



HAL
open science

Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891)

Guillaume Moussard

► **To cite this version:**

Guillaume Moussard. Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891). Mathématiques [math]. Université de Nantes - Faculté des Sciences et Techniques, 2015. Français. NNT: . tel-02515047

HAL Id: tel-02515047

<https://hal.science/tel-02515047>

Submitted on 23 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Guillaume MOUSSARD

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : *STIM*

Discipline : *Histoire des Mathématiques*

Spécialité :

Unité de recherche : *Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR 6629*

Soutenu le *25/03/2015*

Thèse N° :

Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891)

JURY

Rapporteurs : **Rossana TAZZIOLI**, Professeur des universités, Université de Lille 1
Klaus VOLKERT, Professeur, Université de Wuppertal (Allemagne)

Examineurs : **Dominique TOURNES**, Professeur des universités, Université de la Réunion (président)
Xavier SAINT-RAYMOND, Professeur des universités, Université de Nantes
Dominique BÉNARD, Maître de conférences, Université du Maine

Directeur de Thèse : **Évelyne BARBIN**, Professeur des universités, Université de Nantes

REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement ma directrice de recherche Evelyne Barbin. Ce travail a largement bénéficié de son enthousiasme communicatif, de son extrême rigueur et de sa disponibilité sans faille. Merci pour cette aventure intellectuelle et humaine, pour les horizons ouverts, et pour le plaisir de comprendre à chaque fois un peu plus et un peu mieux.

Je remercie Rossana Tazzioli et Klaus Volkert d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je remercie également Dominique Tournès, Xavier Saint-Rémond et Dominique Bénard de bien vouloir en constituer le jury.

Je remercie l'ESPE de Nantes, au sein de l'université de Nantes, pour les conditions matérielles favorables dont j'ai bénéficié.

Merci à Élisabeth Bussienne pour sa relecture attentive à la correction syntaxique et orthographique du texte, ainsi qu'à Thierry Joffredo pour les dépannages impromptus avec LaTeX.

Merci, enfin, à ma famille, pour toute l'aide et le soutien apportés.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
-----------------------	---

I Problèmes et méthodes dans la constitution d'un enseignement secondaire de la géométrie (1794-1836) 23

I	Les trois visages de l'analyse algébrique	29
1	Deux conceptions de l'analyse	30
1.1	L'analyse de Pappus	30
1.2	L'analyse de Descartes	32
2	Trois usages de l'analyse algébrique comme méthode	35
2.1	L'analyse algébrique comme méthode de résolution des problèmes dans la <i>Géométrie</i> de Descartes (1637) . . .	35
2.2	L'analyse algébrique comme méthode d'invention dans les <i>Nouveaux éléments de géométrie</i> de Lamy (1692) . .	38
2.3	L'analyse algébrique comme méthode démonstrative dans l' <i>Introduction à l'analyse infinitésimale</i> d'Euler (1748)	40
2.4	Conclusion	41
3	L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement	42
3.1	Le <i>Cours de mathématiques</i> de Bézout (1764-1769) . .	42
3.2	L' <i>Application de l'algèbre à la géométrie</i> de Lacroix (1798)	50

TABLE DES MATIÈRES

3.3	Les ouvrages d'enseignement du premier tiers du XIX ^e siècle	56
4	Conclusion	64
II	L'essor de la géométrie rationnelle : nouvelles notions et méthodes	67
1	Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle	68
1.1	La <i>Géométrie descriptive</i> de Monge (1799)	69
1.2	La <i>Géométrie de position</i> de Carnot (1803)	74
1.3	Les <i>Solutions peu connues</i> de Servois (1805)	83
1.4	Le <i>Traité des propriétés projectives des figures</i> de Poncelet (1822)	85
2	La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel	91
2.1	Les cours pour l'industrie de Bergery (1826)	93
2.2	La <i>Géométrie</i> de Bobillier dans les écoles d'arts et métiers (1832)	102
2.3	Conclusion	108
3	Conclusion	108
III	Des problèmes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie	111
1	Les <i>Éléments de géométrie</i> en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix	112
1.1	Les <i>Éléments de Géométrie</i> de Bézout (1764)	114
1.2	Les <i>Éléments de Géométrie</i> de Legendre (1794)	119
1.3	Les <i>Éléments de Géométrie</i> de Lacroix (1798)	126
1.4	Conclusion	132
2	Les éditions successives du <i>Cours de Géométrie élémentaire</i> de Vincent (1826-1844)	133
2.1	Où placer les problèmes dans l'ouvrage?	135
2.2	La distinction entre problème « graphique » et problème « numérique »	136
2.3	Grouper les problèmes par analogie	139
2.4	Classement des problèmes et classement des théorèmes	141
2.5	Conclusion	142
3	Conclusion	143
IV	La constitution de recueils de problèmes	145
1	Lamé et Duhamel : deux conceptions différentes de la généralité	146

TABLE DES MATIÈRES

1.1	L' <i>Examen</i> de Gabriel Lamé (1818) : la notion de méthode particulière	146
1.2	Les « considérations générales » de Duhamel (1823)	151
2	Choix, organisation et sources des énoncés de problèmes	155
2.1	L'ouvrage de Louis Puissant pour compléter celui de Lacroix (1801)	156
2.2	Le recueil de Jean-Guillaume Garnier (1810)	161
2.3	Les deux recueils de Reynaud (1823 et 1833)	165
3	Conclusion	169
4	Conclusion de la première partie	174

II Recrudescence des problèmes et des méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie (1836-1865) 177

V	Méthodes et généralité : les ouvrages de Chasles et de Comte	187
1	Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles	188
1.1	L' <i>Aperçu historique</i> de Chasles (1837) : les méthodes de la « géométrie moderne »	190
1.2	Le <i>Traité de géométrie supérieure</i> (1852) : pour un procédé uniforme de démonstration	203
1.3	Conclusion	211
2	La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement	211
2.1	Les notions récentes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire (1836-1865)	211
2.2	Les notions récentes dans les ouvrages de géométrie analytique (1841-1851)	214
2.3	Amiot (1850) : essai d'une reformulation méthodique de la géométrie élémentaire	227
2.4	Conclusion	230
3	La généralité comme essence de la géométrie analytique chez Auguste Comte (1843)	231
3.1	Le <i>Traité élémentaire</i> de Comte	231
3.2	Quelle généralité dans les ouvrages d'enseignement ?	237
3.3	Conclusion	241

TABLE DES MATIÈRES

4	Conclusion	242
VI	Une présence accrue des problèmes dans les ouvrages d'enseignement	245
1	Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire	246
1.1	Nature, organisation et nombre des énoncés	252
1.2	Des instruments pour réaliser les constructions	260
1.3	Pourquoi donner des problèmes à résoudre?	267
1.4	Conclusion	283
2	Les recueils de problèmes de géométrie élémentaire	284
2.1	Ritt (1836) : l'extension de la taille des recueils	284
2.2	Sarazin (1849) : les problèmes organisés pour développer l'esprit d'invention	287
2.3	Planche (1840) et Percin (1848) : compléter la géométrie élémentaire	292
2.4	Le recueil d'Eugène Catalan (1852)	295
2.5	Escoubès (1854) : traduction d'un recueil de Simpson	296
2.6	Conclusion	296
3	Les problèmes en géométrie analytique	298
3.1	Les problèmes dans les manuels de géométrie analytique	299
3.2	Deux ouvrages tournés vers la construction des coniques	303
3.3	Conclusion	311
VII	La méthode et les méthodes pour résoudre les problèmes	313
1	Ritt (1836) : l'analyse comme méthode en géométrie élémentaire	314
2	Serret (1855) : recenser les méthodes pour résoudre les questions de géométrie	321
2.1	Un catalogue de méthodes de géométrie élémentaire	322
2.2	La transformation par rayons vecteurs réciproques	324
3	Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire	326
3.1	Guibal (1846) : quatre procédés généraux	327
3.2	Percin (1848) : les méthodes en complément de la théorie	329
3.3	Amiot (1858)	331
3.4	Comberousse (1861)	334
3.5	Conclusion	337

TABLE DES MATIÈRES

4	Les méthodes particulières dans les ouvrages de géométrie analytique	338
4.1	Cirodde (1848) : Quelle méthode pour mettre les questions en équation ?	339
4.2	Les « procédés particuliers » de Briot et Bouquet . . .	341
5	Conclusion	343
6	Conclusion de la deuxième partie	344

III Normalisation de la place des problèmes dans les manuels et développement des ouvrages portant sur les méthodes (1865-1891) 347

VIII	Les méthodes dans les ouvrages d'enseignement	357
1	De nouvelles méthodes en Géométrie analytique	359
1.1	Les méthodes du <i>Traité des sections coniques</i> de Georges Salmon (1855 et 1870)	360
1.2	Les auteurs français de géométrie analytique héritiers de Salmon et de Chasles	375
1.3	Quelle réalité de l'enseignement préparatoire de ces méthodes ?	385
1.4	Deux recueils d'exercices à la fin des années 1880 . . .	391
1.5	Conclusion	397
2	Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire	398
2.1	Les ouvrages d'initiation à la géométrie supérieure . . .	399
2.2	Les notions de géométrie rationnelle dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire	415
2.3	Conclusion	419
3	Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire	420
3.1	Desboves (1870) : les théories au service de la méthode	421
3.2	Frère Gabriel-Marie (1882) : multiplier les moyens du géomètre	445
3.3	Petersen (1880) : lieux géométriques et transformations	462
3.4	Conclusion	481

TABLE DES MATIÈRES

IX	Problèmes et ouvrages d'enseignement	483
1	Les problèmes dans les ouvrages de cours	483
1.1	Géométrie élémentaire	484
1.2	Les exercices en Géométrie analytique	488
2	Les recueils et les annales	491
2.1	Les recueils de problèmes	492
2.2	Les annales	495
3	Les journaux intermédiaires destinés aux élèves de mathématiques élémentaires	498
3.1	Le <i>Journal de mathématiques élémentaires</i> de Justin Bourget (1877)	499
3.2	Le <i>Journal de mathématiques élémentaires</i> d'Henry Vuibert (1877)	500
4	Conclusion	501
5	Conclusion de la troisième partie	502
	Conclusion générale et perspectives	505
	Annexes	513
1	Les énoncés de problèmes du <i>Recueil de diverses propositions de géométrie</i> de Puissant (1801)	513
2	Les problèmes de la <i>Géométrie de position</i> de Carnot (1803)	522
3	Le programme de l'examen d'admission à l'École polytechnique en 1806	537
4	Les problèmes des <i>Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique</i> de Lhuillier (1809)	539
5	Les énoncés des <i>Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques</i> de Reynaud et Duhamel (1823)	551
6	Le programme du baccalauréat ès sciences en 1859	565
7	Les énoncés de problèmes du <i>Théorèmes et problèmes de géométrie</i> de Reynaud (1833)	574
8	Les annales de concours dans les <i>Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions</i> de Rémond (1887)	588

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce travail a pour point de départ mon mémoire de Master intitulé *Problèmes de géométrie et méthodes de résolution. Trois recueils de problèmes de la deuxième moitié du XIX^e siècle en France*¹. Les trois recueils étudiés étaient les *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques : avec application à plus de 400 problèmes*² de Julius Petersen, publié en 1880 pour la première édition française ; les *Questions de géométrie élémentaire : méthodes et solutions, avec un exposé des principales théories et de nombreux exercices proposés*³ d'Adolphe Desboves publié en 1875, et le *Cours de mathématiques élémentaires. Exercices de géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*⁴ de Frère Gabriel Marie, publié en 1882.

Dans ce mémoire, nous nous étions attaché à relever l'introduction de

1. Moussard, Guillaume, *Problèmes de géométrie et méthodes de résolution. Trois recueils de problèmes de la deuxième moitié du XIX^e siècle en France*, mémoire de Master d'histoire des sciences et des techniques, sous la direction d'Evelyne Barbin, université de Nantes, 2006.

2. Petersen, Julius, *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques : avec application à plus de 400 problèmes*, trad. O. Chemin, Paris : Gauthier-Villars, 1880, Sceaux : J. Gabay, 1990.

3. Desboves, Adolphe, *Questions de géométrie élémentaire : méthodes et solutions, avec un exposé des principales théories et de nombreux exercices proposés*, 2^e édition, Paris : Delagrave, 1875.

4. Frère Gabriel Marie, *Cours de mathématiques élémentaires. Exercices de géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*, 3^e édition, Tours : Mame et fils, 1896.

TABLE DES MATIÈRES

certaines des nouvelles méthodes géométriques du XIX^e siècle, utilisées ici dans la résolution de problèmes scolaires. Lors de cette première recherche, deux questions concernant les notions de problème et de méthode ont été soulevées. D'un côté, en même temps que les problèmes prennent à cette époque une place de premier plan dans l'enseignement, la notion même de problème s'élargit et se catégorise. De l'autre côté, la notion de méthode devient l'objet de commentaires, qui offrent des conceptions différentes selon les auteurs. De là, nous avons conçu un triple questionnement : sur les enjeux et les contenus des problèmes, sur les réflexions et les discours sur les méthodes, et enfin, sur les relations entre ces deux ordres d'évènements tout au long du siècle. Quels changements et dans quels contextes institutionnels aussi bien que mathématiques ?

Il est clair déjà que la notion de méthode a changé dans l'histoire. Nous prendrons, comme premier témoin, la définition donnée dans le *Dictionnaire historique de la langue française* :

MÉTHODE est un emprunt (1537) au bas latin *methodus*, terme scientifique employé en médecine, en géométrie et en rhétorique, emprunt au grec *methodos*, formé de *meta* et de *hodos* « route, voie », « direction qui mène au but ». [...] *Methodos* signifie proprement « cheminement, poursuite », mais l'on est passé du concept constatif (le chemin suivi) au concept normatif (le chemin à suivre) : de là, le sens de « recherche, traité, doctrine scientifique »⁵.

La définition indique donc déjà deux acceptions différentes, et cette distinction nous intéresse particulièrement dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Car, qu'est-ce qu'un auteur de manuels va indiquer dans la résolution d'un problème : le chemin qu'il est possible d'emprunter ou bien celui qu'il faut suivre ?

Cependant, dans la définition précédente, le terme de méthode n'est pas associé à celui de problème. Examinons maintenant la définition que donne d'Alembert dans l'*Encyclopédie méthodique* de 1784 :

METHODE, on appelle ainsi en *Mathématique*, la route que l'on suit pour résoudre un problème ; mais cette expression s'applique plus particulièrement à la route trouvée & expliquée par un géomètre pour résoudre plusieurs questions du même genre, & qui sont renfermées comme dans une même classe ; plus cette classe

5. *Dictionnaire historique de la langue française*, Le Robert, A. Rey, 3^e éd., 2000, p. 1330.

TABLE DES MATIÈRES

est étendue, plus la méthode a de mérite. Les *méthodes* générales pour résoudre à-la-fois, par un même moyen un grand nombre de questions, sont infiniment préférables aux *méthodes* bornées & particulières pour résoudre des questions isolées. Cependant il est facile quelquefois de généraliser une *méthode* particulière, & alors le principal, ou même le seul mérite de l'invention, est dans cette dernière *méthode*⁶.

Nous remarquons qu'ici d'Alembert passe de la méthode aux méthodes, pour comparer celles-ci. Précisément, pour lui, la valeur d'une méthode se mesure à l'étendue de la classe de problèmes qu'elle permet de résoudre. Il introduit ainsi la notion de « méthode générale » opposée à celle de « méthode particulière ». Nous verrons que la question de la généralité occupe aussi bien les géomètres que les auteurs de manuels du siècle suivant. D'Alembert rattache l'idée d'invention à la production d'une méthode particulière, qui serait la voie suivie, tandis que les méthodes générales seraient les chemins à suivre. Nous verrons qu'au siècle suivant la question de l'invention est souvent présente dans les conceptions de la méthode, bien que parfois rattachée aux méthodes générales.

Dans cette thèse, nous reprenons la problématique des notions de problèmes et de méthodes dans l'enseignement classique secondaire de la géométrie, pour l'étendre à l'ensemble des ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire et de la géométrie analytique, de 1794 à 1891, en portant notre attention essentiellement sur la géométrie plane. Nous analysons comment les ouvrages d'enseignement se saisissent des méthodes inventées par les géomètres, et comment parfois la réflexion sur la résolution des problèmes conduit les auteurs à l'introduction et la classification de méthodes.

Dans un sens, il s'agit de repérer et d'analyser les ouvrages des géomètres qui marquent l'introduction de conceptions donnant lieu à des méthodes, pour débusquer ensuite comment ces méthodes sont reprises ou non. Dans l'autre sens, nous examinons les réponses des auteurs à la difficulté pour les élèves de résoudre un problème nouveau. Nous repérons dans les ouvrages d'enseignement la présence de problèmes, leur disposition dans l'ouvrage et leur organisation. Nous interrogeons les intentions des auteurs lorsqu'ils introduisent des problèmes, en nous appuyant, le cas échéant, sur leurs discours à ce sujet. La notion même de problème subit des modifications du point de vue de sa nature en tant qu'énoncé mathématique, et dans la façon dont il

6. *Encyclopédie méthodique*, tome second, p. 389.

TABLE DES MATIÈRES

est articulé avec les théorèmes.

Nous sommes particulièrement attentifs à la circulation des méthodes et des problèmes, des traités de géométrie vers les ouvrages d'enseignement, et entre les ouvrages d'enseignement eux-mêmes, éventuellement entre géométrie élémentaire et géométrie analytique. En particulier, certaines notions peuvent être, selon les ouvrages, intégrées dans l'exposition de théories, ou bien formulées comme des méthodes en relation étroite avec la résolution des problèmes.

La notion de problème est ici abordée avec comme point de comparaison les *Éléments* d'Euclide, qui restent une référence forte, explicite par exemple chez Legendre. Les problèmes y désignent spécifiquement les constructions avec des droites et des cercles, comme mode d'accès à la connaissance des figures géométriques⁷. Ils y alternent avec les théorèmes sur ces figures, dans une organisation rigoureusement déductive, à partir d'axiomes. Cette organisation n'est pas retenue par les ouvrages d'enseignement de la géométrie ultérieurs en France, mais sert de référence, et nous porterons tout particulièrement notre attention sur les problèmes de construction, dont la signification varie d'un ouvrage à l'autre au cours du siècle.

Nous avons recherché, au sein des ouvrages, les énoncés désignés par le terme de problème, analysé les choix des auteurs quant aux énoncés retenus, aux démonstrations fournies, aux modes de regroupement des énoncés de problèmes, et d'organisation relativement aux théorèmes. De la même façon avec les méthodes, nous avons recherché les méthodes exposées mais celles aussi utilisées dans les démonstrations.

Ce travail systématique a permis de repérer, en comparant entre eux les ouvrages sur chacun de ces points, des similitudes et des différences. Pour les interpréter et les caractériser, nous nous sommes alors tourné vers, d'une part, l'histoire institutionnelle de l'enseignement, et d'autre part vers les travaux des géomètres.

Notre recherche porte sur les « ouvrages d'enseignement », et cette catégorisation appelle des commentaires. Des travaux récents cherchent à définir et à caractériser l'objet « manuel scolaire »⁸. Nous examinons leurs conclusions afin de les confronter aux ouvrages qui forment notre corpus. Annie

7. Moussard, Guillaume, « Les constructions à la règle et au compas : les *Éléments* d'Euclide », in Barbin, Evelyne (dir.), *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris : Ellipses, 2014, p. 1-26.

8. Choppin, Alain, « Le manuel scolaire, une fausse évidence historique », *Histoire de l'éducation*, 117, 2008, p. 7-56.

TABLE DES MATIÈRES

Bruter écrit au sujet des manuels d'histoire des XVII^e et XVIII^e siècles :

La notion de manuel présuppose une certaine organisation de l'enseignement [...] mais aussi un mode déterminé de structuration des savoirs, un stade donné de développement technique [...] et, plus largement, un type donné de culture⁹.

Plus précisément, Sauter et Somoza repèrent dans leur classification générale des manuels scolaires cinq caractéristiques de cette catégorie d'ouvrages :

L'intention manifestée par l'auteur ou l'éditeur de destiner expressément l'ouvrage à un usage scolaire ; la présentation systématique des contenus ; l'adéquation au travail pédagogique, la complexité des contenus devant être proportionnée à la maturité intellectuelle et affective des élèves ; la conformité à la réglementation sur les contenus d'enseignement et la manière dont ils doivent être traités ; l'intervention administrative et politique de l'État, par le biais de la réglementation¹⁰.

L'ensemble de ces points est le plus souvent vérifié par les ouvrages étudiés dans ce travail. L'intention de destiner l'ouvrage à l'usage scolaire est bien souvent annoncée dans le titre. Soit par le nom même de l'ouvrage, comme par exemple les *Leçons de géométrie théorique et pratique* de Cirodde¹¹, ou le *Cours de géométrie élémentaire* de Vincent¹². Soit par un sous-titre qui précise la destination de l'ouvrage, comme les *Éléments de Géométrie analytique, rédigés conformément au programme d'admission à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure* de Sonnet¹³. Soit enfin par une explication dans la préface, comme ces premiers mots de l'*Essai de géométrie analytique* de Biot¹⁴ : « Cet ouvrage est principalement destiné aux jeunes gens qui étudient pour entrer à l'École polytechnique ». L'enseignement secondaire est une institution de grande ampleur et bien structurée : il a été possible, la

9. Bruter, Annie, « Les abrégés d'histoire d'Ancien Régime en France (XVII^e-XVIII^e siècles) », in Jean-Louis Jadouille (dir.), *Les manuels scolaires d'histoire : passé, présent, avenir*, Louvain-la-Neuve, Université Catholique de Louvain, 2005.

10. Sauter, Gabriela Ossenbach, Somoza, Miguel, « Definiciones y clasificaciones », in Sauter, Gabriela Ossenbach, Somoza, Miguel (dir.), *Los manuales escolares como fuente para la historia de la educación en América Latina*, Madrid, UNED, 2001, p. 15-24.

11. Cirodde, *Leçons de géométrie théorique et pratique*, Paris : Hachette, 1836.

12. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, Paris : Bachelier, 1826.

13. Sonnet, Frontera, *Éléments de Géométrie analytique*, Paris : Hachette, 1854.

14. Biot, *Essai de géométrie analytique*, Paris : Klostermann, 1813.

TABLE DES MATIÈRES

plupart du temps, d'identifier les ouvrages comme relevant de cet enseignement.

Un autre aspect confirmant la destination scolaire des ouvrages étudiés ici, lorsque le titre ou la préface ne l'indiquent pas explicitement, est que les auteurs sont eux-mêmes des professeurs, qui bien souvent rédigent leur ouvrage à partir de cours qu'ils ont donnés dans les classes. Citons les exemples prestigieux des mathématiciens Lacroix, Monge, ou encore Hachette, qui, au lendemain de la Révolution, rédigent des ouvrages d'enseignement. Plus modestement, les *Éléments de géométrie*¹⁵ de Lionnet, agrégé de l'université et professeur de mathématiques au Collège royal de Louis-le-Grand, sont, sans aucun doute possible, rédigés pour l'enseignement dans les établissements secondaires.

La deuxième caractéristique est la présentation systématique des contenus. Celle-ci est fréquemment observée dans les ouvrages que nous analysons, et nous verrons que la géométrie élémentaire comme la géométrie analytique se constituent en champ disciplinaires bien identifiés. Quant à l'adéquation de ces contenus au travail pédagogique, elle est d'autant plus vérifiée que les premiers programmes, ceux de 1802 puis de 1809, réfèrent uniquement à des ouvrages précis. À partir de la réforme de 1852, les choses s'inversent : les ouvrages sont alors écrits en conformité avec un programme détaillé et dont la stricte application est surveillée par l'administration. Enfin, la cinquième et dernière caractéristique, la réglementation par l'État, va nous fournir justement la première des trois sources annoncées pour la constitution du corpus d'ouvrages d'enseignement.

Nous avons limité le champ de nos investigations à deux disciplines de la géométrie, la géométrie élémentaire et la géométrie analytique, en laissant de côté la géométrie descriptive et la trigonométrie. Cela nous a permis de réaliser une recherche assez systématique tout en maintenant un cadre suffisamment vaste pour mettre en évidence les modifications et les interactions à l'œuvre.

Constituer un corpus d'ouvrages

Les références essentielles concernant les avancées en géométrie nous sont indiquées par des ouvrages de synthèse¹⁶. L'histoire de la géométrie au XIX^e

15. Lionnet, *Éléments de géométrie*, Paris : Dezobry, 1841.

16. Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times*, oxford university press, 1972.

TABLE DES MATIÈRES

siècle, du point de vue particulier des méthodes nouvelles en géométrie, a fait l'objet d'une histoire de la géométrie projective¹⁷, et de recherches sur la notion de généralité en géométrie¹⁸. Il existe aussi des contributions plus anciennes à l'étude de l'émergence de ces nouvelles méthodes¹⁹ en particulier dans un ouvrage entièrement dédié aux méthodes en géométrie²⁰.

Davantage de recherches ont été nécessaires pour constituer un corpus d'ouvrages d'enseignement. Nous avons utilisé trois sources.

La première source est la liste des ouvrages autorisés par le pouvoir législatif et dont le respect est assuré par les inspecteurs et les chefs d'établissements. Entre 1802 et 1850, ce sont 1886 ouvrages autorisés pour l'instruction secondaire et supérieure²¹. Les professeurs sont tenus de faire leurs leçons à partir des ouvrages autorisés : « Les leçons de tout genre se feront d'après les livres classiques choisis dans une liste publiée, chaque année, par le Conseil de l'Université », précise le règlement sur la discipline et les études des lycées et collèges de 1814²². C'est toujours le cas en 1850, à la lecture de cette remarque faisant suite, dans le bulletin administratif, à la liste des ouvrages autorisés : « Chaque professeur d'une classe de grammaire, d'humanités, ou de rhétorique, devra, dès le premier mois de la rentrée, déterminer, dans les limites de la liste précitée, les ouvrages ou parties d'ouvrages qu'il se propose

Flament, Dominique, Boi, Luciano, Salanskis, Jean-Michel. *1830-1930 : A Century of Geometry*. Springer-Verlag, 1992.

Gray, Jeremy, *Worlds out of nothing : a course in the history of geometry in the 19th century*, Springer, 2011.

17. Bioesmat-Martagon, Lise (dir.), *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*, Presses universitaires de Nancy, 2011.

Nabonnand, Philippe, *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au XIX^e siècle*, Document présenté pour l'HDR, 2006.

18. Nabonnand, Philippe, « L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles », in Nabonnand, Philippe, Flament, Dominique (dir.), *Justifier en Mathématiques*, Paris : Éditions de la maison des sciences de l'homme, p. 17-47.

Chemla, Karine, « Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaus », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, fascicule 2, 1998, p. 163-190.

19. Taton, René, « La préhistoire de la géométrie moderne », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, vol. 2, 2-3, 1949, p. 197-224.

20. Coolidge, Julian Lowell, *A history of geometrical methods*, New-York : Mineola, Dover, 1963.

21. Choppin, *Le cadre législatif et réglementaire des manuels scolaires*, Histoire de l'éducation, 29, 1986.

22. Choppin, *Op. Cit.*, p. 28.

TABLE DES MATIÈRES

de faire expliquer dans l'année²³ ». De fait, de nombreux auteurs adressent leurs ouvrages à leurs collègues, en souhaitant qu'ils le prissent pour faire leur cours, et en sollicitant de leur part toutes les critiques qu'ils voudront bien leur faire.

Nous disposons donc d'une liste d'ouvrage approuvés par l'Université entre 1802 et 1850. Pour ce qui concerne les ouvrages de géométrie, trois catégories d'ouvrages peuvent être identifiées. Premièrement, des ouvrages de savants de l'Antiquité ou des siècles précédents le XIX^e : les ouvrages d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Diophante, de Pappus, de Descartes, de Newton, de Cavalieri, de l'Hopital, de Mac Laurin, de Rayneau, de Cramer, de Wallis. Deuxièmement, des ouvrages d'enseignement d'Ancien Régime, de Bossut, de Bézout, de La Caille, de Mauduit, de Leblond. De fait, les ouvrages d'enseignement existent déjà au XVIII^e siècle, par exemple pour les écoles des armes savantes et de la marine, où les mathématiques sont davantage enseignées que dans les collèges et les facultés. Ces manuels sont certainement encore utilisés au siècle suivant, mais ils servent surtout de références pour en écrire d'autres plus conformes aux besoins et aux ambitions du XIX^e siècle²⁴. Troisièmement des ouvrages d'enseignement rédigés à partir de 1794, dont voici la liste :

Auteur	Titre	Année	Editeur
Monge	<i>Géométrie descriptive</i>	1798	Paris : Baudoin
Legendre	<i>Éléments de géométrie</i>	1794	Paris : Firmin Didot
Biot	<i>Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré</i>	1802	Paris : Duprat
Lacroix	<i>Éléments de géométrie</i>	1799	Paris : Courcier
Lacroix	<i>Application de l'Algèbre à la Géométrie</i>	1799	Paris : Courcier
Poullet-Delisle	<i>Traité d'application de l'algèbre à la géométrie</i>	1809	Paris : Courcier
Biot	<i>Essai de géométrie analytique, 2^e édition</i>	1805	Paris : Bernard

23. *Bulletin administratif de l'instruction publique*, 1850, p. 257.

24. Alfonsi, Liliane, « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant. Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) », *Histoire de l'éducation*, 123, 2009.

TABLE DES MATIÈRES

Bourdon	<i>Application de l'algèbre à la géométrie</i>	1825	Paris : Bachelier
Bergery	<i>Géométrie appliquée à l'industrie</i>	1825	Metz : Thiel
Vincent	<i>Cours de géométrie élémentaire</i>	1826	Reims : Delaunoy
Mutel	<i>Cours de géométrie et de trigonométrie</i>	1831	Lyon : Périsset
Terquem	<i>Manuel de géométrie</i>	1829	Paris : Roret
Ritt	<i>Problèmes de géométrie et de trigonométrie</i>	1836	Paris : Hachette
Ritt	<i>Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie</i>	1836	Paris : Hachette
Cirodde	<i>Leçons de géométrie théorique et pratique</i>	1836	Dijon : Douillier
Gouré	<i>Éléments de géométrie et de trigonométrie</i>	1836	Paris : Bachelier
Finck	<i>Géométrie élémentaire</i>	1838	Strasbourg : Derivaux
Ferriot	<i>Applications de la méthode des projections à la recherche de certaines propriétés géométriques</i>	1838	Paris : Bachelier
Allotte	<i>Leçons de géométrie élémentaire, 2^e édition</i>	1834	Limoges : Darde
Planche	<i>Cahiers de géométrie élémentaire</i>	1845	Paris : Bachelier, Hachette
Lenthéric	<i>Trigonométrie et géométrie analytique</i>	1841	Montpellier : Sevalle
Sage	<i>Complément de géométrie analytique</i>	18..	
Idoux	<i>Nouveaux éléments de géométrie</i>	1842	Lunéville : George
Lionnet	<i>Éléments de géométrie, 2^e édition</i>	1841	Paris : Dézobry

TABLE DES MATIÈRES

Planche	<i>Géométrie élémentaire</i>	1845	Paris : Bachelier, Hachette
Mahistre	<i>Les analogies de la géométrie élémentaire</i>	1844	Paris : Hachette
Cirodde	<i>Leçons de géométrie analytique</i>	1843	Paris : Hachette
Briot, Bouquet	<i>Leçons nouvelles de géométrie analytique</i>	1847	Paris : Dézobry
Bézout	<i>Éléments de géométrie</i>	1848	Paris, Alger : Hachette
Percin	<i>Géométrie simplifiée</i> , 4 ^e édition	1842	Nancy : Grimblot Raybois

Le mode de contrôle des livres utilisés dans l'enseignement secondaire change à partir de 1850. Pour ce qui concerne l'enseignement libre, autorisé par la loi Falloux, on passe d'une liste d'ouvrages autorisés à une liste d'ouvrages interdits. Pour l'enseignement public, le contrôle des ouvrages devient de plus en plus difficile de par leur nombre croissant ; par ailleurs la partialité des examinateurs donne parfois lieu à des injustices. Les commissions ne parviennent plus à faire face au nombreux ouvrages publiés. Celle instituée en 1873 a reçu deux ans plus tard 7649 ouvrages, et en a examiné 750²⁵. À partir de 1875, les professeurs sont libres de choisir les ouvrages qu'ils utilisent dans leurs classes.

Notre deuxième source pour établir le corpus d'ouvrages d'enseignement est une bibliographie très détaillée publiée dans un recueil de problèmes, d'abord publié en 1882, et dont nous avons utilisé ici la sixième édition de 1920 plus complète²⁶.

Enfin, une troisième source, complètement exhaustive celle-ci, est la publication annuelle de la *Bibliographie de la France, ou journal général de l'imprimerie et de la librairie*, numérisée par la Bibliothèque nationale de France, et qui liste tous les ouvrages publiés par année²⁷.

25. Choppin, *Op. Cit.*, p. 49.

26. Frère Gabriel Marie, *Exercices de géométrie : comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*, 6^e édition, Tours : Mame, Paris : de Gigord, 1920.

27. Bibliothèque nationale, *Bibliographie de la France, ou journal général de l'imprimerie et de la librairie*, Pillet, 1814-1891.

L'enseignement des mathématiques au XIX^e siècle

Les développements récents en histoire de l'enseignement des mathématiques suivent trois orientations principales : des recherches spécialisées à l'étude d'un pays en particulier²⁸, des recherches au contraire qui tentent d'esquisser une histoire internationale de l'enseignement des mathématiques, et enfin un troisième courant qui entreprend de mettre à jour les pratiques scolaires de l'enseignement des mathématiques²⁹. Pour la première, remarquons que la restriction de l'histoire de l'enseignement à un pays se justifie, par les conditions institutionnelles et culturelles dont il dépend fortement³⁰.

Ce champ de recherche a trouvé une triple expression institutionnelle avec la constitution d'un groupe de recherche intitulé *History of Teaching and Learning Mathematics* au sein du congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME)³¹, la publication annuel depuis 2006 d'un journal spécifique, le *Journal for the History of mathematics education*, et la tenue de conférences internationales sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, dont la troisième a eu lieu en septembre 2013 à Uppsala en Suède.

Les historiens considèrent que l'histoire de l'enseignement des mathématiques est partie prenante de l'histoire des mathématiques elles-mêmes, qu'elle aborde d'un point de vue particulier³². Il ne saurait être question

28. Sur les modifications de l'enseignement du concept de volume en Italie, voir : Tazzioli, Rossana, Becchere, Maria, « Il concetto di volume nei libri di testo : una analisi storico-critica nell'ambito dell'evoluzione dei programmi (1867-1986) », *L'educazione matematica*, tome VI, 2, 2000, p. 102-115.

29. Schubring, Gert, Karp, Alexander, *Handbook on the history of mathematics education*, Springer, 2014, p. 3.

Schubring, Gert, « Researching into the History of Teaching and Learning Mathematics : the State of the art », *Paedagogica Historica*, 42, 4 et 5, 2006, p. 665-667.

30. Giacardi, Livia, « From Euclid as Textbook to the Giovanni Gentile Reform (1867-1923) : Problems, Methods and Debates in Mathematics Teaching in Italy », *Paedagogica Historica*, 42, 4 et 5, 2006, p. 587-613.

31. L'International Commission on Mathematical instruction (ICMI) a été créé en 1908. Coray, D., Furinghetti, F., Gispert, H., Hodgson, B.R., Schubring G. (eds), *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique : Moments of Mathematics Education in the 20th Century*, Genève : L'enseignement des mathématiques, 2003.

32. Sur la circulation entre l'histoire des mathématiques et l'histoire de son enseignement, voir Tournès, Dominique, « Les cours d'André-Louis Cholesky à l'École spéciale des travaux publics, du bâtiment et de l'industrie », in *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire*, Évelyne Barbin et Marc Moyon (éds), Limoges : Presses universitaires de Limoges, 2013, p. 319-332, et Tournès, Dominique, « Une discipline à la croisée de savoirs

TABLE DES MATIÈRES

de distinguer une science des savants d'une science des professeurs³³. L'enseignement est une forme de communication, et l'on peut considérer que la communication est l'acte élémentaire de la science, qu'elle en est une partie intégrante³⁴. Dans le même sens, un ouvrage publié récemment sur les ouvrages mathématiques prend pour point de départ la porosité des frontières qui séparent les ouvrages de mathématiques, selon qu'ils sont destinés à la recherche, l'enseignement ou la culture³⁵. Cette thèse s'inscrit dans cette perspective générale en s'attachant à articuler l'histoire de l'enseignement de la géométrie et les travaux géométriques au XIX^e siècle.

L'histoire institutionnelle de l'enseignement des mathématiques et des sciences en France a été l'objet des travaux respectivement de Bruno Belhoste³⁶ et de Nicole Hulin³⁷. L'histoire sociale de l'enseignement constitue un élément des recherches d'Hélène Gispert sur l'Association pour l'Avancement des Sciences et la Société Mathématique de France³⁸. Enfin, le parcours du mathématicien Charles-Ange Laisant (1841-1920) a fait l'objet d'une thèse très éclairante sur les conditions d'étude, d'enseignement et de recherche au XIX^e siècle³⁹.

et d'intérêts multiples : la nomographie, in *Circulation Transmission Héritage, Actes du XVIIIe colloque inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques*, Pierre Ageron, Évelyne Barbin (éds), Caen : Université de Caen-Basse-Normandie, 2011, p. 415-448.

33. Belhoste, Bruno, « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques », *Revue d'histoire des mathématiques*, tome 4, 1998, p. 289-304.

Sur les relations entre les mathématiciens et l'enseignement des mathématiques dans leur pays, voir : Tazzioli, Rossana, Mammana, Carmelo, « The Mathematical School in Catania at the beginning of the 20th Century and its influence on Didactics », *Proceedings ESU Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, Université de Louvain la Neuve, 2001, p. 223-232.

34. Schubring, Gert, « Production mathématique, enseignement et communication », *Revue d'histoire des mathématiques*, tome 7, 2001, p. 295-305.

35. Barbin Evelyne et Moyon Marc (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges : Presses Universitaires de Limoges, 2013.

36. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, tome 1 : 1789-1914*, Paris : Institut national de recherche pédagogique, Éd. Économica, 1994.

37. Hulin, Nicole, *L'organisation de l'enseignement des sciences. La voie ouverte par le second Empire*, Paris : Comité des travaux historiques et scientifiques, 1989.

38. Gispert, Hélène, « La France mathématique, la Société mathématique de France (1870-1914) », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, Paris, 1991.

39. Auvinet, Jérôme, *Charles-Ange Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1840-1920)*, thèse de doctorat, sous la direction d'Evelyne Barbin, Université de Nantes, 2011.

TABLE DES MATIÈRES

Les journaux mathématiques publiés au long du XIX^e siècle, en particulier les *Annales de mathématiques pures et appliquées* et les *Nouvelles annales de mathématiques*, destinées notamment à un public d'enseignants, ont été étudiées. Les recherches recensent les journaux existants, en identifient les auteurs et le lectorat, les stratégies éditoriales, mais rentrent peu dans l'étude détaillée des contenus⁴⁰.

Les recherches qui ont été effectuées sur l'histoire de l'enseignement de la géométrie au XIX^e siècle ont touché à l'étude des réformes de 1902 et 1905⁴¹, à l'enseignement de la géométrie descriptive au moment de la Révolution⁴², et à la géométrie du triangle, montrant comment une géométrie qui est le fait d'amateurs va rapidement être enseignée et permettre ainsi l'introduction de notions de géométrie introduites au XIX^e siècle⁴³. Des recherches récentes ont abordé l'histoire de l'enseignement des coniques de la géométrie descriptive⁴⁴ ainsi que les modifications dans l'enseignement de la similitude, passant entre 1845 et 1910 d'une similitude des triangles à l'étude des transformations⁴⁵.

40. Gérini, Christian, *Les Annales de Gergonne : apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques*, Presses universitaires du Septentrion, 2002.

Verdier, Norbert, *Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885)*, thèse de doctorat, 2010.

41. Bkouche, Rudolf, « Variations autour de la réforme de 1902/1905 », in Gispert, Hélène (dir.), *La France Mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris, 1991, p. 181-213.

42. Belhoste, Bruno, Sakarovitch, Joël, Picon, Antoine, « Les Exercices dans les écoles d'ingénieurs sous l'Ancien Régime et la Révolution », *Histoire de l'Education*, 46, 1990, p. 53-109.

43. Lebret, Pauline, *La nouvelle géométrie du triangle, passage d'une mathématique d'amateurs à une mathématique d'enseignants, 1873-1929*, thèse de doctorat sous la direction d'Evelyne Barbin, Nantes, 2009.

44. Barbin, Evelyne, « Descriptive Geometry in France : History of the Elementation of a Method (1795-1865) », *International Journal for the History of Mathematics Education*, à paraître.

Barbin, Evelyne, « Teaching of conics in 19th and 20th centuries : on the conditions of changing (1854-1997) », Bjarnadottir K., Furinghetti F., Matos J.-M., Schubring G., *Dig where you stand. Proceedings of the Second International conference on the History of Mathematics Education*, Lisbon, 2012, p. 44-59.

Barbin, Evelyne, « Top-down : the Role of the Preparatory classes for the Great Schools into the French System of the Mathematical Curriculum (1850-1910) », in Bjarnadottir K., Furinghetti F., Pritz J., Schubring G. (eds), *Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education*, Uppsala, à paraître 2015.

45. Chevalarias, Nathalie, « Changes in the teaching of similarity in France : From si-

TABLE DES MATIÈRES

En-dehors de ces travaux, il existe peu de recherches sur l'histoire de l'enseignement de la géométrie en France au XIX^e siècle. Au sein de ce vaste chantier, le présent travail entreprend de mettre en relation les travaux des géomètres et l'enseignement secondaire de la géométrie du point de vue des méthodes. En effet, les notions de méthodes apparaissent dans plusieurs ouvrages majeurs comme le signalent les titres des ouvrages emblématiques, et sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir, de Gabriel Lamé, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, de Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, de Paul Serret, *Des méthodes en géométrie* et de Julius Petersen, *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de construction géométrique*.

La réalisation et la publication d'ouvrages d'enseignement est fortement liée à l'histoire institutionnelle dont il nous faut dresser le canevas pour comprendre comment évolue la place des mathématiques dans l'enseignement secondaire, quel est l'enjeu de leur enseignement, et qui en sont les destinataires.

La Révolution fait disparaître les collèges d'Ancien Régime et crée les écoles centrales⁴⁶. Celles-ci donnent une place importante à l'enseignement des sciences, et notamment des mathématiques, là où l'enseignement d'Ancien Régime était centré sur l'étude du latin et n'abordait les sciences qu'en dernière année, dite de physique. Certes les mathématiques avaient gagné en importance dans ces classes dans la deuxième moitié du XVIII^e siècle, et servaient de moyen de sélection des cadres techniques militaires. Mais c'est à la création des écoles centrales que les mathématiques deviennent réellement une discipline autonome avec ses professeurs, ses programmes et ses horaires.

Les écoles centrales innovent aussi du point de vue pédagogique en laissant aux élèves la liberté de fréquenter les cours ou non, et en n'imposant pas d'examen pour valider les degrés d'enseignement. Ces écoles ont fonctionné de l'an III à l'an X, date à laquelle elles sont remplacées par les Lycées, plus conformes au nouveau régime en place.

milar triangles to transformations (1845-1910) », *International journal for the history of mathematics education*, 9-1, 2014.

Chevalarias, Nathalie, *Des figures semblables à la similitude dans l'enseignement secondaire français : 1845 à 1910. Des choix témoins des tensions entre pratique et théorie dans l'enseignement des mathématiques*, Mémoire de Master, Université de Nantes, 2012.

46. Mayeur, *Histoire de l'enseignement et de l'éducation, III. 1789 - 1930*, Perrin, 2004, p 56-70.

TABLE DES MATIÈRES

Les Lycées sont solidement structurés, et leur personnel est constitué en une corporation, l'Université. Ils adoptent l'internat et une organisation d'apparence militaire. Les élèves passent sept ans environ au Lycée, lieu d'éducation intellectuelle complètement dissocié de l'enseignement primaire, destiné aux milieux populaires. À ces grands établissements, appelés Lycées ou Collèges royaux selon la conjoncture politique, il faut ajouter les collèges communaux, les établissements privés laïcs, les petits séminaires, et après 1850 les établissements privés confessionnels. Les établissements d'enseignement sont organisés en cercles concentriques⁴⁷ : les grands établissements parisiens, les Collèges royaux de province, les collèges communaux, et enfin les institutions et pensions privées. La réglementation est conçue pour le premier cercle surtout, autant qu'elle en reflète la réalité. Ailleurs, l'enseignement des mathématiques est inégal et souvent très faible.

L'enseignement secondaire occupe en France au XIX^e siècle une place capitale. Il est le lieu unique qui conduit aux professions libérales. Les facultés ne sont le lieu que de conférences publiques et très peu de la formation⁴⁸. Aucun examen n'interrompt le cours des études. Les études sont longues et désintéressées, elles sont destinées à une petite minorité d'élèves que leur fortune, leur naissance, plus rarement leur mérite, désignent pour une éducation libérale au sens plein du terme, détachée de toute préoccupation directement professionnelle⁴⁹. Ses structures se maintiennent pendant tout le siècle. Les Lycées sont destinés à former des savants et des lettrés⁵⁰. L'élève y apprend à maîtriser la parole publique, il se prépare aux fonctions libérales, aux fonctions publiques⁵¹. On y enseigne d'abord essentiellement le latin et les mathématiques, mais rapidement la place des sciences est remise en cause et très largement diminuée.

Si la Révolution a supprimé l'université comme lieu d'enseignement supérieur, en revanche, elle a laissé subsister les écoles spéciales, école d'artillerie, du génie militaire, des ponts et chaussées et des mines. Celles-ci restent insuffisantes néanmoins pour former les cadres techniques, civiles et militaires, particulièrement nécessaires dans un pays en guerre. Un collectif de savants, Monge en tête, crée l'école centrale des arts et manufactures, rebaptisée un an

47. Belhoste, *Op. Cit.*, p. 18.

48. Noguès, Boris, « Élèves ou auditeurs ? Le public des facultés de lettres et de sciences au XIX^e siècle », *Histoire de l'éducation*, 120, 2008, p. 77-97.

49. Mayeur, *Op. Cit.*, p. 500.

50. Mayeur, *Op. Cit.*, p. 71.

51. Prost, *Histoire de l'enseignement en France. 1800-1967*, Paris : Colin, 1968, p. 55.

TABLE DES MATIÈRES

plus tard École polytechnique. Les premiers professeurs de mathématiques y sont Monge et Lagrange. L'entrée à l'École polytechnique se fait par la réussite à un concours portant essentiellement sur les mathématiques. Le programme en est pratiquement inchangé jusqu'en 1853, et porte sur l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, l'application de l'algèbre à la géométrie, la statique, et à partir des années 1820 la géométrie descriptive. Ce mode de recrutement par concours s'applique progressivement à d'autres écoles dites du gouvernement, l'école forestière, l'école navale et Saint-Cyr. Les examinateurs sont les mêmes pour l'ensemble de ces écoles, et font des tournées en France pour examiner tous les candidats. D'autres écoles recrutent par concours, comme l'école normale supérieure, dès 1808, et l'école centrale des arts et manufactures, à partir de 1857⁵². Les épreuves déterminantes sont des épreuves orales, même si des épreuves écrites sont progressivement ajoutées aux concours tout au long du siècle.

Pour répondre au besoin de préparation à ces épreuves, puisque l'enseignement des mathématiques dans les lycées est rapidement insuffisant, sont créées des classes spécifiques dites de mathématiques spéciales, parfois précédées d'une année de mathématiques élémentaires. Cet enseignement préparatoire est fortement concentré à Paris, d'où proviennent plus de la moitié des lauréats de l'École polytechnique. Quatre établissements parisiens dominent : les Lycées Louis-le-Grand, Saint-Louis, Henri IV et Charlemagne, dont les classes sont souvent pléthoriques. Les postes de professeur de mathématiques spéciales dans ces établissements sont extrêmement prestigieux et ne les surpassent que les postes à l'École polytechnique, à l'École normale supérieure ou à la Faculté des sciences de Paris, peu nombreux et souvent cumulés. Ils constituent l'aboutissement d'une carrière institutionnelle souvent entamée en province. Les auteurs des manuels d'enseignement reconnus sont le plus souvent titulaires de ces chaires convoitées. L'enseignement y est principalement magistral⁵³. Toutefois, le fond F/17/7656 contenant les rapports d'inspection montre une certaine hétérogénéité pédagogique des enseignants : certains sont très magistraux et n'interrogent jamais, d'autres au contraire interrogent les élèves au tableau, certains donnent des rédactions à faire, d'autres leur donnent en classe des problèmes à résoudre. Dans les collèges communaux de province, les cours de mathématiques spéciales

52. Belhoste, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIX^e siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, 90, 2001, p. 101-130.

53. Belhoste, *Ibid.*, p. 106.

TABLE DES MATIÈRES

concernent des effectifs souvent très restreints et hétérogènes.

À l'internat des collèges ou des Lycées, de nombreux parents préfèrent pour leur fils l'hébergement dans une pension. Des pensions spécialement destinées à la préparation aux concours des écoles du gouvernement se développent à partir des années 1820 et connaissent un fort succès : en 1853, plus du tiers de la promotion reçue à polytechnique sort des murs de l'école préparatoire Sainte-Barbe⁵⁴. Les institutions préparatoires complètent les cours généralement suivis au lycées par des entraînements spécifiques au tableau dans les conditions des concours. Des répétiteurs, qui sont parfois les professeurs mêmes des établissements publics, font répéter les cours.

L'enseignement secondaire dans son ensemble compte entre cinquante et soixante mille élèves vers 1810, et plus de cent cinquante mille en 1880. En 1840, il retrouve ses effectifs d'avant la Révolution, tandis qu'il les double entre 1840 et 1870. La proportion d'une classe d'âge qui suit un enseignement secondaire est faible : entre 2 % et 5 % tout au long du siècle. Le nombre de Lycées en France triple au cours du siècle :

Année	1810	1830	1838	1848	1870	1882	1887
Nombre de lycées	36	38	41	56	83	85	100

Pour enseigner à l'Université, les diplômes requis sont le baccalauréat et la licence, délivrés dans les facultés moyennant une redevance. Le niveau des lauréats est hétérogène et jugé parfois insuffisant. Pour former et recruter ses enseignants, l'Université crée en 1808 l'École normale et l'agrégation. Une agrégation de sciences est créée en 1815, puis de mathématiques à partir de 1840. Si de nombreux enseignants de mathématique, particulièrement dans la première moitié du siècle, sont des polytechniciens, l'agrégation prend de plus en plus d'importance au cours du siècle jusqu'à devenir un passage obligé. Elle joue un rôle important dans la formation des enseignants qui la passent le plus souvent à plusieurs reprises avant de l'obtenir.

Nous avons pu préciser la formation suivie par les auteurs de nos manuels grâce à plusieurs bases de données des anciens élèves de l'École polytech-

54. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, tome 1 : 1789 - 1914*, Paris : Institut national de recherche pédagogique, Éd. Economica, 1994, p. 109.

TABLE DES MATIÈRES

nique⁵⁵, de l'École normale⁵⁶, des titulaires de l'agrégation⁵⁷, ou d'une thèse de doctoa⁵⁸.

Au début de chaque période, nous préciserons les programmes officiels de mathématique pour les différentes classes. Disons d'emblée que ces programmes ne reflètent pas l'enseignement effectif dans toutes les classes, mais l'idéal de ceux qui les rédigent, réaliste seulement pour les classes des établissements d'élite parisiens. La réglementation n'est pas sans effet pour autant sur les pratiques scolaires : elle impose les horaires et l'organisation des enseignements, les programmes des examens du baccalauréat et des Ecoles du gouvernement.

Périodisation

Notre recherche concerne l'époque encadrée par les dates de 1794 et de 1891. La première correspond à la parution des *Éléments de géométrie* de Adrien Marie Legendre, et la deuxième à la mise en œuvre des programmes de l'enseignement moderne qui conduiront à la réforme profonde de 1902-1905. De l'analyse de notre corpus et du contexte historique se dégagent nettement trois périodes vis-à-vis de notre problématique.

La première va de 1794 à 1836. Elle débute après la Révolution avec la publication *Éléments* de Legendre, qui constituent une référence constante pour l'enseignement de la géométrie élémentaire au XIX^e siècle. En 1794 est créée l'École polytechnique, dont le recrutement par un concours centré sur les mathématiques va façonner durablement l'organisation de l'enseignement secondaire des mathématiques. L'année suivante, les Écoles centrales sont créées dans les départements, en remplacement des collèges des facultés des arts des anciennes universités. Rapidement remplacées par les Lycées, les écoles centrales accordent une place importante aux mathématiques, en rupture avec les pratiques d'Ancien Régime.

Cette première période est celle de la mise en place d'un enseignement

55. http://bibli.polytechnique.fr/F/?func=file&file_name=find-b&local_base=BCXC2, dernière consultation le 28/12/2014.

56. <http://www.archicubes.ens.fr/lannuaire#>, dernière consultation le 28/12/2014.

57. <http://rhe.ish-lyon.cnrs.fr/?q=agregsecondaire>, dernière consultation le 28/12/2014.

58. http://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_des_th%C3%A8ses_math%C3%A9matiques_soutenues_en_fran%C3%A7ais_de_1811_%C3%A0_1960, dernière consultation le 28/12/2014.

TABLE DES MATIÈRES

secondaire des mathématiques. De nombreux manuels de mathématiques sont rédigés pour répondre aux nouvelles structures et aux nouvelles ambitions.

L'idée de méthode d'invention en géométrie est alors largement associée à l'application de l'algèbre. Nous interrogerons les formes et les usages de cette application comme méthode dans les ouvrages d'enseignement, et le rôle joué par les problèmes dans l'exposition et la valorisation de cette méthode.

Dans le même temps, les géomètres de l'école de Monge⁵⁹ inventent de nouvelles méthodes en géométrie pure. Se pose alors la question de la diffusion de ces méthodes dans les ouvrages d'enseignement. Nous tâcherons de comprendre pourquoi elles se déploient plus rapidement dans l'enseignement professionnel et quels problèmes elles permettent d'y résoudre.

Enfin, nous examinons la place des problèmes dans les ouvrages d'enseignement, leur disposition, leur organisation, leur nombre, leur articulation avec les théorèmes, leur circulation entre les ouvrages. Les choix opérés sont à relier avec les intentions des auteurs, et avec les aspirations des élèves, parmi lesquelles la réussite aux examens et concours qui prennent une place institutionnelle importante dans l'enseignement secondaire français.

La deuxième période court de 1836 à 1865. Elle est marquée par un nombre beaucoup plus important de problèmes dans les ouvrages d'enseignement, à l'image du recueil de Georges Ritt qui en compile plus de six cents en 1836 rien que pour la géométrie élémentaire. Les questions qui précèdent se posent alors avec d'autant plus d'acuité, et un traitement quantitatif permet alors de repérer des modalités dominantes d'organisation. Le grand nombre de problèmes s'accompagne d'un intérêt pour les procédés de résolution. Nous étudions comment la notion de méthode particulière introduite par Gabriel Lamé dans son *Examen* en 1818 trouve un écho chez certains enseignants.

En 1837 est publié l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* de Michel Chasles, ouvrage de synthèse et de promotion des avancées contemporaines de la géométrie pure. Nous examinerons en quel sens les notions de cette géométrie « rationnelle » constituent pour lui des méthodes, et pourquoi il opère des choix complètement différents de ce point de vue dans son *Traité de géométrie supérieure* quinze ans plus tard.

En géométrie analytique, Auguste Comte publie en 1842 un ouvrage d'enseignement qui remet en cause le mode d'enseignement de cette discipline.

59. Laurentin, Jérôme, *Fidélités et reconstructions. L'exemple de l'école géométrique de Gaspard Monge*, thèse de doctorat, sous la direction de Jean Dhombres, Paris : EHESS, 2000.

TABLE DES MATIÈRES

Les notions de méthode et de problème sont au cœur de sa préoccupation pour une généralité exigeante.

A chaque fois, les conceptions de la notion de méthode, et les notions nouvelles qui les accompagnent, seront mises en parallèle avec les choix opérés dans les ouvrages d'enseignement.

Cette période est marquée au plan institutionnel par la libéralisation de l'enseignement secondaire en 1850, et la réforme de la bifurcation en 1852, qui institue en parallèle deux sections d'enseignement, dites des lettres et des sciences. Cette réforme impose aux professeurs un suivi rigoureux de programmes précis, ce dont nous devons mesurer l'incidence quant aux notions de problème et de méthode.

La troisième période va de 1865 à 1891. Elle débute avec l'abrogation de la réforme de la bifurcation et l'institution d'un enseignement spécial parallèlement à l'enseignement classique. Le *Traité des sections coniques* de Chasles, publié en 1865, poursuit et termine son *Traité de géométrie supérieure* en abordant notamment les sections coniques. Plusieurs ouvrages sont alors rédigés pour introduire à cette géométrie supérieure, et nous analyserons dans quelle mesure ils en reprennent la méthode d'exposition, et quelle relation ils établissent avec la résolution des problèmes.

Cette période voit l'introduction en France de nouvelles méthodes de géométrie analytique, exposées dans un traité élémentaire de Georges Salmon. Nous étudions les modalités de cette réception, et particulièrement la façon dont ces méthodes, d'une part se déclinent sur des listes de problèmes en géométrie analytique, et d'autre part permettent de retrouver certains résultats de géométrie supérieure par le calcul au moyen de coordonnées nouvelles.

La présence de problèmes dans les ouvrages d'enseignement est désormais largement normalisée, selon des caractéristiques que nous devons préciser. Trois ouvrages d'envergure recensent et organisent les méthodes de résolution des problèmes en géométrie élémentaire, dont nous analyserons les conceptions quant à la notion de méthode et les choix dans l'organisation des énoncés.

Après 1891, de nouveaux programmes et de nouvelles conceptions sont à l'œuvre, qui aboutiront à une réforme profonde de l'enseignement secondaire en 1902.

Cette périodisation correspond donc à trois grands moments vis-à-vis de notre problématique, où les notions de problèmes et de méthodes changent. Notre propos est de comprendre les enjeux et les ressorts de ces changements dans les cadres aussi bien institutionnel, que mathématique et événementiel,

TABLE DES MATIÈRES

comme la traduction d'un ouvrage étranger, où ils se produisent.

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Problèmes et méthodes dans la constitution d'un enseignement secondaire de la géométrie (1794-1836)

Introduction

L'enseignement secondaire français a été désorganisé après la Révolution française et il prend de nouvelles formes au début du siècle suivant. Les Écoles centrales, une par département, proposent un enseignement sans programme fixe, articulé autour de chaires, laissant une grande liberté aux élèves. Elles intègrent un enseignement scientifique, et en particulier mathématique, très soutenu en comparaison des pratiques d'Ancien Régime. Les Lycées napoléoniens les remplacent en 1802, organisés à partir de 1808 au sein du monopole de l'Université, qui englobe toute forme d'enseignement secondaire, collèges communaux, institutions privées, séminaires, Lycées et Facultés, dont le rôle est limité à la collation des grades. Cette organisation fortement centralisée et dont les établissements d'élite sont tous parisiens perdure sans changement majeur jusqu'à la loi Falloux de 1850. Les Lycées sont rebaptisés à la Restauration en Collèges royaux, que l'emploi d'une majuscule nous permettra de distinguer des collèges communaux.

Il faut ajouter à ces établissements les pensions privées qui assurent, en plus de l'hébergement, un soutien pédagogique. Dans quelques-une d'entre elles, les élèves sont spécifiquement préparés aux examens d'entrée dans les Écoles du gouvernement, à savoir les Écoles polytechnique, navale, forestière et militaire⁶⁰. La préparation de ces examens constitue le lieu principal et le plus stable de l'enseignement secondaire des mathématiques dans cette première période, qui voit d'importantes variations de la part accordée aux sciences dans un enseignement secondaire d'abord et avant tout axé sur le latin et les humanités classiques⁶¹.

Les programmes de l'enseignement scientifique dans les Lycées, et tout particulièrement de mathématique, sont d'abord très ambitieux, sur le modèle des Écoles centrales, puis ils reculent progressivement jusqu'en 1826, avant de reprendre de l'importance. Ils réfèrent à des ouvrages particuliers, puis simplement à des branches des mathématiques. Pour l'année 1802, les instructions renvoient aux ouvrages de Lacroix. Notons que la classe de mathématiques transcendantes n'est créée que dans les lycées les plus importants, pour préparer aux examens d'entrée aux Écoles du gouvernement.

60. Huguet, Françoise, « Les pensions et institutions privées secondaires pour garçons dans la région parisienne (1700-1940) », *Histoire de l'éducation*, 90, 2001.

61. Pour le programme de l'examen d'admission à l'École polytechnique, voir annexe 3.

Classe	Programme d'enseignement
4 ^e et 3 ^e	Géométrie de Lacroix
2 ^e	Algèbre de Lacroix
1 ^{ère}	Application de l'algèbre à la trigonométrie de Lacroix
Mathématiques transcendantes	Complément d'algèbre et Traité de calcul différentiel et intégral de Lacroix

En 1809, les programmes préconisent pour l'enseignement de la géométrie, les ouvrages de Lacroix, mais aussi ceux de Legendre et de Biot :

Classe	Programme d'enseignement
Grammaire	5 ^e et 4 ^e
Humanités	3 ^e et 2 ^e
Rhétorique	Arithmétique, Algèbre et Géométrie
Mathématiques spéciales	Trigonométrie
Philosophie	Algèbre et Application de l'algèbre à la géométrie

En 1821, tout enseignement scientifique est renvoyé à la classe de philosophie. Cette situation pose néanmoins rapidement des difficultés, et le ministère revient en 1826 à un enseignement plus progressif des mathématiques.

Classe	Programme d'enseignement
Humanités	2 ^e
Rhétorique	Arithmétique et Géométrie plane
Philosophie	Trigonométrie et Géométrie des solides
Philosophie	1 ^{ère} année
Philosophie	2 ^e année
	Algèbre et répéter la Géométrie et la Trigonométrie
	Éléments d'Algèbre (fin) et Application de l'algèbre à la géométrie et Géométrie descriptive

En 1831 paraissent des programmes détaillées au moins pour les Collèges de Paris et de Versailles, « pour rendre uniforme l'enseignement des sciences [et] faciliter les compositions du concours général »⁶². L'enseignement des mathématiques est alors abordé plus tôt : l'Arithmétique est enseignée en 4^e, la Géométrie en 3^e, et la cosmographie en rhétorique.

L'application de l'algèbre à la géométrie a rencontré d'immenses succès

⁶². Circulaire aux proviseurs et directeurs de Paris et Versailles, in Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. 1789-1914*, Paris : INRP-Economica, 1995, p. 130.

aux XVII^e et XVIII^e siècles. Elle est organisée dans des ouvrages d'enseignement à l'image du *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie* de Sylvestre François Lacroix⁶³, et constitue une part décisive du programme d'admission à l'École polytechnique. Dans le premier chapitre, nous identifions dans les ouvrages dont hérite le XIX^e siècle trois usages différents de l'application de l'algèbre à la géométrie comme méthode : méthode de résolution des problèmes, méthode d'invention des propositions et méthode démonstrative pour prouver les théorèmes. Nous nous appuyons ensuite sur les distinctions obtenues pour analyser les choix effectués par les auteurs d'ouvrages d'enseignement de l'algèbre appliquée à la géométrie de notre période.

Le début du XIX^e siècle voit un regain d'intérêt pour les méthodes purement géométriques, c'est-à-dire dégagées du recours à la résolution des équations par l'algèbre. Le deuxième chapitre met en évidence les notions et les méthodes nouvelles développées au sein de cette « géométrie rationnelle », et montre ensuite comment elle est intégrée dans deux ouvrages d'enseignement de la géométrie pour l'industrie.

Nous sommes particulièrement attentifs, dans ces deux premiers chapitres, au rôle que jouent les problèmes dans l'exposition et l'illustration des méthodes.

Le troisième chapitre commence par étudier trois ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire, utilisés dans les établissements d'enseignement autour de 1800, et particulièrement la place des problèmes dans ces ouvrages. Les ouvrages retenus sont le *Cours de mathématiques* d'Étienne Bézout⁶⁴, les *Éléments de géométrie* d'Adrien-Marie Legendre⁶⁵ et enfin les *Éléments de géométrie* de Sylvestre François Lacroix⁶⁶. Nous regardons, par contraste avec la référence que constituent les *Éléments* d'Euclide, dans quelle mesure ces trois ouvrages contiennent des problèmes de construction géométrique, lesquels et comment ils interagissent avec les théorèmes. Nous essaierons de relier les choix observés aux intentions des auteurs, par une analyse

63. Lacroix, Sylvestre François, *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Courcier, 1798.

64. Bézout, Etienne, *Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie. Seconde partie. Géométrie, Trigonométrie rectiligne et Trigonométrie sphérique*, Avignon : Séguin frères, 1811.

65. Legendre, Adrien-Marie, *Éléments de géométrie*, Paris : Firmin-Didot, 1794.

66. Lacroix, Sylvestre François, *Éléments de géométrie à l'usage de l'école centrale des quatre-nations*, 7^e édition, Paris : Courcier, 1808.

fine de la structure de ces ouvrages. Dans un deuxième temps, l'étude du *Cours de géométrie élémentaire*⁶⁷ de Alexandre Joseph Hidulphe Vincent, permet d'observer la situation plus tardivement dans la période.

Le quatrième chapitre, enfin, recense les recueils de problèmes de géométrie pour l'enseignement secondaire publiés dans cette première période. Il s'agit de déterminer où les auteurs puisent leurs énoncés, quels objectifs ils poursuivent en compilant ces recueils, et comment ils organisent ces corpus parfois importants d'énoncés.

67. Vincent, Alexandre Joseph Hidulphe, *Cours de géométrie élémentaire*, Reims : De-launois et Paris : Bachelier, 1826.

CHAPITRE I

LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

Les discours sur l'analyse comme méthode de raisonnement en mathématiques sont nombreux dans l'histoire, et ce terme d'analyse a pu désigner des conceptions très différentes¹. Nous précisons dans ce chapitre la distinction entre deux conceptions majeures, auxquelles se réfèrent les auteurs du XIX^e siècle, l'analyse de Pappus, indissociable de la synthèse, et l'analyse de Descartes².

Nous nous focaliserons ensuite sur la seconde, qui induit l'emploi de l'algèbre en géométrie. Nous dégagerons alors trois fonctions pour cet emploi de l'algèbre comme méthode en géométrie, identifiées dans trois ouvrages dont hérite le XIX^e siècle, *La géométrie* de René Descartes, les *Nouveaux éléments de géométrie* de Bernard Lamé, et *L'Introduction à l'analyse infinitésimale* de Leonhard Euler.

Ces distinctions faites, nous pourrions repérer dans les ouvrages d'enseignement de cette première partie les choix opérés pour introduire l'emploi de l'algèbre comme méthode en géométrie.

1. Gardiès, Jean-Louis, *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse. Essai de définition*, Paris : Vrin, 2001.

2. Voir par exemple : Gergonne, Diaz, « Philosophie mathématique. De l'analyse et de la synthèse, dans les sciences mathématiques », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 7, 1816-1817, p. 345-372 ; Duhamel, Jean-Marie, *Des méthodes dans les sciences du raisonnement*, Partie I, Paris : Gauthiers-Villars, 1866-1872, p. 62-78.

1 Deux conceptions de l'analyse

1.1 L'analyse de Pappus

L'analyse de Pappus est symétrique de la synthèse³. Les notions d'analyse et de synthèse, décrites par les géomètres de l'Antiquité comme les deux formes essentielles du raisonnement mathématique, restent présentes en Europe à l'époque moderne. Sylvestre François Lacroix, mathématicien et auteur de nombreux ouvrages d'enseignement, explicite ces notions dans un *Essai sur l'enseignement* qu'il publie en 1805.

Lacroix (1765-1843) a étudié au collège parisien des Quatre Nations et y a suivi l'enseignement de l'abbé Marie pour les mathématiques, enseignement relativement poussé pour l'époque en dehors d'une École militaire. Dès 1782, appuyé par Gaspard Monge dont il est proche, Lacroix enseigne à l'École des gardes de la Marine de Rochefort. Il ne cessera alors d'enseigner pratiquement jusqu'à sa mort. Il entreprend à partir de 1797 et jusqu'en 1802 la rédaction d'une série d'ouvrages d'enseignement⁴ : un *Traité élémentaire d'arithmétique*, des *Éléments d'algèbre*, des *Compléments des éléments d'algèbre*, des *Éléments de géométrie*, des *Compléments de géométrie*, un *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie* et un *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*.

Lacroix reconnaît, dans son *Essai sur l'enseignement*, texte dans lequel il expose ses conceptions sur l'enseignement des mathématiques, « deux méthodes pour traiter les sciences mathématiques ; la *synthèse* et l'*analyse* »⁵. Il reproduit les définitions que donne Pappus, commentateur grec des *Éléments* d'Euclide au IV^e siècle, de ces deux méthodes :

L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et dont elle est précédée, jus-

3. Panza, Marco, Otte, Michael (eds.), *Analysis and synthesis in Mathematics : History and Philosophy*, Kluwer, Boston Studies in the Philosophy of Science, n°196, 1997.

4. Ehrhardt, Caroline, « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant », *Histoire de l'éducation*, 123, 2009, p. 14.

5. Lacroix, *Essai sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier*, Paris : Courcier, 1805, p. 235.

I.1 Deux conceptions de l'analyse

qu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui entre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse⁶.

L'analyse des Anciens est une forme de raisonnement qui part de la proposition cherchée considérée comme acquise pour remonter à une proposition déjà connue. La synthèse reprend en sens inverse, à partir de cette dernière proposition dont la vérité est connue, l'« ordre naturel » d'exposition du raisonnement, c'est-à-dire, ici, l'ordre déductif. Cette symétrie entre analyse et synthèse est décrite dans un ouvrage de la fin du XVII^e siècle auquel Lacroix se réfère aussi dans son texte, *La logique ou l'art de penser*⁷, des théologiens et philosophes jansénistes Arnauld et Nicole :

On peut comprendre par là ce que c'est que l'analyse des Géomètres. Car voicy en quoy elle consiste. Une question leur ayant esté proposée dont ils ignorent la vérité ou la fausseté si c'est un théorème ; la possibilité ou l'impossibilité si c'est un problème ; ils supposent que cela est comme il est proposé ; & examinant ce qui s'ensuit de là, s'ils arrivent dans cet examen à quelque vérité claire dont ce qui leur est proposé soit une suite nécessaire, ils en concluënt que ce qui leur est proposé est vrai ; & reprenant ensuite par où ils avaient fini, ils le démontrent par l'autre méthode qu'on appelle de *composition* [la synthèse]⁸.

Lacroix reprend à son compte l'idée qu'analyse et synthèse sont indissociables. La première a une valeur heuristique, elle est la « méthode d'invention »⁹, tandis que la seconde a valeur démonstrative. Analyse et synthèse sont par conséquent complémentaires et successives : « Après s'être servi de l'analyse pour trouver quelque vérité, on se sert de l'autre méthode

6. Pappus, *La collection mathématique*, trad. Ver Eecke, rééd. Blanchard, p. 477.

7. Lacroix, *Op. Cit.*, p. 340.

8. Arnauld et Nicole, *La logique ou l'art de penser*, Paris : Charles Savreux, 1662, p. 373.

9. Lacroix, *Op. Cit.*, p. 240.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

[la synthèse] pour expliquer ce que l'on a trouvé »¹⁰. Ainsi, la synthèse est en général la méthode d'exposition utilisée dans les *Éléments de géométrie*. C'est le choix que fait Lacroix dans ses *Éléments de géométrie*¹¹ :

Si [...] j'ai laissé entrevoir, à dessein, dans ces *Éléments* [de géométrie], quelques traces de la méthode analytique, je n'en suis pas moins persuadé de les avoir rédigés d'après le style des anciens, parce que j'ai toujours eu soin de me conformer à leur genre de démonstration, de m'attacher, ainsi qu'ils l'ont fait, à la rigueur des raisonnements¹².

Ces notions d'analyse et de synthèse sont fréquemment développées, à l'instar de Joseph Diaz Gergonne dans ses *Annales de géométrie pures et appliquées*¹³.

1.2 L'analyse de Descartes

La méthode philosophique développée par Descartes dans le *Discours de la méthode* de 1637 a pour corollaire une méthode en géométrie¹⁴. Celle-ci s'appuie sur une arithmétique des lignes, et accroît considérablement la fécondité de l'utilisation de l'algèbre en géométrie.

Descartes ne rédige pas de nouveaux *Éléments de géométrie*. D'autres le feront à partir de son travail, comme Antoine Arnauld¹⁵ et Lamy. Ce dernier, oratorien et philosophe cartésien, rédige en 1685 de *Nouveaux éléments de Géométrie*, dans lesquels il compare l'analyse des Anciens et l'analyse cartésienne à l'occasion de la résolution du problème suivant :

Problème. BAC est un triangle isocèle, on propose de couper ses côtes AB , AC , par une parallèle à la base BC ; de sorte que cette parallèle soit égale à ce qui reste de côtes, c'est-à-dire (je suppose la chose faite) que $DB = DE$.

Première manière

Je suppose la chose faite, que $DB = DE$, donc le triangle BDE

10. *Ibid.*, p. 373.

11. Lacroix, *Éléments de géométrie*, Paris : Courcier, 1798.

12. *Ibid.*, p. 340.

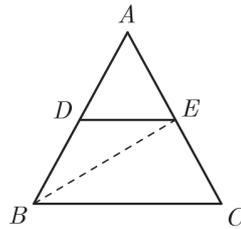
13. Gergonne, « De l'analyse et de la synthèse, dans les sciences mathématiques », *Annales de géométrie pures et appliquées*, tome 7, 1817, p. 345-372.

14. Barbin, Evelyne, « Descartes », Barbin, Evelyne, Caveing, Maurice (dir.), *Les philosophes et les mathématiques*, Ellipses, 1996.

15. Arnauld, Antoine, *Nouveaux éléments de géométrie*, 2^e édition, Paris : Desprez, 1683.

I.1 Deux conceptions de l'analyse

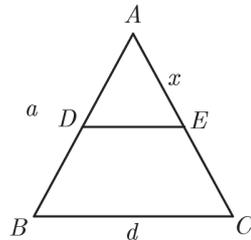
est isocèle, ainsi les angles DBE , & DEB sont égaux : Or les angles CBE & BED sont aussi égaux par le Theor. 8. liv. 2. §.1. partant EBC , & EBD sont égaux ; partant la ligne BE coupe par la moitié l'angle DBC .



Cette première manière est l'analyse des Anciens : de la chose cherchée, et de ce qui en dérive, Lamy aboutit à une chose connue, à savoir la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} . Il poursuit par la construction de la solution du problème :

D'où je connois que dans un triangle isocèle, tel que BAC , en divisant en deux l'angle ABC par une ligne droite BE , menant par E une parallèle à BC , elle sera égale à DB .

Lamy donne en contrepoint de la solution ci-dessus celle qu'il obtient par l'analyse cartésienne :



Seconde manière

Supposant la chose faite, je nomme AB qui est connu a , & d , la base BC , aussi connue, & x , la grandeur inconnue AE que l'on cherche ; ainsi comme $EC = a - x$, aussi $DE = a - x$, il est évident que $a, d :: x, a - x$, donc $aa - ax = dx$. J'ajoute de part et d'autre ax , & il vient $aa = dx + ax$; je suppose $c = d + a$, ainsi $cx = dx + ax$, & par conséquent au lieu de $dx + ax$, mettant cx , j'ay $aa = cx$; divisant donc cette équation par c , j'ay $\frac{aa}{c} = x$; par

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

conséquent \ddot{c}, a, x , ainsi, il ne s'agit que de trouver une troisième proportionnelle à deux lignes connues, qui sont les deux premiers termes d'une progression¹⁶.

Ayant nommé les lignes, Lamy déduit de ce que les triangles ADE et ABC sont semblables la proportion $\frac{a}{d} = \frac{x}{a-x}$. Le calcul algébrique lui permet de transformer cette équation pour exprimer l'inconnue x au moyen des connues a et c : il trouve que a , c et x forment une progression géométrique. Lamy oppose les deux manières de trouver la solution du problème :

On peut tenter la résolution d'un Problème par deux voyes. Le premier n'est qu'une application des Eléments qui font découvrir quelque moyen particulier au Problème dont il s'agit, & qui ne peut pas servir dans un autre. La seconde voye est l'ordre que prescrit la Méthode, par lequel on trouve ce que l'on cherche d'une manière d'autant plus excellente, qu'elle s'étend généralement à tout Problème [. . .] Cette seconde manière analytique est générale & n'est point particulière à ce problème¹⁷.

La différence entre les deux démonstrations est essentielle. L'analyse des Anciens part du problème considéré comme résolu et en tire une suite de propositions jusqu'à aboutir à une proposition connue ou admise. C'est une analyse propositionnelle. Elle est particulière au problème posé, et elle est attachée à la figure considérée, ce qui suscite la critique de Descartes : « l'Analyse des anciens [. . .] est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination »¹⁸. L'analyse cartésienne, quant à elle, décompose la figure en lignes et effectue un calcul sur ces lignes au moyen de l'algèbre. C'est une analyse compositionnelle : la figure est décomposée en ses éléments simples que sont les lignes. Elle est générale, elle s'applique aussi bien et de la même façon à tout autre problème¹⁹. À la suite de cette comparaison, Lamy n'emploie plus, dans la suite de l'ouvrage, que l'analyse cartésienne.

16. Lamy, *Nouveaux éléments de Géométrie, ou de la mesure du corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide a enseigné, les plus plus belles propositions d'Archimède et l'Analyse*, Paris : André Pralard, 1692, p. 315.

17. *Ibid.*, p. 315.

18. Descartes, *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie, qui sont des essais de cette méthode*, Leyde : Ian Maire, 1637, p. 19.

19. Barbin, Evelyne, *La révolution mathématique du XVII^e siècle*, ellipses, 2006, chapitre VII, p. 271-316.

I.2 Trois usages de l'analyse algébrique comme méthode

L'analyse cartésienne a valeur de démonstration. Elle se passe de la synthèse.

La distinction que fait Lamy entre l'analyse des Anciens et l'analyse cartésienne n'est pas reprise par Lacroix. Celui-ci ne considère qu'une analyse, désignant par là la forme de raisonnement qui procède de l'inconnu au connu. L'algèbre est pour lui « une écriture abrégée et régulière par le moyen de laquelle on représente toutes les relations que les grandeurs peuvent avoir entre elles »²⁰. L'algèbre est dès lors susceptible d'être employée aussi bien pour l'analyse, méthode d'invention, que pour la synthèse, méthode d'exposition.

Dans la suite de ce travail, nous désignerons par *analyse algébrique* l'emploi, en géométrie, d'un calcul algébrique sur les grandeurs représentées par des lettres.

2 Trois usages de l'analyse algébrique comme méthode

Nous allons maintenant présenter et analyser trois usages de cette analyse algébrique en tant que méthode en géométrie, car ils sont présents dans les ouvrages que nous examinerons par la suite. Ces usages apparaissent historiquement sur une période d'un siècle. Il s'agit de l'analyse algébrique chez René Descartes en 1637, chez Bernard Lamy en 1692 et chez Leonhard Euler en 1748. En reprenant brièvement les écrits de ces auteurs, nous pourrions ainsi identifier des héritages, mais aussi examiner comment les héritiers reprennent et adaptent les méthodes de leurs devanciers dans un contexte historique bien différent.

2.1 L'analyse algébrique comme méthode de résolution des problèmes dans la *Géométrie* de Descartes (1637)

Dans la *Géométrie*, Descartes applique sa méthode à la résolution de problèmes de construction géométrique. Les premières lignes annoncent que « Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques

20. Lacroix, *Op. Cit.*, p. 235.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

lignes droites, pour les construire »²¹. Descartes appuie cette affirmation en terminant le premier Livre de la *Géométrie* par la résolution d'un problème célèbre mentionné par Pappus et non encore résolu²². La description qu'il donne de sa méthode est la suivante :

Voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé le moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme équation²³.

Une fois l'équation résolue, il reste encore à déterminer la construction de la figure à la règle et au compas. Descartes a indiqué pour cela, au début de l'ouvrage, comment construire la somme et le produit de deux lignes, et la racine carrée d'une ligne. Il affirme qu'il est toujours possible de construire une expression algébrique de lignes connues, « par des cercles & des lignes droites, ou aussy par des sections coniques, ou mesme par quelqu'autre ligne ».

Ainsi, dans l'exemple précédent, l'analyse cartésienne aboutit à une équation vérifiée par une ligne de la figure. La construction de cette ligne est possible à la règle et au compas : la proposition 11 du Livre VI des *Éléments* d'Euclide, par exemple, donne la construction d'une troisième proportionnelle à deux lignes données²⁴. Remarquons que l'autre solution que donne Lamy n'aboutit pas à la même construction, et recourt à la construction d'une bissectrice.

Lorsque l'équation vérifiée par la ligne cherchée est du premier ou du deuxième ordre, cette ligne peut être construite à la règle et au compas, c'est-à-dire par intersection de droites et de cercles. Dans le cas où l'équation obtenue serait d'un ordre supérieur à deux, Descartes obtient la solution par intersection de courbes autres que des droites et des cercles. En effet, la solution ne peut pas être construite à la règle et au compas, conformément à

21. Descartes, *Op. Cit.*, p. 297.

22. Maronne, Sébastien, *La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne : 1637-1661*, thèse de philosophie des sciences soutenue à l'université Paris VII, sous la direction de Marco Panza, 2007.

23. Descartes, *Op. Cit.*, p. 300.

24. Euclide, *Éléments de géométrie*, trad. Peyrard, Paris : Louis, 1804, p. 230.

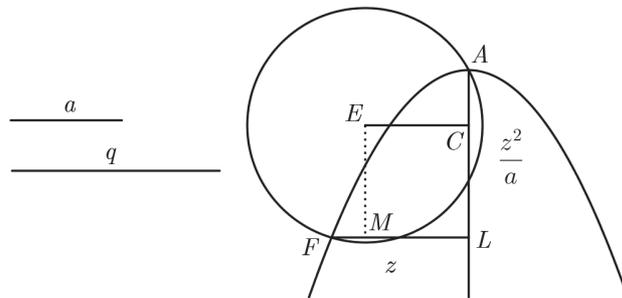
I.2 Trois usages de l'analyse algébrique comme méthode

l'exigence héritée des géomètres Grecs. Mais Descartes intègre dans sa géométrie toutes les courbes qui ont une équation algébrique, au même titre que les droites et les cercles dans la géométrie euclidienne. Il décrit d'ailleurs un instrument capable de tracer des courbes géométriques de degré quelconque²⁵. Dans le Livre III, il donne une solution par intersection d'un cercle et d'une parabole du problème célèbre depuis l'Antiquité de la construction de deux moyennes proportionnelles. Ce problème consiste à trouver, étant données deux lignes a et q , deux autres lignes z et z' telles que l'on ait la proportion $a : z :: z : z' :: z' : q$.

Si on veut [...] trouver deux moyennes proportionnelles entre les lignes a et q , chacun sait que posant z pour l'une, comme a est à z , ainsi z à $\frac{z^2}{a}$, et $\frac{z^2}{a}$ à $\frac{z^3}{a^2}$; de façon qu'il y a équation entre q et $\frac{z^3}{a^2}$, c'est-à-dire

$$z^3 = a^2q.$$

Et la parabole FAG étant décrite, avec la partie de son essieu AC qui est $\frac{1}{2}a$ la moitié du côté droit, il faut du point C élever la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2}q$, et du centre E par A , décrivant le cercle AF , on trouve FL et LA pour les deux moyennes cherchées²⁶.



La parabole FAG a pour côté droit la ligne a (appelée aujourd'hui le paramètre de la parabole), donc si la ligne FL est notée z , la ligne AL se trouve égale à $\frac{z^2}{a}$. En notant M le pied de la perpendiculaire issue de E sur la droite FL , l'égalité des lignes EF et EA , exprimées respectivement dans

25. Descartes, *Op. Cit.*, p. 318.

26. *Ibid.*, p. 396.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

les triangles rectangles EMF et ECA , donne :

$$EA^2 = \left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = EF^2 = \left(z - \frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{z^2}{a} - \frac{1}{2}a\right)^2$$

Cette équation, développée et réduite, conduit à la relation $z^3 = a^2q$ c'est-à-dire que les deux lignes FL et AL sont deux moyennes proportionnelles entre les lignes a et q .

La méthode de Descartes est une méthode de résolution des problèmes de construction géométrique dans un sens nouveau, en ce qu'il accepte d'employer des lignes autres que des droites et des cercles, en l'occurrence toutes les courbes dont l'équation est algébrique²⁷. Il s'astreint toutefois à utiliser les courbes les plus simples possibles, ce qui explique dans l'exemple ci-dessus le choix d'un cercle et d'une parabole et non d'une courbe du troisième degré. Le calcul sur les lignes permet ainsi d'établir des relations de nature algébrique entre les lignes inconnues et les connues, dont est déduite la construction des solutions en employant des courbes déterminées à partir d'équations.

2.2 L'analyse algébrique comme méthode d'invention dans les *Nouveaux éléments de géométrie* de Lamy (1692)

Lamy consacre le Livre V des ses *Nouveaux éléments de géométrie* à la méthode. Le chapitre V expose les règles de l'analyse cartésienne ; il est suivi de la résolution de plusieurs problèmes.

Les réflexions de Lamy suggèrent que la méthode, en plus de la résolution des problèmes, permet aussi d'inventer de nouvelles propositions. Ainsi le livre V s'ouvre sur l'affirmation que « l'on peut déduire des Elemens qui ont esté expliquez cy-dessus, tout ce qui se peut sçavoir de Geometrie, lorsqu'on suit une bonne méthode ». C'est même l'intérêt principal de l'étude de la Géométrie selon Lamy que d'apprendre à utiliser la méthode pour inventer :

Pour sçavoir ce que nous ne disons point icy, ou plus que nous ne disons il n'y a qu'à étudier avec soin ce qui a esté dit. Il serait même dangereux pour ceux qui s'appliquent à la Géométrie qu'on ne leur laissât rien à faire. On ne l'étudie que pour exercer

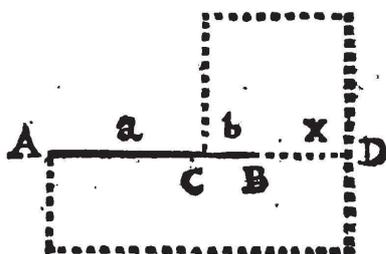
27. Bos, Henk, *Redefining geometrical exactness*, Springer, 2001.

I.2 Trois usages de l'analyse algébrique comme méthode

l'esprit & le former en cherchant avec méthode quelque nouveau Théorème²⁸.

L'emploi de la méthode pour inventer de nouveaux théorèmes est illustré par l'exemple ci-dessous. Lamy commence par résoudre un problème :

Problème. La ligne AB est coupée dans un de ses points, comme C , on propose de la prolonger jusque à D ; de sorte que le rectangle fait de AD , & de BD , soit égal au carré de CD ²⁹.



Lamy donne des noms aux lignes : AC est nommée a , BC est nommée b et BD est nommée x . Il « suppose la chose faite », et aboutit à l'équation $ax = bb + bx$ qui donne x comme troisième terme de la progression géométrique $a - b, b, x$. Le problème une fois résolu, il poursuit par une scholie :

La résolution de chaque problème, donne la connoissance d'un nouveau Theorème : Car selon ce qui vient d'être trouvé, si le carré de BD , prolongement d'une ligne, plus CB partie de cette ligne, est égal au rectangle fait de AD , & de BD : Ce prolongement sera le troisième terme d'une progression, dont $AC - BC$ est le premier terme, & BC le second. La plus grande partie des Theorèmes sont les fruits de l'analyse, qui comme vous voyez, est une source féconde de vérités³⁰.

L'analyse cartésienne produit systématiquement une relation algébrique entre les lignes, de sorte que toute solution de problème fournit nécessairement l'énoncé d'un théorème. Lamy l'affirme explicitement : l'analyse permet non seulement de résoudre les problèmes, mais elle est féconde, elle produit de nouvelles vérités.

28. Lamy, *Op. Cit.*, p. 258.

29. Lamy, *Op. Cit.*, p. 317.

30. Lamy, *Op. Cit.*, p. 318.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

2.3 L'analyse algébrique comme méthode démonstrative dans l'*Introduction à l'analyse infinitésimale* d'Euler (1748)

Dans le deuxième volume de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*, Leonhard Euler étudie systématiquement les courbes à partir de leur équation. Ce travail est présenté comme une application de la théorie des fonctions contenue dans le premier volume. La traduction française de l'ouvrage est réalisée en 1796 par Labbey, professeur à l'École centrale du département de la Seine. Euler étudie les courbes directement à partir de leur équation :

J'ai donné une théorie des Courbes en général, qu'on pût employer utilement pour en connaître la nature. Je n'ai eu besoin pour cela que de l'équation de la Courbe, qui m'a servi à en déterminer la figure, & à en déduire les principales propriétés. Je crois avoir rempli entièrement mon but, sur-tout dans les sections coniques, qui jusqu'ici avaient été traitées par la seule Géométrie³¹.

En effet, l'introduction, dans la *Géométrie* de Descartes, d'un segment unité, a permis de concevoir une équation entre deux lignes inconnues x et y comme représentant une courbe. Euler part de ce point de vue dans son ouvrage, et déduit, de la seule équation de la courbe, sa forme et ses propriétés. Il opère un classement des courbes à partir de leurs équations, dans lequel les sections coniques sont les courbes dont l'équation est du second ordre. Il leur consacre trois chapitres de l'ouvrage³². L'équation d'une conique y est écrite sous la forme :

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta yy = 0$$

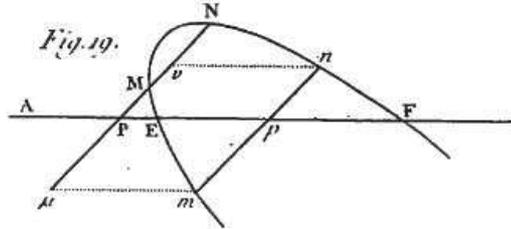
Voyons comment cette équation représente une courbe et comment Euler en trouve les propriétés. À chaque valeur réelle de la variable x correspond une abscisse AP sur une ligne donnée AF ; aux valeurs correspondantes de la variable y correspondent, dans une direction donnée, des appliquées PM , PN dont les extrémités représentent une courbe. En écrivant l'équation sous la forme :

$$yy + \frac{(\epsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$$

31. Euler, *Introduction*, vol. 1, p. ix.

32. Euler, *Introduction*, vol. 2, p. 39-107.

I.2 Trois usages de l'analyse algébrique comme méthode



Euler remarque que pour chaque abscisse x , on a deux appliquées y , qui, lorsqu'elles sont réelles, ont pour somme $PM + PN = \frac{-\epsilon x - \gamma}{\zeta}$ d'après un théorème connu d'algèbre. De là, il montre, par un raisonnement trop long pour être reproduit ici, que les milieux des lignes comme MN , mn sont alignés sur une même droite, appelée diamètre de la section conique. Il poursuit de la même façon, c'est-à-dire par un travail algébrique à partir de l'équation de la courbe, pour classifier les coniques et en démontrer de nombreuses propriétés.

Euler utilise l'analyse algébrique comme méthode démonstrative en géométrie, c'est-à-dire qu'il démontre les propriétés des courbes par un travail algébrique à partir de leurs équations. Cette méthode passe par une redéfinition des objets de la géométrie. Les lignes, droites et courbes, y sont représentées par des équations algébriques reliant abscisses et appliquées :

Une fonction quelconque de x donnera une certaine ligne droite ou courbe; d'où il suit que réciproquement on pourra rapporter aux fonctions les lignes courbes³³.

2.4 Conclusion

Nous avons identifié trois usages de l'analyse algébrique comme méthode en géométrie. Comme méthode de résolution d'un problème de construction géométrique chez Descartes, celle-ci passe par une redéfinition de la notion de construction géométrique en élargissant les lignes employées pour la construction à d'autres lignes que les droites et les cercles, à savoir les lignes qui ont une équation algébrique. Comme méthode d'invention chez Lamy pour interpréter géométriquement les relations algébriques établies entre les grandeurs. Comme méthode démonstrative dans l'ouvrage d'Euler pour démontrer les propriétés des courbes à partir de leur équation.

³³. Euler, *Introduction*, vol. 2, p. 4.

3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

Nous avons précisé les usages de l'analyse algébrique en tant que méthode en géométrie, dont hérite le XIX^e siècle. Quels choix opèrent les auteurs des ouvrages d'enseignement de notre première période pour exposer cette analyse algébrique ? Deux ouvrages sont majoritairement en usage au début du siècle, dans les Écoles centrales puis dans les Lycées, sur ce sujet : le *Cours de mathématiques* d'Étienne Bézout, rédigé entre 1764 et 1769, et l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de Lacroix publié en 1798. Nous étudierons ensuite les ouvrages publiés sur cette matière en France dans le premier tiers du siècle.

3.1 Le *Cours de mathématiques* de Bézout (1764-1769)

Un cours pour les officiers de Marine

Le *Cours de mathématiques* d'Étienne Bézout est rédigé entre 1764 et 1769, en réponse à la commande fixée par l'ordonnance royale du 14 septembre 1764 :

Il sera composé, par ordre de sa majesté, un cours d'éléments des différentes sciences qui conviennent pour le service de la marine ; cet ouvrage sera commun aux trois ports, il servira de point fixe aux examens que sa majesté se propose d'établir³⁴.

Il s'inscrit dans le cadre d'une refonte de la formation des officiers de marine entreprise par le ministre de la Marine Choiseul suite à la défaite, essentiellement maritime, de la guerre de sept ans contre les Anglais. Il a été notamment décidé d'élever le niveau de formation théorique des officiers, à l'image des Écoles militaires du Génie et de l'Artillerie. Pour concevoir et mettre en œuvre cette réforme, Bézout est donc nommé, en 1763, examinateur des gardes du pavillon de la Marine. Académicien depuis 1758 pour ses travaux sur la dynamique et le calcul intégral appliqués à la Mécanique, il est recommandé à ce poste par deux autres académiciens, Camus et Nollet, respectivement examinateur et professeur aux écoles du Génie de Mézières et

34. Alfonsi, Liliane, *Étienne Bezout (1730-1783), Mathématicien des Lumières*, Paris : L'Harmattan, 2011, p. 153.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

d'Artillerie de La Fère. Bézout accepte une telle affectation, qui lui apporte tout à la fois un revenu et une position sociale, et il restera lié, jusqu'à la fin de sa vie, aux Écoles militaires, comme examinateur et comme professeur.

Le *Cours* compte cinq parties, qui sont, dans l'ordre de leur publication, les *Éléments d'Arithmétique*, les *Éléments de géométrie*, *La Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie sphérique*, *l'Algèbre & application de cette science à l'Arithmétique & la Géométrie*, la *Mécanique*, en deux volumes, et enfin le *Traité de navigation*. Ce travail d'envergure a vocation à assurer la totalité de la formation scientifique des élèves de la Marine, prenant en cela exemple sur les ouvrages de Camus et de Bossut pour le Génie et sur ceux de Bélidor et de Deidier pour l'Artillerie³⁵. Les Mathématiques sont « indispensables »³⁶, écrit Bézout, pour exercer l'art de la Marine. Cet objectif professionnel de formation scientifique des élèves officiers détermine les choix qu'il fait pour la rédaction et l'organisation de son *Cours*. Les notions sont largement explicitées, les démonstrations se veulent claires et concises. Les *Éléments de géométrie* en particulier ne présentent aucun axiome, et recourent fréquemment à l'évidence dans le cours des démonstrations.

La mise en place d'examens à la fin de chacune des trois années que dure la formation confère une importance de premier plan à la fois aux sciences mathématiques et à l'examineur Bézout. Le *Cours* de Bézout connaîtra un immense succès. Dès 1770, il lui est demandé d'en réaliser une version adaptée à l'école d'Artillerie pour remplacer les ouvrages existants. Par la suite, les rééditions en seront nombreuses, jusqu'à la deuxième moitié du XIX^e siècle.

L'analyse algébrique comme méthode de résolution des problèmes

Bézout expose l'application de l'algèbre à la géométrie dans le tome III de son *Cours de mathématiques*³⁷, qui contient « l'algèbre et les applications de cette science à l'arithmétique et à la géométrie », et fait suite au tome II sur la géométrie élémentaire. Ce *Cours*, écrit initialement pour la formation des officiers militaire de l'Ancien Régime, est encore utilisé dans les Écoles centrales après la Révolution. L'Algèbre est une langue, affirme Bézout, qui

35. Taton, *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII^e siècle*, Paris : Hermann, 1986.

36. Bézout, *Op. Cit.*, p., i.

37. Bézout, *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, troisième partie contenant l'algèbre et l'application de cette science à l'arithmétique et à la géométrie, Nouvelle édition, Paris : Richard et Caille, 1798.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

constitue un outil au service d'une méthode : l'Analyse. Celle-ci soulage la mémoire et sollicite davantage l'esprit de recherche et d'invention. Bézout en montre le fonctionnement sur des « questions », dont les premières sont les suivantes :

- 251. Décrire un carré $ABCD$ dans un triangle donné EHI
- 252. Connoissant la longueur de la ligne BC , & les angles B & C que forment avec elle les deux lignes BA & CA , déterminer la hauteur AD à laquelle ces deux dernières lignes se rencontrent
- 254. Connoissant les trois côtés d'un triangle ABC , trouver les segments AD et DC formés par la perpendiculaire BD , & et la perpendiculaire BD elle-même
- 262. D'un point A dont la situation est connue à l'égard de deux lignes HD & DI qui font entre elles un angle connu HDI , tirer une ligne droite AEG de manière que le triangle intercepté EDG , ait une surface donnée ; c'est-à-dire, une surface égale à celle d'un carré connu cc
- 267. D'un point donné A hors d'un triangle donné DHI , mener une ligne AF qui divise ce triangle en deux parties DEF , $EFIH$ qui soient entre elles dans un rapport connu & marqué par le rapport de $m : n$
- 270. D'un point donné A hors d'un cercle BDC tirer une ligne droite AE , de manière que sa partie DE interceptée dans le cercle soit égale à une ligne donnée
- 271. Trouver sur la direction de la ligne donnée AB un point C tel que sa distance au point A , soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point B & la ligne entière AB
- 274. D'un point D situé dans l'angle droit IAE , & également éloigné des deux côtés IA & AE , mener une ligne droite DB , de manière que la partie CB comprise dans l'angle droit EAB soit égale à une ligne donnée
- 277. Supposons que $ABED$ représente une sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABE autour du diamètre AE . Le secteur ABC , dans ce mouvement, engendre un secteur sphérique qui est composé d'un segment sphérique engendré par la rotation d'un demi-segment ABP , & d'un cône engendré par le triangle rectangle BPC . Supposons qu'on demande en quel endroit le segment sphérique & le cône seront égaux entre eux

Cette dizaine de questions a pour but de montrer au lecteur les différentes façons à la fois de mettre en œuvre la méthode et d'interpréter les résultats

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

algébriques qu'elle produit. « L'application de l'Algèbre à la Géométrie [...], écrit Bézout, exige de la part de *l'Analyste*, un certain discernement dans le choix & l'emploi des moyens. Mais comme ce discernement s'emploie en grande partie par l'usage, nous allons appliquer ces observations à divers exemples »³⁸. Ces exemples sont autant d'occasions de montrer comment choisir l'inconnue, préparer les équations, substituer les données à d'autres, ou encore interpréter les multiples solutions des équations, notamment lorsqu'elles sont négatives. Après le n°271, donc à la fin de la liste, Bézout formule une règle pour le choix de l'inconnue afin d'arriver à des équations les plus simples possibles :

Si parmi les lignes ou les quantités qui étant prises chacune pour l'inconnue, pourroient servir à déterminer toutes les autres quantités, il s'en trouve deux qui y servent de la même manière, en sorte qu'on prévoie que l'une ou l'autre conduiroit à la même équation (aux signes + ou - près); alors, on fera bien de n'employer ni l'une ni l'autre, mais de prendre pour inconnue une autre quantité qui dépende également de l'une & et l'autre de ces deux-là; par exemple, de prendre pour inconnue leur demi-somme³⁹.

Cette règle est très semblable à celle qu'énonce Newton à l'issue de la résolution du même problème dans *l'Arithmétique universelle*⁴⁰, traduite récemment en français, en 1802, par le professeur de mathématiques Beaudeau.

Cette question du choix de la ligne prise pour inconnue est illustrée à l'occasion du problème suivant n°274, dont nous verrons qu'il est lié au problème classique de la trisection de l'angle. Bézout montre d'abord qu'en choisissant pour ligne inconnue $EC = x$, et en nommant les lignes $DE = a$, $BC = c$, la considération des triangles semblables DEC et ABC mène à l'équation :

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$$

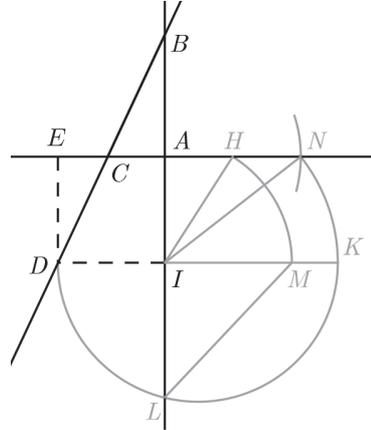
La *Géométrie* de Descartes indique comment construire les solutions d'une telle équation par intersection d'un cercle avec une parabole. Mais d'autres choix de la ligne inconnue mènent à d'autres équations. Bézout mentionne, comme autres choix possibles, les lignes IB , AB , AC , DB et DC . Concernant

38. Bézout, *Op. Cit.*, p. 310.

39. Bézout, *Cours*, troisième partie, p. 324.

40. Newton, *Arithmétique universelle*, tome premier, trad. Beaudeau, Paris : Bernard, 1802, p. 166.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRE



ces deux derniers choix, ils amènent respectivement aux équations :

$$c^2 = \left(\frac{ac}{x}\right)^2 + \left(\frac{ac}{c+x}\right)^2 \quad \text{et} \quad c^2 = \left(\frac{ac}{x-c}\right)^2 + \left(\frac{ac}{x}\right)^2$$

Ces deux équations sont identiques à un signe près. En application de la règle ci-dessus, Bézout prend pour inconnue la ligne égale à la demi-somme des lignes DB et DC . Ce dernier choix mène à l'équation :

$$x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$$

Cette équation est plus simple que la précédente, et ses solutions peuvent être construites à la règle et au compas.

Bézout envisage encore d'employer deux lignes inconnues x et y qui soient respectivement la demi-somme et la demi-différence des lignes AB et AC . Le développement de ce choix, qui ne correspond pas à la règle énoncée plus haut, est laissé à l'initiative du lecteur. Il amène à l'équation du deuxième ordre $y^2 + ay - \frac{c^2}{4} = 0$ pour la ligne y , et la ligne x en est déduite par la relation $x^2 = \frac{c^2}{2} - y^2$. Cette solution paraît la plus simple de toutes, mais n'entre pas dans le cadre d'une règle que Bézout puisse formuler.

Il revient à l'équation du quatrième ordre précédemment obtenue pour construire la solution du problème à la règle et au compas. Il la résout et aboutit à :

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$$

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

Cette expression est susceptible de prendre quatre valeurs. Bézout affirme que seule celle obtenue en ne retenant que les signes + répond au problème. Voici comment il construit cette solution (voir figure) :

Pour construire la solution qu'on vient de trouver, on prendra sur EA prolongée, la partie $AN = c$, & ayant tiré IN , on portera cette dernière sur DI prolongée de I en K ; sur DK comme diamètre, on décrira le demi-cercle KLD rencontré en L par AI prolongée. Du milieu H de AN on tirera IH que l'on portera de I en M , & on aura LM pour la première valeur de x ⁴¹.

En effet, $IN^2 = a^2 + c^2$, donc $IL^2 = DI.IK = a\sqrt{a^2 + c^2}$. D'autre part, $IH^2 = \frac{1}{4}cc + aa$. Donc LM est bien égale à l'expression de x donnée plus haut.

Quant aux trois autres racines de l'équation du quatrième degré à laquelle a abouti la résolution du problème, Bézout déclare qu'elles appartiennent à d'autres cas, selon que la ligne CB est dans le même angle que le point D , ou que le point D est situé différemment relativement aux lignes AI et AE .

La plupart des questions de la liste sont des problèmes de construction géométrique, et jusque là toutes les solutions peuvent en être construites à la règle et au compas. Bézout donne à voir le fonctionnement d'une méthode pour résoudre des problèmes de constructions géométriques à la règle et au compas. Seul le n°271, le partage d'un segment en moyenne et extrême raison, se trouve dans les *Éléments* d'Euclide⁴². L'inscription d'un carré dans un triangle est un problème proposé et résolu par le mathématicien perse du IX^e siècle Al-Khwarismi⁴³. Le n°274 est un cas particulier d'un problème d'intercalation présent dans la *Collection mathématique* de Pappus, et dont la résolution y est liée au problème de la trisection d'un angle. Bézout veut montrer comment l'emploi de l'algèbre aboutit à l'invention de la solution : « on voit que l'Algèbre nous conduit à trouver cette construction ; au lieu qu'en Géométrie nous supposons la construction déjà trouvée, & nous en démontrions seulement la légitimité »⁴⁴.

Bézout ne se limite pas aux constructions à la règle et au compas. Plus loin dans l'ouvrage, il démontre que les coniques sont les courbes dont l'équation

41. Bézout, *Op. Cit.*, p. 331.

42. Euclide, *Op. Cit.*, Livre II, prop. 11, p. 99.

43. Guyot, Patrick, « Un carré dans un triangle, De l'utilisation de textes anciens pour résoudre un problème », *Repères IREM*, n°51, 2003.

44. Bézout, *Op. Cit.*, p. 324.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

est du second degré, et les utilise pour décrire quelques lieux géométriques et résoudre quelques problèmes de construction. C'est ainsi qu'il résout le problème des moyennes proportionnelles par intersection de deux paraboles puis d'un cercle avec une parabole, le problème de la trisection d'un angle par intersection d'un cercle avec une hyperbole, et le problème du n°274 ci-dessus, dans le cas général où le point D a une position quelconque par rapport aux droites AI et AE , par intersection d'une ellipse avec une hyperbole. Bézout emploie l'analyse algébrique comme méthode de résolution des problèmes de construction géométrique conformément à la *Géométrie* de Descartes.

L'analyse algébrique comme méthode d'invention

Revenons maintenant aux numéros 252 et 254 de la liste. Leur solution, en tant que construction, serait immédiate, et elle est déjà traitée dans les *Éléments de géométrie* contenus dans la deuxième partie du *Cours*⁴⁵. Lorsque Bézout demande de « déterminer la hauteur » ou de « trouver les segments », il s'agit en fait de trouver une expression algébrique de ces grandeurs au moyen des grandeurs données, et non de les construire géométriquement. Ces deux énoncés donnent à voir, en fait, le chemin de l'invention, en montrant comment « lire dans une équation ce qu'elle renferme »⁴⁶. Bézout présente le numéro 254, dont l'énoncé est rappelé ci-dessous, comme « une question qui nous donne lieu tout à la fois de faire voir la manière de mettre en équation les questions de géométrie, & comment par différentes préparations de ces équations, on peut découvrir de nouvelles propositions ».

254. Connoissant les trois côtés d'un triangle ABC , trouver les segmens AD & DC formés par la perpendiculaire BD , & la perpendiculaire BD elle-même.

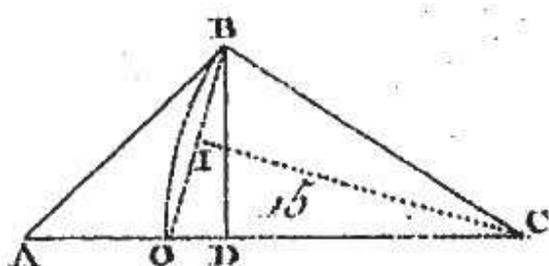
Bézout nomme les lignes $BD = y$; $CD = x$; $BC = a$; $AB = b$, $AC = c$. Il écrit ensuite dans les triangles rectangles BDC et ABD les relations $xx + yy = aa$ et $cc - 2cx + xx + yy = bb$, dont la différence est $cc - 2cx = bb - aa$, et d'où se peut tirer l'expression $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$. Il transforme cette expression pour retrouver une caractérisation de la ligne CD qu'il avait établie dans ses *Éléments de géométrie*⁴⁷ : $x = \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c$, d'où x est la moitié de la

45. Bézout, *Cours de mathématiques*, seconde partie, 1811, p. 44.

46. Bézout, *Cours de mathématiques*, troisième partie, 1798, p. 305.

47. Bézout, *Cours de mathématiques*, seconde partie, 1811, p. 250.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement



quatrième proportionnelle à c , $a + b$, & $a - b$ augmentée de la moitié du côté AC .

Mais Bézout ne s'arrête pas là, c'est-à-dire à la solution de la question posée. Il poursuit afin de montrer comment « on peut tirer plusieurs autres conclusions de ces mêmes équations ». Par la manipulation des expressions algébriques, il établit six autres propositions, dont les quatre suivantes :

- $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$
- $ac : (s - a)(s - c) :: R^2 : (\sin.OCI)^2$, où s est le demi périmètre du triangle
- l'aire du triangle est égale à $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$
- $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD$

Voici comment il obtient la troisième de ces propositions, qui établit une relation entre l'aire d'un triangle et les longueurs de ses trois côtés. La relation $x^2 + y^2 = a^2$ dans le triangle rectangle BDC est écrite sous la forme $y^2 = (a + x)(a - x)$, équation dans laquelle x est remplacé par sa valeur trouvée précédemment $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$. On obtient $4c^2y^2 = (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)$, d'où dérive la proposition puisque l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}cy$. La manipulation et l'interprétation des équations permet d'inventer de nouvelles propositions.

Dans le *Cours* de Bézout, l'emploi de l'algèbre en géométrie est donc à la fois une méthode de résolution de problèmes et une méthode d'invention. Cette méthode est montrée sur des exemples. Elle n'est en aucun cas une règle : le géomètre doit faire des choix et prendre des initiatives. Les difficultés inhérentes à l'application de la méthode sont exposées et commentées : choix des inconnues, mise en équation, résolution des équations, interprétation et construction des solutions. La solution des problèmes de constructions se termine toujours par la construction effective de la figure, en recourant le cas échéant à d'autres lignes que les droites et les cercles, en l'occurrence aux coniques.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

L'analyse algébrique comme méthode démonstrative

Enfin, Bézout recourt aussi à l'analyse algébrique comme méthode démonstrative, pour établir les propriétés des coniques⁴⁸, dont il a besoin ensuite pour résoudre les problèmes menant à une équation d'un ordre supérieur à deux.

Le *Cours de mathématiques* de Bézout expose donc l'application de l'algèbre à la géométrie à la fois comme méthode de résolution des problèmes, illustrée sur une succession d'énoncés, comme méthode d'invention en montrant comment « lire dans une équation ce qu'elle renferme », et comme méthode démonstrative pour établir les propriétés des sections coniques.

3.2 L'Application de l'algèbre à la géométrie de Lacroix (1798)

Lacroix réunit dans un même ouvrage de 1798, destiné aux écoles centrales, les trigonométries rectiligne et sphérique et l'application de l'algèbre à la géométrie⁴⁹. Cette dernière commence, comme dans l'ouvrage de Bézout, par la résolution de plusieurs questions. Voici la liste complète des questions qui sont traitées au long de cette partie de l'ouvrage :

- 64. Connaissant les trois côtés d'un triangle, trouver l'expression de son aire
- 65. Incrire un carré dans un triangle
- 66. Diviser une ligne en moyenne et extrême raison
- 72. Étant donnés la somme ou la différence des deux côtés contigus d'un rectangle et son aire, construire ce rectangle
- 75. Mener dans un triangle donné ABC , parallèlement au côté AC , une ligne DE qui soit égale à une ligne donnée MN .
- 77. Trouver sur la droite $AB = a$ un point E tel que sa distance AE au point A soit moyenne proportionnelle entre sa distance à l'autre extrémité B et la ligne entière AB [identique au n° 66]
- 78. Par un point E , placé comme on voudra à l'égard de deux droites AB et AC , perpendiculaires entre elles, mener une droite de manière que la partie $D'F'$ de cette droite, interceptée entre les deux lignes proposées, soit d'une grandeur donnée m .

48. Bézout, *Cours*, troisième partie, p. 360-424.

49. Lacroix, *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie*, 4^e édition, Paris : Courcier, 1807.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

- 96. Deux lignes droites, AE et DE , étant données par les angles qu'elles font avec une troisième AB , et par la partie AD quelles interceptent sur cette troisième, trouver sur une ligne AC , perpendiculaire à AB , un point G , par lequel, menant une droite GK , parallèle à AB , la partie HK , comprise entre AE et DE soit d'une grandeur donnée [identique au n° 75]
- 98. Soit encore le problème [...] déjà résolu au n°78
- 104. Si d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des côtés de ce triangle, la somme de ces trois lignes sera égale à sa hauteur
- 107. Mener par un point pris hors du cercle, une tangente à ce cercle.
- 109. Trouver la position que doit avoir la ligne EM , menée par le point donné E , pour que la partie MM' de cette ligne, comprise dans le cercle, soit d'une grandeur donnée m .

Ces énoncés sont des constructions géométriques, à deux exceptions près : le n°64 est une expression algébrique à trouver, et le n°104 est un théorème à démontrer. La majorité des énoncés sont communs avec ceux de l'ouvrage de Bézout. Le n°72 se trouve dans les *Éléments de géométrie* de Legendre⁵⁰, et les n°66 et n°107 se trouvent dans les *Éléments* d'Euclide, où ils sont résolus bien entendu sans recourir à l'algèbre. Nous remarquons que trois énoncés apparaissent à deux reprises dans la liste : c'est que les énoncés sont donnés surtout pour illustrer le propos tout au long de son développement. Ainsi, le n°66 est un exemple de problème qui mène à une équation du second degré ; le même énoncé est repris au n°77 pour illustrer cette fois le traitement des solutions négatives d'une équation. De la même façon, les n°64 et n°65 illustrent l'emploi de l'algèbre en géométrie, respectivement pour déterminer une expression algébrique et pour déterminer une ligne. Le n°72 illustre la construction des racines des équations du second degré, et le n°75 est un exemple de cas où l'équation obtenue a une racine négative.

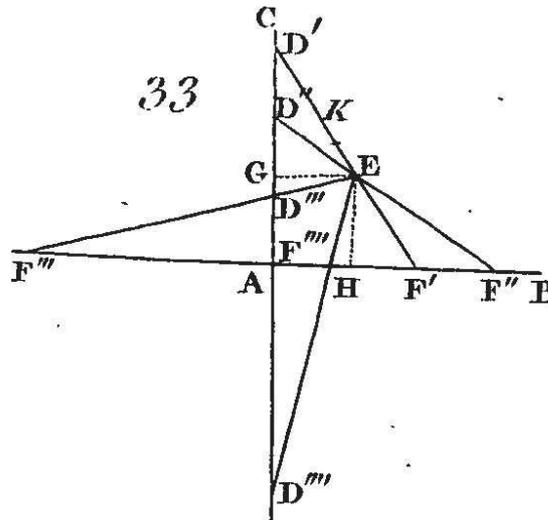
Suite à la résolution des questions, Lacroix entreprend une étude approfondie des sections coniques à partir de leur équation. Il démontre leurs propriétés relatives aux diamètres, aux centres, aux asymptotes et aux tangentes, il établit plusieurs théorèmes sur les coniques et en décrit différents modes de génération. Il emploie alors l'application de l'algèbre à la géométrie comme méthode démonstrative. Il n'est plus question, en revanche, de méthode d'invention dans l'ouvrage de Lacroix.

50. Legendre, *Éléments de géométrie*, Paris : Firmin Didot, 1794.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRE

Par ailleurs, l'analyse algébrique comme méthode de résolution des problèmes de construction géométrique apparaît dans l'ouvrage sous deux formes distinctes. Les questions des numéros 64 à 78 sont résolues par une première méthode, et celles des numéros suivants par une autre, ce qui explique que l'énoncé des n°75 et n°96 apparaisse deux fois dans la liste, même s'il est formulé différemment. Comparons ces deux méthodes par les deux solutions données à la question des n°78 et n°98.

La première méthode est décrite ainsi : « il faut d'abord mettre la question en équation, tirer l'expression de l'inconnue [et enfin] effectuer sur les lignes connues les opérations graphiques correspondantes à celles qui sont indiquées par les signes algébriques ». Lacroix nomme les lignes $GE = a$, $HE = b$ et $AD' = y$. La similitude des triangles EGD' et $F'AD'$, ainsi que la relation



entre les côtés du triangle rectangle $F'AD'$, mènent à l'équation :

$$y^4 - 2by^3 + (b^2 + a^2 - m^2)y^2 + 2bm^2y - b^2m^2 = 0$$

Lacroix en accepte les quatre solutions, illustrées sur la figure, contrairement à Bézout dont il critique la solution donnée à ce même problème, qu'il qualifie d'« incomplète et fautive »⁵¹. Il résout l'équation dans le cas particulier où $a = b$ par un changement de variable inspiré par des considérations géométriques. La méthode employée procède, écrit-il, « de la considération des

51. *Ibid.*, p. 110.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

triangles semblables et des triangles rectangles que présente la figure résultante du problème supposé résolu, en s'aidant même de quelques constructions préparatoires »⁵² comme dans l'ouvrage de Bézout, et selon la méthode indiquée par Descartes et Lamy.

Plus loin dans l'ouvrage apparaît une deuxième méthode, qui, cette fois, « consiste à déterminer les équations des lignes qui contiennent les points cherchés, en partant des propriétés de ces lignes⁵³ ». Prenant les droites AB et AC comme axes des coordonnées, Lacroix désigne par α et β les coordonnées du point E . L'équation de la droite cherchée ED' est alors de la forme $y - \beta = -a(x - \alpha)$, d'où sont tirées les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes. F' a pour coordonnées $\frac{\beta + a\alpha}{a}$ et 0 et D' a pour coordonnées 0 et $\beta + a\alpha$. La distance $F'D'$ est alors donnée par l'expression :

$$F'D' = \sqrt{\left(\frac{\beta + a\alpha}{a}\right)^2 + (\beta + a\alpha)^2} = \frac{\beta + a\alpha}{a} \sqrt{1 + a^2}$$

Cette longueur étant donnée, égale à m , le coefficient directeur a de la droite cherchée $F'D'$ est solution d'une équation du quatrième degré, qui se trouve être justement celle obtenue précédemment.

Cette deuxième méthode consiste à choisir deux lignes de la figure comme axes des coordonnées, pour traduire les données de l'énoncé directement sur les coordonnées des points et sur les coefficients des équations des lignes. Il fallait ici savoir exprimer l'équation d'une droite passant par un point donné, savoir déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites, et encore savoir exprimer la distance entre deux points donnés. Pour pouvoir réaliser immédiatement ces traductions, Lacroix, avant de commencer à employer cette deuxième méthode, les décrit de façon complètement générale et donc une fois pour toutes. Il commence par donner l'équation de la droite passant par deux points d'abscisses α et α' et d'ordonnées β et β' sous la forme :

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

Puis l'expression de la distance entre ces deux mêmes points sous la forme :

$$\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}$$

52. *Ibid.*, p. 153.

53. *Ibid.*, p. 153.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

Il poursuit avec l'équation d'une droite parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné, les coordonnées du point d'intersection de deux droites, la distance d'un point à une droite, les expressions du cosinus, du sinus et de la tangente de deux droites en fonction des coefficients de leurs équations, les équations d'un cercle de centre et de rayon donnés, et d'un cercle passant par trois points donnés. Dès lors, les termes d'une question de géométrie peuvent être automatiquement traduits en relations algébriques entre coordonnées des points et coefficients des équations des lignes. Lacroix remarque qu'il n'est plus nécessaire de recourir aux propriétés de la figure :

Ce qui précède étant bien compris, toutes les questions que l'on peut proposer sur la ligne droite et sur le cercle, se ramènent facilement à l'algèbre, sans qu'il soit besoin de recourir à d'autres propriétés des figures qu'à la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle⁵⁴.

Lacroix établit ainsi une sorte de dictionnaire qui permet de traduire immédiatement sous forme algébrique toute donnée géométrique exprimée dans l'énoncé d'une question. C'est aussi ce que fait Monge dans l'*Analyse appliquée à la géométrie*⁵⁵, ouvrage réalisé à partir de ses leçons données à l'École polytechnique. La première partie, intitulée *Application de l'algèbre à la géométrie*, commence par la résolution de ce genre de « problèmes » dans l'espace : trouver l'équation de la droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné, celle d'une droite par deux points donnés, etc., dans le but d'étudier la théorie des surfaces courbes.

Lacroix distingue nettement la deuxième méthode de la précédente :

Il doit être évident, d'après ce qui précède, que les questions de géométrie peuvent être traitées par deux méthodes bien distinctes : l'une consiste à déterminer les équations des lignes qui contiennent les points cherchés, en partant des propriétés de ces lignes ; et l'autre, à déduire immédiatement de la considération des triangles semblables et des triangles rectangles que présente la figure résultante du problème supposé résolu, [...] les relations des droites qui déterminent la position de ces points.

La première de ces méthodes, quelquefois plus élégante que la

54. *Ibid.*, p. 133.

55. Monge, Gaspard, *Application de l'analyse à la géométrie*, 4^e édition, Paris : V^{ve} Bernard, 1809.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

seconde, est toujours plus générale ; mais la seconde est souvent plus simple ; et cela doit être, puisque par celle-ci on prend les choses de moins haut, et qu'on part de propriétés plus voisines de celles qu'on cherche à découvrir⁵⁶.

Les deux méthodes ont des caractéristiques différentes : l'une est générale, l'autre est simple. Lacroix ne déclare pas l'une meilleure que l'autre, mais il les met en regard en résolvant plusieurs questions successivement par les deux méthodes.

Concernant la construction de la solution des problèmes de construction, Lacroix considère qu'il est « élégant »⁵⁷ de l'effectuer. et il donne les principes généraux permettant d'opérer la construction d'une ligne donnée par une expression algébrique. Toutefois, il ne considère pas cette construction comme indispensable, car moins précise souvent qu'une approximation numérique :

Avant que les méthodes d'approximation eussent atteint le degré de perfection où elles sont portées aujourd'hui, les géomètres s'appliquaient beaucoup à la construction des équations, et faisaient tous leurs efforts pour l'effectuer par les courbes les plus simples, ou les plus faciles à décrire [...] Mais le peu d'usage que l'on fait à présent des constructions dispense des détails à cet égard⁵⁸.

Le plus souvent, Lacroix arrête donc la résolution des problèmes de construction à l'équation qui lie la ligne inconnue aux grandeurs connues. Par exemple, le problème de la duplication d'un cube d'arête a s'arrête à l'équation $x^3 - 2a^3 = 0$ vérifiée par le côté x du cube cherché⁵⁹. La solution d'un problème consiste donc en une équation vérifiée par une ligne inconnue de la figure. Elle est dissociée de la construction de la figure.

Concluons quant à l'application de l'algèbre à la géométrie comme méthode dans l'ouvrage de Lacroix. Comme dans l'ouvrage de Bézout, l'application de l'algèbre à la géométrie est en premier lieu une méthode de résolution de problèmes. Elle est dès le début illustrée sur des questions, qui sont en majorité, mais pas toutes, des problèmes de construction. En revanche, à la différence de Bézout, Lacroix reconnaît deux méthodes distinctes pour la résolution des problèmes par l'application de l'algèbre. L'une, caractérisée par sa simplicité, procède de la considération des triangles semblables et

56. Lacroix, *Traité élémentaire*, p. 153.

57. Lacroix, *Traité élémentaire*, p. 88.

58. Lacroix, *Traité élémentaire*, p. 245.

59. Lacroix, *Traité élémentaire*, p. 244.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

des triangles rectangles de la figure. Nous l'appellerons l'analyse algébrique des figures. L'autre, caractérisée par sa généralité, s'appuie sur la traduction automatique des données géométriques en relations sur les coordonnées des points et les coefficients des équations des lignes. Nous l'appellerons la méthode des coordonnées. Les deux méthodes aboutissent à une équation vérifiée par l'inconnue. La construction effective des solutions de cette équation, lorsqu'il s'agit d'un problème de construction géométrique, n'est pas indispensable pour Lacroix : l'équation en elle-même peut être considérée comme étant la solution du problème, et les méthodes numériques d'approximation sont susceptibles de fournir une valeur approchée aussi précise que nécessaire.

3.3 Les ouvrages d'enseignement du premier tiers du XIX^e siècle

Après les ouvrages de Bézout et de Lacroix, il s'agit de repérer dans les ouvrages publiés dans le premier tiers du XIX^e siècle les emplois de l'analyse algébrique, pour savoir s'ils relèvent de la résolution des problèmes, de l'invention ou d'une méthode démonstrative. Concernant la résolution des problèmes, reprennent-ils la distinction faite par Lacroix entre analyse algébrique des figures et méthode des coordonnées ? Par ailleurs, nous serons attentifs au statut donné aux constructions géométriques, à la règle et au compas, avec des courbes algébriques, ou écartées au profit des méthodes d'approximation.

Biot : *Éléments d'une nouvelle géométrie* (1805)

Jean-Baptiste Biot publie son *Essai de Géométrie Analytique*⁶⁰ en 1805, pour les « jeunes gens qui étudient pour entrer à l'École polytechnique ». En effet, les programmes de l'École exigent des candidats de savoir « la discussion complète des lignes représentées par les équations du premiers et second degré à deux inconnues [et] les propriétés principales des sections coniques ». L'ouvrage est le résultat des leçons données par l'auteur à l'École centrale de l'Oise. L'auteur fait le choix de la méthode des coordonnées contre l'analyse algébrique des figures. L'importance que revêt pour lui ce choix justifie le titre innovant de *Géométrie Analytique* qu'il donne à son ouvrage :

60. Biot, *Essai de Géométrie Analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre*, 5^e édition, Paris : Klostermann, 1813.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

J'entends, par cette dénomination, la manière d'appliquer l'algèbre à la géométrie, non pas à l'aide de constructions particulières, qu'il faut varier pour tous les cas, mais en employant les méthodes générales que MM. Lagrange et Monge ont les premiers fait connaître dans leurs ouvrages ; méthodes enseignées depuis par M. Monge à l'École Polytechnique, et si heureusement introduites par M. Lacroix dans ses traités élémentaires ; ce qui est un des plus importants services que l'on ait jamais rendus à l'enseignement ⁶¹.

Les ouvrages que mentionne Biot sont certainement l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de Monge ⁶² et la *Mécanique analytique* de Lagrange ⁶³. Le terme de géométrie analytique avait été proposé par Lacroix dans l'introduction de son *Traité de calcul différentiel et intégral* de 1797 :

En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourrait appeler *Géométrie analytique*, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, comme Lagrange l'a fait dans sa Mécanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement ⁶⁴.

Effectivement, Lagrange annonce dans l'avertissement à la *Mécanique analytique* qu'« On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière & uniforme » ⁶⁵.

L'ouvrage de Biot commence par des *Préliminaires*, qui s'ouvrent sur la résolution d'un problème, le partage d'un segment en moyenne et extrême raison. Ce premier problème est résolu par ce que nous avons appelé l'analyse algébrique des figures, afin de donner au lecteur un premier aperçu de ce qu'est l'application de l'algèbre à la géométrie. L'auteur conçoit cette application en deux parties : « la première consiste à énoncer en algèbre l'état de la question proposée ; cela s'appelle mettre le problème en équation : la

61. *ibid.*, préface.

62. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, Paris : Bernard, 1805.

63. Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris : V^{ve} Desaint, 1788.

64. Lacroix, *Traité de calcul différentiel et intégral*, Paris, Duprat, 1797, p. xxv.

65. Lagrange, *Op. Cit.*, p. vj.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

seconde a pour objet la résolution des équations du problème et la détermination des inconnues ; celle-ci est purement de calcul »⁶⁶. Il explique ensuite au lecteur qu'il recherche, pour la première partie, « un procédé direct pour énoncer les problèmes de géométrie dans le langage de l'algèbre »⁶⁷. Sans proposer de nouveau problème à résoudre, il détaille alors comment traduire directement, en se rapportant à deux lignes fixes, les données géométriques en des relations algébriques sur les coordonnées des points et les coefficients des équations des lignes et des plans. Ces propositions constituent le corps de ces préliminaires, qu'il compare aux instruments de la géométrie pratique :

J'expose d'abord les préliminaires relatifs aux points, à la ligne droite et au plan. Ces préliminaires sont, dans la Géométrie analytique, aussi indispensables que la règle et le compas dans le tracé de la Géométrie pratique⁶⁸.

Il souligne ainsi que les propositions qui donnent, de façon générale et une fois pour toute, la traduction algébrique en coordonnées d'une propriété géométrique, sont les opérations élémentaires de la géométrie analytique. La mise en équation d'une question consiste en une combinaison et une articulation de ces propositions. Quant à la place des constructions géométriques en géométrie analytique, elle est accessoire :

Les constructions géométriques ne doivent être regardées que comme un moyen quelquefois élégant de représenter les solutions des problèmes, et non pas comme un procédé rigoureux pour trouver leurs valeurs numériques. Relativement à ce dernier objet, le calcul est infiniment préférable, parce que son exactitude est indéfinie⁶⁹.

Une fois les équations résolues, Biot recommande le calcul numérique pour déterminer l'inconnue, plutôt que la construction géométrique de la solution. Comme Lacroix, il dissocie la résolution du problème de la construction géométrique de la figure.

Après les préliminaires, l'ouvrage traite uniquement des propriétés des courbes et des surfaces du second ordre. Bien qu'il ait été question de problème à résoudre dès les premières lignes de l'ouvrage, le partage en extrême et moyenne raison est le seul énoncé qui sera traité comme tel, ce qui est très

66. Biot, *Op. Cit.*, p. 1.

67. *Ibid.*, p. 13.

68. Biot, *Géométrie analytique*, p. vj.

69. *Ibid.*, p. 11.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

différent des ouvrages de Bézout et de Lacroix dont nous avons montré qu'ils sont articulés, au moins pour partie, autour de questions à résoudre. La *Géométrie analytique* de Biot emploie l'application de l'algèbre à la géométrie exclusivement comme une méthode démonstrative pour établir les propriétés des lignes et des surfaces du second ordre à partir de leurs équations.

Les autres ouvrages d'application de l'algèbre à la géométrie

Indéniablement, l'ouvrage de Lacroix sera un modèle et une référence. L'application de l'algèbre à la géométrie est désormais considérée comme une branche des mathématiques à part entière. Elle représente une partie indépendante des programmes d'enseignement des Lycées, et fait l'objet d'ouvrages consacrés exclusivement à cette matière. Voici les principaux d'entre eux. Frédéric Louis Lefrançois, officier d'artillerie et polytechnicien, publie en 1804 des *Essais de géométrie analytique*⁷⁰. Antoine Pouillet-Delisle, polytechnicien et professeur au lycée d'Orléans, édite en 1806 son *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*⁷¹. Jean Boucharlat, polytechnicien et répétiteur à l'École polytechnique, rédige 1808 la *Théorie des courbes et des surfaces du second ordre*⁷². La même année, Jean Guillaume Garnier, ancien professeur adjoint à l'École polytechnique, publie des *Éléments de géométrie analytique*⁷³. Plus d'une décennie plus tard paraissent encore deux ouvrages sur cette matière. En 1825, l'*Application de l'algèbre à la géométrie*⁷⁴ de Pierre Louis Marie Bourdon, polytechnicien de la promotion 1796, professeur au Prytanée militaire puis aux lycées Charlemagne et Napoléon, examinateur à l'École polytechnique en 1821 et enfin inspecteur de l'Académie de Paris. Et en 1827 les *Leçons de géométrie analytique*⁷⁵ de Louis Lefébure de Fourcy, polytechnicien, répétiteur à l'École polytechnique en 1807, examinateur pour cette École en 1826 et professeur au Lycée Saint Louis à sa création en 1820.

Tous ces auteurs sont liés à l'École polytechnique. Ils y ont tous été ou

70. Lefrançois, *Essais de géométrie analytique*, 2^{de} édition revue et augmentée, Paris : Courcier, 1804.

71. Pouillet-Delisle, Antoine Charles Marcellin *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Bachelier, 1806.

72. Boucharlat, Jean, *Théorie des courbes et des surfaces du second ordre, précédées des principes fondamentaux de la Géométrie Analytique*, 2^{de} édition, Paris : Courcier, 1810.

73. Garnier, Jean-Guillaume, *Éléments de géométrie analytique*, Paris : Courcier, 1808.

74. Bourdon, Pierre Louis Marie *Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Bachelier, 1825.

75. Lefébure de Fourcy, Louis, *Leçons de géométrie analytique*, Paris : Bachelier, 1827.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

élèves ou enseignants, et souvent les deux. Ils ont suivi, ou côtoyé, les leçons d'analyse de Monge, de Hachette, et de Lagrange. Tous ces ouvrages sont d'ailleurs destinés, de toute évidence, à la préparation à l'entrée à l'École polytechnique, comme l'annoncent explicitement ceux de Lefrançois et de Pouillet-Delisle. Leurs auteurs sont des professeurs — à une exception près : Lefrançois est officier d'artillerie — dans des Lycées, des Écoles militaires ou à l'École polytechnique. Les ouvrages résultent, comme le mentionnent là aussi Lefrançois et Biot, de leur expérience de l'enseignement.

Pour ce qui concerne les contenus, ces ouvrages sont en majeure partie consacrés à l'étude des courbes, et pour certains des surfaces, du second ordre. Même si le plan suivi par les auteurs diffère d'un ouvrage à l'autre, l'application de l'algèbre à la géométrie s'y impose avant tout comme une méthode démonstrative, pour étudier les courbes et les surfaces, principalement celles du second ordre. Au contraire, ce que nous avons désigné par méthode d'invention, c'est-à-dire l'emploi de l'algèbre en géométrie pour inventer de nouvelles propositions, en est complètement absent. Quant à l'application de l'algèbre à la géométrie comme méthode de résolution des problèmes, nous allons voir que sa présence et son usage sont très variables dans les différents ouvrages.

Lefrançois illustre uniquement la méthode des cordonnées, sur quelques questions relatives à la ligne droite et au cercle. Il démontre ainsi que les trois médianes d'un triangle sont concourantes, que les points d'intersection des médianes, des hauteurs et des médiatrices sont alignés, et il résout les problèmes d'inscrire un carré dans un triangle, et de mener dans un angle une droite partagée en deux parts égales par un point donné. Pour ces deux derniers problèmes, la construction de la figure à la règle et au compas est décrite, non à partir de l'expression algébrique de la ligne inconnue mais à partir de considérations supplémentaires tirées de cette expression analytique, qui mènent à une solution plus simple graphiquement⁷⁶.

Boucharlat résout quelques problèmes par l'analyse algébrique des figures dès le début de son ouvrage. Il propose ainsi la détermination de la base d'un triangle dont la hauteur et la surface sont connues, l'inscription d'un carré dans un triangle, le partage d'une ligne en deux lignes dont le produit est donné, le partage d'un triangle en deux parties dans un rapport donné par une parallèle à sa base, le partage d'une ligne en moyenne et extrême raison, la construction d'un triangle de forme et de surface données, la construction

76. Lefrançois, *Op. Cit.*, p. 20-29.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

par un point donné d'une sécante à un cercle connaissant la corde interceptée, le partage d'un arc de cercle en trois parts égales. La construction des solutions à la règle et au compas est décrite, sauf pour le dernier problème mentionné pour lequel il renvoie à un chapitre qui expose la construction des racines des équations des troisième et quatrième degré par l'intersection des courbes du second ordre. Plus loin il résout quelques questions par la méthode des coordonnées, dont certaines sont excessivement faciles à résoudre par la géométrie élémentaire, comme par exemple ces deux énoncés :

Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en deux parties égales.

Partager un triangle CAB en deux parties égales, par une droite AD menée du sommet A de l'un des angles sur le côté opposé⁷⁷.

Nous voyons que Boucharlat détaille le fonctionnement de la méthode d'abord sur des exemples élémentaires, là où Bézout et Lacroix proposaient la résolution de questions bien plus difficiles pour convaincre le lecteur de la puissance de la méthode.

Garnier débute son ouvrage par trois problèmes qu'il tire de la traduction française faite par Noël Baudeau de l'*Arithmétique universelle* de Newton :

—Placer dans l'angle droit EAF une droite donnée EF , de manière que cette droite prolongée passe par un point donné C également éloigné des deux lignes AB , AD .

—Les droites PD et BD dont le rapport est donné, étant menées comme on voudra dans l'angle connu $PA'B$, sous la condition que BD soit toujours parallèle à $A'P$, et que PD se termine toujours au point D donné, on demande le lieu du point P , intersection des droites.

—Si un angle CAD ne peut que tourner autour du point A donné de position ; si l'angle donné CBD ne peut avoir qu'un mouvement de rotation autour du point B donné de position, et que les deux angles tournent en effet sous la double condition énoncée, en supposant de plus que les côtés AD , BD se coupent toujours sur une ligne droite EF donnée de position, il s'agit de déterminer la courbe des intersections C des deux autres côtés AC , BC .

Nous avons étudié le premier de ces problèmes dans les ouvrages de Bézout et de Lacroix. Les deux suivants demandent la détermination d'un lieu géomé-

77. Boucharlat, *Op. Cit.*, p. 58-59.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

trique qui s'avère être une section conique. Ce type d'énoncé ne se trouvait pas dans les ouvrages précédents. Garnier introduit encore quelques énoncés de problèmes au long de son ouvrage, notamment des énoncés qui portent sur les courbes du second ordre, comme celui-ci :

Trouver sur l'ellipse un point de tangence tel, que la tangente prolongée jusqu'à la rencontre des axes, soit divisée en ce point dans le rapport de m à n ⁷⁸.

La construction de la solution des problèmes n'est jamais détaillée.

Bourdon, quant à lui, distingue bien les deux méthodes identifiées par Lacroix :

Le premier chapitre est consacré au développement des méthodes particulières de l'*Application* ; de ces méthodes qui varient avec la nature des problèmes, mais qui, par leur simplicité, ont souvent l'avantage sur les méthodes générales [...]

Au troisième chapitre commence la Géométrie analytique proprement dite, c'est-à-dire, la méthode qui consiste à résoudre les questions de Géométrie par le secours des équations du point, des lignes et des surfaces ⁷⁹.

Bourdon met en regard la simplicité des méthodes particulières et la généralité de la Géométrie analytique. Pour chacune de ces deux méthodes, Bourdon montre, dans un paragraphe séparé, leur emploi sur plusieurs problèmes de construction et théorèmes à démontrer. Pour la première, l'inscription d'un carré dans un triangle, le tracé d'une parallèle à la base d'un triangle qui soit d'une longueur donnée, le partage d'un trapèze en deux parties dans un rapport donné par une parallèle à la base, le tracé d'une droite dans un angle par un point donné qui fasse un triangle de surface donnée, l'expression de la surface d'un triangle au moyen de ses trois côtés, et la relation entre les trois côtés d'un triangle et le rayon de son cercle circonscrit. Enfin, pour le problème suivant, deux solutions sont successivement exposées :

Étant donnés de position et de grandeur un cercle X et une droite AB , trouver sur le cercle un point M tel que, si on le joint aux extrémités de la droite AB , et qu'on tire la corde DE , cette corde soit parallèle à AB ⁸⁰.

78. Garnier, *Op. Cit.*, p. 189.

79. Bourdon, *Op. Cit.*, p. v.

80. Bourdon, *Op. Cit.*, p. 27.

I.3 L'analyse algébrique dans les ouvrages d'enseignement

En application de la méthode des coordonnées, Bourdon distingue les problèmes déterminés des problèmes indéterminés. Il montre que les médianes, les hauteurs, les médiatrices d'un triangle sont concourantes, et que les trois points de concours correspondants sont alignés. Puis il résout les problèmes de tracer une sécante à un cercle par un point donné qui intercepte une corde de longueur donnée, de tracer une sécante à deux cercles qui intercepte des cordes égales et de longueur donnée, de mener une tangente commune à deux cercles, et démontre l'alignement des trois points d'intersection des paires de tangentes communes à trois cercles donnés pris deux à deux. Ensuite, il résout des problèmes indéterminés, le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points donnés est connue, le lieu des points qui forment avec deux points donnés un angle donné, le lieu des points d'intersection des tangentes aux deux points d'intersection d'une sécante menée par un point donné à un cercle donné. Ces lieux sont des droites et des cercles.

Bourdon détaille toujours la construction géométrique des figures solution, et celle-ci est jusque-là possible à la règle et au compas. En revanche, il traite plus loin dans l'ouvrage de la construction des solutions des équations des troisième et quatrième degré par l'intersection des courbes du second ordre, et en déduit la résolution des problèmes de la trisection de l'angle et de la duplication du cube.

Conclusion

Les ouvrages publiés dans ce premier tiers du XIX^e siècle sur l'application de l'algèbre à la géométrie s'adressent aux candidats à l'École polytechnique. Ils visent avant tout à exposer les propriétés des courbes et des surfaces du second degré par l'analyse algébrique comme méthode démonstrative, conformément aux attentes du concours d'admission à l'École. L'analyse algébrique comme méthode d'invention en est absente.

Quant à la place donnée à la résolution des problèmes, elle varie nettement d'un ouvrage à l'autre. Le choix radical de Biot d'écarter la résolution des problèmes n'est pas repris par les auteurs ultérieurs, qui proposent des questions mettant en œuvre l'une ou l'autre des deux méthodes que nous avons identifiées, l'analyse algébrique des figures et la méthode des coordonnées. Ces questions mêlent aux problèmes de construction, largement majoritaires dans les ouvrages de Bézout et de Lacroix, des théorèmes à démontrer et des lieux géométriques à déterminer.

Concernant la construction des solutions, tous ces ouvrages consacrent un

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

paragraphe à la construction des expressions algébriques, c'est-à-dire qu'ils indiquent comment construire, à la règle et au compas, une expression faite de sommes, de produits, et de racines de lignes connues. Une majorité d'entre eux termine la résolution des questions par la construction avec des droites et des cercles des solutions, lorsque c'est possible, et ne retiennent pas la proposition de Lacroix, reprise par Biot, de préférer les méthodes d'approximation. Au contraire, deux ouvrages traitent de la construction, avec des courbes du second degré, des racines des équations des troisième et quatrième degré.

4 Conclusion

L'application de l'algèbre à la géométrie pour établir les propriétés des courbes et des surfaces du second ordre est, dès le début du XIX^e siècle, une partie bien identifiée et indépendante de l'enseignement des mathématiques, destinée en particulier aux candidats à l'École polytechnique, qui en exige la connaissance à son concours d'admission. Elle fait l'objet d'ouvrages d'enseignement spécifiques.

L'examen de trois ouvrages dont hérite le XIX^e siècle, la *Géométrie* de Descartes, les *Nouveaux éléments de géométrie* de Lamy et l'*Introduction à l'analyse infinitésimale* d'Euler, nous a permis d'identifier trois usages de l'analyse algébrique comme méthode : méthode de résolution des problèmes de construction, méthode d'invention de nouvelles propositions, méthode démonstrative pour établir les propriétés des courbes et des surfaces.

Cette dernière, présente dans les ouvrages de Bézout en 1769 et de Lacroix en 1798, devient l'objet essentiel des ouvrages ultérieurs sur cette matière. En revanche, l'analyse algébrique comme méthode d'invention, si elle est signalée dans l'ouvrage de Bézout, n'est plus mentionnée ensuite. Enfin, l'analyse algébrique est présentée d'abord comme méthode de résolution des questions dans les ouvrages de Bézout et de Lacroix, et ce dernier distingue deux méthodes que nous avons nommées l'analyse algébrique des figures et la méthode des coordonnées. De ce point de vue, les ouvrages ultérieurs, bien que leurs auteurs soient tous liés à l'École polytechnique, adoptent des choix variés. Biot ne traite qu'un seul énoncé de problème en 1802. Les autres introduisent davantage d'énoncés, résolus par l'une ou l'autre des méthodes identifiées chez Lacroix, parfois les deux. Certains énoncés se retrouvent dans plusieurs ouvrages, comme l'inscription d'un carré dans un triangle, le partage en moyenne et extrême raison, le tracé dans un angle droit d'une ligne de

longueur donnée et passant par un point donné. Aux problèmes de construction géométrique sont ajoutés des théorèmes à démontrer et parfois des lieux géométriques à déterminer.

La conception de la construction des figures a été élargie dans la *Géométrie* de Descartes, qui acceptait d'autres lignes que les droites et les cercles pour la réaliser. Lacroix, au contraire de Bézout, la déclare accessoire du fait de l'existence de méthodes d'approximation de la solution des équations. Biot fait le choix de l'écarter complètement, mais les auteurs ultérieurs, pour la plupart, détaillent la construction des figures solutions des questions, le cas échéant avec des courbes du second ordre, employées dans deux ouvrages pour construire les solutions des équations des troisième et quatrième degré.

Les questions proposées, plutôt difficiles dans les ouvrages de Bézout et de Lacroix pour convaincre le lecteur de la puissance de la méthode, sont parfois plus élémentaires dans les ouvrages ultérieurs, au point que leur résolution par la géométrie synthétique serait plus simple, cela pour illustrer le fonctionnement de la méthode sur des exemples faciles, ainsi que l'explique Biot : « Ce n'est qu'en l'appliquant d'abord à des recherches faciles, et dont les résultats peuvent se vérifier aisément, qu'on apprend à en faire usage dans les questions plus compliquées »⁸¹.

Enfin, nous devons avant de poursuivre préciser certains des termes que nous employons. Nous remarquons que les expressions *application de l'algèbre à la géométrie* et *géométrie analytique* sont employées parfois de façon synonyme pour désigner la théorie des courbes et des surfaces, essentiellement du second degré, par le recours à l'algèbre des coordonnées dans les ouvrages d'enseignement des classes de mathématiques spéciales. Nous utiliserons dans la suite le terme de géométrie analytique pour désigner cette théorie. Nous avons d'autre part employé l'expression *analyse algébrique* pour désigner toute méthode d'investigation des propriétés de l'étendue qui emploie la manipulation algébrique des équations. Ce choix est à mettre en parallèle avec la classification opérée au XIX^e siècle. Le premier tome du *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique*⁸² d'Augustin Cauchy, publié en 1821, s'intitule « analyse algébrique », et traite « des diverses espèces de fonctions réelles ou imaginaires, des séries convergentes ou divergentes, de la résolution des équations et de la décomposition des fractions rationnelles ».

81. Biot, *Op. Cit.*, p. 131.

82. Cauchy, Augustin, *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique*, Paris : Debure, 1821.

CHAPITRE I. LES TROIS VISAGES DE L'ANALYSE ALGÈBRIQUE

Le terme d'analyse désigne ici la théorie des fonctions, des séries et des équations⁸³. Nous appellerons, à l'instar de Poncelet et de Chasles comme nous le verrons bientôt, « analyse algébrique » toute méthode qui consiste à employer l'algèbre des équations en géométrie. Par ailleurs, l'application à la géométrie du calcul infinitésimal, objet d'ouvrages ultérieurs de Cauchy, n'est pratiquement pas abordée dans l'enseignement secondaire des lycées, sinon pour la détermination de la tangente à une courbe par un calcul de dérivée. Elle ne concerne donc pas l'objet de nos recherches.

83. Kolmogorov, Andreï, Youshkévitch, Adolf-Andreï, *Geometry. Analytic function theory*, Mathematics of the 19th century, Basel : Birkhäuser, 1996.

CHAPITRE II

L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

Les méthodes géométriques, c'est-à-dire consistant en un raisonnement sur des notions propres à la géométrie et sans recourir aux équations de l'algèbre, qui étaient moins à l'honneur depuis un siècle et demi, retrouvent, après la Révolution, une certaine vigueur dans l'enseignement, notamment sous l'impulsion décisive de Gaspard Monge (1746-1818) et l'enseignement de sa Géométrie descriptive¹. À sa suite, d'autres géomètres établissent par des méthodes géométriques de nouveaux résultats, surpassant dans certains cas l'analyse algébrique. Pour cela, ils inventent de nouvelles notions comme les transversales, les pôles et les polaires, les axes radicaux, les figures idéales ou imaginaires. Ces résultats sont diffusés par la voie de l'enseignement, dans les ouvrages de Monge, de Servois (1768-1847), de Carnot (1753-1823) et de Poncelet (1788-1867), et par le biais de publications comme le *Journal de l'École polytechnique*, la *Correspondance sur l'école Polytechnique* et les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*. Nous emprunterons à Poncelet l'expression de *Géométrie rationnelle*² pour désigner l'ensemble de ces initiatives qui renouvellent et réactualisent la géométrie.

Ces progrès s'accompagnent d'une remise en cause de la toute puissance de l'analyse algébrique³. Carnot, dans la *Géométrie de position* de 1803,

1. Taton, René, *L'œuvre scientifique de Monge*, Paris : P.U.F., 1951.

2. Poncelet, Jean-Victor, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822, p. xix.

3. Chemla, Karine, *Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaüs*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 163-190.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

se refuse à employer les « êtres de raison » de l'algèbre et résout sans leur secours de nombreux problèmes, dont certains réputés difficiles. Poncelet, dans le *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822, construit une alternative d'essence plus géométrique à la « méthode des coordonnées », par le moyen d'une extension des conceptions géométriques et d'un recours systématique à la projection.

Dans un premier temps, nous précisons les apports notionnels et méthodologiques de cette géométrie rationnelle par l'étude de la *Géométrie descriptive* de Gaspard Monge, de la *Géométrie de position* de Lazare Carnot, des *Solutions peu connues* de Joseph Servois et du *Traité des propriétés projectives des figures* de Jean-Victor Poncelet.

Ensuite, nous recherchons la présence de cette géométrie rationnelle dans l'enseignement secondaire. Nous verrons que nous la trouvons moins dans l'enseignement classique des Lycées et Collèges que dans l'enseignement industriel, où les ouvrages d'enseignement de la géométrie de Claude Lucien Bergery en 1826⁴ et d'Étienne Bobillier en 18..⁵ en intègrent de nombreux éléments.

