ambiant atmospheric conditions and as a function of the time of propagation t_i. The compensation filter is then applied to the spectrum $P_i(f)$. The result provides the compensate spectrum $C_i(f)$.

where the amplitude of the compensation increases drastically. For instance, the filter gain applied to the signal for one second of propagation, at 150 kHz (3 kHz equivalent full scale), is closed to 50 dB. As a consequence, the noise is artificially increased (Fig. 7), which makes difficult the estimation of the reverberation time and therefore the steady state sound level. A simple way to overcome this problem is firstly to estimate the sound decay only on the first part of the curve (for each 1/3 octave-band), and secondly to extend the sound decay beyond the noise. In practice, the extrapolation is effective from 5 to 10 dB above the mean noise level.

The steady state sound level is estimated by integrating the whole decay (original plus extension) over the time.

4. Comparison with full scale measurements-validation

4.1. Full scale measurements

Similar measurements of reverberation time and sound attenuation were carried out by the Laboratoire Central des Ponts et Chaussées de Nantes in the Orléans street (96 m length, 8 m height and 12 m wide) at Nantes, France. Three configurations of sound sources and microphones along the street were studied:

- (M1) impulsive sound source at the beginning of the street and receivers at 2, 4, 8, 16, 32, 64 and 96 m,
- (M2) impulsive sound source at 16 m in the street and receivers at 2, 4, 8, 16, 32, 64 and 80 m from the source,
- (M3) impulsive sound source at 32 m in the street and receivers at 2, 4, 8,16,32 and 64 m.

4.2. Comparisons

The reverberation times and the sound attenuations measured both in the Orléans street and in the scale model were compared for the three source-microphone configurations, for the 1/3 octave bands 250 Hz to 2.5 kHz full scale.

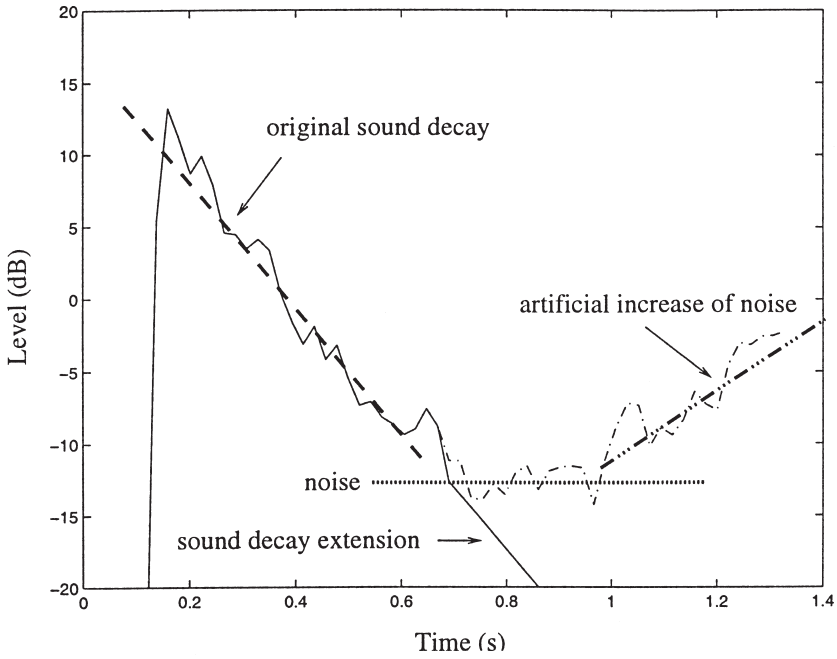


Fig. 7. Sound decay estimation and extension: –·– sound energy of the impulse response after compensation; --- estimation of the sound decay; –···– artificial increase of noise; — sound decay extension; ····· mean noise level.

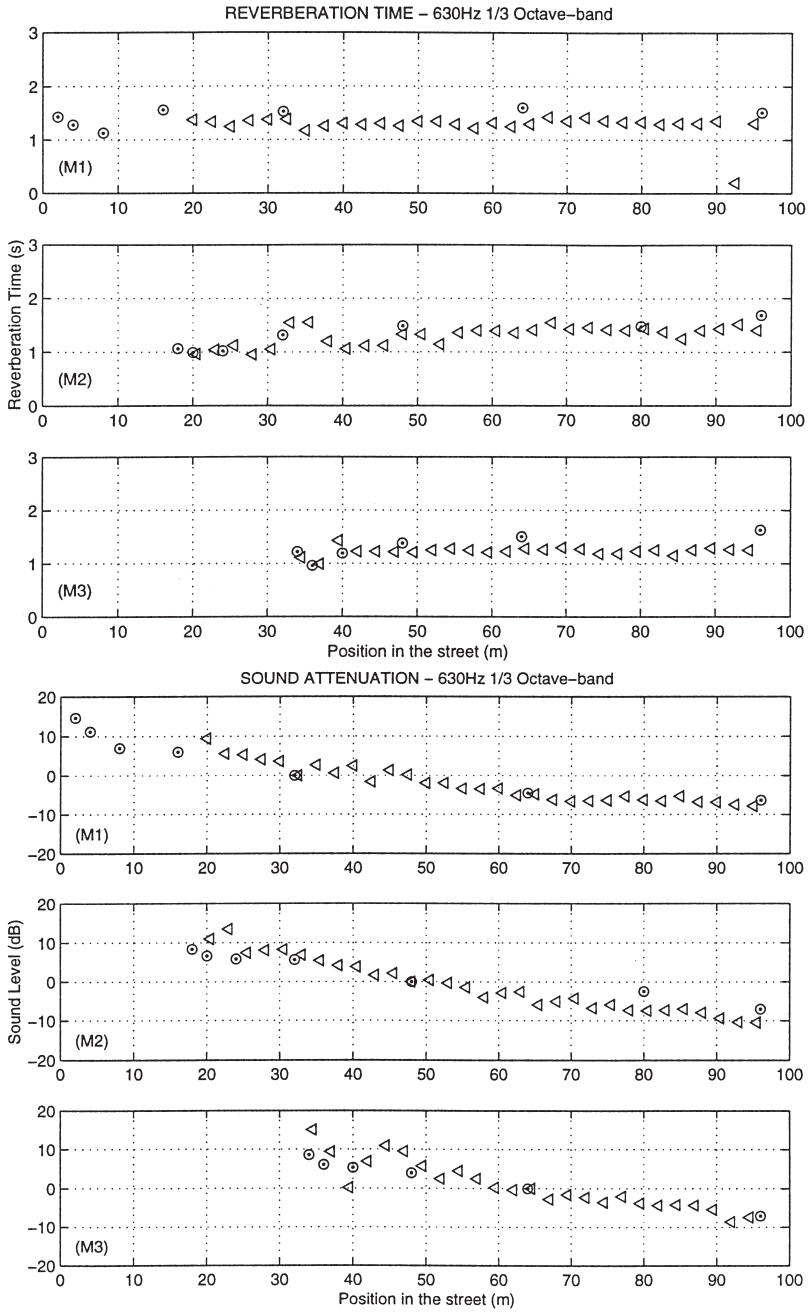


Fig. 8. Reverberation times (upper curves) and sound attenuation (lower curves) in the Orléans Street (⊙) and in the scale model (△), for the three configurations (M1), (M2) and (M3) (630 Hz 1/3 octave-band).

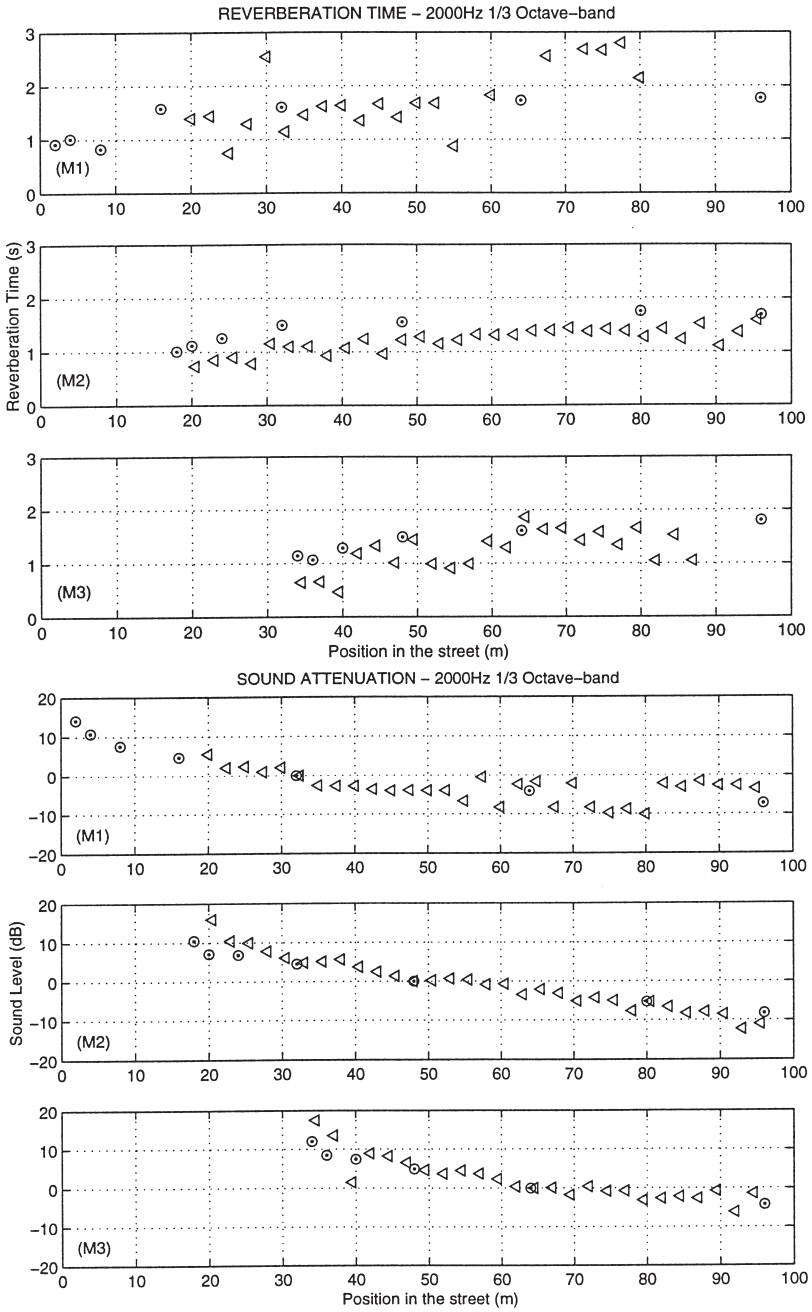


Fig. 9. Reverberation times (upper curves) and sound attenuation (lower curves) in the Orléans Street (⊙) and in the scale model (△), for the three configurations (M1), (M2) and (M3) (2000 Hz 1/3 octave-band).

The reverberation times measured in the scale model are quite in accordance with those of the Orléans street. Furthermore, reverberation times versus distance from source is preserved (see Fig. 8). Nevertheless, the value of the reverberation times is lightly underestimated in the scale model. From the 2 kHz 1/3 octave-band (Fig. 9), the estimation of reverberation times in the scale model is tricky and biased. For such frequencies and far from the source, the atmospheric attenuation is indeed great, while the sound energy of the sound source is weak. The signal being embedded in the ambiant noise (see Fig. 7), the compensation process and the extension of the sound decay can not be realized. It leads to bad results for the reverberation times but also for the sound attenuation.

Concerning the sound attenuation, a good agreement is observed. However, few discrepancies may be observed between measurements in the Orléans street and in the scale model, principally for the receivers close to the source [Fig. 8, configurations (M2) and (M3)]. For these positions (0–15 m from the source), the early reflections energy is greater than the sound energy of the diffuse sound field. In the scale model, the local conditions of reflection can not be precisely reproduced. Then, the first reflections in the scale model are modified or may sometimes disappeared. On the contrary, when the diffuse sound field (produced by the statistical disposition of the cubes in the scale model, and by the façade irregularities in the Orléans street) becomes greater than the first reflections, the results are, as expected, in accordance. Far from the sound source, the sound level measured in the scale model is underestimated [Fig. 8 configurations (M1) and (M2)].

5. Conclusion

A 1:50 scale model experiment has been proposed for the study of sound propagation in urban areas. One of the interest lies in the simple way to simulate the architectural complexity of building façades, which is the fundamental cause of the sound diffusion in streets. However, measurements in scale model with large scale factor requires tricky digital processing, linked to the compensation of excess of atmospheric attenuation in the scale model in comparison with the full scale. Moreover, this filtering produces an increase of noise at the end of the impulse response of the scale model, where the signal-to-noise ratio is weak, while the compensation of atmospheric attenuation is important. A simple solution has been investigated to extend the sound decay beyond the noise level and before the artificial increase of the sound energy.

Reverberation times and sound attenuations in the scale model have been compared with full scale measurements. A good agreement is observed for the 1/3 octave-band between 250 Hz and 2 kHz. Beyond 2 kHz, some discrepancies appear, especially because of the problem of atmospheric attenuation. The use of this scale model experiment for the study of sound propagation in urban areas, on a frequency range (250–5000 Hz) (which includes the traffic noise frequency range), requires to take a larger scale factor (e.g. 25–40) and/or a higher energy sound source.

By changing the statistical distribution of the wooden cubes, in respect with real urban architecture, it is furthermore possible to determine the effect of the

façade irregularities on the sound diffusion in streets. These works are currently in progress.

Acknowledgements

The authors wish to thank M. Alain Brunet, M. Patrick Colas, M. Eric Egon and M. Guy Tournois, of the Institute of Acoustics and Mechanics (Le Mans) for their contribution to the realization of the scale model experiment.

References

[1] Yeow KW. External reverberation observed in built-up areas. Journal of Sound and Vibration 1976;48(3):438–40.
[2] Yeow KW, Popplewell N, Mackay JFW. Method of predicting L_{eq} created by urban traffic. Journal of Sound and Vibration 1977;53(1):103–9.
[3] Steenackers P, Myncke H, Cops A. Reverberation in town streets. Acustica 1978;40:115–9.
[4] Wiener FM, Malme CI, Gogos CM. Sound propagation in urban areas. Journal of the Acoustical Society of America 1965;37(4):738–47.
[5] Delany ME, Rennie AJ, Collins KM. Scale model investigations of traffic noise propagation. Acoustics Report Ac 58. Teddington (UK): National Physical Laboratory, September 1972.
[6] Lyon RH. Role of multiple reflections and reverberation in urban noise propagation. Journal of the Acoustical Society of America 1974;55(3):493–503.
[7] Davies HG. Multiple-reflection diffuse-scattering model for noise propagation in streets. Journal of the Acoustical Society of America 1978;64(2):517–21.
[8] Mulholland KA. The prediction of traffic noise using a scale model. Applied Acoustics 1979;12:459–78.
[9] Jones HW, Stredulinsky DC, Vermeulen PJ. An experimental and theoretical study of the modelling of road traffic noise and its transmission in the urban environment. Applied Acoustics 1980;13:251–65.
[10] Donavan PR. Sound propagation in urban spaces. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1976.
[11] Melon M. Caractérisation de matériaux poreux par ultrasons basse–fréquence (20–500 kHz). PhD Thesis, Université du Maine, Le Mans, 1996.
[12] Yamashita M, Yamamoto K. Scale model experiments for the prediction of road traffic noise and the design of noise control facilities. Applied Acoustics 1990;31:185–96.
[13] Berkhout AJ, de Devries D, Boone MM. A new method to acquire impulse responses in concert hall. Journal of the Acoustical Society of America 1980;68:179–83.
[14] Alrutz H, Schroeder MR. A fast hadamard transform method for the evaluation of measurements using pseudorandom test signals. Proc 11th ICA Paris 1983;6:233–5.
[15] Maria F. Mesures acoustiques dans les maquettes: sources et récepteurs à directivité programmable. PhD Thesis, Université du Maine, Le Mans, 1996.
[16] Polack J-D, Marshall AH, Dodd G. Digital evaluation of the acoustics of small models: the MIDAS package. Journal of the Acoustical Society of America 1989;85(1):185–93.
[17] Papoulis, A. Probability, random variables and stochastic process. 3rd ed. McGraw-Hill, 1991.
[18] Grillon V. Auralisation dans les maquettes: traitement des réponses impulsionnelles. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, 1995.
[19] Bass HE, Sutherland LC, Piercy J, Evans L. Absorption of sound by the atmosphere. In: Physical Acoustics, vol. XVII, Academic Press Inc, 1984, (Chapter 3).
[20] Anon. Acoustics — Attenuation of sound during propagation outdoors — Part 1: Calculation of the absorption of sound by the atmosphere [ISO 9613-1:1993(F)]. ISO, 1993.

Annexe C

Publications traitant du modèle de diffusion en acoustique urbaine

Sound field modeling in architectural acoustics by a transport theory : application to street canyons, T. Le Pollès, J. Picaut, S. Colle, M. Bérengier, C. Bardos, *Physical Review E* **72**, article N°046609, 17 pages (octobre 2005).

Sound field modeling in a street canyon with partially diffusely reflecting boundaries by the transport theory, T. Le Pollès, J. Picaut, M. Bérengier, C. Bardos, *Journal of the Acoustical Society of America* **116**(5), pages 2969-2983 (novembre 2004).

Sound field propagation modeling in streets with a diffusion equation, J. Picaut, L. Simon, J. Hardy, *Journal of the Acoustical Society of America* **106**(5), pages 2638-2645 (novembre 1999).

Prediction of background noise in a built-up area : a periodic disposition of buildings, J. Picaut, J. Hardy, L. Simon, *Physical Review E* **60**(4), pages 4851-4859 (octobre 1999).

PHYSICAL REVIEW E **72**, 046609 (2005)

Sound-field modeling in architectural acoustics by a transport theory: Application to street canyons

Thierry Le Pollès, Judicaël Picaut,* Stéphane Colle, and Michel Bérengier
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Division Entretien, Sécurité et Acoustique des Routes, Route de Bouaye, BP 4129, 44341 Bouguenais Cedex, France

Claude Bardos
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, France
(Received 1 March 2005; published 18 October 2005)

The transport theory of sound particles is applied to the sound field modeling in architectural acoustics. A theoretical description is proposed for empty enclosures with complex boundary conditions, including both specular and diffuse reflections. As an example, the model is applied to street canyons. Therefore, an asymptotic approach is proposed to reduce the transport equation to a diffusion equation defined by only one parameter, the diffusion coefficient. This coefficient is a function of the reflection law of the building façades, the ratio of specular and diffuse reflections, as well as the street width. The model is then compared to Monte Carlo simulations of the propagation of sound particles in complex enclosures. As expected by the asymptotic approach, the model is in agreement with numerical results, but mainly for small street width and very diffuse reflections. Finally, a discussion is proposed in the conclusion, on the model's capabilities.

DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046609 PACS number(s): 43.55.+p, 43.20.+g, 05.60.Cd

I. INTRODUCTION

Sound field modeling in architectural acoustics has attracted considerable attention in the recent years. In both room acoustics and urban acoustics, several models have been derived to accurately predict the sound level and the sound decay, as well as many others acoustical parameters. The models take into account many effects, such as, specular reflection on boundaries, wall absorption, diffraction, diffusion and absorption by fitting objects, atmospheric attenuation, etc. More recently, research has been focussed on the effects of diffusely reflecting boundaries, showing that the scattering of sound by surface irregularities may have a significant influence on the sound field energy distribution and decay [1–3], as well as on the sound perception [4]. Consequently, it becomes difficult to develop a model that takes into account all the complex phenomena occurring in architectural acoustics.

Most of the time, analytical and numerical approaches based on the wave equation cannot be applied. Analytical solutions in terms of series expansions of normal modes [5–8], as well as numerical solutions based on finite and boundary elements methods [9] can only be achieved for simple enclosure shapes, uniform wall responses, and low frequencies (i.e., smaller than about one-third of the characteristic enclosure dimension) [10,11].

The classical theory of reverberation [12] widely applied in room acoustics is restricted to low absorption, quasicubic or ergodic enclosures without openings [13,14].

Standard image-source [1,2,15–17] and ray-tracing [18–22] methods are reduced to simple geometries, particularly ones that are polyhedric. By design, these methods are well adapted for specular reflections, but not for diffuse reflections. In addition, for complex shaped enclosures, the image-source and the ray-tracing methods imply extremely long calculation times, which limit the calculation of impulses responses to small order reflections. More recently, new techniques have been developed to introduce the effects of diffuse reflection in these standard methods, for instance, by combining a beam-tracing and a radiosity method [10,22–25] or by randomizing the direction of the reflected ray [26] in ray-tracing simulations. However, most of the time, the reflected energy distribution is assumed to follow Lambert's law (i.e., a cosinusoidal law), which has no physical reality [27]. Indeed, recent studies have shown that the boundary irregularities and protrusions may create complex reflection patterns, very different from Lambert's law [28].

Some statistical models have also been derived to predict the sound field in fitted rooms [29–33]. By using the concept of sound particles, and by considering a Markov or a diffusion process, authors have derived analytical expressions to predict the energy distribution in complex enclosures. However, diffuse reflections are taken into account by the same methods as discussed above.

Although several approaches may be considered to predict the sound field distribution in complex enclosures, only a few can take into account complex boundary conditions, including openings and diffuse reflections. Moreover, one can remark that each model can only be applied to one configuration. For example, investigations will be different in low halls [34], in corridors [35–37], in reverberation chambers [38,39], or in fitted rooms [40,41].

In this paper, a mathematical formulation is proposed to model the sound field encountered in architectural acoustics based on the concept of sound particles. Theoretically, all effects occurring during sound propagation (specular and diffuse reflections, absorption by walls and openings, diffusion

*Electronic address: judicael.picaut@lcpc.fr

 ©2005 The American Physical Society

by fitting objects, atmospheric attenuation, etc.) can be introduced analytically. For the moment, due to the mathematical complexity, this approach has been restricted to sound propagation in empty enclosures, with diffusely reflecting boundaries, and without atmospheric attenuation. The model is based on the concept of sound particles, particularly on the equivalence between the sound energy density and the single particle distribution function (SPDF) in a complex enclosure. Using this approach, the sound energy density in the enclosure is simply a solution of a transport equation with well-defined boundary conditions. As a first application, the model is applied to the sound propagation in a street canyon.

The concept of sound particles and the single particle distribution function are presented in Sec. II. The transport equation and the boundary equations are then derived in Sec. III, and applied to a street canyon in Sec. IV. Finally, the model is compared to Monte Carlo simulations in Sec. V.

II. SOUND PARTICLE FORMALISM

A. Energy representation of the reverberant field

The total acoustic field can be split in two parts, the direct sound field and the reverberant sound field. The direct sound field can be easily found. The reverberant sound field, which is the object of this paper, is the result of a complex energy mixing [1,42] due to multiple specular reflections, diffraction, and scattering occurring on the boundaries and in the enclosure. In the frequency range usually encounted in architectural acoustics (i.e., 100–5000 Hz), the effects of phase cancellation and addition that produce the classical interferences are averaged [43] and sound sources may be considered uncorrelated. Thus, the total energy at a receiver is equal to the sum of each energy contribution. Accordingly, a reverberant sound field can be modelled by using an energy approach. Despite neglecting the wave behavior of the sound field, energy models can provide satisfactory results such as reverberation times and sound attenuation [10].

Most of the energy models used in architectural acoustics are based on geometrical acoustic assumptions, which assume that the sound propagation may be represented by sound rays [12] propagating along straight lines between two collisions with the enclosure boundaries and the obstacles in the medium. Then, the total sound energy at a receiver located in an enclosure is calculated by summing all the sound rays crossing the receiver volume. In order to take the geometrical spreading due to the expansion of the wave fronts into account, the energy of each sound ray decreases inversely as the square of the distance from the source.

Another approach is to consider a sound ray as the path of an infinitesimal entity, named *sound particle* or *phonon* [19,44,45], with a constant energy. In this way, as discussed by Joyce [44,46], geometrical acoustics is a special case of the classical-particle dynamic. The main interest of this approach, is that the reverberant sound field may be seen as a gas of sound particles. Therefore, the classical formulation of gas theory can then be applied to acoustical problems.

B. Sound particle concept

A sound particle is defined as a classical point particle by its elementary energy e, its position $\mathbf{x}$, and its velocity $\mathbf{v}$, whose norm $\|\mathbf{v}\|$ is equal to the sound velocity c (Fig. 1). Space and velocity domains are defined, respectively, on the sets $X \in \mathbb{R}^3$ and $V \in [-c,c]\times[-c,c]\times[-c,c]$. Particle motion is characterized by its position vector $\mathbf{x}$ and its velocity vector $\mathbf{v}$,

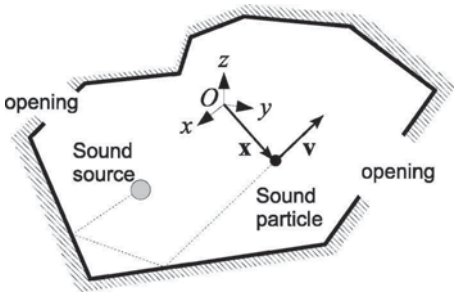


FIG. 1. Sound particle propagation in a semiopened and empty enclosure. $\mathbf{x}$ and $\mathbf{v}$ are the position and the velocity of the sound particle, respectively.

$$\mathbf{x} = (x,y,z) \quad \text{with } (x,y,z) \in X, \tag{1}$$

$$\mathbf{v} = (u,v,w) \quad \text{with } (u,v,w) \in V.$$

The boundary of the subset X is noted ∂X. It corresponds to the geometrical boundary of the propagation medium.

Interactions and collisions between particles are neglected. A phonon obeys the laws of classical mechanics based on the Hamilton stationary action principle [47] and, in this case, undergoes a straight line until its impact with the obstacles or walls of the enclosure. During a collision with a scattering object or with a surface, the velocity direction is instantaneously deflected (Fig. 1).

C. The single particle distribution function

A particular state of a system with N particles is described by $3N$ coordinates of position $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_N)$ and $3N$ coordinates of velocity $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\ldots,\mathbf{v}_N)$. This state is represented by a point in a $6N$ dimension phase space Γ [48]. If, at a given time t, it was possible to know exactly each particle position and velocity, it would be then possible to predict their position and velocity at a time $t+dt$. However, the number of sound particles being very large, the practical implementation is very difficult. As a consequence, the problem must be approached in a probabilistic way.

It is assumed that mutual particle interactions are not taken into account. Moreover, the large energy mixing due to scattering effects is sufficient to satisfy the ergodicity criterion. Hence, the description of the N particles system can be reduced to the knowledge of a fictive single particle system [49], in a six dimensional phase space μ, defined by the single particle distribution function $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ [49,50]. This function characterizes the statistical behavior of a sound particle, and

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{x}\,d\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{v} \in V, \tag{2}$$

represents the amount of particles, at time t, with velocity $\mathbf{v}$ to within about $d\mathbf{v}$, in an elementary volume $d\mathbf{x}$ located at $\mathbf{x}$ (Fig. 2).

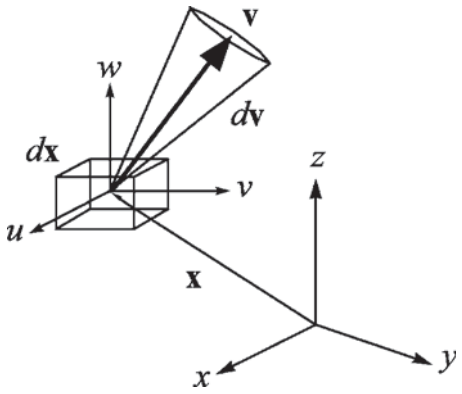


FIG. 2. Representation of $d\mathbf{x}$ and $d\mathbf{v}$.

The local density of sound particles is defined by the integration of the SPDF over the velocity space,

$$n(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{v} \in V. \tag{3}$$

The sound energy density $w(\mathbf{x},t)$ is obtained by multiplying the local density by the elementary energy of the sound particles

$$w(\mathbf{x},t) = en(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{v} \in V. \tag{4}$$

The local particle flow, which represents the number of particles crossing a unit area per unit of time at $\mathbf{x}$ and time t, is the integration over the velocity space of the product of the velocity and the SPDF, defined by

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{v} \in V. \tag{5}$$

In the same way, the local sound energy flow at $\mathbf{x}$ and time t is given by

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = e\int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{v} \in V. \tag{6}$$

III. SOUND PARTICLE TRANSPORT THEORY

A. Transport equation

Since collisions of phonons take place on the boundaries only, the spatial and the temporal evolution of the sound particle density in the enclosure is similar to the evolution of the molecular density in a rarefied gas or Knudsen gas [51]. The main equation of the model, can be derived from transport theory [49] to give

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = 0, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{v} \in V, \tag{7}$$

where $\nabla_{\mathbf{x}}$ represents the spatial derivative. This is the transport equation of free molecular flow [52], also called Liouville equation, expressing the variation of the particle density during dt according to a transport phenomenon [operator $\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}$ acting on $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$].

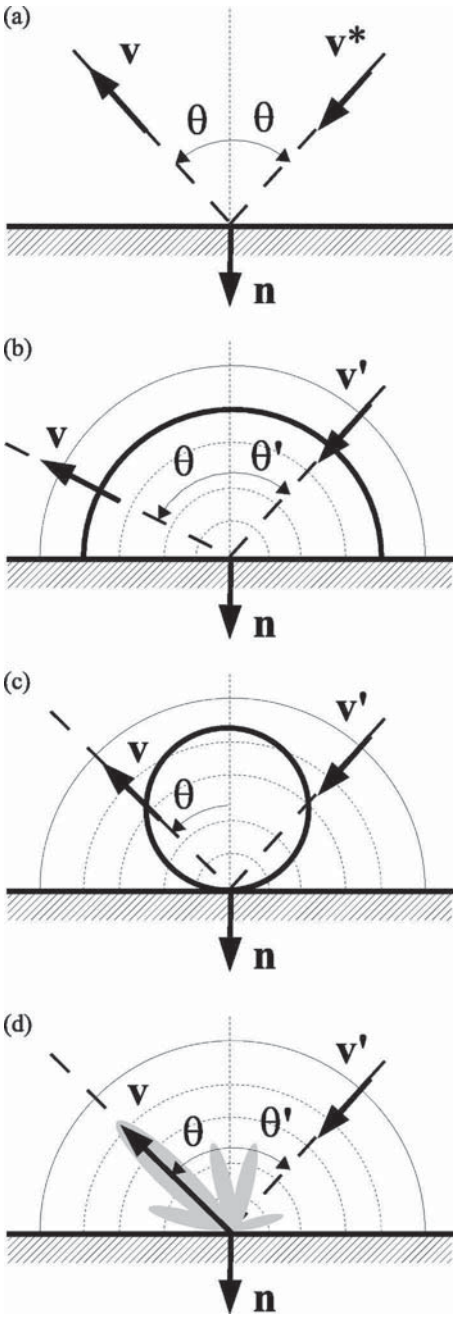


FIG. 3. Schematic representation of two-dimensional reflection laws $\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}') \equiv \mathcal{R}(\mathbf{x},\theta,\theta')$. θ and θ' are the reflected and incident angles, respectively. $\mathbf{v}$ and $\mathbf{v}'$ are the reflected and incident velocity, respectively. $\mathbf{v}^*$ is the particular incident velocity combined with a specular reflection. (a) Specular reflection ($\theta = \theta'$), (b) uniform reflection law [i.e., $\mathcal{R}(\mathbf{x},\theta,\theta')$ is constant], (c) Lambert's law [i.e., $\mathcal{R}(\mathbf{x},\theta,\theta')$ is proportional to $\cos\theta$], (d) complex reflection law. $\mathbf{n}$ is the outgoing normal to the façades.

B. Boundary conditions

Typically, surfaces have considerable irregularities due to window recesses, decorative structures, doorways, ledges, seats, columns, etc. According to the frequency and the size of wall protrusions, reflections may or may not be specular. Whenever wavelengths are much smaller than the size of

irregularities or than the dimensions of the enclosure, reflections are specular. Nevertheless, when the wavelength is of the order of wall protrusion size, scattering effects are numerous, producing a diffuse reflection. In architectural acoustics, the wide frequency range encountered implies most of the time a mix of both reflections. Moreover, wall absorption must be also considered.

First of all, it is convenient to introduce the outward unit normal $\mathbf{n}$ to the boundary in $\mathbf{x} \in \partial X$ (Fig. 3). Let us define by $\mu^{\pm}$ the points $(\mathbf{x},\mathbf{v})$ of the phase space μ that satisfy the relation

$$\mu^{\pm}:\{(\mathbf{x},\mathbf{v})/\mathbf{x} \in \partial X, 0 < \pm\, \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\}. \tag{8}$$

The restriction of f to the set μ^+ (μ^-, respectively) is noted below f^+ (f^-, respectively).

1. Wall absorption

The absorption coefficient $\alpha(\mathbf{x})$ is defined for $\mathbf{x} \in \partial X$, as the probability that a sound particle is absorbed by the boundary. It varies from 0, for total reflection, to 1 for total absorption.

2. The accommodation coefficient

In order to take both reflections into account, the accommodation coefficient $d(\mathbf{x})$ (for $\mathbf{x} \in \partial X$) can be introduced. This coefficient is representative of the boundary morphology, and expresses the part of nonspecular (i.e., diffuse) and specular reflection. By definition, it varies from 0 for a diffuse reflection, to 1 for a full specular reflection. This accommodation coefficient can be in keeping with the usual diffusion coefficient $\delta = 1 - d$, defined in room acoustics [2,9,53,54].

3. Specular reflection

The specular reflection can be considered in a deterministic way. Indeed, the knowledge of the incidence angle θ' gives the angle of reflection according to the Snell-Descartes laws. The relationship between the reflected velocity $\mathbf{v}$ and the incident velocity $\mathbf{v}^*$ of a sound particle at the boundary with normal $\mathbf{n}$ is then given by [Fig. 3(a)]

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}. \tag{9}$$

4. Diffuse reflection

As introduced above, diffuse reflections may have significant effects on the sound field decay and distribution in an enclosure. In order to take these effects into account, some authors have proposed to use the uniform reflection law [Fig. 3(b)] which distributes the sound energy in all directions with the same probability, or Lambert's law [Fig. 3(c)] favoring the normal direction. However, although both laws are used in computer models, there is no real evidence of the physical reality of these laws in architectural acoustics.