1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle

Quatre ouvrages vont nous permettre d'illustrer les nouvelles notions et les nouvelles méthodes introduites en géométrie dans le premier quart du XIX^e siècle. Rédigés par des géomètres qui sont des figures emblématiques de cette géométrie nouvelle, ils donnent à voir des méthodes nouvelles et leur application à la résolution de problèmes. Il s'agit de la *Géométrie descriptive*⁶ de Gaspard Monge, de la *Géométrie de position*⁷ de Lazare Carnot, des *Solutions peu connues*⁸ de François Joseph Servois, et enfin du *Traité des*

4. Bergery, Claude Lucien, *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers. Leçons publiques données dans l'hôtel de ville de Metz*, 2 vol., Metz : Lamort, 1826.

5. Bobillier, Étienne, *Géométrie*, 3^e édition, Châlons-sur-Marne : Barrat, 1837.

6. Monge, Gaspard, *Géométrie descriptive*, Paris : Baudoin, an VII.

7. Carnot, Lazare, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.

8. Servois, François Joseph, *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique*, Paris : Bachelier, an XII.

II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle

*propriétés projectives des figures*⁹ de Jean Victor Poncelet.

1.1 La *Géométrie descriptive* de Monge (1799)

Gaspard Monge (1746-1818) a d'abord enseigné la Géométrie descriptive à l'École du Génie de Mézières¹⁰. Devenu un savant reconnu, il assume de hautes responsabilités politiques pendant la Révolution, et notamment participe à la création de l'École polytechnique en 1794¹¹. Pour former les répétiteurs de cette École, il dispense un cours de Géométrie descriptive, qu'il répètera peu de temps après à l'École normale de l'an III¹². Ce cours est publié, d'abord dans le *Journal de l'École polytechnique*, puis dans un ouvrage à part entière¹³. Monge y organise la géométrie descriptive en un corps de doctrine qui théorise et uniformise diverses pratiques des artisans relatives à la coupe des pierres, à la charpente, ou encore au tracé des ombres¹⁴.

Si cette théorie s'adresse effectivement aux artisans en décrivant les méthodes qui permettent de représenter sur deux plans perpendiculaires les projections des figures de l'espace, elle offre aussi un moyen de découvrir et de démontrer certaines propriétés de ces figures. Les raisonnements employés dans la géométrie descriptive sont géométriques en ce sens qu'ils sont dictés par la visualisation de la figure et des mouvements¹⁵ de ses parties dans l'espace. Ces raisonnements s'appuient sur les propositions de la géométrie élémentaire et ne recourent pas à l'algèbre.

La diffusion des idées de Monge est assurée par ses nombreuses charges d'enseignement, à l'École du génie de Mézières d'abord, puis à l'École normale

9. Poncelet, Jean Victor, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.

10. Belhoste, Bruno, Picon, Antoine, Sakarovitch, Joël, « Les exercices dans les écoles d'ingénieurs sous l'Ancien Régime et la Révolution », *Histoire de l'éducation*, 46, 1990.

11. Taton, René, *L'œuvre scientifique de Monge*, Presses universitaires de France, 1951.

12. Hachette, *Traité de Géométrie descriptive*, Paris : Corby, Guillaume et c^{ie}, 1822, p. ix.

13. Monge, Gaspard, *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles normales*, Paris : Baudouin, an VII.

14. Sakarovitch, Joël, *Épures d'architecture : de la coupe des pierres à la géométrie descriptive, XVI^e-XIX^e siècles*, Basel : Birkhäuser, 1996.

15. sur l'introduction du mouvement en géométrie, voir Bkouche, Rudolf, Delattre, Joëlle, « Quand mouvement et géométrie se retrouvent », in Barbin (dir.), *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*, Ellipses, 1997.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

de l'an III¹⁶ et surtout à l'École polytechnique, où la géométrie descriptive sera enseignée pendant tout le XIX^e siècle¹⁷.

Le premier objet de la Géométrie descriptive est de « représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois »¹⁸. Les épures représentent deux projections cylindriques de l'objet tri-dimensionnel sur deux plans perpendiculaires dont l'un est rabattu sur le plan de l'autre. Sur la figure 21 ci-dessous, on peut voir, en trait plein, les projections de deux sphères et les traces de deux plans. Elle répond à la question de tracer par un point donné un plan tangent à deux sphères données.

L'ouvrage de Monge est une suite de telles questions demandant de construire les projections planes de certains agencements de figures dans l'espace, c'est-à-dire une liste organisée de problèmes de constructions à la règle et au compas d'un type nouveau. Leur résolution passe par un raisonnement géométrique qui exige une grande capacité de visualisation de la figure, que le lecteur n'a pas sous les yeux du fait de sa tri-dimensionalité. Les premières questions de l'ouvrage, qui font suite à des préliminaires visant à justifier et expliquer le choix de la projection sur deux plans, sont les suivantes :

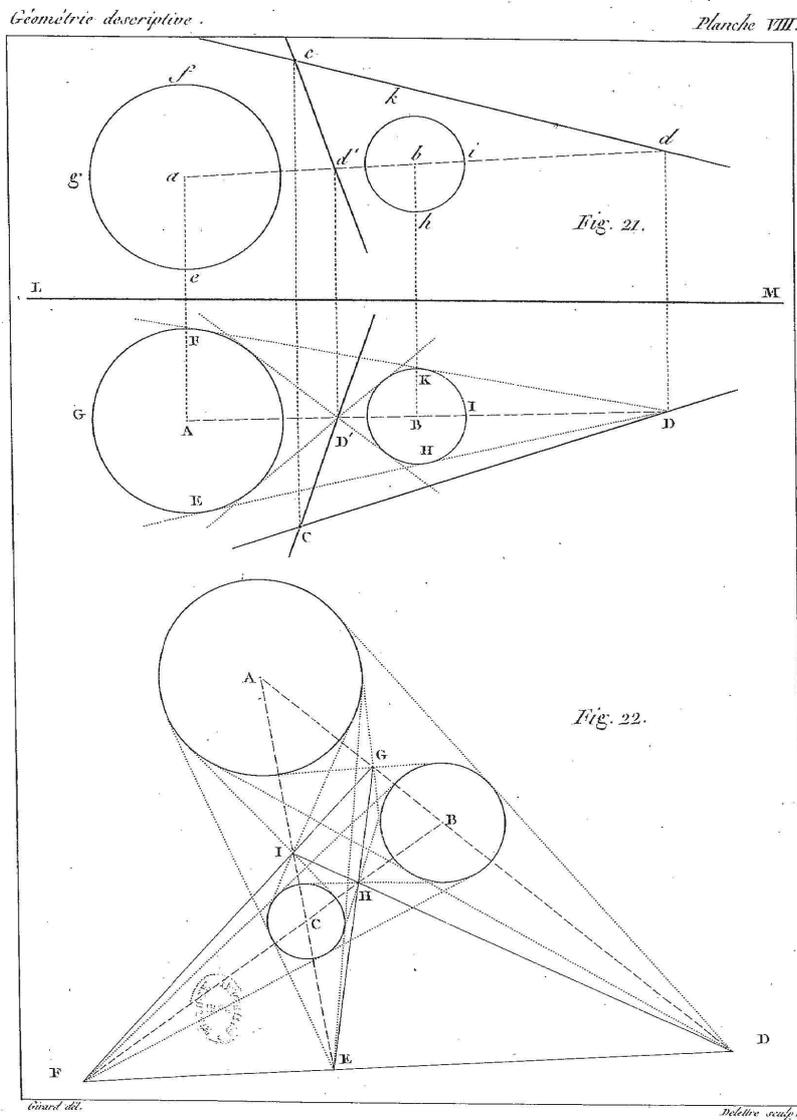
- Première question. Étant donné un point dont les projections soient D, d , et une droite dont les projections soient AB et ab , construire les projections d'une seconde droite menée par le point donné parallèlement à la première ?
- Seconde question. Étant donné un plan dont les deux traces soient AB, BC , et un point dont les projections soient G, g , construire les traces d'un second plan mené par le point donné parallèlement au premier ?
- Troisième question. Étant donné un plan dont les deux traces soient AB, BC , et un point dont les deux projections soient D, d , construire, 1°. les projections de la droite abaissée perpendiculairement du point sur le plan ; 2°. celle du point de rencontre de la droite et du plan ?
- Quatrième question. Étant donnée une droite dont les deux projections

16. Dhombres, Jean (dir.), *L'école Normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Édition annotée des cours de Laplace, Lagrange et Monge avec introductions et annexes*, Paris : Dunod, 1992.

17. Laurentin, Jérôme, *Fidélités et reconstructions. L'exemple de l'école géométrique de Gaspard Monge*, thèse d'histoire des sciences, sous la direction de Jean Dhombres, Paris, EHESS, 2000.

18. Monge, *Op. Cit.*, p. 2.

II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle



soient AB , ab , et un point dont les deux projections soient D , d , construire les traces du plan mené par le point perpendiculairement à la droite ?

- Cinquième question. Deux plans étant donnés de position, au moyen de leurs traces AB et Ab pour l'un, CD et Cd pour l'autre, construire les projections de la droite suivant laquelle ils se coupent ?

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

- Sixième question. Deux plan étant donnés, au moyen des traces AB , Ab du premier, et des traces CD , Cd du second, construire l'angle qu'ils forment entre eux ?

Monge choisit un mode d'exposition de sa géométrie descriptive comme réponses successives à des questions, qui sont des constructions à la règle et au compas. Cette organisation donne une place primordiale à la résolution des problèmes de construction.

Par ailleurs, il compare, du point de vue de la méthode, la résolution des problèmes de construction par la géométrie descriptive avec leur résolution par l'emploi de l'algèbre :

Il n'y a [pour la construction des projections des solides] aucune règle générale [...] Il en est précisément de cet objet comme de l'algèbre, dans laquelle il n'y a aucun procédé général pour mettre un problème en équations. Dans chaque cas particulier, la marche dépend de la manière dont la relation entre les quantités données et celles qui sont inconnues est exprimée ; et ce n'est que par des exemples variés que l'on peut accoutumer les commençans à saisir ces relations et à les écrire par des équations. Il en est de même pour la géométrie descriptive. Ce sera par des exemples nombreux et par l'usage de la règle et du compas dans nos salles d'exercice, que nous acquerrons l'habitude des constructions, et que nous nous accouturerons au choix des méthodes les plus simples et les plus élégantes dans chaque cas particulier. Mais aussi, de même qu'en analyse, lorsqu'un problème est mis en équation, il existe des procédés pour traiter ces équations et pour en déduire les valeurs de chaque inconnue ; de même aussi, dans la géométrie descriptive, lorsque les projections sont faites, il existe des méthodes générales pour construire tout ce qui résulte de la forme et de la position respective des corps.

La géométrie descriptive et l'emploi de l'algèbre combinent l'une et l'autre une partie soumise à des choix relevant d'une certaine intuition, et une partie réglée par des méthodes générales. La première en appelle, pour la géométrie descriptive, à un entraînement sur des exemples particuliers dont l'apprenti géomètre ne peut se dispenser. La deuxième fait l'objet, dans l'ouvrage de Monge, d'une exposition de ces méthodes générales sous forme de questions successives. Dans les deux parties, la résolution des problèmes est centrale.

La mise en parallèle de la géométrie descriptive avec l'application de l'al-

II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle

gèbre à la géométrie pour résoudre les problèmes de construction géométrique est aussi une mise à égalité. Sans privilégier l'une sur l'autre, l'auteur défend la complémentarité des deux approches, et la citation se poursuit ainsi :

Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la géométrie descriptive à l'algèbre ; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune description de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse ; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie¹⁹.

L'ensemble de l'œuvre mathématique de Monge est marquée par cette fécondation réciproque de l'intuition géométrique et du calcul algébrique.

Le deuxième objet de la géométrie descriptive, affirme Monge, est d'offrir un moyen « de rechercher la vérité »²⁰. La représentation des projections de certaines figures apporte de façon concomitante l'énoncé et la démonstration de certaines propositions. Ainsi, en répondant à la question : « Mener un plan tangent en même temps à trois sphères données de grandeurs et de position ? »²¹, Monge prouve que, trois cercles étant donnés dans un plan, les trois points d'intersection des deux tangentes extérieures à deux de ces cercles sont alignés. La démonstration est obtenue de la façon suivante : la figure 22 ci-dessus est regardée comme la section des trois sphères par le plan de leurs trois centres. Un plan tangent aux trois sphères est tangent aussi aux trois cônes tangents chacun à deux des sphères données, et par conséquent contient les trois sommets de ces cônes. Ces trois points sont ainsi situés à l'intersection de deux plans, c'est-à-dire qu'ils sont alignés.

Retenons trois caractéristiques à l'apport de Monge en géométrie : la place donnée à l'intuition géométrique, d'autant plus qu'elle s'exerce ici en-dehors de la vue de la figure, la liaison entre les figures planes et les figures de l'espace, et enfin la mise en parallèle des méthodes analytiques et des méthodes géométriques dont il montre dans l'ensemble de ses travaux la complémentarité²².

La *Géométrie descriptive* se présente comme une liste de problèmes de

19. Monge, *Op. Cit.*, p. 16.

20. Monge, *Op. Cit.*, p. 2.

21. Monge, *Op. Cit.*, p. 53.

22. Belhoste, Bruno, « De l'École Polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet », *Bulletin de la SABIX*, n°19, 1998.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

construction géométrique à la règle et au compas, et donne par conséquent une importance centrale à ce type de problèmes. Monge montre que leur résolution fournit l'occasion d'inventer de nouvelles propositions, ce qui fait de la géométrie descriptive une méthode de recherche de la vérité. Ainsi, il emploie le terme de « méthode » de façon équivalente pour la géométrie descriptive et pour l'application de l'algèbre à la géométrie.

1.2 La Géométrie de position de Carnot (1803)

Lazare Carnot (1753 - 1823) a étudié à l'École du Génie de Mézières. Après une première carrière militaire, il occupe, dès le début de la Révolution, des responsabilités politiques de premier plan, et ce jusqu'à la fin de l'Empire²³. Il consigne ses travaux mathématiques dans trois ouvrages destinés aux géomètres contemporains²⁴. Le premier, *De la corrélation des figures de géométrie*²⁵, vise à établir les rapports de position qui existent entre les différentes parties d'une figure géométrique. Il est décliné en six « problèmes » qui examinent chacun les corrélations existant pour une figure particulière, un angle, un triangle, un quadrilatère, un polygone ou un polyèdre. Le deuxième, la *Géométrie de position*²⁶, reprend et développe le même objectif, et applique les propositions établies à la résolution de soixante-seize problèmes de géométrie²⁷. Le troisième est un *Mémoire*²⁸, particulièrement connu pour ses propositions sur les transversales.

Nous allons préciser les arguments que donne Carnot contre l'emploi de l'algèbre en géométrie lorsqu'il mène à la manipulation d'expressions qui ne peuvent être mises en lien avec la figure. Ensuite, nous analyserons la méthode qu'emploie Carnot pour résoudre de cette façon des problèmes difficiles, en appui sur la notion, centrale, de corrélation des figures.

23. Charnay, Jean-Paul (dir.), *Lazare Carnot ou le savant citoyen*, presses de l'université de Paris-Sorbonne, 1990.

24. Gillepsie, Charles, Youschkévitch, Adolf, *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématiques*, Paris : Vrin, 1979.

25. Carnot, Lazare, *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris : Duprat, 1801.

26. Carnot, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.

27. Les énoncés de ces problèmes sont reproduits en annexe 2.

28. Carnot, *Mémoire sur les relations qui existent entre les distances respectives qui existent entre cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806.

II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle

Insuffisances de l'analyse algébrique

Dans la dissertation préliminaire de la *Géométrie de position*, Carnot met en évidence certaines insuffisances de l'analyse algébrique. Celle-ci, en opérant un travail algébrique sur les équations détaché de tout sens géométrique, opère sur des « êtres de raison » dont l'existence n'est pas tangible, à savoir les quantités négatives et les quantités imaginaires. Si Carnot reconnaît l'immense efficacité de l'analyse, dont les résultats ont été confirmés par la pratique, il montre sur plusieurs exemples très simples comment celle-ci porte à des incohérences ; ici elle introduit des solutions étrangères, là certaines solutions réelles lui échappent. Il ne remet pas en cause le recours à l'algèbre comme écriture abrégée des raisonnements, à condition que ces écritures représentent des objets réels. Il veut « justifier cet emploi que fait l'analyse des quantités absurdes en elles-mêmes », en rétablissant une « chaîne des vérités sensibles » suite à la « chaîne des vérités hiéroglyphiques »²⁹ de l'analyse, dont seule la valeur heuristique est reconnue.

Concernant les quantités négatives, Carnot rejette les deux interprétations qui selon lui en ont été données³⁰. La première est qu'une quantité négative est moindre que zéro. L'argument invoqué cite D'Alembert, et prend appui sur la proportion $1 : -1 :: -1 : 1$:

Si la notion combattue était exacte, c'est-à-dire, si -1 était moindre que 0 , à plus forte raison seroit-il moindre que 1 ; donc le second terme de cette proportion seroit moindre que le premier ; donc le quatrième devroit être moindre que le troisième ; c'est-à-dire, que 1 devroit être moindre que -1 ; donc -1 seroit tout ensemble moindre et plus grand que 1 ; ce qui est contradictoire³¹.

La deuxième interprétation possible des quantités négatives est qu'elles sont prises en sens contraire des positives. Carnot donne l'exemple du problème suivant, traité par l'application de l'algèbre à la géométrie par Lacroix et par Bézout, pour la mettre en défaut :

D'un point K pris hors d'un cercle donné, soit proposé de mener une droite Kmm' , telle que la portion mm' , interceptée dans le

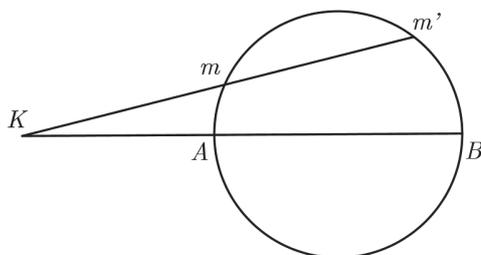
29. Carnot, *Géométrie de position*, p. 12.

30. Glières, André-Jean, *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours : le passage des quantités aux nombres*, thèse d'histoire des sciences, sous la direction de Jean Dhombres, Paris : EHESS, 2007.

31. Carnot, *Op. Cit.*, Préliminaires, p. vj.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

cercle soit égale à une droite donnée³².

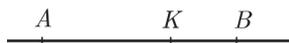


La ligne AB désignant le diamètre du cercle passant par K , il pose $KA = a$, $KB = b$, $mm' = c$, $Km = x$, et aboutit à l'équation $ab = x(c + x)$ dont la résolution par l'algèbre fournit deux valeurs pour x :

$$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$$

Ces deux valeurs sont l'une positive et l'autre négative, et sont égales en valeur absolue aux deux longueurs Km et Km' . « Quoique les deux racines de l'équation, indique Carnot, soient l'une positive et l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe K ». Ainsi l'idée selon laquelle les quantités négatives doivent être prises en sens inverse des positives se trouve-t-elle disqualifiée. Carnot multiplie les exemples de ce genre pour convaincre le lecteur de « la contradiction dans laquelle tombent ceux qui soutiennent l'existence réelle des quantités négatives ». À propos des quantités imaginaires, Carnot donne l'exemple suivant :

Une droite \overline{AB} étant donnée, trouver sur cette droite un point K , tel que le produit des deux segmens \overline{AK} , \overline{BK} , soit égal à une quantité donnée ; par exemple, à la moitié du carré de \overline{AB} ³³.



32. *Ibid.*, p vji.

33. *Ibid.*, p. 53.

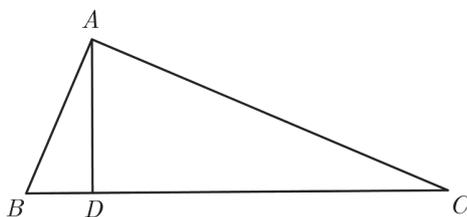
II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle

En supposant que K tombe entre A et B , Carnot désigne \overline{AK} par x et \overline{AB} par a . De l'équation $x(a - x) = \frac{1}{2}a^2$ il tire :

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{4}a^2}$$

La quantité x obtenue est imaginaire, sans toutefois que le problème soit impossible : il a deux solutions en choisissant le point K sur le prolongement de la ligne AB , au-delà de A ou au-delà de B . Carnot conclut « que les hypothèses sur lesquelles on a établi le raisonnement, ne s'accordent point avec les conditions du problème ». Enfin, l'exemple suivant donne à constater « qu'une racine, quoique réelle et positive, [...] ne donne pas toujours une véritable solution » :

Supposons que ABC soit un triangle rectangle dans lequel on connoisse l'hypoténuse \overline{BC} et la somme $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}$, des deux petits côtés et de la perpendiculaire, on demande la valeur de cette perpendiculaire³⁴.



Carnot nomme a l'hypoténuse donnée BC , b , la somme donnée $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}$, x la perpendiculaire cherchée \overline{AD} et y le côté inconnu \overline{AB} . Le triangle rectangle ABC donne $a^2 = y^2 + (b - x - z)^2$ et les triangle semblables BAC , ADC donnent $a : y :: b - x - y : x$. Il élimine y de ces deux équations et obtient :

$$x = a + b \pm \sqrt{2a^2 + 2ab}$$

Or la plus grande de ces deux valeurs est impossible, « puisqu'il est visiblement impossible que la perpendiculaire x soit plus grande que $a + b$ ».

Carnot en conclut que les racines des équations, lorsqu'elles sont négatives ou imaginaires, ou encore positives mais en contradiction avec les hypothèses

³⁴. *Ibid.*, p. 61.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

du problème, doivent n'être considérées que comme des indications des solutions d'une autre question analogue à la première. Dans l'avant-dernier exemple, la racine imaginaire obtenue dans l'hypothèse où le point K est situé entre les points A et B indique simplement qu'il y a une solution au problème de trouver un point K , situé ailleurs sur la droite AB et vérifiant la même égalité.

L'idée féconde de relation entre les parties d'une figure

Carnot va proposer une alternative à la résolution algébrique des équations pour résoudre les questions de géométrie. L'idée centrale de son travail est celle de la relation entre les parties d'une figure. Il énonce ainsi le problème général auquel il veut répondre dans son ouvrage :

Dans un système quelconque de lignes droites, tracées ou non dans un même plan, quelques-unes d'elles, ou des angles qui résultent de leur assemblage, soit entre elles-mêmes, soit entre les plans qui les contiennent, étant donnés en nombre suffisant pour que toute la figure soit déterminée, trouver tout le reste³⁵.

Si la relation entre les parties d'une figure est obtenue et exprimée par un calcul sur les quantités linéaires et angulaires, ce calcul n'opère cependant que sur des quantités réelles, et à aucun moment sur des « êtres de raison », à savoir sur des quantités négatives ou imaginaires. En particulier, Carnot ne fait pas usage en général des coordonnées. Il établit par exemple la relation suivante entre les quatre côtés m , n , p , q et les deux diagonales r , s d'un quadrilatère quelconque³⁶ :

$$\begin{aligned} & (m^2q^4 + q^2m^4 + n^2p^4 + p^2n^4 + r^2s^4 + s^2r^4) \\ & + (m^2n^2s^2 + m^2p^2r^2 + n^2q^2r^2 + p^2q^2s^2) \\ & - (m^2n^2p^2 + m^2n^2q^2 + m^2p^2q^2 + m^2q^2r^2 + m^2q^2s^2 + m^2r^2s^2 \\ & + n^2p^2q^2 + n^2p^2r^2 + n^2p^2s^2 + n^2r^2s^2 + p^2r^2s^2 + q^2r^2s^2) = 0 \end{aligned}$$

Cette relation est obtenue au moyen de relations trigonométriques dans les triangles qui composent la figure.

35. *Ibid.*, p. xxxiiij.

36. *Ibid.*, p. 387.

II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle

Au contraire de Bézout, Carnot ne fournit pas le détail de la construction effective de la solution des problèmes. Par exemple, à la suite de la relation ci-dessus vient le problème de construire un quadrilatère connaissant ses quatre côtés et le produit de ses diagonales. Il s'arrête à l'équation du quatrième degré vérifiée par l'une ou l'autre des diagonales, bien que, n'ayant pas de terme des premier et troisième degrés, les solutions en seraient constructibles à la règle et au compas.

Carnot établit dans la *Géométrie de position* de nombreuses relations générales du type de celle que nous venons de voir. Il critique les éléments de géométrie qui lui semblent une « collection de propositions, qui est très incomplète », alors qu'ils devraient donner des propositions générales, permettant, par leur combinaison, de résoudre les problèmes :

Il ne s'agit pas de grossir les éléments ordinaires d'un grand nombre de nouvelles propositions, quelque curieuses et subtiles qu'elles puissent être, mais de parvenir à la solution d'un problème général qui les renferme toutes comme des cas particuliers dans ses développements, et d'où elle dérivent par une simple combinaison de formules³⁷.

Carnot affirme l'importance primordiale de la résolution des problèmes dans l'enseignement de la géométrie. Pour résoudre ces problèmes, il conçoit la notion de « problème général », dont nous avons donné un exemple ci-dessus dans le cas d'un quadrilatère. Nous voyons sur cet exemple qu'il s'agit de trouver une relation entre les parties d'une figure, en l'occurrence un quadrilatère, quelle que soit la disposition relative de ces parties.

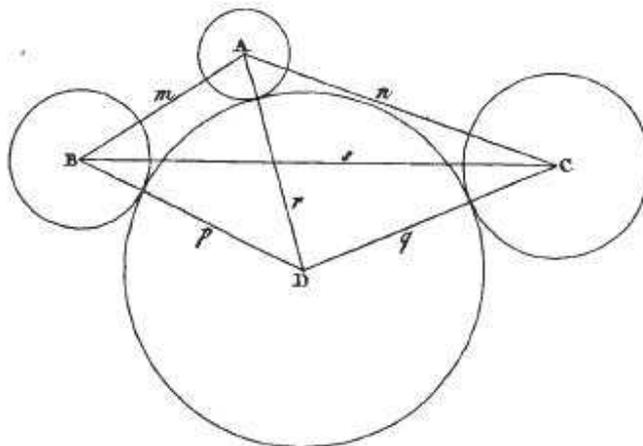
Carnot prouve la fécondité de sa méthode en résolvant pas moins de soixante-seize problèmes au long de l'ouvrage, dont certains problèmes réputés difficiles. La relation rencontrée plus haut entre les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère permet ainsi de résoudre le problème très classique à cette époque de tracer un cercle tangent à trois cercles donnés³⁸ :

Soient A , B , C les centres des trois circonférences données ; D celui de la circonférence cherchée. Nommons a , b , c les rayons des trois circonférences données, x celui de la circonférence cherchée ;

37. *Ibid.*, p. xxxiiij.

38. Boyé, Anne, *L'Apollonius gallus et le problème des trois cercles comme défense et illustration de la géométrie synthétique*, thèse en histoire des sciences, sous la direction de Jean Dhombres, Nantes, 1998.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE
RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES



et enfin, m, n, p, q, r, s , les six droites $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BD}, \overline{CD}, \overline{AD}, \overline{BC}$: les trois quantités m, n, s , sont données par hypothèse, et quand on aura trouvé x , on aura les trois autres p, q, r , par ces équations $p = b + x, q = c + x, r = a + x$; il reste donc à trouver x , mais $ABCD$ est un quadrilatère : on peut donc lui appliquer la formule trouvée ci-dessus, c'est-à-dire, qu'il n'y aura qu'à substituer dans cette formule, au lieu des trois quantités p, q, r , les trois $b + x, c + x, a + x$; alors cette formule ne renfermera plus d'autre inconnue que x , et se réduira au second degré³⁹.

La relation générale établie entre les six lignes formées par un quadrilatère permet, lorsqu'on reconnaît un tel quadrilatère dans la figure du problème posé, de le résoudre très rapidement et simplement. L'efficacité de la méthode suivie par Carnot repose sur la grande généralité de la relation établie entre les six distances de quatre points quelconques dans un plan d'une part, et sur un choix pertinent des inconnues d'autre part.

Parmi les problèmes résolus dans l'ouvrage, mentionnons ce problème des trois cercles encore résolu sur la sphère, la construction d'un triangle connaissant ses trois hauteurs, l'inscription d'un triangle donné dans un autre triangle donné, le problème, qui sera dit de Castillon, de l'inscription d'un triangle dans un cercle donné de sorte que ses côtés passent par trois points donnés, ou encore le problème, déjà rencontré chez Bézout et Lacroix, de mener dans un angle donné une droite de longueur donnée qui passe par un

39. Carnot, *Op. Cit.*, p. 390.

II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle

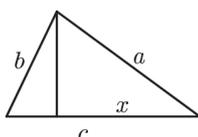
point donné équidistant des côtés de l'angle.

La notion de figures corrélatives

Nous avons vu comment Bézout, dans son *Cours de mathématiques*, exprime algébriquement la relation entre les segments faits par le pied d'une hauteur dans un triangle et les côtés de ce triangle. Nommant a , b , c les trois côtés, et x le segment découpé par une hauteur sur sa base, il aboutit à l'équation :

$$x = \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c$$

Ce résultat est établi en faisant implicitement l'hypothèse que la hauteur

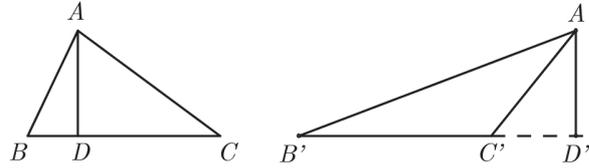


se trouve à l'intérieur du triangle. Carnot veut trouver, quant à lui, une relation entre les quatre lignes du triangle qui soit valable quelles que soient les positions relatives des éléments de la figure. À partir d'une figure prise comme figure de référence, et dite « système primitif », il envisage les différentes dispositions que pourraient adopter les parties de la figure, formant ainsi ce qu'il appelle des systèmes corrélatifs. Les formules établies pour le système primitif restent valides pour le système corrélatif, à la condition d'y apporter les ajustements nécessaires qui sont dus à la disposition relative des parties de la figure. Voici sur un exemple comment s'opèrent ces ajustements. Pour un triangle ABC , où l'on a abaissé une perpendiculaire du point A sur la ligne BC , on considère comme système primitif une première disposition pour laquelle le point D se trouve entre B et C , et comme système corrélatif une deuxième disposition $A'B'C'D'$ pour laquelle le point C' se trouve entre B' et D' . L'expression de CD dans le système primitif est :

$$CD = \frac{1}{2} \frac{AC^2 - AB^2 + BC^2}{BC}$$

Pour trouver directement la relation correspondante pour le système corrélatif, Carnot établit le tableau général de la corrélation des deux systèmes ci-dessous :

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE
RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES



$$\begin{array}{l}
 \text{1}^{\text{er}} \text{ syst...} \left\{ \begin{array}{l}
 +\overline{AB}, +\overline{AC}, +\overline{BC}, +\overline{BD}, +\overline{CD}, +\overline{AD}, +B\hat{A}C, \\
 \text{2}^{\text{e}} \text{ syst...} \left\{ \begin{array}{l}
 +\overline{A'B'}, +\overline{A'C'}, +\overline{B'C'}, +\overline{B'D'}, -\overline{C'D'}, +\overline{A'D'}, +B'\hat{A}'C', \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 +A\hat{B}C, +A\hat{C}B, +B\hat{A}D, +C\hat{A}D, +\overline{ABC}, +\overline{ABD}, +\overline{ACD}. \\
 +A'\hat{B}'C', +A'\hat{C}'B', +B'\hat{A}'D', -C'\hat{A}'D', +\overline{A'B'C'}, +\overline{A'B'D'}, -\overline{A'C'D'}.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

Ce tableau montre en particulier que, dans l'expression précédente, CD doit être changé en $-C'D'$ pour obtenir une formule valide dans le système corrélatif. Effectivement, on a bien :

$$-C'D' = \frac{1}{2} \frac{A'C'^2 - A'B'^2 + B'C'^2}{B'C'}$$

Carnot définit la géométrie de position comme « une théorie dont l'objet spécial est d'exprimer en effet, par des tableaux comparatifs, dans des figures de même genre, la diversité des positions de leurs parties correspondantes, après avoir préalablement formé le tableau général de leurs propriétés communes »⁴⁰.

Conclusion

Carnot refuse donc, pour la démonstration des propositions de géométrie, le recours au calcul algébrique lorsqu'il opère sur des expressions dénuées d'une réalité géométrique tangible. Il entreprend d'établir des relations générales entre les parties des figures, en réponse à ce qu'il désigne par le terme de « problèmes généraux ». Ces relations s'avèrent fécondes de par le nombre et l'élégance des solutions de problèmes déclinées dans l'ouvrage.

La construction géométrique de la solution des problèmes n'est pas réalisée ; l'expression algébrique de la grandeur inconnue au moyen des grandeurs connues en constitue la solution.

40. *Ibid.*, p. xxxvij.

1.3 Les *Solutions peu connues* de Servois (1805)

François Joseph Servois (1768-1847), après une première carrière ecclésiastique, étudie à l'École d'Artillerie de Châlons-sur-Marne. Devenu officier des armées napoléoniennes, il est remarqué par Legendre, et affecté en 1801 à l'enseignement des mathématiques dans les Écoles d'Artillerie de Besançon puis très rapidement de Châlons-sur-Marne et de Metz. C'est là qu'il rédige les *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique*⁴¹, ouvrage partagé entre une partie théorique qui expose des propositions relativement nouvelles de géométrie des figures, et une partie contenant seize problèmes de construction qui mettent en application les théories précédentes⁴². L'originalité de l'ouvrage de Servois tient à ce que, conformément aux exigences des manœuvres sur le terrain militaire, il n'emploie que deux instruments pour les constructions, savoir les piquets et le cordeau, respectivement pour réaliser des alignements et pour reporter des longueurs. Sur le papier, cela consiste à effectuer des constructions en employant uniquement la règle et, lorsque cela s'impose, les reports de longueurs. Servois cite comme sources de son travail un ouvrage sur les problèmes d'arpentage⁴³ de Lorenzo Mascheroni, la *Géométrie de position* de Carnot, la *Géométrie descriptive* de Monge et encore les *Récréations mathématiques*⁴⁴ de Jacques Ozanam, professeur de mathématiques du XVII^e siècle.

Prenons en exemple le problème de prolonger une ligne droite dans le cas où un obstacle se trouve justement dans l'alignement de cette droite :

BC est la ligne dont on cherche le prolongement : au point A , hors de la ligne, et d'où l'on peut voir B et C , placez un Jalon. Placez-en un second sur AB en c , puis un troisième en b sur AC , tels que l'alignement bc passe devant la face de l'obstacle O qui masque les points B et C : placez un quatrième Jalon en D à l'intersection des deux alignements bB , cC : placez un cinquième Jalon en t sur AD , puis un sixième en m sur bt et Ac , ensuite un septième en n sur ct et Ab , enfin, placez un huitième Jalon au

41. Servois, François Joseph, *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique*, Paris : Bachelier, an XII.

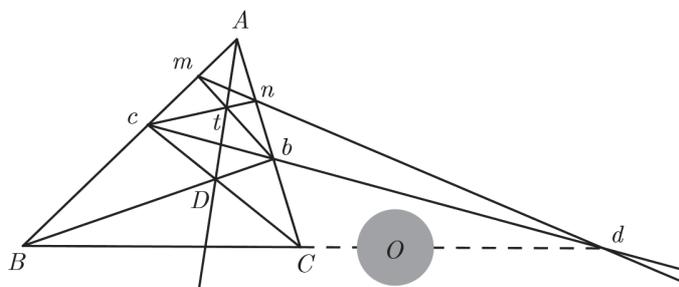
42. Aebischer, Anne-Marie, Languereau, Hombeline, *Servois ou la géométrie à l'école de l'artillerie*, Besançon : P.U. F.-C., 2010.

43. Mascheroni, Lorenzo, *Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni*, Pavie : Baldassare, 1793.

44. Ozanam, Jacques, *Récréations mathématiques et physiques*, Paris : Jombert, 1694.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

concours des deux alignemens bc et mn en d : ce dernier Jalon sera dans le prolongement de BC ⁴⁵.



La justification de cette construction est immédiatement déduite des résultats que Servois a établis dans la partie théorique de l'ouvrage, où il démontre que les droites mn , cb et BC sont concourantes en d . Cette démonstration, intriquée dans une suite de déductions trop étendue pour être reproduite ici, repose sur des propositions de géométrie élémentaire, tout particulièrement les propriétés des triangles semblables. Servois donne encore deux autres solutions de ce problème, et déclare pouvoir en donner autant que de fois que se trouvent trois points alignés dans la partie théorique de l'ouvrage.

Servois résout, le plus souvent par l'usage seul de la règle, des problèmes de construction difficiles. Il s'appuie pour cela sur des propositions de géométrie originales et fait intervenir les notions récentes dues à Carnot de transversale ou de quadrilatère complet⁴⁶, à savoir « un assemblage de quatre droites prolongées jusqu'à leurs rencontres ». Il introduira par ailleurs la notion, nouvelle, de pôle d'une droite par rapport à une conique dans le premier tome des *Annales de mathématiques pures et appliquées* :

Une droite et une ligne du second ordre étant assignées, j'appelle pôle de la droite le point [...] autour duquel tournent toutes les cordes des points de contact des paires de tangentes à la courbe issues des différents points de la droite⁴⁷.

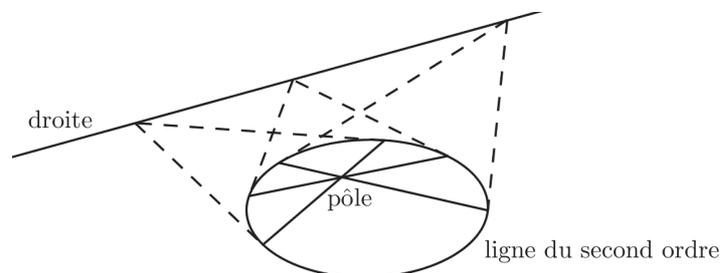
Les *Solutions peu connues* mettent donc à profit les propositions établies par Carnot dans ses ouvrages de géométrie pour résoudre une série de pro-

45. Servois, *Op. Cit.*, p. 31.

46. Carnot, *Géométrie de position*, p. 258 et p. 120.

47. Servois, « Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume », in Gergonne, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 1, Paris : Courcier, 1810-1811, p. 337-341.

II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle



blèmes de construction à la règle seule, et seulement si nécessaire avec des reports de mesures. L'intérêt ainsi porté aux problèmes de construction est doublé d'un intérêt pour les méthodes de résolution, mis en évidence par les solutions multiples que donne Servois de chacun de ses problèmes.

1.4 Le *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet (1822)

Jean-Victor Poncelet (1788-1867), polytechnicien et officier militaire⁴⁸, consigne dans son *Traité des propriétés projectives des figures*⁴⁹ de 1822 le résultat de recherches entreprises alors qu'il était prisonnier en Russie à la fin de l'Empire⁵⁰. Il entreprendra par la suite une carrière d'enseignant de Mécanique à l'École d'Artillerie et du Génie de Metz, puis à la Faculté des sciences de Paris.

Dans le *Traité*, il veut rendre la géométrie « enfin indépendante de l'Analyse algébrique »⁵¹. Non qu'il considère que la première ait un quelconque avantage sur la deuxième, mais plutôt que « chacune de ces deux sciences a des moyens qui lui sont propres, et qu'on ne pourrait, sans un grand préjudice pour l'avancement de la science, cultiver l'une sans l'autre »⁵². Il décline les atouts que possède l'analyse algébrique par comparaison avec la géométrie rationnelle :

48. « Jean-Victor Poncelet (1788-1867) », *Bulletin de la SABIX*, n°19, 1998.

49. Poncelet, Jean-Victor, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.

50. Belhoste, Bruno, « De l'École Polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet », *Bulletin de la SABIX*, n°19, 1998.

51. Poncelet, *Op. Cit.*, Introduction, p. xix.

52. Poncelet, « Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle », in Gergonne, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 8, 1817-1818, p. 143.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

Tandis que la Géométrie analytique offre, par la marche qui lui est propre, des moyens généraux et uniformes pour procéder à la solution des questions qui se présentent, à la recherche des propriétés des figures ; tandis qu'elle arrive à des résultats dont la généralité est sans bornes, l'autre [la Géométrie rationnelle] procède au hasard ; sa marche dépend tout-à-fait de la sagacité de celui qui l'emploie, et ses résultats sont, presque toujours, bornés à l'état particulier de la figure que l'on considère. Par les efforts successifs des géomètres, les vérités particulières se sont multipliées sans cesse, mais il est arrivé rarement que la méthode et la théorie générale y aient gagné⁵³.

À la question de savoir ce qui fait la « puissance en quelque sorte extensive de l'Analyse algébrique »⁵⁴, Poncelet répond que la généralité des résultats de cette dernière est la conséquence de l'utilisation qu'elle fait des « caractères qui n'ont aucune valeur par eux-mêmes », ces « êtres de raison, qui semblent l'apanage exclusif de l'Algèbre ». Au contraire de Carnot qui en récuse la validité dans les démonstrations, Poncelet veut construire des notions qui joueraient un rôle équivalent en géométrie à celui des « êtres de raison » en algèbre :

S'il était possible d'y appliquer le raisonnement implicite, en faisant abstraction de la figure [...], la Géométrie ordinaire, sans pour cela employer les calculs et les signes de l'Algèbre, se montrerait, à bien des égards, la rivale de la Géométrie Analytique⁵⁵.

Ce raisonnement implicite s'applique à des notions comme les points à l'infini, ainsi que les notions nouvelles d'éléments idéaux et imaginaires dans la figure⁵⁶. Par exemple, Poncelet se donne une courbe du second ordre \mathcal{C} avec une sécante MN et son diamètre conjugué AB , lieu des milieux des cordes de même direction. Alors le diamètre AB coupe la corde MN en son milieu O , les tangentes à la courbe en M et N se rencontrent en un point O' du diamètre, et O et O' sont conjugués par rapport à A et B , c'est-à-dire qu'on a la proportion $\frac{O'A}{O'B} = \frac{OA}{OB}$. Cette dernière relation l'amène à remarquer que

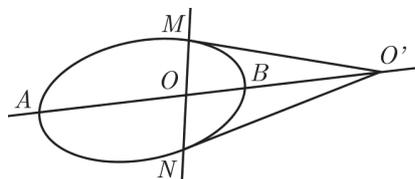
53. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, p. xix.

54. *Ibid.*, p. xx.

55. *Ibid.*, p. xxii.

56. Friedelmeyer, Jean-Pierre, Le théorème de clôture de Poncelet, une démonstration imparfaite qui fait tout une histoire, Barbin, Evelyne, Bénard, Dominique (dir.), *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigoureux, erreurs, raisonnements*, INRP, 2007.

II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle



les points O et O' peuvent être définis même lorsque la droite MN ne coupe pas la courbe \mathcal{C} . Dans ce cas, cette droite est appelée sécante idéale, et ses points d'intersection avec la courbe sont dits imaginaires. L'effectivité de ces notions est garantie par le principe de continuité, dont un énoncé est :

Considérons une figure quelconque, dans une position générale et en quelque sorte indéterminée, parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans violer les lois, les conditions, la liaison qui subsistent entre les diverses parties du système [...] n'est-il pas évident que les propriétés et les relations, trouvées pour le premier système, demeureront applicables aux états successifs de ce système, pourvu toutefois qu'on ait égard aux modifications particulières qui auront pu y survenir, comme lorsque certaines grandeurs se seront évanouies, auront changé de sens ou de signe, etc., modifications qu'il sera toujours aisé de reconnaître *à priori*, et par des règles sûres⁵⁷ ?

Munie de tels moyens généraux, il faut encore à la géométrie une « méthode directe et uniforme » qu'elle trouve dans la méthode des projections :

Deux moyens généraux, également puissants, se présentent pour perfectionner la géométrie rationnelle : l'un qui consiste à étendre l'objet des conceptions de cette Géométrie à l'aide du principe de continuité, l'autre qui met en usage les principes de la doctrine des projections pour procéder, par une marche à la fois rapide et exempte d'hésitation, à la recherche des vérités géométriques⁵⁸.

La doctrine des projections géométriques suppose la distinction des propriétés des figures qui subsistent par projection⁵⁹, que Poncelet désigne sous le nom de « propriétés projectives », et qui donnent lieu à une méthode de démonstration :

57. *Ibid.*, p. xxii.

58. *Ibid.*, p. xxxiii.

59. Bioesmat-Martagon, Lise (Eds), *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*, Presses universitaires de Nancy, 2010.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

Voulant établir une [...] propriété sur une figure donnée, il suffira de démontrer qu'elle a lieu pour l'une quelconque de ses projections. Or, parmi toutes les projections possibles de cette figure, il peut en exister qui soient réduites à des circonstances plus simples, et sur lesquelles la démonstration ou la recherche qu'on se propose devienne de première facilité⁶⁰.

La projection envisagée est presque toujours conique ou centrale. Elle « ne change évidemment ni la corrélation, ni le degré ou ordre de la figure primitive, ni, en général, toute espèce de dépendance graphique entre les parties de cette figure, qui ne concernerait que la direction indéfinie des lignes, leur intersection mutuelle, leur contact, etc. »⁶¹. Ces premières propriétés projectives sont dites « de disposition ou graphiques ».

Voyons comment procède Poncelet sur l'exemple de la recherche des propriétés des quadrilatères inscrit et circonscrit à une conique. Il a prouvé en amont que la figure constituée d'une conique et d'une droite, quelles qu'elles soient, peut être regardée comme la projection d'un cercle et de la droite de l'infini. Il applique ce principe à la conique donnée et à la droite qui joint les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère inscrit. Dès lors, le quadrilatère inscrit dans le cercle a des côtés opposés qui se rencontrent à l'infini, c'est-à-dire parallèles, donc c'est un rectangle, et le quadrilatère circonscrit est par conséquent un losange.

Sur cette figure plus simple, il est immédiat que les quatre diagonales des deux quadrilatères sont concourantes, ou encore que les côtés opposés des deux quadrilatères sont parallèles, c'est-à-dire concourants en un point de la droite de l'infini. Ces propriétés étant projective, elles restent vraies pour la figure initiale :

Si on inscrit, à une section conique, un quadrilatère quelconque $ABCD$, et qu'on lui en circoncrive un autre $abcd$, dont les côtés touchent la courbe aux sommets du premier,

1°. Les quatre diagonales de ces deux quadrilatères se croiseront en un même point P .

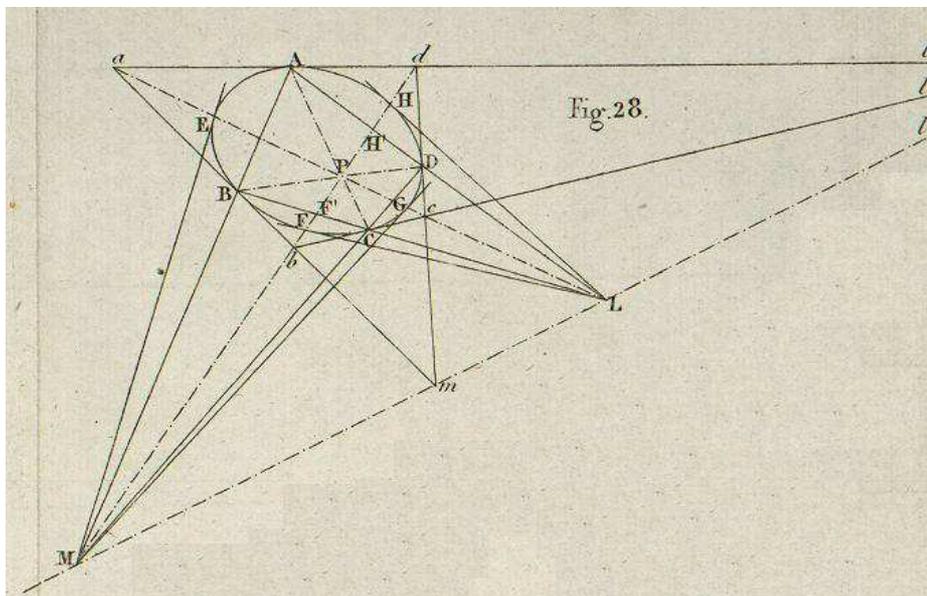
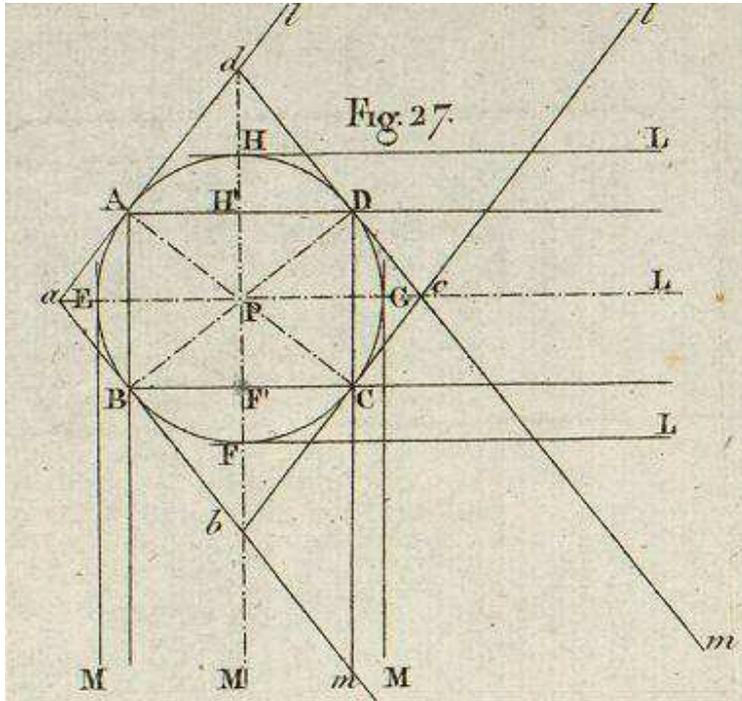
2°. Les points de concours, L et M , l et m , des côtés opposés du quadrilatère inscrit et du quadrilatère circonscrit, seront tous quatre rangés sur une même droite polaire de P ⁶².

60. *Ibid.*, p. 51.

61. Poncelet, *Op. Cit.*, p. 4.

62. *Ibid.*, p. 100.

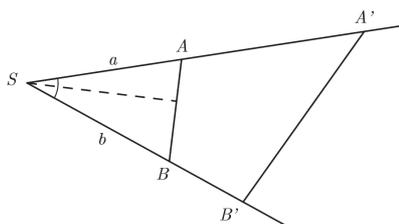
II.1 Les apports conceptuels de la géométrie rationnelle



CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

L'extension des conceptions géométriques, ici par le recours à des points à l'infini, conjointement avec l'emploi d'une projection adéquate, permettent à Poncelet de démontrer des propriétés de la figure.

Outre les propriétés graphiques d'alignement, de contact, d'intersection, etc., Poncelet recherche aussi les propriétés métriques qui sont projectives.



Pour cela il considère la projection d'une ligne AB en une ligne $A'B'$ à partir d'un point S et obtient la relation : $AB = m \frac{ab}{p}$. Il en déduit une classe étendue de propriétés projectives :

Supposons une relation ou équation à deux termes, sans dénominateurs, composés chacun d'un même nombre de facteurs exprimant de simples distances entre les divers points d'une figure donnée [...] il est évident que cette relation [sera projective] 1°. si les mêmes lettres se retrouvent dans les facteurs linéaires qui composent les deux membres ; 2°. si à chaque distance appartenant à l'un des membres, il en correspond une autre dans le second, qui ait la même direction que la première, ou soit sur la même droite ⁶³.

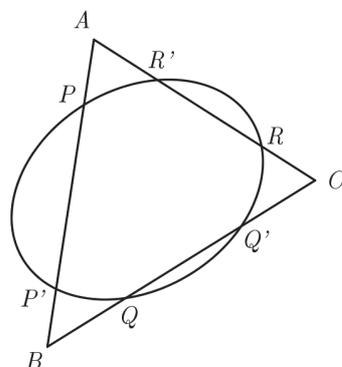
En effet, une telle relation sur des distances comme AB subsistera par projection si les quantités a , b et p disparaissent lorsqu'on remplace les distances comme AB par des expressions comme $m \frac{ab}{p}$. La première condition garantit la disparition des quantités comme a , b , car elles se retrouvent en nombre égal de part et d'autre de l'égalité. Et la deuxième condition garantit la disparition des quantités comme p car elles se retrouvent chacune de part et d'autre de l'égalité.

Par exemple, si ABC est un triangle dont les côtés sont rencontrés par une section conique en P et P' , Q et Q' , R et R' , alors on a la relation :

$$AP.AP'.BQ.BQ'.CR.CR' = BP.BP'.CQ.CQ'.AR.AR'$$

63. Poncelet, *Op. Cit.*, p. 11.

II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel



En effet, cette relation est vérifiée lorsque la conique est un cercle, et elle est projective d'après ce qui précède. Par conséquent la relation est vraie pour toute projection du cercle, c'est-à-dire pour toute conique.

Poncelet propose de renouveler la méthode de démonstration en géométrie, en en étendant les conceptions et en faisant usage de la projection. Pour cela, il recherche de façon systématique les propriétés des figures conservées par projection, les propriétés « projectives », parmi lesquelles il distingue les propriétés graphiques et les propriétés métriques.

Les propositions établies de cette façon donnent lieu à la résolution de nombreux problèmes de construction, dont le problème déjà rencontré de construire un cercle tangent à trois cercles donnés, résolu de plusieurs manières différentes.

2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel

Le renouvellement des méthodes géométriques et l'invention de nouvelles notions que nous venons de décrire se retrouvent-ils dans les ouvrages d'enseignement secondaire ?

Dans l'enseignement préparatoire aux concours des Écoles du gouvernement, dont les programmes exigent de connaître « la géométrie élémentaire » sans préciser son domaine d'extension, la situation semble hétérogène.

Les *Éléments* de Legendre⁶⁴ et de Lacroix⁶⁵, qui restent pendant toute la

64. Legendre, *Éléments de géométrie*, Paris : Firmin Didot, 1794.

65. Lacroix, *Éléments de géométrie*, Paris : Duprat, 1798.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

période des références, y compris dans les programmes officiels, pour l'enseignement de la géométrie, n'intègrent pas ces nouvelles méthodes et nouvelles notions. En revanche, elles sont mentionnées dans la deuxième édition, publiée en 1832, du *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des élèves qui se destinent à l'École polytechnique ou aux Écoles militaires*⁶⁶ de Vincent, normalien et professeur agrégé dans plusieurs Lycées parisiens, et dont il sera question dans le prochain chapitre. Ce *Cours* aborde les notions de similitude, de transversale, de quadrilatère complet, de pôle, de rapport harmonique ; il démontre entre autres des propositions sur les hexagones inscrit et circonscrit au cercle, et le théorème de Desargues dans le cas particulier où l'un des triangles est inscrit dans l'autre.

Au contraire, le *Cours de géométrie et de trigonométrie*⁶⁷ rédigé par le polytechnicien et capitaine d'artillerie Mutel, à destination des élèves qui se préparent aux concours des écoles du gouvernement, n'aborde aucune notion ou proposition nouvelle en comparaison avec les références que sont les *Éléments de géométrie* de Legendre et de Lacroix, encore régulièrement publiés. Pourtant, d'après son auteur, l'ouvrage est adopté dans les Collèges royaux de Lyon et de Grenoble⁶⁸.

Quant à la géométrie descriptive, pour partie au programme du concours de l'École polytechnique depuis 1813⁶⁹, elle est présente à la fois dans des ouvrages de préparation aux concours des Écoles du gouvernement et dans des ouvrages d'enseignement de la géométrie comme continuation de celle-ci⁷⁰.

Pour illustrer les initiatives en faveur d'une introduction des notions et méthodes de géométrie rationnelle à un niveau élémentaire, nous étudierons deux ouvrages qui, s'adressant à un public extérieur à l'enseignement des Lycées, se trouvent dégagés des contraintes imposées tant par la culture classique que par les programmes des concours. Leurs auteurs composent plus librement leurs ouvrages et choisissent d'y introduire des notions et des mé-

66. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^{de} édition, Paris : Bachelier, 1832.

67. Mutel, A., *Cours de géométrie et de trigonométrie, à l'usage des aspirants à l'École polytechnique, et des Écoles d'Artillerie et de Marine*, Lyon : Périsse frères et Paris : Bachelier, 1831.

68. Mutel, *Cours de géométrie et de trigonométrie*, 7^e édition, Paris : Lecoffre et C^{ie}, 1845, avertissement.

69. Fourcy, Amboise, *Histoire de l'École polytechnique*, Paris : École polytechnique, 1828, p. 320.

70. Barbin, Evelyne, « Descriptive Geometry in France : History of the Elementation of a Method (1795-1865) », à paraître.

II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel

thodes récentes. Il s'agit de la *Géométrie appliquée à l'industrie à l'usage des artistes et des ouvriers*⁷¹ de Bergery, publiée en 1826, transcription des cours pour ouvriers donnés par l'auteur à Metz à partir de 1820 ; et de la *Géométrie*⁷² de Bobillier, publiée en 1832, alors que son auteur est directeur des études à l'École des arts et métiers de Châlons-sur-Marne. Nous allons nous intéresser au contexte dans lequel ces ouvrages sont écrits et aux notions et méthodes de géométrie rationnelle qu'ils introduisent.

La Géométrie descriptive est, dans le courant de cette première période, intégrée dans l'enseignement classique des lycées et collèges, à la suite des éléments de géométrie et de trigonométrie. C'est surtout une initiation pour les candidats à l'École polytechnique qui, une fois lauréat, en poursuivront l'étude de façon approfondie. Les ouvrages de géométrie descriptive rédigés pendant la première moitié du XIX^e siècle sont peu nombreux, et diffèrent peu de l'ouvrage initial de Monge, travail d'emblée très abouti grâce à l'expérience et au talent pédagogique de son auteur.

2.1 Les cours pour l'industrie de Bergery (1826)

Claude-Lucien Bergery (1787-1863) achève ses études à l'École polytechnique par l'École d'application de Metz en 1810⁷³. Après une carrière militaire sous l'Empire, il est nommé en 1817 professeur de mathématiques à l'École régimentaire d'artillerie de Metz. Son engagement pédagogique dans cette ville sera de tout premier ordre. Entré à l'Académie de Metz en 1820, en même temps que Poncelet, il défend avec ferveur la création des cours industriels, publics et gratuits, professés à l'hôtel de ville à partir de 1825, et dont il assure le cours de géométrie. Ces cours ont été initiés au début des années 1820 à Paris par Charles Dupin, polytechnicien et professeur de mécanique au conservatoire des arts et métiers⁷⁴. Dupin encourage les savants à l'imiter dans la France entière, et Poncelet s'implique largement dans

71. Bergery, *Géométrie appliquée à l'industrie à l'usage des artistes et des ouvriers*, 2 vol., Metz : Lamort, 1826.

72. Bobillier, *Géométrie*, 3^e édition, Châlons-sur-Marne : Barrat, 1837.

73. Les éléments biographiques sont tirés de Vatin, François, *Morale industrielle et calcul économique dans le premier XIX^e siècle. L'économie industrielle de Claude-Lucien Bergery (1787-1863)*, Paris : L'Harmattan, 2007, p. 21 et suivantes.

74. D'enfert, Renaud, « L'offre d'enseignement mathématique pour les ouvriers dans la première moitié du XIX^e siècle : concurrences et complémentarités », *Les études sociales*, 159, 2015.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

les cours donnés à Metz. Il écrit dans le *Traité des propriétés projectives des figures* :

Les écrits de Monge, ceux de ses nombreux disciples, ont popularisé, si je puis m'exprimer ainsi, les idées générales ; leur influence [...] s'étendra tous les jours davantage à mesure que les applications de la nouvelle Géométrie deviendront plus multipliées, plus nécessaires au grand nombre de ceux qui se vouent aux arts. Peu à peu aussi les connaissances algébriques deviendront moins indispensables, et la science, réduite à ce qu'elle doit être, à ce qu'elle devrait être déjà, sera ainsi mise à la portée de cette classe d'hommes qui n'a que des moments forts rares à y consacrer⁷⁵.

Bergery prend en charge l'enseignement de la géométrie dans ces cours pour ouvriers de la ville de Metz. Il a par ailleurs conçu et défendu le projet de création d'une École normale, qui ouvre ses portes en 1832, et dont il assure les enseignements d'arithmétique, de dessin linéaire, de physique, de mécanique et d'astronomie⁷⁶. Il rédige pour l'École primaire des manuels de géométrie, d'arithmétique, de physique et chimie et de mécanique. François Vatin écrit :

Il est bien difficile de départager dans les motivations de Bergery le projet social de promotion ouvrière et le projet pédagogique de rénovation de l'enseignement. C'est dans le même esprit qu'il demande une réforme de l'enseignement des collèges par la substitution des sciences à la métaphysique et la création d'une école industrielle. Mais un tel projet suppose une rénovation de l'enseignement scientifique lui-même. C'est en accédant à une plus grande simplicité, sans concession pour autant pour la rigueur, que les sciences pourront, selon lui, se diffuser dans le corps social au bénéfice du plus grand nombre⁷⁷.

La *Géométrie appliquée à l'industrie* que rédige Bergery ne doit donc pas être interprétée dans le seul cadre de la formation des ouvriers. Les cours dispensés aux ouvriers messins en sont indubitablement le point de départ, comme en témoignent les nombreuses applications concrètes déclinées tout au long de l'ouvrage. Mais cet ouvrage s'inscrit à l'évidence dans un projet plus

75. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, p. xvji.

76. Vatin, François, *Op. Cit.*, p. 105.

77. *Ibid.*, p. 73.

II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel

large d'écriture d'ouvrages pédagogiques actualisés et destinés à favoriser la diffusion de l'enseignement des sciences.

Bergery adresse son cours aux artistes et ouvriers Messins, et décline les nombreux corps de métiers susceptibles d'être concernés : les charpentiers, serruriers, menuisiers, ébénistes, chaudronnier, fondeurs, ferblantiers, peintres, vitriers, tourneurs, tonneliers, et jusqu'aux jardiniers⁷⁸. La liste des souscripteurs produite à la fin de l'ouvrage montre en effet que nombre de tels artisans l'ont acheté.

L'ordre et la combinaison des lignes et des surfaces

La *Géométrie* de Bergery suit l'ordre des lignes, ainsi que le fait Lacroix dans ses *Éléments de géométrie*, qui lui-même en cela reprend les idées d'Arnauld⁷⁹.

Le premier volume, qui contient toute la géométrie élémentaire, suit une organisation précise régie par l'ordre de simplicité des lignes et par le degré de combinaison entre ces lignes. L'ouvrage commence par décrire le tracé et étudier les premières propriétés de la ligne droite et du cercle. Puis il aborde la combinaison des droites entre elles, ce qui consiste à établir les principes et les constructions des figures qui font intervenir plusieurs lignes droites ; puis successivement la combinaison des droites avec des cercles et enfin des courbes entre elles. Viennent ensuite les surfaces planes, leurs combinaisons avec des droites, la combinaison des plans entre eux, puis les surfaces réglées, leur combinaison avec des plans, avec des droites, et entre elles, puis les surfaces gauches . . . etc, et enfin les corps solides. Cette organisation est résumée dans le tableau ci-dessous :

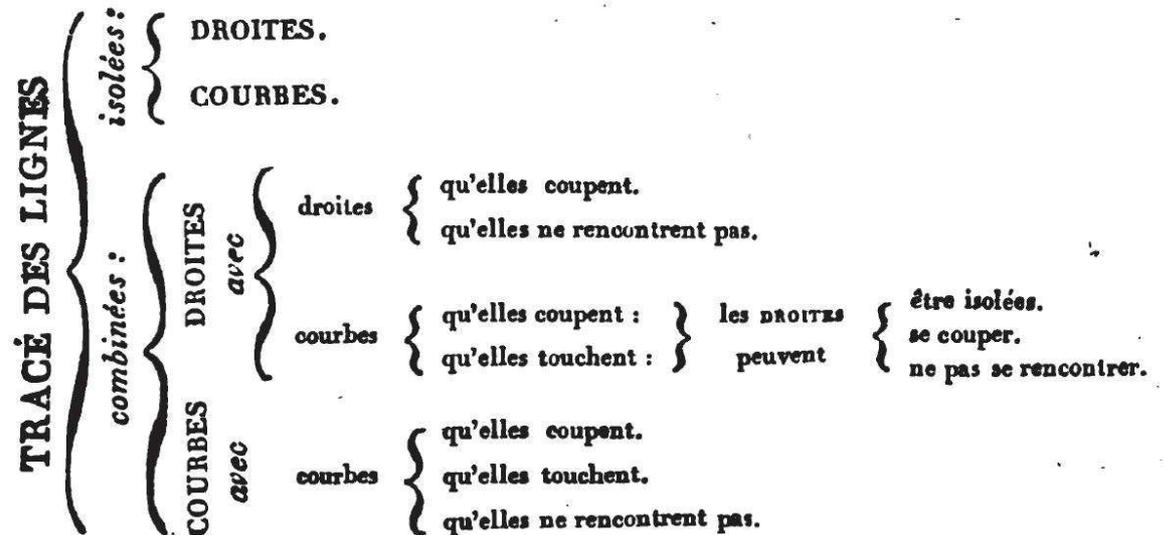
Toutes les propositions de la géométrie élémentaire trouvent leur place dans cette organisation structurée par la nature des tracés à effectuer, conformément à l'usage qu'en feront ses destinataires. Les propositions, appelées « principes » pour souligner leur généralité et leur fécondité, sont toujours suivies des constructions qui en dépendent ainsi que des applications à l'industrie de ces constructions.

Le deuxième volume, intitulé *Géométrie des courbes*, est organisé en effet

78. Bergery, *Op. Cit.*, p. v.

79. Barbin, Evelyne, « The notion of Magnitude in Teaching : The new Elements of Arnauld and his inheritance, *International Journal for the History of Mathematics Education*, to appear 2010.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE
RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES



par les courbes qui y sont successivement étudiées, d'abord et surtout les trois coniques, puis l'ovale de Cassini, la chaînette, les lemniscates, les spirales, les cycloïdes, les épicycloïdes, la sinusoïde, et les hélices.

Les notions de géométrie rationnelle dans un ouvrage élémentaire

Les notions récentes de géométrie trouvent place pour la première fois, avec la *Géométrie* de Bergery, dans un ouvrage d'enseignement élémentaire, comme en témoigne l'avertissement de l'éditeur :

Depuis quelques temps on regrettait de ne trouver dans les livres élémentaires aucune notion sur les Transversales qui rendent si simple la pratique de la géométrie, sur les Pôles et les Polaires, sur les Points conjugués, sur les Axes radicaux, sur les Centres de similitudes, sur les Centres de gravité et sur des tracés, d'un usage assez fréquent, dont plusieurs résultent de principes récemment découverts. [...] Cette nouvelle édition offrira [ces nouvelles richesses] aux jeunes géomètres, et leur donnera ainsi les moyens d'étudier, sans peine, les Propriétés projectives des figures dans le bel ouvrage de M Poncelet⁸⁰.

80. Bergery, *Géométrie appliquée à l'industrie*, 2^e édition, 1828, avertissement de l'éditeur.

II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel

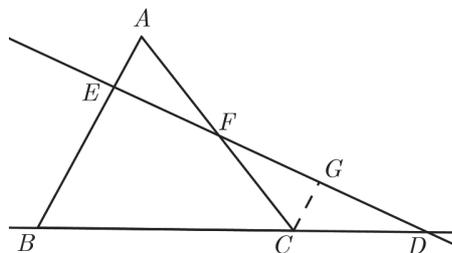
De ce point de vue, l'ouvrage est donc innovant, en comparaison notamment avec l'ouvrage qu'a publié Charles Dupin lui aussi à destination des ouvriers⁸¹. Les notions nouvelles sont employées pour les tracés géométriques, présentés comme le but principal de l'ouvrage. Le sous-titre de la deuxième édition précise d'ailleurs qu'elle est augmentée « des tracés qui résultent des principes les plus récemment découverts ».

Une méthode : la reconstitution de la figure

Bergery voit les figures planes comme le résultat d'une combinaison de plusieurs lignes, en premier lieu des droites et des cercles. Le chapitre intitulé « Combinaisons générales des lignes droites », qui traite des figures constituées de plusieurs lignes droites, s'ouvre sur la théorie des transversales. L'énoncé ci-dessous est le premier théorème démontré sur les transversales :

Toute transversale DE d'un système de trois droites qui se coupent deux à deux, forme sur ces droites six parties telles, qu'il y a égalité entre le produit de trois parties séparées et celui des trois autres ; c'est-à-dire que⁸² :

$$AE \times BD \times CF = EB \times DC \times FA$$



Pour démontrer ce résultat, Bergery introduit, comme Carnot dans son mémoire⁸³, une ligne auxiliaire, la parallèle à AB passant par C . Les triangles semblables AED et CGD d'une part, et AEF et CGF d'autre part

81. Dupin, Charles, *Géométrie et Mécanique des arts et métiers et des beaux-arts, Cours normal à l'usage des artistes et des ouvriers, des sous-chefs et des chefs d'ateliers et des manufactures*, Tome premier : Géométrie, 2^{de} édition, Paris : Bachelier, 1828.

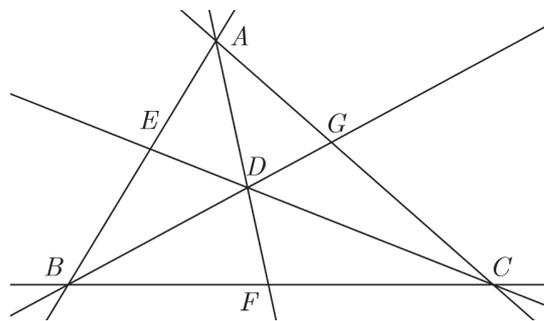
82. Bergery, *Op. Cit.*, p. 105.

83. Carnot, *Mémoire, suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, p. 66.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

donnent lieu à des égalités de proportions qui permettent d'aboutir à la proposition annoncée. Bergery utilise cette proposition pour démontrer cet autre résultat :

Lorsque six droites se coupent trois à trois, trois quelconques partant du même point, forment sur les trois autres six parties telles que le produit de trois parties séparées est égal au produit des trois autres⁸⁴.



Bergery considère successivement CE comme une transversale du système des trois droites AB , AF , CB puis BG comme une transversale du système des trois droites AC , AF , BC . En combinant les équations obtenues, il aboutit à la proposition annoncée : $AE \times GC \times BF = EB \times CF \times AG$.

Un corollaire au théorème ci-dessus est obtenu lorsque G est le milieu de AC . L'égalité $AE \times BF \times CG = EB \times FC \times GA$ devient $AE \times BF = EB \times FC$, qui implique le parallélisme des droites AC et EF . L'ouvrage, nous l'avons dit, est davantage porté aux constructions qu'aux démonstrations des théorèmes : « ces relations sont moins importantes par elles-mêmes que par leurs conséquences » écrit l'auteur. De la relation ci-dessus entre un milieu et un parallélisme sont immédiatement déduites les solutions de plusieurs problèmes. Notamment, celui de « tracer sur un terrain quelconque, une droite qui soit parallèle à une autre AC et qui passe par un point donné E » :

Prenez, avec un cordeau ou avec une perche, une longueur quelconque ; portez-la sur AC , à partir d'un point quelconque A et deux fois de suite ; plantez des jalons aux points G , C qui en résultent ; plantez-en aussi sur A , sur E et sur un point quelconque B du prolongement de AE ; mettez un sixième jalon à l'intersection D des alignements BG , EC ; enfin, marquez par un septième

84. Bergery, *Op. Cit.*, p. 107.

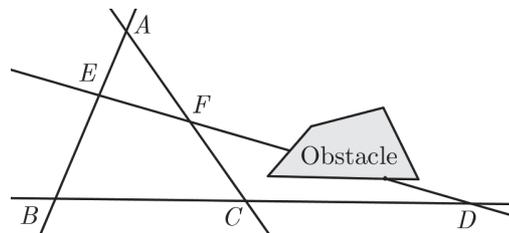
II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel

jalons, l'intersection F des alignements BC , AD ; les deux jalons E , F détermineront la droite demandée.

Bergery reconstitue la figure de la proposition précédente en organisant l'ordre de la construction de façon à partir des éléments donnés, exactement comme le fait Servois pour résoudre le même problème⁸⁵. Il poursuit en montrant de la même façon comment la donnée de deux parallèles permet de tracer une troisième parallèle à ces droites par un point quelconque, ou encore de construire le milieu d'une droite donnée, le tout en n'utilisant que des alignements. La présence de tels problèmes de la géométrie de la règle répond au public ouvrier des cours de Bergery, dans la mesure où il est plus facile sur le terrain de réaliser des alignements et éventuellement des reports que des cercles, des angles ou des mesures de longueurs.

Bergery s'attache à donner systématiquement des applications aux propositions qu'il démontre, ce qui l'amène à fournir au long de l'ouvrage trois solutions distinctes à un même problème, celui de prolonger une droite au-delà d'un obstacle. Voyons en quoi il considère les solutions successives comme étant de plus en plus « simples ».

La première est une application du premier théorème sur la transversale à un triangle. Soit à prolonger la droite EF au-delà de l'obstacle. Trois points A , B et C sont disposés en-dehors de cette droite, de sorte que les points E et F appartiennent respectivement aux droites AB et AC . L'égalité $AE \times$



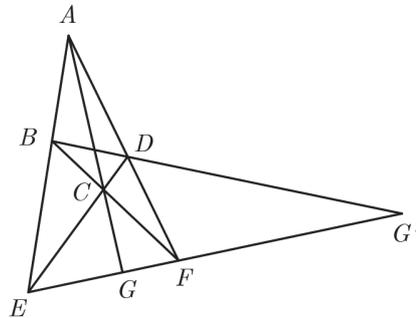
$BD \times CF = EB \times DC \times FA$ permet d'exprimer la longueur CD au moyen de longueurs connues, et donc de placer le point D en portant cette mesure sur le terrain⁸⁶.

La deuxième construction fait suite à une proposition concernant le système de quatre droites AB , BC , CD , DA . Nommant G , G' les points d'intersection comme sur la figure, Bergery prouve l'égalité $GE : GF :: G'E : G'F$. La démonstration combine les deux propositions vues précédemment, par la

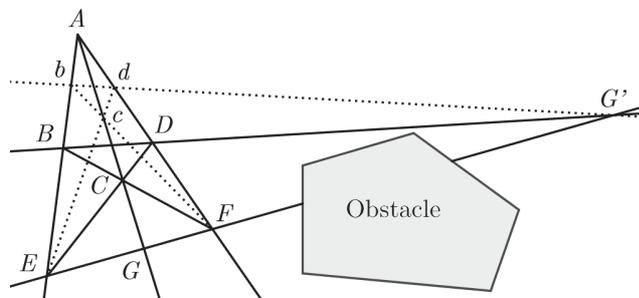
⁸⁵. Servois, *Op. Cit.*, p. 43.

⁸⁶. Bergery, *Op. Cit.*, p. 106.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE
RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES



considération d'une part de la droite BG' comme transversale du système des trois droites AE , EF , FA , et d'autre part des sécantes CD , CB et CG dans le même système. De la relation établie $GE : GF :: G'E : G'F$, il est déduit que la position du point G' sur la droite EF est déterminée par celle du point G , et en particulier ne dépend pas de celle du point C sur la droite AG . De cette proposition, prouvée de la même façon par Carnot dans la théorie des transversales⁸⁷, est déduite la deuxième solution au problème de prolonger une droite EF au-delà d'un obstacle. Deux positions distinctes C et c de ce point donnent lieu aux droites BD et bd , qui peuvent être prolongées celles-là, et se rencontrent au point G' cherché.



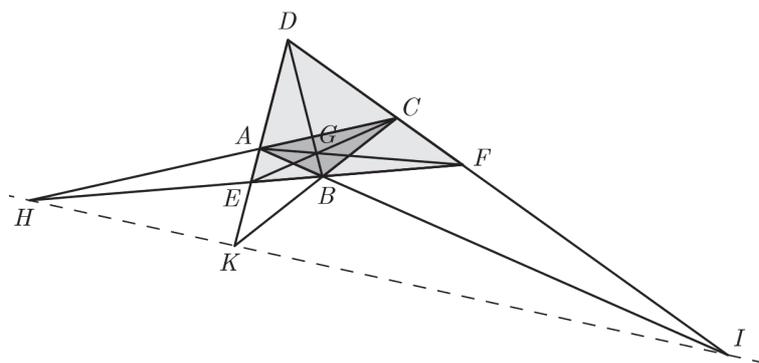
Enfin une troisième construction est déduite du théorème suivant, cas particulier du théorème de Desargues :

Quand un triangle ABC a ses sommets sur les côtés d'un autre triangle DEF et que les sommets opposés des deux figures sont joints par des droites qui se croisent toutes trois au même point G ,

⁸⁷. Carnot, *Mémoire, suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, p. 74.

II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel

les trois points de concours des côtés opposés des deux triangles, forment une ligne droite HIK ⁸⁸.



La proposition précédente, appliquée trois fois, donne les proportions $AD : AE :: KD : KE$, $CF : CD :: IF : ID$ et $BE : BF :: HE : HF$. Combinées avec la relation $AD \times CF \times BE = AE \times CD \times BF$, elles aboutissent à $KD \times IF \times HE = KE \times ID \times HF$, d'où l'on déduit que les points H , I et K sont alignés. Voici comment cette proposition permet de résoudre le problème de prolonger une droite BF au-delà d'un obstacle, dans le texte de Bergery :

Faites un triangle quelconque ABC , en plantant deux jalons A , C hors de la droite donnée BF ; placez un troisième jalon I à l'intersection des alignements AB , CF ; un quatrième D [...] sur le prolongement de CF ; un cinquième K à l'intersection des alignements AD , BC ; un sixième G , à l'intersection des alignements AF , BD ; un septième E , à la rencontre des alignements ADK , CG ; enfin, un huitième H à la rencontre des alignements AC , IK . Les deux derniers jalons E , H seront sur le prolongement de BF .

En fait, Bergery commet une erreur en plaçant le point D librement sur la droite CF , car D est nécessairement le conjugué harmonique du point F sur la droite IC . Il aurait fallu tracer d'abord la droite reliant I à l'intersection de BC et AF car elle recoupe AC en un point aligné avec B et D . Cette erreur met en évidence les difficultés liées à cette méthode de résolution des problèmes de construction. Reconstituer une figure pose les questions de l'ordre à suivre et de la latitude dans le choix des points. Il n'est pas toujours

88. Bergery, *Op. Cit.*, p. 196.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

possible de reconstituer une figure à partir de certains éléments donnés, soit que les constructions exigées ne soient pas réalisables avec les instruments à disposition, soit que les éléments donnés soient trop contraignants pour qu'on puisse retrouver la figure.

Les critères de simplicité utilisés pour comparer ces trois solutions d'un même problème sont distincts. Entre les deux premières, le critère est explicitement celui de la simplicité de la réalisation sur le terrain, où les alignements sont plus aisés à obtenir et à utiliser que les mesures. Au contraire, la troisième solution serait difficile en général à mettre en œuvre sur le terrain parce qu'elle exige de pouvoir se déplacer des deux côtés de l'alignement donné, et parce que le deuxième point E ne se retrouve pas toujours placé à un endroit accessible. Elle n'est donc « simple » que sur le papier, dans la mesure où elle produit directement deux points de l'alignement cherché, en utilisant autant de jalons que la deuxième solution.

L'ouvrage de Bergery, de par la spécificité du public auquel il s'adresse, est tourné vers les applications de la géométrie aux arts, et donc notamment vers les problèmes de tracé, et plus particulièrement les constructions géométriques. Il expose des propositions et des notions récentes de géométrie, telles que celles exposées dans les ouvrages de Servois et de Carnot, pour pouvoir en déduire des constructions ambitieuses, animé autant par la volonté de proposer des constructions utiles aux ouvriers que par le plaisir de donner à voir des solutions élégantes.

Il développe pour cela une méthode de reconstitution d'une figure à partir de la donnée de certaines de ses parties. La figure attachée à une proposition est pensée comme un système articulé dont certaines parties viennent coïncider avec la figure du problème à résoudre. Cette mobilité des parties de la figure est à relier à la façon dont Carnot résout ses « problèmes généraux » pour une classe de figure corrélatives, qui sont comme l'ensemble des articulations possible d'une figure de référence.

2.2 La *Géométrie* de Bobillier dans les écoles d'arts et métiers (1832)

La *Géométrie* d'Étienne Bobillier, enseignée avec succès dans les École des arts et métiers, comprend de nombreuses notions de géométrie rationnelle.

En 1803 est créée à Compiègne la première École des arts et métiers, bientôt transférée à Châlons-sur-Marne. Deux autres Écoles semblables verront le

II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel

jour au XIX^e siècle, à Angers puis à Aix-en-Provence. Elles ont pour but de « former, pour les carrières industrielles, des hommes joignant l'habileté de la main à l'intelligence de la science »⁸⁹ comme on peut le lire dans une histoire de ces Écoles publiée en 1865 par un ancien élève et ancien professeur. Le niveau théorique des études s'y élève rapidement, et l'ordonnance royale du 31 décembre 1826 indique qu'y sont enseignées, sur une durée de quatre à cinq ans, outre les travaux manuels, l'arithmétique, les éléments de géométrie et de trigonométrie, la géométrie descriptive, les notions principales de la physique et de la chimie appliquées à l'industrie. Le niveau requis pour l'entrée dans ces Écoles consiste à savoir lire et écrire correctement et à connaître les quatre premières règles de l'arithmétique. Parmi les meilleurs élèves, quelques-uns réussiront le concours d'entrée à l'École polytechnique⁹⁰. Des quatre cents élèves de Châlons, trois cents sont pris en charge par l'État, à parts égales entre demi-pension, trois-quarts de pension et pension complète.

Étienne Bobillier (1798-1840), polytechnicien, enseigne les mathématiques à l'École des arts et métiers de Châlons à partir de 1818. Il publie entre 1825 et 1827 des *Principes l'algèbre*⁹¹ destinés aux élèves qui suivent ses leçons particulières, afin de les préparer aux cours de géométrie analytique et de mécanique rationnelle qu'il dispense alors à l'École. En 1832 paraît son *Cours de géométrie*. Les deux ouvrages connaîtront plusieurs rééditions, et seront adoptés par le ministère de l'agriculture et du commerce pour l'enseignement dans les Écoles des arts et métiers et les Écoles professionnelles.

Bobillier organise lui aussi son *Cours de géométrie* selon l'ordre de simplicité des figures. Il introduit au fur et à mesure des chapitres les notions de transversales, de rapport harmonique, de centre de similitude, de pôle et de polaire par rapport à un cercle, de courbe polaire réciproque. L'ouvrage contient de nombreux problèmes. Pour les plus difficiles d'entre eux, la solution est exposée par l'analyse et non par la synthèse. Cette analyse que le polytechnicien Charles Brianchon nomme « analyse géométrique » dans un article du *Journal de l'École polytechnique* de 1810, et dont il déplore qu'elle soit « entièrement oubliée depuis que toutes les branches des mathématiques sont soumises à l'analyse algébrique » :

L'analyse géométrique dont nous parlons, présente en elle-même de grands avantages ; elle mène presque toujours à des solutions

89. Guettier, A., *Histoire des Écoles impériales des arts et métiers*, Paris, 1865, p. 24.

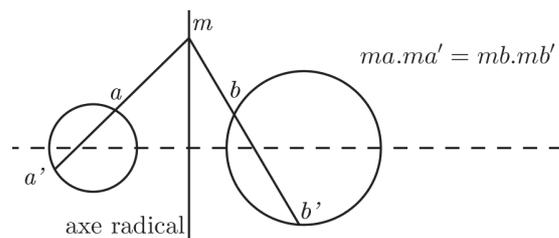
90. *Ibid.*, p. 37.

91. Bobillier, Étienne, *Principes l'algèbre*, 3 vol., Lons-le-Saunier : Gauthier, 1825-27.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

plus simples que celles qu'on obtient par le calcul, en faisant usage de la méthode artificielle des coordonnées ; elle exige aussi plus de pénétration d'esprit, et n'emploie d'autres éléments que les véritables données de la question : toutefois, ce procédé [...] est trop arbitraire, et devient trop restreint lorsqu'il s'agit de problèmes d'un ordre supérieur ; c'est alors que la méthode générale d'*Euler* et de *Monge* brille de tout son éclat, et laisse bien loin derrière elle la simple géométrie des anciens⁹².

Prenons en exemple la solution donnée au problème de trouver un cercle tangent à trois cercles donnés. Bobillier recourt à la notion d'axe radical, introduite d'après Poncelet⁹³ par le polytechnicien et professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des arts et métiers Gaultier de Tours, dans le *Journal de l'École polytechnique*⁹⁴. Bobillier définit l'axe radical de deux cercles comme le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux circonférences⁹⁵. Ce lieu a la propriété d'être une droite perpendiculaire à la ligne



des centres des deux circonférences.

Bobillier procède par analyse géométrique : il part de la figure de la solution présentant le cercle tangent extérieurement aux trois cercles donnés, et le cercle tangent intérieurement aux trois cercles donnés.

Il prouve d'abord que le point d'intersection des trois cordes de contact aa' , bb' et cc' est aussi le point d'intersection des trois axes radicaux des trois cercles pris deux à deux, ce qui permet de construire ce point. En effet, les points de tangence a et a' sont respectivement le centre de similitude directe

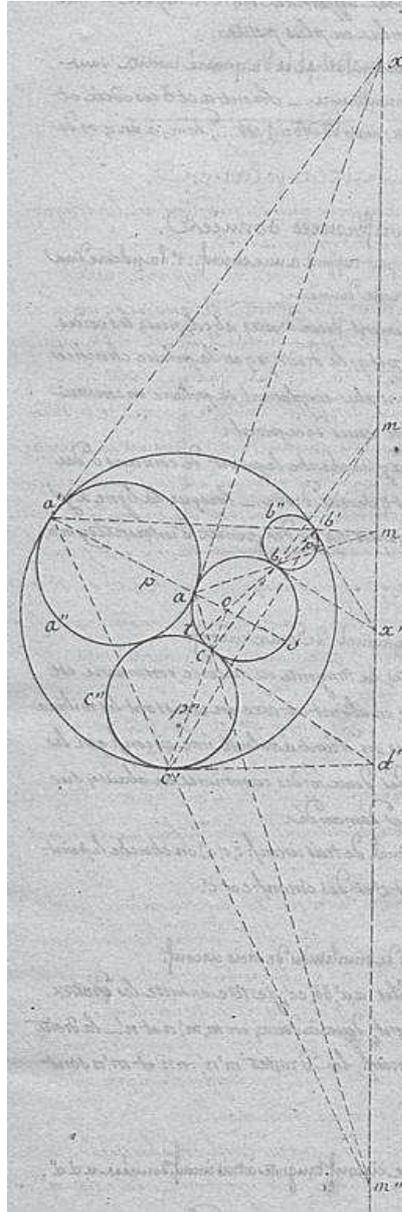
92. Brianchon, Charles, « Solution de plusieurs problèmes de géométrie », *Journal de l'École polytechnique*, 10^e cahier, tome IV, Paris, 1810.

93. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, p. 42.

94. Gaultier de Tours, « Mémoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions », *Journal de l'École polytechnique*, 16^e cahier, tome IX, Paris, 1813, p. 124-214.

95. Bobillier, *Géométrie*, p. 92.

II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel



des cercles $aa'a''$ et $a'b'c'$ et de similitude inverse des cercles $aa'a''$ et abc . Par conséquent la droite aa' doit passer par le centre de similitude directe des cercles abc et $a'b'c'$. Il en va de même pour la droite bb' . Ce centre de similitude, noté o , est donc à l'intersection des droites aa' et bb' . Prolongeant

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

les droites aa' jusque s et bb' jusque t , les rayons os et oa' d'une part, ot et ob' d'autre part, sont homologues, et donc $os : oa' :: ot : ob'$. Par ailleurs, dans le cercle abc , les cordes as et bt donnent $os : ob :: ot : oa$. De ces deux proportions Bobillier déduit l'égalité $oa \times oa' = ob \times ob'$, c'est-à-dire que le point o appartient à l'axe radical des cercles $aa'a''$ et $bb'b''$, et par suite qu'il se situe à l'intersection des axes radicaux des trois cercles $aa'a''$, $bb'b''$ et $cc'c''$ pris deux à deux.

Il construit ensuite l'axe de similitude des trois cercles à partir des points de la figure solution. La droite ab passant par les centres de similitude des cercles $bb'b''$ et abc , abc et $aa'a''$, passe aussi par le centre de similitude des cercles $aa'a''$ et $bb'b''$. La droite $a'b'$ jouit de la même propriété, par conséquent le point d'intersection m des droites ab et $a'b'$ est le centre de similitude directe des cercles $aa'a''$ et $bb'b''$. Les points m' et m'' sont obtenus de manière similaire, et la droite $mm'm''$ constitue l'axe de similitude des trois cercles.

Bobillier montre alors que l'axe radical des deux cercles cherchés abc et $a'b'c'$ est justement l'axe de similitude des trois cercles donnés, et peut donc être construit à partir des données du problème. Pour le prouver, il déduit de l'égalité établie précédemment $oa \times oa' = ob \times ob'$ que les points a , b , a' et b' sont cocycliques, et par conséquent que $ma \times mb = ma' \times mb'$. D'où m appartient à l'axe radical des cercles abc et $a'b'c'$. Il en va de même pour m' et m'' , donc la droite $mm'm''$ est bien l'axe radical des cercles abc et $a'b'c'$.

Il reste à montrer que les trois pôles de l'axe $mm'm''$ par rapport à chacun des trois cercles donnés appartiennent aux cordes de contact. Cela est déduit du fait que les deux tangentes aux extrémités des cordes de contact, par exemple en a et a' , sont respectivement les axes radicaux des cercles abc et $aa'a''$ et des cercles $aa'a''$ et $a'b'c'$, donc leur point d'intersection est sur l'axe radical des cercles abc et $a'b'c'$, c'est-à-dire sur la droite $mm'm''$. Donc le pôle x de la droite aa' par rapport au cercle $aa'a''$ appartient à l'axe $mm'm''$, et par conséquent le pôle de l'axe $mm'm''$ par rapport au même cercle appartient à la corde de contact aa' . Il en va de même pour les pôles de cette droite par rapport aux deux autres cercles donnés.

Enfin, chacun de ces pôles p , p' , p'' est relié au centre radical o des trois cercles donnés pour trouver les points de tangence, à partir desquels le tracé des cercles cherchés est immédiat.

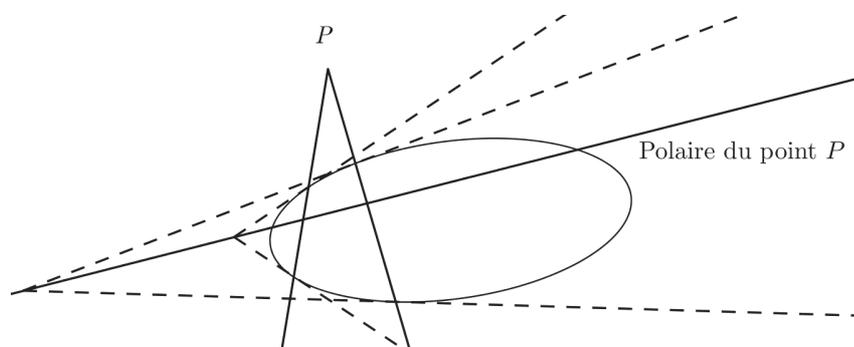
La démonstration de Bobillier est proche de celle que donne Bergery du même problème⁹⁶, et qu'il attribue à Poncelet, qui en fournit plusieurs so-

⁹⁶. Bergery, *Géométrie appliquée à l'industrie*, 2^e édition, 1828, p. 161.

II.2 La géométrie rationnelle dans l'enseignement industriel

lutions différentes⁹⁷. Mais la démonstration de Bobillier se démarque en ce qu'elle est rédigée entièrement dans le style de l'analyse géométrique.

Il emploie encore la « théorie des polaires réciproques » pour établir un théorème sur l'hexagone inscrit à une conique. La notion de polaire est présentée par Gergonne dans ses *Annales*⁹⁸. La polaire d'un point P pris dans le plan d'une courbe du second ordre est la droite parcourue par le point d'intersection des deux tangentes menées par les deux points d'intersection d'une droite variable menée à la courbe du point P . Inversement, le point P est le pôle de cette droite.



Poncelet introduit la notion de courbe polaire réciproque dans le *Traité des propriétés projectives des figures*⁹⁹, généralisant ainsi un résultat concernant les hexagones réciproques démontré par Brianchon dans les *Annales de Gergonne*¹⁰⁰ :

Si deux courbes quelconques, situées sur le plan d'une section conique donnée, sont telles que les points de l'une soient respectivement les pôles des tangentes de l'autre ; réciproquement les points de celle-ci seront les pôles des tangentes de la première ; de sorte que chacune d'elles pourra être considérée, à la fois, comme l'enveloppe des polaires des points de l'autre, ou comme le lieu des pôles des tangentes de cette autre¹⁰¹.

97. Poncelet, *Op. Cit.*, p. 142.

98. Gergonne, « Théorie analytique des pôles des lignes et des surfaces du second ordre », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 3 (1812-1813), p. 297.

99. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.

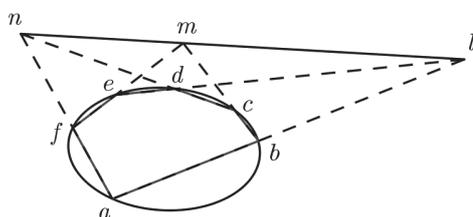
100. *Annales de Gergonne*, tome 4, 1813-1814, p. 379.

101. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, p. 123.

CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES

Bobillier prouve que la polaire réciproque d'une conique quelconque par rapport à un cercle centré en un de ses foyers est un cercle. Un hexagone inscrit devenant par là un hexagone circonscrit, il reste à prouver que les trois diagonales d'un hexagone circonscrit à un cercle sont concourantes, ce qui est connu, d'où l'énoncé :

Dans tout hexagone $abcdef$ inscrit dans une conique, les trois points de concours l, m, n , des côtés opposés ab et de , bc et ef , cd et fa sont situés en ligne droite¹⁰².



Bobillier, dans sa *Géométrie* tout entière tournée vers l'étude des courbes et des surfaces pour les élèves des Écoles des arts et métiers, expose les notions récentes de géométrie rationnelle, et les emploie à la résolution de problèmes pour certains difficiles. Pour certains d'entre eux, il rédige la solution sous la forme de l'analyse géométrique.

2.3 Conclusion

Les cours pour ouvriers et la formation au sein des Écoles des arts et métiers donnent l'occasion aux polytechniciens Bergery et Bobillier de rédiger des cours de géométrie. Ils font tous les deux le choix d'y insérer des notions de géométrie rationnelle comme les transversales, les centres de similitude, les pôles et les polaires, les axes radicaux. Ils emploient ces notions pour résoudre des problèmes de construction géométrique.

3 Conclusion

Le premier tiers du XIX^e siècle voit un regain d'intérêt pour les méthodes géométriques, qui se renouvellent et s'accompagnent de l'introduction de notions nouvelles. Monge, avec la *Géométrie descriptive*, décline des problèmes

102. Bobillier, *Op. Cit.*, p. 154.

II.3 Conclusion

de construction géométrique qui stimulent la visualisation de la figure et donnent lieu à une méthode d'invention. Carnot, dans la *Géométrie de position*, établit en réponse à ce qu'il appelle des « problèmes généraux », de nombreuses relations entre les parties des figures, conçues comme des assemblages mobiles de lignes. Ces relations s'avèrent fécondes pour résoudre les problèmes. Servois, dans les *Solutions peu connues*, approfondit certaines propositions de l'ouvrage de Carnot et en tire les solutions d'une série de problèmes de géométrie de la règle. Poncelet enfin, dans son *Traité des propriétés projectives des figures*, étend les conceptions de la géométrie aux points à l'infini et aux éléments idéaux et imaginaires, et institue une méthode féconde d'invention par le recours à la projection conique.

Dans le cadre de l'enseignement industriel, deux ouvrages d'enseignement de la géométrie intègrent largement les notions nouvelles : le *Cours de géométrie appliquée à l'industrie* de Bergery, et la *Géométrie* de Bobillier. Ces ouvrages emploient de telles notions dans la résolution de problèmes de construction géométrique difficiles. Pour certains d'entre eux, les auteurs rédigent la solution en mettant en évidence la méthode d'invention, la reconstitution de la figures pour Bergery, et l'analyse géométrique pour Bobillier.

**CHAPITRE II. L'ESSOR DE LA GÉOMÉTRIE
RATIONNELLE : NOUVELLES NOTIONS ET MÉTHODES**



CHAPITRE III

DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Nous avons rappelé dans l'introduction que, dans les *Éléments* d'Euclide, deux types de propositions alternent : les problèmes et les théorèmes. Les premiers établissent la construction des figures à la règle et au compas, et les deuxièmes établissent des propositions sur ces figures. L'ordre déductif de l'ouvrage impose alors que les figures soient construites avant d'établir les théorèmes qui s'y réfèrent, théorèmes qui à leur tour sont utilisés pour construire de nouvelles figures.

Par ailleurs, nous avons montré dans les deux précédents chapitres comment les problèmes, souvent des problèmes de construction, servent à montrer le fonctionnement d'une méthode, analyse algébrique ou géométrie rationnelle, et à convaincre de son efficacité. Dans ces ouvrages, la notion de problème de construction ne se limite pas toujours à des constructions à la règle et au compas, soit qu'elle intègre d'autres lignes, en l'occurrence les courbes algébriques, soit que la résolution du problème s'arrête à l'expression algébrique de la grandeur inconnue au moyen des grandeurs connues.

Ce chapitre analyse l'organisation des propositions dans plusieurs ouvrages d'enseignement de la géométrie dans cette première période. Nous serons particulièrement attentifs à la place des problèmes, à leur rôle et au sens donné à ce mot. Dans un premier temps, nous étudions les *Éléments de géométrie* de Bézout, de Legendre et de Lacroix, trois ouvrages largement diffusés autour de 1800 et réédités tout au long du XIX^e siècle. Ces ouvrages sont utilisés à différents niveaux d'enseignement, des classes de grammaire à la préparation aux concours, et de la province à la capitale. Dans un deuxième

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

temps, une analyse similaire sera réalisée avec le *Cours de géométrie élémentaire* de Vincent, destiné aux élèves qui se préparent aux concours des Écoles du gouvernement, et dont les cinq éditions successives entre 1826 et 1844 rencontrent une large audience dans la deuxième partie de cette première période.

1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

Les trois ouvrages de Bézout, Legendre et Lacroix sont retenus pour leur succès. Nous allons regarder comment sont organisées les propositions à l'intérieur de chacun des ouvrages pour comprendre la place qu'y occupent les problèmes¹.

Le premier est l'ouvrage majoritairement utilisé à la fin du XVIII^e siècle dans les Écoles centrales et dans les Écoles militaires, comme en témoigne une étude sur les Écoles centrales réalisée par François de Neufchâteau en 1799². Il s'agit du *Cours de Mathématiques, à l'usage des gardes du pavillon de la Marine* rédigé par Étienne Bézout entre 1764 et 1769, dont le deuxième livre porte sur les Éléments de géométrie. Les deux autres ouvrages pris en compte sont publiés dans les dernières années du XVIII^e siècle et s'imposeront à leur tour comme des ouvrages de référence au siècle suivant.

Les *Éléments de géométrie* composés par Legendre en 1794, dans l'intention d'allier la clarté des modernes et la rigueur des anciens, bénéficient d'une reconnaissance institutionnelle en apparaissant sur la liste officielle des ouvrages d'enseignement supérieur et secondaire éditée en 1802 suite à la création des Lycées³, ainsi que dans les programmes officiels à partir de 1809. La reconnaissance qu'il rencontre auprès des professeurs est attestée par Jean-Guillaume Garnier qui considère en 1810⁴ que l'ouvrage de Legendre est « le traité le plus complet et le plus répandu » pour l'enseignement de

1. Dhombres, Jean, « Enseignement moderne ou enseignement révolutionnaire des sciences ? », *Histoire de l'éducation*, 42, 1989, p. 55-78.

2. Lamandé, Pierre, *Trois traités français de géométrie à l'orée du XIX^e siècle : Legendre, Peyrard et Lacroix*, *Physica rivista internazionale di storia della scienza*, 30, 1993, p. 243-302.

3. Bulletin administratif de l'instruction publique n°18, 1851, p. 69.

4. Garnier, Jean-Guillaume, *Réciproques de la géométrie*, 2^{de} édition, Paris : Courcier, 1810, p. iij.

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

la géométrie élémentaire. Autre manifestation du succès de cet ouvrage, de nombreux auteurs de manuels de géométrie au long du XIX^e siècle suivent le plan en huit Livres adopté par Legendre, dont par exemple Eugène Catalan, qui qualifie dans ses *Éléments de géométrie* ce plan comme un « usage généralement adopté »⁵. Ce plan est encore suivi dans la deuxième moitié du XIX^e siècle par Eugène Rouché et Charles de Comberousse dans leur *Traité de géométrie élémentaire* de 1866⁶, et par Étienne Combette dans son *Cours de géométrie élémentaire*⁷.

Lacroix, quant à lui, est reconnu par la communauté savante dans les dernières années du XVIII^e siècle pour son savoir-faire en tant que rédacteur d'ouvrages destinés à l'enseignement, qui justifie à lui seul la position institutionnelle de premier plan acquise par cet académicien⁸. Les *Éléments de géométrie*⁹, que Lacroix écrit en 1798 pour les élèves de l'École centrale des quatre nations à Paris sont indiqués comme l'ouvrage de référence pour l'enseignement de la géométrie dans les programmes des Lycées édités en 1802. Certes, Lacroix était membre de la commission des programmes en question avec Monge et Laplace. Il n'empêche, le professeur Biot lui écrivait déjà, en 1800, pour l'informer qu'il avait substitué son ouvrage à celui de Legendre pour ses cours¹⁰.

Ces trois ouvrages sont souvent réédités au cours de la période : celui de Legendre connaît une 14^e édition en 1832 et celui de Lacroix une 12^e en 1822. L'un et l'autre continueront d'être édités tout au long du XIX^e siècle, tandis que celui de Bézout est pris en exemple par les programmes officiels dans les années 1840.

5. Catalan, Eugène, *Éléments de géométrie*, 2^e tirage, Paris : Bachelier, 1847.

6. Rouché, Eugène, Comberousse, Charles, *Traité de géométrie élémentaire*, Paris : Gauthier-Villars, 1866.

7. Combette, Étienne, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, Paris : Félix Alcan, 1887.

8. Ehrhardt, Caroline, « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant. Sylvestre-François Lacroix, 1765-1843 », *Histoire de l'éducation*, 123, 2009, p. 5-43.

9. Lacroix, *Éléments de géométrie à l'usage de l'école centrale des quatre nations*, 7^e édition, Paris : Courcier, 1808.

10. Schubring, Gert, « On the methodology of analysing historical textbooks : Lacroix as textbook author », *For the Learning of mathematics*, 7, 3, 1987, p. 46.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

1.1 Les *Éléments de Géométrie* de Bézout (1764)

Les *Éléments de Géométrie* d'Étienne Bézout (1730-1783) font partie d'un vaste ensemble intitulé *Cours de Mathématiques, à l'usage des gardes du pavillon de la Marine* destiné initialement à la formation des officiers militaires. Nous allons voir qu'il opère un choix d'organisation des propositions en principes, conséquences et applications très différent de celui d'Euclide.

La structure de l'ouvrage en principes, conséquences et applications

Bézout s'interroge dans la préface des *Éléments de géométrie* sur le choix des propositions qui doivent figurer dans un ouvrage de formation à la pratique de l'art de la Marine. D'un côté, affirme-t-il, les propositions dont peuvent être déduites l'ensemble des applications à la navigation sont réduites à quelques propositions essentielles. Limiter cependant l'exposé à un petit nombre de propositions ne lui paraît pas satisfaisant. D'un autre côté, exposer toutes les propositions susceptibles d'application à la navigation ne le satisfait pas non plus. Il tranche finalement pour un équilibre entre ces deux choix extrêmes :

Un livre de Géométrie élémentaire [ne doit pas nécessairement] rassembler un grand nombre de propositions. S'il suffisait, pour bien inculquer les principes d'une science, de donner ce qui est essentiellement nécessaire au but qu'on se propose, ceux qui connoissent un peu la Géométrie savent qu'on y satisferoit en peu de mots. Mais l'expérience démontre qu'un pareil livre seroit utile seulement à ceux qui ont acquis déjà des connoissances, et qu'il n'imprimerait que de faibles traces dans l'esprit des commençants. D'un autre côté, il n'y a pas moins d'inconvéniens à trop multiplier les conséquences, [...] Le seul parti qu'il y ait à prendre, est, ce me semble, d'aller un peu plus loin que les principes, de s'arrêter aux conséquences utiles, et de fixer ces deux choses dans l'esprit, par des applications : c'est ce que j'ai tâché de faire¹¹.

Nous voyons que Bézout distingue, dans son argumentaire, deux types de propositions : les principes et les conséquences de ces principes. Les principes

11. Bézout, Étienne, *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon de la marine et de l'artillerie*, seconde partie, Avignon : Séguin frères, 1811, préface.

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

désignent des propositions « essentiellement nécessaires », c'est-à-dire dont peuvent être déduites directement les autres propositions, nommées pour cette raison « conséquences ». Cet usage du terme de *principe* en géométrie montre la volonté d'opérer une distinction parmi les propositions dont elle est constituée, entre des propositions regardées comme fondamentales et d'autres secondaires, en exhibant la subordination des deuxièmes aux premières. Cette idée de propositions principales et secondaires est absente des *Éléments* d'Euclide. Elle se trouve en revanche dans la relation qu'entretiennent théorèmes et corollaires, comme le fait remarquer Antoine Arnauld, auteur de *Nouveaux éléments de géométrie*¹² à la fin du XVII^e siècle, dans sa définition de la notion de corollaire :

COROLLAIRE. C'est une proposition qui n'est qu'une suite d'une autre précédente [...] Mais il faut remarquer, que pour mieux faire voir la dépendance qu'avoient plusieurs propositions d'une seule qui en étoit comme le principe & le fondement, on a quelquefois mis en Corollaire ce qu'on aurait pû mettre en Théorème, si on avoit voulu¹³.

Pour Arnauld, certains théorèmes ont valeur, au sein d'un groupe de propositions, de « principe » et de « fondement », de sorte que les autres propositions en dépendent, et sont alors nommées corollaires.

D'Alembert aussi a exhibé des *principes* au sein des propositions de géométrie. Il éclaircit sa conception de cette notion de principes, qui ne sont pas des axiomes, dans ses *Essai sur les Éléments de philosophie*, dont la première édition date de 1753. Il y affirme que « dans chaque science, on appelle principes, [les vérités] qu'on regarde comme la base des vérités de détail »¹⁴. Il identifie des principes du premier et du second ordre. Pour ce qui concerne la géométrie, les principes du premier ordre, sur lesquels sont fondés les éléments de géométrie, sont au nombre de deux : « celui de la *superposition* et celui de la *mesure des angles par les arcs de cercle décrits du sommet de ces angles* »¹⁵. Les principes du second ordre en dérivent et sont chacun « la base & la source d'un grand nombre de vérités de détail ». D'Alembert

12. Arnauld, Antoine, *Nouveaux éléments de géométrie*, 2^{de} édition, Paris : Desprez, 1683.

13. Arnauld, *Op. Cit.*, Définitions.

14. D'Alembert, *Essai sur les Éléments de philosophie*, in *Œuvres de D'Alembert*, Paris : Belin, 1821, p. 147.

15. *Ibid.*, p. 149.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

donne en exemple le principe « des côtés proportionnels des triangles semblables », qualifié de principe « le plus fécond peut-être de toute la Géométrie élémentaire ».

Bézout ne reprend pas cette distinction entre principes du premier et du second ordre, mais il distingue bel et bien au sein des propositions de géométrie des principes et des conséquences de ces principes. Néanmoins, cette distinction entre deux types de propositions n'est pas explicite dans le corps de l'ouvrage. Le terme de principe est certes employé, mais pas de façon systématique, et seules les entames de certaines propositions telles que « la proposition démontrée peut servir à » permettent de comprendre qu'il s'agit d'une conséquence. La distinction entre principes et conséquences prend davantage son sens dans la conception qu'a Bézout de l'enseignement des sciences dans les écoles de la Marine. Il conçoit cet enseignement comme étant à la fois théorique et pratique. La partie théorique, pour la géométrie, consiste en un double apprentissage : apprendre les principes, c'est-à-dire les propositions essentielles, et savoir en déduire des conséquences, c'est-à-dire savoir raisonner géométriquement pour établir des propositions directement utiles pour la pratique. La partie pratique consiste en des applications des propositions à des situations issues de l'art de la Marine.

Ainsi, pour aider les commençants, et imprimer dans leurs esprits les principes de la géométrie, il convient d'exposer les conséquences « utiles » et les applications de ces principes. Dans le corps de l'ouvrage, Bézout n'explique pas ce qu'il considère comme étant principe, conséquence ou application. L'organisation déductive et la typographie permettent de faire des hypothèses. Les principes sont suivis de plusieurs autres propositions, les conséquences justement, qui en sont directement déduites. Ces propositions sont utilisées à leur tour pour résoudre des problèmes graphiques ou de terrain souvent liés à l'exercice militaire et désignés sous le nom d'applications. Les problèmes de construction géométrique apparaissent donc au rang de ces applications. Un exemple touchant aux triangles semblables va illustrer cette organisation. Les principes en sont :

- Si on coupe les lignes AF et AL proportionnellement aux points D et I , c'est-à-dire, de manière que $AF : AD :: AL : AI$, la ligne DI sera parallèle à FL ;
- Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, et sont, par conséquent, semblables.

Bézout en tire les conséquences :

- Deux triangles, qui ont les côtés parallèles [...] ont, par conséquent, les

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

côtés proportionnels ;

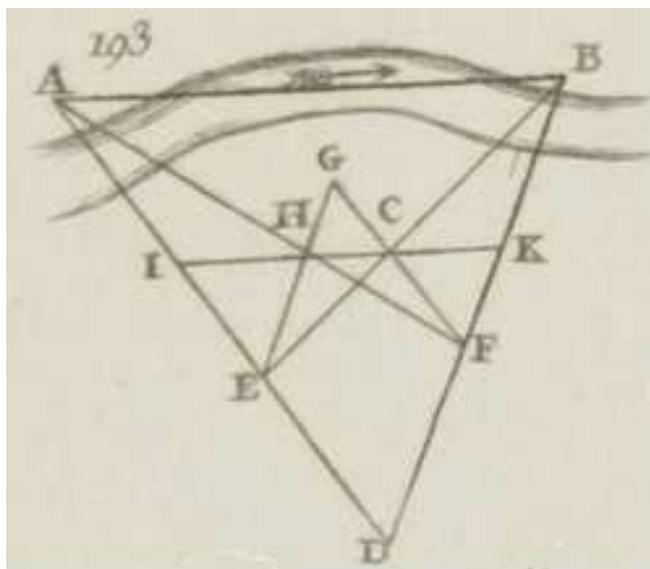
- Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ont aussi les deux autres angles égaux, et sont, par conséquent, semblables.

Et il donne entre autres applications en petits caractères :

Mener par un point connu C sur le terrain (n'ayant autre chose que des piquets), une parallèle à une ligne inaccessible AB .

Voici la solution que fournit Bézout à ce problème de construction à la règle seule :

Ayant pris arbitrairement un point D , on prendra sur l'alignement AD , un point E qui soit en même temps dans l'alignement de B et de C . De ce point E , on mènera une parallèle EG à la ligne supposée accessible DB ; puis du point C on mènera GCF parallèle à AD , et qui rencontrera BD en un point F . Sur EG , on marquera un point H qui soit dans l'alignement FA ; et la ligne $KCHI$ que l'on fera passer par ces points, sera la parallèle demandée¹⁶.



La démonstration recourt aux propositions indiquées ci-dessus comme conséquences. Elle consiste à établir que les triangles FHG et FAD sont

16. Bézout, *Op. Cit.*, p. 69-79.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

semblables ainsi que les triangles ECG et BED . De là on déduit que les triangles GCH et ABD sont semblables et enfin que les droites CK et AB sont parallèles.

Dans cette organisation hiérarchique des propositions en principes, conséquence et applications, les constructions géométriques relèvent des applications. Elles sont formulées soit sous la forme de problèmes de terrain liés à l'exercice militaire, comme dans l'exemple ci-dessus, soit sous la forme euclidienne de construction d'une figure à la règle et au compas.

Comparaison avec les *Éléments* d'Euclide

Quelques-uns des problèmes de construction des *Éléments* d'Euclide¹⁷ se trouvent dans l'ouvrage de Bézout. La correspondance ci-dessous montre que l'ordre d'apparition des énoncés est tout à fait différent dans les deux ouvrages :

N° chez Bézout	Prop. dans Euclide	N° chez Bézout	Prop. dans Euclide
33	I, 11 et 12	83	I, 22
44	I, 31	117	VI, 10
48 et 68	III, 17	120	VI, 12 et 11
53	I, 9	126	VI, 13
54	IV, 5	130	VI, 30
55	III, 1	133	VI, 18
68	III, 17	143	II, 14
72	III, 33		

L'ordre d'apparition des problèmes de construction n'est pas soumis à l'ordre déductif des *Éléments* d'Euclide. Ils sont des applications à la suite des propositions sur les figures. D'ailleurs, les problèmes de construction ne sont pas identifiés dans l'ouvrage comme des propositions spécifiques, et Bézout n'emploie pas les termes habituels de problème et de théorème dans le corps de l'ouvrage. Il s'en explique en affirmant que ces termes sont peu familiers des élèves, et qu'ils n'ajoutent rien à la clarté du propos. Mais nous voyons surtout qu'ils ne sont pas adaptés à la structure de l'ouvrage en principes, conséquences et applications. Les applications regroupent des constructions géométriques à la règle et au compas, des théorèmes à démontrer, et des problèmes à exécuter sur le terrain. Elles ont pour but de familiariser les élèves

17. *Les Œuvres d'Euclide*, trad. Peyrard, Paris : Patris, 1819, réédition Blanchard, 1993.

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

aux propositions que sont les principes et leurs conséquences, et de montrer comment elles peuvent être mises en œuvre dans les exercices militaires :

Comme il importe de se rendre les principes familiers, nous insisterons un peu sur leur usage, tant par cette vue, que parce que cela nous fournira l'occasion d'expliquer plusieurs pratiques utiles¹⁸.

L'ouvrage est tout entier orienté vers la mise en pratique. Les applications sont la raison d'être de la formation théorique des élèves des Écoles militaires. L'ouvrage est orienté à sens unique, des principes vers les conséquences puis vers les applications qui en constituent l'aboutissement.

1.2 Les *Éléments de Géométrie* de Legendre (1794)

Les *Éléments de géométrie* de Legendre (1752-1833) sont publiés en 1794. L'auteur est alors un géomètre reconnu par ses pairs qui l'ont élu à l'Académie des sciences comme adjoint en 1783, puis comme associé deux ans plus tard pour ses travaux en mécanique, en analyse et en théorie des nombres. Bien que sa situation financière ne lui imposât pas de travailler, Legendre a acquis une expérience de l'enseignement à l'École militaire de Paris entre 1775 et 1780. En rédigeant ses *Éléments de géométrie*, il ne répond pas à une commande comme Bézout, et son statut n'a rien à gagner d'une telle publication. Ses préoccupations ne sont pas essentiellement pédagogiques, bien que l'ouvrage reçoive une mention honorable au concours institué en 1794 pour le choix des ouvrages élémentaires à prescrire dans l'enseignement secondaire¹⁹. L'ambition de Legendre est avant tout de « faire des éléments très rigoureux »²⁰. En témoignent les efforts qu'il a déployés pour démontrer l'axiome des parallèles, dont on compte trois démonstrations différentes dans les douze rééditions de l'ouvrage réalisées de son vivant²¹.

18. Bézout, *Op. Cit.*, p. 73.

19. Schubring, Gert, « On the methodology of analyzing historical textbooks : Lacroix as textbook author », *For the learnig of mathematics*, 7, 3, 1987, p. 49.

20. Legendre, *Op. Cit.*, préface.

21. Bkouche, Rudolf, « Les démonstrations du postulat des parallèles », in Barbin, Bernard (dir.), *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, Erreurs, Raisonnements*, Paris : INRP, 2007.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Un certain retour à la rigueur des Anciens

À l'occasion de son enseignement à l'École militaire, Legendre a remarqué « les imperfections qui se rencontrent dans quelques-uns des ouvrages élémentaires les plus connus »²². Son insatisfaction réside dans le fait que « tantôt les auteurs supposent des choses qui ne sont pas contenues dans les définitions ; tantôt ces définitions elles-mêmes sont défectueuses ; quelquefois ils se contentent d'invoquer le témoignage des yeux ; ailleurs ils emploient des principes qui sont vrais en eux-mêmes, mais qui paroissent entraîner quelques négligences dont l'esprit n'est pas satisfait »²³. Il se réfère alors aux propos de D'Alembert qui écrit dans ses *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie* au sujet des *Éléments de géométrie* :

Tous les défauts qu'on reproche à ces ouvrages [les éléments de géométrie], se réduisent presque uniquement à un seul qui en est la source commune ; à ce que les idées n'y sont pas placées dans l'ordre naturel qui leur convient. Par là il arrive, ou qu'on suppose ce qui auroit besoin d'être démontré, ou qu'on prouve d'une manière peu rigoureuse ce qui devrait & pourroit être démontré en rigueur, ou qu'on démontre par des voies laborieuses & quelquefois insuffisantes, ce qui pourroit être démontré avec beaucoup plus de simplicité. Pour placer les idées dans l'ordre naturel, il faut sur-tout se rendre attentif aux définitions ; non seulement en y mettant toute la précision possible, [...] mais en ne refermant pas dans la définition des idées qu'elle ne doit pas contenir & qui doivent en être la conséquence²⁴.

D'Alembert donne en exemple la définition des parallèles, celle des angles et enfin l'explication de ce que signifie le produit de deux longueurs. L'« ordre naturel » de D'Alembert est l'ordre de la déduction logique, essentiel à ses yeux.

De ce point de vue, Legendre considère que « l'espèce de méthode dont se servaient les anciens est encore celle qui approche le plus de la perfection, et qui convient le mieux aux éléments de géométrie ». Il trouve les ouvrages des Anciens plus rigoureux et plus satisfaisants que ceux des modernes, et

22. Legendre, *Op. Cit.*, préface.

23. Legendre, *Op. Cit.*, préface p. vi.

24. D'Alembert, Jean, *Mélanges de littérature, d'histoire, et de philosophie*, 2^e édition, Amsterdam : Zacharie Chatelain & fils, 1770, p. 201.

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

affirme construire ses *Éléments* en suivant d'assez près les écrits d'Euclide et d'Archimède. Toutefois son ouvrage se démarque nettement de ces références antiques, et pas seulement quant à la clarté du style revendiquée par l'auteur. Il ne suit pas l'ordre euclidien des propositions, et il intègre des techniques - le traitement des grandeurs par le symbolisme arithmétique²⁵ - et des démonstrations - l'incommensurabilité de la circonférence et du diamètre du cercle - plus récentes.

Legendre organise ses *Éléments* en huit Livres. Quatre traitent de la géométrie plane et quatre de la géométrie solide. La première est organisée comme suit : « Le livre I^{er} [...] contient les propriétés des lignes droites qui se rencontrent, celles des perpendiculaires, des parallèles, les cas d'égalité des triangles, etc. Le livre II [...] traite des propriétés les plus simples du cercle [...] Le livre III [...] renferme la mesure des surfaces [et] le livre IV traite des *Polygones réguliers et de la mesure du cercle* »²⁶. Entre autres différences entre les *Éléments de géométrie* de Legendre et ceux d'Euclide, nous allons voir que les problèmes de construction n'y occupent pas du tout la place essentielle qu'ils occupent chez Euclide.

Les problèmes écartés de l'enchaînement déductif

Une différence notoire entre les *Éléments* de Legendre et ceux d'Euclide est la place assignée aux problèmes de construction géométrique. Legendre regroupe les problèmes à la fin des Livres, au moins pour ce qui concerne les trois premiers Livres. Au contraire de l'édifice euclidien, construit sur le modèle d'une imbrication entre problèmes et théorèmes, son ouvrage expose uniquement une suite de théorèmes et relègue les problèmes à la fin de chacun des Livres. Lui qui annonce dans sa préface sa volonté d'exactitude, de rigueur et de concision considère manifestement que les problèmes de construction ne sont pas nécessaires dans l'enchaînement déductif des propositions de géométrie. En particulier, aucun des axiomes énoncés ne traite de la construction des figures, là où Euclide y consacre quatre demandes.

Afin de comprendre le choix des énoncés de problèmes réalisé par Legendre, voici les énoncés des premiers problèmes, qui figurent à la fin du Livre II, avec en vis-à-vis le numéro de la proposition chez Euclide lorsqu'elle

25. Barbin, « The notion of Magnitude in Teaching : The new Elements of Arnauld and his inheritance », *International Journal for the History of Mathematics Education*, vol.4, n°2, 2009, pp. 1-18.

26. Legendre, *Op. Cit.*, préface.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

s'y trouve :

1. Diviser la droite donnée AB en deux parties égales	I, 10
2. Par un point donné A , donné sur la ligne BC , élever une perpendiculaire à cette ligne	I, 11
3. D'un point A , donné hors de la droite BD , abaisser une perpendiculaire sur cette droite	I, 12
4. Au point A , de la ligne AB , faire un angle égal à l'angle donné K	I, 23
5. Diviser un angle ou un arc donné en deux parties égales	I, 9
6. Par un point donné A , mener une parallèle à une ligne donnée BC	I, 31
7. Deux angles A et B d'un triangle étant donnés, trouver le troisième	
8. Étant donnés deux côtés B et C d'un triangle et l'angle A qu'ils comprennent, décrire le triangle	
9. Étant donné un côté et deux angles d'un triangle, décrire le triangle	
10. Les trois côtés A , B , C d'un triangle étant donnés, décrire le triangle	I, 32
11. Étant donnés deux côtés A et B d'un triangle avec l'angle C opposé au côté B , décrire le triangle	
12. Les côtés adjacents A et B d'un parallélogramme étant donnés avec l'angle C qu'ils comprennent, décrire le parallélogramme	
13. Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné	III, 1
14. Par un point donné, mener une tangente à un cercle donné	III, 17
15. Incrire un cercle dans un triangle donné	IV, 4
16. Sur une droite donnée AB , décrire un segment capable de l'angle donné C	III, 33
17. Trouver le rapport numérique de deux lignes droites données AB , CD , si toutefois ces deux lignes ont entre elles une mesure commune	
18. Deux angles A et B étant donnés, trouver leur commune mesure s'ils en ont une, et de là leur rapport en nombre	

Les six premiers problèmes de la liste, ainsi que le dixième, se trouvent dans le premier livre des *Éléments* d'Euclide, mais les démonstrations de Le-

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

gendre sont en général différentes de celles d'Euclide. Les problèmes 7, 8, 9, 11 et 12 n'ont pas leur équivalent dans l'ouvrage d'Euclide. Avec l'énoncé n°10 ils constituent des problèmes de levés de plans, sujet que Legendre a pu enseigner à l'École militaire. Les énoncés 14, 15 et 16 correspondent à des problèmes des Livres III et IV des *Éléments* d'Euclide. Enfin, les énoncés 17 et 18 sont d'un genre différent : ce ne sont pas des constructions. Leurs solutions décrivent un algorithme appelé aujourd'hui algorithme d'Euclide, et décrit dans la proposition 2 du livre X de ses *Éléments*. Il permet de déterminer par construction le rapport en nombres de deux lignes droites ou de deux angles donnés. Lorsque les deux grandeurs sont incommensurables, l'algorithme est sans fin. Dans ce cas, Legendre explique que l'algorithme, une fois interrompu, fournit un rapport approché. Ces deux problèmes servent en fait de préliminaires au Livre III qui utilise les proportions de grandeurs. Legendre affirme dans ce dernier qu'on peut toujours « regarder [les] grandeurs comme des nombres », d'où il déduit que les proportions de grandeurs ont les mêmes propriétés arithmétiques que les proportions de nombres. Il renvoie par conséquent aux traités d'arithmétique et d'algèbre pour l'étude des propriétés des proportions :

En général, dans toutes les opérations qu'on fera sur les proportions, il faut toujours regarder les termes de ces proportions comme autant de nombres, chacun de l'espèce qui lui convient, et on n'aura aucune peine à concevoir ces opérations et les conséquences qui en résultent²⁷.

La liste de problèmes qui clôt le Livre II se termine donc par deux énoncés d'un genre différent des précédents dans la mesure où ce ne sont pas des problèmes de construction. Voyons maintenant la liste de problèmes annexée au livre III qui porte sur la mesure des surfaces :

- | | |
|--|--------|
| 1. Diviser une ligne droite donnée en autant de parties égales qu'on voudra, ou en parties proportionnelles à des lignes données | VI, 10 |
| 2. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données A, B, C | VI, 12 |
| 3. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données A et B | VI, 13 |

27. Legendre, *Op. Cit.*, p. 59.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

4. Diviser la ligne donnée AB en deux parties, de manière que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie	VI, 30
5. Par un point donné A dans l'angle donné BCD , tirer la ligne BD de manière que les parties AB, AD , comprises entre le point A et les deux côtés de l'angle, soit égales	
6. Faire un carré équivalent à un parallélogramme ou à un triangle donné	II, 14
7. Faire sur la ligne donnée AD un rectangle $ADEX$ équivalent au rectangle donné $ABFC$	I, 45
8. Trouver en lignes le rapport du rectangle de deux lignes données A et B au rectangle de deux lignes donnés C et D	
9. Trouver en lignes le rapport du produit de trois lignes données A, B, C au produit de trois lignes données P, Q, R	
10. Changer un polygone donné en un triangle équivalent	
11. Faire un carré qui soit égal à la somme ou à la différence de deux carrés donnés	
12. Construire un carré qui soit au carré donné $ABCD$, comme la ligne M est à la ligne N	
13. Sur le côté FG , homologue à AB , décrire un polygone semblable au polygone $ABCDE$	
14. Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable qui soit égale à leur somme ou à leur différence	
15. Construire une figure semblable à une figure donnée et qui soit à cette figure dans le rapport donné de M à N	
16. Construire une figure semblable à la figure P et équivalente à la figure Q	VI, 25
17. Construire un rectangle équivalent à un carré C , et dont les côtés adjacents fassent une somme donnée	
18. Construire un rectangle équivalent à un carré C , et dont les côtés adjacents fassent une différence donnée	
19. Trouver la commune mesure, s'il y en a une, entre la diagonale et le côté du carré	

Les quatre premiers énoncés se trouvent dans le Livre VI des *Éléments* d'Euclide, qui s'appuie sur la théorie des proportions développée dans le Livre V du même ouvrage. Les énoncés 6 et 7 sont présents dans les Livres II et I d'Euclide respectivement, c'est-à-dire qu'ils y possèdent chacun une solution

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

qui ne recourt pas à la théorie des proportions. Chez Euclide, la construction d'un carré de même aire qu'un triangle donné, ou quadrature du triangle, est une construction essentielle dans la mesure où elle rend possible la comparaison des aires de deux polygones quelconques en construisant simplement des carrés équivalents à chacun d'eux. La quadrature du triangle y est réalisée en construisant un rectangle équivalent au triangle, puis un carré, et se passe de la théorie des proportions. Legendre au contraire déduit cette construction de la celle d'une moyenne proportionnelle. Il exprime les aires des polygones par des formules arithmétiques, desquelles il déduit immédiatement que le côté du carré cherché est moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur du triangle donné. Avec les énoncés 12, 13, 15 et 16, dont certains n'ont pas d'équivalent dans les *Éléments* d'Euclide, les énoncés 6 et 7 sont des applications des constructions d'une quatrième proportionnelle, d'une moyenne proportionnelle, et du partage en moyenne et extrême raison établis par les problèmes n° 2 à n°4. L'énoncé 10 ne recourt pas à la notion de proportion, mais il convoque la notion d'aire abordée à partir du Livre III chez Legendre. Quant aux énoncés 14 - qui généralise le n°11 - 17 et 18, ils sont l'application directe respectivement des propositions n°11, n°23 et n°30 du Livre III. Jusque là, les problèmes de construction servent de toute évidence à mettre en application les théorèmes de ce Livre. Les propositions 8 et 9 viennent compléter les énoncés 17 et 18 de la liste précédente pour prouver que des rapports de surfaces et des rapports de volumes sont susceptibles d'être égalés à des rapports de lignes, et peuvent par conséquent eux aussi être « regardés » comme des rapports de nombres. Enfin, l'énoncé 19, comme les deux derniers énoncés de la liste précédente, n'est pas un problème de construction, mais une question qui n'a pas, en général, de solution exacte.

L'étude des trois premiers Livres de Legendre apporte des indications sur la place des problèmes dans l'ouvrage. Si l'on compare avec l'ouvrage d'Euclide, auquel Legendre se réfère, les problèmes de construction géométrique sont écartés de l'enchaînement déductif des propositions de géométrie. La façon dont Legendre les présente dans sa préface laisse entendre le caractère largement annexe de la présence de tels énoncés. Ainsi lorsqu'il écrit que les deux premiers Livres « sont terminés par la résolution de quelques problèmes concernant la construction des figures ». Nous pouvons dès lors nous demander pourquoi Legendre présente des problèmes, alors même qu'il est soucieux de concision. Nous pouvons répondre que les problèmes, en grande majorité des problèmes de construction, lui fournissent des occasions de mettre en œuvre les théorèmes. Cela a des conséquences sur la place de ces énoncés de

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

problèmes dans l'ouvrage et sur la résolution qui en est donnée. Nous avons indiqué des problèmes qui apparaissent comme application de théorèmes relatifs aux proportions de grandeurs, alors qu'ils sont démontrés plus tôt dans l'ouvrage d'Euclide et sans recourir à la théorie des proportions.

Par ailleurs, la présence de quelques énoncés qui ne sont pas des problèmes de construction montre que Legendre élargit la notion de problème en géométrie élémentaire.

1.3 Les *Éléments de Géométrie* de Lacroix (1798)

Lacroix écrit ses *Éléments de Géométrie* pour ses élèves de l'École centrale des quatre nations à Paris.

L'exigence pédagogique de Lacroix

Lacroix actualise dans ses ouvrages les contenus des ouvrages existants mais surtout il cherche à les adapter aux contraintes pédagogiques, qui constituent chez lui une préoccupation majeure²⁸. En témoignent les choix qu'il effectue pour son enseignement de l'algèbre à l'École centrale. Il y enseigne d'abord l'algèbre avec l'ouvrage de Clairaut plutôt qu'avec celui de Bézout, pourtant beaucoup plus répandu, car le plan de Clairaut est « le seul qui convient à l'enseignement de la science » en suivant la « démarche d'invention », c'est-à-dire « la marche nécessaire pour éclairer et pour encourager ceux qui commencent l'algèbre »²⁹. Mais après quelques années d'enseignement, Lacroix reconsidère ces principes et décide « qu'il était nécessaire de resserrer beaucoup la marche d'invention, et que, lorsque l'élève a passé les premières difficultés [...] il ne faut, pour l'engager à continuer, que lui présenter les matières dans l'ordre où elles naissent les unes des autres ». Une forte exigence pédagogique guide Lacroix dans la rédaction de ses manuels, qu'il écrit d'abord pour les Écoles centrales, dans un contexte par conséquent très différent de celui envisagé par exemple par Bézout. En 1799, Lacroix est reçu à l'Institut, et la qualité de ses ouvrages n'est pas étrangère à cette haute distinction.

Les *Éléments de géométrie* de Lacroix n'ont pas de visée professionnelle comme l'ouvrage de Bézout et ne poursuivent pas l'excellence logique et

28. Ehrhardt, Caroline, « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant, Sylvestre-François Lacroix », *Histoire de l'éducation*, n°123, 2009, p. 5-43.

29. Ehrhardt, *Op. Cit.*, p. 14.

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

déductive comme celui de Legendre. Ils se focalisent, nous l'avons vu, sur l'usage pédagogique qui pourra en être fait :

Livré de bonne heure aux travaux de l'enseignement, j'ai toujours tourné mes méditations sur les moyens de présenter les résultats de la science par les faces les plus simples et dans l'ordre le plus naturel³⁰.

Dans leur première édition, les *Éléments de géométrie* sont précédés de « Réflexions sur l'ordre à suivre dans ces éléments, sur la manière de les écrire et sur la méthode en mathématiques », réflexions qui sont reprises et complétées dans l'*Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier* en 1805. Ces textes contiennent de nombreux conseils aux professeurs sur la façon d'organiser son enseignement. Ils sont manifestement éclairés par la longue pratique de Lacroix, qui est, écrit-il, « guidé par l'expérience »³¹. Il défend la pratique des constructions géométriques à la règle et au compas :

Quoique je sache aussi bien que tout autre, que c'est sur la rigueur du raisonnement, et non sur l'exactitude des figures que repose la vérité géométrique, je crois cependant que l'exercice du tracé n'est pas moins nécessaire en Géométrie, que celui du calcul en Arithmétique³².

En comparant l'exercice du tracé en Géométrie avec la pratique du calcul en Arithmétique, Lacroix montre sa préoccupation pour les applications de la science géométrique. Les problèmes de construction sont des exercices propres à employer les propositions de géométrie.

Les problèmes dans l'ouvrage

Dans ses *Éléments de géométrie* de 1798, Lacroix se réfère aux Anciens pour la rigueur, à Arnauld pour l'ordre naturel des propositions — ici l'ordre de simplicité des figures —, et à D'Alembert pour la clarté du style³³. Il en appelle à l'évidence pour fonder les propositions de la géométrie, n'énonce pas d'axiome, car les idées premières sont évidentes, et tâche d'employer le

30. Lacroix, *Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*, Paris : Courcier, 1805, p. 191.

31. *Ibid.*, p. 337.

32. *Ibid.*, p. 335.

33. Lacroix, *Éléments de géométrie*, 3^e édition, p. v-ix.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

moins possible la réduction à l'absurde car par cette forme de raisonnement « on peut bien convaincre l'esprit, mais on ne l'éclaire point »³⁴, selon la formule d'Arnauld et Nicole dans *La logique ou l'art de penser*³⁵. Comme enseignant, il se concentre sur la compréhension des élèves davantage que sur la perfection logique ou épistémologique du discours.

L'ordre retenu par Lacroix pour l'exposition des propositions de géométrie est inspiré de celui employé par Arnauld dans ses *Nouveaux éléments de géométrie*. C'est l'ordre de simplicité des figures : lignes droites et triangles, puis cercles, polygones et enfin solides³⁶. Concernant la disposition des problèmes, il fait un choix opposé à celui de Legendre, en les introduisant tout au long de l'ouvrage. Il explique quelle place doivent occuper les problèmes dans les *Éléments de Géométrie* :

L'usage constant de proposer des problèmes aux élèves, m'a fait sentir l'inconvénient qu'il y aurait de présenter une section entière de théorèmes, et de renvoyer après, les problèmes qui en sont la suite. Cet arrangement, au moins très singulier, pour ne rien dire de plus, qui fait paraître le problème quand le théorème sur lequel il repose, et qu'il aurait éclairci ou confirmé, est déjà effacé de la mémoire, prive le lecteur des moyens de construire ses figures avec quelque soin³⁷.

Lacroix introduit les problèmes dès qu'ils peuvent être déduits des propositions démontrées, au contraire de Legendre, auquel il fait manifestement allusion ici. Les problèmes sont répartis au long de l'ouvrage, apparaissant dès que les propositions utilisées pour leur résolution ont été démontrées. En retour, ils viennent éclaircir et confirmer les théorèmes. Par exemple, le problème de construire un triangle lorsque ses trois côtés sont donnés vient éclaircir et confirmer le théorème établissant que deux triangles dont les trois côtés sont égaux chacun à chacun sont égaux dans toutes leurs parties, au sens où le tracé de la figure fait sentir qu'elle ne pourrait pas être décrite autrement. Les théorèmes et les problèmes sont alternés, les problèmes étant placés à la suite des théorèmes dont ils résultent, ou bien lorsqu'ils sont nécessaires pour la construction des figures. En voici la liste avec leur numéro

34. Lacroix, *Op. Cit.*, p. xxvij.

35. Arnauld, Nicole, *La logique ou l'art de penser*, paris : Savreux, 1662, p. 419.

36. Barbin, « The notion of Magnitude in Teaching : The new Elements of Arnauld and his inheritance », *International Journal for the History of Mathematics Education*, vol.4, n°2, 2009, pp. 1-18.

37. Lacroix, *Essai sur l'enseignement*, p. 334.

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

d'apparition dans l'ouvrage, qui n'est pas découpé en Livres successifs. Là encore, le numéro correspondant de la proposition dans les *Éléments* d'Euclide figure le cas échéant en vis-à-vis.

5. Deux droites étant données, trouver leur commune mesure, ou au moins le rapport approché de l'une à l'autre	
21. Les trois côtés d'un triangle étant donnés séparément, décrire le triangle	I, 22
23. Par un point donné, pris sur une ligne donnée, faire un angle qui soit égal à un angle donné	I, 23
24. Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de ce dernier un angle du premier et les deux côtés qui le comprennent	
25. Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de ce dernier un côté du premier et les deux angles adjacens	
29. Mener sur une ligne donnée une perpendiculaire qui la partage en deux parties égales	
30. Par un point donné sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite	I, 11
31. Par un point donné pris hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire à cette droite	I, 12
48. Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée	I, 31
49. Par un point donné pris hors d'une droite, en mener une autre qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné	
62. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données	VI, 12
68. Construire sur une droite donnée un triangle semblable à un triangle donné	
70. Diviser une droite donnée de la même manière qu'une autre est divisée	VI, 10
90. Construire sur une ligne donnée un polygone semblable à un polygone donné	VI, 18
101. Deux arcs du même cercle ou de cercles égaux étant donnés, trouver le rapport de leurs longueurs	
117. Élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne droite sans la prolonger	

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

118. D'un point donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle	III, 17
119. Par trois points, qui ne sont pas en ligne droite, faire passer une circonférence de cercle	IV, 5
124. Décrire un cercle qui touche en un point donné une droite donnée de position, et qui passe par un second point donné	
125. Décrire un cercle qui touche en un point donné un autre cercle donné, et qui passe par un second point donné	
126. Décrire sur une ligne donnée un cercle tel, que tous les angles, ayant leur sommet à sa circonférence, et s'appuyant sur cette droites, soient égaux à un angle donné; ou décrire un <i>segment</i> de cercle <i>capable</i> d'un angle donné	III, 33
132. Partager une ligne en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire, de manière que la plus grande des deux parties soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie	VI, 30
133. Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et qui touche une ligne droite indéfinie donnée de position	
136. Incrire un cercle dans un triangle donné, c'est-à-dire, décrire dans l'intérieur de ce triangle un cercle qui ne fasse qu'en toucher les trois côtés	IV, 4
141. Un polygone d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit au cercle, inscrire dans le même cercle un second polygone d'un nombre de côtés double de celui des côtés du premier et trouver la valeur de l'un des côtés du second	
144. Construire un carré sur une ligne donnée	I, 46
145. Incrire dans un cercle les polygones de 4, 8, 16, 32, 64, etc. côtés	IV, 6
146. Incrire dans un cercle les polygones de 3, 6, 12, 24, 48, etc. côtés	IV, 15
147. Incrire dans un cercle les polygones de 5, 10, 20, 40, etc. côtés	IV, 11
149. Un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit dans un cercle, circoncrire au même cercle un polygone régulier du même nombre de côtés; et réciproquement le polygone régulier circonscrit étant donné, construire le polygone inscrit	
156. Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre	

III.1 Les *Éléments de géométrie* en 1800 : Bézout, Legendre et Lacroix

164. Transformer un polygone en un autre qui ait un côté de moins, et qui soit équivalent	
172. Transformer un parallélogramme ou un triangle en un carré	II, 14
181. Construire un polygone semblable à un autre, et dont l'aire soit dans un rapport donné avec celle du premier, ou soit équivalente à un carré donné	VI, 25

Les énoncés n°5 et n°101 ne sont pas des constructions géométriques ; ils traitent du rapport de deux lignes droites et du rapport de deux angles, dans l'intention, comme chez Legendre, de manipuler les rapports de grandeurs comme des rapports de nombres. Le n°156, préparé par les énoncés des n°141 et n°149, donne une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre ; il est traité dans le Livre IV des *Éléments* de Legendre. La plupart des autres énoncés ont leur équivalent dans les *Éléments* d'Euclide, dans le livre I puis dans le livre VI, pour ce qui concerne uniquement les lignes, et dans les livres III et IV. L'ordre n'est pas le même notamment parce que la proportion des lignes est abordée dès le début de l'ouvrage de Lacroix, alors qu'elle est exposée dans le Livre V chez Euclide. D'autre part, Lacroix suit l'ordre de simplicité des lignes d'Arnauld et non l'ordre déductif d'Euclide.

Les cas d'égalité des triangles donnent lieu à plusieurs énoncés de problèmes de construction, les numéros 21, et 23 à 25. Trois énoncés, les n°124, n°125 et n°133, demandent de décrire un cercle en respectant certaines conditions de contact. Ces énoncés se trouvent aussi dans le *Cours* de Bézout. Le problème des trois cercles, dont nous avons vu le succès dans les ouvrages abordant la géométrie rationnelle, n'est pas résolu ici.

La relation entre théorèmes et problèmes est bien illustrée par la notion de triangle. Le triangle étant défini comme l'espace enfermé par trois droites, Lacroix commence par démontrer deux théorèmes établissant des cas d'égalité des triangles. Le premier établit que « lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, ils sont égaux dans toutes les autres parties », et le deuxième établit que « lorsque deux triangles ont, chacun à chacun, un côté égal adjacent à deux angles égaux, ces triangles sont parfaitement égaux »³⁸. À la suite de ces théorèmes viennent quatre problèmes, les numéros 21, 23, 24 et 25 ci-dessus. La solution de ces problèmes est l'occasion d'exercer le tracé géométrique et d'employer les théorèmes vus

38. Lacroix, *Éléments de géométrie*, 7^e édition, Paris : Courcier, 1808, p. 10.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

précédemment.

Lacroix introduit donc dans ses *Éléments* des énoncés de problèmes, le plus souvent des problèmes de construction à la règle et au compas, en relation avec les théorèmes. L'organisation des théorèmes et des problèmes dans l'ouvrage poursuit un objectif pédagogique. Les problèmes sont dès lors placés à la suite des théorèmes, qu'ils viennent en quelque sorte compléter pour éclaircir les notions et les démonstrations en jeu.

1.4 Conclusion

Dans les trois ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire de Bézout, Legendre et Lacroix, la place et le rôle des problèmes sont extrêmement différents de ce qu'ils sont chez Euclide.

L'ouvrage de Bézout vise la formation professionnelle des officiers militaires. Les propositions de géométrie y sont organisées en principes, conséquences et applications. Les problèmes de construction font partie des applications qui permettent aux élèves de se familiariser avec les propositions, dans le but, à terme, de savoir les mettre en œuvre pour la pratique de l'art militaire. Dans l'ouvrage de Legendre, les problèmes sont des corollaires des théorèmes, annexes au corpus logiquement cohérent et autonome constitué par les seuls théorèmes, dont ils illustrent la mise en œuvre. Enfin Lacroix envisage les problèmes en interaction avec les théorèmes pour l'enseignement de la géométrie. Chez lui, la pratique du tracé géométrique et la résolution des problèmes sont des occasions pour l'élève d'approfondir sa compréhension des théorèmes, qui doivent par conséquent alterner avec les constructions.

Les trois ouvrages comprennent des constructions géométriques à la règle et au compas. Celles-ci représentent la grande majorité des problèmes chez Legendre et Lacroix. Mais l'imbrication entre problèmes de construction et théorèmes telle qu'elle se trouve dans les *Éléments* d'Euclide n'a plus cours dans ces ouvrages. Les constructions à la règle et au compas ne sont plus constitutives de la connaissance des figures. Pour autant, elles n'ont pas disparu, mais elles jouent un rôle différent.

2 Les éditions successives du *Cours de Géométrie élémentaire* de Vincent (1826-1844)

Nous allons comparer maintenant, du point de vue de l'organisation des propositions et tout particulièrement de la place et du rôle des problèmes, les ouvrages précédents avec un ouvrage d'enseignement publié dans la deuxième moitié de notre première période. Justement, il s'avère que les éditions successives du *Cours de géométrie élémentaire*³⁹ de Alexandre Joseph Hydulphe Vincent (1797-1868) accordent une importance de premier plan aux problèmes, à leur rôle et à leur organisation dans l'ouvrage.

Vincent a fait ses études aux collèges de Hesdin, à Douai, et d'Amiens, où il était boursier de sa ville natale. Il obtient l'agrégation de sciences à l'École normale en 1820. Devenu professeur, il enseigne d'abord la physique et les mathématiques au Lycée de Reims. Il publie plusieurs articles sur les logarithmes dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, ainsi que son *Cours*, puis se trouve nommé en 1826 à Paris, d'abord au collège Rollin, puis au collège Bourbon et enfin à Saint-Louis, où il deviendra professeur titulaire de mathématiques spéciales⁴⁰. Il a eu à l'École normale les professeurs prestigieux Lacroix, Francœur et Hachette⁴¹, qui sont fortement liés à l'École polytechnique et à l'enseignement de Monge. Lacroix est adjoint de Monge pour l'enseignement de la géométrie descriptive en 1794 à l'École normale de l'an III, et enseigne à l'École polytechnique à partir de 1799. Louis Benjamin Francœur (1773-1819), polytechnicien de la première promotion en 1794, a été répétiteur à l'École polytechnique auprès de Lacroix puis examinateur pour cette École à partir de 1804; il a rédigé en 1809 un *Cours complet de mathématiques pures*⁴² plusieurs fois réédité. Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) est adjoint de Monge à l'École polytechnique à sa création, pour la géométrie descriptive. Il est l'auteur d'un *Supplément*

39. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des élèves qui se destinent à l'École polytechnique ou aux Écoles militaires*, Reims : Delaunoy et Paris : Bachelier, 1826.

40. Wallon, H., in *Le correspondant*, tome 77^e, Paris : Douniol, 1869, p. 532-537, et de Fontaine de Resbecq, in *Mémoires sur la société impériale des sciences de l'agriculture et des arts de Lille*, Lille : Danel et Paris : Didron, p. 561-570.

41. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, Paris : Bachelier, 1832, p. xv.

42. Francœur, Louis Benjamin, *Cours complet de mathématiques pures*, 2 vol., Paris : V^{ve} Bernard, 1809.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

de la *géométrie descriptive*⁴³ en 1812 et plus tard d'un *Traité de géométrie descriptive*⁴⁴. Il rédige entre 1804 et 1815 la *Correspondance sur l'École polytechnique*, journal qui publie régulièrement des travaux scientifiques et des informations générales sur cette École.

Comme mathématicien et musicologue, Vincent sera élu membre de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres en 1850. Son *Cours de Géométrie Élémentaire* est publié en 1826, puis réédité en 1832, 1834, 1837, et 1844. Chacune de ces rééditions connaît des changements notables par rapport à la précédente, tout particulièrement en ce qui concerne la place des problèmes. L'ouvrage est bien reçu par ses pairs, comme en atteste Vincent dans la préface de sa deuxième édition : « plusieurs professeurs s'étant empressés d'en faire le texte de leurs leçons, ont bien voulu me communiquer les résultats de leur expérience ». D'autres témoignages confirment ce succès : le *Cours de géométrie élémentaire* « fit longtemps concurrence à [la Géométrie] de Legendre », écrit la revue *Le correspondant* en 1869⁴⁵. Stéphane Ajasson de Grandsagne, littérateur cultivé, ancien élève de Cuvier et directeur de la bibliothèque populaire, se réfère à « l'excellente géométrie » de M. Vincent dans ses propres *Éléments de géométrie* de 1833⁴⁶. Gouré, professeur au Collège royal de Toulon, le cite dans ses *Éléments de géométrie* de 1836⁴⁷, ainsi qu'Eugène Catalan dans ses *Éléments de géométrie* de 1843⁴⁸. C'est donc manifestement un ouvrage qui a fait référence, et Bobillier dédie à Vincent sa *Géométrie*. Rouché et Comberousse, en 1864, lui empruntent encore une proposition dans leur *Traité de géométrie élémentaire*⁴⁹.

La première édition du *Cours de géométrie élémentaire* de Vincent contient 350 pages, organisées en cinq Livres, eux-mêmes partagés en chapitres puis en paragraphes. Elle contient plus de 150 problèmes rien que pour la géométrie plane, contre une quarantaine chez Legendre ou une trentaine chez Lacroix. Nous allons étudier comment ces énoncés sont disposés dans l'ou-

43. Hachette, *Supplément de la géométrie descriptive*, Paris : Klosterman, 1812.

44. Hachette, *Traité de géométrie descriptive*, Paris : Corby, 1822.

45. *Op. Cit.*, p. 533.

46. Ajasson de Grandsagne, Jean Baptiste François Étienne dit Stéphane, *Éléments de géométrie d'après les Éléments de Clairaut*, Bibliothèque populaire, 1833.

47. Gouré, *Éléments de géométrie et de trigonométrie suivis d'un précis de l'arpentage et du levé des plans*, Paris : Bachelier, 1836.

48. Catalan, *Éléments de géométrie*, Paris : Bachelier, 1843.

49. Rouché et Comberousse, *Traité de géométrie élémentaire*, Paris : Gauthier-Villars, 1864.

III.2 Les éditions successives du *Cours de Géométrie élémentaire* de Vincent (1826-1844)

vrage, et comment cet important corpus de propositions est organisé. Nous identifierons quels énoncés sont désignés par le terme de problème, et quelle relation entretiennent ces problèmes avec les théorèmes de l'ouvrage.

2.1 Où placer les problèmes dans l'ouvrage ?

Vincent pose la question de la position des problèmes dans l'ouvrage dès l'avertissement. Il souhaite « grouper les problèmes par analogie », au même titre que les théorèmes. Mais il est impossible de concilier cette exigence avec celle de placer les problèmes à la suite des théories auxquelles ils se rapportent, car « la solution des trois quarts des problèmes de la géométrie repose sur des théories tout-à-fait étrangères à leur énoncé »⁵⁰. Il donne l'exemple des problèmes sur la construction des triangles dont certains demandent qu'ait été traitée auparavant la théorie du cercle.