In the present approach, the scattering effects on the boundaries are modelled by considering an arbitrary reflection law $\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')$ for $\mathbf{x} \in \partial X$ [Fig. 3(d)]. This reflection law represents the probability that a sound particle with an incident velocity $\mathbf{v}'$ leaves the boundary at position $\mathbf{x} \in \partial X$ with a velocity $\mathbf{v}$ after reflection. This function is normalized to unity,

$$\int_{\Gamma^+} \mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')d\mathbf{v}' = 1, \quad \mathbf{x} \in \partial X, \quad \mathbf{v} \in V, \tag{10}$$

and must satisfy the reciprocity relation,

$$\int_{\Gamma^-} \mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')d\mathbf{v} = 1, \quad \mathbf{x} \in \partial X, \quad \mathbf{v} \in V, \tag{11}$$

which expresses the flow conservation on the boundaries. This reflection law is equivalent to the scattering kernel defined in gas theory [51,55].

5. Flow conservation at boundaries

The boundary conditions express the reflected particle flow as a function of the incident particle flow. By considering the part of specularly and diffusely reflected sound particles, the flow conservation is written

$$\underbrace{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|f^-(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}_{\text{reflected flow}} = [1-\alpha(\mathbf{x})]\Big(\underbrace{d(\mathbf{x})|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}^*|f^+(\mathbf{x},\mathbf{v}^*,t)}_{\text{incident flow: specular reflection}} + \underbrace{[1-d(\mathbf{x})]\int_{\Gamma^+}\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}'|f^+(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}'}_{\text{incident flow: diffuse reflection}}\Big), \tag{12}$$

for $\mathbf{x} \in \partial X$ and $\mathbf{v} \in \Gamma^-$. The left-hand side of Eq. (12) represents the reflected flow. The right-hand side, weighted by the reflection coefficient $[1-\alpha(\mathbf{x})]$, represents the specular flow (first term) and the diffuse flow (second term).

C. Application

The application of the transport model to a specific problem, like sound propagation in rooms or streets, requires solving the transport equation (7) with the boundary conditions defined by Eq. (12). However, presently there is still no exact analytical solution for such a system of equations, even for simple geometries. Conversely, asymptotic solutions may be found in some cases, for example, when a specific dimension is larger than the others, like in corridors, street canyons, and low halls.

Thus, the main difficulty lies first, in the choice of the assumptions that are needed to simplify the geometry of the

problem, and second, in the choice of the asymptotic approach that must be used in order to give simple and adapted solutions. In the related literature, some asymptotic approaches are proposed. In particular, one can mention the recent studies by Babovsky *et al.* [56] and Börgers *et al.* [57], applied to the diffusion approximation for a Knudsen gas in a thin domain with accommodation on the boundary. Such approaches seem well adapted to sound propagation modeling in corridors and in streets, for which the length is larger than the width or the height. As an example, an application to sound propagation in a street canyon is detailed in the next section.

IV. APPLICATION TO SOUND PROPAGATION IN A STREET CANYON

A. Introduction

Noise is a major problem for people living in urban areas. Consequently, many mathematical and numerical models have been developed to predict sound propagation in streets, using, for example, the image-source methods, the modal approaches, or the classical theory of reverberation. However, because of the complexity of the façade effects, these models are still not satisfactory. Conversely, the use of the transport model seems to be a solution for sound propagation modeling in urban areas. The study of street canyons, instead of "regular" streets, is not really a restriction. Noise occurs in strongly built-up urban areas, where the sound activity is significant, like in the city center. In such places, streets and boulevards are very numerous and buildings are very high. As a first approximation, the propagation medium can then be compared to a network of street canyons.

B. The street canyon

Let us now consider a street canyon, of width $2L$, height l_y and length l_x [Fig. 4(a)]. It is assumed that the width is smaller than the size of the building façades (i.e., $2L \ll l_y$ and $2L \ll l_x$) and, thus, the street may be characterized by an infinite length and height. In addition, recent studies have shown that typical urban vehicles, like cars and motorcycles, may be modelled as point sound sources, located a few centimeters above the ground [58]. For this reason, in the present approach, the sound source S is assumed to be on the pavement. To simplify the following developments, the sound source (defined by a sound power P) is located in the middle of the street section. The pavement is assumed to be a perfectly reflecting plane (i.e., a mirror plane). Conversely, it is assumed that the building façades produce diffuse and specular reflections. In both cases, sound absorption is assumed very low [59,60] and can be neglected.

According to the image-source theory, the pavement is a mirror plane for the sound source and the building façades. It is assumed that the sound source S and its image are merged into one virtual source S' with a sound power $2P$. Then, the problem of sound propagation in the street canyon may be compared to the propagation of sound between two infinite and parallel diffusely reflecting surfaces [Fig. 4(b)]. The transport problem is then reduced to the propagation of

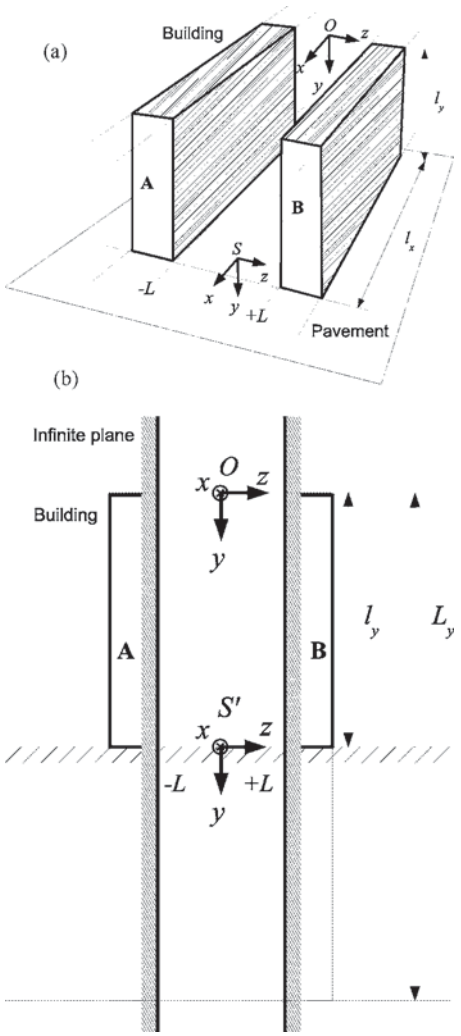


FIG. 4. Propagation medium modeling, (a) street with a sound source S standing on the ground; (b) street modeling as two infinite and parallel planes with a virtual source S'. The street width is $2L$.

sound particles in a *narrow* propagation medium, delimited by two diffusely parallel planes.

Following Sec. III B, boundary reflections on the parallel planes (i.e., the building façades) are expressed by the accommodation coefficient d and the diffuse reflection law $\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')$. Although, recent work has been carried out to characterize diffusely reflecting surfaces [61], there is still no satisfactory and accurate results. At the present time, analytical expressions of reflection laws are not available, apart from the uniform reflection law and Lambert's law. In this paper, the reflection law is considered a function of the normal component of the velocity $|w|$ (Fig. 5), and is independent of the space variable $\mathbf{x}$,

$$\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \propto |w|^k. \tag{13}$$

It may be noted that for $k=0$ and $k=1$, this expression gives the uniform reflection law and Lambert's law, respectively. The variation of the parameter k allows to change the behavior of the sound reflection from a uniform diffusion to extremely concentrated diffusion around the normal to the

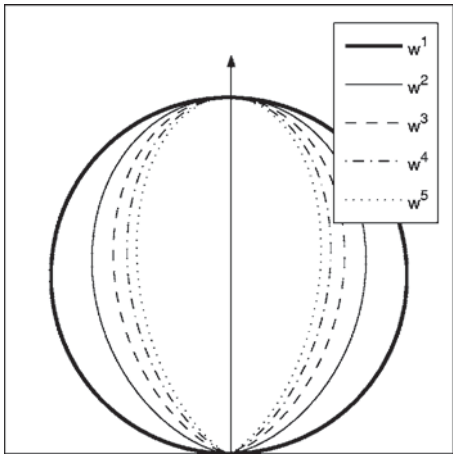


FIG. 5. Two-dimensional polar diagrams for $|w|^k$ reflection laws with $k=1, 2,\ldots,5$.

façade. Last, in this paper, the diffuse reflection law and the accommodation coefficient are assumed to be uniform and equal on both building façades.

C. Asymptotic development

The asymptotic approach detailed in this section is taken from the recent study by Börgers *et al.* [57] and is based on a diffusion approximation resulting from simple geometrical considerations. Figure 6 shows the propagation of a sound particle between two planes. At each collision with one of the planes, the direction of the velocity vector is changed. If the mean free path of the sound particle is large, this change of direction appears after a long propagation time. This is in agreement with a transport process. However, the smaller the distance between the planes, the smaller is the mean free path and faster is the change of direction. Thus, in a very narrow medium, the particle will experience more and more collisions leading to a rapid variation of the velocity vector

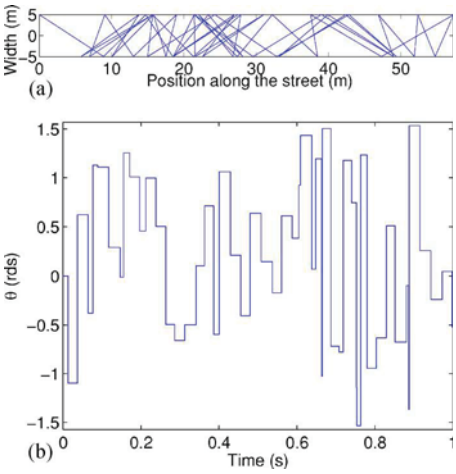


FIG. 6. (Color online) (a) 2D propagation of a single particle between two parallel planes (i.e., $z=-5$ and $z=+5$) with $2L=10$ m; (b) temporal variation of the angle θ between the plane $z=-5$ and the velocity vector.

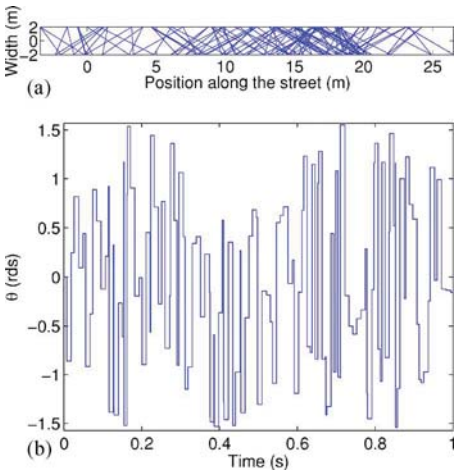


FIG. 7. (Color online) (a) 2D propagation of a single particle between two parallel planes (i.e., $z=-2$ and $z=+2$) with $2L=4$ m; (b) temporal variation of the angle θ between the plane $z=-2$ and the velocity vector.

direction (Fig. 7). This last behavior is characteristic of a diffusion process. Hence, the diffusion process may be considered as the limit of the transport process in a narrow medium. The aim of the asymptotic development is then to develop the transport equation in order to reach a diffusion equation.

1. Geometry

In this section, the asymptotical approach is developed in two dimensions in order to simplify the mathematical expressions. However, it can be easily extended to three dimensions. Finally results will be given for both cases.

In two dimensions, the problem is reduced to the propagation of sound particles between two parallel lines (Fig. 8). Mathematically, the space domain is defined on the set $Y \in \mathbb{R}^2$ subdivided in two sets X and Z such that $Y=X\times Z$, with $X\in\mathbb{R}$ and $Z\in\,]-L,L[$. The propagation of a sound particle is entirely defined by the position vector $\mathbf{x}$ and the velocity vector $\mathbf{v}$, with

$$\mathbf{x}=(x,z) \quad \text{with } x\in X, z\in Z,$$

$$\mathbf{v}=(v,w) \quad \text{with } (v,w)\in[-c,c]\times[-c,c]=V. \quad (14)$$

The boundary of the subset Z is noted ∂Z. Therefore, the boundary of the set Y noted $\partial Y=\partial Z\times X$, represents the geometrical boundaries of the propagation medium, that is the two lines at $z=+L$ and $z=-L$.

2. Change of variables

In order to reach a diffusion process, it is necessary to bring the building façades closer, or equivalently, to rescale the time variable to increase the number of collisions by unit time. This can be done by introducing a small parameter ε in the transport equation and afterwards, to study its behavior as ε tends to zero. The time variable t is then rescaled as t/ε, while the space coordinate z is expanded as εz. Letting ε

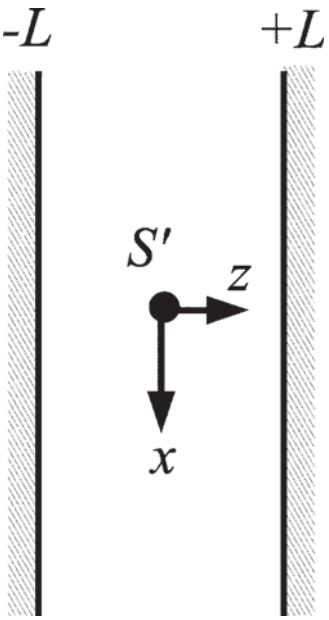


FIG. 8. Two-dimensional representation of the street, with a sound source S' located in the middle of the street.

tend to zero allows to simultaneously obtain a time expansion and a spatial reduction, leading, respectively, to a longer observation of the particle transport and to an increase in the number of collisions. The modified transport equation is now written

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} v \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} + \frac{w}{\varepsilon^2} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} = 0, \tag{15}$$

for $(x,z) \in Y$, $(v,w) \in V$ and where $f_\varepsilon(x,z,v,w,t) = f(x,\varepsilon z,v,w,t/\varepsilon)$.

The boundary conditions are unchanged, since they act on the velocity variables only, and not on z or t,

$$|w| f_\varepsilon^-(x,z,v,w,t) = d|w| f_\varepsilon^+(x,z,v^*,w^*,t) + (1-d) \times \int_{\Gamma^+} \mathcal{R}(z,\mathbf{v},\mathbf{v}') \times |w'| f_\varepsilon^+(x,z,v',w',t) dv' dw' \tag{16}$$

for $(x,z) \in \partial Y$, $\mathbf{v} \in \Gamma^-$, and where the absorption by the pavement and the building façades has been neglected. The initial condition ensures the conservation of the number of sound particles in the medium,

$$\iint f_\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t) d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} = \iint F(\mathbf{x},\mathbf{v},0) d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} = N. \tag{17}$$

3. Variable separation

Considering the last change of variables, the transport equation is now written as

$$-\varepsilon \left(\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} \right) = w \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}. \tag{18}$$

The next step of the mathematical development is to express the distribution function as the product of two functions. We consider that the function $f_\varepsilon(x,z,v,w,t)$ converges to a new function $\mathcal{F}(x,z,v,w,t)$ when ε tends to zero, such as

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\varepsilon \left(\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} w \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} \tag{19a}$$

$$= w \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F}(x,z,v,w,t) \tag{19b}$$

$$= 0. \tag{19c}$$

In Eq. (19a), variables x and t are only parameters. Thus, it is possible to realize a separation of variables and, afterwards, to express the function $\mathcal{F}(x,z,v,w,t)$ as the product of two functions,

$$\mathcal{F}(x,z,v,w,t) = q(x,t) \times \phi(z,v,w), \tag{20}$$

where $\phi(z,v,w)$ is positive, normalized to unity,

$$\iiint \phi(z,v,w) dz\, dv\, dw = 1, \tag{21}$$

and from (19a), verifies

$$w \frac{\partial}{\partial z} \phi(z,v,w) = 0. \tag{22}$$

This last result means that the particle density is constant between the planes (i.e., along the z direction). The sound particle density varies along the x direction only, according to the function $q(x,t)$. Following this approach, the sound energy in a street canyon is constant along a transversal line of the street. This is in agreement with recent experimental results [67] and justifies a common hypothesis made in most cases of sound propagation in long spaces, like corridors and streets [59].

4. The diffusion equation

As suggested before, the diffusion process is a "macroscopic" view of the particle transport problem when the number of collisions per unit of time increases. In order to reach a diffusion process, it is necessary to consider "macroscopic" variables. As an example, the average local density of sound particles may be considered. It corresponds to the integration of the distribution function over the velocity space (v,w) and the width z, and is simply equal to $q(x,t)$ [from Eqs. (20) and (21)]:

$$\iiint f_\varepsilon(x,z,v,w,t) dz\, dv\, dw = q(x,t). \tag{23}$$

In order to express the transport problem in a macroscopic view, the transport equation can be integrated in the same way, to give

$$\iiint \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} dz\ dv\ dw + \frac{1}{\varepsilon} \iiint v \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} dz\ dv\ dw = -\frac{1}{\varepsilon^2} \iiint w \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} dz\ dv\ dw. \quad (24)$$

Taking the limit of Eq. (24), as ε tends to zero, yields

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \iiint v f_\varepsilon dz\ dv\ dw = 0, \quad (25)$$

since the right-hand side is equal to zero due to the boundary conditions. To determine the second term on the left-hand side, a new function $D^*(z,v,w)$ is introduced,

$$-w \frac{\partial}{\partial z} D^*(z,v,w) = v, \quad (26)$$

where the symbol $*$ represents the conjugate of the function $D(z,v,w)$, defined by

$$w \frac{\partial}{\partial z} D(z,v,w) = v \phi(z,v,w). \quad (27)$$

This function $D(z,v,w)$ has no physical meaning, but is an essential mathematical tool, introduced to reach a diffusion equation, and later, to derive the diffusion coefficient. After some mathematical developments [56,57,62], the second term on the left-hand side of Eq. (25) may be written as

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \iiint v f_\varepsilon(x,z,v,w,t) dz\ dv\ dw = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t) \iiint D^* v \phi(z,v,w) dz\ dv\ dw. \quad (28)$$

Introducing Eq. (28) in Eq. (25), the final expression of the macroscopic transport problem gives the one-dimensional diffusion equation (for the two-dimensional problem),

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x,t) - \mathcal{K} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x,t) = 0, \quad (29)$$

with the diffusion coefficient

$$\mathcal{K} = \iiint D^*(z,v,w) v\ \phi(z,v,w) dz\ dv\ dw, \quad (30a)$$

$$= \iiint D(z,v,w) v\ dz\ dv\ dw. \quad (30b)$$

The same analytical approach applied to the three-dimensional problem leads to the two-dimensional diffusion equation,

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x,y,t) - \left(\mathcal{K}_{uu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{K}_{uv} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} + \mathcal{K}_{vu} \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} + \mathcal{K}_{vv} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) q(x,y,t) = 0, \quad (31)$$

with

$$\mathcal{K}_{uu} = \iiint D_u(z,u,v,w) u\ dz\ du\ dv\ dw, \quad (32)$$

$$\mathcal{K}_{vv} = \iiint D_v(z,u,v,w) v\ dz\ du\ dv\ dw, \quad (33)$$

$$\mathcal{K}_{uv} = \iiint D_u(z,u,v,w) v\ dz\ du\ dv\ dw, \quad (34)$$

$$\mathcal{K}_{vu} = \iiint D_v(z,u,v,w) u\ dz\ du\ dv\ dw, \quad (35)$$

where D_u and D_v are defined by

$$w \frac{\partial}{\partial z} D_u(z,u,v,w) = u\ \phi(z,u,v,w) \quad (36)$$

and

$$w \frac{\partial}{\partial z} D_v(z,u,v,w) = v\ \phi(z,u,v,w). \quad (37)$$

This asymptotic approach shows that the sound particle transport process, with complex boundaries conditions, can be reduced to a simple diffusion equation between the parallel planes, defined by only one parameter, the diffusion coefficient. From an acoustical point of view, this result suggests that the sound energy density along a street canyon with partially diffusely reflecting boundaries, is a solution of the diffusion equation. The diffuse behavior of the sound energy is then characterized by the diffusion coefficient, defined by Eq. (30a) in two dimensions (2D), or by Eqs. (32) and (35) in three dimensions (3D). This result is in agreement with previous work [63,64], but gives now a mathematical justification as well as an analytical expression for the diffusion coefficient. At this point, it is now necessary to determine the diffusion coefficient as a function of the boundary conditions. This is presented in the next paragraph.

5. The diffusion coefficient

In order to calculate the diffusion coefficient by Eq. (30a), the first step is to find the analytical expression of $\phi(z,v,w)$. Then, in the second step, an analytical expression of $D(z,v,w)$ can be given. In both cases, this requires to consider the real reflection law of the building façades defined by Eq. (13). However, the convergence of this asymptotic approach requires that k is greater than 1. As an example, the next developments are proposed for $k=2$, but the analytical expression of the diffusion coefficient can be found for any $k>1$.

a. Expression of the reflection law for $k=2$.

For $k=2$, the reflection law is written

$$\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \mathcal{A}|w|^2, \quad (38)$$

where $\mathcal{A}$ is a normalization coefficient. Introducing the polar coordinates

$$v = c \cos\theta,$$

$$w = c \sin\theta,$$

$$dv\ dw = c\ d\theta, \quad (39)$$

the normalization condition gives,

$$\int_0^\pi \mathcal{R}(\theta,\theta') c\ d\theta = \int_0^\pi \mathcal{A}\ c^2 \sin^2\theta\ c\ d\theta = 1 \quad (40)$$

leading to the expression of $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \frac{2}{\pi c^3}. \tag{41}$$

Introducing Eq. (41) in Eq. (38) gives the reflection law, in Cartesian coordinates,

$$\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \frac{2}{\pi c^3}|w|^2, \tag{42}$$

or, in polar coordinates,

$$\mathcal{R}(\theta,\theta') = \frac{2}{\pi c}\sin^2\theta. \tag{43}$$

b. Expression of $\phi(z,v,w)$.

To derive the diffusion coefficient, the function $\phi(z,v,w)$, must be expressed from the reflection laws at $z=+L$ and $-L$. In the limit where ε tends to zero, the function $\mathcal{F}$, defined by Eq. (20), must verify the boundary equation (16), leading to

$$|w|\phi^-(z,\mathbf{v})q(x,t) = d|w|\phi^+(z,\mathbf{v}^*)q(x,t) + (1-d)\int_{\Gamma^+}\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \times |w'|\phi^+(z,\mathbf{v})q(x,t)d\mathbf{v}', \tag{44}$$

where ϕ^+ (i.e., ϕ^-) is the restriction of ϕ to the set μ^+ (μ^-, respectively). Introducing Eq. (43) in Eq. (44), at both limits of the domain ($z=\pm L$), the function $\phi(z,v,w)$ must satisfy

$$\phi(L,v,w) = d\ \phi(L,v,-w) + (1 - d)\frac{2}{\pi c}|w|\int_0^\pi |\sin\theta'|\phi(L,\theta')d\theta' \tag{45}$$

at $z=+L$ (i.e., $w<0$), and

$$\phi(-L,v,w) = d\ \phi(-L,v,-w) + (1-d)\frac{2}{\pi c}|w|\int_\pi^{2\pi} |\sin\theta'| \times \phi(-L,\theta')d\theta' \tag{46}$$

at $z=-L$ (i.e., $w>0$). Moreover, since the function $\phi(z,v,w)$ is independent of the space variable z, the two last relations lead to

$$\phi(L,v,-w)_{w<0} = \phi(-L,v,w)_{w>0} \tag{47}$$

and

$$\phi(-L,v,-w)_{w>0} = \phi(L,v,w)_{w<0}. \tag{48}$$

Introducing Eqs. (47) and (48) in the boundary conditions (45) and (46), respectively, at $z=+L$ and $z=-L$, gives for $w<0$ (i.e., $\pi<\theta<2\pi$),

$$\phi(L,v,w) = d\left(d\phi(-L,v,-w) + (1-d)\frac{2}{\pi c}|w|\int_\pi^{2\pi}|\sin\theta'| \times \phi(-L,\theta')d\theta'\right) + (1-d) \times \frac{2}{\pi c}|w|\int_0^\pi |\sin\theta'|\phi(L,\theta')d\theta', \tag{49}$$

and for $w>0$ (i.e., $0<\theta<\pi$),

$$\phi(-L,v,w) = d\left(d\phi(L,v,-w) + (1-d) \times \frac{2}{\pi c}|w|\int_0^\pi |\sin\theta'|\phi(L,\theta')d\theta'\right) + (1-d)\frac{2}{\pi c}|w|\int_\pi^{2\pi}|\sin\theta'|\phi(-L,\theta')d\theta'. \tag{50}$$

In both Eqs. (49) and (50), the integrals on the right-hand side are constants. Then, the function $\phi(z,v,w)$ is only proportional to the normal velocity component $|w|$. Separating the cases $w>0$ and $w<0$, the function $\phi(z,v,w)$ can be written as

$$\phi(z,v,w) = a_+|w| \quad \text{for } w>0 \tag{51}$$

and

$$\phi(z,v,w) = a_-|w| \quad \text{for } w<0, \tag{52}$$

where a_+ and a_- are two constants, which must be calculated. By introducing Eqs. (51) and (52) in the boundary conditions (45) and (46) gives, for $w<0$,

$$a_- = d\ a_+ + a_+(1-d)\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta'd\theta', \tag{53}$$

and, for $w>0$,

$$a_+ = d\ a_- + a_-(1-d)\frac{2}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\sin^2\theta'd\theta'. \tag{54}$$

This system of equations has only one solution, leading to $a_+=a_-$. Finally, the function $\phi(z,v,w)$ can be written as

$$\phi(z,v,w) = a_+|w|. \tag{55}$$

The last equations can be generalized to $|w|^k$ reflection laws, leading to

$$\phi(z,v,w) = a_+|w|^{k-1} \quad \text{for } w>0 \tag{56}$$

and

$$\phi(z,v,w) = a_+|w|^{k-1} \quad \text{for } w<0. \tag{57}$$

The constant a_+ can be found by using the normalization condition of the function $\phi(z,v,w)$ given by Eq. (21), which can now be written (for $k=2$) as

$$\int_{-L}^{L}\left(\int_0^{\pi}|\sin\theta|d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin\theta|d\theta\right)dz=\frac{1}{c^2a_+} \tag{58}$$

leading to

$$a_+=\frac{1}{8\,L\,c^2}. \tag{59}$$

c. Expression of $D(z,v,w)$.

The second step of the calculation of the diffusion coefficient is the determination of the function $D(z,v,w)$, defined by Eq. (27) in Cartesian coordinates, or by the following relation in polar coordinates:

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}D(z,\theta)=\frac{\cos\theta}{8\,L\,c}|\sin\theta| \tag{60a}$$

$$=\mathcal{C}\cos\theta|\sin\theta|, \tag{60b}$$

with the constant parameter $\mathcal{C}=1/8\,L\,c$. By separating the two cases $w>0$ and $w<0$, Eq. (60b) gives

$$D(z,\theta)=\mathcal{C}z\cos\theta+\mathcal{A}_+(\theta),\quad \text{for } w>0 \tag{61}$$

and

$$D(z,\theta)=-\mathcal{C}z\cos\theta+\mathcal{A}_-(\theta),\quad \text{for } w<0, \tag{62}$$

where $\mathcal{A}_+(\theta)$ and $\mathcal{A}_-(\theta)$ are constants of integration. The function $D(z,\theta)$ must verify the boundary conditions

$$D^-(z,\theta)=dD^+(z,2\pi-\theta)+(1-d)\int_{\Gamma^+}\mathcal{R}(\theta,\theta')D^+(z,\theta')cd\theta', \tag{63}$$

that gives at $z=+L$ (i.e., $w<0$),

$$D(L,\theta)=dD(L,2\pi-\theta)+(1-d)\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\int_0^{\pi}D(L,\theta')d\theta', \tag{64}$$

and at $z=-L$ (i.e., $w>0$),

$$D(-L,\theta)=dD(-L,2\pi-\theta)+(1-d)\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\times\int_{\pi}^{2\pi}D(-L,\theta')d\theta'. \tag{65}$$

Introducing Eqs. (61) and (62), in the boundary conditions (64) yields for $w<0$,

$$-\mathcal{C}L\cos\theta+\mathcal{A}_-(\theta)=d[\mathcal{C}L\cos\theta+\mathcal{A}_+(\theta)]+(1-d)\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\int_0^{\pi}[\mathcal{C}L\cos\theta'+\mathcal{A}_+(\theta')]d\theta', \tag{66}$$

and gives

$$\mathcal{A}_-(\theta)=\mathcal{C}L(1+d)\cos\theta+d\mathcal{A}_+(\theta)+C_1\sin^2\theta, \tag{67}$$

where C_1 is a constant equal to

$$C_1=(1-d)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\mathcal{C}L\cos\theta'+\mathcal{A}_+(\theta')]d\theta'. \tag{68}$$

Moreover, introducing Eqs. (61) and (62), in the boundary condition (65) yields for $w>0$,

$$-\mathcal{C}L\cos\theta+\mathcal{A}_+(\theta)=d[\mathcal{C}L\cos\theta+\mathcal{A}_-(\theta)]+(1-d)\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\int_{\pi}^{2\pi}[\mathcal{C}L\cos\theta'+\mathcal{A}_-(\theta')]d\theta', \tag{69}$$

leading to

$$\mathcal{A}_+(\theta)=\mathcal{C}L(1+d)\cos\theta+d\mathcal{A}_-(\theta)+C_2\sin^2\theta, \tag{70}$$

where C_2 is a constant defined by

$$C_2=(1-d)\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}[\mathcal{C}L\cos\theta'+\mathcal{A}_-(\theta')]d\theta'. \tag{71}$$

The parameter $\mathcal{A}_+$ is found by introducing Eq. (67) in Eq. (70) for $w>0$,

$$\mathcal{A}_+(\theta)=\mathcal{C}L\frac{1+d}{1-d}\cos\theta+C_3\sin^2\theta, \tag{72}$$

where C_3 is a constant equal to

$$C_3=\frac{dC_1+C_2}{1-d^2}. \tag{73}$$

In the same way, for $w<0$,

$$\mathcal{A}_-(\theta)=\mathcal{C}L\frac{1+d}{1-d}\cos\theta+C_4\sin^2\theta, \tag{74}$$

where C_4 is a constant equal to

$$C_4=\frac{dC_2+C_1}{1-d^2}. \tag{75}$$

Thus, introducing Eq. (72) in Eq. (61) and Eq. (74) in Eq. (62), the function $D(z,\theta)$ must satisfy

$$D(z,\theta)=\mathcal{C}\left(z+L\frac{1+d}{1-d}\right)\cos\theta+C_3\sin^2\theta, \tag{76}$$

for $0<\theta<\pi$ (i.e., $w>0$), and

TABLE I. Two-dimensional (a) and three-dimensional (b) expressions of the diffusion coefficient (in m^2/s), in a street of width $2L$, for building façades defined by $|w|^k$ diffuse reflection laws. d and c are, respectively, the accommodation coefficient of the building façades and the sound velocity (in m/s).

(a)

k	Two-dimensional diffusion coefficient
$2q$ (for $q>1$)	$\pi/4^q q(2q-1)((q-1)!)^2[\Pi_{l=1}^{q-1}(2l+1)]^2K$
$2q+1$ (for $q>1$)	$q4^q/\pi(2q+1)[\Pi_{l=1}^{q-1}l/(2l+1)]^2K$

(b)

k	Three-dimensional diffusion coefficient
$k>1$	$K\cdot[k/(k^2-1)]$

$$D(z,\theta)=\mathcal{C}\left(-z+L\frac{1+d}{1-d}\right)\cos\theta+C_4\sin^2\theta, \qquad (77)$$

for $\pi<\theta<2\pi$ (i.e., $w<0$).

d. Expression of the diffusion coefficient.

The last step is the derivation of the diffusion coefficient using the relation (30a), in polar coordinates,

$$\mathcal{K}=\iint c^2\cos\theta D(z,\theta)dz\,d\theta. \qquad (78)$$

Separating the cases $0<\theta<\pi$ and $\pi<\theta<2\pi$, Eq. (78) becomes

$$\mathcal{K}=c^2\int_{-L}^{L}\int_{0}^{\pi}\cos\theta D(z,\theta)dz\,d\theta + c^2\int_{-L}^{L}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\theta D(z,\theta)dz\,d\theta. \qquad (79)$$

Introducing Eqs. (76) and (77) in Eq. (79), the diffusion coefficient for $k=2$, is written

$$\mathcal{K}=\frac{\pi}{4}\frac{1+d}{1-d}Lc=\frac{\pi}{4}K, \qquad (80)$$

with

$$K=\frac{1+d}{1-d}Lc. \qquad (81)$$

The same developments can also be derived in three dimensions, leading to $K_{uu}=K_{vv}=\mathcal{K}$ and $K_{uv}=K_{vu}=0$, due to the axisymmetry of the reflection laws. For $k=2$, the diffusion coefficient is given by

$$\mathcal{K}=\frac{2}{3}\frac{1+d}{1-d}Lc=\frac{2}{3}K. \qquad (82)$$

These expressions of the diffusion coefficient can easily be generalized to any value of $k>1$, by using the same methods. All expressions are given both in two and three dimensions in Table I.

Table I shows that the diffusion coefficient depends on the morphology of the building façades. First, in order to calculate the diffusion coefficient, the analytical form of the reflection law must be introduced. For $|w|^k$ reflection laws, Fig. 9 shows that the diffusion coefficient, decreases with k. As expected, when the reflection law concentrates the sound energy around the normal to the building façades (increasing k), the diffusion of sound energy is less important. Second, as shown by Fig. 10, K increases with the accommodation coefficient d, meaning that the diffusion of the sound energy will be faster. In other words, the sound energy is concentrated for a longer time in the street and around the sound source in the case of diffusely reflecting building façades than in the case of specular reflecting façades. Finally the diffusion coefficient also increases with the street width (Fig. 10). For small street width, the sound energy remains a longer time around the sound source.

D. Sound energy in a street canyon

The previous developments have shown that the sound energy along the median plane of the street is solution of the diffusion equation (29) in 2D or (31) in 3D, with the diffusion coefficients given in Table I. Conversely, the sound energy in a transversal line of the street (along z) is constant.

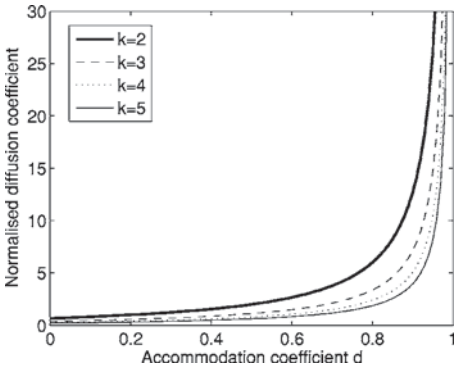


FIG. 9. Three-dimensional normalized diffusion coefficient $\mathcal{K}/Lc$ in s, from (b) of Table I, as a function of the accommodation coefficient d, and for several values of k.

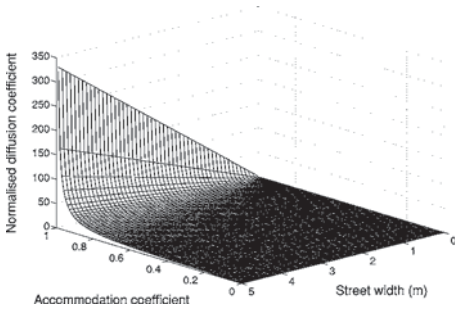


FIG. 10. Three-dimensional normalized diffusion coefficient $\mathcal{K}/c$, from (b) of Table I, as a function of the accommodation coefficient d and the street width $2L$ (for $k=2$).

1. Infinite solution

Considering an impulsive sound source between two infinite planes, the solution of the diffusion equation is then simply

$$q(x,y,t)=\frac{1}{4\ \pi\ \mathcal{K}\ t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\ \mathcal{K}\ t}\right), \tag{83}$$

which is the Green function of the diffusion equation. In this expression, the origin of the coordinates is taken at the sound source, located in the middle of the median plane.

2. Finite solution

However, in the following numerical simulations (see Sec. V) as well as in real cases, the street is not infinite. Openings at the top and both extremities of the street produce an extra attenuation, due to sound particles absorption, that must be introduced in the model. In this case, the propagation medium is not defined by two infinite planes, but is delimited by two finite planes, with a length l_x (i.e., the street length) and height $L_y=2l_y$ (twice the street height) due to the mirror plane created by the pavement (Fig. 4). Four boundary equations must be considered, one for each extremity of the propagation medium.

Since it is too difficult to take this absorption into account in the boundary conditions (12) of the transport equation, the choice was made to introduce it in the boundary conditions of the diffusion equation. As in heat transfer problems, an exchange coefficient h is introduced. It characterizes the energy exchanges between the exterior and the interior of the domain (i.e., the sound particles flow), leading to the following equations:

$$\pm\mathcal{K}\frac{\partial q(x,y,t)}{\partial x}=h\ q(x,y,t)\quad \text{for } x=0 \text{ and } l_x,\ \forall\, y, \tag{84}$$

$$\pm\mathcal{K}\frac{\partial q(x,y,t)}{\partial y}=h\ q(x,y,t)\quad \text{for } y=0 \text{ and } L_y,\ \forall\, x.$$

In the last boundary equations, the origin of the coordinates is located on top of the street [Fig. 4(a)], while the sound source is still on the pavement ($z=0$), in the middle of the street (i.e., the middle of the median plane) at $(x,y)=(l_x/2,l_y)=(l_x/2,L_y/2)$.

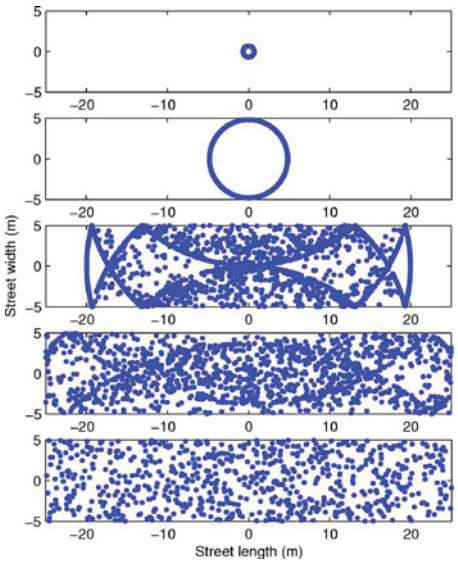


FIG. 11. (Color online) Example of two-dimensional propagation of 2000 sound particles in a street ($2L=10$ m, $|w|^2$ reflection law with $d=0.5$) after 4, 16, 60, 100 and 200 ms. The source is located in the middle of the street at position (0, 0).

a. Expression of the exchange coefficient.

The exchange coefficient h is defined by writing the flow $J(x,y,z,t)$ of sound particles leaving the propagation medium. At first, considering the definition given in Sec. II C for the transport phenomena, the sound particles flow can be written as

$$J_t(x,y,z,t)=\int_{\Gamma^+}|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|f(x,y,z,u,v,w,t)du\ dv\ dw, \tag{85}$$

for $(x,y)\in\Omega$, $\forall z$ and where $\mathbf{n}$ is the exterior normal to the street openings. Since the distribution function $f(x,y,z,u,v,w,t)$ is the product of two functions $q(x,y,t)$ and $\phi(z,u,v,w)$, the last equation (85) gives, for example, at $x=l_x$,

$$J_t=q(l_x,y,t)\int_{\Gamma^+}u\ \phi(z,u,v,w)du\ dv\ dw. \tag{86}$$

Moreover, according to the definition of the sound particle flow (84) in the diffusion behavior, it can also be written as

$$J_d=-\mathcal{K}\frac{\partial q(l_x,y,t)}{\partial x}\int_{\Gamma^+}\phi(z,u,v,w)du\ dv\ dw, \tag{87}$$

$$=h\ q(l_x,y,t)\int_{\Gamma^+}\phi(z,u,v,w)du\ dv\ dw. \tag{88}$$

Then, the diffusion behavior is in agreement with the transport phenomena, with the condition that $J_t=J_d$, leading to

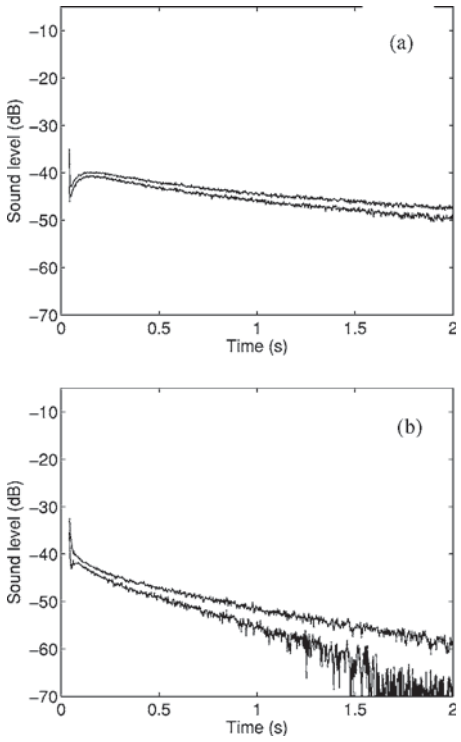


FIG. 12. Standard deviation (from the mean value) of the distribution of the sound particles along a transversal line between the two planes, for $2L=4$ m with the $|w|^2$ law, at 15 m from the sound source, and for two accommodation coefficients, (a) $d=0$ and (b) $d=0.7$.

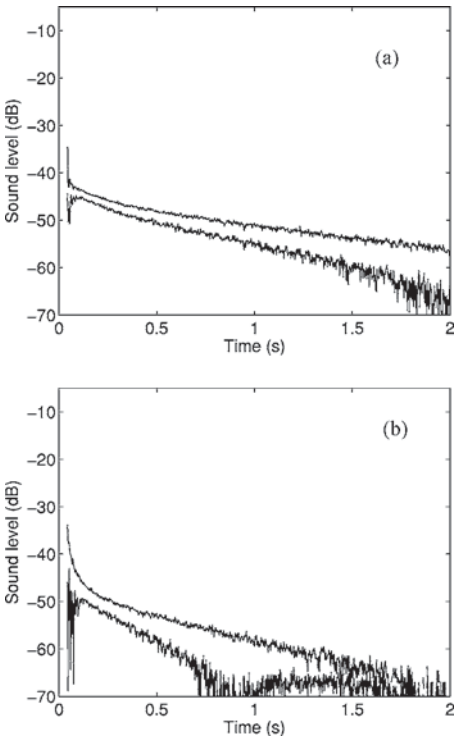


FIG. 13. Standard deviation (from the mean value) of the distribution of the sound particles along a transversal line between the two planes, for $2L=10$ m with the $|w|^2$ law, at 15 m from the sound source, and for two accommodation coefficients, (a) $d=0$ and (b) $d=0.7$.

$$q(l_x,y,t)\int_{\Gamma^+} u\ \phi(z,u,v,w)du\ dv\ dw = h\ q(l_x,y,t)\int_{\Gamma^+}\phi(z,u,v,w)du\ dv\ dw. \tag{89}$$

For a w^k reflection law, the exchange coefficient can be derived. Introducing Eq. (51) in Eq. (89), the exchange coefficient h must verify

$$h\int_{\Gamma^+}|w|^{k-1}du\ dv\ dw = \int_{\Gamma^+}u|w|^{k-1}du\ dv\ dw. \tag{90}$$

The integration of both integrals in Eq. (90) gives the following expression for the exchange coefficient:

$$h=\frac{kc}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta|\cos\theta|^{k-1}d\theta, \tag{91}$$

leading, for example, to $h=4c/3\pi$ for $k=2$, and $h=3c/8$ for $k=3$. Considering the same development at $x=0$, $y=0$, and $y=L_y$ will give the same expression for h. As expected, the expression of h is independent of the size of the extremities, but is a function of the reflection law only.

b. Finite solution of the diffusion equation.

The solution of diffusion equation for a finite medium with the boundary equations (84) is then [65],

$$q(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{u_n}\frac{b_m}{v_m}\left[u_n\cos\left(\frac{u_n x}{l_x}\right)+B_x\sin\left(\frac{u_n x}{l_x}\right)\right]\times\left[v_m\cos\left(\frac{v_m y}{L_y}\right)+B_y\sin\left(\frac{v_m y}{L_y}\right)\right]\exp\left(-\frac{u_n^2}{l_x^2}-\frac{v_m^2}{L_y^2}\mathcal{K}t\right), \tag{92}$$

where the u_n and v_m are coefficients given by solving the following equations:

$$(u_n^2-B_x^2)\tan u_n = 2B_x u_n \tag{93}$$

and

$$(v_m^2-B_y^2)\tan v_m = 2B_y v_m, \tag{94}$$

with $B_x=hl_x/\mathcal{K}$ and $B_y=hL_y/\mathcal{K}$. For a point source at $(x,y)=(l_x/2,L_y/2)$, a_n/u_n, and b_m/v_m are given by

$$\frac{a_n}{u_n}=\frac{2}{l_x}\frac{u_n\cos(u_n/2)+B_x\sin(u_n/2)}{u_n^2+B_x^2+2B_x} \tag{95}$$

and

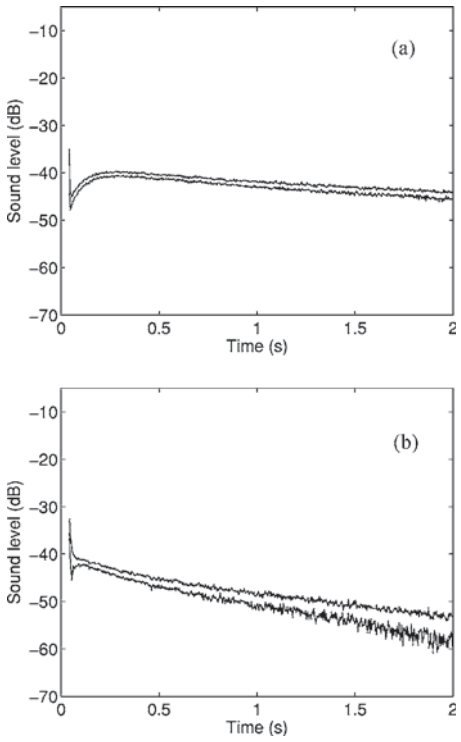


FIG. 14. Standard deviation (from the mean value) of the distribution of the sound particles along a transversal line between the two planes, for $2L=4$ m with the $|w|^4$ law, at 15 m from the sound source, and for two accommodation coefficients, (a) $d=0$ and (b) $d=0.7$.

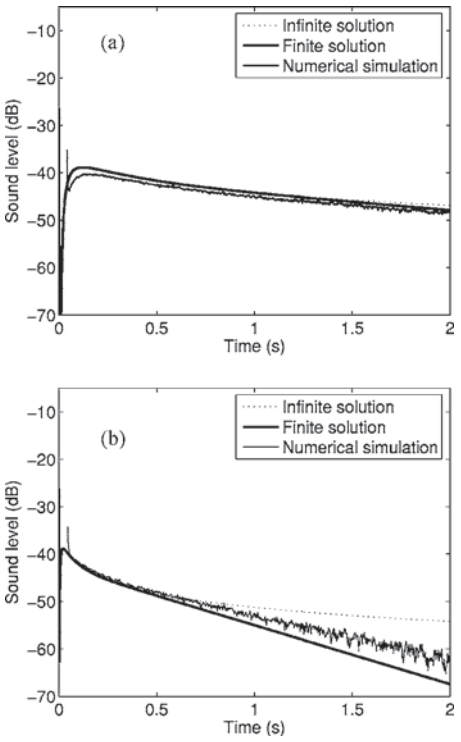


FIG. 15. Comparison between the analytical solutions and the numerical distribution of the sound particles, for $2L=4$ m with the $|w|^2$ law, at 15 m from the sound source, for two accommodation coefficients, (a) $d=0$ and (b) $d=0.7$.

$$\frac{b_m}{v_m} = \frac{2}{L_y}\frac{v_m \cos(v_m/2) + B_y \sin(v_m/2)}{v_m^2 + B_y^2 + 2B_y}. \tag{96}$$

In practice, Eqs. (93) and (94) must be numerically solved in order to determine the u_n and v_m coefficients. These coefficients are then introduced in Eqs. (95) and (96) to calculate the a_n and b_m coefficients. Finally, the finite solution of the diffusion equation is computed by considering the first elements of Eq. (92).

V. NUMERICAL VALIDATION

A. Introduction

Numerical simulations have been performed to validate the model for a street canyon. Simulations have been carried out to test the validity and the sensitivity of the asymptotic approach. Indeed, the asymptotic development has been realized for a street width tending towards zero. Thus, it is necessary to test the convergence of the solution and the limit of the asymptotic approach when the street width increases to realistic values.

B. Principle of the Monte Carlo simulations

The principle of the numerical simulation consists in following the path of sound particles between two parallel planes (as an infinite street) numerically. Each sound particle propagates in a straight line between two successive collisions with the parallel planes. At each collision, the new direction of the sound particle is found by generating a random direction in agreement with the reflection law of the building façades.

At first, considering an omnidirectional sound source located between the planes, N sound particles are emitted in random directions. This is done by generating, for each particle, two random angles, θ and φ, between 0 and 2π, and $-\pi/2$ and $\pi/2$, respectively. Then, at each sound particle collision on a plane, a first random number ξ is generated and compared to the accommodation coefficient d of the plane. If $\xi \geqslant d$, the sound particle is reflected in the specular direction. Inversely, if $\xi < d$, the sound particle is reflected with a diffuse reflection, according to the diffuse reflection law of the building façades. For the $|w|^k$ reflection law, the reflection direction is found by using the rejection method [66]. If the sound particle crosses the openings, it disappears from the simulations.

The exact position of the sound particles is calculated for each time increment Δt. A rectangular meshing $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ is carried out between the planes to follow the sound particles distribution in the medium as a function of time. The choice of N, Δt, Δx, Δy, and Δz is a compromise between the calculation time of the numerical simulations and the temporal and spatial accuracy of the results.

As an example, Fig. 11 shows the numerical results of the two-dimensional sound propagation of 2000 sound particles in a street. Similar simulations have also been realized in three-dimensional streets (i.e., between two planes).

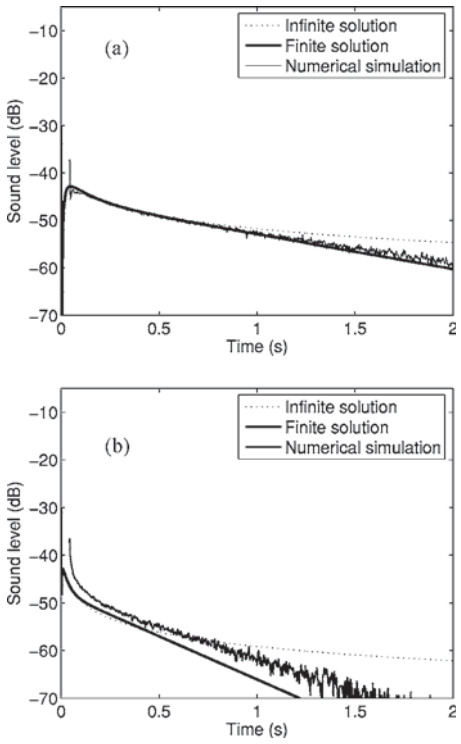


FIG. 16. Comparison between the analytical solutions and the numerical distribution of the sound particles, for $2L=10$ m with the $|w|^2$ law, at 15 m from the sound source, for two accommodation coefficients, (a) $d=0$ and (b) $d=0.7$.

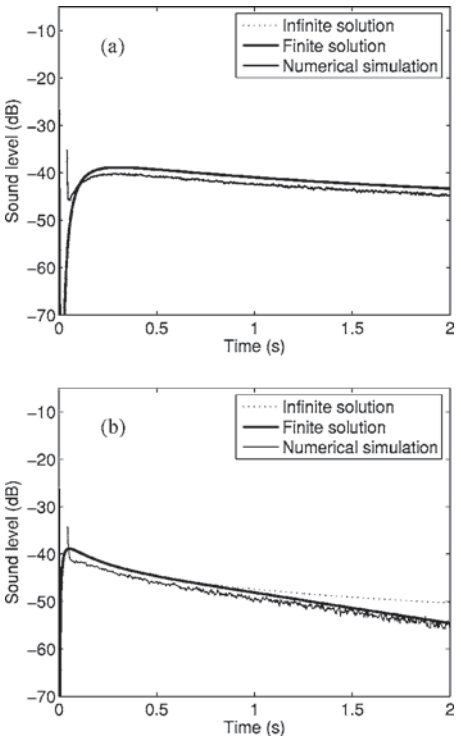


FIG. 17. Comparison between the analytical solution and the numerical distribution of the sound particles, for $2L=4$ m with the $|w|^4$ law, at 15 m from the sound source, for two accommodation coefficients, (a) $d=0$ and (b) $d=0.7$.

C. Validation

1. Uniformity along the z axis

Both in two and three dimensions, the mathematical development has shown that the distribution of sound particles along the z axis is uniform, while the distribution along the median line (2D) or plane (3D) follows a diffusion process. The first validation is then to verify this uniformity. Three-dimensional numerical simulations have been performed for several configurations of street width ($2L=4$, 7, and 10 m), reflection law ($|w|^2$ and $|w|^4$) and accommodation coefficient ($d=0$ and 0.7), using 10^6 sound particles. Since the street is modelled as two planes with a sound source in the middle of the median plane, results should be equivalent along the four semiaxis of the median plane ($\pm x$ and $\pm y$). Therefore, numerical simulations have been averaged along these semiaxes in order to avoid small numerical fluctuations and to increase the accuracy of the numerical results.

In order to evaluate the uniformity of the sound particles distribution along the z axis, the mean value $\bar{n}$ and the standard deviation σ of the number of sound particles were estimated for receivers along the z axis, at several distances from the sound source and at each time step. As an example, Fig. 12 shows the standard deviation from the mean value (i.e., $\bar{n}-\sigma$ and $\bar{n}+\sigma$) of the number of sound particles with time, for a receiver located at 15 m from the source, in a street of width $2L=4$ m with the $|w|^2$ reflection law, and for two accommodation coefficients. For $d=0$ [Fig. 12(a), i.e., reflections are fully diffuse], the standard deviation is small, suggesting that the distribution of sound particles along the z axis is in agreement with the theoretical model. When the accommodation coefficient, increases [Fig. 12(b)], reflections become more specular and the standard deviation increases principally for larger propagation time. However, numerical results are still in agreement with the model. Similar conclusions can also be given for receivers closer or further from the sound source. For larger streets (Fig. 13), the standard deviation increases. For $d=0$ [Fig. 13(a)], results are still satisfactory, whereas for $d=0.7$ [Fig. 13(b)], the distribution of sound particles becomes less uniform. As expected, the analytical model is well adapted for smaller street. Finally, one can also remark in Fig. 14 that there is more uniformity when the reflection law is more distributed around the normal to the façades.

2. Comparison with the analytical solutions

In addition, Figs. 15,16 and 17 show a comparison between both infinite and finite solutions, Eqs. (83) and (92), and the mean value of the number of sound particles with time, for a receiver located at 15 m from the source, for various street width ($2L=4$ m and $2L=10$ m) and reflection laws ($|w|^2$ and $|w|^4$), and for two accommodation coefficients ($d=0$ and $d=0.7$). As expected with the previous results, good agreement is observed between the model (particularly the finite solution) and the numerical simulations, first for small accommodation coefficients [for example, see Figs. 15(a) and 15(b)], and second when the reflection law is more concentrated around the normal to the façades (for example,

see Figs. 15 and 16). However, when the reflection is more specular [$d=0.7$ in Figs. 15(a) and 16(a), for example], the model is less in agreement. As seen in Figs. 15(a) and 16(a), the model is in better agreement with numerical values for smaller street width, as expected by the asymptotic approach. Similar conclusions can also be given for receivers closer or further from the sound source.

VI. CONCLUSION

In this paper, a general formulation based on the transport of sound particles is proposed for sound field modeling in architectural acoustics. By using this approach, the spatial and temporal evolution of the sound field in an enclosure with complex boundary conditions can be analytically expressed. For street canyons, the transport equation can be reduced to a diffusion equation, whose diffusion coefficient is defined from the street size and the reflection law of the building façades.

The analytical model has been compared to numerical simulations of sound particles propagation in street canyon, for several reflection laws of the building façades, accommodation coefficient and street width. As expected by the choice of the asymptotic approach, the model is in agreement with numerical simulations, especially for smallest street widths, and when diffuse reflections are concentrated around the normal to the building façades. However, when the street width increases or when the reflection law is close to a specular reflection, the diffusion model fails.

Moreover, the finite solution, including the sound particles absorption at the open top and both extremities of the street, gives better agreement with the numerical solution than the infinite solution. When the street width decreases and when diffuse reflections are concentrated around the normal, both infinite and finite solutions give equivalent results.

This approach is an interesting way to model the sound field in architectural acoustics, especially when the limits of the domain produce both specular and diffuse reflections. In the present model, diffuse reflections can be taken into account by considering any kind of reflection law, while most of current analytical and numerical models consider Lambert's law of reflection only. Although models with Lambert's law can give satisfactory results, recent studies seem to show that the choice of the reflection law can influence the sound attenuation and the reverberation in an enclosure or in a street [67]. Therefore, other approaches must be considered, as the one presented in this paper.

At this stage, and in order to have a more useful model, the sound absorption by the building façades, the pavement, and the openings should now be included in the approach. On the other hand, two different reflection laws on both sides of the street should be also considered. In the long term, by using this mathematical approach, many others developments can also be introduced. Thus, by considering a scattering kernel, it could be possible to take the multiple scattering by diffusers filling an enclosure into account. Meteorological effects can also be analytically included in the model. For example, wind, whose effect can be important in urban areas, could be introduced by considering a transport force in the transport equation. Atmospheric attenuation can be included by considering a new probabilistic term, which would express the probability that a sound particle may disappear during its propagation. Last, complex configurations with atmospheric turbulence could be studied by considering the coordinate dependence of the sound particle velocity in the derivation of the transport equation and in its resolution.

[1] R. H. Lyon, J. Acoust. Soc. Am. **55**, 493 (1974).
[2] M. Hodgson, J. Acoust. Soc. Am. **89**, 765 (1991).
[3] J. Kang, J. Acoust. Soc. Am. **107**, 1394 (2000).
[4] R. R. Torres, Acust. Acta Acust. **86**, 919 (2000).
[5] H. G. Davies and R. H. Lyon, J. Acoust. Soc. Am. **54**, 1565 (1973).
[6] R. Bullen and F. Fricke, J. Sound Vib. **54**, 123 (1977).
[7] R. Bullen and F. Fricke, J. Sound Vib. **46**, 33 (1976).
[8] V. Markovic, Acust. Acta Acust. **84**, 570 (1998).
[9] B. I. Dalenbäck, M. Kleiner, and P. Svensson, J. Audio Eng. Soc. **42**, 793 (1994).
[10] H. Kuttruff, *Room Acoustics* (Applied Science Publishers, London, 1973).
[11] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics* (McGraw-Hill, New York, 1968).
[12] L. Cremer and H. A. Müller, *Principle and Applications of Room Acoustics* (Applied Science Publishers, London, New York, 1982), Vol. 1.
[13] M. Hodgson, J. Acoust. Soc. Am. **84**, 253 (1988).
[14] M. Hodgson, J. Acoust. Soc. Am. **94**, 835 (1993).
[15] J. B. Allen and D. A. Berkley, J. Acoust. Soc. Am. **65**, 943 (1979).
[16] H. Juricic and F. Santon, Acustica **28**, 77 (1973).
[17] J. Borish, J. Acoust. Soc. Am. **75**, 1827 (1984).
[18] D. G. Holmes and R. H. Lyon, in *Second Interagency Symposium on University Research in Transportation Noise* (North Carolina State University, Raleigh, 1974).
[19] M. Vorländer, J. Acoust. Soc. Am. **86**, 172 (1989).
[20] A. Kulowski, Appl. Acoust. **18**, 449 (1985).
[21] A. Krokstad, S. Strom, and S. Sorsdal, J. Sound Vib. **8**, 118 (1968).
[22] T. Lewers, Appl. Acoust. **38**, 161 (1993).
[23] H. Kuttruff, Acustica **25**, 333 (1971) (in German).
[24] H. Kuttruff, Acustica **35**, 141 (1976) (in German).
[25] M. M. Carroll and R. N. Miles, J. Acoust. Soc. Am. **64**, 1424 (1978).
[26] H. Kuttruff and T. Straßen, Acustica **45**, 246 (1980) (in German).
[27] T. Hidaka, in *CIARM'95 2nd International Conference on Acoustics and Musical Research* (CIARM, Ferrara, 1995), pp. 11–22.
[28] J. J. Embrechts, D. Archambeau, and G. Stan, Acust. Acta

Acust. **87**, 482 (2001).
[29] H. Kuttruff, Acustica **18**, 131 (1967) (in German).
[30] E. A. Lindqvist, Acustica **50**, 313 (1982).
[31] E. A. Lindqvist, Appl. Acoust. **16**, 183 (1983).
[32] R. Bullen and F. Fricke, J. Sound Vib. **80**, 11 (1982).
[33] K. Li and M. Hodgson, J. Sound Vib. **218**, 463 (1998).
[34] U. J. Kurze, J. Sound Vib. **98**, 349 (1985).
[35] H. Imaizumi, S. Kunimatsu, and T. Isei, J. Acoust. Soc. Am. **108**, 632 (2000).
[36] J. Kang, Acustica **82**, 509 (1996).
[37] H. G. Davies, J. Acoust. Soc. Am. **53**, 1253 (1971).
[38] H. Kuttruff, J. Acoust. Soc. Am. **69**, 1716 (1981).
[39] H. Nélisse and J. Nicolas, J. Acoust. Soc. Am. **101**, 3517 (1997).
[40] A. M. Ondet and J. L. Barbry, J. Acoust. Soc. Am. **85**, 787 (1989).
[41] S. M. Dance, Appl. Acoust. **63**, 359 (2002).
[42] H. G. Davies, J. Acoust. Soc. Am. **64**, 517 (1978).
[43] P. R. Donavan, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1976.
[44] W. B. Joyce, J. Acoust. Soc. Am. **58**, 643 (1975).
[45] J. L. B. Coelho, Acust. Acta Acust. **86**, 903 (2000).
[46] W. B. Joyce, Phys. Rev. D **9**, 3234 (1974).
[47] L. de Broglie, *La thermodynamique de la Particule Isolée* (Gauthiers-Villars, Paris, 1964).
[48] R. Hakim, *Mécanique* (Armand Colin, Paris, 1995).
[49] M. M. R. Williams, *Mathematical Methods in Particle Transport Theory* (Butterworth, London, 1971).
[50] A. M. Weinberg and E. P. Wigner, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors* (The University of Chicago Press, Chicago, IL, 1958).
[51] H. L. Frisch, Phys. Rev. **107**, 917 (1957).
[52] I. Prigogine, *Non-Equilibrum Statistical Mechanics*, (Intersciences, New York, 1962), Vol. 1
[53] Y. W. Lam, J. Acoust. Soc. Am. **105**, 762 (1999).
[54] M. Vorländer and E. Mommertz, Appl. Acoust. **60**, 187 (2000).
[55] C. Cercignani, *Theory and Application of the Boltzmann Equation* (Academic, London, 1975).
[56] H. Babovsky, C. Bardos, and T. Platkowski, Asymptotic Anal. **3**, 265 (1991).
[57] C. Börgers, C. Greengard, and E. Thomann, SIAM J. Appl. Math. **52**, 1057 (1992).
[58] D. Gaulin, Ph.D. thesis, Université du Maine, 2000.
[59] J. Kang, Acust. Acta Acust. **88**, 77 (2002).
[60] D. Oldham and M. Radwan, Build. Acoust. **1**, 65 (1994).
[61] J. Picaut and M. Bérengier, INTERNOISE 2001, The 2001 International Congress and Exhibition on Noise Control Engineering, The Hague, Holland, August 2001.
[62] T. Le Pollès, Ph.D. thesis, Université du Maine, 2003.
[63] J. Picaut, J. Hardy, and L. Simon, Phys. Rev. E **60**, 4851 (1999).
[64] J. Picaut, J. Hardy, and L. Simon, J. Acoust. Soc. Am. **106**, 2638 (1999).
[65] J. Picaut, L. Simon, and J.-D. Polack, Appl. Acoust. **56**, 217 (1999).
[66] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Mannery, *Numerical Recipes in FORTRAN 77, the Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge 1992).
[67] J. Picaut, INTERNOISE 2004, The 33rd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, Prague, Czech Republic, August 2004.

Sound field modeling in a street canyon with partially diffusely reflecting boundaries by the transport theory

Thierry Le Pollès,[a] Judicaël Picaut,[b] and Michel Bérengier
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Section Acoustique Routière et Urbaine, Route de Bouaye, B.P. 4129, 44341 Bouguenais cedex, France

Claude Bardos
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, France

(Received 23 February 2004; revised 16 July 2004; accepted 21 July 2004)

The transport theory, applied to the concept of sound particles, seems to be well adapted to predict the sound propagation in urban areas, including most complex effects, like diffuse scattering by building facades, atmospheric attenuation, scattering by urban objects in streets, etc. In this paper, the transport theory is then applied to the sound field modeling in an empty street canyon with partially diffusely building facades. In this case, the temporal and spatial distribution of sound energy in a street is the solution of a transport equation, with mixed specular-diffuse boundary conditions. Using an asymptotic approach, the transport equation may be reduced to a diffusion equation for the sound energy, where the diffusion coefficient depends only on the building facades properties. Comparisons with experiments show that the diffusion model gives consistent results with experimental data, both for the sound attenuation level and the reverberation time. © *2004 Acoustical Society of America.* [DOI: 10.1121/1.1791720]

PACS numbers: 43.50.Vt, 43.20.Fn, 43.28.Fp, 43.50.Lj [DKW] Pages: 2969–2983

I. INTRODUCTION

Noise propagation in urban areas is a problem of major importance for people living in modern large cities and has attracted considerable attention in recent years. Consequently, many mathematical and numerical models have been derived to predict the sound propagation and reverberation time in streets, using, for example, image-source methods, modal approaches, the classical theory of reverberation, or statistical descriptions.[1] Most of mathematical models, as well as commercial software, have been developed, assuming building facades as perfectly reflecting planes, without protrusions. There are only a few models including both specular and diffuse reflections.[2,3] However, the multiple scattering of sound by surface irregularities has a large influence on the sound field energy distribution.[4,5] Moreover, most of the time, models are applied only to specific urban configurations, like suburban areas with separated buildings, street canyons, streets with intersections, etc., but cannot be generalized to all urban areas and particularly to city centers where the architectural morphology is very complex and buildings are very numerous. According to these limitations, the purpose of the present paper is to propose a general mathematical formalism, to predict the temporal and the spatial distribution of the sound field energy in urban areas, including diffuse reflections by building facades and latter, the scattering by urban objects in streets, atmospheric attenuation, wind effects.

The model is based on an application of the classical theory of particle transport applied to the concept of sound particles. The analytical approach is presented in the first part of this paper and allows describing the sound energy distribution in urban areas by a transport equation. Boundary equations are also introduced in order to take into account the diffuse reflections on building facades. In the second part, an application to a street canyon is proposed. An asymptotic approach is then presented in order to replace the transport equation with the associated boundary conditions, by a diffusion equation. All facade effects are then included in a single term, the diffusion coefficient. Moreover, in order to take into account the absorption by the openings, the pavement and the building facades, boundary conditions, consistent with the transport model, are proposed for the diffusion equation. The solution of the diffusion equation is then presented for partially diffusely reflecting boundaries according to Lambert's law and compared with measurements in a street, with good agreement, both in terms of reverberation times and sound level attenuation along the street.

II. TRANSPORT THEORY

A. Sound particle concept

By assumption, the acoustic field is split in two parts, the direct field and the reverberant field. Our study is devoted to the last one, which is the result of a large energy mixing, due to multiple specular reflections, diffraction, and scattering on boundaries and in the street. In the wide range of frequencies usually met in architectural acoustics, the effects of phase cancellation and addition are averaged, in such a way that the sound sources may be considered as noncorrelated. Consequently, a street can be characterized by its capacity to distribute and to attenuate sound energy. Thus, de-

[a]Current address: Laboratoire Ondes et Acoustique, ESPCI, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France.
[b]Corresponding author. Electronic mail: Judicael.Picaut@lcpc.fr; URL: http://www.lcpc.fr

spite neglecting the undulatory nature of the sound field, energetic models may provide satisfactory and sufficient data such as echogram, reverberation time, and sound attenuation. According to the geometrical acoustics assumptions, the sound propagation may be represented by a ray beam that represents the path of an infinitesimal entity or energy packet, named sound particle or phonon.[6–8] In this way, as mentioned by Joyce,[6] geometrical acoustics is a special case of the classical-particle dynamic. A sound particle is then defined as a classical point particle by its elementary energy e, its position $\mathbf{x}$, and its velocity $\mathbf{v}$, the norm of which is equal to the sound velocity c. Interactions and collisions between particles are neglected. The phonon obeys classical mechanics laws based on Hamilton stationary action principle and, in this case, undergoes a straight line until its impact with obstacles or building facades. During a collision with a scattering object or with a surface, the velocity direction is deflected instantaneously. This approach makes it possible to view the reverberant field as a gas of sound particles and to link the sound energy distribution to the evolution of the sound particle density. The classical formalism of gas theory can then be applied to acoustics problems: The energetic approach may be seen as an application, for acousticians, of the transport theory commonly used in statistical mechanics.