Dans la première édition de 1826, Vincent a donc regroupé les problèmes à la fin de l'ouvrage, à la manière, écrit-il, de Thomas Simpson, professeur de mathématiques à Dublin au siècle précédent⁵¹, de Emmanuel Develey, professeur de mathématiques à Lausanne⁵², ou encore de Legendre.

Dans l'édition suivante, datée de 1832, « presque en entier dans une rédaction nouvelle »⁵³, le principal changement concerne les problèmes, dont les énoncés apparaissent cette fois-ci plus tôt. En fait, Vincent indique à la fin de chacun des chapitres les numéros des problèmes qui peuvent désormais être résolus, tandis que leurs énoncés sont regroupés à la fin de chacune des parties consacrées à la géométrie plane et à la géométrie dans l'espace. Cette organisation évite aux professeurs qui utilisent l'ouvrage pour leur classe la tâche d'aller rechercher eux-mêmes les énoncés que les élèves sont en mesure de résoudre au fur et à mesure de leur avancée dans la théorie. Autre changement dans cette deuxième édition : pour que les problèmes de construction à la règle et au compas puissent être abordés rapidement, Vincent traite des propriétés du cercle en même temps que des propriétés des figures rectilignes :

La construction de la plupart des problèmes exigeant l'emploi du *compas* en même temps que celui de la *règle*, le classement des problèmes suivant l'ordre des théories eût été impossible à exécuter,

50. Vincent, *Op. Cit.*, préface.

51. Simpson, Thomas, *Elements of geometry*, London : Nourse, 1760.

52. Develey, Isaac Emmanuel Louis, *Éléments de géométrie*, Paris : Courcier, 1812.

53. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, préface.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

si je n'avais traité des propriétés du *cercle* en même temps que de celles des figures *rectilignes* [...] La division en figures rectilignes et figures curvilignes n'est donc plus la division principale de l'ouvrage [et cette] classification [est] bien plus philosophique⁵⁴.

La 3^e édition, deux ans plus tard, propose à nouveau des changements et « le plus notable est encore relatif à la classification et au placement des problèmes, objet important pour faciliter l'étude et la rendre plus attrayante »⁵⁵. Cette fois-ci les problèmes sont disposés au long de l'ouvrage, à la fin de chaque chapitre. Dans la 5^e édition enfin, les problèmes sont réunis en un dernier chapitre à la fin de chacun des quatre livres qui constituent l'ouvrage.

La place des problèmes dans l'ouvrage est donc une préoccupation majeure de Vincent, au point qu'il modifie l'ordre d'exposition des théorèmes pour pouvoir résoudre certains problèmes plus tôt. Il éprouve des difficultés à concilier la volonté d'un ordre pédagogique qui fasse suivre les théorèmes des problèmes qui en dépendent, avec la volonté d'un ordre épistémologique qui regroupe les problèmes présentant des analogies.

2.2 La distinction entre problème « graphique » et problème « numérique »

La réflexion renouvelée sur la répartition des problèmes dans l'ouvrage indique l'importance accordée par Vincent aux problèmes. Cet intérêt pour les problèmes s'accompagne d'une réflexion sur la nature même de ces énoncés appelés problèmes, que l'auteur entreprend de classer en catégories distinctes.

Vincent distingue d'abord les « *problèmes graphiques* ou relatifs aux *figures* » et « les *problèmes numériques* ou relatifs à l'*étendue* »⁵⁶. Les premiers consistent à tracer une figure vérifiant certaines conditions données. Nous avons déjà rencontré de nombreux exemples de tels énoncés : tracer une perpendiculaire, une parallèle, partager une droite ou un angle en deux parties égales, etc. Les deuxièmes, écrit Vincent, « consistent en applications particulières des propositions générales relatives à la mesure des différentes sortes d'étendue » et rentrent « sous certain point de vue, dans le domaine de l'*Arithmétique* ». De tels énoncés ne se trouvaient pas dans les ouvrages

54. Vincent, *Op. Cit.*, préface, p. vii.

55. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 3^e édition, préface.

56. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, p. 26.

III.2 Les éditions successives du *Cours de Géométrie élémentaire* de Vincent (1826-1844)

de Legendre et de Lacroix. Il en a emprunté certains au *Cours de mathématiques*⁵⁷ rédigé par Puissant et trois autres professeurs de mathématiques pour l'usage de l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, en remplacement de l'ouvrage de Bézout. La partie sur la géométrie plane de ce *Cours* se termine, en effet, par un cinquième chapitre intitulé « Applications des principes » et décliné en « Solutions graphiques » et en « Solutions par le calcul ». Voici un exemple de problème numérique dans le *Cours* de Vincent :

Une salle a $4^{\text{m}},87$ de hauteur, $15^{\text{m}},76$ de longueur, et $8^{\text{m}},24$ de largeur ; on veut la tapisser avec des rouleaux de papier dont la largeur est de $0^{\text{m}},6$: on demande combien de mètres en longueur il faudra employer, en supposant que le lambris ait $0^{\text{m}},37$ de hauteur⁵⁸.

La présence de ces problèmes numériques explique en partie le nombre plus élevé de problèmes dans le *Cours* de Vincent que dans les *Éléments* de Legendre ou de Lacroix. Il en doit les énoncés à la collaboration de quelques élèves de ses classes de Lycée⁵⁹. Mais il intègre aussi, toujours en comparaison avec les ouvrages de Legendre et de Lacroix, de nouveaux énoncés de problèmes graphiques, notamment des problèmes de distances inaccessibles⁶⁰, et, dès la deuxième édition, une longue liste de problèmes de contacts qui aboutissent à la résolution du problème des trois cercles. En voici deux exemples :

- 350. Mesurer une distance dont l'extrémité n'est point accessible.
- 368. Mener une droite tangente à deux cercles donnés⁶¹.

Les problèmes graphiques et numériques sont réunis sous la dénomination de « problèmes pratiques », dont la résolution « consiste toujours dans des opérations manuelles, ou dans des applications particulières de propositions démontrées ». Vincent distingue ces problèmes pratiques des « *problèmes théoriques* », qui fournissent quant à eux de nouvelles « connaissances générales » et qu'il identifie à des théorèmes. D'ailleurs « il n'est aucune proposition qu'on ne puisse, en intervertissant l'ordre des idées, transformer en

57. Allaize, Boudrot, Billy, Puissant, *Cours de mathématiques à l'usage des Écoles impériales militaires*, Paris : Magimel, 1813.

58. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 1826, p. 310.

59. Vincent, *Op.Cit.*, p. v.

60. Sur les problèmes de distances inaccessibles, voir : Bénard, Dominique, « Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible », in Barbin, E. (dir.), *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris : Ellipses, 2014, p. 27-56.

61. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, p. 294 et p. 310.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

une question à résoudre, *et vice-versa* ». Vincent écarte de la catégorie des problèmes les énoncés qui visent à établir de nouvelles connaissances générales. Les problèmes sont circonscrits au registre des applications particulières, auxquelles il accorde une importance de premier ordre : « il est important que les élèves soient habiles à appliquer des connaissances qui, s'ils en négligeaient la *pratique*, leur deviendraient à peu près inutiles ». Quant aux quelques énoncés des ouvrages de Legendre et de Lacroix qui n'étaient pas des constructions géométriques, quoique dénommées « problèmes », ils apparaissent ici dans la théorie, avec les théorèmes.

Il reste à expliquer pourquoi Vincent emploie le terme de « graphique » pour désigner des énoncés jusqu'ici appelés des problèmes de construction. Vincent aborde, contrairement à Legendre et Lacroix, la question des instruments utilisés pour réaliser les constructions sur le papier. Il décrit au début de l'ouvrage la règle et le compas, ainsi que leur mode d'emploi pour tracer des droites et des cercles. Il décrit également, pour les situations où les dimensions des figures sont plus grandes, le cordeau tendu ou les jalons pour faire une droite, et le cordeau fixé par une extrémité pour faire un cercle. Vincent renvoie ensuite à une note située en fin d'ouvrage pour la description des instruments de la géométrie pratique :

On fait encore usage, dans la *Géométrie pratique*, de quelques autres instruments que ceux dont il vient d'être question ; mais leur emploi n'a pour but que d'abrégé ou de simplifier des opérations *graphiques* que l'on pourrait, à la rigueur, exécuter avec la règle et le compas seulement ⁶² .

Dans cette note, Vincent remarque que le tracé graphique avec les instruments n'est pas « tout-à-fait rigoureux ». Il est même nécessairement imprécis, parce que les instruments eux-mêmes présentent des aspérités, aussi petites soient-elles, et aussi parce que le trait du tracé a forcément une largeur. Cela étant dit, il décrit d'autres instruments pouvant servir au tracé des figures : l'équerre et la fausse équerre pour faire un angle ou le reporter, le rapporteur et le graphomètre pour mesurer un angle, les échelles et le vernier pour partager ou mesurer une droite avec précision, le compas de proportion et de réduction pour déterminer des lignes proportionnelles, la planchette pour effectuer les levés de plans, le fil à plomb et le niveau pour obtenir des lignes horizontales et verticales.

62. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, p. 583.

III.2 Les éditions successives du *Cours de Géométrie élémentaire* de Vincent (1826-1844)

Quel usage Vincent fait-il des instruments pour ce qui concerne les problèmes graphiques en géométrie dans l'espace ? Ces problèmes sont répartis en trois parties. La première concerne les droites et les plans. Les énoncés en sont des énoncés de géométrie descriptive, dont les premiers éléments ont été abordés dans la théorie. La deuxième traite surtout des angles trièdres, composés dans l'espace par trois angles adjacents issus d'un même point. Les problèmes consistent à trouver certains éléments de ces angles — faces, angles dièdres entre ces faces — lorsque d'autres sont connus, et sont résolus par des rabattements. Les énoncés de ces deux premières parties se ramènent par conséquent à des constructions planes. Il en va différemment des énoncés de la troisième partie, qui sont des problèmes de géométrie de la sphère. Vincent considère qu'un cercle peut être tracé sur une sphère, lorsqu'on connaît son centre et un de ses points, « de même que dans un plan »⁶³. Le compas permet encore de prendre la mesure de la distance rectiligne entre deux points de la sphère. Les problèmes de la géométrie plane peuvent dès lors être transposés à la géométrie sphérique. En voici quelques exemples :

Par trois points donnés sur une sphère, mener une circonférence de cercle.

Tracer une circonférence de grand cercle tangente à deux petits cercles donnés⁶⁴.

Vincent accorde une importance essentielle, dans son *Cours*, aux problèmes, conçus comme applications de la théorie. Dans ce cadre, les problèmes graphiques désignent des problèmes de construction dont les tracés doivent être effectués avec des instruments. Cette conception le conduit à décrire les instruments utilisés, la règle et le compas, mais aussi plusieurs instruments attachés à la géométrie pratique, et à en décrire les usages.

2.3 Grouper les problèmes par analogie

Vincent souhaite grouper les problèmes « par analogie » : de quelle analogie s'agit-il ? Ce groupement ne s'arrête pas à la distinction dont il a été question entre « *problèmes graphiques* ou relatifs aux *figures* » et « *problèmes numériques* ou relatifs à l'*étendue* ». Il répond à l'intention de ne pas séparer des énoncés qui possèdent des rapports d'analogie. Autant que « le lien qui unit entre elles les propositions », c'est-à-dire ici les théorèmes, il lui importe

63. *Ibid.*, p. 546.

64. *Ibid.*, p. 548.

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

de ne pas rompre « le lien non moins intime qui forme comme un seul faisceau des principales applications qu'on peut en faire [de ces propositions] ». Vincent conçoit des liens tant entre les propositions de géométrie qu'entre les problèmes qui en sont les applications. Ces liens ne sont pas de nature déductive, mais thématique. Les énoncés regroupés portent sur une même espèce de figures (polygone, triangle, quadrilatère), de relation entre figures (perpendiculaires, parallèles, égales, semblables), ou encore de grandeurs (aire, volume). La liste suivante des problèmes de la première édition témoigne de ce regroupement selon de telles thématiques :

- Ch I : Problèmes et applications relatifs aux figures
 1. Problèmes sur les perpendiculaires, les parallèles, les angles, etc.
 2. Problèmes sur la division des droites en parties égales, et sur les lignes proportionnelles
 3. Problèmes sur la construction des polygones
 4. Problèmes sur les aires des figures rectilignes
 5. Problèmes sur le cercle et sur les polygones réguliers inscrits et circonscrits
 6. Problèmes sur les droites, les plans, etc., considérés dans l'espace
 7. Problèmes sur la sphère
- Ch II : Problèmes et applications relatifs à l'étendue
 1. Problèmes sur la mesure des lignes
 2. Problèmes sur les aires des figures rectilignes
 3. Autres Problèmes sur les aires des figures rectilignes
 4. Problèmes sur le cercle
 5. Problèmes sur les volumes des polyèdres
 6. Problèmes sur les corps ronds
 7. Autres problèmes sur les corps ronds

Ce ne sont du reste pas seulement les problèmes qui sont classés de cette façon, mais l'ensemble du *Cours* de Vincent qui est découpé en chapitres thématiques, eux-mêmes déclinés en paragraphes. Cette organisation conduit l'auteur à regrouper les énoncés des problèmes selon leurs rapports d'analogie, chaque groupe de problèmes possédant une cohérence propre qui justifie sa constitution. Dans les éditions successives, les groupes opérés varient au sens où certains sont réunis, ou déplacés, mais le groupement reste établi

III.2 Les éditions successives du *Cours de Géométrie élémentaire* de Vincent (1826-1844)

selon l'espèce de figure, de relation entre figures ou de grandeur. De nouveaux groupes apparaissent, comme, dans la 2^e édition, les problèmes sur les contacts.

2.4 Classement des problèmes et classement des théorèmes

La distinction établie dans la première édition entre problèmes graphiques relatifs aux figures et problèmes numériques relatifs à l'étendue est élargie dans la deuxième édition à l'ensemble de l'ouvrage, c'est-à-dire aux théorèmes. On peut se demander comment la distinction entre des problèmes de construction avec des instruments et des problèmes de calcul numérique sur des grandeurs peut s'étendre à des théorèmes de géométrie.

Dans la première édition, les quatre premiers livres abordaient successivement la ligne droite, le cercle, les plans et les corps ronds. Quant au cinquième Livre, dédié aux problèmes, il ne suit pas strictement cet ordre des figures, mais se compose comme nous l'avons vu de deux chapitres, intitulés « Problèmes et applications relatifs aux figures » et « Problèmes et applications relatifs à l'étendue ». La 2^{ème} édition est articulée en quatre livres, intitulés cette fois-ci « Des figures considérées dans un plan », « De l'étendue considérée dans un plan », « Des figures considérées dans l'espace » et « De l'étendue considérée dans l'espace ». Nous constatons que la dichotomie entre figures et étendue vient compléter la séparation entre plan et espace pour structurer complètement l'ouvrage en quatre Livres, plan qui sera maintenu jusqu'à la 5^{ème} édition. Voilà comment Vincent décrit la division de l'ouvrage à laquelle il aboutit :

Nous examinerons spécialement dans le premier livre celles des propriétés de la ligne droite et du cercle, dans lesquelles on fait abstraction de la mesure de l'étendue. Ainsi nous y éviterons l'emploi des proportions et de toute relation numérique autre que celles qui se rattachent à l'égalité absolue des figures.

Le deuxième livre présentera au contraire l'exposition des propriétés de ces mêmes figures, qui dépendent plus particulièrement du calcul numérique. Ainsi, par exemple, la théorie des lignes proportionnelles, celle de la similitude des figures planes qui en dépend, la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, la

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

mesure des aires des figures planes⁶⁵.

Nous voyons que la distinction est faite selon l'emploi ou non des proportions de grandeur, que l'auteur nomme « calcul numérique » car, comme Legendre et Lacroix, il opère sur les grandeurs comme sur les nombres, selon les règles de l'arithmétique.

La réflexion sur la classification des problèmes en problèmes relatifs aux figures et problèmes relatifs à l'étendue, réalisée pour la 1^{ère} édition, a ainsi été élargie dans l'édition suivante pour structurer les théorèmes de l'ouvrage selon que leur démonstration recourt ou non à la proportion des figures. Cette division paraît à l'auteur « plus nette et plus tranchée », et conduit par conséquent « à une classification bien plus philosophique »⁶⁶. Vincent abandonne l'ordre de simplicité des figures d'abord adopté dans la 1^{ère} édition pour une classification des théorèmes qui répond à celle d'abord réalisée sur les problèmes. Il s'agit d'une classification différente puisque la distinction entre problème graphique et problème numérique est indépendante de l'emploi ou non des proportions. Mais elle en reprend les termes de « figure » et d'« étendue » pour désigner les deux classes de théorèmes.

Cette distinction entre deux classes de propriétés des figures fait écho à la spécification par Poncelet des propriétés projectives des figures, elles-mêmes divisées entre propriétés graphiques et propriétés métriques. Cependant nous voyons que le classement que réalise Vincent est différent.

2.5 Conclusion

Vincent attache une importance de tout premier plan aux problèmes dans son *Cours de géométrie*. Il recherche au long de ses rééditions la meilleure place à leur attribuer au sein de l'ouvrage, dont il poursuit avant tout l'efficacité pédagogique. Il précise la notion de problème en distinguant trois espèces de problèmes : les problèmes graphiques, les problèmes numériques et les problèmes théoriques. Les deux premiers sont des applications de la théorie, ils en montrent l'utilité. Les problèmes graphiques sont relatifs à la construction des figures avec les instruments de la géométrie, et les problèmes numériques sont relatifs à des calculs arithmétiques sur des mesures. Les troisièmes sont considérés comme des théorèmes.

Les problèmes sont regroupés selon des rapports d'analogie qui tiennent

65. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, p. 20.

66. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, p. vij.

au type de figure, de grandeur ou de relations entre les figures. Les groupes constitués ont une cohérence de nature thématique qui en défend l'éparpillement.

Pour disposer les problèmes dans l'ouvrage, l'auteur s'attache ainsi à concilier le placement des problèmes à la suite des théories dont il dépendent avec le refus de séparer les problèmes groupés par analogie. Les réflexions élaborées dans ce cadre amènent Vincent à revoir l'organisation des théorèmes, et ce de deux façons.

D'abord la nécessité de pouvoir proposer rapidement des problèmes à résoudre aux élèves le conduit à traiter tôt dans l'ouvrage de la théorie du cercle.

Ensuite, le classement des problèmes dès la première édition en problèmes relatifs aux figures et problèmes relatifs à l'étendue est élargi à un classement des théorèmes selon qu'ils emploient ou non pour leur démonstration la proportion des grandeurs, classement qui reprend la terminologie utilisée pour les problèmes, bien qu'il soit de nature différente.

3 Conclusion

Nous avons montré, dans quatre ouvrages largement répandus pour l'enseignement secondaire de la géométrie dans ce premier tiers du XIX^e siècle, la diversité des choix opérés pour organiser les propositions de géométrie. En particulier, la place des problèmes de construction à la règle et au compas dans ces ouvrages est très différente, notamment en comparaison avec l'imbrication entre théorèmes et problèmes telle qu'elle se trouve dans les *Éléments* d'Euclide.

Bézout organise ses *Éléments de géométrie* en principes, conséquences et applications. Les problèmes de construction à la règle et au compas appartiennent aux applications, qui contiennent aussi des théorèmes à démontrer et des exercices de l'art militaire sur le terrain.

Legendre isole les problèmes de construction à la fin des Livres, qui ne contiennent que les théorèmes organisés de manière déductive.

Lacroix, au contraire, alterne théorèmes et problèmes de construction dans un but pédagogique de meilleure intelligence des théorèmes, et dans l'ordre de simplicité des lignes.

Quant à Vincent, il souhaite comme Lacroix appliquer la théorie rapidement par la résolution de problèmes, mais dans le même temps il veut grou-

CHAPITRE III. DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

per les problèmes par analogie thématique. Cette double exigence le conduit une réorganisation des théorèmes de façon symétrique à celle des problèmes. Ceux-ci sont séparés entre problèmes « graphiques », terme employé en référence à l'emploi des instruments, relatifs aux figures, et problèmes numériques de calcul arithmétiques sur les mesures des grandeurs, relatifs à l'étendue. De même, les théorèmes sont séparés entre théorèmes sur les figures et théorèmes sur l'étendue, selon qu'ils recourent ou non à la théorie des proportions. L'ordre de simplicité des lignes retenu pour la première édition de son *Cours de géométrie* est abandonné au profit d'une classification des théorèmes selon qu'ils recourent ou non aux proportions de grandeurs.

CHAPITRE IV

LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

Outre les ouvrages d'enseignement décrits dans les chapitres précédents, les premières décennies du XIX^e siècle voient la publication d'ouvrages essentiellement constitués de listes de problèmes à résoudre. Ces ouvrages sont écrits par des enseignants et traduisent l'importance prise par les problèmes dans l'enseignement de la géométrie. Cette importance, nous l'avons dit, correspond à des intentions pédagogiques, mais aussi à des exigences d'ordre institutionnel, avec, en particulier, la place des problèmes dans l'admission aux Écoles du gouvernement et au concours du baccalauréat .

Dans quel but sont constitués ces recueils dont certains connaissent un véritable succès éditorial ? Les problèmes y sont-ils organisés et comment ? De quelle nature sont ces énoncés ? Est-il question dans ces recueils de méthode pour résoudre les problèmes ? Enfin, d'où proviennent les énoncés qui figurent dans ces ouvrages, et comment circulent-ils d'un recueil à un autre ?

Deux journaux de la période comprennent également des problèmes. La *Correspondance sur l'École polytechnique*, publiée de 1804 à 1816 par Jean Nicolas Pierre Hachette, retranscrit des travaux réalisés à l'École, et dans ce cadre expose la résolution de certains problèmes de géométrie. La solution des sujets donnés au concours général de mathématiques y est parfois exposée. Les *Nouvelles annales de mathématiques pures et appliquées*¹ publiées mensuellement par Gergonne de 1810 à 1832, ont vocation à diffuser auprès des géomètres les progrès des mathématiques pures. Elles publient dans chaque numéro un ou plusieurs théorèmes à démontrer et problèmes à résoudre dont

1. Gérini, Christian, « Les "Annales" de Gergonne, apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques », thèse de philosophie des sciences, Aix-Marseille, 2000.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

les solutions sont publiées dans les numéros suivants, pour « provoquer chez les jeunes géomètres une utile et louable émulation ». Nous serons amenés, le cas échéant, à faire des liens entre les problèmes résolus dans ces journaux, et ceux que nous trouvons dans nos recueils.

1 Lamé et Duhamel : deux conceptions différentes de la généralité

Nous commençons par deux ouvrages qui ne sont pas, à proprement parler, des ouvrages de problèmes, mais dans lesquels les auteurs articulent méthodes de résolution et problèmes : l'*Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie*² de Gabriel Lamé et les *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*³ de Antoine Reynaud et Jean-Marie Duhamel, publiés à cinq ans d'intervalle, en 1818 et 1823. Les méthodes qui y sont décrites sont d'un genre différent, notamment quant à la conception de la généralité qu'elles portent.

1.1 L'*Examen* de Gabriel Lamé (1818) : la notion de méthode particulière

Gabriel Lamé appartient à la promotion de l'École polytechnique de 1814 congédiée en 1816 par Louis XVIII pour indiscipline⁴. Il doit donc momentanément enseigner les mathématiques pour subvenir à ses besoins, et publie, en 1818, un ouvrage qu'il adresse aux professeurs, intitulé *Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie*, et qui contient de nombreux problèmes résolus de manière originale :

J'abandonne cette faible production à la sage critique des professeurs ; j'espère qu'ils y trouveront quelques principes généraux pour la solution des problèmes⁵.

2. Lamé, Gabriel, *Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie*, Paris : V^o Courcier, 1818.

3. Reynaud, Antoine André Louis, et Duhamel, Jean Marie Constant, *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*, Paris : Bachelier, 1823.

4. Barbin, Evelyne, « L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé », Barbin (dir.), *Gabriel Lamé. Les pérégrinations d'un ingénieur du XIX^e siècle*, Sabix, École polytechnique, 2009, p. 101-111.

5. Lamé, *Op. Cit.*, p. vj.

IV.1 Lamé et Duhamel : deux conceptions différentes de la généralité

Lamé aborde dans cet *Examen* la question des moyens dont dispose le géomètre pour résoudre les problèmes. Il déplore que la synthèse, cette « méthode énigmatique », soit si présente dans les mathématiques élémentaires, alors qu'elle est pratiquement absente des mathématiques transcendantes où règne l'analyse. Pour y remédier, il décrit dans son ouvrage plusieurs méthodes de résolution.

Il faudrait principalement s'attacher à donner quelques méthodes générales pour la solution d'un problème, suivant la manière de l'aborder, de la conduire au résultat, et de traduire cette dernière partie dans le langage de l'énoncé. C'est sans doute ce qu'il y aurait de plus difficile ; la multiplicité des moyens dont la Géométrie, dont l'Algèbre même peuvent se servir pour arriver au but proposé, la variété des questions, tout contribuerait à éloigner les méthodes générales ; mais on pourrait, il me semble, classer les problèmes suivant les ressemblances plus ou moins grandes de leurs moyens de solution, et l'on parviendrait peut-être, sinon à une méthode unique, du moins à un composé de moyens différents, que l'on pourrait regarder comme généraux vu leurs nombreuses applications.

Tel est le but que je me propose dans cet ouvrage⁶.

Il s'agit donc de plusieurs méthodes repérées et définies a posteriori, à partir de la résolution d'un grand nombre de problèmes. Lamé part des problèmes résolus pour classer leurs moyens de résolution. C'est la ressemblance entre les moyens employés à la solutions d'une classe de problèmes qui définira une méthode. Il s'excuse de cet ordre des choses :

Quant aux réflexions qu'il [l'ouvrage] contient, j'avoue qu'elles m'ont été suggérées pour la plupart, par les problèmes que j'y ai fait entrer, tandis qu'au contraire des réflexions générales auraient dû me conduire au choix des exemples⁷.

Une méthode est un « composé de moyens » qui permet de résoudre une multiplicité de problèmes, sans que cette multiplicité soit précisément circonscrite. Lamé déclare qu'« un problème quel qu'il soit, ne peut être trouvé que par une méthode analytique⁸ », ce par quoi il entend qu'il faut toujours partir de la figure que l'on cherche à tracer, et tâcher de faire dépendre la

6. *Ibid.*, p. 6.

7. *Ibid.*, p. vj.

8. *Ibid.*, p. 9.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

solution du problème posé de celle d'un autre plus simple et ainsi de suite jusqu'à une question dont la solution est évidente, c'est-à-dire déjà connue. Après un exemple qui illustre cette descente à un problème évident, il signale trois situations particulières en géométrie simple avant de passer aux méthodes qui recourent à l'emploi de l'algèbre.

La première est la situation où « l'on est analytiquement conduits à construire une figure semblable à celle que l'on cherche ». L'exemple que donne Lamé est : connaissant les trois hauteurs d'un triangle, le construire. Les hauteurs h , h' , h'' d'un triangle étant en raison inverse de ses côtés a , a' , a'' , on connaît les rapports entre les trois côtés du triangle, et par conséquent en prenant un de ces côtés arbitrairement, on construit un triangle semblable au triangle cherché, qui en est directement déduit. C'est une méthode déjà décrite par Carnot dans la *Géométrie de position*⁹.

La seconde situation, appelée « méthode inverse », « consiste à renverser l'énoncé, à prendre pour données les inconnues, et réciproquement »¹⁰. Il est possible d'identifier un premier domaine d'application de cette méthode car « c'est sur-tout quand il s'agit d'inscrire dans un polygone donné une figure semblable à une autre aussi donnée, que l'on préfère la méthode inverse ». Un exemple est donné avec le problème suivant :

S'il s'agit, par exemple, d'inscrire un quadrilatère dont on connaît les angles et le rapport des côtés dans un autre quadrilatère donné, on pourra renverser l'énoncé et se proposer de circoncrire à un quadrilatère donné, un autre quadrilatère semblable à une figure aussi donnée¹¹.

L'illustration ci-dessous permet de suivre le raisonnement de Lamé. Il s'agit d'inscrire dans un quadrilatère donné A un autre quadrilatère B dont la forme est donnée. La méthode inverse consiste à tracer en premier un quadrilatère de la forme de B , et à lui circoncrire un quadrilatère semblable à A , problème dont la solution est déjà connue. On obtient ainsi une figure semblable à la figure cherchée, et dont cette dernière peut être directement déduite. La question d'inscrire une figure est de cette façon remplacée par celle de circoncrire une figure, dont la solution est connue.

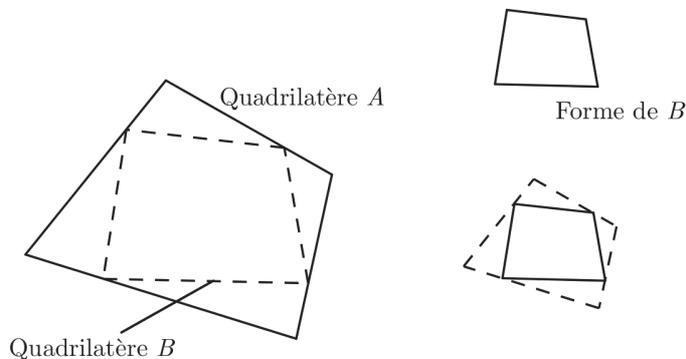
La troisième situation est celle où l'on recherche des lieux géométriques. « Les questions de Géométrie se réduisent presque toujours à la recherche

9. Carnot, *Géométrie de position*, p. 260.

10. *Ibid.*, p. 16.

11. *Ibid.*, p. 16.

IV.1 Lamé et Duhamel : deux conceptions différentes de la généralité



d'un ou de plusieurs points. Un point est ordinairement déterminé par l'intersection de deux lieux géométriques, sur lesquels il jouit de deux propriétés différentes et réunies¹² ». Dès lors, en traçant ces deux lieux géométriques, si du moins ce sont des droites et des cercles, on trouve à leur intersection les points solutions du problème.

Ce procédé est décrit dans un ouvrage de 1809 du mathématicien suisse Simon Lhuilier¹³, qui est pour partie une traduction de la version anglaise de l'ouvrage *Des lieux plans* d'Apollonius, restituée par le mathématicien écossais Robert Simson en 1749¹⁴. Lhuilier décrit ainsi « l'application des lieux géométriques à la solution des problèmes élémentaires déterminés » :

Qu'un point, duquel dépend la solution d'une question proposée, soit déterminé à être sur une ligne droite, ou sur une ligne circulaire, qui sont les lieux des points qui jouissent d'une propriété commune dont ce point doit jouir pour qu'il satisfasse la question. Que par l'énoncé de la question, ce point doive être situé sur une ligne de même nature respectivement [...] Dans le cas où ces lignes correspondantes se rencontrent, le problème est possible¹⁵.

Par exemple, Lamé propose, « étant donnés quatre points A, B, C, D en ligne droite, de trouver hors de cette ligne un point X tel, que les lignes $AB,$

12. *Ibid.*, p. 20.

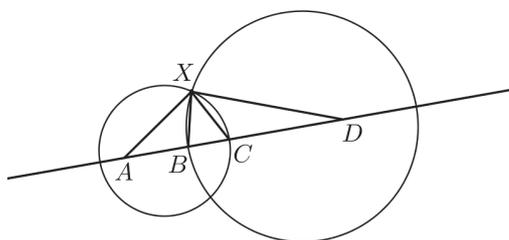
13. Lhuilier, Simon, *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques*, Paris, Genève : Paschoud, 1809.

14. La table des matières est reproduite en annexe 4.

15. Lhuilier, *Op. Cit.*, p. 205.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

BC , CD , y soit vues sous un même angle »¹⁶. Le point X se trouve de fait sur deux lieux que l'on sait tracer. Le premier est le lieu des points d'où les lignes AB et BC sont vues sous un même angle, ce qui signifie que les angles AXB et BXC sont égaux, et le deuxième est bien sûr celui d'où les lignes BC , CD sont vues sous un même angle. À l'intersection de ces deux lieux, qui sont deux cercles, se trouvent les points X qui répondent au problème.



Toutefois, Lamé considère que la recherche et l'emploi des lieux géométriques relèvent de l'analyse algébrique davantage que de la géométrie. Il affirme même que « l'Algèbre seule a dû trouver que le lieu géométrique du point dont les distances à deux points donnés, seraient dans un rapport constant, est une circonférence de cercle ; la Géométrie pure n'a fait que le prouver ; et si l'on voulait forcer son analyse à donner le même résultat, elle conserverait toujours une certaine apparence énigmatique »¹⁷. Ce résultat est pourtant établi par Apollonius au II^e siècle avant notre ère. Cela montre combien, pour Lamé, la méthode et l'invention sont à chercher davantage du côté de l'analyse algébrique, et la suite de son ouvrage expose des méthodes performantes et innovantes pour aborder, par l'analyse algébrique, certains problèmes de géométrie.

Quoi qu'il en soit, Lamé innove en introduisant des méthodes générales en géométrie pure pour la résolution des problèmes de construction à la règle et au compas. Ces méthodes, au nombre de trois, sont le fruit du classement des problèmes par leurs solutions, et leur généralité tient à ce qu'elles s'appliquent à une classe étendue, mais indéfinie, d'énoncés. Nous qualifierons de *particulières* de telles méthodes.

16. *Ibid.*, p. 24.

17. *Ibid.*, p. 23.

IV.1 Lamé et Duhamel : deux conceptions différentes de la généralité

1.2 Les « considérations générales » de Duhamel (1823)

Duhamel publie avec Reynaud en 1823 un recueil de problèmes intitulé *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*¹⁸ pour préparer les élèves aux concours généraux institués en mathématiques pour les classes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales depuis 1811¹⁹. Ce recueil est introduit par des « considérations générales », rédigées par le seul Duhamel, et qui spécifient les objets et les méthodes de l'enseignement des mathématiques.

Reynaud (1771-1844) est alors professeur d'analyse à l'École polytechnique où il a succédé à Poinsot. Ancien élève de la promotion 1796 de l'École, il y enseigne à partir de 1804 comme répétiteur, puis comme suppléant de de Prony pour le cours de mécanique. Il devient examinateur pour l'admission en 1809, et conserve cette charge jusqu'en 1837, à laquelle se sont ajoutées successivement les charges d'examineur aux Écoles Saint-Cyr et forestière. Il a écrit plusieurs ouvrages d'enseignement, sur l'arithmétique²⁰ et sur l'algèbre²¹ en 1804, sur la trigonométrie²² en 1810, et sur l'application de l'algèbre à la géométrie²³ en 1819. Reynaud a recueilli dans les *Problèmes et développements* environ deux cents énoncés de problèmes :

Je me suis proposé, dans cet Ouvrage, de réunir en un seul volume un grand nombre de problèmes et de théorèmes, dont les uns ne se trouvent dans aucun recueil, et dont les autres sont disséminés dans différents traités français et étrangers. J'ai cherché à préparer les élèves aux concours généraux²⁴.

Pour réaliser ce travail qui a exigé de « nombreuses recherches », Reynaud s'est adjoint le concours d'un de ses anciens élèves de l'École polytechnique, à savoir Duhamel (1797-1872). Celui-ci expose dans une première partie de l'ouvrage, qui précède donc les énoncés de problèmes, une centaine de pages de « considérations générales », portant successivement sur l'arithmétique

18. Reynaud, Antoine André Louis, et Duhamel, Jean Marie Constant, *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*, Paris : Bachelier, 1823.

19. Champion, Jacques, « Le concours général et son rôle dans la formation des élites universitaires au XIX^e siècle », *Revue française de pédagogie*, 31, 1975, p. 71-82.

20. Reynaud, *Traité d'arithmétique*, Paris : auteur, 1804.

21. Reynaud, *Introduction à l'algèbre*, Paris : auteur, 1804.

22. Reynaud, *Trigonométrie analytique*, Paris : Courcier, 1810.

23. Reynaud, *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie, et de trigonométrie*, Paris : Courcier, 1819.

24. Reynaud et Duhamel, *Problèmes et développements*, p. v.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

et l'algèbre, puis sur la géométrie, et enfin sur l'application de l'algèbre à la géométrie. Duhamel fait partie, avec Lamé, de la promotion de 1814 qui a été congédiée de l'École polytechnique par Louis XVIII pour indiscipline²⁵. Il est à cette époque répétiteur à l'institution Massin, une école secondaire privée de Paris, à proximité du lycée Charlemagne dont elle accueille en internat de nombreux élèves.

Les « considérations » qu'expose Duhamel forment un discours qui se veut général sur les notions abordées et les méthodes employées dans l'enseignement des mathématiques. Pour ce qui concerne les notions, celles de grandeur, de ligne et de surface, de nombre, de similitude, d'égalité, et autres, sont définies et analysées en détail. Notamment, il explicite la différence entre les notions de problème, qui demande d'exécuter graphiquement une construction, et de théorème, qui demande de démontrer la vérité d'une proposition.

Pour les parties de ce discours qui concernent des méthodes, il s'agit de préciser la notion de généralité qu'elles recouvrent.

Concernant d'abord les problèmes de construction à la règle et au compas, il reconnaît la difficulté « de rien dire de général »²⁶, et de même pour la démonstration des théorèmes. D'où la recommandation faite aux élèves « de résoudre le plus grand nombre possible de questions ». Il se démarque donc du projet entamé par Lamé — qu'il ne cite pas — au début de son ouvrage, de fournir des méthodes pour résoudre les problèmes en géométrie élémentaire. En revanche, dans la partie portant sur l'application de l'algèbre à la géométrie, Duhamel décrit ce que nous avons appelé l'analyse algébrique des figures. Il distingue alors trois buts possibles à l'application de l'algèbre à la géométrie, qui font écho à notre premier chapitre, à savoir calculer numériquement une grandeur, trouver une construction géométrique, ou démontrer un théorème²⁷.

Parmi les autres méthodes décrites au long de ces « considérations », et alors que les notions d'analyse et de synthèse ne sont pas abordées, nous allons décrire la méthode des limites en géométrie élémentaire et la détermination de la tangente à une courbe par la géométrie analytique.

La méthode des limites est comparée, et préférée, à la méthode de réduction à l'absurde, car la première est « réellement la méthode d'inven-

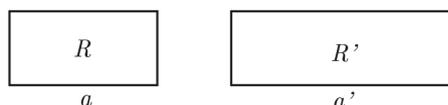
25. Boyé, Anne, « Gabriel Lamé et l'enseignement des mathématiques : reflet d'une génération de polytechniciens ? », *Bulletin de la Sabix*, 44, 2009, p. 151-160.

26. Reynaud, et Duhamel, *Op. Cit.*, p. 50.

27. Reynaud, et Duhamel, *Op. Cit.*, p. 64.

IV.1 Lamé et Duhamel : deux conceptions différentes de la généralité

tion »²⁸. Une telle méthode est employée en géométrie élémentaire dans les propositions où interviennent des grandeurs incommensurables. Il prend pour exemple la proposition que deux rectangles R et R' de même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases a et a' , c'est-à-dire $R : R' :: a : a'$.



La proposition est facile à démontrer dans le cas où les deux bases sont commensurables. Dans le cas où elles sont incommensurables, la méthode des limites consiste à approcher indéfiniment R' par un rectangle de même hauteur et dont la base soit commensurable avec celle de R . La relation entre bases et aires de ces deux derniers rectangles s'étend, à la limite, à la même relation pour R et R' . La méthode de réduction à l'absurde, employée par exemple par Legendre dans ses *Éléments*²⁹, suppose quant à elle que la proposition soit fautive, et tâche d'en déduire une impossibilité. Ainsi Legendre considère la quatrième proportionnelle aux trois grandeurs R , R' et a , et montre que s'il la suppose plus petite, ou plus grande, que a' , alors il aboutit à une impossibilité. De cette double impossibilité est déduite la vérité de la proposition initiale.

Les « considérations » de Duhamel se terminent par l'exposé de « moyens généraux »³⁰ pour démontrer les propriétés des courbes décrites par des équations, à savoir leurs tangentes, leurs centres, leurs diamètres, leurs asymptotes, leur concavité et leur similitude. L'emploi du calcul différentiel permet à Duhamel d'écrire l'équation *générale* de la tangente à une courbe d'équation $F(x, y) = 0$ passant par le point de coordonnées (x', y') sous la forme :

$$y - y' = -\frac{F'(x')}{F'(y')}(x - x')$$

La méthode s'applique à toute courbe décrite par une équation telle que l'on sache dériver la fonction F . Ce n'est pas la méthode employée dans les ouvrages contemporains d'application de l'algèbre à la géométrie, qui déterminent la tangente aux coniques par des moyens attachés à chaque genre

28. Reynaud, et Duhamel, *Op. Cit.*, p. 50.

29. Legendre, *Éléments de géométrie*, Paris : Firmin Didot, 1794, p. 61.

30. Reynaud, et Duhamel, *Op. Cit.*, p. 87.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

de courbe. Ainsi de Reynaud, dans le corps de son *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*³¹, pour déterminer la tangente à une ellipse. Il écrit l'équation de la courbe sous la forme $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, puis l'équation d'une sécante à celle-ci par deux points m et m' , de coordonnées x' , y' et x'' et y'' , sous la forme :

$$y - y' = \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'} \right) (x - x')$$

Les points appartenant à l'ellipse, leurs coordonnées vérifient les relations $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ et $a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2$. La différence entre ces égalités donne :

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{-b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}$$

L'équation de la sécante s'écrit alors :

$$y - y' = \frac{-b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')} (x - x')$$

Cette sécante devient la tangente lorsque les points m et m' sont confondus, et l'équation de la tangente s'écrit alors $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$. Cette méthode est propre à l'ellipse et ne peut pas être directement étendue à d'autres courbes.

Duhamel associe donc des méthodes générales à ce que nous pouvons appeler, à l'instar de Carnot, des problèmes généraux, comme celui de déterminer la tangente à une courbe par un point donné, celui de déterminer le centre d'une courbe, celui de déterminer ses asymptotes, etc. Les méthodes qu'il décrit à cette occasion sont générales au sens d'universelles³², c'est-à-dire qu'elles s'appliquent à tous les cas d'un ensemble parfaitement circonscrit de situations. L'équation donnée de la tangente, par exemple, est valide pour toutes les courbes dont l'équation peut être dérivée par rapport à chacune des variables.

L'exigence d'universalité est absente du travail de Lamé. Au contraire, Lamé procède du particulier au général : partant de l'observation et du classement de nombreuses solutions de problèmes, il repère des moyens généraux de résolution. Érigés en méthodes, dont la généralité est indéfinie, ils s'avèrent efficaces pour résoudre de nombreux problèmes.

31. Reynaud, *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*, p. 163.

32. Barbin, « Universality vs generality : an interpretation of the dispute over tangents between Descartes and Fermat », in Chemla (dir.), *Perspectives on generality*, Oxford University Press, à paraître.

2 Choix, organisation et sources des énoncés de problèmes

Les recueils de problèmes de géométrie sont encore peu nombreux en France dans cette première période. Les seuls qui ont pu être trouvés sont le *Recueil de diverses propositions de géométrie*³³ de Louis Puissant publié en 1801, le *Recueil de théorèmes et de problèmes*³⁴ de Jean Guillaume Garnier publié en 1810, les *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques* de Duhamel et Reynaud en 1823 et enfin les *Théorèmes et problèmes de géométrie*³⁵ de Reynaud en 1833.

Quelles sont les intentions de leurs auteurs en publiant des recueils de problèmes ? Comment organisent-ils ces corpus d'énoncés ? Enfin, à quelles sources puisent-ils les énoncés contenus dans ces ouvrages ?

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les ouvrages d'enseignement de géométrie contiennent un nombre restreint d'énoncés de problèmes. Pour la géométrie élémentaire, les *Éléments de géométrie* de Lacroix ou de Legendre contiennent moins de quarante énoncés de problèmes. Pour l'application de l'algèbre à la géométrie, les ouvrages de Lacroix ou de Bézout contiennent une dizaine d'énoncés de questions.

Or nous avons vu l'importance qu'accordent Lacroix et Vincent à la résolution des problèmes pour comprendre la théorie. Nous verrons que Puissant tient le même discours pour la géométrie analytique. Ces professeurs donnent des problèmes à résoudre à leurs élèves pour éclairer la théorie. Par ailleurs, le concours général établi en 1811 pour les mathématiques³⁶ prend une importance de premier plan dans la compétition que se livrent les Collèges parisiens, et il consiste à résoudre des problèmes.

Où trouver, dès lors, des énoncés de problèmes ? Pour l'application de l'algèbre à la géométrie, Lacroix indique, dans le *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie* quelques ouvrages pour ceux qui « voudront s'exercer à la résolution des ques-

33. Puissant, *Recueil de diverses propositions de géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique, suivant les principes de Monge et de Lacroix*, Paris : Duprat, 1801.

34. Garnier, Jean Guillaume, *Réciproques de la géométrie, suivies d'un Recueil de théorèmes et de problèmes*, Paris : Courcier, 1810.

35. Reynaud, *Théorèmes et problèmes de géométrie*, Paris : Bachelier, 1833.

36. Champion, Jacques, « Le concours général et son rôle dans la formation des élites universitaires au XIX^e siècle », *Revue française de pédagogie*, volume 31, 1975, p. 75.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

tions »³⁷. Le premier est l'*Arithmétique universelle* de Newton. Cet ouvrage initialement publié en 1707 a été traduit en français en 1802, traduction mentionnée par Hachette dans la *Correspondance sur l'École polytechnique*³⁸. Il fait suivre l'exposé des règles de l'arithmétique et de l'algèbre de deux chapitres sur la résolution des questions, celles d'arithmétique d'abord, puis celles de géométrie, qui comptent soixante-et-un problèmes de géométrie résolus par l'analyse algébrique. Le deuxième ouvrage indiqué par Lacroix est la *Géométrie de position* de Lazare Carnot³⁹. Celle-ci contient une section de soixante-seize problèmes en application des théories exposées dans la première partie de l'ouvrage. Lacroix cite encore les écrits du mathématicien anglais Thomas Simpson (1710-1761), qui a publié en Angleterre trois ouvrages contenant chacun de nombreux problèmes : des *Éléments de géométrie*⁴⁰, des *Éléments d'analyse pratique*⁴¹ et des *Select exercises for young proficients in the mathematicks*⁴². Plus loin dans l'ouvrage⁴³, Lacroix mentionne aussi le *Recueil de diverses propositions de géométrie* de Puissant, à propos de la méthode analytique des coordonnées.

Dans quelle mesure les énoncés de problèmes de nos recueils sont-ils puisés aux sources indiquées par Lacroix ? Indiquent-ils d'autres sources ? Comment les problèmes sont-ils organisés au sein de chaque recueil ? Pouvons-nous repérer une circulation des énoncés entre les recueils ?

2.1 L'ouvrage de Louis Puissant pour compléter celui de Lacroix (1801)

Le premier de nos recueils traite de géométrie analytique. Il est rédigé par Louis Puissant (1769-1843), professeur à l'École centrale du département de Lot et Garonne. Il a obtenu ce poste sur concours en 1796, après avoir suivi les cours de l'École normale de l'an III. Il sera ensuite professeur à Saint-Cyr

37. Lacroix, *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, 1807, p. 112.

38. Hachette, *Correspondance*, Tome premier, p. 26.

39. Carnot, Lazare, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.

40. Simpson, Thomas, *Éléments de géométrie traduits de l'anglais*, Paris : Vincent, 1755.

41. Simpson, *Éléments d'analyse pratique, ou application des principes de l'Algèbre & de la Géométrie à la solution d'un très grand nombre de problèmes numériques & géométriques*, traduits de l'anglais, Paris : Jombert, 1771.

42. Simpson, *Select exercises for young proficients in the mathematicks*, Londres : Nourse, 1752.

43. Lacroix, *Op. Cit.*, p. 154.

IV.2 Choix, organisation et sources des énoncés de problèmes

en 1803 puis ingénieur géographe ; ses travaux en géodésie le feront recevoir à l'Académie des sciences en 1828⁴⁴. Il publie en 1801 un *Recueil de diverses propositions de géométrie*⁴⁵. L'ouvrage est destiné aux « jeunes mathématiciens », pour compléter l'application de l'algèbre à la géométrie de Lacroix, comme le mentionne explicitement le sous-titre de l'ouvrage : « à l'usage de ceux qui suivent le *Traité élémentaire d'application de l'Algèbre à la Géométrie de ce dernier* ». Les applications sont « utiles au développement de l'intelligence des élèves », écrit dans l'avertissement Puissant, dont « l'expérience prouve que rien n'est plus propre à éclaircir un sujet abstrait, que de s'exercer à analyser des questions qui s'y rapportent ». De fait, l'ouvrage, de cent vingt pages, expose trente-huit énoncés de problèmes et de théorèmes, qui viennent compléter la dizaine d'énoncés contenus dans l'ouvrage de Lacroix. C'est que ce dernier s'était « spécialement consacré à la théorie », explique-t-il. D'ailleurs Lacroix cite l'ouvrage de Puissant dans les éditions de son *Traité* postérieures à la publication du *Recueil*.

Puissant écrit son recueil alors qu'il est enseignant à l'École centrale depuis cinq ans. Ces énoncés sont sans doute pris parmi ceux qu'il propose à ses élèves. Ce sont des théorèmes à démontrer, des problèmes de construction, des lieux à déterminer ou encore des relations entre grandeurs à exprimer. Néanmoins la seule distinction explicite effectuée par Puissant entre les différents énoncés est leur répartition en deux sections, contenant respectivement les problèmes déterminés et les problèmes indéterminés. C'est la considération des équations finales qui fonde cette distinction :

S'il existe autant d'équations distinctes qu'il y a de quantités à découvrir, le problème n'est susceptible que d'un nombre limité de solutions, et en pareil cas il est dit *déterminé* [...]

Lorsqu'il arrive le contraire [...] le problème [...] est dit *indéterminé*. Lorsque la solution d'un tel problème mène à une équation qui ne renferme que deux inconnues ou variables, la courbe à laquelle cette équation appartient est toujours plane ou à *simple courbure* ; ce sont celles-ci dont il va être question⁴⁶.

Prenons deux exemples pour illustrer cette distinction faite entre problèmes déterminés et indéterminés. « Mener une tangente commune à deux

44. E. De Beaumont, *Éloge historique de Louis Puissant*, Institut Impérial de France.

45. Voir annexe 1

46. Puissant, *Recueil*, 1801, p. 23 et p. 68.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

cercles donnés de grandeur et de position sur un plan »⁴⁷ est un problème déterminé. En revanche, « deux cercles étant donnés de grandeur et de position sur un plan, trouver le lieu des centres de tous les cercles qui sont tangents à-la-fois aux deux cercles donnés »⁴⁸ est un problème indéterminé.

À quelles sources Puissant a-t-il puisé les énoncés de son recueil ? S'il se réfère dans le cours du recueil à plusieurs auteurs - Legendre, Euler, Tédenat, Ozanam, Descartes, Bossut, Apollonius d'après Montucla, Lagrange, et Newton d'après Lagrange - c'est presque toujours pour renvoyer à des compléments sur la question traitée, plutôt que pour indiquer la source des énoncés qu'il présente ou de leur solution. Certains énoncés se trouvent déjà dans des ouvrages antérieurs. Le problème de trouver la relation entre une médiane d'un triangle et ses trois côtés se trouve dans les *Éléments* de Legendre ; le problème de trouver l'expression analytique des côtés d'un triangle, étant données ses médianes, se trouve dans les *Exercices* de Simpson ; le problème de tirer par un point donné dans un angle donné une droite de manière que le triangle résultant soit égal à un carré donné se trouve dans l'*Arithmétique universelle* de Newton ; et d'autres énoncés se trouvent encore dans les ouvrages de Bézout, de Tédenat, ou encore de Monge, sans toutefois qu'il puisse être établi un lien direct de transcription. En particulier, les démonstrations que donne Puissant diffèrent presque toujours des sources que nous mentionnons. Un énoncé cependant peut être attribué à Puissant : il est publié dans la *Correspondance sur l'École polytechnique*⁴⁹ et repris dans l'édition de 1809 de son *Recueil* :

Si quatre cercles touchent chacun, intérieurement ou extérieurement, trois côtés d'un quadrilatère quelconque, les centres des cercles seront toujours sur une même circonférence⁵⁰.

Il nous faut remarquer que Puissant privilégie dans son *Recueil* un « procédé uniforme », par opposition aux « différents moyens synthétiques dont on faisait usage naguère dans la résolution des problèmes ». Il choisit d'utiliser exclusivement la méthode des coordonnées. Il démontre par ce moyen la proposition 13 du livre II des *Éléments de Géométrie* de Legendre :

Trouver la relation qui existe entre la droite menée du sommet

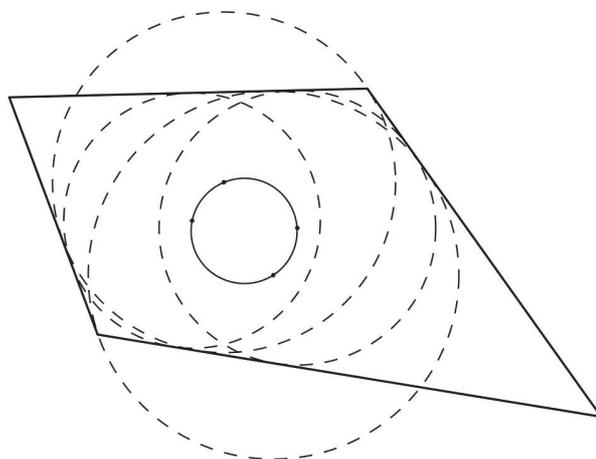
47. *Ibid.*, p. 38.

48. *Ibid.*, p. 81.

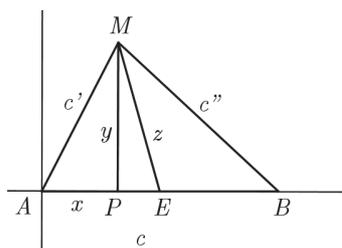
49. Hachette, *Correspondance sur l'École polytechnique*, Tome premier, n°6, juillet 1806, Paris : Bernard, 1808, p. 193.

50. Puissant, *Recueil*, 1809, p. 103.

IV.2 Choix, organisation et sources des énoncés de problèmes



d'un triangle rectiligne sur le milieu de sa base et les trois côtés de ce triangle⁵¹.



Dans le triangle AMB , Puissant nomme $AB = c$, $AM = c'$, $MB = c''$, $AP = x$, $PM = y$ et $ME = z$, c'est-à-dire qu'il choisit comme axes des coordonnées les lignes AB et sa perpendiculaire au point A . Les triangles rectangles APM , BPM fournissent les équations

$$y^2 = c'^2 - x^2, \quad y^2 = c''^2 - (c - x)^2$$

qui aboutissent suite à un calcul à

$$4z^2 = 2c'^2 + 2c''^2 - c^2$$

« Cette proposition, écrit Puissant, qui est la quatorzième du troisième livre de la Géométrie de Legendre, pourrait être sans doute résolue plus brièvement, en partant, comme l'a fait ce savant géomètre, de la propriété du

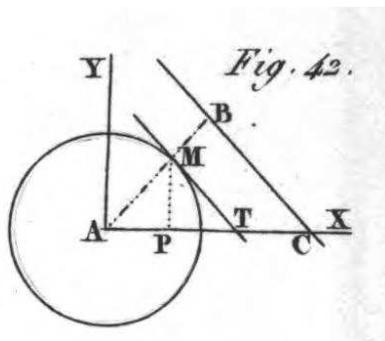
51. Puissant, *Op. Cit.*, p. 23.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

triangle obliquangle ; mais j'ai préféré, dans cette circonstance, remonter à la propriété fondamentale du triangle rectangle, afin de faire directement usage des coordonnées rectangulaires ».

Puissant privilégie la méthode des coordonnées. Ainsi pour déterminer la tangente à un cercle passant par un point donné, Puissant choisit-il de recourir aux coordonnées :

Un cercle de rayon connu et une ligne CB étant donnés de position par rapport à deux axes fixes, mener au cercle une tangente TM qui soit en même temps parallèle à CB ⁵².



Ayant désigné par « r le rayon du cercle, a la tangente trigonométrique de l'angle BCA , α la distance inconnue AT , et x, y les coordonnées du point de contact », Puissant aboutit à

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}$$

qui donne ensuite

$$\alpha = \frac{r\sqrt{a^2 + 1}}{a}$$

Le souci d'uniformité que montre Puissant s'accompagne aussi d'une volonté de montrer la fécondité de la méthode. Ainsi, il généralise la solution du problème du tracé de la tangente à un cercle donné parallèle à une droite donnée présenté ci-dessus à celui de la tangente à une parabole :

52. Puissant, *Recueil*, 1809, n°60.

IV.2 Choix, organisation et sources des énoncés de problèmes

Il ne faut pas croire que cette solution soit particulière au problème proposé ; car si la courbe était une parabole, par exemple (toutes choses égales par ailleurs), et que l'on voulût trouver les coordonnées du point de contact, on combinerait de même l'équation $y'^2 = px'$ de cette courbe avec celle-ci

$$\frac{p}{2y} = a,$$

qui exprimer la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe et l'axe des abscisses, et l'on aurait

$$x' = \frac{p}{4a^2}, \quad y' = \frac{p}{2a}.$$

ainsi l'abscisse serait à l'ordonnée correspondante, comme le rayon des tables est au double de la tangente donnée.

Il arrive que Puissant donne deux démonstrations pour une même proposition, par exemple pour la suivante :

Trois cercles inégaux étant donnés de grandeur et de position sur un plan, si en les considérant deux à deux on leur mène des tangentes extérieures jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection, qu'on obtiendra de cette manière, seront en ligne droite⁵³.

À partir de ses propres connaissances et de sources variées, Puissant a construit un corpus visant à exercer les élèves à résoudre des questions de géométrie par la méthode analytique des coordonnées. Les énoncés ne constituent pas des connaissances nouvelles, mais ils sont formulés, et le cas échéant décontextualisés, afin d'exercer les candidats à l'École polytechnique à cette méthode, en complément de l'ouvrage de Lacroix.

2.2 Le recueil de Jean-Guillaume Garnier (1810)

Jean-Guillaume Garnier (1766-1840) a fait ses études à Reims jusqu'à la classe de philosophie inclusivement, et les a poursuivies par des études de mathématiques qu'il préfère à une carrière d'ecclésiastique envisagée par ses parents. Devant enseigner pour les financer, il est professeur de mathématiques et de fortifications en 1788 puis pendant un an à l'École militaire

53. Puissant, *Recueil*, 1801, p. 50.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

de Colmar, où il rencontre le mathématicien Louis Arbogast (1759-1803)⁵⁴. Revenu à Paris, il fait la connaissance de de Prony qui le fait entrer au bureau central du cadastre qu'il dirige. Il est ensuite examinateur des aspirants à l'École polytechnique de l'an III à l'an VIII, professeur adjoint à Lagrange puis professeur remplaçant de Fourier dans cette école. Déçu que Poisson succède à Fourier pour sa chaire de professeur de l'École, il fonde une école préparatoire à l'École polytechnique, la pension Gros-Caillou⁵⁵, où enseignent Dinet, Poisson, Binet, et Bourdon⁵⁶.

En 1810, Garnier a déjà publié un ouvrage dû à Ozanam portant notamment sur la division des champs⁵⁷, ainsi que ses cours d'analyse algébrique et de calculs différentiel et intégral donnés à l'École polytechnique. Après cela, il publiera encore plusieurs ouvrages d'enseignement sur diverses parties des mathématiques. Il enseignera encore à Saint-Cyr puis plus longuement à l'université de Gand en Belgique, où il publiera avec le mathématicien belge Adolphe Quételet les premiers numéros de la *Correspondance mathématique et physique*⁵⁸.

Les *Réciproques de la géométrie suivies d'un recueil de théorèmes et de problèmes* sont publiées en 1810. L'ouvrage diffère amplement, d'après Garnier, de la première édition, introuvable et principalement due à un autre auteur qu'il ne nomme pas. Son ouvrage est constitué de deux parties. D'abord, les réciproques des théorèmes des *Éléments* de Legendre, déclinées en huit livres. C'est que, fait remarquer Garnier, la résolution des problèmes recourt souvent aux réciproques des propositions, qui font pourtant défaut pour nombre d'entre elles dans les ouvrages de géométrie. Ensuite, cent quatre vingt un énoncés de théorèmes et de problèmes de géométrie élémentaire, c'est-à-dire ne faisant aucun usage de l'algèbre, groupés selon les thèmes ci-dessous :

- Sur les lignes et sur les triangles
- Division des triangles

54. Friedelmeyer, Jean-Pierre, « Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algèbrisation de l'analyse, à la fin du dix-huitième siècle », thèse de doctorat en histoire des sciences, sous la direction de Jean Dhombres, Nantes, 1993.

55. Belhoste, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIX^e siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, 90, 2001, p. 101-130.

56. Quételet, *Sciences mathématiques et physiques chez les Belges au commencement du XIX^e siècle*, Bruxelles : Buggenhoudt, 1866, p. 203.

57. Garnier, *Usage du compas de proportion suivi d'un traité de la division des champs*, Paris : Firmin-Didot, 1794.

58. Quételet, *Correspondance mathématique et physique*, Bruxelles : Hayez, 1825-1835.

IV.2 Choix, organisation et sources des énoncés de problèmes

- Sur les figures à quatre côtés
- Division des quadrilatères
- Du cercle
- Des aires du cercle, du secteur et du segment
- Des contacts des cercles
- Des périmètres et des aires de quelques polygones réguliers. Quadrature de quelques espaces limités par des arcs de cercles et des droites.
- Division des surfaces
- Sur les plans
- Introduction à la géométrie descriptive
- Sur la pyramide triangulaire
- Des polyèdres
- Du contact des sphères
- Trigonométrie rectiligne
- Sur la trigonométrie sphérique
- De la polygonométrie et de la polyèdrométrie
- Sur le levé des plans
- De la courbe trisectrice

Nous voyons que la répartition se fait selon la nature des figures sur lesquelles porte l'énoncé, mais aussi selon les relations entre ces figures, ou entre les grandeurs considérées. L'ouvrage contient trois cent cinquante pages et douze planches. Les solutions sont toujours synthétiques et relèvent de la géométrie élémentaire. Peu d'énoncés appartiennent déjà aux *Éléments de géométrie* par exemple de Lacroix ou de Legendre. Garnier puise la grande majorité des énoncés de son recueil dans d'autres ouvrages. Il cite par endroits ses sources, pas systématiquement, loin s'en faut, mais il semble que tous les ouvrages dans lesquels il prélève des énoncés soient cités au moins une fois dans le recueil. Des énoncés et parfois des groupes d'énoncés sont empruntés au *Recueil* de Puissant, reproduits mot à mot par Garnier, comme par exemple les énoncés qui concernent la polygonométrie et la polyèdrométrie, qui consistent à déterminer certaines grandeurs — angles, côtés — attachées à un polygone ou un polyèdre à partir d'autres grandeurs données. Garnier ne cite pourtant que deux autres ouvrages de Puissant, un *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement*⁵⁹ et un *Traité de géodésie*⁶⁰, auxquels

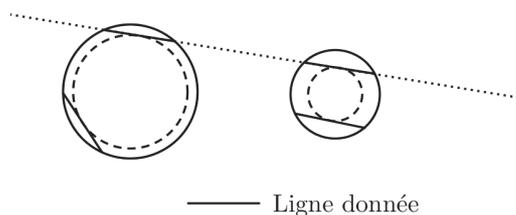
59. Puissant, *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement*, Paris : Courcier, 1807.

60. Puissant, *Traité de géodésie, ou exposition des méthodes trigonométriques et astronomiques* Paris : Courcier, 1805.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

il emprunte aussi quelques énoncés. Quoi qu'il en soit, les démonstrations données par Garnier diffèrent complètement, bien sûr, de celles de Puissant. Ainsi de l'énoncé suivant :

Deux cercles étant donnés de grandeur et de position, les couper par une droite, de manière que les parties interceptées soient égales à une ligne donnée [...] ⁶¹.



Cet énoncé est résolu par Puissant dans son *Recueil*⁶² par la méthode des coordonnées, et d'après une formule établie dans le *Traité* de Lacroix. Garnier construit quant à lui la droite cherchée comme tangente commune à deux cercles concentriques aux cercles donnés et tangents à la ligne donnée comme corde de ces cercles.

D'autres énoncés sont empruntés au traité d'Ozanam sur la division des champs cité plus haut et que Garnier a réédité. Ils demandent de partager un triangle, un quadrilatère, ou encore un pentagone en parties égales ou dans des rapports donnés. Garnier ne mentionne pas cet emprunt.

Certains énoncés sont empruntés à l'ouvrage du mathématicien italien Lorenzo Mascheroni sur la géométrie du compas⁶³, notamment le problème du partage du cercle en quatre, huit et douze parties égales en utilisant le compas seulement, attribué explicitement à Mascheroni.

Enfin, plusieurs énoncés sont tirés de la *Correspondance sur l'École polytechnique*. C'est explicite pour le problème de « partager un triangle par une droite *minimum* en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné »⁶⁴, problème posé dans le volume 8 et résolu dans le volume 9 de la *Correspondance*⁶⁵. D'autres énoncés proposés par Garnier correspondent à

61. Garnier, *Op. Cit.*, p. 114.

62. Puissant, *Recueil*, 1801, p. 40.

63. Mascheroni, Lorenzo, *Géométrie du compas*, trad. Carette, Paris : Duprat, 1798.

64. Garnier, *Op. Cit.*, p. 100.

65. Hachette, *Correspondance sur l'École polytechnique*, Tome premier, n°9, Paris : Bernard, 1808, p. 346.

IV.2 Choix, organisation et sources des énoncés de problèmes

des sujets traités dans la *Correspondance*. C'est le cas du problème de mener une droite d'un point donné au point de concours inaccessible de deux droites données, du problème de tracer un cercle tangent à trois cercles donnés, et encore de la théorie de la pyramide triangulaire⁶⁶.

Garnier reproduit encore les deux théorèmes sur le triangle qui ouvrent le mémoire de Carnot sur les transversales⁶⁷.

Remarquons que, dès les premières propositions de son *Recueil de théorèmes et de problèmes*, il donne plusieurs solutions aux énoncés qu'il propose. Ainsi du théorème :

Les trois hauteurs d'un triangle quelconque concourent en un même point⁶⁸.

Une première démonstration utilise deux cercles et une deuxième des triangles semblables.

L'originalité du travail de Garnier est donc d'avoir réuni un nombre très important d'énoncés, portant sur des sujets variés. Il les organise selon la nature des figures ou des grandeurs concernées. Les solutions, exposées synthétiquement, appartiennent à la géométrie élémentaire. Les nombreux énoncés démontrés de plusieurs façons révèlent une attention particulière portée à la méthode.

2.3 Les deux recueils de Reynaud (1823 et 1833)

Reynaud publie successivement deux recueils de problèmes : un premier avec Duhamel en 1823 intitulé *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*⁶⁹ dont il a déjà été question, puis un second en 1833, seul, intitulé *Théorèmes et problèmes de géométrie*⁷⁰. Ce dernier ouvrage semble connaître un certain succès éditorial dans la mesure où la dixième édition paraît cinq ans plus tard en 1838. C'est à cette édition qu'il sera fait référence ici. Ces deux ouvrages contiennent respectivement quatre cents et deux cents pages. Ils s'adressent aux élèves qui se préparent au concours général et aux examens d'admission aux écoles du gouvernement, en particulier l'École polytechnique.

66. Hachette, *Correspondance*, respectivement p. 305, p. 26, et p. 41.

67. Carnot, *Essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806.

68. Garnier, *Op. Cit.*, p. 78.

69. Reynaud, Duhamel, *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*, Paris : Bachelier, 1823.

70. Reynaud, *Théorèmes et problèmes de géométrie*, Paris : Bachelier, 1833.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

Les *Problèmes et développements* contiennent, cela a été étudié plus haut, des considérations générales sur diverses parties des mathématiques réparties en trois livres sur l'Arithmétique et l'Algèbre, la Géométrie, et l'application de l'algèbre à la géométrie, et dues à Duhamel. Leur font suite trois séries d'exercices groupées sous les mêmes intitulés⁷¹, c'est-à-dire que les problèmes de géométrie sont groupés selon que leur solution recourt ou non à l'algèbre. Les exercices sur la géométrie sont séparés entre géométrie plane et géométrie dans l'espace. Les exercices sur l'application de l'algèbre à la géométrie sont répartis entre problèmes déterminés et problèmes sur les lieux géométriques. Au total, cela représente environ deux cents énoncés de problèmes rien que pour la géométrie, dont quarante sont donnés sans solution, et auxquels peuvent être ajoutés les énoncés des théorèmes à démontrer, qui ne sont pas numérotés.

Je me suis proposé, dans cet Ouvrage, de réunir en un seul volume un grand nombre de problèmes et de théorèmes, dont les uns ne se trouvent dans aucun recueil, et dont les autres sont disséminés dans différents traités français et étrangers. J'ai cherché à préparer les élèves aux concours généraux, en leur présentant les solutions des problèmes sous des formes variées propres à faire apercevoir combien le choix des inconnues influe sur l'élégance et la simplicité de ces solutions⁷².

Les auteurs n'indiquent pas de source pour les énoncés des problèmes de géométrie, en-dehors de quelques théorèmes à démontrer fournis par Camille Géroño, professeur de mathématiques. Certains énoncés se trouvent dans les recueils de Garnier et de Puissant, mais sans que l'emprunt soit évident. De fait, les énoncés qui se retrouvent dans plusieurs recueils peuvent progressivement être considérés comme classiques, comme nous le verrons bientôt. Au contraire, un emprunt évident est fait à l'*Arithmétique universelle* de Newton sans que cela soit mentionné : les problèmes 13 à 19 des « exercices sur l'application de l'algèbre à la géométrie » sont tous des énoncés que l'on retrouve dans l'*Arithmétique universelle*, et ces énoncés sont suffisamment originaux pour que l'emprunt soit avéré. Un autre énoncé avait quant à lui déjà été publié dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*⁷³, qui

71. Voir les énoncés de ces exercices en annexe 5.

72. Reynaud, Duhamel, *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*, Paris : Bachelier, 1823, p. iv.

73. Gergonne, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 1, p. 259.

IV.2 Choix, organisation et sources des énoncés de problèmes

demande de « partager la surface d'un cercle en m parties équivalentes »⁷⁴ et de même périmètre.

Le second recueil, les *Théorèmes et problèmes de géométrie*, est « destiné à compléter la géométrie élémentaire, à préparer au concours général et aux examens »⁷⁵. En particulier, il ne fait pas intervenir l'algèbre. Ce complément contient une suite de théorèmes et de problèmes de géométrie plane, une autre partie développant des théorèmes de géométrie dans l'espace et enfin une troisième et dernière partie exposant des *Éléments* de géométrie descriptive, déclinée en quarante problèmes⁷⁶. La première partie se compose de vingt-neuf théorèmes et quatre-vingt-sept problèmes groupés comme suit :

- Théorèmes
- Construction de Lignes proportionnelles, de carrés et de rectangles
- Construction de Droites assujetties à des conditions données
- Construction de circonférences qui satisfassent à des conditions données
- Construction de Points qui satisfassent à des conditions données
- Construction de triangles
- Problèmes sur les lieux géométriques

Les théorèmes sont exposés séparément des problèmes dans une première section. Ensuite, les problèmes sont groupés selon la nature de la figure qu'il est demandé de construire.

Les énoncés de la dernière section demandent de trouver des lieux de points qui sont, ici, toujours des droites ou des circonférences. Nous n'avons pas rencontré jusqu'ici cette catégorie de problèmes en géométrie élémentaire, et la détermination des lieux était traitée dans le cadre de l'application de l'algèbre à la géométrie dans les *Problèmes et développements* rédigés avec Duhamel.

Il est intéressant de voir que la détermination des lieux géométriques constitue une catégorie identifiée de problèmes dans un recueil de géométrie élémentaire. En effet, les lieux géométriques sont alors souvent associés aux équations en coordonnées, et étudiés principalement dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique.

Les problèmes de lieux que propose Reynaud font partie, sans qu'il le mentionne, de ceux que l'on trouve dans les *Éléments d'analyse géométrique*

74. Reynaud, Duhamel, *Op. Cit.*, p. 259.

75. *Ibid.*, Avertissement.

76. Voir les énoncés de ces problèmes en annexe 7.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques de Simon Lhuillier. Celui-ci reprend les *Lieux plans* d'Apollonius restitués par Simson, qu'il prise pour la « simplicité et l'élégance » des procédés géométriques employés, contrairement aux reconstitutions de cet ouvrage réalisées au XVII^e par Fermat et Schooten, qui traitent les problèmes algébriquement. Lhuillier ajoute à cette partie purement géométrique, une seconde partie portant sur « la méthode purement algébrique », et les problèmes de lieux géométriques qui terminent l'ouvrage sont résolus successivement par l'analyse géométrique et l'analyse algébrique.

Les deux recueils de Reynaud se terminent par des énoncés donnés au concours général. Dix sont résolus à la fin des *Problèmes et développements*, trente-et-un sujets de mathématiques élémentaires et neuf sujets de mathématiques spéciales sont donnés sans solution à la fin des *Théorèmes et problèmes de géométrie*. À la vue des énoncés, nous voyons que les exercices des recueils que nous avons étudiés dans ce chapitre sont adaptés à la préparation au concours général. Par exemple, le sujet du concours général de mathématiques élémentaires pour l'année 1813 est :

Étant donné un triangle ABC , et un point M sur un des côtés, mener par ce point deux droites MN , MP [aux deux autres côtés], telles, qu'en tirant la droite NP , le triangle MNP soit semblable à un triangle donné⁷⁷.

Et Garnier donne dans son *Recueil*, trois ans plus tôt, le problème :

Étant données de position trois droites qui se rencontrent deux à deux, et un triangle, construire [...] un triangle semblable, sous la condition que chacun des sommets soit situé sur chacune des droites⁷⁸.

Ces deux énoncés sont bien sûr excessivement proches. Dans l'autre sens, quelques énoncés donnés au concours général se retrouvent ensuite résolus dans les recueils que nous avons étudiés. C'est le cas du sujet du concours général de mathématiques élémentaires pour l'année 1823 :

Inscrire, dans un cercle donné, un triangle isocèle ABC , dont la base BC et la hauteur AP forment une somme $BC + AP$ égale à une longueur donnée⁷⁹.

77. Reynaud, *Théorèmes et problèmes de géométrie*, p. 209.

78. Garnier, *Op. Cit.*, p. 77.

79. Reynaud, *Théorèmes et problèmes de géométrie*, p. 210.

Cet énoncé est résolu dans les *Théorèmes et problèmes de géométrie* de Reynaud⁸⁰ dix ans plus tard.

Reynaud, quant à lui, propose deux solutions différentes au problème :

Construire un triangle, connaissant sa base AB , et l'angle γ du sommet ; on sait de plus que les deux autres côtés sont dans le rapport de deux lignes données, α, β ⁸¹.

La première utilise une propriété de la bissectrice d'un angle d'un triangle inscrit dans un cercle, et la deuxième utilise le lieu des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné.

L'ouvrage de Reynaud et celui écrit avec Duhamel résultent d'un important travail de compilation d'énoncés recueillis à des sources variées. Ils visent à compléter les ouvrages portant sur la théorie, pour préparer les élèves tant aux examens qu'au concours général. Les énoncés sont organisés selon la nature de la figure étudiée, selon qu'ils sont déterminés ou indéterminés, selon qu'ils sont des théorèmes ou des problèmes ou encore selon qu'ils relèvent de la géométrie plane ou de la géométrie dans l'espace.

3 Conclusion

Un genre d'ouvrage particulier fait son apparition dans le champs éditorial français dans le premier tiers du XIX^e siècle : les recueils de problèmes de géométrie, qui sont de plus en plus volumineux au long de la période. Leur objectif est double. D'une part de compléter et d'éclairer la théorie, et en cela ils répondent vraisemblablement à un besoin pédagogique des professeurs. Un professeur de physique au collège Charlemagne s'exprime ainsi en 1838 :

La résolution des problèmes de mathématiques ou de physique sert en même temps à constater le savoir des élèves et à développer leur intelligence. Les recueils de problèmes sont donc d'un grand secours, soit pour assurer le succès de l'enseignement, soit pour en étendre les limites. Ce double avantage n'a pas été méconnu par les géomètres ; car ils ont publié de nombreux recueils de problèmes sur les diverses branches des mathématiques⁸².

80. Reynaud, *Théorèmes et problèmes de géométrie*, p. 59.

81. Reynaud, *Théorèmes et problèmes de géométrie*, p. 52.

82. Bary, *Nouveaux problèmes de physique, suivis des questions proposées au concours général*, Paris : Hachette, 1838, p. vii.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

D'autre part les recueils de problèmes visent à préparer les élèves aux examens, principalement celui de l'entrée à l'École polytechnique, et au concours général, qui a pris une importance déterminante pour les établissements de Paris et de Versailles.

L'intérêt porté à la méthode, dont témoigne la fréquence de solutions multiples aux problèmes posés, est l'objet d'un discours dans les ouvrages de Lamé et de Duhamel, dont la différence de point de vue exhibe la difficulté à concilier la quête de généralité avec la volonté de simplicité et d'efficacité dans la résolution des problèmes.

Ces vastes collection d'énoncés sont organisées, entre géométrie plane et géométrie dans l'espace, entre analyse algébrique et géométrie élémentaire, entre problèmes de construction et théorèmes, entre problèmes déterminés et problèmes indéterminés, et enfin, souvent, selon la nature de la figure considérée. Concernant cette dernière distinction, les recueils présentent notamment des séries d'énoncés relatif à un même genre de figure, comme les problèmes de construction des triangles et les problèmes de contacts. Cela correspond d'ailleurs à deux articles des *Annales de mathématiques pures et appliquées* des tomes 8 et 11⁸³, portant respectivement sur la construction d'un triangle et sur les contacts.

Le premier, rédigé par Gergonne lui-même, est adressé aux professeurs :

Messieurs les professeurs des écoles publiques pouvant quelquefois se trouver embarrassés de choisir des sujets d'exercices pour leurs élèves, nous pensons faire une chose qui ne pourra leur être désagréable, en leur mettant sous les yeux le tableau de 95 problèmes de géométrie plane, propres à être donnés comme devoirs.

Gergonne propose de construire un triangle connaissant trois éléments parmi : ses trois côtés, ses trois angles, les trois droites qui joignent chaque sommet au milieu du côté opposé, les trois perpendiculaires abaissées des sommets aux milieux des côtés opposés, et enfin les trois droites qui partagent les angles du triangle en deux parties égales.

Le second article des *Annales*, dû à Vecten, licencié ès-sciences, propose vingt-sept problèmes avec leurs solutions à la règle et au compas, lorsqu'elle est possible, de la construction d'un cercle soumis à diverses conditions, selon que son centre est donné ou sur une droite ou un cercle donnés, qu'il passe par un point donné ou touche une droite ou un cercle donnés, que son rayon

83. Gergonne, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 8, p. 315 et tome 11, p. 114.

IV.3 Conclusion

est ou non donné. Certains de ces problèmes sont « de première facilité » et d'autres ne se voient pas donner de solution. Cela montre que l'intention de Gergonne en proposant ces énoncés est de réaliser une « liste complète »⁸⁴. Dans les recueils de Garnier, de Duhamel avec Reynaud et de Reynaud, se trouvent de la même façon des séries de problèmes sur la construction des triangles ou les contacts des cercles.

L'étude et la comparaison des corpus d'énoncés a permis d'identifier certaines sources d'emprunt pour les énoncés, et de mettre à jour une circulation entre les recueils réelle mais de relativement faible ampleur. Un ouvrage s'impose comme source importante d'énoncés : l'*Arithmétique universelle* de Newton, justement traduite en français en 1802. Les autres sources repérées sont les *Récréations mathématiques* et le *Traité de la division des champs* de Ozanam, réédités respectivement en 1778 par Montucla et en 1794 par Garnier ; la *Géométrie du compas* de Mascheroni, publiée en français en 1798 ; les trois ouvrages de Simpson, dont deux sont traduits en français dans la deuxième moitié du XVIII^e siècle ; la *Géométrie de position* de Carnot ; les *Lieux plans* d'Apollonius par Lhuillier, à partir d'une version de Robert Simson. L'importance des ouvrages anglais dans cette liste témoigne d'une pratique intense au XVIII^e siècle en Angleterre de la résolution de problèmes, dans le cadre de compétitions très valorisées au sein de l'université de Cambridge⁸⁵.

Les énoncés proposés dans les recueils de problèmes analysés ne sont pas uniquement des problèmes de construction géométrique. Nous avons trouvé aussi des théorèmes à démontrer et des lieux géométriques à déterminer.

Les journaux que sont la *Correspondance sur l'École polytechnique* et les *Annales de mathématiques pures et appliquées* proposent à leurs lecteurs des problèmes à résoudre, mais en dehors de deux ou trois énoncés classiques à l'époque, ils ne sont pratiquement pas repris dans les recueils étudiés. Concernant la circulation des énoncés entre ces recueils, il est remarquable que les énoncés circulent facilement entre géométrie élémentaire et application de l'algèbre à la géométrie. Quoi qu'il en soit, chacun de ces ouvrages résulte manifestement d'un important travail de compilation et d'organisation des énoncés, et de rédaction des solutions.

Nous avons examiné l'ensemble des énoncés proposés dans nos quatre recueils, dans le but de déterminer des énoncés que nous qualifierons de

84. Gergonne, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 10, p. 356.

85. Gascoigne, John, « Mathematics and meritocracy : the emergence of the Cambridge mathematical tripos », *Social studies of science*, vol. 14, n°4, 1984, p. 547-584.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

« classiques », dans la mesure où ils apparaissent dans plusieurs ouvrages et journaux, et servent de points de repère tant pour le niveau de difficulté atteint que pour l'efficacité de la méthode employée.

Il en résulte le tableau d'énoncés ci-dessous, pour lesquels nous avons indiqué leur place dans les ouvrages ou les journaux suivants :

Be	Bézout, <i>Cours de mathématiques</i> , Troisième partie, Paris : Richard, 1798.
La	Lacroix, <i>Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie</i> , 4 ^e édition, Paris : Courcier, 1807.
CEP	Hachette, <i>Correspondance sur l'école polytechnique</i> , Paris : Courcier, 1804-1816.
AMPA	Gergonne, <i>Annales de mathématiques pures et appliquées</i> , Paris : Courcier puis Bachelier, 1810-1832.
Pu	Puissant, <i>Recueil de diverses propositions de géométrie</i> , Paris : Duprat, 1801.
Ga	Garnier, <i>Recueil de théorèmes et de problèmes</i> , 2 ^{de} édition, Paris : Courcier, 1810.
R& D	Reynaud, Duhamel, <i>Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques</i> , Paris : Bachelier, 1823.
Rey	Reynaud, <i>Théorèmes et problèmes de géométrie</i> , 10 ^e édition, Paris : Bachelier, 1838.

IV.3 Conclusion

	Be	La	CEP	AMPA	Pu	Ga	R& D	Rey
Inscrire un carré dans un triangle	p. 300	p. 87						p. 35
Tracer par un point donné une droite qui intercepte sur un cercle donné une corde d'une longueur donnée	p. 319	p. 152			p. 40			p. 31
Mener une tangente commune à deux cercles					p. 38	p. 127	p. 251	p. 35
Construire un carré connaissant la différence entre la diagonale et le côté						p. 102	p. 251	p. 17
Construire un cercle tangent à trois cercles donnés			1, 18 ou 1, 194 ou 2, 271	7, 289 ou 11, 317 ou 18, 29		p. 150	p.275	
Inscrire un triangle dans un cercle de façon que ses trois côtés passent par trois points donnés				7, 325 ou 8, 141			p. 267	
Tracer une droite par un point donné dans un angle donné de manière à délimiter un triangle de surface donnée	p. 310						p. 265	p. 48
Étant donnés trois cercles, les centres de similitude des cercles pris deux à deux sont alignés				6, 384	p. 50	p. 156	p. 276	

Ce tableau est intéressant car il va de problèmes fort anciens, comme l'inscription d'un carré dans un triangle, à des problèmes qui font partie des préoccupations de la nouvelle géométrie, comme l'alignement des centres de similitude. Le tableau montre aussi le rôle joué par les nouvelles revues, qu'il soit instigateur ou diffuseur d'énoncés. L'éventail que propose l'ouvrage de Reynaud et Duhamel est remarquable, surtout dans la mesure où les auteurs se sont attachés à articuler les problèmes à un discours sur les méthodes de résolution.

4 Conclusion de la première partie

Nous avons mis à jour, dans les ouvrages dont hérite le XIX^e siècle, trois usages de la méthode qui recourt à l'emploi de l'algèbre en géométrie. Comme méthode de résolution des problèmes ; comme méthode d'invention de nouvelles propositions ; et comme méthode démonstrative uniforme au sein d'une théorie. La méthode est identifiée par Lacroix sous deux formes distinctes, l'analyse algébrique des figures, prisée pour sa simplicité, et la méthode des coordonnées, prisée pour sa généralité.

Les ouvrages de Lacroix et de Bézout se distinguent des ouvrages ultérieurs d'enseignement de l'application de l'algèbre à la géométrie, tous rédigés par des enseignants liés à l'École polytechnique. Parmi les trois usages repérés de l'analyse algébrique, ces derniers retiennent surtout la méthode démonstrative, employée pour établir les propriétés des courbes et des surfaces du second ordre principalement, conformément au programme d'admission à l'École polytechnique. Le pouvoir d'invention de la méthode n'est plus mis en avant. La résolution des problèmes, au premier plan dans les ouvrages de Bézout et de Lacroix, prend moins d'importance dans ces ouvrages de cours. Le cas échéant, elle est traitée par l'analyse algébrique des figures, ou par la méthode des coordonnées, ou les deux. Plusieurs problèmes de construction circulent entre tous ces ouvrages, comme l'inscription d'un carré dans un triangle, le partage d'un segment en moyenne et extrême raison, l'alignement des points de la droite dite d'Euler, la construction dans un angle droit d'une droite de longueur donnée passant par un point donné. Au fur et à mesure, apparaissent aussi des théorèmes à démontrer, des lieux géométriques à déterminer, et des problèmes de construction qui portent directement sur des sections coniques.

La notion même de problème de construction prête d'ailleurs à des interprétations variées, entre construction à la règle et au compas, construction avec d'autres lignes, en particulier des coniques, ou encore absence de tracé, au motif que les méthodes numériques d'approximation sont susceptibles d'apporter une meilleure précision que la construction graphique.

Dans cette même période, l'intérêt des géomètres pour les méthodes purement géométriques est ravivé, et suscite l'invention de nouvelles notions et de nouvelles méthodes, à l'instar de la *Géométrie descriptive* de Monge, organisée en une succession de problèmes de construction à résoudre ; de la *Géométrie de position* de Carnot, qui développe une notion de problème

IV.4 Conclusion de la première partie

général, et applique les propositions établies à la résolution de nombreux problèmes ; du *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet qui initie des conceptions élargies en géométrie rationnelle, et met à profit la méthode des projections. Ces méthodes de géométrie rationnelle apparaissent moins dans l'enseignement secondaire classique que dans l'enseignement industriel, où elles sont pour partie employées à des constructions élégantes, en montrant le chemin de l'invention, dans un contexte moins contraint par les programmes.

En prenant comme point de comparaison le modèle euclidien, dans lequel les problèmes sont des constructions géométriques à la règle et au compas qui fondent la connaissance des figures de la géométrie, quand les théorèmes en établissent les propriétés, il est apparu que les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire du début de cette première période se démarquent nettement de cette conception. Dans les *Éléments* de Bézout, de Legendre et de Lacroix, les problèmes de construction à la règle et au compas sont des applications, des corollaires ou encore des exercices, qui visent à mettre en œuvre la théorie, pour l'éclairer et en mesurer la portée. Dans le *Cours de géométrie élémentaire* de Vincent, les problèmes sont groupés par analogie thématique, et distingués entre problèmes graphiques de construction à la règle et au compas, et problèmes numériques de calcul arithmétique sur les mesures des grandeurs.

Enfin, Garnier et Reynaud publient des recueils de problèmes. Ils sont tous deux, ou ont été, professeurs et examinateurs à l'École polytechnique, et Garnier a fondé une École préparatoire au concours d'admission. Duhamel, qui publie l'un des recueils avec Reynaud, est un jeune polytechnicien professeur dans des institutions qui préparent à ce même concours. Leurs ouvrages sont conçus avant tout pour entraîner les élèves à la réussite des examens aux Écoles du gouvernement et au prestigieux concours général.

CHAPITRE IV. LA CONSTITUTION DE RECUEILS DE PROBLÈMES

Deuxième partie

Recrudescence des problèmes
et des méthodes dans les
ouvrages d'enseignement de la
géométrie (1836-1865)

Introduction

Dans la période précédente, l'enseignement des mathématiques s'est progressivement institutionnalisé de par la constitution d'une discipline scolaire autonome et d'un corps enseignant avec ses propres modalités de recrutement⁸⁶. Cet enseignement mathématique s'est doté aussi de programmes qui seront désormais de plus en plus détaillés. Les concours et les examens jouent un rôle majeur dans l'élaboration de ces programmes : ils permettent aux candidats, et à leurs professeurs, d'avoir une connaissance objective et précise des sujets sur lesquels ils sont susceptibles d'être interrogés. Les programmes sont ainsi détaillés en 1833 pour les collèges de Paris et de Versailles dans le souci d'uniformiser la préparation au concours général. En 1843, le programme de la classe de mathématiques élémentaires est celui du baccalauréat, servant aussi de programme pour les Écoles de médecine, de Saint-Cyr, des Eaux et forêts et de la Marine. Celui de mathématiques spéciales est le programme d'admission à l'École polytechnique, servant aussi de programme d'admission à l'École normale supérieure. Il est beaucoup plus détaillé qu'il ne l'était jusqu'à présent. Voici les têtes de chapitres des programmes de ces deux classes, auxquelles les élèves accèdent parfois directement après la classe de 4^e ou de 3^e :

Mathématiques élémentaires	Arithmétique, Géométrie, Algèbre, Trigonométrie rectiligne.
Mathématiques spéciales	Algèbre, Géométrie descriptive, Trigonométrie, Géométrie analytique

Le baccalauréat ès lettres, créé en 1808, ne présentait que très rarement des questions de sciences ou de mathématiques. Le Ministre de l'Instruction publique Victor Cousin, en 1840, rend obligatoires les questions de sciences au baccalauréat, questions qui sont alors tirées au sort dans une liste officielle présentant notamment cinquante questions d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre élémentaires parmi cinq cents questions en tout⁸⁷. Les questions de géométrie réunissent des définitions, des théorèmes et des problèmes appartenant aux *Éléments de géométrie*. Ce baccalauréat ès lettres est exigé pour passer le baccalauréat ès sciences, créé en 1821, et exigé à l'admission des

86. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, tome 1 : 1789 - 1914*, p. 32.

87. Prost, *Regards historiques sur l'éducation en France*, Belin, 2007, p. 240.

Écoles du gouvernement, sauf l'École navale⁸⁸.

Le programme de l'examen d'admission à l'École polytechnique joue véritablement un rôle structurant sur l'ensemble de l'enseignement secondaire des mathématiques. Le nombre de candidats à ce concours augmente régulièrement, passant de moins de trois cents candidats en 1827 à huit cents dans les années 1840. Dans ces mêmes années, mille des cinq mille cinq cents élèves des collèges parisiens fréquentent les classes de mathématiques élémentaires et spéciales. En y ajoutant les élèves de province et ceux qui préparent les examens d'Écoles de niveau inférieur, quatre mille élèves de l'enseignement secondaire étudient les mathématiques autour de 1850⁸⁹. Les manuels rédigés par certains examinateurs - Reynaud, Lefébure de Fourcy, Bourdon - revêtent une importance capitale pour les candidats, qui y trouvent les questions sur lesquelles ils seront interrogés, et surtout leurs réponses sous la forme attendue. Cette situation, jugée anormale, amène à l'interdiction pour les examinateurs, après 1848, de publier des ouvrages portant sur les sujets d'examen.

Certaines institutions privées proposent aux élèves qui se préparent aux examens d'admission aux Écoles du gouvernement, en plus du logement, une solide préparation spécifique faite de répétition des cours et d'interrogations individuelles. Après la loi Falloux de 1850 et la libéralisation de l'enseignement, ces institutions ne sont plus tenues d'envoyer leurs pensionnaires dans les lycées, et ces derniers, pour faire face à la concurrence, développent progressivement une offre semblable pour leurs élèves⁹⁰.

En 1840, l'enseignement scientifique dans les lycées a connu un nouveau recul. Le ministre Cousin, défenseur des humanités classiques, renvoie alors, comme cela avait été fait en 1821, l'enseignement des mathématiques à la classe de philosophie. Un enseignement spécial, davantage tourné vers la pratique, est institué en parallèle de l'enseignement classique. En 1847, cet enseignement spécial « pour les élèves des collèges qui se destinent à la pratique de l'agriculture, de l'industrie, du commerce et des arts⁹¹ », se voit fixer des programmes officiels. Les ouvrages de Dupin, de Bergery et de Sonnet sont cités en exemple dans ces programmes, dont voici la partie concernant les

88. Pour le programme du baccalauréat ès sciences en 1859, voir annexe 6.

89. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, tome 1 : 1789 - 1914*, p. 41.

90. Belhoste, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIX^e siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, 90, 2001, p. 101-130.

91. Bulletin universitaire, tome 18, p. 189.

mathématiques en 1849 :

Année	Contenus
1 ^{ère} année	Arithmétique, Géométrie plane, Algèbre
2 ^e année	Arithmétique, Géométrie [dans l'espace], Algèbre, Géométrie descriptive, Trigonométrie
3 ^e année	Géométrie descriptive, Épures, Applications de l'algèbre à la géométrie

Cet intérêt pour les applications pratiques des sciences en général se traduit par la publication de manuels qualifiés de « nouveaux », et la réédition de manuels antérieurs considérés comme étant mieux adaptés à cet objectif, comme ceux de Bézout.

En 1852, la réforme de la bifurcation tente de résoudre le dilemme entre des élèves qui se préparent aux Écoles du gouvernement et ne souhaitent pas compléter leur formation classique, et d'autres qui ne souhaitent pas approfondir leurs connaissances scientifiques au-delà de l'exigence du baccalauréat ès lettres⁹². Cette réforme est supportée par des savants qui défendent un enseignement secondaire utile, et rallie ceux qui se préoccupent de la modernisation économique du pays. Elle vise aussi à faire face à la concurrence de l'enseignement libre officiellement autorisé par la loi Falloux de 1850. Elle propose donc deux parcours en parallèle à partir de la classe de troisième, chacun aboutissant à son propre baccalauréat, ès lettres ou ès sciences, le premier n'étant dès lors plus exigé pour obtenir le second. Cette réforme est imposée de façon autoritaire, et « les programmes et les instructions, qui arrêtent dans le plus grand détail les matières et les méthodes du cours, doivent être impérativement respectées par les professeurs »⁹³. Pour la nouvelle section de sciences, l'utilité, la simplicité et le souci d'applications pratiques doivent guider les enseignements. Ainsi, de nombreux manuels sont rédigés ou repris pour respecter ces programmes très directifs. Ces manuels reproduisent d'ailleurs dans leurs premières pages l'intégralité des programmes concernés par le sujet. Le programme est le suivant pour les premières classes, communes :

92. Sur la réforme de la bifurcation, voir Hulin, Nicole, « À propos de l'enseignement scientifique : une réforme de l'enseignement secondaire sous le Second Empire, la "bifurcation" », *Revue d'histoire des sciences*, 35, 1982, p. 217-245.

93. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, tome 1 : 1789 - 1914*, p. 44.

Classe		Contenus
Division de grammaire	6 ^e et 5 ^e	Révision des exercices pratiques de calcul
	4 ^e	Notions d'arithmétique et de géométrie

Et pour la division supérieure scindée en deux :

Classe	Section des lettres	Section des sciences
3 ^e	Notions de géométrie	Arithmétique, Algèbre, Géométrie (figures planes)
Seconde		Géométrie (figures dans l'espace), Trigonométrie rectiligne
Rhétorique		Révision de l'Arithmétique, de l'Algèbre, de la Trigonométrie. Notions sur quelques courbes usuelles.
Logique	Arithmétique, Géométrie plane, Géométrie à trois dimensions	Révisions

Les élèves de la section des sciences ont aussi un cours de *Dessin linéaire* à raison de deux heures par semaine durant les quatre années de la section, contenant des dessins d'ornement, de géométrie élémentaire, de levé des plans, de lavis, de coupe de bâtiment, de nivellement, de cartes géographiques et de machines. Deux ans après la mise en œuvre de la réforme, le ministre Fortoul rédige, à partir des rapports d'inspection, des instructions pédagogiques à destination des enseignants de cette nouvelle section des sciences :

Le succès de tout enseignement mathématique exige absolument l'emploi d'un livre. Que ce traité soit succinct, borné aux matières du programme, qu'en aucun cas il ne dépasse deux cents pages [...]

Le livre placé entre les mains de l'élève a pour but non seulement de l'aider à retrouver hors de la classe le sens précis des énoncés et des explications, mais encore de le dispenser de l'obligation de faire des rédactions complètes sur les leçons qu'il reçoit, des traités *ex professo* sur la matière de chaque cours⁹⁴.

94. « Instruction pour la mise à exécution du plan d'études des lycées », *Bulletin admi-*

Dans le même texte, Fortoul prône un enseignement simple et intuitif de la géométrie élémentaire, et en appelle à la légitimité de Clairaut et de Bézout, dont il cite longuement les *Éléments* de géométrie, pour s'opposer à un enseignement d'emblée dogmatique de cette géométrie élémentaire. Soucieux avant tout d'évidence, il s'oppose à l'emploi de la méthode de réduction à l'absurde et lui préfère les méthodes directes. De la même façon, il impose le recours aux rapports à la place des proportions. Il préconise alors de mettre les *Éléments* de Lacroix entre les mains des élèves, « jusqu'à ce qu'un ouvrage complètement conforme au programme ait pu être prescrit »⁹⁵, et engage les professeurs à soumettre des exercices aux élèves pendant le cours de géométrie :

Les exercices numériques commenceront à l'occasion des relations qui existent entre les côtés d'un triangle et les sommets formés par les perpendiculaires abaissés des sommets. On exercera les élèves à faire des applications des formules [...] c'est le seul moyen d'en faire bien comprendre le sens, de les fixer dans l'esprit des élèves. [Quant aux] énoncés relatifs à la mesure des aires et des volumes, [...] on les fera mieux saisir en insistant sur leurs applications par un grand nombre d'exemples⁹⁶.

La réforme de la bifurcation de 1852 sera considérée comme un échec. Elle rencontre l'opposition de nombreux protagonistes, et ne répond pas de façon satisfaisante aux attentes des différentes catégories d'élèves. Peu à peu amendée, elle est définitivement abandonnée en 1864.

Sous l'Empire, la corporation qu'est l'Université devient une administration, centralisée et autoritaire, et dirigée, de 1852 à 1869, par trois ministres seulement⁹⁷. Les inspecteurs généraux, par leur tournées, tiennent le ministère informé des pratiques des enseignants et veillent à l'exécution de ses instructions. Une agrégation des sciences mathématiques est créée en 1840 par Victor Cousin⁹⁸. Elle se déroule sur le même modèle que l'agrégation antérieure, à savoir en trois étapes : deux compositions écrites, puis une épreuve d'argumentation et enfin une leçon sur une matière choisie parmi

nistratif, 1, tome 5, p. 339, in Belhoste, *Op. Cit.*, p. 328.

95. *Ibid.*, p. 338.

96. *Ibid.*, p. 341.

97. Prost, Antoine, *Histoire de l'enseignement en France. 1800-1967*, Paris : Colin, 1968, p. 30.

98. Hulin-Jung, Nicole, *L'organisation de l'enseignement des sciences. La voie ouverte par le second empire*, Paris : C.T.H.S., 1989, p. 189-220.

celles enseignées dans les Collèges royaux. En 1852, Fortoul revient à une agrégation des sciences, l'épreuve d'argumentation est supprimée, les compositions écrites sont portées au nombre de trois pour les mathématiques, les sciences physiques et les sciences naturelles et les leçons sont au nombre de trois également. En 1858, l'agrégation des sciences mathématiques est rétablie.

Cette deuxième période s'ouvre sur la publication par Michel Chasles de l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, qui présente les apports récents de la géométrie rationnelle et montre comment ils se constituent en méthodes d'invention en géométrie. Un second ouvrage, publié en 1852, le *Traité de géométrie supérieure*, réorganise les connaissances actualisées en géométrie rationnelle d'une façon cette fois entièrement déductive. Quelles sont les caractéristiques de la notion de méthode dans ces deux ouvrages qui semblent très différents ? Les ouvrages d'enseignement reprennent-ils les notions et les méthodes qu'y développe Chasles ?

Pour ce qui concerne la géométrie analytique, le *Traité élémentaire de géométrie analytique* d'Auguste Comte, publié en 1843, fait grand cas, comme Chasles, de la généralité en géométrie, et propose un enseignement renouvelé de cette matière. Quelles conséquences l'exigence de généralité a-t-elle sur le *Traité* de Comte ? Quel rôle y jouent les problèmes ? L'enseignement de la géométrie analytique dans les classes de mathématiques spéciales reprend-il les idées de Comte ?

Cette deuxième période voit le nombre de problèmes augmenter considérablement dans de nombreux ouvrages d'enseignement de la géométrie. Elle s'ouvre aussi avec la publication en 1836 par l'inspecteur Georges Ritt de plusieurs recueils de problèmes de géométrie élémentaire, de géométrie analytique et d'algèbre contenant chacun plusieurs centaines d'énoncés. Progressivement, de nombreux ouvrages proposent, à côté des théorèmes, des questions à résoudre en nombre conséquent. Quels choix font les auteurs entre problèmes graphiques, problèmes numériques et problèmes spéculatifs ? Entre problème à résoudre, théorème à démontrer, et lieu géométrique à déterminer ? Comment sont organisés ces énoncés au sein des ouvrages ? Comment sont-ils articulés à la théorie ? Quelle réflexion pédagogique et épistémologique accompagne le cas échéant cette importance quantitative donnée aux énoncés de problèmes ?

Face à une présence croissante des problèmes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie, quel intérêt portent les auteurs à la question de la méthode à employer pour les résoudre ? L'idée développée par Lamé de grou-

per les problèmes selon la méthode employée à leur résolution dans le but d'exhiber des procédés particuliers se retrouve-t-elle dans les ouvrages d'enseignement ? En géométrie analytique, la difficulté rapidement atteinte par la résolution des équations suggère-t-elle de recourir à des moyens particuliers ?

CHAPITRE V

MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

La recherche de la généralité dans les raisonnements et dans les conceptions est un trait commun à la plupart des recherches géométriques du début du siècle. Elle est inhérente à l'édification d'une géométrie synthétique qui pourrait concurrencer la puissance des procédures algébriques¹. Ainsi, la géométrie projective de Jean Victor Poncelet permet un traitement général des coniques, mais son principe de continuité va plus loin, en procurant un moyen général de conserver des propriétés des figures. L'argument de la généralité en géométrie est présent, aussi bien chez lui, que chez Carnot et Michel Chasles. L'introduction de nouvelles méthodes se traduit aussi par de nouvelles considérations sur ce qu'on appelle « analyse » et « synthèse », ceci tout au long du siècle et selon des acceptions diverses, dans des textes qui s'adressent aussi à des professeurs. Mais la préoccupation vis-à-vis de la généralité n'est pas restreinte aux tenants de la géométrie synthétique, comme le montrent les écrits d'Auguste Comte. Nous proposons dans ce chapitre de nous rapporter aux conceptions de la généralité chez Chasles et chez Comte, et de nous intéresser à leur répercussions sur les ouvrages d'enseignement².

Notre deuxième période s'ouvre ainsi sur la publication par le mathématicien Michel Chasles d'un ouvrage qui recense et organise les progrès

1. Chemla, Karine, « Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaus », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, 1998, p. 163-190.

2. Nabonnand, Philippe, « L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles », in Flament, Dominique, Nabonnand, Philippe (dir.), *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la maison des sciences de l'homme, 2011, p. 17-47

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

récents de la géométrie « pure », c'est-à-dire indépendante des calculs algébriques sur les coordonnées. Il qualifie les théories géométriques qu'il expose de « méthodes ». Pour quelles raisons ? En quoi ces théories fonctionnent-elles comme des méthodes ? Quelles en sont les caractéristiques attachées à ce choix sémantique ?

Devenu académicien et titulaire d'une chaire de géométrie supérieure à la faculté des sciences, Chasles publie, quinze ans plus tard, un autre ouvrage de géométrie, qui prend celui-là la forme d'un *Traité*, et dans lequel il entreprend d'exposer les théories de la géométrie moderne dans un cadre unifié, et uniforme du point de vue de la méthode de démonstration. Quelle forme prennent les théories permettant cette unification ? En quoi la notion de méthode est-elle différente dans ce nouvel ouvrage en comparaison avec le précédent ?

Le philosophe Auguste Comte, polytechnicien, professeur de mathématiques et examinateur à l'École polytechnique, publie en 1843 un traité de géométrie analytique dans lequel il se démarque des ouvrages contemporains sur cette matière. Se revendiquant des conceptions cartésiennes, il prône l'enseignement de théories générales traitées par des méthodes uniformes. En quoi se distingue-t-il des ouvrages qu'il critique ? Quelles sont les méthodes uniformes qu'il décrit et comment sont-elles articulées avec les théories ?

Ces deux auteurs apportent des éléments nouveaux sur la conception de la notion de méthode en géométrie. Personnalités occupant des responsabilités de premier plan, quel écho rencontrent leurs idées dans les ouvrages d'enseignement ? Pouvons-nous repérer des modifications dans les contenus, dans l'ordre d'exposition, dans le choix des méthodes retenues, qui soient conformes aux conceptions que défendent Chasles et Comte dans leurs ouvrages ?

1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

Michel Chasles (1793-1880) est sorti de l'École polytechnique en 1814, et la fortune de son père le dispense de travailler. Il publie en 1837 l'*Aperçu*

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

*historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*³, qui expose en cinq périodes l'histoire de la géométrie, et surtout met en valeur les découvertes récentes de la géométrie qu'il appelle « pure », pour convaincre son lecteur qu'elle dispose de ressources équivalentes à la géométrie analytique. Il ne précise pas à qui s'adresse son ouvrage ; son lecteur peut y trouver aussi bien un intérêt historique qu'épistémologique et mathématique. En 1841, il accepte un poste d'enseignant à l'École polytechnique pour les machines, l'hydraulique, l'astronomie et la géodésie. En 1846 est créée pour lui à la Faculté des sciences de Paris une chaire de géométrie supérieure. Le cours qu'il y enseigne aboutit à la publication du *Traité de géométrie supérieure*⁴ en 1852, alors qu'il vient d'être reçu à l'Académie des sciences. Cet autre ouvrage est absolument différent du premier, il s'agit d'un traité qui réorganise de manière déductive, par une méthode démonstrative uniforme et nouvelle, les propositions de la géométrie de la ligne droite et du cercle, incluant les propositions récemment découvertes. Il s'adresse manifestement à des lecteurs qui souhaitent étudier la géométrie exposée dans son cours au Collège de France.

Dans l'*Aperçu*, Chasles met en avant la notion de méthode en géométrie pure dans les travaux des géomètres passés et contemporains. Quelles sont les caractéristiques de cette notion de méthode dans l'ouvrage ? Quelles sont ces méthodes qui permettent à l'auteur d'affirmer que la géométrie pure peut rivaliser avec l'analyse algébrique ?

Dans le *Traité*, Chasles expose une organisation nouvelle de la géométrie, qui procède du général au particulier au moyen de notions comme le rapport anharmonique.

Quelle est la réception de ces deux ouvrages dans les ouvrages d'enseignement ? Les notions nouvelles mises en valeur dans l'*Aperçu* se trouvent-elles dans les manuels de géométrie élémentaire ? Y sont-elles présentées comme des méthodes ? L'exposition de la géométrie élémentaire est-elle modifiée comme dans le *Traité* ?

3. Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*, Bruxelles : Hayez, 1837.

4. Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1852.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

1.1 L'*Aperçu historique* de Chasles (1837) : les méthodes de la « géométrie moderne »

Le premier tiers du 19^e siècle a vu plusieurs géomètres inventer et démontrer de nouveaux théorèmes en géométrie sans recourir à l'emploi de l'algèbre. Parmi les plus éminents de ces géomètres figurent Carnot, Brianchon, Poncelet, Dupin, ou encore Chasles. Leurs résultats sont diffusés dans leurs ouvrages, ainsi que dans des publications comme les *Annales de Gergonne* et le *Journal de l'École polytechnique*, le *Bulletin universel des sciences et de l'industrie*, et à l'étranger le *Journal de Crelle* et la *Correspondance mathématique et physique*. Chasles fait la revue des progrès de ce qu'il appelle « la géométrie pure » dans l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* de 1837 qui retrace les progrès de la géométrie depuis l'Antiquité. L'intention de l'auteur est de prouver que la « géométrie pure », c'est-à-dire la géométrie qui ne recourt pas au calcul algébrique sur les coordonnées, et donc pas non plus au calcul différentiel⁵, possède des ressources équivalentes à celles de l'« analyse algébrique », expression employée aussi bien par Poncelet que Chasles pour désigner l'ensemble des méthodes qui recourent au calcul sur les coordonnées en géométrie :

Aussi concluons-nous de notre aperçu, que les ressources puissantes que la Géométrie a acquises depuis une trentaine d'années sont comparables, sous plusieurs rapports, aux méthodes analytiques, avec lesquelles cette science peut rivaliser désormais, sans désavantage, dans un ordre très-étendu de questions⁶.

L'emploi du terme « méthodes » dès le titre de l'ouvrage, pour qualifier les usages des théories récentes de la géométrie pure, souligne le parallèle entre les résultats obtenus en géométrie pure et l'analyse algébrique. Quelles sont les caractéristiques de ces « méthodes » propres à la géométrie pure qui en font, du point de vue de Chasles, l'égale de l'analyse algébrique ? Dans quelle mesure la notion de méthode dont il s'empare est-elle comparable à l'analyse algébrique ?

Chasles dégage trois caractéristiques qui font des théories de la « géométrie moderne » de véritables méthodes dignes de concourir avec l'analyse

5. Kline, Morris, « Analytic and differential geometry in the eighteenth century », *Mathematical thought from ancient to modern times*, vol. 2, Oxford university press, 1972, p. 544-572.

6. Chasles, *Aperçu*, p. 2.

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

algébrique : la généralité, la fécondité et la simplicité. Il annonce ainsi dès les premières pages de l'*Aperçu* :

Nous avons eu en vue surtout [...] de montrer, par quelques exemples, que le caractère de ces doctrines [récentes] est d'apporter dans toutes les parties de la science de l'étendue une facilité nouvelle, et les moyens d'arriver à une généralisation, jusqu'ici inconnue, de toutes les vérités géométriques, ce qui avait été aussi le caractère propre de l'analyse, lors de son application à la géométrie⁷.

Chasles fait la revue des textes mathématiques qui constituent pour lui la géométrie récente. Il expose les « ressources puissantes » contenues dans les ouvrages, relativement récents, de Monge et de Carnot, dans les *Solutions peu connues* de Servois, dans les *Développements* et les *Applications de géométrie* de Dupin, dans les *Éléments de géométrie à trois dimensions* de Hachette, dans le *Mémoire sur les lignes du second ordre* et le *Mémoire sur l'application de la théorie des transversales* de Brianchon et encore le *Traité des propriétés projectives* de Poncelet ; ouvrages auxquels s'ajoutent divers mémoires de Gergonne, Quételet et Dandelin. À leur propos, il écrit :

De ces ouvrages, dont un mérite commun fut d'offrir, tous, des preuves convaincantes et multipliées des ressources infinies que la Géométrie pure peut puiser en elle-même, sont nées ces vérités simples et fécondes, qui attestent seules la perfection de la science dont elles sont les véritables bases : des théories, dont le germe se trouvait inaperçu, depuis des siècles, dans les écrits des géomètres, ont apparu, se sont développées rapidement, et ont donné lieu aux méthodes qui constituent la Géométrie récente⁸.

Les théories qui ont donné lieu à des méthodes sont caractérisées par la généralité, la fécondité et la simplicité, trois notions que nous allons préciser avant de les illustrer sur quelques exemples. La généralité d'un théorème tient au fait qu'il peut être étendu. Chasles distingue deux manières d'étendre un théorème, que nous illustrons par des exemples plus immédiats à saisir que ceux qu'il donne. Soit que son énoncé s'étende à d'autres figures que celles pour lesquelles il a été établi, comme par exemple une propriété du cercle peut s'étendre sans modification à toutes les coniques. Soit que le théorème

7. *Ibid.*, p. 2.

8. *Ibid.*, p. 215.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

s'avère être la formulation restreinte à un cas particulier d'un autre théorème plus général, comme par exemple le théorème de Pythagore est un cas particulier de la relation entre les trois côtés et un angle d'un triangle quelconque. Chasles cite au sujet de la généralité Fontenelle, qui affirme, au sujet des spirales, que « l'esprit de la Géométrie moderne [celle de 1704] est d'élever toujours les vérités soit anciennes, soit nouvelles, à la plus grande généralité qu'il se puisse⁹ ». Or le mot employé par Fontenelle n'est pas *généralité* mais *universalité*¹⁰. Chasles a peut-être supprimé la redondance dans l'expression « plus grande universalité », mais quoi qu'il en soit, sa généralité n'est effectivement pas une universalité puisque le domaine d'extension reste indéfini. La fécondité d'un théorème tient à ce que de nombreuses propositions peuvent en être déduites, plus ou moins directement, et la simplicité tient au sentiment d'évidence et à la rapidité de la démonstration.

Chasles distingue « quatre grandes divisions auxquelles on pourrait rattacher, sous le point de vue philosophique des méthodes, dans l'état actuel de la Géométrie, la plupart des ses nombreuses découvertes récentes ». Ces divisions sont la théorie des transversales, la transformation des figures en d'autres du même genre, la théorie des polaires réciproques et la projection stéréographique. Les exemples qui suivent relèvent successivement des trois premières divisions principales établies par Chasles, et montrent en quoi les théories sont caractérisées par la généralité, la fécondité et la facilité. Nous suivons l'ordre d'exposition de Chasles, et nous citons des passages des ouvrages auxquels il se réfère.

La théorie des transversales

Carnot revendique dans les premières lignes de l'*Essai sur la théorie des transversales*¹¹ la simplicité et la fécondité de sa théorie :

La théorie des transversales est curieuse par elle-même, et fournit souvent des démonstrations et des solutions très élégantes, dans des questions compliquées. La simplicité et la fécondité de ses principes sembleraient lui donner le droit d'être admise dans les

9. *Ibid.*, p. 269.

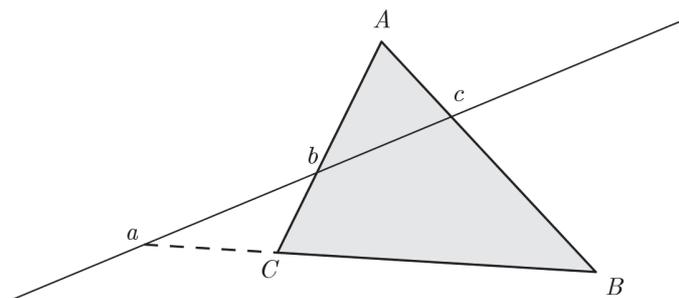
10. Fontenelle, « Sur les spirales à l'infini », *Histoire de l'Académie royale des sciences, Année 1704*, Paris : Gabriel Martin, 1745.

11. Carnot, *Mémoires sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace ; suivi d'un Essai sur la théorie des Transversales*, Paris : Courcier, 1806.

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

éléments ordinaires de Géométrie ¹².

Théorème fondamental de la théorie des transversales : $\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb}$



La généralité aussi est une caractéristique de la théorie des transversales soulignée par Carnot, juste après la démonstration du théorème fondamental sur la relation entre les segments faits par une transversale à un triangle. En effet, Carnot écrit :

Ce théorème, qui doit être regardé comme le principe fondamental de toute la théorie des transversales, est susceptible d'une très-grande généralisation : car il s'étend, comme on le verra par les théorèmes qui suivent, à tous les polygones soit plans, soit gauches, et même aux polygones sphériques ¹³.

Cette dernière citation explicite en quoi réside la généralité de la théorie des transversales : ses résultats, obtenus pour des triangles, peuvent être étendus à bien d'autres figures, à savoir tous les polygones plans, gauches et sphériques. Voyons maintenant en quoi la théorie des transversales est simple et féconde. Ses principes généraux sont suivis d'applications. La première d'entre elles est justement la démonstration d'un résultat établi par Monge, à savoir que, étant donnés trois cercles, les trois points d'intersection des tangentes communes à chaque paire de deux cercles sont alignés.

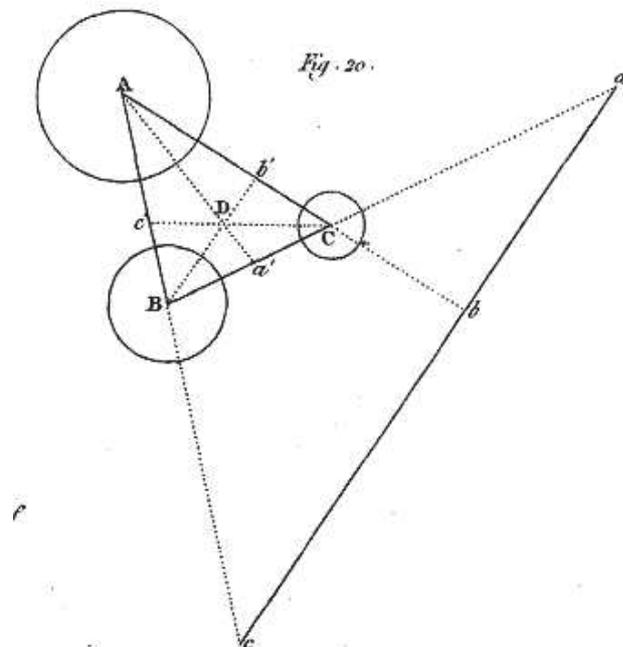
Carnot considère trois cercles A , B , et C , dont les noms désignent à la fois les centres et les rayons, et écrit, sans les justifier, les trois relations :

$$A : B :: \overline{Ac} : \overline{Bc} \quad ; \quad B : C :: \overline{Ba} : \overline{Ca} \quad ; \quad C : A :: \overline{Cb} : \overline{Ab}$$

¹². *Ibid.*, p. 65

¹³. Carnot, *Op. Cit.*, p. 67.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES
OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE



Le produit de ces proportions donne :

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb} :$$

Cette relation prouve l'alignement des trois points a , b et c . Cette démonstration est simple : elle tient en quelques lignes et ne demande que d'écrire une proportion dans trois paires de triangles semblables, puis de composer ces proportions entre elles. Elle montre aussi la fécondité de la théorie des transversales puisque le résultat est essentiellement déduit du théorème fondamental cité ci-dessus, ou plus précisément de sa réciproque.

La transformation des figures

Avant d'illustrer la méthode par transformation des figures, remarquons que Chasles n'intègre pas la Géométrie descriptive de Monge au sein des grandes divisions dans lesquelles il regroupe les méthodes de la géométrie récente. Pourtant il fait l'éloge des travaux de Monge qui, en forçant à concevoir des corps fictifs dans l'espace, familiarisent avec les conceptions idéales de ceux-ci, et renforcent les moyens d'investigation géométrique :

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

La Géométrie descriptive, en un mot, fut propre à fortifier et développer notre puissance de conception ; à donner plus de netteté et de sûreté à notre jugement ; de précision et de clarté à notre langage ; et sous ce premier rapport elle fut infiniment utile aux sciences mathématiques en général¹⁴.

Il illustre la fécondité de la Géométrie descriptive par la propriété d'alignement des trois centres de similitude de trois cercles pris deux à deux. C'est que la géométrie descriptive permet de déduire d'un théorème sur les figures de l'espace un autre sur les figures du plan. En cela, la géométrie descriptive est caractérisée par sa fécondité :

Chaque épure de Géométrie descriptive pourra exprimer un théorème de Géométrie plane, et nous croyons pouvoir dire que cette voie ouvrira une mine féconde de vérités géométriques. Sous ce point de vue, la Géométrie descriptive de Monge offre une méthode de Géométrie rationnelle. Nous l'appellerons méthode de *Transmutation des figures*¹⁵.

Si la géométrie descriptive est bien fondée sur des projections, elle ne relève pas de la doctrine de transformation des figures en d'autres du même genre, puisqu'elle établit des corrélations entre des figures de l'espace et des figures du plan. C'est pourquoi Chasles lui donne, en tant que méthode, ce nom particulier de *Transmutation des figures* et lui attribue une place à part dans son classement des méthodes.

La première méthode qui illustre la transformation des figures en d'autres du même genre, et à laquelle nous nous restreindrons ici, est la perspective. Il s'agit de la projection conique d'une figure plane sur une autre figure plane, et non d'une projection orthogonale d'une figure de l'espace sur un plan comme nous venons de le voir en géométrie descriptive. Les usages de la perspective, écrit Chasles, se sont étendus et souvent répétés depuis les ouvrages de Desargues et de Pascal. Voici un exemple de cette transformation, tiré d'un mémoire de Brianchon¹⁶, qui étend à tous les quadrilatères un théorème établi pour les seuls parallélogrammes.

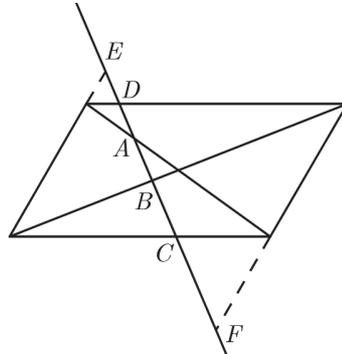
Un parallélogramme, avec ses deux diagonales, étant coupé par une droite quelconque ; soit AB , CD , EF , les portions de cette transversale comprises, entre les deux diagonales, et entre les deux

14. *Aperçu*, p. 190.

15. *Ibid.*, p. 194.

16. Brianchon, *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Paris : Bachelier, 1817, p. 10.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE



couples de côtés opposés, respectivement ; la comparaison des triangles semblables donne :

$$\frac{EA}{ED} = \frac{FA}{FC} \quad \frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FD} \quad \frac{CA}{CF} = \frac{DA}{DE} \quad \frac{CB}{CE} = \frac{DB}{DF}$$

d'où il conclut :

$$\frac{EA.EB}{EC.ED} = \frac{FA.FB}{FC.FD} \quad \text{et} \quad \frac{CA.CB}{CE.CF} = \frac{DA.DB}{DE.DF} \quad (\Delta)$$

Or, ces deux dernières relations ont lieu pour toutes les projections de la figure ; donc, elles subsisteront encore si, au lieu d'un parallélogramme, on considère un quadrilatère quelconque coupé par une transversale arbitraire.

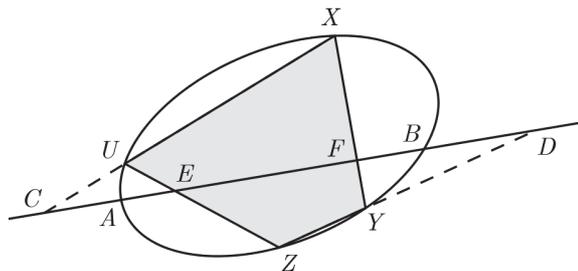
Effectivement, Brianchon a montré au début du mémoire qu'étant donnés quatre points A, B, C et D alignés, le rapport $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ est constant par projection, c'est-à-dire ici par perspective. Par conséquent il déduit de la relation trouvée pour le parallélogramme qu'elle subsiste pour toutes ses projections, c'est-à-dire pour un quadrilatère quelconque.

La méthode par transformation est générale dans cet exemple en ce qu'elle permet d'étendre à tous les quadrilatères une propriété établie pour le seul parallélogramme. En effet, un quadrilatère quelconque est bien la perspective d'un parallélogramme en prenant, comme droite à l'infini, la droite qui relie les deux points d'intersection de ses côtés opposés. La méthode est utilisée une deuxième fois dans ce mémoire pour étendre à une conique quelconque le théorème suivant :

Une droite étant menée à volonté dans le plan d'un quadrilatère $UXYZU$ inscrit dans une conique ; soient AB, CD, EF les portions de cette transversale comprises entre les deux branches de

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

la courbe, et entre les deux couples de côtés opposés, respectivement ; les six points A, B, C, D, E, F seront liés entre eux par les équations Δ ¹⁷.



Brianchon remarque par ailleurs que ce théorème est une extension du théorème précédent, si l'on considère le couple des diagonales du quadrilatère comme étant une conique particulière. Nous rencontrons ainsi les deux cas d'extension d'un théorème mentionnés par Chasles : dans le premier cas, le théorème est étendu d'un parallélogramme à un quadrilatère en général ; dans le deuxième cas, il est étendu d'un théorème sur le quadrilatère à un théorème sur le quadrilatère inscrit dans une conique.

La méthode est féconde, car les équations Δ permettent d'établir que « dans tout hexagone inscrit à une conique, les trois points de concours des côtés opposés sont en ligne droite¹⁸ », aujourd'hui appelé théorème de Pascal. Brianchon qualifie ce théorème de « principe », car il en a déduit toute sa théorie des pôles dans un cahier de 1807 du *Journal de l'École polytechnique*. Enfin la méthode est simple, car la manipulation de quelques relations sur les segments de la figure aboutit rapidement à des résultats qui ont demandé ailleurs de bien plus amples développements.

Le mémoire de Brianchon aborde aussi des problèmes de construction. Celui par exemple de la construction d'une conique lorsque certains éléments, points ou tangentes, en sont donnés, problème résolu par Newton dans les *Principes Mathématiques de la philosophie naturelle*¹⁹. Il s'agit d'une

17. Brianchon, *Op. Cit.*, p. 12.

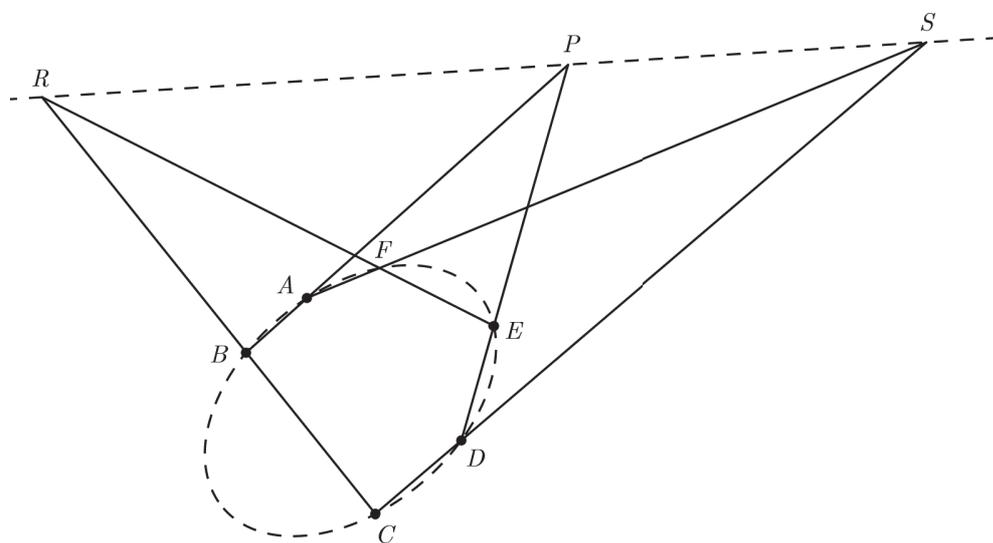
18. *Ibid.*, p. 17.

19. Newton, *Principes Mathématiques de la philosophie naturelle*, trad. Mme du Châtellet, Paris : Desaint & Saillant, et Lambert, 1759, p. 94.

Galuzzi, Massimo, « Newton et le problème de Pappus », www.culturemath.ens.fr, dernière consultation le 22/09/2014.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

construction par points, qui décrit un procédé permettant d'obtenir, en l'occurrence à la règle seule, un point quelconque de la conique. Ainsi, pour décrire la conique passant par cinq points donnés A, B, C, D, E , il cherche un sixième sommet F qui constituerait avec les cinq points donnés un hexagone inscrit $ABCDEF$ dans cette conique. Un tel hexagone a deux côtés opposés connus : AB et DE qui se coupent en P ; en faisant passer une droite quelconque par P , puis en menant successivement les droites BC, RE, CD et SA , le théorème de Pascal entraîne que le point F d'intersection des droites RE et SA appartient à la conique.



En modifiant la position de la droite variable, on obtient potentiellement tous les points de la conique, en n'utilisant que la règle.

Le recours à la perspective permet à Brianchon d'établir des propositions générales sur les coniques, de manière simple, et féconde. Ces propositions sont employées pour résoudre des problèmes de construction, qui viennent mettre en évidence la fécondité des méthodes.

Chasles donne d'autres exemples de la méthode de transformation des figures, comme la similitude ; il réunit ainsi sous une même dénomination et un même principe des méthodes « qui paraissent étrangères les unes aux autres, et sont destinées à des usages pratiques différents »²⁰.

20. Chasles, *Aperçu*, p. 223.

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

La théorie des polaires réciproques

La notion de polaire réciproque, que nous avons déjà rencontrée dans l'étude de la *Géométrie* de Bobillier, permet d'établir une dualité entre les propositions de géométrie. La dualité est un principe présenté par Gergonne dans ses *Annales*²¹, où il montre comment dans tout énoncé de géométrie qui ne fasse intervenir que des notions descriptives, c'est-à-dire ne dépendant « aucunement des relations métriques entre les parties de la figure », on peut intervertir les mots point et droite en géométrie plane, ou les mots point et plan en géométrie dans l'espace. Gergonne met en évidence cette corrélation en présentant les énoncés ainsi que leurs démonstrations dans deux colonnes en vis-à-vis contenant des textes identiques à l'interversion près des mots *point* et *droite*, ou *point* et *plan*. Voici en exemple l'énoncé du théorème dit aujourd'hui de Desargues et celui de son énoncé dual :

THÉORÈME. Si deux triangles sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs sommets correspondans concourent toutes trois au même point ; leurs côtés correspondans concourront en trois points qui appartiennent à une même ligne droite.

THÉORÈME. Si deux angles trièdres sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes trois dans un même plan ; leurs arêtes correspondantes détermineront trois plans qui se couperont suivant une même ligne droite.

La théorie des polaires réciproques va au-delà, d'une part en faisant se correspondre des courbes ou des surfaces plus générales que des points, droites et plans, et d'autre part en prenant en compte les relations métriques. Cette théorie est développée par Poncelet dans son *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* présenté à l'Académie des sciences en 1824 et publié dans le *Journal de Crelle* en 1829. Voici comment il présente son mémoire dans les *Annales de Gergonne* :

Le but que je me suis principalement proposé, et que je désirerais avoir atteint, est de rendre plus évidente encore, s'il est possible, cette sorte de *dualité* de la géométrie [...] Il n'existe, pour ainsi dire, aucune relation descriptive et suffisamment générale d'une figure donnée, sur un plan ou dans l'espace, qui n'ait son ana-

21. Gergonne, « Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue, *Annales de Gergonne*, tome 16, 1825-1826, p. 209-231.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

logue, ou plutôt sa réciproque, dans une autre figure, tout aussi générale que la première, et cela en vertu même de la théorie des *polaires réciproques* [...]

Le but principal que je me propose, dans ce mémoire, c'est d'examiner quelle espèce de modification éprouvent une figure donnée et les relations qui lui appartiennent, lorsque l'on passe à celle qui en est la polaire réciproque, et *vice-versa*, [...] de montrer comment on peut obtenir sur-le-champ et sans recourir à aucun calcul ou raisonnement, une, deux, ou trois autres propositions, tout-à-fait distinctes de la première et néanmoins tout aussi générales²².

La théorie des polaires réciproques se rapporte à toutes les propriétés descriptives des figures du plan et de l'espace, c'est-à-dire celles qui concernent les directions indéfinies, les intersections ou les contacts, mais aussi à certaines propriétés métriques, ainsi que l'établit Poncelet, par exemple les propriétés projectives lorsque la courbe auxiliaire est un cercle. Cette théorie est simple car on obtient « sur-le-champ » et par « un pur mécanisme » la démonstration de propositions élaborées. Enfin elle est féconde car elle donne lieu à une foule de propositions. Les *Annales de Gergonne* proposent à leurs lecteurs d'appliquer cette méthode d'invention à une proposition dont nous savons qu'elle est due à Puissant :

Il est connu que, si, dans l'intérieur d'un quadrilatère convexe, on décrit quatre cercles tels que chacun d'eux touche trois de ses côtés, les centres de ces quatre cercles appartiendront à une même circonférence. Quel est le théorème que l'on peut déduire de celui-là par la théorie des polaires réciproques ?²³.

Comme pour la transformation des figures en d'autres du même genre, Chasles évoque d'autres transformations qui aboutissent, comme la transformation par polaire réciproque, à la dualité des figures. Il souligne ainsi que la dualité n'est pas attachée à la théorie des pôles et polaires, mais qu'il s'agit bien d'une propriété générale de l'étendue.

22. Poncelet, « Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences », *Annales de Gergonne*, tome 17, 1826-1827, p. 265.

23. *Annales de Gergonne*, vol. 18, 1818, p. 88.

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

Conclusion

Chasles oppose les théories qu'il expose à la géométrie des Anciens, géométrie qu'il estime « hérissée de figures »²⁴, et manquant justement de « principes généraux et abstraits »²⁵ :

Chaque question ne pouvait être traitée qu'à l'état concret, sur la figure même qui était l'objet de cette question, et dont la vue seule pouvait faire découvrir les éléments nécessaires à la démonstration ou à la solution cherchée²⁶.

Munie de tels principes généraux et abstraits, contenus dans les théories qu'il a déclinées au long de l'ouvrage, la géométrie pure est enfin susceptible de rivaliser avec l'analyse algébrique :

Ces moyens, que possède la Géométrie récente, de multiplier ainsi à l'infini les vérités géométriques, peuvent être assimilés aux formules et aux transformations générales de l'algèbre, qui donne avec sûreté et promptitude la réponse aux questions diverses qu'on leur soumet [...]; ces moyens sont donc de véritables instruments, que ne possédait point l'ancienne Géométrie, et qui font le caractère distinctif de la Géométrie moderne.

Dans la Géométrie ancienne, les vérités étaient isolées; de nouvelles étaient difficiles à imaginer, à créer; et ne devenait pas géomètre inventeur qui voulait²⁷.

Chasles, effectivement, a particulièrement mis en évidence la puissance d'invention des nouvelles propositions, caractéristique des théories récentes, qui fonctionnent comme les instruments de cette invention. Les méthodes qu'il décrit ne consistent pas seulement à résoudre des problèmes ou démontrer des théorèmes : elles permettent aussi, et surtout, d'inventer de nouvelles propositions. L'ouvrage de Chasles est une revue des progrès récents de la géométrie qui organise la présentation de ces théories récentes de façon à en souligner le caractère méthodique. Car ces théories sont « éparses dans les mémoires de géomètres » :

24. Sur l'idée d'une géométrie sans figure, voir : Volkert, Klaus, « A quoi sert la figure ? Le problème des polyèdres réguliers dans l'espace à quatre dimensions », in Barbin, E., Lombard, P. (dir.), *La Figure et la lettre*, Presses universitaires de Nancy, 2011, p. 241-256.

25. *Aperçu*, p. 208.

26. Chasles, *Aperçu*, p. 208.

27. *Aperçu*, p. 268.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

C'est là, je crois, la véritable cause de l'éloignement pour la Géométrie Rationnelle où l'on ne croit voir, et cette erreur est déplorable, qu'un chaos de propositions nouvelles trouvées au hasard, sans liaison entre elles et sans avenir pour un perfectionnement notable de la science de l'étendue²⁸.

Face à cet éparpillement des méthodes, Chasles entreprend de les relier entre elles au moyen de « grandes lois générales »²⁹ auxquelles se rattacherait les diverses méthodes particulières. Pour illustrer son ambition, il prend en exemple la loi de gravitation universelle de Newton ou encore le calcul infinitésimal de Leibniz qui ont permis d'exprimer des collections de résultats partiels dans un même langage et une intelligence commune. Le projet de Chasles est donc de regrouper et d'organiser les théories récentes de la géométrie pure pour mettre en évidence les liens qu'elles ont entre elles, avec l'ambition à terme de les reformuler dans le cadre d'un nombre restreint de « principes généraux »³⁰. Car le classement opéré par Chasles dans son *Aperçu* ne le satisfait pas pleinement. Il veut relier entre elles les méthodes et les faire dépendre d'un nombre restreint de principes :

[Cette division] fait voir, par le manque de généralité et de caractère précis d'une foule de théorèmes qui se rattachent aux méthodes que nous venons d'indiquer, que ces méthodes elles-mêmes n'ont point encore l'étendue, la fécondité et le degré de puissance désirables³¹.

Il projette « de coordonner entre elles toutes ces vérités partielles et isolées, de les faire dériver toutes de quelques-unes seulement prises parmi les plus générales, et de rattacher celles-ci aux méthodes³² ». Ce projet n'est pas abouti lors de la rédaction de son *Aperçu*, et il prévoit d'écrire ultérieurement un second ouvrage qui le réaliserait pleinement, et qui serait intitulé *Essais de complément de géométrie rationnelle*³³. Néanmoins l'*Aperçu* est suivi d'un mémoire qui amorce ce travail et expose deux principes généraux de l'étendue dont dépendent les méthodes comprises dans les deuxième et troisième divisions. La transformation des figures en d'autres du même genre dépend

28. Chasles, *Aperçu*, p. 253.

29. Chasles, *Aperçu*, p. 267.

30. Chasles, *Aperçu*, p. 254.

31. *Aperçu*, p. 221.

32. *Ibid.*, p. 253.

33. *Aperçu*, p. 254.

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

du principe d'homographie, et la théorie des polaires réciproques dépend du principe de dualité.

1.2 Le *Traité de géométrie supérieure* (1852) : pour un procédé uniforme de démonstration

Comme annoncé dans l'*Aperçu*, Chasles écrit, quinze ans plus tard, un second ouvrage de géométrie, le *Traité de géométrie supérieure*³⁴. Il est alors titulaire de la chaire de géométrie supérieure à la Faculté des sciences de Paris, et le *Traité* est le fruit des leçons qu'il donne dans ce cadre. Il ne correspond pas du tout à l'ouvrage annoncé à la fin de l'*Aperçu*. Il ne s'agit plus cette fois de classer les théories récentes pour les faire dépendre d'un nombre restreint de principes, mais de rédiger un « Traité complet », qui organise les propositions de géométrie en un « corps de doctrine »³⁵. Il se distingue de l'ouvrage précédent par l'« uniformité de la méthode de démonstration », écrit son auteur. Chasles n'y emploie pas les méthodes de transformation exhibées dans l'*Aperçu* pour démontrer les théorèmes qu'il contient. Ces méthodes sont reléguées à la fin de l'ouvrage et remplacées par des démonstrations directes, appuyées sur des théories qui s'avèrent fécondes :

Pourquoi l'on ne fait pas usage, dans le cours de cet ouvrage, des méthodes de transformation.

608. Par les méthodes de transformation, on fait un théorème déterminé avec un autre théorème déjà connu. On peut former ainsi une collection plus ou moins ample de propositions. Mais ces propositions sont en quelque sorte isolées ; elles manquent de liens entre elles ; on ne saurait les déduire les unes des autres, lors même qu'on voit qu'elles se rapportent à une même théorie ; on ne connaît que leurs liaisons avec celles d'où on les a déduites, l'une de l'autre respectivement, par voie de transformation, mais non par voie de composition ou de synthèse.

Nous avons cherché, au contraire, à former un ensemble de propositions constituant, par leur enchaînement naturel, des théories et un corps de doctrine susceptibles d'applications fécondes dans toutes les parties de la Géométrie. Il nous a donc fallu démontrer directement chacune des propositions, les unes au moyen des

34. Chasles, Michel, *Traité de géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1852.

35. Chasles, *Traité*, p. I.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

autres, par les propres ressources que peuvent offrir les théories auxquelles elles se rapportent [...] Nous ne ferons donc point usage, dans le cours de cet ouvrage, de la théorie des figures corrélatives, ni même de celle des figures homographiques [...] Par exemple, quand par cette méthode on conclut d'une simple propriété du cercle, un théorème des sections coniques, la démonstration relative au cercle est peu propre, en général, à répandre quelque jour sur la marche qu'il faudra suivre pour démontrer directement le théorème sur la section conique. [...] En se privant du secours de ces méthodes, on se crée parfois des difficultés; mais ce n'est pas sans utilité, parce que l'obligation de démontrer par les ressources naturelles du sujet certaines propositions qui auraient pu se conclure par des méthodes de transformation, met toujours sur la voie de beaucoup d'autres vérités qui accroissent souvent d'une manière inattendue et fort propice le sujet que l'on traite³⁶.

Le *Traité* expose donc des théories permettant de démontrer, directement sur la figure considérée, les résultats acquis par la géométrie du XIX^e siècle et dont nous avons rencontré plus haut quelques exemples. Les méthodes de transformation sont écartées, parce qu'elles empruntent des ressources extérieures au sujet, en raisonnant sur une autre figure que celle considérée, par exemple en déduisant des propriétés des coniques à partir de propriétés du cercle. Au contraire, Chasles veut se restreindre aux « ressources naturelles » du sujet, et donc prouver des théorèmes sur les coniques à partir de propriétés établies pour les coniques.

La notion centrale dans ce traité est celle de rapport anharmonique. Le rapport anharmonique de quatre points a, b, c, d situés en ligne droite est donné par l'expression :

$$(a, b, c, d) = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

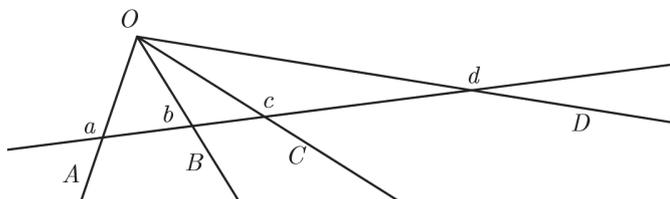
Lorsque ce rapport est égal à - 1, les quatre points forment une division dite harmonique. Le rapport anharmonique ne change pas par projection.

Pour l'établir, Chasles s'appuie sur la figure et exprime dans les triangles aOc et aOd les égalités :

$$\frac{\sin aOc}{\sin c} = \frac{ac}{aO}, \quad \frac{\sin aOd}{\sin d} = \frac{ad}{aO}$$

36. Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, p. 434.

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles



D'où il déduit la relation :

$$\frac{\sin aOc}{\sin aOd} = \frac{ac}{ad} : \frac{\sin c}{\sin d} \quad \text{et de même} \quad \frac{\sin bOc}{\sin bOd} = \frac{bc}{bd} : \frac{\sin c}{\sin d}$$

De là l'égalité :

$$\frac{\sin aOc}{\sin aOd} : \frac{\sin bOc}{\sin bOd} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

Dès lors, le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d , ne dépend que des angles que font entre elles les quatre droites A, B, C, D , et donc toute autre sécante à ces droites les coupe selon quatre points dont le rapport anharmonique est le même. Une autre conséquence de cette démonstration est la possibilité de définir le rapport anharmonique des quatre droites A, B, C, D , et nous voyons que quatre droites menées d'un point quelconque aux quatre points a, b, c, d , auront encore le même rapport anharmonique.

Chasles développe dans une première partie de l'ouvrage des notions générales formulées au moyen de ce rapport anharmonique, comme la division homographique et l'involution. Nous allons expliciter chacune de ces deux notions, et montrer comment leurs propriétés sont employées à la démonstration des théorèmes.

Lorsque les points de deux droites se correspondent un à un, de manière que le rapport anharmonique de quatre points de l'une soit égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de la deuxième, les points de division de chacune des droites forment deux divisions dites homographiques³⁷. Ce terme est dérivé de celui d'homographie introduit par Chasles dans l'*Aperçu* pour désigner toute correspondance entre deux figures qui associe des points, des droites et des plans de la première, à des points, des droites et des plans de la deuxième, en sorte que le rapport anharmonique soit conservé.

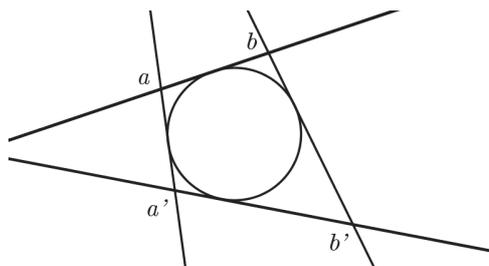
Un exemple de divisions homographiques est obtenu à partir d'un cercle et de deux tangentes fixes ab et $a'b'$ ³⁸. Toute autre tangente au cercle associe

37. Chasles, *Traité*, p. 67.

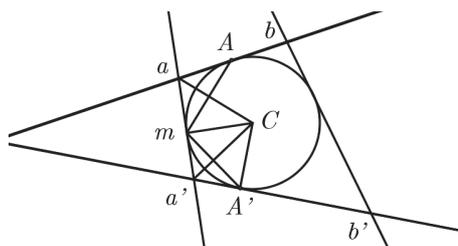
38. Chasles, *Traité*, p. 466.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

deux points de chacune des tangentes initiales, comme a avec a' , b avec b' , etc. Les points des deux tangentes fixes se correspondent ainsi deux à deux, et les divisions obtenues sont homographiques.



Pour le démontrer, Chasles nomme A et A' les points de tangence des deux droites fixes, et m le point de tangence de la droite aa' . Les droites Am et aC

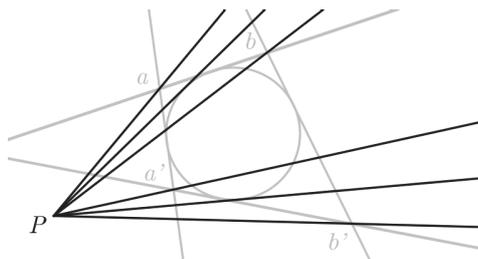


d'une part, $A'm$ et $a'C$ d'autre part, étant perpendiculaires, l'angle aCa' est supplémentaire de l'angle AmA' . Or les angles AmA' attachés aux différentes positions du point m sur le cercle sont tous égaux ou supplémentaires, et donc ainsi des angles aCa' ou encore bCb' . On en déduit que les droites Ca , Cb , et Ca' , Cb' font respectivement des angles égaux ou différents de deux angles droits. Le rapport anharmonique de quatre droites ne dépendant que des sinus des angles qu'elles forment, et les éventuels changements de signes s'annulant, quatre droites comme Ca , Cb , Cc , Cd auront le même rapport anharmonique que leurs homologues Ca' , Cb' , Cc' , Cd' . C'est-à-dire que les faisceaux de droites constitués des droites comme Ca d'une part, et des droites comme Ca' d'autre part, sont homographiques. Et de la même façon, les points comme a , a' distribués sur chacune des tangentes fixes forment deux divisions homographiques.

Lorsque deux droites supports de deux divisions homographiques sont globalement confondues, Chasles prouve qu'il y a alors nécessairement deux

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

points doubles, c'est-à-dire qui se correspondent à eux-mêmes. Dans la figure précédente, étant donné un point quelconque P , les droites Pa , Pb , etc., et Pa' , Pb' , etc., forment deux faisceaux homographiques dont les deux tangentes au cercle issues de P sont à l'évidence les points doubles.



Venons-en maintenant à la notion d'involution. Lorsque six points d'une droite conjugués deux à deux a, a' ; b, b' ; c, c' , sont tels que le rapport anharmonique de quatre d'entre eux est égal au rapport anharmonique de leurs quatre conjugués, les six points sont dits être en involution³⁹, notion introduite par Girard Desargues⁴⁰. La donnée de six tels points permet d'associer à tout autre point de la droite un unique point conjugué, en sorte que trois couples de points ainsi conjugués soient toujours en involution. Chasles démontre qu'une involution possède toujours deux points qui sont leurs propres conjugués, dits points doubles là aussi, et que ces points divisent harmoniquement les segments comme aa' , bb' , cc' , etc.

La figure précédente fournit un exemple d'involution qui associe les droites Pa avec Pb' , Pb avec Pa' , et T avec T' . En effet, notant T et T' les deux tangentes menées au cercle du point P , les faisceaux Pa, Pa' étant homographiques, et les tangentes des rayons doubles de cette homographie, on obtient l'égalité des rapports anharmoniques :

$$(Pa, Pb, T, T') = (Pa', Pb', T, T')$$

Mais, dans la définition du rapport anharmonique, les premier et deuxième termes peuvent être intervertis en même temps que les troisième et quatrième sans changer sa valeur, donc :

$$(Pa, Pb, T, T') = (Pb', Pa', T', T)$$

³⁹. Chasles, *Traité*, p. 127.

⁴⁰. Desargues, Girard, *Brouillon project d'une atteinte d'une atteinte aux évènements des rencontres du cône avec un plan*, Lyon, 1639.

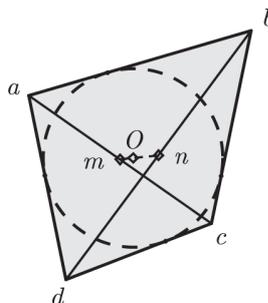
CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

D'où peut être déduit le théorème :

Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, les deux couples de droites menées d'un même point à ses sommets opposés, et les deux tangentes menées du même point à la circonférence du cercle, forment un faisceau en involution ⁴¹.

Montrons maintenant comment ces propositions, établies pour les notions de division homographique et d'involution, permettent la démonstration des théorèmes, avec l'exemple suivant du théorème dit de Newton :

Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, les milieux des deux diagonales et le centre du cercle sont sur une même droite ⁴².



Ce théorème apparaît comme le corollaire de l'énoncé bien plus général suivant, établi en amont dans l'ouvrage :

Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, si l'on mène une transversale qui rencontre les deux diagonales en deux points, et qu'on prenne les deux autres points qui avec ceux-là, respectivement, divisent harmoniquement les deux diagonales, ces deux points et le pôle de la droite dans le cercle, sont tous trois en ligne droite ⁴³.