B. Single particle distribution function

A particular state of a system with N particles is described by $3N$ coordinates of positions $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_N)$ and $3N$ coordinates of velocities $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\ldots\mathbf{v}_N)$. This state is represented by a point in a $6N$-dimension phase space $\mathbb{G}$. If, at a given time t, it was possible to know each particle position and velocity, it would have been then possible to predict their position and velocity at time $t+dt$. However, the number of sound particles being very large, the practical implementation is very difficult. As a consequence, the problem must be approached in a probabilistic way. By assumption, urban areas are considered as ergodic. Hence, the description of the N particles system can be reduced to the knowledge of an artificial single particle system.[9] The phase space $\mathbb{G}$ is then reduced to a six-dimensional phase space Γ involving the three usual space and velocity coordinates $(\mathbf{x}_1,\mathbf{v}_1)$ noted afterwards $(\mathbf{x},\mathbf{v})$. Moreover, mutual particle interaction is not taken into account. The statistical behavior of a sound particle is here obtained from statistical mechanics. A probability density, named single particle distribution function $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ (SPDF), encountered in physical domains as neutron transport theory, plasma physics, and chemistry[10] is introduced.[9] It is defined as $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}$. It represents the amount of particles, at time t, with velocity $\mathbf{v}$ to within about $d\mathbf{v}$, in an elementary volume $d\mathbf{x}$ located at $\mathbf{x}$. It must satisfy the normalization condition

$$\int\int f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}=1. \tag{1}$$

The local density $n(\mathbf{x},t)$ of sound particles is then defined by the integration of the SPDF over the velocity space

$$w(\mathbf{x},t)=en(\mathbf{x},t)=e\int_V f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v} \quad \text{for } \mathbf{x}\in X, \quad \text{and } \mathbf{v}\in V. \tag{2}$$

The local flow of sound particles can be expressed by

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t)=\int_V \mathbf{v}f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v} \quad \text{for } \mathbf{x}\in X, \text{ and } \mathbf{v}\in V, \tag{3}$$

which represents the number of particles crossing an area per unit of time and surface. The energy flow can also be defined by a similar way, to give

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=e\mathbf{J}(\mathbf{x},t)=e\int_V \mathbf{v}f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v} \quad \text{for } \mathbf{x}\in X, \quad \text{and } \mathbf{v}\in V. \tag{4}$$

C. Transport equation

In this paper, scattering by urban objects in the street is neglected. Since collisions of phonons only take place on the boundaries, the evolution of the sound particle density in urban areas is similar to the evolution of the molecular density in a rarefied gas or Knudsen gas. The main equation of the model, can be derived from transport theory[9] to give directly

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}f=0 \quad \text{for } \mathbf{x}\in X, \text{ and } \mathbf{v}\in V, \tag{5}$$

where $\nabla_{\mathbf{x}}f$ represents the spatial derivation. This is the transport equation of the free molecular flow also called the Liouville equation. It describes the spatial and temporal evolution of the sound particle density and consequently of the sound field energy. This equation expresses the variation of the particle density during dt according to a transport phenomenon.

It can be noted that Eq. (5) could be generalized[9] to take into account much more phenomena, like the atmospheric attenuation, the wind effect, and the scattering by urban objects, by introducing, respectively, an absorption term σ, a strength of transport $\mathbf{F}$ and a scattering term, such as

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}f-\sigma f+\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}f = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{scattering}} \quad \text{for } \mathbf{x}\in X, \quad \text{and } \mathbf{v}\in V. \tag{6}$$

However, the present study is restricted to the simple case of empty streets, without atmospheric attenuation and without wind effects.

D. Boundary conditions

Typically, surfaces are made up of many irregularities due to window recesses, decorative structures, etc. According to the size of facade irregularities and frequency, reflections may be specular or not. Most of the time, the wide frequency range encountered implies a mix of these two kinds of reflections. First of all, it is convenient to introduce the outward unit normal $\mathbf{n}$ on the boundary. $\Gamma^{\pm}$ represents the points $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ in the phase space Γ, which satisfy the relation

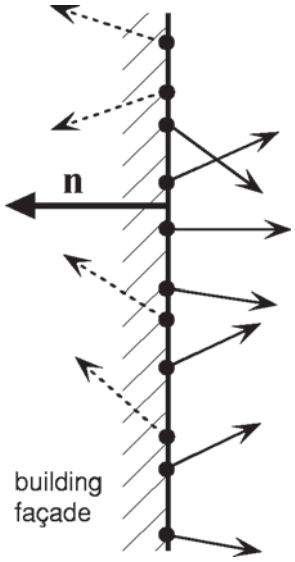


FIG. 1. Incident and reflected sound particles on a building facade. Γ^+ and Γ^- represent the incident (arrow with a dashed line) and reflected (arrow with a continuous line) sound particles on a building facade with the normal **n**.

$$\Gamma=\Gamma^+\cup\Gamma^- \quad \text{with} \quad \Gamma^\pm=\{(\mathbf{x},\mathbf{v})/\mathbf{x}\in\partial X,\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3,0<\pm\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\}. \tag{7}$$

The restriction of the SPDF to the set Γ^+ (Γ^-, respectively) is noted below f^+ (f^-, respectively). Γ^+ and Γ^- represent the incident and reflected sound particles on the building facades [Fig. 1]. When $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}>0$, the particle velocity is in the same direction as the normal to the wall: particles are incident. Inversely, when $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}<0$, particles are reflected.

1. Facade absorption

In the present approach, the wall absorption is expressed in a probabilistic way by considering the probability $\alpha(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x}\in\partial X$, that a sound particle hitting a facade at the position **x** is absorbed. In this part of the paper, the facade absorption is a function of boundary coordinates and is supposed to be independent of the incident angle, although it would be possible to take it into account. Nevertheless, it would imply an increase in the complexity of the model. This facade absorption is defined in the range [0, 1].

2. Specular and nonspecular reflections

The part of nonspecular and specular reflection is expressed by the accommodation coefficient $d(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x}\in\partial X$, from 0, for nonspecular reflection, to 1 for perfect specular reflection. This accommodation coefficient can be in relation to the diffuse-reflection coefficient[11] $\delta=1-d$, used for example, in computer modeling based on geometrical acoustics. The use of d instead of δ is more consistent with the transport theory. This parameter is representative of the boundary morphology. However, it may be noted that several works have ever been done to find its values in some practical cases of room acoustics,[11] but results are not relevant for building facades yet.

According to the definition of d, the sound reflection may be specular or not. Figure 2 shows some examples of reflection laws, where **v** is the reflected velocity, $\mathbf{v}'$ is a random incident velocity, and $\mathbf{v}^*$ is the incident velocity leading to a specular reflection in the direction of **v**. In the first case [Fig. 2a], the reflection can be considered in a deterministic way. Indeed, the knowledge of the incidence velocity $\mathbf{v}^*$ on the building facade determines the velocity **v** of the particle, after reflection, by the relation

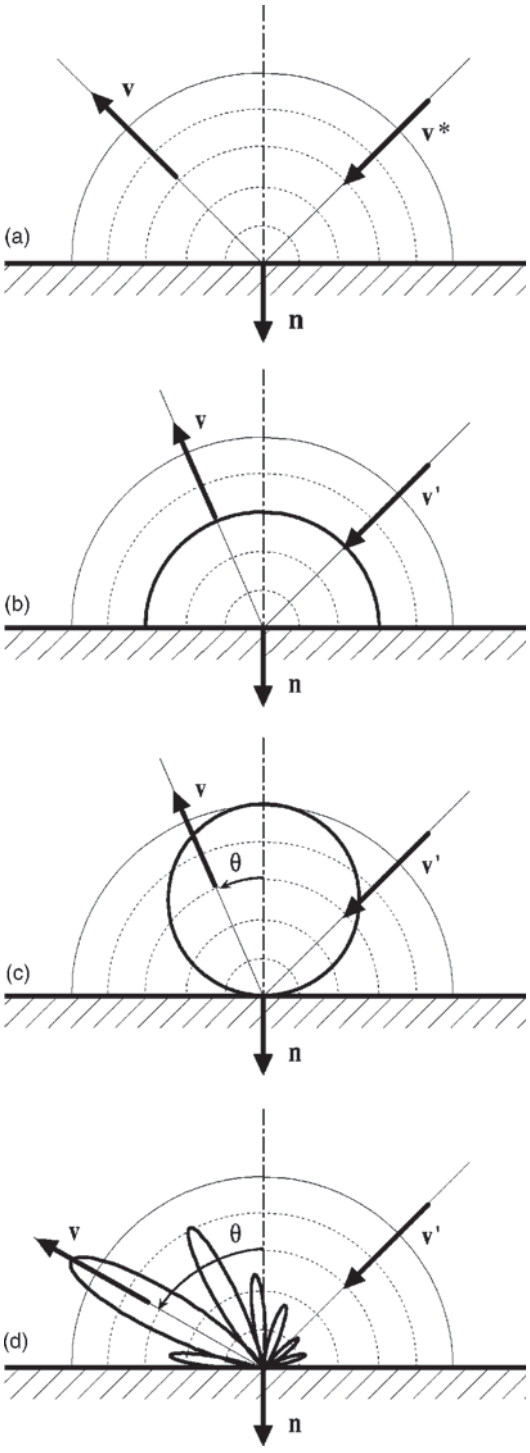


FIG. 2. Schematic representation of different reflection laws on a building facade: (a) specular reflection, (b) uniform reflection, (c) Lambert's Law ($\cos\theta$), (d) generic form $\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')$. **v** is the reflected velocity. $\mathbf{v}'$ is a random incident velocity. $\mathbf{v}^*$ is the incident velocity leading to a specular reflection in the direction of **v**.

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^*-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}^*)\mathbf{n}. \quad (8)$$

In the second case, surface reflection laws can be introduced in the model, in order to characterize the angular dependence of the scattered field during the reflection process. Hence, the effects of surface morphology are included in the analytical boundary conditions. As an example, the uniform reflection law [Fig. 2(b)] distributes in an equal way the energy whereas the Lambert's law favors the normal direction [Fig. 2(c)]. In a general way [Fig. 2(d)], the nonspecular reflection can be taken into account by considering a probabilistic approach. Thus, a positive, integrable, and smooth function $\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')$, defined on $\Gamma^{\pm}$ is introduced. This reflection law represents the probability that an incident sound particle with a velocity $\mathbf{v}'$ leaves the boundary, at position $\mathbf{x}$ after reflection, with a velocity $\mathbf{v}$. The reflection law is normalized according to the following relation:

$$\int_{\Gamma^+}\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')d\mathbf{v}'=1 \quad \text{for } \mathbf{x}\in\partial X, \text{ and } \mathbf{v}\in V, \quad (9)$$

and must satisfy the reciprocity relation which expresses the conservation of the number of particles on the boundaries[12]

$$\int_{\Gamma^-}\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')d\mathbf{v}=1 \quad \text{for } \mathbf{x}\in\partial X \text{ and } \mathbf{v}\in V. \quad (10)$$

3. Boundary equation

The boundary conditions express the flow of reflected particles as a function of the incident particle flow. By considering the part of specularly and nonspecularly reflected sound particles, the flow conservation is written

$$|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|f^-(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=(1-\alpha(\mathbf{x}))\Big[d(\mathbf{x})|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}^*|f^+(\mathbf{x},\mathbf{v}^*,t) + (1-d(\mathbf{x}))\int_{\Gamma^+}\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}')|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}'| \times f^+(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}'\Big] \text{ for } \mathbf{x}\in\partial X, \text{ and } \mathbf{v}\in\Gamma^-, \quad (11)$$

where the left member of this expression represents the reflected flow. The right member term weighted by the reflection coefficient $[1-\alpha(\mathbf{x})]$, expresses the specular flow (first term) and the nonspecular flow (second term). This approach makes it possible to take into account, in a general way, the whole physical phenomena occurring on building facades.

The sound frequency is not introduced in Eq. (11). In this model, as already discussed before, interferences are neglected. However, it can be remarked that absorption coefficients, accommodation coefficients, and reflection laws can be frequency dependent. In a practical point of view, a boundary Eq. (11), with a specific absorption, accommodation and reflection law, for each frequency band of interest can be considered. Moreover, it is also interesting to note that this general approach can also be applied in room acoustics.

Whereas the absorption coefficient may be easily measured for building facades, the choice of the accommodation coefficient and the reflection law is a more complicated problem. Although such problems have been investigated in room acoustics, for the determination of the scattering and diffusion coefficient of diffuse reflectors,[13,14] only a few studies have been carried out for building facades. Consequently, there is no available result at the present time. In a practical point of view, the choice of the accommodation coefficient is not really a problem since any values between 0 and 1 can be used. For the moment, Lambert's law can be considered for the reflection law. This already gave excellent results in the sound field modeling in room acoustics[15,16] as well in urban acoustics.[17,18] Moreover, the use of Lambert's law makes it possible to solve easily the transport equation with the above boundary conditions, for a street canyon. This is presented in the next section.

III. SOUND PROPAGATION IN A STREET CANYON WITH LAMBERT'S REFLECTION LAW

As an example, the model is applied to the sound propagation in an empty street canyon with partially diffusely reflecting surfaces characterized by Lambert's Law. In this case, the problem is completely defined by the transport Eq. (5) with the boundary conditions (11). However, nowadays, there is no exact analytical solution for such a system of equations. Although the problem could be simulated by numerical Monte Carlo algorithm, the choice was done to find an asymptotic solution.

Let us consider a street canyon, where the width is much smaller than the length and height. For mathematical reasons and in order to find an asymptotic solution, the sound absorption due to the pavement and the building facades, is neglected during this step. However, in Sec. III B 2, the absorption will be introduced by a simple way. If the sound source is located on the ground [Fig. 3(a)], the sound propagation in a street canyon is then similar to the propagation between two parallel planes [Fig. 3(b)]. If the reflection law is symmetrical with respect to the normal to the facades and does not produce grazing reflection (as Lambert's law for example), then, the problem can be solved by an asymptotic approach derived by Börgers *et al.*[19] The aim of this approach is to show that the transport equation with the appropriate boundary conditions (see Sec. III A 1) may be reduced to a diffusion equation. This result can be proved using extensive mathematical developments that are detailed in the next section. In the first step of this mathematical derivation (see Sec. III A 2), the distribution function $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=f(x,y,z,v,w,t)$ is expressed as a product of two functions $q(x,y,t)$ and $\phi(z,u,v,w)$. By considering Lambert's law at the building facade, the last function $\phi(z,u,v,w)$ can be easily calculated, leading to a constant for every z. It suggests that the sound energy is uniform in the street section. Afterward, the main problem is to determine the function $q(x,y,t)$, expressing the distribution of sound particles in a parallel plane between the building facades. That is carried out in the second step of the mathematical derivation (see Sec. III A 3). By considering the probabilistic path of a sound particle between the two planes, it makes it possible to determine the probability density function of the displacement of the sound particles, which is simply equal to $q(x,y,t)$.

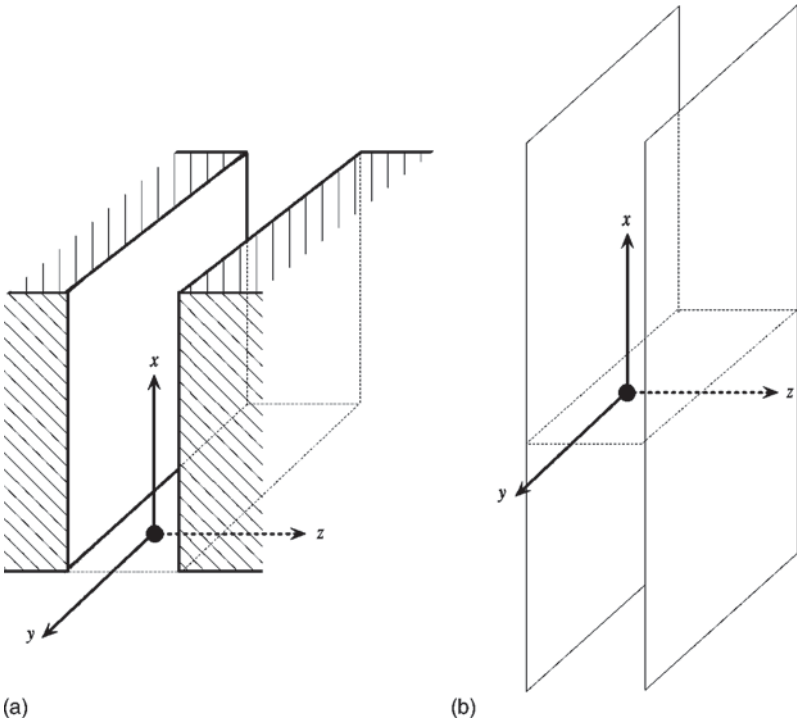


FIG. 3. Schematic representation of a street canyon with a sound source located on the pavement (a), as two parallel and infinite planes (b).

Function $q(x,y,t)$ is then solution of a diffusion equation, where the diffusion coefficient may be written as a function of the accommodation coefficient and the street width.

A. Asymptotic model

1. Geometry

Mathematically, the propagation space Y is defined by the spaces X and Z such as $Y=X\times Z$, where $X\in\mathbb{R}^2$ and $Z\in]0,h[$. The path of a sound particle in Y is defined by its position $\mathbf{x}$ and its velocity $\mathbf{v}$ normalized to the speed of sound c

$$\begin{cases} \mathbf{x}=(x,y,z) \text{ with } (x,y)\in X,\ z\in Z, \\ \mathbf{v}=(u,v,w) \text{ with } (u,v,w)\in[-c,c]\times[-c,c] \\ \quad\times[-c,c] \text{ and } u^2+v^2+w^2=c^2. \end{cases} \tag{12}$$

The boundary domain ∂Y of the space propagation Y, is simply equal to $\partial Z\times X$, where ∂Z is a surface of planes $z=0$ and $z=h$. Without sound absorption, the boundary conditions are only expressed in terms of specular and Lambert's reflections, defined, in the last case, by the equation

$$\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}')=\mathcal{A}|w|, \tag{13}$$

or, in spherical coordinates

$$\begin{cases} u=c\sin\theta\cos\varphi, \\ v=c\sin\theta\sin\varphi, \\ w=c\cos\theta, \\ du\,dv\,dw=c^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \end{cases} \tag{14}$$

by

$$\mathcal{R}(\theta,\theta')=\mathcal{A}c|\cos\theta|, \tag{15}$$

where $\mathcal{A}$ is found by considering the normalization condition (10). θ is defined between 0 and $\pi/2$ for $z=0$ and between $\pi/2$ and π for $z=h$. φ is varying from 0 to 2π. This normalization condition implies

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\mathcal{A}c^3\cos\theta\sin\theta\,d\varphi\,d\theta=\mathcal{A}\pi c^3=1, \tag{16}$$

leading to

$$\mathcal{A}=\frac{1}{\pi c^3}. \tag{17}$$

Substituting Eq. (17) in Eq. (13) yields

$$\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}')=\frac{|w|}{\pi c^3}, \tag{18}$$

or, in spherical coordinates,

$$\mathcal{R}(\theta,\theta')=\frac{|\cos\theta|}{\pi c^2}. \tag{19}$$

According to the Eq. (11) the boundary condition is simply given by

$$f^-(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=df^+(\mathbf{x},\mathbf{v}^*,t)+\frac{1-d}{\pi c^3}\int_{\Gamma^+}|w'|f^+(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)dv', \quad \text{for } \mathbf{x}\in\partial Y,\ \mathbf{v}\in\Gamma^-. \tag{20}$$

2. Asymptotic form of the distribution function

Two changes in the transport Eq. (5) are necessary to reach a diffusion approximation. First, the time t is rescaled to t/ε. Physically, this change means that long time is needed to observe a mixture of the sound particles between the planes. Second, the variable z is replaced by εz. That means that the two planes are brought closer one to the other, in order to have more changes of the sound particle velocity direction, by increasing the frequency collision on the planes. Finally, according to these changes, the aim of this

approach is to study the limit of the distribution function $f(x,y,\varepsilon z,u,v,w,t/\varepsilon)$, noted $f_\varepsilon(x,y,z,u,v,w,t)$ in the following developments, as ε tending to zero and which is solution of the transport equation

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon}u\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}v\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}+\frac{w}{\varepsilon^2}\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}=0. \tag{21}$$

By construction, the boundary conditions of $f_\varepsilon(x,y,z,u,v,w,t)$ are the same as for the distribution function $f(x,y,z,u,v,w,t)$ given at Eq. (20), since they are only applied on the particle velocity variable (u,v,w). According to Eq. (21), one can have

$$w\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}=-\varepsilon\left[\varepsilon\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}\right]. \tag{22}$$

The limit of Eq. (22) when ε tends to zero, leads to

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}=\lim_{\varepsilon\to 0}-\varepsilon\left[\varepsilon\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}\right]=0. \tag{23}$$

In this relation, variables x, y, and t appear just as parameters. To the limit, the distribution fonction $f_\varepsilon(x,y,z,u,v,w,t)$ tends to a distribution function $f(x,y,z,u,v,w,t)$, which can be expressed as the product of two functions $q(x,y,t)$ and $\phi(z,u,v,w)$, such as

$$f(x,y,z,v,w,t)=q(x,y,t)\times\phi(z,u,v,w), \tag{24}$$

where $\phi(z,u,v,w)$ is a positive function, normalized to unity

$$\int \phi(z,u,v,w)dzdudvdw=1, \tag{25}$$

and which verifies, from Eq. (23),

$$w\frac{\partial}{\partial z}\phi(z,u,v,w)=0. \tag{26}$$

The last result means that the distribution function is constant between the planes. By extension, it suggests that the sound energy in a street canyon is uniform on a street section. It may be noted that this assumption has been already used by several authors.[17,20,21] Following this asymptotic approach, an expression of $\phi(z,u,v,w)$ for Lambert's law can also be given. The introduction of Eq. (24) in the boundary Eq. (20) yields

$$\begin{aligned}|w|\phi^-(z,\mathbf{v})q(x,y,t)&=d|w|\phi^+(z,\mathbf{v}^*)q(x,y,t)+(1-d)\int_{\Gamma^+}\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}')|w'|\\&\quad\times\phi^+(z,\mathbf{v}')q(x,y,t)d\mathbf{v}',\quad \mathbf{v}\in\Gamma^-,\end{aligned} \tag{27}$$

where the notations ϕ^+ and ϕ^- are introduced to restrict the function ϕ to the sets Γ^+ Γ^-, corresponding to the incident and reflected particles at the boundary. This equation can be simplified by eliminating $q(x,y,t)$. Considering Lambert's law (18) at $z=0$ and $z=h$, Eq. (27) gives the two following boundary equations [Fig. 4]:

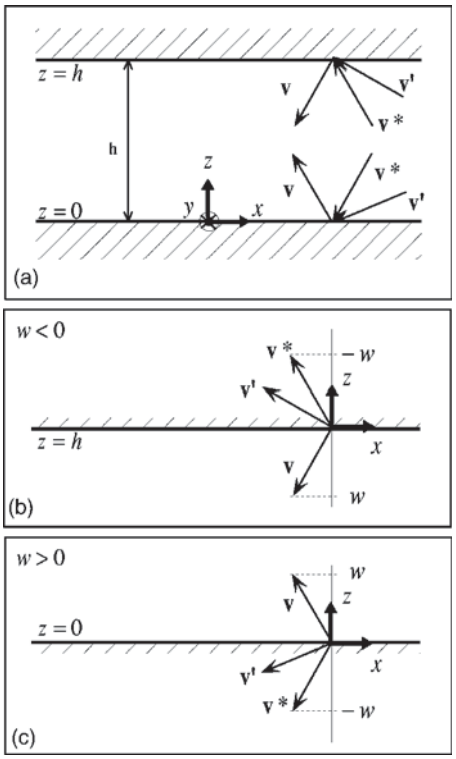


FIG. 4. Schematic representation of the reflection of a sound particle on boundaries (a). Vector projection on the z-axis for $w<0$ (b) and for $w>0$ (c). $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}^*$, and $\mathbf{v}$ are respectively the incident velocity, the specific velocity leading to specular reflection along $\mathbf{v}$, and the reflected velocity. w is the projection of $\mathbf{v}$ on the z-axis.

$$\phi(h,u,v,w)=d\phi(h,u,v,-w)+(1-d)\frac{1}{\pi c^3}\times\int|w'|\phi(h,\mathbf{v}')d\mathbf{v}'\quad\text{for } w<0, \tag{28}$$

$$\phi(0,u,v,w)=d\phi(0,u,v,-w)+(1-d)\frac{1}{\pi c^3}\times\int|w'|\phi(0,\mathbf{v}')d\mathbf{v}'\quad\text{for } w>0. \tag{29}$$

In addition, according to Eq. (26), the function $\phi(z,u,v,w)$ does not depend on z. Then, the following boundary conditions can be considered

$$\phi(h,u,v,-w)|_{w<0}=\phi(0,u,v,w)|_{w>0}, \tag{30}$$

$$\phi(0,u,v,-w)|_{w>0}=\phi(h,u,v,w)|_{w<0}. \tag{31}$$

The substitution of Eqs. (30) and (31) into the boundary Eqs. (28) and (29), gives

$$\phi(h,u,v,w)=d\left[d\phi(0,u,v,-w)+(1-d)\frac{1}{\pi c^3}\times\int|w'|\phi(0,\mathbf{v}')d\mathbf{v}'\right]+(1-d)\frac{1}{\pi c^3}\times\int|w'|\phi(h,\mathbf{v}')d\mathbf{v}'\quad\text{for } w<0, \tag{32}$$

and

$$\phi(0,u,v,w)=d\Big[d\,\phi(h,u,v,-w)+(1-d)\frac{1}{\pi c^3}\times\int|w'|\phi(h,\mathbf{v}')d\mathbf{v}'\Big]+(1-d)\frac{1}{\pi c^3}\times\int|w'|\phi(0,\mathbf{v}')d\mathbf{v}'\quad\text{for } w>0. \tag{33}$$

In Eqs. (32) and (33), the calculation of each integral gives a constant. Consequently, the last two equations may be written more simply

$$\phi(h,u,v,w)=d^2\phi(0,u,v,-w)+A\quad\text{for } w<0, \tag{34}$$

and

$$\phi(0,u,v,w)=d^2\phi(h,u,v,-w)+B\quad\text{for } w>0, \tag{35}$$

where A and B are two constants. Introducing Eq. (34) in Eq. (35), according to the sign of w, it gives

$$\phi(0,u,v,w)=d^2[\phi(0,u,v,w)+A]+B\quad\text{for } w>0, \tag{36}$$

that leads to

$$\phi(0,u,v,w)=\frac{Ad^2+B}{1-d^2}=a_-\quad\text{for } w<0, \tag{37}$$

where a_- is a constant. A similar approach can be applied at $z=h$, leading to

$$\phi(h,u,v,w)=\frac{Bd^2+A}{1-d^2}=a_+\quad\text{for } w>0, \tag{38}$$

where a_+ is also constant. In order to define a_+ and a_-, Eqs. (38) and (37) can be introduced in Eqs. (28) and (29), giving

$$a_-=da_++a_+(1-d)\frac{1}{\pi c^3}\int|w'|d\mathbf{v}'\quad\text{for } w<0, \tag{39}$$

$$a_+=da_-+a_-(1-d)\frac{1}{\pi c^3}\int|w'|d\mathbf{v}'\quad\text{for } w>0. \tag{40}$$

It can be noticed that this system of linear equations has only one solution, given by $a_+=a_-$. Finally, the constant a_+ is found by applying the condition of normalization given by Eq. (25)

$$\int\phi(z,u,v,w)dz\,du\,dv\,dw=a_+\int_0^h dz\int du\,dv\,dw=a_+4\pi hc^2=1, \tag{41}$$

that gives

$$\phi(z,u,v,w)=a_+=\frac{1}{4\pi hc^2}. \tag{42}$$

As expected, $\phi(z,u,v,w)$ only depends on the street width h. The distribution of the sound energy is inversely proportional to h.

The last work is to find $q(x,y,t)$ expressing the spatial and temporal distribution of sound particles in a plane (xOy) between the planes $z=0$ or $z=h$. Since the sound particle distribution is uniform between planes, the problem may be considered in any planes. In the next sections, an expression of the function $q(x,y,t)$ is derived by probabilistic considerations on the horizontal displacement [i.e., parallel to the (x,y) plane] of a sound particle between the two main planes. The main idea is to break up the trajectory of a particle between the planes (Fig. 5), in two types of elementary path: one corresponding to two successive Lambert's collisions with the plane (path AB in Fig. 5 for example) and a second corresponding to two Lambert's collisions including n specular reflections (paths BG and GI in Fig. 5, with 4 and 1 specular reflections, respectively). All the sound particles trajectories can be described by a succession of elementary paths, each one defined by the distribution of distance of propagation, and by the flight time between two Lambert's reflections, without and with specular reflections. Then, by applying the central limit theorem, the distribution of distance of propagation for any sound particle trajectory between the planes [i.e., $q(x,y,t)$] may be determined. This development is detailed in the next sections.

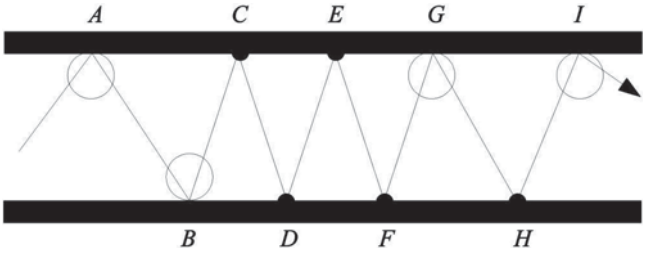


FIG. 5. Two-dimensional path of a sound particle between two planes, with Lambert's reflections (○) and specular reflections (●).

3. Path of a sound particle between two successive Lambert's reflections

a. Distribution of the horizontal distance of propagation. Let us assume that the initial reflection of a sound particle at $(x,y)=(0,0)$ is defined by a Lambert's reflection. The sound velocity, after reflection, is then distributed over the half-space $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$, at $z=0$, or over the half-space $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-$, at $z=h$, according to Lambert's Law, by the density probability (18). After this first reflection, the sound particle is propagating along a straight line, between the two planes. The distance of propagation is then depending on the sound velocity w [Fig. 6]. Mathematically, the projection in the

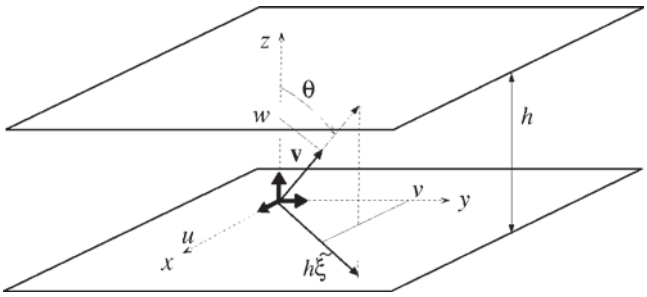


FIG. 6. Sound particle displacement from the plane $z=0$ to the plane $z=h$. The projection of the distance of propagation, in the (xOy) plane, is noted $h\tilde{\xi}$. $\mathbf{v}=(u,v,w)$ is the reflected velocity.

plane (xOy) of the propagation distance between the facades, can be written as $h\tilde{\xi}$, where $\tilde{\xi}$ is a random variable, given by

$$\tilde{\xi}=\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{|w|}=\frac{\sqrt{c^2-w^2}}{|w|}. \tag{43}$$

According to the probability theory,[22] the associated repartition function for $\tilde{\xi}$ is given by

$$P(|h\tilde{\xi}|\leqslant hr)=P(|\tilde{\xi}|\leqslant r)$$
$$=\int_{\sqrt{c^2-w^2}/r}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}')du\,dv\,dw, \tag{44}$$

for $r>0$, which can be easily calculated in spherical coordinates:

$$P(|\tilde{\xi}|\leqslant r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\arctan(r)}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right]d\varphi$$
$$=\frac{r^2}{1+r^2}. \tag{45}$$

By definition, the probability density is found by deriving the repartition function. Derivation of Eq. (45) leads to

$$\tilde{G}(r)=\frac{2r}{(1+r^2)^2}. \tag{46}$$

Thus, the distribution of the horizontal distance of propagation after a Lambert's reflection, is given by

$$h\tilde{G}(r)=h\frac{2r}{(1+r^2)^2}. \tag{47}$$

b. Flight time of propagation between two collisions. Following the same method, the fight time of propagation between two collisions (after a Lambert's reflection) can be easily calculated. Considering a sound particle leaving, for example, the plane at $z=0$, with a sound velocity $\mathbf{v}=(u,v,w)$, it will takes a time

$$h\tilde{\tau}=\frac{h}{|w|}, \tag{48}$$

for hitting the opposite plane, where $\tilde{\tau}$ is a random variable. The flight time of propagation between two collisions is found by calculating the first moment of $h\tilde{\tau}$, noted $\mathbb{E}(h\tilde{\tau})$, given by, for Lambert's Law

$$\mathbb{E}(h\tilde{\tau})=h\mathbb{E}(\tilde{\tau})=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{|w|}\mathcal{R}(\mathbf{v},\mathbf{v}')du\,dv\,dw. \tag{49}$$

In spherical coordinates, Eq. (49) leads to

$$h\mathbb{E}(\tilde{\tau})=\frac{h}{\pi c}\int_0^{\pi/2}\tan\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{2h}{c}. \tag{50}$$

4. Path of a sound particle between two Lambert's reflections, including n specular reflections

a. Distribution of the distance of propagation. Let us consider a sound particle, submitted to n specular reflections between two Lambert's reflections. According to the specular reflection properties, the reflection angle and the incident angle are equal after each specular reflection. The distribution of the distance of propagation between n successive specular reflections is then defined by the probability (46), corresponding to the propagation after the first Lambert's reflection.

Using the definition of the accommodation coefficient d, the probability $P(n=k)$ that $n=k$ specular reflections occur between two successive Lambert's reflections, is equal to the probability d^k (corresponding to k specular reflections) times the probability $(1-d)$ that the last reflection is a Lambert's reflection

$$P(n=k)=(1-d)d^k. \tag{51}$$

As suggested above, the distance between two successive reflections is equal to the first distance of propagation. Then, the total distance of propagation, corresponding to n specular reflections between two Lambert's reflections is equal to $h\xi=h(1+n)\tilde{\xi}$, where ξ is a random variable. The probability that $|h\xi|<hr$ is then given by

$$P(|\xi|<r)=P[(1+n)|\tilde{\xi}|\leqslant r]. \tag{52}$$

The two random variables $\tilde{\xi}$ and n being independent, this last relation can be simplified as follows:

$$P(|\xi|<r)=\sum_{k=1}^{+\infty}P[(1+n)=k,k|\tilde{\xi}|\leqslant r],$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}P[(1+n)=k]\times P(k|\tilde{\xi}|\leqslant r),$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}P[(1+n)=k]\times P(|\tilde{\xi}|\leqslant r/k),$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-d)d^{k-1}\int_0^{r/k}\tilde{G}(s)ds. \tag{53}$$

The probability density associated to the horizontal distribution of propagation, and corresponding to n specular reflections between two Lambert's reflections is then equal to

$$G(r)=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-d)d^{k-1}\frac{1}{k}\tilde{G}\left(\frac{r}{k}\right). \tag{54}$$

b. Flight time of propagation. By definition, the flight time corresponding to n specular reflections between two Lambert's reflections, is equal to the first moment of $h\tau=h(1+n)\tilde{\tau}$ (see Sec. III A 3 *b*), then by

$$\mathbb{E}(h\tau)=h\mathbb{E}[(1+n)\tilde{\tau}]. \tag{55}$$

The two random variables τ and n being independent, this last relation can be simplified to give

$$\mathbb{E}(h\tau)=\mathbb{E}(1+n)\times h\mathbb{E}(\tilde{\tau}). \tag{56}$$

The last term of the right member of this equation is given at Eq. (50). The first term is simply the first moment of the probability density (51), which can be easily calculated. Finally, the corresponding flight time is given by

$$\mathbb{E}(h\tau)=\frac{1}{1-d}\times\frac{2h}{c}. \tag{57}$$

5. Application of the central limit theorem

With the knowledge of the probability distributions of the horizontal displacements between Lambert's reflections (including 0, 1 or more specular reflections), the objective of this last part is to determine the distribution of the sum of these random variables, corresponding to the propagation of a sound particle including multiple successive Lambert's reflections, with and without specular reflections.

Let us denote S_k the sum of realizations ξ_i of the independent random variables ξ, by

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}\xi_i. \tag{58}$$

With this definition, a sound particle leaving one of the two planes at $(x,y)=(0,0)$, and which will realize k Lambert's reflections, will travel a horizontal distance hS_k. If the second moments of ξ were finite, then the central limit theorem for random variables of finite variance would imply that hS_k converges, in distribution, to a normal distribution. In order to evaluate this convergence, the method consists in finding an asymptotic expansion of the characteristic function $\varphi(h\lambda)$ of the random variable hS_k

$$\varphi(h\lambda)=\mathbb{E}[\exp(i\lambda hS_k)]. \tag{59}$$

- The first step is to investigate the characteristic function $\tilde{\phi}(\lambda)$ of $\tilde{\xi}$, which is given (by definition) by

$$\tilde{\phi}(h\lambda)=\mathbb{E}[\exp(i\lambda\tilde{\xi})]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\tilde{G}(r)\exp[i|\lambda|r\cos\theta]d\theta\,dr. \tag{60}$$

  Then, the asymptotic approach detailed by Börgers *et al.*[19] gives

$$\tilde{\phi}(\lambda)=1+\frac{|\lambda|^2}{2}\log|\lambda|+O(|\lambda|^2). \tag{61}$$

- The second step is to find an appropriate expansion for the characteristic function $\phi(\lambda)$ of ξ. Using Eq. (61), $\phi(\lambda)$ is given by

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}G(r)\exp[i|\lambda|r\cos\theta]d\theta\,dr,\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-d)d^{k-1}\frac{1}{k}\tilde{G}\left(\frac{r}{k}\right)\\&\quad\times\exp[i|\lambda|r\cos\theta]d\theta\,dr,\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-d)d^{k-1}\tilde{\phi}(\lambda),\\&=1+\frac{1+d}{2(1-d)^2}|\lambda|^2\log|\lambda|+O(|\lambda|^2).\end{aligned} \tag{62}$$

- The last step is to write the characteristic function $\varphi(h\lambda)$ of the random variable hS_k. The independence of the random variable ξ_i, leads to

$$\begin{aligned}\varphi(h\lambda)&=\mathbb{E}[\exp(i\lambda hS_k)],\\&=\{\mathbb{E}[\exp(i\lambda h\xi)]\}^k,\\&=[\phi(h\lambda)]^k,\\&=\left[1+\frac{1+d}{2(1-d)^2}|\lambda|^2h^2\log|\lambda|h+O(h^2)\right]^k.\end{aligned} \tag{63}$$

According to the central limit theorem,[19] k should be about $O(1/h^2\log h^{-1})$ in order for the hS_k to converge to a normal distribution. A timescale can now be deduced in such a way that the number of flight segments over the appropriate scaled time interval is of this order in h. For real $t>0$, let us define

$$m_h(t)=\left[\frac{t}{h\mathbb{E}(\tau)}\right]=\left[\frac{(1-d)c}{2h}t\right], \tag{64}$$

where $[a]$ denotes the largest integer less than or equal to a. Let us define, for a time $t>0$

$$t=\frac{t_h}{h\log(1/h)}. \tag{65}$$

Substituting t by Eq. (65) in Eq. (64), one can remark that $k=m_h(t_h)$ is about $O(1/h^2\log h^{-1})$. Finally, according to the central limit theorem, to the limit of h tending to 0, hS_k converges to a normal distribution, such as

$$\varphi(h\lambda)=[\phi(h\lambda)]^{m_h(t_h)}\rightarrow\exp\left(-\sigma^2t\frac{|\lambda|^2}{2}\right), \tag{66}$$

with

$$\sigma^2=\frac{(1+d)}{(1-d)}\frac{c}{2}. \tag{67}$$

This last equation expresses that the limit of the $\varphi(h\lambda)$ is the characteristic function of a two-dimensional, normally distributed, random variable with covariance $t\sigma^2$ and whose probability density function $G(x,y,t)$ is defined by

$$G(x,y,t)=\frac{1}{2\pi t\sigma^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2t\sigma^2}\right]. \tag{68}$$

The probability density G describes the spatial and temporal distribution of sound particles in the horizontal plane $z=0$, and is equal, by construction, to the function $q(x,y,t)$. Moreover, by definition, Eq. (68) is solution of the following diffusion equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x,y,t)-\mathcal{K}\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,y,t)-\mathcal{K}\frac{\partial^2}{\partial y^2}q(x,y,t)=0, \tag{69}$$

where $\mathcal{K}$ is defined as the diffusion coefficient, by

$$\mathcal{K}=h\frac{\sigma^2}{2}=\frac{(1+d)}{(1-d)}\frac{hc}{4}. \tag{70}$$

This result shows that the sound particles displacement between the planes may be approached by a diffusion process. By analogy, it means that the sound field between the planes is also a solution of a diffusion equation defined by only one parameter, the diffusion coefficient. This coefficient expresses the diffuse behavior of the boundaries by including

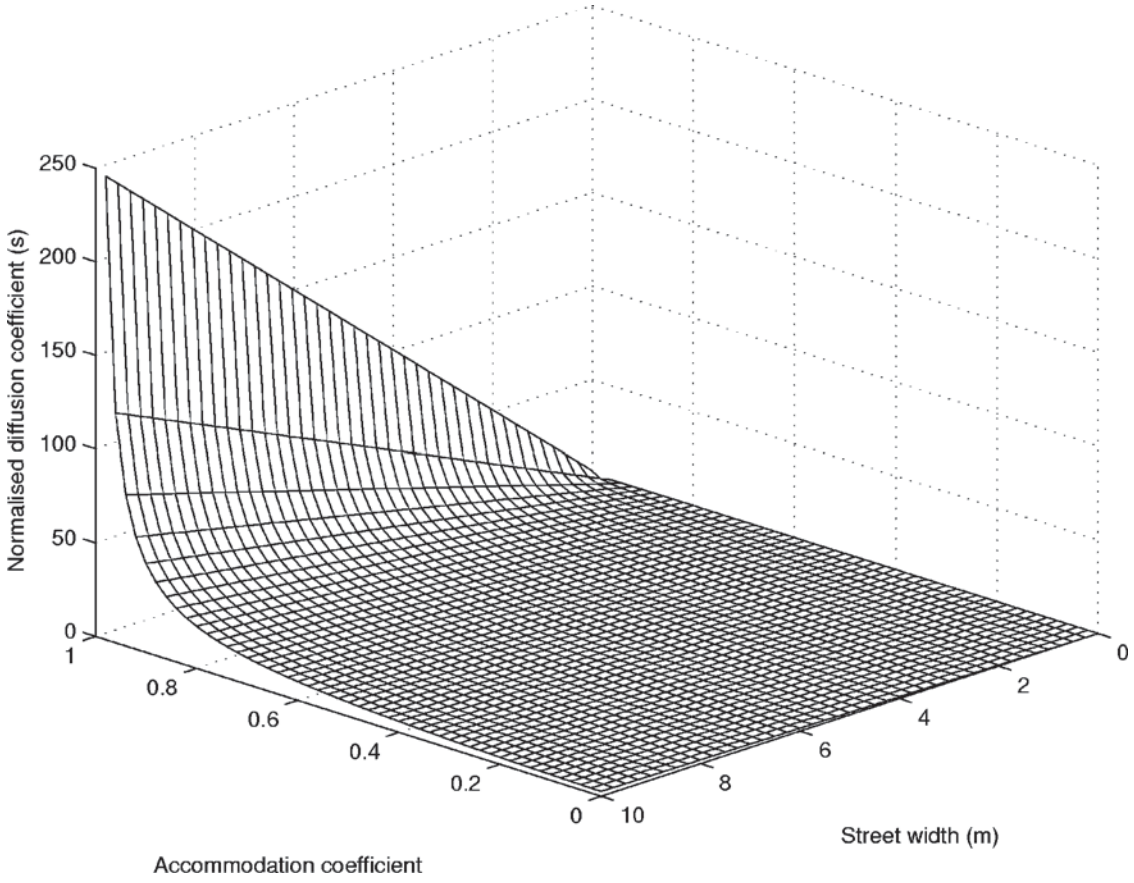


FIG. 7. Variation of the normalized diffusion coefficient $\mathcal{K}/c$ with the street width and the accommodation coefficient.

the part of diffuse and specular reflections through the accommodation coefficient d. According to Eq. (70), the diffusion coefficient $\mathcal{K}$ decreases with d, which means that the energy of the sound field will need more time to spread between the planes [Fig. 7]. On the other hand, when d increases, the reflection becomes more specular, and the sound energy spreads very quickly. Moreover, as expected, the distance between the planes (i.e., the street width) is also introduced in the expression of the diffusion coefficient. When the planes are closer, the sound energy remains for a long time at the same place, while, for larger distances between planes, the sound energy will be distributed very quickly.

In addition, this result gives a mathematical justification of a previous work,[23] where the solution of a diffusion equation was already used to model the sound propagation in urban areas. However, at that time, the diffusion coefficient was found by simple hypothesis, and through a fitting on experimental data. Within the framework of the experimentation given in Ref. 23, the diffusion coefficient along the main axis of a street canyon of length 96 m and width 8 m, was estimated at 3360 m^2/s. This value is quite in agreement with Eq. (70), by assuming Lambert's reflections and in condition of taking $d=0.66$. It means that the boundaries were more specular than diffuse in this street.

B. Sound energy in the street

Although it should be possible to consider a street canyon as two infinite and perfectly reflecting planes, the choice was done now to consider a more realistic geometry. Let us consider a three-dimensional street of length L, width h, and height H, with a sound source located in the middle of a street section at (x_0, y_0) in the street [Fig. 8]. According to

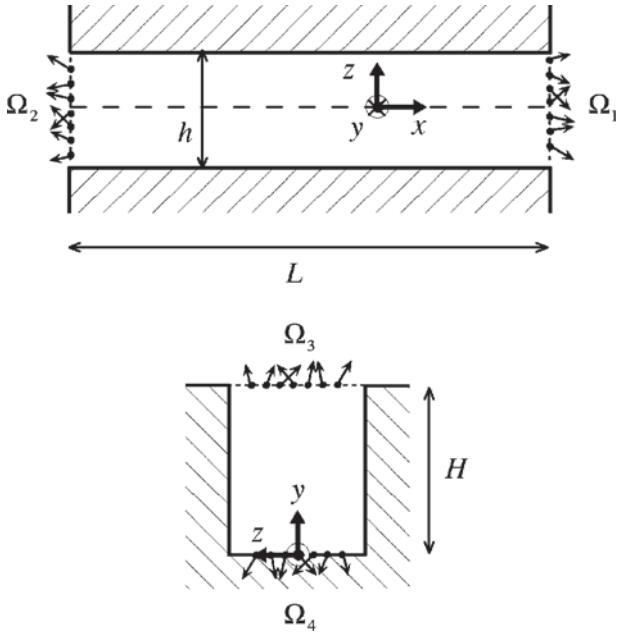


FIG. 8. Geometry of the street and representation of the boundary conditions: Ω_1, Ω_2, and Ω_3 represent the incident sound particles at the openings at $x=L$, $x=0$ and $z=H$, respectively. Ω_4 represents the incident sound particles on the pavement.

the previous result, the sound distribution in the (xOy) direction follows a diffusion process, in such a way that the sound energy density in the street is the solution of the diffusion Eq. (69). In order to have a more realistic solution of the temporal and spatial distribution of sound energy in the street, the sound absorption by the openings, the pavement and the building facades must be introduced in the diffusion model. However, these boundary conditions have to be consistent with the transport theory.

1. Absorption by the openings

Absorption at the openings can be taken into account by introducing an exchange coefficient η_{open} in the conventional boundary conditions of the diffusion equation, at both extremities and at the opened top, respectively, by

$$-\mathcal{K}\frac{\partial q(x,y,t)}{\partial x}=\eta_{\text{open}}q(x,y,t) \quad \text{at } x=L, \quad \forall z\in[0,h], \quad \forall y\in[O,H], \tag{71}$$

$$\mathcal{K}\frac{\partial q(x,y,t)}{\partial x}=\eta_{\text{open}}q(x,y,t) \quad \text{at } x=0, \forall z\in[0,h], \quad \forall y\in[O,H], \tag{72}$$

and

$$-\mathcal{K}\frac{\partial q(x,y,t)}{\partial y}=\eta_{\text{open}}q(x,y,t) \quad \text{at } y=H, \quad \forall x\in[O,L], \ \forall z\in[0,h]. \tag{73}$$

From Eq. (24), the distribution function may be written as the product of two functions $q(x,y,t)$ and $\phi(z,u,v,w)$. For example, the total flow of sound energy at the extremity $x=L$ should be written

$$J_1(L,y,z,t)=-\mathcal{K}\frac{\partial q(x,y,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L} \times\int_{\Omega_1}\phi(z,u,v,w)du\,dv\,dw, \tag{74}$$

$$=\eta_{\text{open}}q(L,y,t) \times\int_{\Omega_1}\phi(z,u,v,w)du\,dv\,dw, \tag{75}$$

where Ω_1 [Fig. 8] is defined by

$$\Omega_1=\{[\mathbf{x}=(L,y,z);\mathbf{v}]/\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3,0<\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\}, \tag{76}$$

and where $\mathbf{n}$ is the outgoing normal to the opening. Ω_1 expressed the sound particles whose velocity are oriented along the normal to the opening. In an equivalent way, Ω_2 and Ω_3 can also be defined for the opening at $x=0$ and $y=H$. From Eq. (3), the outgoing sound particle flow at the openings, can also be expressed by

$$J(x,y,z,t)=\int|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|f(x,y,z,u,v,w,t)du\,dv\,dw, \tag{77}$$

which gives, at $x=L$

$$J_1'(L,y,z,t)=q(L,y,t)\int_{\Omega_1}u\,\phi(z,u,v,w)du\,dv\,dw. \tag{78}$$

By construction, Eqs. (78) and (75) are equal. Since $\phi(z,u,v,w)$ is constant for Lambert's Law, the exchange coefficient η_{open} must verify

$$\eta_{\text{open}}\int_{\Omega_1}du\,dv\,dw=\int_{\Omega_1}u\,du\,dv\,dw. \tag{79}$$

The last two integrations can easily be performed using the spherical coordinates (14), leading to (at $x=L$)

$$\eta_{\text{open}}=\frac{c}{2}. \tag{80}$$

A similar approach may be used for the absorption at $x=0$ and at the opened top $y=H$, using the boundary conditions (72) and (73), respectively, giving the same expression for the exchange coefficient. As expected, the exchange coefficient at the opening only depends on the reflection law and the speed of sound c, but not on the street size.

2. Sound absorption by the pavement and the building facades

The same procedure can also be used for the sound absorption by the pavement and the building facades. Let us consider the exchange coefficient η_p of the street pavement. The standard boundary condition for the street pavement can be written

$$\mathcal{K}\frac{\partial q(x,y,t)}{\partial y}=\eta_p q(x,y,t) \quad \text{at } y=0 \ \ \forall x\in[O,L], \quad \forall z\in[0,h]. \tag{81}$$

According to the definition of the distribution function, the total energy flow which is absorbed by the pavement, at $y=0$, is written

$$J_4(x,0,z,t)=q(x,0,t)\int_{\Omega_4}v\,\phi(z,u,v,w)du\,dv\,dw, \tag{82}$$

where Ω_4 [Fig. 8] is defined by

$$\Omega_4=\{[\mathbf{x}=(x,0,z);\mathbf{v}]/\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3,0<\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\}. \tag{83}$$

The total energy flow of sound particles through the pavement can also be found using Eq. (24). The sound energy absorbed by the pavement is the product between the total energy flow through the pavement and the absorption coefficient α_p of the pavement

$$J_4'(x,0,z,t)=\alpha_p\int_{\Omega_4}|v|f(x,0,z,u,v,w,t)du\,dv\,dw. \tag{84}$$

By construction, Eqs. (82) and (84) are equal, that implies

$$\eta_p\int_{Y}du\,dv\,dw=\alpha_p\int_{\Omega_4}v\,du\,dv\,dw, \tag{85}$$

leading to the exchange coefficient of the pavement

$$\eta_p = \alpha_p \frac{c}{2}. \tag{86}$$

As expected, the exchange coefficient of the pavement is equivalent to the product of the exchange coefficient of the open top with the absorption coefficient of the pavement. It may be noted that this procedure cannot be applied to the building facades at $z=0$ and $z=h$, since the diffusion process (i.e., the diffusion equation) is only valid in the x and y directions. However, the sound absorption by building facades may have a major part in the sound decay in the street, and then, cannot be neglected. In order to take it into account in the model, a simple way is to introduce the absorption coefficient of the building facades in the exchange coefficient of the pavement. Let us consider the total equivalent absorption area of the street (without the openings)

$$A = \alpha_p hL + 2\alpha_f HL, \tag{87}$$

$$= hL\left(\alpha_p + 2\frac{H}{h}\alpha_f\right), \tag{88}$$

$$= hL\,\alpha_p', \tag{89}$$

where α_p' is the equivalent absorption coefficient of the pavement, including the absorption by the building facades. With this definition, the exchange coefficient of the pavement, including the facade effects, is

$$\eta_p' = \alpha_p' \frac{c}{2} = \left[\alpha_p + 2\frac{H}{h}\alpha_f\right]\frac{c}{2}. \tag{90}$$

3. Solution of the diffusion equation

The sound energy in the street is the solution of the diffusion Eq. (69), in accordance with the boundary conditions (71)–(73) at the openings, and Eq. (81) (with η_p' instead of η_p) at the pavement. A similar solution was already proposed in Ref. 24 and can be written

$$q(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{u_n}\frac{b_m}{v_m}\left[u_n\cos\left(\frac{u_n x}{L}\right) + B_{\text{open}}\sin\left(\frac{u_n x}{L}\right)\right]\left[v_m\cos\left(\frac{v_m y}{H}\right) + B_p\sin\left(\frac{v_m y}{H}\right)\right]\exp\left[-\left(\frac{u_n^2}{L^2}+\frac{v_m^2}{H^2}\right)\mathcal{K}t\right], \tag{91}$$

where the a_n, b_m, u_n, and v_m coefficients verify

$$(u_n^2 - B_{\text{open}}^2)\tan u_n = 2B_{\text{open}}u_n, \tag{92}$$

and

$$(v_m^2 - B_p B_{\text{open}})\tan v_m = (B_p + B_{\text{open}})v_m, \tag{93}$$

where $B_{\text{open}} = \eta_{\text{open}}L/\mathcal{K}$ and $B_p = \eta_p' H/\mathcal{K}$. The ratio a_n/u_n and b_m/v_m are given by the initial conditions. For a point source at (x_0, y_0), they are expressed by

$$\frac{a_n}{u_n} = \frac{2}{L}\frac{u_n\cos(u_n x_0/L) + B_{\text{open}}\sin(u_n x_0/L)}{u_n^2 + B_{\text{open}}^2 + 2B_{\text{open}}}, \tag{94}$$

and

$$\frac{b_m}{v_m} = \frac{2}{H}\frac{v_m\cos(v_m y_0/H) + B_p\sin(v_m y_0/H)}{v_m^2 + B_p^2 + 2B_p + \cos^2 v_m (v_m^2 + B_p^2)(B_{\text{open}} - B_p)/(v_m^2 - B_p B_{\text{open}})}. \tag{95}$$

The reverberation time, at position (x,y) in the parallel plane to the building facades, can be determined by estimating the slope of the decay given by Eq. (91). The sound level in the stationary state, at position (x,y), is found by integrating Eq. (91) over the time t.

In order to validate the transport approach and the diffusion model, Eq. (91) has been compared with experimental results obtained in a street canyon. This is described in the next section.

IV. EXPERIMENTAL VALIDATION

A. Measurements in a street

A recent experiment[25] was realized in a pedestrian street of 210 m long, 18 m high, and 7.90 m wide [Fig. 9]. The morphology of the building facades was uniform all along the street and was composed by a periodic arrangement of windows. The facades was mainly constituted by stone, glass, and woodworks with a low absorption coefficient α_f around 0.05. This absorption coefficient is slightly smaller than some values suggested in Ref. 26, for example, but seems more suitable for the Kervegan street. The pavement made of cobblestones was considered as a perfectly reflecting surface ($\alpha_p = 0$).

The sound source (a pistol shot) was located 0.52 m above the pavement at 50 m from the west end of the street [Fig. 9]. An array of nine microphones was moved from 6 to 50 m from the sound source, step by step every 2 m. A reference microphone was also located 2 m from the sound source, to activate the data acquisition. Acoustic measurements were performed with AVM MI17 ICP microphones, Brüel and Kjær microphones type 4135, 4165, and GRAS microphones type 40AF, fixed on Brüel and Kjær preamplifier type 2619 and 2639. Measurements (i.e., impulse responses) were recorded on an integrated digital recorder TEAC GX-1 with AR-GXMC and AR-GXPA input amp cards, connected to a PC notebook. The sample frequency and the recording time were, respectively, 20 480 Hz and 3 s. A 10 kHz low pass filter was applied on each acquisition channel. A meteorological data acquisition system was also set up in the street for the measurement of the temperature, atmospheric pressure, humidity, and wind speed. To avoid the small fluctuations of the sound source between two con-

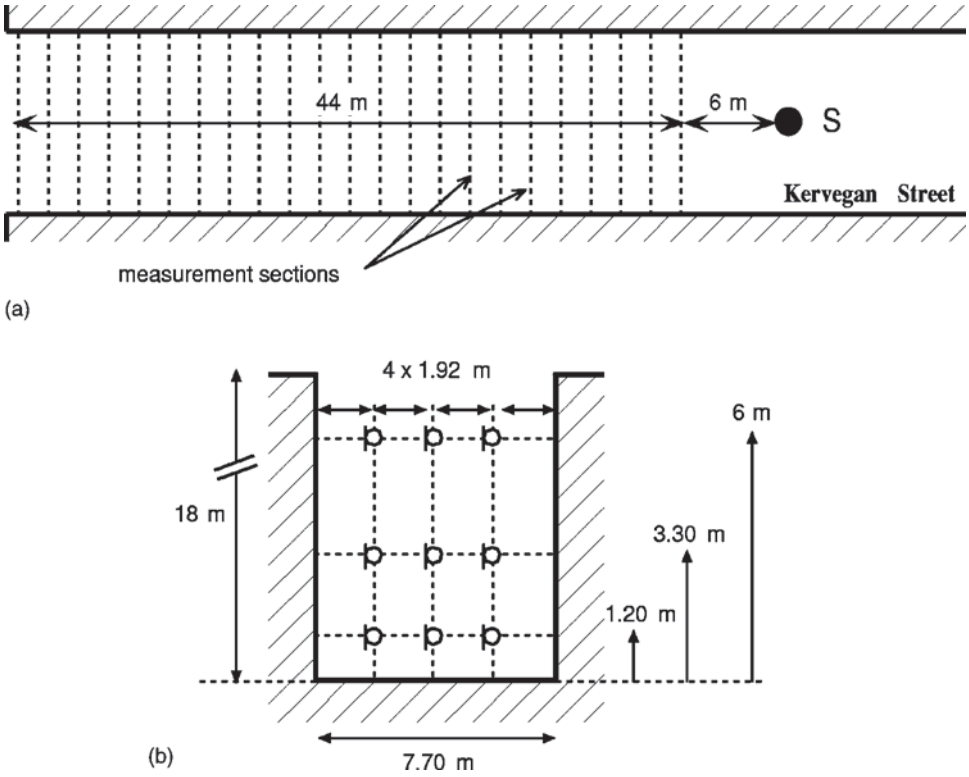


FIG. 9. Measurements in the Kervegan street (Nantes, France). Location of the microphones array along the street (a) and in the street section (b).

secutive shots, five measurements (i.e., five pistol shots) were recorded for each location of the array of microphones.

In order to consider only the effect of the street morphology on the sound propagation in the street, the atmospheric attenuation was compensated on each impulse response.[27] Sound levels and reverberation times $RT30$ were calculated for each 1/3 octave bands between 500 and 5000 Hz and for each impulse response. Then, values were averaged over the five measurements for each position along the street and for each microphone.

B. Model validation

As presented in Ref. 25, the measurements show that reverberation times and sound pressure levels are quite uniform inside a street section, even very close to the sound source, for all 1/3 octave bands between 500 and 5000 Hz. The model is then in agreement with the experimental results. It suggests that it is reasonable to assume a uniform sound field in a street section.

Since the reverberation time and the sound level may be assumed constant along the width, the data are averaged in order to give a mean value for each measurement section and for each 1/3 octave band. Moreover, as presented in Ref. 25, the shape of the sound attenuation in the street are almost similar for each 1/3 octave band. The sound attenuation are also averaged over the frequency range between 500 and 5000 Hz, to give a single reference curve for the sound attenuation in the street. The direct field is compensated to consider the reverberant field only.

Inversely, it was shown[25] that the sound decay for each measurement section is frequency dependent (the $RT30$ decreases with the frequency). Thus, the upper and the lower limits of the measured reverberation times along the street, compose the reference curve for the sound decay in the street.

Since no information is available for the accommodation coefficient of the building facades, the solution of the diffusion equation is calculated for several values of d between 0 (perfectly diffuse) and 1 (perfectly specular), and compared to the references curves.

Figure 10 shows the comparison for the reverberation times along the street, with the solution of the diffusion equation for $d=0.2$ to 0.9. It can be observed that the model is in agreement with experimental data if d is contained between 0.4 and 0.7. At low frequency, the best agreement is obtained with lower accommodation coefficient. In contrary, for high frequencies, d must be larger. Figure 10 also shows that the reverberation time is very sensitive to the choice of the accommodation coefficient. A small change in d produces large variations of the reverberation time.

Figure 11 presents the mean sound attenuation measured along the street, compared to the diffusion model for d between 0 and 0.9. When regarding near the sound source, it seems that all accommodation coefficients are consistent with the experimental results. However, when the source-receiver distance increases, the diffusion model fails for lower accommodation coefficient. The best agreement is obtained for d between 0.8 and 0.5, which is more or less in agreement with the conclusion relative to the reverberation time. The Kervegan street is an ancient street with highly modulated facades, which explains why the accommodation coefficient should be smaller (i.e., the building facades are very diffuse). For streets with modern buildings, the accommodation coefficient should be larger (i.e., reflections should be more specular).

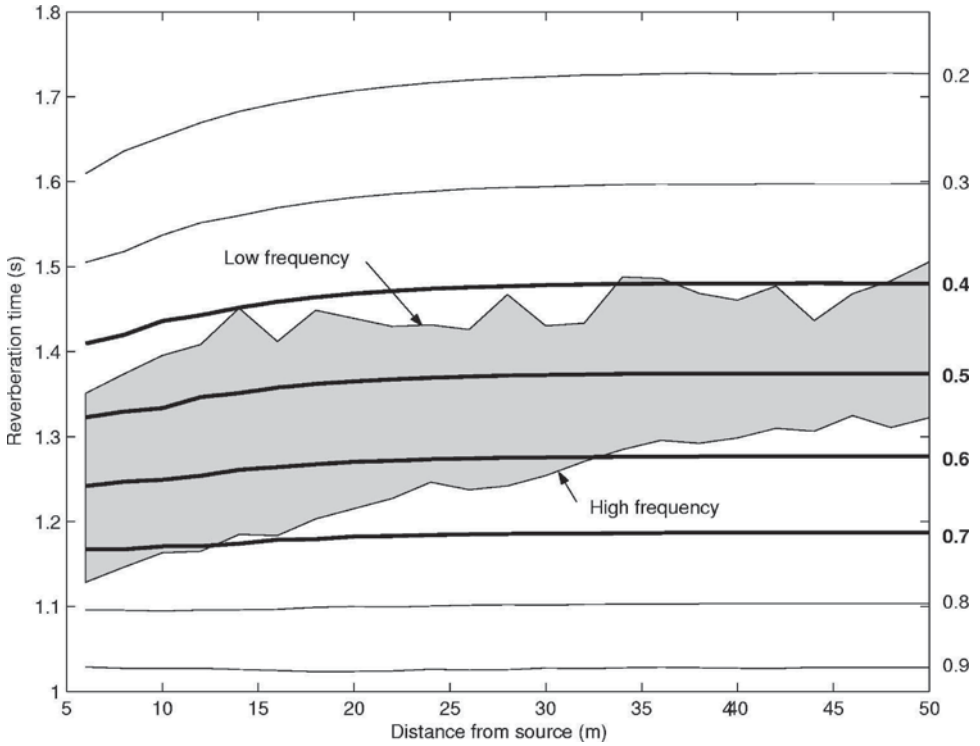


FIG. 10. Reverberation times calculated by the diffusion model for $d=0.2,0.3,\ldots,0.9$ compared with the experimental data measured in the Kervegan Street. Experimental data are symbolized by the domain defined by the upper and the lower limits (filled in gray). Analytical solutions are represented by continuous lines, and noted on the right of the figure. Solutions with $d=4$ to $d=0.7$ (thick lines) are consistent with experimental data.

It can also be noted also that the diffusion model is very sensitive to the choice of the absorption coefficient for the determination of the reverberation time, while, for the sound attenuation along the street, a small variation of the absorption does not fundamentally change the shape of the curves. Overall, considering the uncertainties on the absorption coefficients and the reflection law principally, the diffusion model gives consistent results with experimental data.

V. CONCLUSION

A general approach, based on the transport theory of sound particles, has been investigated for the sound field modeling in architectural acoustics. Using simple considerations, it is shown that the sound energy in a diffusely reflecting enclosure could be the solution of transport equation. For street canyons, using Lambert's reflection law, the transport equation may be reduced to a diffusion equation for the sound energy. The whole process is then characterized by the diffusion coefficient, which takes into account the street width and the accommodation coefficient. In order to solve the diffusion equation, exchange coefficients are introduced in the boundary conditions to predict the absorption by the openings, the pavement, and the building facades of the

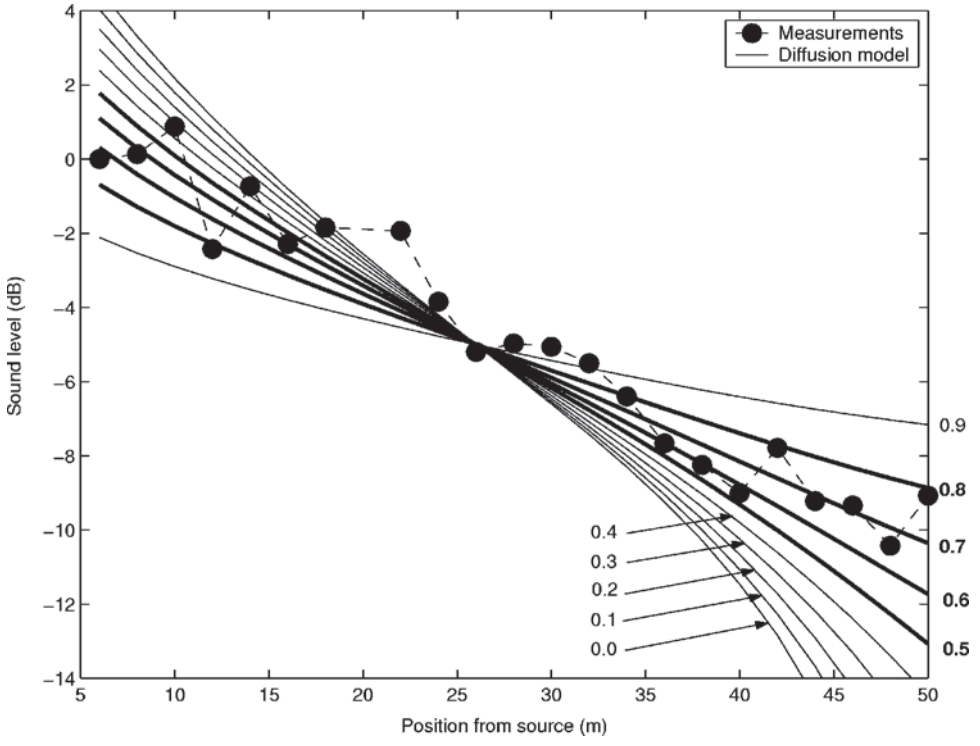


FIG. 11. Calculated sound level for $d=0.0,0.1,\ldots,0.9$, compared with experimental data. Solutions with $d=0.5$ to $d=0.8$ (thick lines) are consistent with measurements.

street. The solution of the diffusion equation is given and compared to experimental data, with a nice agreement both for the reverberation time and the sound attenuation.