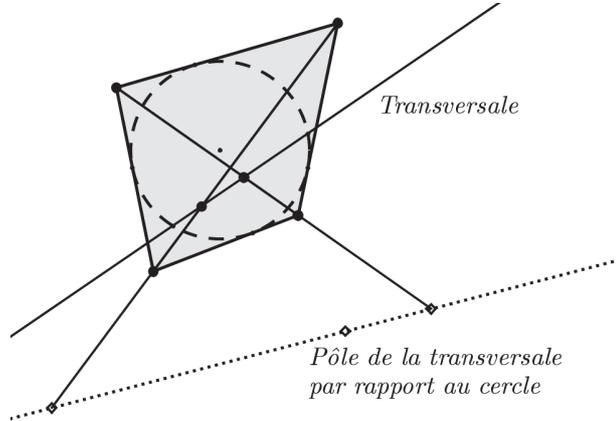
Le théorème de Newton est effectivement un cas particulier de ce deuxième énoncé, lorsque la transversale est la droite de l'infini. Alors, les conjugués harmoniques de ses points d'intersection avec les diagonales sont les milieux de celles-ci, et son pôle par rapport au cercle est le centre de celui-ci.

41. Chasles, *Traité*, p. 471.

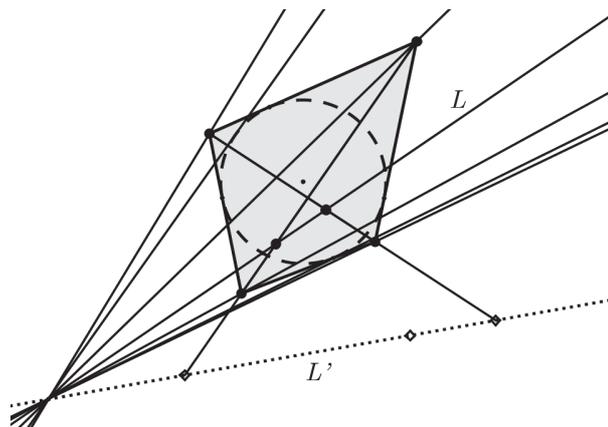
42. Chasles, *Traité*., p. 488.

43. Chasles, *Traité*., p. 488.

V.1 Méthodes d'invention et méthode démonstrative en géométrie rationnelle : les deux ouvrages de Michel Chasles

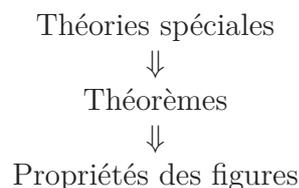


Pour démontrer ce théorème plus général, Chasles nomme L et L' respectivement la transversale et la droite qui joint les conjugués harmoniques de ses points d'intersection avec chaque diagonale par rapport à leurs extrémités. De ce point d'intersection il tire les deux tangentes au cercle et les quatre droites le reliant aux sommets du quadrilatère. Nous avons montré que ces six droites forment une involution. Les deux droites L et L' en sont les deux rayons doubles, puisqu'elles divisent harmoniquement les diagonales, d'après une propriété mentionnée plus haut. Les droites L et L' sont donc conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes, et par conséquent le pôle de la droite L se trouve sur la droite L' , par une propriété élémentaire du pôle d'une droite par rapport à un cercle.



CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

Cet exemple permet de bien comprendre comment le *Traité de géométrie supérieure* commence par exposer des « théories spéciales », composées de propositions portant sur les notions générales construites à partir de celle de rapport anharmonique. Ces notions sont appliquées, dans un deuxième temps, à la démonstration de théorèmes généraux. Ces théorèmes, enfin, ont comme corollaires des propriétés des figures usuelles. Le *Traité* procède ainsi du général au particulier selon le schéma suivant :



Le *Traité* est une réorganisation des théorèmes de la géométrie qui procède du général au particulier. La méthode de démonstration y est « uniforme », au sens où elle s'appuie sur un nombre restreint de notions et de propositions très générales. Elle n'est pas pour autant unique. Il est fréquent dans l'ouvrage que soient fournies plusieurs démonstrations d'une même proposition, conformément à l'intérêt porté bien entendu aux méthodes dans l'ouvrage. Les problèmes en revanche sont complètement absents de l'ouvrage. Chasles n'aborde pas du tout la résolution des problèmes dans le *Traité*, concerné davantage par la mise en forme des théories en répondant à l'exigence d'uniformité.

Dans l'*Aperçu historique* et le *Traité de géométrie supérieure*, Chasles s'attache à prouver que les ressources de la géométrie pure sont comparables à celles de l'analyse algébrique. Ces deux ouvrages mettent néanmoins en lumière deux conceptions très différentes de la méthode. Dans le premier, Chasles souligne que les théories de la géométrie moderne fonctionnent comme des méthodes d'invention. Nous avons illustré comment ces théories permettent d'inventer de nouvelles propositions et de résoudre des problèmes. Il met en évidence la généralité, la fécondité et la simplicité de ces théories qu'il appelle méthodes.

Le *Traité*, quant à lui, entreprend de réunir les résultats obtenus par la géométrie récente au sein d'un corps de doctrine homogène dont la méthode démonstrative est uniforme. La notion de rapport anharmonique est la clef de voûte de cette réorganisation, en ce qu'elle permet la formulation de théories spéciales portant sur des notions nouvelles, comme la division homographique et l'involution, qui s'avèrent fécondes :

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

Ces théories forment la base de nos procédés de démonstration. Chacune des propositions dont elles se composent s'y trouve comme un anneau nécessaire à leur enchaînement continu, et toutes sont susceptibles d'applications ultérieures très diverses⁴⁴.

Appuyées sur ces théories, les démonstrations sont directes, et n'empruntent rien d'étranger au sujet concerné. Les théories spéciales fonctionnent comme des instruments au service de ces démonstrations. La réorganisation ainsi opérée masque complètement l'invention : rien ne dit comment les théorèmes ont été découverts.

1.3 Conclusion

Chasles, dans son *Aperçu historique*, confère le statut de méthodes aux découvertes des géomètres contemporains. Il organise la présentation de ces théories, en en soulignant la puissance d'invention ; il les caractérise par leur généralité, leur fécondité et leur simplicité. Cette organisation vise à dégager des principes généraux, en nombre réduit, desquels dériveraient l'ensemble de ces théories. Quinze ans plus tard, le *Traité de géométrie supérieur* poursuit un objectif tout différent : celui de présenter les résultats de la géométrie moderne au sein d'un corpus cohérent, unifié par la méthode de démonstration suivie, et organisé de façon déductive. La méthode d'invention cède la place à la méthode de démonstration.

2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

2.1 Les notions récentes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire (1836-1865)

Revenons maintenant aux ouvrages d'enseignement secondaire pour étudier dans quelle mesure ils intègrent les notions récentes de géométrie exposées dans l'*Aperçu historique* de Chasles. Plusieurs de ces notions récentes de géométrie apparaissent dans certains ouvrages d'enseignement. On y rencontre les notions de centre de similitude, de pôle et de polaire par rapport à un cercle ou à un angle, de rapport harmonique et anharmonique, d'axe

44. Chasles, *Traité*, p. xxx.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

radical de deux cercles. Nous passons en revue les ouvrages qui présentent ces notions, pour examiner si elles fonctionnent comme des méthodes, et comment elles sont liées à la résolution des problèmes.

Pierre Joseph Étienne Finck, polytechnicien et professeur agrégé de mathématiques spéciales à Strasbourg, publie sa *Géométrie élémentaire*⁴⁵ en 1838, à destination aussi bien de ceux qui n'ont besoin que des premières notions de cette science, que des élèves des écoles régimentaires, des écoles industrielles et des classes préparatoires, ce qui est rendu possible en jouant sur la taille des caractères et la présence d'astérisques devant certains paragraphes. L'ouvrage inclut, plus spécifiquement pour les candidats à l'École polytechnique, « des théories restées jusqu'ici en dehors des programmes des examens », à savoir les éléments des transversales, des centres de similitude, des pôles et des polaires, des faisceaux harmoniques, des axes radicaux, autant de théories « qui fournissent des moyens simples et élégants pour la résolution d'une foule de problèmes curieux et utiles »⁴⁶. Les seuls problèmes néanmoins résolus au moyen de ces théories dans l'ouvrage sont des problèmes de contact dont les solutions recourent à la notion d'axe radical.

Idoux, professeur licencié de mathématiques, ajoute à la fin de ses *Nouveaux éléments de géométrie*⁴⁷ de 1842, destinés aux élèves qui se préparent au baccalauréat ès-lettres et aux Écoles militaires, un supplément qui contient de nombreuses propositions de la géométrie récente. Il expose les définitions et les premiers théorèmes concernant les transversales, les centres de similitude, les rapports harmoniques et anharmoniques, les quadrilatères complets, les pôles et les polaires. Idoux fait suivre les théorèmes établis sur les transversales de quatre problèmes de construction : mener une parallèle à une droite dont on connaît le milieu, trouver le milieu d'une droite dont on connaît une parallèle, mesurer une ligne inaccessible, et prolonger une droite au-delà d'un obstacle.

Auguste Blum, polytechnicien et professeur de mathématiques, écrit en 1845 le deuxième tome de son *Cours complet de mathématiques*⁴⁸ à l'usage des aspirants aux Écoles du gouvernement, contenant notamment la géométrie élémentaire. Celle-ci se termine par un appendice qui lui-même se termine

45. Finck, Pierre Joseph Étienne, *Géométrie élémentaire*, Strasbourg : Derivaux et Paris : Mathias et Lagny frères, 1838.

46. *Ibid.*, p. I.

47. Idoux, A. J., *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris : Delalain et Roret, 1842.

48. Blum, Auguste, *Cours complet de mathématiques*, Paris : Carilian-Gœury et Vve Dalmont, 1845.

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

par quelques pages sur les transversales, la division harmonique, les pôles et polaires⁴⁹ qui ne contiennent pas de problème.

Nicolas Jules Percin, professeur agrégé de mathématiques spéciales au lycée de Nancy, s'en tient, dans son *Complément de géométrie*⁵⁰ à destination des candidats aux Écoles du gouvernement, de 1848, à quelques théorèmes concernant le rapport harmonique, les polaires, les transversales et les axes radicaux. Il les utilise incidemment dans la liste des cent dix huit problèmes qui termine l'ouvrage, comme par exemple pour résoudre le problème des trois cercles.

Après la réforme de la bifurcation de 1852, les ouvrages publiés pour l'enseignement secondaire de la géométrie élémentaire n'intègrent aucune des notions de la géométrie récente. Cette réforme impose une observation stricte des programmes, et ceux-ci n'intègrent pas de telles notions.

Les auteurs qui introduisent, avant 1852, des notions récentes dans leurs ouvrages restent minoritaires, et la publication de l'*Aperçu* ne marque pas de changement de ce point de vue. Déjà, avant 1836, plusieurs ouvrages élémentaires avaient intégré de telles notions. De ce nombre sont la *Géométrie industrielle* de Bergery, que nous avons étudiée, et aussi le *Cours de géométrie élémentaire* de Vincent, dans la deuxième édition de 1832. Ce dernier aborde les notions de transversales, de centres de similitude, de division harmonique, de quadrilatère complet, de pôle et de polaire par rapport à un angle, d'axes radicaux, et ces notions sont employées pour la résolution de nombreux problèmes, en particulier les problèmes de contacts.

En 1861 paraît de nouveau un ouvrage d'enseignement de géométrie élémentaire qui intègre, dans un complément, des notions de géométrie rationnelle. Charles de Comberousse est professeur de mathématiques au Collège Chaptal, répétiteur et examinateur d'admission à l'École centrale des arts et manufacture, dont il est lui-même issu (promotion 1850). Il publie entre 1860 et 1862 un *Cours de mathématiques*⁵¹ contenant toutes les parties nécessaires aux candidats à l'École centrale des arts et manufacture. Dans le deuxième volume de son *Cours*, portant sur la géométrie et la trigonométrie, il fait suivre l'exposé de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace d'un complément de géométrie d'environ quatre-vingt pages, qui contient un

49. *Ibid.*, p. 232.

50. Percin, Nicolas Jules, *Complément de géométrie*, Nancy : Grimblot et Ve Raybois, Paris : Langlois et Leclercq, 1848.

51. de Comberousse, Charles, *Cours de mathématiques*, Paris : Mallet-Bachelier, 1860-1862.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

chapitre sur les méthodes de résolution des problèmes, un sur la théorie des polaires et des transversales et deux autres qui sont des recueils de questions. Les deuxième et troisième chapitres traitent ainsi des transversales, de la division harmonique, des pôles et des polaires, des axes radicaux, des centres de similitude. Dix ans après la réforme de la bifurcation, ces notions retrouvent place dans un ouvrage d'enseignement secondaire de la géométrie élémentaire.

Dans aucun des ouvrages mentionnés n'apparaît le caractère d'invention de ces notions, ouvrages qui d'ailleurs ne leur associent jamais le terme de méthode comme le fait Chasles. Les caractéristiques de généralité et de fécondité que ce dernier souligne ne sont pas relayées par les auteurs, qui insèrent dans un cadre classique quelques propositions issues des travaux des géomètres de leur siècle. Qui plus est, ces propositions sont présentées indépendamment les unes des autres, à l'opposé par conséquent du projet de Chasles d'unifier les conceptions de la géométrie pure. En revanche, les auteurs montrent souvent comment ces propositions permettent de résoudre des problèmes, et en-dehors de l'ouvrage de Blum, ils en destinent l'étude aux candidats aux examens d'admission aux Écoles du gouvernement.

2.2 Les notions récentes dans les ouvrages de géométrie analytique (1841-1851)

Nous venons de voir que les notions récentes de la géométrie moderne apparaissent dans quelques ouvrages de géométrie élémentaire, de façon annexe et sans lien avec le projet de Chasles d'unifier les conceptions de la géométrie pure et de mettre à jour des méthodes générales et fécondes.

Dans le même temps, les notions de la géométrie rationnelle — transversales, pôles et polaires, rapport anharmonique, involution, homographie — apparaissent aussi dans certains ouvrages d'enseignement de géométrie analytique destinés à la classe de mathématiques spéciales. Ces notions y sont formulées parfois de manière analytique, mais parfois aussi elles sont introduites comme des notions de géométrie pure. Quels sont ces ouvrages et qui en sont les auteurs ? Dans quel but introduisent-ils ces nouvelles notions ? Où puisent-ils leur connaissance de ces notions ? Comment s'opère la coexistence des approches géométrique et analytique ?

Les ouvrages concernés sont le *Complément de géométrie analytique*⁵²

52. Page, C. E., *Complément de géométrie analytique*, Paris : Carilian-Gœury et Vve

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

de Page, les *Leçons de géométrie analytique*⁵³ de Paul Louis Cirodde, et les *Leçons nouvelles de géométrie analytique*⁵⁴ de Charles Briot et Jean-Claude Bouquet. Tous ces ouvrages sont publiés avant la réforme de 1852, dont nous avons dit qu'elle impose aux professeurs le strict respect de programmes qui n'intègrent pas ces notions nouvelles.

Page (1841) : intriquer les méthodes géométrique et analytique

Page est professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère. Il écrit son *Complément de géométrie analytique* en 1841 pour les candidats à l'École polytechnique, en leur donnant « quelques théories générales qui ne sont pas ordinairement comprises dans l'enseignement élémentaire » et qui peuvent « être d'un grand secours pour la solution des questions qui les embarrassent le plus souvent ». Il donne la liste des « sources originales » de ces théories. Il s'agit de la *Géométrie de position* et de l'*Essai sur la théorie des transversales* de Carnot, des *Solutions peu connues de différents théorèmes de géométrie* de Servois, du *Mémoire sur les lignes du second ordre*, de l'*Application de la théorie des transversales* et du *Mémoire sur les surfaces du second ordre* de Brianchon, de l'*Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie* de Lamé, du *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet, de l'*Aperçu historique* de Chasles, et encore de quelques mémoires non précisés de Gergonne, Poncelet, Chasles et Sturm parus dans les *Annales de Gergonne*. Il est surprenant de voir cités ces ouvrages qui ne traitent pas de géométrie analytique, voire même en proposent une alternative, dans un livre intitulé *Complément de géométrie analytique*.

L'ouvrage est décliné en cinq Livres. Le premier traite des notions de rapport anharmonique et d'involution. Le deuxième des notions de transversales, de faisceau harmonique, de pôle et de polaire par rapport à deux droites, de quadrilatère complet. Les notions de géométrie rationnelle exposées dans les premier et deuxième Livre le sont par la géométrie pure ; elles donnent lieu à des théorèmes d'importance comme le théorème de Desargues, et les théorèmes de Pascal et de Brianchon sur l'hexagone.

Le troisième Livre en revanche introduit la notion d'équation d'une courbe.

Dalmont, 1841.

53. Cirodde, Paul Louis, *Leçons de géométrie analytique*, 2^e édition, Paris : Hachette, 1848.

54. Briot, Charles, Bouquet, Jean-Claude, *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, 2^e édition, Paris : Dezobry et Magdeleine, 1851.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

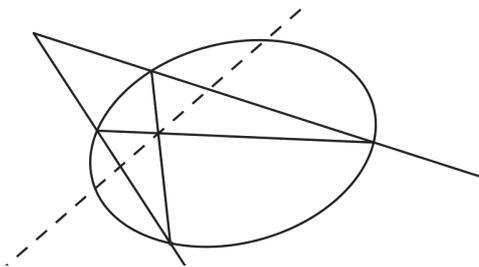
Le théorème concernant la puissance d'un point par rapport à un cercle, appartenant au corpus de la géométrie euclidienne, est démontré ici par la géométrie analytique. Étant donné un point fixe o et deux sécantes menées de ce point au cercle, l'équation du cercle dans le repère constitué de ce point et des deux droites s'écrit :

$$y^2 + x^2 + 2 \cos \theta xy + Dy + Ex + F = 0$$

Notant m et n , p et q , les points d'intersection de chaque sécante avec le cercle, et faisant $y = 0$ dans l'équation, on trouve que l'équation $x^2 + Ex + F = 0$ a pour solutions om et on , c'est-à-dire que $om \cdot on = F$. De même en faisant $x = 0$, on trouve $op \cdot oq = F$. Par conséquent, $om \cdot on = op \cdot oq$. Cette propriété est immédiatement employée pour démontrer, géométriquement cette fois, les théorèmes de Carnot sur le triangle dont les côtés coupent une circonférence, et de Desargues sur la sécante à un quadrilatère inscrit dans un cercle.

Au cinquième Livre, la notion de polaire par rapport à une courbe du second ordre est abordée, de manière analytique. La polaire est définie de la manière suivante :

Si, par un point fixe pris dans le plan d'une courbe du second degré, on mène deux transversales qui coupent la courbe chacune en deux points, puis qu'on mène des cordes qui joignent les points d'intersection réciproques deux à deux, le lieu géométrique des points d'intersection de ces cordes sera une droite qui restera invariable lorsqu'on fera tourner les deux transversales autour du point fixe⁵⁵.



Page démontre cette proposition en écrivant les équations des deux cordes dans le repère constitué par le point fixe et les deux transversales. L'équation

55. Page, *Op. Cit.*, p. 131.

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

de la courbe étant écrite sous la forme $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, il montre par calcul assez long que les coordonnées x, y du point d'intersection des deux cordes vérifient la relation $Dx + Ey + 2F = 0$, qui est l'équation d'une droite. Un changement de direction des deux transversales menées du point fixe modifie l'équation de la courbe en $A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ et les coordonnées du point d'intersection des cordes réciproques vérifient alors la relation $D_1x + E_1y + 2F_1 = 0$, qui est justement l'équation dans le nouveau repère de la droite obtenue précédemment. Donc tous ces points d'intersection sont alignés sur une seule et même droite, appelée polaire du point fixe.

La proposition est employée ensuite pour résoudre le problème de mener une tangente à une courbe du second ordre par un point donné. En effet, la polaire coupe la courbe aux points de contact des deux tangentes qui lui sont menées du point fixe.

Bien que l'auteur ait annoncé son intérêt pour la résolution des questions, le corps de l'ouvrage n'en présente pas en-dehors de quelques problèmes de construction. En particulier, à la fin du cinquième Livre, est réalisée la construction d'une conique connaissant cinq éléments de la courbe, points ou tangentes. Il s'agit d'une construction par points. La construction par exemple de la conique passant par cinq points donnés, à laquelle sont ramenées toutes les autres, utilise le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit à une conique.

Page va plus loin en montrant comment construire deux diamètres conjugués de la conique cherchée. Pour y parvenir, il a donné un peu auparavant, en corollaire du théorème de Pascal, la construction de la tangente en un point d'une conique connaissant quatre autres de ses points. Il trace alors trois tangentes à la conique cherchée, puis deux diamètres qui se coupent au centre, et de là deux diamètres conjugués.

Page destine explicitement son ouvrage aux élèves préparatoires. Il introduit des notions nouvelles dans le but de les aider à répondre aux questions posées aux examens et concours, notamment la construction, par points et à la règle et au compas, des coniques. S'il se réfère aux ouvrages des grands géomètres qui ont développé la géométrie rationnelle, il mêle néanmoins les méthodes géométrique et analytique au sein d'un même ouvrage.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

Cirodde (1848) : les notions de géométrie rationnelle comme terrain d'exercice pour la géométrie analytique

Cirodde, professeur licencié au Collège royal Henri IV, définit dans ses *Leçons de géométrie analytique*⁵⁶ de 1848, à l'occasion de la résolution de quelques problèmes, les notions d'axe radical, de polaire par rapport à un angle, de faisceau harmonique. Il consacre par ailleurs un court chapitre à la notion de pôle et de polaire par rapport à une conique⁵⁷. Par exemple, la définition de l'axe radical de deux cercles est donnée à l'issue de la résolution du problème :

PROBLÈME. Trouver le lieu de tous les points desquels on peut mener des tangentes égales à deux circonférences données.

t étant la longueur des tangentes évoquées, (α, β) et (α', β') les coordonnées des centres des cercles, et r et r' leurs rayons, les coordonnées (x, y) du point cherché vérifient les équations :

$$\begin{aligned}(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 &= t^2 + r^2 \\ (y - \beta')^2 + (x - \alpha')^2 &= t^2 + r'^2\end{aligned}$$

La différence entre ces deux équations donne l'équation d'une droite qui est le lieu cherché. Les théories de la géométrie moderne se présentent dans cet ouvrage comme des occasions de mettre en œuvre l'analyse algébrique.

Briot et Bouquet (1851) : la multiplicité des méthodes en géométrie

La deuxième édition des *Leçons nouvelles* de Briot et Bouquet, normaux des promotions 1838 et 1839, et alors professeurs respectivement au lycée Bonaparte de Paris et à la Faculté des sciences de Lyon, ajoute aux deux parties portant classiquement sur l'étude par la géométrie analytique des courbes puis des surfaces du second degré, une troisième partie intitulée « Des méthodes en géométrie ». Cette partie supplémentaire, et de taille comparable à celles des deux précédentes, aborde les notions de pôles et de polaires, les transversales, les méthodes de projection et de perspective, les courbes enveloppes, les coordonnées tangentielles, les figures corrélatives, la dualité, l'homographie et l'homologie. Les auteurs n'expliquent pas pourquoi ils ajoutent cette partie assez conséquente à l'ouvrage, partie qui n'apparaîtra plus dans les troisième, quatrième et cinquième éditions de l'ouvrage,

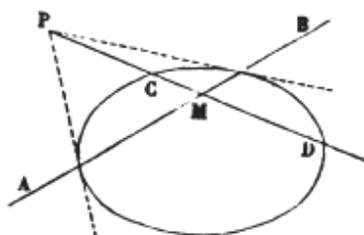
56. Girodde, *Leçons de géométrie analytique*, 2^e édition, Paris : Hachette, 1848, p. 210.

57. *Ibid.*, p. 404.

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

publiées entre 1860 et 1865. Ils y établissent de nombreux théorèmes, démontrés par des méthodes variées, présentant ainsi au lecteur la multiplicité des moyens à la disposition du géomètre. Cette troisième partie est déclinée en trois Livres, qui traitent respectivement des « Propriétés générales des courbes du second ordre », des « Propriétés générales des surfaces du second ordre » et « De la transformation des figures et du principe de dualité ». Dans le premier chapitre du premier Livre, ils définissent la polaire au moyen du rapport harmonique :

Si par un point P on trace diverses sécantes à une courbe du second degré, le lieu du point M , conjugué harmonique du point P , par rapport aux deux points C, D de chaque sécante et de la courbe, est une droite⁵⁸.



Pour le démontrer, Briot et Bouquet écrivent $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h = 0$ l'équation de la courbe ; les points d'intersection d'une sécante de direction donnée avec la courbe correspondent aux deux valeurs de ρ qui annulent l'équation $f(x + \rho\alpha, y + \rho\beta) = 0$, ou encore $f(x_0, y_0) + (\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0})\rho + (a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2)\rho^2 = 0$. Cette équation est du second degré, par conséquent la somme des inverses de ses racines est connue, et égale à $-\frac{\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0}}{f(x_0, y_0)}$, double de la distance PM par une propriété connue du conjugué harmonique. Par élimination de α et β , ils en déduisent l'équation de la polaire :

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + dx_0 + ey_0 + 2h = 0$$

Plusieurs propositions sur les polaires sont établies ; la notion de courbe polaire réciproque est définie, et la méthode qui en résulte est exposée :

La méthode des polaires réciproques est d'une grande utilité en géométrie ; lorsqu'un théorème est démontré sur une figure, on en

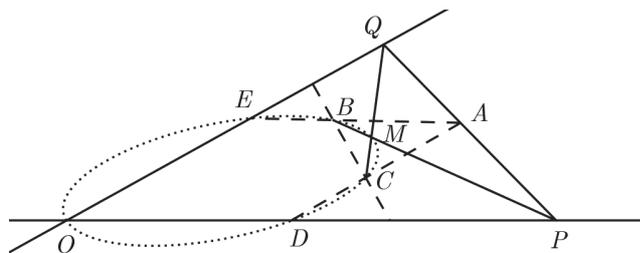
58. Briot et Bouquet, *Op. Cit.*, p. 354.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

conclut immédiatement un autre théorème sur la figure corrélative, et pour obtenir ce nouveau théorème, on remplace dans le théorème primitif les points par des droites, et les droites par des points⁵⁹.

Cette « dualité des propriétés de l'étendue » est attribuée à Gergonne et Poncelet. Elle est employée à plusieurs reprises dans le chapitre suivant comme nous allons le voir. Ce deuxième chapitre s'ouvre sur le mode suivant de génération des coniques :

Lorsque les trois côtés d'un triangle tournent autour de trois points fixes, tandis que deux sommets glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet décrit une courbe du second degré⁶⁰.



Le triangle est noté MPQ , et les trois points fixes A, B, C . Lorsque les sommets P et Q glissent sur les deux droites fixes OP et OQ , le troisième sommet M décrit une courbe du second degré. Outre les points B, C et O , cette courbe passe par les points E et D , respectivement points d'intersection des droites AB, OQ et AC, OP . Ce résultat est démontré en écrivant les équations des droites BP et CQ sous la forme :

$$y = \frac{y''}{x'' - p}(x - p) \quad y - q = \frac{y''' - q}{x'''}x$$

où x' et y' , x'' et y'' , x''' et y''' sont les coordonnées des points A, B, C , et p et q les longueurs OP, OQ . Un point $M(x, y)$ appartient à la courbe si ses coordonnées vérifient les deux équations. Or A appartient à la droite PQ , donc $\frac{x'}{p} + \frac{y'}{q} = 1$, équation qui combinée avec les deux précédentes mène à une équation du second degré.

59. Briot et Bouquet, *Op. Cit.*, p. 362.

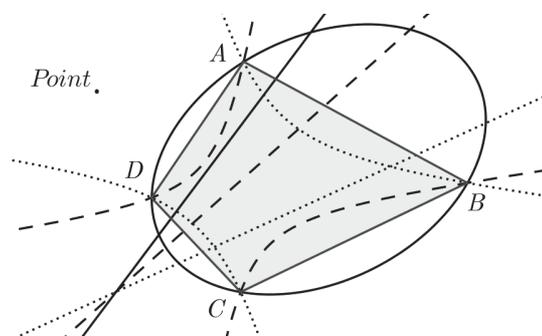
60. Briot et Bouquet, *Op. Cit.*, p. 365.

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

Les auteurs utilisent cette génération des coniques pour démontrer le théorème de Pascal. La figure précédente est reprise ; l'hexagone $ODCMBE$ est inscrit dans la conique, et ses côtés opposés BM et OD d'une part, EB , DC d'autre part, se coupent en P et A . Notant Q le point d'intersection des droites PA et OE , il reste alors à prouver que les points C , M et Q sont alignés. Dans le cas contraire, le point M' d'intersection des droites CQ et BP appartiendrait à la conique par la proposition précédente, et alors la droite BP couperait la conique aux trois points B , M' et M , ce qui est impossible. Le théorème de Pascal est démontré, par une méthode qui mêle les approches analytique et géométrique.

Les auteurs utilisent ensuite la méthode des polaires réciproques pour en déduire le théorème de Brianchon sur les diagonales d'un hexagone circonscrit à une conique. Sont ensuite résolus les problèmes de construction d'une conique étant donnés certains de ses éléments parmi son centre, ses tangentes et ses points. Le théorème ci-dessous illustre encore l'usage que font Briot et Bouquet de la dualité :

Les polaires d'un point du plan, par rapport aux différentes courbes du second degré circonscrites à un quadrilatère donné $ABCD$, passent toutes par un même point ⁶¹.



De ce théorème est immédiatement déduit cet autre théorème par la méthode des polaires réciproques :

Les pôles d'une même droite, par rapport aux différentes courbes du second degré inscrites à un quadrilatère donné, sont en ligne droite.

61. Briot et Bouquet, *Op. Cit.*, p. 362.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

Les notions de pôle et polaire sont encore employées pour réaliser la construction d'une conique connaissant certains éléments parmi son centre, certains de ses points, ou certaines de ses tangentes. Comme dans l'ouvrage de Page, construire la courbe consiste ici à la construire par point, et aussi à en construire les éléments caractéristiques, en particulier les axes.

Le troisième chapitre introduit la notion de courbe enveloppe. Les enveloppes, terme introduit par Monge dans son *Application de l'analyse à la géométrie*⁶² en 1795, répondent au problème inverse des tangentes, étudié au XVII^e siècle⁶³. La notion d'enveloppe conduit à la définition des coordonnées tangentielles : l'équation $ax + by + 1 = 0$ désignant l'équation d'une droite, une équation du type $f(a, b) = 0$ définit une série de droites et par suite une courbe enveloppe. Les coordonnées a, b qui déterminent la position d'une tangente sont appelées coordonnées tangentielles. Les auteurs en donnent sur quelques pages les toutes premières propriétés. Ils indiquent, sans toutefois développer, que ce système nouveau de coordonnées a été imaginé par Chasles et Plücker, et qu'il « établit d'une manière purement analytique le principe de *dualité*, déjà reconnu par la méthode des polaires réciproques ». C'est ce que Chasles expose dans l'*Aperçu historique*⁶⁴.

Le quatrième chapitre est intitulé « Projection et perspective ». Il illustre comment ces deux transformations permettent d'inventer des propositions.

Regarder une ellipse comme la projection orthogonale d'un cercle permet, par exemple, d'établir que le parallélogramme circonscrit à l'ellipse dont les côtés ont pour directions celles de deux diamètres conjugués a une aire constante. En effet, deux diamètres perpendiculaires du cercle sont projetés sur deux diamètres conjugués de l'ellipse, et le carré circonscrit au cercle a une aire constante, donc il en va de même du parallélogramme qui en est la projection.

À propos de la perspective, Briot et Bouquet remarquent que les propriétés descriptives d'intersection et d'alignement, ainsi que les relations métriques, lorsqu'elles sont établies entre des rapports anharmoniques, subsistent en perspective, comme l'a montré Poncelet dans le *Traité des propriétés projectives*. Ils énoncent alors le théorème :

Si l'on joint un point quelconque d'une courbe du second degré à

62. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, 4^e édition, Paris : V^e Bernard, 1809.

63. Giovanni Mingari Scarpello, Aldo Scimone, « The Work of Tschirnhaus, La Hire and Leibniz on catacaustics and the Birth of the Envelopes of Lines in the 17th Century », *Archive for history of exact sciences*, 59, n°3, 2005, p. 223-250.

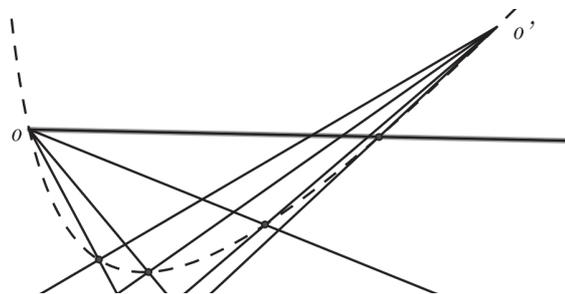
64. Chasles, *Aperçu historique*, p. 257.

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

quatre points fixes pris sur cette courbe, le rapport anharmonique des quatre droites ainsi obtenues est constant ⁶⁵.

Pour démontrer ce théorème, la courbe du second degré est conçue comme la projection d'un cercle. Dans le cas du cercle, la propriété est vérifiée car les angles que forment les droites ne changent pas. Cette propriété subsiste en perspective, puisqu'il s'agit d'une relation entre rapports anharmoniques, donc elle reste valable pour la courbe du second degré. La démonstration est simple car très courte et aisée à comprendre. Le théorème est général car une propriété établie pour le cercle s'étend à une classe élargie de courbes, en l'occurrence les coniques. Le théorème est aussi fécond, comme le font voir les auteurs : « Cette propriété est une propriété fondamentale des courbes du second degré ; elle donne naissance à un très grand nombre de théorèmes ⁶⁶ ». Briot et Bouquet en donnent cinq.

Ils montrent que « lorsque deux systèmes de droites partant de deux points fixes o et o' sont telles que le rapport anharmonique de quatre quelconques du premier système est le même que celui des quatre correspondantes du second système, les points d'intersection des droites correspondantes sont situés sur une même courbe du second degré passant par les deux points fixes ».



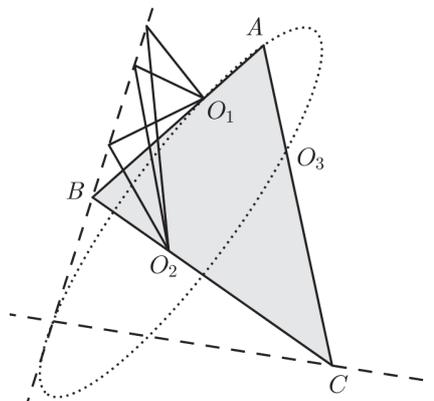
De ce théorème, établi d'abord par Jacob Steiner en 1832 ⁶⁷, et qui fournit une nouvelle caractérisation des coniques, est déduit cet autre énoncé : « lorsque les n côtés d'un polygone tournent autour de points fixes, tandis que $n - 1$ sommets glissent sur des droites fixes, le n^e sommet décrit une courbe du second degré ». La figure suivante en donne une illustration dans le cas d'un triangle ABC dont les côtés tournent autour des points O_1, O_2, O_3 , et dont les sommets B et C glissent sur deux droites données.

65. Briot, *Leçons nouvelles*, p. 393.

66. *Ibid.*, p. 394.

67. Kline, Morris, *Op. Cit.*, p. 847.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE



Quatre positions successives du côté AB , et les quatre positions correspondantes du côté BC , forment deux faisceaux issus respectivement des points O_1 et O_2 dont les rapports anharmoniques sont égaux. Il est de même du faisceau correspondant issu de O_3 , et ainsi de suite dans le cas de n points. Les faisceaux correspondants issus de O_1 et de O_n ont donc des rapports anharmoniques égaux, et le théorème précédent prouve qu'ils se coupent selon une courbe du second degré, qui est par définition le lieu du point A .

Nous avons vu que ce théorème avait déjà été démontré par le calcul plus tôt dans l'ouvrage, où il était suivi d'un autre théorème obtenu à partir de celui-là par « la méthode des polaires réciproques », qui établit que si « les n sommets d'un polygone glissent sur n droites données, tandis que $n - 1$ côtés tournent autour de $n - 1$ points fixes, le n^e côté enveloppe une courbe du second degré, c'est-à-dire reste toujours tangent à une courbe du second degré ».

Le Livre suivant aborde la géométrie dans l'espace et reprend certaines des notions vues précédemment. Le troisième et dernier Livre de cette partie sur les méthodes traite de la transformation des figures. La notion d'homographie est définie à partir des coordonnées de la façon suivante. Un point a d'une figure ayant pour coordonnées x, y, z , il lui correspond un point a' de la figure homographique de coordonnées x', y', z' telles que :

$$x' = \frac{L}{D} \quad y' = \frac{M}{D} \quad z' = \frac{N}{D}$$

équations dans lesquelles L, M, D sont des polynômes entiers et du premier degré en x, y, z . Les auteurs démontrent alors que le rapport anharmonique

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

de quatre points en ligne droite sur la première figure est égal à celui de leurs quatre points correspondants, ce qui constitue la définition de l'homographie dans l'*Aperçu* de Chasles. La transformation homographique fournit une méthode d'invention :

L'homographie conduit à un grand nombre de théorèmes nouveaux ; car si l'on a observé une propriété évidente dans une disposition particulière de la figure, on la généralise immédiatement [...] par exemple, [le cercle] donne, par la déformation homographique, toutes les courbes du second degré : une propriété observée dans le cercle deviendra une propriété générale des courbes du second degré⁶⁸.

Ce principe est mis en œuvre sur des exemples. Ainsi le théorème suivant sur le cercle est-il étendu à une propriété des coniques :

Soit un triangle inscrit dans un cercle et dont deux côtés se meuvent parallèlement à des droites données ; le troisième côté, ayant une longueur constante, enveloppe un cercle concentrique au premier.

De cet énoncé se déduit, par l'homographie, la propriété :

Lorsque deux côtés d'un triangle inscrit dans une conique pivotent autour de deux points fixes, le troisième côté enveloppe une conique ayant un double contact, réel ou imaginaire, avec la première suivant la droite qui joint les points fixes.

L'homologie et l'homothétie sont encore définies par la suite comme cas particuliers de l'homographie.

L'ouvrage de Briot et Bouquet propose donc dans sa seconde édition, et dans celle-ci seulement, une partie ambitieuse sur les méthodes, contenant de nombreuses notions de géométrie rationnelle. Ces méthodes sont exposées ostensiblement comme des méthodes d'invention, et systématiquement mises en œuvre comme telles pour démontrer de nombreux théorèmes et résoudre quelques problèmes. Pour définir les notions sur lesquelles reposent ces méthodes, et établir leurs premières propriétés, les auteurs emploient à la fois l'analyse algébrique des coordonnées et les raisonnements géométriques sur les figures. Ils recherchent la simplicité et l'élégance davantage que l'uniformité des méthodes, et ainsi mêlent les méthodes géométriques et analytiques. Telle propriété des polaires est démontrée par la manipulation

68. Briot et Bouquet, *Op. Cit.*, p. 446.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

des équations sur les coordonnées, et telle autre par un raisonnement géométrique. Si Chasles est cité à plusieurs reprises, le projet qu'il défend dans l'*Aperçu* d'exhiber quelques principes généraux en géométrie pure dont dériveraient les différentes méthodes n'est pas mis en avant ici. Au contraire, cette troisième partie sur les méthodes, originale par son extension dans un ouvrage d'enseignement destiné, au moins en partie, à la classe de mathématiques spéciales, révèle la richesse des moyens du géomètre pour inventer des propositions, en s'appuyant sur les raisonnements et les outils les mieux adaptés à chaque situation. La multiplicité de propositions démontrées n'est pas structurée ni exhaustive. C'est la puissance d'invention de chacune des méthodes qui est illustrée sur une diversité de propositions.

La présence de cette partie sur les méthodes est certainement à relier à la création d'une chaire de géométrie supérieure depuis quatre ans à la Faculté des sciences de Paris, occupée par Chasles, qui y expose les théories de sa Géométrie supérieure qu'il publiera l'année suivante. Mais Chasles organise dans la *Géométrie supérieure* les théorèmes de géométrie en un corpus cohérent et organisé, et n'emploie que les ressources de la géométrie rationnelle. Au contraire, Briot et Bouquet varient les procédés de démonstration d'un théorème à l'autre pour montrer la diversité des moyens à la disposition du géomètre.

Nous pouvons nous interroger sur les raisons de la disparition de cette partie sur les méthodes dans les éditions suivantes des *Leçons nouvelles*. Dans la troisième, les auteurs indiquent qu'ils souhaitent, faute de place, éditer cette partie dans un volume à part. Un *Complément de géométrie analytique*⁶⁹ est publié en 1864, dont le sous-titre annonce qu'il s'agit des Leçons faites par Briot à l'École normale supérieure et rédigées par ses élèves. Les auteurs publient ce complément en « espérant qu'il sera utile aux professeurs et aux meilleurs élèves de nos lycées ». C'était sans doute déjà le public visé par la partie sur les méthodes dans les *Leçons nouvelles* de 1851, qui, si elles exposent dans les deux premières parties les contenus conformes au programme de l'examen d'admission à l'École polytechnique, s'adressent néanmoins à un public élargi, comprenant des professeurs, et des élèves des Écoles du gouvernement.

69. Briot et Bouquet, *Complément de géométrie analytique*, Paris : Dunod, 1864.

2.3 Amiot (1850) : essai d'une reformulation méthodique de la géométrie élémentaire

Antoine Amiot, alors qu'il est professeur agrégé de mathématiques au lycée Bonaparte, intègre complètement dans ses *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*⁷⁰ de 1850 les notions nouvelles dans l'architecture déductive de l'ouvrage, au contraire des auteurs précédents. En témoigne la revue de lecture rédigée par les éditeurs des *Nouvelles annales de mathématiques* :

Voici donc enfin la géométrie *segmentaire* introduite régulièrement ; elle n'est plus reléguée dans les recoins obscurs d'un appendice, ni imprimée en illisibles caractères microscopiques [...] Au résumé, nous possédons enfin un Traité didactique où l'on peut apprendre la géométrie, non pas telle qu'elle était en 1800, mais telle qu'elle est en 1850⁷¹.

Ce terme de géométrie segmentaire est utilisé par Terquem et Gérono dans les *Nouvelles annales* pour désigner les travaux de Steiner⁷².

Là encore, la publication des *Leçons nouvelles* d'Amiot coïncide avec le cours de géométrie supérieure donné par Chasles à la Sorbonne depuis 1847. L'ouvrage commence par un premier Livre sur la ligne droite et un deuxième sur la circonférence. Ces deux premiers Livres suivent l'ordre des lignes, du simple au composé. Ils aboutissent, dans toute la deuxième partie du deuxième Livre, à la résolution de problèmes, c'est-à-dire ici la construction des figures. Le troisième livre des *Leçons nouvelles* s'intitule *Des lignes proportionnelles* et annonce comme sommaire :

CHAPITRE

- I. Des lignes transversales dans le triangle
- II. Transversales considérées dans le cercle
- III. Division harmonique des lignes droites
- IV. Axe-radical de deux cercles. Rapport anharmonique. Involutions
- V. Similitude
- VI. Problèmes sur les lignes proportionnelles.

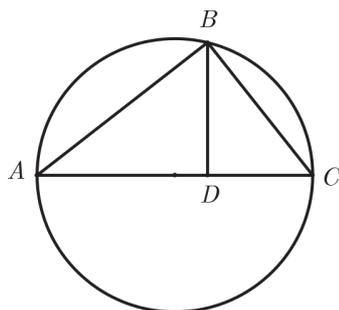
70. Amiot, Antoine, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*, Paris : Dézobry et Magdeleine, 1850.

71. *Nouvelles annales de mathématiques*, 1^{ère} série, tome 9, 1850, p. 335.

72. Terquem, Gérono, *Nouvelles annales de mathématiques*, 1^{ère} série, tome 9, 1850, p. 148.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

Amiot traite pleinement dans ce troisième Livre des notions nouvelles de géométrie : s'ajoutent à celles annoncées par les titres les notions de pôle et de polaire et de quadrilatère complet. Par ailleurs les théorèmes de l'ancienne géométrie sont pour certains reformulés dans le cadre de ces conceptions nouvelles. Ainsi, le théorème dit aujourd'hui de Thalès est décrit comme la rencontre d'un triangle avec une transversale dans le cas particulier où celle-ci est parallèle à un des côtés du triangle, et ouvre le premier chapitre du troisième Livre intitulé « Des lignes transversales dans le triangle ». Suivent les théorèmes dits aujourd'hui de Menelaus et de Ceva, lorsque la transversale coupe les trois côtés du triangle. Amiot invite donc à penser un groupe de propositions comme relevant d'une unique notion, ici celle de transversale. Ce groupe réunit des propositions issues de la théorie des transversales et d'autres beaucoup plus anciennes : la géométrie moderne est intégrée dans le corpus classique des *Éléments*.



Autre exemple de cette organisation, le théorème dit aujourd'hui de Pythagore est déduit dans le deuxième chapitre des propriétés des transversales dans le cercle, comme simple corollaire d'un théorème établissant que la corde AB d'un cercle est moyenne proportionnelle entre le diamètre AC et la projection AD de la corde sur ce diamètre.

Amiot ne présente pas la géométrie récente à côté de l'ancienne géométrie. Il entreprend de reformuler et de compléter cette dernière de façon à lui intégrer plusieurs notions récentes de géométrie. La réédition de l'ouvrage en 1865 est accompagnée d'un avertissement qui indique que son intention est double en publiant des *Leçons nouvelles* :

L'introduction de ces importantes théories [de la géométrie moderne] dans l'enseignement des mathématiques élémentaires fera connaître aux élèves des méthodes puissantes et fécondes pour

V.2 La géométrie récente dans les ouvrages d'enseignement

résoudre un très-grand nombre de questions qui dépendent de la construction des points doubles de deux divisions homographiques sur la même ligne droite, et dont la solution, par toute autre méthode, est très-compiquée et souvent inabordable. Elle facilitera aussi l'étude ultérieure des sections coniques, dont la plupart des propriétés dépendent des divisions et des faisceaux homographiques en involution ⁷³.

Il s'agit donc de donner aux élèves des lycées les moyens de résoudre des questions difficiles, et de les préparer à l'étude supérieure des coniques. Les théories de la géométrie modernes sont, cette fois explicitement, issues du *Traité* de Chasles. Cette deuxième édition est « entièrement refondue » : les changements consistent surtout en ce que ces théories modernes y occupent plus de place que dans celle de 1850. Les notions de division homographique et d'involution sont abordées en détail, et un neuvième Livre est ajouté portant sur la perspective, l'homologie, l'homographie et les figures corrélatives.

Amiot vise à préparer ses lecteurs à résoudre des questions ; néanmoins, la plupart des problèmes de construction situés à la fin du troisième Livre ne sont pas résolus, et la question de la méthode pour les résoudre n'est pas explicitée. L'édition de 1865 contient deux fois plus de problèmes à résoudre, plus de quatre cents contre environ deux cents, soulignant l'intérêt porté à la résolution des problèmes.

Amiot a aussi publié des *Éléments de géométrie*⁷⁴ plus conformes aux programmes officiels. Il explique la différence entre les deux ouvrages :

Les *Éléments de géométrie* [et les] *Leçons nouvelles de géométrie* sont deux ouvrages différents. Le premier, rédigé conformément aux programmes de l'enseignement scientifique des lycées, n'est que l'exposé de la géométrie des anciens ; le second est un essai de géométrie générale, c'est-à-dire qu'il comprend non-seulement les éléments d'Euclide, mais encore les principes de la géométrie moderne, qui est résumée et pour ainsi dire, personnifiée dans les travaux de M. Chasles, notre géomètre par excellence. Ainsi, les chapitres relatifs au rapport anharmonique, à la division homographique des lignes droites et à l'involution ont été empruntés à son célèbre *Traité de géométrie supérieure*, et rattachés aux

73. Amiot, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*, Paris : Tandou et c^{ie}, 1865, p. 5.

74. Amiot, *Éléments de géométrie*, Paris : Dézobry, Magdeleine et c^{ie}, 1855.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

éléments de cette science d'une manière si intime, qu'il nous paraissent en être une conséquence aussi simple que naturelle.

Les *Leçons nouvelles* sont bel et bien un « essai » d'intégrer les notions de la géométrie moderne dans le cadre classique des *Éléments*. Cela est effectué, d'après l'auteur, de manière « simple » et « naturelle », de sorte que les théories de la géométrie moderne paraissent des conséquences des *Éléments*.

2.4 Conclusion

Chasles, par sa position institutionnelle - il est élu à l'Académie des sciences en 1851 - et son cours de géométrie supérieure donné à la Faculté des sciences de Paris, occupe une position favorable à la diffusion de ses idées. Quelques ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire abordent les notions récentes de transversales, de similitude, de pôle et de polaire, de rapport anharmonique et d'axes radicaux. Mais de façon accessoire, en exposant quelques propositions relatives à ces notions, sans en exhiber aucun caractère méthodique. Seul Amiot entreprend une réorganisation de la géométrie élémentaire qui intègre les apports de la géométrie moderne. Par ailleurs, à partir de 1852 et la réforme de la bifurcation, les contenus des ouvrages d'enseignement sont largement uniformisés. La spécification détaillée et contraignante des contenus des programmes qui doivent être enseignés dans les différentes disciplines et aux différents niveaux d'enseignement a pour conséquence l'effacement des initiatives éditoriales originales. Les notions de la géométrie moderne, absentes de ces programmes, n'apparaissent plus comme telles dans les nouveaux ouvrages avant 1861.

En contradiction avec le projet de Chasles de développer une géométrie pure, étrangère aux manipulations algébriques sur les coordonnées, quelques ouvrages de géométrie analytique abordent les théories de la géométrie moderne. Page intègre dans ses *Compléments de géométrie analytique* des développements sur les théories modernes, pour certains traités par la géométrie pure, et pour d'autres traités par l'analyse algébrique. Cirotte utilise les théories de la géométrie moderne comme énoncés d'exercices visant à entraîner le lecteur à l'analyse algébrique. Enfin, la deuxième édition de l'ouvrage de Briot et Bouquet se distingue par l'importance d'une troisième partie portant sur les méthodes. Elle expose plusieurs théories de la géométrie moderne, mettant en avant la puissance d'invention qu'elles confèrent.

Notre analyse a permis de comprendre les intentions des auteurs qui in-

V.3 La généralité comme essence de la géométrie analytique chez Auguste Comte (1843)

introduisent des notions de la géométrie moderne dans leurs ouvrages. L'ouvrage de Page annonce qu'il introduit les premiers éléments des théories de la géométrie moderne pour que les élèves puissent faire face aux questions, mais sans vraiment présenter de telles questions. Cirodde, lui, fait de ces notions des applications de l'analyse algébrique sous forme de problèmes. Briot et Bouquet, enfin, n'expliquent pas la raison qui motive l'ajout d'une partie conséquente sur les méthodes dans la seule deuxième édition de leur ouvrage. Dans cette partie, ils s'attachent à donner des démonstrations élégantes des propositions, et dans certains cas mettent plusieurs démonstrations d'une même proposition en regard les unes des autres. Ils exposent la diversité des méthodes à la disposition du géomètre, mettant en évidence l'invention, comme Chasles dans l'*Aperçu*. Mais sans chercher à coordonner ni organiser les méthodes entre elles, et sans se limiter à la géométrie pure.

3 La généralité comme essence de la géométrie analytique chez Auguste Comte (1843)

Auguste Comte publie en 1843 un traité de géométrie analytique qui propose une refonte de son enseignement dans les classes de mathématiques spéciales. Cette publication est marquée par la personnalité de son auteur, enseignant et examinateur à l'École polytechnique. La réception de l'ouvrage a été l'objet de louanges, comme celles de son collègue Gabriel Lamé, mais le conseil d'instruction de l'École polytechnique jugea qu'il était mal rédigé⁷⁵. Nous allons analyser la structure de l'ouvrage, pour mettre en évidence la conception de la généralité qu'y développe son auteur, et étudier dans un deuxième temps les ouvrages d'enseignement postérieurs de géométrie analytique pour repérer s'ils adoptent les recommandations de Comte.

3.1 Le *Traité élémentaire* de Comte

Les ouvrages de géométrie analytique du premier tiers du XIX^e siècle suivent une démarche similaire, bien que variable dans l'ordre d'exposition, qui consiste à trouver les équations de la ligne droite et du cercle, à ex-

⁷⁵. Sur la réception de l'ouvrage : Gentil, Bruno, « La postérité mathématique d'Auguste Comte : à propos de l'intervention de Jean Dhombres au colloque de Cerisy », *Bulletin de la Sabix*, 30, 2002, p. 7-10.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

primer les relations géométriques par des relations sur les coordonnées, et ensuite à étudier les courbes et les surfaces du second degré. Comte qualifie de « désastreuse routine scolastique » cette organisation qui lui semble dévoyer l'essence même de l'analyse cartésienne. Auguste Comte est familier de l'enseignement des mathématiques. Lui-même polytechnicien, il est répétiteur à l'École polytechnique depuis 1832 et examinateur d'entrée à cette école de 1836 à 1843. Il a donné, pour assurer sa subsistance, de nombreuses leçons privées de mathématiques⁷⁶.

Il publie en 1843 un *Traité élémentaire de géométrie analytique*⁷⁷ dont l'organisation rompt avec les traités contemporains sur cette matière. Comte critique vivement la façon dont la géométrie analytique est enseignée, et notamment qu'elle soit le plus souvent limitée à l'étude des seules coniques :

Après deux siècles entiers, l'admirable conception de Descartes n'a pas encore suffisamment pénétré, puisque [la géométrie analytique] semble toujours destiné[e] essentiellement à l'étude spéciale des sections coniques⁷⁸.

Au contraire, le *Traité* de Comte expose des méthodes qui se veulent aussi générales que possible. Il se réfère à Descartes pour rappeler que l'analyse a pour objet de généraliser les théories géométriques, et non de les borner de la sorte à un groupe restreint de figures particulières :

La *géométrie analytique*, telle que Descartes l'a fondée, est essentiellement destinée à généraliser le plus possible les diverses théories géométriques, d'après leur intime subordination à des conceptions analytiques, en soumettant les différentes questions à autant de méthodes uniformes, nécessairement applicables à toutes les figures convenablement définies⁷⁹.

76. Petit, Annie, « Comte et les mathématiques », in Barbin, Évelyne, Caveing, Maurice (dir.), *Les Philosophies et les mathématiques*, Paris : Ellipses, 1996, p. 174-192.

77. Comte, Auguste, *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux et à trois dimensions contenant toutes les théories générales de géométrie accessibles à l'analyse ordinaire*, Paris : Carilian-Gœury et V^{ve} Dalmont, 1843.

Dhombres, Jean, « Où observer la postérité mathématique d'Auguste Comte ? », in Michel Bourdeau (dir.), *Auguste Comte aujourd'hui*, Paris : Kimé, 2003.

Dhombres, Jean, « La pratique philosophique des mathématiques chez Auguste Comte : une conceptualisation de l'espace par l'analytique », in Michel Bourdeau (dir.), *Auguste Comte et l'idée d'une science de l'homme*, Paris : L'Harmattan, 2002.

78. Comte, *Op. Cit.*, p. vi.

79. Comte, *Op. Cit.*, p. 1.

V.3 La généralité comme essence de la géométrie analytique chez Auguste Comte (1843)

Comte s'attache à soumettre les différentes questions fondamentales de la géométrie à des méthodes uniformes applicables à toutes les figures d'une classe à définir avec précision. Il écarte, au moins dans un premier temps, les problèmes particuliers attachés à une figure particulière :

Les questions vraiment limitées à certaines figures, et qui ne comportent pas de généralisation réelle, n'offrent presque jamais qu'un intérêt très-secondaire, à moins qu'elles ne constituent, comme il arrive souvent, de simples modifications particulières d'une considération pleinement générale⁸⁰.

Il recherche donc des questions fondamentales auxquelles il associe des méthodes générales. Après une première partie expliquant et illustrant comment les lignes sont représentées par des équations, il décline la deuxième partie de l'ouvrage en théories générales, au nombre de sept :

- La théorie du nombre de points nécessaires à la détermination de chaque espèce de courbe ;
- La théorie des tangentes ;
- La théorie des asymptotes ;
- La théorie des diamètres ;
- La théorie des centres ;
- La théorie de la similitude des courbes ;
- La théorie des quadratures, et, par suite, des rectifications et des cubatures.

La troisième partie de l'ouvrage concerne l'étude des courbes, et se présente comme une mise en œuvre des théories et des méthodes développées auparavant. L'étude des coniques apparaît à son tour dans la quatrième et dernière partie comme cas particulier de cette étude générale des courbes.

Dans les théories des tangentes, des asymptotes et des quadratures, Comte emploie le calcul différentiel, afin de leur garantir « une entière généralité », c'est-à-dire leur extension à « toutes les courbes actuellement exprimables par nos équations ». La généralité de Comte est différente de celle de Chasles ; elle correspond à ce que Descartes désigne sous le nom d'universalité⁸¹. C'est-à-dire que les théories, et les méthodes associées, qu'expose Comte sont applicables à une classe de courbes précisément identifiées. Il est très attentif à ne

80. Comte, *Op. Cit.*, p. 2.

81. Barbin, « Universality vs generality : an interpretation of the dispute over tangents between Descartes and Fermat », Chemla K. (ed.), *Perspectives on generality*, Oxford University Press, à paraître.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

pas rendre ces théories « vicieusement adhérentes à aucun des cas particuliers qu'elles pourront actuellement embrasser ».

Prenons comme exemple la théorie des tangentes. Comte commence par s'occuper de la définition de la tangente, qui doit être aussi générale que possible. La définition de la tangente à un cercle comme étant une droite qui coupe le cercle en un seul point ne saurait convenir car elle ne s'étend pas à de nombreuses autres courbes. Il affirme que « la définition générale de la tangente [...] consiste à considérer la tangente comme limite vers laquelle tend une sécante dont l'un des points d'intersection supposé mobile se rapproche indéfiniment de l'autre supposé fixe, jusqu'à ce qu'ils se confondent exactement⁸² ». Le coefficient angulaire $[\alpha]$ de la tangente au point de coordonnées (x', y') est donc la limite du rapport $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ lorsque les coordonnées variables x'' et y'' se rapprochent indéfiniment des coordonnées fixes x' et y' . Comte exprime ce rapport dans le cas d'une équation de la forme générique $Ay^m + Bx^n + Cx^p y^q + D = 0$. Un calcul algébrique élémentaire amène alors à la formule :

$$\text{tang.}\alpha = -\frac{nBx'^{m-1} + pCy'^q x'^{p-1}}{mAy'^{m-1} + qCy'^{q-1} x'^p}$$

Mais plutôt que de « retenir cette formule, ou d'en renouveler la recherche spéciale sur chaque exemple »⁸³, Comte s'empresse de l'étendre à une « loi générale » par le moyen de la notion de dérivée : « le coefficient angulaire $[\alpha]$ de la tangente [à une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ et au point de coordonnées (x', y')] est égal au rapport, changé de signe, entre les deux dérivées du premier membre de l'équation proposée, relatives, l'une à l'abscisse, l'autre à l'ordonnée, du point de contact »⁸⁴.

$$\text{tang.}\alpha = -\frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')}$$

Cette « règle des tangentes » est applicable à toute courbe exprimée par une équation que l'on sache dériver, et permet d'en déterminer l'équation de la tangente en chacun de ses points.

Comte produit ensuite une deuxième règle des tangentes. Elle consiste, pour déterminer la tangente au point de coordonnées (x', y') de la courbe d'équation $f(x, y) = 0$, à développer l'expression $f(x' + x, y' + y) = 0$ puis

82. Comte, *Op. Cit.*, p. 122.

83. *Ibid.*, p. 126.

84. *Ibid.*, p. 127.

V.3 La généralité comme essence de la géométrie analytique chez Auguste Comte (1843)

à calculer dans l'expression obtenue le rapport $\frac{y}{x}$ pour $x = 0, y = 0$. Comte donne ici en exemple le cas de la cissoïde d'équation :

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}, \quad r \text{ donné non nul}$$

dont il veut déterminer la tangente à l'origine, qui est en effet un point de la courbe. L'équation donne pour le rapport $\frac{y}{x}$ la relation :

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{2r - x}}$$

La limite de ce rapport est donc, en substituant $x = 0$, égale à 0, c'est-à-dire que la tangente est horizontale. Le choix de cet exemple particulier n'est certainement pas anodin : si nous y avons appliqué la première méthode exposée par Comte, nous aurions abouti au rapport de deux quantités nulles pour l'expression de $\text{tang.}\alpha$. Comte supplée donc avec cette deuxième méthode au défaut de généralité de la première, sans toutefois le dire explicitement au lecteur. Le calcul proposé dans la première méthode est toujours possible dès lors que l'on sait dériver la fonction, mais le rapport n'a pas de sens lorsque c'est le rapport de deux quantités nulles. La deuxième méthode, quant à elle, n'indique pas comment exprimer le rapport $\frac{y}{x}$, et sa valeur de « règle » est par conséquent plus faible, bien que Comte affirme que cet « artifice [...] mieux jugé, peut aisément devenir la base d'une méthode générale »⁸⁵. Les deux règles ne suffisent pas à répondre à toutes les situations possibles, et il admet plus loin dans l'ouvrage « l'impossibilité nécessaire de faire jamais acquérir à nos règles quelconques, même analytiques, une perfection absolue »⁸⁶.

La « question fondamentale de la théorie des tangentes »⁸⁷ étant ainsi traitée, Comte détaille « diverses questions accessoires qui peuvent en être envisagées ou comme des conséquences, ou comme des transformations ». Parmi les questions accessoires se trouvent celle de construire une tangente à une courbe donnée parallèle à une droite donnée, ou passant par un point extérieur donné ; celle de trouver une relation constante entre le coefficient angulaire a et le coefficient linéaire b de toute droite d'équation $y = ax + b$ tangente à une courbe donnée, indépendamment de la position particulière

85. *Ibid.*, p. 128.

86. *Ibid.*, p. 148.

87. *Ibid.*, p. 133.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

du point de contact. Cette dernière question, qui consiste à exprimer l'équation générale de l'ensemble des tangentes à une courbe, est traitée de deux manières différentes. Soit qu'on écrive la coïncidence de la droite proposée avec l'une des tangentes à la courbe $f(x, y) = 0$ au point de coordonnées (x', y') , ce qui donne les relations :

$$a = -\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}, \quad b = y' + x' \frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}$$

Soit qu'on exprime que l'équation $f(x, ax + b) = 0$ possède une racine double, méthode bornée cette fois aux courbes dont l'équation est algébrique, car « dans une équation transcendante, on ne saurait aujourd'hui comment découvrir directement la condition d'égalité de deux racines »⁸⁸.

Ces deux méthodes sont illustrées par la résolution du « problème général qui consiste à mener une tangente commune à deux courbes données »⁸⁹. Comte donne en exemple les courbes d'équations $y^2 = x^3$ et $x^2 + y^2 = 1$. La première méthode appliquée à la première courbe, correspondant à $f(x, y) = y^2 - x^3$, donne $a = \frac{3x^2}{2y}$ et par suite $b = y - \frac{3x^3}{2y}$, équations qui, combinées avec celle de la courbe, donnent la relation $b = -\frac{4}{27}a^3$ (Comte donne en fait une autre relation suite à une erreur de calcul). D'où l'équation générale de la tangente à la première courbe a la forme $y = ax - \frac{4}{27}a^3$. Pour la deuxième courbe correspondant cette fois à $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, la deuxième méthode consiste à exprimer que l'équation $x^2 + (ax + b)^2 - 1 = 0$ a une racine double, ce qui mène à la relation $b^2 = a^2 + 1$.

Ces deux relations combinées aboutissent à l'équation $16a^6 - 729a^2 - 729 = 0$, qui se ramène au troisième degré et permet de déterminer les deux valeurs possibles pour a , et donc les deux tangentes communes aux deux courbes.

Cet exemple de la théorie des tangentes met en évidence la structure de l'ouvrage de Comte. Il décline la géométrie analytique en théories. Chacune de ces théories articule des questions fondamentales avec des méthodes uniformes permettant de les traiter. Viennent ensuite des questions accessoires, c'est-à-dire des problèmes. La généralité est une préoccupation majeure dans cet ouvrage, et elle est présente à tous les niveaux : généralité des définitions, généralité des questions, fondamentales ou accessoires, généralité des méthodes. La notion de généralité chez Comte est plus exigeante et précise que chez Chasles, en ce sens qu'elle demande de circonscrire exactement le

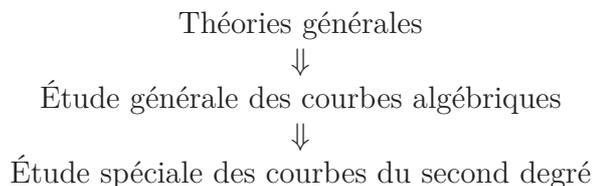
88. *Ibid.*, p. 138.

89. *Ibid.*, p. 138.

V.3 La généralité comme essence de la géométrie analytique chez Auguste Comte (1843)

domaine de validité de son objet, domaine qui doit dans le même temps être le plus large possible.

Le *Traité* de Comte procède du général au particulier. Les notions abstraites de tangente, d'asymptote, etc., font l'objet de théories générales, indépendantes de toute figure particulière. Il utilise ensuite ces théories pour étudier les courbes, en général d'abord, puis enfin plus particulièrement les coniques.



Par exemple, la question fondamentale de tracer une tangente à une courbe est suivie de la question accessoire de tracer une tangente commune à deux courbes en général, elle-même suivie d'un problème particulier où les deux courbes sont spécifiées. Il qualifie sa démarche d'analytique et il y voit l'empreinte des conceptions cartésiennes. Il insiste sur le fait que l'analyse ne se résume en aucun cas à l'emploi de l'algèbre, et récuse l'expression courante d'*Application de l'algèbre à la géométrie* pour désigner la géométrie analytique. En fait, l'analytique chez Comte conjugue deux caractéristiques. La première est l'effort d'abstraction imposé en considérant toujours une question de la manière la plus large et la plus éloignée possible de la situation particulière où elle aura été rencontrée. La deuxième est la décomposition des connaissances en théories juxtaposées, qui fournissent des méthodes uniformes et générales, c'est-à-dire ici dont le champ d'application est précisément défini, permettant de résoudre les questions de géométrie.

3.2 Quelle généralité dans les ouvrages d'enseignement ?

Cette organisation de la géométrie analytique est-elle mise en œuvre dans les classes de mathématiques spéciales qui préparent aux examens d'admission aux Écoles du gouvernement ? Nous allons effectuer un état des lieux avant la publication du *Traité* de Comte, pour détailler ensuite les choix effectués dans quatre ouvrages postérieurs, la *Géométrie analytique* de Delisle et Gérono, les *Éléments de géométrie analytique* de Sonnet et Frontera, les *Leçons de géométrie analytique* de Briot et Bouquet et le *Cours de mathématiques* de Comberousse.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

Cirodde, professeur licencié au Collège Henri IV, fait état dans ses *Leçons de géométrie analytique*⁹⁰ du niveau élevé atteint par les questions posées au concours de l'École polytechnique, où Comte est examinateur, au tournant des années 1840 :

À l'époque où je publiai la première édition de mes *Leçons de Géométrie analytique* [en 1843], les questions de l'examen pour l'admission à l'École Polytechnique avaient pris une extension démesurée. Ainsi on interrogeait les candidats non-seulement sur les méthodes des *tangentes*, des *asymptotes*, des *centres* et des *diamètres*, mais encore sur la détermination des *points maximums et minimums*, des *points d'inflexion*, sur la *discussion des courbes d'ordre quelconque*, sur leur *similitude*, etc., etc. C'était donc la *Géométrie générale* que les professeurs avaient à enseigner à leurs élèves ; de sorte que l'étude des propriétés des courbes du second ordre devait se déduire, comme simple application, des théories dont nous venons de parler.

On ne peut que reconnaître le projet de Comte dans la « géométrie générale » que décrit Girodde, et constater la dépendance dans laquelle se trouve l'enseignement préparatoire vis-à-vis des choix opérés par les examinateurs d'admission. Si son ouvrage ne suit pas strictement le plan de celui de Comte, et commence notamment par résoudre des problèmes particuliers, il aborde néanmoins les notions de tangente, d'asymptote, de centre et de diamètre de façon générale, avant d'entamer l'étude particulière des courbes du second degré, qui précède celle des courbes en général. L'étude générale de ces notions est déclinée, à l'image de l'organisation de Comte, en méthodes générales, problèmes généraux et problèmes particuliers.

Par exemple, le chapitre V, intitulé « Méthode des tangentes »⁹¹, donne l'équation générale de la tangente à une courbe d'équation $\phi(x, y) = 0$ au moyen des dérivées partielles, puis traite successivement les problèmes de la construction d'une tangente à une courbe par un point extérieur, de la construction d'une tangente à une courbe parallèlement à une droite donnée, de la construction d'une tangente commune à deux courbes, et enfin de la détermination des relations qui doivent exister entre les coefficients de deux courbes pour qu'elles soient tangentes. Pour chacun de ces problèmes, une

90. Girodde, *Leçons de géométrie analytique précédées de la trigonométrie rectiligne et sphérique*, 2^e édition, Paris : Hachette, 1848.

91. *Ibid.*, p. 216.

V.3 La généralité comme essence de la géométrie analytique chez Auguste Comte (1843)

ou deux méthodes sont décrites, et illustrées sur des exemples particuliers. Le chapitre est donc conforme à l'ordre de Comte, en traitant d'abord une question fondamentale de façon générale, puis des questions accessoires et enfin particulières. Pour les deux premières, un nombre restreint de méthodes est exhibé.

Comparons avec les ouvrages de la fin de la période précédente. Bourdon, polytechnicien et examinateur d'entrée à l'École polytechnique, inspecteur de l'académie de Paris, aborde dans son *Application de l'algèbre à la géométrie*⁹² de 1825, le « problème des tangentes » en amont de l'étude particulière des sections coniques, mais il restreint néanmoins ses considérations à ces courbes. Louis Étienne Lefébure de Fourcy, polytechnicien de la promotion 1803, professeur de mathématiques au Collège Saint-Louis et examinateur à l'École polytechnique, n'aborde aucune notion générale dans ses *Leçons de géométrie analytique* de 1827 en-dehors de l'étude particulière de chacune des sections coniques. En revanche, la troisième édition de 1834⁹³ voit apparaître à la fin de la géométrie plane deux chapitres intitulés « TANGENTES ET ASYMPTOTES CONSIDÉRÉES GÉNÉRALEMENT » et « SUR LES COURBES SEMBLABLES » qui traitent de courbes bien plus générales que les coniques.

Les programmes de la classe de mathématiques spéciales de 1843, pour la géométrie analytique, préconisent l'étude des courbes du second ordre avant celle des propriétés générales des courbes algébriques d'un ordre quelconque. Nous voyons que Cirotte fait le choix de traiter de façon générale, c'est-à-dire le plus souvent applicable à toutes les courbes algébriques, les notions de tangente, d'asymptote, de centre et de diamètre. Le programme de géométrie analytique de la classe de mathématiques spéciales de 1853 va pour partie dans ce sens⁹⁴. L'item intitulé « DES TANGENTES ET DES ASYMPTOTES » y apparaît avant l'étude particulière et détaillée de chacune des trois sections coniques, et suggère que ces notions soient abordées d'abord dans le cadre général avant d'être appliquées aux courbes du second degré. En revanche, l'item « DES LIGNES COURBES EN GÉNÉRAL » apparaît à la fin du texte, et prescrit l'étude particulière de quelques courbes algébriques et transcendentes⁹⁵.

92. Bourdon, *Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Bachelier, 1825.

93. Lefébure de Fourcy, *Leçons de géométrie analytique*, 3^e édition, Paris : Bachelier, 1834.

94. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. 1789-1914*, INRP, 1994, p. 301.

95. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels.*

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

Voyons maintenant ce qui concerne les ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique postérieurs à celui de Cirodde et à la publication du *Traité* de Comte. L'ouvrage de 1854 de Delisle et Camille Géroton⁹⁶, professeurs de mathématiques, agrégé pour le premier d'entre eux, définit rapidement les notions de centre, de diamètre et d'axe pour les seules courbes du second degré en amont de leur étude particulière. Il développe aussi un chapitre intitulé « Des tangentes en général » et un autre intitulé « Des asymptotes ». Néanmoins, le calcul d'une dérivée introduit dans le premier de ces chapitres n'est pas utilisé pour l'étude de chacune des coniques, et les équations de leurs tangentes et de leurs asymptotes sont établies par des méthodes propres à chacune d'elles. Le calcul de dérivées n'est employé qu'à la fin de la géométrie plane, dans le chapitre consacré, conformément aux programmes, aux lignes courbes en général.

Au contraire, Hyppolite Sonnet et Geronimo Frontera,⁹⁷ utilisent d'emblée dans leur ouvrage de la même année 1854 les équations de la tangente et des asymptotes à une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ exprimées au moyen de la dérivée de la fonction f pour l'étude de chacune des sections coniques. Les auteurs sont tous deux docteur ès-sciences mais ni normaliens ni polytechniciens, Sonnet étant agrégé, inspecteur de l'académie de Paris et examinateur d'admission à l'École centrale des arts et manufactures. Dans l'édition suivante, en 1863, ils consacrent un chapitre entier aux « Théories générales » avant d'aborder l'étude de chacune des sections coniques. Ce chapitre commence par les considérations suivantes :

Ce chapitre est consacré à l'exposition des théories générales qui ont pour objet de déduire de l'équation d'une courbe quelconque les coordonnées de certains points et les équations de certaines droites jouissant de propriétés remarquables à l'égard de la courbe, points et droites qu'il importe de connaître pour discuter cette courbe, c'est-à-dire pour déterminer exactement sa forme et sa position⁹⁸.

Le chapitre traite en toute généralité des tangentes et des asymptotes, ainsi que des centres et des diamètres.

1789-1914., Paris : I.N.R.P. et Economica, 1995, p. 192 et p. 307.

96. Delisle, A., Geronon, Camille, *Géométrie analytique*, Paris : Mallet-Bachelier, 1854.

97. Sonnet, Frontera, *Éléments de géométrie analytique*, Paris : Hachette, 1854.

98. Sonnet et Frontera, *Éléments de géométrie analytique*, 2^e édition, Paris : Hachette, 1863, p. 103.

V.3 La généralité comme essence de la géométrie analytique chez Auguste Comte (1843)

Briot et Bouquet sont normaliens tous les deux, professeurs en classe de mathématiques spéciales et à la Faculté des sciences de Paris, et pour Briot à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure. Ils modifient le texte de leurs *Leçons de géométrie analytique* entre la deuxième édition de 1851 et la troisième de 1860. Dans la première, aucune notion générale n'est abordée en amont de l'étude des coniques, et la notion de dérivée pour définir la tangente apparaît seulement dans la troisième partie intitulée *des méthodes en géométrie*. En revanche, dans l'édition suivante, avant l'étude des courbes du second degré, figurent la question de l'équation de la tangente à une courbe quelconque par les dérivées partielles, et un chapitre intitulé « Centre, Diamètres et Axes des courbes du second degré » qui traite ces notions générales dans le cadre restreint des coniques.

Comberousse, examinateur et répétiteur à l'École centrale des arts et manufactures et professeur au Collège Chaptal, consacre aux théories générales le deuxième Livre du troisième tome de son *Cours de Mathématiques*⁹⁹, portant sur la géométrie analytique. Elles regroupent la théorie des tangentes, la théorie des asymptotes, la théorie des centres et la théorie des diamètres. Pour chacune, une ou plusieurs méthodes de détermination sont exposées dans le cas général d'une courbe dont l'équation peut être dérivée par rapport à chacune des variables. Les exemples choisis ne se limitent pas aux coniques, ni même aux courbes algébriques. L'auteur précise néanmoins que les matières de ce Livre ne sont pas exigées des candidats à l'École centrale, et les notions de tangente, d'asymptote, de centre et de diamètre sont traitées dans le troisième Livre dans le cas particulier des courbes du second degré. Si l'ouvrage est destiné avant tout aux candidats à l'École centrale, il en dépasse les exigences, sans doute pour les élèves les plus avancés et pour ceux qui se destineraient à l'École polytechnique.

3.3 Conclusion

Comte propose, dans son *Traité élémentaire de géométrie analytique*, une « rénovation radicale »¹⁰⁰ de l'enseignement de la géométrie analytique. Il caractérise celle-ci par la recherche systématique de la plus grande généralité dans l'étude d'une question, démarche qu'il associe aux conceptions cartésiennes. Son ouvrage procède du général au particulier, au contraire des ou-

99. Comberousse, *Cours de Mathématiques*, tome troisième, Paris : Mallet-Bachelier, 1862.

100. Comte, *Op. Cit.*, p. VIII.

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

vrages contemporains qui traitent l'étude particulière des sections coniques. Il commence par l'exposé de théories générales qui répondent par des méthodes générales à des questions fondamentales, questions mises au premier plan dans l'ouvrage. La géométrie de l'étude des courbes est ainsi organisée en questions fondamentales, traitées par des méthodes uniformes et générales, c'est-à-dire dont le champ d'application est à la fois précisément circonscrit et le plus large possible. Cette recherche de la plus grande extension possible du cadre dans lequel une question est considérée constitue pour Comte l'essence de la géométrie analytique, alors que le recours à l'Algèbre n'est qu'un moyen d'y parvenir.

Les ouvrages contemporains et postérieurs d'enseignement de la géométrie analytique, ainsi que les programmes officiels, suivent progressivement une logique comparable, de façon néanmoins partielle et en aucun cas radicale. L'étude de notions générales apparaît petit à petit en amont de l'étude particulière des sections coniques. L'observation des rééditions successives d'un même ouvrage met particulièrement en évidence ce changement.

4 Conclusion

Nous avons vu comment les deux ouvrages de Chasles, l'*Aperçu historique* et le *Traité de géométrie supérieure*, ainsi que le *Traité élémentaire de géométrie analytique* de Comte proposent une réflexion renouvelée sur la notion de méthode en géométrie, et lui donnent une importance de premier plan.

Dans son essai intitulé *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Chasles réunit et organise les théories de la géométrie moderne. Il met en évidence la puissance d'invention de ces théories, qui justifie le qualificatif de méthodes qu'il leur attribue. Nous avons identifié trois caractéristiques attachées à ces méthodes : la fécondité, la simplicité et la généralité. C'est-à-dire que de nombreuses propositions peuvent être déduites de ces théories, qu'elles possèdent le caractère de l'évidence, et qu'elles s'appliquent à des situations multiples et variées. L'organisation de ces théories vise à dégager à terme un petit nombre de principes généraux dont elles dépendraient toutes ensemble.

Dans le *Traité de géométrie supérieure*, Chasles opte pour une présentation déductive de la géométrie moderne dans un cadre unifié et uniforme. L'intérêt porté aux méthodes d'invention dans l'ouvrage précédent est effacé, au profit de l'uniformité de la méthode de démonstration employée. L'intro-

duction de théories spéciales, portant sur la notion de rapport anharmonique et les notions dérivées d'involution et de division homographique, permet de démontrer de façon uniforme des théorèmes généraux ensuite déclinés en propriétés particulières des figures.

Alors que les ouvrages de Chasles traitent de géométrie pure, et s'attachent à montrer qu'elle possède des ressources comparables à celles de l'analyse algébrique, Comte veut renouveler dans son *Traité* l'enseignement de la géométrie analytique. Celle-ci est vouée, par essence, et conformément aux conceptions cartésiennes chères à Comte, à la recherche de la plus grande généralité dans le traitement d'une question. Il commence ainsi son ouvrage par l'exposé de théories générales sur les notions de tangente, d'asymptote, de diamètre, de centre, de similitude et de quadrature. Ces théories, associées à des méthodes générales, sont ensuite appliquées à l'étude des courbes en général puis à celle des coniques en particulier.

Nous remarquons que les deux traités de Chasles et de Comte sont guidés par leur souci de généralité. Ils procèdent l'un et l'autre du général au particulier. Chasles établit des théories spéciales, qui lui permettent de démontrer des théorèmes généraux, desquels il déduit les propriétés des figures. Comte établit des théories générales, qui servent à l'étude générale des courbes algébriques, dont est déduite l'étude spéciale des courbes du second degré. Néanmoins, la généralité de Comte est plus exigeante que celle de Chasles, car elle vise à circonscrire exactement le domaine de validité d'une méthode, qu'il veut dans le même temps le plus large possible.

La résolution des problèmes occupe une place importante dans l'*Aperçu* car elle illustre et veut convaincre de la puissance des méthodes exposées. Dans les deux traités, elle arrive en bout de chaîne, comme aboutissement de la structuration de ces ouvrages.

Chasles et Comte occupent des positions particulièrement propices à la diffusion de leurs idées dans l'enseignement secondaire. L'un est professeur à la chaire de géométrie supérieure de la Sorbonne, et académicien, l'autre est examinateur d'entrée à l'École polytechnique et répétiteur dans cette École.

Nous avons montré que dans les ouvrages d'enseignement contemporains de géométrie élémentaire, les notions de géométrie moderne sont peu présentes. Le cas échéant, elles sont introduites de façon accessoire, le plus souvent en relation avec la résolution des problèmes et à destination des candidats aux Écoles du gouvernement. Les programmes de 1852, qui imposent désormais en détail les contenus des cours, n'intègrent pas ces notions. Un seul auteur, Amiot, entreprend dans ses *Leçons nouvelles de géométrie élémen-*

CHAPITRE V. MÉTHODES ET GÉNÉRALITÉ : LES OUVRAGES DE CHASLES ET DE COMTE

taire de 1850, de réorganiser la géométrie élémentaire de façon à y intégrer les notions récentes de géométrie. C'est sans doute l'ouvrage le plus proche du projet d'unification et d'uniformisation de la géométrie énoncé et réalisé par Chasles dans son *Traité*.

Il apparaît que certains ouvrages de géométrie analytique contiennent des notions de géométrie rationnelle, soit qu'ils présentent des chapitres empruntés à la géométrie pure, soit qu'ils évoquent ces notions à l'occasion de la résolution de problèmes par la géométrie analytique. Un ouvrage, de Briot et Bouquet, consacre une partie entière aux méthodes en géométrie, dans sa deuxième édition de 1851 seulement. Il donne à voir la diversité des moyens à la disposition du géomètre pour démontrer les théorèmes, et aborde notamment, par la géométrie analytique, plusieurs notions de la géométrie moderne. Il illustre la puissance d'invention de ces méthodes, sans chercher à les organiser ou à les comparer, mais en mêlant les approches analytique et géométrique au service de l'élégance et de la simplicité.

Les recommandations de Comte en géométrie analytique ne sont pas reprises sous leur forme contraignante et intransigeante, ni dans les ouvrages d'enseignement ni dans les programmes officiels. Toutefois, l'étude de théories générales en amont de l'étude particulière des coniques s'y développe progressivement, en particulier pour la méthode de détermination de la tangente à une courbe en recourant à la notion de dérivée, méthode inscrite aux programmes officiels en 1853.

CHAPITRE VI

UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Nos recherches systématiques ont montré l'ampleur du phénomène : le nombre d'énoncés appelés *problèmes* dans les ouvrages d'enseignement de géométrie est souvent beaucoup plus important dans cette période que dans la précédente, atteignant plusieurs centaines d'énoncés dans certains ouvrages. Pour essayer d'évaluer ce phénomène, nous avons procédé à une étude quantitative portant sur un ensemble le plus exhaustif possible d'ouvrages de l'époque qui nous intéresse, tout en établissant une typologie des problèmes qui permette de rendre compte des catégories de problèmes particulièrement concernés par le phénomène. Le plus souvent, les auteurs de ces ouvrages sont des enseignants des Lycées et collèges, ou l'ont été, et leurs ouvrages sont réalisés à partir des cours qu'ils ont donnés. Ils soumettent ces ouvrages à leurs collègues, car, manifestement, un enseignant appuie en général son cours sur un ouvrage particulier.

Nous avons entrepris d'analyser les ouvrages de sorte à répondre aux questions suivantes. Les problèmes sont-ils disséminés ou regroupés dans les ouvrages? Dans le deuxième cas, quels sont les critères de groupement? Comment l'afflux des problèmes est-il justifié par les auteurs, le cas échéant, par des points de vue pédagogique ou épistémologique? Nous verrons que quelques auteurs répondent explicitement à ces questions.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

La géométrie élémentaire est enseignée à des niveaux variés. Dans les classes de l'enseignement primaire supérieur, qui, s'il relève de l'enseignement primaire, est souvent installé dans les collèges ; dans l'enseignement spécial ou industriel ; dans presque toutes les classes de l'enseignement classique, des classes de grammaire à la classe de philosophie, dans les deux sections des sciences et des lettres ; dans la classe de mathématiques élémentaires enfin. Les manuels de géométrie élémentaire sont souvent destinés à plusieurs de ces niveaux. Nous procédons donc à une analyse globale de ces ouvrages, en précisant, lorsque cela s'avère pertinent, les caractéristiques propres à un niveau particulier d'enseignement.

Nous avons indiqué en introduction à notre deuxième partie que les programmes officiels, qui détaillent les contenus de chaque matière pour chaque niveau, se réfèrent parfois à des ouvrages en particulier. Ceux de 1847 pour l'enseignement spécial, ou industriel, tourné vers l'application pratique des sciences, citent les ouvrages de Dupin, de Bergery et la *Nouvelle géométrie théorique et pratique*¹ publiée en 1839 par Sonnet. Ceux de 1852 pour l'enseignement dans la section des sciences mentionnent les *Éléments* de Clairaut et de Bézout, prisés pour la simplicité et l'évidence de leurs démonstrations.

La première partie a mis en évidence plusieurs types d'énoncés désignés par le terme de problème : problèmes graphiques de construction, problèmes numériques de calcul arithmétique sur les mesures des grandeurs, problèmes spéculatifs d'invention d'une proposition et théorèmes à démontrer. Ces distinctions sont-elles maintenues dans cette deuxième période ? Comment sont représentés ces différents types de problèmes dans les ouvrages ?

Concernant plus particulièrement les problèmes de construction, sont-ils uniquement des problèmes de construction à la règle et au compas ? Sont-ils associés à l'emploi d'instruments de tracé, et le cas échéant lesquels ?

Afin d'établir une image des choix effectués par les professeurs qui enseignent la géométrie élémentaire, nous avons recensé les premières éditions des ouvrages de géométrie élémentaire publiés par des auteurs français entre 1836 et 1865. Ne figurent dans cette liste ni leurs rééditions ultérieures, qui parfois ont subi des changements notables, ni celles d'ouvrages antérieurs,

1. Sonnet, Hippolyte, *Nouvelle géométrie théorique et pratique*, Paris : Hachette, 1839.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

comme par exemple les rééditions des ouvrages de Legendre et de Lacroix.

Les auteurs des ouvrages recensés sont pratiquement tous des professeurs, ou l'ont été, à différents niveaux d'enseignement, à Paris ou en province. Montferrier, le seul, autant qu'il a pu être déterminé, qui n'est pas dans ce cas, est un littérateur, c'est-à-dire une personne qui s'intéresse aux lettres et aux sciences sans en avoir fait pour autant une profession. Les professeurs enseignent dans des lieux et des niveaux disparates : des établissements réputés de la capitale aux institutions privées de province, en passant par les petits séminaires ; des premières classes de l'enseignement secondaire classique ou spécial, à la classe de mathématique élémentaire, en passant par la classe de philosophie. La formation des auteurs, là aussi lorsqu'elle a pu être déterminée, montre qu'ils sont souvent issus des Écoles du gouvernement, l'École polytechnique et l'École normale supérieure d'abord, mais aussi l'École centrale des arts et manufactures, l'École spéciale militaire et l'École royale des arts et métiers. Les autres ont étudié à la Faculté des sciences ou au séminaire.

La majorité de ces ouvrages traitent de la théorie ; quelques-uns sont des recueils de problèmes, auxquels nous accorderons une attention particulière, et se situent à la fin du tableau. Les titres sont variés, et annoncent un *Cours*, des *Éléments*, un *Traité* ou encore des *Leçons*. Pour autant, ces termes ne traduisent pas nettement de spécificité des ouvrages, à part le terme de *Cours* qui désigne fréquemment un ouvrage qui réunit plusieurs branches des mathématiques.

Dans le tableau situé dans les pages suivantes, nous avons indiqué successivement, pour chacun de ces ouvrages, et dans leur ordre chronologique de publication, le nom de l'auteur, sa formation, son occupation au moment de la parution de la première édition de l'ouvrage, le titre de l'ouvrage, ses destinataires, la date de publication, le nombre d'énoncés de problèmes résolus dans l'ouvrage, le type et la place de ces énoncés. Les types repérés sont les problèmes graphiques (G), les problèmes numériques (N), les problèmes spéculatifs (S), les problèmes qui demandent la détermination d'une relation arithmétique entre des grandeurs (A), et les problèmes de détermination d'un lieu géométrique. Concernant la dernière colonne du tableau, les problèmes peuvent être groupés dans des parties dédiées de l'ouvrage (Gr), ou bien répartis en alternance avec les théorèmes (Ré), ou encore apparaître dans des listes de problèmes non résolus (Li).

**CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES
PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT**

Auteur	Formation	Activité	Titre
Pinault	Abbé	Professeur de physique au séminaire d'Issy	<i>Traité élémentaire de mathématiques</i>
Cirodde, P.-L.	Docteur ès-sciences	Professeur au Collège royal Henri IV	<i>Leçons de géométrie théorique et pratique</i>
Gouré, Édouard		Professeur de mathématiques à Tournon	<i>Éléments de géométrie et de trigonométrie</i>
Montferrier, A.-S.		Littérateur	<i>Cours élémentaire de mathématiques pures</i>
LG	École royale des arts et métiers	Professeur de physique au petit séminaire d'Orléans	<i>Éléments de géométrie, suivis de la trigonométrie</i>
Finck, Pierre	École polytechnique (1815)	Professeur en classe de mathématiques spéciales	<i>Géométrie élémentaire</i>
Sonnet, Hippolyte	Docteur ès-sciences	Examinateur à l'École centrale des arts et manufactures	<i>Nouvelle géométrie théorique et pratique</i>
Lionnet, Eugène		Professeur au Collège royal Louis-le-Grand	<i>Éléments de géométrie</i>
Pyrolle	École spéciale militaire		<i>Éléments de géométrie</i>
Idoux, A.-J.		Professeur de mathématiques	<i>Nouveaux éléments de géométrie</i>
Percin, J.		Professeur au Collège royal de Nancy	<i>Géométrie simplifiée</i>
Catalan, Eugène	École polytechnique (1833)	Professeur de mathématiques	<i>Éléments de géométrie</i>
Foucault, L.		Professeur de mathématiques à Pons	<i>Éléments de géométrie</i>
Planche, Jules		Inspecteur d'académie à Amiens	<i>Cahiers de géométrie élémentaire [...] complément au traité de Legendre</i>

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

Destinataires	Date	Nombre	Types	Place
Élèves autres que se préparant aux Écoles du gouvernement	1836	22	G	Gr
Classes de mathématiques élémentaires des Collèges royaux	1836	88	AGN	Ré
Élèves se préparant aux Écoles spéciales	1836	64	AG	Gr
Grand public lecteur de la bibliothèque ecclésiastique	1837	44	GS	Gr
Élèves qui se préparent aux examens	1837	35	GNS	Gr
Classes préparatoires, Écoles régimentaires, Écoles industrielles, classe de philosophie	1838	35	G	Ré Li
Écoles primaires supérieures, Écoles industrielles, Écoles normales primaires	1839	116	GN	Ré
Élèves des Collèges	1841	69	AG	Gr
	1842	52	GN	Gr
Élèves se préparant au baccalauréat et aux Écoles militaires	1842	56	AGLNS	Gr Li
Élèves des collèges et Écoles primaires supérieures	1842	41	GN	Gr Li
	1843	82	AGN	Gr
Aspirants aux baccalauréat ès-lettres	1844	34	GN	Gr Li
Classes de mathématiques élémentaires	1845	11	AGN	Ré Li

**CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES
PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT**

Auteur	Formation	Activité	Titre
Blum , Au- guste	École polytech- nique (1831)	Professeur de mathéma- tiques	<i>Cours complet de mathéma- tiques</i>
Eysseric A.- D., et Pas- cal, J.-C.		Professeurs de mathéma- tiques	<i>Traité de géométrie théo- rique et pratique</i>
Amiot, A.		Professeur au Lycée Bona- parte	<i>Leçons nouvelles de géomé- trie élémentaire</i>
Guilmin, Adrien	École normale su- périeure (1836)	Directeur d'une institution à Paris	<i>Cours de géométrie élémen- taire</i>
Amiot, A.		Professeur au Lycée Bona- parte	<i>Éléments de géométrie</i>
Briot, Charles	École normale su- périeure (1838)	Professeur de spéciale au ly- cée Saint-Louis	<i>Éléments de géométrie. Théorie</i>
de Com- berousse, Charles	École centrale des arts et manufac- tures	Professeur au Collège Chap- tal	<i>Cours de mathématiques</i>
Reydellet	École des Carmes	Professeur au petit sémi- naire d'Orléans	<i>Éléments de géométrie</i>
Ritt, Georges	École normale su- périeure (1820)	Inspecteur des écoles pri- maire de la Seine	<i>Problèmes de géométrie et de trigonométrie</i>
La Frémoire, Henri	École polytech- nique (1835)	Répétiteur au Collège royal Louis-le-Grand	<i>Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire</i>
Percin, J.		Professeur de mathéma- tiques au Collège royal de Nancy	<i>Compléments de géométrie ou recueil de questions et de problèmes</i>
Sarazin	Licencié ès-sciences	Ancien professeur au Col- lège d'Épinal	<i>Nouveau recueil de pro- blèmes de géométrie</i>
Catalan, Eu- gène	École polytech- nique (1833)	Professeur de mathéma- tiques	<i>Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire</i>

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

Destinataires	Date	Nombre	Types	Place
Aspirants aux Écoles du gouvernement	1845	54	AGLN	Gr Li
Écoles primaires supérieures et industrielles, aspirants au baccalauréat	1848	64	GNS	Gr Li
	1850	33	GLS	Gr Li
Classes des Lycées et Collèges	1854	63	GN	Gr
	1855	33	GNS	Gr Li
	1856	78	GNL	Gr Li
Candidats à l'École centrale des arts et manufactures et aux Écoles du gouvernement	1861	39	G	Gr Li
Aspirants au baccalauréat et aux Écoles du gouvernement	1864	69	AGNS	Gr Li
	1836	675	AGLNS	
	1844	465	AGN	Li
Candidats aux Écoles spéciales	1848	130	GL	
Classes élémentaires des collèges, des pensions, et des écoles primaires supérieures	1849	600	GNS	
	1852	253	AGLN	

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Nous allons d'abord expliciter les deux dernières colonnes du tableau pour analyser la nature, l'organisation et le nombre d'énoncés de problèmes dans les manuels de géométrie élémentaire recensés. Ensuite, nous analyserons plus précisément la conception qu'ont les auteurs des problèmes de construction. Enfin, nous nous appuierons sur les discours des auteurs pour repérer les intentions qui les conduisent à placer des problèmes dans leurs ouvrages.

1.1 Nature, organisation et nombre des énoncés

Pour approfondir notre compréhension du tableau, nous allons mettre en lien les données qu'il contient avec le contenu des ouvrages concernant successivement la nature, l'organisation et le nombre des problèmes.

Différents types de problèmes

Dans le *Cours de géométrie élémentaire* de Vincent se trouve la distinction entre trois catégories de problèmes, à savoir les problèmes graphiques, les problèmes numériques et les problèmes spéculatifs. Montrons comment cette distinction et cette terminologie sont reprises par plusieurs auteurs répertoriés dans le tableau.

Amiot, professeur de mathématiques au lycée Saint-Louis, distingue dans ses *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de géométrie* les problèmes de construction, les théorèmes à résoudre et les problèmes numériques :

On peut diviser les problèmes de géométrie en deux classes : l'une comprend tous ceux qui ont pour objet la construction d'une figure satisfaisant à des conditions données, et qu'on appelle pour cette raison *problèmes de construction*, ou *problèmes graphiques* ; l'autre classe est composée des problèmes dans lesquels on propose de vérifier qu'une figure donnée jouit de certaines propriétés. Ces derniers problèmes ne sont en réalité que des *théorèmes*, c'est-à-dire des propositions à démontrer. Dans cette classification des problèmes nous avons omis les applications numériques de la géométrie, parce qu'elles ne sont que des exercices d'arithmétique².

2. Amiot, *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de géométrie*, Paris : Dezobry, Magdeleine et c^{ie}, 1858, p. 1.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

Planche, inspecteur d'académie, distingue parmi les énoncés regroupés à la fin des livres successifs de ses *Cahiers de géométrie élémentaire des théorèmes à démontrer, des applications numériques et problèmes à résoudre par le calcul, des problèmes graphiques indéterminés ou lieux géométriques* et enfin des *problèmes graphiques déterminés*. C'est-à-dire qu'il ajoute la détermination des lieux géométriques aux catégories précédentes. Nous avons rencontré des problèmes de détermination de lieux en géométrie élémentaire dans le recueil de Reynaud de 1833 intitulé *Théorèmes et problèmes de géométrie*.

Sarazin, ancien professeur au collège d'Epinal, distingue trois types de problèmes³ : les problèmes graphiques, les problèmes théoriques ou spéculatifs, et les problèmes numériques ou d'application.

Avant de montrer sur des exemples précis des énoncés de ces différents types de problèmes, précisons que nous avons introduit une catégorie supplémentaire, pour caractériser les énoncés qui demandent d'établir une relation arithmétique entre des grandeurs au sein d'une figure. Que de tels énoncés soient désignés par le terme de problème, sans être spécifiés, alors qu'il n'est pas question de construire une figure, mais d'établir une proposition, nous a paru symptomatique de l'élargissement de la notion de problème.

Signalons d'autre part que les mots employés par les auteurs pour désigner les énoncés varient largement d'un ouvrage à l'autre. Les termes que nous employons de problèmes graphiques, de problèmes numériques, de lieux et de théorèmes ne sont pas uniformément ceux de tous les auteurs, qui utilisent parfois le mot *exercice* pour désigner ce que nous appelons *problème*, ou encore qui ne font parfois pas de distinction explicite entre les catégories de problèmes.

Les problèmes de type (A) demandent la détermination d'une relation arithmétique entre des grandeurs. Par exemple, ce premier problème faisant suite au quatrième Livre des *Éléments de géométrie* d'Eugène Catalan, professeur de mathématiques au Lycée Charlemagne :

PROBLÈME I. Déterminer le côté d'un pentagone régulier dont l'aire est donnée⁴.

3. Sarazin, *Nouveau recueil de problèmes de géométrie, à l'usage des classes élémentaires de mathématiques des collèges, des pensions et des écoles primaires supérieures*, Paris : Delalain, 1849.

4. Catalan, *Éléments de géométrie*, Paris : Bachelier, 1843, p. 150.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

La solution en est, en notant c le côté cherché et P l'aire donnée :

$$c^2 = \frac{4}{5}P\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

L'emploi du symbolisme arithmétique permet d'exprimer et de manipuler les relations entre les grandeurs attachées à une figure.

Les énoncés de type (G) sont les constructions graphiques de figures vérifiant des conditions données. Nous avons déjà rencontré de nombreux exemples de ce type de problème. Ils doivent être exécutés avec les instruments de la géométrie, que nous décrirons plus loin. Sarazin présente le problème graphique comme le plus courant dans les traités de géométrie élémentaire, ce qui est effectivement confirmé par l'observation des ouvrages d'enseignement. Il « a pour objet la traduction graphique, ou plutôt l'existence concrète d'une ou de plusieurs propriétés »⁵. Par exemple :

15. Mener entre deux parallèles, par un point, soit intérieur, soit extérieur, soit situé sur l'une d'elles, une droite d'une longueur donnée⁶.



Les énoncés de type (L) demandent la détermination d'un lieu géométrique. Ainsi de ce problème tiré de l'appendice à la géométrie du *Cours complet de Mathématiques* de Blum, professeur de mathématiques :

- PROBLÈME I. Trouver le lieu géométrique des points tels que la différence des carrés des distances de ces points à deux points fixes soit égale à un carré donné⁷.

Blum indique seulement qu'« on trouvera une perpendiculaire à la ligne droite qui unit les deux points donnés ».

5. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 5.

6. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 27.

7. Blum, *Cours complet de Mathématiques*, tome deuxième, Paris : Carilian-Gœury et V^{ve} Dalmont, 1845, p. 231.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

Les énoncés de type (N) demandent le calcul numérique de la mesure d'une grandeur. Ils sont très largement représentés dans le tableau, en particulier en géométrie dans l'espace. Par exemple ces énoncés tirés de la *Nouvelle géométrie théorique et pratique* de Sonnet de 1840 :

PROBLÈME. Un cercle méridien (instrument d'astronomie) a $0^m,92$ de diamètre; quelle est sur sa circonférence la longueur d'un arc de $18^\circ 26'$?

PROBLÈME. Quel rayon faut-il donner à une sphère pour que l'aire de sa surface soit équivalente à 1 mètre carré? ⁸

Sarazin précise que le problème numérique, ou d'application, « consiste en ce qu'on y prend les théorèmes pour points de départ de calculs purs. Transporter dans la langue de l'arithmétique les vérités de la géométrie, tel est leur objet, et nullement la manifestation de propriétés nouvelles » ⁹. Ces problèmes consistent à appliquer des théorèmes établissant des relations sur les grandeurs à des valeurs numériques particulières de ces grandeurs. Par exemple :

562. La hauteur d'une pyramide quadrangulaire régulière est de 0^m5 , le côté de 0^m3 : trouver la solidité et la surface latérale ¹⁰.

Les énoncés de type (S) sont les problèmes spéculatifs. Ils demandent à la fois de déterminer l'énoncé d'un théorème, et de le démontrer. En voilà un exemple tiré des *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire* d'Amiot :

La somme des perpendiculaires tracées d'un point pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral sur les trois côtés est constante. Comment faut-il modifier l'énoncé du théorème pour un point extérieur au triangle? ¹¹

Pour Sarazin, le problème théorique ou spéculatif a « pour objet la découverte d'une propriété ou d'une vérité dont la connaissance nous manque, mais qui peut nous être acquise, en général, par une recherche convenable appelée solution » ¹². Il faut remarquer qu'un « tel problème peut devenir un théorème » lorsque la solution en a été trouvée :

8. Sonnet, *Nouvelle géométrie théorique et pratique*, Paris : Hachette, 1839, p. 202 et p. 522.

9. Sarazin, *Nouveau recueil de problèmes de géométrie*, p. 10.

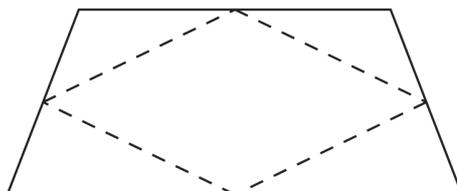
10. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 97.

11. Amiot, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*, Paris : Dézobry et Magdeleine, 1850, p. 70.

12. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 6.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

18. Quel quadrilatère obtient-on en joignant les milieux des côtés d'un trapèze isocèle ?¹³



Nous voyons en effet que la résolution de ce problème aboutit au théorème suivant : les milieux des côtés d'un trapèze isocèle forment un losange. Sous cette forme qui demande véritablement une initiative de la part de l'élève, les problèmes spéculatifs sont très peu représentés dans nos ouvrages. En revanche, ils apparaissent davantage sous la forme de questions susceptibles d'être posées aux examens, mais il s'agit alors plus de montrer que l'on connaît son cours que d'inventer une proposition. Voici un exemple pris dans le *Traité de géométrie théorique et pratique* des professeurs Eysséric et Pascal :

À un arc double correspond-il une corde double ?¹⁴

À ces catégories d'énoncés, il faut encore ajouter les théorèmes à démontrer. Ceux-ci n'apparaissent pas dans le corps des ouvrages, mais dans des listes d'exercices non résolus qui figurent soit à la fin des Livres successifs, soit à la toute fin des ouvrages. Les ouvrages contenant de telles listes sont repérés dans la dernière colonne du tableau par l'abréviation (Li). Absolument toutes ces listes contiennent des théorèmes à démontrer.

Nous observons dans le tableau que la construction des figures reste une partie constitutive de la géométrie élémentaire : de tels énoncés apparaissent dans tous les ouvrages considérés. Les problèmes numériques sont présents dans la grande majorité des ouvrages. Quant aux énoncés notés (A), qui demandent d'établir une relation arithmétique entre des grandeurs, ils apparaissent surtout dans la première partie de la période, et presque plus après 1845. Les lieux géométriques sont relativement peu représentés, et se trouvent plutôt dans les listes d'énoncés à résoudre. Les problèmes spéculatifs, enfin,

13. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 27.

14. Eysséric et Pascal, *Traité de géométrie théorique et pratique*, Paris : Langlois et Leclercq, Carpentras : Devillario, 1850, p. 65.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

sont peu nombreux, et le cas échéant s'apparentent souvent à des questions de cours.

La répartition des problèmes dans les ouvrages

La dernière colonne décrit l'organisation des énoncés appelés problèmes dans les ouvrages selon que :

- (Gr) Les problèmes sont groupés dans des parties bien identifiées de l'ouvrage
- (Ré) Les problèmes sont répartis en alternance avec les théorèmes
- (Li) L'ouvrage présente des listes d'énoncés non résolus

Les deux premiers choix correspondent aux organisations qui avaient été retenues dans la période précédente respectivement par Legendre et Lacroix, dont les ouvrages restent dans cette période des références très fortes. Nous voyons que le choix de grouper les problèmes est majoritairement retenu. Seuls trois ouvrages font le choix contraire de répartir les problèmes au long des théorèmes, si l'on excepte celui de Planche qui est un complément de l'ouvrage de Legendre et non un cours complet. De fait, comme l'écrit ce dernier en 1845, « c'est encore la Géométrie de Legendre, le livre le plus généralement suivi dans les collèges »¹⁵. Dans tous les autres ouvrages, et notamment tous les ouvrages publiés après 1840, des passages clairement identifiés traitent exclusivement des problèmes. Ce choix est d'ailleurs renforcé par les programmes de 1852, issus de la réforme dite de la bifurcation. Ces programmes, déclinés en parties successives et numérotées, consacrent, pour l'enseignement particulier à la section des sciences, quelques numéros entièrement aux problèmes de construction :

16. Problèmes. Usages de la règle et du compas dans les constructions sur le papier. Vérification de la règle. Problèmes élémentaires sur la construction des angles et des triangles.

17. Tracé des perpendiculaires et des parallèles. Abréviation des constructions au moyen de l'équerre et du rapporteur. Vérification de l'équerre.

18, 19. Division d'une droite et d'un arc en deux parties égales. Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés. D'un point donné hors d'un cercle mener une tangente à ce cercle. Me-

15. Planche, *Cahiers de géométrie élémentaire pour servir de complément au traité de Legendre*, Paris : Bachelier et Hachette, 1845, p. 3.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

ner une tangente commune à deux cercles. Décrire sur une ligne donnée un segment de cercle capable d'un angle donné [...]

25, 26. Diviser une droite donnée en parties égales, ou en parties proportionnelles à des lignes données. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes ; une moyenne proportionnelle entre deux lignes. Construire, sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné¹⁶.

Le premier groupe de problèmes de construction, constitué des n°16 à 19, se trouve ainsi après les théorèmes sur la droite, le cercle et les angles, et le second groupe, constitué des n°25 et 26, après la théorie des figure semblables. Les *Éléments de géométrie*¹⁷ d'Amiot se conforment exactement à cette structure en leçons successives portant les intitulés numérotés des programmes. Pour ce qui concerne les programmes de la section des lettres, ils ne retiennent pas l'idée de regrouper les problèmes de construction dans des items spécifiques. Quant aux problèmes numériques, spéculatifs ou les lieux géométriques, ils ne sont pas mentionnés dans ces programmes.

Le nombre de problèmes

Le tableau que le nombre de problèmes varie d'un ouvrage à l'autre, de quelques dizaines à plus d'une centaine. Il est fréquemment supérieur à la quarantaine de problèmes que comptent les *Éléments* de Legendre ou de Lacroix. Dans ces cas-là, deux causes expliquent principalement cet accroissement : l'extension du corpus des problèmes de construction, tel que nous l'avons établi dans les recueils de problèmes de notre première partie, et le fait que des énoncés autres que les problèmes de construction se trouvent désormais qualifiés de *problèmes*.

Bien plus significatifs sont les nombres de problèmes contenus dans les listes d'énoncés non résolus disposées à la fin de chacun des Livres ou à la fin de l'ouvrage. Finck et Idoux terminent, l'un sa *Géométrie élémentaire* de 1838, l'autre ses *Nouveaux éléments de géométrie* de 1842, par des listes respectivement de quatre-vingt-dix et de quatre cents « théorèmes à démontrer et problèmes à résoudre ». Planche décline, à la fin de chacun des huit Livres de ses *Cahiers de géométrie élémentaire* de 1845, des « théorèmes à

16. Belhoste, *Les Sciences dans l'enseignement secondaire français, textes officiels (1789-1914)*, INRP et Economica, Paris, 1995, p. 284.

17. Amiot, *Éléments de géométrie*, Paris : Dézobry et Magdeleine, 1855.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

démontrer » et des « problèmes à résoudre », pour un total de sept cent trente sept énoncés. Percin place, à la fin des six Livres de sa *Géométrie simplifiée* de 1842, soixante-huit « problèmes à résoudre » et « propositions à démontrer ». Foucault ponctue ses *Éléments de géométrie* de 1844 de courtes listes d' « exercices » pour un total de quatre-vingt-quatre énoncés. Blum termine la géométrie de son *Cours complet de mathématiques* de 1845 par une centaine de « problèmes à résoudre et théorèmes à démontrer ». Amiot termine les leçons de ses *Éléments de géométrie* de 1855 par de courtes listes de « problèmes » pour un total de deux cent trente énoncés ; il y en aura quatre-vingt-cinq de plus dans la 14^e édition de 1870. Briot termine chacun des neuf Livres de ses *Éléments de géométrie. Théorie* par des « exercices » déclinés en « théorèmes à démontrer », « problèmes à résoudre », et « lieux géométriques », pour un total de cent quatre vingt treize énoncés. Comberousse termine certains livres de son *Cours de mathématiques* de 1861 par des « questions proposées », au nombre total de quatre-vingt-quatre énoncés. Reydellet, enfin, place des exercices à la fin des huit Livres de ses *Éléments de géométrie*, pour un total de deux cent quinze énoncés.

Ces auteurs proposent donc à leurs lecteurs de résoudre des problèmes, de démontrer des théorèmes, et de déterminer des lieux géométriques, énoncés parfois désignés sous le terme d'exercices, qui exprime le rôle joué par ces énoncés : entraîner le lecteur à mettre en application la théorie. Ils laissent à d'autres, sans doute les professeurs, le soin de corriger leurs essais et de leur fournir une réponse correcte.

Conclusion

Tous les ouvrages recensés contiennent des problèmes. Ils contiennent tous des problèmes graphiques, et très souvent des problèmes numériques. S'ajoutent les problèmes de détermination de lieu, et les théorèmes à démontrer, ces derniers n'étant présents que dans les listes de problèmes à résoudre. Nous avons ajouté un type de problème à ceux repérés par les auteurs, les problèmes qui demandent d'établir une relation arithmétique entre des grandeurs attachées à une figure. Les problèmes spéculatifs, quant à eux, sont très peu représentés.

Nous avons montré que la répartition des problèmes au sein des ouvrages tend, à partir des années 1840, à s'uniformiser en paragraphes spécifiquement constitués de problèmes, ainsi qu'en listes de problèmes à résoudre, à l'écart par conséquent de l'exposition de la théorie.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Ces listes de problèmes à résoudre contiennent pour certaines de grands nombres d'énoncés, dépassant largement le nombre des problèmes résolus dans l'ouvrage, et atteignant parfois plusieurs centaines d'énoncés.

1.2 Des instruments pour réaliser les constructions

Avant d'entamer l'interprétation des résultats de l'analyse du tableau, nous devons préciser la notion de problème graphique. Nous avons remarqué que tous les ouvrages recensés proposent des problèmes de construction. Parfois le nombre de ces problèmes est important ; nous retrouvons alors des énoncés rencontrés à la fin de la première partie comme des problèmes de constructions des triangles, des problèmes de contact, des problèmes de partage des figures ou encore des problèmes de distances inaccessibles.

Désormais, les solutions des problèmes de construction sont le plus souvent accompagnés de la description des tracés à effectuer ainsi que des multiples instruments pouvant être employés à leur réalisation. Outre la règle et le compas, sont décrits l'équerre simple, l'équerre d'arpenteur, le rapporteur, le graphomètre, le compas de proportion, ou encore le trusquin pour opérer des constructions élémentaires¹⁸. L'ouvrage de Sonnet, comme plusieurs autres, présente des illustrations de ces instruments¹⁹. Il commence par la règle et le compas :



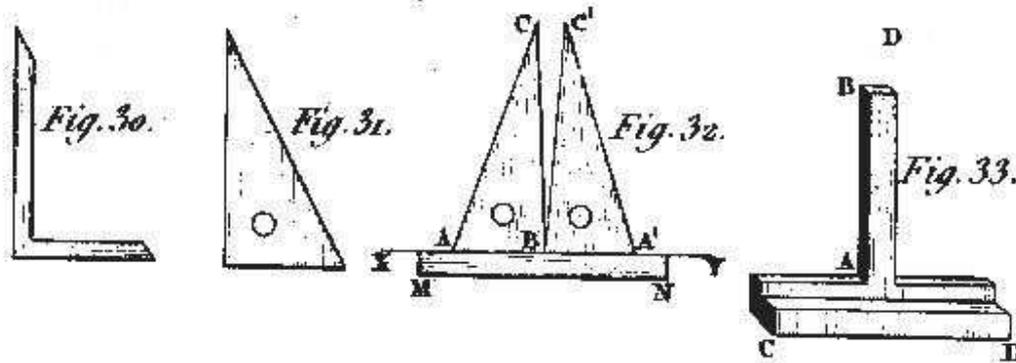
La règle permet de tracer ou prolonger des droites. La figure montre comment vérifier une règle : on trace une droite AB puis on retourne la règle de manière à ce que les points A et B ne changent pas de position. La règle est suffisamment droite si le bord AB coïncide encore avec la ligne tracée. Le compas a quant à lui deux fonctions : reporter des longueurs et tracer des cercles. Pour tracer un angle droit, il existe différentes sortes d'équerres.

Les figures 30 et 31 représentent une équerre en métal et une équerre en bois. La figure 32 montre comment vérifier une équerre : on place un côté

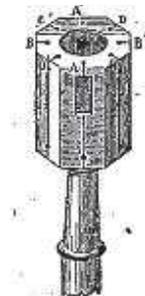
18. Hébert, Élisabeth (dir.), *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Paris : Ellipse, 2004.

19. Sonnet, *Nouvelle géométrie théorique et pratique*, Planches, Paris : Hachette, 1839, p. 1-3.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire



de l'angle droit sur un alignement AB , puis on retourne l'équerre de façon que ce côté vienne en $A'B$ sur le même alignement. Le troisième sommet de l'équerre, C , doit se retrouver à la même place, sans quoi l'équerre est fautive. La figure 33, enfin, montre un té, double équerre qui permet de mener une perpendiculaire au bord d'une planche. L'équerre d'arpenteur a la forme d'un prisme à base octogonale, ainsi que la représentent Briot et Vacquant²⁰. En visant à travers les fentes, cet instrument permet, sur le terrain, de réaliser des alignements perpendiculaires.

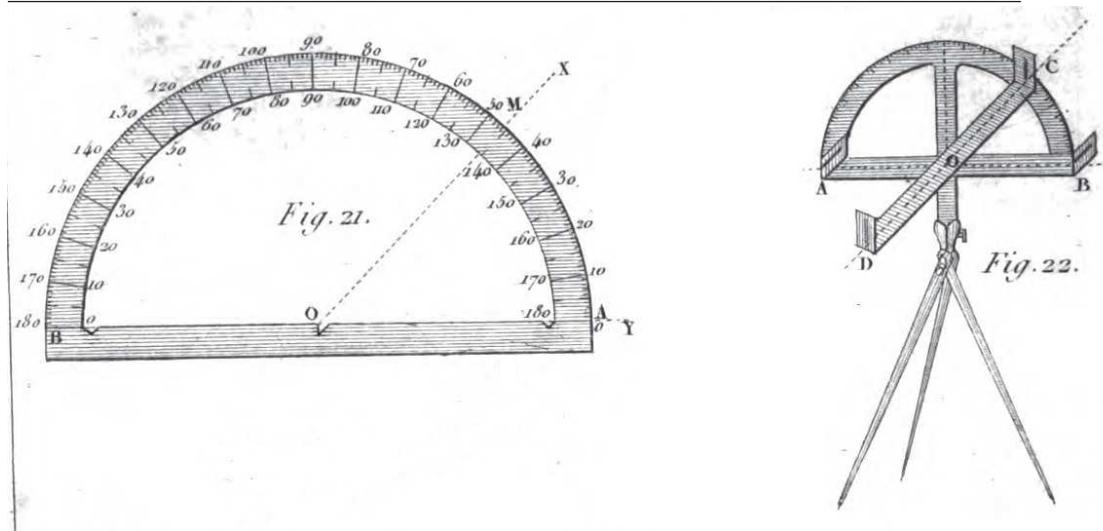


Ces instruments sont les plus fréquemment décrits, avec le rapporteur et le graphomètre, qui permettent de mesurer des angles. Ces derniers sont illustrés par Sonnet.

Le rapporteur est appliqué sur l'angle à mesurer en faisant coïncider son centre avec le sommet de l'angle, et sa base avec un de ses côtés. Là où l'autre côté de l'angle rencontre le limbe peut être lue une mesure de l'angle. Le graphomètre procède de façon similaire par visée.

²⁰. Briot, Vacquant, *Éléments de géométrie. Applications*, 3^e édition, Paris : Hachette, 1862, p. 29.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT



Les constructions utilisant ces divers instruments sont décrites sans distinction d'avec les constructions réalisées avec des droites et des cercles. L'exigence euclidienne de se limiter à ces deux dernières figures, conjuguant simplicité et évidence²¹, n'est pas mise en évidence. Les instruments que nous avons décrits sont avant tout les instruments de l'artisan, et ils sont longuement décrits par exemple dans la *Géométrie appliquée à l'industrie*²² de Bergery, de 1826. Ils apparaissent naturellement ici dans les ouvrages destinés davantage aux écoles industrielles, avec de nombreux autres et des descriptions détaillées de leurs usages. Mais on trouve aussi des descriptions d'instruments dans les ouvrages destinés au seul enseignement classique des classes de mathématiques élémentaires et de philosophie. C'est le cas dans le *Cours de géométrie élémentaire* de Guilmin, dans les *Éléments de géométrie* d'Amiot, et encore dans les *Éléments de géométrie* de Briot. Cela n'est pas systématique pour autant, puisque Comberousse n'évoque pas les instruments du géomètre dans son *Cours de mathématiques*.

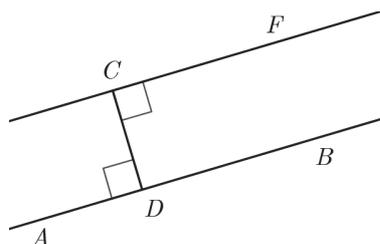
La diversité des instruments et de leurs usages donne lieu à des solutions multiples pour la résolution d'un même problème. Par exemple, Cirodde donne neuf constructions différentes pour le tracé d'une parallèle à

21. Delattre, Joëlle, Bkouche, Rudolf, « Pourquoi la règle et le compas », in Commission Inter-IREM Épistémologie et Histoire des Mathématiques, *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*, Paris : Ellipses, 1993.

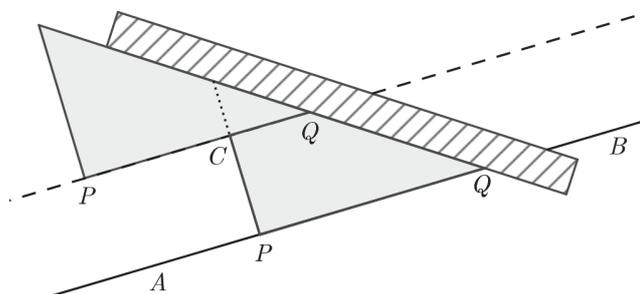
22. Bergery, *Géométrie appliquée à l'industrie*, 1826.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

une droite donnée AB par un point C extérieur à celle-ci, dont voici les sept premières²³. La première consiste à tracer par le point C une perpendiculaire CD à AB , puis une autre perpendiculaire CF cette fois à la droite CD , les perpendiculaires pouvant être tracées au compas ou à l'équerre. La deuxième



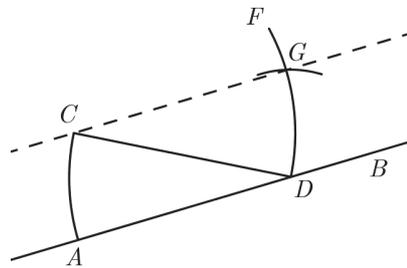
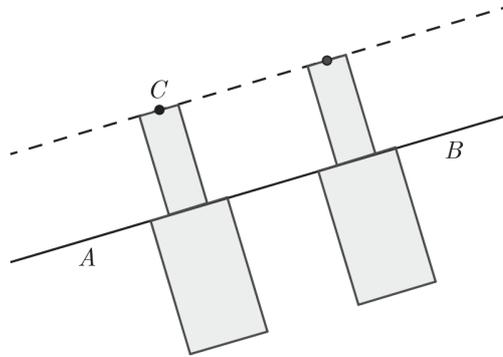
construction consiste à placer un côté PQ d'une équerre sur la droite AB et à appliquer une règle sur l'un des deux autres côtés de l'équerre. Faisant ensuite glisser l'équerre jusqu'à ce que son côté PQ passe par le point C , on trouve la parallèle cherchée. La troisième construction utilise un trus-



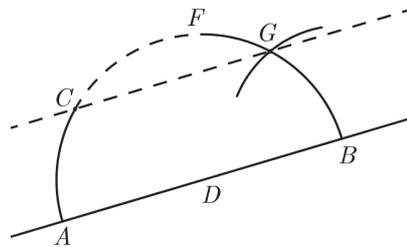
quin, instrument constitué d'une réglette coulissant dans un support et dont l'extrémité est munie d'une pointe à tracer. En faisant glisser le support en appui sur la droite AB , de façon que la pointe à tracer vienne passer par C , celle-ci parcourt la parallèle cherchée. La quatrième construction part d'un arc de cercle de centre C tracé à partir d'un point D de la droite AB . Un deuxième arc est tracé du centre D et passant par C qui recoupe la droite en A . L'arc de centre D et de rayon égal à AC détermine le point G de la parallèle CG cherchée. La cinquième construction demande de tracer à partir d'un point D de la droite AB , et avec le même rayon, un arc AC et un arc

²³. Cirodde, *Leçons de géométrie théorique et pratique*, Dijon : Douillier et Paris : Hachette, 1839, p. 34, 45, 158.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT



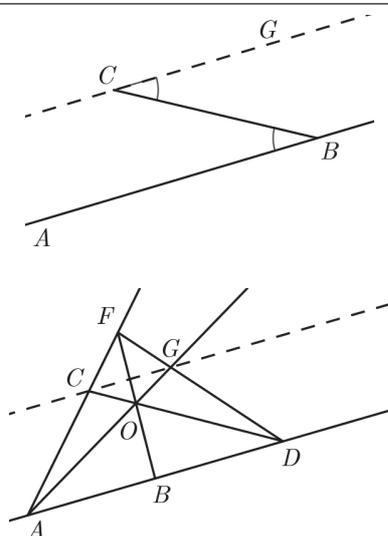
BF . Le cercle de centre B et de rayon égal à AC recoupe l'arc BF au point G de la parallèle cherchée. Les trois constructions suivantes sont indiquées



pour la pratique de terrain. La sixième construction utilise un graphomètre pour mesurer à partir de B l'angle ABC et le reproduire à partir de C en BCG . La septième construction, une fois données deux distances AB et BD égales entre elles, n'emploie que des jalons. Cirodde place un jalon F dans l'alignement de AC , puis un jalon O à l'intersection des alignements CD et BF , puis un autre G à l'intersection des alignements AO et FD . La droite CG est la parallèle cherchée.

Notons que Cirodde signale, pour chaque construction, la proposition

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire



sur laquelle elle s'appuie. Ainsi, la première s'appuie sur la proposition que deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles. La deuxième et la quatrième sur l'égalité des angles respectivement correspondants et alternes-internes faits par une sécante sur deux parallèles. La troisième utilise la propriété de l'écart constant entre les points de deux parallèles. La cinquième s'appuie sur la proposition selon laquelle deux cordes parallèles d'un cercle coupent entre leurs extrémités des arcs égaux. La sixième utilise à nouveau l'égalité des angles alternes-internes, et la septième une propriété des diagonales d'un trapèze établie plus haut dans l'ouvrage.

Il est clair que le fait de recourir à davantage d'instruments que la règle et le compas pour réaliser graphiquement les constructions géométriques a pour conséquence une augmentation du nombre de solutions, chacune faisant appel à des propositions différentes pour sa justification. Cet aspect est particulièrement saillant dans l'ouvrage de Cirotte, publié au début de notre deuxième période pour les élèves des classes de mathématiques élémentaires, mais il apparaît aussi, parfois dans une moindre mesure, dans de nombreux autres ouvrages. Par exemple, le tracé de la parallèle par glissement de l'équerre est fréquemment exposé.

La description des instruments à utiliser pour construire les figures de géométrie se généralise à de nombreux ouvrages, au-delà de ceux qui sont destinés à l'enseignement industriel. Le qualificatif de « graphique » adjoint au terme de construction est symptomatique d'une modification du statut

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

de la construction en géométrie élémentaire. Il ne s'agit pas de construire les figures de la géométrie abstraitement et dans le cadre contraint du recours aux seuls droites et cercles, mais bien d'exécuter un dessin, muni d'instruments divers, en s'appuyant sur les théorèmes de géométrie. Chaque étape de la construction, effective, repose en effet sur une proposition particulière. La plupart des ouvrages proposent dès lors plusieurs solutions distinctes à un même problème de construction, pour des raisons qui peuvent d'abord sembler pratiques. Ainsi, par exemple, du problème de tracer une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite que l'on ne peut pas prolonger. Mais on s'aperçoit que ces solutions sont autant d'occasions de mettre en œuvre les différents théorèmes. C'est à ce titre sans doute qu'ils intéressent autant l'enseignement spéculatif de la géométrie que son enseignement à des fins industrielles.

Cet intérêt porté à la dimension graphique des constructions géométriques est à relier à l'importance prise par le dessin dans l'enseignement de la géométrie depuis la Révolution²⁴. D'une part, le dessin linéaire, ou dessin géométrique, a été officiellement introduit dans l'enseignement primaire supérieur par la loi Guizot de 1833. Il consiste, en appui sur les premiers éléments de géométrie, à tracer des figures, à main levée ou avec les instruments, avec une grande exigence de précision²⁵. D'autre part, l'enseignement du dessin aux ouvriers s'est développé pour les besoins de l'industrie. Nous avons vu par exemple dans la première partie que la *Géométrie appliquée à l'industrie* de Bergery accorde une importance de premier plan aux problèmes de tracés. Sarazin qualifie les problèmes graphiques de « traductions concrètes » des propriétés des figures, soulignant ainsi le lien établi entre des objets théoriques conceptuels et la production concrète d'un dessin. Les classes de l'enseignement industriel, et après 1852 celles de l'enseignement classique dans la section des sciences, consacrent une part conséquente des enseignements au dessin.

Dans le même temps, la géométrie descriptive est exigée, pour ses premiers éléments, à l'examen d'admission de l'École polytechnique, et les épures exigent l'emploi de la règle et du compas. Hachette avait insisté sur le lien entre la résolution des problèmes de construction à la règle et au compas et la géométrie descriptive dans le *Second supplément de la géométrie descriptive* de 1818 :

24. D'enfert, Renaud, *L'enseignement du dessin en France : Figure humaine ou dessin géométrique (1750-1850)*, Paris : Belin, 2003.

25. D'enfert, Renaud, « Inventer une géométrie pour l'école primaire au XIX^e siècle », *Trema*, 22, 2003, p. 41-49.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

J'ai fait remarquer que toutes les opérations graphiques de la Géométrie descriptive se réduisaient à deux seulement, qui consistent à trouver la distance de deux points dont on a les deux projections, et à déterminer le point de rencontre d'une droite menée par deux points donnés et d'un plan qui passe par trois points donnés. Ces deux questions étant résolues avec la règle et le compas, toute la Géométrie descriptive est ramenée à la Géométrie plane. C'est pourquoi les jeunes gens qui désireront se fortifier sur les éléments de géométrie, et ensuite cultiver la Géométrie descriptive, devront d'abord s'exercer à trouver la solution d'un grand nombre de problèmes de Géométrie plane²⁶.

Pour servir cette préparation à la géométrie descriptive par la résolution des problèmes de construction de géométrie plane, Hachette intègre dans ce *Second supplément* une traduction, réalisée à sa demande par Auguste Comte, d'un recueil de problèmes de géométrie élémentaire tirés d'un ouvrage du mathématicien écossais John Leslie (1766-1832)²⁷.

1.3 Pourquoi donner des problèmes à résoudre ?

Certains auteurs explicitent les raisons pour lesquelles ils intègrent des problèmes dans leurs manuels de géométrie élémentaire. Nous avons dégagé quatre conceptions qui légitiment la présence de problèmes, à savoir : les problèmes pour préparer aux concours et aux examens ; les problèmes comme moteurs de l'invention en géométrie ; les problèmes constitutifs de l'activité géométrique ; les problèmes pour appliquer la théorie.

Préparer les concours et les examens

Nous examinons successivement la situation des examens d'admission aux Écoles du gouvernement, du baccalauréat, et du concours général pour repérer dans quelle mesure la préparation de ces examens et concours supposent de savoir résoudre des problèmes.

Qu'en est-il des Écoles du gouvernement ? Quelle place occupent les problèmes dans les examens d'admission ? Prenons l'exemple de l'École poly-

26. Hachette, *Second supplément de la géométrie descriptive*, Paris : Firmin Didot, 1818, p. xiv.

27. Leslie, John, *Elements of geometry, geometrical analysis and plane trigonometry*, 2^e édition, Edinburgh : Ballantyne, 1811.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

technique, qui fonctionne comme un modèle pour les autres. « Les questions de l'examen, écrit Georges Ritt dans son *Manuel des aspirants à l'École polytechnique*, sont de deux sortes : les unes ont pour objet le développement d'une théorie particulière ; les autres, l'application des méthodes à la résolution des problèmes »²⁸. Il fournit dans son *Manuel* cinquante sujets posés à l'oral de mathématique, épreuve publique, et de loin la plus importante pour l'admission à l'École. Chaque candidat reçoit une dizaine de questions portant sur l'arithmétique, la géométrie élémentaire, l'algèbre, la trigonométrie rectiligne, la statique, la discussion des lignes du premier et second degré. L'entretien avec l'examinateur sur ces questions dure une heure²⁹. Le deuxième des sujets présentés par Ritt comporte les questions suivantes pour ce qui concerne la géométrie, hors trigonométrie et géométrie descriptive :

12. Exposer la théorie du contact de deux cercles.

Décrire avec un rayon donné un cercle tangent à un cercle donné et passant par un point donné.

Décrire un cercle tangent à un cercle donné en un point donné et à une droite donnée.

13. Incrire dans un cercle donné un triangle isocèle tel que la somme de la base et de la hauteur soit égale à une longueur donnée.

Déterminer par le calcul la longueur du côté du triangle isocèle demandée.

Résoudre le problème par une construction géométrique.

15. Déterminer la surface d'un triangle en fonction des coordonnées des trois sommets.

Examiner le cas particulier où l'un des sommets est à l'origine.

17. Discuter la courbe $(y-1)(x+1)-2(x+2) = 0$. Si l'on construit l'hyperbole à l'aide des asymptotes, démontrer les propriétés de cette courbe par rapport aux droites. 18. Méthode générale pour trouver le centre des courbes algébriques.

Appliquer la méthode générale à la recherche du centre des courbes du 2^e degré.³⁰

28. Ritt, *Manuel des aspirants à l'École polytechnique, contenant un très grand nombre de questions recueillies dans les derniers examens de concours*, Paris : Hachette, 1839, p. 48.

29. Belhoste, Bruno, « Anatomie d'un concours. L'organisation de l'examen d'admission à l'École polytechnique de la Révolution à nos jours », *Histoire de l'éducation*, 94, 2002.

30. Ritt, *Op. Cit.*, p. 54.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

La question 12, ainsi que les deuxièmes parties des questions 17 et 18 sont traitées entièrement dans les ouvrages d'enseignement dédiés aux classes préparatoires. Nous reconnaissons dans la question 13 un problème posé au concours général de 1823 et traité dans les *Théorèmes et problèmes de géométrie* de Reynaud de 1833. Les questions 15 et la première partie de la question 17 supposent la mise en œuvre de méthodes développées dans les ouvrages de géométrie analytique. La première suppose de savoir écrire une équation de la droite passant par deux points donnés ainsi que la distance d'un point à une droite. La deuxième demande de savoir développer et réduire l'équation d'une conique, et d'effectuer un changement de coordonnées pour se ramener à une forme connue. Nous voyons, conformément à l'appréciation de Ritt, que les questions posées consistent soit à exposer une théorie, soit à exercer des méthodes déterminées à l'avance.

Dans la deuxième partie de la question 18, l'intérêt porté à une « méthode générale » fait écho à l'ouvrage sur la géométrie analytique de Comte, alors examinateur depuis 1837. Pierre Laffite, mathématicien et philosophe disciple d'Auguste Comte, a publié une série de quatre articles dans les *Nouvelles Annales* dans lesquels il détaille la méthode de notation à l'examen d'entrée à l'École polytechnique adoptée par Comte, et restitue les commentaires notés par celui-ci lors d'une série d'examens. Il explique que Comte s'attachait à donner des problèmes à résoudre aux candidats :

C'est la nature des questions qui a surtout caractérisé le système d'examen introduit par Auguste Comte, système qui produisit, à l'époque de son apparition, une grande impression dans le public polytechnique, et a réagi certainement sur l'enseignement de la Mathématique, surtout en ce qui concerne ce qu'on nomme les Mathématiques spéciales, à savoir : la Géométrie analytique et l'Algèbre supérieure. Auguste Comte demandait rarement l'exposition d'une des théories enseignées dans le cours [...] Ce qui caractérisait son système consistait à poser un problème [...] De cette manière, il lui était possible d'apprécier, non seulement si le candidat possédait la théorie, mais aussi s'il savait s'en servir [...] Auguste Comte a toujours évité avec soin les questions singulières qu'on ne peut vraiment résoudre qu'autant qu'on les a directement apprises, et qui, faites pour la galerie, satisfont surtout l'amour-propre de l'examineur³¹.

31. Laffite, Pierre, « Comte examinateur d'admission à l'École polytechnique », *Nou-*

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Il privilégie les questions qui permettent « d'apprécier l'intelligence, la sagacité et l'esprit d'initiative du candidat »³².

Nous n'avons trouvé que deux autres ouvrages, en plus du *Manuel des aspirants* de Ritt, qui intègrent des questions posées à l'examen d'entrée à l'École polytechnique. Il s'agit des *Questions inédites relatives aux examens de l'École polytechnique et de la Marine*³³ de Duchesne, professeur de mathématiques au collège de Vendôme, et du *Recueil de problèmes posés dans les examens d'admission à l'École impériale polytechnique et à l'École impériale centrale des arts et manufactures*³⁴ de Longchampt, directeur des études dans une institution. Ce dernier contient huit cent soixante dix énoncés de problèmes, qui portent sur un champ de connaissances plus étendu que pour les énoncés de la fin des années 1830. En particulier en géométrie analytique, thème qui occupe plus des deux tiers de l'ouvrage.

Il n'est donc pas aisé de trouver des ouvrages qui recensent les questions posées aux examens d'admission aux Écoles du gouvernement. Ils ne font pas encore l'objet de publications systématiques. Concernant les effectifs, les examens d'admission aux Écoles du gouvernement concernent essentiellement les élèves des classes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales. Le nombre d'élèves qui se préparent aux Écoles du gouvernement peut être estimé autour de 1850 à quatre milliers³⁵, dont la plus importante partie provient des établissements de Paris et de Versailles. Les effectifs des candidats à l'École polytechnique, figurant dans le graphique ci-dessous³⁶, sont compris entre cinq et huit cents au cours de notre deuxième période.

Les épreuves orales du baccalauréat ès-lettres portent sur des questions tirées au sort dans une liste publique. Depuis 1822, cette liste comporte des questions de mathématiques, et depuis 1840, une question de mathématiques est obligatoire, choisie parmi cinquante questions réparties entre arithmétique, géométrie et algèbre. En 1849, la partie mathématique du programme

velles annales de mathématiques, 3^e série, tome 13, 1894, p. 65-80, p. 113-120, p. 405-428 et p. 462-482.

32. Laffite, *Op. Cit.*, p. 72.

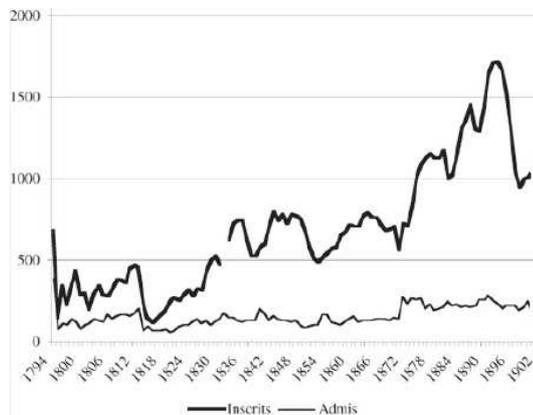
33. Duchesne, *Questions inédites relatives aux examens de l'École polytechnique et de la Marine*, Paris : Hachette, 1836.

34. Longchampt, *Recueil de problèmes posés dans les examens d'admission à l'École impériale polytechnique et à l'École impériale centrale des arts et manufactures, ainsi que dans les conférences des principales écoles préparatoire*, Paris : Gauthier-Villars, 1865.

35. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, tome 1 : 1789 - 1914*, p. 36.

36. Belhoste, « Anatomie d'un concours », *Histoire de l'éducation*, p. 10.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire



Candidats inscrits et candidats admis à l'École polytechnique.

est réduite à vingt-cinq questions. Quelques questions sont des problèmes de construction, pour l'essentiel les problèmes de géométrie plane que l'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide³⁷.

Le baccalauréat ès-sciences, qui intéresse surtout, dans un premier temps, ceux qui se destinent à l'enseignement, est rendu obligatoire en 1822 pour s'inscrire à la faculté de médecine. En 1837, le programme du baccalauréat ès-sciences mathématiques porte sur « l'arithmétique, la géométrie, la trigonométrie rectiligne, la trigonométrie sphérique, l'algèbre, [...] l'application de l'algèbre à la géométrie et les éléments de statique »³⁸. Il est plus étendu que celui du baccalauréat ès-lettres, d'ailleurs exigé pour pouvoir se présenter à celui-ci, et n'est pas décliné en une liste de questions. À partir de 1852, il est exigé pour se présenter aux concours de toutes les Écoles du gouvernement, dont la plus prestigieuse, l'École polytechnique, et à l'exception de l'École navale. Après 1852, le baccalauréat ès-sciences est l'aboutissement de la section des sciences, créée parallèlement à celle des lettres, et dotée de programmes spécifiques. En géométrie apparaissent l'étude purement géométrique des coniques, et la référence aux problèmes et instruments de la géométrie pratique.

De nombreux manuels destinés à la préparation de cet examen sont pu-

37. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, tome 1 : 1789 - 1914*, p. 152 et 248.

Mergnac, Marie-Odile, *Histoire du baccalauréat*, Paris : Archives et cultures, 2009.

38. Arrêté du conseil royal de l'instruction publique, 3 février 1837.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

bliés³⁹. Ces manuels offrent un strict résumé des questions sur lesquelles sont susceptibles d'être interrogés les candidats. Ainsi, le chapitre sur la géométrie analytique dans un *Manuel complet du baccalauréat*⁴⁰, dans sa deuxième édition de 1847, pourtant « considérablement augmentée », occupe seulement quatorze pages.

La préparation au baccalauréat prend donc une importance croissante dans l'enseignement classique, avec trois mille bacheliers en 1830 et une attention institutionnelle de premier ordre pour veiller aux bonnes conditions de sa préparation dans les établissements. L'examen compte parmi ses questions des problèmes à résoudre, bien que ceux-ci soient connus à l'avance, et que les candidats en apprennent souvent les réponses par cœur.

Le concours général, organisé entre les établissements de Paris et de Versailles, a une importance sociale de tout premier plan. Ses lauréats sont hautement distingués et les premiers d'entre eux bénéficient de privilèges⁴¹. Les établissements, et les professeurs, sont comparés à l'aune des résultats qu'y reçoivent leurs élèves. Victor Chauvin, rédacteur en chef de la *Revue de l'instruction publique*, témoigne de l'importance du concours en introduction à son *Histoire des lycées et collèges de Paris* de 1866 :

L'histoire des lycées et collèges de Paris ne serait pas complète, elle manquerait même de son couronnement nécessaire, si elle ne se terminait par quelques pages sur le Concours général qui, chaque année, excite une si vive émulation dans notre population scolaire⁴².

Le concours accueille les mathématiques depuis de 1811, à l'issue de chacune des classes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales. Après la réforme de la bifurcation de 1852, les classes de troisième et de seconde de la section des sciences, ainsi que les classes de rhétorique et de logique de chacune des deux sections des sciences et des lettres comportent un sujet de mathématiques.

39. Marchand, Philippe, « Un chantier à ouvrir : l'histoire du baccalauréat, 1808-1940 », *Histoire de l'éducation*, 94, 2002, p. 201-208.

40. Aimé, Bouchardat et Fermond, *Manuel complet du baccalauréat ès-sciences physiques mathématiques*, deuxième édition, Paris : Germer-Baillière, 1846.

41. Champion, Jacques, « Le concours général et son rôle dans la formation des élites françaises au XIX^e siècle », *Revue française de pédagogie*, 31, 1975, p. 71-82.

Mayeur, Françoise, *Histoire générale de l'enseignement et de l'éducation en France. Tome 3. 1789-1930*, réédition, Paris : Perrin, 2004, p. 562.

42. Chauvin, Victor, *Histoire des lycées et collèges de Paris*, Paris : Hachette, 1866.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

Les énoncés du concours sont régulièrement publiés dans les *Nouvelles annales de mathématiques*. Les critiques adressées au concours montrent assez son importance pour les enseignants, les élèves et les établissements. En effet, il lui est reproché d'occuper toute l'attention des maîtres envers leurs meilleurs élèves susceptibles d'obtenir un prix, au détriment des autres.

Les énoncés donnés au concours général apparaissent comme tels dans quelques ouvrages d'enseignement. Nous avons vu dans la première partie que Reynaud écrit ses deux recueils de problèmes à destination notamment des élèves se préparant au concours général. Il insère à la fin de la deuxième édition des *Théorèmes et problèmes de géométrie* les énoncés du concours général de 1811 à 1837 pour la classe de mathématiques élémentaires, et quelques-uns des énoncés pour la classe de mathématiques spéciales. Jules Planche, inspecteur d'académie, traite, à la fin des trois premiers de ses *Cahiers de géométrie élémentaires pour servir de complément au Traité de Legendre*⁴³, dix-huit problèmes issus du concours général. Les sujets de la classe de mathématiques spéciales à partir de 1850 se trouvent dans les *Exercices élémentaires de géométrie analytique*⁴⁴ de Rémond, polytechnicien et professeur de mathématiques spéciales à Sainte-Barbe. En-dehors des auteurs mentionnés, les ouvrages d'enseignement de la géométrie ne mentionnent guère le concours général pour illustrer les sujets donnés dans les différents niveaux.

Voici trois exemples de sujets donnés au concours général. Le premier est le sujet posé en 1840 pour la classe de mathématiques élémentaires :

1840. Problème. Un point étant donné sur un billard circulaire, trouver la direction qu'il faudrait faire prendre à une bille placée à ce point pour que, après avoir frappé deux fois à la bande circulaire, elle vienne repasser par le même point⁴⁵.

Le second est le sujet posé en 1850 pour la classe de mathématiques spéciales, auquel nous avons adjoint une figure pour en faciliter la lecture :

1850. Étant donnés deux axes fixes Ox , Oy ; autour d'un point fixe P , pris dans le plan de ces axes, on fait tourner un angle aPb de grandeur donnée et constante [...]

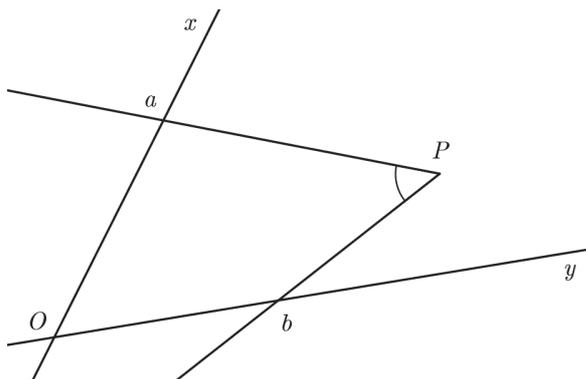
43. Planche, Jules, *Cahiers de géométrie élémentaires pour servir de complément au traité de Legendre*, seconde édition, Paris : Bachelier et Hachette, 1845.

44. Rémond, *Exercices élémentaires de géométrie analytique*, 2^e édition, seconde partie, Paris : Gauthier-Villars, 1898.

45. Planche, *Op. Cit.*, p. 79.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

On demande de prouver qu'il existe sur l'axe Ox un point fixe A et sur l'axe Oy un point fixe B , tels que le produit du segment Aa par Bb reste constant pour toutes les positions de l'angle.
On examinera le cas particulier où les axes Ox et Oy coïncident ⁴⁶.



Et enfin, le troisième est le sujet posé en 1859 pour la classe de troisième de la section des sciences :

Étant données quatre droites dans un plan, on propose de mener une parallèle à l'une d'elles, de façon que les segments déterminés par les trois autres sur cette parallèle soient entre eux comme deux longueurs données a, b ⁴⁷.

Les sujets du concours général, à l'opposé des sujets du baccalauréat, ne sont pas connus à l'avance des candidats et demandent au contraire une grande capacité d'initiative pour en inventer la solution. Nous pouvons penser que les professeurs soucieux de la réussite de leurs élèves à ce concours étaient amenés à les entraîner par la résolution de problèmes, et à leur indiquer des méthodes efficaces de résolution.

Tous ces examens et concours contiennent des problèmes à résoudre. L'analyse des questions posées met à jour de nettes différences dans les attentes propres à la résolution de ces problèmes. Au baccalauréat, les questions sont connues d'avance. Il s'agit donc essentiellement d'un travail de mémorisation. Aux concours d'admission des Écoles du gouvernement, les questions mêlent l'exposé de la théorie et l'application de méthodes déterminées. Nous

46. Rémond, *Op. Cit.*, Énoncés, p. 57.

47. Lesage, *Dix ans de l'institution Massin au concours général. 1858-1867*, Paris : Delalain, 1867.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

avons vu qu'Auguste Comte se démarque, en tant qu'examineur, en posant des questions originales qui ne se trouvent pas dans les ouvrages d'enseignement et qui supposent une prise d'initiative de la part du candidat. Le concours général, enfin, demande véritablement des qualités d'invention pour concevoir et mettre en œuvre une méthode de résolution.

Les problèmes moteurs de l'invention : Ritt, Saigey, et la référence à Clairaut

Nous avons signalé que les programmes de la section des sciences de 1852 se réfèrent aux *Éléments* de Clairaut. À l'instar de Clairaut, plusieurs auteurs de la période montrent comment la résolution des problèmes conduit à l'invention des propositions en géométrie.

Georges Ritt (1801-1864), membre de la promotion licenciée de l'École normale en 1822, inspecteur des écoles primaires du département de la Seine, publie en 1836 un recueil de plusieurs centaines de problèmes résolus de géométrie, accompagnés de considérations quant à la méthode pour les résoudre. Il explique dès les premières lignes de l'ouvrage que la géométrie s'est présentée d'abord sous forme de problèmes :

Le théorème n'est lui-même qu'un véritable problème plus général, ou du moins tel il a dû s'offrir à l'esprit du géomètre [...]. Ainsi, à l'aide de la seule définition ou idée fondamentale de la ligne droite, le simple examen de trois droites qui se coupent deux à deux, et forment un triangle, a dû mettre en évidence cette propriété, devenue principe elle-même, que *dans tout triangle chacun des côtés est toujours plus petit que la somme des deux autres* [...]. Or il est évident que ce théorème ne s'est pas présenté ainsi énoncé à l'esprit du géomètre, mais que plutôt l'aspect seul de la combinaison de trois droites lui offrait cette question plus générale. Quelle relation existe-t-il entre les côtés d'un triangle quelconque ? [...]

Ainsi la géométrie, comme toutes les autres sciences, ne présente d'abord que des problèmes à résoudre⁴⁸.

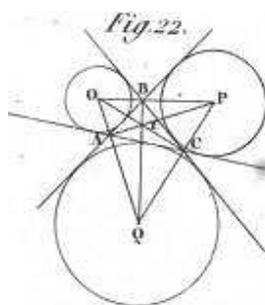
Ritt livre une conception historique de la géométrie inventée en réponse à des problèmes, c'est-à-dire ici à des questions. La conclusion de cette citation

48. Ritt, Georges, *Problèmes de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique*, Paris : Hachette, 1836, p. 1.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

suggère qu'il étend cette conception à l'apprentissage de la géométrie : l'élève y rencontre d'abord des problèmes. Et en effet, dans son recueil, il met en évidence comment « la résolution d'un problème fait quelquefois découvrir des propriétés nouvelles par l'analyse des constructions auxquelles elle donne lieu »⁴⁹. Son propos est illustré par le problème suivant :

Décrire un cercle tangent à trois droites qui se coupent deux à deux.



Ritt commence par supposer le problème résolu et construit approximativement la figure solution. Il déduit de l'analyse de cette figure la proposition que « dans tout triangle, les trois bissectrices des angles concourent en un même point ». C'est donc en cherchant à inscrire un cercle dans un triangle qu'il obtient que le centre d'un tel cercle doit se trouver sur chacune des bissectrices. Trouver une solution au problème implique alors que ces trois bissectrices sont concourantes. La résolution du problème a fait découvrir une propriété nouvelle.

Cette idée que la géométrie est inventée en réponse à des problèmes est exposée aussi dans le *Nouveau recueil de problèmes de géométrie* de Sarazin, ancien professeur, qui écrit que « toutes les vérités de la géométrie ont, à leur origine, été des problèmes [spéculatifs] ». L'esprit qui a découvert une proposition de géométrie « n'a pu se demander de découvrir telle propriété connue, de découvrir le découvert. D'un autre côté, il n'est pas raisonnable d'admettre que des propriétés autres que celles découlant immédiatement des axiomes se soient manifestées d'elles-mêmes : force est de conclure que tout théorème s'est d'abord présenté sous la forme d'un problème »⁵⁰.