In spite of the complexity of the scattering of sound by building facade, only one parameter, the diffusion coefficient, has to be introduced in the model. This is the main result. In the present paper, the expression of the diffusion equation is given for Lambert's law, but similar developments could be also investigated for any reflection law having a symmetry around the normal to the wall, and without grazing reflection. For more complicated laws, other asymptotic approaches should be envisaged. In a practical point of view, it will be interesting to consider real reflection laws (instead of Lambert's law) and appropriate accommodation coefficients for the building facades, in order to validate and apply the model in all types of urban areas. That is also needed to estimate or measure these two parameters, as already done in room acoustics. In addition, it can also be noted, that, in practice, building facades may be different on both sides of the street, for the absorption or the diffusion. It should also be necessary to include this into the model. In addition, instead of including the sound absorption by building facades in the boundary conditions of the diffusion equation, it could be more accurate to include absorption in the transport approach directly, when developing the asymptotic solution. At last, it would also be interesting to investigate the generalized transport Eq. (6) in order to have a more accurate model of the sound field description in urban areas.

[1] J. Picaut, J. Hardy, and L. Simon, ''Prediction of background noise in a built-up area: A periodic disposition of buildings,'' Phys. Rev. E **60**, 4851–4859 (1999).

[2] M. Ismail and D. Oldham, ''The effect of the scattering of sound from building façades on urban noise propagation,'' 10th International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Sweden (International Institute of Acoustics and Vibration (IIAW), Royal Insitute of Technology (KIT)-Sweden, Scandinavia Vibration Society (SVIB)-Sweden, International Insitute of Acoustics and Vibration, 2003).

[3] K. Heutschi, ''A simple method to evaluate the increase of traffic noise emission level due to buildings, for a long straight street,'' Appl. Acoust. **44**, 259–274 (1995).

[4] R. H. Lyon, ''Role of multiple reflections and reverberation in urban noise propagation,'' J. Acoust. Soc. Am. **55**, 493–503 (1974).

[5] J. Kang, ''Sound propagation in street canyons: Comparisons between diffusely and geometrically reflecting boundaries,'' J. Acoust. Soc. Am. **107**, 1394–1404 (2000).

[6] W. B. Joyce, ''Sabine's reverberation time and ergodic auditorium,'' J. Acoust. Soc. Am. **58**, 643–655 (1975).

[7] M. Vorländer, ''Simulation of the transient and steady-state sound propagation in rooms using a new combined ray-tracing/image-source algorithm,'' J. Acoust. Soc. Am. **86**, 172–178 (1989).

[8] J. L. B. Coelho, ''Room acoustics design by a sound energy transition approach,'' Acust. Acta Acust. **86**, 903–910 (2000).

[9] M. M. R. Williams, *Mathematical Methods in Particle Transport Theory* (Butterworths London, 1971).

[10] A. M. Weinberg and E. P. Wigner, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors* (University of Chicago, Chicago, 1958).

[11] M. Hodgson, ''Evidence of diffuse surface reflections in rooms,'' J. Acoust. Soc. Am. **89**, 765–771 (1991).

[12] W. B. Joyce, ''Exact effect of surface roughness on the reverberation time of a uniformly absorbing spherical enclosure,'' J. Acoust. Soc. Am. **64**, 1429–1436 (1978).

[13] J. J. Embrechts, D. Archambeau, and G. Stan, ''Determination of the scattering coefficient of random rough diffusing surfaces for room acoustics applications,'' Acust. Acta Acust. **87**, 482–494 (2001).

[14] M. Vorländer and E. Mommertz, ''Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients,'' Appl. Acoust. **60**, 187–199 (2000).

[15] J. Kang, *Acoustics of Long Spaces* (Thomas Telford, London, 2002).

[16] H. Kuttruff, *Room Acoustics*, 4th ed. (Spon Press, London, 2000).

[17] J. Kang, ''Reverberation in rectangular long enclosures with diffusely reflecting boundaries,'' Acust. Acta Acust. **88**, 77–87 (2002).

[18] S. Wu and E. Kittinger, ''On the relevance of sound scattering to the prediction of traffic noise in urban streets,'' Acustica **81**, 36–42 (1995).

[19] C. Börgers, C. Greengard, and E. Thomann, ''The diffusion limit of free molecular flow in thin plane channel,'' SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Appl. Math. **52**, 1057–1075 (1992).

[20] C. H. Chew, ''Prediction of traffic noise from expressways—Part II: Buildings flanking both sides of expressways,'' Appl. Acoust. **32**, 61–72 (1991).

[21] H. G. Davies, ''Multiple-reflection diffuse-scattering model for noise propagation in streets,'' J. Acoust. Soc. Am. **64**, 517–521 (1978).

[22] D. Foata and A. Fuchs, *Calcul Des Probabilités, Cours, Exercices et Problèmes Corrigés* (Dunod, Paris, 1998).

[23] J. Picaut, J. Hardy, and L. Simon, ''Sound field modeling in streets with a diffusion equation,'' J. Acoust. Soc. Am. **106**, 2638–2645 (1999).

[24] J. Picaut, L. Simon, and J.-D. Polack, ''Sound field in long rooms with diffusely reflecting boundaries,'' Appl. Acoust. **56**, 217–240 (1999).

[25] J. Picaut, T. Le Pollès, P. L'Hermite, and V. Gary, ''Experimental study of sound propagation in a street,'' Appl. Acoust. (to be published).

[26] D. J. Oldham and M. M. Radwan, ''Sound propagation in city streets,'' Building Acoustics **1**, 65–88 (1994).

[27] J. Picaut and L. Simon, ''A scale model experiment for the study of sound propagation in urban areas,'' Appl. Acoust. **62**, 327–340 (2001).

Annexe D

Publications traitant du modèle de diffusion en acoustique des salles

On the use of a diffusion equation for room acoustics, V. Valeau, J. Picaut, M. Hodgson, *Journal of the Acoustical Society of America* **119**(3), pages 1504-1513 (mars 2006).

A diffusion-based analogy for the prediction of sound in fitted rooms, V. Valeau, M. Hodgson, J. Picaut, *Acustica/acta acustica* **93**(1), pages 94-105 (janvier-février 2007).

On the use of a diffusion model for acoustically coupled rooms, A. Billon, V. Valeau, A. Sakout, J. Picaut, *Journal of the Acoustical Society of America*, **120**(4), pages 2043-2054 (octobre 2006).

Sound field in long rooms with diffusely reflecting boundaries, J. Picaut, L. Simon, J.-D. Polack, *Applied Acoustics* **56**(4), pages 217-240 (avril 1999).

A mathematical model of diffuse sound field based on a diffusion equation, J. Picaut, J.-D. Polack, L. Simon, *ACUSTICA/acta acustica* **83**(4), pages 614-621 (1997).

On the use of a diffusion equation for room-acoustic prediction

V. Valeau[a)]
LEPTAB, Université de La Rochelle, Pôle Sciences et Technologies, Avenue M. Crépeau, 17042, La Rochelle Cedex 01, France

J. Picaut
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Section Acoustique Routière et Urbaine, Route de Bouaye, Boîte Postale 4129, 44341 Bouguenais Cedex, France

M. Hodgson
University of British Columbia, Acoustics & Noise Research Group, SOEH and MECH, 3rd Floor, 2206 East Mall, Vancouver, BC, Canada V6T 1Z3

(Received 10 August 2005; revised 29 November 2005; accepted 2 December 2005)

This paper presents an alternative model for predicting the reverberant sound field in empty rooms with diffusely reflecting boundaries, based on the generalization and the numerical implementation of a diffusion equation for the energy density. The paper focuses on the source term and the boundary conditions of the diffusion equation, both for the steady state and the time-varying state, in order to make computational use of the model. In addition, theoretical analysis of the diffusion equation shows that the diffusion model may be considered as an extension of the classical theory of reverberation to nondiffuse sound fields. The numerical model is first applied to a cubic room and shows a very good agreement with statistical theory. Two numerical applications are also given for a long room and a flat room; results are in good agreement with numerical results from a ray-tracing software. The main advantage of the present model is its capability to be applied regardless of the complexity of the room shape, and that it gives results at any receiver location, with a low calculation time. © *2006 Acoustical Society of America.* [DOI: 10.1121/1.2161433]

PACS number(s): 43.55.Br, 43.55.Ka, 43.55.Cs [NX] Pages: 1504–1513

I. INTRODUCTION

Sound-field modeling in room acoustics has attracted considerable attention in recent decades. Many developments have been proposed to predict the sound-field distribution and the sound decay in rooms. In particular, Sabine's statistical theory for diffuse sound fields has been widely used to estimate the sound decay and the steady-state reverberant field in quasicubic rooms.[1,2] For corridors and flat rooms—i.e., rooms with small height compared to their width and length—for which the diffuse-sound-field theory cannot be applied, many mathematical models have been derived to predict the sound-level distribution and the spatial variations of reverberation time.[3] For real rooms—i.e., with complex shapes and with partially diffusely reflecting surfaces—computer methods such as the ray-tracing model have been developed and are now very popular. However, by increasing the complexity of the room shape, the computation time increases dramatically and can be several hours for engineering accuracy.

In this paper, we propose an alternative approach to predict the sound field in arbitrary rooms with a satisfactory accuracy and with low computation time. This model, based on a physical analogy with the diffusion of particles in a scattering medium, was recently derived to predict the spatial variations of the reverberant sound field in long rooms[4,5] and in urban areas[6] with diffusely reflecting boundaries, for both steady-state and time-varying sources. However, no absolute sound levels were obtained and the terms accounting for energy losses at boundaries were only preliminarily analyzed. The applications to long rooms involved purely analytical, one-dimensional analyses. The present study proposes a generalization of this theory in the case of arbitrary, three-dimensional enclosures, in order to achieve a computational use of the diffusion equation in the case of room-acoustic applications.

First, the acoustic diffusion model is presented in Sec. II. To extend the use of this theory in the case of arbitrary rooms, some major points are then discussed in Sec. III, as follows: (i) the definition of *ad hoc* source terms; (ii) the development of two models with different treatments of the energy absorption at wall surfaces, and the discussion of their equivalence; and (iii) the link of the present acoustic diffusion theory with the classical diffuse sound field theory. Finally, the numerical implementation of the model, based on the finite-element method, is presented in Sec. IV with three examples: a room with "proportionate dimensions," a long room, and a flat room. Sound predictions are then compared with results obtained using a ray-tracing model.

II. ANALOGY WITH THE DIFFUSION OF PARTICLES BY SCATTERERS

The model presented in this paper is based on the analogy of the sound energy density with a density of "sound

[a)]Present address: LEA, UMR CNRS 6609, Bâtiment K, 40 Avenue Recteur du Pineau, 86022 Poitiers Cedex, France. Electronic mail: vvaleau@univ-poitiers.fr

 © 2006 Acoustical Society of America

particles"[7] traveling at velocity c along straight lines. For further use, the case of a source in an infinite medium is first briefly considered. Let us consider a source of infinitely small dimension emitting q particles per second omnidirectionally. In a time interval dt, this source emits qdt particles. After a time t, all particles are located within a spherical shell of thickness cdt and radius ct, with enclosed volume $4\pi(ct)^2cdt$. The concentration of particles $w(r)$ at a distance r from the source is then

$$w(r=ct)=\frac{qdt}{4\pi(ct)^2cdt}=\frac{q}{c4\pi r^2}. \tag{1}$$

The acoustic energy density at a distance r from a source of power P emitting omnidirectionally is $P/(c4\pi r^2)$, c being the sound speed. The analogy with the particle density given by Eq. (1) is then straightforward for a source in an infinite medium, the quantity q being analogous to the acoustical power P.

The present study uses a model initially derived by Ollendorff[8] and further developed by Picaut *et al.*,[4] for modeling the acoustics of enclosed spaces with diffusely reflecting surfaces, based on an analogy with the model for the diffusion of particles in a medium containing spherical scattering obstacles, as presented by Morse and Feshbach.[9] Following their work, let us consider a room defined by its volume V, its surface area S, and an average surface absorption coefficient $\bar{\alpha}$. It is possible to consider the scattering of sound particles by the room surfaces as analogous to the scattering of the same particles by a uniform distribution of scatterers throughout the volume. The probability $\mathcal{P}(x)$ that a particle has covered a distance x without any collision with a scatterer is assumed to be described by an exponential distribution,[9]

$$\mathcal{P}(x)=Qne^{-Qnx}, \tag{2}$$

where n is the density of scatterers—i.e., the number of scattering particles per volume unit—and Q the particle scattering cross-section. $\bar{\alpha}$ (between 0 and 1) is the probability for a scatterer to absorb a particle after a collision. The mean free path λ between two collisions is

$$\lambda=\int_0^\infty x\mathcal{P}(x)dx=\frac{1}{Qn}. \tag{3}$$

In room acoustics, a common analytical expression for the mean free path in a room is

$$\lambda=4V/S. \tag{4}$$

Many authors[2,7,10] have discussed extensively the validity of this relation. We shall keep in mind here that, in particular, this expression is valid in the case of a room with diffusively reflecting boundaries—i.e., with directional reflection properties that are described by Lambert's law.[2]

In the present analogy, Picaut *et al.*[4] set the value for the mean free path between two collisions for a particle to $\lambda=4V/S$. Morse and Feshbach[9] show that, given the slow rates of change with time involved in diffusion phenomena, the local particle-density flux $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ can be approximated as the gradient of the particle density,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=-D\nabla w(\mathbf{r},t). \tag{5}$$

Under this assumption, the particle density can be shown to be the solution of a diffusion equation. The analogy with room acoustics allows the assumption that the acoustic energy density in the room at a position $\mathbf{r}$ and time t is governed by the same diffusion equation,

$$\frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t}-D\nabla^2 w(\mathbf{r},t)+\sigma w(\mathbf{r},t)=0, \tag{6}$$

where ∇^2 is the Laplace operator. D is the so-called diffusion coefficient, and the term σ accounts for absorption at the room boundaries, defined by a mean room-surface absorption coefficient $\bar{\alpha}$. Their analytical expressions are taken directly from the theory of diffusion for particles in a scattering medium,[9]

$$D=\frac{\lambda c}{3}, \tag{7}$$

$$\sigma=\frac{\bar{\alpha}c}{\lambda}. \tag{8}$$

The diffusion coefficient D used here is different from a usual definition in room acoustics, which is the proportion of diffuse reflections at the room surfaces.[11] The diffusion coefficient D as described in Eq. (7) is a term that takes into account the room morphology through its mean free path.

III. MODEL FOR ROOM-ACOUSTIC PREDICTIONS

With the objective of making computational use of the diffusion equation for three-dimensional room-acoustic predictions, this section focuses on the source term in the diffusion equation and on the definition of the boundary conditions. Finally, it clarifies the link between the present theory and the classical theory of diffuse sound fields.

A. Source models

1. Volume source

Let us consider an omnidirectional sound source radiating a sound power P. The analogy for the direct field presented at the beginning of Sec. II shows that a source of constant power P is analogous to a point source emitting q particles per second. In the theory of the diffusion of particles by scatterers, a point source emitting q particles per second is properly modeled by a source term equal to $q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)$,[9] where $\mathbf{r}_s$ denotes the position of the source. In an analogous way, for a room-acoustic problem, the right-hand source term in the diffusion equation, which models adequately a point source with arbitrary acoustic power $P(t)$ located at $\mathbf{r}_s$, is

$$\frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t}-D\nabla^2 w(\mathbf{r},t)+\sigma w(\mathbf{r},t)=P(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s). \tag{9}$$

As for all other terms in this differential equation, this source term has the dimension of a power density. The case of a source occupying a subdomain V_s of volume v and radiating

the power $P(t)$ can be modeled in a similar way by taking the following source term $G(\mathbf{r},t)$:

$$G(\mathbf{r},t) = \frac{P(t)}{v} f_s(\mathbf{r}), \tag{10}$$

the function $f_s(\mathbf{r})$ being equal to 1 inside V_s and to 0 otherwise. The integration of $G(\mathbf{r},t)$ over the subdomain V_s must be equal to the total power output of the source $P(t)$, and the above expression meets this condition. This model will be preferred for performing numerical simulations (Sec. IV) because it diminishes the singularity of the Green's function of the diffusion equation.

If the point source is impulsive, the diffusion equation becomes

$$\frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t} - D\nabla^2 w(\mathbf{r},t) + \sigma w(\mathbf{r},t) = E_0 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)\delta(t-t_0), \tag{11}$$

where E_0 is the energy produced by the source at time t_0. For practical purposes, a source emitting a constant power P in a short time interval Δt can be considered. In this case, E_0 can be approximated by $E_0 \simeq P\Delta t$.

2. Surface source

The transmission of sound through a room boundary can also be modeled by setting an appropriate boundary condition. Suppose that some sound-energy transmission is possible through a portion S of the room surfaces. If $\mathbf{n}$ is the local outgoing vector normal to the wall, and J_{in} is the ingoing local energy flux due to the transmission, then the boundary condition that takes the transmission into account will be

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{n} = -D\frac{\partial w}{\partial n} = -J_{\text{in}} \quad \text{on } S, \tag{12}$$

the negative sign accounting for the ingoing nature of the transmitted energy. A sample application will be presented in Sec. IV.

B. Boundary conditions

1. Homogeneous Neumann boundary conditions

The model described in Sec. II is derived for an infinite scattering medium. The analytical solution of the one-dimensional form of the diffusion equation of Eq. (6) has been used successfully for calculating the sound attenuation and the reverberation time in infinitely long rooms.[4,5] Indeed, under the reasonable assumption that the energy density is constant over a cross section of a long room, an infinitely long room can be considered as analogous to a one-dimensional scattering medium.

However, to make possible the use of a three-dimensional diffusion process for an arbitrary room shape, the equivalent scattering medium has to be bounded in some way by setting up *ad hoc* boundary conditions. The absorption of the room surfaces are taken into account in the diffusion equation of Eq. (6) by the term $\sigma w(\mathbf{r},t)$, with $\sigma = \bar{\alpha}c/\lambda$. This term expresses the loss of energy in the room per unit volume and per unit time due to the mean room-absorption coefficient $\bar{\alpha}$. Hence the boundary conditions need not involve any extra energy absorption. This can be modeled appropriately by homogeneous Neumann boundary conditions,[9] which impose no energy flux through the room surfaces. The reflection of sound particles by scatters (or, equivalently, by surfaces) is still entirely described by the local diffusion equation (6) and the mean free path [Eq. (4)]. The homogeneous boundary conditions ensure that the sound particles cannot "escape" from the room volume. The diffusion model for both volume and boundaries should then be

$$\frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t} - D\nabla^2 w(\mathbf{r},t) + \sigma w(\mathbf{r},t) = F(\mathbf{r},t) \quad \text{in } V, \tag{13}$$

with

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{n} = -D\,\nabla w(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \text{i.e.,}$$
$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial V, \tag{14}$$

where ∂V denotes the room boundaries and $F(\mathbf{r},t)$ an arbitrary acoustic source term. The solutions for the set of Eqs. (13) and (14), referred to as Model 1, will be further investigated analytically in Sec. III C, and numerically in Sec. IV.

2. Mixed boundary conditions

The model described in the last section is limited in the sense that the room absorption is taken into account through its mean value $\bar{\alpha}$. Some difficulties can arise to model the local effects on the sound field induced by absorbing materials, for instance.[12] To overcome this problem, different boundary conditions could be set up that take into account the distribution of the room absorption. A common way of describing energy exchanges at a boundary is by the use of a mixed boundary condition, in the following form:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{n} = -D\frac{\partial w}{\partial n} = hw(\mathbf{r},t) \quad \text{on } \partial V, \tag{15}$$

where h is the so-called exchange coefficient. Under this condition (for instance, as widely used in heat transfer),[13] the local energy flux outside the room is assumed to be proportional to the local energy density. At the same time, this boundary condition involves some energy absorption within the room volume, as it models an energy loss per unit area and per unit time. Hence, the local differential equation as written in Eq. (13) should be modified to remove the absorption term $\sigma w(\mathbf{r},t)$. As a consequence, the boundary condition of Eq. (15) has to be equivalent to this former term in terms of energy loss for the room. The term h should be chosen so that the energy flux through the room boundaries equals the absorption over the whole room due to the term $\sigma w(\mathbf{r},t)$, i.e.,

$$\int_V \sigma w(\mathbf{r},t)dV = \int_{\partial V} h(S)w(\mathbf{r},t)dS. \tag{16}$$

If the sound field is assumed to be totally diffuse, i.e., the energy density $w(\mathbf{r},t)$ is uniform $\forall\mathbf{r}$, the energy density can be taken out of the integrals. Then, by using Eqs. (8) and (4), Eq. (16) leads simply to

$$\frac{c\bar{\alpha}S}{4} = \int_{\partial V} h(S)dS. \tag{17}$$

If the room walls are made of N surfaces S_i with constant absorption α_i (i.e., $\bar{\alpha}=\Sigma_{i=1}^{N}\alpha_i S_i/S$ for $i=1,\ldots,N$), then one can attribute an exchange coefficient h_i to each surface portion so that Eq. (17) can be written

$$h_i = \frac{c\alpha_i}{4}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

The energy flux through an infinitely small surface portion dS of absorption coefficient α is then

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS = \frac{cw(\mathbf{r},t)}{4}\alpha\, dS, \tag{19}$$

which is in accordance with diffuse sound-field theory.[2]

Relation (18) has been derived for the case of an uniform sound field but, for rooms with special shapes, such as long rooms, for which the acoustic energy density is known not to be uniform in the long dimension,[3] the same result holds (as shown in Ref. 5 in a somewhat different way than below). For instance, let us consider an infinitely small portion of a long room of length dx and volume sdx. x is the axis of the longer dimension of the room, s its cross-sectional area in m^2, and L its length. It is reasonable to suppose that the energy density w varies only along x, i.e., it is constant over cross-section s. Let us denote p the perimeter of the cross-section, and α the absorption coefficient of the side walls. Absorption could be different for each side wall without difficulty—however, the differences in the absorption coefficients of the side walls should not be too large, so that the one-dimensional assumption remains acceptable. For such a long room, if the area of the hall extremities is negligible compared to the side-wall area, the mean-free-path expression $\lambda=4V/S$ can be approximated by $4s/p$ (as $V\simeq sL$ and $S\simeq pL$). Equation (16) can then be written

$$\frac{c\alpha p}{4s}w(x,t)sdx = hw(x,t)pdx, \tag{20}$$

which immediately leads to $h=c\alpha/4$, in accordance with Eq. (18). Hence, in the case of a long room with sound field only varying along the longer dimension of the room, the boundary condition (15) with $h=c\alpha/4$ is close to being equivalent (given an approximation on the mean free path λ) to the local term $\sigma w(\mathbf{r},t)$ in terms of energy absorption. Similar deductions can also be extended to the case of a flat room. Hence, for room shapes such as in long or flat rooms, leading to substantially non-uniform sound fields, the boundary condition Eq. (19) which is, strictly speaking, valid for diffuse sound fields, is a good approximation for modeling energy losses at the room surfaces.

In conclusion, to use a diffusion process in a room, the following system of equations is solved:

$$\frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t} - D\nabla^2 w(\mathbf{r},t) = F(\mathbf{r},t) \quad \text{in } V, \tag{21}$$

$$D\frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial n} + \frac{c\alpha}{4}w(\mathbf{r},t) = 0 \quad \text{on } \partial V. \tag{22}$$

This set of equations will be referred to as Model 2. This model is analogous to the model for heat transfer within a heat-conductive medium (i.e., the room) with heat exchanges at the medium boundary (i.e., the room surfaces). For a room with a sound field close to being uniform, both Models 1 and 2 are equivalent. For rooms with shapes usually leading to significant spatial variations in the sound field (such as rooms with long or flat shapes), this is also valid. Section IV shows that the solutions of both systems are indeed very similar. The advantage of the second formulation is that the boundary conditions are directly dependent on the local boundary absorption coefficient, and so it can handle arbitrary variations of absorption. Conversely, in the first formulation, only a mean absorption coefficient $\bar{\alpha}$ is introduced in the model.

The frequency dependence of the phenomena are taken into account through the frequency dependence of the absorption coefficients of the room boundaries. Hence, for a calculation of the sound field in a given frequency band, the sets of equations for Models 1 or 2 must be solved with the appropriate values of α for this band. The frequency-dependent terms for each model are $\sigma w(\mathbf{r},t)$ for Model 1, and the boundary condition [Eq. (22)] for Model 2.

C. Relation with diffuse sound-field theory

1. Room energy balance

The equations describing the acoustic energy density w for both the classical diffuse sound-field theory (called *statistical theory* in the following) and the present diffusion analogy are now briefly compared. One main assumption for a diffuse sound field being that the quantity w is uniform throughout the room, no local differential equation for w can be derived. However the energy balance for a room of volume V containing a sound source of power output $P(t)$ can be written[2]

$$V\frac{dw(t)}{dt} + V\frac{c\bar{\alpha}S}{4V}w(t) = P(t). \tag{23}$$

This can be compared to the energy balance for the same room given by the diffusion theory. For the first diffusion model (Model 1) of Sec. III B 1, this balance is achieved by integrating Eq. (13) over the room volume V and replacing σ with $c\bar{\alpha}/\lambda$ (with $\lambda=4V/S$),

$$\int_V \frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t}dV + \int_V \frac{c\bar{\alpha}S}{4V}w(\mathbf{r},t)dV - D\int_V \nabla^2 w(\mathbf{r},t)dV = \int_V F(\mathbf{r},t)dV. \tag{24}$$

By using Gauss' theorem[9] and the boundary condition of Eq. (14), the integral term containing the Laplacian operator ∇^2 turns out to be 0

$$D\int_V \nabla^2 w(\mathbf{r},t)dV = D\int_{\partial V} \frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial n} dS = 0, \tag{25}$$

so that the room energy balance for the first diffusion model becomes

$$\int_V \frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t} dV + \int_V \frac{c\bar{\alpha}S}{4V} w(\mathbf{r},t)dV = P(t) \tag{26}$$

if the source term of Eq. (24) is properly set, as described in Sec. III A 1. Equations (23) and (26) are obviously similar, with the difference that the second equation is just an extension of the first (i.e., statistical theory) for a spatially varying sound field. For $w(\mathbf{r},t)$ constant in the room, Eq. (26) reduces to Eq. (23).

With the second model [Eqs. (21) and (22)], one can apply the same calculation steps: volume integration of the diffusion equation, and application of Green's theorem to the ∇^2 integral term together with boundary condition as stated in Eq. (22). The following room energy balance follows:

$$\int_V \frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \frac{c\alpha}{4} w(\mathbf{r},t)dS = P(t), \tag{27}$$

which is equivalent to Eq. (26) on the conditions discussed in the previous section. Model 2 can then also be seen to be an extension of the statistical theory to non-uniform sound fields.

2. Steady-state sound field

For a constant source power P, the energy balance (23) for diffuse-field theory gives the well-known energy density

$$w_s = \frac{4P}{c\bar{\alpha}S}. \tag{28}$$

Equation (13) for a constant-power point source is no longer time-dependent if the steady state is reached,

$$D\nabla^2 w(\mathbf{r},t) - \sigma w(\mathbf{r},t) = -P\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s). \tag{29}$$

This is a Helmholtz equation for which the Green's function for an unbounded medium is[9]

$$G_u(\mathbf{r},\mathbf{r}_s) = \frac{Pe^{-\sqrt{(\sigma/D)}r}}{4\pi Dr}, \tag{30}$$

with $r=\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s\|$. In order to investigate the ability of the diffusion model to describe the steady state of a room, one can compute the analytical solution for Eq. (29) [i.e., a Green's function $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_s)$ which satisfies the homogeneous Neumann boundary conditions (14)] by using the image-source method presented, for example, in Ref. 9, p. 812. For instance, let us consider a room of cubic shape $10\times10\times10$ m^3 with surfaces with absorption coefficient $\alpha=0.05$, containing a source of constant power P located at its geometrical center. A three-dimensional network of image sources is constructed, up to images of order 20. Each image is weighted by no absorption factor, as the boundary conditions are Neumann-homogeneous. The Green's function $G_u(\mathbf{r},\mathbf{r}_s)$ of the unbounded medium is computed at each image location. The relative deviation from statistical theory [Eq. (28)] for the obtained energy density, resulting from the combination of the actual source and the image sources, along a straight line passing through the source and parallel to one of the sides of the cube, is plotted on Fig. 1.

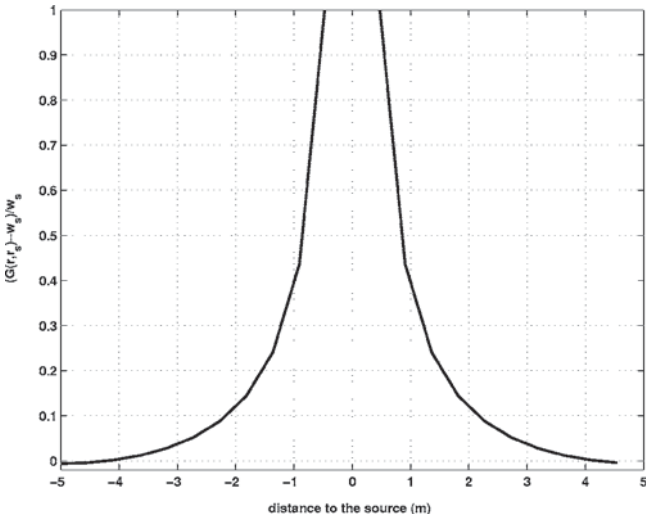


FIG. 1. Relative deviation from the statistical theory of the reverberant energy density calculated with the Green's function [Eq. (30)] and the image-source method, for a $10\times10\times10$ m^3 cubic room of uniform absorption coefficient 0.05. Results are plotted as a function of the distance r to the source, along a line parallel to one of the sides of the cube.

The singularity of function $G_u(\mathbf{r},\mathbf{r}_s)$ at the source location ($r=0$) is responsible for an infinite deviation of the modeled reverberant field from the statistical theory. Agreement becomes satisfactory (deviation of less than 10%) for distances to the source greater than about 2 m. The deviation is negligible near the surfaces. As pointed out by Morse and Feshbach (Ref. 9, p. 191), due to the approximation involved for obtaining the diffusion equation, the Green's function is invalid for distances to the source somewhat smaller than the room mean free path, where it has very large values due to the $1/r$ decrease for $r\to0$. In fact, this solution models an erroneous direct sound field, i.e., particles that, for small values of r, have a high probability [Eq. (2)] for not having hit a scatterer yet. For this reason, the singularity at the source location, predominant close to the source, should be limited in some way and replaced by the correct decrease in $1/r^2$. This will be discussed in the numerical results presented in Sec. IV. In addition, the analogy with a medium of scattering particles is questionable for distances smaller than the mean free path, as relation (2) means that there is some chance for a sound particle to hit a surface even at infinitely small distances from the source, which is obviously non-physical in the present case. However this apparent discrepancy does not prevent the diffusion model from giving satisfactory results if the problem is properly defined numerically.

3. Sound-energy decay

For a sound source which ceases to radiate at $t=t_0$, the solution of the energy balance in Eq. (23) is

$$w_s(t) = w_0 e^{-(c\bar{a}S/4V)(t-t_0)} = w_0 e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad (31)$$

which leads to the well-known Sabine formula. For comparison, the decay for the Green's function solution of Eq. (9) for an unbounded medium,[9]

$$G_u(\mathbf{r},\mathbf{r}_s,t) = \frac{P}{(4\pi D)^{3/2}} \frac{e^{-r^2/[4D(t-t_0)]}}{(t-t_0)^{3/2}} e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad (32)$$

should be briefly investigated. A coarse analysis of this relation can distinguish two main behaviors. For smaller values of $(t-t_0)$, the decay is dominated by the term $e^{-r^2/[4D(t-t_0)]}/(t-t_0)^{3/2}$, which has some importance in the evaluation of the early decay time (EDT, i.e., the decay time based on the 0 to -10 dB part of the temporal sound-energy decay function). Meanwhile, the "*Sabine*" decrease $e^{-\sigma(t-t_0)}$ becomes predominant otherwise, and has more influence on the evaluation of the reverberation time (RT, based on the -5 to -35 dB part of the temporal sound-energy decay function). It is also noticeable that the dependence of the sound decay on r makes possible some spatial variations of the sound decay, which is an important matter for long or flat rooms, or for coupled rooms for example. This will be discussed further in the numerical results presented in the next section.

IV. NUMERICAL RESULTS AND IMPLEMENTATION

In Sec. IV A, the principle of the numerical implementation is presented for the case of a room with "proportionate" (similar) dimensions (here, a cubic room) and uniform absorption, for both steady-state response and sound decay. Results are compared with those given by the statistical theory, which is valid in this case. An additional application is given for the case of sound transmission through a partition, for the same cubic room. In Sec. IV B, two examples are given to illustrate the capability of the method, for room shapes that usually lead to non-uniform sound fields: the calculation of the distribution of steady-state sound level in a flat room, and the calculation of sound decay in a long room. Results are compared with simulations obtained by the ray-tracing method.

A. Rooms with "proportionate" dimensions

1. Steady-state sound field

Both of the systems of Eqs. (13) and (14) (i.e., Model 1), or Eqs. (21) and (22) (i.e., Model 2), are solved numerically for a cubic room of dimensions $10\times10\times10$ m^3 with homogeneous surface-absorption coefficient 0.1. Let us define an omnidirectional sound source located at the geometrical center of this room, radiating a constant sound-power level of 100 dB, i.e., a power output $W_s=10^{-2}$ W.

The numerical method used for solving the diffusion equation together with the boundary conditions is based on the finite element method (FEM). The software used to obtain the results presented in Sec. IV is *Femlab 3.1i*. First, a cubic domain representing the room is defined and meshed with about 5.10^3 unstructured, linear, Lagrange-type elements. A small spherical subdomain V_s of volume v and radius r, centered on the source location is defined. The subdomain V defined by the cubic domain minus V_s is then the domain in which the sound-energy density is to be calculated.

Let us mention here that the most important limitation of finite-element methods (i.e., the size of the elements) is not strictly a problem with this model, since the size of the elements is more dependent on the mean free path than on the wavelength—which determines the maximum size of the elements in the case of solving the Helmholtz equation. The same meshing can be applied for all frequency bands, since frequency is only taken into account in the absorption coefficients of the room boundaries, as already mentioned above. However, the size of the elements should be on the order of (or smaller than) one mean free path. Thus, the diffusion model can be applied to very large enclosures with a limited meshing.

To model the problem, we solve the stationary form of the partial differential equation (13) of Model 1 in both subdomains with two different source terms:

$$-D\nabla^2 w(\mathbf{r}) + \sigma w(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{in } V, \quad (33)$$

$$-D\nabla^2 w(\mathbf{r}) + \sigma w(\mathbf{r}) = \frac{W_s}{v} \quad \text{in } V_s. \quad (34)$$

The source terms of this system of equations model a power source as defined in Eq. (10), in the case of a constant power output, ensuring that the power supply integrated over V_s is equal to W_s. The associated boundary conditions are homogeneous Neumann conditions [Eq. (14)].

Alternatively, the solution of Model 2 can be calculated in the same way. The system of Eqs. (33) and (34) is solved without the volume absorption term $\sigma w(\mathbf{r})$, and with mixed-type boundary conditions [as defined in Eq. (22)] instead of homogeneous Neumann conditions, with $\alpha=0.1$.

From the numerical solution for $w(\mathbf{r})$, one can compute the local sound-pressure level as[14]

$$L_p(\mathbf{r}) = 10\log\left(\frac{w(\mathbf{r})\rho c^2}{P_{\text{ref}}^2}\right), \quad (35)$$

with $P_{\text{ref}}=2\times10^{-5}$ Pa, and ρ the air density. The solutions of both Models 1 and 2, in terms of sound-pressure levels for the reverberant field, are presented in Fig. 2(a), together with the constant value given by statistical theory, as expressed in Eq. (28). The calculation time is a few seconds on a standard computer. The radius of the small spherical subdomain V_s for the source is 0.2 m. Analytically, the Green's function of the stationary diffusion equation has a singularity at the source location, as expressed in Eq. (30). The numerical model defined by Eqs. (33) and (34) reduces this singularity. If the radius of the spherical domain V_s decreases, the peak height at the source location increases, and eventually becomes infinite when the subdomain is infinitely small. As explained in Sec. III C 2, the singularity at the source location has no physical meaning and its effect on the results has to be minimized. At a distance from the source greater than 1.5 m, the diffusion models match the statistical-theory solution very well. Another important observation from

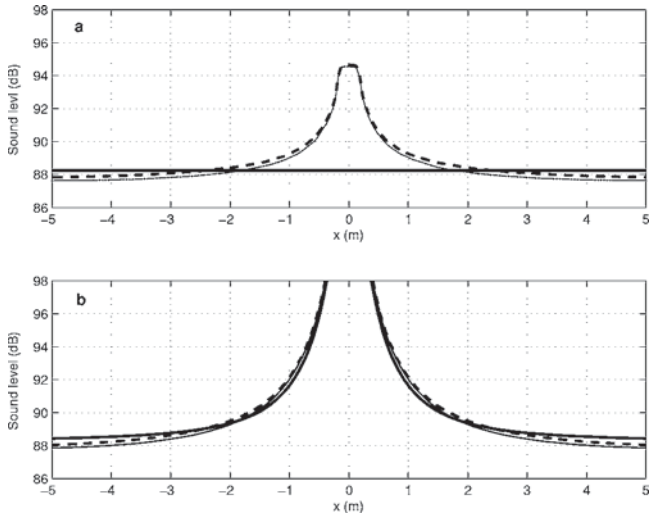


FIG. 2. Steady-state sound pressure level (dB) calculated from the numerical solution of the diffusion equation, for a $10\times10\times10$ m^3 cubic room (α=0.1, source power level 100 dB), with model 1 (thin solid line), model 2 (dashed line), and the statistical theory (thick solid line): (a) reverberant field; (b) direct field plus reverberant field.

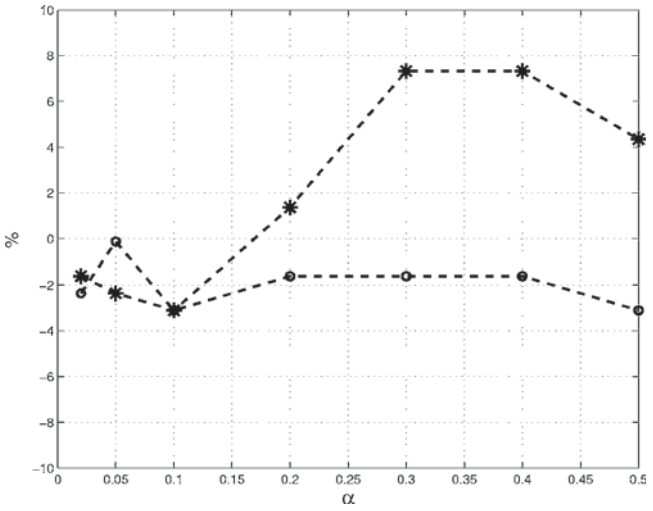


FIG. 3. Deviation in % of the reverberation times calculated by the diffusion model and the statistical theory (Sabine formula), for a $10\times10\times10$ m^3 cubic room, as a function of the wall absorption: (○) model 1; (∗) model 2.

Fig. 2(a) is that both Models 1 and 2 lead to almost identical solutions, as expected for a cubic room (see Sec. III B 2).

As shown in Fig. 2(b), the total sound-pressure solution, taking into account the direct-field sound contribution, is computed according to the relation:

$$L_p^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) = 10\log\{\rho c[W_s/(4\pi r^2) + w(\mathbf{r})c]/P_{\mathrm{ref}}^2\}. \tag{36}$$

Both Models 1 and 2 are in very good agreement with diffuse sound-field theory. The direct field being dominant in the near field of the source, the peak of the diffusion solution does not corrupt the final solution. Practically, it is observed that a spherical subdomain V_s of radius of about 20 cm allows the removal of any effect of the peak of the diffusion solution at the source location [see Fig. 2(a)], after adding the direct field. This rule is true for all of the simulations that have been carried out with the diffusion model so far, and is applied to all further results presented in this study.

Some other simulations have shown that, even in the case of rooms with different aspect ratios (long or flat rooms), where the sound field is not uniform, both Models 1 and 2 lead to very similar results in terms of both steady-state levels and sound decay. This confirms that the boundary condition (22) of Model 2, which can be demonstrated in the case of a diffuse sound field,[2] is a good approximation for sound fields with substantial spatial variations. As mentioned earlier, the advantage of Model 2 is that the mixed boundary conditions relate the local energy loss at the boundary directly to the surface-absorption coefficient. It then allows rooms with walls having different absorption coefficients to be modeled (an example is given in Sec. IV B 1).

2. Sound-energy decay

To obtain the sound decay in a given room, Models 1 and 2 are solved numerically in their time-dependent forms. A simple way of computing the time decay is to set up different initial conditions in the subdomains V and V_s,

$$w(\mathbf{r},0) = 0 \quad \text{in } V, \tag{37}$$

$$w(\mathbf{r},0) = w_0 \quad \text{in } V_s, \tag{38}$$

where w_0 is the initial value.

The same cubic room as that studied in Sec. IV A 1 is investigated for a range of values of the surface absorption α. The room is discretized into about 10^3 elements (the calculation time is about 20 s). The numerical results give identical sound-decay functions at every point in the room. The obtained decay functions in dB are linear, in accordance with diffuse sound field theory, but start at t=0—a feature that will be discussed further in Sec. IV B 2. The reverberation time (RT), defined in Sec. III C 3, is evaluated from the sound decay function. The relative deviation from the RT given by Sabine's formula [i.e., $0.163V/(\alpha S)$] is presented in Fig. 3. Model 1 achieves deviations less than 4% for all absorption coefficients. The same deviation is verified for Model 2 only for coefficients of less than 0.25. For higher absorption it overestimates the RT by about 4–8% (note that practically all rooms have average absorption coefficients less than 0.2).

The numerical results have shown that the diffusion model matches well the statistical theory in the case of a cubic room. In Sec. IV B, some results for disproportionate rooms, where the acoustic energy and sound decay are no longer uniform in the room (i.e. the statistical theory is not valid), will be considered.

3. Sound transmission through a partition

Let us consider the case of two adjacent rooms separated by a partition with transmission loss TL (in dB), defined as follows:

$$TL = 10\log\left(\frac{1}{\tau}\right), \tag{39}$$

where τ is the partition transmission coefficient. A source is located in one of the rooms, and generates a diffuse sound field of energy density w_1. The local ingoing flux, as defined

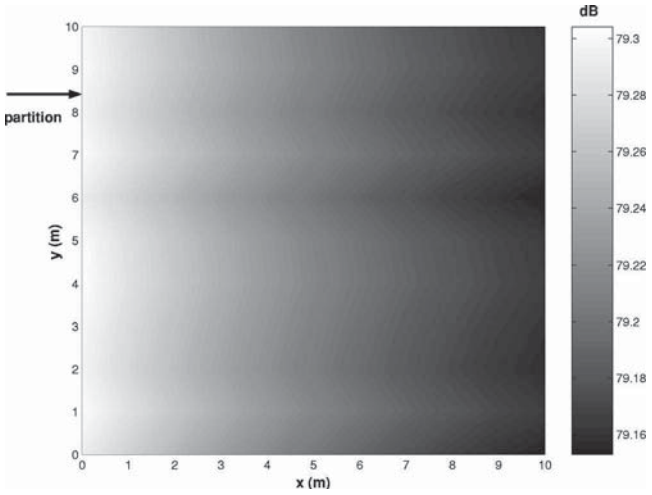


FIG. 4. Sound pressure-level distribution in a $10\times10\times10$ m^3 cubic room with uniform wall absorption 0.02. Sound is transmitted through a wall of transmission loss 30 dB at $x=0$ (left side).

in Eq. (12), is then $J_{\text{in}}=\tau c w_1/4$.[2] The boundary condition for the partition must take into account both sound-absorption phenomena [as in Eq. (22) for Model 2] and sound transmission [Eq. (12)], and may then be written

$$D\frac{\partial w(\mathbf{r},t)}{\partial n}+\frac{c\alpha}{4}w(\mathbf{r},t)-\tau c w_1/4=0. \tag{40}$$

The former example of a cubic room of dimensions $10\times10\times10$ m^3 with a uniform absorption coefficient of 0.02 is taken. One of the surfaces of the room connects to a room in which a source radiates a diffuse sound field of pressure level $L_{p1}=100$ dB. The partition (located at $x=0$) has a transmission loss $TL=30$ dB. Figure 4 presents the distribution of the sound-pressure level in the cubic room in a horizontal plane at height 5 m, using Model 2. As expected, the sound-pressure level in such a cubic room is rather constant (at about 79.2 dB), with a very slight decrease at increasing distance from the partition. The sound pressure L_{p2} in the room, as calculated from the statistical theory using the relation[1]

$$L_{p2}=L_{p1}-R-10\log(A/S_p), \tag{41}$$

gives a similar level of 79.2 dB, A and S_p being, respectively, the absorption area of the cubic room and the area of the partition. This method can easily be extended to an elongated room shape, and could treat the case of sound transmission into a hall through windows. This practical case is often encountered when a residential building is located close to a major road. Let us also mention that the method can accommodate as many partitions with sound transmission, and as many point sources, as necessary to model any given practical case.

B. Examples of long and flat rooms

In the following, two applications for "disproportionate" rooms (rooms with dissimilar dimensions) are presented: the calculation of the steady-state sound field in a flat room, and the calculation of the sound-decay variations in a long room. Numerical solutions for the diffusion equation are presented

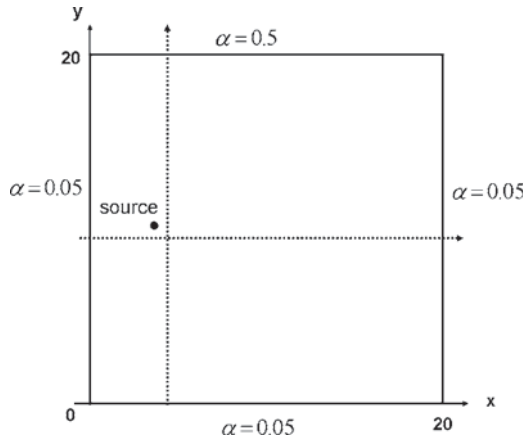


FIG. 5. Schematic of the $20\times20\times2.5$ m^3 flat-room case study (upper view). Pressure level is plotted along the two dotted lines at $y=9.5$ m and $x=4.5$ m.

for Model 2. The calculation times are about 5 s and 1 min for obtaining, respectively, the value of the sound-pressure level (steady-state calculation) and sound decay at any location in the rooms studied. As the spatial variations of the sound field are substantial in these cases, the statistical theory is no longer applicable. For such disproportionate rooms, the proposed method has been validated by numerous comparisons with reference results (two examples are presented in this paper). For doing such comparisons, it is convenient to use some simulation results obtained from a software that has been validated in the literature.[11,15] Future studies will focus on an experimental validation of the method, in cases such as long rooms and coupled rooms.

For comparison, the RAYSCAT software[15] based on the ray-tracing theory is used. The diffusion theory uses the classical mean free path which is based on purely diffuse surface reflections (see Sec. II). For this reason, in the *Rayscat* predictions, reflections are modeled as purely diffuse (i.e., governed by Lambert's law). In the steady-state simulations the number of rays is 10^4, and the maximum number of reflections per ray[16] is 20 (calculation time 10 s for a line of receptors). For the sound-decay calculations the number of rays, and the number of reflections per ray, were set to 2×10^4 and 200, respectively (calculation time about 1 min for one receptor). Results achieved good convergence with this choice of parameters.

1. Sound attenuation in a flat room

The case which is considered here is a flat room of dimensions $20\times20\times2.5$ m^3 (Fig. 5). The walls, ceiling and floor have a low absorption coefficient of 0.05, except for the wall at $y=20$ m, which is highly absorbent ($\alpha=0.5$). Remember here that such a case of a room with surfaces having different absorption coefficients can only be treated with Model 2. A point source of constant output power level 100 dB is located at point (4,10,1). The sound-pressure level is investigated at a height of 1 m along two lines passing close to the source—at $y=9.5$ m and $x=4.5$ m, as shown in Fig. 5.

The agreement between the diffusion model and the ray-tracing model is good, with a maximum discrepancy of 1 dB

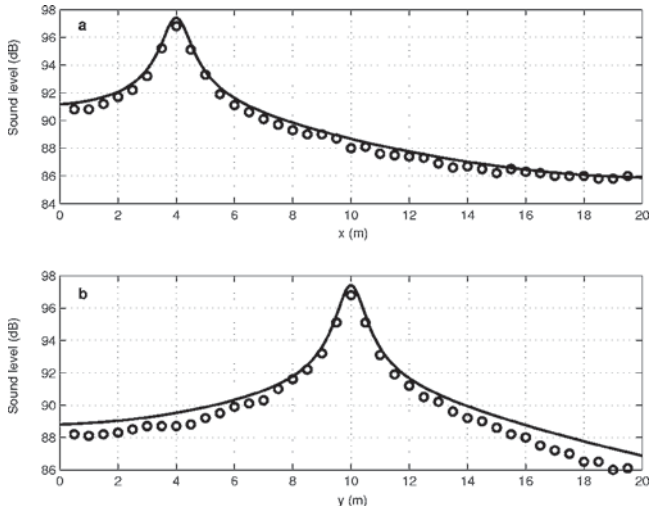


FIG. 6. Sound pressure level (dB) in a flat room $20\times20\times2.5$ m^3 (see Fig. 5 for details about geometry and absorption). Sound level is plotted at height 1 m, along two lines $y=9.5$ m (a) and $x=4.5$ m (b), with the diffusion model (solid line) and a ray-tracing method (○).

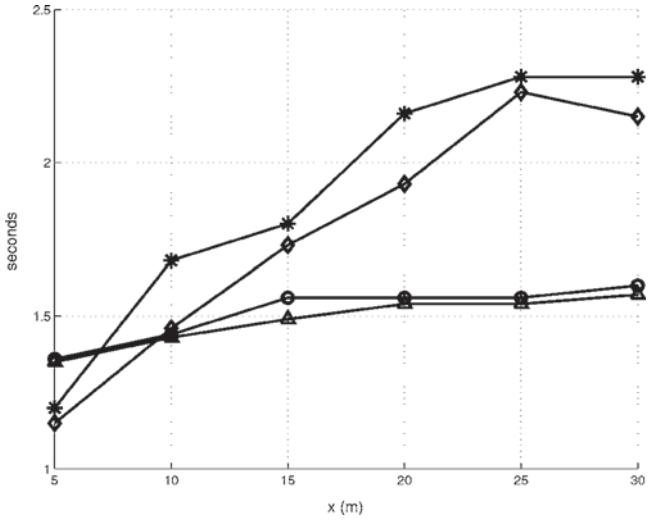


FIG. 7. RT and EDT calculated in a long room $4\times4\times32$ m^3 with uniform absorption coefficient 0.1, as a function of the receiver position along the longer dimension of the room. The source is located at $x=2$ m. (○) RT diffusion; (△) RT ray-tracing; (∗) EDT diffusion; (◇) EDT ray-tracing.

(see Fig. 6). In the x direction [Fig. 6(a)], both models indicate the same significant spatial attenuation of the pressure level. In the y direction [Fig. 6(b)], both models show a higher sound attenuation (by about 2 dB) close to the absorbing wall (located at $y=20$ m). The attenuation given by the ray-tracing model is about 1 dB higher than the diffusion model, but the general agreement is good. Additional results (not presented here) showed that, for flat or long rooms with mean absorption coefficient higher than 0.2, the sound attenuation in dB becomes substantially higher for the diffusion model than for the ray-tracing model. However the range [0,0.2] for the mean absorption coefficient covers the majority of cases in practical applications.

2. Reverberation time in a long room

It is well-known that, in long rooms, the temporal sound decay depends on the distance of the receiver to the source.[3] This phenomenon is addressed in the present example. A hall of dimensions $4\times4\times32$ m^3 with uniform absorption coefficient 0.1 is studied. The source is located at $x=2$ m (i.e., 2 m from one of the extremities of the room), x being the axis along the longest dimension of the hall, from 0 to 32 m. The sound decay is investigated at positions $x=5$, 10, 15, 20, 25, and 30 m, in terms of both RT and EDT (as defined in Sec. III C 3). The time-dependent form of the diffusion equation (Model 2) is solved, as explained in Sec. IV A 2.

Figure 7 shows the RT and EDT estimated with both diffusion and ray-tracing models. The reverberation times given by both models are in very good agreement, and show a slight increase of about 15% along the length of the room. Meanwhile, the EDT given by the diffusion models tends to be 15% higher than the one given by the ray-tracing model. In any case, the trend for both models is the same, and indicates a much higher increase for the EDT than for the RT, reaching about 100% along the room length. That is, the early part of the sound decay is more affected by the room shape.

An investigation of the time-solution curves given by the diffusion model for positions $x=5$, 15, and 25 m (Fig. 8), together with the investigation of the Green's function in Eq. (32), gives further insight into this result. Near the source ($x=5$ m) the decay is mostly governed by the decrease $e^{-\sigma t}$. Further from the source, the t-increasing function $e^{-r^2/4Dt}$ is more and more apparent for the early part, due to the increase of r (source-receiver distance). Physically, the increasing first part of the time-solution models the dispersion of the arrival times of the first sound particles reaching the receiver. This dispersion is higher when the receiver is further from the source. The increasing first part of the time-solution makes the early part of the decrease (i.e., the early part of the sound decay) flatter, and then induces a very significant rise in the EDT. The later part of the decay is, for all positions, governed by the same decrease in $e^{-\sigma t}$. The $1/t^{3/2}$ term in the

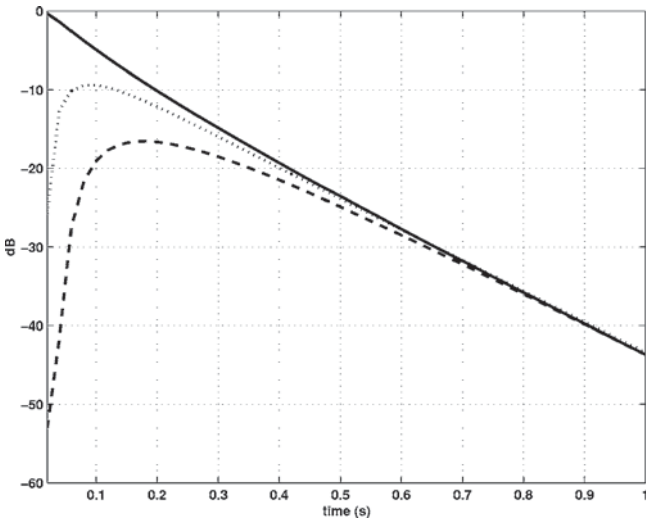


FIG. 8. Sound decay curves evaluated by the diffusion model in a $4\times4\times32$ m^3 hall (uniform absorption 0.1, source located at at $x=2$ m) at several locations. $x=5$ m (solid line), $x=15$ m (dotted line), and $x=25$ m (dashed line).

Green's function [Eq. (32)] seems to have little influence on the main features of the observed time-decay curves: this term could be responsible for a steep decay in the early part of the sound-decay function, but such feature is not visible in the obtained curves.

It is also noticeable that the sound decay functions of Fig. 8 start at $t=0$, which is obviously nonphysical, as the sound-decay function should start after the arrival of the direct sound. This feature can be explained by the nature of the Green's function of Eq. (32): this function indicates that the source has instantaneous effects at any location, but, as pointed out by Morse and Feshbach,[9] it is not valid theoretically for times smaller than the mean free time, i.e., λ/c. The early part of the obtained time-decay functions should then be considered with caution. However, the RT and EDT are calculated in this paper from the maxima of the sound-decay functions (for example from $t=0$ for $x=5$ m in Fig. 8, and from $t \simeq 0.9$ s for $x=15$ m), and are in good agreement with ray-tracing data.

V. CONCLUSION

In the initial theoretical part of this paper (Sec. III), the use of a diffusion process to model the reverberant sound field in empty rooms has been discussed. In addition to recent work dealing with an analogy between the diffusion of particles by a medium of scatterers and room acoustics,[4] the paper proposes a generalization of the model to arbitrary room shapes. It focuses on the definition of appropriate source terms of the diffusion equation for room acoustics, and on a choice of ad hoc boundary conditions. It is then shown that the proposed model may be considered as a natural extension of the classical statistical theory of reverberation.

In the second part (Sec. IV), the numerical application of the diffusion model is discussed in the context of room-acoustical applications, and is compared with the statistical theory, in the case of a cubic room. The numerical results show a good agreement with statistical theory, both in terms of sound-pressure levels and sound decay. Two additional examples are then given, involving the prediction of steady-state pressure levels in a flat room and the spatial variation of the sound decay in a long room. Here again, the results are in good agreement with numerical results obtained by a ray-tracing model.

The main interest of this approach is its ability to give satisfactory results whatever the room shape, at any receiver location, with a calculation time on the order of seconds only for the steady state, and on the order of minutes for a time-varying state, while most existing software needs much longer computational times. Moreover, the most important limitation of finite-element methods (i.e., the size of the elements) is not strictly a problem in this case, since the size is more dependent on the mean free path than on the acoustic wavelength. Thus, the diffusion model can be applied to very large enclosures with a limited meshing. Such an approach could be used in the first phase of an architectural project, to calculate and design the main acoustical features of a room (sound-field distribution and decay), while a classical approach, such as ray-tracing, could be used in the second phase, to give more detailed and accurate results.

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank *Région Poitou-Charentes* for sponsoring the visit of V. Valeau to the University of British Columbia from February to August 2005.

[1] L. Cremer and H. Muller, *Principles and Application of Room Acoustics* (Applied Science Publishers, London, 1978), Vol. 1.
[2] H. Kuttruff, *Room Acoustics*, 4th ed. (Spon Press, London, 1999).
[3] J. Kang, *Acoustics in Long Spaces: Theory and Design Guide* (Thomas Thelford Publishing, London, 2002).
[4] J. Picaut, L. Simon, and J.-D. Polack, "A mathematical model of diffuse sound field based on a diffusion equation," Acust. Acta Acust. 83, 614–621 (1997).
[5] J. Picaut, L. Simon, and J.-D. Polack, "Sound field in long rooms with diffusely reflecting boundaries," Appl. Acoust. **56**, 217–240 (1999).
[6] J. Picaut, J. Hardy, and L. Simon, "Sound field modeling in streets with a diffusion equation," J. Acoust. Soc. Am. **106**, 2638-2645 (1999).
[7] W. Joyce, "Sabine reverberation time and ergodic auditoriums," J. Acoust. Soc. Am. **58**, 643-655 (1975).
[8] F. Ollendorf, "Statistische raumakustik als diffusionsproblem," Acustica **21**, 236 (1969).
[9] P. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953).
[10] F. Hunt, "Remarks on the mean free path problem," J. Acoust. Soc. Am. **36**, 556–564 (1964).
[11] M. Hodgson, "Evidence of diffuse surface reflections in rooms," J. Acoust. Soc. Am. **89**, 765–771 (1991).
[12] E. Gilbert, "Reverberation in spherical rooms with nonuniform absorption," Acustica **66**, 275-280 (1988).
[13] Y. Adda and J. Philibert, *La Diffusion dans les Solides* (Presses Universitaires de France, Paris VI, 1966), Vol. 1.
[14] A. D. Pierce, *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications* (Acoustical Society of America, New York, 1981).
[15] A. Ondet and J. Barbry, "Modeling the sound propagation in fitted workshps using ray tracing," J. Acoust. Soc. Am. **85**, 787–796 (1989).
[16] M. Hodgson, *(D,E)Raycub User's Manual.*

Bibliographie

[1] J.-F. Allard, L. Kelders et W. Lauriks : Ultrasonic surface waves above a doubly periodic grating. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(4):2528–2531, 1999. 105

[2] J. B. Allen et D. A. Berkley : Image method for efficiently simulating small-room acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(4):943–950, 1979. 19

[3] H. Arau Purchades : An improved reverberation formula. *Acustica*, 65(4):163–179, 1988. 184

[4] U. Ayr, E. Cirillo et F. Martellotta : Predicting room acoustical behaviour of coupled rooms with computer simulation techniques : a case study. *In Proceedings of the 17th International Congress on Acoustics*, Rome, Italy, 2001. 17th International Congress on Acoustics. 17

[5] B.-I. L. Dalenbäck : Room acoustics prediction based on a unified treatment of diffuse and specular reflection. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100:899–909, 1996. 17, 179

[6] H. Babovsky, C. Bardos et T. Platkowski : Diffusion approximation for a Knudsen gas in a thin domain with accomodation on the boundary. *Asymptotic Analysis*, 3:265–289, 1991. 132, 163

[7] J. Bachelier : Réflexion du son par une façade urbaine, Avril - Septembre 2001. Rapport de stage de Licence Professionnelle Ingénieurie, Acoustique et Vibratoire. 113

[8] P. Beckmann et A. Spizzichino : *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Artec House, INC, Norwood, 1987. 41, 47, 49, 52, 53, 63, 65

[9] L. L. Beranek : The notebooks of Wallace C. Sabine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 61(3):629 – 639, March 1977. 17

[10] M. Berengier et G. A. Daigle : Diffraction of sound above a curved surface having an impedance discontinuity. *Journal of the Acoustical Society of America*, 84(3):1055–1060, 1988. 17

[11] M. Berengier, J.-F. Hamet et Y. Pichaud : Effects of the acoustical characteristics of road pavements on long-range sound propagation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(5):2919–2919, 1998. 17

[12] J. M. Berman : Behavior of sound in a bounded space. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(6):1275–1291, 1975. 17

[13] A. Billon, J. Picaut et A. Sakout : A modified diffusion model to predict the reverberation time in non-uniformly absorbent enclosures. *Appl. Acoust.*, 2006. soumis. 165, 179, 182, 183, 184

[14] A. Billon, J. Picaut, V. Valeau et A. Sakout : Modélisation du champ acoustique diffus par une équation de diffusion dans les salles couplées : rapport final. Rapport technique, Contrat ADEME 03.04.C.0045, 2005. 178, 187

[15] A. Billon, V. Valeau, A. Sakout et J. Picaut : On the use of a diffusion model for acoustically coupled rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(4):2043–2054, 2006. 165, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193

[16] J. Van Bladel : Low frequency scattering through an aperture in a soft screen. *J. Sound Vib.*, 8(2):186–195, 1968. 83

[17] C. Börgers, C. Greengard et E. Thomann : The diffusion limit of free molecular flow in thin plane channel. *SIAM J. Appl. Math*, 52(4):1057–1075, August 1992. 132, 140

[18] J. Borish : Extension of the image model to arbitrary polyhedra. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(6):1827–1836, 1984. 19

[19] J. S. Bradley : A study of traffic noise around buildings. *Acustica*, 38:247–252, 1977. 21

[20] M. Bruneau : *Manuel d'acoustique fondamental*. Hermes, Paris, 1998. 18, 46

[21] R. Bullen et F. Fricke : Sound propagation in a street. *J. Sound Vib.*, 46(1):33–42, 1976. 17, 18

[22] R. Bullen et F. Fricke : Sound propagation at a street intersection in an urban environment. *J. Sound Vib.*, 54(1):123–129, 1977. 17, 18

[23] R. Bullen et F. Fricke : Sound propagation through vegetation. *J. Sound Vib.*, 80(1):11–23, 1982. 24, 31, 32

[24] G. Cammarata, S. Cavalieri et A. Fichera : A neural network architecture for noise prediction. *Neural Networks*, 8(6):963–973, 1995. 34

[25] M. M. Carroll et R. N. Miles : Steady-state sound in enclosure with diffusely reflecting boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 64(5):1424–1428, 1978. 22, 34

[26] P. Caule : Réflexion diffuse en façade, 2001. Rapport de stage de DEA ACTA. 113

[27] C. Cercignani : *Theory and application of the Boltzmann equation*. Academic Press, Inc., London, 1975. 123

[28] S. Chandrasekhar : Stochastic problems in physics and astronomy. *Reviews of Modern Physics*, 15(1):1–89, 1943. 69

[29] C. H. Chew : Prediction of traffic noise from expressways – Part I : Buildings flanking one side of expressways. *Appl. Acoust.*, 28:203–212, 1989. 40

[30] C. H. Chew : Prediction of traffic noise from expressways – Part II : Buildings flanking both sides of expressways. *Appl. Acoust.*, 32:61–72, 1991. 21, 39

[31] C. H. Chew : The influence of inclined building on road traffic noise. *Appl. Acoust.*, 45:29–46, 1995. 40, 132

[32] C. H. Chew et K. B. Lim : Facade effects on the traffic noise from the expressway. *Appl. Acoust.*, 41:47–62, 1994. 40

[33] C. F. Chien et M. M. Carroll : Sound source above a rough absorbent plane. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(3):827–829, 1980. 21

[34] S.-L. Chuang et R. K. Johnson : Acoustic wave scattering from a fluid/solid periodic rough surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 71(6):1368–1376, 1982. 83

[35] M. Ciarletta, F. Passarella et M. A. Subatyan : Scattering of a horizontally polarized oblique wave by a pair of surface-breaking cracks. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(2):2937–2941, 1996. 83

[36] R. D. Ciskowski et C. A. Brebbia : *Boundary element methods in acoustics*. Computational Mechanics Publication (Boston) - Elsevier Applied Science (New-York), 1991. 18, 83

[37] A. D. Clayden, R. W. D. Culley et P. S. Marsh : Modelling traffic noise mathematically. *Appl. Acoust.*, 8:1–12, 1975. 21

[38] S. Colle : Réflexion du son par des façades de bâtiments, Avril - Septembre 2002. Rapport de stage de DEA d'Acoustique Appliquée. 113

[39] S. Colle : *Modélisation des champs diffus en acoustique urbaine par la théorie des transports : développements théoriques et mise en forme numérique*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2006. 132, 134, 148, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 163

[40] T. J. Cox et Y. W. Lam : Evaluation of methods for predicting the scattering from simple rigid panels. *Appl. Acoust.*, 40:123–140, 1993. 46

[41] T.J. Cox, B.-I.L. Dalenback, P. D'Antonio, J.J. Embrechts, J.Y. Jeon et E. Mommertz : A tutorial on scattering and diffusion coefficients for room acoustic surfaces. *Acustica/acta acustica*, 92(1): 1–15, 2006. 39, 56, 116

[42] T.J. Cox et P. D'Antonio : *Acoustic Diffusers and Absorbers ; Theory, Design and Application*. Spon Press, London, first édition, 2004. 46

[43] L. Cremer et H. A. Müller : *Principle and applications of room acoustics*, volume 1. Applied Science Publishers, London and New-York, 1982. 19, 47, 52, 184, 187

[44] L. Cremer et H. A. Müller : *Principle and applications of room acoustics*, volume 2. Applied Science Publishers, London and New-York, 1982. 19, 184

[45] B. I. Dalenbäck, M. Kleiner et P. Svensson : A macroscopic view of diffuse reflection. *J. Audio Eng. Soc.*, 42(10):793–801, 1994. 17, 18

[46] S. M. Dance et B.M. Shiel : Modelling of sound fields in enclosed spaces with absorbent room surfaces. part ii : absorptive panels. *Appl. Acoust.*, 61(4):373–384, 2000. 184

[47] S. M. Dance et B.M. Shield : Modelling of sound fields in enclosed spaces with absorbent room surfaces. part i : Performance spaces. *Appl. Acoust.*, 58:1–18, 1999. 184

[48] H. G. Davies : Noise propagation in corridors. *J. Acoust. Soc. Am.*, 53(5):1253–1262, 1971. 36

[49] H. G. Davies : Multiple-reflection diffuse-scattering model for noise propagation in streets. *J. Acoust. Soc. Am.*, 64(2):517–521, 1978. 21, 39

[50] H. G. Davies et R. H. Lyon : Noise propagation in cellular urban and industrial spaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 54(2):1565–1570, 1973. 17, 34

[51] L. de Broglie : *La thermodynamique de la particule isolée*. Gauthiers-Villars, Paris, 1964. 122

[52] Jérome Defrance : *Méthode analytique pour le calcul de propagation de bruit extérieur*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 1996. 47, 52

[53] M. E. Delany, D.G. Harland, R. A. Hood et W. E. Scholes : The prediction of noise levels L_{10} due to road traffic. *J. Sound Vib.*, 48(3):305–325, 1976. 40, 132

[54] M. E. Delany, A. J. Rennie et K. M. Collins : Scale model investigations of traffic noise propagation. *Acoustics Report*, Ac 58, September 1972. 84

[55] J. A. DeSanto et P. A. Martin : On angular-spectrum representations for scattering by infinite rough surfaces. *Wave Motion*, 24:421–433, 1996. 84

[56] C. Dogbé : Diffusion anormale pour le gaz de Knudsen. *Compte rendu de l'académie des sciences, Paris*, 326(1):1025 – 1030, 1998. 132