49. *Ibid.*, p. 16.

50. Sarazin, *Nouveau recueil de problèmes de géométrie*, Paris : Delalain, 1849, p. 6.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

Ces conceptions sont relayées par les programmes de 1852 pour la section de lettres, qui demandent au professeur de s'aider d'un ouvrage qui accorde une importance essentielle aux problèmes, les *Éléments de géométrie* de Clairaut⁵¹. Dans sa préface, celui-ci explique que l'enseignement de la géométrie ne doit pas seulement illustrer les théorèmes par leur application à la solution des problèmes, mais qu'il doit partir des problèmes eux-mêmes :

Il est vrai que, pour sauver cette sécheresse naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques auteurs ont imaginé de mettre, à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage que l'on peut en faire pour la pratique ; mais par là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites⁵².

Au contraire, Clairaut veut « occuper continuellement [ses] lecteurs à résoudre des problèmes » pour qu'ils acquièrent l'« esprit d'invention » :

J'espère qu'elle [sa méthode] accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir ; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous forme de théorèmes, c'est-à-dire de ces propositions où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir⁵³.

En cela, il suit « une route semblable à celle des inventeurs », idée que nous avons retrouvée chez Ritt.

Pour répondre aux instructions officielles, les *Éléments de géométrie* de Clairaut sont réédités en 1852 par Saigey, « conformément aux indications des nouveaux programmes officiels sans autre changement que la substitution des nouvelles mesures aux anciennes ». Saigey est normalien, rédacteur principal de la première section du Bulletin de Férussac⁵⁴ dans les années 1820⁵⁵, et auteur de plusieurs manuels d'enseignement, dont une réédition

51. Barbin, « Les Éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée », *Repères IREM*, n°4, 1991, pp. 119-133.

52. Clairaut, *Éléments de géométrie*, réédité par Saigey, Paris : Hachette, 1852, p. II.

53. Clairaut, *Op. Cit.*, p. IV.

54. Férussac, *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, Paris : Bachelier, 1824-1831.

55. Bru, Bernard et Martin, Thierry, « Le baron de Férussac. La couleur de la statistique et la topologie des sciences », *Journ@l électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, vol. 1, n°2, 2005

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

des *Éléments d'arithmétique*, des *Éléments de géométrie* et des *Éléments d'algèbre* de Bézout en 1848. Une circulaire aux recteurs de 1854 précisant les modalités d'exécution du plan d'étude des lycées cite d'ailleurs longuement la préface de Clairaut⁵⁶, ainsi que le *Cours de mathématiques* de Bézout. Le texte défend l'évidence et la simplicité contre les « subtilités métaphysiques » pour l'enseignement de la géométrie. Il ne donne pas d'indication en revanche sur la résolution des problèmes.

Saigey rééditera aussi la *Géométrie élémentaire* de Vincent en 1856, conjointement avec son auteur. L'introduction de cette nouvelle édition précise la place accordée aux problèmes :

Quand aux problèmes, ils n'ont point été considérés comme de simples applications de ce qu'on appelle les *propositions* de la géométrie, mais bien comme parties intégrantes de la géométrie elle-même. Quelquefois ils sont les bases de ces propositions, et d'autres fois leurs conséquences immédiates ; mais, dans l'un et l'autre cas, leur place est naturellement indiquée par le sujet que l'on traite.

En effet, du tracé de la circonférence découlent immédiatement les propriétés caractéristiques de cette courbe ; et il serait peu rationnel de conclure dans un ordre inverse. De même, quand on a formé un triangle au moyen d'un angle et de ses côtés, on s'assure qu'il n'y a qu'une solution et l'on en conclut l'égalité des triangles qui ont un même angle compris entre mêmes côtés.

C'est ainsi que, dans un grand nombre de cas, le problème peut être mis en tête, et la proposition ensuite comme un simple corollaire⁵⁷.

Alors que les éditions antérieures par Vincent du *Cours de géométrie élémentaire* présentaient nettement les problèmes comme des applications des théorèmes, le travail conjoint avec Saigey envisage un ordre des propositions qui alterne théorèmes et problèmes selon l'ordre d'invention.

Ces ouvrages de Ritt, de Vincent avec Saigey, et la réédition de celui de Clairaut, affirment que les problèmes ne sont pas seulement des applications de la théorie. Ils montrent tous comment un théorème peut être déduit de

56. Belhoste, *Les Sciences dans l'enseignement secondaire français, textes officiels (1789-1914)*, INRP et Economica, Paris, 1995, p. 336.

57. Vincent, conjointement avec Saigey, *Géométrie élémentaire*, Paris : Mallet-Bachelier, 1856.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

la résolution d'un problème. Si ces conceptions ne correspondent pas à ce que nous observons dans le tableau, à savoir un regroupement majoritaire des problèmes à la suite des théorèmes, elles mettent en évidence un intérêt pour les problèmes et une réflexion épistémologique sur leur statut au sein des propositions de la géométrie élémentaire.

Les problèmes constitutifs de l'étude de la géométrie

Ainsi que Descartes l'affirme dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, l'art du géomètre consiste d'abord à savoir résoudre des problèmes :

Nous ne serons mathématiciens, encore bien que nous sachions par cœur toutes les démonstrations des autres, si nous ne sommes pas capables de résoudre par nous-mêmes toute espèce de problème⁵⁸.

Certains de nos auteurs déclarent ainsi que l'étude de la géométrie passe par la recherche des problèmes.

Sarazin, ancien professeur au collège d'Épinal, rédige en 1849 un recueil de presque cinq cents problèmes de géométrie, à l'usage des classes élémentaires des collèges, des pensions, et des Écoles primaires supérieures. Il ouvre son ouvrage par la critique des méthodes contemporaines d'enseignement de la géométrie élémentaire :

L'enseignement de la géométrie élémentaire se fait de deux manières : la première consiste à mettre entre les mains des élèves un traité de cette science, afin qu'ils l'étudient [...] l'autre, à leur en faire une exposition, afin qu'ils la reproduisent dans une rédaction [...]. Quoi qu'il en soit, chacun de ces enseignements n'a qu'un résultat fort limité. Ni l'un ni l'autre, pour ainsi dire, ne préparent l'esprit à trouver par lui-même des démonstrations de théorèmes analogues à ceux qui composent le corps de la science : ni l'un ni l'autre ne le rendent capable de découvrir des théorèmes semblables, ni même des problèmes, ou seulement des solutions de problèmes, purement spéculatifs, ou en d'autres termes, de pénétrer les secrets de la géométrie. Cependant, il faut l'avouer, la véritable différence entre deux géomètres consiste dans la différence dans leurs aptitudes à trouver, à traiter des questions imprévues. Toute autre différence n'est en effet qu'une question

⁵⁸. Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, in *Œuvres*, tome onzième, publiées par V. Cousin, Paris : Levrault, 1826, p. 211.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

de temps [...], arriver à entendre les propositions connues moyennant les démonstrations qui existent est possible, je crois, pour la grande majorité des intelligences.

Ces considérations ont préoccupé tous les maîtres. Ils ont donc cherché à remédier à l'insuffisance de ces enseignements pour développer l'esprit géométrique. A cet effet, ils conseillent de résoudre des problèmes, ou même de ne lire la solution d'une proposition quelconque qu'après l'avoir cherchée⁵⁹.

Sarazin affirme que la qualité d'un géomètre consiste à savoir résoudre de nouveaux problèmes ; le but de l'enseignement de la géométrie élémentaire est de développer cette faculté chez les élèves. Pour acquérir cet « esprit géométrique », ils doivent résoudre, et surtout chercher, des problèmes.

Jules Planche, professeur agrégé de mathématiques spéciales au Collège royal d'Orléans, écrit en 1845 dans ses *Cahiers de géométrie élémentaire pour servir de complément au traité de Legendre* :

Comme je ne crois pas qu'on puisse dire qu'un élève comprenne bien la Géométrie, tant qu'il ne saura pas résoudre de lui-même des questions semblables à celles qui sont résolues dans son auteur, j'ai mis à la suite des notes relatives à chaque livre, un grand nombre de théorèmes à démontrer et de problèmes à résoudre. [...] Dans cette suite de théorèmes et de problèmes, j'ai tâché de passer graduellement des plus simples aux plus difficiles. C'est ainsi qu'on peut habituer tous les élèves qui comprennent le cours, à résoudre aussi les problèmes⁶⁰.

Ces conceptions renouvelées éclairent l'apparition de listes d'énoncés non résolus dans les ouvrages. Le grand nombre d'énoncés dans ces listes témoigne de l'intérêt porté aux problèmes, et du temps passé par les élèves à en résoudre. En différant la rencontre du lecteur avec la solution ou la démonstration d'un problème, les auteurs montrent leur intérêt pour la recherche elle-même. L'enseignant n'attend pas ici de l'élève qu'il mémorise une démonstration mais bien qu'il soit capable de l'inventer par lui-même.

Pour Auguste Blum, polytechnicien et professeur de mathématiques, la recherche et la résolution des problèmes est un moyen de mémoriser la théorie.

59. Sarazin, *Nouveau recueil de problèmes de géométrie*, Paris : Delalain, 1849, p. 1.

60. Planche, Jules, *Cahiers de géométrie élémentaire pour servir de complément au traité de Legendre*, seconde édition, Paris : Bachelier et Hachette, 1845.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

Il l'indique en introduction à la liste d'énoncés à résoudre à la fin de son *Cours* :

Il est très important que chaque élève s'exerce à chercher lui-même les démonstrations de ces théorèmes et les solutions des problèmes. Cette recherche de la solution d'un problème profite même quand on n'arrive pas à la solution, parce que c'est un excellent moyen de repasser *sans ennui* les théorèmes les plus importants ou les problèmes qui entrent dans la géométrie élémentaire⁶¹.

Ces trois auteurs donnent une importance primordiale à la résolution des problèmes pour développer l'esprit géométrique, pour comprendre et mémoriser la théorie.

Les problèmes pour appliquer la théorie

Nous avons vu dans la première partie, avec les ouvrages de Bergery et de Bobillier, des exemples de cours pour l'enseignement industriel. Dans les collèges, un enseignement spécial est officialisé en 1847 « pour les élèves qui se destinent à la pratique de l'agriculture, de l'industrie, du commerce et des arts »⁶². L'enseignement industriel est soucieux de montrer les applications pratiques de la théorie. Sonnet, professeur et examinateur à l'École centrale des arts et manufactures, publie en 1839 une *Nouvelle géométrie théorique et pratique*. Il écrit :

Ce n'est que depuis un petit nombre d'années que l'on s'occupe sérieusement, en France, de créer un enseignement industriel, et que l'on a reconnu la nécessité de deux directions dans l'enseignement des mathématiques : l'une spéculative, ou de théorie pure ; l'autre positive, ou de théorie appliquée⁶³.

Le terme de direction « positive » fait écho à la philosophie comtienne⁶⁴ qui distingue les sciences en sciences concrètes et sciences abstraites. Les

61. Blum, Auguste, *Cours complet de mathématiques*, tome deuxième, Paris : Carilian-Gœury et V^e Dalmont, 1845, p. 221.

62. Bulletin universitaire du 17 septembre 1849, cité dans Belhoste, *Op. Cit.*, p. 227.

63. Sonnet, Hippolyte, *Nouvelle géométrie théorique et pratique*, Paris : Hachette, 1839, p. v.

64. Comte, Auguste, *Cours de philosophie positive . Tome premier. Les préliminaires généraux et la philosophie mathématique*, Paris : L'Harmattan, 2009.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

premières, générales, sont attachées à la recherche des lois qui régissent les phénomènes, et les deuxièmes, particulières, consistent dans l'application de ces lois.

La nouveauté de l'ouvrage de Sonnet tient selon lui à ce qu'il est « complet sous le rapport de la théorie, sans tomber dans les subtilités de la discussion, et riche en applications importantes, sans trop entrer dans les détails techniques »⁶⁵. Les applications contenues dans l'ouvrage sont de trois espèces :

Les unes ne sont que des exercices numériques sur les théorèmes relatifs aux mesures ; d'autres offrent des exemples puisés dans les phénomènes naturels et propres à éclaircir certains points de théorie ; les dernières, enfin, sont destinées à faire connaître les usages les plus importants des principes théoriques [et] sont empruntées au dessin linéaire [...] au levé des plans, à l'arpentage et au partage des terres, à la mesure des bois de construction, aux procédés du jaugeage, à la gnomonique et à la perspective⁶⁶.

Ces applications sont dans leur grande majorité des applications numériques des théorèmes. Elles correspondent aux usages que le lecteur est susceptible d'effectuer de la théorie.

Au contraire, Paul-Louis Cirodde, professeur au Collège royal Henri IV, écrit en 1836 ses *Leçons de géométrie théorique et pratique* pour les classes de mathématiques élémentaires des Collèges royaux. Son intention est d'intéresser les élèves lorsqu'il introduit dans la géométrie des applications pratiques :

Les élèves qui traversent chaque année les classes de mathématiques ne signalent que trop souvent, par leur indifférence, un vice bien grave de l'enseignement qu'ils y reçoivent, le défaut d'applications pratiques. On a remarqué en effet que là où les professeurs avaient pu éveiller l'intérêt des jeunes gens, en mettant sous leurs yeux des résultats immédiatement applicables aux usages de la vie et aux besoins de la société, le nombre de ces élèves inertes qui viennent user leur temps dans les classes avait sensiblement diminué. C'est pour contribuer à cette utile réforme que j'ai constitué cet ouvrage. Toutefois je n'ai pas oublié que, dans un livre destiné à l'enseignement universitaire, les applications pratiques ne devaient être qu'un accessoire, et qu'il convenait en conséquence qu'elles fussent peu nombreuses, mais bien choisies. J'ai emprunté

65. Sonnet, *Op. Cit.*, p. v.

66. Sonnet, *Op. Cit.*, p. vii.

VI.1 Les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire

la plupart aux arts de construction, à l'établissement des machines, au dessin linéaire et au levé des plans, et quelques-unes à la physique et à l'astronomie⁶⁷.

Les applications de Cirodde décrivent des liens entre la théorie et les pratiques professionnelles, mais majoritairement sous forme de commentaires qualitatifs et non de problèmes à résoudre. Il entreprend néanmoins de rendre plus attrayante la théorie en montrant ses applications pratiques.

Ces deux auteurs choisissent de montrer les applications pratiques de la théorie en géométrie élémentaire pour des raisons différentes. L'un enseigne au lecteur les applications industrielles de cette théorie afin qu'il puisse les mettre en œuvre, l'autre intéresse son lecteur à la théorie en indiquant les applications dont elle est susceptible.

1.4 Conclusion

Les problèmes sont présents dans tous les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire. Nous avons identifié au-delà des problèmes de construction présents dans tous les manuels, des problèmes numériques, des problèmes de lieux, des relations arithmétiques à établir entre grandeurs, des théorèmes à démontrer. Le choix retenu à partir des années 1840 est de regrouper les problèmes résolus dans des chapitres à part de la théorie, et les problèmes à résoudre dans des listes qui peuvent atteindre plusieurs centaines d'énoncés.

Les problèmes de construction sont souvent associés à une description des instruments, dans les ouvrages destinés à l'enseignement industriel mais aussi dans les ouvrages des classes des lycées et notamment des classes préparatoires. Cette intérêt porté au tracé des figures est à relier d'une part à l'importance prise par le dessin dans l'enseignement industriel, dans l'enseignement primaire supérieur et, après 1852, dans les programmes de la section des sciences ; d'autre part à l'enseignement de la géométrie descriptive dont les premiers éléments sont exigés pour l'admission dans les Écoles du gouvernement.

D'autre part, certains auteurs explicitent leurs intentions lorsqu'ils donnent des problèmes en général à résoudre. Nous avons identifié quatre conceptions qui justifient ce choix d'introduire des problèmes dans l'enseignement de la

67. Cirodde, Paul-Louis, *Leçons de géométrie théorique et pratique*, Dijon : Douillier et Paris : Hachette, 1836, p. iii.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

géométrie élémentaire : l'entraînement pour la préparation aux concours et aux examens, les problèmes comme illustration de l'invention en géométrie, les problèmes pour comprendre et mémoriser la théorie, et enfin les problèmes pour montrer les applications pratiques de la théorie.

2 Les recueils de problèmes de géométrie élémentaire

Nous avons vu que des listes de problèmes de plus en plus importantes sont insérées dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire. Parallèlement, quelques recueils spécifiquement de problèmes continuent d'être publiés. Quelle est l'ampleur de ces ouvrages ? A quel public s'adressent-ils et avec quel objectif ? Comment les problèmes sont-ils organisés au sein de ces ouvrages ? Peut-on identifier les sources auxquelles sont empruntés les énoncés ? Ces énoncés sont-ils différents des énoncés rencontrés dans la première partie ?

2.1 Ritt (1836) : l'extension de la taille des recueils

Georges Ritt (1801-1864) publie en 1836 un recueil de cinq cent soixante douze problèmes de géométrie et de trigonométrie⁶⁸, autant dire d'une ampleur inédite. Cela représente cinq fois plus d'énoncés que les recueils, par exemple, de Reynaud.

Ritt a étudié à l'École normale jusqu'en 1822, époque du licenciement de cette école. Il se rend alors en Russie pour quelques années ; revenu en France, il est nommé successivement inspecteur des écoles primaires du département de la Seine en 1836, inspecteur de l'enseignement primaire en 1846, et enfin inspecteur général de l'instruction publique en 1852. Dans ces diverses fonctions, Georges Ritt se signale par un grand dévouement à la cause de l'éducation populaire. On lui doit en grande partie l'introduction du dessin linéaire dans le programme obligatoire des études primaires⁶⁹.

Ritt publie la même année 1836 des *Problèmes d'algèbre et exercices de*

68. Ritt, Georges, *Problèmes de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique*, Paris : Hachette, 1836.

69. Buisson, Ferdinand, *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, Paris : Hachette, 1911.

VI.2 Les recueils de problèmes de géométrie élémentaire

*calcul algébrique*⁷⁰ et des *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie*⁷¹. Cette trilogie, impressionnante par l'étendue des domaines des mathématiques abordés et le nombre d'énoncés réunis, sera complétée en 1839 par le *Manuel des aspirants* dont il a été question plus haut. En plus des ouvrages de mathématiques à l'usage des candidats aux différentes écoles du gouvernement et aux grades universitaires, il publiera un *Traité d'arithmétique* en 1839, et plusieurs ouvrages d'arithmétique pour l'enseignement primaire.

Les *Problèmes de géométrie* sont organisés en deux parties : la première est une réflexion approfondie sur la résolution des problèmes illustrée de nombreux exemples : elle sera analysée dans le prochain chapitre ; la seconde est une liste de quatre cent trente sept problèmes, résolus à partir de la deuxième édition de 1842, et répartis en huit Livres, en suivant l'ordre des *Éléments* de Legendre.

Concernant les éventuelles sources auxquelles Ritt puiserait ses énoncés, aucun auteur n'est cité en-dehors de Lorenzo Mascheroni pour sa *Géométrie du compas* et Legendre pour l'ordre d'exposition des problèmes.

Les énoncés sont des problèmes de construction, des problèmes numériques, des problèmes spéculatifs, des lieux géométriques à déterminer ou encore des questions de cours, de façon indifférenciée et concomitante dès le début du recueil. Les problèmes de construction, majoritaires dans l'ouvrage, sont des problèmes classiques tels qu'on les trouve dans les *Éléments* de Legendre, des problèmes de contacts, des problèmes de construction d'un triangle dont certains éléments sont donnés, des problèmes d'inscription et de circonscription, des problèmes très élémentaires ou encore des problèmes de construction originaux comme celui-ci :

306. Inscrire dans un cercle donné, de rayon R , quatre petits cercles, tangents entre eux, et trouver la valeur du rayon des petits cercles en fonction du rayon du grand cercle donné⁷².

Le problème suivant est la généralisation du précédent au cas d'un nombre quelconque m de petits cercles ; il ne peut pas toujours être résolu à la règle et au compas, sans que cela soit mentionné par l'auteur.

Parmi les énoncés abordant des questions de géométrie pratique, certains demandent de fournir à la fois la solution graphique, sur le papier, et la

70. Ritt, *Problèmes d'algèbre et exercices de calcul algébrique*, Paris : Hachette, 1836.

71. Ritt, *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Hachette, 1836.

72. Ritt, *Problèmes de géométrie*, p. 157.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

solution sur le terrain :

25. Par un point donné, mener une droite parallèle à une ligne donnée 1° sur le papier, 2° sur le terrain ⁷³.

Nous lisons chez Ritt une volonté de procéder par degrés progressifs de difficulté, comme le montrent les premiers problèmes de la liste :

1. Tracer une ligne droite passant par deux points donnés 1° sur le papier, 2° sur une surface assez étendue, 3° sur le terrain.
2. Mesurer la distance entre deux points.
3. Faire une longueur égale à la somme de plusieurs longueurs données.
4. Faire une longueur égale à la différence de deux longueurs données [...]

Il s'attache aussi, à quelques occasions au début de la liste d'énoncés, à évoquer des situations familières à l'élève :

30. Trois fermiers voudraient faire une route en ligne droite qui passât devant la porte de la ferme de l'un d'eux, et à égale distance de deux autres fermes : comment devront-ils s'y prendre pour l'alignement de la route ?

Le recueil propose aussi des énoncés de difficulté soutenue, comme par exemple l'énoncé suivant, que nous reconnaissons comme étant le sujet du concours général de 1822 :

271. Étant donnés deux cercles, trouver un point d'où l'on puisse mener aux cercles deux tangentes égales faisant entre elles un angle donné ⁷⁴.

L'édition de 1842 est augmentée au sens que la deuxième partie est suivie des solutions des problèmes proposés. L'édition de 1857 ajoute une partie supplémentaire intitulée *Mélanges*, qui contient des problèmes classiques depuis l'Antiquité comme la trisection de l'angle, la construction de moyennes proportionnelles et la duplication du cube, résolus par l'emploi d'un conchoïde, par l'intercalation ou par l'intersection de coniques. Le dernier énoncé de l'ouvrage est contemporain, il s'agit du problème appelé problème de Malfatti.

Le recueil de Ritt apporte une réflexion approfondie sur la méthode de résolution des problèmes dont il sera bientôt question, mais il a aussi réuni, et

73. Ritt, *Problèmes de géométrie*, p. 131.

74. Ritt, *Problèmes de géométrie*, p. 154.

VI.2 Les recueils de problèmes de géométrie élémentaire

sans doute également conçu, plusieurs centaines d'énoncés de problèmes regroupés en référence aux huit Livres des *Éléments* de Legendre. Deux autres recueils semblables le complètent pour l'algèbre et la géométrie analytique, formant un ensemble complet approprié à la préparation des concours et des examens. Les *Problèmes de géométrie* ne recourent pas à l'application de l'algèbre. Ils déclinent les propriétés des figures de la géométrie élémentaire en un très grand nombre d'énoncés de problèmes, de natures diverses : problème de construction, problème numérique, détermination de lieux, problème spéculatif, ou simplement question de cours.

2.2 Sarazin (1849) : les problèmes organisés pour développer l'esprit d'invention

Sarazin, ancien professeur au collège d'Épinal, rédige un recueil de six cent problèmes à l'usage des classes élémentaires de mathématiques des collèges, des pensions et des écoles primaires supérieures. Ce recueil est donc destiné à des élèves de niveau modeste. Il est précédé de réflexions approfondies sur l'enseignement des mathématiques et la place qu'y doivent tenir les problèmes ; certains aspects de ces réflexions ont déjà été abordés plus haut. L'auteur publie la même année un recueil équivalent pour l'arithmétique⁷⁵.

Sarazin considère que les problèmes sont « en dehors de la science », au sens où « elle ne leur fait d'emprunt que pour ses applications, et nullement pour son organisation »⁷⁶. Une telle séparation est déjà présente, sans y être explicite, dans les *Éléments* de Legendre, qualifié de « maître le plus compétent »⁷⁷. C'est en tant que corpus constitué et abouti que la science géométrique se passe des problèmes, pour Sarazin, et la résolution de problème, pertinemment organisée, permet de développer l'« esprit d'invention » du lecteur. D'ailleurs, les problèmes sont résolus selon la « méthode analytique », l'analyse géométrique ayant ici valeur de démonstration⁷⁸.

La mise en ordre des problèmes suit l'organisation des théorèmes de la géométrie élémentaire, « ce qui exige que ces problèmes soient soumis à la loi d'exposition qu'elle a adoptée, en même temps qu'à la loi de subordi-

⁷⁵. Sarazin, *Nouveau recueil de problèmes d'arithmétique à l'usage des classes élémentaires*, Paris : Delalain, 1849.

⁷⁶. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 9.

⁷⁷. Sarazin, *Op. Cit.*, p. v.

⁷⁸. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 17 et p. 21.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

nation qui peut exister entre eux »⁷⁹. L'auteur propose que les énoncés de problèmes soient ordonnés, c'est-à-dire que chaque énoncé découle des précédents et éclaire les suivants. « Nous avons donc travaillé, écrit-il, à faire un recueil qui présente des questions selon une gradation et une analogie naturelles, et en outre d'après l'ordre méthodologique de Legendre »⁸⁰. Cette préoccupation de l'ordre de présentation n'est pas de nature formelle ou logique, mais se trouve imposée par un souci pédagogique visant la compréhension de la géométrie comme instrument de la résolution de problèmes. En effet, les problèmes, ainsi exposés, « n'ont d'utilité qu'autant qu'ils remplissent cette double condition [lois d'exposition et de subordination]. Alors ils préparent l'esprit à s'ouvrir cette voie de découvertes qui ne se définit pas, et dans laquelle bientôt il s'avance seul facilement, et souvent à de grandes distances »⁸¹. Bien plus que la résolution d'énoncés successifs, c'est la résolution des problèmes dans un ordre donné qui va permettre non seulement l'acquisition d'un savoir géométrique pour l'élève, mais aussi, et surtout, le développement de son « esprit d'invention ».

Les problèmes commencent par des énoncés très simples :

1. Combien faut-il de points pour déterminer la position d'une ligne droite ?
2. Comment fait-on passer une droite par deux points donnés ?
3. Comment apprécie-t-on la longueur d'une ligne droite ?
4. Que faut-il entendre par cette opération : faire la somme ou la différence de deux lignes droites ?⁸²

Pour comprendre ensuite comment la résolution d'un problème permet d'inventer ensuite la solution d'un autre, examinons les deux énoncés suivants :

14. Étant donnés deux points sur une ligne droite, trouver : 1° hors de cette droite ; 2° sur cette droite, un troisième point situé à égale distance des deux premiers.
16. Étant donnés une droite et deux points hors de cette droite, trouver sur cette droite un troisième point à égale distance des points donnés⁸³.

79. Sarazin, *Op. Cit.*, p. v.

80. Sarazin, *Op. Cit.*, p. v.

81. Sarazin, *Op. Cit.*, p. v.

82. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 25.

83. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 27.

VI.2 Les recueils de problèmes de géométrie élémentaire

La solution du problème 14 est obtenue, pour sa première partie, en traçant deux circonférences égales de centres les deux points donnés. Leurs deux points d'intersection fournissent deux solutions au problème. Cette configuration permet de répondre naturellement à la deuxième partie du problème en joignant les deux points obtenus par une ligne qui coupe justement la ligne donnée au point cherché. Pour résoudre le problème 16, sans doute l'auteur voit-il une « analogie » entre son énoncé et celui du problème 14, analogie qui amènerait « naturellement » à reproduire la configuration obtenue précédemment pour résoudre ce nouveau problème. En effet, la droite reliant les points d'intersection des deux cercles recoupe la droite donnée au point solution.

Figure 1

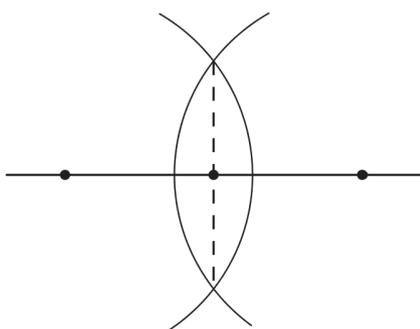
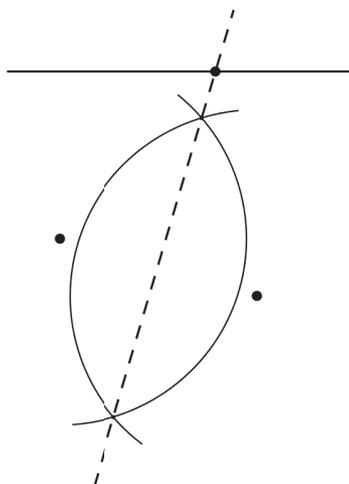


Figure 2



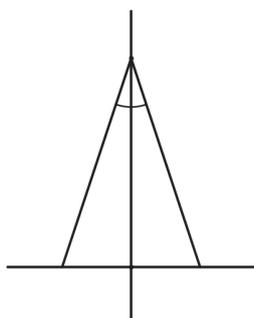
L'idée d'enchaînement des problèmes amène Sarazin à concevoir un nouvel ordre entre ceux-ci, celui de la difficulté. Il affirme que « la solution d'un problème se trouvera, en général, d'autant plus facilement que ce problème aura trait à une proposition moins éloignée de celles qui sont connues et subordonnée à un moins grand nombre d'entre elles »⁸⁴. En fait d'éloignement, Sarazin se réfère à l'ordre des Livres des *Éléments* de Legendre. Ainsi la difficulté d'un problème est-elle liée à la position, dans les *Éléments* de Legendre, des propositions auxquelles recourt sa résolution ainsi qu'au nombre de celles-ci. Prenons en exemple les problèmes 20 et 36 :

84. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 3.

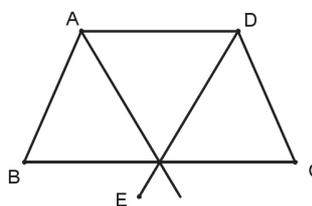
CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

20. Quel rapport existe-t-il entre deux obliques issues d'un même point de la perpendiculaire, et faisant avec elle des angles égaux ?

36. L'angle des sécantes menées par les extrémités de l'une des bases d'un trapèze isocèle au milieu de l'autre base est divisé par celle-ci en en deux parties égales⁸⁵.



Problème 20



Problème 36

La propriété qui intervient pour la résolution du problème 20 est l'égalité de deux triangles qui ont un côté égal adjacent à deux angles égaux (Legendre, I, 7). Pour la résolution du problème 36 interviennent deux propriétés, à savoir l'égalité des triangles ABO et DCO qui ont un angle égal compris entre des côtés égaux (Legendre, I, 6) et l'égalité des angles BOE et DOC opposés par le sommet (Legendre, I, 5). Ce deuxième problème est résolu en recourant à deux propositions distinctes, ce qui justifie qu'il apparaisse plus tardivement dans le recueil.

Un autre élément de difficulté pour la résolution d'un problème est pris en compte par Sarazin. Il est relatif à la personne qui résout le problème, et plus précisément aux expériences d'une telle personne, c'est-à-dire aux problèmes qu'elle a déjà eu l'occasion de résoudre. Une « expérience de plus suffit en effet pour augmenter votre faculté intuitive, votre esprit de découverte ou d'invention, lequel, embrassant plus de choses, y voit ce que d'abord il ne pouvait y voir »⁸⁶. Les expériences passées en matière de géométrie procurent donc la capacité de « voir » mieux et plus vite le chemin de la solution. Les connaissances géométriques sont constituées de propositions, mais aussi d'expériences qui permettent de voir comment s'agencent ces propositions

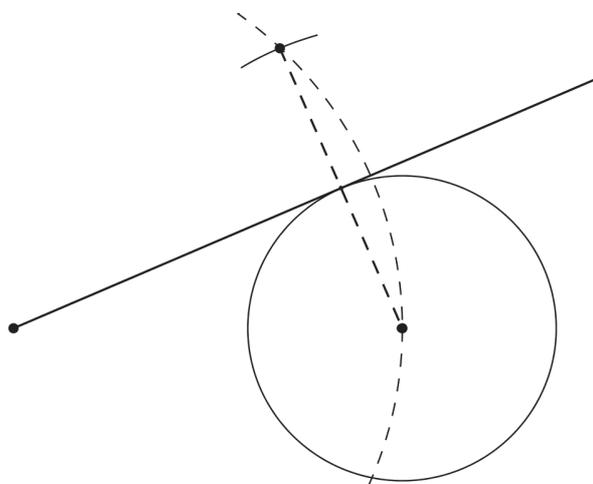
85. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 28.

86. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 4.

VI.2 Les recueils de problèmes de géométrie élémentaire

pour résoudre des problèmes. On comprend alors l'injonction de l'auteur : « ce sont donc des expériences de cette nature qu'il vous faut multiplier et enchaîner ». Ainsi, plusieurs méthodes sont parfois proposées pour résoudre un même problème. Par exemple, l'énoncé 78 reprend un problème contenu dans les *Éléments* de Legendre⁸⁷ mais en propose une résolution différente :

78. Par un point donné, mener une tangente à un cercle donné.



Une fois tracée la circonférence de centre le point donné et passant par le centre du cercle donné, la solution proposée consiste à reporter à partir de ce dernier centre une corde égale au diamètre du cercle donné. Celle-ci coupe alors le cercle donné en un point de tangence. Cette solution est différente de celle proposée par Legendre, elle montre un autre chemin et en cela enrichit le lecteur d'une nouvelle expérience.

Le recueil de Sarazin propose un enseignement de la géométrie dans les classes élémentaires résolument tourné vers la résolution de problèmes, qui est à la fois le moyen et l'objectif d'un tel enseignement. L'objectif car la fonction du géomètre est de résoudre des problèmes encore inconnus. Le moyen car la résolution de problèmes conduit l'esprit « à croître en largeur, en profondeur de vue », lorsqu'elle procède « du simple au composé »⁸⁸. La liste des énoncés est organisée en ce sens, en progressant dans la difficulté et en multipliant les expériences du lecteur, c'est-à-dire en suivant l'ordre de l'invention.

87. Legendre, *Éléments de géométrie*, Livre II, problème 14.

88. Sarazin, *Op. Cit.*, p. 3.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

2.3 Planche (1840) et Percin (1848) : compléter la géométrie élémentaire

Deux auteurs publient des *Compléments* à un manuel existant de géométrie élémentaire. Pour l'un, il s'agit de compléter un ouvrage qu'il a rédigé pour les premières classes et par conséquent insuffisant pour préparer les concours et examens. Pour l'autre, il s'agit de compléter, dans la même intention, la *Géométrie* de Legendre. Ces deux compléments contiennent de nombreux problèmes.

Percin, professeur agrégé en classe de mathématiques spéciales au Collège royal de Nancy, n'est ni polytechnicien ni normalien. Il rédige pour les aspirants aux Écoles du gouvernement un complément à sa *Géométrie simplifiée*⁸⁹.

Ce *Complément de géométrie* est partagé en cinq Livres. Le premier porte sur les rapports incommensurables, la théorie des parallèles, les polygones concaves, convexes et réguliers, la similitude, la symétrie ; le deuxième porte sur les centres des figures, diverses propriétés des triangles et des quadrilatères, le calcul des polygones réguliers, la similitude, la division harmonique, les axes radicaux, les transversales, les pôles et les polaires ; le quatrième traite des figures tracées sur la sphère et le cinquième de la géométrie descriptive. Le troisième Livre, enfin, porte sur les problèmes, et contient, outre une réflexion sur les méthodes dont il sera question plus loin, un corpus de cent dix huit problèmes de construction résolus qui sont regroupés. Voici la liste des intitulés⁹⁰ de ces groupements de problèmes :

- Problèmes sur les lignes droites et les angles
- Problèmes sur le cercle
- Problèmes sur les contacts
- Problèmes sur la construction des triangles et des polygones
- Problèmes sur la division des figures
- Problèmes sur les lieux géométriques, dans un plan
- Problèmes sur les lieux géométriques dans l'espace

Certaines catégories de problèmes sont identifiées et distinguées, comme les

89. Percin, J., *Complément de géométrie, ou Recueil de questions et de problèmes suivis des principes de géométrie descriptive, à l'usage des aspirants aux écoles spéciales*, Nancy : Grimblot et V^{ve} Raybois, 1848.

Percin, *Géométrie simplifiée, à l'usage des collèges et des écoles primaires supérieures*, deuxième édition, Nancy : Grimblot et V^{ve} Raybois, 1842.

90. Percin, *Complément de géométrie*, p. 130.

VI.2 Les recueils de problèmes de géométrie élémentaire

problèmes de contact, les problèmes de construction des triangles lorsque certains éléments en sont donnés, les problèmes de division des figures, les problèmes de recherche des lieux géométriques. Ces derniers sont suivis de problèmes qui mobilisent, pour leur résolution, des lieux géométriques.

Certains problèmes sont classiques, comme celui d'« inscrire un cercle dans un triangle ABC »⁹¹. Mais dans l'ensemble les énoncés sont peu classiques et d'un niveau assez soutenu, à l'image du problème des trois cercles, résolu par deux méthodes différentes. La résolution est déclinée en trois étapes, à savoir l'analyse du problème, la solution, c'est-à-dire la construction effective, et la synthèse, c'est-à-dire la démonstration de la validité de la construction. Cette troisième étape est très souvent laissée à la charge du lecteur, et seules les deux premières, voire même l'une des deux seulement, sont le plus souvent rédigées.

Jules Planche, professeur agrégé puis inspecteur de l'académie d'Amiens, n'est lui non plus ni polytechnicien ni normalien. Il écrit ses *Cahiers de géométrie élémentaire*⁹² « pour servir de complément au Traité de Legendre ». Ils contiennent les modifications et les additions que l'auteur a faites aux *Éléments de géométrie* de Legendre pour son propre enseignement en classe de mathématiques élémentaires. Elles portent principalement sur la théorie des parallèles, la théorie des contacts, sur les angles solides trièdres, sur la méthode des infiniment petits en remplacement de la réduction à l'absurde et enfin contiennent un certain nombre de théorèmes. Par ailleurs, ces compléments, organisés dans l'ordre des Livres du Traité de Legendre, se terminent pour chacun d'eux par un grand nombre d'énoncés de théorèmes à démontrer, d'applications numériques et de problèmes à résoudre, sans les solutions. Les problèmes sont séparés entre problèmes indéterminés, ou lieux géométriques, et problèmes déterminés. Pour l'organisation de ces sept cent trente neuf énoncés, l'auteur s'attache à concilier trois impératifs : l'ordre des Livres de Legendre, l'ordre de la difficulté et le rassemblement des énoncés portant sur un sujet commun :

Dans cette suite de théorèmes et de problèmes, j'ai tâché de passer graduellement des plus simples aux plus difficiles. C'est ainsi qu'on peut habituer tous les élèves qui comprennent le cours, à résoudre aussi les problèmes. Néanmoins [...] il faut qu'ils soient

91. Percin, *Complément de géométrie*, p. 151.

92. Planche, Jules, *Cahiers de géométrie élémentaires pour servir de complément au traité de Legendre*, seconde édition, Paris : Bachelier et Hachette, 1845.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

présentés dans l'ordre des propositions sur lesquelles ils s'appuient, qui n'est pas toujours celui de la gradation des difficultés. Et, d'ailleurs, il y a certaines séries de problèmes, liées naturellement, et qu'il est bon de ne pas séparer⁹³.

Planche multiplie les énoncés visant à mettre en application les propositions de géométrie élémentaire. Par exemple :

123. Par trois points donnés, mener trois droites parallèles équidistantes⁹⁴.

9. Démontrer que la somme des carrés des diagonales d'un quadrilatère, est double de la somme des carrés des lignes qui joignent les milieux des côtés opposés⁹⁵.

Dans un court commentaire sur la résolution des problèmes, il décrit l'analyse et la synthèse comme les deux manières de présenter la solution d'un problème. La première est la méthode d'invention, et il la recommande aux élèves pour leurs compositions afin de faire voir comment ils ont trouvé la solution. Il remarque par ailleurs l'élégance des solutions qui utilisent l'intersection de lieux géométriques. Il évoque enfin la discussion d'un problème, qui fait suite à sa résolution, et vise à déterminer le nombre exact de solutions selon les données, et le cas échéant à signaler les solutions remarquables. La discussion peut encore être l'occasion de chercher si le problème est un cas particulier d'un problème plus général. L'auteur renvoie à un ouvrage qu'il a publié en 1828⁹⁶. Il résout en exemple quelques sujets donnés au concours général par analyse, synthèse et discussion.

Les deux ouvrages de Percin et de Planche sont des compléments à la géométrie élémentaire dans le but de préparer les élèves aux concours et aux examens. Ces compléments contiennent notamment des listes importantes d'énoncés de problèmes, signalant par là l'insuffisance d'un ouvrage comme les *Éléments de géométrie* de Legendre pour préparer les concours d'admission aux Écoles du gouvernement. Les problèmes sont regroupés selon le sujet dont ils traitent par Percin, tandis que Planche entreprend de concilier cette exigence avec l'ordre des *Éléments* de Legendre et l'ordre de la difficulté.

93. Planche, *Op. Cit.*, p. 5.

94. Planche, *Op. Cit.*, premier cahier, p. 64.

95. Planche, *Op. Cit.*, deuxième cahier, p. 27.

96. Planche, *Observations sur les propositions de géométrie en général, et sur les problèmes en particulier*, Paris : Hachette, 1828.

2.4 Le recueil d'Eugène Catalan (1852)

Eugène Catalan est mathématicien et polytechnicien de la promotion 1833. Il a enseigné à l'École des arts et métiers de Chalons-sur-Marne, à l'École polytechnique comme répétiteur, et au lycée Saint-Louis. Il a rédigé des *Éléments de géométrie* en 1843⁹⁷ et un *Traité de géométrie descriptive* entre 1850 et 1852⁹⁸. Ses positions républicaines affirment entravent le déroulement de sa carrière, et il n'a plus de position officielle lorsqu'il publie les *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire* en 1852⁹⁹. Comme pour le *Traité de géométrie descriptive*, il s'agit d'un ouvrage antérieur d'un autre polytechnicien, Henri Charette de la Frémoire, de la promotion 1835, et dont l'éditeur demande à Catalan de contrôler la réimpression. Catalan déclare qu'il a modifié en profondeur l'ouvrage par rapport à sa première édition de 1844¹⁰⁰ :

Un grand nombre de Problèmes et de Théorèmes peu intéressants, ou compris parmi ceux que renferment tous les Traités de Géométrie, ont été remplacés par d'autres, que j'ai tâché de choisir convenablement¹⁰¹.

Autres différences, l'édition revue par Catalan fournit la solution de tous les énoncés, et ceux-ci sont organisés. Les quatre cent cinquante énoncés sont rangés en huit Livres, conformément aux huit Livres des *Éléments* de Legendre. Au sein de chaque Livre, les énoncés de théorèmes précèdent les énoncés de problèmes, qui sont presque toujours des problèmes de construction. La troisième édition de 1858 est signée cette fois du seul Catalan.

Les théorèmes et les problèmes relèvent de la géométrie élémentaire. Les problèmes sont résolus par l'analyse géométrique, sans toutefois que cela soit mentionné. C'est-à-dire que leur résolution part de la figure cherchée pour en déduire la construction. Aucune démonstration synthétique de la construction n'est rédigée. Catalan ne cite aucune source, et Lafrémoire non plus dans l'édition de 1844. Les énoncés sont en grande partie semblables à ceux trouvés

97. Catalan, Eugène, *Éléments de géométrie*, Paris : Bachelier, 1843.

98. Catalan, *Traité de géométrie descriptive*, Paris : Carilian-Gœury et V^{ve} Dalmont, 1850-1852.

99. Catalan, Eugène, de la Frémoire, Henri, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, Paris : Carillan-Gœury et V^{ve} Dalmont, 1852.

100. de la Frémoire, Henri, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, Paris : Carillan-Gœury et V^{ve} Dalmont, 1844.

101. Catalan, de la Frémoire, *Op. Cit.*, p. VI.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

dans les ouvrages de Ritt et de Percin. On trouve aussi plusieurs propositions portant sur des notions de géométrie rationnelle : centre de similitude, transversales, pôles et polaires, quadrilatère complet, rapport harmonique, axes radicaux, involution.

2.5 Escoubès (1854) : traduction d'un recueil de Simpson

Signalons enfin une traduction d'un recueil d'exercices de Thomas Simpson, auteur cité dans les ouvrages de Lacroix et de Vincent comme nous l'avons indiqué dans la première partie. Le traducteur, Escoubès, se présente comme ancien préparateur aux Écoles du gouvernement et auteur de plusieurs ouvrages classiques dont nous n'avons pas retrouvé la trace. Il publie sous son nom un fascicule de quatre vingt dix pages qui regroupe cinquante neuf problèmes de géométrie résolus chacun à la fois par l'analyse algébrique et l'analyse géométrique, à destination des candidats aux Écoles du gouvernement¹⁰². En fait il s'agit très exactement de la traduction des *Select exercises* de Thomas Simpson. C'est un plagiat éhonté car l'auteur annonce en prélude à l'ouvrage :

J'ai donc dû réunir tous mes efforts pour présenter sous une forme claire, simple et méthodique, la double solution de ces Problèmes Géométriques, dont la plupart ont déjà été proposés aux examens pour les Écoles du Gouvernement.

Quoi qu'il en soit, cette traduction montre l'intérêt que portent les candidats aux examens et concours aux problèmes, et confirme que les ouvrages publiés en Grande Bretagne au XVIII^e siècle constituent une source de problèmes de géométrie.

2.6 Conclusion

Nous avons repéré plusieurs recueils de problèmes de géométrie élémentaire, qui exposent la résolution de listes conséquentes d'énoncés de problèmes

102. Escoubès, *Compositions mathématiques, ou problèmes géométriques et trigonométriques, résolus par l'algèbre et la géométrie, à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences, à l'École militaire Saint-Cyr, à l'École naval, à l'École forestière et à l'École centrale des arts et manufactures*, Paris : Hachette, Bachelier, Delalain, Roret, 1854.

VI.2 Les recueils de problèmes de géométrie élémentaire

et de théorèmes, comparables aux listes d'énoncés non résolus que nous avons recensées dans les ouvrages de cours étudiés dans la section précédente.

Ces recueils traitent strictement de géométrie élémentaire, corps de science clairement dissocié de l'application de l'algèbre à la géométrie. L'importance des ouvrages en nombre d'énoncés montre un travail conséquent des auteurs pour la constitution des listes et la rédaction des solutions. Elle montre aussi que la résolution de problèmes n'est définitivement plus l'apanage de l'application de l'algèbre à la géométrie, tel que cela apparaît dans l'ouvrage de Bézout. La résolution des problèmes occupe à l'évidence, au moins pour certains professeurs, une part significative de l'apprentissage de la géométrie élémentaire, et les ouvrages de Ritt et de Sarazin montrent la volonté de lui laisser une large place dans le cours de géométrie.

Les énoncés déclinés sont de nature diverse, et les choix effectués de ce point de vue varient selon les ouvrages. S'ils contiennent tous des problèmes de construction, ils proposent aussi, selon les cas, des problèmes numériques, des lieux géométriques à déterminer, des problèmes spéculatifs, des théorèmes à démontrer ou encore des questions de cours.

Les recueils s'adressent surtout aux élèves se destinant aux concours d'admission des Écoles du gouvernement ; à Paris et Versailles, les meilleurs d'entre eux se préparent au concours général. Pour réussir, ces élèves devront résoudre des problèmes.

L'ouvrage de Sarazin s'adresse quant à lui à des élèves de niveau inférieur. Il présente des listes de problèmes gradués dans la difficulté, qui commencent par des énoncés très simples. Il considère que la résolution des problèmes participe de l'apprentissage de la géométrie de façon complémentaire à la mémorisation des théorèmes.

Nous avons relevé trois critères pour organiser les problèmes, qui parfois se mêlent chez certains auteurs. Selon l'ordre déductif des propositions suivi dans les *Éléments de géométrie* de Legendre, selon l'ordre cognitif de la difficulté croissante des problèmes, ou encore selon le thème sur lequel portent les problèmes. Les énoncés sont toujours organisés dans ces recueils, alors qu'ils ne le sont pas toujours dans les listes de problèmes ajoutées aux ouvrages de cours, à l'instar des quatre cents énoncés placés à la fin des *Nouveaux éléments de géométrie* de Idoux.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

3 Les problèmes en géométrie analytique

Si le *Traité élémentaire*¹⁰³ de Lacroix aussi bien que le *Cours*¹⁰⁴ de Bézout commençaient par la résolution de problèmes, et principalement de problèmes de construction, nous avons montré dans la partie précédente que les professeurs des classes de mathématiques spéciales du premier tiers du XIX^e siècle enseignent une géométrie analytique centrée sur la théorie des courbes, et éventuellement des surfaces, du second degré. La résolution des problèmes, lorsqu'elle est abordée, occupe une place de relativement moindre importance dans ces ouvrages, et traite, outre les problèmes de construction, de la démonstration des théorèmes et de la détermination des lieux géométriques.

Concernant les problèmes de construction, ces ouvrages d'enseignement de la période précédente proposent le plus souvent, le cas échéant, la construction de la figure solution par intersection de droites et de cercles, et si nécessaire de coniques. Enfin, nous n'avons pas trouvé de recueil dédié spécifiquement aux problèmes de géométrie analytique autre que l'ouvrage de Puissant¹⁰⁵ qui complète celui de Lacroix.

Qu'en est-il dans cette deuxième période ? Les problèmes occupent-ils toujours une place marginale dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique, alors que les effectifs des candidats et des lauréats des écoles du gouvernement augmentent et que les programmes de géométrie analytique de la classe de mathématiques spéciales s'élargissent ? La résolution des problèmes de construction débouche-t-elle sur une construction graphique ou bien sur une expression arithmétique reliant grandeurs connues et inconnues ? Des recueils de problèmes de géométrie analytique voient-ils le jour ? Le cas échéant, comment sont-ils structurés, et à quel usage sont-ils destinés ?

Nous examinons dans un premier temps six ouvrages de cours de géométrie analytique publiés dans la période, puis deux recueils de problèmes.

103. Lacroix, *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie*, 4^e édition, Paris : Courcier, 1807.

104. Bézout, *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, troisième partie contenant l'algèbre et l'application de cette science à l'arithmétique et à la géométrie, Nouvelle édition, Paris : Richard et Caille, 1798.

105. Puissant, *Recueil de diverses propositions de géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse géométrique, suivant les principes de Monge et de Lacroix*, Paris : Duprat, 1801.

3.1 Les problèmes dans les manuels de géométrie analytique

La géométrie analytique étudie les courbes et les surfaces à partir de leurs équations. Cela suppose de traduire les propriétés géométriques en relations sur les coordonnées des points et sur les coefficients des équations. Il faut d'une part exprimer les équations des lignes, comme l'équation d'une droite passant par deux points, celle d'un cercle de centre et de rayon donnés, etc ; d'autre part exprimer les grandeurs géométriques comme la distance entre deux points connaissant leurs coordonnées, l'angle de deux droites connaissant leurs équations, etc.

Les propositions qui permettent de traduire les propriétés géométriques en relations algébriques sont appelées des problèmes en géométrie analytique. Elles sont plus ou moins nombreuses selon les ouvrages. Par exemple, dans les *Leçons de géométrie analytique* de Briot et Bouquet, la différence est importante entre la deuxième édition de 1851 et la troisième édition de 1860. La première expose quelque-uns de ces problèmes, mais la suivante est plus détaillée, et décline 23 problèmes de ce genre, ajoutant à l'édition précédente des énoncés tels que :

Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.

Trouver l'équation générale des droites qui passent par le point d'intersection de deux droites données.

Reconnaître si trois points sont en ligne droite¹⁰⁶.

Ces problèmes ne demandent pas du tout d'opérer un tracé. Par exemple, pour le premier, la droite donnée a pour équation $y = ax + b$ et le point donné a pour coordonnées x' et y' . La solution du problème est l'équation de la parallèle cherchée :

$$y - y' = a(x - x')$$

Le deuxième problème demande aussi de trouver une équation, cette fois-ci dépendant d'un paramètre, et le troisième demande d'écrire une relation algébrique sur les coordonnées des trois points. Au-delà de ces énoncés appelés problèmes, préliminaires nécessaires au fonctionnement de la géométrie analytique, dans quelle mesure les ouvrages d'enseignement secondaire de la géométrie analytique proposent-ils des problèmes à résoudre et des théorèmes à démontrer ?

106. Briot et Bouquet, *Leçons de géométrie analytique*, 3^e édition, Paris : Dézobry et Magdeleine, 1860, p. 53-57.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Conformément aux programmes, tous les ouvrages que nous allons présenter exposent la théorie des courbes et des surfaces du second degré, ainsi que certains éléments d'étude des courbes en général. Nous voulons savoir dans quelle mesure ils proposent au lecteur des questions résolues ou à résoudre.

Les *Leçons de géométrie analytique* de Cirodde¹⁰⁷, professeur au Collège royal Henri IV, proposent d'abord quelques problèmes résolus par l'analyse algébrique des figures, avant d'aborder la théorie des coordonnées. Ce sont des problèmes classiques comme l'inscription d'un rectangle de forme donnée dans un triangle, le partage en moyenne et extrême raison, ou encore l'intercalation d'une droite de longueur donnée entre deux droites données et passant par un point donné¹⁰⁸.

Plus loin, la méthode de construction géométrique des solutions des équations par intersection de coniques est appliquée au problème de la trisection de l'arc¹⁰⁹.

Les chapitres suivants sur chacune des coniques se terminent par des « Applications », qui contiennent quelques problèmes résolus de construction de ces courbes lorsque certains éléments en sont donnés, largement résolus par des méthodes géométriques, et quelques problèmes à résoudre¹¹⁰, comme par exemple :

IV. Incrire dans une ellipse un rectangle équivalent à un carré donné.- Discussion.- Dans quel cas le rectangle inscrit sera-t-il maximum ?

V. Démontrer que le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est égal au carré du petit axe¹¹¹.

Au total l'ouvrage contient quarante énoncés non résolus regroupés en quelques endroits de l'ouvrage.

Lefébure de Fourcy, polytechnicien et professeur de mathématiques au Collège Saint-Louis, dans la cinquième édition des *Leçons de géométrie analytique*¹¹² de 1846, commence la géométrie analytique par l'analyse algébrique des figures, dans un chapitre intitulé « Des problèmes déterminés ».

107. Cirodde, *Leçons de géométrie analytique*, Paris et Alger : Hachette, 1848.

108. Cirodde, *Op. Cit.*, p. 114.

109. Cirodde, *Op. Cit.*, p. 170.

110. Cirodde, *Op. Cit.*, p. 345, p. 371 et p. 391.

111. Cirodde, *Op. Cit.*, p. 348.

112. Lefébure de Fourcy, *Leçons de géométrie analytique*, cinquième édition, Paris : Bachelier, 1846.

VI.3 Les problèmes en géométrie analytique

Ce chapitre se termine par la résolution de quelques problèmes, comme de trouver l'expression de l'aire et des rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle connaissant ses trois côtés, de trouver les diagonales et l'aire d'un quadrilatère inscrit connaissant ses côtés, ou encore de construire un triangle de forme donnée sur trois parallèles données, suivie de quelques énoncés à résoudre.

La construction des solutions des équations conduit à la résolution des problèmes de la construction de deux moyennes proportionnelles, de la duplication du cube et de la trisection de l'angle par intersection de coniques.

La géométrie analytique à deux dimensions se termine ensuite par une vingtaine de questions choisies, dont les premières sont résolues, par la méthode des coordonnées, sauf pour la description par points d'une conique passant par cinq points donnée, résolue par une méthode géométrique. Les deux dernières sont empruntées à l'ouvrage de Jacob dont il sera bientôt question, et forment la seule différence avec la troisième édition de 1834 de ce point de vue. Voici les énoncés de deux des problèmes résolus, dont le premier se trouve dans les *Éléments de géométrie analytique* de Garnier, qui lui-même l'a pris dans l'*Arithmétique universelle* de Newton :

Problème II. Soient RAR' et SBS' deux angles donnés, qu'on fait tourner autour de leurs sommets de manière que les côtés AR' et BS' se coupent toujours sur une droite ou directrice donnée LL' : les intersections successives des deux autres côtés déterminent une courbe dont on demande l'équation.

Problème IV. Trouver la courbe que décrit le sommet d'un angle droit dont les cotés sont toujours tangents à une section conique¹¹³.

Dans les *Leçons nouvelles de géométrie analytiques* de Briot et Bouquet, on ne trouve pas l'analyse algébrique des figures, ni même aucun problème résolu. Les chapitres successifs se terminent par de courtes listes d'« Exercices »¹¹⁴ non résolus. Ces listes sont plus importantes au fur et à mesure des rééditions, et la quatrième édition de l'ouvrage en 1863 totalise cent soixante deux exercices rien que pour la géométrie plane. Voici les premiers énoncés relatifs au chapitre sur l'ellipse :

1° Trouver le lieu des sommets des parallélogrammes construits

113. Lefébure de Fourcy, *Op. Cit.*, p. 367 et p. 371.

114. Briot et Bouquet, *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, 2^e édition, Paris : Dézobry et Magdeleine, 1851, p. 72, 82, 96.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

sur les diamètres conjugués d'une ellipse.

2° Trouver le lieu du milieu des cordes menées par un même point d'une ellipse.

3° Une corde d'un cercle se meut parallèlement à elle-même ; par les extrémités on mène des droites parallèles à deux directions données ; trouver le lieu du point de rencontre des parallèles¹¹⁵.

Sonnet et Frontera, dans leurs *Éléments de géométrie analytique*¹¹⁶ de 1854, placent, à la fin des chapitres successifs, des « exercices et applications » qui sont des problèmes à résoudre, des théorèmes à démontrer et des lieux à déterminer, dont les premiers sont résolus et les suivants à résoudre. Les méthodes employées mêlent l'analyse algébrique et les raisonnements géométriques.

Cet ouvrage traite aussi de la construction géométrique des solutions des équations¹¹⁷.

Delisle et Gérono, professeurs de mathématiques qui ne sont ni normaliens ni polytechniciens, publient leur *Géométrie analytique* en 1854. Elle s'ouvre sur la résolution de quelques problèmes déterminés comme l'inscription d'un carré dans un triangle, le partage d'un segment en moyenne et extrême raison, le tracé d'une longueur donnée dans un angle en passant par un point donné de la bissectrice, et quelques autres, ainsi qu'une vingtaine de problèmes à résoudre.

Les chapitres suivants, qui portent respectivement sur l'équation de la ligne droite et celle du cercle, sont encore terminés par une courte liste d'exercices non résolus. Enfin, l'étude des coniques se termine par un chapitre intitulé « Questions relatives aux courbes du second degré » dans lequel quelques théorèmes sont démontrés, comme le théorème de Newton et quelques-unes de ses applications, notamment pour construire les coniques par points dans certaines situations.

Le *Cours de mathématiques* de Charles de Comberousse¹¹⁸ n'aborde pas la résolution des problèmes déterminés par l'analyse algébrique des figures. Au long de l'ouvrage figurent des listes de questions à résoudre, pour un total de cent vingt énoncés. Enfin, les problèmes de la construction des coniques lorsque certains éléments en sont donnés sont traités à l'occasion des chapitres

115. Briot et Bouquet, *Op. Cit.*, 4^e édition, p. 162.

116. Sonnet, Frontera, *Éléments de géométrie analytique*, Paris : Hachette, 1854.

117. Sonnet, Frontera, *Op. Cit.*, p. 261.

118. Comberousse, Charles, *Cours de mathématiques*, Paris : Mallet-Bachelier, 1862.

VI.3 Les problèmes en géométrie analytique

dédiés à chacune d'entre elles, au sein de courtes listes de questions résolues.

Cette revue des ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique de la période conformes aux programmes, c'est-à-dire centrés sur l'exposition de la théorie des courbes et surfaces du second degré, met en évidence plusieurs points.

D'abord, l'application de l'algèbre à la géométrie pour résoudre les problèmes par l'analyse algébrique des figures reste présente dans plusieurs ouvrages, mais pas tous : elle n'est pas traitée dans ceux de Briot et Bouquet, de Sonnet et Frontera, ni de Comberousse. De fait, les programmes de 1843 pour la classe de mathématiques spéciales contiennent l'application de l'algèbre à la résolution de problèmes de géométrie, déterminés ou indéterminés, ainsi que la résolution des problèmes de la trisection de l'angle et de la duplication du cube par intersection de coniques. Ceux de 1853 ne reprennent pas ces formulations. Ils n'évoquent pas les problèmes déterminés, mais par contre prescrivent la construction géométrique des racines réelles des équations en général.

Ensuite, tous ces ouvrages proposent de courtes listes d'énoncés non résolus, qui totalisent dans certains ouvrages plus d'une centaine d'énoncés. Ce sont des théorèmes à démontrer, des problèmes à résoudre ou des lieux géométriques à déterminer. De telles listes n'apparaissent pas dans les ouvrages de géométrie analytique de la période précédente.

Enfin, les constructions à la règle et au compas sont représentées dans ces ouvrages de géométrie analytique, et les programmes de mathématiques spéciales de 1853 contiennent les tracés par points de chacune des coniques et de leurs tangentes. Les ouvrages exposent la construction des coniques, connaissant certains de leurs éléments parmi le centre, les foyers, les directrices, les axes, les diamètres conjugués. À l'occasion de ces problèmes de construction, les méthodes analytiques et géométriques sont employées conjointement.

3.2 Deux ouvrages tournés vers la construction des coniques

Deux ouvrages paraissent au début de notre deuxième période qui donnent une place de premier plan à la construction par points des courbes du second degré, les *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie* de Georges

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Ritt¹¹⁹, et l'*Application de l'algèbre à la géométrie*¹²⁰ de Jacob. Les deux titres annoncent de l'« application de l'algèbre à la géométrie », et non de la « géométrie analytique » comme les ouvrages de cours précédemment étudiés.

Le recueil de Georges Ritt (1836)

Les *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie* de Georges Ritt (1801-1864) sont partagés en deux parties publiées à une année d'écart, intitulées *De la ligne droite et du cercle* pour la première, et *Ligne droite, ellipse, hyperbole, parabole* pour la deuxième. Elles sont rééditées une fois, respectivement en 1857 et 1859.

La première partie est une suite de cent cinquante problèmes résolus et théorèmes démontrés, déclinés en quatre sections. L'auteur présente fréquemment plusieurs solutions à un même énoncé.

La première traite assez généralement des lignes, elle contient : des problèmes de partage d'une ligne de façon à ce que certains rapports soient respectés ; des problèmes de construction de figures, comme l'inscription d'un carré dans un autre, ou la construction d'un triangle équilatéral sur trois circonférences concentriques ; des problèmes de construction d'un triangle connaissant trois éléments caractéristiques.

La deuxième section traite essentiellement du cercle, et aborde notamment les notions d'axe radical, de pôle et de polaire, de tangente commune à deux cercles, d'alignement des centres de similitude de trois cercles pris deux à deux, ainsi que des problèmes de contacts.

La troisième section porte sur les polygones, et particulièrement sur le triangle. Elle comporte plusieurs théorèmes et problèmes sur les droites dites aujourd'hui remarquables du triangle, sur l'inscription de figure dans le triangle, sur le partage d'un triangle, sur les propriétés d'une transversale au triangle, sur les sécantes à deux droites, et les sécantes à un cercle. Par exemple, le problème dit de Castillon d'inscrire dans un cercle un triangle dont les côtés passent par trois points donnés.

La quatrième section porte sur des problèmes de lieux. Les énoncés sont ceux des *Lieux plans* d'Apollonius tels qu'ils se trouvent dans l'ouvrage de Lhuillier qui traduit la reconstitution par Simson de ce texte perdu, énoncés que nous avons aussi trouvés dans l'ouvrage de Reynaud de 1833, *Théorèmes*

119. Ritt, Georges, *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie, avec les solutions développées*, 2 vol., Paris : Hachette, 1836-1837.

120. Jacob, *Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Hachette, Metz : Thiel, 1842.

VI.3 Les problèmes en géométrie analytique

et problèmes de géométrie. À la différence de ces deux ouvrages, Ritt emploie ici l'analyse algébrique pour déterminer les lieux, qui sont tous des lignes droites ou des cercles.

La deuxième partie de l'ouvrage est partagée en trois sections. Les deux premières établissent les propriétés des lignes du 1^{er} et du 2^e degré comme dans d'autres leçons de géométrie analytique. Sauf qu'ici l'ouvrage est tourné complètement vers la résolution de problèmes de construction des figures. Le but de ces deux premières sections est donc d'établir les propositions qui permettront de construire une courbe quelconque du second degré, quels qu'en soient les éléments donnés parmi ses axes, ses diamètres conjugués, ses points particuliers, son centre, ses asymptotes, ses tangentes etc. Ces problèmes des tracés par points des coniques, qui apparaissaient incidemment dans les ouvrages de cours que nous venons d'étudier, polarisent ici toute l'organisation de cette deuxième partie de l'ouvrage, et sont beaucoup plus nombreux pour répondre à une volonté d'exhaustivité. L'objectif est de pouvoir construire la solution de tout problème qui aboutisse à une équation du second degré :

Lorsque, en combinant entre elles les équations du problème, lesquelles ne doivent être que la traduction en langage algébrique des conditions de l'énoncé, on sera parvenu à une équation du deuxième degré entre les coordonnées des points qu'il s'agit de déterminer, il sera facile, d'après ce qui précède, de construire cette équation finale, et les points demandés se trouveront sur une courbe d'espèce donnée, si le problème est indéterminé, ou à l'intersection de deux courbes d'espèces données si le problème est déterminé¹²¹.

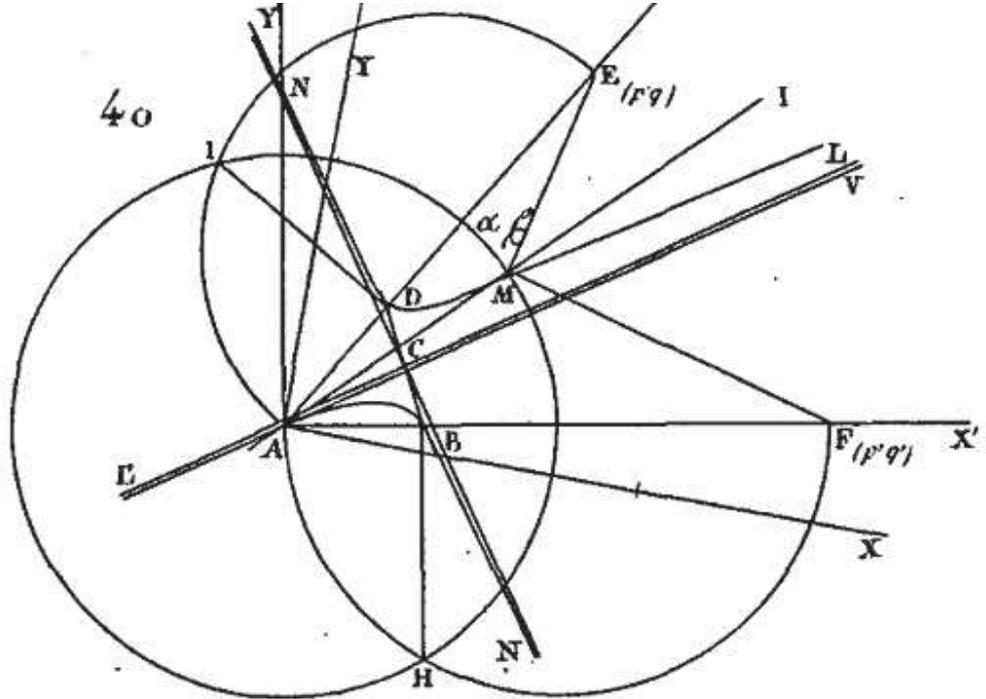
Ritt expose donc les propriétés des courbes du second degré dans le but de pouvoir les utiliser pour résoudre des problèmes, c'est-à-dire pour lui de construire graphiquement la solution de problèmes de construction. Il fait suivre la conclusion citée ci-dessus par la recherche de plusieurs lieux géométriques et de la résolution de quelques problèmes. Voici l'un de ces problèmes de construction faisant intervenir un tracé de coniques :

Par deux points donnés E, F , mener, à un même point M d'une circonférence donnée A , deux droites EM, FM , également inclinées sur le rayon AM passant par ce point, c'est-à-dire telles que l'on ait $EMI = FMI$ ¹²².

121. Ritt, *Application de l'algèbre à la géométrie*, 2^e partie, p. 97.

122. Ritt, *Application de l'algèbre à la géométrie*, 2^e partie, p. 124.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES
PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT



En notant (p, q) , (p', q') et (α, β) les coordonnées des points E , F et du point cherché M , A étant pris comme origine des coordonnées rectangulaires, les droites AM , EM et FM ont respectivement pour équations

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad y - \alpha = \frac{q - \beta}{p - \alpha}(x - \alpha) \quad y - \alpha = \frac{q' - \beta}{p' - \alpha}(x - \alpha)$$

La première section a fourni l'expression de la tangente de l'angle entre deux droites à partir de leurs équations, de sorte que la condition d'égalité des angles $EMI = FMI$ mène à la relation :

$$\frac{(q - \beta)\alpha - (p - \alpha)\beta}{(p - \alpha)\alpha + (q - \beta)\beta} = \frac{(p' - \alpha)\beta - (q' - \beta)\alpha}{(p' - \alpha)\alpha + (q' - \beta)\beta}$$

Cette équation une fois réduite s'écrit :

$$(\beta^2 - \alpha^2)(pq' + p'q) + 2\alpha\beta(pp' - qq') - r^2(p + p')\beta + r^2(q + q')\alpha = 0$$

qui est l'équation d'une hyperbole équilatère passant par l'origine. Ensuite Ritt trouve deux points B et D de cette hyperbole situés respectivement

VI.3 Les problèmes en géométrie analytique

sur les droites AF et AE et établit que le milieu de BC est le centre de l'hyperbole. Il dispose alors de suffisamment d'éléments pour la tracer, ce qu'il résume ainsi :

Sur AE , AF , comme diamètres, décrivez deux demi-circonférences, qui coupent la circonférence donnée aux points I et H , et abaissez les perpendiculaires ID , HB , qui détermineront les points D et B . Joignez DB , et prenez-en la moitié au point C ; partagez l'angle EAF en deux parties égales par la droite AV , et, par le point C , menez CL parallèle à AV , et CN perpendiculaire à AV . Les droites LCL' , NCN' , seront les asymptotes de l'hyperbole.

Connaissant les asymptotes et un point de l'hyperbole, les propositions établies dans la deuxième section permettent de construire l'hyperbole point par point. Remarquons que Ritt ne cherche pas à déterminer les coordonnées (α, β) du point M , ce qui serait possible algébriquement, mais préfère tracer un deuxième lieu sur lequel il se trouve. Il résout les problèmes géométriquement par intersection de courbes.

La troisième section, intitulée « Propriétés générales et particulières des courbes du second degré et application de ces propriétés à la résolution des PROBLÈMES de géométrie », traite relativement peu, quoi qu'en annonce le titre, de problèmes de construction. Elle s'occupe principalement de détermination de lieux géométriques, et de propositions sur les coniques permettant justement de les tracer à partir d'une variété d'éléments donnés. Certains problèmes, bien qu'ils possèdent une solution avec la règle et le compas, se voient traités par intersection de coniques, ce qui en simplifie considérablement la solution. C'est le cas des problèmes dits de contact comme par exemple le problème suivant :

Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés¹²³.

En effet, la différence des distances du centre du cercle cherché aux centres de deux quelconques des cercles donnés est elle-même donnée. Le centre du cercle cherché est donc à l'intersection de deux hyperboles qui ont un foyer en commun. L'exigence cartésienne d'employer les courbes les plus simples possibles à la résolution des problèmes n'est pas retenue. Ritt donne une solution par intersection de coniques d'un problème dont la solution peut être construite à la règle et au compas.

123. *Ibid.*, p. 150.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Au sein de cette troisième section sont successivement introduites les notions de foyers, d'excentricité et de directrice, de diamètre ; elles sont introduites en alternance avec des passages dédiés à la résolution de problèmes et à la détermination de lieux géométriques. Les notions introduites comptent encore les notions de pôle, de polaire, de courbure, de développée et de développante, de quadrature et de coordonnées polaires.

Ritt n'indique pas dans l'ouvrage quels en sont les destinataires, mais rappelons que son *Manuel des aspirants à l'École polytechnique* « termine la série de recueils de problèmes que l'auteur a déjà publiés à l'usage des élèves des classes de mathématiques »¹²⁴. Il est certainement destiné aux élèves de mathématiques spéciales.

Cet ouvrage est entièrement tourné vers la résolution des problèmes de construction par intersection de lignes droites, de cercles et de coniques. Pour cela, il résout de nombreux problèmes de tracé par points des sections coniques, selon les éléments qui en sont donnés.

Le recueil de Christophe Charles Jacob (1842)

Timoléon Christophe Charles Jacob (1809-1848) est capitaine d'artillerie, polytechnicien de la promotion 1828. Son *Application de l'algèbre à la géométrie* verra un deuxième tirage en 1854 chez Mallet-Bachelier. Quoique le titre n'annonce pas un recueil de problèmes, et que l'ouvrage contienne bel et bien la démonstration des propositions au programme de la classe de mathématiques spéciales, il se distingue néanmoins des ouvrages contemporains d'enseignement de la géométrie analytique par son organisation et par le nombre important de problèmes résolus.

À la suite des habituels préliminaires pour introduire à la géométrie analytique, l'auteur expose la résolution de problèmes de construction à la règle et au compas et la démonstration de théorèmes sur les figures, comme par exemple :

76. Inscrire dans un triangle un rectangle dont la surface soit un maximum.
77. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en parties égales¹²⁵

124. Ritt, *Manuel des aspirants à l'École polytechnique*, p. VI.

125. Jacob, *Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Hachette, Metz : Thiel, 1842, p. 65.

VI.3 Les problèmes en géométrie analytique

Il montre encore la concourance des droites dites aujourd'hui remarquables du triangle.

L'étude de la circonférence est elle aussi suivie de la résolution de plusieurs problèmes, dont des problèmes de contacts ou des problèmes qui recourent à la circonférence pour leur résolution, comme par exemple :

- 111. Mener une tangente commune à deux cercles ¹²⁶.
- 121. Mener une circonférence tangente à une circonférence et à une droite données et passant par un point donné ¹²⁷.
- 127. Construire un triangle connaissant un côté a , l'angle opposé A et le produit m^2 des côtés b et c qui le comprennent ¹²⁸.

Ensuite trois chapitres portent successivement sur chacune des coniques, et sont chacun suivis de listes de théorèmes démontrés et de problèmes résolus. Notamment, un grand nombre de problèmes portent systématiquement sur la construction par points de ces courbes lorsque certains éléments en sont donnés parmi les diamètres, les axes, les foyers, les tangentes ou des points de la courbe. En voici les énoncés pour l'ellipse :

- Construction de la courbe au moyen de deux diamètres conjugués
[...]
- On donne deux diamètres conjugués se coupant sous un angle donné, l'on demande de construire les axes principaux [...]
- Connaissant les deux foyers et un point de la courbe.
- Connaissant un foyer, un point, la longueur des axes [...]
- Construire la courbe tangente à trois droites et ayant pour foyer un point donné.
- Connaissant un foyer, la longueur des axes, une tangente.
- Connaissant le centre, la longueur du grand axe, une tangente et son point de contact.
- Connaissant le centre, deux tangentes, la longueur du premier axe principal.
- Connaissant un foyer, la directrice correspondante, une tangente.
- Connaissant le centre, un point, un diamètre, la direction du conjugué.
- Connaissant un foyer, la directrice correspondante, un point.
- Connaissant un foyer et trois points.

126. *Ibid.*, p. 111.

127. *Ibid.*, p. 123.

128. *Ibid.*, p. 131.

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

- Connaissant un foyer, un sommet, une tangente.
- Connaissant un foyer, un sommet, un point.
- Connaissant les deux foyers, une tangente.
- Connaissant le centre, deux points, une tangente.
- Construire une ellipse tangente aux quatre côtés d'un parallélogramme et passant par un point donné.
- Connaissant deux tangentes et un point.
- Ou tangente à une droite donnée [...]
- Construire la courbe connaissant le foyer et trois points.

Une deuxième partie de l'ouvrage reprend l'étude des coniques en partant de leur équation générale, et aborde dans ce cadre les notions de centre, de diamètre, de tangente, d'asymptote et de courbes semblables. À la suite, un court chapitre expose la méthode de construction des solutions des équations par intersections de courbes, et donne en exemple les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Suivent encore des énoncés de théorèmes et de problèmes, dont la discussion de courbes données par une équation particulière (17 énoncés), et à la fin de cette deuxième partie des lieux géométriques (49 énoncés) qui sont successivement des droites, des cercles et des coniques. Voici quelques-uns de ces lieux :

- 669. Trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points à deux cercles donnés soient entre elles $:: m : n$.
- 670. Quel est le lieu des points d'où deux tangentes menées à l'ellipse, se coupent à angle droit .
- 687. Quel est le lieu des sommets des paraboles ayant même tangente et même directrice¹²⁹.

Cette fois-ci, la détermination des lieux s'arrête à l'établissement de leur équation, et aucune construction graphique n'est envisagée.

L'ouvrage de Jacob contient, comme celui de Ritt, environ cent cinquante problèmes résolus, théorèmes démontrés et lieux géométriques déterminés. Les problèmes sur la ligne droite et le cercle sont résolus à la règle et au compas. La première partie aboutit à de nombreux tracés par points des coniques en variant les éléments qui en sont donnés. Ces tracés ne sont pas employés à la résolution des problèmes de construction par intersection de coniques comme dans l'ouvrage de Ritt, en-dehors de quelques problèmes classiques pour illustrer la construction géométrique des solutions des équations. La

129. *Ibid.*, p. XIV.

deuxième partie expose la théorie des courbes du second degré, et se termine elle aussi par une liste importante de lieux à déterminer, mais en s'arrêtant cette fois à l'équation du lieu cherché.

3.3 Conclusion

Les deux ouvrages de Ritt et de Jacob contiennent un nombre de problèmes résolus bien plus important que dans les manuels de géométrie analytique étudiés précédemment. Ces derniers exposent avant tout la théorie des courbes et des surfaces du second degré, conformément aux programmes des classes auxquels ils s'adressent, alors que, comme leur titre l'annonce, les deux premiers ouvrages concernent l'« application de l'algèbre à la géométrie », c'est-à-dire qu'ils ont comme objet d'enseigner une méthode de résolution de problèmes. Ils donnent donc une place prépondérante à la résolution de problèmes.

L'ouvrage de Ritt est entièrement tourné vers la résolution de problèmes de construction par intersection de droites, de cercles et de coniques. La première partie de l'ouvrage traite des solutions qui ne font appel qu'à la ligne droite et la circonférence, et la deuxième à celles qui font aussi appel aux courbes du second degré. Cette deuxième partie inclut la démonstration de toutes les propositions nécessaires sur les coniques, et en cela possède un contenu théorique équivalent aux ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique. La structure de la présentation est toutefois différente en ce qu'elle alterne des passages théoriques visant à démontrer des propositions sur les coniques, avec des passages visant à tracer par points ces coniques selon les différents éléments qui en sont donnés, et à résoudre des problèmes de construction. Les problèmes qui ne sont pas directement liés aux propriétés des coniques s'avèrent néanmoins relativement peu nombreux dans l'ouvrage, qui fournit par conséquent davantage les éléments d'une méthode qu'une collection de problèmes résolus.

L'ouvrage de Jacob est lui aussi tourné vers la résolution de problèmes et la détermination de lieux. Dans la première partie, les lieux consistent majoritairement en des constructions par points de sections coniques selon les différents éléments qui en sont donnés. La deuxième partie expose la théorie des courbes du second degré, comme en géométrie analytique, mais se termine à nouveau par une liste de lieux à déterminer, cette-fois par leur équation.

Ces deux ouvrages se démarquent à la fois des programmes officiels et des

CHAPITRE VI. UNE PRÉSENCE ACCRUE DES PROBLÈMES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

manuels contemporains de géométrie analytique en choisissant de développer les applications de la théorie des courbes du second degré à la résolution des problèmes de construction géométrique, au tracé des courbes du second degré, et à la détermination des lieux géométriques.

CHAPITRE VII

LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

Le chapitre précédent a montré que le nombre de problèmes à résoudre et de théorèmes à démontrer dans les ouvrages d'enseignement secondaire de la géométrie avait considérablement augmenté par rapport à la période précédente. Au-delà de la place institutionnelle des problèmes dans les concours et les examens, plusieurs auteurs considèrent que c'est par la résolution de ces problèmes, par la recherche de leur solution, que les élèves développent leur esprit d'invention. Nous allons voir que, pour guider cette recherche, plusieurs auteurs abordent la question de la méthode à suivre.

Deux méthodes générales sont bien identifiées. Pour la géométrie élémentaire, l'analyse géométrique des Anciens, reconnue comme la méthode d'invention et réhabilitée déjà par Brianchon dans un mémoire de 1810¹. Pour l'application de l'algèbre à la géométrie, l'analyse algébrique, qu'elle soit analyse algébrique des figures ou analyse algébrique des coordonnées.

L'une et l'autre s'avèrent limitées. La première parce qu'elle n'indique pas avec certitude les étapes à suivre. La deuxième parce qu'elle mène à des équations que l'on ne sait pas toujours résoudre simplement, voire pas du tout.

Nous allons passer en revue les écrits des auteurs qui exposent des méthodes, et détailler les méthodes qu'ils exposent. Nous verrons en particulier qu'un ouvrage dont la publication remonte à 1818 semble avoir eu un

1. Brianchon, « Solution de plusieurs problèmes de géométrie », *Journal de l'École polytechnique*, 10^e cahier, tome IV, Paris : Imprimerie impériale, 1810.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

large impact sur ces auteurs : il s'agit de l'*Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie* écrit par le jeune polytechnicien Gabriel Lamé.

1 Ritt (1836) : l'analyse comme méthode en géométrie élémentaire

Georges Ritt (1801-1864), dont nous avons dit qu'il était ancien élève de l'École normale et inspecteur départemental des écoles primaires, critique de la façon suivante, en 1836, les ouvrages d'enseignement de géométrie qui lui sont contemporains :

Dans la plupart des ouvrages élémentaires, on trouve l'énoncé du problème, qui indique les opérations à effectuer, les constructions à faire sur les données ; la solution, qui fait connaître le procédé à employer pour résoudre la question ; et enfin la démonstration, qui achève de prouver l'exactitude du procédé et lève toute incertitude. Il y a, dans cette méthode, à la fois problème et théorème, synthèse et analyse ; mais rien n'indique la marche qu'a suivie l'esprit pour arriver à la solution, et il est bien peu probable que cette indication pure et simple du procédé de solution puisse mettre sur la voie de la solution d'un second, d'un troisième problème [...] ce moyen ne paraît pas de nature à activer le développement de l'intelligence, et ne sert qu'à surcharger la mémoire d'une foule de notions mal ordonnées, et généralement peu comprises.²

Pour lui, donner la solution des problèmes aux élèves ne suffit donc pas. Cette « méthode », au sens ici de forme d'exposition du savoir, ne le satisfait pas. Il faut montrer aux élèves comment la solution a été trouvée, quelle « marche a suivie l'esprit ». L'exposition de cette « marche de l'esprit » est même essentielle à ses yeux car elle seule développe l'intelligence, elle seule permettra de résoudre de nouveaux problèmes.

Duchesne, professeur de physique au collège de Vendôme et auteur d'un recueil de questions posées à l'examen d'admission à l'École polytechnique, partage ce point de vue :

2. Ritt, George, *Problèmes de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique*, Paris : Hachette, 1836, p. 3.

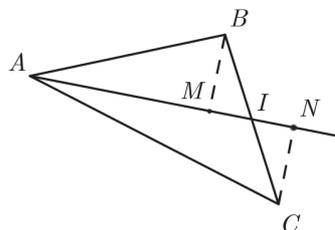
VII.1 Ritt (1836) : l'analyse comme méthode en géométrie élémentaire

Les jeunes gens éprouvent toujours une grande difficulté dans la résolution des problèmes de géométrie ; cela tient, sans doute, à ce que les auteurs suppriment une grande partie des raisonnemens qui peuvent conduire aux solutions³.

Les critiques de Ritt évoquent celles des cartésiens au XVII^e siècle contre les démonstrations synthétiques qui ne montrent pas comment a été inventée la solution, mais lui propose une méthode qui ne recourt à l'algèbre.

Ainsi les *Problèmes de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique* publiés en 1836 s'ouvrent sur une première section intitulée *Méthode analytique et considérations générales sur la résolution des problèmes de géométrie*. Voyons comment cette expression de « méthode analytique » est reprise ici en géométrie élémentaire à une époque où elle désigne couramment la géométrie analytique. L'auteur commence par illustrer sur quelques problèmes la différence entre ce qu'il appelle la « méthode synthétique », une expression qui peut nous paraître contradictoire, et la « méthode analytique ». Voici le premier de ces problèmes :

PROBLÈME 1. *Mener par un point donné une droite qui passe à égale distance de deux autres points donnés.*



La « méthode synthétique » donne la construction à réaliser puis la démonstration de sa validité :

Méthode synthétique. Par le point donné A , et le point I , milieu de la droite qui joint les deux points donnés, menez la droite IM : cette ligne satisfait à la question. En effet, si des deux points donnés B et C on mène des perpendiculaires BM , CN , sur cette droite, les deux triangles rectangles BIM , CIN , seront égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal : donc les

3. Duchesne, *Questions inédites relatives aux examens de l'École Polytechnique et de la Marine*, Paris : Hachette, 1836, p. 83.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

deux perpendiculaires qui mesurent les distances des points à la droite sont égales.

La « méthode analytique » part de la construction réalisée pour en déduire des propositions qui permettent à leur tour de trouver une construction de la figure. Il s'agit de l'analyse des Anciens ou analyse géométrique :

Méthode analytique. Soit supposée construite la droite ANM demandée ; par chacun des points donnés si l'on abaisse une perpendiculaire sur cette droite, les deux perpendiculaires BM, CN , seront égales d'après l'énoncé, et parallèles par construction, et les deux triangles BIM, CIN , seront égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux : donc les hypoténuses sont égales, et la droite cherchée passe par le milieu I de la droite qui joint les points donnés. De là la construction⁴.

Assez vite, Ritt remplace les expressions *Méthode synthétique* et *Méthode analytique* par les simples termes *synthèse* et *analyse*. Il affirme qu'« il est de toute évidence qu'elle [l'analyse] est bien la seule méthode qui ait pu conduire à la solution énoncée synthétiquement »⁵. L'analyse, en l'occurrence géométrique, montre la « marche qu'a suivie l'esprit ». Il expose de cette façon la résolution de plusieurs problèmes et aboutit à la formulation détaillée en quatre parties de cette méthode :

1. *Hypothèse et constructions préparatoires* ;
2. *Examen des relations entre les données et les inconnues du problème* ;
3. *Solution et construction finale* ;
4. *Démonstration*.

À quoi il faut ajouter une cinquième partie, très importante, *la discussion*⁶.

Chacune des étapes successives de la méthode est illustrée par plusieurs exemples, désormais résolus uniquement par l'analyse. Nous les illustrerons toutes ensemble sur un unique exemple, suffisant pour comprendre l'esprit de l'auteur :

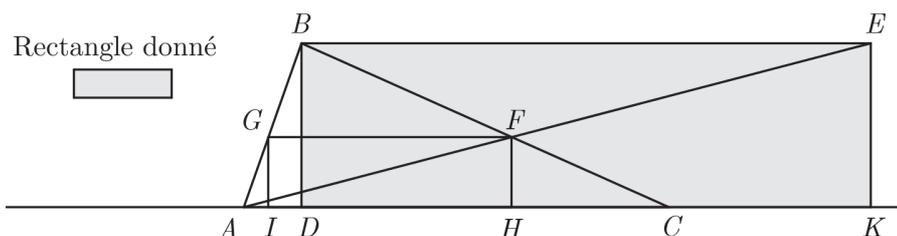
4. Ritt, *Op. Cit.*, p. 3.

5. *Ibid.*, p. 6.

6. *Ibid.*, p. 6.

VII.1 Ritt (1836) : l'analyse comme méthode en géométrie élémentaire

PROBLÈME 17. *Inscrire dans un triangle donné un rectangle d'es-
pèce donnée, c'est-à-dire semblable à un rectangle donné, $\frac{m}{n}$ étant
le rapport des côtés⁷.*



La première étape part du problème considéré comme résolu, en l'occurrence la figure d'un rectangle inscrit dans un triangle. Elle est complétée par le tracé de quelques lignes préparatoires, permettant, dans la deuxième étape, de « faire ressortir les relations qui existent entre les données et les inconnues ». Les « données » et les « inconnues », des mots habituellement employés en algèbre, désignent ici respectivement la figure donnée, le triangle ABC , et la figure à tracer, le rectangle $GFHI$. Les lignes BD et AE , ainsi que le rectangle $BEKD$, font donc « ressortir leurs relations », c'est-à-dire que l'examen de la figure met en évidence que les rectangles $BEKD$ et $GFHI$ sont semblables. À ce stade, il est d'une « nécessité indispensable » de connaître les diverses propriétés des figures, d'avoir en mémoire les théorèmes sur lesquels se fondera la solution. La troisième étape est la construction effective des rectangles $BEKD$ puis $GFHI$, par le moyen de leurs relations avec les données qu'a mises en évidence l'analyse. La quatrième est la démonstration que le rectangle $GFHI$ est la solution du problème. « Mais lorsque la solution a été préparée par l'analyse, la démonstration est à peu près inutile » écrit l'auteur. Enfin, la discussion consiste à « généraliser la solution en l'étendant à tous les cas possibles, et à montrer l'impossibilité ou la possibilité du problème » selon les cas. Ici, la discussion permet de s'apercevoir que le problème s'étend à la résolution du problème de l'inscription d'un carré dans un triangle.

Ritt formule donc, dès les premières pages de son ouvrage, le projet explicite de structurer la démarche de résolution de problème en exhibant une méthode. Celle-ci consiste en une analyse au sens des Anciens, qu'il détaille

7. *Ibid.*, p. 13.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

en étapes successives. Certes, l'effectivité de cette méthode est limitée par le fait que rien n'indique comment connaître les lignes auxiliaires à tracer, ni les propriétés auxquelles recourir. Ritt en convient qui « sent bien qu'il ne peut exister de règle générale pour la résolution des problèmes de géométrie par des considérations purement géométriques »⁸. Pour surmonter cette difficulté, il prescrit de « s'exercer à en résoudre [des problèmes] le plus qu'on pourra ». Il donne ici une explication au nombre croissant de problèmes dans les ouvrages d'enseignement. C'est que l'exercice, c'est-à-dire la résolution de nombreux problèmes, développe la faculté de résoudre de nouveaux problèmes, faculté qui devient, pour lui, l'objet même de l'enseignement de la géométrie en ce qu'elle développe l'intelligence. Doublée de cet exercice, l'application de la méthode analytique permettra de résoudre les « problèmes les plus difficiles ».

D'autres auteurs déplorent, comme Ritt, l'absence d'une méthode générale et affirment la nécessité d'un entraînement. Ainsi de Percin, professeur au Collège royal de Nancy, dans son *Complément de géométrie* de 1848 destiné aux candidats aux écoles spéciales :

Il serait difficile d'indiquer une méthode certaine et générale pour trouver la solution des problèmes ; l'exercice seul peut développer l'aptitude des élèves sous ce rapport⁹.

De même pour le polytechnicien Guibal, qui indique dans ses *Conseils propres à faciliter la solution des problèmes de géométrie* de 1846 :

Il est impossible de donner aucune règle certaine pour aider les élèves dans la recherche de la solution des problèmes. Celui qui saura le mieux son cours aura plus de chances que tout autre, pour découvrir de suite quels sont les théorèmes applicables aux questions proposées. La facilité de faire cette application naîtra pour lui à mesure qu'il en aura résolu un plus grand nombre. En donnant une série de problèmes, dont l'un conduit à la solution de l'autre, on peut mettre sur la voie des recherches à faire dans les cas analogues¹⁰.

S'il reconnaît que l'analyse qu'il décrit n'est pas une méthode « certaine et générale », Ritt poursuit à l'évidence un objectif de plus grande généralité

8. Ritt, *Op. Cit.*, p. 37.

9. Percin, *Complément de géométrie*, Grimblot et Vve Raybois, 1848, p. 120.

10. Guibal, *Conseils propres à faciliter la solution des problèmes de géométrie*, Nancy : Vve Raybois, 1846, p. 1.

VII.1 Ritt (1836) : l'analyse comme méthode en géométrie élémentaire

pour sa méthode de résolution des problèmes. Cette recherche de généralité se manifeste notamment par l'emploi du vocabulaire de l'algèbre, établissant des similitudes entre son analyse et l'analyse algébrique. Il mentionne les « données » et les « inconnues » d'un problème de construction, et compare les lieux géométriques à « des équations particulières ». La recherche de généralité apparaît encore dans la cinquième étape de la « méthode analytique » de Ritt, la discussion, qui consiste notamment à « généraliser la solution en l'étendant à tous les cas possibles ». Il met ce point en évidence lorsqu'il traite en détail de cette étape. « La discussion analytique d'un résultat trouvé, écrit Ritt, met en lumière une foule de propriétés nouvelles, qui fournissent les énoncés de nouveaux théorèmes ou servent à la résolution d'autres problèmes ». Les exemples choisis pour l'illustrer traitent justement de transversales, de similitude, de polaire et de contact de cercles, c'est-à-dire de sujets emblématiques de la réflexion sur les notions de méthode et de généralité.

À la suite de cette description détaillée de l'analyse, appuyée sur la résolution de nombreux problèmes, et avant l'importante collection de problèmes dont il a été question dans le précédent chapitre, Ritt présente encore plusieurs sections de considérations générales sur la résolution des problèmes. Elles portent sur les problèmes déterminés et indéterminés, le calcul algébrique, la trigonométrie, les constructions à la règle seule ou au compas seul. Ce faisant, et sans que ce soit tout à fait explicite, il expose des procédés particuliers de résolution de problèmes, qui seront applicables à une classe réduite mais indéfinie d'énoncés. Ce que d'autres auteurs après lui, nous le verrons bientôt, qualifierons de *méthodes particulières*.

Le premier de ces procédés est le recours aux lieux géométriques. Un chapitre est consacré à l'« application des lieux géométriques à la résolution des problèmes déterminés ». Ritt n'emploie pas ici le terme de méthode, qu'il a employé à un autre usage, mais explique que :

Si, en discutant les conditions de l'énoncé, on reconnaît qu'un point cherché doit se trouver à la fois sur deux lieux géométriques connus, ce point sera à l'instant déterminé par leur intersection [...] Chacun de ces lieux répond en quelque sorte à une des équations particulières que l'analyse algébrique fournit pour la résolution des problèmes déterminés à plusieurs inconnues¹¹.

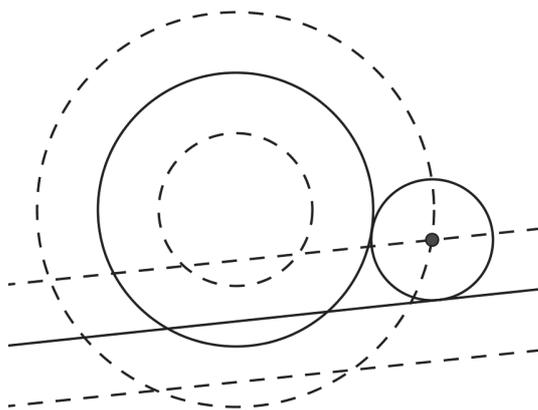
11. Ritt, *Op. Cit.*, p. 49.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

Le procédé est identique à celui décrit par Lamé. Il est à noter qu'une fois de plus, Ritt réalise un parallèle avec l'analyse algébrique. Le premier problème qui illustre ce procédé est le suivant :

PROBLÈME 56. *Décrire avec un rayon donné un cercle tangent à la fois à une droite et à un cercle donnés.*

L'analyse du problème établit que le centre du cercle cherché doit se trouver à la fois sur deux lieux géométriques. Le premier, le lieu des centres des cercles de rayon donné tangents à la droite donnée, est un couple de droites parallèles. Le second, le lieu des centres des cercles de rayon donné tangents au cercle donné, est un couple de cercles concentriques. Les solutions du problème sont les cercles dont le centre est à l'intersection de ces deux lieux.



Quelques pages plus loin, Ritt résout un problème qui figure déjà dans l'ouvrage de Lamé comme illustration de la méthode inverse que nous avons décrite. Il s'agit de mener une sécante à quatre droites données de sorte que les trois segments interceptés soient dans des rapports donnés. Or il en présente la solution en mentionnant qu'il adopte justement la « méthode inverse ».

L'ouvrage de Ritt institue l'analyse comme méthode de résolution des problèmes de géométrie élémentaire. Cette conception correspond au choix qui avait été fait par Vincent dans son *Cours de géométrie élémentaire*, qui donne l'analyse des problèmes lorsque leur solution ne se présente pas d'elle-même¹², ainsi qu'au choix retenu par tous les auteurs de recueils de problèmes étudiés dans la précédente section : Sarazin, Percin, Planche et Catalan. La

12. Vincent, *Cours de géométrie élémentaire*, 2^e édition, Paris : Bachelier, 1832, p. 36.

VII.2 Serret (1855) : recenser les méthodes pour résoudre les questions de géométrie

description donnée ici de la méthode analytique est très détaillée et vise à convaincre le lecteur de sa généralité. En particulier, la discussion, étape finale de la résolution d'un problème, ne se limite pas comme dans le *Cours* de Vincent à un « examen des circonstances variées de la question », mais vise à « généraliser la solution en l'étendant à tous les cas possibles »¹³. Dans le même temps, l'auteur part de problèmes particuliers pour exhiber cette méthode, et il s'appuie encore sur eux pour en commenter chacune des étapes. C'est-à-dire qu'il s'efforce de concilier une exigence de grande généralité, qu'il associe à la notion même de méthode, avec l'efficacité de ses prescriptions pour la résolution d'un vaste corpus de problèmes particuliers. Les solutions des problèmes sont regroupées par analogie, selon qu'elles sont déterminées ou indéterminées, qu'elles relèvent du calcul algébrique ou de la trigonométrie, qu'elles recourent à la règle seule ou au compas seul. À cette tension entre le souci de généralité et la diversité des énoncés particuliers, Ritt répond en décrivant, de façon secondaire, des procédés particuliers de résolution de problèmes, comme le recours aux lieux géométriques et la méthode inverse.

2 Serret (1855) : recenser les méthodes pour résoudre les questions de géométrie

Paul Serret (1827-18..) est professeur de mathématiques à Paris, normalien de la promotion 1849, non agrégé mais docteur en 1859 pour un travail sur les lignes à double courbure, membre de la société philomathique. Il ne doit pas être confondu avec le polytechnicien et académicien Joseph-Alfred Serret. Dans son ouvrage *Des méthodes en géométrie*¹⁴, il regrette que les « méthodes des inventeurs » aient « disparu sous l'uniformité d'une analyse élégante » qui a particulièrement cours à l'école polytechnique. Il souhaite sauver de l'oubli ces méthodes par son ouvrage en en proposant une classification rationnelle et en les illustrant par des applications le plus souvent d'un niveau soutenu qui dépasse celui de l'enseignement secondaire. Il s'agit donc d'un ouvrage entièrement consacré aux méthodes. La notion de méthode désigne dans cet ouvrage un « procédé que l'on peut employer pour résoudre les questions de géométrie », ou « procédé d'investigation »¹⁵.

13. Ritt, *Op. Cit.*, p. 24.

14. Serret, Paul, *Des méthodes en géométrie*, Paris : Mallet-Bachelier, 1855.

15. Serret, *Op. Cit.*, p. VII.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

Serret cite fréquemment les *Nouvelles annales* comme source des énoncés qu'il propose. Il cite aussi à plusieurs reprises, et ce dès la première page, l'*Examen* de Lamé, qualifié d'« excellent ouvrage ».

2.1 Un catalogue de méthodes de géométrie élémentaire

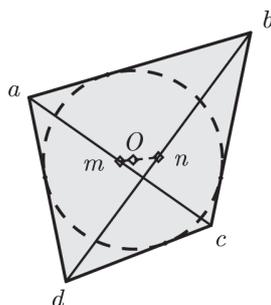
Il recense onze méthodes dans la première partie de l'ouvrage, portant sur la géométrie des figures finies, tandis que la deuxième, que nous n'aborderons pas, porte sur la géométrie infinitésimale. Il propose, face à une question, de les essayer toutes, successivement. Elles ne sont d'ailleurs pas étanches, et il peut arriver que la résolution d'un problème recoure à plusieurs d'entre elles.

1. Par substitutions successives ;
2. Par construction ;
3. Par duplication ;
4. Par abstraction ou généralisation ;
5. Par composition et décomposition ;
6. Par les limites ;
7. Par la réduction à l'absurde ;
8. Par inversion ;
9. Par les lignes, les aires ou les volumes auxiliaires (application : transversale du triangle) ;
10. Par les solides auxiliaires ;
11. Par la transformation des figures.

Cette classification est remarquable par le nombre et la diversité des méthodes. La première méthode est l'analyse géométrique, qui fait dépendre la solution de la question proposée d'une autre plus simple, etc. La deuxième consiste à substituer à la définition d'un élément de la figure une construction équivalente. La troisième consiste à construire le symétrique d'une partie de la figure par rapport à une ligne de la figure. La quatrième à faire abstraction d'une propriété qui définit certains éléments de la figure pour établir une proposition plus générale que la proposée, et dont elle serait un cas particulier. Serret donne en exemple la démonstration du « théorème de Newton » :

VII.2 Serret (1855) : recenser les méthodes pour résoudre les questions de géométrie

Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle¹⁶.



Il montre que le théorème de Newton est un cas particulier de l'énoncé suivant :

Tout point o satisfaisant à la relation $\text{tri } oab + \text{tri } ocd = \text{tri } obc + \text{tri } oda$ est situé sur la droite mn qui joint les milieux des diagonales.

Cet énoncé est effectivement plus général. Pour démontrer que le théorème de Newton en est un cas particulier, traçons les rayons perpendiculaires aux quatre côtés du quadrilatère. Ils partagent le quadrilatère, avec les quatre droites reliant le centre du cercle à ses sommets, en huit triangles deux à deux superposables. Donc le centre du cercle vérifie la condition requise pour le deuxième énoncé.

Pour démontrer ce dernier, Serret remarque que $\text{tri } oab - \text{tri } obc = 2 \text{ tri } omb$ et $\text{tri } oda - \text{tri } odc = 2 \text{ tri } omd$, d'où $\text{tri } omb = \text{tri } omd$. Il en déduit que b et d sont également éloignés de la droite om , et donc que le milieu n de la droite bd appartient à om .

La cinquième méthode « consiste à composer avec les grandeurs dont on veut établir l'égalité, d'autres grandeurs auxiliaires dont l'égalité est évidente ». La méthode prend le nom de décomposition lorsque les grandeurs dont on veut établir l'égalité sont décomposées en un même nombre de parties dont on prouve l'égalité deux à deux. La méthode par les limites déduit d'une relation entre des grandeurs variables la même relation entre leurs grandeurs limites. La méthode par la réduction à l'absurde ne doit être utilisée que lorsqu'elle fournit une démonstration plus simple que l'analyse, car « ces sortes de

16. Serret, Paul, *Op. Cit.*, p. 9.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

démonstration peuvent convaincre l'esprit mais non l'éclairer », écrit Serret en citant la *Logique de Port royal*. La méthode par inversion est celle décrite par Lamé sous le nom de méthode inverse, qui concerne à prendre les données pour inconnues et vice-versa. La méthode par les lignes, les aires, ou les volumes auxiliaires « consiste à employer comme auxiliaires, dans la recherche d'une relation entre des grandeurs d'une certaine espèce (lignes, aires ou volumes), des grandeurs d'espèces différentes (aires, volumes ou lignes) »¹⁷. La méthode par les solides auxiliaires « consiste à faire intervenir la géométrie à trois dimensions dans la solution d'une question de géométrie plane »¹⁸. Enfin, la méthode par la transformation des figures est, de l'avis de Serret, « l'une des plus importantes et des plus fécondes de la géométrie » au point d'affirmer qu'elle « constitue la véritable méthode en géométrie »¹⁹. Les noms de Cavalieri, Grégoire de Saint-Vincent, Pascal, Newton, MacLaurin, Dupin, Poncelet et encore Chasles sont convoqués pour retracer l'histoire de cette méthode. Serret consacre un chapitre à part à l'illustration de cette méthode sur une transformation particulière, la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Serret présente des méthodes que l'on peut suivre dans la solution des problèmes comme dans la démonstration des théorèmes, c'est-à-dire qu'il ne fait pas de différence entre ces deux genres de propositions sur le plan de la méthode. Il rejoint de ce point de vue le propos de Percin pour qui l'on peut aussi bien employer l'analyse et la synthèse dans la démonstration des théorèmes²⁰. Serret enjoint à son lecteur, face à un énoncé, d'essayer successivement chacune des méthodes. Celles-ci sont distinguées selon la forme logique du raisonnement auquel elles conduisent.

2.2 La transformation par rayons vecteurs réciproques

Suite à ce premier chapitre sur les méthodes, la première partie de l'ouvrage sur la géométrie des figures finies contient un deuxième chapitre, consacré à la transformation par rayons vecteurs réciproques, qu'il utilise pour établir plusieurs propositions de géométrie et de géométrie sphérique. Les points réciproques sont définis de la manière suivante :

17. Serret, *Op. Cit.*, p. 14.

18. Serret, *Op. Cit.*, p. 17.

19. Serret, *Op. Cit.*, p. 20.

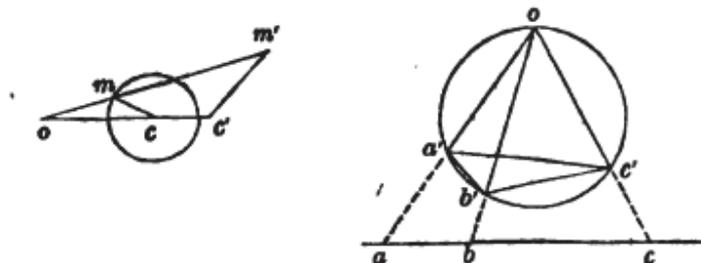
20. Percin, *Complément de géométrie*, p. 127.

VII.2 Serret (1855) : recenser les méthodes pour résoudre les questions de géométrie

Deux points m et m' sont dits *réciroques* par rapport à un point o , appelé point *origine*, et suivant une *puissance* P , positive ou négative, lorsqu'ils sont situés sur une même droite passant par le point o et que le produit de leurs distances à ce point est égal à la puissance P ²¹.

Entre autres résultats, Serret montre que si m et m' d'une part, n et n' d'autre part, sont des points réciroques, alors on a la relation : $m'n' = \frac{mn}{om \cdot on} \cdot P$. Il montre encore que les angles d'une figure et de sa réciroque sont égaux, et que la figure réciroque d'une droite qui ne contient pas l'origine est un cercle. Ces résultats sont employés pour établir des propositions, dont voici deux exemples.

D'abord la relation précédente appliquée lorsque m est un point d'un cercle de centre c donne $mc = \frac{m'c'}{om' \cdot oc'} \cdot P$ où le rapport $\frac{m'c'}{om'}$ est par conséquent constant. D'où la proposition que le lieu des points dont le rapport à deux points donnés est constant est un cercle.



Ensuite la relation évidente entre trois points alignés a, b, c , $ac = ab + bc$, donne par la transformation trois points alignés a', b', c' qui vérifient :

$$\frac{a'c'}{oa' \cdot oc'} = \frac{a'b'}{oa' \cdot ob'} + \frac{b'c'}{ob' \cdot oc'}$$

Cette relation peut s'écrire : $a'c' \cdot ob' = a'b' \cdot oc' + b'c' \cdot oa'$, c'est-à-dire que « dans un quadrilatère inscrit à une circonférence, le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés ».

Serret développe les propriétés de la transformation par rayons vecteurs réciroques par des méthodes géométriques, et montre notamment comment elle permet d'inventer des propositions à partir de propositions connues, ainsi

21. Serret, *Op. Cit.*, p. 21.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

que Chasles l'a montré dans l'*Aperçu* pour d'autres transformations. Il n'indique pas de référence pour cette transformation par rayons vecteurs réciproques bien qu'il le fasse en de nombreuses occasions dans l'ouvrage²². Le terme de transformation par rayons vecteurs réciproques est introduit par Liouville dans une note ajoutée à un article de géométrie analytique de lord Kelvin²³, le terme de rayon vecteur étant employé depuis le XVIII^e en astronomie. Quant au fait que la transformée d'une droite est un cercle, il correspond à l'une des propositions contenues dans les *Lieux plans* d'Apollonius tels qu'ils sont transcrits dans l'ouvrage de Lhuilier :

Problème. Soit un point donné de position, et soit une droite aussi donnée de position. Par ce point soit menée une droite quelconque. Sur cette droite soient deux points, tels, que le rectangle de leurs distances au premier point, soit donné de grandeur. Que l'un de ces points soit à la droite donnée de position ; on demande le lieu de l'autre point²⁴

Cette proposition, comme nous l'avons indiqué, est présente dans les *Théorèmes et problèmes de géométrie* de Reynaud et dans les *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie* de Ritt.

3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

Cette notion de méthode particulière en géométrie élémentaire est développée par plusieurs auteurs, qui sont à une exception près des professeurs de mathématiques et auteurs d'ouvrages d'enseignement. Quelles sont les méthodes particulières qu'ils décrivent ? Peuvent-elles être reliées à l'*Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* de Lamé ? À l'ouvrage de Serret lorsqu'ils sont publiés après 1855 ?

22. Sur l'histoire de la notion d'inversion, voir : Patterson, Boyd, « The Origins of the Geometric Principle of Inversion », *Isis*, vol. 19, n° 1, 1933, p. 154-180, et Court, N. A., « Notes on inversion », *The Mathematics Teacher*, vol. 55, n° 8, 1962, p. 655-657

23. Liouville, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome XII, Paris : Bachelier, 1847, p. 265.

24. Lhuilier, *Op. Cit.*, p. 46.

VII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

3.1 Guibal (1846) : quatre procédés généraux

Charles François Guibal, un ancien élève de l'École polytechnique de la promotion 1800 dont on connaît peu d'éléments biographiques, rédige en 1846 un petit opuscule intitulé *Conseils propres à faciliter la solution des problèmes de géométrie*²⁵ dans le but, écrit-il, d'« aider les élèves dans la recherche de la solution des problèmes ». Il reconnaît quatre procédés généraux pour la résolution des problèmes :

On peut, à la rigueur, faire quatre catégories des procédés généraux propres à conduire à la solution des problèmes²⁶.

Ces quatre procédés sont : les « lieux géométriques », la « méthode directe », les « solutions algébriques » et la « méthode inverse ».

Concernant les « lieux géométriques », Guibal définit deux lieux particuliers. D'abord l'axe radical de deux cercles comme le lieu des points par lesquels on peut mener des tangentes égales aux deux cercles donnés : il s'agit d'une droite. Ensuite le lieu des points tels que leurs distances à deux points donnés soient toujours entre elles dans un rapport donné : il s'agit d'un cercle. Ces lieux sont employés pour quelques applications, par exemple pour trouver le point duquel on peut mener trois tangentes égales à trois cercles donnés.

La « méthode directe » est définie de manière peu précise : elle consiste, écrit l'auteur, à considérer attentivement les conditions du problème, à tracer approximativement la figure et à trouver l'application d'un théorème ou d'un problème connu. Elle est employée à la solutions de quelques problèmes de partage, de contact ou de maximum.

Les « solutions algébriques » consistent à mettre en œuvre l'analyse algébrique des figures, c'est-à-dire à considérer le problème comme résolu et à former une équation entre les lignes connues et les lignes cherchées. Guibal l'emploie pour établir une deuxième solution à des problèmes résolus une première fois en amont dans l'ouvrage.

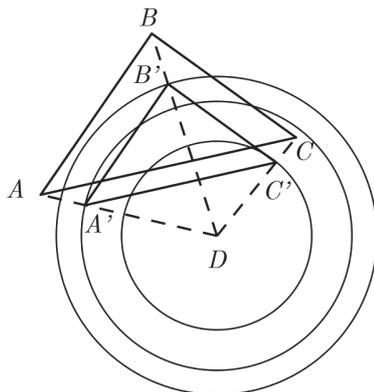
Enfin, dans le cas où aucun des procédés précédents n'a permis de parvenir à la solution d'un problème, il propose la « méthode inverse », qui consiste pour lui à « construire une autre figure, semblable à celle que l'on veut obtenir pour résultat ». Voici une application de sa méthode inverse :

25. Guibal, Charles François, *Conseils propres à faciliter la solution des problèmes de géométrie*, Nancy : Vve Raybois, 1846.

26. *Ibid.*, p. 1.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

Construire un triangle semblable au triangle ABC , et dont les sommets homologues soient placés respectivement sur trois circonf. concentriques de rayons donnés R, R', R'' .



Il commence par construire un point D dont les distances aux trois sommets A, B , et C soient dans le rapport des trois rayons R, R', R'' . Puis il trace du centre D trois cercles de rayons R, R', R'' . Le premier coupe DA en A' , le second coupe DB en B' et le troisième coupe DC en C' et par construction les lignes DA', DB' et DC' sont dans le même rapport que les lignes DA, DB et DC . Par conséquent, les lignes $A'B', B'C', A'C'$ sont parallèles respectivement aux lignes AB, BC, AC et donc le triangle $A'B'C'$ est semblable au triangle ABC .

Il est remarquable que Guibal emploie les mêmes termes que Lamé de « méthode inverse » et de « méthode directe ». A-t-il lu l'ouvrage de Lamé ? Ou bien ses idées lui sont-elles parvenues par personne interposée ? Quoi qu'il en soit, il n'est pas fidèle aux conceptions de Lamé, qu'il ne cite pas. En effet, il expose dans le cadre de sa « méthode directe » un problème résolu par la synthèse, ce que rejette Lamé. Ensuite, il qualifie d'« inverse » une méthode consistant à construire une figure semblable à la figure cherchée, là où justement Lamé avertit qu'il « ne faut pas confondre » sa méthode inverse avec la situation précédemment exposée où l'on est amené à construire directement une figure semblable à la figure cherchée. Le fait que les trois exemples que donne Lamé de l'application de sa méthode inverse aboutissent tous trois à la construction d'une figure semblable à la figure cherchée peut être à l'origine d'une confusion de la part de Guibal.

VII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

3.2 Percin (1848) : les méthodes en complément de la théorie

Percin, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nancy, édite quelques années après sa *Géométrie simplifiée*²⁷ un *Complément de géométrie ou recueil de questions et de problèmes*²⁸ destiné aux élèves préparatoires. Le troisième livre de ce *Complément* porte sur les problèmes, comme nous l'avons vu, et s'ouvre sur un paragraphe intitulé « Des méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie ». Percin invite à distinguer la solution proprement dite d'un problème, « c'est-à-dire, l'ensemble des opérations ou constructions qu'il faut effectuer pour arriver au résultat », du raisonnement qui mène à la solution de ce problème. Ce dernier peut être conduit selon deux méthodes. L'analyse est un raisonnement a priori, c'est la méthode d'invention de la solution. La synthèse est un raisonnement a posteriori, c'est la méthode de démonstration de la solution :

Si la synthèse a l'avantage d'être rigoureuse, elle a l'inconvénient de ne pas montrer la marche qui a été suivie pour arriver à la solution : or, comme il importe beaucoup que les élèves, destinés à étudier sérieusement les mathématiques, apprennent à résoudre seuls quelques problèmes, il est bon de les initier à la méthode analytique, qui est la plus propre à mettre en jeu leur sagacité, à développer leur intelligence et cet esprit d'investigation, si utile dans les diverses carrières où ils seront appelés²⁹.

Nous retrouvons dans ces recommandations la préoccupation déjà rencontrée chez Ritt pour le développement de l'intelligence de l'élève par la résolution de problèmes. Une intelligence qui sera « utile » au-delà du cadre de la géométrie. Percin considère aussi que l'exercice peut pallier l'absence de méthode complètement générale en géométrie élémentaire. « Il serait difficile, écrit-il, d'indiquer une méthode certaine et générale pour trouver la solution des problèmes ; l'exercice seul peut développer l'aptitude des élèves sous ce rapport ».

Percin compare d'ailleurs explicitement l'analyse algébrique et l'analyse géométrique :

27. Percin, J., *Géométrie simplifiée*, 2^e édition, Nancy : Grimblot, Raybois et C^{ie}, 1842.

28. Percin, J., *Complément de géométrie ou recueil de questions et de problèmes*, Nancy : Vve Raybois, 1848.

29. Percin, *Complément de géométrie*, p. 121.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

La méthode employée en algèbre pour résoudre les problèmes numériques est essentiellement analytique ; car la marche suivie pour mettre le problème en équation est absolument analogue à celle que nous avons tracée ici. Elle consiste en effet à supposer le problème résolu, c'est-à-dire, à imaginer que les nombres cherchés sont connus ; puis à indiquer sur eux et sur les données, toutes les opérations qu'il faudrait faire pour vérifier le problème.

Il relève cependant une différence essentielle entre ces deux méthodes :

Mais il y a, entre l'analyse algébrique et l'analyse géométrique, cette différence que, quand on est parvenu à mettre un problème en équation, l'algèbre fournit des procédés certains pour résoudre ces équations et pour déduire des inconnues les données, tandis qu'en géométrie, lors même qu'on est parvenu à déduire les données des inconnues, on n'est pas toujours certain de pouvoir faire les opérations inverses qui permettent de déduire les inconnues des données³⁰.

Prenons l'exemple du problème, résolu ci-dessus par Guibal, de l'inscription d'un triangle de forme donnée dans trois circonférences concentriques. Les données en sont les trois cercles et la forme du triangle cherché, et les inconnues en sont les positions sur ces cercles des sommets du triangle cherché. Il est aisé de retrouver les données à partir des inconnues : les positions des trois sommets étant déterminées, la forme du triangle est évidemment connue, et le centre des trois cercles peut être déterminé car les rapports de ses distances aux trois sommets sont égaux aux rapports des rayons des cercles correspondant. Pour autant, il n'y a pas de règle générale pour en déduire les inconnues à partir des données. La construction de Guibal recourt à un procédé particulier.

À défaut d'une méthode « certaine et générale » en géométrie élémentaire, il expose néanmoins, dans le cadre de la méthode analytique, quelques « règles » pouvant servir de guide. Elles sont au nombre de cinq :

- 1^{re} RÈGLE. *Supposer le problème résolu,*
- 2^e RÈGLE. *Ramener la question à ses termes les plus simples,*
- 3^e RÈGLE. *Mener des lignes auxiliaires,*
- 4^e RÈGLE. *Résoudre un problème inverse,*
- 5^e RÈGLE. *Construire une figure égale ou semblable.*

30. Percin, *Complément de géométrie*, p. 126.

VII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

La première de ces règles « a pour but de mettre en présence les inconnues et les données, pour faire ressortir les relations qui les lient les unes aux autres » : nous retrouvons le vocabulaire de l'analyse algébrique, comme chez Ritt. L'auteur recommande de faire un tracé, même approximatif, de la figure cherchée. La deuxième règle consiste à décider sur quels éléments de la figure cherchée va se concentrer l'attention : centre pour un cercle, deux points pour une droite, etc. La troisième règle consiste, lorsque cela s'avère nécessaire, à « tracer de nouvelles lignes, marquer de nouveaux points », pour faciliter le rapprochement entre les données et les inconnues. Ces trois premières règles sont générales, au contraire des deux suivantes, qui décrivent des procédés particuliers, sans que cela soit mentionné par Percin. Les quatrième et cinquième règles correspondent aux méthodes homonymes décrites par Lamé. Avant de donner les énoncés des problèmes du recueil, Percin présente encore les « lieux géométriques », qui n'ont donc pas le statut de règle ici. La description en est semblable à ce que nous avons déjà rencontré :

Pour déterminer un point inconnu, il faudra trouver deux lieux géométriques qui le contiennent ; et pour cela il faudra examiner si, des conditions du problème, il résulte, pour le point cherché, deux propriétés telles, que chacune prise en particulier appartienne à un lieu géométrique connu ; on construira alors les deux lignes qui représentent chacun de ces lieux, et leur intersection sera le point demandé³¹.

Les trois premières règles de Percin évoquent les étapes de l'analyse décrite par Ritt, tandis que les deux dernières, avec la description des lieux géométriques comme procédé, font écho à l'*Examen* de Lamé.

3.3 Amiot (1858)

Antoine Amiot, professeur de mathématiques au lycée Saint-Louis à Paris, rédige en 1858, avec son collègue Desvignes, des *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de géométrie*³². Ces solutions répondent aux problèmes posés dans les *Éléments de géométrie*³³ qu'il a publiés seul en 1855. Ces *Solutions raisonnées* s'ouvrent sur vingt pages d'« Observations

31. Percin, *Complément de géométrie*, p. 129.

32. Amiot, Desvignes, *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de géométrie*, Paris : Dézobry, Magdeleine et C^{ie}, 1858

33. Amiot, A., *Éléments de géométrie*, Paris : Dézobry, Magdeleine et C^{ie}, 1855.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

sur la résolution des problèmes de géométrie », dont les premières lignes sont une citation de l'*Examen* de Lamé :

Il est impossible de donner une méthode générale pour trouver complètement par une analyse purement géométrique la solution d'un problème de géométrie, quel qu'il soit [...] Cependant il existe des principes à suivre qui, sans être généraux, offrent peu d'exceptions, des périodes qui sont communes à la recherche d'un grand nombre de problèmes, et qui doivent par conséquent être conduites de la même manière³⁴.

Les auteurs décrivent dans la suite quatre méthodes de résolution des problèmes de construction. Ils commencent par décrire la méthode des lieux géométriques, qui sont, écrivent-ils, d'un emploi « continu dans la résolution des problèmes de géométrie ». Cette méthode est décrite de façon plus systématique que ne l'ont fait les auteurs précédemment étudiés :

Lorsque la résolution d'un problème ne dépend que de la détermination d'un point, son énoncé renferme deux conditions qui fixent la position de ce point. Si l'on fait abstraction de l'une de ces conditions, le point cherché peut prendre sur le plan de la figure une infinité de positions qui sont déterminées par l'autre condition, et dont l'ensemble forme un lieu géométrique du point. En considérant isolément, à son tour, la condition omise, on voit que le point inconnu décrirait sur le même plan un second lieu géométrique, relatif à cette condition ; par conséquent, il se trouve à l'intersection de deux lieux géométriques³⁵.

Cette description de la méthode des lieux géométriques prescrit la construction d'un lieu, là où Ritt, Guibal et Percin ne font que constater que le point cherché appartient à un lieu connu. Amiot et Desvignes affirment que la suppression d'une condition sur un point déterminé le conduit à décrire un lieu géométrique. Le problème suivant, posé sans succès au concours général de 1814 pour les classes de mathématiques élémentaires, et traité par la trigonométrie dans l'*Examen* de Lamé³⁶, montre comment cette conception les amène à construire un lieu géométrique nouveau lorsqu'il est nécessaire à la

34. Amiot, Desvignes, *Solutions raisonnées*, p. 1.

35. Amiot, Desvignes, *Solutions raisonnées*, p. 6.

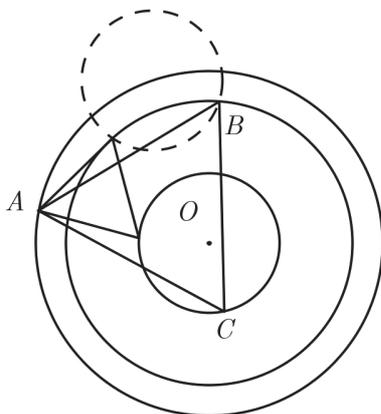
36. Barbin, « L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé », in Barbin, *Gabriel Lamé. Les pérégrinations d'un ingénieur du XIX^e siècle*, Sabix, École Polytechnique, 2009, p. 101-111.

VII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

résolution d'un problème, et non plus seulement lorsqu'il est connu par une proposition de géométrie.

Inscrire un triangle équilatéral ABC dans trois circonférences concentriques OA, OB, OC ³⁷.

Le sommet A étant fixé sur l'une des circonférences, le point B doit appartenir à la circonférence OB . Pour obtenir un second lieu géométrique du point B , Amiot fait abstraction de cette condition. Le triangle équilatéral ABC est alors variable, et le point B décrit un second lieu géométrique, composé de deux circonférences. L'intersection de ce lieu avec la circonférence OB détermine quatre solutions du problème. Nous avons représenté deux d'entre elles.



La deuxième méthode exposée par Amiot et Desvignes s'intitule « méthode des figures semblables ». Elle consiste « à tracer une figure semblable à la figure cherchée »³⁸. Entre autres exemples, les auteurs résolvent le problème rencontré dans l'ouvrage de Lamé de la construction d'un triangle connaissant ses trois hauteurs. Le problème de l'inscription d'une figure dans une autre, traité par Lamé par la méthode qu'il appelle inverse, est intégré dans le cadre de cette méthode des figures semblables.

La troisième méthode est la « réduction d'un problème à un autre problème plus simple », le cas échéant en traçant des lignes auxiliaires, dont la détermination est le fruit d'une « heureuse inspiration » qui vient d'autant mieux « aux personnes qui se sont exercées longtemps à la résolution

37. Amiot, Desvignes, *Solutions raisonnées*, p. 7.

38. *Ibid.*, p. 9.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

de problèmes »³⁹. Un exemple est donné avec une démonstration élégante du problème de Castillon qui demande d'inscrire dans un cercle donné un triangle dont les trois côtés, prolongés s'il le faut, passent par trois points donnés. Il est à noter que cette méthode, qui n'est autre qu'une analyse géométrique, arrive ici en troisième position alors qu'elle était présentée en tête dans les ouvrages de Lamé, de Ritt, et de Percin. Comme dans l'opuscule de Guibal, les lieux géométriques sont placés en premier. Une méthode particulière mais efficace se voit ainsi donner la priorité sur une méthode générale mais qui n'indique pas la marche à suivre.

La quatrième méthode est l'emploi de l'algèbre, qui consiste ici aussi à désigner les données et les inconnues par des lettres, et à écrire entre elles des équations en faisant usage des théorèmes de la géométrie. La suite de l'ouvrage est l'exposé des solutions, livre par livre, des problèmes donnés dans ses *Éléments de géométrie*.

3.4 Comberousse (1861)

Charles de Comberousse, professeur de mathématiques au Collège Chaptal, répétiteur et examinateur d'admission à l'École centrale des arts et manufacture, dont il est lui-même issu (promotion 1850), publie entre 1860 et 1862 un *Cours de mathématiques*⁴⁰ contenant toutes les parties nécessaires aux candidats à l'École centrale des arts et manufacture. À la fin de la Géométrie plane, contenue dans le deuxième tome de son *Cours*, se trouve un complément qui expose les « Principes généraux relatifs à la résolution des problèmes ». Comberousse présente d'abord les deux méthodes que sont l'analyse et la synthèse, en affirmant que seule l'analyse permet de trouver la démonstration d'une proposition. L'objet de ce chapitre est alors d'indiquer les principales « méthodes particulières qui s'appliquent plus directement à certaines classes de questions » :

Pour résoudre les problèmes de géométrie, il est impossible d'indiquer une méthode générale et certaine. La nature des problèmes qu'on peut poser est trop variable, pour que la solution puisse être à coup sûr obtenue en suivant une marche déterminée. Cependant il existe des méthodes particulières qui s'appliquent plus

39. *Ibid.*, p. 14.

40. de Comberousse, Charles, *Cours de mathématiques*, Paris : Mallet-Bachelier, 1860 - 1862.

VII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

directement à certaines classes de questions ; et si l'on sait discerner à quelle catégorie appartient le problème dont on s'occupe, on a déjà fait un grand pas vers la solution, puisque la manière dont les choses doivent être dirigées se trouve connue d'avance⁴¹.

Comberousse adopte la notion de classe de questions, qui suggère de concevoir les problèmes comme pouvant être regroupés selon la méthode permettant leur résolution, sans donner, néanmoins, d'éléments sur la façon d'opérer ce discernement. Ici Comberousse renvoie à deux ouvrages, celui de Lamé d'une part, et d'autre part celui de Serret, *Des méthodes en géométrie*⁴², publié quelques années plus tôt en 1855. Il décline un nombre de méthodes spéciales plus important que ses prédécesseurs. Chacune est illustrée par quelques exemples.

1. Méthode des substitutions ;
2. Méthode par symétrie ;
3. Méthode des figures semblables ;
4. Méthode par inversion ;
5. Méthode des relations auxiliaires ;
6. Méthode par projection ;
7. Méthode de réduction à l'absurde et méthode des limites ;
8. Méthode des lieux géométriques ;
9. Algèbre.

Les méthodes des substitutions et par symétrie correspondent aux deux premières méthodes décrites par Serret. Les méthodes des figures semblables, des lieux géométriques et par l'algèbre correspondent par exemple à ce que présente Amiot. La méthode par inversion est celle dite du problème inverse par Lamé. La méthode des relations auxiliaires consiste comme chez Serret « à faire intervenir des surfaces ou des volumes pour trouver une relation entre lignes, des lignes ou des volumes pour trouver une relation entre surfaces, des lignes ou des surfaces pour trouver une relation entre volumes ». Comberousse donne en exemple :

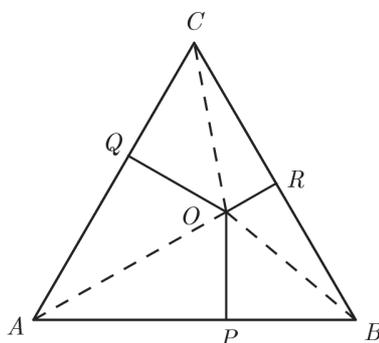
41. de Comberousse, Charles, *Cours de mathématiques*, tome 2, Paris : Mallet-Bachelier, 1861, p. 224.

42. Serret, Paul, *Des méthodes en géométrie*, Paris : Mallet-Bachelier, 1855.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

La somme des perpendiculaires abaissées d'un point O pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC , sur ses trois côtés, est constante⁴³.

En effet, notant c le côté et h la hauteur du triangle, la somme des aires des trois triangles en joignant O aux trois sommets A , B et C est égale à $\frac{c}{2}(OP + OQ + OR)$ qui est aussi égal à l'aire $\frac{ch}{2}$ du triangle ABC . D'où $(OP + OQ + OR) = h$. Une relation entre des lignes a été déduite d'une relation entre des aires.



Pour appliquer la méthode par projection, « on regarde la figure plane qui répond au problème proposé, comme la projection d'une certaine figure de l'espace ; et ce rapprochement permet d'arriver rapidement à la solution de la question ». Cette méthode est directement inspirée de la géométrie descriptive. Voici l'exemple qu'en donne Comberousse :

Étant données deux droites dont le point de concours est inaccessible ou inconnu, mener par un point donné c une troisième droite dont la direction passe par ce point de concours⁴⁴.

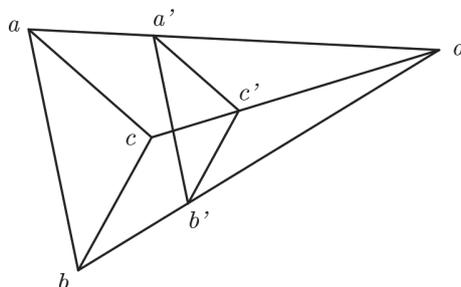
Notons aa' et bb' les droites données, et c le point donné. La figure solution est regardée comme la projection d'une pyramide triangulaire de base abc . Le tracé des parallèles $a'c'$, $c'b'$ et $a'b'$ aux trois lignes ac , cb et ab dessine une section de cette pyramide et le point c' appartient à l'arête co .

La méthode de réduction à l'absurde est connue. Quant à la méthode des limites, elle sert en particulier à « étendre aux lignes courbes les théorèmes applicables aux lignes brisées ». Comberousse donne en exemple la mesure du

43. Comberousse, *Op. Cit.*, p. 229.

44. *Ibid.*, p. 230.

VII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



cercle au moyen de son rayon R , égale à $2\pi R \times \frac{R}{2}$, déduite du fait que l'aire d'un polygone régulier est constamment égale au produit de son périmètre par la moitié de son apothème.

3.5 Conclusion

Les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire que nous venons d'étudier convergent sur un certain nombre de points. Ils accordent une importance de premier plan à la résolution de problèmes. Le complément de géométrie de Comberousse dont il vient d'être question commence par ces mots : « La résolution des problèmes est extrêmement importante ». C'est la résolution des problèmes, et plus encore la recherche des solutions, qui développe l'intelligence, pour résoudre de nouveaux problèmes de géométrie autant que pour résoudre des problèmes liés aux différentes carrières d'ingénieurs. Dans ces conditions, la faculté à résoudre des problèmes devient un objectif majeur de l'enseignement de la géométrie.

Cet intérêt pour la résolution de problèmes met les auteurs face à la question de la méthode : comment aborder un problème encore inconnu ? Dépassant progressivement l'ancien clivage entre synthèse et analyse, ceux qui entreprennent de répondre à cette question affirment l'impossibilité d'énoncer une seule méthode d'invention générale pour résoudre tous les problèmes de géométrie élémentaire. Cette impossibilité les pousse à envisager des méthodes particulières, une expression qui peut sembler contradictoire à qui associe les notions de méthode et de généralité. Ces méthodes particulières consistent en procédés d'investigation susceptibles d'être appliqués à un nombre de problèmes à la fois conséquent mais restreint et indéfini. Ces méthodes sont, outre l'emploi de l'algèbre et l'analyse géométrique, la méthode des lieux géométriques, la méthode du problème contraire, la méthode des fi-

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

gures semblables, et encore, dans l'ouvrage de Comberousse inspiré de celui de Serret, la méthode par symétrie, la méthode des relations auxiliaires, la méthode des projections, la méthode de réduction à l'absurde et la méthode des limites.

Par ailleurs, rien n'indique, face à un problème nouveau, le choix de la méthode qui doit être effectué. L'*Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* de Gabriel Lamé, qui développe dès 1818 la notion de méthode particulière et l'idée de classer les problèmes selon leur moyens de résolution, constitue une référence forte pour ces auteurs qui en reprennent les méthodes, les problèmes, et la terminologie. Après 1855, Comberousse reprend aussi certaines des méthodes recensées par Serret.

Cette notion de « méthodes particulières » entretient un lien étroit avec les problèmes. C'est à partir du classement de ces derniers par la similitude des moyens employés à leur résolution que sont construites les différentes méthodes particulières. Dans le même temps, la résolution des problèmes permet d'illustrer les méthodes et d'en montrer l'efficacité.

4 Les méthodes particulières dans les ouvrages de géométrie analytique

Nous avons établi déjà plusieurs éléments concernant les problèmes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique dans cette deuxième période. Certains abordent la résolution des problèmes déterminés, mais ce choix n'est pas général, et en particulier il n'est pas repris par les programmes de mathématiques spéciales de 1852. Ces ouvrages font apparaître des listes de questions résolues ou bien à résoudre, listes qui semblent s'allonger lorsqu'on avance dans la période. Deux ouvrages, ceux de Ritt et de Jacob, se démarquent des ouvrages contemporains par l'intérêt porté à la construction graphique des courbes du second degré.

Qu'en est-il de la méthode pour résoudre les problèmes en géométrie analytique ? Nous avons montré là aussi que, pour ce qui concerne la méthode de démonstration des propriétés des coniques, les méthodes générales sont peu à peu introduites en amont de l'étude particulière des sections coniques. Mais à propos de la résolution des problèmes, comment opérer la mise en équation ? Comment organiser ensuite la résolution de ces équations ?

Deux auteurs abordent ces questions. Cirotte expose un principe que

VII.4 Les méthodes particulières dans les ouvrages de géométrie analytique

nous avons rencontré dans l'*Arithmétique universelle* de Newton ainsi que dans le *Cours* de Bézout pour obtenir des équations plus faciles à résoudre, et Briot et Bouquet déclinent des procédés particuliers qui simplifient là aussi la résolution des équations.

4.1 Cirodde (1848) : Quelle méthode pour mettre les questions en équation ?

Cirodde, professeur au Collège Henri IV, affirme dans ses *Leçons de géométrie analytique* de 1848 qu'« il n'existe point de règle fixe et déterminée pour mettre en équation les problèmes de géométrie », et rédige ainsi « tout ce qu'on peut dire de plus général sur ce sujet » :

Commencer par examiner avec soin quelles sont les quantités dont la connaissance conduirait à la détermination de toutes celles que l'on cherche : ce seront là les véritables inconnues de la question proposée. Supposant ensuite le problème résolu, tirez toutes les droites connues et inconnues dans la position qu'elles doivent occuper les unes à l'égard des autres, ainsi que les lignes auxiliaires qui vous paraîtront nécessaires, pour établir leur dépendance mutuelle ; représentez les longueurs des données par les premières lettres de l'alphabet, et celles des inconnues par les dernières ; puis, sans faire aucune distinction entre les unes et les autres, écrivez les équations qui d'après l'énoncé du problème, et d'après les théorèmes de la géométrie et de la trigonométrie, lient les différentes lignes entre elles : vous formerez ainsi autant d'équations qu'en comporte la nature de la question proposée, et le nombre de ces équations sera égal à celui des inconnues, si cette question est déterminée.

En se conformant exactement à cette règle, on parviendra toujours à mettre les problèmes de géométrie en équation ; mais ce qui fait l'art de l'analyste, c'est de découvrir la route la plus expéditive pour passer des valeurs données à celles des inconnues⁴⁵.

Cirodde décrit ce que nous avons appelé l'analyse algébrique des figures. Le constat est semblable à celui que livre Biot dans son *Essai de géométrie analytique* :

45. Cirodde, *Op. Cit.*, p. 113.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

Ce qui exige une adresse particulière, ce qui fait proprement l'art de l'analyste, c'est de découvrir la route la plus expéditive pour passer des connues aux inconnues, et de saisir, parmi tous les rapports qui les unissent, ceux qui sont le plus propres à être exprimés par le calcul⁴⁶.

Mais rappelons que Biot fait un choix tout différent :

J'entends, par cette dénomination [la Géométrie analytique], la manière d'appliquer l'algèbre à la géométrie, non pas à l'aide de constructions particulières, qu'il faut varier pour tous les cas, mais en employant les méthodes générales que MM. Lagrange et Monge ont les premiers fait connaître dans leurs ouvrages⁴⁷.

Ces méthodes générales consistent à écrire les équations des lignes de la figure, nous avons appelé cette méthode l'analyse algébrique des coordonnées.

Pour découvrir la « route la plus expéditive », Cirodde conseille de commencer par observer le nombre de solutions dont le problème est susceptible, pour choisir comme inconnues les quantités qui, dans les diverses solutions possibles, prennent le plus petit nombre de valeur. Ce choix mène, en général, à des équations de degré moindre. Cette règle correspond à celle qui est énoncée dans l'*Arithmétique universelle* de Newton, et dont nous avons vu dans la première partie qu'elle est présente dans les ouvrages de Laplace, Bézout et Tédénat. D'ailleurs elle est mise en œuvre tout particulièrement sur le problème choisi pour l'illustrer tant par Newton que par Bézout :

37. Par un point A donné à égale distance de deux droites rectangulaires Xx et Yy , mener une sécante telle que la partie interceptée par ces droites soit égale à une droite donnée m ⁴⁸.

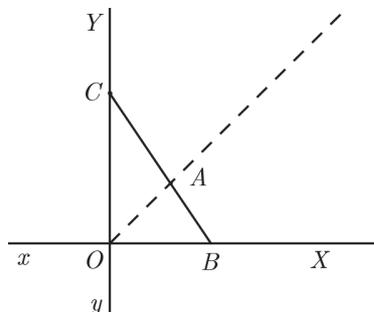
Cirodde commence par justifier, en faisant tourner la sécante autour du point A , que le problème est susceptible de 2, 3, ou 4 solutions. Il envisage plusieurs choix d'inconnue. Certains, comme la distance OB ou la distance AB , mèneraient à une équation du quatrième degré. D'autres choix sont possibles, comme l'angle que la sécante forme avec xX ou celui qu'elle forme avec OA . Le choix la tangente de l'angle ABX , ou de l'inclinaison de la sécante sur OA mèneraient encore à une équation du quatrième degré mais qui serait cette fois réductible à deux équations du second degré du fait de

46. Biot, *Essai de géométrie analytique*, Paris : Klostermann, 1810, p. 4.

47. Biot, *Essai de géométrie analytique*, p. v.

48. Cirodde, *Op. Cit.*, p. 120.

VII.4 Les méthodes particulières dans les ouvrages de géométrie analytique



la symétrie du problème. Cirodde évoque encore la solution de Newton dans l'*Arithmétique universelle*, qui prend comme inconnue la distance de A au milieu de BC et aboutit à une solution réductible au second degré. Enfin, il retient une solution qu'il attribue à Gergonne, et qui prend pour inconnue la perpendiculaire OR abaissée du point O sur la sécante. Il développe complètement cette dernière solution.

Cirodde formalise donc un discours sur la manière de résoudre un problème de géométrie par l'application de l'algèbre qui s'appuie sur des références relativement anciennes, à savoir les textes de Newton et Gergonne. Il applique ces considérations à la résolution de quelques problèmes :

32. PROBLÈME. Incrire dans un triangle donné ABC un rectangle qui soit semblable à un rectangle donné $OPQR$, et dont la base repose sur un des côtés de ce triangle.

33. PROBLÈME. Partager une droite donnée en moyenne et extrême raison.

39. PROBLÈME. Incrire dans un triangle ABC un rectangle tel qu'en le faisant tourner autour du côté commun CB , l'aire totale du cylindre ainsi engendré soit égale à celle d'une sphère donnée dont le rayon est r ⁴⁹.

4.2 Les « procédés particuliers » de Briot et Bouquet

Les *Leçons nouvelles de géométrie analytique* de Briot et Bouquet, qui paraissent en 1847, se terminent par un chapitre intitulé « Des problèmes déterminés » qui fait état de considérations intéressantes quant à la notion de méthode en géométrie analytique. Les auteurs critiquent, pour la résolution

49. Cirodde, *Op. Cit.*, p. 114.

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

des problèmes, l'emploi de la méthode des coordonnées :

Avant l'invention de Descartes, chaque problème de géométrie se résolvait par un procédé spécial ; la représentation des figures par des équations donne une méthode uniforme applicable à toutes les questions géométriques [...] Si, au fur et à mesure, on cherche les équations de toutes [les] lignes, la vérification du théorème ou la détermination des inconnues du problème sera évidemment ramenée à une simple question algébrique [...] Mais cette méthode n'est pas toujours la plus simple, et dans beaucoup de cas il vaut mieux recourir à des procédés particuliers⁵⁰.

Les auteurs opposent à la méthode des coordonnées le recours à des procédés particuliers. Le premier d'entre eux n'est autre que ce que nous avons appelé l'analyse algébrique des figures. Le problème donné en exemple est celui de « trouver les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant la surface et le périmètre ». Appelant a le périmètre, S la surface, x et y les deux côtés de l'angle droit et z l'hypoténuse, les équations suivantes sont obtenues immédiatement :

$$\begin{cases} x + y + z & = a \\ x^2 + y^2 & = z^2 \\ xy & = 2S \end{cases}$$

Par une « combinaison convenable », Briot trouve que $z = \frac{a^2 - 4S}{2a}$. D'où il déduit que x et y sont les racines de l'équation $u^2 - \frac{a^2 + 4S}{2a}u + 2S = 0$.

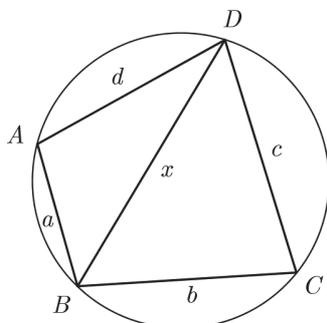
Le second procédé que décrit Briot s'intitule « inconnues auxiliaires » ; il intervient lorsque l'on « ne connaît pas de relation immédiate entre les éléments de la figure qui entrent dans l'énoncé » et consiste à employer « une ou plusieurs inconnues auxiliaires que l'on choisit dans la figure ». Ces inconnues sont éliminées ensuite lors du calcul algébrique. L'exemple donné est celui du calcul de la diagonale d'un quadrilatère inscrit dont on connaît les quatre côtés.

L'introduction comme inconnues auxiliaires des deux angles opposés A et C permet d'écrire les équations :

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$$

50. Briot, Bouquet, *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, 2^e édition, Paris : Dézobry et Magdeleine, 1851, p. 213.



$$A + C = \pi \quad \text{ou} \quad \cos A = -\cos C$$

L'élimination des inconnues auxiliaires A et C donne alors $x^2(ad + bc) = (ac + bd)(cd + ab)$, et donc la valeur de x est connue.

La suite du chapitre consiste en diverses considérations sur la résolution des problèmes déterminés. Il est question des « différents cas d'une même question », lorsque plusieurs figures sont susceptibles de répondre à une même question, de « généralisation », lorsque l'analyse algébrique produit davantage de solutions que n'en possède le problème, de symétrie des équations, de construction des formules et de résolution graphique des équations.

Briot oppose à la la méthode des coordonnées, qui est générale, les méthodes particulières de l'analyse algébrique des figures, qui sont simples, au sens où elles mènent à des équations plus faciles à résoudre.

5 Conclusion

La question de la méthode à employer pour résoudre les problèmes de géométrie est traitée dans cette deuxième période dans plusieurs ouvrages d'enseignement. Elle est même l'objet d'un long développement dans les *Problèmes de géométrie* de Ritt.

En géométrie élémentaire, si les deux méthodes générales propres au raisonnement mathématiques le plus souvent évoquées restent l'analyse et la synthèse, plusieurs auteurs déclinent des méthodes particulières, c'est-à-dire des procédés applicables à une classe de problèmes à la fois élargie et non circonscrite. Les méthodes, la terminologie et les énoncés de l'*Examen* de Gabriel Lamé se retrouvent dans ces ouvrages, dont plusieurs le citent. Les méthodes décrites sont, outre l'analyse géométrique et l'analyse algébrique des

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

figures, la méthode du problème contraire, la méthode des figures semblables et la méthode des lieux géométriques. Celle-ci est présentée en premier dans les *Solutions raisonnées* d'Amiot et Desvignes, ce qui montre l'intérêt porté à l'efficacité de cette méthode particulière. Comberousse ajoute à ces méthodes certaines de celles présentées dans l'ouvrage de Serret, *Des méthodes en géométrie*.

En géométrie analytique, seuls deux ouvrages abordent la question de la méthode de résolution des problèmes. Cirodde restitue un principe dû à Newton pour obtenir des équations simples et Briot et Bouquet opposent à la généralité de la méthode des coordonnées, la simplicité de l'analyse algébrique des figures.

6 Conclusion de la deuxième partie

Nous avons montré comment Michel Chasles aborde la question de la généralité de manière tout à fait différente dans ses deux ouvrages, *l'Aperçu historique* et le *Traité de géométrie supérieure*. Dans le premier, il s'attache à montrer la puissance d'invention des nouvelles théories de la géométrie rationnelle, caractérisées par leur fécondité, leur simplicité et leur généralité, au sens où leurs résultats sont susceptibles d'être étendus à une classe élargie de figures et de situations. Dans le second, il organise les propositions de cette géométrie rationnelle relatives à la ligne droite et au cercle de façon déductive, par une méthode uniforme de démonstration, grâce à l'emploi de notions construites à partir de la notion de rapport anharmonique, l'involution et l'homographie. Les propositions établies sont générales, cette fois en ce qu'elle concernent d'emblée une grande diversité de figures et de situations.

Auguste Comte, attaché aux conceptions cartésiennes, considère quant à lui que la recherche de la généralité est l'essence même de la géométrie analytique, au service de laquelle l'algèbre est un simple moyen. Une question de géométrie doit être traitée de la façon la plus générale, c'est-à-dire dans le cadre le plus étendu possible. Il propose dans son *Traité élémentaire de géométrie analytique* une organisation nouvelle de cette matière, selon des questions fondamentales, résolues par des méthodes générales. Il s'agit des problèmes des tangentes, des asymptotes, des diamètres, des centres, de la similitude des courbes, de la quadrature des courbes. La généralité de Comte est exigeante, elle impose de circonscrire exactement le domaine d'application de la méthode décrite.

VII.6 Conclusion de la deuxième partie

Certains ouvrages d'enseignement secondaire de la géométrie intègrent, le plus souvent à la marge, des notions de géométrie rationnelle — quadrilatère complet, axe radical, pôle et polaire, rapports harmonique et anharmonique. Il s'agit aussi bien d'ouvrages de géométrie élémentaire que d'ouvrages de géométrie analytique, ces derniers présentant ces notions parfois dans le cadre de la géométrie pure et parfois dans le cadre de la géométrie analytique. Le plus souvent, l'introduction de ces notions est associée à la résolution de problèmes pour les candidats aux Écoles du gouvernement. Relativement à la puissance d'invention des méthodes de géométrie rationnelle mise en évidence dans l'*Aperçu* de Chasles, un complément de la deuxième édition des *Leçons nouvelles de géométrie analytique* de Briot et Bouquet illustre la diversité des moyens d'invention du géomètre, en mêlant les approches géométrique et analytique. Relativement à l'uniformité de la méthode de démonstration opérée dans le *Traité* de Chasles, Antoine Amiot entreprend dans ses *Nouveaux éléments de géométrie* une réorganisation de la géométrie élémentaire qui intègre certaines notions récentes de géométrie rationnelle.

Suite aux programmes contraignants de 1852, qui n'intègrent pas ces notions de géométrie rationnelle, elles disparaissent des manuels pendant une décennie, jusqu'à la publication du *Cours* de Charles de Comberousse.

En revanche, l'exigence de généralité telle que Comte la défend progresse, peu à peu et partiellement, dans les ouvrages de géométrie analytique comme dans les programmes officiels, en abordant les théories générales avant de les mettre en œuvre dans le cas particulier de l'étude des sections coniques et des surfaces du second degré.

En géométrie élémentaire, les énoncés de questions à résoudre ont pris une ampleur remarquable, au sein de listes de plusieurs centaines d'énoncés adjointes aux ouvrages d'enseignement ou bien résolues dans des recueils dédiés. Il s'agit de problèmes graphiques, de problèmes numériques, de lieux géométriques à déterminer et de théorèmes à résoudre. Ils sont organisés selon le type de figure concerné, ou selon l'ordre des *Éléments* de Legendre. Les intentions des auteurs, en donnant des questions à résoudre, sont de nature différente. Ils souhaitent entraîner les élèves en vue des concours et examens, éclairer la théorie, développer l'esprit d'invention, ou encore montrer les applications de la théorie.