[57] P. R. Donavan : *Sound propagation in urban spaces*. Ph.d. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1976. 20

[58] J. Ducourneau et V. Planeau : Etude de l'absorption acoustique équivalente des parois planes hétérogènes dans un local industriel. Docuement de travail [umap 2001/jd/2001], INRS/Université Henri Poincaré, Le Mans, 2001. 182, 183

[59] G. Dutilleux et U.R. Kristiansen : Implementation of a boundary with diffuse reflection in TLM. *In 10th International Congress on Sound and Vibration*, Stockolm, 2003. 116

[60] G. Dutilleux et J. Waechter : The TLM method for acoustics : local and distributed implemntations in Scilab. *In SCILAB 2004 Conference*, 2004. 116

[61] V. Easwaran et A. Craggs : An application of acoustic finite element models to finding the reverberation times of irregular rooms. *Acustica*, 82:54–64, 1996. 18

[62] H. H. El Dien et P. Woloszyn : Prediction of the sound field into high-rise building facades due to its balcony ceiling form. *Appl. Acoust.*, 65:431–440, 2004. 40

[63] H. H. El Dien et P. Woloszyn : The acoustical influence of balcony depth and parapet form : experiments and simulations. *Appl. Acoust.*, 66:533–551, 2005. 40

[64] S. El-Masri, X. Pelorson, P. Saguet et P. Badin : Vocal tract acoustics using the transmission line matrix (TLM) method. *In ICSLP'96*, volume 2, Philadelphia, 1996. 116

[65] J. J. Embrechts, D. Archambeau et G.B. Stan : Determination of the scattering coefficient of random rough diffusing surfaces for room acoustics applications. *Acustica/acta acustica*, 87:482–494, 2001. 56

[66] M. K. Lim et R. Lehmann : Revue critique des théories de la réverbération. *Revue d'Acoustique*, 59:293 – 302, 1981. 17, 172

[67] M. Etchessahar : Réflexion du son par des façades de bâtiment, Avril - Juillet 1998. Rapport de stage de DEA d'Acoustique Appliquée. 105, 107, 108

[68] C. F. Eyring : Revreberation in 'dead' rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1(2A):168, 1930. 173

[69] V. I. Fabrikant : Sound penetration through an arbitrarily shaped aperture in a rigid screen : Analytical determination of the quadratic terms in low-frequency expansion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 80(5):1438–1446, 1986. 83

[70] V. I. Fabrikant : Sound transmission trough an arbitrarily shaped aperture in a rigid screen : Analytical approach. *J. Sound Vib.*, 111(3):489–498, 1986. 83

[71] V. I. Fabrikant : Sound penetration through an arbitrarily shaped aperture in a soft screen : Analytical approach. *J. Sound Vib.*, 121(1):1–12, 1988. 83

[72] H. L. Frisch : Model of non equilibrium ensemble : Knudsen gas. *Physical Review*, 107(4):917–923, 1957. 124

[73] T. Funkhouser, N. Tsingos, I. Carlbom, G. Elko, M. Sondhi, J. E. West, G. Pingali, P. Min et A. Ngan : A beam tracing method for interactive architectural acoustics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(2):739–756, 2004. 22, 34

[74] M. Garai : Measurement of the sound-absorption coefficient *in situ* : The reflection method using periodic pseudo-random sequences of maximum length. *Appl. Acoust.*, 39:119–139, 1993. 42, 108

[75] D. Gaulin : *Caractérisation physique des sources sonores en milieu urbain*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2000. 128

[76] B. Gauvreau : *Influence des conditions micrométéorologiques sur l'efficacité des écrans acoustiques*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 1999. 124

[77] B. Gauvreau : *Influence des conditions micrométéorologiques sur l'éfficacité des écrans acoustiques*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 1999. 163

[78] R. Gerlach et V. Mellert : Der nachhallvorgang als Markoffsche kette theroie und erste experimentelle überprüfung. *Acustica*, 32(4):211–227, 1975. 28

[79] K. Germaix : Réflexion du son par une façade de bâtiment, Avril - Juillet 1999. Rapport de stage de DEA d'Acoustique Appliquée. 46, 105, 108

[80] J. Giner : Ascertaining confidence within the ray-tracing method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(2):816 – 822, August 1999. 21

[81] M. C. Gomperts : Do the classical reverberation formulae still have a right for existence. *Acustica*, 16(5):255–268, 1965/66. 19

[82] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik : *Tables of integrals, series and products*. Academic Press, Inc., London, sixth edition édition, 2000. 169

[83] R. Hakim : *Mécanique*. Armand Colin, Paris, 1995. 123

[84] R. Hakim : *Introduction à la mécanique statistique*. Masson, Paris, 1996. 123, 124

[85] R. N. S. Hammad et B. M. Gibbs : The acoustic performance of building façades in hot climates : Part 1 – courtyards. *Appl. Acoust.*, 16(2):121–137, 1983. 40

[86] R. N. S. Hammad et B. M. Gibbs : The acoustic performance of building façades in hot climates : Part 2 – closed balconies. *Appl. Acoust.*, 16(6):441–454, 1983. 40

[87] J. K. Haviland et B. D. Thanedar : Monte Carlo applications to acoustical field solutions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 54(6):1442–1448, 1973. 24

[88] D. Heimann : Three-dimensionnal linearised Euler model simulations of sound propagation in idealised urban situations with wind effects. *Appl. Acoust.*, 2006. to be published. 17, 18

[89] D. Heimann et G. Gross : Coupled simulation of meteorological parameters and sound level in a narrow valley. *Appl. Acoust.*, 56:73–100, 1999. 24

[90] R. Heinz : Zur modellienrung des diffusen streuverhaltens des raumbegrenzungsflächen innerhalb raumakustischer schallteilchen-simulationen. *Acustica/acta acustica*, 82:82–90, 1996. In German. 24

[91] K. Heutschi : A simple method to evaluate the increase of traffic noise emission level due to buildings, for a long straight street. *Appl. Acoust.*, 44:259–274, 1995. 40, 132

[92] T. Hidaka : Sound field simulation, some considerations of related problems for wave theoretical auralization. *In CIARM'95 2nd International Conference on Acoustics and Musical Research*, pages 11–22, Ferrara, May 1995. CIARM. 40

[93] M. Hodgson : On the prediction of sound fields in large empty rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(1):253–261, 1988. 19

[94] M. Hodgson : Evidence of diffuse surface reflections in rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(2):765–771, 1991. 39, 174, 186

[95] M. Hodgson : When is diffuse-field theory applicable. *Appl. Acoust.*, 49(3):197–207, 1996. 19

[96] M. Hodgson : Ray-tracing evaluation of empirical models for predicting noise in industrial workshops. *Appl. Acoust.*, 64:1033–1048, 2003. 17

[97] J. Hofmann et K. Heutschi : Simulation of outdoor sound propagation with a transmission line matrix method. *Appl. Acoust.*, 68(2):158–172, 2007. 116

[98] D. G. Holmes et R. H. Lyon : A numerical model of sound propagation in urban areas. *In Second Interagency Symposium on University Researsh in Transportation Noise*, Raleigh, June 1974. North Carolin State University. 21, 22

[99] D. C. Hothersall, K. V. Horoshenkov et S. E. Mercy : Numerical modelling of the sound field near a tall building with balconies near a road. *J. Sound Vib.*, 198(4):507–515, 1996. 40

[100] D. C. Hothersall et S. Simpson : The reflection of road traffic noise. *J. Sound Vib.*, 90(3):399–405, 1983. 40

[101] H. D. Hristov : *Fresnel zones in wireless links, Zone plate lenses and antennas*. Artech House, Boston-London, 2000. 52

[102] H. Imaizumi, S. Kunimatsu et T. Isei : Sound propagation and speech transmission in a branching underground tunnel. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(2):632–642, August 2000. 36

[103] E. Inönü et P. F. Zweifel : *Developments in transport theory*. Academic Press, Inc., London, 1967. 124

[104] M. R. Isamil et D. J. Oldham : Computer modelling of urban noise propagation. *Building Acoustics*, 10(3):221–253, 2003. 34

[105] P. Jean : A variational approach for the study of outdoor sound propagation and application to railway noise. *J. Sound Vib.*, 212(2):275–294, 1998. 105

[106] P. Jean, J. Defrance et Y. Gabillet : The importance of source type on the assessment of noise barriers. *J. Sound Vib.*, 226(2):123–129, 1999. 105

[107] P.B. Johns et R.L. Beurle : Numerical solution of two dimensional scattering problems using a transmission line matrix. *Proceedings of IEEE*, 118(9):1203–1208, 1971. 116

[108] W. B. Joyce : Classical-particle description of photons and phonons. *Physical Review D*, 9(12): 3234–3256, june 1974. 57, 58, 120

[109] W. B. Joyce : Sabine's reverberation time and ergodic auditorium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 58(3):643–655, 1975. 57, 58, 120, 123

[110] W. B. Joyce : Exact effect of surface roughness on the reverberation time of a uniformly absorbing spherical enclosure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 64(5):1429–1436, Nov 1978. 57, 58, 120, 123

[111] K. H. Jun et H. J. Eom : Acoustic scattering from a circular aperture in a thick hard screen. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(4):2324–2327, 1995. 83

[112] A. Jungman, L. Adler, J. D. Achenbach et R. Roberts : Reflection from a boundary with periodic roughness : Theory and experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(3):1025–1032, 1983. 83

[113] H. Juricic et F. Santon : Images et rayons sonores dans le calcul numérique des échogrammes. *Acustica*, 28(2):77–89, 1973. 19, 21

[114] Y. Kagawa, T. Tsuchiya, B. Fujii et K. Fujioka : Discrete huygens' modal approach to sound wave propagation. *J. Sound Vib.*, 218(3):419–444, 1998. 116

[115] J. Kang : Reverberation in rectangular long enclosures with geometrically reflecting boundaries. *Acustica*, 82(3):509–516, 1996. 36

[116] J. Kang : Sound propagation in street canyons : Comparisons between diffusely and geometrically reflecting boundaries. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(3):1394–1404, 2000. 20, 80

[117] J. Kang : *Acoustics of Long Spaces*. Thomas Telford, London, 2002. 19, 20, 22, 34, 159

[118] J. Kang : Numerical modelling of the sound fields in urban streets with diffusely reflecting boundaries. *J. Sound Vib.*, 258(5):793–813, 2002. 22

[119] S. H. Kang, H. J. Eom et T. J. Park : TM-scattering from a slit in a thick conducting screen : Revisited. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 41(5):895–899, 1993. 83

[120] R. S. Keiffer, J. C. Novarini et G. V. Norton : The impulse response of an aperture : Numerical calculations within the framework of the wedge assemblage method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(1):3–12, 1994. 83

[121] L. Kelders, J.-F. Allard et W. Lauriks : Ultrasonic surface waves above rectangular-groove gratings. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(5):2730–2733, 1998. 105

[122] D. E. Kerr : *Propagation of short radio waves*. Radiation Laboratory Series. McGraw-Hill Book Compagny, Inc., New York, Toronto, London, 1951. 49, 50

[123] W. A. Kinney, C. S. Clay et G. A. Sandness : Scattering from a corrugated surface : Comparison between experiment, Helmholtz-Kirchhoff theory, and the facet-ensemble method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(1):183–194, 1983. 83

[124] N. W. M. Ko et C. P. Tang : Reverberation time in a high-rise city. *J. Sound Vib.*, 56(3):459–461, 1978. 19

[125] N. Korany, J. Blauert et O. Abdel Alim : Acoustic simulation of rooms with boundaries of partially specular reflectivity. *Appl. Acoust.*, 62:875–887, 2001. 22

[126] A. Krokstad, S. Strom et S. Sorsdal : Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique. *J. Sound Vib.*, 8(1):118–125, 1968. 21

[127] W. Kropp et J. Bérillon : A theoretical model to investigate the acoustic performance of building façades in the low and middle frequency range. *Acustica/acta acustica*, 84:681–688, 1998. 40

[128] E. Kruzins : The prediction of sound fields inside non diffuse spaces : Transmission loss considerations. *J. Sound Vib.*, 91:439–445, 1983. 24, 28

[129] E. Kruzins et F. Fricke : The prediction of sound fields in non diffuse spaces by a random walk approach. *J. Sound Vib.*, 81:549–564, 1982. 24, 28, 30

[130] A. Kulowski : Algorithmic representation of the ray tracing technique. *Appl. Acoust.*, 18:449–469, 1985. 21

[131] U. J. Kurze : Scattering of sound in industrial spaces. *J. Sound Vib.*, 98(3):349–364, 1985. 17, 31, 36, 173

[132] H. Kuttruff : Über Nachhall in Medien mit Unregelmäßig Verteilten Streuzentren, Insbesondere in Hallräumen mit Aufgehängten Streuelementen. *Acustica*, 18:131–143, 1967. In German. 24, 29

[133] H. Kuttruff : Simulierte nachhallkurven in rechteckräumen mit diffusem schallfed. *Acustica*, 25(6):333–342, 1971. In German. 19, 22, 34

[134] H. Kuttruff : *Room acoustics*. Applied Science Publishers, London, 1973. 18, 19, 22, 34

[135] H. Kuttruff : Nachhall und effektive absorption in räumen mit diffuser wandreflexion. *Acustica*, 35(3):141–153, 1976. In German. 22, 34

[136] H. Kuttruff : Sound decay in reverberation chambers with diffusing elements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69(6):1716–1723, 1981. 24, 25, 36

[137] H. Kuttruff : A mathematical model for noise propagation between buildings. *J. Sound Vib.*, 85(1):115–128, 1982. 24, 25, 26, 28

[138] H. Kuttruff : *Room Acoustics*. Spon Press, London, fourth édition, 2000. 34, 40, 167, 168, 169, 173, 177, 187

[139] H. Kuttruff et Th. Strassen : Zur abhängigkeit des raumnachhalls von der wanddiffusität und von der raumform. *Acustica*, 45(4):246–255, august 1980. In German. 22, 24

[140] A. Lakhtakia, V. K. Varadan et V. V. Varadan : Scattering by a partially illuminated, doubly periodic, doubly infinite surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(6):1999–2004, 1985. 83

[141] Y. W. Lam : A boundary integral formulation for the prediction of acoustic scattering from periodic structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(2):762–769, 1999. 83

[142] A. Le Bot : Comparison of an integral equation on energy and the ray-tracing technique in room acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(4):1732–1740, 2000. 34

[143] A. Le Bot : A functional equation for the specular reflection of rays. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(4): 1276–1287, 2002. 23

[144] T. Le Pollès : *Modélisation des champs diffus en acoustique architecturale par la théorie des transports : application au milieu urbain.* Thèse de doctorat, Université du Maine, 2003. 24, 34, 35, 57, 62, 131, 132, 140, 144

[145] T. Le Pollès, J. Picaut, M. Bérengier et C. Bardos : Sound field modeling in a street canyon with partially diffusely reflecting boundaries by the transport theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(5):2969–2983, 2004. 140, 143, 146

[146] T. Le Pollès, J. Picaut, S. Colle, M. Bérengier et C. Bardos : Sound-field modeling in architectural acoustics by a transport theory : Application to street canyons. *Phys. Rev. E*, 72(4), 2005. article n°046609. 127, 129, 130, 132, 135

[147] K. P. Lee : Prediction of propagation in a networks of sound channels, with application to noise transmission in city sreets. M.sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1974. 20

[148] J. Legallet : Influence de la diffusion par les façades en acoustique urbaine, Avril - Juillet 2004. Rapport de stage de DEA d'Acoustique Appliquée. 80

[149] O. Legrand et D. Sornette : Test of Sabine's reverberation time in ergodic auditoriums within geometrical acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(2):865 – 870, August 1990. 19, 123

[150] M. Legros : Acoustique urbaine : Simulation de l'influence de la diffusion par les façades. caractérisation d'une source pour maquette, Mai - Juillet 2005. Rapport de stage de DEA d'Acoustique Appliquée. 80

[151] W. Leschnik : Zur schallausbreitung in bebauten und bepflanzten gebieten. *Acustica*, 44:14–22, 1980. In German. 24

[152] T. Lewers : A combined beam tracing and radiant exchange computer model of room acoustics. *Appl. Acoust.*, 38:161–178, 1993. 22

[153] K. Li et M. Hodgson : Improved methods for estimating fitting density in industrial workrooms. *J. Sound Vib.*, 218(3):463–479, 1998. 24

[154] K. M. Li, W. K. Lui, K. K. Lau et K. S. Chan : A simple formula for evaluating the acoustic effect of balconies in protecting dwellings against road traffic noise. *Appl. Acoust.*, 64:633–653, 2003. 40

[155] E. A. Lindqvist : Sound attenuation in large factory spaces. *Acustica*, 50:313–328, 1982. 25, 32, 34

[156] E. A. Lindqvist : Noise attenuation in factories. *Appl. Acoust.*, 16:183–214, 1983. 25

[157] K. K. Lu et K. M. Li : The propagation of sound in narrow street canyons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(2):537–550, 2002. 21

[158] R. J. Lucas et V. Twersky : High-frequency reflection and scattering of sound by ellipsoidally embossed surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83(6):2005–2011, 1988. 83

[159] R. H. Lyon : Role of multiple reflections and reverberation in urban noise propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 55(3):493–503, 1974. 17, 21, 39

[160] R.H. Lyon : *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*. R. H. Lyon Corp and R. G. Dejong, Cambridge, second édition, 1995. 34, 36

[161] R. Makarewicz et P. Kokowski : Surface reflection of noise generated by a moving line source. *Acustica*, 80:5333–540, 1994. 40

[162] R. Makarewicz et P. Kokowski : Surface reflection of noise generated by a moving point source. *Acustica*, 80:527–532, 1994. 40

[163] R. Makarewicz et P. Kokowsky : Reflection of noise from a building's facade. *Appl. Acoust.*, 43:149–157, 1994. 39, 40

[164] V. Markovic : Efficient numerical solution for nonuniform field in a rectangular room. *Acta Acustica*, 84:570–572, 1998. 17

[165] D. N. May : Freeway noise and high-rise balconies. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(3):699–704, 1979. 40

[166] O. M. Mendez, M. Cadilhac et R. Petit : Diffraction of a two-dimensional electromagnetic beam wave by a thick slit pierced in a perfectly conducting screen. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(3):328–331, 1983. 93

[167] D. Y. Mikhin : Scattering of a plane wave by a model rough surface with steep corrugations. *Sov. Phys. Acoust.*, 36(1):50–54, 1990. 83

[168] G. Millington : A modified formula for reverberation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 4(1A):69–82, 1932. 173

[169] E. A. Mohsen et D. J. Oldham : Traffic noise reduction due to the screening effect of balconies on a building façade. *Appl. Acoust.*, 10:243–257, 1977. 40

[170] E. Mommertz : Angle-dependent in-situ measurments of reflection coefficients using a subtraction technique. *Appl. Acoust.*, 46:251–263, 1995. 42

[171] P. M. Morse et H. Feshbach : *Methods of theoretical physics*, volume 1. Mc Graw Hill Book Compagny, New York, 1953. 124, 164, 167, 168

[172] P. M. Morse et H. Feshbach : *Methods of theoretical physics*, volume 2. Mc Graw Hill Book Compagny, New York, 1953. 124, 164

[173] P. M. Morse et K. U. Ingard : *Theoretical acoustics*. Mc Graw-Hill, 1968. 17, 18, 19

[174] H. Nélisse et J. Nicolas : Characterization of a diffuse field in a reverberant room. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(6):3517–3524, June 1997. 36

[175] L. Njis, G. Jansens, G. Vermeir et M. van der Voorden : Absorbing surfaces in ray-tracing programs for coupled spaces. *Appl. Acoust.*, 63:611–626, 2002. 17

[176] J. C. Novarini et H. Medwin : Computer modeling of resonant sound scattering from a periodic assemblage of wedges : Comparison with theories of diffraction gratings. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(5):1754–1759, 1985. 83

[177] J. A. Ogilvy : *Theory of wave scattering from random rough surfaces*. Hadam Hilger, Bristol, 1991. 83

[178] M. Ögren et J. Forssén : Modelling a city canyon problem in a turbulent atmosphere using an equivalent sources approach. *Appl. Acoust.*, 65:629–642, 2004. 17, 18

[179] M Ögren et W. Kropp : Road traffic noise propagation between two dimensionnal city canyons using an equivalent sources approach. *Acustica/acta acustica*, 90(2):293–300, 2004. 18

[180] D.J. Oldham et M.M. Radwan : Sound propagation in city streets. *Building Acoustics*, 1:65–88, 1994. 21

[181] F. Ollendorff : Statistische raumakustik als diffusionsproblem (ein vorschlag). *Acustica*, 21:236–245, 1969. In German. 32, 165

[182] F. Ollendorff : Diffusionstheorie des schallfeldes im straßentunnel. *Acustica*, 34:311–315, 1976. In German. 32, 165

[183] A. M. Ondet et J. L. Barbry : Sound propagation in fitted rooms – comparison of differents models. *J. Sound Vib.*, 125(1):137–149, 1988. 17

[184] A. M. Ondet et J. L. Barbry : Modeling of sound propagation in fitted workshops using ray tracing. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(2):787–796, 1989. 182, 193, 196

[185] T. Otsuki : Diffraction by a rectangular aperture. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68(1):329–333, 1980. 83

[186] H. H. Park et H. J. Eom : Acoustic scattering from a rectangular aperture in a thick hard screen. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(1):595–598, 1997. 83

[187] H. H. Park et H. J. Eom : Electromagnetic scattering from multiple rectangular apertures in a thick conducting screen. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 47(6):1059–1060, 1999. 83

[188] T. J. Park et H. J. Eom : An analysis of transverse electric scattering from a rectangular channel in a conducting plane. *Radio Sci.*, 28(5):663–673, 1993. 83, 93

[189] T. J. Park et H. J. Eom : TE scattering from a slit in a thick conducting screen : Revisited. *IEEE Tans. Antennas Propag.*, 421(1):112–114, 1994. 83

[190] J. Philibert : *Diffusion et transport de matière dans les solides*. Les Editions de Physique, Paris, 1985. 128

[191] J. Picaut : *Modélisation des champs diffus par une equation de diffusion. Application à l'acoustique des salles et à l'acoustique urbaine*. Ph.d. thesis, Université du Maine, Le Mans (France), 1998. 11, 24, 29, 171, 172

[192] J. Picaut : Acoustic scattering from a rectangular window or a balcony in a building façade. *In International Congress on Acosutics 17th ICA*, Rome, 2001. 98

[193] J. Picaut : Numerical modeling of urban sound fields by a diffusion process. *Appl. Acoust.*, 63(9):965–991, 2002. 14, 148

[194] J. Picaut : Effects of diffusion on the sound propagation in a street. *In INTERNOISE 2004*, 2004. 73

[195] J. Picaut : Application numérique du concept de particules sonores à la modélisation des champs sonores en acoustique architecturale. *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, 258-259: 59–88, 2005. 14, 24, 57, 73

[196] J. Picaut : *Approches physiques de l'impact sonore des aménagements urbains*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, 2005. 12

[197] J. Picaut et M. Bérengier : Qualitative evaluation of sound reflection by a building façade. *In INTERNOISE 2001*, 2001. 40

[198] J. Picaut, M. Bérengier et E. Rousseau : Noise impact modelling of a roundabout. *In INTERNOISE 2005*, 2005. 12

[199] J. Picaut, J. Hardy et L. Simon : Prediction of background noise in a built-up area : a periodic disposition of buildings. *Phys. Rev. E*, 60(4):4851–4859, 1999. 66, 68, 70, 71, 72, 73

[200] J. Picaut, T. Le Pollès, P. L'Hermite et V. Gary : Experimental study of sound propagation in a street. *Appl. Acoust.*, 66(2):149–173, 2005. 14, 159

[201] J. Picaut, J.-D. Polack et L. Simon : A mathematical model of diffuse sound field based on a diffusion equation. *Acustica/acta acustica*, 83(4):614–621, 1997. 165, 166, 169, 170, 171

[202] J. Picaut, I. Schmich, J. Defrance, P. Woloszyn, C. Sémidor, A. Barlet et F. Chartier : Effets de la réflexion diffuse des façades sur la propagation acoustique et sur la représentation de l'environnement sonore en milieu urbain. Rapport de recherche PREDIT commandé par le MEDD, LCPC, CSTB, EAN, EAPBx, Juillet 2006. 105

[203] J. Picaut et L. Simon : A scale model experiment for the study of sound propagation in urban areas. *Appl. Acoust.*, 62:327–340, 2001. 14, 21, 22, 107

[204] J. Picaut, L. Simon et J.-D. Polack : Sound field in long rooms with diffusely reflecting boundaries. *Appl. Acoust.*, 56(4):217–240, 1999. 137, 165, 177, 182

[205] B. Picoux : Étude expérimentale de la propagation du son en milieu urbain, Avril - Juillet 1999. Rapport de stage de DEA d'Acoustique Appliquée. 80

[206] A. Plichet : Diffusion du bruit en milieu urbain, Avril - Août 2003. Rapport de stage de fin d'étude. 105, 106

[207] J. A. Portí et J. A. Morente : TLM method and acoustics. *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, 14(2):171–183, 1951. 116

[208] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling : *Numerical recipes in C, The art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. 94

[209] W. H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B. P. Flannery : *Numerical recipes in FORTRAN 77, The art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. 63

[210] I. Prigogine : *Non-equilibrum statistical mechanics*, volume 1. Intersciences, New York, 1962. 123

[211] M. Raimbault : *Simulation des ambiances sonores urbaines : Intégration des aspects qualitatifs*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2002. 13

[212] W. C. Sabine : *Collected papers on acoustics*. Dover, New York, 1964 (première publication en 1922). 17, 19, 56

[213] A. Sauter et W. W. Soroka : Sound transmission through rectangular slots of finite depth between reverberant rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 47(1):5–11, 1969. 83

[214] W. R. Schlatter : Sound power measurement in a semi-confined space. M.sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1971. 20

[215] A. Schreiden et G. De Mullewie : Traitement pratique de la diffraction et des problèmes connexes. *Bulletin d'Acoustique*, 13:9–33, 1992. 47

[216] E. Schröder : Nachhall in geschlossen bebauten straßen. *Lärmbekämpfung*, 17:11, 1973. Introuvable. 19

[217] M. R. Schroeder : Digital simulation of sound transmission in reverberant spaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 47(2):424–431, 1970. 24

[218] M. V. Sergeev : Scattered sound and reverberation on city and in tunnels. *Sov. Phys. Acoust.*, 25(3):248–252, 1979. 20

[219] W. J. Sette : A new reverberation time formula. *J. Acoust. Soc. Am.*, 4(1A):8, 1930. 173

[220] E. A. G. Shaw et N. Olson : Theory of steady-state urban noise for an ideal homogeneous city. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51(6):1781–1793, 1972. 34

[221] R. De Smedt : Low frequency scattering through an aperture in a rigid screen – some numerical results. *J. Sound Vib.*, 75(3):371–386, 1981. 83

[222] P. Steenackers, H. Myncke et A. Cops : Reverberation in town streets. *Acustica*, 40:115–119, 1978. 17, 19

[223] U. Stephenson : Eine schallteilchen-computersimulation zur berechnung der für die hörsamkeit in konzertzälen massgebenden parameter. *Acustica*, 59:1–20, 1985. 24

[224] U. Stephenson : The sound particle simulation technique - an efficient prediction method for room acoustical parameters of concert halls. *In 86th AES Convention*, March 1989. 24

[225] U. Stephenson : Comparison of the mirror image source method and the sound particle simulation method. *Appl. Acoust.*, 29:35–72, 1990. 20, 24

[226] U. Stephenson : Quantized pyramidal beam tracing - A new algorithm for room acoustics and noise immission prognosis. *Acustica/acta acustica*, 82:517–525, 1996. 22, 34

[227] M. R. Stinson et E. A. G. Shaw : Acoustic impedance of small, circular orifices in thin plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(6):2039–2042, 1985. 83

[228] S. H. Tang et K. M. Li : The prediction of façade effect from a point source above an impedance ground. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(1):278–288, 2001. 40

[229] P. J. Thorsson : Application of linear transport to sound propagation in cities. *Acustica/acta acustica*, 83:1–10, 1997. 27, 73, 128

[230] P. J. Thorsson, M. Ögren et W. Kropp : Noise levels on the shielded side in cities using a flat city model. *Appl. Acoust.*, 65:313–323, 2004. 34

[231] S. Tinti : Diffraction by a thick slitted screen. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(4):888–895, 1979. 83

[232] R. R. Torres : Audibility of "diffusion" in room acoustics auralization : An initial investigation. *Acta Acustica*, 86(6):919–927, 2000. 17

[233] V. Valeau, M. Hodgson et J. Picaut : A diffusion-based analogy for the prediction of sound in fitted rooms. *Acustica/acta acustica*, 93(1):94–105, 2006. 165, 173, 174, 186, 194, 195, 196

[234] V. Valeau, J. Picaut et M. Hodgson : On the use of a diffusion equation for room-acoustic predictions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131:1504–1513, 2006. 153, 165, 172, 173, 175, 179, 180, 181, 182, 185

[235] T Van Renterghem, D. Botteldooren et E. Salomons : Pareameter study of sound propagation between city canyons with coupled FDTD-PE model. *In Forum Acusticum*, pages 1153–1156, 2005. 18

[236] R. Y. Vinokur : Propagation of sound generated by a point source in certain built-up urban environments. *Sov. Phys. Acoust.*, 25(3):377–379, 1979. 20

[237] M. Vorländer : Simulation of the transient and steady-state sound propagation in rooms using a new combined ray-tracing/image-source algorithm. *J. Acoust. Soc. Am.*, 86(1):172–178, July 1989. 22

[238] M. Vorländer et E. Mommertz : Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients. *Appl. Acoust.*, 60:187–199, 2000. 56

[239] E. Walerian et R. Janczur : Statistical description of noise propagation in a built-up area. *Archives of Acoustics*, 19(2):201–225, 1994. 34

[240] P. C. Waterman : Scattering by periodic surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(4):791–802, 1975. 83

[241] A. G. Webster : *Partial differential equations of mathematical physics*. Dover Publications Inc., second corrected édition, 1933. 164

[242] A. M. Weinberg et E. P. Wigner : *The physical theory of neutron chain reactors*. The University of Chicago Press, 1958. 123

[243] R. Wentang et K. Attenborough : Prediction of sound fields in rooms using statistical energy analysis. *Appl. Acoust.*, 34(3):207–220, 1991. 34

[244] F. M. Wiener, C. I. Malme et C. M. Gogos : Sound propagation in urban areas. *J. Acoust. Soc. Am.*, 37(4):738–747, 1965. 20, 56

[245] M. M. R. Williams : *Mathematical methods in particle transport theory*. Butterworth & Co (Publishers) Ltd, London, 1971. 124

[246] S. Wu et E. Kittinger : On the relevance of sound scattering to the prediction of traffic noise in urban streets. *Acustica*, 81:36–42, 1995. 21, 40, 80

[247] N. Xiang : Evaluation of reverberation times using a nonlinear regression approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(4):2112–2121, 1995. 21

[248] N. Xiang et P. M. Goggans : Evaluation of decay times in coupled spaces : Bayeisian parameter estimation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(3):1415–1424, 2001. 17, 19

[249] Z. Xiangyang, C. Ke-an et S. Jincai : Development of a hybrid computer model for simulating the complicated virtual sound field in enclosures. *Appl. Acoust.*, 63:481–491, 2002. 22

[250] K. W. Yeow : External reverberation observed in built-up areas. *J. Sound Vib.*, 48(3):438–440, 1976. 17, 19

[251] K. W. Yeow, N. Popplewell et J. F. W. Mackay : Shielding of noise from statistically stationary traffic flows by simple obstacles. *J. Sound Vib.*, 57(2):203–224, 1978. 19

[252] X. Zhang : A new formula for reverberation time. *Acustica/acta acustica*, 89:857–862, 2003. 184

Acronymes

ADEME Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie
ARU Section Acoustique Routière et Urbaine
ATER Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche
BEM *Boundary Element Method*
BRDF *Bidirectional Reflectance Distribution Function*
CAO Conception Assistée par Ordinateur
CEBTP Centre Expérimental de recherches et d'études du Bâtiment et des Travaux Publics
CERMA Centre de Recherche Méthodologique d'Architecture, UMR CNRS 1563
CETE Centre d'Études Techniques de l'Équipement
CIDB Centre d'Information et de Documentation sur le Bruit
CIFRE Conventions Industrielles de Formation par la REcherche
CNRS Centre National de la Recherche Scientifique
CSTB Centre Scientifique et Technique du Bâtiment
DEA Diplôme d'Étude Approfondie
EDP Équations aux Dérivées Partielles
EDT *Early Decay Time*
ENSAN École Nationale Supérieure d'Architecture de Nantes
ESAR Division Entretien, Sécurité et Acoustique des Routes
ESM *Equivalent Sources Method*
FEM *Finite Element Method*
FDTD *Finite Difference - Time Domain*
FDP Fonction de Distribution à une Particule
FR73 Fédération de Recherche 73 du CNRS « Physique et images de la Ville »
GdR Groupement de Recherche CNRS 2493 « Bruit des transports »
GRECAU Groupe de Recherche Environnement Conception Architecturale et Urbaine
IRSTV Institut de Recherche des Sciences et Techniques de la Ville
ISM *Image Source Method*
LAUM Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613
LCPC Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
LEA Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques
LEPTAB Laboratoire d'Étude des Phénomènes de Transfert Appliqués au Bâtiment
LRPC Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées
LRS Laboratoire Régional des ponts et chaussées de Strasbourg
MEDD Ministère de l'Écologie et du Développement Durable
MLS *Maximum Length Sequences*
PE *Parabolic Equation*
PDU Plan de Déplacement Urbain
PIR-Ville Programme Interdisciplinaire de Recherche sur la Ville

PLU Plan Local d'Urbanisation

POS Plan d'Occupation des Sols

PREDIT Programme National de Recherche et d'Innovation dans les Transports Terrestres.

RT20 *Reverberation time* (calculé sur une décroissance de 20 dB)

RT30 *Reverberation time* (calculé sur une décroissance de 30 dB)

RT60 *Reverberation time* (calculé sur une décroissance de 60 dB)

RST Réseau Scientifique et Technique du ministère en charge de l'équipement

SCoT Schéma de Cohérence Territoriale

SEA *Statistical Energy Analysis*

TLM *Transmission Line Matrix*

TR Durée de Réverbération

– Janvier 2007 –