Les constructions graphiques occupent en géométrie élémentaire des chapitres à part et bien identifiés, en particulier dans les programmes. Elles sont souvent, et dans les différents niveaux d'enseignement, l'occasion de la description des instruments employés pour les effectuer. Elles ne sont pas

CHAPITRE VII. LA MÉTHODE ET LES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

étrangères aux ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique, où elles apparaissent pour la résolution des problèmes de construction ou pour la construction par points des coniques ; en particulier les deux ouvrages d'application de l'algèbre à la géométrie de Georges Ritt et de Christophe Charles Jacob, sont largement orientés vers la construction des coniques par points, chez Ritt pour la résolution des problèmes par intersection de courbes. Les programmes de mathématiques spéciales de 1852 prescrivent notamment la construction des solutions des équations.

Quelques ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire et de géométrie analytique abordent la question de la méthode à suivre pour résoudre les problèmes et y répondent par la description de méthodes particulières, c'est-à-dire applicables à une classe de questions étendue mais non circonscrite. En géométrie élémentaire, les auteurs concernés s'inspirent largement de l'*Examen* de Gabriel Lamé, et, après 1855, de l'ouvrage de Serret *Des méthodes en géométrie*. En géométrie analytique, Briot et Bouquet opposent la simplicité de l'analyse algébrique des figures à la généralité de la méthode des coordonnées.

Faut-il penser que ce développement de la présence des problèmes dans les ouvrages d'enseignement traduit une évolution des pratiques enseignantes dans les classes ? Les auteurs, qui sont presque toujours des enseignants, ne sont pas explicites, au moins au sein de leurs ouvrages, quant à l'usage qu'ils font des problèmes dans le cadre de leurs cours. Dans les classes de mathématiques spéciales, par exemple, les cours semblent essentiellement magistraux⁵¹. L'absence de pratique étant préjudiciable aux élèves candidats aux écoles du gouvernement, dont le recrutement repose avant tout sur une performance orale, cette situation explique en partie le succès des institutions préparatoires privées qui entraînent leurs pensionnaires à répondre à des questions au tableau, c'est-à-dire à restituer le cours mais aussi à résoudre des problèmes.

51. Belhoste, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIX^e siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, 90, 2001, p. 101-130.

Troisième partie

Normalisation de la place des
problèmes dans les manuels et
développement des ouvrages
portant sur les méthodes
(1865-1891)

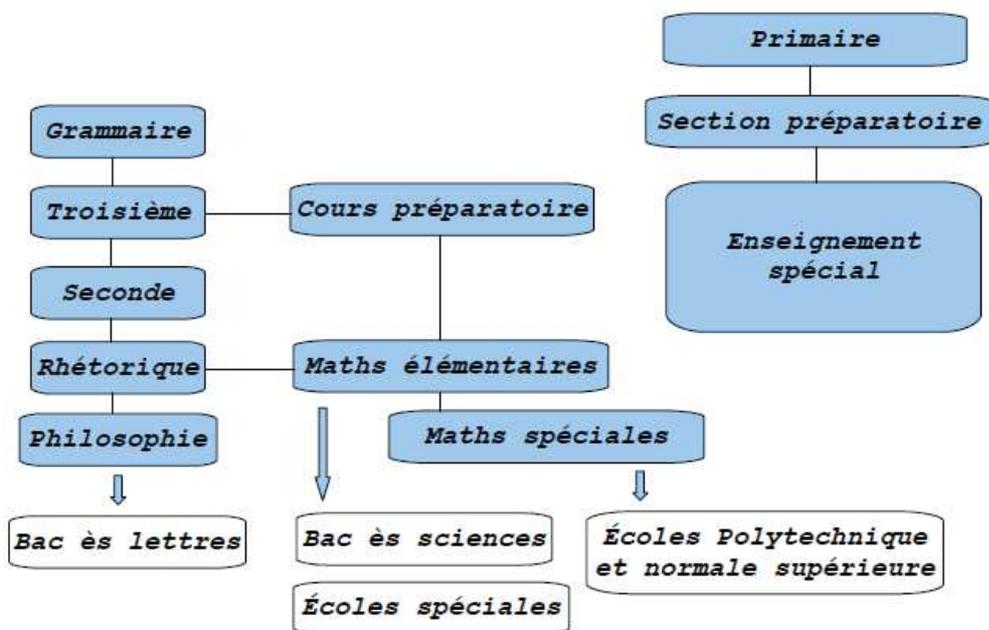
Introduction

La réforme de la bifurcation, abandonnée à la fin de période précédente, a toutefois pourvu l'enseignement scientifique des lycées des moyens d'affirmer son autonomie⁵². Les caractéristiques de l'enseignement mathématique voulues par cette réforme furent la simplicité et l'évidence en référence aux ouvrages de Clairaut et de Bézout, et contre les excès de rigueur taxés de sophismes. Nous allons voir que, lors de cette troisième période, l'enseignement des sciences est associé dans les textes officiels au développement de la faculté de raisonnement, avec l'idée que cette faculté est particulièrement développée par la résolution des exercices.

Le ministre Duruy revient largement en 1865 à la situation d'avant 1852 avec un enseignement secondaire classique, dominé par l'enseignement du latin, à côté duquel il organise un enseignement secondaire spécial volontairement pratique et professionnel, à destination des futurs industriels, négociants et agriculteurs. Les sciences y occupent une place prépondérante. L'enseignement spécial est un succès : il représente la moitié des élèves du secondaire parisien dans les années 1870. Peu à peu, les responsables de cet enseignement parallèle obtiennent l'égalité en réputation avec l'enseignement classique. En 1881, un baccalauréat de l'enseignement spécial permet d'accéder aux Facultés de sciences et de médecine, puis en 1886 aux examens de Saint-Cyr et de l'École polytechnique. Le concours général prévoit lui aussi un sujet pour les élèves de l'enseignement spécial. Avec ce mouvement, le caractère pratique de l'enseignement spécial s'estompe.

Du point de vue institutionnel, la politique de Duruy poursuit celle entamée lors de la réforme de la bifurcation, c'est-à-dire que les programmes sont très détaillés, et qu'un contrôle rigoureux de leur strict respect est assuré par les inspecteurs. Les programmes de mathématiques de l'enseignement classique sont les suivants :

52. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, tome 1 : 1789 - 1914*, p. 48.



Classe	Contenus
Division de grammaire 4 ^e	Éléments d'Arithmétique et notions préliminaires de Géométrie
Division supérieure 3 ^e	Arithmétique et Géométrie plane
Seconde	Éléments d'Algèbre et de Géométrie
Rhétorique	Les corps ronds
Philosophie	Reprise des matières déjà enseignées

Ils sont organisés de manière à conserver le plus longtemps possible les élèves se destinant aux carrières professionnelles ou aux concours spéciaux. Le cours préparatoire, qui permet de passer de la troisième à la classe de mathématiques élémentaires, doit rester une exception. Cet enseignement des sciences « sera dirigé de manière à développer progressivement la faculté du raisonnement », écrit le Ministre. « Il s'agit bien plus d'une discipline pour l'esprit que d'un entassement de connaissances ; l'essentiel est toujours de stimuler l'initiative intellectuelle ». En classe de troisième, « les rédactions seront courtes, les exercices d'application nombreux et soigneusement gradués ». En seconde et en rhétorique, le professeur tiendra « tous les esprits

en haleine par des exercices appropriés et des interrogations multipliées »⁵³. Enfin, une attention particulière est portée aux examens et concours, et le professeur doit réserver six semaines à la fin de l'année pour des révisions en vue de leur préparation.

Ce programme évolue peu jusqu'à la réforme de Jules Ferry en 1880. Les sciences obtiennent alors une place plus importante dès les premières classes de la division de grammaire. Les blocs constitués par les différentes parties des mathématiques, Arithmétique, Géométrie, Algèbre, encore très compacts dans la période précédente, sont peu à peu découpés entre les classes successives. Plutôt que de traiter entièrement et dans un seul niveau un ou deux de ces blocs, quitte à les reprendre dans une classe ultérieure, ils sont scindés en parties successives. « L'expérience a démontré qu'il n'y a pas de succès à espérer dans l'étude des sciences exactes, et particulièrement de la géométrie, sans plusieurs années d'un enseignement progressif et continu » écrit le ministre Duruy en 1863⁵⁴.

Le ministre veut favoriser le développement de classes préparatoires dans les lycées. Il demande aux recteurs de regrouper dans quelques lycées les élèves se préparant aux Écoles du gouvernement pour leur offrir les meilleures conditions possibles de préparation et contrer ainsi la concurrence d'écoles préparatoires privées prospères comme les institutions Sainte-Barbe et Sainte-Geneviève. Les injonctions du ministre précisent l'organisation nécessaire à une bonne préparation au sein de ces classes :

Répétitions et interrogations multipliées, présence continue d'un professeur pour répondre à toutes les questions, lever tous les doutes, et remettre en marche l'élève qu'un obstacle arrêterait ; réduction de la durée de chaque classe, mais augmentation du nombre des classes ou des conférences pour chaque journée ; épreuves répétées, de même nature que celles de l'examen véritable ; nécessité enfin d'entraîner l'élève au but, comme malgré lui, par la multiplicité et l'insistance des soins qui lui seront donnés⁵⁵.

Cette organisation est doublée de recommandations pédagogiques :

On ne fera rédiger que les parties du cours essentielles sous le

53. « Instructions sur l'enseignement scientifique dans les lycées », *Bulletin administratif*, 2, tome 4, p. 548, in Belhoste, *Op. Cit.*, p. 410.

54. *Circulaires et instructions officielles relatives à l'instruction publique*, tome sixième, Paris : Delalain, 1870.

55. *Ibid.*, p. 409.

rapport de la méthode ; mais on sera exigeant pour la forme de ces rédactions ; les exercices seront nombreux, et toujours corrigés avec soin. Le professeur insistera sur la discussion des problèmes, parce que cet exercice est le plus profitable de tous pour familiariser les élèves avec les vraies méthodes scientifiques et pour donner à leur esprit de la souplesse et de l'activité inventive⁵⁶.

Le programme de la classe de mathématiques élémentaires couvre l'arithmétique, l'algèbre élémentaire, la géométrie, l'étude géométrique de quelques courbes (coniques, hélice), la trigonométrie rectiligne et des éléments de géométrie descriptive. Elle comprend trois leçons hebdomadaires d'enseignement littéraire (latin, histoire, philosophie) et huit leçons de sciences, dont cinq de mathématiques. À quoi il faut ajouter des conférences de géographie, de langues vivantes et de sciences, ainsi que des interrogations et des exercices de dessin. En classe de mathématiques spéciales, l'enseignement comprend, par semaine, six leçons de mathématiques, deux leçons de sciences physiques, une de littérature, et une de langues vivantes. À quoi il faut ajouter des manipulations chimiques, des exercices de dessin et de fréquentes interrogations⁵⁷. Les professeurs de ces prestigieuses classes de mathématiques spéciales sont issus, entre 1865 et 1891, pour les trois quarts de l'École normale supérieure, et pour un dixième de l'École polytechnique. Les autres, pour la plupart, ont obtenus leurs grades universitaires, baccalauréat et licence, puis l'agrégation.

Les examens et concours doivent retenir toute l'attention des professeurs :

Les deux derniers mois de l'année seront consacrés à la révision des matières et à la préparation des examens. Des interrogations spéciales seront organisées en vue des épreuves orales du baccalauréat ès sciences. Si quelques bons élèves veulent, dans la même année, prendre le diplôme de bachelier et se présenter aux examens d'admission aux écoles du gouvernement, ils recevront, en dehors de la classe, des soins particuliers pour assurer leur succès⁵⁸.

Les questionnaires du baccalauréat, établissant à l'avance la liste des questions sur lesquelles les candidats peuvent être interrogés, sont supprimés en 1864, et l'examen demande davantage de réflexion et moins de mémoire. Le

56. *Ibid.*, p. 412.

57. Bulletin administratif de l'instruction publique, 1865.

58. *Ibid.*, p. 412.

baccalauréat ès-sciences a pour programme celui de la classe de mathématiques élémentaires, et le baccalauréat ès-lettres celui des classes de rhétorique et de philosophie⁵⁹. Le programme de la classe de mathématiques spéciales est celui des concours d'admission à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure.

L'enseignement spécial, qui ne s'était pas complètement interrompu depuis 1852, reçoit un cadre légal en 1866. Ses programmes font une place importante aux sciences, abordées du point de vue de leurs applications et de leur utilité pratique. L'intelligence et le savoir des classes laborieuses sont présentés comme des armes dans la lutte engagée entre les peuples industriels. « Le progrès industriel est étroitement lié au progrès scolaire », écrit le Ministre⁶⁰. En géométrie, cet intérêt pour les applications pratiques se traduit par l'exécution des figures avec les instruments, par la construction de solides en bois, par l'application des propositions aux arts et à l'industrie, par des exercices d'arpentage sur le terrain, par davantage de souci d'évidence que de rigueur absolue. Le texte mentionne, enfin, que les exercices doivent occuper une part plus importante que la théorie. Voici le programme de cet enseignement spécial :

Classe	Contenus
Section préparatoire	Arithmétique pratique, Géométrie plane
Première année	Arithmétique, Géométrie
Deuxième année	Arithmétique commerciale, Géométrie dans l'espace
Troisième année	Principes d'algèbre, Géométrie descriptive
Quatrième année	Fin de l'Algèbre et de la Géométrie descriptive, Trigonométrie, courbes usuelles

Ce programme est légèrement modifié en 1882, alors que l'enseignement spécial est allongé d'une année et se trouve désormais couronné par le grade d'un baccalauréat spécifique.

Nous voyons qu'à tous les niveaux, l'accent est mis sur la résolution d'exercices en parallèle avec l'exposition de la théorie, et sur la préparation aux examens et concours. Ceux-ci donnent progressivement davantage de place à l'écrit. Des concours académiques sont créés en province entre les élèves des Lycées de chacune des académies, dont les lauréats participent ensuite au

59. *Bulletin administratif de l'instruction publique*, nouvelle série, tome III, 1^{er} semestre, Paris : Imprimerie impériale, 1865, p. 243.

60. Belhoste, *Op. Cit.*, p. 416.

concours général organisé entre les établissements de Paris et de Versailles⁶¹. Dans l'ensemble de ces examens et concours, la géométrie occupe, pour ce qui concerne les mathématiques, la première place.

Les postes de professeurs titulaires de mathématiques, pour une centaine de professeurs en France au milieu du XIX^e siècle, se répartissent entre les classes préparatoires⁶², pour une moitié, l'École polytechnique et les Facultés, pour un quart chacune, et l'École normale supérieure pour cinq postes. Dans les lycées, les enseignants en poste sont, sur cent trente enseignants de mathématiques, quatre-vingt-sept agrégés, trente-et-un chargés de cours et huit docteurs. L'agrégation cesse d'être un concours interne à la réforme de Jules Ferry en 1880, ce qui met les régents et chargés de cours des lycées et collèges en rude compétition avec les étudiants formés dans les Facultés⁶³.

L'Université retrouve, avec la fin du régime autoritaire du deuxième Empire, une certaine autonomie, qui se traduit en 1880 par l'institution d'un conseil supérieur exclusivement universitaire, en majorité élu.

L'enseignement dans les Facultés, inexistant jusqu'alors, mise à part la Faculté de Paris et en-dehors de la médecine et du droit, se développe dans les années 1870 alors que le pays a besoin d'une population plus qualifiée. En 1877, un arrêté institue des conférences dans les Facultés pour préparer à la licence, qui remplacent peu à peu des préparations proposées à l'intérieur même des lycées aux maîtres-répétiteurs. Le nombre des étudiants dans les Facultés de sciences est multiplié par trente entre 1876 et 1884⁶⁴. La Société mathématique de France est créée en 1870, dans le but de diffuser la connaissance et le goût des sciences au-delà des cercles restreints et élitistes des Académies. Elle réunit de nombreux professeurs de sciences.

À partir de 1865, l'enseignement privé laïc décline au profit de l'enseignement confessionnel⁶⁵, qui rivalise en effectifs avec l'enseignement public des Lycées, dont le nombre continue néanmoins d'augmenter, notamment du fait

61. Champion, Jacques, « Le concours général et son rôle dans la formation des élites universitaires au XIX^e siècle », *Revue française de pédagogie*, 31, 1975, p. 71-82.

62. Pour des éléments biographiques sur les professeurs de mathématiques spéciales, voir : Brasseur, Roland, <https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/home> dernière consultation le 28/12/2014.

63. Chervel, André, *Histoire de l'agrégation. Contribution à l'histoire de la culture scolaire*, Paris : Kimé, 1993.

64. Gispert, Hélène (dir.), « La France mathématique. La société mathématique de France (1870-1914) », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, nouvelle série, 34, 1991, p. 52.

65. Prost, *Histoire de l'enseignement en France. 1800-1967*, Paris, Armand Colin, p. 35.

de la transformation de certains collèges communaux en Lycées.

En 1865 encore, Duhamel publie un ouvrage dont la conception, écrit-il, remonte à sa première jeunesse, et dans lequel il veut lever les « obscurités » dans l'enseignement des sciences tel qu'il l'a reçu au Lycée puis à l'École polytechnique. Le jeune homme qui publiait avec Reynaud en 1823 les *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*, est désormais professeur à l'École polytechnique et à la Faculté des sciences de Paris, et académicien. Il consigne dans cinq volumes⁶⁶ les principes à suivre selon lui pour la rédaction d'un cours élémentaire complet de mathématiques, cours qu'il n'a pas eu le loisir de rédiger lui-même. Ce sont des réflexions historiques et épistémologiques qui reprennent de nombreuses conceptions sur les méthodes que nous avons analysées jusqu'ici. L'auteur aborde notamment les notions d'analyse et de synthèse, et de réduction à l'absurde dans le premier volume. Il appelle analyse essentiellement le changement d'ordre dans la déduction, qu'il envisage dans la « résolution de problèmes » quand on ramène un problème à un autre, mais aussi dans la décomposition d'un problème en plusieurs autres⁶⁷. Il traite de la résolution des problèmes et décrit les méthodes particulières que nous avons exhibées, et qu'il nomme la « méthode des lieux géométriques », la « méthode des systèmes semblables » et la « méthode de renversement ». Il compare aussi les avantages et les inconvénients des solutions graphiques et des solutions numériques des problèmes et conclut que les premières conviennent par exemple à la coupe des pierres, et les deuxièmes davantage aux mesures terrestres. S'il ne rédige pas lui-même un cours élémentaire, Duhamel attire par ces ouvrages deux fois réédités l'attention des professeurs sur l'importance de la réflexion sur les méthodes dans l'enseignement.

Dans cette troisième partie, nous poursuivons, dans un premier chapitre, la recherche et l'analyse de méthodes nouvelles dans les ouvrages d'enseignement secondaire de la géométrie.

Concernant d'abord la géométrie analytique, un ouvrage publié outre-Manche organise et expose de nouvelles méthodes. Il s'agit du *Treatise on conic sections* de Georges Salmon, professeur au Trinity College de Dublin. Nous devons étudier ces méthodes et analyser dans le détail les nouvelles démonstrations auxquelles elles donnent lieu. Les auteurs français s'emparent-

66. Duhamel, Jean Marie Constant, *Des méthodes dans les sciences du raisonnement*, Paris : Gauthier-Villars, 1865–1870.

67. *Op. Cit.*, vol. 1, p. 39-49.

ils de ces méthodes ? Les programmes officiels les mentionnent-ils ? Nous verrons en particulier que ces méthodes permettent de démontrer, en géométrie analytique, de nombreux théorèmes établis par Chasles et Poncelet par la géométrie rationnelle⁶⁸.

Les théories de géométrie rationnelle sont quant à elles l'objet d'ouvrages d'initiation, dont les auteurs souhaitent introduire à la lecture de la Géométrie supérieure de Chasles. Qui sont ces auteurs ? Pour qui et pourquoi souhaitent-ils vulgariser la géométrie supérieure ? Comment s'opère cette élémentarisation ? Les exigences d'uniformité et de généralité que s'impose Chasles dans le *Traité* sont-elles préservées ? Un lien est-il établi avec la résolution des problèmes ? Enfin, les ouvrages d'enseignement secondaire de la géométrie élémentaire s'emparent-ils de ces théories de géométrie rationnelle ?

La deuxième partie de ce travail a mis en évidence l'émergence de méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire. Dans les années 1870, trois ouvrages sont publiés qui font de ces méthodes particulières leur sujet principal. Nous verrons quels sont ces ouvrages, qui en sont les auteurs et les destinataires, et quelles sont les méthodes qui sont exposées.

Dans un deuxième chapitre, nous étudierons l'importance quantitative des problèmes dans l'ensemble des ouvrages d'enseignement secondaire de la géométrie. Ces ouvrages proposent-ils tous des problèmes ? Dans quelle mesure et dans quel but ? Nous devons analyser différents types d'ouvrages, manuels de cours, recueils de problèmes, annales de concours et d'examens, dans différents niveaux d'enseignement, classes de grammaire, d'humanités, classes préparatoires, et différents contenus enseignés, géométrie analytique ou géométrie élémentaire. En complément des manuels, les années 1870 voient l'apparition de plusieurs journaux de mathématiques destinés spécifiquement aux professeurs et aux élèves de la classe de mathématiques élémentaires. Comment sont-ils organisés et quels thèmes abordent-ils ? Quelle place y occupent les problèmes ?

68. Sur les débats autour de l'introduction de la géométrie projective à cette époque dans l'enseignement allemand, voir : Volkert, Klaus, « Are there points at infinity? a debate among German teachers around 1870 », in Bioesmat-Martagon, Lise (dir.), *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*, Presses universitaires de Nancy, 2010.

CHAPITRE VIII

LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Nous avons vu dans la période précédente que la réforme de 1852 établit, pour l'enseignement secondaire, des programmes détaillés, que les professeurs sont contraints de suivre scrupuleusement. S'en est suivie la publication de manuels rigoureusement conformes aux programmes, qui s'ouvrent parfois sur les programmes eux-mêmes, et indiquent, pour chaque item, les pages auxquelles il est traité. C'est le cas par exemple de la première édition des *Éléments de géométrie analytique* de Sonnet et Frontera en 1854¹.

Nous avons repéré des ouvrages d'enseignement de géométrie antérieurs à cette réforme de la bifurcation qui traitent des méthodes de géométrie rationnelle, dans le but affiché de préparer les élèves aux questions des concours. Nous avons ainsi remarqué que certains de ces ouvrages mêlent les méthodes de géométrie pure et de géométrie analytique.

Ces méthodes de géométrie rationnelle ne figurent pratiquement pas dans les programmes avant ceux de 1891. De façon générale, ces programmes font davantage état de théories à enseigner que de méthodes. Pourtant, des ouvrages paraissent, à l'usage des lycées et de leurs classes préparatoires, qui traitent de méthodes en géométrie. Nous les avons regroupés en trois catégories.

D'abord, ceux qui traitent de méthodes récentes de géométrie analytique, encore inconnues dans les ouvrages d'enseignement français, telles que celles exposées dans l'ouvrage de Georges Salmon, professeur au Trinity College de Dublin, *A treatise on conic sections*². Nous allons exposer ces méthodes,

1. Sonnet, Frontera, *Éléments de géométrie analytique*, Paris : Hachette, 1854.

2. Salmon, *A treatise on conic sections*, Dublin : Hodges and Smith, 1848.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

et analyser les modalités selon lesquelles elles sont reprises dans les ouvrages français, et tout particulièrement leurs liens avec la résolution des problèmes.

Ensuite, ceux qui élémentarisent les méthodes de géométrie rationnelle développées dans les ouvrages de Poncelet et de Chasles : polaires, rapport anharmonique, homographie, involution, etc. Nous allons exposer qui sont les auteurs de ces ouvrages, pour qui, pourquoi et comment ils entreprennent d'élémentariser la Géométrie supérieure. Là encore, le lien est établi avec la résolution des problèmes.

Et enfin, les ouvrages qui exposent, pour répondre aux questions de géométrie élémentaire, des méthodes particulières, dont nous avons analysé l'émergence dans la période précédente. Ces méthodes particulières sont-elles renouvelées ? Comment sont-elles présentées et organisées ? Comment sont-elles articulées aux problèmes ?

À l'École normale, Briot donne à partir de 1863 des « Leçons de géométrie moderne »³. En avertissement à la version publiée de ces cours, Briot explique :

L'année dernière, à l'École normale supérieure, j'ai consacré quelques conférences à donner aux élèves de troisième année une idée de la Géométrie moderne. Les élèves ont recueilli et mis en ordre ces entretiens, et de leur travail commun est résulté ce petit livre, que je les ai engagés à publier, espérant qu'il sera utile aux professeurs et aux meilleurs élèves de nos lycées.

Je me suis servi des beaux travaux de MM. Poncelet et Chasles, qui ont donné un si grand développement à cette branche de la science. J'ai eu aussi fréquemment recours à l'excellent ouvrage publié par M. Salmon sur le même sujet.

Les jeunes normaliens sont donc formés à la géométrie moderne, et Briot invite, au-delà, tous les professeurs ainsi que l'élite des classes de lycée à étudier ses leçons. Il mêle les approches géométrique et analytique au fil des chapitres du livre qui sera publié en 1864.

3. Briot, Bouquet, *Complément de géométrie analytique. Leçons faites par M. Briot, à l'École normale supérieure, et rédigées par ses élèves*, Paris : Dunod, 1864.

1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

Les programmes de la classe de mathématiques spéciales, dans laquelle est enseignée la géométrie analytique, sont aussi depuis 1850 les programmes d'admission aux Écoles polytechnique et normale⁴. Pourtant, de nouveaux manuels introduisent des notions étrangères à ces programmes. Ils introduisent de nouveaux systèmes de coordonnées, les coordonnées homogènes, trilineaires et tangentielles⁵. Nous verrons que ces coordonnées leur permettent de traiter analytiquement certaines notions de géométrie rationnelle.

Plusieurs de ces ouvrages d'enseignement français se réfèrent à un ouvrage d'enseignement irlandais, dû à Georges Salmon, professeur au Trinity College de Dublin. Cet ouvrage indique en sous-titre qu'il contient « un exposé des méthodes les plus importantes de la géométrie et de l'algèbre modernes ». Quelles sont ces nouvelles méthodes enseignées en géométrie analytique ? Comment sont-elles présentées et organisées dans l'ouvrage de Salmon ? D'où les tient-il lui-même ?

Il faudra ensuite observer quelles méthodes sont introduites dans les ouvrages français, et dans quelle mesure ceux-ci s'inspirent du travail de Salmon et des « Leçons » de Briot.

Nous commencerons par étudier trois ouvrages du début de la période. Deux sont des ouvrages de cours : les *Principes de la géométrie analytique* de Painvin⁶, et les *Leçons nouvelles de géométrie analytique* de Boquel⁷. Le troisième est un recueil d'exercices d'une taille restreinte et limité aux droites et aux cercles, de Jubé, intitulé *Exercices de géométrie analytique*⁸. Ces trois ouvrages ne connaîtront pas de réédition.

4. *Programme des conditions d'admission à l'École impériale polytechnique*, Paris : Delalain, 1855-1888.

5. Sur l'histoire des coordonnées, voir : Loria, Gino, « Perfectionnements, évolution métamorphoses du concept de coordonnées : contribution à l'histoire de la géométrie analytique », *Osiris*, 8, 1948, p. 218-288.

6. Painvin, Louis Félix, *Principes de la géométrie analytique. Géométrie plane*, Douai : Impr. Robaut, 1866.

7. Boquel, *Leçons nouvelles de géométrie analytique à l'usage des candidats aux écoles polytechnique, normale supérieure et centrale des arts et manufactures*, Paris : Chauvin, 1872.

8. Jubé, Eugène, *Exercices de géométrie analytique, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales*, Paris : Noblet et Baudry, 1866.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

À la fin de la période, dans les années 1880, d'autres manuels sont publiés sur la géométrie analytique, qui introduisent de nouvelles méthodes et des contenus élargis. Il s'agit du *Traité de géométrie analytique* de Henry Picquet⁹, des *Leçons de géométrie analytique* de Pruvost¹⁰, et du *Cours de mathématiques spéciales* de Gaston Gohierre de Longchamps¹¹. Parallèlement à ces ouvrages ambitieux portant d'abord sur la théorie, nous étudierons aussi deux recueils d'exercices, les *Exercices de géométrie analytique* de Koehler¹², et les *Exercices élémentaires de géométrie analytique* de Rémond¹³, qui font une large place aux méthodes nouvelles.

1.1 Les méthodes du *Traité des sections coniques* de Georges Salmon (1855 et 1870)

Georges Salmon (1819-1904), professeur au Trinity College de Dublin, rédige entre 1847 et 1862 quatre manuels d'enseignement de géométrie analytique qui feront l'essentiel de sa renommée scientifique¹⁴. Nous nous intéressons au premier d'entre eux, dont le titre complet de la troisième édition, publiée à Londres en 1855, est *A treatise on conic sections, containing an account of some of the most important modern algebraic and geometric*

9. Picquet, Henry, *Traité de géométrie analytique à l'usage des candidats aux Écoles du gouvernement et aux grades universitaires*, Paris : Masson, 1882.

10. Pruvost, E., *Leçons de géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École Normale Supérieure et à l'École Polytechnique*, Paris : Dupont, 1886.

11. Gohierre de Longchamps, Gaston, *Cours de mathématiques spéciales*, 3 vol., Paris : Delagrave, 1883-1885.

12. Koehler, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale et à l'Agrégation*, Paris : Gauthier-Villars, 1886.

13. Rémond, A., *Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions, avec un exposé des méthodes de résolution, suivis des énoncés des problèmes donnés pour les compositions d'admission aux Écoles polytechnique, normale, centrale, navale, au concours général, à l'agrégation*, Paris : Gauthier-Villars, 1887.

14. Salmon, Georges, *A Treatise on Conic Sections*, Dublin : Hodges and Smith, 1848. *A Treatise on the Higher Plane Curves*, Dublin : Hodges and Smith, 1852.

Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra, Dublin : Hodges, Smith, and Co., 1859.

A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions, Dublin : Hodges, Smith, and Co., 1862.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

*methods*¹⁵, le seul dont le contenu puisse être repris dans l'enseignement préparatoire français. À partir de cette troisième édition londonienne, l'ouvrage est largement diffusé en Europe¹⁶. Il est cité, comme nous l'avons dit, par plusieurs auteurs français, et traduit en 1870 par Henri Résal, ingénieur des Mines, polytechnicien de la promotion 1847, et professeur à la faculté de Besançon, et Victor Vaucheret, capitaine d'artillerie, polytechnicien de la promotion 1851. Ceux-ci estiment « rendre un réel service à l'enseignement », sans préciser un niveau d'enseignement particulier. Poncelet écrit en 1862 que l'édition faite à Londres en 1855 « jouit, en France comme en Angleterre, d'une juste célébrité »¹⁷, et les traducteurs de l'édition française de 1870 déclarent que l'ouvrage est « classique en Angleterre ». De fait, il y sera encore publié dans la deuxième moitié du XX^e siècle.

Outre l'étude des courbes du second degré, Salmon introduit des chapitres portant sur des méthodes récentes, dont il affirme qu'il est alors le premier à publier un exposé systématique et élémentaire. Dans la préface à la troisième édition, il indique qu'il utilise son ouvrage pour enseigner la géométrie analytique à ses étudiants débutants. En conséquence de quoi, il augmente encore dans cette troisième édition le nombre d'illustrations numériques, afin d'en faciliter l'étude. Car le traité alterne fréquemment l'exposition de la théorie avec des exercices d'application, qui consistent souvent, au moins au début de l'ouvrage, à attribuer des valeurs numériques particulières aux paramètres, à l'image de cet énoncé :

Trouver l'équation du cercle passant par les points (2,3), (4,5), (6,1)¹⁸.

Le traducteur de l'édition française vante en effet « la sage progression avec laquelle sont exposées les théories, le choix gradué de nombreux exercices, et l'emploi systématique de problèmes numériques pour faire saisir plus nettement les applications ».

Salmon s'efforce de citer les auteurs des notations, des démonstrations et

15. Salmon, *A treatise on conic sections*, London : Longman, Brown, Green, and Longman's, 1855.

16. Gow, Rod, « Georges Salmon 1819-1904. His mathematical work and influence », *Irish Mathematical Society Bulletin*, 39, 1997.

17. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, Paris : Mallet-Bachelier, 1862, p. 212.

18. Salmon, *Traité de géométrie analytique. Sections coniques. Contenant un exposé des méthodes les plus importantes de la géométrie et de l'algèbre modernes*, trad. Résal et Vaucheret, Paris : Gauthier-Villars, 1870, p. 80.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

des notions qu'il expose. La cinquième édition, sur laquelle est réalisée la traduction française, recense dans une table finale l'ensemble de ces références. Il puise la matière de son traité dans les ouvrages et les travaux de Chasles, de Poncelet, de Bobillier, de Brianchon, de Carnot, et de Gergonne pour la France ; d'August Ferdinand Möbius (1790-1868), de Julius Plücker (1801-1868) et de Jakob Steiner (1796-1863) pour l'Allemagne¹⁹ ; de Arthur Cayley (1820-1895) pour l'Angleterre. En particulier, l'emploi de nouveaux systèmes de coordonnées dûs à Möbius et Plücker permet d'exprimer analytiquement certaines idées géométriques.

Voici le sommaire de la traduction française :

Ch I	Du point
Ch II	De la ligne droite
Ch III	Problèmes sur la ligne droite
Ch IV	Application de la méthode des notations abrégées à l'équation de la ligne droite
Ch V	Des équations d'un degré supérieur au premier représentant des lignes droites
Ch VI	Du cercle
Ch VII	Théorèmes et problèmes sur le cercle
Ch VIII	Propriétés d'un système de deux ou d'un plus grand nombre de cercles
Ch IX	Application de la méthode de la notation abrégée à l'équation du cercle
Ch X	Classification et propriétés communes des courbes représentées par l'équation générale du second degré
Ch XI	De l'ellipse et de l'hyperbole
Ch XII	De la parabole
Ch XIII	Théorèmes et problèmes sur les sections coniques
Ch XIV	Application de la méthode des notations abrégées aux sections coniques
Ch XV	Du principe de dualité et de la méthodes des polaires réciproques
Ch XVI	Propriétés harmoniques et anharmoniques des sections coniques
Ch XVII	Méthode des projections

19. Steiner est de nationalité suisse, mais il a réalisé l'essentiel de ses travaux en Allemagne.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

Ch XVIII Invariants et covariants des systèmes de coniques

Ch XIX Méthode des infiniment petits

Nous voyons que les chapitres successifs portant sur la ligne droite, sur le cercle, puis sur les coniques, sont à chaque fois suivis d'un chapitre portant sur la démonstration des théorèmes et la résolution des problèmes, ce qui souligne l'importance accordée à la mise en œuvre de la théorie. Ces chapitres, traités en coordonnées cartésiennes, sont aussi suivis d'un chapitre dédié à l'« application de la méthode des notations abrégées » à chacun d'entre eux. Viennent ensuite des chapitres sur le principe de dualité et la méthode des polaires réciproques, traités de façon analytique, la méthode des projections, les invariants et covariants, et la méthode des infiniment petits. Nous allons examiner chacune de ces méthodes afin d'examiner comment elles sont exposées et comment elles permettent de démontrer les théorèmes et résoudre les problèmes.

La méthode des notations abrégées

Le principe qui deviendra la méthode des notations abrégées est présent dans l'*Examen* de Gabriel Lamé de 1818, à la suite des méthodes de géométrie élémentaire que nous avons étudié dans notre première partie. On le retrouve dans un article d'Étienne Bobillier publié dans les *Annales de Gergonne*²⁰ et dans l'ouvrage de Julius Plücker *Analytisch-geometrische Entwicklungen* de 1828-1831²¹.

Salmon introduit la notation abrégée en mettant l'équation d'une droite sous la forme $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, où α représente l'angle que fait la droite avec la direction des ordonnées, est écrite simplement sous la forme abrégée $\alpha = 0$. Le terme noté α désigne alors, au signe près, la distance du point (x, y) à la droite. L'usage des notations abrégées s'avère très facile et fécond pour résoudre certaines questions. Ainsi pour démontrer que les bissectrices d'un triangle sont concourantes, Salmon note α , β et γ les équations des trois

20. Bobillier, « Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 18, 1828, p. 320-339.

21. Barbin, Evelyne, « L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé », in Barbin (dir.), *Gabriel Lamé. Les pérégrinations d'un ingénieur du XIX^e siècle*, Sabix, 2009, p. 101-111, et Barbin, Evelyne, « Voir des figures, des raisonnements et des équations : une approche sémiotique de la démonstration », in Barbin, Evelyne, Lombard, Philippe, *La Figure et la Lettre. Actes du 17^e Colloque de la Commission Inter-Irem Histoire et Épistémologie des Mathématiques*, Presses universitaires de Nancy, 2011.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

côtés du triangle; les équations des bissectrices sont, du fait de la remarque précédente, $\alpha - \beta = 0$, $\beta - \gamma = 0$ et $\gamma - \alpha = 0$ ²². La troisième étant la somme des deux autres, le point d'intersection des deux premières appartient à la troisième, c'est-à-dire que les trois bissectrices sont concourantes. En effet, si les coordonnées d'un point vérifient les équations des deux premières bissectrices, alors ce point se trouve à leur intersection. L'équation de la troisième bissectrice étant la somme des équations des deux premières, les coordonnées du point la vérifient aussi, et donc le point d'intersection des deux premières bissectrices appartient à la troisième, c'est-à-dire qu'elles sont toutes trois concourantes.

Salmon en vient à un système de « coordonnées trilineaires » dans lequel la position d'un point est définie par ses distances α , β et γ , aux signes près, à trois droites fixes, ainsi que procède Plücker dans l'ouvrage cité ci-dessus. De telles coordonnées sont dites homogènes, car l'équation d'une courbe prend la forme d'une fonction homogène des variables, du premier degré pour une droite dans le plan, et du second pour une conique. Möbius emploie le premier des coordonnées homogènes dans son *Der baricentrische calcul* de 1827²³. L'auteur attribue ici la simplicité des expressions obtenues à la possibilité de choisir trois droites remarquables de la figure comme axes de référence, et non seulement deux comme en coordonnées cartésiennes²⁴.

Voici maintenant un exemple extrait du chapitre sur *l'application de la méthode abrégée à l'équation du cercle*. Salmon commence par exprimer l'équation du cercle en notation abrégée²⁵. Étant données trois droites α , β et γ , c'est-à-dire un triangle, l'équation

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$$

représente une courbe du second degré circonscrite à ce triangle. En effet, cette équation est du second degré, et se trouve vérifiée par les trois points d'intersection des droites prises deux à deux. Pour que cette courbe soit un cercle, il faut que les termes en x^2 et en y^2 soient égaux, et que le terme en xy soit nul, ce qui se traduit par :

22. Salmon, *Op. Cit.*, p. 80.

23. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, vol. 3, Oxford University Press, 1972, p. 853.

24. Salmon, *Op. Cit.*, p. 90.

25. *Ibid.*, p. 171.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

$$\begin{cases} l \cos \beta \cos \gamma + m \cos \gamma \cos \alpha + n \cos \alpha \cos \beta = l \sin \beta \sin \gamma + m \sin \gamma \sin \alpha + n \sin \alpha \sin \beta \\ l(\cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma) + m(\cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha) + n(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) = 0 \end{cases}$$

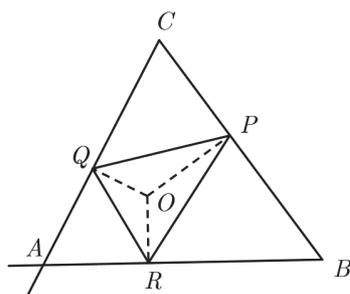
Ces relations reviennent à :

$$\begin{cases} l \cos(\beta + \gamma) + m \cos(\gamma + \alpha) + n \cos(\alpha + \beta) = 0 \\ l \sin(\beta + \gamma) + m \sin(\gamma + \alpha) + n \sin(\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$

Donc les quantités l , m et n sont proportionnelles à $\cos(\alpha + \beta) \times \sin(\gamma + \alpha) - \cos(\gamma + \alpha) \times \sin(\alpha + \beta)$, ... etc, c'est-à-dire à $\sin(\beta - \gamma)$, $\sin(\gamma - \alpha)$ et $\sin(\alpha - \beta)$, ou encore à $\sin A$, $\sin B$ et $\sin C$, où A , B et C sont les trois angles du triangle. Par exemple, l'angle A du triangle est bien égal à la différence des angles que font les côtés adjacents $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ avec la direction des ordonnées. Donc l'équation du cercle est finalement :

$$\beta \gamma \sin A + \gamma \alpha \sin B + \alpha \beta \sin C = 0$$

Cette équation donne lieu à une interprétation géométrique, qui montre qu'une autre caractéristique de la notation abrégée, outre la simplicité de certaines des démonstrations qu'elles permet, est sa fécondité. En notant O l'origine des coordonnées cartésiennes, le produit $\alpha \beta \sin C$ mesure le double de l'aire du triangle OPQ , où P et Q sont les projetés orthogonaux du point O sur les droites $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. En effet, α et β mesurent respectivement les distances OP et OQ et les angles C et POQ , supplémentaires, ont des sinus égaux. L'expression dans l'équation trouvée pour le cercle circonscrit



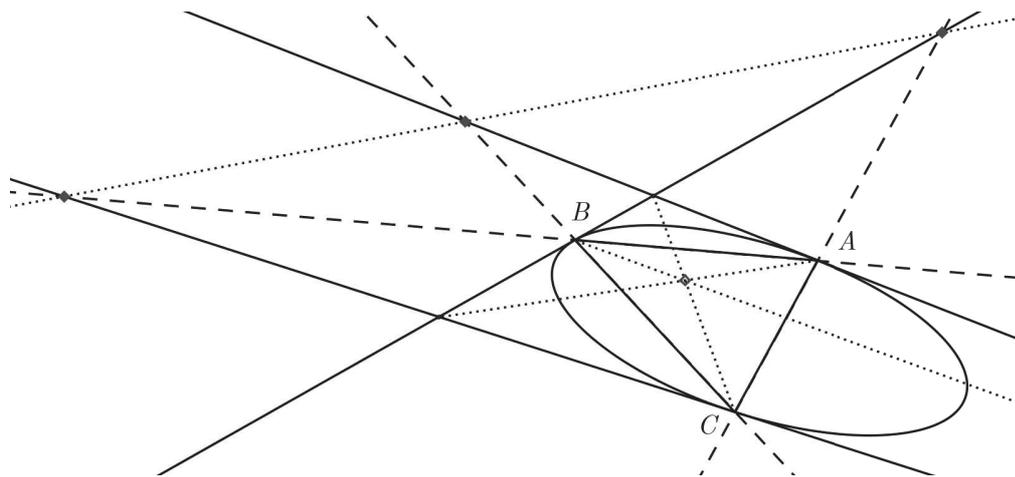
est donc égale au double de l'aire du triangle PQR . Le fait qu'elle soit nulle lorsque le point O se trouve sur le cercle circonscrit indique le théorème bien connu, et que l'auteur attribue à Simson, que le lieu des points dont les projections orthogonales sur les trois côtés d'un triangle sont en ligne droite

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

est le cercle circonscrit à ce triangle. En fait, Salmon déduit davantage encore de sa remarque, à savoir que le lieu des points O tels que le triangle PQR ait une aire constante est un cercle, dont le centre est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Notons que ce théorème avait été proposé dans les *Annales de Gergonne* et démontré, de deux manières différentes, en 1824 par un chef d'institution de Saint-Malo²⁶.

Nous voyons donc avec cet exemple que la méthode des notations abrégées exposée par Salmon allie la facilité, par l'aisance de la manipulation des équations, et la fécondité, par les théorèmes qui ont été déduits de la forme de l'équation du cercle.

La méthode est aussi générale, au sens où les résultats obtenus pour le cercle, qui est le sujet du chapitre, sont immédiatement étendus aux coniques. Salmon met l'équation de la conique circonscrite au triangle ABC sous la forme $\gamma(l\beta + m\alpha) + n\alpha\beta = 0$, et en déduit que la droite $l\beta + m\alpha = 0$ est tangente à la conique au point C . En effet, la considération des deux équations conduit à la relation $\alpha\beta = 0$; ainsi la droite et la conique ont pour seul point d'intersection le point d'intersection des droites $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, à savoir le point C . L'équation de cette tangente peut s'écrire $\frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} = 0$, et de la même façon les équations des deux autres tangentes sont $\frac{\alpha}{l} + \frac{\gamma}{n} = 0$ et $\frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = 0$. Les points d'intersection de chaque tangente avec le côté opposé du triangle appartiennent tous les trois à la droite $\frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = 0$, donc ils sont alignés.



26. Querret, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 14, 1824, p. 280.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

Salmon démontre un deuxième théorème en soustrayant les équations des tangentes deux à deux. Il obtient alors les équations des droites qui relient les sommets du triangle circonscrit à la conique aux sommets opposés du triangle inscrit :

$$\frac{\beta}{m} - \frac{\gamma}{n} = 0 \quad \frac{\alpha}{l} - \frac{\gamma}{n} = 0 \quad \frac{\alpha}{l} - \frac{\beta}{m} = 0$$

La première de ces droites, étant obtenue par la différence entre les équations de deux tangentes, passe par le point d'intersection de ces tangentes, et nous voyons aussi qu'elle passe par le point A dont les coordonnées vérifient $\beta = 0$ et $\gamma = 0$. Par ailleurs ces trois droites sont concourantes car l'une est la différence des deux autres. Donc les droites qui relient les sommets du triangle circonscrit aux sommets opposés du triangle inscrit sont concourantes.

Salmon attribue ces deux résultats sur le triangle inscrit à l'article publié par Bobillier dans les *Annales de Gergonne* que nous avons mentionné plus haut. Il montre à son lecteur comment l'usage de ces notations constitue une méthode simple, féconde et générale en géométrie analytique.

Le principe de dualité et les coordonnées tangentielles

Le principe de dualité est établi en recourant à un autre système de coordonnées, dites coordonnées tangentielles²⁷. En coordonnées tangentielles, la position d'une droite est définie par des coordonnées, et celle d'un point par une équation. Plutôt qu'un nouveau système de coordonnées, Salmon considère qu'il s'agit d'« une nouvelle manière d'interpréter les équations »²⁸.

L'équation d'une droite étant, en coordonnées homogènes, de la forme $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, les quantités λ, μ, ν sont considérées comme étant les *coordonnées tangentielles* de la droite. Une équation de la forme $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$ entre les coordonnées λ, μ, ν de la droite, exprime que cette droite passe par le point fixe (a, b, c) , et peut s'appeler équation de ce point.

Voyons maintenant une proposition sur les coniques démontrée avec la notation abrégée, et sa traduction en une proposition duale que fait Salmon en employant les coordonnées tangentielles :

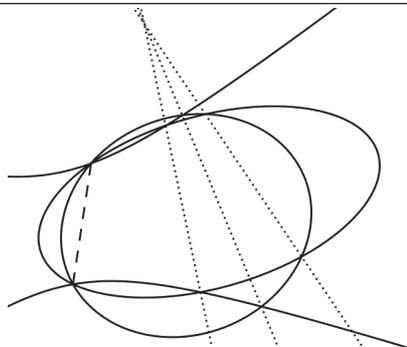
Lorsque trois coniques ont une corde commune, les trois cordes d'intersection non communes se coupent en un même point²⁹.

27. Sur l'introduction des différents types de coordonnées, voir Loria, Gino, *Op. cit.*

28. Salmon, *Op. Cit.*, p. 96.

29. *Ibid.*, p. 338.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT



Étant données une conique d'équation $S = 0$, et une corde $L = 0$, Salmon établit d'abord que toute conique partageant la corde L avec la conique S a une équation de la forme $S + LM = 0$, où $M = 0$ est l'équation d'une droite. En effet, l'équation $S - k\alpha\beta = 0$ est celle d'une conique passant par les quatre points d'intersection, réels ou imaginaires, de la conique S avec chacune des droites α et β , et le coefficient k peut être choisi pour qu'elle passe par un cinquième point donné. Une conique étant définie par la donnée de cinq de ses points, toute conique a une équation de la forme $S - k\alpha\beta$. Ici, plus particulièrement, toute conique dont L est une corde commune avec S a une équation de la forme $S + LM = 0$.

Par conséquent, deux coniques partageant la corde L avec la conique S auront pour équations respectives $S + LM$ et $S + LN$. L'intersection des deux coniques S et $S + LM$ donne $LM = 0$ et fournit les équations de leurs deux cordes communes $L = 0$ et $M = 0$, cette dernière étant la deuxième corde commune. Les cordes communes aux trois coniques prises deux à deux sont donc $M = 0$, $N = 0$ et $M - N = 0$. Elles sont concourantes car l'une est la différence des deux autres. Remarquons que Salmon propose de voir ce résultat comme une extension de la propriété des axes radicaux de trois cercles pris deux à deux d'être concourants, car trois cercles ont comme corde commune la droite située à l'infini.

Remarquons encore que ce résultat est déjà présent dans les *Leçons de géométrie analytique* de Cirodde³⁰ de 1848. Il y est démontré de façon comparable, mais avec des équations en coordonnées cartésiennes, ce qui suppose un travail algébrique plus lourd sur les équations.

Avant de passer au théorème dual du théorème établi ci-dessus par le moyen des coordonnées tangentielles, rappelons que Chasles, lorsqu'il com-

³⁰. Cirodde, *Leçons de géométrie analytique*, Paris : Hachette, 2^e édition, 1848, p. 414.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

pare, dans la préface au *Traité de géométrie supérieure*, la généralité de ses méthodes et la généralité des méthodes de l'Analyse, pousse son argument en affirmant que les méthodes de la géométrie supérieure ont un avantage sur l'analyse :

Ces méthodes de pure Géométrie présentent un autre avantage essentiel, qui manque parfois à la Géométrie analytique; c'est qu'elles s'appliquent *avec une égale facilité* aux propositions qui concernent des droites, comme à celles qui concernent des points, sans qu'on soit obligé de conclure les unes des autres par les méthodes de transformation, ainsi qu'on a coutume de le faire³¹.

Or les coordonnées tangentielles permettent de résoudre cette difficulté. Salmon propose de voir les équations du théorème en coordonnées tangentielles. Il prouve analytiquement que, de ce point de vue, $S = 0$ est l'équation d'un faisceau de droites tangentes à une conique, et $L = 0$ est celle d'un faisceau de droites passant par un point. Donc l'intersection de S et de L est le couple de tangentes à la conique passant par le point. Ces tangentes sont communes aux trois coniques S , $S + LM$ et $S + LN$, et les équations $M = 0$, $N = 0$ et $M - N = 0$ sont celles des trois faisceaux de droites passant par les trois points d'où sont tirées les autres tangentes communes aux coniques prises deux à deux. Ces trois points sont alignés car les coordonnées homogènes de l'un égalent la différence des coordonnées des deux autres. D'où l'énoncé :

Si trois coniques ont deux tangentes communes, les intersections des [autres] tangentes communes à ces coniques prises deux à deux sont en ligne droite³².

Salmon formule ainsi le principe de dualité :

Chacune des équations trouvées au chapitre précédent est par suite susceptible d'une double interprétation, suivant qu'on la considère comme relative à des coordonnées trilinéaires ou tangentielles, et peut conduire à un double théorème, le théorème déduit de la considération des coordonnées tangentielles étant le *réci-proque* de celui qui se rapporte aux coordonnées trilinéaires [...]

Chaque théorème *de position*, c'est-à-dire ne se rapportant ni à la

31. Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1852, p. II.

32. Salmon, *Op. Cit.*, p. 389.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

grandeur des lignes, ni à celle des angles, conduit à un théorème réciproque, dont l'énoncé s'obtient en changeant dans l'énoncé du premier les mots points et lignes en lignes et points ; et ces deux théorèmes se démontrent par les mêmes équations interprétées de deux manières différentes³³.

Salmon attribue à Plücker cet usage des coordonnées tangentielles pour exprimer le principe de dualité, que nous trouvons dans un article de 1830 dans le *Journal de Crelle*³⁴. Dans la deuxième partie du chapitre, il montre comment la théorie des polaires réciproques permet d'établir de nouveaux théorèmes à partir de théorèmes donnés. Par exemple :

Quand deux des sommets d'un triangle circonscrit à une conique glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet décrit une conique ayant un double contact avec la conique donnée

Quand deux des côtés d'un triangle inscrit dans une conique passent par deux points fixes, le troisième côté enveloppe une conique ayant un double contact avec la conique donnée³⁵.

Nous retrouvons la présentation des théorèmes duaux en vis-à-vis telle qu'elle est réalisée par Gergonne en 1826³⁶.

Salmon consacre donc un chapitre assez conséquent au principe de dualité et à la méthode des polaires réciproques, dont il illustre l'application à de nombreux théorèmes et problèmes. Il s'agit bien de montrer le fonctionnement des méthodes comme méthodes d'invention, et non de construire un corpus homogène de théorèmes. Les coordonnées tangentielles et les polaires réciproques fournissent deux justifications du principe de dualité, l'une analytique et l'autre géométrique.

La méthode des projections

La méthode des projections est tirée des travaux de Poncelet. Elle « permet de déduire d'un théorème donné et restreint le théorème général auquel il se rattache et dont il n'est qu'un cas particulier »³⁷. Comme dans le *Traité des propriétés projectives des figures*, elle consiste à projeter une figure contenue dans un plan sur un autre plan à partir d'un point extérieur.

33. *Ibid.*, p. 388.

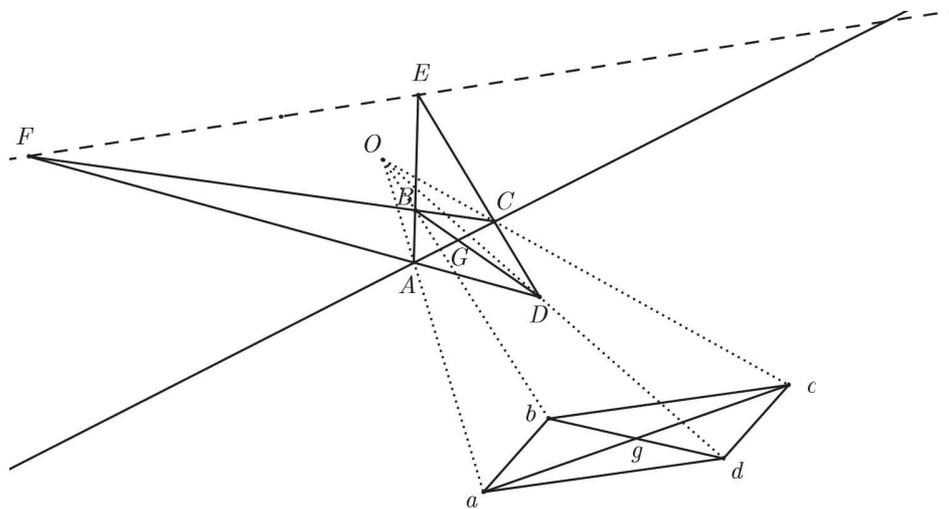
34. Kline, *Op. Cit.*, p. 855.

36. Gergonne, « Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 16 (1825-1826), p. 209-231.

37. Salmon, *Op. Cit.*, p. 442.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

Les propriétés descriptives, « c'est-à-dire n'ayant rapport qu'à la position des points ou des lignes, indépendamment de toute condition de grandeur de lignes ou d'angles », subsistent par projection. Ce sont des propriétés projectives. Certaines propriétés métriques sont aussi projectives, dont celles qui sont formulées au moyen du rapport anharmonique. Ces considérations sont issues de l'ouvrage de Poncelet³⁸, et la méthode est décrite ainsi : « Pour démontrer une propriété projective, il suffit de prouver qu'elle a lieu pour la figure *la plus simple*, suivant laquelle on peut projeter la figure donnée ». La première illustration de cette méthode est la démonstration qu'une diagonale d'un quadrilatère complet $ABCD$ est partagée harmoniquement par ses deux autres diagonales. Notant E et F les points d'intersection des côtés opposés du quadrilatère, et O le centre de projection, la figure est projetée sur un plan parallèle au plan OEF de sorte que les points E et F sont projetés sur la droite de l'infini, c'est-à-dire que les côtés opposés du quadrilatère sont projetés sur des droites parallèles. Dès lors, la projection est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu. Donc la diagonale ac est partagée harmoniquement en g et au point où elle rencontre la droite de l'infini, donc la diagonale AC est partagée harmoniquement en G et au point où elle rencontre la droite EF .



Salmon applique cette méthode des projections aux sections coniques qui peuvent être regardées par exemple comme la projection d'un cercle. Ainsi,

38. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachlier, 1822, p. 11.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

« l'intersection des diagonales d'un parallélogramme inscrit dans un cercle est le centre du cercle : donc l'intersection des diagonales du quadrilatère inscrit dans une conique est le pôle de la droite qui joint les côtés opposés »³⁹.

De même que les coordonnées tangentielles ont fourni une justification analytique du principe de dualité, l'auteur signale comment l'analyse pourrait conduire aux propriétés projectives. En considérant deux triangles de référence, on obtient deux systèmes de coordonnées trilineaires. Une même équation représentera, dans l'un et l'autre système, des courbes différentes. Sans entrer davantage dans les détails, il distingue les deux approches :

La méthode des projections présente d'assez grandes différences dans les applications, suivant qu'on la considère comme géométrique ou comme analytique. Dans la méthode géométrique, on déduit le théorème général d'un théorème particulier relatif soit au cercle, soit à un cas simple de la figure, théorème démontré d'abord. Dans la méthode analytique, on démontre immédiatement le théorème général, et on en déduit ensuite les théorèmes particuliers, parce qu'au moyen de l'analyse il est aussi facile de démontrer un théorème général qu'un théorème particulier⁴⁰.

Nous verrons que cette méthode analytique est retenue par certains ouvrages français des années 1880.

Salmon montre comment la projection centrale permet à la fois de démontrer des théorèmes, en se ramenant au cas d'une figure plus simple, et de généraliser des théorèmes à une plus grande variété de figures. Cette fois, il donne un exposé géométrique de la méthode, car plus élémentaire, et signale seulement la possibilité d'arriver au même résultat par la géométrie analytique.

Les invariants et covariants de systèmes de coniques

Les mathématiciens Cayley, Sylvester, et Salmon ont établi les premières propriétés des invariants⁴¹. Salmon expose la fécondité de cette notion sur quelques exemples. Il a défini le discriminant d'une conique d'équation $S =$

39. Salmon, *Op. Cit.*, p. 449.

40. Salmon, *Op. Cit.*, p. 459.

41. Sur l'histoire de la théorie des invariants, voir : Parshall Karen, « The British development of the theory of invariants », *Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 21, 2006, p. 186-199.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy = 0$ par l'expression $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$, et montré qu'une conique se réduit à un couple de droites lorsque son discriminant est nul⁴².

Prenant dès lors deux coniques S et S' , les valeurs du coefficient k pour lesquelles la conique $kS + S'$ est réduite à deux droites sont les solutions de l'équation :

$$\Delta k^3 + \Theta k^2 + \Theta' k + \Delta' = 0 \quad (1)$$

où Θ est une fonction des coefficients des équations de S et S' . Pour chaque valeur de k solution, la conique $kS + S'$ est réduite à deux droites, qui passent évidemment par les quatre points d'intersection de S et de S' .

L'élimination de k entre cette équation (1) et l'équation $kS + S'$ aboutit à l'équation :

$$\Delta S'^3 - \Theta S'^2 S + \Theta' S' S^2 - \Delta' S^3 = 0$$

Cette équation est celle des six droites qui joignent les quatre points d'intersection des deux coniques deux à deux⁴³.

Les quantités Δ , Δ' , Θ , Θ' sont appelées les « invariants » du système de coniques S , S' . Ce terme est justifié par le fait que les valeurs de k solutions de l'équation du troisième degré ci-dessus ne dépendent pas du système de coordonnées choisi, et par conséquent les rapports des coefficients de l'équation non plus.

Salmon emploie ces invariants pour démontrer des théorèmes et résoudre des problèmes, comme par exemple le problème suivant :

Trouver le lieu décrit par le centre d'un cercle de rayon constant tangent à une conique donnée.

Deux coniques sont tangentes si deux de leurs points d'intersection sont confondus, c'est-à-dire si l'équation (1) a deux racines égales, ce qui se traduit en algèbre par la condition :

$$\Theta^2 \Theta'^2 + 18\Theta\Theta'\Delta\Delta' - 27\Delta^2\Delta'^2 - 4\Delta\Theta^2 - 4\Delta'\Theta^2 = 0$$

Salmon calcule les invariants de la conique et du cercle dans un système de coordonnées particulier qui en simplifie les expressions et aboutit à une équation du huitième degré qui est l'équation générale du lieu cherché.

La notion de covariant désigne aussi une fonction invariante, à un facteur constant près, non seulement des coefficients, mais aussi des coordonnées. La

⁴². Salmon, *Op. Cit.*, p. 370.

⁴³. Salmon, *Op. Cit.*, p. 470.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

signification géométrique des invariants et covariants d'un système de courbes est indépendante des axes auxquels sont rapportées ces courbes⁴⁴. Salmon, ayant établi les premières propriétés de ces notions, les utilise en choisissant des systèmes de coordonnées qui simplifient les équations. Il ne formalise pas une théorie de ces notions, mais montre plutôt comment elles peuvent être employées pour la résolution des problèmes.

La méthode des infiniment petits

« Les problèmes relatifs au tracé des tangentes, à la détermination des aires ou des longueurs des arcs de courbes, écrit Salmon, peuvent être traités par deux méthodes différentes : l'analyse et la géométrie »⁴⁵. Renvoyant le lecteur, pour la première, aux traités de calcul différentiel et intégral, il présente dans ce chapitre la méthode des infiniment petits. Elle consiste à considérer une courbe, en l'occurrence ici une conique, comme la limite des polygones inscrits, ou circonscrits, à cette courbe, dont le nombre de côtés devient infini. Elle est l'occasion de « donner une idée des procédés employés par les géomètres avant la découverte de l'analyse ». Sont exposés notamment la construction de la tangente à chacune des trois sections coniques, ainsi que l'expression de l'aire de l'ellipse et de son rayon de courbure au moyen de ses axes.

L'auteur montre dans ce dernier chapitre de l'ouvrage le profond intérêt qu'il porte à l'explicitation des méthodes. Il fait suivre une série de chapitres qui exposent des méthodes efficaces et parfois difficiles, pour certaines très récentes, par l'exposition d'une méthode plus ancienne et en général moins féconde, mais qui « peut, dans certains cas, conduire plus simplement et plus rapidement à une solution que l'analyse ». Il recherche la simplicité dans le choix de ses méthodes.

Conclusion

Salmon expose, dans un ouvrage d'enseignement qui se veut élémentaire, en plus des contenus de la géométrie analytique portant sur les droites, les cercles et les coniques, des méthodes pour la plupart récentes et pour la première fois organisées dans un traité didactique. Il s'agit de la méthode des notations abrégées, du principe de dualité et de la transformation par

44. Salmon, *Op. Cit.*, p. 487.

45. Salmon, *Op. Cit.*, p. 514.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

polaires réciproques, de la méthode des projections, des notions d'invariant et de covariant. Ces méthodes sont attribuées à leurs inventeurs respectifs, dont les principaux sont Chasles, Poncelet, Bobillier, Möbius, Plücker et Cayley. Salmon s'attache à appliquer ces méthodes à la résolution de problèmes plutôt qu'à en exposer une théorie. Il en montre les caractéristiques de généralité, en cherchant à étendre les théorèmes obtenus pour certaines figures à d'autres ; de fécondité en soulignant leur pouvoir d'invention ; et de simplicité, en s'efforçant de rendre ses démonstrations aussi aisées à suivre que possible.

Cet intérêt primordial pour les méthodes est l'occasion de souligner les différences entre les approches analytique et géométrique, sans pour autant les opposer. Au contraire, elles sont associées pour plus d'efficacité.

Cette double initiative d'intégrer dans un ouvrage élémentaire des méthodes récentes, et de combiner les conceptions analytiques et géométriques, connaît un succès éditorial remarquable. Vers l'étranger d'abord : l'édition anglaise de 1855 diffuse en France et en Allemagne, deux pays où l'ouvrage est rapidement traduit. Dans le temps ensuite : l'ouvrage est encore utilisé en Angleterre un siècle après sa première parution, célèbre au point d'être couramment appelé « le Salmon »⁴⁶.

1.2 Les auteurs français de géométrie analytique héritiers de Salmon et de Chasles

Qu'en est-il des ouvrages français d'enseignement de la géométrie analytique ? Introduisent-ils, à l'image de Salmon, de nouvelles méthodes ?

Concernant les programmes officiels, ils connaissent peu de changements. Le programme de la classe de mathématiques spéciales reste sensiblement le même que celui de 1853 pour la géométrie analytique, et il est conforme au programme d'admission commun aux Écoles polytechnique et normale. Cependant, les examinateurs ne se limitent pas toujours strictement au programme officiel, et, sous la pression des examens et concours, des ouvrages d'enseignement préparatoire de géométrie analytique étendent leur contenu au-delà. Prenons par exemple le sujet donné à la composition écrite pour l'admission à l'École polytechnique en 1873, et la solution publiée dans les *Nouvelles annales de mathématiques* par un élève :

46. Gow, Rod, « Georges Salmon 1819-1904. His mathematical work and influence », *Irish Mathematical Society Bulletin*, 39, 1997.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

On donne un cercle et un point A , on l'on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par le point donné A et à toucher en deux points le cercle donné [...]

La solution propose, d'emblée et sans justification, d'écrire l'équation générale des coniques doublement tangentes au cercle sous la forme :

$$x^2 + y^2 - r^2 - \lambda(x \cos \omega + y \sin \omega - p)^2$$

On reconnaît dans cette équation la combinaison de l'équation du cercle avec celle d'une droite élevée au carré, telle que Salmon en effectue dans son ouvrage lorsqu'il utilise les notations abrégées. Voici encore le deuxième sujet donné à l'École polytechnique en 1885 :

Soient les deux paraboles données :

$$y^2 - 2p_1x + 6x - 1 = 0$$

$$y^2 - 2p_2x - 4x + 3 = 0$$

On demande, 1° De trouver les relations du second degré en u et v , $f_1(u, v) = 0$ et $f_2(u, v) = 0$, qui expriment que la droite $ux + vy + 1 = 0$ est tangente soit à l'une, soit à l'autre de ces courbes [...]⁴⁷.

Ce sujet demande manifestement de trouver une relation sur les coordonnées tangentielles de la droite. Nous comprenons qu'il est avantageux de connaître la notation abrégée et les coordonnées tangentielles pour réussir le concours d'admission à l'École polytechnique.

D'autre part, les méthodes de Salmon sont utilisées dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, par exemple dans un article intitulé « Démonstration de quelques théorèmes de M. Steiner » portant sur les coniques inscrites dans un quadrilatère, et qui renvoie au traité de Salmon⁴⁸. Ce dernier publie d'ailleurs lui-même dans ce journal, et y est fréquemment cité.

Les ouvrages français intègrent-ils les nouvelles méthodes exposées par Salmon ? Le cas échéant, dans quel but ? Attribuent-ils ces emprunts à l'auteur du *Treatise on conic sections* ?

47. Rémond, *Exercices élémentaires de géométrie analytique*, 2^e édition, vol. 2, partie III, Paris : Gauthier-Villars, p. 17.

48. *Nouvelles annales de mathématiques*, 2^e série, tome 1, p. 78.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

Painvin (1866) : regagner le terrain perdu par la géométrie analytique sur la géométrie pure

Louis Félix Painvin (1826-1875) est professeur de mathématiques spéciales au lycée de Douai depuis 1860 lorsqu'il publie, en 1866, ses *Principes de la géométrie analytique*⁴⁹, qui seront suivis six ans plus tard d'un ouvrage complémentaire pour la géométrie de l'espace⁵⁰. Docteur et agrégé, auteur dans les *Nouvelles annales de mathématiques* et auteur de notes dans les *Comptes-rendus de l'Académie des sciences*, il enseignera ensuite, toujours en mathématiques spéciales, à Lyon en 1869, et à Louis-le-Grand à Paris en 1872. Dans cet ouvrage, il veut prouver, par la géométrie analytique, de nombreuses propositions établies dans le *Traité de géométrie supérieure* de Chasles, qu'il cite fréquemment :

Sous la puissante impulsion des Chasles, Steiner, Poncelet, etc . . . , la Géométrie pure a réalisé des progrès immenses et laissé, bien loin derrière elle, la Géométrie Analytique. Pour regagner le terrain perdu, nous ne devons négliger aucune des ressources de l'Analyse⁵¹.

L'ouvrage aborde les notions de polaires, de rapport anharmonique, de division homographique, d'involution, de transformation par polaire réciproque, d'homothétie par la géométrie analytique. Pour cela, Painvin introduit dès les premières pages de l'ouvrage plusieurs systèmes de coordonnées. En plus des coordonnées cartésiennes, il expose les coordonnées tangentielles, homogènes, trilatères et polaires. Cet apport est nouveau en France selon Painvin, qui se réfère à des ouvrages irlandais et allemand :

L'étude des coordonnées tangentielles n'a encore été présentée systématiquement dans aucun de nos ouvrages français, la Géométrie Analytique de MM. Briot & Bouquet n'en renferme guère que la définition, le traité de M. Salmon contient au commencement des notions un peu plus étendues [. . .] La géométrie analytique de M. Hesse [1861] est, je crois, le seul ouvrage dans lequel on ait fait un usage systématique de ces coordonnées⁵².

49. Painvin, Louis Félix, *Principes de la géométrie analytique. Géométrie plane*, Douai : Impr. Robaut, 1866.

50. Painvin, *Principes de la géométrie analytique. Géométrie de l'espace*, Paris : Gauthier-Villars, 1872.

51. Painvin, *Op. Cit.*, p. I.

52. Painvin, *Op. Cit.*, p. II.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Voici le sommaire de l'ouvrage :

Livre I	Ligne droite et point
Livre II	Cercle
Livre III	Discussion et réduction de l'équation générale du second degré
Livre IV	Notions générales sur les courbes
Livre V	Étude particulière des courbes du second ordre
Livre VI	[Sans titre, porte sur les coordonnées polaires, la construction des racines, les transformations par polaire réciproque et par rayons vecteurs réciproques]

Les titres des Livres font apparaître un plan classique, mais en réalité chaque Livre de l'ouvrage est traité successivement en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées trilatères, et enfin en coordonnées tangentielles, ce qui rend l'ensemble remarquablement volumineux. Painvin explique dans l'avertissement les raisons qui l'amènent à donner à son cours davantage d'extension que n'en prévoient les programmes :

Le cours que je publie aujourd'hui [...] renferme d'abord les matières exigées par nos programmes [...] Les parties complémentaires qui traitent des coordonnées trilatères et des coordonnées tangentielles [...] sont principalement destinées à des élèves de seconde année. [Elles] seront un aliment nouveau à leur curiosité ; et, [...] ils pourront, par cette étude, acquérir plus de ressources pour l'attaque et la résolution des problèmes, et élargir, en même temps, le champs de leurs idées sur la Géométrie.

Pour les points qu'il ne peut traiter dans le cadre de son ouvrage, dont le développement est malgré tout nécessairement limité, il renvoie « aux excellents traités de M. Salmon ».

Nous allons montrer comment Painvin démontre par la géométrie analytique des résultats de la géométrie rationnelle. Commençons par la première propriété des transversales à un triangle, le théorème de Menelaus, démontré en géométrie pure en exhibant deux triangles semblables. La proposition est démontrée ici de plusieurs façons.

D'abord, en coordonnées cartésiennes⁵³, l'auteur montre que si un segment M_1M_2 est coupé par une droite d'équation $Ax + By + C = 0$ en un

53. Painvin, *Op. Cit.*, p. 32.

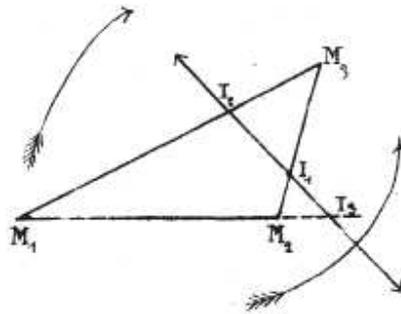
VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

point I , on a la relation :

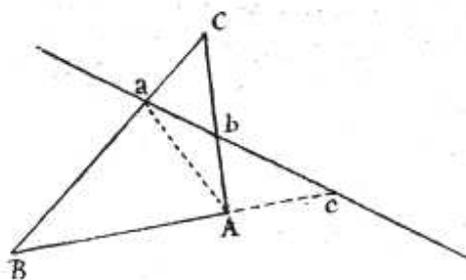
$$\frac{M_1 I}{I M_2} = -\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_1 + By_1 + C}$$

Donc si un triangle $M_1 M_2 M_3$ est coupé par une transversale $I_1 I_2 I_3$, la relation précédente appliquée aux trois côtés mène, en prenant le produit des trois égalités obtenues, à :

$$\frac{M_2 I_1}{I_1 M_3} \cdot \frac{M_3 I_2}{I_2 M_1} \cdot \frac{M_1 I_3}{I_3 M_2} = -1$$



La même démonstration est fournie par Salmon⁵⁴. Plus avant dans l'ouvrage, Painvin reprend la démonstration de cette proposition en coordonnées trilatères⁵⁵ - appelées « trilineaires » dans la traduction de l'ouvrage de Salmon -, en prenant pour axes les côtés du triangle ABC , de sorte que les coordonnées X, Y, Z d'un point sont égales, au signe près, à ses distances à ces trois côtés. L'équation de la sécante s'écrit $MX + NY + PZ = 0$,



54. Salmon, *Op. Cit.*, p. 50.

55. Painvin, *Op. Cit.*, p. 69.

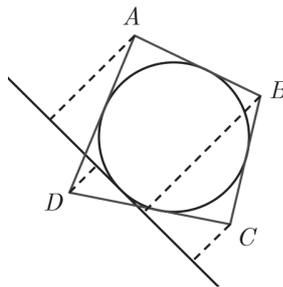
CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

donc pour le point a , situé sur le côté BC , on a $X_0 = 0$ et ses deux autres coordonnées vérifient $\frac{Y_0}{Z_0} = -\frac{P}{N}$. Or $Y_0 = Ca \sin C$ et $Z_0 = -Ba \sin B$. En remplaçant, et en multipliant les égalités obtenues pour les trois points a , b , c , on obtient le théorème de Menelaus :

$$\frac{Ca}{Ba} \cdot \frac{Ab}{Cb} \cdot \frac{Bc}{Ac} = +1$$

Autre exemple, voici un énoncé que Painvin tire du *Traité de géométrie supérieure* de Chasles :

Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à un cercle, si une tangente roule sur le cercle, le produit de ses distances à deux sommets opposés est au produit de ses distances aux deux autres sommets dans un rapport constant⁵⁶.



Painvin écrit les coordonnées tangentielles des quatre sommets du quadrilatère :

$$\begin{cases} A = au + a_1v - 1 = 0 \\ B = bu + b_1v - 1 = 0 \\ C = cu + c_1v - 1 = 0 \\ D = du + d_1v - 1 = 0 \end{cases}$$

L'équation $AC - \lambda BD = 0$ représente dès lors une conique inscrite dans ce quadrilatère, et donc le cercle considéré a une équation de cette forme. Les distances des quatre sommets à une tangente quelconque de coordonnées

⁵⁶. Painvin, *Op. Cit.*, p. 180.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

(u, v) sont :

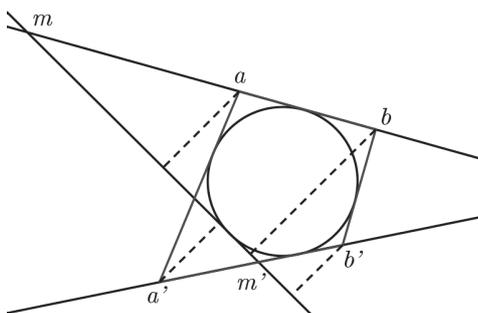
$$\overline{AA'} = \frac{au + a_1v - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{A}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \overline{BB'} = \frac{B}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \overline{CC'} = \frac{C}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\overline{DD'} = \frac{D}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Painvin en déduit :

$$\frac{\overline{AA'}. \overline{CC'}}{\overline{BB'}. \overline{DD'}} = \frac{A.C}{B.D} = \lambda$$

Pour démontrer ce théorème, Chasles avait recouru à la notion de division homographique. En effet, un quadrilatère $abb'a'$ étant circonscrit à un cercle, une tangente mm' à ce cercle décrit sur les droites ab et $a'b'$ deux divisions homographiques.



Or Chasles a montré qu'une propriété des divisions homographiques est l'existence d'une constante λ telle que :

$$\frac{ma}{mb} = \lambda \frac{m'a'}{m'b'}$$

Mais il est immédiat que le premier rapport est égal au rapport des distances des sommets a et b à la tangente mm' , et le second au rapport des distances des points a' et b' à cette tangente. Painvin conclut :

On voit ainsi que l'introduction des coordonnées tangentielles permet à l'analyse d'aborder les propriétés relatives aux tangentes avec la même facilité que les propriétés relatives aux points.

C'est par l'emploi simultané de ces deux systèmes de coordonnées, coordonnées d'un point, coordonnées d'une droite, que l'analytique pourra lutter avec la Géométrie pure⁵⁷.

⁵⁷. *Ibid.*, p. 181.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Painvin se montre soucieux de proposer des applications à son lecteur pour s'entraîner. Plusieurs Livres se terminent par des listes d'exercices à résoudre, pour un total de plus de trois cents énoncés, en plus de centaines de courbes à construire à partir de leurs équations. Par ailleurs, l'ouvrage se termine par quatre-vingt-deux questions de concours données entre 1812 et 1867. Cela confirme que l'ouvrage est destiné aux élèves préparatoires, et que les méthodes sont exposées dans le but de faire face aux questions des examens et concours.

Painvin propose ainsi à son lecteur, et certainement aussi à ses élèves de mathématiques spéciales, un ouvrage d'enseignement de la géométrie analytique étendu, qui se démarque nettement des ouvrages contemporains sur la même matière. Il expose, en préliminaires, divers systèmes de coordonnées, dont les coordonnées homogènes qui permettent de raisonner d'emblée dans un cadre général avec des points à l'infini. Les notions de géométrie rationnelle sont intégrées dans le déroulement du cours, et toujours démontrées par des méthodes analytiques, conformément à l'objectif affiché de l'ouvrage de regagner le terrain perdu par la géométrie analytique sur la géométrie pure.

Eugène Jubé (1866) : un recueil d'exercices tirés du traité de l'ouvrage de Salmon

Un recueil d'exercices est publié en 1866 qui s'inspire directement de l'ouvrage de Salmon. Les *Exercices de géométrie analytique* d'Eugène Jubé contiennent une centaine d'énoncés résolus, largement puisés dans l'ouvrage de Salmon de l'aveu même de l'auteur. Celui-ci est inspecteur d'académie, agrégé, auteur d'une dizaine d'articles dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, dont les signatures nous apprennent qu'il fut licencié ès sciences mathématiques et physiques, agrégé de l'université, et professeur de mathématiques spéciales au lycée de Saint-Omer. L'ouvrage est destiné aux élèves : « c'est avec la conviction d'être utile aux élèves des classes de mathématiques spéciales, que je publie ces exercices » écrit-il dans la préface. Il y attire l'attention du lecteur sur la notation abrégée :

Je recommande surtout à l'attention des élèves la méthode abrégée ; je ne sache pas qu'elle ait été présentée dans aucun des traités de géométrie analytique qu'ils ont entre les mains. Cependant c'est un procédé avantageux, introduit depuis longtemps dans l'enseignement chez nos voisins. Pourquoi rester en arrière dans

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

la patrie de Descartes ?⁵⁸

Jubé introduit donc assez rapidement dans l'ouvrage les notations abrégées « usitées dans plusieurs universités étrangères »⁵⁹. Cette notation est montrée d'abord sur des exemples élémentaires, comme de montrer que les médianes, les bissectrices, les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Jubé traite aussi du rapport harmonique, des premières propriétés de la polaire d'un point par rapport à un cercle et du quadrilatère complet ; il démontre les théorèmes dits de Brianchon et de Pascal. Ensuite, comme annoncé dès la préface, certains résultats de l'ouvrage de Salmon sont reproduits, dont les exemples que nous avons rencontrés ci-dessus sur l'interprétation de l'équation du cercle en coordonnées trilineaires, et sur les propriétés des tangentes aux sommets d'un triangle inscrit dans un cercle. L'ouvrage se termine par la résolution du problème dit des trois cercles.

Jubé expose donc les démonstrations d'un choix de propositions de géométrie de la ligne droite et du cercle seulement, comprenant notamment les premières propositions relatives à plusieurs notions de géométrie rationnelle, par des méthodes analytiques empruntées au traité de Salmon.

Émile Boquel (1872) : actualiser l'enseignement

Emile Joseph Boquel (1841-18..) est un ancien élève de l'École polytechnique, de la promotion 1861, professeur de mathématiques dans une école préparatoire. Voici comment il introduit en 1872 ses *Leçons nouvelles de géométrie analytique*⁶⁰ :

J'ai voulu leur [les élèves] donner les moyens de voir quel parti on peut tirer de certaines méthodes en Géométrie, j'ai cherché à leur inspirer le goût de cette admirable science.

Le second motif qui m'a déterminé à publier ces leçons et à les intituler « leçons nouvelles » est le changement radical qui s'est introduit peu à peu dans l'enseignement de la Géométrie Analytique. À tort ou à raison, les ouvrages qui sont aujourd'hui entre

58. Jubé, Eugène, *Exercices de géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales*, Paris : Noblet et Baudry, 1866.

59. *Ibid.*, p. 15.

60. Boquel, *Leçons nouvelles de géométrie analytique, à l'usage des candidats aux écoles polytechnique, normale supérieure et centrale des arts et manufactures*, Paris : Chauvin, 1872.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

les mains des élèves ne me paraissent plus en harmonie avec l'importance attribuée maintenant dans les cours et dans les examens à certaines questions. J'ai essayé de combler cette lacune, sans négliger pour cela les matières qui faisaient exclusivement l'objet de l'enseignement ancien.

Boquel introduit ainsi dans son ouvrage les notions de quadrilatère complet, de rapport anharmonique, de pôle et de polaire, de notation abrégée, de coordonnées homogènes, trilineaires et tangentielles. Les chapitres se terminent par des exercices, plusieurs centaines au total, souvent tirés des sujets de concours. À propos des pôles et des polaires, l'auteur indique qu'il a fait le choix d'un traitement analytique :

La théorie du pôle et de la polaire par rapport à un cercle, que nous avons faite ici à l'aide de la méthode analytique, peut être exposée aussi à l'aide de considérations de pure géométrie ; nous renvoyons pour l'étude de ces raisonnements aux traités spéciaux sur la matière⁶¹.

S'il ne cite pas l'ouvrage de Salmon, Boquel expose dans ses *Leçons* les théories qu'il contient et les emploie à la résolution de nombreux problèmes.

Conclusion

Le *Treatise on conic sections* de Georges Salmon est connu en France dès son édition anglaise en 1855 et par sa traduction française en 1870. Trois ouvrages d'enseignement de géométrie analytique pour la classe de mathématiques spéciales, deux de cours et un recueil d'exercices, écrits par des professeurs des classes préparatoires, exposent les méthodes contenues dans l'ouvrage de Salmon. Alors que le niveau des connaissances exigées aux concours et aux examens s'étend, et dépasse le cadre strict des programmes, ces auteurs proposent des contenus davantage conformes selon eux aux leçons données dans les classes. Ils montrent comment ces nouvelles méthodes de géométrie analytique permettent de résoudre certaines questions avec rapidité et simplicité.

Les notions de géométrie rationnelle, auxquelles s'appliquent efficacement ces nouvelles méthodes, sont abordées dans ces ouvrages.

61. *Ibid.*, p. 99.

1.3 Quelle réalité de l'enseignement préparatoire de ces méthodes ?

Quelle est, dans la suite de la période, la place faite dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique à ces nouvelles méthodes ? Si les trois ouvrages dont il vient d'être question connaissent sans doute peu de succès - une réédition pour celui de Painvin, aucune pour les deux autres -, certains ouvrages de la période précédente continuent en revanche d'être réédités. Nous allons montrer que leur contenu évolue peu, mais qu'en revanche, trois ouvrages édités entre 1882 et 1884 présentent une organisation et des contenus nouveaux.

Les rééditions d'ouvrages antérieurs

L'*Application de l'algèbre à la géométrie* de Bourdon connaît une septième édition publiée en 1872 et en 1875⁶². Cette version est annotée et complétée par Gaston Darboux, normalien de la promotion de 1861, agrégé et docteur, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand où il remplace Jean-Claude Bouquet, puis, à partir de 1872, maître de conférence à l'École normale supérieure. Cette édition ne fait pas mention des coordonnées homogènes, trilatères ou tangentielles, ni des notions de géométrie rationnelle. Quant à la troisième édition des *Leçons de géométrie analytique* de Briot et Bouquet, elle est à nouveau publiée en 1868, 1875, 1878 et 1883. Elle contient un chapitre consacré à la théorie des pôles et des polaires depuis l'édition de 1863, et un autre sur les propriétés générales des sections coniques depuis celle de 1865, qui traite rapidement des coordonnées trilineaires et des systèmes homographiques. Un troisième ouvrage connaît un succès durable, les *Éléments de géométrie analytique* de Sonnet et Frontera, qui, suite aux éditions de 1854 et de 1863, sont réédités en 1873, 1877, 1882, 1885, 1889, et encore à quatre reprises jusqu'à la première guerre mondiale. L'édition de 1877 se termine par un court chapitre d'une dizaine de pages aux coordonnées polaires, trilineaires et tangentielles.

Ces ouvrages n'intègrent donc pas ou peu les notions développées dans les ouvrages de Painvin et de Boquel. Ils procèdent selon des plans comparables, en introduisant les notions de coordonnées cartésiennes et d'équation d'une ligne, pour étudier ensuite les courbes et les surfaces du second degré

62. Bourdon, *Application de l'algèbre à la géométrie*, 7^e édition, Paris : Gauthier-Villars, 1872 et 1875.

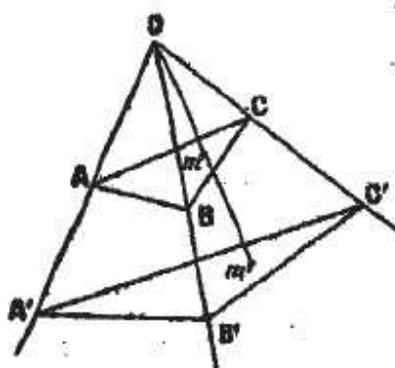
CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

essentiellement. Nous allons examiner trois ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique dont le contenu est considérablement plus étendu en comparaison de ceux que nous venons de mentionner. Ils sont publiés entre 1882 et 1884, c'est-à-dire quelques années après que Gaston Darboux succède à Chasles à la chaire de géométrie supérieure de la Faculté des sciences de Paris.

Le cours de Darboux à la Sorbonne (1879)

Le cours public que donne Darboux à la Faculté des sciences est publié en 1917⁶³. Les premiers Livres de l'ouvrage sont fidèles, d'après l'auteur, aux leçons données dès 1879. Darboux écrit s'être interdit « tout développement qui ne serait pas de nature à être compris par un bon élève de mathématiques spéciales ». Son intention est d'« exposer les principes sur lesquels reposent les découvertes géométriques qu'on doit à Monge et à son école », et non de réaliser un « exposé didactique et systématique ». Il ne s'agit donc pas d'un ouvrage de cours, ni d'un traité, mais de considérations épistémologiques et historiques sur les principes de la géométrie analytique.

Darboux aborde dès les premiers chapitres les notions de coordonnées homogènes, qu'il adopte dans toute la suite de l'ouvrage pour la généralité qu'elles confèrent aux démonstrations. Il prouve que les coordonnées trilineaires d'un point m dans un plan, relativement à un triangle ABC , sont les mêmes que celles du projeté m' de m à partir d'un centre O , relativement au triangle $A'B'C'$. Il en déduit que :



63. Darboux, Gaston, *Principes de géométrie analytique*, Paris : Gauthier-Villars, 1917.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

Toutes les propriétés d'une figure qui ne dépendent pas de la forme du triangle de référence s'étendront d'elles-mêmes à toutes celles qu'on en déduira par la perspective⁶⁴.

Une propriété établie en coordonnées trilineaires pour une figure, indépendamment des axes de coordonnées, vaut pour toutes les figures qui auraient les mêmes coordonnées mais dans un autre repère. En faisant varier le repère, Darboux étend d'emblée une propriété d'une figure à une propriété d'une classe entière de figures. Salmon avait évoqué ce procédé, sans développement néanmoins, pour justifier analytiquement ce qu'il appelle la méthode des projections. Darboux envisage donc ce que nous pouvons appeler une théorie analytique de la géométrie projective, qui étudie les propriétés des figures invariantes par transformations linéaires.

Dans les chapitres suivants, Darboux aborde encore le rapport anharmonique, la méthode des notations abrégées, la dualité fondée sur le recours aux coordonnées tangentielles. Il s'oppose, dans le chapitre sur les figures corrélatives, au refus de Chasles dans le *Traité de géométrie supérieure* d'employer les transformations :

Chasles [...] pensait que les méthodes de transformation ne doivent pas être utilisées systématiquement en Géométrie, parce qu'elles masquent la véritable origine des théorèmes qu'on obtient par leur emploi. Cette opinion est trop absolue, et contrairement aux prévisions de Chasles, les transformations jouent en Géométrie et en Analyse un rôle de plus en plus important⁶⁵.

Darboux expose dès 1879 dans le cadre de son cours à la Sorbonne, les principes d'une théorie analytique de la géométrie projective. Il défend l'emploi des coordonnées homogènes pour l'immédiate généralité des propositions établies. Il envisage une équation comme représentant une famille de courbes en faisant varier les axes de coordonnées, et soutient l'emploi des transformations en géométrie.

Trois manuels pour des conceptions élargies en géométrie analytique (1882-1884)

Trois manuels sont publiés dans les années qui suivent la prise de fonction de Darboux à la Sorbonne, qui étendent le champs de la géométrie

64. Darboux, *Op. Cit.*, p. 26.

65. Darboux, *Op. Cit.*, p. 93.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

analytique. Ils exposent les notions de la géométrie supérieure, traitent des coordonnées homogènes, trilineaires, tangentielles, abordent la notion d'invariants, autant de contenus qui ne sont pas exigés à l'examen d'admission à l'École polytechnique. Nous passons en revue ces ouvrages de théorie pour tâcher de comprendre qui en sont les destinataires.

Louis Didier Henry Picquet (1845-1925) est capitaine du Génie, polytechnicien de la promotion 1864, auteur de seize articles publiés dans les *Nouvelles annales de mathématiques* et dans le *Bulletin de la société mathématique de France* ; répétiteur à l'École polytechnique, il en sera examinateur d'admission en 1887 et occupera aussi la présidence de la Société mathématique de France. Il publie un *Traité de géométrie analytique à deux dimensions*⁶⁶ en 1882, et précise le public auquel il s'adresse :

Le *Traité de Géométrie analytique* que nous publions aujourd'hui est fait pour les élèves et pour tous ceux qui s'intéressent à cette science. Nous pensons que chacun, fort ou faible, saura y puiser dans la mesure de ses besoins, et eu égard au but qu'il poursuit.

La référence principale reste les élèves de mathématiques spéciales, mais l'auteur envisage un lectorat élargi, et en particulier conçoit que chacun ait un usage particulier de son ouvrage.

Picquet défend l'idée d'employer conjointement les méthodes géométrique et analytique :

En géométrie analytique, l'algèbre et la géométrie se prêtent un mutuel appui, et c'est par un judicieux emploi de chacune d'elles que l'on arrive à démêler les questions les plus complexes, dont, le plus souvent, l'une ou l'autre isolément serait impuissante à trouver la solution⁶⁷

Le premier Livre de l'ouvrage contient deux chapitres sur la dualité et l'homographie, placés par conséquent avant l'étude des courbes du second degré :

Nous avons surtout cherché à vulgariser l'emploi de ces méthodes, si connues et si appréciées aujourd'hui par le public savant et par le corps enseignant, mais que les élèves ignorent en général : nous avons nommé la dualité et l'homographie. En consacrant,

66. Picquet, Henry, *Traité de géométrie analytique à l'usage des candidats aux Écoles du gouvernement et aux grades universitaires*, Paris : Masson, 1882.

67. Picquet, *Op. Cit.*, p. 2.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

dès le début, quelques leçons à leur présenter franchement ces deux puissantes méthodes de transformation, quel large horizon n'ouvre-t-on pas à ceux qui apprennent, et combien d'efforts pénibles et stériles sont évités lors du développement ultérieur de l'esprit géométrique ?

La dualité et l'homographie sont les sujets du mémoire qui termine l'*Aperçu historique* de Chasles. Un chapitre est consacré à la dualité établie par le recours aux coordonnées tangentielles. Le chapitre suivant porte sur l'homographie et ses cas particuliers, l'homologie, l'homothétie, les figures égales et les figures semblables.

Le deuxième Livre traite la théorie générale des courbes planes, « croyant qu'elle doit être placée avant la théorie particulière des coniques ». Ce Livre aborde d'emblée les coordonnées homogènes, qui permettent de démontrer les propriétés des figures immédiatement dans un cadre général, c'est-à-dire ici projectif. Il expose le théorème de Bézout sur le nombre d'intersections de deux courbes algébriques, et introduit les notions d'invariant et de covariant, qui permettent de formuler des propriétés géométriques des courbes complètement indépendantes des coordonnées :

On conçoit que certaines propriétés géométriques d'une courbe soient complètement indépendantes du choix des coordonnées, du triangle de référence qui les définit⁶⁸.

Comme Darboux, il conçoit qu'une équation représente une classe de courbes considérée dans des repères différents. D'autres chapitres abordent les axes radicaux, les pôles et les polaires, la transformation par rayons vecteurs réciproques. Le troisième Livre traite des propriétés particulières des coniques et le quatrième de la construction de plusieurs courbes de degré supérieur à deux.

Les caractéristiques de l'ouvrage et les commentaires de l'auteur établissent qu'il s'agit d'un essai d'une présentation de la géométrie analytique dans un cadre immédiatement général par le recours aux transformations que sont la dualité et l'homographie, et l'usage des coordonnées homogènes.

Un second ouvrage est publié en 1884, les *Leçons de géométrie analytique* d'Émile Pruvost (1833-1913)⁶⁹. L'auteur est normalien de la promotion 1853,

68. Picquet, *Op. Cit.*, p. 187.

69. Pruvost, Émile, *Leçons de géométrie analytique à l'usage de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique*, Paris : Dupont, 1884.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

inspecteur général de l'Instruction publique, et ancien professeur de mathématiques spéciales dans plusieurs lycées, dont finalement Louis-le-Grand. Il écrit ses *Leçons* « à l'usage de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique ».

Au contraire de Picquet, il procède du particulier au général. Il introduit, par exemple, les notions de pôle et de polaire d'abord par rapport à deux droites, puis plus avant dans l'ouvrage par rapport à un cercle, et plus loin encore par rapport à une conique.

De nombreuses notions de géométrie supérieure ainsi que la théorie analytique des coordonnées trilinéaires et tangentielles sont exposées dans ce volumineux ouvrage de plus de sept cents pages. Il suit l'ordre didactique de la difficulté, c'est-à-dire que les notions plus abstraites apparaissent progressivement au fil de la lecture, laissant au lecteur la possibilité de choisir le niveau auquel il souhaite parvenir.

L'auteur du troisième ouvrage est Gaston Gohierre de Longchamps (1842-1906). Il est normalien de la promotion 1863, agrégé, professeur de mathématiques, puis de mathématiques élémentaires, puis de mathématiques spéciales dans plusieurs lycées, dont le lycée Charlemagne au moment de la publication de son *Cours de mathématiques spéciales*⁷⁰ entre 1883 et 1885, contenant trois volumes portant respectivement sur l'algèbre, et sur la géométrie analytique à deux et à trois dimensions.

Dans la géométrie analytique à deux dimensions, les deuxième et troisième leçons du premier livre traitent de courbes particulières comme la cissoïde, la strophoïde ou la conchoïde. Dans les leçons suivantes, l'équation de la ligne droite est d'emblée écrite en coordonnées homogènes. Nous pouvons en déduire que cet ouvrage s'adresse à un lecteur qui possède déjà des connaissances en géométrie analytique.

Le deuxième Livre sur la théorie générale des courbes planes est abordé d'emblée en coordonnées homogènes. Il précède un troisième Livre sur l'étude particulière des sections coniques.

De nombreux chapitres dans les leçons successives abordent encore les axes radicaux, les coordonnées tangentielles, les polaires et la méthode des polaires réciproques, l'homothétie et la similitude, l'homologie et l'homographie.

Le contenu de ces trois ouvrages est très étendu, en particulier si on le

70. Gohierre de Longchamps, Gaston, *Cours de mathématiques spéciales*, 3 vol., Paris : Delagrave, 1883-1885.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

compare aux programmes des concours. Ils s'adressent pourtant explicitement aux candidats aux concours et aux grades universitaires, et leurs auteurs sont d'éminents professeurs qui occupent des positions élevées dans la hiérarchie universitaire. Comment comprendre ce décalage ? D'abord de tels ouvrages sont écrits pour un public plus large que celui des élèves de mathématiques spéciales, et s'adressent aussi aux professeurs, et aux élèves et anciens élèves des Écoles du gouvernement qui s'intéressent à ces matières. Ensuite, le niveau des cours enseignés dans les classes de mathématiques spéciales est sans doute très hétérogène entre les établissements, les classes les plus exigeantes se trouvant à Paris et dans les villes principales de province. D'autre part, de nombreux élèves répètent cette classe, comme de nombreux enseignants multiplient les tentatives au concours de l'agrégation, jusqu'à obtenir le succès désiré. Les candidats redoublants sont plus à même de s'intéresser à des contenus plus difficiles que les stricts programmes officiels. Enfin, en 1877 est institué un enseignement dans les Facultés qui s'est développé très rapidement. Les professeurs et les élèves de ces nouveaux enseignements constituent un public potentiel pour ces ouvrages.

Ce sont des ouvrages de théorie. S'ils proposent de courtes listes d'exercices à la fin des chapitres successifs, ils ne se consacrent pas directement à la résolution des problèmes.

1.4 Deux recueils d'exercices à la fin des années 1880

Un autre type d'ouvrage expose les méthodes nouvelles de géométrie analytique : nous exhibons deux recueils d'exercices, publiés à un an d'intervalle, qui portent l'attention du lecteur sur les méthodes. Les auteurs en sont tous les deux des enseignants à l'École préparatoire Sainte-Barbe, qui profite du prestige apporté par ces publications. Nous analysons l'articulation entre les méthodes et les exercices dans ces ouvrages.

Le recueil de Koehler de 1886

Henri Camille Joseph Koehler (1837-1889), polytechnicien de la promotion 1856, ancien répétiteur à l'École polytechnique et ancien directeur des études de l'École préparatoire Sainte-Barbe, publie en 1886 des *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*⁷¹ en deux volumes, portant

71. Koehler, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure à l'usage des candidats aux écoles polytechnique et normale et à l'agrégation*, Paris : Gauthier-Villars,

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

respectivement sur la géométrie plane et sur la géométrie de l'espace. Examineur d'admission à l'École à partir de l'année suivante, il est l'auteur de plusieurs articles dans le *Bulletin de la société mathématique de France*, et dans les *Nouvelles annales de mathématiques*.

L'auteur réunit donc la géométrie analytique et la géométrie supérieure, ainsi que l'a entrepris Darboux lorsqu'il a pris la suite de Chasles. Il rédige un recueil d'exercices pour la préparation aux examens d'admission aux Écoles polytechnique et normale supérieure, ainsi qu'à l'agrégation. Il écrit dans la préface :

En dehors des publications périodiques, il n'existe en France aucun Recueil d'Exercices sur la Géométrie analytique [...] Je n'ai pas cru devoir me renfermer strictement dans les limites tracées par les programmes officiels ; je m'adresse aux bons élèves de Mathématiques spéciales, aux jeunes gens qui se préparent aux examens de l'agrégation, et, en conséquence, j'ai donné une large part à des méthodes analytiques et géométriques sur lesquelles on doit se borner, dans l'enseignement classique, à des aperçus très succincts. C'est ainsi que j'ai fait souvent usage des coordonnées tangentielles, et que j'ai consacré plus de deux chapitres de ce volume aux coordonnées trilineaires et à leurs applications⁷².

Koehler tire principalement ses énoncés d'un ouvrage de l'anglais Joseph Wolstenholmes, avec son accord, intitulé *A book of mathematical problems*⁷³. Il a puisé aussi dans l'ouvrage de Painvin, qu'il estime « à peu près introuvable » désormais, et dans les travaux de Darboux, Cayley et Salmon pour les propriétés des polygones inscrits et circonscrits à des coniques.

Nous remarquons dans le sommaire du premier volume sur la géométrie plane que les exercices sont organisés en chapitres. Certains sont liés à des figures particulières, le cercle, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole ; d'autres à des problèmes, comme l'inscription et la circonscription d'un polygone à des coniques ; d'autres à des méthodes, en l'occurrence l'emploi des coordonnées trilineaires ; et un chapitre, enfin, à la théorie « géométrique » des coniques, c'est-à-dire sans recourir aux coordonnées. Pour aborder ce dernier chapitre, il conseille la lecture préliminaire de l'appendice à l'ouvrage de géométrie

1886.

72. *Ibid.*, p. V.

73. Wolstenholmes, Joseph, *A book of mathematical problems*, Londres et Cambridge : Macmillan & co, 1867.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

	Pages
CHAPITRE I. — Cercle et systèmes de cercles.....	1
CHAPITRE II. — Ellipse, hyperbole, parabole (équations réduites)....	23
§ I. — Ellipse et hyperbole; tangentes, pôles et polaires, diamètres, triangles inscrits et circonscrits.....	23
§ II. — Propriétés focales de l'ellipse et de l'hyperbole (coordonnées rectilignes et polaires).....	33
§ III. — Parabole.....	43
CHAPITRE III. — Normales aux coniques. Triangles circonscrits à une conique et inscrits dans une autre.....	53
CHAPITRE IV. — Coniques définies par l'équation générale du second degré. — Systèmes de coniques satisfaisant à des conditions données.....	88
CHAPITRE V. — Intersection de deux coniques. — Coniques tangentes et osculatrices.....	119
CHAPITRE VI. — Coordonnées trilinéaires.....	137
§ I. — Formules fondamentales relatives à la ligne droite.....	137
§ II. — Formules fondamentales de la théorie des coniques.....	151
CHAPITRE VII. — Applications des coordonnées trilinéaires.....	169
§ I. — Applications à la ligne droite et au cercle.....	169
§ II. — Applications aux sections coniques.....	187
CHAPITRE VIII. — Théorie géométrique des coniques. — Transformation des figures.....	237
<i>Appendice.</i> — Sur les triangles et polygones dont les côtés enveloppent des coniques et dont les sommets se meuvent sur d'autres coniques fixes.....	270
CHAPITRE IX. — Courbes d'ordre supérieur.....	292
§ I. — Coordonnées cartésiennes.....	292
§ II. — Coordonnées trilinéaires.....	317

élémentaire de Rouché et Comberousse intitulé *Des méthodes en géométrie* que nous avons déjà analysé.

Koehler reconnaît son écart vis-à-vis des programmes et veut s'adresser non seulement aux bons élèves de mathématiques spéciales, mais aussi aux agrégatifs, dont le niveau du concours ne cesse de s'élever. Il tourne particulièrement son travail vers les méthodes, dont l'emploi des coordonnées tangentielles et trilinéaires, mais aussi les méthodes géométriques qui emploient le rapport anharmonique.

Le recueil de Rémond de 1887

Un jeune professeur de mathématiques spéciales à l'école préparatoire Sainte-Barbe, polytechnicien de la promotion 1884, Claude Joseph Adrien Rémond (1864-1935), publie en 1887 des *Exercices élémentaires de géométrie analytique*⁷⁴. La préface annonce un ouvrage portant sur les méthodes

74. Rémond, *Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions, avec un exposé des méthodes de résolution*, Paris : Gauthier-Villars, 1887.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

générales de la géométrie analytique :

Les *Traité*s de Géométrie analytique sont consacrés surtout à l'exposé des *théories générales* et ne peuvent indiquer que d'une manière incidente quelques applications. Aussi les élèves éprouvent-ils de réelles difficultés à résoudre les problèmes, et vont-ils un peu au hasard à la recherche des solutions.

L'Auteur de cet Ouvrage s'est moins préoccupé de réunir des Exercices de Géométrie analytique que d'exposer les Méthodes générales à employer pour résoudre les problèmes. L'élève qui les possède parfaitement n'éprouvera aucune difficulté à en faire l'application et pourra même se livrer à des recherches originales. L'emploi de ces méthodes donne parfois, en raison même de leur généralité, une solution un peu lourde ; mais cet inconvénient, qui ne se présente pour l'élève qu'au début de ses études, est largement compensé par le profit qu'il en tire en n'étant jamais arrêté par les questions qu'on lui propose.

Comme Koehler, Rémond expose d'abord des méthodes, et il oppose cette démarche à celle des traités, qui exposent des théories. Il s'adresse aux élèves de mathématiques spéciales qu'il veut munir de moyens de résolution des problèmes. Son intérêt primordial pour les méthodes l'amène à privilégier les solutions méthodiques à d'autres qui seraient plus simples.

Dans chaque chapitre l'auteur rappelle d'abord les résultats démontrés dans tous les cours professés conformément aux programmes officiels. Il donne ensuite la forme sous laquelle ces propriétés se présentent ou s'emploient dans les applications ; il énonce et démontre celles de ces propriétés qui forment la base de la méthode qu'il préconise, lorsqu'il y a lieu. Chaque chapitre se termine par des renvois à des sujets des concours et des examens qui sont regroupés à la fin d'un deuxième volume.

Les problèmes que résout Rémond sont en grande majorité des recherches de lieux géométriques. Les énoncés s'apparentent aux sujets donnés aux examens d'admission aux Écoles polytechnique, normale et centrale, ainsi qu'au concours général. Ces sujets sont d'ailleurs constitués en annales dans la deuxième partie du deuxième volume, où ils sont rangés par examen ou concours, et par année.

Rémond expose dans un chapitre préliminaire la « marche à suivre pour trouver l'équation d'un lieu géométrique »⁷⁵. Il y traite du « choix des axes »,

75. Rémond, *Op. Cit.*, p. 4.

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

qui doit viser à mettre en évidence certains points ou certaines droites de la figure, et de la « mise en équation ». Concernant cette dernière, il remarque qu'un lieu géométrique peut être défini de deux manières différentes, soit par une propriété commune à tous les points du lieu, soit par le mouvement d'un point du lieu. Dans le premier cas, explique Rémond, il suffit de traduire analytiquement la propriété demandée. Dans le second, plus général, on forme les équations de deux lignes qui, par leur intersection, donnent les points du lieu cherché. Il s'agit alors d'éliminer un paramètre λ entre deux équations de la forme :

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

$$\phi(x, y, \lambda) = 0$$

Ce chapitre préliminaire expose ensuite une théorie de l'élimination qui sera employée dans la suite de l'ouvrage. Il est suivi d'un chapitre sur la ligne droite qui traite notamment des coordonnées tangentielles. Ensuite, les chapitres successifs abordent le cercle, les coniques, les tangentes, les normales, le centre d'une conique, les diamètres conjugués, les axes et les sommets, les enveloppes, les pôles et les polaires, les foyers, la détermination des coniques et la construction des coniques. L'auteur regroupe donc ses exercices selon les notions géométriques.

Voyons sur un exemple tiré du chapitre intitulé « Pôle. Polaire » comment fonctionnent les méthodes de Rémond. Il rappelle en tête de ce chapitre⁷⁶, entre autres choses, que si α, β, γ sont les coordonnées homogènes d'un point P appelé pôle, et $F(x, y) = 0$ l'équation d'une conique, alors la polaire du point P a pour équation

$$\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z = 0$$

où F'_x, F'_y, F'_z désignent les demi-dérivées de la fonction F rendue homogène par rapport à chacune des variables. Cette forme de l'équation de la polaire est due à Plücker⁷⁷.

Le deuxième problème résolu a pour énoncé :

On donne une conique fixe C et une droite D ; on projette chaque point M de D sur la polaire de ce point par rapport à la conique C : on demande le lieu de cette projection⁷⁸.

76. *Ibid.*, p. 232.

77. Kline, *Op. Cit.*, p. 854.

78. *Ibid.*, p. 236.

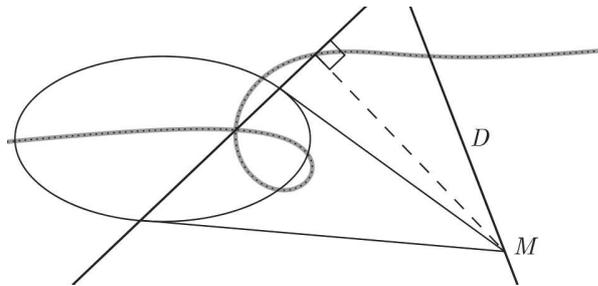
CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Rémond commence par faire un choix approprié des deux axes de coordonnées, en prenant pour l'un un axe de symétrie de la conique et pour l'autre la tangente en un point de cet axe à la conique C , dont l'équation est dès lors de la forme :

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0$$

La droite D a pour équation $Ax + By + C = 0$, et la polaire d'un point $M(\alpha, \beta)$ de la droite D a pour équation, d'après ce qui a été rappelé plus haut en prenant $F(x, y, z) = y^2 - 2pxz - qx^2$ et en faisant ensuite $z = 1$ et $\gamma = 1$:

$$\alpha(p + qx) - \beta y + px = 0 \quad \text{ou encore} \quad (\alpha q + p)x - \beta y + \alpha p = 0$$



L'équation de la perpendiculaire à cette polaire passant par le point M est :

$$\beta(x - \alpha) + (\alpha q + p)(y - \beta) = 0$$

Rémond obtient ainsi deux équations vérifiées par les coordonnées (x, y) d'un point du lieu cherché, auxquelles il ajoute l'équation exprimant l'appartenance du point M à la droite D :

$$\alpha(p + qx) - \beta y + px = 0$$

$$\beta(x - \alpha) + (\alpha q + p)(y - \beta) = 0$$

$$A\alpha + B\beta + C = 0$$

Il homogénéise les trois équations. La première et la troisième aboutissent à la proportionnalité :

$$\frac{\alpha}{Bpx + Cy} = \frac{\beta}{C(p + qx) - Apx} = \frac{\gamma}{-Ax - B(p + qx)}$$

VIII.1 De nouvelles méthodes en Géométrie analytique

Cette proportionnalité introduite dans la deuxième équation donne :

$$(q + 1)(Bpx + Cy)[C(p + qx) - Apx] + [Ay + B(p + qx)]\{qy(Bpx + Cy) + (x - p)[(Cq - Ap)x + Cp]\} - py[Ay + B(p + qx)]^2 = 0$$

C'est l'équation du lieu cherché. L'efficacité de la résolution que présente Rémond repose effectivement, comme cela était annoncé dans le chapitre préliminaire, sur un choix pertinent des axes et une habileté certaine à éliminer des paramètres entre des équations. À cela il faut ajouter le recours à des notions géométriques comme celles de polaires, de coordonnées homogènes et ailleurs de points à l'infini et de coordonnées tangentielles.

L'ouvrage a manifestement pour objectif de préparer à la résolution des problèmes posés dans les examens et concours, et ces problèmes sont majoritairement des recherches de lieux géométriques depuis les années 1860, qui mobilisent le plus souvent une très bonne connaissance des coniques. Rémond expose dans un chapitre préliminaire une structure générale pour la recherche des lieux géométriques, qui s'appuie sur une théorie de l'élimination. L'analyse et la géométrie sont employées conjointement, et les manipulations algébriques sont guidées par des considérations géométriques.

1.5 Conclusion

Le *Treatise on conic sections* de Salmon est diffusé en France à partir de 1855 puis traduit en 1870, et il rencontre un succès remarquable. Il est caractérisé par l'intérêt porté aux méthodes d'invention en géométrie, illustrées par la démonstration de nombreux théorèmes et la résolution de nombreux problèmes. L'ouvrage associe les conceptions géométriques et analytiques. Plusieurs des méthodes sont nouvelles dans un ouvrage d'enseignement élémentaire, notamment la méthode des notations abrégées, et l'emploi des coordonnées tangentielles, homogènes et trilineaires. Ces méthodes sont issues des travaux des géomètres de la première moitié du siècle, particulièrement Poncelet, Chasles, Bobillier, Möbius et Plücker.

Certains auteurs français, liés à l'enseignement en classe de mathématiques spéciales, puisent, pour réaliser leurs ouvrages, dans le texte de Salmon, bien que les nouvelles méthode ne figurent pas aux programmes officiels. C'est que, sous la pression des examens et concours, les programmes officiels sont dépassés dans certaines classes, et les nouvelles méthodes donnent souvent plus d'aisance et de facilité pour résoudre les questions difficiles. Par

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

ailleurs, ces méthodes donnent les moyens d'exposer analytiquement les notions de la géométrie supérieure du *Traité* de Chasles, comme l'entreprend Painvin dans son ouvrage.

Après que Darboux ait succédé à Chasles à la chaire de Géométrie supérieure de la Faculté des sciences, trois ouvrages d'enseignement de géométrie analytique sont publiés, qui sont plus conséquents que les ouvrages contemporains, et exposent, parfois dès le début de l'ouvrage, des théories récentes de géométrie analytique. Si des exercices entrecourent ces exposés théoriques, le statut de méthode des notions nouvelles n'est plus mis au premier plan.

Au contraire, deux recueils d'exercices sont publiés en 1886 et 1887 par des professeurs liés à l'École préparatoire Sainte-Barbe, qui sont organisés autour des méthodes, à destination des élèves candidats aux examens et concours.

2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

Nous avons vu dans la période précédente que les notions de géométrie rationnelle étaient introduites dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire. C'est néanmoins dans certains ouvrages de géométrie analytique des années 1840 que nous avons trouvé les plus importants développements de ces notions, et il est apparu que l'immense travail de Chasles dans le *Traité de géométrie supérieure* n'a que peu diffusé dans les ouvrages d'enseignement secondaire avant 1865. Ce *Traité* est complété en 1865 par la publication du *Traité des sections coniques*.

Cette troisième période voit la publication d'ouvrages d'initiation⁷⁹ à la géométrie supérieure, c'est-à-dire des ouvrages qui s'adressent à un lectorat qui ne connaisse que les *Éléments* de géométrie, pour le préparer à la lecture des traités de Chasles. L'ouvrage de Jacques Lenthéric, en 1865, est une compilation de plusieurs mémoires rendus à l'Académie des sciences de Montpellier. Il expose les notions de géométrie rationnelle de façon élémentaires et en lien avec la perspective centrale. La même année, l'*Introduction à la géométrie supérieure*⁸⁰ de Charles Housel se propose explicitement de vulgariser

79. Sur les ouvrages d'initiation, voir : Barbin, Evelyne, « L'exposé moderne des mathématiques élémentaires de Lucienne Félix (1959) : le genre "ouvrage d'initiation" », in Barbin E., Moyon M. (dir.), *Les ouvrages de mathématiques entre recherche, enseignement et culture*, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 117-130.

80. Housel, *Introduction à la géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1865

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

les traités de Chasles. Millet, enfin, rédige en 1870 les *Principales méthodes de géométrie moderne*. Dans quel but ces auteurs souhaitent-ils diffuser les notions de géométrie rationnelle ? Comment organisent-ils la présentation de ces notions en comparaison avec les ouvrages de Chasles ? Font-ils le lien avec la résolution des problèmes ?

Par ailleurs, quelques ouvrages d'enseignement de géométrie élémentaire introduisent les méthodes de géométrie rationnelle. Le *Traité de géométrie élémentaire* de Rouché et Comberousse aborde ces notions dans des appendices situés à la fin des Livres successifs. Les Frères des Écoles chrétiennes éditent un *Appendice* à leurs *Éléments de géométrie*. Qui sont ces auteurs ? Dans quelles circonstances entreprennent-ils d'introduire en géométrie élémentaire des notions de géométrie supérieure ? Font-ils le lien avec la résolution des problèmes et la démonstration des théorèmes ?

2.1 Les ouvrages d'initiation à la géométrie supérieure

En 1865, Chasles publie un *Traité des sections coniques*⁸¹ qui fait suite au *Traité de géométrie supérieure* de 1852, avec la même structure du général au particulier, par des moyens uniformes de démonstration, cette fois-ci pour établir les propriétés des sections coniques. Nous analysons trois ouvrages qui constituent une initiation à la géométrie supérieure de Chasles.

Jacques Lenthéric (1865) : la perspective pour comprendre et démontrer les théories de géométrie rationnelle

Jacques Lenthéric est professeur à l'École du génie de Montpellier. Il est l'auteur d'un *Cours d'Arithmétique*⁸² et d'un *Cours de Géométrie*⁸³. Il a écrit en 1848 et 1849 trois articles dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* sur les pôles et polaires. Il publie en 1865 un essai intitulé *Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie moderne*⁸⁴ qui est la compilation de trois mémoires précédemment rendus à l'Académie des sciences et lettres de Montpellier. Il paraît difficile de décider pour quel public est écrit cet

81. Chasles, *Traité des sections coniques*, Paris : Gauthier-Villars, 1865.

82. *Cours d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent aux écoles spéciales*, Paris : Bachelier, 1840.

83. *Cours de géométrie théorique et pratique*, Montpellier : Sevalle, 1844.

84. Lenthéric, *Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie moderne*, Nîmes : Clavel-Ballivet, 1865.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

ouvrage. Pour les membres de l'Académie intéressés par la géométrie ? Pour ses élèves de l'École du génie ? Quoi qu'il en soit, sa réédition en 1874 par la maison Gauthier-Villars indique l'intérêt qu'il est susceptible de présenter pour un public élargi.

Lenthéric cite d'emblée Poncelet et Chasles comme sources de son travail, dont voici la table des matières :

Chapitre	Titre
I	Notions préliminaires de perspective
II	Mode de transformation des figures planes
III	Méthode géométrique qui résulte de la transformation
IV	Théorie des transversales
V	Faisceau harmonique
VI	Pôle et polaire par rapport à deux droites
VII	Théorie du rapport anharmonique
VIII	Divisions homographiques de deux droites
IX	Faisceaux homographiques
X	Du pôle et de la polaire par rapport au cercle
XI	Droites conjuguées dans le cercle
XII	Contact des cercles
XIII	Propriétés des coniques
XIV	Cordes idéales des coniques
XV	Transformation des coniques
XVI	Théorie des polaires réciproques
XVII	Propriété fondamentale relative aux points d'une conique
XVIII	Propriété fondamentale relative aux tangentes d'une conique

Le plan montre comment l'essai est articulé autour des notions de la géométrie rationnelle, dont l'auteur donne à chaque fois les définitions et les premières propriétés. L'ouvrage est entièrement guidé par l'idée de transformation d'une figure :

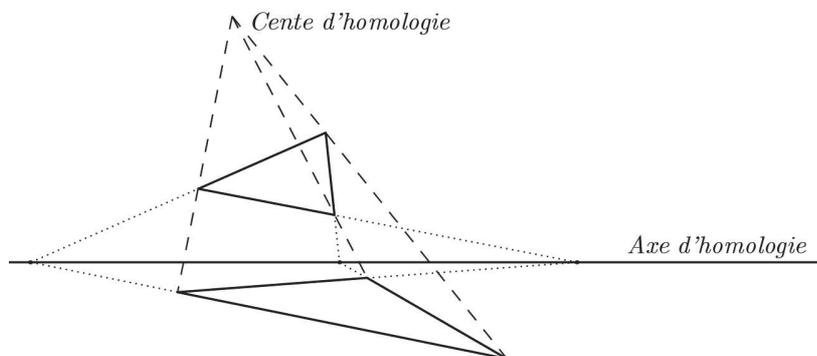
En modifiant, par un même procédé géométrique, la position de chacun des points d'une figure, on obtient une nouvelle ligne qui est dite la *transformée* de la première.

Si la transformée est une figure plus simple ou dont les propriétés soient déjà connues, on conçoit qu'elle pourra faciliter l'étude de la figure primitive ; par conséquent, tout mode de transformation constitue une méthode géométrique qui présentera plus ou moins

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

d'intérêt dans les applications⁸⁵.

La transformation des figures est présentée comme une méthode géométrique d'invention comme dans le *Traité des propriétés projectives* de Poncelet et l'*Aperçu historique* de Chasles. Plus particulièrement, Lenthéric se réfère dans tout l'ouvrage à la perspective centrale, qui est l'unique transformation envisagée, et dont il montre qu'elle revient à une homologie, transformation introduite par Poncelet⁸⁶. Deux figures sont homologues lorsqu'elles ont leurs sommets correspondants sur des droites qui concourent au même point, le centre d'homologie, et leurs côtés correspondants qui se coupent sur une même droite, l'axe d'homologie.



Lenthéric prouve que deux figures en perspective sont homologues et réciproquement⁸⁷, et recourt ensuite à ce mode de transformation direct des figures planes. Il distingue, conformément à la terminologie de Poncelet, les propriétés projectives, conservées par la transformation, des propriétés métriques, qui ne le sont pas toujours.

Prenons en exemple le théorème ci-dessous qui est le cas particulier d'une propriété de la polaire d'un point par rapport à une conique, telle que nous l'avons rencontrée notamment chez Servois, lorsque la conique est réduite à deux droites :

Étant pris sur deux droites deux séries de trois points correspondants, A, B, C et A', B', C' , les points de croisement M, N, P

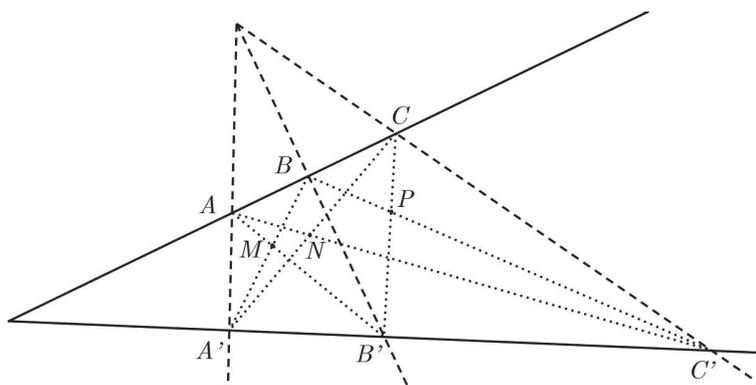
85. Lenthéric, *Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie moderne*, 2^e édition, Paris : Gauthier-Villars, 1874, p. 5.

86. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, p. 159.

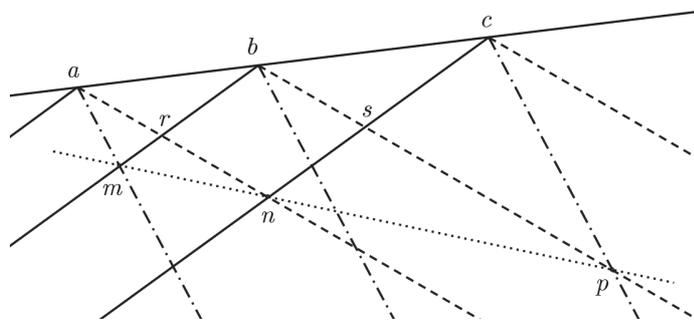
87. *Ibid.*, p. 10

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

des diagonales AB' , et BA' , AC' et CA' , CB' et BC' , seront en ligne droite⁸⁸.



L'auteur transforme la figure de façon que la droite $A'C'$ devienne ce que nous appellerons la droite de l'infini. Dans la figure transformée, les droites BA' , CA' deviendront deux parallèles et ainsi des autres. Il est plus facile de montrer dans cette nouvelle figure que les points m , n , p sont alignés. Lenthéric déduit de ce que les triangles arm et csp sont semblables, que les triangles mrn et nsp sont semblables aussi, et par conséquent que les points m , n , p sont alignés.



Lenthéric utilise aussi l'homologie pour inventer des propriétés. Il transforme la figure d'un triangle avec ses trois médianes concourantes et obtient la proposition :

Si dans le plan d'un triangle on a une transversale quelconque, et que l'on prenne sur chaque côté le conjugué harmonique des

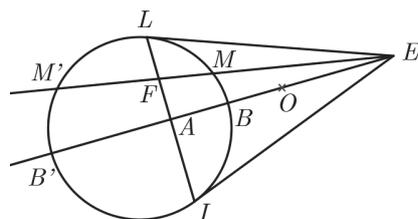
88. *Ibid.*, p. 25.

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

points de rencontre de la transversale, par rapport aux deux sommets du triangle ; en joignant chacun des points ainsi obtenus au sommet opposé, il en résultera trois droites qui se couperont en un même point ⁸⁹.

La transversale est la transformée de la droite de l'infini, et, en effet, le milieu d'un segment est le conjugué harmonique du point de la droite situé à l'infini.

Les notions de géométrie rationnelle sont interprétées en termes d'homologie. Par exemple, à l'occasion du chapitre sur les polaires, Lenthéric prouve que, étant donné un point E extérieur à un cercle, la corde de contact des tangentes menées de ce point au cercle est le lieu des conjugués harmoniques F du point E par rapport aux deux points d'intersection M et M' des sécantes menées au cercle du point E . Immédiatement, Lenthéric interprète ce



résultat en termes d'homologie : le cercle se reproduit, c'est-à-dire qu'il est son propre transformé, lorsqu'on prend E comme centre d'homologie et sa polaire IL comme axe d'homologie. Dès lors, un cercle peut être reproduit, en choisissant arbitrairement la droite envoyée à l'infini. C'est un cas particulier de la proposition qu'emploie Poncelet, à savoir que la figure constituée d'une conique et d'une droite quelconques peut être regardée comme la projection d'un cercle et de la droite de l'infini.

Ce résultat lui permet de démontrer le théorème suivant :

Dans un triangle inscrit à une conique, les intersections de chaque côté avec la tangente par le [sommet] opposé sont trois points situés sur la même droite ⁹⁰.

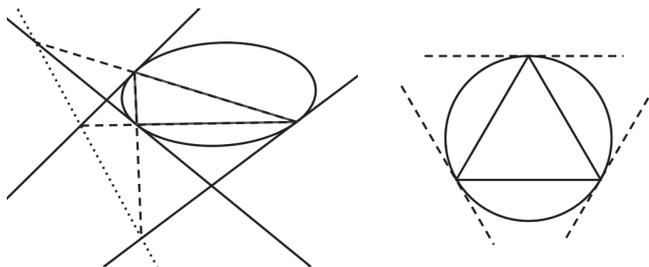
Lenthéric a montré que l'« on peut remplacer la conique par un cercle », et ensuite prend pour droite de l'infini la droite qui relie deux points d'intersection de deux côtés avec les tangentes par les sommets opposés, de sorte que

89. *Ibid.*, p. 33.

90. *Ibid.*, p. 70.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

le cercle soit reproduit. Dès lors, deux côtés du triangle inscrit dans le cercle sont parallèles à la tangente au cercle par le sommet opposé, ce qui impose que le triangle soit équilatéral. Le théorème est alors évident : les trois points d'intersection sont alignés sur la droite de l'infini.



Lenthéric démontre de la même manière les théorèmes de Pascal et de Brianchon, en se ramenant à un hexagone régulier inscrit dans un cercle.

Nous voyons donc que Lenthéric présente les notions de géométrie rationnelle du point de vue de l'homologie, c'est-à-dire la perspective ramenée dans le plan. Il interprète ces notions et leurs propriétés dans le cadre de l'homologie. Surtout, il utilise cette transformation pour inventer et démontrer des théorèmes, en se ramenant à une figure plus simple. En cela il se démarque complètement du *Traité de géométrie supérieure* et du *Traité des sections coniques* de Chasles, qu'il cite pourtant, ouvrages desquels sont écartées les méthodes de démonstration par transformation.

***L'Introduction à la géométrie supérieure* de Charles Housel (1865)**

Charles Housel (1817-18..), normalien de la promotion 1837, mais non agrégé, écrira encore, après l'*Introduction*, trois traités, de géométrie analytique, d'arithmétique et de géométrie élémentaire avec Justin Bourget, normalien de la promotion 1842 et agrégé. Il est aussi l'auteur d'une vingtaine d'articles dans les *Nouvelles annales de mathématiques*. Il réécrit explicitement le *Traité de géométrie supérieure* pour les élèves des classes de mathématiques spéciales :

On sait que les théories de l'ancienne Géométrie, telles que les expose le *Traité* de Legendre, sont devenues insuffisantes pour résoudre une foule de questions que les élèves sont appelés à traiter. Le but que nous nous proposons est d'exposer, avec les développements nécessaires, les méthodes modernes qui deviennent alors

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

indispensables. Pour cela, nous n'avons pu mieux faire que de prendre pour base de notre travail le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles, en cherchant à vulgariser cet ouvrage, si important pour la science, mais qui n'a pas été écrit en vue des examens et des concours.

Housel veut adapter l'ouvrage de Chasles à l'enseignement secondaire, dans le but de fournir aux élèves des moyens supplémentaires pour résoudre les questions de géométrie, et rejoint donc la constatation que les sujets des examens réclament davantage de connaissances que celles inscrites au programme. En effet, la solution donnée dans les *Nouvelles annales* au problème posé au concours général en 1851 repose sur l'emploi des faisceaux homographiques, qui ne figurent pas dans les programmes de mathématiques spéciales. Le sujet posé à l'École Polytechnique en 1863 est résolu dans les *Nouvelles annales* par l'emploi de propriétés des axes radicaux et des polaires. Housel présente son ouvrage comme le premier ouvrage élémentaire à traiter exclusivement de géométrie supérieure. « La plupart des Traités de Géométrie récemment publiés, écrit-il, contiennent un appendice où sont résumées les propriétés des transversales, des polaires, de l'involution, etc. ». Mais ces appendices sont restreints et ne permettent pas les développements que contient son ouvrage, dont voici le plan :

Ch I	Transversales
Ch II	Rapport harmonique, Polaires
Ch III	Polaires dans le cercle et les coniques
Ch IV	Puissance des points, Axes radicaux
Ch V	Rapport anharmonique, Division homographique
Ch VI	Théorie de l'involution
Ch VII	Applications de l'involution
Ch VIII	Centres de similitudes ou d'homothétie
Ch IX	Contacts d'un cercle avec trois autres
Ch X	Théorèmes et problèmes sur le triangles
Ch XI	Systèmes de points en ligne droite
Ch XII	Droites mobiles, Triangles homologues
Ch XIII	Figures homologues
Ch XIV	Figures homographiques et corrélatives
Ch XV	Théorème de Pascal etc.
Ch XVI	Théorèmes de Newton et de Carnot

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Ch XVII	Autres propriétés des coniques
Ch XVIII	Construction des coniques
Ch XIX	Rotation des figures

Comme pour Lenthéric, les chapitres sont articulés autour notamment des notions de géométrie rationnelle, mais cet ouvrage-ci est plus étendu et aborde les notions dans un cadre général. Quelques chapitres sont dédiés à la résolution de problèmes et à la démonstration de théorèmes, sur les contacts des cercles, sur les triangles et sur les coniques. Le chapitre sur les triangles contient une solution au problème dit de Malfatti. Les chapitres notionnels se terminent par des applications. La théorie des transversales permet de démontrer le théorème dit de la droite de Simson, le rapport harmonique aboutit à des problèmes de mesure de distances inaccessibles, la théorie des polaires est employées au tracé des tangentes à une conique, etc.

Le dernier chapitre introduit la notion de rotation, et plus précisément de centre instantané de rotation, exposée par Chasles en 1830 dans le *Bulletin de Férussac*⁹¹.

Housel reprend de nombreux éléments du *Traité de géométrie supérieure*, et intègre aussi des éléments étrangers à ce traité, comme le premier chapitre portant sur les transversales. Mais il ne reprend pas à son compte l'exigence d'uniformité de la méthode de démonstration que s'impose Chasles dans son *Traité*. Ainsi, dans le chapitre intitulé *Théorèmes et problèmes sur le triangle*, il opère des calculs algébriques sur les grandeurs. Dans le chapitre XIV, il utilise les coordonnées rectilignes pour démontrer certaines propriétés de l'homographie. Il utilise la perspective pour généraliser le théorème de Pascal du cercle aux coniques⁹², la projection cylindrique et le principe de continuité, d'abord formulé par Poncelet, pour démontrer le théorème de Newton⁹³ dont il a déjà été question. En particulier, l'ouvrage de Housel ne reprend pas la structure de celui de Chasles qui formule toutes les propositions en termes de rapport anharmonique et qui procède du général au particulier. Par exemple, Housel traite la notion de polaire par rapport à un angle avant celle de polaire par rapport à une conique.

Prenons le théorème de Pascal : il s'agit de montrer que les trois points d'intersection des paires côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique

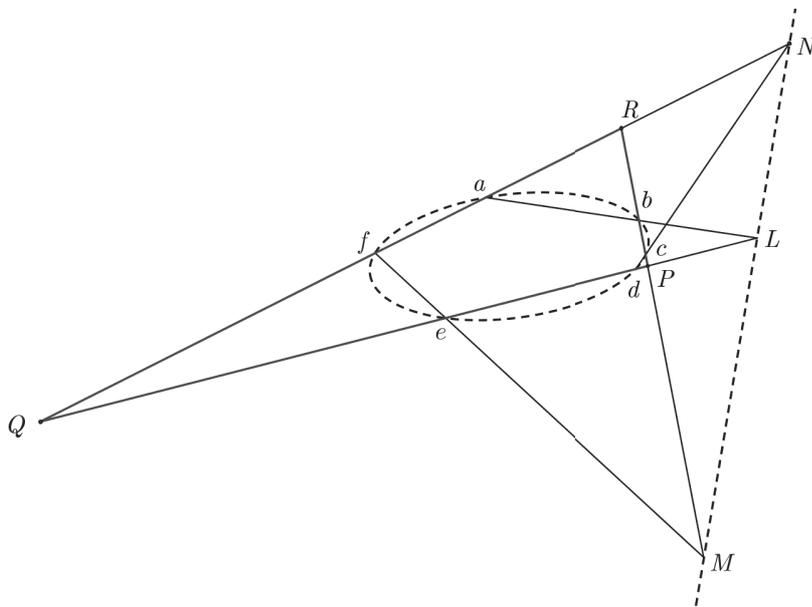
91. Chasles, *Bulletin général et universel des annonces et des nouvelles scientifique*, tome XIV, 1830, p. 321-326.

92. Housel, *Op. Cit.*, p. 204.

93. Housel, *Op. Cit.*, p. 216.

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

sont en ligne droite.



Housel se place d'abord dans le cas d'un cercle⁹⁴. Il considère le triangle PQR obtenu en prenant trois côtés non consécutifs de l'hexagone. Il applique trois fois le théorème sur la transversale à un triangle, en prenant successivement comme transversales les droites ef , ab et cd .

$$Pe.Qf.RM = PM.Rf.QeQa.Rb.PL = QL.Pb.RaPd.QN.Rc = Pc.RN.Qd$$

En multipliant ces égalités entre elles, et en remarquant que les produits $Pe.Pd$ et $Pc.Pb$, $Qf.Qa$ et $Qe.Qd$, $Ra.Rf$ et $Rb.Rc$ sont égaux deux à deux, il aboutit à l'égalité :

$$RM.PL.QN = PM.QL.RN$$

d'où il déduit que les points M , N et L sont alignés. Housel conclut ensuite que le théorème s'étend par perspective à une conique quelconque.

Voyons maintenant la démonstration que donne Chasles dans le *Traité des sections coniques*⁹⁵. Il s'appuie sur la propriété suivante du rapport anharmonique établie dans le *Traité de géométrie supérieure* :

94. Housel, *Op. Cit.*, p. 204.

95. Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 18.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Étant donnés deux faisceaux homographiques, si l'on prend dans le premier deux rayons quelconques A, B , et dans le second, les deux rayons homologues A', B' , la droite qui joindra le point d'intersection des deux rayons non homologues A, B' au point d'intersection des deux autres B, A' passera toujours par un même point fixe⁹⁶.

Chasles considère les faisceaux $a(b, c, e, f)$ et $d(b, c, e, f)$. La propriété fondamentale des coniques qui ouvre l'ouvrage de Chasles établit que ces deux faisceaux ont des rapports anharmoniques égaux. De là, les faisceaux $a(b, c, e, f)$ et $d(c, b, f, e)$ ont immédiatement des rapports anharmoniques égaux. L'application de la propriété ci-dessus établit que les droites bc, ef et la droite qui joint l'intersection des droites af et dc avec l'intersection des droites ab et de sont concourantes. C'est-à-dire que les points M, N et L sont alignés.

La démonstration de Housel procède du particulier au général, en recourant à une transformation. Au contraire, la démonstration de Chasles est déduite d'un théorème général sur les faisceaux homographiques. Comme dans le *Traité de géométrie supérieure*, elle va du général au particulier.

Si Housel se réclame de l'ouvrage de Chasles, nous voyons qu'il n'en reprend pas la méthode. Il introduit les notions contenues dans le *Traité de géométrie supérieure*, et en démontre les premières propriétés. Mais il ne procède pas de façon uniforme du général au particulier, et recourt à divers procédés de démonstration absents du *Traité*, comme le calcul sur les coordonnées et les méthodes de projection.

Millet (1870) : les méthodes de la géométrie rationnelle et leurs applications

Luc Alphonse Millet (1842-1877) est normalien de la promotion 1862, agrégé en 1865, professeur en classe de mathématiques élémentaires au lycée de Laval, puis au lycée de Troyes à partir de 1871. Dans son ouvrage intitulé *Principales méthodes de géométrie moderne*⁹⁷ il veut présenter la géométrie rationnelle de façon élémentaire :

Faciliter aux élèves l'étude de la Géométrie moderne, guider leurs premiers pas au moyen de nombreuses applications, tel est le but

96. Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, p. 75.

97. Millet, *Principales méthodes de géométrie moderne*, Deverdun, 1870.

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

spécial de cet ouvrage élémentaire⁹⁸.

Il signale dans l'avertissement des emprunts faits à Paul Serret et au *Traité de géométrie élémentaire* de Rouché et Comberousse que nous étudierons ensuite, mais n'évoque pas les cours de Briot qu'il a reçus à l'École normale sur la géométrie dite moderne.

Millet s'en tient à la ligne droite et au cercle, même s'il précise que « toutes les propriétés descriptives obtenues pour le cercle restent vraies pour les coniques⁹⁹ ». Le sommaire de l'ouvrage est décliné en « méthodes exposées » :

Ch I	Méthode des transversales
Ch II	Division anharmonique et faisceaux homographiques. Division harmonique
Ch III et IV	Pôles et polaires dans le cercle
Ch V	Méthode de transformation par les polaires réciproques
Ch VI	Méthode des figures semblables, et des figures égales
Ch VII et VIII	Figures inverses. Méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques
Ch IX et X	Propriétés projectives de figures
Ch XI	Méthode géométrique de Fermat pour la recherche des maxima et minima

Les titres des chapitres, comme celui de l'ouvrage, mettent en avant la notion de méthode. L'auteur expose des procédés successifs d'invention et les illustre par de nombreuses applications. En effet, chaque chapitre de l'ouvrage présente une méthode puis des applications de celle-ci. Lorsqu'une méthode couvre deux chapitres, c'est que le deuxième décline une série supplémentaire d'applications de la méthode. La « méthode des transversales », par exemple, consiste à montrer que trois points sont alignés ou que trois droites sont concourantes en utilisant les deux théorèmes principaux relatifs à une transversale dans un triangle. Deux chapitres qui ne relèvent pas de la géométrie moderne sont introduits « en raison de leur importance », les figures semblables et les maxima et les minima. Ces derniers n'étaient pas abordés dans les ouvrages que nous avons étudiés jusqu'à présent.

Millet décline donc une liste de méthodes géométriques en géométrie élémentaire de la droite et du cercle. Voyons comment un sujet du concours général donne lieu à quatre solutions différentes, présentées successivement

98. Avertissement.

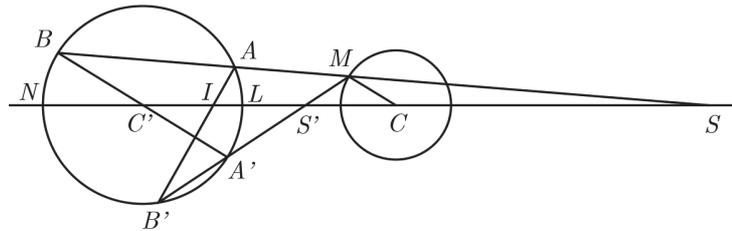
99. *Ibid.*, p. 212.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

et mettant en jeu chacune des méthodes décrites dans les quatre premiers chapitres. L'énoncé de ce problème est :

Étant donnés deux cercles qui ne se touchent pas [...] de chaque point M de l'un d'eux, on mène deux droites passant par les centres de similitude S et S' des deux cercles, ces droites rencontrent chacune le second cercle en deux points, on joint ces deux points deux à deux en croix, on demande de démontrer que, des deux droites ainsi obtenues, l'une est le diamètre du second cercle, l'autre passe par un point fixe¹⁰⁰.

Millet établit rapidement que BA' est un diamètre du cercle C' par la considération que BC' est parallèle à MC et $C'A'$ aussi. Pour la deuxième partie du théorème, quatre méthodes sont présentées.



Le première méthode fait intervenir les propriétés liées aux centres de similitude de deux cercles et à la puissance d'un point par rapport à un cercle. Millet aboutit à l'égalité :

$$\frac{IS'}{IS} = \frac{C'S}{C'S'} \cdot \frac{S'L \cdot S'N}{SL \cdot SN}$$

Ce dernier rapport étant constant, la position du point I est fixe.

La deuxième méthode est la méthode des transversales. Le triangle $S'MS$ est considéré comme étant coupé par les transversales AB' et BA' , d'où les relations :

$$\frac{SA \cdot MB' \cdot S'I}{MA \cdot B'S' \cdot IS} = 1 \quad \frac{SB \cdot MA' \cdot S'C'}{BM \cdot A'S' \cdot C'S} = 1$$

qui, multipliées entre elles, donnent :

$$\frac{SA \cdot MB' \cdot SB \cdot MA' \cdot S'C'}{MA \cdot B'S' \cdot BM \cdot A'S' \cdot C'S} = \frac{IS}{IS'}$$

¹⁰⁰. Millet, *Op. Cit.*, p. 62.

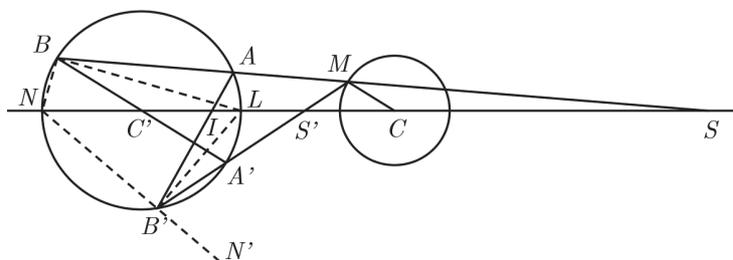
VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

Ce rapport est constant car $MB'.MA' = MA.MB$, donc le point I est fixe comme précédemment.

La troisième méthode est celle des faisceaux homographiques. Les faisceaux $B.NA'LA$ et $B'.N'A'LA$ sont homographiques car les angles entre les droites homologues des deux faisceaux sont égaux. L'égalité des rapports anharmoniques donne :

$$\frac{LC'}{NC'} : \frac{SL}{NS} = \frac{LS'}{NS'} : \frac{LI}{NI}$$

Là encore on trouve un rapport constant qui fixe la position du point I .



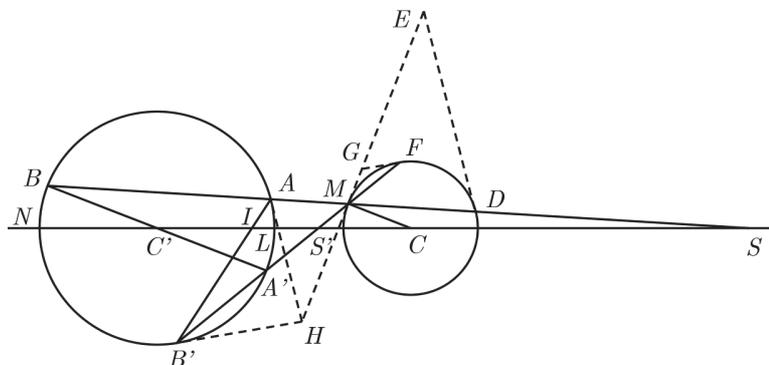
Enfin, la quatrième méthode utilise les pôles et les axes radicaux. Millet commence par montrer que le point H d'intersection des tangentes aux cercles aux points B et M appartient à l'axe radical des deux cercles. En effet, les tangentes ED et HA étant parallèles de par la similitude des cercles, le triangle HMA est semblable au triangle MED et donc isocèle comme lui. Ensuite, il prouve que la tangente en B' est $B'H$ et en déduit que lorsque H décrit l'axe radical, la corde AB passe constamment par le pôle I de l'axe radical par rapport au cercle C' .

L'auteur expose régulièrement une diversité de solutions possibles en variant la méthode à des énoncés qui sont souvent tirés du concours général. Dans le chapitre sur la méthode de transformation par les polaires réciproques par rapport à un cercle, Millet établit plusieurs théorèmes corrélatifs de théorèmes connus. Le théorème selon lequel les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes a pour corrélatif le théorème suivant :

Si, d'un point pris dans le plan d'un triangle, on mène des droites aux trois sommets, les perpendiculaires à ces droites, élevées par le point fixe, vont rencontrer les côtés opposés aux trois sommets, respectivement en trois points en ligne droite¹⁰¹.

101. Millet, *Op. Cit.*, p. 78.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT



Cet énoncé se trouve dans le *Traité de géométrie élémentaire* de Rouché et Comberousse dont nous parlerons bientôt¹⁰². Il poursuit avec la proposition selon laquelle les trois bissectrices sont concourantes, puis les trois médianes, et ainsi d'une dizaine de théorèmes.

Le chapitre VI expose une méthode que nous avons rencontrée à la période précédente, chez Lamé et ses héritiers, la méthode des figures semblables. Les premières applications qui en sont données sont les mêmes qu'alors, à savoir construire un triangle connaissant ses trois hauteurs, et inscrire un quadrilatère de forme donnée dans un autre quadrilatère donné.

Le chapitre VII porte sur la transformation par rayons vecteurs réciproques développée géométriquement dans l'ouvrage de Serret. Millet donne comme première application le théorème de Ptolémée exactement comme le fait Desboves dans ses *Questions de géométrie*, publiées la même année, et dont il sera bientôt question.

Le chapitre IX porte sur les propriétés projectives des figures « étudiées et mises en lumière par Poncelet »¹⁰³. L'auteur établit une la méthode pour montrer que des droites sont concourantes :

Méthode à suivre [pour démontrer que plusieurs droites AA' , BB' , CC' ... se coupent en un même point O]. On considère le point O comme défini par l'intersection de deux droites AA' et BB' , et on transporte le point O à l'infini [...] il suffira de prouver alors que cc' , dd' , projections perspectives de CC' , DD' sont parallèles à aa' , bb' , et on aura démontré que CC' , DD' passent par le point

102. Rouché, Comberousse, *Traité de géométrie élémentaire*, p. 220.

103. Millet, *Op. Cit.*, p. 167.

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

O ¹⁰⁴.

Une méthode similaire permet de montrer que des points sont en ligne droite. Ces méthodes ont été largement employées par Lenthéric. Elles sont mises ici en application pour prouver le théorème de Pascal en se ramenant au cas d'un hexagone régulier inscrit dans une conique.

Enfin, le chapitre XI aborde une méthode de détermination des maxima et minima que Millet attribue à Fermat. Cette méthode¹⁰⁵ a été remise à l'honneur par Duhamel en 1860 dans un mémoire rendu à l'Académie des sciences¹⁰⁶ sur « la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes », mémoire publié à part en 1860 chez Firmin Didot et à nouveau en 1864 chez Gauthier-Villars. Ce mémoire est une étude épistémologique et historique des méthodes en question¹⁰⁷.

Millet énonce la méthode de la façon suivante :

On prendra deux positions très voisines des parties variables de la figure, et on exprimera l'égalité des valeurs correspondantes de la fonction à rendre maximum ou minimum. La limite donnera le maximum ou le minimum¹⁰⁸.

Voici un exemple de la façon dont Millet met en œuvre cette méthode :

Inscrire dans un cercle un triangle isocèle dans lequel la somme de la base et de la hauteur soit un maximum¹⁰⁹.

Prenant deux positions ABC et $AB'C'$ très voisines du triangle, Millet déduit de l'égalité de la somme de la base et de la hauteur des deux triangles que le triangle ECC' est tel que $EC' = 2EC$. À la limite, la droite $CC'F$ devient tangente au cercle et la forme des triangles CDF et OCF étant connue comme celle du triangle ECC' , la droite CF peut être tracée et le triangle ABC construit.

104. *Ibid.*, p. 172.

105. Stromholm, Per, « Fermat's methods of maxima and minima and of tangents. A reconstruction », *Archives for History of Exact Sciences*, 5, 1968, p. 47-69.

106. Duhamel, « Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes », *Mémoires de l'académie des sciences de l'Institut impérial de France*, tome 32, Paris : Firmin Didot, 1864, p. 269.

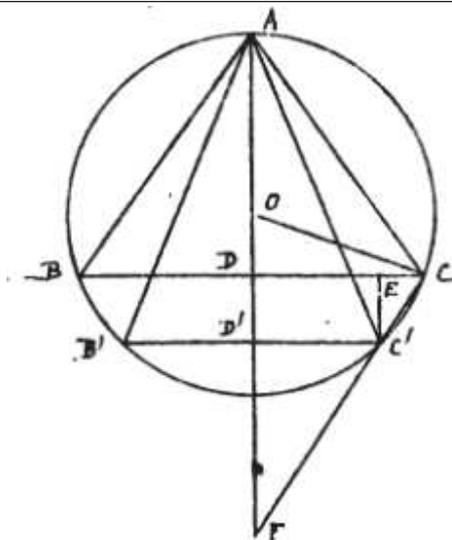
107. Giusti, Enrico, « Les méthodes des maxima et minima de Fermat », *Annales de la Faculté des Sciences*, Toulouse, (6) 18, 2009.

Barbin, Evelyne, *La révolution mathématique du XVIIe siècle*, Paris : Ellipses, p. 173-180

108. *Ibid.*, p. 214.

109. *Ibid.*, p. 220.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT



Dans son ouvrage, Millet expose une liste de méthodes géométriques employées pour résoudre de nombreux problèmes, notamment des problèmes posés au concours général, dont il donne parfois plusieurs solutions les unes à la suite des autres. Il réunit, dans un ouvrage qui se veut élémentaire en se limitant à la droite et au cercle, des méthodes formulées à partir de notions de géométrie rationnelle comme les transversales, le rapport anharmonique, les pôles et les polaires, auxquelles s'ajoutent des méthodes puisées à des sources diverses : la méthode des figures semblables telle qu'elle est exposée par Lamé dans son *Examen*, la transformation par polaire réciproque et les propriétés projectives issues des travaux de Poncelet, la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques exposée dans l'ouvrage de Serret, et la méthode des maxima et minima de Fermat analysée dans le mémoire de Duhamel.

Conclusion

Nous avons exhibé trois ouvrages d'initiation à la géométrie supérieure, publiés entre 1865, date de la publication du *Traité des sections coniques* de Chasles, et 1870. Ces trois ouvrages s'attachent à montrer la fécondité des notions de la géométrie rationnelle en donnant de nombreuses applications aux propositions établies, sous la forme de théorèmes et de problèmes. Si deux d'entre eux se réfèrent aux ouvrages de Chasles, aucun cependant ne

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

reprend la structure de ses traités, qui procèdent du général au particulier en établissant d'abord des propositions sur les notions de rapport anharmonique, d'homographie et d'involution, puis des théorèmes généraux et enfin des propositions particulières sur les figures.

Lenthéric décline les notions de géométrie rationnelle en lien avec la perspective centrale, ramenée à l'homologie, qu'il emploie fréquemment comme méthode de transformation ; Housel expose ces notions dans un cadre général, en variant les modes de démonstration : à ceux de la géométrie supérieure s'ajoutent les calculs en coordonnées et la méthode de transformation ; enfin Millet présente ces notions dans une liste de méthodes géométriques qu'il applique à la résolution de nombreux problèmes. Ces deux derniers ouvrages sont explicitement dédiés aux élèves, à partir sans doute de la classe de mathématiques élémentaires.

Nous avons montré que les auteurs de ces ouvrages restituent des notions établies dans des sources variées : outre les ouvrages de Chasles, ceux de Poncelet, de Serret, l'*Examen* de Lamé, et un mémoire de Duhamel sur les méthodes de Fermat.

2.2 Les notions de géométrie rationnelle dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

Nous poursuivons notre investigation dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire, comme discipline constituée et désignée comme telle par les programmes officiels.

Le *Traité de géométrie élémentaire* de Rouché et Comberousse (1866)

Eugène Rouché (1832-1910) est mathématicien, polytechnicien de la promotion 1852, docteur ès-sciences mathématiques en 1858, professeur au lycée Charlemagne et à l'École centrale, répétiteur à l'École polytechnique. Il a déjà publié des *Leçons nouvelles de trigonométrie*, lorsqu'il publie avec Charles de Comberousse en 1866 un *Traité de géométrie élémentaire*¹¹⁰ qui connaîtra un succès éditorial considérable jusqu'au milieu du XX^e siècle. Il écrira encore un *Cours de géométrie descriptive* et deviendra examinateur à l'École polytechnique.

110. Rouché, Eugène, Comberousse, Charles, *Traité de géométrie élémentaire*, Paris : Gauthier-Villars, 1866.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Les auteurs entament la préface par un discours sur l'histoire de la géométrie inspiré des propos de Chasles dans l'*Aperçu historique*. Ils évoquent, comme Painvin, le terrain gagné par la géométrie pure sur la géométrie analytique :

La Géométrie [pure] marche donc à grands pas dans une voie féconde. Grâce aux belles conquêtes de notre siècle, elle a regagné sur l'Analyse le terrain perdu¹¹¹.

Ils poursuivent en répondant à la question de savoir s'il faut ou non se limiter aux contenus des programmes officiels, et confirment ainsi les conclusions auxquelles nous sommes arrivés :

Il y a aujourd'hui deux manières d'écrire un livre destiné aux études : on peut se restreindre aux *Programmes officiels* et n'en pas franchir le cadre ; on peut aussi, en suivant strictement ces Programmes dans ce qu'ils ont d'obligatoire, aller au delà et essayer de les compléter. Pour appliquer une science, il ne suffit pas d'en connaître quelques parties ; il faut être familiarisé avec toutes ses méthodes, être maître de l'ensemble. Les magnifiques découvertes de la Géométrie moderne n'ont pas pénétré dans l'enseignement : délaissées par les Programmes, elles n'occupent pas dans la série des études mathématiques la place qui leur est due ; on en parle à peine et accessoirement en Géométrie analytique, où elles semblent bien à tort être une nouvelle conquête de l'admirable instrument créé par Descartes. Nous sommes loin de reprocher aux Programmes leur silence à cet égard : ils sont tellement chargés, qu'on serait mal venu à réclamer une addition. Mais ne peut-on *apprendre* un programme d'examen et essayer en même temps de *comprendre* la portée de la science que l'on étudie, en prenant une connaissance rapide, une vue générale de ses principales méthodes ? Telle est la pensée qui nous a guidés dans la composition de cet ouvrage¹¹².

Les auteurs font le choix d'exposer des méthodes de géométrie rationnelle dans un ouvrage de géométrie élémentaire, bien qu'elles ne soient pas officiellement aux programmes, car elles leur paraissent indispensables à la compréhension, qu'ils opposent à la mémorisation. L'ouvrage peut donc aussi être

111. *Ibid.*, p. XIII.

112. *Ibid.*, p. XIV.

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

conçu comme un ouvrage d'initiation. Cependant ces méthodes sont séparées du reste de la théorie et renfermées dans un appendice au troisième Livre sur les figures semblables :

L'Appendice du troisième Livre [est] un résumé de la plupart des nouvelles doctrines et une sorte de préparation à la lecture de la *Géométrie supérieure* de M. Chasles.

Sont traités sur une cinquantaine de pages le principe des signes, le rapport anharmonique, les triangles homologues, l'hexagone de Pascal, les proportions harmoniques, le quadrilatère complet, le pôle et la polaire dans le cercle, la méthodes des polaires réciproques, les figures homothétiques, les axes radicaux, la transformation par rayons vecteurs réciproques, les transversales. Le plus souvent, seules les premières propriétés de ces notions sont exposées, et appliquées à un nombre restreint de propositions. Nous allons signaler, dans ce cadre restreint, quelques éléments notables.

D'abord, les auteurs présentent plusieurs propositions et leurs démonstrations en parallèle de leur proposition et démonstration duale, pour mettre en évidence, conformément à la remarque de Chasles dans le *Traité de géométrie supérieure*, que l'emploi du rapport anharmonique se prête indifféremment aux points et aux lignes. Le théorème de Desargues et son dual son présenté de cette façon :

Quand deux triangles ABC , $A'B'C'$, ont leurs sommets situés deux à deux sur trois droites $OA'A$, $OB'B$, $OC'C$, concourantes en un même point O , leurs côtés se rencontrent deux à deux (BC et $B'C'$, AC et $A'C'$, AB et $A'B'$) en trois points α , β , γ situés en ligne droite

Quand deux triangle ABC , $A'B'C'$, sont tels, que leurs côtés se coupent deux à deux (BC et $B'C'$, AC et $A'C'$, AB et $A'B'$) en trois points α , β , γ situés en ligne droite, leurs sommets sont situés deux à deux sur trois droites $OA'A$, $OB'B$, $OC'C$ concourantes en un même point O ¹¹³.

Les démonstrations sont rédigées sur le même modèle, pour montrer que l'une se déduit de l'autre. Ensuite, Rouché et Comberousse emploient la transformation par polaire réciproque par rapport à un cercle pour inventer des propositions. Ils déduisent ainsi une proposition à partir de la proposition que trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, comme nous l'avons indiqué dans l'ouvrage, postérieur, de Millet.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Ils donnent encore les propriétés de l'homothétie, transformation ainsi nommée par Chasles. Ils l'emploient pour établir l'alignement des trois centres d'homothétie directe de trois cercles pris deux à deux, et pour définir la similitude dans le cas de figures curvilignes.

Enfin, ils citent l'*Examen* de Lamé à propos de la méthode des figures semblables, qu'ils emploient pour résoudre deux problèmes, la construction d'un triangle connaissant ses hauteurs, et l'inscription d'un triangle de forme donnée dans un triangle donné.

Ainsi, Rouché et Comberousse entreprennent, dans un appendice relativement court au troisième Livre de leur *Traité*, d'introduire les notions de la géométrie supérieure pour préparer leur lecteur au traité de Chasles.

L'Appendice aux *Éléments de géométrie* des Frères des Écoles chrétiennes

Les Frères des Écoles chrétiennes publient en 1878 un *Appendice aux Éléments de géométrie*¹¹⁴ qui complète leurs *Éléments de géométrie*¹¹⁵, rédigés pour « le brevet complet d'instruction primaire, le baccalauréat ès-sciences, et le brevet de fin d'étude ». L'*Appendice* s'adresse vraisemblablement aux élèves de mathématiques élémentaires ou de l'enseignement spécial pour qui ces *Éléments* de seraient pas suffisants.

La première partie porte sur des notions de géométrie rationnelle, tandis que les deux suivantes portent sur des propositions diverses, et des applications de la géométrie à la fabrication et à la construction. Le sommaire de la première partie de l'ouvrage, d'une trentaine de pages, est le suivant :

§I	Polygones étoilés
§II	Transversales
§III	Division harmonique
§IV	Pôle et polaire
§V	Figures homothétiques
§VI	Figures inverses
§VII	Axes radicaux
§VIII	Théorème de Guldin

114. F.I.C., *Appendice aux Éléments de géométrie*, 3^e édition, Tours : Mame et fils, Paris : Poussielgue frères, 1878.

115. F.I.C., *Éléments de géométrie*, 2^e édition, Tours : Mame et fils, Paris : Poussielgue frères, 1875.

VIII.2 Les notions de géométrie rationnelle et l'enseignement de la géométrie élémentaire

Aux deux extrémités du sommaire, il s'agit de construire quelques polygones étoilés, c'est-à-dire non convexes, particuliers, et de démontrer le théorème de Guldin qui permet d'établir la surface ou le volume d'un solide de révolution. Pour le reste, l'auteur décline une liste de notions de géométrie rationnelle dont il donne les définitions et démontre les premières propriétés, et le cas échéant la construction. Peu d'applications sont données, mis à part le théorème de Pascal pour l'hexagone inscrit dans le cercle et une propriété du quadrilatère complet. Les auteurs semblent considérer que ces premières connaissances sont suffisantes pour leurs élèves.

2.3 Conclusion

Ces cinq ouvrages partagent l'objectif commun de proposer une première approche des notions de géométrie rationnelle. Deux intentions ont été dégagées, introduire à la lecture des traités de géométrie supérieure de Chasles, et donner des méthodes de résolution des problèmes aux élèves des Lycées. L'accent est mis, dès lors, davantage sur la théorie ou davantage sur les méthodes.

Les trois premiers ouvrages sont des ouvrages d'initiation, qui opèrent des choix différents, et jamais conformes à l'exigence de Chasles d'une marche uniforme du général au particulier. Nous avons montré notamment qu'ils emploient aussi des méthodes algébriques et des méthodes de transformation.

Les deux autres ouvrages sont des manuels de géométrie élémentaire. Les notions de géométrie rationnelle y sont traitées à part, et de façon plus succincte que dans les ouvrages précédents. Cette initiative est isolée jusqu'à la publication de nouveaux programmes en 1891, puis en 1902, qui intègrent progressivement les notions d'homothétie, de centre de similitude, d'axe radical, puis de polaires, d'inversion, de rapport harmonique et anharmonique¹¹⁶. Dès lors, deux ouvrages paraissent en 1891 sur la géométrie rationnelle, l'*Introduction à l'étude de la géométrie moderne* de Charles Bioche¹¹⁷ et l'*Essai de géométrie rationnelle* de Bonnel¹¹⁸. Deux autres paraissent encore avant la fin du siècle, les *Premiers principes de géométrie*

116. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels 1789-1914*, p. 526-668.

117. Bioche, *Introduction à l'étude de la géométrie moderne*, Paris : Delagrave, 1891.

118. Bonnel, *Essai de géométrie rationnelle*, Lyon : Palud, 1891.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

*moderne*¹¹⁹ et les *Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne*¹²⁰.

3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

Dans la section précédente consacrée à la géométrie rationnelle, nous avons analysé des ouvrages qui exposent les théories de la géométrie rationnelle, et montrent ensuite comment elles permettent de résoudre des problèmes et de démontrer des théorèmes. Au contraire, les ouvrages dont il va être question maintenant partent de la volonté de trouver une solution à un problème ou une démonstration à un théorème pour recenser les moyens à leur disposition. Dans cette perspective, ils recourent éventuellement à des notions de géométrie rationnelle.

Dans notre deuxième période, nous avons examiné des ouvrages qui exposent des méthodes de résolution de problèmes, ceux de Guibal, d'Amiot, de Percin, de Comberousse. Ces méthodes occupent néanmoins une place marginale dans ces trois derniers manuels, et le premier ouvrage est particulièrement court. Les méthodes sont contenues dans un « complément » dans le *Cours* de Comberousse, font le sujet d'« observations sur la résolution des problèmes » dans les *Solutions raisonnées* d'Amiot, et constituent un chapitre du troisième livre du *Complément de géométrie* de Percin. Ces ouvrages déclinent plusieurs méthodes particulières de résolution, chacune étant illustrée par un petit nombre d'exemples.

Dans cette troisième période, les manuels d'enseignement secondaire de géométrie suivent le plus souvent de près les programmes officiels. Or ceux-ci ne mentionnent pas l'exposé de méthodes particulières. Ces méthodes n'y apparaissent donc pas. En revanche, et peut-être par conséquent, les méthodes de résolution des problèmes et de démonstration des théorèmes sont l'objet d'ouvrages qui leur sont entièrement dédiés¹²¹. Trois ouvrages sont ainsi publiés entre 1875 et 1882 en France qui exposent des méthodes explicitement

119. Duporcq, *Premiers principes de géométrie moderne*, Paris : Gauthier-Villars, 1899.

120. Richard, *Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne*, Paris : S^{té} d'éditions scientifiques, 1898.

121. Moussard, Guillaume, « The notion of method in 19th century French geometry teaching : three textbooks », Bjarnadottir, Kristin, Matos, Jose, Schubring, Gert (dir.), *Dig where you stand, Proceedings of the second international conference on the history of mathematics education*, Lisbon, UIED, 2012, p. 333-350.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

destinées à la résolution de problèmes et à la démonstration de théorèmes, accompagnées de plusieurs dizaines, voire de centaines, d'énoncés en relation avec les méthodes exposées : les *Questions de géométrie* d'Adolphe Desboves, les *Exercices de géométrie* de Frère Gabriel Marie et les *Méthodes et théories* de Julius Petersen. Leurs auteurs, pour stimuler l'intérêt du lecteur et illustrer l'efficacité des méthodes, s'attachent à présenter un certain nombre de questions originales.

Nous allons examiner ces ouvrages successivement, pour repérer les méthodes qu'ils recensent, en comparaison avec les méthodes particulières des ouvrages d'enseignement de la partie précédente, et analyser l'articulation entre les méthodes et les problèmes.

3.1 Desboves (1870) : les théories au service de la méthode

Adolphe Desboves, normalien de la promotion 1839, agrégé en 1843 et docteur ès sciences en 1848, est professeur au lycée Fontanes à Paris. Il publie en 1870 un recueil de *Questions de géométrie*¹²². La deuxième édition, de 1875, et à laquelle nous nous référerons, est « entièrement refondue et augmentée »¹²³.

L'auteur a déjà publié des *Questions de Trigonométrie* et des *Questions d'Algèbre*¹²⁴. Ces recueils sont tous trois réédités une ou deux fois. Le titre complet des *Questions de géométrie*, autant que la préface, sont clairs : l'ouvrage est celui d'un enseignant et s'adresse aux élèves des Lycées, toutes classes confondues.

Il veut « habituer les jeunes gens à bien enchaîner leurs idées, et à suivre,

122. Desboves, Adolphe, *Questions de géométrie : méthodes et solutions avec un exposé des principales théories et des notes sur les rapports entre l'algèbre et la géométrie*, Paris : Delagrave, 1870.

Barbin, « Que faut-il enseigner, pour qui, pour quoi : des réponses dans l'histoire des mathématiques », *Repères-IREM*, 38, 2000, p. 47.

123. Desboves, Adolphe, *Questions de Géométrie Élémentaires. Méthodes et Solutions avec un exposé des principales théories et de nombreux exercices proposés. Ouvrage destiné aux élèves des lycées depuis la classe de troisième jusqu'à celle des mathématiques spéciales inclusivement*, Paris, Delagrave, 1875.

124. Desboves, *Questions de trigonométrie, méthodes et solutions, avec plus de 400 exercices proposés*, Paris : Delagrave, 1872.

Questions d'algèbre élémentaire, méthodes et solutions, avec un résumé des principales théories et un très grand nombre d'exercices proposés, Paris : Delagrave, 1873.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

dans toutes ses parties, un raisonnement continu ». C'est que « la géométrie est la science du raisonnement par excellence » et les exercices rendent « leur intelligence plus lucide et plus ferme ». La géométrie est aussi « la partie des Mathématiques la plus propre à faire naître le goût des recherches et à éveiller l'esprit d'invention ». Ainsi, Desboves propose d'enseigner d'abord la géométrie élémentaire d'Euclide et de Legendre avec laquelle « l'intelligence est d'autant mieux tenue en haleine que ses ressources sont plus restreintes », et de n'enseigner qu'ensuite les « méthodes générales qui ont renouvelé la Géométrie », afin que les élèves « en sentent d'autant mieux le prix, [qu'ils] résolvent, à première vue, les questions dont la solution leur avait coûté auparavant le plus d'efforts. La méthode d'inversion et la méthode infinitésimale sont celles dont ils apprécient le mieux l'élégance et la fécondité »¹²⁵.

L'ouvrage est composé de deux parties. La première présente des théories, dont plusieurs sont nouvelles en comparaison avec la première édition. Nous détaillerons quelles sont ces théories, et comment elles s'articulent, dans un ouvrage de *Questions*, avec la résolution des problèmes. La deuxième partie porte sur les méthodes ; elle est partagée en quatre chapitres traitant successivement des théorèmes, des lieux géométriques, des problèmes, et de la détermination de maxima et de minima. De nombreuses questions illustrent chacun de ces quatre chapitres, tous terminés par une liste d'une centaine d'exercices à résoudre. Certaines questions ont été ajoutées à l'occasion de cette deuxième édition, dont notamment la solution du problème de Malfatti, celle de la construction d'un quadrilatère connaissant ses côtés et sa surface, des propositions concernant le cercle dit des neuf points, et d'autres concernant les cercles faisant entre eux des angles donnés. Plusieurs solutions sont fréquemment proposées pour la résolution d'une même question,, ce qui ne manquera pas d'attirer notre attention. Enfin, de nombreuses figures, regroupées sur des planches en fin d'ouvrage, illustrent les démonstrations.

Pour établir les listes d'exercices non résolus, ajoutées par rapport à la première édition, Desboves déclare avoir sollicité l'aide de ses collègues et puisé dans l'ouvrage de Chasles sur les porismes¹²⁶. Le *Traité des porismes* est, d'après une note dans les *Collections mathématiques* de Pappus, un ouvrage perdu d'Euclide, que plusieurs mathématiciens ont tenté de reconstituer depuis la Renaissance. La reconstitution de Chasles contient plus de deux cents propositions de géométrie élémentaire.

125. Desboves, *Questions de géométrie*, p. III.

126. Chasles, *Les trois Livres de porismes d'Euclide*, paris : Mallet-Bachelier, 1860.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

Les théories au service de l'invention

La première partie sur les théories met en évidence plusieurs situations où des propositions sont inventées à partir de propositions connues. Les théories contenues dans cette partie sont les transversales, la division harmonique, les pôles et polaires, l'usage des signes en géométrie, les axes et plans radicaux, les figures homothétiques, les figures inverses, les projections orthogonale et conique, le rapport anharmonique, la division homographique, l'involution, les polaires réciproques, la géométrie infinitésimale et le déplacement des figures. Desboves s'en tient à chaque fois à l'exposé de quelques théorèmes principaux, pour arriver rapidement aux applications qui l'intéressent ici. Par exemple, pour la théorie des transversales, il expose les théorèmes dits aujourd'hui de Menelaüs et de Ceva, et démontre en application le théorème de Pascal. Nous avons choisi d'illustrer six de ces théories pour montrer comment elles permettent l'invention de propositions nouvelles.

Le premier exemple concerne le théorème de Brianchon qui établit que les trois diagonales d'un hexagone circonscrit à un cercle sont concourantes. La notion de rapport harmonique et ses premières propriétés permettent de définir la polaire d'un point par rapport à un cercle. Desboves montre que des points alignés ont des polaires concourantes et réciproquement que des droites concourantes ont des pôles alignés. L'auteur traduit immédiatement cette proposition en termes de méthode, en affirmant que « les deux questions de prouver que des droites se coupent en un même point ou que des points sont en ligne droite reviennent l'une à l'autre »¹²⁷. Une des applications proposées est la démonstration du théorème de Brianchon :

Quand un hexagone est circonscrit à un cercle, les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point¹²⁸.

Soient l'hexagone $ABCDEF$ tangent à un cercle, et I, G, H, K, L, M , les points de contact : tirons la diagonale AD et les deux cordes de contact IG et LK .

Les points A et D sont les pôles des cordes IG et LK , et, par conséquent, la diagonale AD est la polaire du point de rencontre de ces deux cordes ; de même, les diagonales EB et FC sont les polaires des points de rencontre Q et R des deux couples de cordes (GH, LM) et (IM, HK) . Mais les trois points P, Q, R sont les points de rencontre des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans

127. *Op. Cit.*, p. 17.

128. *Op. Cit.*, p. 17.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

un cercle, et, par suite, sont en ligne droite. Donc les droites AD , FC , EB se coupent en un même point.

Le deuxième exemple concerne les figures inverses, ou réciproques, telles qu'elles sont décrites dans les ouvrages de Serret et de Rouché et Comberousse. La définition des figures inverses est donnée :

Deux figures sont dites *inverses* ou *réciproques* l'une de l'autre, lorsque leur points sont, deux à deux, sur des droites qui concourent en un même point, et que le produit des distances de ce point aux points des figures ainsi associés deux à deux est un nombre constant. Le point de concours des rayons vecteurs s'appelle *origine*, et on donne le nom de *puissance d'inversion* au produit constant ¹²⁹.

Desboves dépasse cette définition liée aux figures pour concevoir les propriétés de la transformation en elle-même :

Une figure et une origine arbitraire étant données, il est évident qu'on pourra toujours construire une figure réciproque et une seule, qui corresponde à une valeur donnée, positive ou négative, de la puissance d'inversion.

Nous passons d'une propriété constatée de deux figures figées à un procédé de construction d'une nouvelle figure à partir d'une figure donnée. Une première propriété de ce procédé est établie :

Théorème I. Le rapport de la distance de deux points d'une figure à celle de leurs correspondants dans une figure réciproque est égal à la puissance d'inversion divisée par le produit des distances de l'origine aux deux points de la seconde figure ¹³⁰.

Ce théorème permet d'établir le théorème souvent appelé de Ptolémée, qui est aussi l'exemple que donnent Serret ¹³¹, et Rouché et Comberousse ¹³², pour illustrer la méthode par inversion :

Lorsque trois points a , b , c sont en ligne droite, on a évidemment

$$(1) \quad ac = ab + bc.$$

129. *Op. Cit.*, p. 46.

130. *Op. Cit.*, p. 47.

131. Serret, *Des méthodes en géométrie*, Paris : Mallet-Bachelier, 1855.

132. Rouché, Comberousse, *Traité de géométrie élémentaire*, Paris : Gauthier-Villars, 1866, p. 241.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

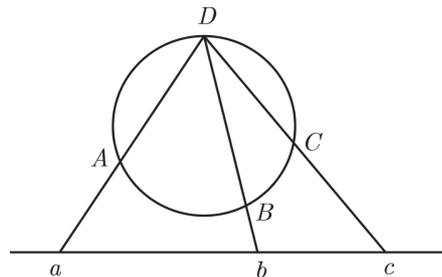
Transformons la propriété à l'aide du théorème I. Soient D l'origine et A, B, C les points qui correspondent à a , b , c sur la figure réciproque de la droite ac : on sait que cette figure est une circonférence passant par le point D¹³³, et, par suite, le quadrilatère ABCD est inscriptible. Mais on a

$$ac = \frac{AC \times I}{DA \times DC}, \quad ab = \frac{AB \times I}{DA \times DB}, \quad bc = \frac{BC \times I}{DB \times DC}$$

et en substituant dans l'égalité (1) les valeurs de ac , ab , bc , puis chassant les dénominateurs, il vient

$$(2) \quad AC \times DB = AB \times DC + BC \times AD;$$

donc dans tout quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés¹³⁴.



Nous voyons que ce procédé de construction, à partir d'une figure donnée, de sa figure inverse, permet de transformer une propriété de la première en une propriété de la seconde, au moyen du théorème I. D'un procédé de construction, a donc été déduit un procédé de transformation des propriétés des figures, et même un procédé d'invention de propriétés. En effet, le mode de présentation suggère clairement que, à partir d'une propriété connue, et dans le cas présent triviale, l'auteur en déduit une autre, non triviale celle-ci, par un procédé systématique qui ne fait appel à aucune intuition. La notion de transformation n'est toutefois pas abstraite de chaque contexte particulier. Cela est mis en évidence notamment par le fait que le vocabulaire

133. référence au théorème établi p. 49 de l'ouvrage : *La figure réciproque d'une ligne droite est une circonférence passant par l'origine.*

134. *Op. Cit.*, p. 51.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

employé n'est pas uniforme : ce qui est appelé « centre » pour deux figures homothétiques s'appelle « origine » pour deux figures inverses.

Le troisième exemple concerne les propriétés projectives des figures. Dans la continuité de ce qui précède, l'auteur définit la « méthode des projections » comme étant « une méthode de transformation comme celle des figures réciproques »¹³⁵. Deux types de projection sont décrits. La « projection orthogonale » d'abord. Certaines propriétés conservées par cette projection, dites propriétés projectives, sont rappelées et permettent, par exemple, d'« étendre à l'ellipse, avec modifications convenables, certaines propriétés du cercle, en général, celles qui dépendent de la direction des droites et non de leur grandeur »¹³⁶. En particulier, « le théorème de Pascal relatif à l'hexagone inscrit dans un cercle se trouve immédiatement étendu à l'ellipse ».

Vient ensuite la « projection conique ou perspective ». De même, à l'énoncé des propriétés conservées par cette projection, succèdent la démonstration de propositions. Ainsi, on obtient immédiatement l'extension « aux trois coniques des théorèmes de *Pascal* et *Brianchon* »¹³⁷.

Ces trois exemples nous montrent comment Desboves produit les premières propositions de théories, pour la plupart des théories récentes de géométrie rationnelle, pour immédiatement les appliquer à l'invention de propositions nouvelles à partir de propositions connues.

Une seule de ces « théories » relève de connaissances géométriques antérieures au XIX^e siècle, à savoir les principes élémentaires de géométrie infinitésimale, qui trouvent leur origine dans les travaux géométriques du XVII^e siècle avant l'invention du calcul infinitésimal. Il est intéressant de noter que Salmon aussi, comme nous l'avons vu, a introduit ces notions dans son *Traité* sous le nom de « méthode des infiniment petits », et que Duhamel les analyse dans un mémoire de 1865. Desboves ne mentionne pas ces auteurs, et s'explique ainsi de son initiative :

On pourrait penser que la [méthode infinitésimale] ne devrait pas trouver place dans un ouvrage élémentaire. Mais je me suis assuré, par l'expérience d'un long enseignement, que, dans les limites où je l'ai renfermée, elle est très-bien comprise et fort goûtée des élèves, qui en font souvent d'ingénieuses applications. D'ailleurs j'ai voulu que les jeunes gens pussent entrevoir ce monde nouveau

135. *Op. Cit.*, p. 52.

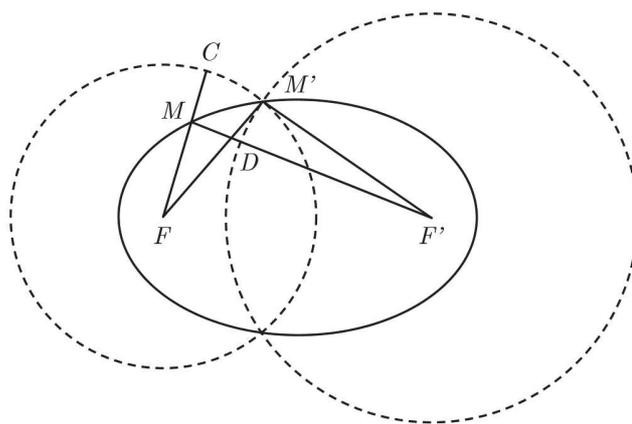
136. *Op. Cit.*, p. 53.

137. *Op. Cit.*, p. 58.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

des infiniment petits, le plus beau que le génie de l'homme ait créé. Peut-être que les premières semences ainsi jetées, venant à tomber sur quelques esprits bien doués, se développeront plus tard¹³⁸.

Desboves donne quelques principes, mais une application fera mieux comprendre cette méthode, en l'occurrence le tracé de la tangente à l'ellipse. M et M' étant deux points d'une ellipse, Desboves décrit des centres F et F' , les foyers de l'ellipse, des cercles de rayon respectivement FM' et $F'M$ qui coupent FM et $F'M$ en C et D . Lorsque M' se confond avec M , les triangles infinitésimaux MDM' et MCM' sont égaux comme triangles rectangles ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal. Donc les angles DMM' et CMM' sont égaux et « la tangente en un point d'une ellipse partage en deux parties égales l'angle que fait l'un des rayons vecteurs du point de contact avec le prolongement de l'autre¹³⁹ ».



Les autres applications de la méthode infinitésimale présentées par Desboves sont le tracé de la tangente à quelques courbes particulières comme l'ovale de Descartes, la conchoïde, la strophoïde, et une épure de la vis à filets triangulaires, et la détermination de quelques maxima et minima.

Enfin, nous remarquons que la dernière théorie convoque la notion de déplacement des figures, que nous n'avions pas encore rencontrée. Desboves démontre que :

138. *Ibid.*, p. IV.

139. *Ibid.*, p. 110.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Si un polygone plan a pris deux positions quelconques en se déplaçant dans son plan, il pourra toujours être amené d'une des positions à l'autre par un mouvement de rotation autour d'un point du plan¹⁴⁰.

Cette notion de déplacement est employée au tracé des normales à l'ellipse, à la conchoïde et à la strophoïde. Elle est à rapprocher de la notion de mouvement des figures introduite dans l'*Essai critique des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*¹⁴¹ publié par Jules Houel en 1867, et des *Nouveaux éléments de géométrie*¹⁴² de Charles Méray en 1874¹⁴³.

Les méthodes classées selon le type de l'énoncé

Dans la deuxième partie de l'ouvrage, qui porte sur la résolution des *questions* proprement dites, l'auteur aborde successivement les questions « de démontrer un *théorème*, de déterminer un *lieu*, de résoudre un *problème* et de *déterminer les maxima et les minima* ». Ce classement par le type d'énoncé correspond au classement des méthodes. Il présente les méthodes à suivre dans chacun de ces cas.

Voici la méthode proposée par Desboves pour démontrer un théorème :

Quand on se propose de démontrer un théorème, après avoir tracé, s'il est nécessaire, quelques droites ou cercles auxiliaires pour faciliter l'application des propositions connues, on essaie d'abord de réduire, autant que possible, la difficulté. Ainsi, dans un grand nombre de questions, en apparence compliquées, tout revient à prouver qu'un angle est droit, que deux droites ou deux angles sont égaux, etc.¹⁴⁴

Toutefois, l'auteur ne précise pas quelles sont les lignes auxiliaires à tracer ni comment « réduire la difficulté ». Si, poursuit-il, « quand cette préparation

140. *Op. Cit.*, p. 128.

141. Houel, Jules, *Essai critique des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Paris : Gauthier-Villars, 1867.

142. Méray, Charles, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris : Savy, 1874.

143. Barbin, Evelyne, « Le mouvement et le calcul, le rôle de l'expérience mathématique selon Jules Houel », in Barbin, E., Cléro, J.-P., *Les mathématiques et l'expérience : ce qu'en ont dit les philosophes et les mathématiciens*, Paris : Hermann, à paraître 2015.

Chevalarias, Nathalie, « Changes in the teaching of similarity in France : From similar triangles to transformations (1845-1910) », *International journal for the history of mathematics education*, 9-1, 2014.

144. *Op. Cit.*, p. 139.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

est faite, le théorème n'est pas ramené à quelque proposition connue », il faut alors employer la méthode par analyse, « qui est du reste applicable à toute question mathématique » :

On cherche d'abord si la propriété de la figure qu'il faut démontrer, et que nous appellerons A, est la conséquence d'une propriété B, si celle-ci à son tour est la conséquence d'une propriété C, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on soit arrivé à une propriété M évidente ou connue¹⁴⁵.

L'auteur reconnaît l'insuffisance de ces préceptes pour résoudre les questions mais déclare aussi qu'il ne saurait fournir des indications plus générales :

C'est souvent le choix plus ou moins heureux des lignes auxiliaires qui conduit à une démonstration plus ou moins rapide d'un théorème. On ne peut donner aucune règle générale à cet égard¹⁴⁶.

L'emploi du terme « heureux » suggérant même qu'une part de chance intervient dans la démonstration d'un théorème. L'auteur s'en tient donc au conseil suivant :

Nous dirons seulement qu'il faut autant que possible réduire le nombre des lignes auxiliaires, tout en mettant en évidence les propriétés de la figure¹⁴⁷.

Et il arrive à la conclusion que seule une pratique assidue garantit la bonne formation de l'élève :

On pourrait faire encore bien d'autres observations de détail, mais c'est surtout en étudiant avec soin les procédés variés de démonstration suivis dans un grand nombre de théorèmes que les élèves pourront acquérir de l'habileté¹⁴⁸.

En qualifiant ces observations de « détail », l'auteur affirme définitivement qu'aucune règle générale ne peut être énoncée pour le choix de la méthode, et que seule la pratique permet d'« acquérir de l'habileté », ce qui éclaire le sens de son travail de regroupement d'un grand nombre de questions dans un même recueil. Finalement, et quoi qu'en promette le titre, ce premier chapitre sur les théorèmes est d'abord un recueil d'énoncés, choisis « ou parce qu'ils font un complément utile à ceux qu'on donne ordinairement dans les

145. *Op. Cit.*, p. 140.

146. *Op. Cit.*, p. 141.

147. *Op. Cit.*, p. 141.

148. *Op. Cit.*, p. 142.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

cours de Géométrie élémentaire, ou encore parce que leur démonstration est remarquable ». Ils sont classés selon les figures sur lesquelles ils portent : triangles, cercles, quadrilatères etc.

Dans ces démonstrations, l'auteur se dispense de rédiger la synthèse, qu'il définit symétriquement à l'analyse :

Lorsqu'on est arrivé à un théorème par l'analyse, il n'est pas nécessaire, pour être assuré de sa vérité, de le démontrer par la synthèse, si l'analyse a été faite dans les conditions de rigueur prescrites. Mais si l'on s'était contenté, comme on le fait le plus souvent, de déduire les propriétés $A, B, C \dots M$, les unes des autres sans s'assurer que la condition de réciprocity est remplie dans le passage d'une propriété à la suivante, on devrait compléter l'analyse par la synthèse¹⁴⁹.

Desboves affirme que la synthèse n'est pas nécessaire lorsque l'analyse a été menée par équivalences. Les théorèmes sont démontrés pour certains par analyse et d'autres par synthèse. Ils abordent le cercle des neuf points, la droite de Simson, des propriétés des triangles équilatéraux, un porisme tiré de l'ouvrage de Chasles, un théorème dû à Carnot, un autre de Serret¹⁵⁰, des propriétés du quadrilatère complet et des polygones, les transversales dans le cercle et les systèmes de cercles.

Concernant la détermination des lieux géométriques, Desboves décrit deux méthodes. « La méthode la plus générale, écrit-il, pour la recherche des lieux est celle des *substitutions successives* dont on a déjà fait usage dans la démonstration des théorèmes », c'est-à-dire l'analyse géométrique. Elle consiste à « ramener un lieu proposé à un autre connu ». L'autre méthode est la « réduction d'un lieu à un théorème »¹⁵¹, lorsque le lieu est connu et qu'il ne reste plus qu'à démontrer la proposition. Les lieux géométriques donnés ensuite en illustration ne sont pas explicitement rattachés à l'une ou l'autre de ces deux méthodes. Nous donnerons deux exemples susceptibles d'illustrer chacune d'elles.

Le premier exemple est un lieu à déterminer :

Dans un triangle ABC , l'angle A est donné en grandeur et en position, et le périmètre est constant ; du sommet B on abaisse la perpendiculaire BM sur la bissectrice CI' de l'angle extérieur

149. *Op. Cit.*, p. 140.

150. *Ibid.*, p. 161 à 163

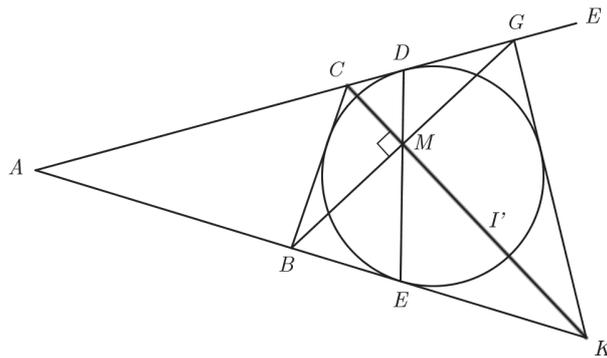
151. *Ibid.*, p. 250.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

BCE qui a pour sommet le point C : on demande le lieu du pied M de la perpendiculaire¹⁵².

La deuxième des deux solutions exposées est la suivante :

Dans l'une quelconque des positions de BC , prenons sur le prolongement de AC une longueur CG égale à BC , et par le point G menons une tangente GK au cercle ex-inscrit : nous obtenons ainsi un quadrilatère $BCGK$, circonscrit au cercle, et dans lequel la diagonale CK sera la bissectrice de l'angle BCE , tandis que l'autre diagonale lui sera perpendiculaire. Or, d'après le théorème de Brianchon appliqué au quadrilatère, les deux diagonales se coupent sur la corde de contact ED [qui est donc le lieu cherché].



En effet, l'angle A et le périmètre du triangle étant constants, c'est une propriété connue que le cercle ex-inscrit reste fixe. Les deux tangentes menées d'un même point à un cercle étant égales, on déduit de l'égalité $BC = CG$ que CK est la médiatrice du segment BG , qu'elle coupe donc en M . Le quadrilatère $BCGK$ peut être vu comme un hexagone $BCDGKE$, dont les trois diagonales sont concourantes par le théorème de Brianchon. Le point M appartient donc à la corde ED . On peut penser que cette solution illustre la méthode de réduction à un théorème, tandis que la solution du problème suivant relèverait de la méthode par substitutions successives.

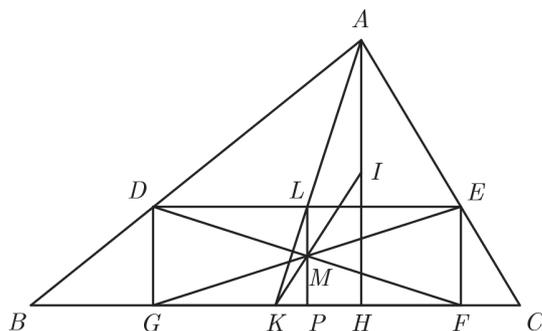
Trouver le lieu des points d'intersection des diagonales des rectangles inscrits dans un triangle.

152. *Ibid.*, p. 252.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Soit ABC le triangle donné, et $DEFG$ le rectangle inscrit ; il s'agit de trouver le lieu du point d'intersection M des diagonales DF et GE . Menons la hauteur AH , et soient K et I les milieux de AH et de BC ; tirons les droites KI et AK , puis la droite ML qui joint le point M au point L où la droite AK rencontre la base DE du rectangle. D'après un théorème connu, le point L est le milieu de DE , et comme M est le milieu de DF , la droite LM sera parallèle à EF et égale à sa moitié. Si donc on prolonge LM jusqu'à sa rencontre en P avec BC , le point M sera le milieu de LP .

Mais, d'autre part, la droite KI doit partager en deux parties égales la droite LP parallèle à AH , et, par conséquent, passe par le point M ; le lieu du point M est donc la droite IK qui joint les milieux de la base BC et de la hauteur correspondante AH ¹⁵³.



La définition du point M subit une succession de substitutions jusqu'à reconnaître qu'il appartient à un lieu connu, la droite IK . Nous avons aussi choisi cet énoncé parce qu'il est ensuite généralisé, de la manière suivante :

GÉNÉRALISATION. On peut d'abord remplacer, dans l'énoncé, le rectangle par un parallélogramme dont les côtés DG et EF soient parallèles à une direction donnée ; transformant ensuite le nouvel énoncé par la perspective, on a le lieu suivant :

Étant donné un point Q sur le prolongement d'un côté BC d'un triangle ABC , et un point quelconque R dans le plan de ce triangle ; par le point Q , on mène une transversale QDE qui coupe les côtés AB et AC en D et E , on tire les droites RD et RE qu'on

153. *Op. Cit.*, p. 254.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

prolonge jusqu'à leur rencontre en G et F avec BC , et on obtient ainsi un quadrilatère $DEFG$: le lieu du point d'intersection M des diagonales DF et EG est une droite.

Dans un premier temps, l'auteur s'aperçoit sans doute que la condition pour la figure inscrite d'être un rectangle n'a pas été exploitée dans la démonstration, qui ne fait appel qu'aux propriétés caractéristiques du parallélogramme. L'énoncé reste donc valable pour un parallélogramme. Dans un second temps, l'auteur conçoit une vue en perspective de la figure précédente, et aboutit à un énoncé plus général encore. En donnant à voir au lecteur sa démarche pour généraliser le problème, Desboves attire son attention sur la pertinence et la fécondité de son raisonnement.

Au contraire toutefois, concernant les deux recherches de lieux que nous avons reproduites, le choix des lignes auxiliaires tracées n'est pas expliqué ni justifié.

Les problèmes de lieu sont fréquents au Concours général depuis la fin des années 1850. Voici un énoncé du Concours donné par Desboves avec cinq solutions différentes :

Étant donné un cercle dont le centre est O , et un point P , par ce point on mène deux sécantes PAB , $PA'B'$, et on circonscrit un cercle à chacun des triangles PAA' , PBB' ; on demande le lieu du second point d'intersection M des deux derniers cercles¹⁵⁴.

La première démonstration utilise la propriété de l'angle inscrit, la deuxième un lemme sur la figure constituée d'un cercle et de deux cordes, la troisième la notion de polaire, la quatrième les axes radicaux et la cinquième l'inversion.

Pour ce qui concerne enfin la résolution des problèmes, plusieurs méthodes particulières sont décrites dans ce troisième chapitre : une méthode qualifiée de générale, la méthode des lieux géométriques, et trois autres qualifiées de particulières, la méthode par renversement, la méthode des figures symétriques et la méthode des figures semblables.

Mais avant cela, une distinction est établie entre problèmes « du premier ou du second genre » :

Ou bien les données sont connues en grandeur et en position, et il ne s'agit plus alors que d'achever une figure déjà, en partie, construite ; ou bien les données sont seulement connues en grandeur¹⁵⁵.

154. *Ibid.*, p. 270.

155. *Op. Cit.*, p. 292.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

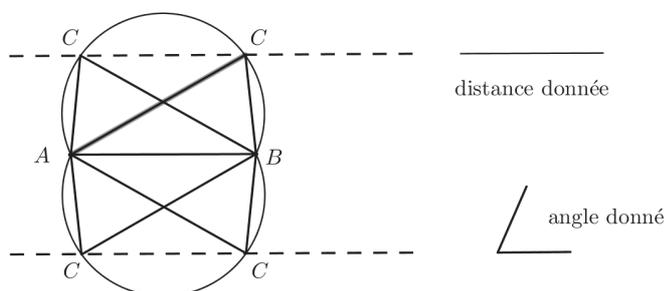
Nous n'avons pas rencontré ailleurs cette distinction. Elle est illustrée ici par les deux énoncés suivants :

Étant donnée une droite AB en position et en grandeur, trouver un point C , dont la distance à cette droite soit connue, et qui soit tel, qu'en y plaçant l'œil, on voie la droite sous un angle donné.

et :

Construire un triangle, connaissant un côté, la hauteur correspondante, et l'angle opposé¹⁵⁶.

Le premier de ces problèmes est du premier genre, « la droite AB étant connue de grandeur et de position », tandis que le deuxième est du second genre, « et on peut placer arbitrairement dans un plan, soit le côté, soit l'angle donné ». Bien sûr ces deux problèmes sont liés et « on ramène ordinairement un problème du second genre à un problème du premier genre ». Toutefois, « le nombre de solutions des deux problèmes n'est pas nécessairement le même ». Ainsi, l'auteur trouve quatre solutions pour le premier et une seulement pour le second.



En effet, « il résulte de l'égalité des quatre triangles obtenus dans la construction précédente, que le nouveau problème n'a qu'une solution ». A et B étant fixés, les quatre positions possibles pour le point C sont discernables. Par contre, les quatre triangles ABC qui s'en déduisent sont égaux, c'est-à-dire superposables, et ne forment donc qu'une solution.

La méthode des lieux géométriques est décrite en ces termes :

Le point, à la détermination duquel tout se réduit, ayant été choisi, on prend, parmi les conditions auxquelles ce point doit satisfaire, celles qui suffisent pour qu'il soit sur une figure connue ;

156. *Op. Cit.*, p. 292.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

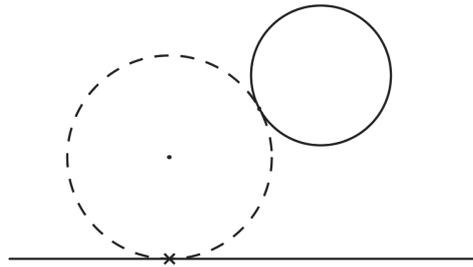
on détermine de même une seconde figure qui le contienne : alors les points de rencontre des deux lieux trouvés satisferont à la question, et le problème proposé sera résolu¹⁵⁷.

La distinction entre problèmes du premier ou du second genre induit plusieurs façons de mettre en œuvre la méthode des lieux géométriques :

On pourra choisir de plusieurs manières, les données dont on fixe arbitrairement la position ; ensuite on pourra trouver plusieurs points différents, à la détermination desquels on ramènera toute la difficulté du problème¹⁵⁸.

Pour illustrer cette question du choix du point à déterminer, l'auteur propose le problème :

Décrire un cercle tangent à un cercle et à une droite donnés, en un point donné sur la droite¹⁵⁹.



Ce problème est résolu de deux façons différentes, suivant que le point choisi à déterminer est le centre du cercle cherché, ou bien le point de tangence des deux cercles.

Dans le cas d'un problème du second genre, plusieurs possibilités s'offrent pour le choix cette fois des parties de la figure à fixer. Cela est illustré par le problème :

Construire un triangle ABC , connaissant un côté AB , l'angle opposé C , et le rapport des deux autres côtés¹⁶⁰.

157. *Ibid.*, p. 293.

158. *Op. Cit.*, p. 294.

159. *Op. Cit.*, p. 295.

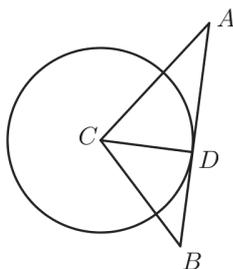
160. *Op. Cit.*, p. 297.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Trois solutions sont rédigées. Dans les deux premières, la droite AB est fixée, puis le point C est déterminé au moyen d'un lieu géométrique, qui diffère d'une solution à l'autre. Dans la troisième, l'angle C est fixé, puis la position de la droite AB est déterminée.

Venons-en aux méthodes particulières. La méthode par renversement consiste à construire les éléments de la figure « dans l'ordre inverse de celui qui est donné par l'énoncé ». L'exemple suivant est proposé :

Étant donné un cercle C et deux droites CA et CB passant par son centre, mener une tangente AB au cercle telle, que la partie AB interceptée par les deux droites fixes soit égale à une longueur donnée¹⁶¹.



La méthode consiste à considérer la ligne AB comme étant donnée de position, et à construire ensuite le triangle ABC dont on connaît la base AB , l'angle C et la hauteur CD : c'est le problème que nous avons étudié plus haut. Cette méthode a déjà été rencontrée dans plusieurs ouvrages de la deuxième période sous le nom de méthode du problème inverse, ou méthode inverse, ou méthode par inversion.

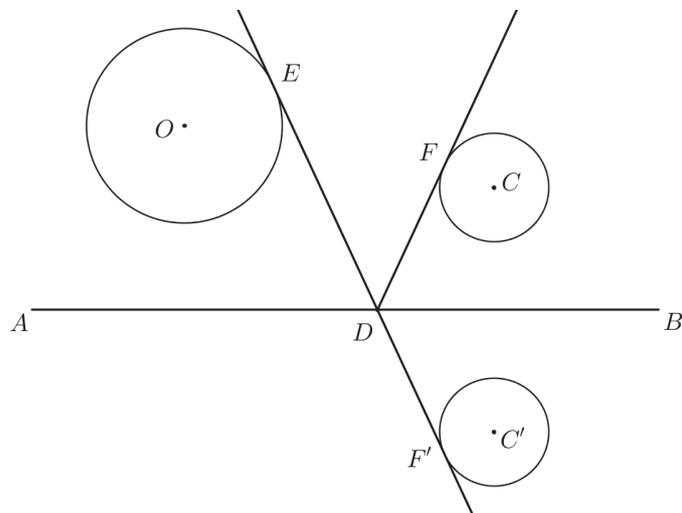
La méthode des figures symétriques, consiste à adjoindre « à certains points de la figure, d'autres points qui leur sont symétriques, par rapport à une droite ou un point ».

Étant donné une droite AB et deux cercles O et C , on demande de trouver sur la droite AB un point D tel, que les tangentes DE et DF , menées de ce point aux deux cercles, fassent avec la droite des angles EDA , FDB égaux entre eux¹⁶².

161. *Op. Cit.*, p. 302.

162. *Op. Cit.*, p. 304

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



En traçant le symétrique d'un des deux cercles par rapport à la droite AB , l'auteur a remplacé la figure donnée par une autre qu'il sait construire. Le problème est ainsi ramené à celui de trouver la tangente commune à deux cercles. Cette méthode est mentionnée dans les ouvrages de Serret et de Comberousse.

La méthode des figures semblables consiste à construire « une figure semblable à la figure cherchée ¹⁶³ ». Le deuxième exemple donné de cette méthode est la construction d'un triangle connaissant ses trois hauteurs, précisément l'exemple donné par Lamé dans son *Examen* et repris par Amiot dans ses *Solutions raisonnées*. D'autre part, le quatrième et dernier exemple illustrant toujours cette méthode des figures semblables est le tracé d'un triangle semblable à un triangle connu, et dont les sommets soient situés sur trois cercles concentriques donnés, énoncé que nous avons déjà rencontré dans le court traité de Guibal. Les deux autres exemples sont la construction d'un triangle connaissant les angles et la surface ou le périmètre, et la construction d'un triangle, connaissant les rayons des trois cercles ex-inscrits.

Enfin, l'analyse géométrique, toujours mentionnée dans les ouvrages de la période précédente, ne semble pas ici mériter de développement :

On a laissé de côté la méthode des substitutions successives, qui consiste à ramener la solution du problème à celle d'un autre déjà résolu. Mais l'emploi de cette méthode se comprend de lui-même,

163. *Ibid.*, p. 307.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

et d'ailleurs il en sera donné plusieurs exemples par la suite¹⁶⁴.

Desboves décline de la sorte un grand nombre de questions de construction des triangles à partir de données variées. Ces problèmes de construction des triangles, dont nous avons indiqué dans la première partie qu'ils sont signalés par Gergonne dans ses *Annales*, fournissent autant d'occasions au lecteur de s'exercer.

Il expose aussi la solution de problèmes réputés difficiles, comme le problème dit de Castillon d'« inscrire dans un cercle donné un triangle dont les côtés passent par trois points donnés quelconques » et sa généralisation à un nombre quelconque de points¹⁶⁵, le problème des trois cercles démontré comme dans l'ouvrage de Bobillier, et le problème dit de Malfatti¹⁶⁶, d'après une note du Dr Hart dans le *Quarterly journal*.

Détermination des maxima et minima Le dernier chapitre de cette seconde partie porte sur les méthodes pour déterminer les maxima et minima, au sujet desquelles nous avons indiqué que Duhamel publie en 1865 un mémoire. Desboves commence par énoncer les cinq méthodes suivantes :

- « Par la discussion d'un problème ordinaire de géométrie ». Une valeur arbitraire est attribuée à la grandeur dont on cherche les extrema. La discussion du problème met alors en évidence que cette grandeur doit être comprise entre certaines valeurs.
- « Par substitutions successives ». Cette méthode « n'a pas besoin d'explication ».
- « Par la considération de valeurs fixes attribuées successivement à chacune des variables indépendantes ». Quand la grandeur géométrique dépend de plusieurs variables, on considère successivement chaque variable comme constante.
- « Par renversement ». Cette méthode ramène la recherche d'un maximum à celle d'un minimum.
- « Par les infiniment petits ». C'est la méthode déjà rencontrée dans la première partie.

Au long des questions qui suivent et illustrent ces méthodes, il ne précise pas quelle méthode est suivie lors de la résolution d'un problème. Illustrons

164. *Ibid.*, p. 309.

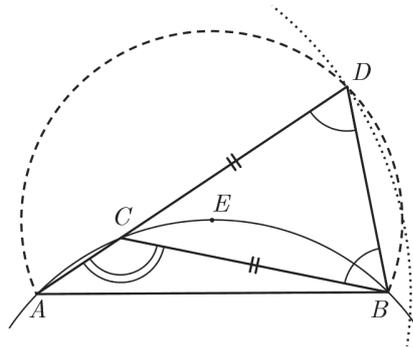
165. *Ibid.*, p. 340.

166. *Ibid.*, p. 362.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

cependant la première et la troisième de ces méthodes sur des exemples choisis. Le premier de ces énoncé est :

Trouver sur un arc de cercle AB un point C tel, que la somme de ses distance aux extrémités de l'arc soit maxima ¹⁶⁷.



Suivre la première méthode revient à chercher le point C pour une longueur donnée de la somme de ses distances aux points A et B . Desboves construit le point D sur AC tel que AD soit égal à cette longueur. Le triangle BCD est isocèle, et l'angle D est égal à la moitié de l'angle extérieur ACB . C'est-à-dire qu'il est connu et par suite D se trouve sur le cercle de centre E milieu de l'arc AB passant par A et B . La longueur AD est connue elle aussi, donc D se trouve sur un cercle de centre A et de rayon cette longueur. Le point D est ainsi déterminé.

Pour revenir au problème initial, Desboves effectue la *discussion* du problème, c'est-à-dire qu'il étudie les différents cas qui peuvent se présenter, une étape à laquelle il accorde beaucoup d'importance. Il remarque que, pour que le problème précédent ait une solution, il faut que la longueur donnée n'exécède pas le diamètre $AE + EB$ du premier cercle, ce qui correspond donc à la longueur maximale de la somme $AC + CB$ et résout le problème. Desboves montre comment la discussion d'un problème a permis d'en résoudre un autre : la discussion a valeur de méthode d'invention.

Voici maintenant une application de la troisième méthode :

Parmi tous les triangle ABC inscrits dans un cercle donné, quel est celui qui a la plus grande surface ¹⁶⁸ ?

167. *Ibid.*, p. 385.

168. *Ibid.*, p. 399.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

En fixant la longueur d'un côté, l'aire du triangle est maximale lorsque sa hauteur est maximale, ce qui correspond à la situation où le triangle est isocèle. Ce raisonnement valant pour tous les côtés du triangle, celui-ci doit avoir ses côtés égaux deux à deux, c'est donc un triangle équilatéral.

Diverses solutions pour une même question

Desboves expose souvent plusieurs démonstrations pour un même énoncé de théorème. Par exemple, le théorème suivant est démontré successivement par une inversion puis en faisant intervenir des coniques :

XX. Si dans un triangle ABC le sommet et la grandeur de l'angle A sont invariables, et que le côté BC glisse sur une droite fixe L , le cercle circonscrit au triangle variable sera toujours tangent à un cercle fixe¹⁶⁹.

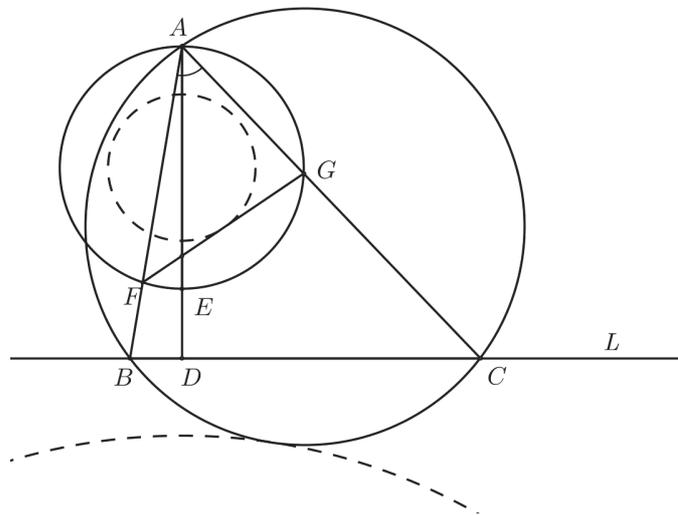
1^{ère} démonstration. Du point A abaissons AD perpendiculaire sur BC ; puis, ayant pris sur cette droite un point quelconque E , décrivons sur AE comme diamètre un cercle qui coupe en F et G les deux côtés de l'angle mobile. Si l'on mène la corde FG , cette droite aura une longueur constante, et, par conséquent, sera tangente à un cercle connu K , ayant pour centre le milieu de AE . Déterminons maintenant les lignes réciproques de la corde FG et de la circonférence K en prenant le point A pour origine, et la produit $AE \times AD$ pour puissance d'inversion. La ligne réciproque de la corde FG sera la circonférence circonscrite au triangle ABC , et celle de K sera une circonférence fixe, tangente au cercle circonscrit au triangle.

2^{ème} démonstration. Du point O , centre du cercle circonscrit au triangle ABC , on abaisse une perpendiculaire OH sur BC , et l'on tire BO . On obtient ainsi un triangle BOH dans lequel l'angle O est égal à l'angle constant BAC ; le rapport de OB à OH est donc déterminé. Or, comme les droites OA et OB sont égales, le lieu du point O , lorsque l'angle BAC tourne autour de son sommet A , est une hyperbole dont l'un des foyers est le point A et dont la droite BC est la directrice correspondante.

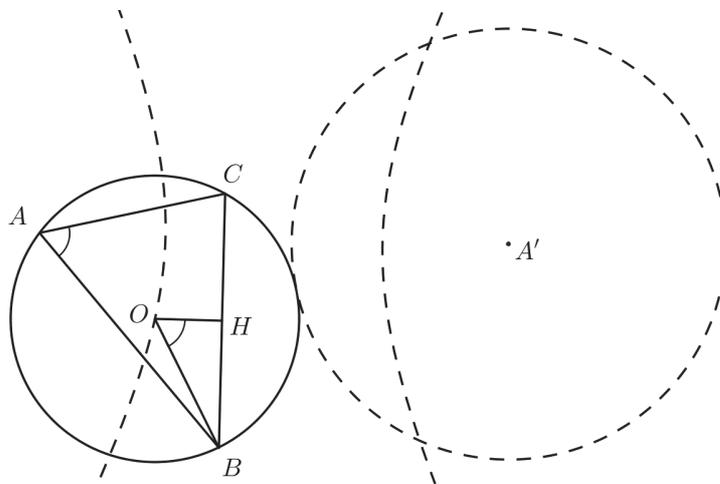
Le rapport des distances du point O au foyer A et à la directrice BC étant déterminé, on pourra, par une construction très-simple, obtenir le second foyer A' de l'hyperbole et la distance $OA' - OA$ sera constante. Alors le cercle

169. *Ibid.*, p. 159.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



décrit avec OA comme rayon, c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle ABC , sera tangent au cercle directeur correspondant au second foyer A' .



Pour les problèmes aussi, plusieurs solutions sont fréquemment exposées. C'est souvent l'occasion de mettre en parallèle des solutions qui relèvent de l'ancienne géométrie et des méthodes modernes, sans toutefois que cette distinction soit mentionnée explicitement par l'auteur. Prenons comme exemple le problème suivant :

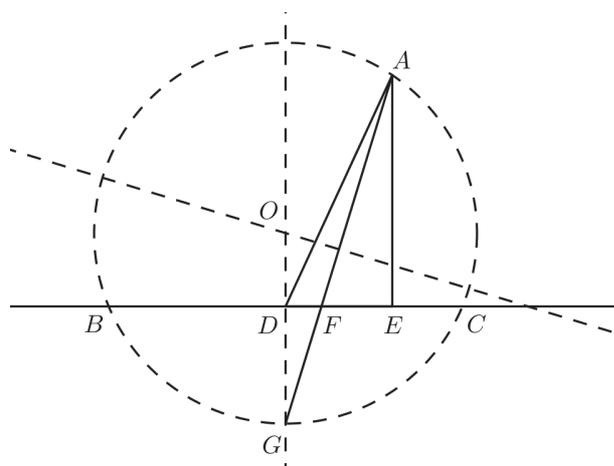
Construire un triangle ABC , connaissant la hauteur AE , la mé-

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

diane AD , et la bissectrice AF qui partent toutes trois du même sommet A ¹⁷⁰.

1^{ère} Solution. On construit d'abord, avec les deux premières droites, un triangle rectangle ADE ; la position du sommet A est alors déterminée par rapport à la droite DE prolongée indéfiniment, et il ne s'agit plus que de placer les sommets B et C sur cette droite.

À cet effet, on prend, pour point auxiliaire, le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC . On a un premier lieu de ce point en élevant une perpendiculaire à ED au point D . Pour obtenir un second lieu, on remarque que si l'on détermine entre D et E un point F qui soit à une distance du point A égale à la longueur de la bissectrice donnée, et qu'on tire la droite AF , les deux droites AF et OD prolongées viendront se rencontrer au milieu G de l'arc BGC . La droite AG est, par conséquent, une corde connue du cercle circonscrit au triangle, et en élevant une perpendiculaire à AG en son milieu H , on a le second lieu demandé.

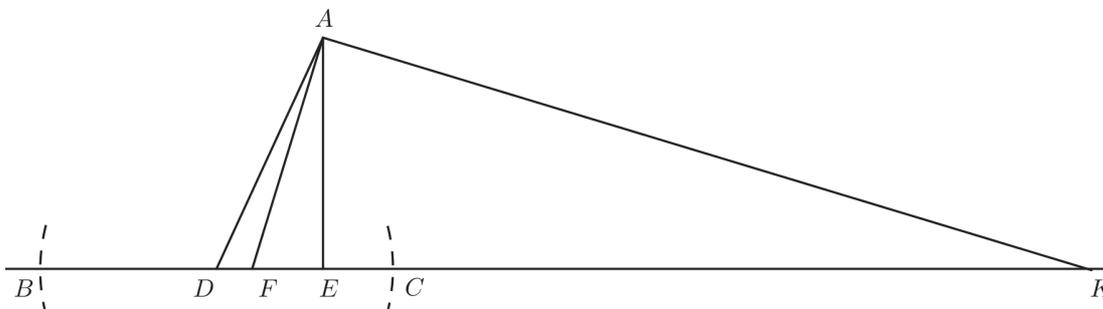


2^{ème} solution. Le triangle DAE et la droite AF étant construits, comme plus haut, on mène AK perpendiculaire à AF ; alors les deux points F et K , et les deux sommets cherchés B et C , forment une division harmonique, et l'on a $DB^2 = DF \times DK$. Cette égalité détermine le point B , et, par suite, le point C .

D'autres questions mettent ainsi en parallèle la géométrie des anciens et la géométrie rationnelle. Ainsi d'un théorème sur le quadrilatère inscrit résolu

170. *Ibid.*, p. 313.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



d'abord par les triangles semblables puis avec un faisceau harmonique¹⁷¹ ; d'un théorème sur le cercle démontré par les angles puis par les pôles et les faisceaux harmoniques¹⁷², etc. Cette présentation des solutions invite le lecteur à comparer entre elles les méthodes employées, et le met face à la diversité des moyens à sa disposition pour résoudre des problèmes et démontrer des théorèmes.

Les sources de Desboves

Il est intéressant de noter que Desboves fournit à de nombreuses reprises la source des questions qu'il pose, donnant au lecteur un aperçu des auteurs qu'il connaît et consulte.

Auteur	Ouvrage lorsqu'il est mentionné	Questions
Chasles	<i>Les trois livres de porismes d'Euclide</i>	11
Chasles		2
Mannheim		5
Mannheim	<i>Nouvelles annales</i> t. XII p. 113	1
Mac Laurin	<i>Des fluxions</i>	1
Serret, Paul	<i>Des méthodes en géométrie</i>	1
Bour	<i>Cours de Mécanique et machines. Cinématique</i>	1
	Concours général (?)	17
Simson		1
Carnot		2
Serret		1
Mention	<i>Nouvelles annales</i> t. XI	1

171. *Ibid.*, p. 175.

172. *Ibid.*, p. 187.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Mourgue		3
Newton		1
Poncelet		1
MatthewCollins		3
Sir Pollock		1
Darboux		4
Mulcahy	Principes de géométrie moderne	6
Casey		2
Prouhet		1
Peaucellier	<i>Nouvelles annales</i> t. XII p. 71	2
Mannheim	<i>Nouvelles annales</i> t. XII p. 113	1
Dupuis		1
Fermat		1
Niewenglowski		1
Sturm		1
Dr Hart	Quarterly journal t. I p. 219	1
Legendre		2
Steiner		1
Poudra		1

Ce tableau nous fournit une liste de sources consultées par Desboves, information rare chez les auteurs de manuels contemporains. Nous voyons que ces sources sont variées, et nous reconnaissons plusieurs des géomètres dont nous avons cité les travaux. Cette liste témoigne de connaissances vastes et d'un important travail de compilation pour réaliser l'ouvrage.

Conclusion

Desboves adresse aux élèves des Lycées un ouvrage tout entier orienté vers la résolution, par des méthodes géométriques, de questions de géométrie qui sont des problèmes de construction, mais aussi des théorèmes, des lieux géométriques et des recherches d'extrema. L'ouvrage contient un grand nombre de questions résolues et de questions à résoudre, dont, volontairement, des questions originales, puisées à des sources variées. L'auteur s'efforce d'organiser ce corpus de questions, et il l'est davantage dans la deuxième édition que dans la première. Les questions sont classées selon les types d'énoncés : les théorèmes, les lieux géométriques, les problèmes et les maxima et minima, avant d'être réparties selon le type de figure ou de grandeur concernée.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

Desboves s'emploie à décrire des méthodes propres à chaque type de question, théorème, problème ou lieu, ce que nous n'avons pas rencontré ailleurs. Cette attention portée à la forme logique de l'énoncé aboutit notamment à la distinction, originale, entre deux genres de problèmes de construction. En revanche, l'auteur n'énonce pas de règles générales, et ses méthodes s'en tiennent souvent à des considérations formelles qui laissent une grande place à l'intuition et à l'initiative. D'ailleurs, s'il indique des méthodes particulières comme la méthode par renversement, la méthode des lieux géométriques, la méthode des figures symétriques ou celle des figures semblables, déjà rencontrées à la période précédente, et en introduit d'autres pour résoudre les questions d'extrema, il ne se restreint pas à des solutions méthodiques, et expose à plusieurs reprises des « démonstrations synthétiques » dont l'intérêt est leur « élégance » et leur « simplicité »¹⁷³. Ce souci d'élégance et de simplicité se retrouve dans l'exposé de plusieurs solutions différentes d'une même question à la suite les unes des autres, ce qui constitue un mode de présentation inhabituel. Desboves illustre la diversité des moyens de résolution en géométrie, et pour cela, il puise notamment dans les théories récentes de géométrie rationnelle, dont il montre, dans la première partie, la puissance d'invention.

Il entreprend donc de rationaliser la démarche intellectuelle de résolution des questions en opérant un classement de celles-ci selon leur forme logique, et de montrer, dans le même temps, la diversité des moyens de résolution, élargie par l'introduction de premières notions de géométrie rationnelle.

3.2 Frère Gabriel-Marie (1882) : multiplier les moyens du géomètre

Edmond Brunhes (1838-1916), Frère Gabriel Marie de son nom en religion, appartient à l'ordre des Frères des Écoles Chrétiennes, institut religieux laïc de vie consacrée voué à l'enseignement et à la formation des jeunes depuis 1680. Si l'essentiel des établissements dirigés par les Frères sont des écoles primaires, ils possèdent aussi des établissements pour la formation de leurs maîtres et des établissements d'enseignement secondaire. C'est à la destination de ces derniers que le Frère Gabriel Marie rédige son *Cours de mathématiques élémentaires*. L'intitulé complet de la deuxième édition, en 1882, est : *Cours de Mathématiques élémentaires. Exercices de Géométrie compre-*

173. *Ibid.*, p. 416.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

*nant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*¹⁷⁴. La première édition avait été publiée en 1875 à Paris et en 1877 à Tours sous le titre *Cours de Mathématiques élémentaires. Exercices de Géométrie*¹⁷⁵. Dans cette première version, les méthodes sont abordées, mais à la fin du livre et de façon rapide.

Dès la deuxième édition, en 1882, la partie concernant l'étude des méthodes se situe au début de l'ouvrage et se trouve largement développée. L'auteur affirme que « Les *Méthodes* constituent la partie la plus importante de tout l'ouvrage, comme elles en sont d'ailleurs la plus originale »¹⁷⁶. Il semble donc qu'entre les deux éditions, la réflexion sur les méthodes se soit imposée avec succès comme constituant un intérêt principal de l'ouvrage.

FGM s'efforce, autant qu'il lui est possible, de citer, pour chaque proposition, notion, ou énoncé d'exercice, son inventeur ou son auteur. Il fournit ainsi une liste étoffée d'ouvrages de référence, pratique dont nous avons signalé qu'elle est originale dans un ouvrage d'enseignement de cette époque. Cette liste nous a servi dans notre propre travail bibliographique. Elle donne un aperçu de la littérature mathématique reconnue et utilisée par un enseignant pour concevoir son cours autour de 1880. Sa présence suggère que les destinataires de l'ouvrage sont aussi, en plus des élèves, les professeurs de mathématiques, en particulier les Frères de l'ordre.

Ces *Exercices* font partie d'un ensemble de manuels à vocation scolaire rédigés par les Frères des écoles chrétiennes, alors que l'enseignement confessionnel se développe très rapidement en France, et couvrant l'ensemble des domaines des programmes de mathématiques : arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie, arpentage et nivellement, géométrie descriptive. Dès la première ligne, les *Exercices* sont présentés en tant que complément des *Éléments de Géométrie* de la même collection. Le livre d'exercices est destiné au professeur dans l'édition de 1877. Désormais, nous nous référerons à la troisième édition de 1896, proche de la deuxième de 1882, et plus facile à consulter.

La première partie de l'ouvrage recense les méthodes propres à résoudre des problèmes de géométrie élémentaire. L'exposé de ces méthodes est systé-

174. F. I. C., *Exercices de géométrie : comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*, 2^e édition, Tours : Mame, Paris : Poussiègue frères, 1882.

175. F. J.-O. P., *Exercices de géométrie*, Tours : Mame et fils, Paris : Poussiègue frères, 1877.

176. F. J., *Exercices de géométrie : comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*, 3^e édition, Tours : Mame, Paris : de Gigord, 1896, p. II.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

matiquement accompagné de nombreux exercices.

La seconde partie, encore plus conséquente, propose, ainsi que l'annonce le titre, plus de 2000 exercices. Tous sont corrigés et accompagnés d'une figure placée dans le corps du texte. Ils sont regroupés selon les huit livres des *Éléments*, c'est-à-dire implicitement ceux de Legendre. Tout au long de l'ouvrage, chaque fois que cela lui a été possible, l'auteur donne les noms des mathématiciens à l'origine des propositions énoncées. Le premier chapitre s'attache dans un premier temps à préciser certaines notions logiques du raisonnement mathématique. Sont explicitées les notions d'hypothèse, de conclusion et de proposition réciproque, contraire ou contradictoire. Les explications sont simples et claires, et assorties de contre-exemples.

Nous l'avons dit, dès la deuxième édition, l'auteur souligne l'importance des méthodes :

Les *Méthodes* constituent la partie la plus importante de tout l'ouvrage, comme elles en sont d'ailleurs la plus originale. *Tout professeur*, et même tout élève sérieux, *devrait posséder parfaitement ce complément de géométrie*; car l'exposition des méthodes fait naître et développe les idées générales; elle permet de rattacher des milliers d'exercices variés à quelques types principaux, que l'on retient sans peine et que l'on applique avec facilité¹⁷⁷.

Qu'est-ce qu'une méthode pour FGM? « Les méthodes indiquent la marche qu'il faut suivre pour démontrer un théorème, ou pour résoudre un problème¹⁷⁸ ». Les méthodes de FGM sont bien des méthodes particulières comme celles que nous avons rencontrées dans la période précédente. Elles sont des procédés qui s'appliquent à un nombre d'énoncés à la fois large et indéfini. C'est là le sens de la généralité qu'évoque FGM. Cet intérêt pour les méthodes le conduit à présenter éventuellement plusieurs fois le même théorème ou le même problème dès lors qu'il est résolu ou démontré par des méthodes différentes :

En agissant ainsi, nous avons voulu montrer l'avantage que peut présenter telle marche sur telle autre, donner quelques exemples de l'admirable fécondité de certaines méthodes, et surtout encourager les chercheurs, en leur prouvant qu'on peut arriver, par bien des voies, au résultat demandé¹⁷⁹.

177. *Op. Cit.*, p. ii.

178. *Exercices*, p. 4.

179. *Exercices*, p. IV.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

La connaissance des méthodes permet d'inventer la solution des problèmes, et de trouver des solutions simples :

L'emploi judicieux des *Méthodes* conduit à des démonstrations ou à des solutions remarquables par leur simplicité ; d'ailleurs, il nous a semblé utile de ne pas nous borner aux questions qu'on rencontre partout¹⁸⁰.

Pour FGM, les méthodes sont caractérisées par la simplicité des solutions auxquelles elles conduisent, et il s'attache à présenter des questions originales pour en convaincre son lecteur. Les méthodes présentées sont regroupées selon les huit catégories suivantes : les méthodes générales, les lieux géométriques, l'emploi des figures auxiliaires, la transformation des figures, la discussion, l'extension, la méthode algébrique et les maxima et minima. Une revue de chacune d'entre elles nous donne à voir la rigueur et la précision du travail de recensement systématique des moyens à la disposition de l'élève pour résoudre une question de géométrie qu'effectue FGM.

Les méthodes générales

Les méthodes qualifiées de générales sont celles qui « peuvent s'appliquer à toutes les questions », par opposition aux méthodes particulières qui « ne peuvent être utilisées que dans un certain nombre de questions¹⁸¹ ».

L'*Analyse* et la *Synthèse* sont les seules méthodes générales ; mais par le fait même qu'elles s'appliquent à toutes les questions, il en résulte qu'elles ne dispensent point de chercher des méthodes particulières, des procédés spéciaux pour traiter rapidement certains groupes d'exercices¹⁸².

Les méthodes générales sont l'analyse et la synthèse, présentées comme symétriques l'une de l'autre, c'est-à-dire que la synthèse est la voie contraire de l'analyse.

Analyse. L'analyse est la méthode par laquelle une proposition inconnue A se ramène à une autre proposition inconnue B, puis cette seconde B à une troisième C, et celle-ci à une quatrième D, etc., jusqu'à ce que l'on tombe sur une proposition connue.

180. *Exercices*, p. IV.

181. *Exercices*, p. 4.

182. *Exercices*, p. II.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

Synthèse. La synthèse est la méthode par laquelle on passe d'une proposition connue D à une autre proposition connue C, puis de cette seconde C à une troisième B, de celle-ci à une quatrième, etc., jusqu'à ce que l'on arrive ainsi à la proposition A que l'on devait étudier ¹⁸³.

Ces définitions suggèrent à l'évidence qu'en possession de la résolution d'une question par analyse, il est immédiat d'en déduire sa résolution par synthèse. Ensuite, quelques théorèmes classiques établis au XVIII^e siècle sont résolus ici par l'analyse géométrique, tels le théorème de Simson ou le cercle des neuf points. La synthèse est exposée mais d'emblée FGM remarque qu'elle n'indique pas comment on est conduit à en mener les étapes successives. « En réalité, *l'intuition la plus heureuse n'est que la conséquence d'une analyse rapide, parfois inconsciente, mais néanmoins très réelle* : pour rechercher la vérité, il faut donc recourir à l'analyse ¹⁸⁴ ». La démonstration par l'absurde est aussi présentée dans le chapitre sur la synthèse, mais FGM ne l'apprécie guère :

La démonstration par la réduction à l'absurde convainc, mais n'éclaire pas ; elle contraint à reconnaître l'exactitude de la proposition énoncée, néanmoins elle satisfait peu l'esprit, parce qu'elle ne traite pas directement le théorème demandé ; aussi on a rarement recours à cette méthode aujourd'hui ¹⁸⁵.

La critique adressée à la réduction à l'absurde de convaincre sans éclairer correspond au premier des défauts des géomètres que recensent Arnauld et Nicole dans *La logique ou l'art de penser* ¹⁸⁶, un ouvrage régulièrement réédité depuis sa première parution en 1662, notamment tout au long du XIX^e siècle : « Avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence, & de convaincre l'esprit que de l'éclairer ».

Nous terminerons l'examen de ce chapitre par l'exposé d'un problème résolu successivement par analyse et synthèse, dont voici l'énoncé :

Construire un carré, connaissant la somme l de la diagonale et du côté ¹⁸⁷.

183. *Op. Cit.*, p. 4.

184. *Exercices*, p. 13.

185. *Exercices*, p. 15.

186. Arnauld, Antoine, Nicole, Pierre, *La logique ou l'art de penser*, Paris : Charles Savreux, 1662, p. 414.

187. *Op. Cit.*, p. 15.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Voici la solution qui en est donnée :

1° *Analyse*. Supposons le problème résolu, et soit $ABCD$ le carré demandé.

Menons la diagonale AC , prolongeons cette ligne, et prenons la longueur CE égale à CB ; il faut que l'on ait $AE = l$.

Si l'on mène BE , on reconnaît que le triangle BCE est isocèle; l'angle BCA , extérieur à ce triangle, étant de 45 degrés, chacun des angles B, E , du triangle isocèle BCE égale la moitié de 45 degrés. Ainsi, dans le triangle ABE , on connaît la base AE ou l et les angles adjacents A, E .

On peut donc construire le triangle, et le petit côté AB sera le côté du carré demandé.

L'ordre le plus pratique, pour ces constructions, est celui que nous allons indiquer dans la synthèse.

2° *Synthèse*. Sur le milieu d'une droite AE , égale à la longueur donnée l , il faut élever une perpendiculaire; porter MA de M en N ; tracer NA et NE ; mener EB bissectrice de l'angle E , puis BC perpendiculaire à AB , et enfin AD et CD qui complètent le carré.

En effet, dans le triangle ABC , l'angle B est droit, l'angle A égale 45 degré, et, par suite, C égale aussi 45 degré; ainsi $BC = AB$. L'angle AEN égale 45 degré; donc $AEB =$ la moitié de 45 degrés. Dans le triangle BCE , l'angle B égale l'angle extérieur C moins l'angle intérieur E ; ou

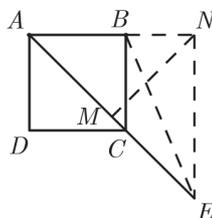
$$\text{angle } B = 45^\circ - \frac{45^\circ}{2} = \frac{45^\circ}{2}$$

donc le triangle BCE est isocèle; $CE = CB$ ou AB , et la ligne AE ou l égale la diagonale AC plus la longueur du côté.

Le problème est donc résolu.

Plusieurs réflexions s'imposent à la lecture de cette résolution. D'abord, si l'auteur fait figurer côte à côte lesc'est pour montrer à son lecteur que du premier se déduit immédiatement le second, et qu'il pourra par conséquent s'abstenir de rédiger la synthèse dans toute la suite de l'ouvrage, ce qu'il fait. En effet, une remarque suit ce problème : « nous allons donner quelques autres exemples de résolution de problèmes, mais en nous bornant à les traiter par l'analyse ». Notons que FGM justifie explicitement cette réciprocity

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



en demandant que « les propositions consécutives, considérées deux à deux, soient toujours réciproques au point de vue logique »¹⁸⁸. Cette formulation en termes logiques des conditions de validité du raisonnement par analyse n'a pas été rencontrée dans les ouvrages antérieurs.

Toutefois, nous nous apercevons que, de fait, la synthèse n'est pas rédigée symétriquement à l'analyse puisque ce n'est pas le triangle ABE qui est d'abord construit, mais le triangle ANE . La raison de cette asymétrie, contraire à la définition de l'analyse et de la synthèse reproduites plus haut, est « pratique ». Il est plus rapide sans doute de tracer un triangle isocèle rectangle qu'un triangle dont les angles mesurent 45° et la moitié de 45° . Ainsi, dès les premières lignes, FGM s'écarte de la marche méthodique lorsque la figure particulière se prête à une solution plus simple que la solution méthodique. C'est-à-dire que la méthode vaut tant qu'elle sert la simplicité.

Lieux géométriques

À la suite des méthodes générales dont il vient d'être question, viennent des méthodes dites particulières. Celles-ci « se rapportent en réalité à l'analyse »¹⁸⁹, écrit FGM. C'est qu'« en géométrie, il n'est pas possible d'indiquer une même voie qui, dans tous les cas, conduise inévitablement au but ; mais on peut diriger les recherches et faire trouver plus facilement les résultats demandés »¹⁹⁰. L'analyse est une méthode générale, et par là même n'indique pas suffisamment la voie à suivre. Les méthodes particulières doivent conduire à des solutions simples. La première est celle des lieux géométriques :

Les Lieux géométriques sont si utiles, que nul ne regrettera les développements que nous avons donnés à leur recherche et à leur

188. *Exercices*, p. 5.

189. *Exercices*, p. 22.

190. *Exercices*, p.4.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

emploi¹⁹¹.

Tous les lieux de référence sont recensés, avant de passer à leur emploi :

- a) Lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites données égale une ligne donnée ;
- b) Lieu des points dont les distances à deux droites sont dans un rapport donné ;
- c) Lieu des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné ;
- d) Lieu des points d'où les droites menées d'un point à une droite ou à une circonférence sont divisés dans un rapport donné $\frac{m}{n}$;
- e) Lieu des points N d'où une droite OM , menée d'un point O , à une droite ou à une circonférence, est divisée en deux parties telles que le produit $OM \times ON$ est constant ;
- f) Lieu des points dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux points donnés égale une valeur donnée¹⁹².

Pour la première fois dans les descriptions de la méthode des lieux géométriques que nous avons rencontrées, une liste de lieux de référence est établie. Tous les lieux employés par la suite lorsque les questions de l'ouvrage sont résolues par cette méthode appartiennent à cette liste. Cet effort pour organiser la méthode des lieux géométriques a aussi un effet restrictif, en comparaison avec Amiot, qui, comme nous l'avons vu dans la deuxième partie, construit un lieu à l'occasion de la résolution d'un énoncé particulier.

Les constructions auxiliaires

Les constructions auxiliaires ne participent pas, selon l'auteur, d'une véritable méthode, mais sont un simple procédé, par ailleurs employé très fréquemment. Sans doute a-t-il introduit les « constructions auxiliaires » dans la liste des méthodes de sorte que tous les énoncés de l'ouvrage relèvent au moins d'une des méthodes qu'il décline. Ceci montre encore une fois que FGM construit sa liste de méthodes en partant des questions et des solutions qui en sont connues, pour reconnaître les procédés identiques employés pour une diversité de questions. C'est un travail de classement des moyens employés pour la résolution des problèmes. Ce chapitre sur les constructions

191. *Idem.*

192. *Op. Cit.*, 87, p. 36.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

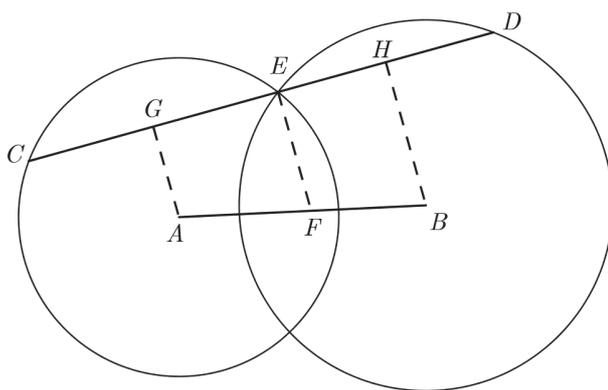
auxiliaires montre combien ce travail est mené de façon approfondie car elles ont été rangées en groupes distincts dont voici la liste :

- Figures symétriques
- Composition ou décomposition
- Surfaces auxiliaires
- Volumes auxiliaires
- Projections ou sections

Nous avons vu que la méthode des figures symétriques est traitée par Desboves, et que les méthodes par composition et décomposition, par surfaces auxiliaires et par volumes auxiliaires se trouvent parmi les méthodes de Serret. La méthode par projections est issue de la géométrie descriptive ; nous avons montré comment Desboves l'emploie.

La méthode des constructions auxiliaires est illustrée notamment par la construction d'un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés, par la démonstration des théorèmes de Menelaüs et de Ceva par la construction d'une ligne auxiliaire, ou encore par le théorème de Desargues démontré au moyen d'une figure dans l'espace. Parmi les exemples donnés, en voici un pour lequel l'auteur affirme qu'il pourrait suivre la méthode des lieux géométriques, mais dont il souhaite exposer une « solution particulière très simple » :

Étant données deux circonférences sécantes A et B, mener par l'un des points d'intersection E une sécante qui soit divisée par ce point dans un rapport donné $\frac{m}{n}$ ¹⁹³.



193. *Op. Cit.*, 138, p. 58.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Pour résoudre la question proposée, on pourrait recourir à un lieu géométrique déjà étudié (n° 65) [allusion à la possibilité de transformer un des cercles par similitude inverse de rapport $\frac{m}{n}$]; mais le problème comporte une solution particulière très simple, qu'il est utile d'indiquer.

Soit le problème résolu et

$$\frac{CE}{DE} = \frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{GE}{HE} = \frac{m}{n}$$

en ne prenant que la moitié des cordes.

Si l'on mène par le point E une perpendiculaire EF à GH , la ligne AB sera divisée dans le rapport donné, et le point F fera connaître la direction de FE ; donc il faut diviser AB dans le rapport $\frac{m}{n}$.

Joindre le point F au point E , puis élever une perpendiculaire CD à la droite FE .

Nous voyons que le tracé des lignes auxiliaires EF et AB donne accès à une solution simple et élégante du problème. Ainsi, l'auteur intègre dans un ouvrage sur les méthodes des solutions particulières, attachées à un problème unique. Son intérêt réside en fait dans la simplicité des solutions et des démonstrations qu'il expose. Le recensement des méthodes permet d'agrandir le nombre de ses moyens, sans toutefois que les démarches méthodiques, au sens d'applicables à une classe étendue de questions, soient exclusivement retenues.

Transformation des figures

FGM attache une importance particulière à la méthode de transformation des figures :

La *Transformation des figures*, même en se bornant à ce que nous en avons dit, est le moyen le plus puissant d'investigation que les *Éléments de Géométrie* puissent nous fournir pour découvrir de nouveaux théorèmes, ou pour trouver d'heureuses solutions¹⁹⁴.

La transformation des figures est définie ainsi par FGM :

194. *Exercices*, p. III.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

La méthode dite par Transformation des figures consiste à remplacer une figure donnée par une figure plus simple, liée à la première par des relations de position et de grandeur.

Dans l'exposé des méthodes élémentaires, nous emploierons les transformations qui résultent des modifications suivantes :

1. Le déplacement parallèle ;
2. La réduction et l'inclinaison des ordonnées d'une figure ;
3. La similitude ;
4. Le problème contraire ;
5. L'inversion ¹⁹⁵.

La méthode par transformation des figures consiste à remplacer une figure par une autre de façon à simplifier la résolution du problème. La notion de transformation n'est pas ici celle de Chasles : il n'est pas question d'envisager toute une classe de figures susceptibles d'être obtenues par une transformation. FGM reste dans le cadre restreint d'un énoncé particulier, pour la démonstration ou la construction duquel il est intéressant de remplacer, à une étape de l'analyse, la figure donnée par une autre. Bien entendu, celle-ci entretient des liens avec la première, de sorte que ce qui aura été établi pour la deuxième permet de déduire des propriétés de la première.

Le déplacement parallèle est appliqué à des problèmes qui demandent de transformer un polygone donné en un triangle de même aire, ou de partager un polygone en parties de même aire. Il s'agit là de problèmes très classiques. La solution proposée ici repose sur la proposition que l'aire d'un triangle reste constante lorsque son sommet se déplace sur une ligne parallèle à sa base. FGM érige donc en méthode la transformation qui consiste à remplacer un triangle par un autre en déplaçant son sommet parallèlement à sa base. Voici une application donnée de cette méthode :

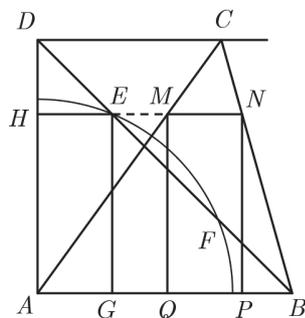
189. Problème. Dans un triangle ABC , mener une parallèle à la base de manière que le rectangle inscrit correspondant ait une valeur donnée r^2 pour somme des carrés des deux côtés adjacents ¹⁹⁶.

FGM transporte le sommet C en D de manière à obtenir un triangle rectangle ABD . La condition devient $EG^2 + EH^2 = r^2$, c'est-à-dire que le point E

195. *Op. Cit.*, 185, p. 84.

196. *Ibid.*, p. 85.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT



appartient à la circonférence de centre A et de rayon r . Il trouve deux points E et F solution et montre qu'en traçant la parallèle à la base AB passant par E il obtient un rectangle $MNPQ$ répondant au problème dans le cas initial. En effet, il a montré auparavant que des triangles de même base situés entre les mêmes parallèles sont coupés par une sécante parallèle à leur base selon deux segments égaux, ici EH et MN .

Parmi les méthodes de transformation déclinées, la similitude et le problème contraire apparaissent chez Lamé, cité par l'auteur¹⁹⁷, et dans les ouvrages de la période précédente. On emploie le problème contraire « dans la plupart des cas relatifs à l'inscription des figures »¹⁹⁸ pour les remplacer par un problème de circonscription dont la solution est connue. La méthode par similitude est employée surtout « lorsque le problème proposé [...] ne dépend que d'une ligne donnée ». FGM donne en exemple de la méthode par la similitude le problème classique suivant :

Construire un carré, connaissant la somme l de la diagonale et du côté¹⁹⁹.

Construire un carré quelconque $ABCD$; tracer et prolonger la diagonale AC ; du point C , avec CB pour rayon, marquer le point E .

Porter en AE' la longueur donnée pour la somme du côté et de la diagonale, mener EB , puis $E'B'$ parallèle à EB . On détermine ainsi le côté $A'B'$ du carré demandé.

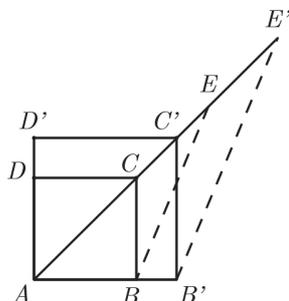
Ce problème avait déjà été résolu auparavant dans l'ouvrage, pour illustrer l'analyse et la synthèse. Cette fois-ci, la construction de la solution est directe,

197. *Op. Cit.*, p. 631.

198. *Op. Cit.*, p. 93.

199. *Op. Cit.*, p. 91.)

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



plus courte et plus évidente.

La méthode par inversion est aussi désignée dans l'ouvrage par l'expression *transformation par rayons vecteurs réciproques*, comme dans l'ouvrage de Serret, *Des méthodes en géométrie*²⁰⁰. FGM définit l'inversion comme suit :

On appelle *figures inverses* deux figures telles que toute droite OMM' , menée par un point donné O , et coupant l'une d'elle en M et l'autre en M' , donne un produit $OM \cdot OM'$ dont la valeur reste constante.

On nomme *origine* ou *centre d'inversion* le point fixe donné. Les points correspondants M et M' sont appelés *points réciproques* ou *points inverses*.

Les distances OM , OM' sont connues sous le nom de *rayons vecteurs réciproques*. On appelle *puissance d'inversion* le produit constant des rayons vecteurs de deux points correspondants.

FGM choisit, comme Desboves, Rouché et Comberousse, et Serret, le théorème de Ptolémée pour illustrer la méthode par inversion :

Dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés²⁰¹.

L'enchaînement des arguments mathématiques est tout à fait semblable à celui de la résolution de Desboves que nous avons reproduite p. 424. Mais chez ce dernier, l'idée d'un procédé de création de propriétés, par transformation des figures, apparaît plus clairement. D'autre part, nous rencontrons ici une

200. Serret, *Des méthodes en géométrie*, 1855, p. 21.

201. *Op. Cit.*, p. 98.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

situation où l'énoncé n'est pas une construction géométrique à réaliser, mais un théorème à démontrer. Les théorèmes et les problèmes sont présents à parts égales dans l'ouvrage avec les lieux géométriques.

La discussion et l'extension

La discussion consiste à décrire, en fonction de la position initiale des figures données, le nombre et la nature des solutions d'un problème. Elle est illustrée par le problème des trois cercles, qui compte en effet de deux à huit solutions suivant les positions relatives des cercles donnés. Quant à la méthode par extension, la définition en est donnée sous la forme suivante :

La méthode par *extension* consiste à étendre les propriétés d'une figure élémentaire à une figure de même espèce, mais dont la première n'est qu'un cas particulier.

L'*extension* consiste aussi à passer d'une figure plane à une figure de l'espace ayant certaines analogies avec la première [...]

L'extension est une méthode très féconde pour découvrir par intuition de nouveaux théorèmes²⁰².

Cette extension est une caractéristique de la notion de généralité dans l'*Aperçu historique* de Chasles. FGM l'illustre en généralisant des problèmes déjà résolus précédemment. Prenons en exemple le problème ci-dessous :

Sur la base BC d'un triangle isocèle, on élève, en un point quelconque, une perpendiculaire PMN qui coupe les côtés BA , CA aux points M et N ; la somme $PM + PN$ est constante. Que devient cette propriété pour un triangle quelconque ?²⁰³

Ce problème est ensuite généralisé pour aboutir à l'énoncé suivant :

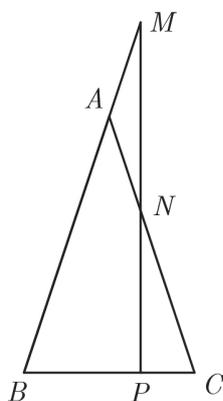
Dans un triangle quelconque, si l'on mène par un point quelconque de la base une parallèle à la médiane correspondante, et que cette parallèle coupe les côtés en M et N , la somme $PN + PM$ sera constante.

La méthode décrite ensuite est la méthode algébrique, c'est-à-dire la méthode que nous avons désignée par l'analyse algébrique des figures. Nous ne la détaillons pas ici et passons directement à la méthode suivante.

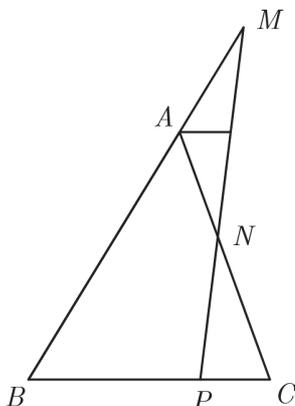
202. *Op. Cit.*, 263 & 264, p. 122.

203. *Op. Cit.*, p. 123.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



triangle isocèle



triangle quelconque

Les maxima et minima

Les maxima et minima sont, de l'avis de l'auteur, une « véritable nouveauté »²⁰⁴ propre à l'ouvrage. Pourtant, ils figurent dans les ouvrages de Desboves et de Millet. Nous savons qu'il connaît l'ouvrage de Desboves qui aborde ce sujet, mais il considère que « le petit nombre d'exemples qu'on pourrait en trouver dans d'autres ouvrages ne constituent ni une méthode ni même un simple procédé susceptible de s'appliquer à quelques exercices ». Si ces questions sont traitées avec généralité et fécondité en algèbre, « on peut, écrit FGM, résoudre d'une manière très simple un grand nombre de questions géométriques, relativement au *maximum* ou au *minimum* qu'elles peuvent présenter ». Les six méthodes décrites sont intitulées :

- Solution limite
- Emploi des principes
- Variable regardée comme constante
- Emploi de la tangente (à la moitié)
- Volume maximum et minimum
- Emploi de la tangente (au tiers)

La première et la troisième de ces méthodes correspondent à la première et la troisième méthode que Desboves décrit sur ce même sujet des maxima et minima. Pour la deuxième méthode, six principes sont déclinés sur lesquels s'appuyer, « de même qu'en algèbre », pour résoudre les problèmes de maxima

204. *Ibid.*, p. IV.

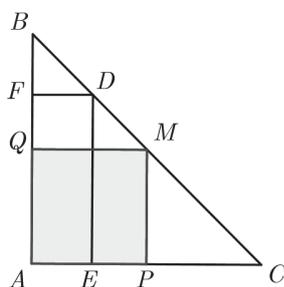
CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

et de minima. Le premier d'entre eux est :

Premier principe. Le produit de deux facteurs, dont la somme est constante, est maximum lorsque ces facteurs sont égaux entre eux²⁰⁵.

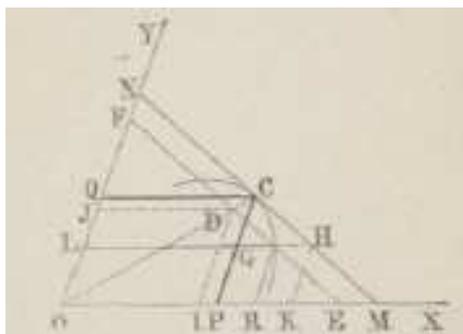
Ce principe est employé pour résoudre le problème :

Problème. Dans un triangle isocèle rectangle, inscrire le rectangle de surface maxima²⁰⁶.



La somme $MP + MQ = DE + DF$ dont le rectangle $MPAQ$ est maximum lorsque M est le milieu de l'hypoténuse.

La méthode qualifiée d'« emploi de la tangente » répond au problème de trouver le parallélogramme maximum compris entre deux droites et une courbe données. Le parallélogramme $OPCQ$ est maximum lorsque la partie



de la tangente à la courbe comprise entre les deux droites données est coupée en son milieu par le point de tangence C . La démonstration est basée

205. *Ibid.*, p. 171.

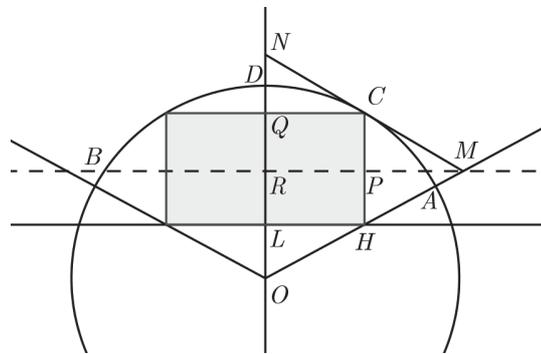
206. *Ibid.*, p. 171.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

sur une proposition antérieure quant à l'inscription d'un parallélogramme d'aire maxima dans un triangle et sur le fait, non explicité par l'auteur, que la tangente est d'un seul côté de la courbe, et du côté opposé au point O d'intersection des deux droites données.

En application de cette méthode, FGM donne entre autres le problème suivant :

Problème. Dans un secteur AOB [...] inscrire un rectangle maximum²⁰⁷.



Pour le secteur de cercle $OADB$, FGM se ramène au demi-rectangle $CHLQ$, place le point C au milieu de l'arc AD et trace la tangente MN . Les deux parties du rectangle $CHLQ$, savoir $CQRP$ et $PRLH$, sont maxima dans les triangles NRM et ORM , puisque C et H sont respectivement les milieux des côtés MN et OM . Or tout autre rectangle inscrit dans le secteur OAD serait plus petit qu'un rectangle inscrit dans le triangle OMN . Donc la position du point C réalise le rectangle maxima inscrit dans le secteur OAB .

Les deux dernières méthodes pour les maxima et les minima reprennent des notions antérieures pour la géométrie dans l'espace.

Conclusion

FGM réalise dans ses *Exercices* un immense travail de classification des questions de géométrie et des méthodes employées pour leur résolution. Ce travail, qui se veut systématique et exhaustif, part des solutions pour les regrouper selon les moyens qu'elles mettent en œuvre. Chacune des deux mille solutions doit pouvoir être pensée comme relevant d'une des méthodes

²⁰⁷. *Ibid.*, p. 180.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

exposées. Au sein de chaque méthode, la variété des situations pouvant être rencontrées est explorée.

Les exercices déclinés ne sont pas seulement des problèmes de construction comme dans les *observations sur la résolution des problèmes de géométrie* d'Amiot, mais à parts égales, et successivement, des théorèmes à démontrer, des lieux géométriques à déterminer et des problèmes de construction à résoudre. À partir d'un très large corpus de tels exercices, FGM en classe les résolutions entre huit méthodes, elles-mêmes subdivisées à leur tour afin de rendre compte le plus précisément possible de la diversité des procédés disponibles connus.

FGM recense ainsi la multiplicité des moyens dont dispose l'élève pour aborder une question de géométrie élémentaire. Ces moyens doivent permettre, avant tout, de trouver une solution simple. C'est la recherche de la simplicité qui guide toute l'entreprise de FGM.

3.3 Petersen (1880) : lieux géométriques et transformations

Julius Petersen est l'auteur danois d'un ouvrage de petit format très dense, portant sur les constructions géométriques à la règle et au compas, qui connaît un succès international durable. Les *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec application à plus de 400 problèmes*²⁰⁸ sont traduites en français en 1880 d'après l'édition danoise de 1879, elle-même complétée par rapport à la première édition danoise de 1866, jamais traduite. Le succès en France de cet ouvrage est établi par la multiplicité des rééditions, en 1892, 1901, 1908, 1916, 1931, et 1946, et les très nombreuses références dont il est l'objet dans des ouvrages postérieurs, ce jusqu'au milieu du XX^e siècle. Citons parmi d'autres l'éloge du mathématicien Paul Tannery qui le signale dans un article destiné à attirer l'attention sur l'importance, essentielle à ses yeux, donnée par Jacques Hadamard à l'exposition des méthodes dans son ouvrage de géométrie élémentaire. Cet article est publié dans le premier numéro de la revue *L'enseignement mathématique* :

On ne saurait trop recommander, à ce point de vue [de l'habitude de la recherche par l'application à des exercices], le recueil

208. Petersen, Julius, *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec application à plus de 400 problèmes*, trad. O. Chemin, Paris : Gauthier-Villars, 1880, rééd. Jacques Gabay, 1990.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

de problèmes de M. PETERSEN, qui a été composé avec un art consommé²⁰⁹.

Attiré jeune par les mathématiques et particulièrement par les problèmes à résoudre, Julius Petersen finance ses études universitaires en enseignant les mathématiques dans une école privée, ainsi qu'à des particuliers. Il obtient son doctorat en 1871, dont une application porte justement sur les constructions à la règle et au compas. Professeur de mathématiques à l'université de Copenhague à partir de 1877, ses recherches mathématiques portent sur des thèmes variés. Il publie plusieurs ouvrages d'enseignement et s'implique, à la fin de sa carrière, dans les questions d'enseignement des mathématiques²¹⁰.

Le traducteur, Octave Chemin (1844-1931), est ingénieur des ponts et chaussées, polytechnicien de la promotion 1864. Il traduira encore les *Leçons sur la géométrie de position* du mathématicien allemand Théodore Reye²¹¹ et plusieurs des ouvrages de Salmon²¹².

L'ouvrage de Petersen décline une succession de méthodes, qui structure complètement l'organisation des 400 énoncés de problèmes qu'il contient. Ces méthodes sont l'objet principal du livre, et les problèmes sont là pour les illustrer, en montrer l'efficacité, et aussi, comme le signale le traducteur, pour « forcer les élèves à s'assimiler les principes généraux » sur lesquels reposent les méthodes par leur mise en pratique. Toute solution qui ne soit méthodique est exclue de l'ouvrage. Certains problèmes réputés difficiles sont résolus avec brièveté et élégance.

Nous allons voir que Petersen donne un sens particulier à la notion de méthode, et que ses méthodes dérivent toutes de la méthode des lieux géométriques, rendue extrêmement efficace par le recours à des transformations. Les transformations, centrales dans l'ouvrage, y sont progressivement étudiées pour elles-mêmes.

209. Tannery, Paul, « Sur la méthode en géométrie. D'après M. Jacques Hadamard », *L'enseignement mathématique*, vol. 1, 1899, p. 333.

210. Pour des éléments biographiques sur Julius Petersen, voir : Christiansen, M., Lützen, J., Sabidussi, G., Toft, B., « Julius Petersen annotated bibliography », *Discrete Mathematics*, 100, 1-3, 1992, p. 83-97.

211. Reye, Théodore, *Leçons sur la géométrie de position*, 2 vol., trad. O. Chemin, Paris : Dunod, 1881-1882.

212. Salmon, *Traité de géométrie analytique à trois dimensions*, 3 vol., trad. O. Chemin, Paris : Gauthier-Villars, 1882-1891.

Traité de géométrie analytique (courbes planes), destiné à faire suite au traité des sections coniques, trad. O. Chemin, Paris : Gauthier-Villars, 1884.

Leçons d'algèbre supérieure, trad. O. Chemin, Paris, 1890.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

La notion de méthode comme problème général

C'est de la résolution des problèmes que Petersen a déduit ses méthodes : « Après avoir résolu un grand nombre de questions [...], j'ai essayé d'analyser l'enchaînement des idées qui conduisent à la solution de chacune d'elles et d'en faire une classification sous forme de règles générales »²¹³. Comme Lamé, Petersen déclare avoir repéré dans les solutions des problèmes des ressemblances permettant de les regrouper.

La notion de méthode, chez Petersen, a la forme d'un « problème général ». En voici un exemple :

Par un point P , mener une droite qui coupe deux courbes données K et K' en des points A et a tels que PA et Pa soient entre eux dans un rapport donné $m : n$.

Ce problème est général en ce que la nature des courbes K et K' n'est pas précisée, non plus que la disposition relative des diverses parties de la figure. Sa solution peut donc être appliquée à de nombreux énoncés particuliers, comme par exemple celui-ci :

Par un des points d'intersection de deux cercles, mener une droite qui détermine des cordes égales dans leur intérieur.

Il s'agit bien d'un cas particulier du problème général précédent, les courbes données étant les deux cercles, le point P étant leur point d'intersection, et enfin le rapport donné étant égal à -1 . Chaque problème général est ainsi suivi de dizaines d'énoncés particuliers, donnés sans leur solution, sinon quelques indications pour les plus ardues d'entre eux. Le travail du lecteur consiste à reconnaître comment le problème auquel il est confronté peut être conçu comme un cas particulier d'un problème général.

Les méthodes de Petersen dérivent toutes de la première d'entre elles, la méthode des lieux géométriques. L'auteur s'efforce de donner la plus grande extension à cette méthode des lieux géométriques en résolvant plusieurs problèmes généraux. Il enseigne les mathématiques depuis plusieurs années lorsqu'il rédige la première édition de cet ouvrage, et il attribue une grande valeur pédagogique aux problèmes de constructions :

Il n'existe pas de problèmes qui servent autant à aiguïser la faculté d'observation et de combinaison et à donner à l'esprit de la clarté

213. *Op. Cit.*, préface.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

et de la logique ; il n'y en a pas qui présentent autant d'attrait pour les élèves²¹⁴.

L'intérêt des problèmes dépasse donc leur simple résolution, et s'étend selon l'auteur à une véritable formation de l'esprit. Cela explique notamment le nombre très restreint de figures dans l'ouvrage : « Mon idée, écrit Petersen, c'est de forcer les élèves à travailler le présent ouvrage et non pas simplement à le lire »²¹⁵. Ainsi certaines figures réalisées dans la suite de ce travail, pour en faciliter la lecture, sont absentes de l'ouvrage original.

L'auteur veut par ailleurs fournir des méthodes aussi simples et efficaces que possible. Le traducteur insiste sur le fait que la valeur de l'ouvrage réside pour une grande part dans la nouveauté et l'élégance des méthodes proposées :

Nous avons surtout été extrêmement frappé de voir des problèmes célèbres, comme celui de Malfatti, résolus d'une manière aussi élémentaire que nouvelle et ingénieuse²¹⁶.

La méthode des lieux géométriques

L'ouvrage commence donc par la méthode des lieux géométriques. Tout au long de l'ouvrage, cette méthode sera étendue et appuyées par des notions supplémentaires attachées à des problèmes généraux, afin de répondre à chaque fois à un nouveau groupe de problèmes. Dans la situation, très fréquente, où un problème se ramène à la détermination d'un point, elle s'énonce ainsi :

On considère, en les prenant isolément, les deux conditions auxquelles le point cherché doit satisfaire ; à chacune d'elles correspondra un lieu géométrique ; [...] le point, devant se trouver en même temps sur chacun des deux lieux, doit se trouver aux points où ils se coupent.

Après avoir déterminé quelques lieux géométriques de référence, Petersen donne en exemple une cinquantaine d'énoncés de problèmes. Leur solution, au moins du point de vue de l'auteur, est une application immédiate de la méthode des lieux géométriques. Ensuite, il prodigue quelques conseils pour

214. *Op. Cit.*, préface.

215. *Op. Cit.*, préface.

216. *Op. Cit.*, Avertissement.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

en étendre l'usage à des problèmes pour lesquels elle ne s'applique pas aussi immédiatement :

On introduit dans la figure les éléments donnés ; [...]

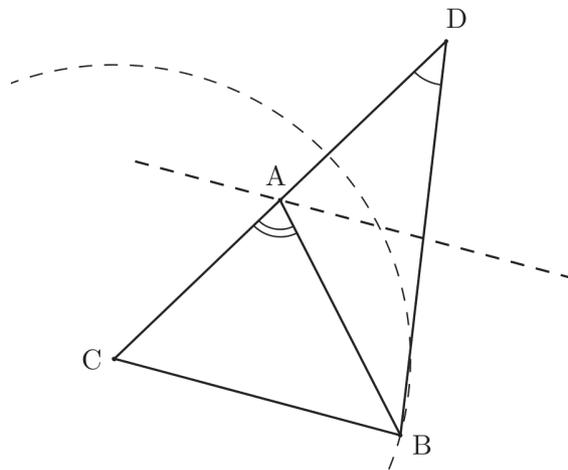
On soumet la figure à un examen attentif, pour trouver les lignes et les angles qui [...] peuvent se déterminer facilement ; [...]

On cherche ensuite à découvrir une portion de la figure [...] qui puisse ainsi servir à déterminer les autres parties de la figure²¹⁷.

Donnons en exemple le problème n° 73, pour lequel il propose, justement, quelques indications :

Construire un triangle, connaissant a , A , $b+c$ [c'est-à-dire l'angle au sommet A , la somme $b+c$ des longueurs des côtés adjacents, et la longueur a du côté opposé.].

On introduit $b+c$ dans la figure, en prolongeant AC au delà de A et d'une quantité $AD = c$, et joignant ensuite D avec B . Comme on le voit facilement, le $\triangle CDB$ peut maintenant se construire immédiatement, puisque $\angle D = \frac{1}{2}A$. On détermine alors le sommet au moyen de c [référence à la propriété de la médiatrice rappelée préalablement.].



Les indications sont fournies sous forme analytique : à partir de la figure solution, à savoir le triangle ABC , est déduite une figure dont on connaît suffisamment d'éléments pour la construire, en l'occurrence le triangle CDB .

217. *Ibid.*, p. 16.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

Il ne reste plus, une fois obtenu le triangle CDB , qu'à expliquer comment retrouver la figure de départ, ici en traçant la médiatrice du segment BD , qui coupe la ligne CD en A .

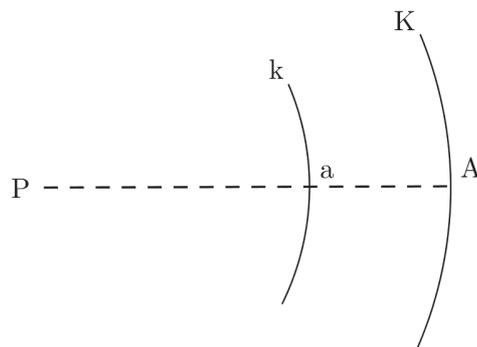
Ainsi les éléments connus ont bien été regroupés puisque la ligne CD a pour longueur $b+c$. Nous obtenons le triangle CDB par la connaissance de la longueur de la ligne CD , de la longueur de la ligne CB et de l'angle D . Notons qu'interviennent ici des lieux géométriques : B se trouve à l'intersection du cercle de centre C et de rayon a et de la demi-droite issue de D qui fait l'angle $\frac{1}{2}A$ avec la ligne CD , ce qui aboutit à deux possibilités, dont nous n'avons tracé qu'une seule.

Dans la suite du recueil, Petersen introduit successivement de nouvelles notions, qui permettent de déterminer davantage de lieux géométriques, qui sont toujours des droites et des cercles, et donc de résoudre de nouveaux problèmes, ou bien les mêmes problèmes par une méthode différente.

La multiplication des courbes

La première de ces notions est la multiplication des courbes, qui permet de résoudre le problème général qui a été présenté en introduction. Elle est définie de la manière suivante :

Si d'un point P , on mène une droite à un point quelconque A d'une courbe donnée K , et si l'on divise cette droite par un point a tel que $Pa : PA = m : n$, le lieu géométrique de a est une courbe k , semblable à la courbe donnée²¹⁸.

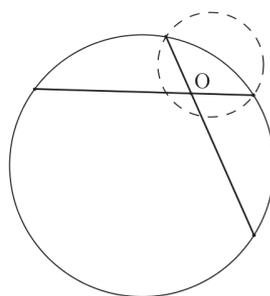


218. *Op. Cit.*, p. 22.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Le point a est construit de façon que les distances Pa et PA soient dans un rapport donné, noté $m : n$, qui peut être positif ou négatif. Donnons comme exemple d'application le problème 118 :

Par un point O situé à l'intérieur d'un cercle donné, mener une corde qui soit divisée par le point en deux segments qui soient entre eux dans le rapport $m : n$ ²¹⁹.



Prenons O comme centre de similitude et multiplions le cercle par $-\frac{m}{n}$; les lignes cherchées passeront alors par les points où le nouveau cercle coupe le cercle donné.

Il s'agit toujours de la méthode des lieux géométriques. Appelons AB la corde cherchée : le point A est soumis à la double condition d'appartenir au cercle donné, et d'appartenir au lieu des points B' alignés avec O et B et tels que $OB' : OB :: -m : n$. De la multiplication du cercle donné, du centre O et avec le coefficient $-m : n$ résulte ce deuxième lieu.

Au sujet de la multiplication des courbes, l'auteur insère la remarque suivante, qui montre que la transformation est envisagée pour elle-même, indépendamment des figures concernées :

Cette conception peut se généraliser ; car un point quelconque du plan peut être considéré comme appartenant à un des systèmes et par suite il a son homologue dans l'autre²²⁰.

De sorte que chaque point du plan se voit associé à un point homologue. La correspondance entre points homologues n'est plus, dès lors, liée à des figures

219. *Op. Cit.*, p. 24.

220. *Op. Cit.*, p. 22.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

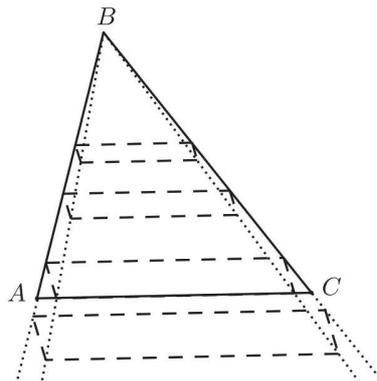
particulières. La notion de transformation passe d'un principe de correspondance entre des figures à un principe de correspondance entre des points. Ceci décrit une nouvelle appréhension de la géométrie dans laquelle les figures sont conçues comme des lieux des points.

La méthode de similitude

La « méthode de similitude » généralise la précédente, explique l'auteur. « On l'emploie toutes les fois qu'en omettant ou laissant de côté une des conditions imposées, on obtient un système de figures semblables (et semblablement placées) ». Jusque là, on ne s'intéressait qu'au lieu d'un point lorsqu'une des conditions qui lui sont imposées était laissée de côté. Mais laisser de côté une des conditions d'un problème déterminé donne lieu à une classe entière de figures, parmi lesquelles on trouvera ensuite la solution du problème lorsqu'on considérera à nouveau la condition d'abord écartée. La méthode de similitude répond à la situation où cette classe de figures est composée de figure semblables et semblablement placées. Voici un exemple :

156. Dans un triangle donné, inscrire un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

En écartant momentanément la condition qu'un côté du parallélogramme s'appuie sur un côté du triangle, on obtient un système de parallélogrammes semblables et semblablement placés.



La solution du problème s'en déduit en remarquant que les lieux des deux sommets libres des parallélogrammes obtenus forment deux lignes droites partant du point B , qui recoupent la base AC du triangle aux points cherchés.

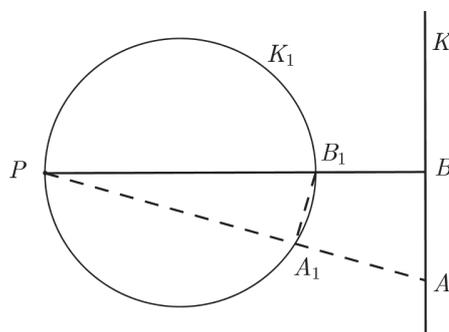
CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Les figures inverses

La notion de figure inverse est définie de la façon suivante :

Une droite tourne autour d'un point fixe P (le centre d'inversion) tandis qu'en même temps un point mobile A de la droite parcourt une courbe donnée K . Sur la droite, déterminons un point A_1 par la condition que $PA.PA_1 = I$, où I (la puissance d'inversion) est une quantité constante (positive ou négative). Le point A_1 décrira une courbe K_1 . On dit des courbes K et K_1 que l'une est la courbe *inverse* de l'autre (la transformée par rayons vecteurs réciproques). A et A_1 sont dits points *correspondants*²²¹.

La notion de mouvement est convoquée dans cette définition, et caractérisée par l'emploi des verbes *décrire* et *parcourir*. Nous remarquons de nouveau que les figures sont appréhendées comme des lieux de points : la courbe inverse est *décrite* par un point, c'est-à-dire qu'elle est le lieu de ses positions successives. La courbe inverse d'une droite est un cercle passant par le centre d'inversion :



Cette notion de figure inverse permet de résoudre le problème général :

Par un point donné P , mener une droite sur laquelle deux courbes données K et K_1 déterminent deux segments PX et PX_1 dont le produit soit donné²²².

Là encore, prêtons attention au vocabulaire employé : il est différent pour la multiplication des courbes et pour les figures inverses. Dans le premier cas deux points associés sont dits « homologues », et dans le deuxième cas, ils

221. *Op. Cit.*, p. 35.

222. *Op. Cit.*, p. 36.

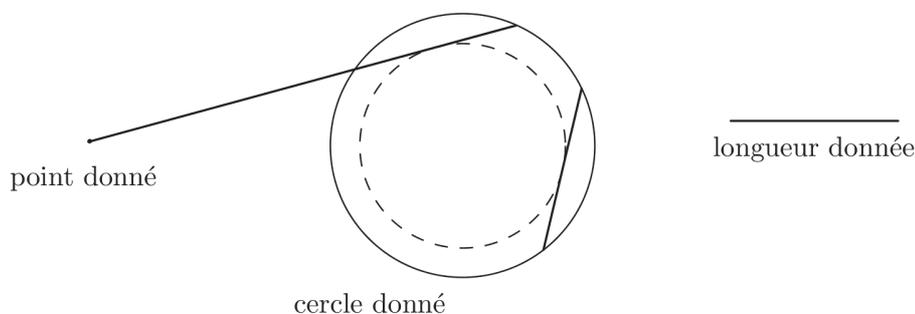
VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

sont dits « correspondants ». Cette différence suggère que ces deux procédés ne sont pas conçus comme des cas particuliers d'une notion générale de transformation.

Les lieux géométriques de lignes

Aux lieux géométriques de points, Petersen ajoute les lieux géométriques de lignes, qui sont des systèmes de lignes répondant à une condition donnée. Lorsque ces lignes sont toutes tangentes à une courbe, cette courbe est appelée lieu géométrique des lignes dont il est question. Il s'agit de l'enveloppe des lignes. En particulier, lorsque le cercle est réduit à un point, il s'agit de l'ensemble des lignes passant par ce point. Dans le cadre de la résolution d'un problème, une ligne soumise à deux conditions sera entièrement déterminée par son appartenance à deux tels lieux. Petersen commence donc par déterminer quelques lieux géométriques de lignes de référence, puis donne des exemples de la méthode, dont le problème n° 220 :

Par un point donné, mener une droite qui soit coupée par un cercle donné suivant une corde de longueur donnée²²³.



Le lieu des cordes d'une longueur donnée est un cercle concentrique au premier. La droite cherchée appartient à ce lieu et au système des droites passant par le point donné. Le problème se ramène ainsi à tracer une ligne passant par un point donné et tangente à un cercle donné, résolu au n° 16 de l'ouvrage.

223. *Op. Cit.*, p. 44.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

La transformation des figures

Le terme de « transformation » désigne un principe général de correspondance entre deux figures. La multiplication des lignes et la similitude des paragraphes précédents ne sont pas désignés par ce terme.

La « transformation des figures » permet de résoudre de nouveaux problèmes, ou bien de trouver une nouvelle solution aux problèmes déjà résolus. Cette méthode est énoncée comme suit :

De la figure qu'on aura tracée, on devra chercher à en déduire une autre, où les éléments donnés se trouvent rassemblés de telle manière qu'on puisse effectuer la construction. Quand cette figure aura été déterminée, on pourra en général revenir à celle dont il était d'abord question. Les méthodes qui peuvent servir à effectuer cette transformation sont :

- A. *La translation parallèle,*
- B. *Le retournement,*
- C. *Le déplacement par rotation*²²⁴.

Cela relève d'une démarche qui avait déjà été conseillée plus tôt dans l'ouvrage : regrouper ensemble les éléments donnés de la figure afin de pouvoir amorcer sa construction. Cette opération, qui était alors réalisée par une construction auxiliaire, l'est ici par le déplacement de la figure ou d'une partie de la figure. Les trois types de déplacement successivement envisagés sont la translation parallèle, le retournement et la rotation.

La première, la translation parallèle, est définie de la sorte :

On se sert de cette méthode pour rapprocher les uns des autres les éléments donnés, en transportant quelques-unes des lignes de la figure dans de nouvelles positions, parallèles aux positions primitives²²⁵.

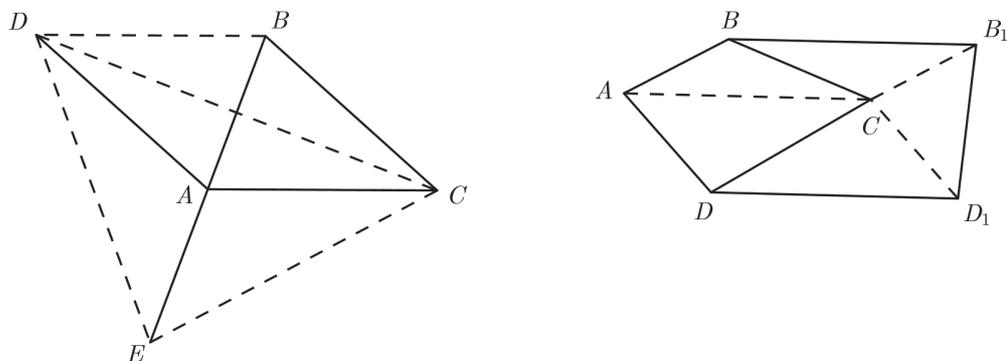
Toutefois, nous allons voir que ce terme de translation est utilisé pour désigner successivement trois procédés différents.

Dans un premier temps, le procédé décrit correspond bien à la définition ci-dessus. L'auteur propose dans ce cadre deux constructions de référence, une pour le triangle et une pour le quadrilatère, auxquelles se rapportent plusieurs problèmes.

224. *Op. Cit.*, p. 49.

225. *Op. Cit.*, p. 50.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



Dans la figure de gauche, le triangle de départ est ABC . Les lignes BC et AB sont transportées parallèlement en DA et EA respectivement. Ces transports se font donc dans des directions différentes. De nombreuses propriétés du triangle ABC se traduisent directement en des propriétés du triangle CDE , et réciproquement, ce qui fait l'intérêt de la construction. Par exemple, les côtés du dernier ont des longueurs doubles des médianes du premier, ce qui permet de résoudre immédiatement le problème n° 246, dont une solution moins directe a déjà été donnée au n°127 :

Construire un triangle, connaissant ses trois médianes²²⁶.

En effet, connaissant les trois côtés du triangle CDE , sa construction est immédiate. On en déduit ensuite le triangle ABC .

Dans la figure de droite, le quadrilatère de départ est $ABCD$. Les lignes AB et AD sont transportées parallèlement en CB_1 et CD_1 , cette fois dans la même direction. On obtient un parallélogramme dont les propriétés sont, là encore, liées à celles du quadrilatère d'origine, ce qui donne lieu à plusieurs applications.

Ces deux constructions sont astucieuses et riches de propriétés. Ici, la méthode que propose l'auteur consiste par conséquent à connaître les propriétés de figures de référence. Face à un autre problème, le lecteur devra reconnaître ces figures de référence lorsqu'elles se présenteront. La notion de translation est attachée aux figures en présence, elle exprime la nature du mouvement opéré sur certaines de leurs parties.

Dans un deuxième temps, la translation n'est plus employée pour construire une nouvelle figure à partir des éléments de la première, mais pour déplacer

226. *Op. Cit.*, p. 51.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

l'intégralité d'une figure :

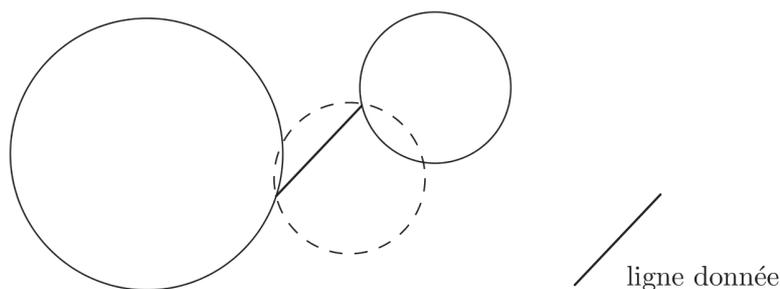
Au moyen de la translation parallèle, on peut résoudre un problème général qu'on rencontre souvent :

Entre deux courbes données mener une ligne qui soit égale et parallèle à une ligne donnée.

On déplace l'une des courbes d'une longueur égale et parallèle à la ligne donnée ; elle coupera l'autre courbe au point où il faut mener la ligne²²⁷.

Voici, avec le problème n° 271, un exemple d'utilisation de cette méthode :

Mener une ligne égale et parallèle à une ligne donnée et qui ait ses extrémités sur deux circonférences données.



Enfin, la translation parallèle est encore employée d'une troisième façon :

On employe souvent un genre spécial de translation parallèle, quand on a affaire à des cercles qui touchent d'autres cercles ou des droites ; on imagine que le rayon d'un des cercles diminue jusqu'à zéro, pendant qu'en même temps les droites ou les cercles tangents suivent le même mouvement, en conservant les unes leurs directions, les autres leurs centres²²⁸.

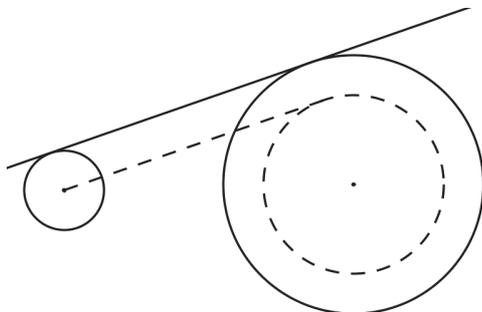
Cette troisième définition évoque un « mouvement » qui se conçoit mieux sur un exemple. Prenons l'exemple du n° 275 :

Mener la tangente commune à deux cercles.

227. *Op. Cit.*, p. 55.

228. *Op. Cit.*, p. 56.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire



Faisons diminuer le plus petit jusqu'à ce qu'il se réduise à un point, tandis que les tangentes le suivent ; l'autre cercle doit continuer d'être tangent aux tangentes ; il prendra donc un rayon égal à la somme ou à la différence des rayons donnés, suivant que l'on considérera les tangentes intérieures ou extérieures. Le problème se ramène ainsi à 16 [i.e. le tracé d'une tangente à un cercle par un point extérieur]²²⁹.

Nous constatons avec ces trois exemples que la translation parallèle désigne au fil des problèmes des procédés distincts, regroupés parce qu'ils mobilisent tous les trois le déplacement de la figure, ou d'une de ses parties, parallèlement à elle-même.

La deuxième transformation annoncée, le retournement, « s'emploie très souvent quand les éléments de même grandeur sont inconnus et la méthode sert, dans une certaine mesure, à les éliminer [ou encore] quand on connaît le rapport de deux lignes ; pour les superposer on fait croître une partie de la figure suivant le rapport donné pendant qu'on opère en même temps le retournement »²³⁰. L'exemple du problème n° 311 l'illustre ci-dessous :

Dans un cercle donné, inscrire un quadrilatère $ABCD$, connaissant la grandeur des deux côtés opposés AB et CD et le rapport des deux autres côtés²³¹.

Retournons le triangle ABC de telle sorte que A vienne en C et C en A ; B devra encore être sur la circonférence. On arrive de cette manière à placer les éléments donnés d'une manière plus commode, puisqu'on connaît ainsi deux côtés successifs et le rap-

229. *Op. Cit.*, p. 56.

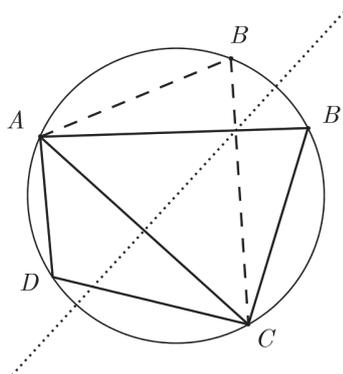
230. *Op. Cit.*, p. 60.

231. *Op. Cit.*, 311, p. 60.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

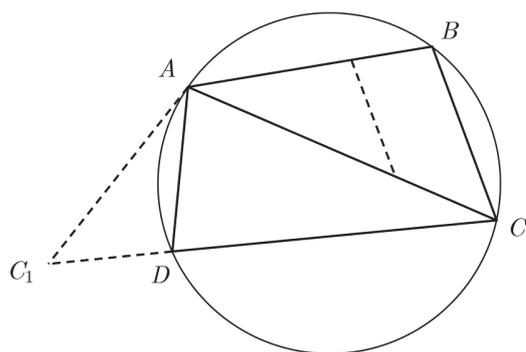
port des deux autres ; on peut alors tracer les deux côtés donnés et déterminer le quatrième sommet ²³².

Il n'y aura plus ensuite qu'à ramener le triangle ABC dans sa position primitive.



Le retournement permet ici de transformer deux côtés opposés en côtés adjacents, en faisant pivoter le triangle ABC autour d'un diamètre, ce qui ramène la construction à un exercice déjà résolu. Un autre exemple recourt à une forme différente de retournement :

Construire un quadrilatère inscriptible $ABCD$, connaissant les quatre côtés ²³³.



²³². en faisant appel à une propriété démontrée précédemment

²³³. *Op. Cit.*, 316, p. 61.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

On multiplie les côtés du triangle ABC par $AD : AB$ et on le retourne dans la position ADC_1 , où DC_1 et CD forment alors une ligne droite. On peut maintenant construire le triangle CAC_1 ; car on connaît le rapport $CA : C_1A$ de même que CD , DC_1 et DA .

Nous voyons d'abord que deux transformations, une multiplication et un retournement, sont effectuées successivement, et ensuite qu'ici le retournement est d'une nature différente puisque cette fois-ci le triangle pivote autour d'un de ses sommets. Les solutions de ces deux derniers problèmes sont guidées par le même principe de réunir les données du problème. Dans le n° 311, les côtés connus AB et CD ont été rapprochés. Dans le n°316, ce sont les angles supplémentaires ABC et ADC qui ont été rapprochés.

La rotation

Nous avons remarqué jusqu'ici que les transformations utilisées par l'auteur sont des déplacements des figures, ou de certaines de leurs parties, attachés à ces figures et variables d'un problème à l'autre. Progressivement dans le recueil, Petersen s'intéresse aux déplacements pour eux-mêmes, indépendamment des figures déplacées, et il dédie entièrement le troisième et dernier chapitre, dont il défend la nouveauté, à l'étude de la rotation. « Nous attirerons spécialement l'attention, écrit-il, sur la simplicité des solutions auxquelles elle conduit de manière naturelle et presque intuitive »²³⁴. Cette transformation est définie d'une manière différente de sa signification contemporaine :

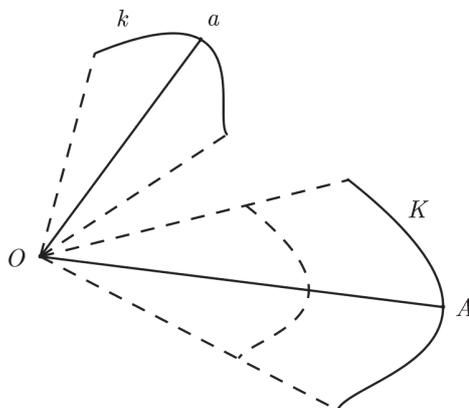
Si d'un point donné O on mène des droites aux points d'une courbe donnée k ; et si l'on fait tourner ces lignes d'un angle v autour de O , tandis qu'en même temps on les fait croître suivant un rapport donné f , on obtient une nouvelle courbe K [...] Un point a de la courbe k déterminera par rotation un point A de la courbe K . Deux pareils points sont dits homologues. Les lignes homologues sont celles qui joignent les points homologues²³⁵.

Remarquons qu'« on obtient une nouvelle courbe », et qu'il ne s'agit donc pas de la même courbe dans une position différente, comme pour le retournement ou la translation parallèle. La rotation est étudiée indépendamment des figures déplacées :

234. *Op. Cit.*, avertissement.

235. *Op. Cit.*, p. 70.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT



Tout point du plan peut être considéré comme appartenant à l'un des systèmes et aura par suite son homologue dans l'autre²³⁶.

La transformation n'est pas liée à une ou deux figures, comme précédemment, mais s'applique à tous les points du plan. L'auteur en propose une représentation en mouvement :

On peut également imaginer que tout le plan tourne autour de O de telle manière qu'un de ses points parcoure une courbe donnée. Si le système tout entier des points du plan conserve sa forme pendant le mouvement, un quelconque de ses points décrira une courbe semblable à la courbe donnée²³⁷.

L'étude de la rotation amène Petersen à formuler des propriétés de cette transformation qui dépassent la simple conservation des angles et des longueurs. Il établit le résultat suivant :

Si l'on a trois systèmes semblables A , B , et C et si un point O est le centre de rotation de A et B et en même temps celui de B et C , il doit être aussi le centre de rotation de A et C [...]. Si l'on joint trois points homologues a , b et c des trois systèmes [...] la forme du triangle abc est constante, et, pour cette raison, je l'appellerai *le triangle fondamental*²³⁸.

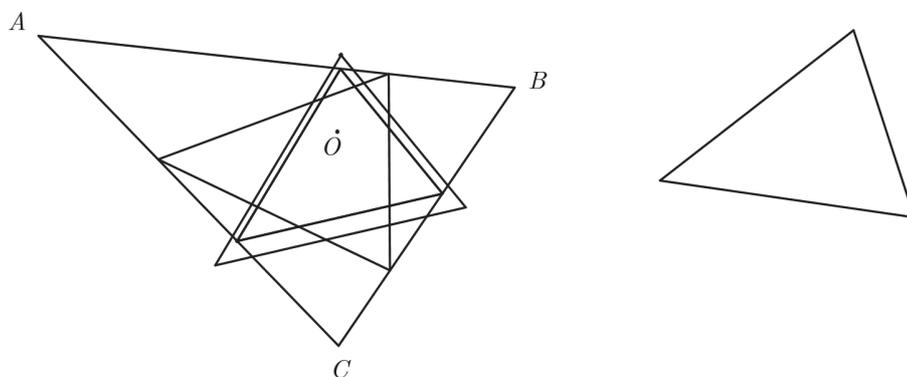
236. *Op. Cit.*, p. 71.

237. *Op. Cit.*, p. 71.

238. *Op. Cit.*, p. 79.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

Il prouve ensuite que la forme d'un tel triangle détermine le centre O de rotation. Ce théorème permet de résoudre de nouveaux problèmes de construction. Appliqué à trois lignes droites considérées comme des figures semblables, avec trois points homologues situés sur chacune d'entre elles, il établit qu'il n'existe qu'un seul centre de rotation pour lequel se correspondent les trois lignes en associant les trois points l'un à l'autre. D'où la solution du problème 377 : « Dans un triangle donné, inscrire un autre triangle congruent à un triangle donné », congruent signifiant ici superposable.



Il inscrit d'abord dans le triangle ABC donné un premier triangle de même forme que celui qu'il s'agit d'inscrire. Mais le théorème ci-dessus établit que tous les triangles semblables inscrits dans le triangle ABC ont un même centre de rotation O . Par conséquent, le premier triangle inscrit est multiplié, selon la terminologie de Petersen, de manière à avoir la grandeur requise, puis tourne autour du point O jusqu'à ce que ses sommets tombent sur les côtés du triangle ABC .

Pour mesurer l'efficacité et l'élégance de la solution de Petersen appuyée sur la théorie de la rotation, comparons-là avec la solution que donne Carnot de ce même problème dans la *Géométrie de position*²³⁹ de 1803. Ce dernier nomme A, B, C les angles du triangle circonscrit, et a, b, c les angles du triangles inscrit. L'analyse de la figure solution aboutit à l'équation suivante pour le sinus d'un des angles inconnus de la figure, noté z :

239. Carnot, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803, p. 377.

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

$$\begin{aligned} \sin^2 z - \sin z &= \frac{2C \sin A \sin B (a \sin B + b \sin A \cos(A + B - c))}{(a \sin B + b \sin A \cos(A + B - c))^2 + b^2 \sin^2(A + B - c)} \\ &= \frac{b^2 \sin^2(A + B - c) - C^2 \sin^2 A \sin^2 B}{(a \sin B + b \sin A \cos(A + B - c))^2 + b^2 \sin^2(A + B - c)} \end{aligned}$$

Il serait bien sûr long et fastidieux de réaliser alors la construction des solutions à la règle et au compas, tandis qu'elle s'avère aisée et rapide avec la solution précédente.

Conclusion

Petersen propose, dans un ouvrage entièrement consacré à la résolution des problèmes de construction à la règle et au compas, une liste de méthodes, assorties de listes de problèmes dont certains sont réputés difficiles, comme les problèmes de Castillon et de Malfatti, ou encore le problème des trois cercles. Le terme de méthode désigne ici un problème général, c'est-à-dire un énoncé de problème exprimé dans des termes qui laissent une certaine indétermination aux formes, aux positions et aux grandeurs des éléments de la figure. De la solution d'un problème général se déduisent des solutions à un grand nombre d'énoncés particuliers. Les quatre cents problèmes de l'ouvrage sont classés selon la méthode permettant leur résolution, un même problème apparaissant fréquemment en plusieurs endroits.

Si les solutions de Petersen sont souvent efficaces et élégantes, il s'attache à ne présenter que des solutions méthodiques.

Nous avons montré que la démarche de l'auteur est guidée par deux idées principales qui sont fécondées par le recours à des transformations. Chacune fait appel néanmoins à une conception différente de la notion de transformation.

La première idée, celle de réunir les éléments donnés de la figure, est associée à une notion de transformation qui est un déplacement de la figure, ou de certaines de ses parties. La deuxième idée, le recours à la méthode des lieux géométriques, est associée à une notion de transformation de points. Cette dernière conception, innovante, s'avère extrêmement féconde lorsqu'elle est associée à l'emploi de lieux géométriques dont plusieurs se trouvent dans les *Lieux plans* d'Apollonius tels qu'il sont rendus dans l'ouvrage de Lhuillier. L'étude des transformations pour elles-mêmes aboutit à des propriétés particulièrement fécondes.

VIII.3 Les méthodes particulières dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire

L'idée de mouvement des parties d'une figure est omniprésente dans l'ouvrage de Petersen. En libérant un point ou une droite de la figure d'une des conditions du problème, il ou elle parcourt un lieu géométrique qu'il est souvent possible de déterminer. Plusieurs des méthodes sont introduites en même temps qu'une nouvelle transformation, dont les propriétés sont exposées qui serviront à la résolution des problèmes.

3.4 Conclusion

Les méthodes de résolution des questions de géométrie élémentaire constituent le sujet principal de trois ouvrages dans ce troisième tiers du XIX^e, ceux de Desboves, FGM et Petersen. Ces initiatives tranchent avec celles de la période précédente où les méthodes faisaient l'objet d'un appendice, ou d'un court chapitre, au sein d'un ouvrage. Témoignage de la construction progressive d'un genre d'ouvrage nouveau, tous les trois connaissent une deuxième édition modifiée et enrichie par rapport à la première, notamment pour ce qui concerne les méthodes.

Ces trois livres contiennent plusieurs centaines d'énoncés de questions qui sont organisés, au moins pour une partie de l'ouvrage, selon les méthodes employées à leur résolution. Desboves et FGM ne limitent pas leurs considérations sur les méthodes à des problèmes de construction géométrique, là aussi en comparaison avec les ouvrages de la période précédente, mais les étendent aux théorèmes à démontrer, aux lieux géométriques à déterminer et aux extrema à trouver. D'ailleurs Desboves associe ses méthodes à ces différents types d'énoncés. Les énoncés des questions sont pour certains originaux, lorsqu'il s'agit de soumettre au lecteur des énoncés qu'il n'a pas rencontrés ailleurs, et pour d'autres classiques, lorsqu'il s'agit de convaincre de l'efficacité d'une méthode. Les auteurs donnent fréquemment plusieurs solutions à une même question, et Desboves donne toutes ces solutions différentes à la suite les unes des autres.

Cet intérêt porté au recensement des moyens du géomètre et à l'explicitation du raisonnement géométrique amène les trois auteurs à développer des notions nouvelles : problèmes du premier et du deuxième genre chez Desboves, méthodes variées de recherche des extrema chez FGM, propriétés du déplacement par rotation chez Petersen.

Desboves et FGM, en montrant une grande diversité de moyens disponibles pour résoudre une question de géométrie, recherchent, outre l'efficacité, l'élégance et la simplicité de la solution. Tandis que Petersen, qui s'en tient

CHAPITRE VIII. LES MÉTHODES DANS LES OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

aux seuls problèmes de construction, qui plus est à la règle et au compas, s'attache à ne montrer que des solutions méthodiques.

Les transformations sont employées par ces trois auteurs, pour remplacer la figure de la question par une autre figure, éventuellement assortie d'une autre question. Certaines transformations particulières se voient étudiées pour elles-mêmes, indépendamment des figures dont elles font se correspondre les parties, chez Desboves et surtout chez Petersen. Parmi ces transformations, l'inversion, traitée par des méthodes géométriques dans l'ouvrage de Serret, puis dans celui de Rouché et Comberousse, est décrite et employée par les trois auteurs.

Reste la question de la diffusion de ces ouvrages et des idées qu'ils contiennent. Étaient-ils connus des élèves de l'enseignement secondaire et de leurs professeurs ? Ces derniers abordent-ils dans leurs classes des considérations sur les méthodes ? Il ne nous est pas possible de répondre avec précision à ces interrogations. Nous avons dit que les ouvrages de FGM et de Petersen sont réédités plusieurs fois. Par ailleurs, quelques ouvrages d'enseignement évoquent cette question de la méthode à suivre pour résoudre les questions dans les années qui suivent. Nous donnerons deux exemples. Ph. André débute ses *Exercices de géométrie*²⁴⁰, par la liste des « procédés les plus avantageusement employés » : énoncer la solution, dessiner une figure, tracer des lignes auxiliaires, faire dépendre la solution d'un problème plus simple, appliquer la méthode des lieux géométriques. Il s'adresse d'ailleurs directement aux enseignants : « Nous avons cru alléger la tâche du maître en plaçant, en marge du livre des solutions, des numéros qui renvoient au cours de géométrie. Cette disposition permet en effet de trouver sans peine une application à chaque leçon ». Le *Traité de géométrie élémentaire* de Rouché et Comberousse expose en 1866, en appendice²⁴¹, quelques considérations sur la résolution des questions, plus réduites que ce que nous avons trouvé dans l'ouvrage du seul Comberousse.

240. André, Ph., Exercices de géométrie (Problèmes et théorèmes), énoncés et solutions des questions proposées dans les deux ouvrages de géométrie à l'usage des établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréat ès sciences, et aux écoles du gouvernement, Paris : André Guédon, 1871.

241. Rouché, Comberousse, *Traité de géométrie élémentaire*, Paris : Gauthier-Villars, 1866, p. 101-107.

CHAPITRE IX

PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Les trois ouvrages analysés dans le chapitre précédent sont relativement originaux dans le paysage éditorial des manuels de géométrie élémentaire de par le sujet qu'ils traitent, à savoir les méthodes. Ils ne sont pas des ouvrages de cours au sens d'un exposé systématique, ni de simples recueils de problèmes.

Nous revenons maintenant interroger ces deux formes d'ouvrages d'enseignement pour caractériser la place qu'y occupent les problèmes. Nous montrerons ensuite comment les problèmes font l'objet dans les années 1870 de journaux destinés aux élèves et aux professeurs des classes de mathématiques élémentaires.

1 Les problèmes dans les ouvrages de cours

Les caractéristiques de la place des problèmes, dans les ouvrages de cours de géométrie, qui se sont mises en place au cours de notre deuxième période, se maintiennent largement au cours de cette troisième période.

Ainsi, l'exposition de la théorie est organisée en Livres, chapitres ou leçons, qui sont le plus souvent terminés par des listes d'exercices résolus ou à résoudre. L'emploi du terme « exercice » est généralisé pour désigner des énoncés. une conséquence de cette présence importante d'exercices dans les ouvrages de cours est la diminution du nombre et de l'envergure des recueils de problèmes, en-dehors des recueils de solutions des exercices proposés dans un manuel de cours.

Les types d'énoncés qui servent de problèmes sont bien identifiés par

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

les auteurs : ils s'agit de problèmes graphiques et numériques à résoudre, de lieux géométriques à déterminer, de théorèmes à démontrer. Ces types d'énoncés ne sont pas également représentés suivant les destinataires des ouvrages, notamment entre l'enseignement classique et l'enseignement spécial nouvellement institué.

La construction des figures élémentaires est exposée comme une partie de la théorie en géométrie élémentaire, et parfois les instruments nécessaires aux tracés sont recensés et décrits. Les programmes de la classe de mathématiques élémentaires comprennent, à partir de 1865, l'étude géométrique des coniques et de l'hélice, appelées « courbes usuelles », leur tracé par points ainsi que le tracé de leurs tangentes. En géométrie analytique, la construction par points des coniques, selon les éléments qui en sont donnés, est abordée dans les manuels, avec plus ou moins d'extension, et les programmes de la classe de mathématiques spéciales prescrivent la construction géométrique des solutions réelles des équations algébriques.

L'introduction de problèmes dans les manuels n'est plus l'objet de discours de la part des auteurs. Mais nous pouvons considérer que l'introduction de problèmes correspond toujours aux quatre intentions que nous avons mise à jour à l'issue de la partie précédente : préparer les concours et les examens, éclairer la théorie, appliquer la théorie, et nourrir une activité géométrique fondée sur la résolution de problème.

Enfin nous avons signalé en introduction à cette troisième partie que les injonctions ministérielles imposent dans les Collèges et Lycées des horaires conséquents consacrés à la résolution de problèmes. Par ailleurs, dans les classes concernées par la préparation des examens et des concours, plusieurs semaines à la fin de l'année doivent y être entièrement consacrées.

Nous allons montrer la permanence des caractéristiques relatives aux problèmes dans les manuels de géométrie, et les nuancer selon les destinataires, sur quelques ouvrages particulièrement significatifs par leur succès éditorial.

1.1 Géométrie élémentaire

En géométrie élémentaire, la grande majorité des ouvrages de cours publiés contiennent des listes importantes d'exercices résolus et à résoudre, comme nous l'avons observé depuis la fin des années 1840. Nous allons illustrer le choix d'agrèger des listes d'exercices aux ouvrages de cours de géométrie élémentaire par quelques exemples représentatif des divers lieux et niveaux d'enseignement.

IX.1 Les problèmes dans les ouvrages de cours

Le *Traité de Géométrie élémentaire* de Rouché et Comberousse de 1866 contient mille cent cinquante sept exercices situés à la fin des huit Livres successifs. Cet ouvrage, que nous avons déjà mentionné pour ses appendices sur les méthodes et sur les notions de géométrie rationnelle, s'adresse surtout aux élèves qui préparent les concours aux Écoles du gouvernement. Les questions proposées sont groupées selon les paragraphes du Livre qu'elles terminent. Nous trouvons, sans que ces types soient différenciés par les auteurs, des problèmes de construction à résoudre, des théorèmes à démontrer, des lieux géométriques à trouver. Exceptionnellement, une application numérique d'un problème est fournie.

Les instruments décrits sont la règle, le compas, le rapporteur et l'équerre avant d'aborder une première série de problèmes de constructions.

Marie Parfait Alphonse Blanchet (1813-1894), polytechnicien de la promotion 1832 et directeur des études à l'institution Sainte-Barbe, a publié en 1846 une version des *Éléments de géométrie* de Legendre qui connaît un immense succès éditorial et continue d'être publiée tout au long de notre troisième période et encore jusqu'en 1930¹. L'ouvrage fait figurer, à la fin de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace, des listes d'environ cent vingt énoncés de « théorèmes à démontrer », de « lieux géométriques à trouver », et de « problèmes à résoudre ». Ces énoncés, dont la liste varie peu au long des nombreuses rééditions, ne sont pas résolus et font l'objet d'un ouvrage de *Solutions raisonnées* en 1885².

Les problèmes numériques sont absents de cet ouvrage de géométrie purement spéculative. Un instrument toutefois est décrit : il s'agit de l'équerre, utilisée pour le tracé d'une parallèle par glissement le long de la règle.

L'Abbé Reydellet publie en 1861 des *Éléments de géométrie* qui connaissent plusieurs rééditions jusqu'en 1884, ainsi qu'une dernière revue par l'Abbé Reboul, professeur au collège ecclésiastique de Belley, en 1885³ « pour être en harmonie avec l'enseignement actuel et pour répondre aux exigences des nouveaux programmes ». En particulier, des théorèmes ont été ajoutés « afin que cette addition puisse être s'adresser non seulement aux aspirants au baccalauréat ès lettres, et au baccalauréat ès sciences, mais encore aux candidats

1. Legendre, *Éléments de géométrie, avec additions et modifications par M. A. Blanchet*, 2^e édition, Paris : Firmin Didot, 1846.

2. Blanchet, *Solutions raisonnées des problèmes de la géométrie Legendre et Blanchet*, Paris : Firmin-Didot, 1885.

3. Reydellet, M., *Éléments de géométrie*, 7^e édition entièrement refondue par l'Abbé P. Reboul, Paris : Delagrave, 1885.

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

aux différentes Écoles du gouvernement »⁴.

Ancien élève de l'école des Carmes, l'Abbé Reydellet est professeur de mathématiques au petit séminaire d'Orléans. Les Livres successifs de l'ouvrage se terminent par des exercices et des problèmes numériques, pour un total de deux cent quinze énoncés, pour la solution desquels l'auteur renvoie aux *Solutions raisonnées* d'Amiot. Les exercices comprennent, sans être distingués, des problèmes de constructions, des théorèmes et des lieux géométriques. Les instruments du géomètre sont décrits : règle, compas, équerre et rapporteur.

Philippe André rédige des *Éléments de géométrie* en 1866 qui connaîtront vingt rééditions jusqu'en 1895⁵. L'ouvrage s'adresse à la fois aux élèves de l'enseignement classique et de l'enseignement spécial. L'auteur, professeur de mathématiques, ni agrégé, ni normalien, a rédigé plusieurs ouvrages d'enseignement élémentaire sur l'arithmétique et l'algèbre en plus de la géométrie. Mille problèmes à résoudre sont répartis à la fin des huit Livres, conformément au plan de Legendre. Ce sont indifféremment des problèmes de construction, des lieux géométriques, des théorèmes et des problèmes numériques. Les énoncés portent rapidement sur des calculs numériques de grandeurs, notamment pour ce qui concerne les aires et la géométrie dans l'espace. L'auteur décrit la règle, le compas, l'équerre et le rapporteur à l'occasion de la résolution des premiers problèmes des construction. Une partie intitulée « Mathématiques appliquées » occupe le dernier tiers de l'ouvrage, et traite des instruments et des problèmes de la géométrie pratique, c'est-à-dire du nivellement, de l'arpentage, des tracés sur le terrain, et du partage des figures, qui sont des matières enseignées dans l'enseignement spécial.

Un deuxième ouvrage de 1871 est consacré à la résolution de ces énoncés⁶, lui aussi plusieurs fois réédité. Celui-ci se termine par une note sur les maxima et minima dont la détermination par l'algèbre pour les équations du second degré a été introduite dans les programmes de mathématiques élémentaires en 1865.

Le nombre élevé d'énoncés indique l'importance pouvant être accordée à la résolution d'exercices dans les classes de l'enseignement

4. *Ibid.*, Avertissement

5. André, Philippe, *Éléments de géométrie, à l'usage des Établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréat ès lettres, et des élèves de l'enseignement spécial. Contenant plus de mille problèmes résolus et à résoudre*, 7^e édition, Paris : André-Guédon, 1875.

6. André, Philippe, *Exercices de géométrie (problèmes et théorèmes), énoncés et solutions développées, à l'usage des établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréat ès-sciences et aux écoles du gouvernement*, Paris : André-Guédon, 1871.

IX.1 Les problèmes dans les ouvrages de cours

classique et spécial.

Girod : un seul ouvrage pour l'enseignement spécial et l'enseignement classique

Félicien Girod, agrégé de mathématiques en 1869, professeur au lycée de Rouen, publie en 1880 un *Cours de géométrie théorique et pratique* qui se veut également adapté pour « les élèves des Lycées et Collèges, de l'enseignement spécial, des Écoles normales primaires, et, en général, à tous les candidats aux examens dans lesquels on exige une connaissance sérieuse de la géométrie »⁷. Le *Cours* est divisé classiquement en huit Livres, subdivisés en chapitres, eux-mêmes subdivisés en paragraphes. À la fin de ces derniers se trouvent des listes d'applications puis d'exercices non résolus. Les applications relèvent de la géométrie pratique et en décrivent les instruments, les deuxièmes sont au nombre de mille dans tout l'ouvrage. Les énoncés des exercices regroupent sans distinction des problèmes de construction, des problèmes numériques, des théorèmes à démontrer, des lieux à trouver.

Les solutions des exercices sont publiées dans un ouvrage à part dès l'année suivante⁸.

Conclusion

Dans tous les niveaux d'enseignement de la géométrie élémentaire, les ouvrages en général proposent des listes d'exercices résolus ou à résoudre, en très grand nombre. Dans les ouvrages de cours, les exercices sont regroupés, entrecoupant des sections de cours qu'ils illustrent et mettent en application.

Les énoncés sont des problèmes de construction géométrique, des lieux géométriques à trouver, des théorèmes à démontrer, ou encore des problèmes numériques. Il est intéressant de remarquer que ces derniers sont très représentés dans les ouvrages destinés aux élèves de l'enseignement spécial et aux candidats au baccalauréat ès lettres. À l'inverse, ils sont très peu présents dans les ouvrages destinés aux candidats aux Écoles du gouvernement.

Les énoncés des exercices ne diffèrent pas de ceux que nous avons identifiés dans la période précédente. Pour les constructions géométriques, les instru-

7. Girod, Félicien, *Cours de géométrie théorique et pratique*, 11^e édition, Paris : André Guédon, 1893.

8. Girod, *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans le cours et dans le traité élémentaire de géométrie*, Paris : André-Guédon, 1881.

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

ments décrits sont la règle, le compas, l'équerre et le rapporteur ; lorsque l'ouvrage est aussi destiné à l'enseignement spécial, sont aussi décrits les instruments de la géométrie pratique comme le graphomètre, le trusquin et de nombreux autres.

1.2 Les exercices en Géométrie analytique

Nous avons vu dans la période précédente que les ouvrages de cours de géométrie analytique intégraient des listes d'exercices non résolus, pour un nombre d'énoncés allant d'une dizaine à cent soixante. Par ailleurs, deux ouvrages, ceux de Ritt et de Jacob, étaient particulièrement tournés vers la construction des coniques par points, qui permet chez Ritt d'aborder la résolution graphique des problèmes de construction qui se résolvent par intersection de coniques. Les ouvrages de cette troisième période contiennent-ils des listes d'exercices ? Dans quelle mesure ? Comment sont-elles intégrées dans les ouvrages ?

Salmon : des exercices numériques en géométrie analytique

Nous avons montré l'importance de l'ouvrage de Salmon, *A treatise on conic sections*, pour les ouvrages de géométrie analytique français de notre troisième période. Celui-ci affirme utiliser son traité pour ses élèves débutants en géométrie analytique. L'édition de 1855 est réécrite en tenant compte des difficultés qu'ont pu rencontrer ses élèves avec la précédente édition. Or cette édition contient de très nombreux exercices et problèmes, comme le signalent les traducteurs :

Ce qui distingue, en outre, cet Ouvrage, c'est la sage progression avec laquelle sont exposées les théories, le choix gradué de nombreux Exercices, et l'emploi systématique de problèmes numériques pour faire saisir plus nettement les applications⁹.

De fait, Salmon consacre des chapitres entiers aux problèmes en général, chapitres qui alternent avec des chapitres sur les notions. Nous avons vu qu'il rédige un chapitre de problèmes après les chapitres sur le point et la ligne droite, un autre après le chapitre sur le cercle, et encore un autre après les chapitres sur les coniques.

9. Salmon, *Traité de géométrie analytique*, 1870, préface.

IX.1 Les problèmes dans les ouvrages de cours

Ces problèmes numériques, très présents dans les premiers chapitres, conformément à ses habitudes dans son enseignement, consistent à remplacer les grandeurs d'un problème par des nombres particuliers. En voici un exemple faisant suite à la détermination de l'équation d'une droite passant par deux points donnés :

Écrire les équations des côtés du triangle ayant pour sommets les points $(2, 1)$, $(3, -2)$, $(-4, -1)$ ¹⁰.

De tels énoncés sont totalement absents des ouvrages français de géométrie analytique. Ils sont nombreux ici et suivent chaque nouvelle proposition dans les premiers chapitres de l'ouvrage de Salmon. Quant aux autres exercices, très nombreux aussi, ils apparaissent à la suite des notions et en reprennent les méthodes :

Les exercices suivants ont été choisis de manière à ce que l'on puisse en calquer la solution sur celle des problèmes qui viennent d'être exposés, et en suivant un ordre analogue¹¹.

L'exercice donné immédiatement après cette remarque est :

On donne la base d'un triangle et la somme des carrés des deux autres côtés ; trouver le lieu du sommet.

Les problèmes numériques visent donc à faire saisir les applications, et les autres exercices visent à entraîner le lecteur à la mise en œuvre des méthodes sur des cas variés. Les exercices de Salmon concernent des lieux géométriques à déterminer, c'est-à-dire dont il faut trouver une équation, et des théorèmes à démontrer. Ils alternent systématiquement avec chaque nouvelle proposition qui se trouve ainsi immédiatement appliquée. L'ouvrage contient de la sorte des centaines de problèmes et d'exercices.

Les problèmes dans les ouvrages français d'enseignement de la géométrie analytique

Deux ouvrages de la période précédente continuent d'avoir un important succès éditorial au cours de notre troisième période. Il s'agit des ouvrages de Briot et Bouquet, et de Sonnet et Frontera¹².

10. Salmon, *Op. Cit.*, p. 33.

11. *Ibid.*, p. 68.

12. Briot et Bouquet, *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, 2^e édition, Paris : Dézobry et Magdeleine, 1851.

Sonnet, Frontera, *Éléments de géométrie analytique*, Paris : Hachette, 1854.

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Nous avons vu que le premier comptait de plus en plus d'exercices, atteignant cent soixante énoncés dans la cinquième édition de 1865. Ce sont des théorèmes à démontrer, des problèmes à résoudre et des lieux géométriques à déterminer. Les constructions des coniques sont obtenues point par point, chaque point étant construit à la règle et au compas.

Le deuxième contient en tout une centaine d'exercices, rédigés ou à effectuer, répartis à la fin des chapitres dans des paragraphes intitulés « Exercices et applications ». Les exercices sont des théorèmes à démontrer et des problèmes de construction comme d'inscrire dans une ellipse donnée un quadrilatère dont la surface soit un maximum ou d'achever le tracé d'une ellipse à partir d'un arc de la courbe. Les problèmes, y compris les problèmes de lieux, sont résolus géométriquement, c'est-à-dire que lorsque le lieu est une conique, ses éléments, le plus souvent ses axes principaux, sont construits à la règle et au compas. Les applications concernent l'architecture, la construction, l'astronomie, la balistique, autant de disciplines où intervient le tracé des coniques. La troisième édition de 1873 s'achève sur une liste de trente-sept exercices à résoudre, dont un sujet de l'École polytechnique, un de l'École normale supérieure, un de l'Agrégation et un du Concours général.

Ces deux ouvrages sont largement utilisés dans les classes de mathématiques spéciales. Les normaliens Briot et Bouquet sont des personnalités reconnues de l'Université. Charles Briot a enseigné à l'École polytechnique et en classe de mathématiques spéciales dans des établissements prestigieux, il est maître de conférence à l'École normale supérieure et succède en 1870 à Gabriel Lamé à la chaire de physique mathématique de la Faculté des sciences de Paris. De même, Claude Bouquet a enseigné en classes de mathématiques spéciales à Lyon et à Paris, il est maître de conférence à l'École normale supérieure et devient titulaire de la chaire d'astronomie physique à la Faculté des sciences de Paris, après de nombreuses années de suppléance. Moins renommés, et n'ayant pas enseigné en classes de mathématiques spéciales, Sonnet et Frontera sont docteurs, Sonnet est agrégé et inspecteur de l'Académie de Paris, Frontera est professeur de mathématiques au lycée Saint-Louis.

Les *Principes de la géométrie analytique* de Painvin de 1866 comptent quatre cents exercices, qui sont des problèmes à résoudre, lieux géométriques à trouver et théorème à démontrer, situés à la fin des Livres. Parmi ces énoncés, quatre-vingt sont des sujets donnés dans les concours entre 1812 et 1866. Par ailleurs, il contient l'étude de cent quarante courbes données par leur équation. De la même façon, les *Leçons de géométrie analytique* de Boquel de 1872 contiennent plusieurs centaines d'exercices, dont, là encore,

de nombreux énoncés tirés des sujets de concours.

Plus tard dans la période, dans l'ouvrage de Picquet de 1882, ce sont de courtes séries de un à cinq exercices le plus souvent résolus qui suivent certains paragraphes. Il s'agit d'exemples rapides de mise en application des notions et méthodes vues juste auparavant, et non de problèmes demandant un traitement développé comme les énoncés des examens et concours. Deux ans plus tard, Pruvost propose plus de deux cents exercices, aux énoncés courts, répartis à la fin des chapitres de ses *Leçons de géométrie analytique* de 1884. Le volume sur la géométrie analytique du *Cours de mathématiques spéciales* de Gaston Gohierre de Longchamps termine chacune de ses quarante-trois leçons par une courte liste d'une dizaine d'exercices.

Conclusion

Nous avons noté que deux ouvrages particulièrement importants pendant cette période, ceux de Briot et Bouquet et de Sonnet et Frontera, contiennent entre cent et deux cents énoncés d'exercices. Les ouvrages de Painvin et de Boquel, qui introduisent de nouvelles méthodes en géométrie analytique, sont particulièrement tournés vers les problèmes; ils contiennent plusieurs centaines d'exercices et notamment de nombreux énoncés de concours. Enfin, les années 1880 voient la parution de nouveaux ouvrages d'enseignement de géométrie analytique, au contenu étendu. Ceux-ci sont structurés en leçons plus courtes et plus nombreuses, qui se terminent presque toujours par de courtes listes d'exercices.

Se dessine ainsi une distinction entre des ouvrages qui portent davantage sur la théorie, dont l'exposition alterne avec de courtes listes d'exercices visant à la mettre en application, et des ouvrages qui portent sur les méthodes, et donnent plus d'extension aux problèmes.

2 Les recueils et les annales

Les autres ouvrages d'enseignement, en-dehors des ouvrages de cours, qui contiennent des problèmes sont les recueils et les annales. Nous examinons ces deux genres d'ouvrages.

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

2.1 Les recueils de problèmes

En géométrie élémentaire, les recueils de problèmes de la période précédente sont d'une taille conséquente avec des centaines d'énoncés, tels les ouvrages de Ritt ou de Catalan. Le corpus constitué dans ces ouvrages se retrouve d'ailleurs en grande partie dans les ouvrages de cours que nous venons d'étudier pour cette troisième période. Des recueils d'une telle ampleur sont-ils encore publiés ?

En géométrie analytique, nous revenons sur deux recueils déjà mentionnés pour identifier les sources et l'organisation des problèmes, ceux de Koehler et de Rémond.

Les recueils de problèmes géométrie élémentaire

Quelques recueils d'exercices sont publiés en géométrie élémentaire. Ils sont le plus souvent associés à un ouvrage de cours, dont ils développent les questions proposées.

Ainsi Adrien Guilmin, normalien de la promotion de 1836 mais non agrégé, publie en 1862 les *Solutions*¹³ des questions posées dans son *Cours de géométrie élémentaire*¹⁴ dont la première édition date de 1854. Il publie des ouvrages similaires correspondant à ses cours d'arithmétique et d'algèbre. Citons d'autres auteurs qui publient ainsi, dans un ouvrage à part, les solutions des problèmes contenus dans un ouvrage de cours.

E. Neel, ancien élève de l'École militaire dont on ignore s'il est professeur, publie en 1879 les solutions¹⁵ de certains problèmes non résolus de la Géométrie dite de Blanchet, c'est-à-dire les *Éléments de Legendre* revus par Blanchet en 1845 dont il a déjà été question. Nous avons déjà signalé que Blanchet lui-même publie en 1885 des *Solutions raisonnées* de la totalité de ces problèmes en 1885.

L'abbé Carton publie en 1882 des *Solutions raisonnées*¹⁶ des exercices

13. Guilmin, Adrien, *Solutions des questions proposées dans le cours de géométrie*, Paris : Thunot, 1862.

14. Guilmin, *Cours de géométrie élémentaire, à l'usage des lycées et collèges et de tous les établissements d'instruction publique*, Paris : Durand, 1854.

15. Neel, E., *Les applications de Blanchet. Théorèmes, lieux géométriques et problèmes*, Bruxelles, 1879.

16. Abbé Carton, *Solutions raisonnées des exercices de géométrie contenus dans les deux cours*, Paris : Poussiègue frères, 1882.

IX.2 Les recueils et les annales

posés dans ses *Éléments de géométrie*¹⁷.

Pierre-François Compagnon, ancien professeur de l'Université, ni normalien ni agrégé, publie en 1877 des *Questions* sur les « Éléments de géométrie »¹⁸. Il a lui-même publié des *Éléments de géométrie* en 1868¹⁹ ; il considère, contre la pratique courante, qu'il n'est pas pertinent de placer des questions à la suite des *Éléments*, ou d'en intercaler dans le texte, et préfère donc les consigner dans un ouvrage à part.

Toutes ces publications semblent jouir d'un faible succès éditorial si l'on remarque qu'elles font toutes l'objet d'une seule édition, sauf pour l'ouvrage de Guilmin qui connaît deux rééditions en 1869 et 1892, alors que certains des ouvrages de cours auxquels elles sont attachées sont plusieurs fois réédités. Cette innovation dans cette troisième période, de publier un ouvrage de solutions en parallèle de l'ouvrage de cours, ne rencontre pas d'emblée un grand succès éditorial. C'est ce que remarque Henri Vuibert dans la préface d'un recueil de problèmes qui recouvre toutes les parties du cours de mathématiques :

Malgré le grand nombre de recueils de problèmes qui ont été publiés dans tous les genres, la plupart des élèves qui entreprennent l'étude des mathématiques élémentaires n'ont entre les mains que des ouvrages qui traitent de la partie théorique des sciences qu'ils étudient. Cela tient à ce qu'il n'existe pas de recueil donnant des applications de toutes les parties du cours [...] Ce livre contient un grand nombre de sujets d'examen : sujets donnés aux sessions récentes du baccalauréat, dans les diverses facultés ; problèmes remarquables de baccalauréat ; concours pour l'admission à l'école militaire de St-Cyr, et à d'autres écoles du gouvernement, concours académique et concours généraux²⁰.

De façon confidentielle, on trouve encore quelques auteurs qui publient des recueils de problèmes de géométrie élémentaire. Adolphe Rion, journaliste et éditeur, par ailleurs auteur d'*Éléments de géométrie*²¹, publie un petit recueil

17. Carton, *Éléments de géométrie*, Paris : Poussiègue frères, 1879 et 1882.

18. Compagnon, Pierre-François, *Questions proposées sur les Éléments de géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1877.

19. Compagnon, *Éléments de géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1868.

20. Vuibert, Henry, *Questions de mathématiques élémentaires à l'usage des candidats aux écoles du Gouvernement, des aspirants au baccalauréat ès sciences et des élèves des établissements d'enseignement secondaire*, Paris : Éditeur inconnu, 1879.

21. Rion, Adolphe, *Éléments de géométrie*, 3^e édition, Paris, 1855.

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

d'une centaine de problèmes très élémentaires de géométrie²². Nous pouvons citer encore deux recueils du même genre : les *Problèmes de géométrie* de Lepraz,²³ et le *Recueil d'exercices et de problèmes élémentaires* trois fois réédité de Pierre Bizard²⁴, ancien membre de l'Université, dont les 70 énoncés de géométrie, parmi 2000 questions, sont tous des problèmes numériques.

Les recueils de problèmes en géométrie analytique

Nous avons déjà signalé la publication, dans les années 1886 et 1887, de deux recueils d'exercices de géométrie analytique. Ce sont des ouvrages conséquents, tous les deux en deux volumes, qui proposent un très grand nombre d'exercices et mettent en évidence les méthodes employées à leurs résolution.

Le premier est de Koehler, ancien répétiteur à l'École polytechnique et ancien directeur des études de l'École préparatoire Sainte-Barbe²⁵. Il écrit :

En dehors des publications périodiques, il n'existe en France aucun Recueil d'Exercices sur la Géométrie analytique²⁶.

L'auteur indique l'absence de recueils d'exercices en géométrie analytique, en-dehors du recueil de Jubé dont il semble ignorer l'existence, alors qu'il en existe plusieurs en géométrie élémentaire. Sa source principale est d'ailleurs un recueil étranger de 1867, *A book of mathematical problems*²⁷ de l'anglais Joseph Wolstenholmes, avec l'accord de son auteur. Il a puisé aussi dans l'ouvrage de Painvin, qu'il estime « à peu près introuvable » désormais. Rien que pour la géométrie plane, il propose plus de trois cents exercices.

Le second recueil est dû à Rémond, polytechnicien et professeur de mathématiques spéciales à l'École préparatoire Sainte-Barbe. En plus d'une centaine d'exercices résolus au long des chapitres successifs de l'ouvrage, rien que

22. Rion, Adolphe, *Exercices et problèmes de géométrie*, Paris, 1876.

23. Lepraz, *Problèmes de géométrie*, avec leurs solutions développées, Paris : Fouraut, 1869.

24. Bizard, Pierre, *Recueil d'exercices et de problèmes élémentaires usuels et instructifs sur l'arithmétique et la géométrie pratique, à l'usage des classes élémentaires de tous les degrés des écoles professionnelles et des cours d'adultes*, Paris : Delagrave, 1870.

25. Koehler, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure à l'usage des candidats aux écoles polytechnique et normale et à l'agrégation*, Paris : Gauthier-Villars, 1886.

26. *Ibid.*, p. V.

27. Wolstenholmes, Joseph, *A book of mathematical problems*, Londres et Cambridge : Macmillan & co, 1867.

pour la géométrie plane, l'auteur renvoie à la liste des énoncés des concours qu'il a recensés à la fin du deuxième volume²⁸. Sont ainsi regroupés tous les énoncés des écrits des concours de l'École polytechnique, de l'École normale supérieure, de l'École centrale des arts et métiers, du Concours général pour la classe de mathématiques spéciales et de l'agrégation depuis environ 1850. Lorsque des solutions de ces énoncés ont été publiées dans les *Nouvelles annales*, cela est indiqué avec le détail de l'auteur et de l'emplacement de la solution. Des extraits de ces énoncés figurent tout au long de l'ouvrage comme exercices pour illustrer les méthodes. C'est-à-dire que l'ouvrage de Rémond est tout à la fois un ouvrage sur les méthodes, un recueil de problèmes et une annale des examens et concours.

2.2 Les annales

D'autres annales sont publiées pendant cette période, en particulier pour le baccalauréat. En 1865, Lecointe, professeur à l'école préparatoire Sainte-Marie de Toulouse, ni normalien ni polytechnicien²⁹, veut offrir aux élèves un recueil de problèmes qui leur permette de s'exercer au baccalauréat ès sciences. Il recommande dans l'avertissement de donner fréquemment des problèmes à résoudre aux élèves qui se préparent à cet examen. Les trois cents énoncés sont regroupés en six parties : arithmétique et algèbre, géométrie, trigonométrie, courbes usuelles (seulement quatre énoncés), mécanique et physique, et maxima et minima. Nous avons relié cette dernière catégorie à un mémoire de Duhamel de 1860, et nous remarquons que le sujet du Concours général pour la classe de mathématiques élémentaires de 1861 est un problème de minimum³⁰. Ce sont tous des énoncés donnés aux épreuves du baccalauréat par les différentes Facultés de Paris, Poitiers, Nancy, Toulouse, etc. Tous les sujets sont résolus, et les soixante-treize énoncés de géométrie sont organisés selon l'ordre des *Éléments* de Legendre. Voici les premiers d'entre eux, tous donnés à la Faculté des sciences de Paris :

I. Étant donné un angle ASB , on demande de mener par un point

28. Pour les énoncés de ces sujets de concours, voir annexe 8

29. Lecointe, Ignace-Louis-Alfred *Solutions développées de 300 problèmes qui ont été donnés dans les compositions mathématiques pour l'admission au grade de bachelier ès sciences dans diverses facultés de France*, Paris : Gauthier-Villars, 1865.

30. Lonchampt, A., *Recueil de problèmes [...] suivis des compositions de mathématiques élémentaires données aux Concours généraux de 1846 à 1862*, Paris : Institution polytechnique, 1862, p. 179.

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

O une droite qui retranche des côtés de l'angle à partir du sommet deux segments égaux Sa, Sb .

II. Démontrer que quand plusieurs cordes AB, CD, EF, \dots d'un cercle, prolongées suffisamment, concourent en un même point S , leurs milieux $I, K, L \dots$ sont sur la circonférence d'un autre cercle.

III. Étant donné un triangle ABC , on mène les bissectrices des suppléments des deux angles A et B , lesquelles se rencontrent en un point D : on demande de prouver que la droite qui joint ce point au centre du cercle inscrit dans le triangle passe par le sommet du troisième angle C du triangle.

IV. On a une circonférence et deux tangentes AM, AN issues du même point A ; on prend un point P sur l'arc convexe compris entre les deux tangentes ; par ce point on mène une troisième tangente BC qui rencontre les deux premières respectivement aux points B et C . Il faut démontrer que, quel que soit le point ainsi choisi, la somme des trois côtés du triangle ABC formé par les trois tangentes est constante³¹.

On trouve encore des problèmes de partage simples, la propriété des médianes d'un triangle, la construction de la tangente commune à deux cercles, des problèmes simples de contact, de construction de triangles, etc. Les types d'énoncés sont, pour la géométrie, des théorèmes à démontrer, des problèmes de construction, ou encore des problèmes numériques sans que cette différence soit mentionnée. Voici un exemple de ce dernier type de problème, largement représenté pour les calculs des mesures de longueurs, de surface ou de volume :

On donne un triangle ABC dont les côtés ont les valeurs suivantes :

$$BC = 6^m, \quad AB = 5^m, \quad AC = 2^m.$$

On mène la bissectrice AI de l'angle A , et l'on demande de calculer : 1° les surfaces des deux triangles ABI et ACI , 2° la longueur de la parallèle IM à AC terminée au côté AB en M ³².

Remarquons que le baccalauréat ès sciences de l'enseignement classique intègre des questions de calcul numérique sur les mesures de grandeurs en géométrie. Cela reflète la volonté du législateur d'accentuer le caractère élémentaire et pratique de l'enseignement des mathématiques au Lycée.

31. Lecoq, *Op. Cit.*, p. 69.

32. Lecoq, *Op. Cit.*, p. 99.

IX.2 Les recueils et les annales

Un autre professeur, Jules Dufailly, exerçant au collège Stanislas, auteur d'une *Géométrie* qui d'ailleurs ne contient aucun exercice³³, publie un ouvrage à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles du gouvernement³⁴. Les « principes et formules » qu'il contient sont une liste de quelques propositions et de nombreuses formules à mémoriser, tel qu'on en trouve dans le *Recueil de formules* de Lonchampt de 1862³⁵. Les *Problèmes* de Dufailly se composent de deux parties, une première d'environ trois cents exercices résolus contenant peu d'énoncés de géométrie, et une deuxième de cinq cent vingt et un énoncés à résoudre. L'auteur ne donne pas ses sources, mais les quatre cents énoncés de géométrie sont en grande partie les mêmes que les énoncés de l'ouvrage de Lecoq. L'ouvrage de Dufailly connaît une première édition en 1863 antérieure à l'ouvrage de Lecoq, dont le sous-titre stipule qu'elle offre « un choix de 327 problèmes donnés en composition aux examens du baccalauréat ès-sciences ». Plutôt que de penser à une forme de plagiat, il est vraisemblable que les énoncés donnés au baccalauréat dans les différentes Facultés des sciences appartiennent à un corpus relativement stable. Dufailly publie un ouvrage similaire pour la physique, et à partir de la fin des années 1860, des ouvrages d'enseignement sur l'arithmétique, la géométrie descriptive, la trigonométrie, la mécanique, l'algèbre, la géométrie et la cosmographie, tous plusieurs fois réédités.

A. Longchampt, qui se présente comme préparateur aux baccalauréats ès lettres et ès sciences, et dont nous savons qu'il est l'auteur en 1865 d'un recueil de problèmes posés à l'examen de l'École polytechnique, publie en 1862 puis à nouveau en 1876 un recueil des problèmes donnés à la Faculté de Paris³⁶. Le première édition fournit aussi les annales du Concours général de 1846 à 1862. Comme celui de Lecoq, l'ouvrage se termine par une note sur les maxima et les minima.

Enfin, Vuibert, dix ans plus tard, publie lui aussi un recueil de problèmes donnés aux baccalauréats³⁷.

33. Dufailly, Jules, *Géométrie*, Paris : Delagrave, 1888.

34. Dufailly, *Problèmes de mathématiques. Recueil de principes, formules et exercices à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles du gouvernement*, 4^e édition, Paris, Delagrave, 1883.

35. Lonchampt, A., *Recueil des formules les plus usuelles servant à la résolution des problèmes donnés aux baccalauréats ès sciences*, Paris : Mallet-Bachelier, 1863.

36. Lonchampt, A., *Recueil des problèmes tirés des compositions données à la Sorbonne de 1853 à 1875 pour les baccalauréats es sciences*, 2^e édition, Paris : Gauthier-Villars, 1877.

37. Vuibert, Henry, *Problèmes de baccalauréat*, Paris : Nony, 1886.

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

Les annales du baccalauréat constituent un genre d'ouvrage dans la continuité des manuels de préparation au baccalauréat ès lettres, qui déclinaient les questions résolues d'une liste établie à l'avance dans le format de l'examen d'avant 1865. Depuis 1852, le diplôme est nécessaire pour accéder aux Écoles du gouvernement et à la Faculté de médecine, et l'examen attire un nombre toujours croissant de candidats. Ces recueils d'annales forment une source de problèmes, notamment de géométrie, pour les élèves de la classe de mathématiques élémentaires.

3 Les journaux intermédiaires destinés aux élèves de mathématiques élémentaires

Dans les années 1870 apparaissent des journaux destinés à la préparation aux concours et aux examens, qui s'adressent aux élèves de la classe de mathématiques élémentaires et à leurs professeurs. Ils contiennent de nombreux problèmes, posés aux différents examens et concours, ou simplement des questions originales posées aux lecteurs, et dont les meilleures solutions seront publiées dans le numéro suivant. Certains de ces périodiques proposent des articles de fond qui abordent des sujets, absents des manuels en usage comme des programmes, et pourtant progressivement intégrés dans les sujets des concours. En cela, ces journaux complètent les manuels en actualisant leur contenu au même titre que les *Nouvelles annales de mathématiques*³⁸, qu'ils viennent concurrencer.

Ces journaux intermédiaires³⁹ sont explicitement tournés vers les élèves et les professeurs de province, que les progrès technologiques ont rendu plus accessibles, en même temps qu'ils ont diminué les coûts de fabrication. De nombreux auteurs de ces journaux sont des sociétaires de la Société Mathématique de France⁴⁰.

38. Rollet, Laurent, Nabonnand, Philippe, « Les nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux Écoles polytechnique et normale », *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis*, 2012, p. 1 ?10.

39. Ortiz, Eduardo, « La communauté mathématique internationale au XIX^e siècle et ses connexions avec la périphérie ibérique », in Goldstein, Gray, Ritter (dir.), *L'Europe mathématique : histoires, mythes, identités*, Maison des sciences de l'homme, 1996, p. 333.

40. Gispert, Hélène (dir.), « La France mathématique. La société mathématique de France (1870-1914) », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, nouvelle série, 34, 1991.

IX.3 Les journaux intermédiaires destinés aux élèves de mathématiques élémentaires

3.1 Le *Journal de mathématiques élémentaires* de Justin Bourget (1877)

Justin Bourget est normalien de la promotion 1842, directeur des études à l'école préparatoire Sainte-Barbe. Il sera nommé en 1878 recteur de l'Académie d'Aix, et plus tard de celle de Clermont. Il a écrit notamment avec Charles Housel une *Géométrie analytique à trois dimensions* en 1872, un *Traité d'arithmétique* et un *Traité de géométrie élémentaire à l'usage des aspirants aux écoles du gouvernement*. Durant les années 1880, il publie encore d'autres ouvrages d'enseignement, d'algèbre, d'arithmétique et de géométrie.

Il publie le *Journal de mathématiques élémentaires*⁴¹ pour faire connaître aux professeurs de province, écrit-il, « quelles sont les questions proposées aux examens, quels sont les livres suivis, quelles sont les méthodes pédagogiques ». D'autres professeurs prennent successivement en charge la rédaction de ce journal, parfois à plusieurs, dont systématiquement le directeur des études de l'école Sainte-Barbe. Après Bourget, il s'agit de Koehler à partir de 1879, de Vazeille en 1883 et de Lévy en 1887. Le journal est cosigné par Morel et Cochez, professeurs de mathématiques, à partir de 1879, puis par Boquel à partir de 1880, et, à partir de 1883, par Gohierre de Longchamps.

Il s'adresse aux professeurs et aux élèves, qui doivent y trouver « des stimulants à leur curiosité et des éléments de progrès ». Bourget rend hommage aux *Nouvelles annales de mathématiques* de Gérono, sous l'influence desquelles « les cours de mathématiques spéciales se sont peu à peu transformés et perfectionnés ». Les numéros successifs contiennent trente-deux pages et ont une fréquence mensuelle. Ils traitent d'abord de questions de mathématiques, d'enseignement ou encore d'histoire des mathématiques, éventuellement sur plusieurs numéros, puis donnent les sujets et les solutions des concours et examens, et enfin proposent quelques questions à résoudre, et les solutions des questions données dans de précédents numéros.

Bourget écrit lui-même dans son journal. Il insère dans le premier numéro des propositions de perfectionnement de la *Géométrie* de Legendre, qui doit rester selon ses propos la référence incontestable pour l'enseignement de la géométrie élémentaire en France. Dans le deuxième numéro, il signe un article intitulé « Notions élémentaires sur les méthodes de démonstrations

41. Bourget, Justin, *Journal de mathématiques élémentaires à l'usage des candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès-sciences*, Paris : Delagrave, 1877-1901.

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

en mathématiques, et particulièrement en géométrie »⁴². Il y explicite les notions d'hypothèse, de conclusion, de propositions contraire et réciproque, d'analyse et de synthèse. Il déclare tirer ces considérations de la *Géométrie* de Vincent. Mais le plus souvent les articles traitent de questions proprement mathématiques. Par exemple, la théorie de l'inversion fait l'objet d'une succession d'articles signés par M. Cochez.

Une table à la fin des recueils annuels classe les articles par discipline - arithmétique et algèbre, géométrie, trigonométrie, mécanique -, par numéro des questions proposées, puis par examen et concours - concours généraux, concours académiques, examens oraux, baccalauréat. D'autre part, une table alphabétique recense les auteurs ayant contribué aux articles.

3.2 *Le Journal de mathématiques élémentaires* d'Henry Vuibert (1877)

Ce *Journal de mathématiques élémentaires* est un bimensuel de huit pages, contenant une dizaine de problèmes par numéro, dont l'éditeur scientifique est Henry Vuibert. Chaque numéro propose les énoncés des problèmes qui seront résolus dans le suivant. Les solutions sont celles des lecteurs, des élèves des lycées et collèges de toute la France, et tous ceux qui ont envoyé une solution sont systématiquement mentionnés avec leur établissement ou lieu de résidence :

Le but de ce journal est de relier entre elles les classes de mathématiques élémentaires des lycées, ainsi que les élèves des divers établissements d'instruction, qui se préparent au baccalauréat ès-sciences ou aux Écoles du gouvernement. Chacun pourra nous proposer des problèmes et faire insérer dans cette feuille ce qu'il aura produit de meilleur : il naîtra de là une sorte d'émulation, qui aura, nous l'espérons, de féconds résultats⁴³.

Le journal publie les sujets donnés au baccalauréat, aux Écoles du gouvernement - Forestière, Écoles normales, polytechnique, Saint-Cyr, Navale, Mines de Saint-Etienne, Centrale - à l'Agrégation, au Concours général, aux Concours académique des départements.

42. Bourget, *Op. Cit.*, p. 37.

43. Vuibert, Henry (éd.), *Journal de mathématiques élémentaires*, 1, Paris, 1877.

Les énoncés sont regroupés selon le domaine des mathématiques auquel ils appartiennent : arithmétique, algèbre, géométrie, lieux géométriques - rubrique apparue en 1883 -, géométrie descriptive, trigonométrie, cosmographie, mécanique, physique et chimie. La répartition entre ces domaines est assez stable au fur et à mesure des années, et celle des articles de la première année nous en donne une représentation fidèle : trente-sept énoncés d'algèbre - dont quinze sont en fait des questions de géométrie, problèmes de construction ou questions de maxima ou minima, résolus par l'algèbre -, quatre-vingt de géométrie, deux de géométrie descriptive, vingt-huit de trigonométrie, dix des autres matières réunies, vingt-quatre sujets de concours et examens. Nous pouvons constater qu'une très grande majorité des énoncés relève de la géométrie. Parmi ces problèmes de géométrie, on trouve surtout des problèmes de construction. Dans l'ensemble, les problèmes portent sur des figures élémentaires telles que triangle, quadrilatère ou cercle. Les notions de géométrie rationnelle, transversales, polaires, axes radicaux, rapport anharmonique apparaissent dans plusieurs articles.

4 Conclusion

Les ouvrages de cours de géométrie contiennent de façon généralisée des problèmes, quel que soit le niveau d'enseignement auquel ils s'adressent. Ces exercices sont répartis au long des chapitres, dans des listes situées à la suite de passages exposant le cours, suggérant une pratique de classe alternant l'exposition du cours avec l'entraînement à sa mise en œuvre, conformément à l'étymologie du mot *exercice*. Ils constituent des corpus allant parfois jusqu'à mille exercices.

Aux types de problèmes identifiés dans la période précédente pour la géométrie élémentaire, s'ajoutent les problèmes de maxima et de minima, que Duhamel étudie dans un mémoire de 1860. La représentation des différents types de problèmes dépend des destinataires des ouvrages. Les problèmes numériques sont très présents dans les ouvrages pour l'enseignement spécial et le baccalauréat, et pratiquement absents des ouvrages de préparation aux Écoles du gouvernement. Les problèmes de construction figurent souvent dans la plupart des ouvrages. Ils sont l'occasion de décrire les instruments de la géométrie pratique dans les ouvrages destinés à l'enseignement spécial, ou seulement la règle, le compas, l'équerre et le rapporteur pour l'enseignement classique ; en géométrie analytique, la construction des coniques, ou la résolu-

CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT

tion de problèmes de construction à partir d'une conique, sont fréquemment abordés.

L'extension du nombre de candidats aux examens et concours, qui proposent la résolution de problèmes, est une cause manifeste de ce nombre important d'exercices, comme en témoigne la publication de première annales et la diffusion de journaux qui leur sont spécifiquement dédiés. Mais pas seulement : l'enseignement de la géométrie intègre désormais l'entraînement à la résolution des exercices, conformément aux instructions officielles.

Il n'est pas impossible, néanmoins, de trouver des ouvrages qui ne contiennent pas de problèmes, à l'image des *Nouveaux éléments de géométrie* de Charles Méray⁴⁴. Mais les *Éléments* de ce normalien et professeur à la Faculté de Dijon, sont davantage un essai proposant une réorganisation des propositions de la géométrie qu'un manuel de cours.

Dans la mesure où les ouvrages de cours proposent de nombreux problèmes, les recueils de problèmes sont moins représentés dans cette troisième période, ou alors justement sous la forme de complément d'un ouvrage de cours, dont il développe les solutions des exercices posés. Sauf pour les ouvrages qui portent essentiellement sur les méthodes, tels ceux que nous avons analysés dans le premier chapitre pour la géométrie analytique et pour la géométrie élémentaire.

5 Conclusion de la troisième partie

Nous venons de conclure que les ouvrages d'enseignement ne se font presque plus sans des listes de problèmes, souvent appelés exercices, résolus ou à résoudre. Ils sont devenus indissociables de l'apprentissage des mathématiques, et en particulier ici de la géométrie. Les *Éléments* de Legendre, qui restent pendant tout le XIX^e siècle une référence pour l'enseignement de la géométrie élémentaire, sont ainsi complétés par Blanchet qui leur adjoint des questions à résoudre. Dans tous les niveaux d'enseignement, l'organisation des ouvrages suggère que l'apprentissage de la théorie alterne avec la résolution d'exercices. Les examens et concours polarisent particulièrement l'organisation de l'enseignement dans les classes terminales des Lycées, et demandent la résolution de problèmes. De sorte que le nombre d'exercices dans les ouvrages atteint parfois le millier, et que des annales sont publiées

44. Méray, Charles, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris : Savy, 1874.

IX.5 Conclusion de la troisième partie

sur les différentes parties des mathématiques. Des journaux paraissent, aussi, à destination des élèves des classes de mathématiques élémentaires de Paris et de province qui sont constitués, pour tout ou partie, de problèmes. Leur pérennité, la qualité des rédacteurs, les nombreuses réponses des abonnés, montrent l'intérêt porté aux problèmes.

Concernant les méthodes, l'ouvrage de Georges Salmon *A treatise on conic sections*, qui expose dans un traité élémentaire de nouvelles méthodes de géométrie analytique, appliquées à la résolution de nombreuses questions, est diffusé puis traduit en France. Des ouvrages français, publiés entre 1865 et 1872, en reprennent alors les méthodes et les problèmes, pour rattraper en géométrie analytique le retard pris sur la géométrie pure, et pour disposer de moyens supplémentaires pour résoudre les problèmes des examens et concours. Ce dernier objectif fait encore l'objet de deux recueils de méthodes en 1886 et 1887, par des professeurs attachés à l'École préparatoire Sainte-Barbe, qui articulent méthodes et problèmes, en particulier problèmes d'examen. À la fin de la période, et suite à la succession de Chasles par Darboux à la Sorbonne, trois ouvrages de géométrie analytique sont publiés à deux années d'intervalle, qui exposent la théorie des courbes et des surfaces de façon élargie en intégrant des outils de géométrie projective algébrique et de géométrie algébrique.

D'autre part, trois ouvrages d'initiation à la géométrie supérieure sont publiés entre 1865 et 1870, malgré son absence des programmes officiels et dans une large mesure des ouvrages de cours. Ce sont les ouvrages de Lenthéric, de Housel et de Millet. Les intentions des auteurs sont de préparer à la lecture des ouvrages de Chasles, et d'offrir davantage de moyens de résoudre les problèmes des concours.

D'autre part, trois ouvrages d'envergure font des méthodes particulières en géométrie élémentaire leur objet principal, et les méthodes particulières n'y sont plus des appendices ou des compléments dans le cadre d'un recueil ou d'un ouvrage de cours. Les centaines de problèmes qu'ils contiennent sont classés selon les méthodes exposées. Les méthodes sont attachées au type d'énoncé chez Desboves; elles sont des méthodes particulières chez FGM; elles sont associées aux lieux géométriques et aux transformations chez Petersen. Dans ces trois ouvrages, les solutions montrent le chemin de l'invention, et il est fréquent que plusieurs solutions d'un même énoncé soient données. Desboves privilégie les solutions élégantes, FGM les solutions simples, et Petersen les solutions méthodiques.

**CHAPITRE IX. PROBLÈMES ET OUVRAGES
D'ENSEIGNEMENT**

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Nous avons entrepris un travail d'analyse des ouvrages d'enseignement de la géométrie en France au cours d'un XIX^e siècle, que nous avons situé entre 1794 et 1891. Les questionnements auxquels nous avons cherché à répondre sont de trois types.

D'abord ils concernent les enjeux et les contenus des problèmes posés dans nos ouvrages. Nous avons tâché de comprendre avec quelles intentions les auteurs insèrent des problèmes, quels sont ces problèmes, comment ils sont organisés entre eux et articulés à la théorie. Ces recherches ont conduit à la mise à jour de modifications de la signification de la notion de problème.

Ensuite ils portent sur les méthodes mises en œuvre, et sur les discours concernant les méthodes. Nous avons mis en évidence des processus dans lesquels de nouvelles méthodes sont introduites et adaptées au cours du siècle, et montré comment des conceptions différentes de la notion de méthode sont à l'œuvre.

Enfin, ils se penchent sur les relations entre problèmes et méthodes et l'interprétation de ces relations dans les contextes tant institutionnels que mathématiques. L'articulation entre problèmes et méthodes prend plusieurs formes, dont nous avons analysé les significations.

Ces questionnements nous ont conduit à identifier des filiations et des circulations des idées, des méthodes, et des problèmes.

Une première période de 1794 à 1836 est caractérisée par la mise en place d'un enseignement secondaire de la géométrie. De nombreux ouvrages sont rédigés, d'abord pour les écoles centrales, puis pour les Lycées, et, dans les années 1820, pour l'enseignement industriel.

Au contraire du modèle euclidien, dans lequel l'ordre logique des *Eléments* préside à l'alternance entre problèmes et théorèmes, les ouvrages de géométrie élémentaire envisagent les problèmes comme des applications de la théorie. Cette application prend des statuts différents selon les ouvrages, et nous en avons caractérisé trois. Elle vaut comme corollaire chez Legendre, comme exercice pédagogique chez Lacroix, comme pratique professionnelle chez Bézout. Ces différentes conceptions ont des conséquences sur l'ordre d'exposition des problèmes. L'ouvrage de Vincent montre comment la frontière entre théorème et problème peut s'estomper, lorsque les théorèmes sont formulés comme des « problèmes théoriques », susceptibles d'apparaître dès lors dans des listes de problèmes. Vincent distingue par ailleurs des types différents de problèmes, les problèmes numériques de calcul arithmétique sur des mesures de grandeurs, et les problèmes graphiques aboutissant au tracé d'une figure avec des instruments qui ne sont plus limités à la règle et au compas.

L'analyse géométrique, réhabilitée par Brianchon et Lhuilier, est employée par certains auteurs comme Vincent et Bobillier pour rédiger la solution des problèmes de géométrie élémentaire.

La résolution des problèmes constitue le cadre principal dans lequel est introduite, dans un premier temps, l'application de l'algèbre à la géométrie, comme nous l'avons montré pour les ouvrages de Bézout et de Lacroix. Mais des trois acceptions de l'analyse algébrique comme méthode, hérités des travaux des XVII^e et XVIII^e siècles, à savoir comme méthode de résolution des problèmes, comme méthode d'invention de propositions et comme méthode démonstrative, c'est la dernière qui s'impose dans les ouvrages d'enseignement après 1800. Ces ouvrages, presque tous écrits par des polytechniciens, traitent de ce qu'ils nomment désormais la *Géométrie analytique* pour désigner l'étude théorique des propriétés des courbes, puis des surfaces, du second degré par l'analyse algébrique comme méthode démonstrative. La résolution des problèmes est passée au second plan, sans disparaître des ouvrages, qui illustrent l'une ou l'autre des deux méthodes exhibées par Lacroix, et que nous avons appelées « l'analyse algébrique des figures » et « la méthode des coordonnées ». Elles sont caractérisées par l'auteur, l'une pour sa simplicité, et l'autre pour sa généralité.

Nous avons mis en évidence la récurrence de certains énoncés sur lesquels est montrée la méthode, dont plusieurs sont déjà présents dans les *Nouveaux éléments de géométrie* de Bernard Lamy au XVII^e siècle : l'inscription d'un carré dans un triangle, le partage d'un segment en moyenne et extrême raison,

la construction dans un angle droit d'une droite de longueur donnée passant par un point donné. Progressivement, les problèmes de construction sont complétés par des théorèmes à démontrer, comme l'alignement des points de la droite dite d'Euler, par des lieux géométriques à déterminer, et par des problèmes de construction qui portent directement sur des sections coniques et non plus seulement sur des figures constituées de droites et de cercles.

La notion même de problème de construction prend d'ailleurs des significations variées. L'absence de tracé défendue par Lacroix et Biot, au motif que les méthodes numériques d'approximation sont susceptibles d'apporter une meilleure précision que la construction graphique, n'est pas retenue dans les ouvrages d'enseignement ultérieurs. Leurs auteurs choisissent d'exposer des constructions, à la règle et au compas, ou avec d'autres lignes, en particulier des coniques.

L'idée d'invention de propositions, absente des ouvrages d'enseignement de géométrie analytique après 1800, est au cœur de nouvelles méthodes établies par les géomètres de l'école de Monge. Dans la *Géométrie descriptive* de 1799, Monge suit l'ordre d'invention des problèmes ; dans la *Géométrie de position* de 1803, Carnot introduit et résout des problèmes généraux, appliqués ensuite de manière féconde à des figures particulières ; dans le *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822, Poncelet étend les conceptions de la géométrie et développe l'usage de la méthode des projections pour inventer des propositions sur les courbes et les surfaces du second degré. Les notions de géométrie rationnelle introduites dans le cadre de ces travaux apparaissent peu dans les ouvrages d'enseignement classique de la géométrie élémentaire, et sont davantage développées dans les ouvrages destinés à l'enseignement industriel de Bergery et de Bobillier.

Le Concours général, établi en 1811 pour les mathématiques, et dont le prestige rejaillit autant sur les lauréats que sur leurs professeurs et leurs établissements, vient attiser l'intérêt des professeurs de Paris et de Versailles pour les problèmes. Des recueils de problèmes sont publiés sur la géométrie analytique ou la géométrie élémentaire, les deux étant parfois mélangés, toujours par des auteurs liés à l'École polytechnique.

Nous avons identifié des sources auxquelles puisent les collections d'énoncés de problèmes. En premier lieu, l'*Arithmétique universelle* de Newton, justement traduite en français en 1802. Les autres sources repérées sont les *Récréations mathématiques* et le *Traité de la division des champs* de Ozanam, réédités respectivement en 1778 par Montucla et en 1794 par Garnier ; la *Géométrie du compas* de Mascheroni, publiée en français en 1798 ; les trois

ouvrages de Thomas Simpson, dont deux sont traduits en français dans la deuxième moitié du XVIII^e siècle ; la *Géométrie de position* de Carnot ; les *Lieux plans* d'Apollonius par Lhuilier, à partir d'une version de Robert Simson.

Une deuxième période va de 1836 à 1865. Elle voit le nombre de problèmes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire augmenter de façon significative, atteignant parfois plusieurs centaines. La résolution des problèmes est fréquemment associée à l'intelligence, et opposée à la mémorisation des démonstrations. La classification des problèmes en types distincts opérée par Vincent est reprise, et complétée par les lieux géométriques. Des listes d'énoncés sont ajoutées à la fin des chapitres, presque systématiquement à partir de 1845, constituées de théorèmes à démontrer, de problèmes à résoudre, numériques ou graphiques, et de lieux géométriques à déterminer. Les problèmes numériques sont particulièrement représentés dans les enseignements à destination professionnelle, comme les cours pour ouvriers ou l'enseignement spécial.

Les discours sur la notion de méthode se font aussi plus nombreux, souvent pour déplorer l'absence de méthode générale en géométrie élémentaire, en dehors de l'analyse géométrique et de la synthèse. Nous avons montré que certains auteurs répondent par la description de méthodes particulières, et établi de ce point de vue la filiation entre les contenus concernés dans ces ouvrages et l'*Examen* de Gabriel Lamé. Ces méthodes particulières sont la méthode du problème contraire, la méthode des lieux géométriques, la méthode des figures semblables, puis, dans l'ouvrage de Comberousse et après la publication de celui de Serret, la méthode par symétrie, la méthode des relations auxiliaires, la méthode des projections, la méthode de réduction à l'absurde et la méthode des limites. Ces méthodes relèvent d'un classement des problèmes, les premières à partir des moyens employés à leur résolution, et les deuxièmes davantage à partir de la forme logique du raisonnement employé.

Les problèmes, particulièrement dans les recueils, sont regroupés, selon le type de figure concerné, ou selon l'ordre des *Eléments* de Legendre. Les intentions des auteurs, en donnant des questions à résoudre, sont de nature variée. Ils souhaitent entraîner les élèves en vue des concours et examens, éclairer la théorie, développer l'esprit d'invention, ou encore montrer les applications de la théorie. Les recueils sont dissociés entre recueil de géométrie élémentaire et recueil d'application de l'algèbre à la géométrie.

L'analyse des ouvrages de Chasles et de Comte nous a permis de mettre

particulièrement en évidence différentes conceptions possibles des notions de méthode et de généralité.

L'*Aperçu historique* de Chasles de 1837 s'attache à établir le statut de méthode pour les notions nouvelles de géométrie rationnelle. Nous avons montré que les caractéristiques qu'il associe à ce statut sont la fécondité, la simplicité et la généralité. Cette dernière est comprise au sens d'une extension potentielle de la proposition à d'autres propositions. Les méthodes de transformation sont mises en avant, tandis qu'elle sont rejetées dans le *Traité de géométrie supérieure* de 1852, organisé de manière déductive, des théories spéciales vers les théorèmes généraux puis vers les propriétés des figures, structure dans laquelle intervient une méthode uniforme de démonstration. La généralité des théorèmes tient alors à ce qu'ils recouvrent une grande variété de situations possibles.

La généralité est au cœur des préoccupations d'Auguste Comte, qui considère quant à lui qu'elle est l'essence même de la géométrie analytique. Il réorganise l'exposition de la géométrie analytique selon des théories générales qui permettent de résoudre des problèmes généraux, en l'occurrence les problèmes des tangentes, des asymptotes, des diamètres, des centres, de la similitude des courbes, et de la quadrature des courbes. À leur tour, les problèmes généraux sont appliqués à la résolution des problèmes particuliers. La généralité de Comte est exigeante, elle impose de circonscrire exactement le domaine d'application de la méthode décrite.

En contrepoint des positions tranchées de Comte et de Chasles en faveur de méthodes uniformes, un complément de la deuxième édition des *Leçons nouvelles de géométrie analytique* de Briot et Bouquet en 1851 illustre la diversité des moyens d'invention du géomètre, en mêlant les approches géométrique et analytique. En géométrie élémentaire, Antoine Amiot entreprend dans ses *Nouveaux éléments de géométrie* une réorganisation de la géométrie élémentaire qui intègre certaines notions récentes de géométrie rationnelle.

L'introduction de notions de géométrie rationnelle - quadrilatère complet, axe radical, pôle et polaire, rapports harmonique et anharmonique - dans certains ouvrages d'enseignement secondaire de géométrie est caractérisée par la difficulté à trouver une discipline de rattachement. Elles se trouvent aussi bien dans des ouvrages de géométrie élémentaire que dans des ouvrages de géométrie analytique, ces derniers les présentant parfois dans le cadre de la géométrie pure et parfois dans le cadre de la géométrie analytique. Le plus souvent, l'introduction de ces notions est associée à la résolution de problèmes pour les candidats aux Écoles du gouvernement. Suite aux

programmes contraignants de 1852, elles disparaissent des manuels pendant une décennie, jusqu'à la publication du *Cours* de Charles de Comberousse.

Dans les ouvrages de géométrie analytique, l'exigence de généralité, telle que Comte la défend, progresse peu à peu et partiellement, comme dans les programmes officiels, en abordant les théories générales avant de les mettre en œuvre dans le cas particulier de l'étude des sections coniques et des surfaces du second degré. Des listes d'exercices à résoudre entrecoupent désormais l'exposition de la théorie.

Les constructions géométriques occupent en géométrie élémentaire des chapitres à part et bien identifiés, en particulier dans les programmes, qui ont ajouté en 1852 la définition géométrique des coniques en dernière année de la section des sciences. Elles sont souvent, et dans les différents niveaux d'enseignement, l'occasion de la description des instruments employés pour les effectuer. Elles apparaissent aussi dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique, suite à la résolution des problèmes de construction ou pour la construction par points des coniques ; en particulier, les deux ouvrages d'application de l'algèbre à la géométrie de Georges Ritt et de Christophe Charles Jacob sont largement orientés vers la construction des coniques par points, que Ritt emploie à la résolution des problèmes par intersection de courbes. Les programmes prescrivent, à partir de 1852 en mathématiques spéciale, la construction géométrique des solutions des équations.

Dans notre troisième période, de 1865 à 1891, les ouvrages d'enseignement proposent presque toujours désormais des listes de problèmes, fréquemment appelés exercices, résolus et à résoudre. Ils sont devenus indissociables de l'apprentissage des mathématiques, et en particulier ici de la géométrie, conformément aux injonctions ministérielles. Ainsi les *Éléments* de Legendre, qui restent pendant tout le XIX^e siècle la référence pour l'enseignement de la géométrie élémentaire, sont complétés par Blanchet, qui notamment leur adjoint des questions à résoudre. Dans tous les niveaux d'enseignement, l'organisation des manuels suggère que l'apprentissage du cours alterne avec la résolution d'exercices. De sorte que le nombre d'exercices dans les ouvrages atteint parfois le millier. Suite à un mémoire de Duhamel en 1860 sur le sujet, les problèmes de maxima et de minima s'ajoutent aux différents types de problèmes déjà identifiés.

Nous avons exhibé trois ouvrages d'envergure qui articulent en géométrie élémentaire les méthodes particulières avec des listes conséquentes de problèmes. Les méthodes y sont classées selon le type d'énoncé chez Desboves, qui montre comment les théories de géométrie rationnelle donnent lieu à des

méthodes d'invention fécondes ; selon le type de méthode particulière chez FGM, qui rattache chacun de ses 4000 énoncés à une méthode particulière ; selon le type de transformation chez Petersen, qui établit des propriétés des transformations que sont la similitude, l'inversion et la rotation pour déterminer davantage de lieux et résoudre davantage de problèmes. Ces ouvrages sont des initiatives originales, dont les deux dernières connaissent un succès éditorial certain, mais ils ne reflètent pas fidèlement la réalité de l'intérêt porté par l'enseignement secondaire de la géométrie aux méthodes, qui ne sont pas mentionnées dans les programmes.

Les examens et concours, qui confirment leur importance institutionnelle notamment par le nombre toujours croissant de candidats, demandent de résoudre des problèmes. Au baccalauréat ès lettres, ces problèmes ne sont plus connus à l'avance depuis 1865. Des journaux de problèmes, spécifiquement adressés aux élèves des classes de mathématiques élémentaires de Paris et de Province, montrent l'intérêt porté aux problèmes, par leur pérennité, la qualité de leurs rédacteurs, et la réactivité des abonnés.

L'ouvrage de Salmon *A treatise on conic sections*, qui expose de nouvelles méthodes en géométrie analytique dans un ouvrage élémentaire, en lien étroit avec la résolution des problèmes, est diffusé puis traduit en France en 1870. Certains ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique français en reprennent les méthodes et les énoncés, pour concurrencer les succès de la géométrie supérieure, et pour munir leurs élèves de méthodes efficaces pour résoudre les problèmes des examens et concours.

Parallèlement, plusieurs ouvrages entreprennent d'initier leurs lecteurs à l'étude de la *Géométrie supérieure* Chasles, complétée en 1865 par la publication du *Traité des sections coniques*. Cependant, ils n'en reprennent pas l'exigence d'une méthode uniforme de démonstration, et emploient aussi les méthodes de transformation et les calculs en coordonnées.

À la fin de la période, le remplacement de Chasles par Darboux à la chaire de géométrie supérieure de la Sorbonne en 1879, coïncide avec la publication dans les années suivantes de trois manuels de géométrie analytique dans un cadre conceptuel plus vaste, dans lequel les méthodes analytique permettent d'établir les résultats de la géométrie rationnelle de Chasles et de Poncelet.

Notre recherche pourrait être poursuivie dans plusieurs directions. En particulier, en étendant l'analyse de la circulation des problèmes et des méthodes, et des modifications de leurs significations, à l'enseignement professionnel ou à d'autres disciplines que les mathématiques. Ainsi, la notion de transformation géométrique pour inventer des propositions et résoudre des

problèmes, pourrait être reliée aux autres champs des mathématiques où elle apparaît et se développe. D'autre part, des études comparatives pourraient être menées avec d'autres pays, spécialement le Royaume-Uni, dont nous avons montré qu'y sont publiés plusieurs ouvrages servant de sources d'énoncés de problèmes pour les auteurs français.

Le repérage systématique opéré des problèmes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire et analytique peut faciliter des analyses ultérieures. Les repères historiques et notionnels construits dans ce travail constituent par ailleurs une base qui permettrait d'exploiter les archives disponibles, comme les cours manuscrits, les annales de concours ou encore les copies d'examens.

D'autres directions concernent les pratiques enseignantes. Faut-il considérer que ce développement de la présence des problèmes dans les ouvrages d'enseignement traduit une évolution des pratiques enseignantes dans les classes ? Les auteurs, qui sont presque toujours des enseignants, ne sont pas explicites, au moins au sein de leurs ouvrages, quant à l'usage qu'ils font des problèmes dans le cadre de leurs cours.

ANNEXES

- 1 Les énoncés de problèmes du *Recueil de diverses propositions de géométrie* de Puisseant (1801)

PROBLEMES DETERMINES

P R O B L Ê M E.

Trouver la relation qui existe entre la droite menée du sommet d'un triangle rectiligne sur le milieu de sa base et les trois côtés de ce triangle.

P R O B L Ê M E.

25. *Etant données les trois lignes qui partent des angles d'un triangle, et qui se terminent au milieu des côtés opposés, trouver l'expression analytique de ces côtés.* fig. 8.

T H É O R È M E.

26. *Si des sommets des angles d'un triangle rectiligne quelconque on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces perpendiculaires se couperont toutes trois en un seul et même point.*

T H É O R È M E.

27. *Si du milieu de chaque côté d'un triangle on mène des droites aux sommets des angles opposés, ces droites se couperont en un seul et même point.*

T H É O R È M E.

28. *Dans tout quadrilatère plan, la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la ligne qui joint les milieux de ces diagonales.*

T H É O R È M E.

29. *Si deux quadrilatères ont des diagonales égales, et faisant entr'elles le même angle, quelle que soit d'ailleurs la manière dont elles se coupent l'une et l'autre, ces quadrilatères seront équivalens entr'eux.*

P R O B L È M E.

30. *Un angle aigu d'un triangle rectangle étant donné, trouver la position de l'hypothénuse, de manière que ce triangle soit équivalent à un quarré donné.*

P R O B L È M E.

31. *Par un point M donné de position à l'égard d'un angle connu M'AN, tirer une droite MN, de manière que l'espace triangulaire AM'N soit équivalent à un quarré donné.*

P R O B L È M E.

32. *Un cercle d'un rayon connu, et une ligne CB étant donnés de position par rapport à deux axes fixes, mener au cercle une tangente TM, qui soit en même temps parallèle à CB.*

P R O B L È M E.

33. *Mener une tangente commune à deux cercles donnés de grandeur et de position.*

P R O B L È M E.

34. *Deux cercles étant donnés de grandeur et de position, mener une droite à travers, de manière que les parties interceptées soient égales entr'elles, et à une ligne donnée m.*

T H É O R È M E.

36. Si par le point de contact de deux cercles donnés, l'on mène à volonté deux droites AB , AB' qui coupent ces cercles, les cordes AB , AB' seront coupées en parties proportionnelles par la circonférence du plus petit cercle, et par conséquent les lignes BB' , DD' seront parallèles.

P R O B L Ê M E.

37. Un cercle étant donné de grandeur et de position dans un angle connu, trouver le centre d'un cercle qui touche à-la-fois les côtés de l'angle et le cercle donné.

P R O B L Ê M E.

38. Diviser un trapèze en deux parties égales par une ligne parallèle aux deux bases.

P R O B L Ê M E.

39. Diviser un triangle scalène en quatre parties égales, par deux lignes qui se coupent à angles droits.

T H É O R È M E.

40. Trois cercles inégaux étant donnés de grandeur et de position sur un plan, si en les considérant deux à deux on leur mène des tangentes extérieures jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection, qu'on obtiendra de cette manière, seront en ligne droite.

T H É O R È M E.

41. *Si par tant de points que l'on voudra d'une droite donnée de position à l'égard d'une courbe quelconque du second ordre, on mène de deux en deux des tangentes à cette courbe, les lignes qui joindront les contacts d'un même couple de tangentes se couperont en un seul et même point, et réciproquement.*

P R O B L Ê M E.

42. *Deux points B, C étant donnés de position à l'égard d'un cercle connu, trouver sur la circonférence un point M, duquel menant au centre A, et aux points donnés les droites AM, MB, MC, les sinus des angles AMB, AMC soient entr'eux dans le rapport de m : n.*

P R O B L Ê M E.

43. *Un point M étant donné de position dans un angle connu BAX, trouver les coordonnées du centre d'un cercle tangent à la droite AX, et qui coupe le côté AB, de manière que la partie mm' interceptée dans le cercle soit d'une grandeur donnée.*

DES PROBLEMES INDETERMINES

P R O B L Ê M E.

44. *Une droite et un point hors de cette droite étant donnés à l'égard de deux axes rectangles, trouver l'équation de la droite assujettie à passer par ce point, et à faire avec la ligne donnée un angle connu.*

P R O B L Ê M E.

45. *Un angle étant donné, trouver un point duquel abaissant des perpendiculaires sur les côtés de cet angle, elles soient entr'elles dans le rapport de $m : n$.*

P R O B L Ê M E.

47. *Tant de points que l'on voudra étant donnés sur un plan par leurs coordonnées rectangles, mener à travers une ligne droite telle que, abaissant de ces points sur cette droite une perpendiculaire, la somme des perpendiculaires d'un côté soit égale à celles de l'autre côté.*

P R O B L Ê M E.

48. *Etant donnés tant de points que l'on voudra, en trouver un autre tel, que, menant une droite à chacun des autres, la somme des quarrés de ces lignes soit égale à un quarré donné q^2 .*

P R O B L Ê M E.

49. *Un point étant donné à l'égard de deux axes perpendiculaires entr'eux, déterminer le lieu des centres de tous les cercles qui sont assujettis à passer par ce point, et à être tangens à l'un des axes.*

P R O B L Ê M E.

50. *Une droite étant donnée de position à l'égard d'un cercle, trouver la trace des centres de tous les cercles qui sont tangens à-la-fois au cercle et à la droite donnés.*

P R O B L Ê M E.

51. *Par deux points donnés, mener deux lignes perpendiculaires entr'elles.*

P R O B L Ê M E.

52. *Mener par deux points donnés deux droites qui fassent entr'elles un angle connu.*

P R O B L Ê M E.

53. *Deux cercles étant donnés de grandeur et de position sur un plan, trouver le lieu des centres de tous les cercles qui sont tangens à-la-fois aux deux cercles donnés.*

P R O B L Ê M E.

54. *Trouver la nature de la courbe qui renferme tous les points desquels menant deux tangentes à une parabole donnée, ces tangentes forment entr'elles un angle donné.*

P R O B L Ê M E.

55. *Trouver un point M' duquel ayant abaissé des perpendiculaires sur les côtés d'un angle donné MAB, le quadrilatère qui en résultera, soit équivalent à un quarré q^2 .*

P R O B L Ê M E.

56. Deux cercles AB , $A'B'$ étant donnés de grandeur et de position sur un plan, et ayant mené par un point quelconque C' du cercle $A'B'$ une tangente indéfinie $C'T$, qui coupe l'autre cercle AB en deux points m , m' , par lesquels soient menées à celui-ci les tangentes mM , $m'M$; on demande la nature de la ligne sur laquelle sont situés tous les points de concours M .

P R O B L Ê M E.

57. Incrire une ellipse dans un triangle de manière qu'un diamètre soit situé sur la ligne qui passe par le sommet et par le milieu de la base.

P R O B L Ê M E.

58. Décrire une courbe du second ordre qui passe par un point donné M' , et qui soit tangente aux côtés d'un angle MTm en deux points donnés m , M .

P R O B L Ê M E.

61. Trouver l'équation de la courbe $DM'Q$ dont la propriété est telle que, menant d'un point fixe A donné de position par rapport à une ligne CB , des droites AD , AM' à tous ses points, chacune des parties CD , MM' de ces lignes soit d'une grandeur donnée d .

P R O B L È M E.

62. Trouver l'équation de la courbe AMC dont la propriété est telle que , si ayant décrit sur une droite donnée AB comme diamètre , le demi-cercle $AM'B$, et ayant élevé par le point B la perpendiculaire BN , on tire par le point A , et par un point quelconque M de cette courbe, la droite AMN qui rencontre en M' la demi-circonférence, et en N la droite BN , on ait toujours $AM = M'N$.

P R O B L È M E.

63. Quatre règles AM' , Am' , $M'M''$, $m'M''$ étant attachées ensemble en forme de parallélogramme, de manière qu'elles aient la liberté de tourner autour de leurs angles comme charnières; et les règles $m'M''$, $M'M''$ étant allongées des parties mm' , MM' respectivement égales aux règles Am' , $A'M'$, déterminer la nature des courbes qui seront décrites par les points m , M'' , lorsque le système tournant autour du point A comme pivot, le point M parcourra une courbe connue.

P R O B L È M E.

65. Faire passer une courbe par plusieurs points donnés.

2 Les problèmes de la *Géométrie de position*
de Carnot (1803)

P R O B L Ê M E I.

91. *Etablir les corrélations de construction et de position qui existent entre deux triangles quelconques ABC, MNP, (fig 13 et 14) de manière, qu'ayant les formules propres à l'une de ces figures, on puisse les modifier convenablement pour qu'elles deviennent applicables à l'autre.*

P R O B L Ê M E I I.

92. *Etablir les corrélations de construction et de position qui existent entre deux triangles ABCD, MNPQ, (fig 15 et 16) dans chacun desquels est une perpendiculaire \overline{AD} , \overline{MQ} , abaissée de l'un des angles sur le côté opposé.*

P R O B L Ê M E I I I.

94. *Etablir les corrélations de construction et de position qui existent entre deux triangles ABCDFG, MNPQRS (fig. 20, 21, 22), dans chacun desquels se trouvent les perpendiculaires abaissées de deux quelconques des angles sur les côtés respectivement opposés.*

P R O B L Ê M E I V.

97. *Etablir les corrélations de construction et de position qui existent entre deux triangles ABCDFGH, MNPQRST, (fig. 28 et 29), dans chacun desquels sont abaissées des perpendiculaires de chacun des angles sur le côté opposé.*

P R O B L Ê M E V.

99. *Quatre points quelconques A, B, C, D, étant placés sur un même plan (fig. 34), et joints deux à deux par des droites prolongées jusqu'à leurs rencontres respectives; établir les corrélations de construction et de position qui existent entre toutes les figures qui résultent de l'assemblage de ces six lignes droites, suivant les diverses positions que peuvent prendre les quatre points A, B, C, D.*

P R O B L Ê M E V I.

107. *Etablir les corrélations de construction et de position existantes entre les quantités linéo-angulaires qui répondent aux diverses régions de la circonférence.*

PROBLÈME VII.

122. Former le tableau des principaux rapports qui existent entre les sinus et cosinus de deux angles proposés, les sinus et cosinus de leur somme, et les sinus et cosinus de leur différence.

PROBLÈME VIII.

139. Représenter par des formules générales les rapports qui existent entre les sinus et cosinus d'un nombre quelconque d'angles, les sinus et cosinus de leurs sommes et les sinus et cosinus de leurs différences.

PROBLÈME IX.

146. Un triangle étant proposé, et une perpendiculaire abaissée de chacun des angles sur le côté opposé; on demande que toutes les parties tant angulaires que linéaires de cette figure, soient exprimées en valeurs de trois quelconques d'entre elles, indépendantes l'une de l'autre, prises pour termes de comparaison.

PROBLÈME X.

160. Etant donnés dans un triangle, deux quelconques des angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver 1°. le troisième angle et les deux autres côtés; 2°. les perpendiculaires abaissées des angles sur les côtés opposés; 3°. les segmens et les angles qui résultent des intersections respectives de toutes ces lignes; 4°. les trois droites qui joignent les pieds de ces perpendiculaires deux à deux, &c.

PROBLÈME XI.

161. Etant donnés dans un triangle deux angles quelconques, et le côté compris, trouver 1°. le troisième angle et les deux autres côtés; 2°. les perpendiculaires abaissées des angles sur les côtés opposés; 3°. les segmens et les angles qui résultent des intersections respectives de toutes ces lignes; 4°. les trois droites qui joignent les pieds de ces perpendiculaires deux à deux, &c.

PROBLÈME XII.

162. Etant donnés dans un triangle deux côtés, et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver 1°. le troisième côté et les deux autres angles; 2°. les perpendiculaires abaissées des angles sur les côtés opposés; 3°. les segmens et les angles qui résultent des intersections respectives de toutes ces lignes, les trois droites qui joignent les pieds de ces perpendiculaires deux à deux, &c.

PROBLÈME XIII.

163. Etant donnés dans un triangle deux côtés et l'angle compris, trouver 1°. le troisième côté et les deux autres angles; 2°. les perpendiculaires abaissées des angles sur les côtés opposés; 3°. les segmens et les angles qui résultent des intersections respectives de toutes ces lignes; les trois droites qui joignent les pieds de ces perpendiculaires deux à deux, &c.

PROBLÈME XIV.

164. Etant donné dans un triangle les trois côtés, trouver 1°. les trois angles; 2°. les perpendiculaires abaissées des angles sur les côtés opposés; 3°. les segmens et les angles qui résultent des intersections respectives de toutes ces lignes, les trois droites qui joignent les pieds de ces perpendiculaires deux à deux, &c.

PROBLÈME XV.

165. Etant donnée dans un triangle, la perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des angles sur la base opposée, et les deux segmens qu'elle forme sur cette base, trouver, 1°. les trois côtés et les trois angles du triangle; 2°. les deux perpendiculaires abaissées des autres angles sur leurs bases opposées; 3°. les segmens et les angles qui résultent des intersections respectives de toutes ces lignes; les trois droites qui joignent les pieds de ces perpendiculaires deux à deux; le rayon du cercle circonscrit, &c.

PROBLÈME XVI.

167. Etant donnés dans un triangle deux angles et le rayon du cercle circonscrit, trouver; 1°. le troisième angle et les trois côtés; 2°. les perpendiculaires menées des angles sur les côtés opposés; 3°. les droites qui joignent les pieds de ces perpendiculaires deux à deux; 4°. les segmens formés sur toutes ces droites prolongées jusqu'à leurs rencontres respectives, les angles formés par toutes ces droites, le rayon du cercle inscrit, le périmètre et l'aire du triangle proposé.

PROBLÈME XVII.

169. Le triangle ABC (fig. 49) étant inscrit dans un cercle, supposons que de chacun des angles on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, et qu'on prolonge ces perpendiculaires jusqu'à la rencontre de la circonférence; ce qui fera, en comptant les sommets du triangle proposé, six points d'intersection A, B, C, f, g, h, sur cette circonférence. Cela posé, soient

jointes ces six points d'intersection deux à deux par une corde. On demande 1°. la valeur de chacune de ces cordes ; 2°. la valeur de chacun des angles formés par ces cordes deux à deux aux six points d'intersection, toutes exprimées en valeurs des mêmes quantités A, B, C, R, prises déjà pour termes de comparaison dans le problème précédent.

PROBLÈME XVIII.

170. Le triangle ABC étant inscrit dans un cercle (fig. 50), supposons que de chacun des angles on mène au centre du cercle une droite, et qu'on prolonge cette droite jusqu'à la circonférence ; ce qui fera, en comptant les trois sommets du triangle, six points d'intersection, A, B, C, f', g', h', sur cette circonférence. Cela posé, soient joints ces six points d'intersection deux à deux par une corde ; on demande 1°. la valeur de chacune de ces cordes ; 2°. la valeur de chacun des angles formés par ces cordes deux à deux aux six points d'intersection ; toutes exprimées en valeurs des mêmes quantités A, B, C, R, prises déjà pour termes de comparaison dans les problèmes précédens.

PROBLÈME XIX.

171. Le triangle ABC étant inscrit dans un cercle (fig. 51), supposons que de chacun des angles on mène au côté opposé une transversale, qui divise cet angle en deux parties égales, et qu'on prolonge cette transversale jusqu'à la circonférence ; ce qui fera, en comptant les trois sommets du triangle, six points d'intersection A, B, C, f', g', h' sur cette circonférence. Cela posé, soient joints ces six points d'intersection deux à deux par une corde. On demande 1°. la valeur de chacune de ces cordes ; 2°. la valeur de chacun des angles formés par ces cordes deux à deux aux six points d'intersection ; toutes exprimées en valeurs des mêmes quantités A, B, C, R, prises déjà pour terme de comparaison dans les problèmes précédens.

PROBLÈME XX.

176. Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle (fig. 54), supposons que de chacun des angles A, B, C, on mène une tangente à la circonférence, et que ces trois tangentes, ainsi que les trois côtés du triangle soient prolongés jusqu'à leurs rencontres respectives. Cela posé, on demande toutes les parties tant angulaires que linéaires qui entrent dans la composition de cette figure, exprimées en valeur du rayon du cercle et des trois angles du triangle proposé ABC.

PROBLÈME XXI.

178. Le quadrilatère $ABDC$ (fig. 57) étant inscrit dans un cercle, supposons qu'on mène les deux diagonales \overline{AD} , \overline{BC} et qu'on prolonge les côtés opposés jusqu'à leurs rencontres respectives en F , G , et soit E le point d'intersection des deux diagonales. Cela posé, on demande toutes les parties tant linéaires qu'angulaires de cette figure, exprimées en valeurs du rayon du cercle, et des trois angles \widehat{BAD} , \widehat{CAD} , \widehat{AEB} formés par l'une AD des deux diagonales, avec chacun des côtés \overline{AB} , \overline{AC} , et avec l'autre diagonale \overline{BC} .

PROBLÈME XXII.

182. Les quatre côtés d'un trapèze $ABDC$ (fig. 60) étant donnés, trouver 1°. les deux diagonales et leurs segmens; 2°. les segmens formés sur les côtés opposés et non parallèles prolongés jusqu'à leur rencontre; 3°. tous les angles formés par les intersections de ces droites deux à deux.

PROBLÈME XXIII.

184. Parmi toutes les quantités tant linéaires qu'angulaires qui sont à considérer dans un quadrilatère simple avec ses deux diagonales, cinq quelconques indépendantes les unes des autres étant données, trouver tout le reste.

PROBLÈME XXIV.

189. Trois droites quelconques étant tracées dans un même plan, et connoissant les angles que forment les directions de deux quelconques d'entre elles, chacune avec la direction de la troisième, trouver l'angle que forment entre elles les deux premières directions.

PROBLÈME XXV.

206. Des six côtés qui composent deux triangles qui ont un angle commun ou égal, cinq quelconques étant donnés, trouver le sixième.

PROBLÈME XXVI.

309. Un triangle ABC rectangle en A (fig. 115) étant donné, mener entre ses petits côtés \overline{AB} , \overline{AC} , une droite \overline{FG} de grandeur donnée, et qui soit divisée en deux parties égales au point m par l'hypothénuse.

PROBLÈME XXVII.

310. Deux droites $\overline{B'B''}$, $\overline{CC'}$, (fig. 114) se croisant sous un angle donné $\widehat{BK}C$, mener d'un point H donné dans le plan de cet angle, et placé sur la droite \overline{KH} qui divise ce même angle en deux parties égales, une droite \overline{BC} de grandeur donnée, et qui soit comprise entre les deux autres $\overline{B'B''}$, $\overline{CC'}$.

PROBLÈME XXVIII.

311. Une circonférence BDC et deux tangentes \overline{AB} , \overline{AC} , menées à cette circonférence étant données, mener entre ces deux tangentes une troisième tangente \overline{EF} égale à une droite donnée (fig. 115).

PROBLÈME XXIX.

312. Deux diamètres étant tracés à volonté dans un cercle donné (fig. 116) et prolongés indéfiniment, mener à ce cercle une tangente \overline{EF} telle que les parties \overline{DE} , \overline{DF} , de cette tangente interceptées entre le point de contingence D , et chacun de ces diamètres $\overline{EE'}$, $\overline{FF'}$, soient en raison donnée.

PROBLÈME XXX.

313. Deux circonférences MBm , NCn . (fig. 118) étant tracées dans un même plan, mener d'un point H pris à volonté sur la ligne des centres, une droite BC entre les deux circonférences, qui soit divisée au point H en raison donnée.

PROBLÈME XXXI.

314. Par deux points pris à volonté sur une circonférence donnée, mener deux cordes qui se coupent sous un angle donné, et qui soient entre elles en raison donnée.

PROBLÈME XXXII.

315. D'un point E pris à volonté dans le plan d'un cercle donné, tracer deux cordes orthogonales \overline{AD} , \overline{BC} , qui soient entre elles en raison donnée.

PROBLÈME XXXIII.

316. D'un point pris à volonté au-dedans ou au-dehors d'une sphère donnée, mener trois cordes perpendiculaires entre elles; et qui soient en raisons données.

PROBLÈME XXXIV.

317. D'un point pris à volonté au-dedans ou au-dehors d'une sphère ; mener trois plans perpendiculaires entre eux , tels que les aires des trois cercles formant les intersections de ces plans avec la sphère , soient en raisons données.

PROBLÈME XXXV.

318. Connoissant les angles d'un triangle ABC (fig. 121) et les distances de chacun de ses côtés à un point donné D pris dans le même plan , trouver les trois côtés de ce triangle.

PROBLÈME XXXVI.

319. Connoissant les perpendiculaires abaissées de chacun des angles d'un triangle sur le côté opposé , trouver les angles et les côtés de ce triangle.

PROBLÈME XXXVII.

320. Un triangle FGH étant donné (fig. 125) , lui circonscrire un autre triangle ABC tel qu'en abaissant de chacun des angles de ce dernier une perpendiculaire sur son côté opposé , ces perpendiculaires tombent précisément aux points F, G, H, qui sont les sommets du premier.

PROBLÈME XXXVIII.

321. Une corde \overline{BC} (fig. 124) étant tracée à volonté dans un cercle donné , trouver sur la circonférence de ce cercle un point A , tel qu'en menant les cordes \overline{AB} , \overline{AC} , les perpendiculaires \overline{AH} , \overline{BG} , \overline{CF} , sur ces trois cordes et la droite \overline{FG} , l'angle \widehat{AIE} formé par cette droite et la perpendiculaire \overline{AH} soit égal à un angle donné.

PROBLÈME XL.

322. Dans un quadrilatère donné , inscrire un carré.

PROBLÈME XLI.

324. Dans un triangle donné , inscrire un autre triangle donné.

PROBLÈME XLII.

325. Sur une droite donnée \overline{MN} (fig. 127), trouver un point A dont les distances \overline{AB} , \overline{AC} à deux points donnés B, C soient en raison donnée.

PROBLÈME XLIII.

328. Connoissant les trois angles d'un triangle, et les distances de leurs trois sommets à un point donné dans le même plan, trouver les trois côtés de ce triangle.

PROBLÈME XLV.

330. Inscire dans un cercle donné un triangle abc (fig. 130), dont les trois côtés passent respectivement par trois points A, B, C, donnés dans le même plan.

PROBLÈME XLVI.

331. De ces six choses, savoir les quatre côtés d'un quadrilatère et ses deux diagonales, cinq quelconques étant données, trouver la sixième.

PROBLÈME XLVII.

334. Connoissant les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère, trouver les segmens de ces diagonales, et ceux qui sont formés par les côtés prolongés jusqu'à leurs rencontres respectives (fig. 137).

PROBLÈME XLVIII.

336. Connoissant les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère ABCD, trouver la transversale \overline{PQ} menée entre deux points P, Q pris à volonté sur les côtés opposés \overline{AB} , \overline{CD} (fig. 138).

PROBLÈME XLIX.

337. Résoudre le quadrilatère complet avec ses trois diagonales, dans tous les cas possibles.

PROBLÈME L.

338. Résoudre le problème général de la polygonomie, c'est-à-dire, résoudre dans tous les cas possibles un polygone quelconque tracé dans un plan, avec toutes ses diagonales, et supposant que les côtés et ces diagonales soient tous indéfiniment prolongés, de manière qu'ayant parmi les choses qui sont à considérer dans la figure, un nombre de données suffisant pour que tout le reste soit déterminé, on puisse trouver toutes les autres.

PROBLÈME LI.

339. De ces six choses, savoir les trois angles formés à l'un des sommets d'une pyramide triangulaire, par les trois arêtes qui s'y réunissent prises deux à deux, et les trois angles formés de même à l'un quelconque des trois autres sommets par les arêtes qui s'y réunissent prises aussi deux à deux; de ces six choses, dis-je, cinq quelconques étant données, trouver la sixième.

PROBLÈME LII.

344. Les trois côtés d'un triangle sphérique ABC (fig. 143), étant donnés, et la base \widehat{BC} étant divisée en deux segmens à volonté au point H, trouver l'arc transversal \widehat{AH} mené du sommet A au point H.

PROBLÈME LIII.

345. Les trois côtés d'un triangle sphérique ABC (fig. 143) étant donnés, et les deux côtés \widehat{BA} , \widehat{BC} étant l'un et l'autre partagés à volonté en deux segmens chacun par les points G, H, trouver l'arc transversal \widehat{GH} .

PROBLÈME LIV.

346. De ces six choses, savoir, les quatre côtés d'un quadrilatère sphérique et ses deux diagonales; cinq quelconques étant données, trouver la sixième.

PROBLÈME LV.

348. Des six angles que forment entre elles deux à deux les faces d'une pyramide triangulaire, cinq quelconques étant donnés, trouver le sixième.

PROBLÈME LVI.

356. Trois circonférences quelconques, que ce soient de grands ou de petits cercles, étant tracées sur la surface d'une sphère, trouver une quatrième circonférence qui soit tangente aux trois autres.

PROBLÈME LVII,

357. Quatre sphères étant données dans l'espace, trouver une cinquième sphère qui soit tangente aux quatre autres,

PROBLÈME LVIII.

358. Résoudre le problème général de la quadrigonométrie sphérique, c'est-à-dire, résoudre dans tous les cas possibles un quadrilatère composé de quatre grands arcs de la sphère.

PROBLÈME LIX.

359. Des dix droites qui joignent deux à deux cinq points quelconques pris à volonté dans l'espace, neuf quelconques étant données, trouver la dixième.

PROBLÈME LX.

360. Résoudre le polyèdre dans tous les cas possibles, où ce qui revient au même, un polyèdre quelconque étant proposé, former le tableau général des parties tant linéaires qu'angulaires qui entrent dans sa composition, toutes exprimées en valeurs de quelques-unes seulement d'entre elles, prises pour termes de comparaison, en nombre suffisant pour que tout le reste soit déterminé.

PROBLÈME LXI.

373. Une courbe étant supposée rapportée à deux axes fixes, par une équation entre les abscisses et des appliquées respectivement parallèles à ces axes; transformer ce système de coordonnées, de manière que la nouvelle équation ait lieu entre des abscisses et des appliquées, respectivement parallèles à deux nouveaux axes donnés.

P R O B L È M E X L I

384. L'équation d'une courbe étant donnée entre l'abscisse \overline{AP} ou \overline{Mp} (fig. 159), et l'appliquée \overline{MP} ou \overline{Ap} prise parallèlement à deux axes \overline{AP} , \overline{Ap} donnés de position ; transformer ce système de coordonnées, en prenant pour coordonnées nouvelles, les deux segments \overline{MQ} , \overline{Mq} formés par le point décrivant M , sur une transversale \overline{Qq} , menée sous un angle constant \widehat{AQq} entre les deux axes proposés \overline{AP} , \overline{Ap} .

P R O B L È M E L X I I I

385. Une courbe étant rapportée à deux axes fixes \overline{AB} , \overline{AC} (fig. 160), au moyen des abscisses et des appliquées menées de chaque point parallèlement à ces axes ; soient pris à volonté sur ces axes, deux points fixes quelconques B , C , et de ces points fixes, soient menées par le point décrivant M , deux droites \overline{BG} , \overline{CF} , qui coupent respectivement en G et F les axes \overline{AC} , \overline{AB} . Cela posé, on demande que le système des premières coordonnées soit changé, et que les nouvelles coordonnées soient \overline{AF} , \overline{AG} , de manière que la nouvelle équation ait lieu entre ces deux nouvelles coordonnées et les constantes.

P R O B L È M E L X I V

386. Une courbe étant tracée dans un plan, prenons à volonté dans ce plan, trois points fixes A , B , C , et joignons ces points deux à deux par des droites pour former le triangle ABC (160). Du point décrivant M soit menée à chacun des angles de ce triangle, une transversale prolongée jusqu'à la rencontre du côté opposé. Cela posé, la nature de la courbe étant exprimée par une équation entre les distances \overline{AF} , \overline{AG} , de l'un des angles aux intersections F , G , des côtés \overline{AB} , \overline{AC} adjacens à cet angle avec les transversales \overline{CF} , \overline{BG} , menées des angles opposés, changer ce système des coordonnées, en y substituant pour nouvelles coordonnées, les distances \overline{BF} , \overline{BH} , de l'un B des autres angles aux points d'intersections F , H .

PROBLÈME LXV.

387. Un triangle ABC (fig. 161) étant donné, concevons une courbe BMC ; telle qu'ayant abaissé du point décrivant M une perpendiculaire \overline{MP} sur le côté \overline{BC} du triangle proposé, et prolongé cette perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle coupe les deux autres côtés de ce triangle aux points q , r respectivement, on ait \overline{MP} moyenne proportionnelle entre \overline{Mq} et \overline{Mr} . Cela posé, on demande l'équation de cette courbe en la rapportant à la droite \overline{BC} comme axe des abscisses; et prenant le point B pour origine des coordonnées (1).

PROBLÈME LXVI.

408. Une courbe quelconque tracée dans un plan, étant rapportée à deux axes perpendiculaires entre eux, par une équation entre l'abscisse et l'appliquée, former le tableau des principales variables correspondantes au point décrivant, toutes exprimées en valeurs de ces deux coordonnées et de constantes.

PROBLÈME LXVII.

412. L'équation de la courbe étant donnée entre l'abscisse \overline{AB} (fig. 169) et l'appliquée \overline{MP} , trouver l'équation de la même courbe entre le rayon vecteur \overline{AM} , et l'angle $M\hat{A}B$ pris pour nouvelles coordonnées.

PROBLÈME LXVIII.

413. L'équation d'une courbe AMB (fig. 169) étant donnée entre l'abscisse \overline{AP} et l'appliquée \overline{MP} , supposées perpendiculaires entre elles; changer ce système de coordonnées, de manière que la nouvelle équation ait lieu entre les deux variables \overline{AP} , \overline{KP} , dont la première \overline{AP} est la même abscisse que ci-dessus, et la seconde \overline{KP} , est la perpendiculaire abaissée sur l'axe \overline{AB} des abscisses, du point K où se croisent les perpendiculaires, menées des points A, B , sur \overline{BM} , \overline{AM} , respectivement.

PROBLÈME LXIX.

415. L'équation étant donnée entre les angles $M\hat{A}B$, $M\hat{B}A$, (fig. 169) pris pour coordonnées, trouver l'équation de la même courbe entre l'abscisse \overline{AP} et l'appliquée \overline{MP} , prises pour nouvelles coordonnées.

PROBLÈME LXX:

420. L'équation de la courbe étant donnée entre les droites \overline{MA} , \overline{MB} (fig. 169), prises pour coordonnées, trouver l'équation de la même courbe entre l'abscisse \overline{AP} et l'appliquée \overline{MP} prises pour nouvelles coordonnées.

PROBLÈME LXXI.

421. L'équation de la courbe étant donnée entre les coordonnées \overline{AG} , \overline{BG} (fig. 169), trouver celle qui doit avoir lieu entre \overline{AP} , \overline{MP} prises pour nouvelles coordonnées.

PROBLÈME LXXII.

422. L'équation de la courbe étant donnée entre les aires \overline{AMK} , \overline{BMK} (fig. 169), prises pour coordonnées, trouver celle qui doit avoir lieu entre \overline{AP} , \overline{MP} , prises pour coordonnées nouvelles.

PROBLÈME LXXIII.

423. L'équation de la courbe étant donnée entre les coordonnées \overline{MA} , \overline{MB} , trouver celle qui doit avoir lieu entre les angles \widehat{MAB} , \widehat{MBA} , pris pour nouvelles coordonnées (fig. 169).

PROBLÈME LXXIV.

424. L'équation de la courbe étant donnée entre le rayon vecteur \overline{AM} , et le rayon de courbure \overline{MR} pris pour coordonnées, trouver celle qui doit avoir lieu entre l'abscisse \overline{AP} , et l'appliquée \overline{MP} , prises pour nouvelles coordonnées (fig. 169).

PROBLÈME LXXV.

425. L'équation de la courbe étant donnée entre les deux produits $\overline{AP} \cdot \overline{MB}$, $\overline{BP} \cdot \overline{MA}$ considérés chacun comme une seule variable et pris pour coordonnées, trouver l'équation de cette courbe, en prenant pour nouvelles coordonnées, l'abscisse \overline{AP} et l'appliquée \overline{MP} (fig. 169).

PROBLÈME LXXVI.

433. Trouver l'angle que forme la tangente d'une courbe, avec la droite qui partant du point de contingence, divise en deux parties égales la corde infiniment petite, menée parallèlement à cette tangente; trouver, dis-je, cet angle exprimé en valeurs de l'abscisse et de l'appliquée, supposées perpendiculaires entre elles.

3 Le programme de l'examen d'admission à l'École polytechnique
en 1806

3 Le programme de l'examen d'admission à
l'École polytechnique en 1806

Le programme des connoissances exigées en 1806, pour l'admission à l'École polytechnique a été arrêté ; ainsi qu'il suit :

1°. L'arithmétique et l'exposition du nouveau système métrique ; on insistera sur l'application du calcul décimal à ce système.

2°. L'algèbre, comprenant la résolution des équations des deux premiers degrés, celle des équations indéterminées du premier degré ; la composition générale des équations ; la démonstration de la formule du binôme de Newton, dans le cas seulement des exposans entiers positifs ; la méthode des diviseurs commensurables ; la résolution des équations numériques par approximation ; l'élimination des inconnues dans deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues.

3°. La théorie des proportions et des progressions ; celle des logarithmes et l'usage des tables.

4°. La géométrie élémentaire ; la trigonométrie rectiligne, et l'usage des tables des sinus.

5°. La discussion complète des lignes représentées par les équations du premier et second degré à deux inconnues ; les propriétés principales des sections coniques.

6°. La statique appliquée principalement à l'équilibre des machines simples.

7°. Les candidats seront tenus d'écrire, sous la dictée de l'examineur, plusieurs phrases françaises, et d'en faire l'analyse grammaticale, afin de constater qu'ils savent écrire lisiblement, et qu'ils possèdent les principes de leur langue.

8°. Ils seront enfin tenus de copier une tête, d'après l'un des dessins qui leur seront présentés par l'examineur.

Tous ces articles sont également obligatoires.

A compter de l'année 1807, les candidats devront être assez instruits dans la connoissance de la langue latine, pour expliquer les *offices* de Cicéron.

Quoique cet article ne soit pas obligatoire pour le concours de l'an 1806, néanmoins la préférence sera donnée, à égalité de mérite, à ceux des candidats qui auront satisfait à cette condition.

E R R A T A .

- Pag. lig.*
- No. 3. 45, 13, *a* pour l'angle, lisez *a* pour l'angle.
 46, 5, SH, lisez SF.
 47, 11, commun au centre. lisez commun au cercle.
 48, 30, avec un plan donné, lisez avec deux plans donnés.
- No. 4. 87, 9, en 1559, lisez en 1597.
Id., 20, POUR LA SECONDE SECTION, lisez POUR LA SECONDE DIVISION.
Id., 28, et pour l'instruction, lisez et s à l'instruction.
Id., 30, dissuada, lisez dissuade.
Id., 32, l'engagea, lisez l'engage.

4 Les problèmes des *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique* de Lhuilier (1809)

4 Les problèmes des *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique* de Lhuilier (1809)

T A B L E

D E S

M A T I È R E S.

AVANT-PROPOS.	pages.	§§
<i>Dissertation préliminaire, sur le centre des moyennes distances</i>	1-33	1-27
Introduction à la doctrine du centre des moyennes distances, par l'exemple de deux points	1-2	1
Définitions du centre des moyennes distances, et de l'excentre des moyennes distances, pour des coefficients donnés	2-3	2
Détermination du centre des moyennes distances de trois points donnés. Ce centre est unique.	3-5	3
Propriétés des parallélogrammes relatives au centre des moyennes distances.	5-6	3
Détermination du centre des moyennes distances pour quatre points donnés sur un plan	6-7	4
Détermination du centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points donnés sur un plan; en supposant connu le centre des moyennes distances pour des points, en nombre moindre que celui des points proposés.	7-8	5
Détermination immédiate du centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points donnés sur un plan	8-9	6
Applications particulières aux figures régulières, et aux figures qui ont un centre de figure	9-10	7
Equations relatives au centre des moyennes distances	10-11	8-10
Expression de la somme des espaces qui ont aux carrés des droites menées d'un nombre quelconque de points au centre de leurs moyennes distances, des rapports dont les exposans sont donnés, dans les carrés des distances de ces points entr'eux	11-12	11
Détermination du centre des moyennes distances de points donnés, dans sa distance à l'un de ces points, et dans sa position relativement à chacune des droites qui joignent ces points	12-13	12
Application à l'excentre des moyennes distances	13-15	13
Propriétés des figures rectilignes relatives au centre des moyennes distances	15-16	14
Expression d'un côté d'une figure rectiligne dans les autres côtés et leurs inclinaisons au premier	16	15
Expression d'un côté d'une figure rectiligne dans les autres côtés et leurs inclinaisons entr'eux	17	15
Centre des moyennes distances d'une ligne droite, et d'un assemblage de lignes droites, puis d'une ligne courbe quelconque	18-19	16
Développement de la règle de GULDIN, relative aux surfaces de révolution	19-20	16

	pages.	§§
Sur le centre des moyennes distances des points situés dans l'espace	20-21	17
Applications particulières aux parallépipèdes; expression de la diagonale d'un parallépipède dans ses arêtes et dans les angles qu'elles font avec elle; puis dans les arêtes et dans les diagonales de ses faces; et enfin, dans ses arêtes et dans les angles qu'elles forment entr'elles	21-24	18
Détermination immédiate du centre des moyennes distances de points donnés dans l'espace	24-25	19
Expression de la somme des espaces qui ont aux carrés des distances du centre des moyennes distances à des points donnés des rapports dont les exposans sont les coefficients correspondans donnés, dans les espaces qui ont des rapports donnés aux carrés des distances de ces points entr'eux	25	20
Application à l'excentricité des moyennes distances des points situés dans l'espace	25	21
Application aux polyèdres des propriétés du centre des moyennes distances, et en particulier, exposition d'une face d'un polyèdre dans les autres faces et leurs inclinaisons à elle; et dans les autres faces et leurs inclinaisons entr'elles	25-28	22
Développement de la règle de GULIUS relative à la capacité des solides engendrés par la révolution des figures planes. Application de cette règle	28-33	23-25

CHAPITRE PREMIER.

<i>Lieux à la ligne droite et à la circonférence du cercle traités géométriquement</i>	35-93	26-46
--	-------	-------

PREMIÈRE PARTIE.

Lieux traités par APOLLONIUS, suivant SIMSON.

Définitions des lieux géométriques, relatifs aux lignes. Eclaircissemens tirés des lieux connus par les premiers élémens relatifs à la ligne droite et à la circonférence du cercle	35-37	26
Sur les lieux plans d'APOLLONIUS, et en particulier sur l'ouvrage de R. SIMSON. Par un même point soient menées différentes droites. Sur chacune de ces droites soient prises depuis le même point des parties qui soient entr'elles dans un rapport donné; que l'extrémité d'une de ces parties soit à la circonférence d'un cercle donné, l'extrémité de l'autre partie est aussi à une circonférence donnée. Conséquences diverses de cette propriété du cercle. Liaison intime qui règne entre ce lieu et celui dans lequel le rectangle des parties proposées est donné de grandeur. Porisme relatif à ce lieu, et remarque sur ce genre de propositions	37-39	27
D'un même point soient menées deux droites faisant entr'elles un angle donné, et ayant entr'elles un rapport donné. Que l'extrémité d'une de ces droites soit à la circonférence d'un cercle donné, l'extrémité de l'autre de ces droites est aussi à la circonférence d'un cercle donné. Liaison qui règne entre ce lieu, et celui qui est relatif au rectangle des mêmes droites	39-43	28
D'un même point soient menées des droites, sur chacune d'elles soient pris deux points, tels, que le rectangle de leurs distances au premier point soit	44-46	30

donné

TABLE DES MATIÈRES.

	pages.	§§
donné de grandeur; que l'un de ces points soit à une droite donnée de position; l'autre de ces points est à la circonférence d'un cercle donné (qui passe par le premier point); et réciproquement, si l'un de ces points est à la circonférence d'un cercle donné qui passe par le premier point, l'autre de ces points est à une droite donnée	46-48	31
Soit une droite donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position; qu'une des extrémités de la première droite soit à la circonférence d'un cercle donné; l'autre extrémité de cette droite est aussi à la circonférence d'un cercle donné	48-49	32
Soient deux droites données de position; une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant aux droites données de position des droites sous des angles donnés, leur rapport est donné	49-52	33
Soient deux droites données de position, et soient deux droites correspondantes données de grandeur. Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant aux droites données de position des droites sous des angles donnés, la somme de leurs rectangles par les droites données de grandeur, est donnée de grandeur. Liaison de ce lieu avec la doctrine du centre des moyennes distances	52-55	34
Soient des droites qui se coupent en un même point données de position, et soient des droites correspondantes données de grandeur. Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant des droites sous des angles donnés aux droites données de position, la somme de leurs rectangles par les droites données de grandeur est donnée de grandeur. Liaison de ce lieu avec la doctrine du centre des moyennes distances. Cas dans lequel la question est indéterminée	55-59	35
Soient des droites en nombre quelconque données de position sur un plan, et soient des droites correspondantes données de grandeur. Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant des droites sous des angles donnés aux droites données de position, la somme de leurs rectangles par les droites données de grandeur est donnée de grandeur. Liaison de ce lieu avec le § précédent; cas indéterminé, et sa liaison avec le centre des moyennes distances	59-65	36
Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés la différence de leurs carrés est constante	65-67	37
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés la somme de leurs carrés est donnée de grandeur.	67-69	38
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés est donnée de grandeur. Limite de cet espace.	70-71	39
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés la différence des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés (inégaux entr'eux), est donnée de grandeur.	71-76	40
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant		

GGG

	pages.	§§
des droites à des points donnés de position, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés est donnée de grandeur. Limite de ce dernier espace; liaison avec la doctrine du centre des moyennes distances	76-79	41
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à des points donnés, la somme des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés des droites menées à quelques-uns de ces points, diffère d'un espace donné de grandeur, de la somme des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés des droites menées aux points restans. Cas dans lequel ce lieu est une droite	79-81	42
La circonférence d'un cercle est le lieu des sommets des triangles dont la base est donnée de grandeur, et dans lesquels le rectangle des côtés est égal au rectangle de la hauteur par une droite donnée de grandeur	81-83	43
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant deux droites, l'une à un point donné, et l'autre perpendiculaire à une droite donnée; le carré de la première est égal au rectangle de la seconde par une droite donnée de grandeur. Applications diverses	83-88	44
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés, leur rapport est égal à un rapport donné (différent du rapport d'égalité). Liaison de ce lieu avec celui du § précédent.	88-90	45
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés; le carré d'une de ces droites a un rapport donné (différent du rapport d'égalité), à la somme ou à la différence d'un espace donné de grandeur et du carré de la droite menée à l'autre point. Applications diverses	90-93	46
S E C O N D E P A R T I E.		
<i>Additions diverses aux Lieux plans d'APOLLONIUS</i>	93-111	47-56
De la section harmonique.		
Si trois des points d'une section harmonique sont à des droites données de position qui se coupent en un même point; le quatrième de ces points est aussi à une droite donnée de position	93-95	47
Une ligne droite est le point de section des diagonales d'un trapèze dont un des côtés parallèles entr'eux est donné de grandeur et de position, et dont les côtés adjacens au premier de ces côtés sont donnés de position. La droite qui joint le point de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère, et de ses diagonales, est coupée harmoniquement dans ces points, et dans les points dans lesquels elle rencontre les deux autres côtés	95-97	48
Soit une droite menée par un point donné sur le plan d'un cercle, coupée harmoniquement dans les points où elle rencontre la circonférence et dans deux autres points. Si l'un de ces derniers points est donné de position, le lieu de l'autre de ces points est une ligne droite	97-98	49
Une ligne droite est le lieu des points de rencontre des tangentes à un cercle		

TABLE DES MATIÈRES.

	pages.	§§
donné; telles que la droite qui joint les points de contact passe par un point donné	98-99	50
Soient trois points donnés de position. Par l'un de ces points soit menée une droite quelconque sur laquelle soient abaissées depuis les deux autres des perpendiculaires; et sur la même droite soit déterminé un point tel, que le rapport de ses distances aux pieds des perpendiculaires soit donné; le lieu de ce dernier point est une ligne droite	99-100	51
Soient trois droites qui se coupent données de position. D'un même point pris sur le plan de ces droites soit menée une droite qui les coupe, de manière que les rapports des parties de cette droite comprises entre ce point et les points de section soient égaux à des rapports donnés. Le lieu de ce point est une ligne droite	100-104	52
Soit un quadrilatère dont un des côtés pris pour base est donné de grandeur et de position; que le côté opposé à la base la rencontre en un point donné (ou lui soit parallèle); que les points de rencontre des côtés adjacens à la base et du côté qui lui est opposé soient à des droites données de position; une ligne droite est le lieu des points de rencontre des côtés adjacens à la base. Application aux points de rencontre des côtés des figures rectilignes d'un nombre quelconque de côtés	104-108	53
Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels on voit sous un même angle deux droites données de grandeur et de position sur une même ligne droite	108-109	54
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur des droites données de position qui se coupent en un même point, de manière à couper en parties égales la quantité angulaire autour d'un point, la somme des carrés de ces perpendiculaires est constante.	109	55
La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un polygone régulier, la somme de leurs carrés est constante	110-111	56

C H A P I T R E II.

<i>Application de l'analyse algébrique à la recherche des lieux à la ligne droite et à la circonférence du cercle.</i>	111-146	57-84
Principes de la doctrine des coordonnées et définitions	112-113	57
Détermination de la distance de deux points et de la position de la droite qui les joint dans les coordonnées de ces points	113-	58
Equation de la ligne droite tirée de la grandeur de la perpendiculaire abaissée sur elle depuis l'origine, et des angles qu'elle fait avec les axes	114-	59
Rapprochemens des deux §§ précédens	114-115	60
Expression de la perpendiculaire abaissée sur une droite donnée depuis un point donné.	115	61
Détermination du point de section de deux droites dont on connoît les équations.	116	62
Détermination d'un triangle dont on connoît les côtés par leurs équations	117	63

	pages.	§§
Détermination de la position d'une droite relativement à un cercle, en connoissant leurs équations	117-118	64
Détermination d'un cercle dont la circonférence passe par trois points donnés par leurs coordonnées	118-119	65
Conversion des coordonnées relatives à différens axes	120-121	66
Recherche du lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés est constante	121-122	67
Recherche du lieu des points dont le rapport des distances à deux droites données de position est constant	122-123	68
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur des droites données de position la somme de leurs rectangles par des droites données de grandeur est constante	123-126	69-71
Lieux à la ligne droite, relatifs à la section harmonique	126-128	72-73
Détermination du lieu des points, de chacun desquels menant des droites à deux points donnés, elles forment à ces points des angles donnés	128-129	74
Recherche du lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est égal à un rapport donné	129-130	75
Recherche du lieu des points de chacun desquels menant deux droites, l'une à un point donné, et l'autre perpendiculaire à une droite donnée, le carré de la première est égal au rectangle de la seconde par une droite donnée.	130-131	76
Recherche du lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés la somme ou la différence des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés de ces droites est égale à un espace donné de grandeur.	131-132	77
Recherche du lieu des points de chacun desquels menant des droites à des points donnés, la somme (ou quelque différence) des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés, est donnée	132-133	78
Recherche du lieu des points de chacun desquels menant à une droite donnée de position une ordonnée sous un angle donné; l'espace qui a un rapport donné au carré de l'abscisse comptée sur la droite donnée depuis un point donné, diffère du carré de l'ordonnée, d'un espace qui a un rapport donné au rectangle de l'abscisse par l'ordonnée	133-135	79
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un polygone régulier, la somme de leurs carrés est donnée de grandeur. Recherche de la somme des sinus et cosinus des arcs qui croissent comme les nombres naturels	135-137	80
La même recherche pour la somme des cubes. Exception que présente le triangle équilatéral. Eclaircissement de cette exception	138-141	81
Soient des droites données de position. Sur ces droites soient abaissées d'un même point des perpendiculaires; et que la somme des carrés de ces perpendiculaires, ou la somme des espaces qui ont à ces carrés des rapports donnés, soit donnée. Détermination des cas dans lesquels le lieu de ces points est la circonférence d'un cercle	141-144	82-83
Soit un quadrilatère donné de grandeur et d'espèce; d'un même point soient		abaissées

TABLE DES MATIERES.

505

	pages.	§§
abaissées des perpendiculaires sur ses côtés, et que le rapport des rectangles des perpendiculaires abaissées sur les côtés opposés soit donné. Détermination des cas dans lesquels le lieu de ces points est une circonférence de cercle	144-146	84

C H A P I T R E III.

<i>Lieux au Plan et à la surface sphérique traités géométriquement</i>	146-167	85-99
Définition des lieux à une surface; éclaircissemens	146-147	85
Lieux à la ligne droite qui découlent des lieux au plan	148	86
Lieux au plan et à la surface sphérique, qui découlent immédiatement des lieux correspondans à la ligne droite et à la circonférence du cercle	148-150	87
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur des droites données de position dans l'espace, et qui se coupent en un même point, la somme des rectangles faits par les segmens retranchés depuis le point de section des droites données, et par des droites correspondantes données de grandeur, soit égale à un espace donné	150-152	88
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les faces d'un polyèdre, la somme de leurs rectangles par des droites données de grandeur soit donnée de grandeur. Exposition d'un cas indéterminé auquel cette question donne lieu	153-155	90
Recherche du lieu des points dans l'espace de chacun desquels menant des droites à des points donnés de position, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés, soit égale à un espace de grandeur	155-157	91
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les faces d'un angle solide régulier, la somme des carrés de ces perpendiculaires soit égale à un espace donné de grandeur	157-158	92-93
Recherche correspondante sur une pyramide droite à base régulière; sur un prisme droit à base régulière; sur un fuseau pyramidal composé de pyramides droites à bases régulières, sur les polyèdres réguliers, et sur quelques autres polyèdres	158-167	93-99

C H A P I T R E IV.

<i>Application de l'analyse algébrique à la recherche des Lieux au plan et à la surface sphérique</i>	167-195	100-125
Principes de la doctrine des coordonnées et des plans coordonnés. Définitions diverses. Exposition de la somme des carrés des coordonnées d'un point, et de celle des carrés des sinus et des cosinus des angles qu'une droite fait avec les plans coordonnés	167-169	100

Hhhh

	pages.	55
de deux de ses points, et sur celle des projections de cette droite sur ces plans	169-171	101
Sur la position de deux droites entr'elles, déterminée par leurs positions relativement aux plans coordonnés	171-172	102
Sur l'équation du plan, déterminée par la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan, et par les angles que cette perpendiculaire fait avec les plans coordonnés; éclaircissemens divers sur cette équation, et applications	172-174	103-105
Détermination de l'inclinaison mutuelle de deux plans dont on connoît les équations	174-175	106
Equation de la droite qui est la commune section de deux plans dont on connoît les équations	175-176	107
Détermination de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan	176	108
Sur la conversion des coordonnées	176-177	109
Détermination de l'équation d'un plan dans les coordonnées de trois de ses points; applications diverses, et en particulier, expression d'une figure rectiligne dans ses projections sur les plans coordonnés	177-181	110-112
Equation de la surface sphérique	181-182	113
Equation de l'intersection de deux surfaces sphériques	182-183	114
Equation du plan qui touche une sphère donnée, et équation du plan qui touche trois sphères données	183-184	115
Détermination de la surface sphérique qui passe par quatre points donnés, ou qui doit toucher des plans et des sphères données	184-185	116
Recherche du lieu des points également éloignés de deux points donnés; et du lieu des points tels que la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés est constante	185-186	117
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur deux plans donnés leur rapport est donné	186 187	118
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur des plans donnés de position, la somme des rectangles de ces perpendiculaires par des droites données de grandeur est donnée de grandeur.	187-188	119
Recherche du lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est donné	188	120
Recherche du lieu des points de chacun desquels menant deux droites, l'une à un point donné, et l'autre perpendiculaire à un plan donné, le carré de la première est égal au rectangle de la seconde par une droite donnée	188-189	121
Recherche du lieu des points de chacun desquels menant des droites à des points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés, est donnée	189-190	122
Soient des plans donnés de position dans l'espace; d'un même point soient abaissées sur ces plans des perpendiculaires; que la somme des carrés de ces perpendiculaires soit donnée de grandeur. Détermination des cas dans lesquels le lieu de ce point est une surface sphérique	190-193	123-124

TABLE DES MATIÈRES.

	pages.	§§
D'un même point soient abaissées sur les faces d'un tétraèdre des perpendiculaires; que le rectangle de deux de ces perpendiculaires ait un rapport donné au rectangle des deux autres. Détermination des cas dans lesquels le lieu de ce point est une surface sphérique	193-195	125

C H A P I T R E V.

<i>Application des Lieux géométriques à la solution des problèmes élémentaires déterminés</i>	195-298	126-150
<i>Éclaircissemens sur l'utilité des lieux géométriques, tirés de quelques exemples très-simples</i>	195-200	126
<i>Problème. Partager deux droites données l'une et l'autre en deux parties, telles, que le rapport d'une partie de l'une à une partie de l'autre soit donné; et que le rapport des deux autres parties soit aussi donné. Application à un nombre de droites quelconques. Inscription à une figure rectiligne d'une autre figure rectiligne de même nom, et dont les côtés sont parallèles à des droites données de position. Distinction essentielle entre les figures rectilignes suivant que le nombre de leurs côtés est pair ou qu'il est impair</i>	200-203	127
<i>Digression sur les Porismes à laquelle donne lieu les problèmes compris dans le § précédent. Développement du sentiment du D.^r PLAYFAIR, et éclaircissemens par quelques exemples</i>	203 207	128
<i>Problème. Décrire un triangle dont on connoît la base, la hauteur et l'angle au sommet</i>	207-209	129
<i>Problème. Par un point donné sur le plan d'un angle donné, mener une droite de manière que le rectangle de ses parties comprises entre ce point et les jambes de l'angle donné soit donné de grandeur</i>	209-211	130
<i>Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, la hauteur et la différence des angles à la base</i>	211-212	131
<i>Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la somme des côtés.</i>		
<i>Théorèmes divers sur les triangles dont un angle est connu.</i>		
<i>Applications à plusieurs problèmes sur les triangles</i>	212-224	132
<i>Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la somme (ou la différence) des rectangles de ses côtés par des droites données</i>	225-226	133
<i>Problème. On demande un triangle dont la base est donnée de grandeur et de position, dont le sommet est sur une droite donnée de position, et dont la somme (ou la différence) des côtés est donnée.</i>		
<i>Application relative aux figures du plus petit contour, inscrites à des figures de même nom. Différence remarquable à cet égard entre les figures dont le nombre des côtés est pair ou impair</i>	226-236	134
<i>Problème. Soient trois points donnés de position sur une ligne droite; on demande sur cette droite un quatrième point, tel que le rectangle de ses</i>		

distances à deux des points donnés soit au carré de sa distance au troisième des points donnés, dans un rapport donné.		
<i>Application.</i> Soient quatre points donnés de position sur une même droite, on demande sur la même droite un cinquième point, tel, que le rectangle de ses distances à deux des points donnés ait un rapport donné au rectangle de ses distances aux deux autres points donnés	234-239	135
<i>Problème.</i> On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la droite qui divise cet angle en deux parties égales	239-242	136
<i>Problème.</i> Soient deux points et une droite donnés de position. Trouver sur cette droite deux points de chacun desquels menant des droites aux deux points donnés elles comprennent à ces derniers points des angles donnés.	242-246	137
<i>Problème.</i> Soit un triangle donné de grandeur et d'espèce, on demande le point (sur le plan du triangle) duquel menant des droites à ses sommets, elles comprennent entr'elles des angles donnés	246-252	138
<i>Problème.</i> A un triangle donné circonscrire un triangle donné de grandeur et d'espèce; et à un triangle donné inscrire un triangle donné de grandeur et d'espèce	252-255	139
<i>Problème.</i> Déterminer un quadrilatère inscrit au cercle, en connoissant ses quatre côtés	255-258	140
<i>Problème.</i> On demande un quadrilatère dont on connoît les quatre côtés et la surface	258-261	141
<i>Problème.</i> On demande un quadrilatère dont on connoît les angles et les diagonales	262-265	142
<i>Problème.</i> On demande un quadrilatère dont on connoît les angles, la surface et le contour. Limite et application	265-268	143
<i>Problème.</i> Soit un quadrilatère donné de grandeur et d'espèce. Mener une droite qui coupe les côtés de ce quadrilatère, de manière que les parties de cette droite comprises entre ces côtés soient entr'elles dans des rapports donnés. Réciproquement, soient quatre points donnés de position sur une ligne droite; mener par chacun de ces points une droite, de manière que le quadrilatère formé par ces droites soit donné d'espèce	268-273	144
<i>Problème.</i> A un quadrilatère donné circonscrire un quadrilatère donné d'espèce; et réciproquement, à un quadrilatère donné inscrire un quadrilatère donné d'espèce	273-276	145
<i>Problème.</i> A un cercle donné inscrire un triangle dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position ou passant par des points donnés de position	277-282	146
<i>Problème.</i> A un cercle donné inscrire un quadrilatère dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position, ou passent par des points donnés de position	282-286	147
<i>Problème.</i> A un cercle donné inscrire un polygone d'un nombre donné de côtés, et dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position, ou passent par des points donnés. Différence quant à		

TABLE DES MATIÈRES.

	309 pages. §§
la première de ces conditions entre les polygones dont le nombre des côtés est pair ou impair	286-289 148
<i>Problème.</i> A un cercle donné inscrire un polygone d'un nombre pair de côtés, dont les angles sont donnés, en connoissant ou son contour ou sa surface.	289-293 149
<i>Problème.</i> Soient des points en nombre quelconque donnés de position sur un plan ; soient des coefficients correspondans donnés de grandeur ; et soit une droite donnée de position sur ce plan. Trouver sur cette droite un point duquel menant des droites aux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports dont les exposans sont égaux aux coefficients donnés soit égale à un espace donné. Limite de cet espace.	
<i>Application.</i> Détermination du point duquel abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle la somme de leurs carrés est la plus petite.	
<i>Application ultérieure.</i> Détermination du point duquel abaissant des perpendiculaires sur les faces d'un tétraèdre, la somme de leurs carrés est la plus petite	298- 150

FIN DE LA TABLE.

5 Les énoncés des *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques* de Reynaud et Duhamel (1823)

5 Les énoncés des *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques* de Reynaud et Duhamel (1823)

Des points et des lignes sur un plan

227. 1^{er} PROBLÈME. (Fig. 13). *MENER par le point A une droite qui fasse un angle donné avec la droite XY.*

2^o PROBLÈME. (Fig. 14). *Mener par le point A une droite telle, que la partie interceptée entre les deux parallèles XY, ZU, soit d'une longueur donnée δ .*

3^o PROBLÈME. (Fig. 15). *Du point A tirer une ligne AC telle, que la différence entre AB et BC soit d'une longueur δ donnée.*

4^o PROBLÈME. (Fig. 16). *Trouver sur la droite XY un point M, tel qu'en le joignant à deux points donnés A, B, les angles AMX, BMY soient égaux.*

5^o PROBLÈME. (Fig. 17). *Étant donnés deux points A, B, dans l'intérieur d'une portion de polygone quelconque XYZU, déterminer des points M, N, P, tels que les droites AM, MN, NP, PB fassent des angles égaux avec les côtés sur lesquels elles se rencontrent.*

6^o PROBLÈME. (Fig. 18). *Deux points, A, B, étant donnés entre deux droites XY, ZU, trouver des points M, P, N, ..., en nombre donné sur ces deux lignes, de manière que les droites AM, MN, NP, PB, ..., fassent des angles égaux avec la ligne sur laquelle elles se coupent.*

7^o PROBLÈME. (Fig. 19). *Deux points A, B étant donnés d'un même côté de la droite XY, trouver un point M de XY tel, que la somme AM + MB soit un minimum.*

8^o PROBLÈME. (Fig. 21). *Étant données deux droites EF, GH, qu'on ne peut prolonger, 1^o mener par un point donné M une ligne qui passe par leur point de concours; 2^o tirer une ligne qui partage leur angle en deux parties égales.*

9^o PROBLÈME. (Fig. 23). *Les trois droites AB, AC, BC étant données, tirer une parallèle MN à BC, de manière que la somme ou la différence des parties BM, CN soit égale à MN.*

10° PROBLÈME. (Fig. 24). Étant données les trois droites AB, AC, BC, mener une parallèle MN à BC, telle que la somme ou la différence des parties BM, CN soit égale à une ligne donnée.

11° PROBLÈME. (Fig. 25). Étant donné le carré ABCD, y inscrire un autre carré donné.

12° PROBLÈME. (Fig. 26). Étant donné le triangle ABC et un point D sur un des côtés, y inscrire un triangle semblable à un triangle donné et ayant un de ses sommets en D.

13° PROBLÈME. (Fig. 27). Étant donnés deux cercles A, B, qui se coupent, mener par un de leurs points de rencontre C, une sécante telle, que les cordes interceptées soient dans le rapport de m à n.

14° PROBLÈME. (Fig. 28). Étant donnés deux cercles A, B, qui se coupent en C, mener par ce point une sécante, telle que la somme ou la différence des deux cordes soit égale à une ligne donnée 2^{de}.

15° PROBLÈME. (Fig. 29). Partager un triangle ABC en m parties équivalentes, par des parallèles à un de ses côtés.

16° PROBLÈME. (Fig. 30). Tirer d'un point donné A une sécante AZ telle, que les parties interceptées entre les trois droites données OB, OC, OD, soient dans le rapport de m à n.

17° PROBLÈME. (Fig. 31). Trouver le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes A, B, soit constamment égal au rapport donné de m à n.

18° PROBLÈME. (Fig. 32). Trouver les points d'un plan qui sont également éclairés par deux lumières dont la position est connue, et dont les intensités sont m et n à l'unité de distance.

19° PROBLÈME. (Fig. 33). Par trois points A, B, C, faire passer les cotés d'un triangle équilatéral, dont la surface soit la plus grande possible.

20° PROBLÈME. Étant donnée la différence de la diagonale au côté d'un carré, construire ce carré.

21° PROBLÈME. (Fig. 34). Incrire dans un cercle un rectangle dont la surface soit donnée.

22° PROBLÈME. (Fig. 35). *Inscrire dans un triangle ABC, un rectangle dont le rapport des côtés soit donné.*

23° PROBLÈME. (Fig. 36). *Mener une tangente commune à deux cercles A et B.*

24° PROBLÈME. *Décrire un cercle tangent à trois droites indéfinies.*

THÉORÈME. (Fig. 37). *Si l'on prend trois à trois les côtés d'un quadrilatère, et qu'on inscrive des cercles dans chacun de ces systèmes, les centres des quatre cercles qui en résulteront seront sur un même cercle; car si l'on partage les quatre angles A, B,*

25° PROBLÈME. (Fig. 38). *Décrire un cercle tangent à une droite donnée XY, passant par un point donné A, et d'un rayon donné R.*

26° PROBLÈME. (Fig. 39). *Par deux points donnés A, B, mener un cercle tangent à la droite XY.*

27° PROBLÈME. (Fig. 40). *Décrire un cercle tangent à deux droites, et passant par un point donné A.*

28° PROBLÈME. (Fig. 41). *Décrire un cercle qui passe par deux points A, B, et qui soit tangent à un cercle donné C.*

29° PROBLÈME. (Fig. 42). *Par un point donné A, faire passer un cercle tangent à une droite et à un cercle donnés.*

30° PROBLÈME. (Fig. 43). *Faire passer un cercle par un point donné X, tangentielllement à deux cercles donnés.*

31° PROBLÈME. (Fig. 44). *Décrire un cercle tangent à deux cercles donnés A, B, et qui touche une droite donnée XY.*

32° PROBLÈME. (Fig. 45). *Décrire un cercle tangent à deux droites AX, AY, et à un cercle O.*

35° PROBLÈME. (Fig. 46). *Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.*

34° PROBLÈME. (Fig. 47). *Décrire dans un cercle donné un nombre quelconque m de cercles égaux qui soient tangens entre eux et au cercle donné A.*

THÉORÈME. (Fig. 48). *La somme des distances de deux points fixes A, B, à un point M d'une circonférence donnée, est un minimum lorsque les deux droites AM, BN font des angles égaux avec le rayon CM; car les lignes AM, MB faisant alors des angles*

35° PROBLÈME. (Fig. 49). *Trouver un point O tel, que la somme de ses distances à trois points donnés A, B, C, soit un minimum.*

36° PROBLÈME. (Fig. 50). *Trouver un point O, dont la somme des distances à deux points A, B, et à une droite XY, soit un minimum.*

37° PROBLÈME. *Trouver un point O, dont la somme des distances à deux droites BE, BG et à un point A (fig. 51), ou à trois droites (fig. 52), soit un minimum.*

38° PROBLÈME. (Fig. 53). *Construire un triangle rectangle tel, qu'un des côtés soit moyen proportionnel entre l'hypoténuse donnée AB, et l'autre côté.*

39° PROBLÈME. (Fig. 54). *D'un point A donné hors d'un cercle B, mener par ce point une sécante telle, que la corde soit moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure, ou bien telle, que les deux segmens soient dans le rapport de m à n.*

40° PROBLÈME. (Fig. 55). *Partager la surface d'un cercle en m parties équivalentes.*

41° PROBLÈME. (Fig. 56). *Etant donnés deux points A, B, sur deux parallèles, et un point C au-dehors, tirer par ce point une sécante CXY telle, que l'on ait $AX : BY :: m : n$.*

42° PROBLÈME. (Fig. 57). *D'un point A donné hors d'un cercle, mener une sécante, telle que $AB \times BC$ soit égal à un carré donné m^2 .*

43° PROBLÈME. (Fig. 58). *Trois droites AB, BC, AC, étant données, en mener une troisième XZ telle que les parties XY, YZ, soient égales à des lignes connues, a, c.*

44° PROBLÈME. (Fig. 59). *Trouver tous les points tels que la somme ou la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes A, B, soit égale à m^2 .*

45° PROBLÈME. (Fig. 60). *Etant donnés deux cercles , trouver les points tels que les tangentes tirées de ces points aux deux cercles , soient égales.*

46° PROBLÈME. (Fig. 61). *Etant donnés deux cercles A, B, leur mener des tangentes qui se coupent sur une droite donnée XY , et fassent avec elle des angles égaux.*

THÉORÈME. (Fig. 62). *Lorsque trois cercles se coupent deux à deux , les trois cordes AB , CD , EF , d'intersection se rencontrent en un même point.*

47° PROBLÈME. (Fig. 63). *D'un point A , on mène des sécantes à un cercle donné , et des tangentes par les points de rencontre ; on demande le lieu des rencontres deux à deux de ces tangentes.*

48° PROBLÈME. (Fig. 64). *Par un point donné A , on mène des droites à tous les points d'un cercle O , et on partage ces droites dans le rapport constant de a à b ; on demande le lieu des points de division. Soit M un point quelconque du cercle O ;*

49° PROBLÈME. (Fig. 65). *On donne une droite XY et un cercle ; on demande de mener par l'extrémité A d'un diamètre APQ perpendiculaire à XY , une sécante telle , que la partie comprise entre la droite et le cercle soit égale à une quantité donnée.*

THÉORÈME. *Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point. Car elles passent toutes les trois par le centre du cercle circonscrit.*

THÉORÈME. (Fig. 66). *Les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point. Car si par les trois sommets A , B , C ,*

THÉORÈME. *Les lignes qui divisent les trois angles d'un triangle en deux parties égales , concourent en un même point.*

THÉORÈME. *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle avec les milieux des côtés opposés , se rencontrent en un même point.*

50° PROBLÈME. (Fig. 69). Deux droites AB, AC, qui font entre elles un angle constant, passent par un point fixe A; on demande quelle ligne décrit le point B, quand le point C se meut sur une ligne donnée, droite ou courbe, et que le rapport $\frac{AB}{AC}$ reste constant.

51° PROBLÈME. Trouver un point tel, que ses distances à trois autres points A, B, C, soient dans des rapports donnés.

52° PROBLÈME. (Fig. 70). Etant donnés un cercle O et un point A, trouver le lieu des points N tels, qu'en tirant la droite AN, l'on ait

$$AM \times AN = m^2.$$

53° PROBLÈME. (Fig. 71). Par un point donné A, on tire une droite quelconque AB, terminée à une droite donnée XY; on mène AC telle, que l'angle BAC soit égal à un angle donné et que l'on ait $AB \times AC = m^2$; on demande le lieu des points C.

54° PROBLÈME. (Fig. 72). Trouver les points d'où deux cercles donnés seront vus sous le même angle.

55° PROBLÈME. Par un point A, pris dans l'intérieur d'un angle donné B (fig. 73), tirer une droite ZU telle, que la surface du triangle ZBU soit égal à m^2 .

56° PROBLÈME. (Fig. 74). Par un point M pris sur la ligne qui divise l'angle XAY en deux parties égales, tirer une droite telle, que la partie comprise dans cet angle soit un minimum, ou que le triangle qu'elle détermine soit un minimum.

58° PROBLÈME. (Fig. 76). Par deux points A, B, pris hors d'un cercle donné, mener deux sécantes qui se coupent en M sur le cercle et telles, que la corde XY soit parallèle à une ligne donnée.

59° PROBLÈME. (Fig. 77). Inscire dans un cercle donné un triangle MXY dont les côtés prolongés passent par trois points donnés A, B, C.

60° PROBLÈME. (Fig. 78). D'un point donné A, mener une sécante AMN à deux droites données BY, BX, de manière que le rectangle $AM \times AN$, soit égal à m^2 .

61° PROBLÈME. (Fig. 79). Un trapèze ABCD étant donné, mener une parallèle XY à CD, qui divise sa surface en deux parties qui soient dans le rapport connu de m à n.

62° PROBLÈME. Partager un quadrilatère quelconque ABDC en deux parties qui soient dans le rapport de m à n, par une parallèle ou par une perpendiculaire à l'un des côtés.

THÉORÈME. (Fig. 82). Si de tous les sommets d'un polygone régulier, on tire des perpendiculaires sur une droite donnée MN leur somme (en donnant le signe + à toutes les perpendiculaires situées d'un côté de la droite donnée, et le signe - à celles qui tombent de l'autre côté de cette droite), sera égal à la perpendiculaire abaissée du centre du cercle circonscrit multipliée par le nombre des côtés. En effet;

THÉORÈME. La somme des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur sur les côtés d'un polygone régulier de m côtés, est égale à m fois le rayon du cercle inscrit. Car la

63° PROBLÈME. (Fig. 83). Construire un triangle connaissant deux côtés et la longueur de la ligne qui divise leur angle en deux parties égales.

64° PROBLÈME. (Fig. 84). Construire un triangle connaissant le côté $AB = a$, l'angle B, et la somme ou la différence de deux autres côtés.

65° PROBLÈME. Construire un triangle connaissant un côté AB, un angle α et le rapport ζ des deux autres côtés.

66° PROBLÈME. Construire un triangle, connaissant son périmètre ou sa surface, et deux angles.

67° PROBLÈME. Construire un triangle, connaissant les trois hauteurs, c'est-à-dire les trois perpendiculaires abaissées des sommets des angles sur les côtés opposés.

68° PROBLÈME. (Fig. 85). Construire un triangle connaissant la base AB , l'angle γ au sommet, et la longueur d de la ligne qui divise cet angle en deux parties égales.

69° PROBLÈME. (Fig. 86). Par trois points A, B, C , donnés, faire passer les côtés d'un triangle égal à un triangle donné.

70° PROBLÈME. (Fig. 87). Etant donnés trois points A, B, C , en trouver un quatrième M , tel que les surfaces des triangles AMC, AMB, BMC , soient dans des rapports donnés.

71° PROBLÈME. (Fig. 88). Par un sommet A donné dans un angle XOY , tracer un triangle semblable à un triangle donné, et ayant ses deux autres sommets sur les côtés de l'angle.

72° PROBLÈME. (Fig. 89). Trouver le triangle maximum, connaissant un angle A de ce triangle et la demi-somme s des côtés qui comprennent l'angle A .

73° PROBLÈME. (Fig. 90). Trouver le triangle maximum, connaissant la base AB et la somme $2d$ des deux autres côtés.

74° PROBLÈME. Former un triangle maximum, avec un périmètre donné.

75° PROBLÈME. (Fig. 91). Trouver la plus petite corde que l'on puisse mener dans un cercle O , par un point intérieur donné A .

76° PROBLÈME. (Fig. 92). Faire le plus grand rectangle possible avec une somme de côtés donnée.

77° PROBLÈME. (fig. 93). Étant donnés deux points A, B , et un point quelconque M tel, que $MA \pm MB = 2a$, on tire MN parallèle à AB , et telle que MN soit à MB dans le rapport constant de m à n . On demande quel doit être ce rapport pour que les points N soient tous sur une même perpendiculaire à AB .

78° PROBLÈME. (Fig. 94). Trouver un point tel, que les sommes ou les différences de ses distances à trois points donnés, pris deux à deux, soient égales à des quantités données.

79° PROBLÈME. (Fig. 95). Étant donnés deux points A, B, et une droite ST, trouver un point tel, que les différences ou les sommes de ses distances aux points donnés et à la droite, prises deux à deux, soient égales à des lignes données.

80° PROBLÈME. (fig. 96). Trouver un point connaissant les sommes ou les différences de ses distances à un point donné A, et à deux droites données.

81° PROBLÈME. Connaissant les sommes ou les différences des distances d'un point à trois droites prises deux à deux, construire ce point.

82° PROBLÈME. (Fig. 97). Mener par un point donné A un cercle tangent à deux cercles, ou à une droite et à un cercle.

83° PROBLÈME. Mener un cercle tangent à trois cercles, ou à une droite et deux cercles.

THÉORÈME. (Fig. 99). Prouver que les trois centres de similitude de trois cercles pris deux à deux sont en ligne droite.

84° PROBLÈME. Inscire dans un triangle donné un triangle minimum semblable à un triangle donné.

85° PROBLÈME. (Fig. 100). Trois cercles quelconques étant donnés, décrire un triangle maximum circonscrit à leur système et semblable à un triangle donné.

86° PROBLÈME. Inscire dans un triangle donné trois cercles dont les rayons et les distances des centres soient dans des rapports donnés, et dont le système soit un minimum.

87° PROBLÈME. Déterminer le nombre des polygones réguliers de m côtés qu'on peut inscrire dans un cercle.

Problèmes déterminés

230. 1^{er} PROBLÈME. DÉCOMPOSER en facteurs linéaires la différence des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de deux lignes données.

2° PROBLÈME. Décomposer en facteurs linéaires, la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de deux lignes données.

3° PROBLÈME. Calculer le rayon d'un cercle tangent à trois droites données.

4^e PROBLÈME. (Fig. 124). Trouver l'expression du rayon du cercle circonscrit à un triangle ABC, dont les côtés a , b , c sont donnés.

5^e PROBLÈME. (Fig. 125). Trouver les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit ABCD, en fonction de ses côtés a , b , c , d .

6^e PROBLÈME. Étant donnés la surface et le périmètre d'un triangle rectangle, trouver ses trois côtés.

7^e PROBLÈME. Étant donnés le périmètre et la hauteur d'un triangle rectangle, calculer ses côtés.

8^e PROBLÈME. Étant donnée l'hypoténuse h d'un triangle rectangle, ainsi que la somme a des deux autres côtés x , y , et de la hauteur z , trouver les inconnues x , y , z .

9^e PROBLÈME. Connaissant la somme a des deux côtés x , y , de l'angle droit, et la longueur h de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse z , trouver les trois côtés x , y , z . On a

10^e PROBLÈME. Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme a de ces côtés, et la somme b de la hauteur et de l'hypoténuse.

11^e PROBLÈME. Étant donnés, le périmètre, l'angle A et la surface d'un triangle, déterminer ses côtés.

12^e PROBLÈME. (fig. 126). Dans un angle donné XAY, mener une droite minimum MN, telle, que le triangle AMN soit égal à une surface donnée m^2 .

13^e PROBLÈME. (Fig. 127). Étant donnés un angle OBV, et un point A sur le côté OB, inscrire dans cet angle une droite MN d'une longueur donnée, de telle sorte que l'angle MNA soit égal à OBV.

14^e PROBLÈME. (Fig. 128). Trouver les côtés x , y , z d'un triangle, sachant que ces côtés et la hauteur h du triangle forment la progression arithmétique

$$\div x \cdot y \cdot z \cdot h.$$

15° PROBLÈME. (Fig. 129). Etant données la base AB d'un triangle ABC, et une droite MN sur laquelle se trouve le sommet inconnu C; sachant de plus que la base est moyenne arithmétique entre les deux autres côtés, résoudre le triangle.

16° PROBLÈME. (Fig. 130). Etant donnés les angles, le périmètre et la surface d'un trapèze ABCD, trouver ses côtés.

17° PROBLÈME. (Fig. 131). Par un point B donné sur la ligne qui divise l'angle droit Y'AX en deux parties égales, mener une droite BMN telle, que la partie interceptée entre ces droites soit d'une longueur donnée 2a.

19° PROBLÈME. (Fig. 133). Etant donné un point lumineux A, d'où partent des rayons divergens, qui viennent frapper une surface sphérique réfringente VB, dont le centre est C, trouver le point où chaque rayon lumineux réfracté rencontre le diamètre de la sphère qui passe par le point lumineux.

Application de l'algèbre à la recherche des lieux géométriques plans

231. 1^{er} PROBLÈME. (Fig. 134). Étant donné un point A et une droite YY', trouver le lieu des points M, tel, que le rapport de leurs distances au point A et à la droite YY', soit celui de m à n.

2° PROBLÈME. D'un foyer d'une courbe du second degré, on mène un rayon quelconque à la courbe, et par son extrémité une parallèle à l'axe qui contient ce foyer, de telle sorte que le rapport de ces deux lignes variables soit constant. On demande le lieu des extrémités de la parallèle à l'axe, pour une valeur donnée du rapport, et quelle valeur il faudrait donner à ce rapport pour que le lieu fût une ligne droite.

3° PROBLÈME. Trouver le lieu des intersections de deux tangentes à une ellipse, qui se meuvent de manière à être toujours parallèles à un système de diamètres conjugués.

4° PROBLÈME. Trouver le lieu des intersections de deux tangentes à une ellipse, qui se meuvent de manière à faire constamment un angle donné, dont la tangente trigonométrique est m .

5° PROBLÈME. (Fig. 135). Par deux points donnés B, G , on mène deux droites BM, CM , telles, que l'angle MCB soit double de MBC . On demande le lieu des points M .

6° PROBLÈME. Trouver le lieu des centres des cercles tangens à deux cercles donnés.

7° PROBLÈME. (Fig. 138). Etant donné un angle YAX , on demande le lieu décrit par le centre de gravité du triangle ABC , en supposant que l'aire de ce triangle soit constante, ou que BC soit d'une longueur donnée.

8° PROBLÈME. (Fig. 139). Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point fixe A , sur une droite $BC = a$, que l'on inscrit de toutes les manières possibles entre deux droites XX', YY' , perpendiculaires entre elles.

9° PROBLÈME. (Fig. 140). D'un point donné A , on mène à une courbe du second degré deux sécantes quelconques... ABE, ACD ; on joint deux à deux les points de rencontre avec la courbe. Il s'agit de trouver le lieu des points d'intersection M et N de ces droites entre elles.

10° PROBLÈME. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur toutes les tangentes menées à une courbe donnée.

11° PROBLÈME. (Fig. 146). Soient B et C deux points donnés, et M un point quelconque d'une courbe RS donnée. On tire des droites BN, CN , respectivement perpendiculaires aux droites BM, CM , et qui se coupent en un point N . Il s'agit de trouver la courbe formée par les points N , qui correspondent aux différents points de la courbe RS .

12° PROBLÈME. (Fig. 147). On donne deux droites rectangulaires VV' , YY' , et une longueur $AD=2a$; un angle droit DEF , dont le côté EF est égal à $2a$, se meut de manière que son côté perpendiculaire à EF , passe constamment par D , et que le point F glisse sur AV . On demande le lieu décrit par le milieu M de EF .

13° PROBLÈME. (Fig. 148). Par quatre points M , N , P , Q , donnés dans un même plan, on fait passer une infinité de courbes du second degré, et dans chacune d'elles on mène le diamètre des cordes parallèles à une droite fixe ayant pour équation $y=nx$. On propose de démontrer que tous ces diamètres se coupent en un même point, et de déterminer ensuite le lieu de ces points quand n prend toutes les valeurs possibles.

14° PROBLÈME. (Fig. 149). Par un point donné B , on mène une droite quelconque qui coupe une ellipse donnée en deux points M et N ; on détermine un point P sur cette sécante, de manière que l'on ait $PM : PN :: BM : BN$. Il s'agit de trouver le lieu des points P ainsi construits.

6 Le programme du baccalauréat ès sciences en 1859

TROISIÈME SÉRIE.

MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

1. *Arithmétique.* — Définition des nombres premiers et des nombres premiers entre eux. — Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres. — Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs, et qui est premier avec l'un des facteurs, divise l'autre.

Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers. — En déduire le plus petit nombre divisible par des nombres donnés.

Fractions ordinaires. — Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre. — Réduction d'une fraction à sa plus simple expression. — Réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. Plus petit dénominateur commun.

Opérations sur les fractions ordinaires.

Géométrie. — Définition de la parabole par la propriété du foyer et de la directrice. — Tracé de la courbe par points ; par un mouvement continu. Axe. Sommet. Rayon vecteur.

La tangente fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur, menés par le point de contact.

Mener la tangente à la parabole : 1° par un point pris sur la courbe ; 2° par un point extérieur. — Normale. Sous-normale.

Le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe est proportionnel à la distance de cette corde au sommet.

2. *Arithmétique.* — Nombres décimaux. — Opérations. — Comment on obtient un produit et un quotient à une unité près d'un ordre décimal donné. — Erreurs relatives correspondantes des données et du résultat.

Réduire une fraction ordinaire en fraction décimale.

— Quand le dénominateur d'une fraction irréductible contient d'autres facteurs premiers que 2 et 5, la

fraction ne peut être convertie exactement en décimales, et le quotient qui se prolonge indéfiniment est périodique.

Étant donnée une fraction décimale périodique simple ou mixte, trouver la fraction ordinaire génératrice.

Géométrie. — Définition de l'ellipse : par la propriété des foyers. — Tracé de la courbe par points; par un mouvement continu.

Axes. — Sommets. — Rayons vecteurs.

Définition générale de la tangente à une courbe.

Les rayons vecteurs menés des foyers à un point de l'ellipse font, avec la tangente en ce point et d'un même côté de cette ligne, des angles égaux.

Mener la tangente à l'ellipse : 1° par un point pris sur la courbe; 2° par un point extérieur. — Normale à l'ellipse.

3. *Arithmétique.* — Système des mesures légales. — Mesures de longueur. — Mètre; ses divisions; ses multiples. — Rapport de l'ancienne toise de six pieds au mètre. — Convertir en mètres un nombre donné de toises.

Mesures de superficie, de volume et de capacité.

Mesures de poids. — Monnaies. — Titre et poids des monnaies de France. — Usage des tables de conversion des anciennes mesures en mesures légales.

Formation du carré et du cube de la somme de deux nombres. — Extraction de la racine carrée d'un nombre entier. — Indication sommaire de la marche à suivre pour l'extraction de la racine cubique.

Carré et cube d'une fraction. — Racine carrée d'une fraction ordinaire. — Racine carrée d'une fraction décimale à une unité près d'un ordre décimal donné.

Géométrie. — Des polyèdres. — Parallépipède. — Mesure du volume du parallépipède rectangle, du parallépipède quelconque, du prisme triangulaire, du prisme quelconque.

Pyramide. — Mesure du volume de la pyramide triangulaire, de la pyramide quelconque. — Volume du tronc de pyramide à bases parallèles. — Applications numériques.

4. *Arithmétique.* — Intérêts simples. — Formule générale qui fournit la solution de toutes les questions

relatives aux intérêts simples. — De l'escompte commercial.

Partager une somme en parties proportionnelles à des nombres donnés.

Trigonométrie rectiligne. — Notions sur la construction des tables trigonométriques.

Usage des tables.

Géométrie. — Définition et génération des angles dièdres. — Angle dièdre droit.

Angle plan correspondant à l'angle dièdre. — Le rapport de deux angles dièdres est le même que celui de leurs angles plans.

Plans perpendiculaires entre eux. — Si deux plans sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection commune est perpendiculaire à ce troisième.

Angles trièdres. — Chaque face d'un angle trièdre est plus petite que la somme des deux autres.

Si l'on prolonge les arêtes d'un angle trièdre au delà du sommet, on forme un nouvel angle trièdre qui ne peut lui être superposé, bien qu'il soit composé des mêmes éléments. (NOTA. On se bornera à cette simple notion.)

5. *Algèbre.* — Équations du premier degré. — Résolution des équations numériques du premier degré à une ou plusieurs inconnues, par la méthode dite de *substitution*.

Interprétation des valeurs négatives dans les problèmes. — Usage et calcul des quantités négatives.

Des cas d'impossibilité et d'indétermination.

Formules générales pour la résolution d'un système d'équations du premier degré à *deux* inconnues. — Discussion complète de ces formules.

Géométrie. — Polyèdres semblables¹.

En coupant une pyramide par un plan parallèle à sa base, on détermine une pyramide partielle semblable à la première. — Deux pyramides triangulaires qui ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces semblables et semblablement placées, sont sembla-

1. On appelle ainsi ceux qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune et dont les angles polyèdres homologues sont égaux.

bles. (NOTA. On se bornera à ce seul cas de similitude.)

Décomposition des polyèdres semblables en pyramides triangulaires semblables. — Rapport de leurs volumes. — Applications numériques.

6. *Algèbre*. — Équation du second degré à une inconnue. — Résolution. — Double solution. — Valeurs imaginaires.

Décomposition du trinôme $x^2 + px + q$ en facteurs du premier degré. — Relations entre les coefficients et les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$.

Des questions de maximum et de minimum qui peuvent se résoudre par les équations du second degré.

Géométrie. — Cône droit à base circulaire. — Sections parallèles à la base. — Surface latérale du cône, du tronc de cône à bases parallèles. — Volume du cône, du tronc de cône à bases parallèles¹.

Cylindre droit à base circulaire. — Mesure de la surface latérale et du volume. — Extension aux cylindres droits à base quelconque.

7. *Algèbre*. — Principales propriétés des progressions arithmétiques et des progressions géométriques.

Des logarithmes. — Chaque terme d'une progression arithmétique commençant par zéro, $0, r, 2r, 3r, 4r, \dots$, est dit le logarithme du terme qui occupe le même rang dans une progression géométrique commençant par l'unité, $1, q, q^2, q^3, q^4, \dots$.

Si l'on conçoit que l'excès de la raison q sur l'unité diminue de plus en plus, les termes de la progression géométrique croîtront par degrés aussi rapprochés qu'on voudra. Etant donné un nombre plus grand que un , il existera toujours un terme de la progression géométrique, dont la différence avec ce nombre sera moindre que toute quantité donnée.

Le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs. — Corollaires relatifs à la division, à l'élevation aux puissances, à l'extraction des racines. — Applications.

1. L'aire du cône (ou du cylindre) sera considérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend l'aire de la pyramide inscrite (ou du prisme inscrit), à mesure que ses faces diminuent indéfiniment.

Emploi de la règle à calcul, borné à la multiplication et à la division.

Géométrie. — Sphère. — Sections planes; grands cercles; petits cercles. — Pôles d'un cercle. — Étant donnée une sphère, trouver son rayon.

Plan tangent.

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre. — Aire de la zone, de la sphère entière.

Mesure du volume engendré par un triangle, tournant autour d'un axe mené dans son plan, par un de ses sommets. — Application au secteur polygonal régulier, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre. — Volume du secteur sphérique; de la sphère entière.

8. *Trigonométrie rectiligne.* — Lignes trigonométriques. (On ne considère que les rapports des lignes trigonométriques au rayon.)

Relations entre les lignes trigonométriques d'un même angle. — Expressions du sinus et du cosinus en fonction de la tangente.

Connaissant les sinus et les cosinus de deux arcs, trouver le sinus et le cosinus de leur somme et de leur différence. — Trouver la tangente de la somme ou de la différence de deux arcs, quand on connaît les tangentes de ces deux arcs.

Expressions de $\sin. 2a$, $\cos. 2a$ et $\text{tang. } 2a$. — Connaissant $\cos. a$, calculer $\sin. \frac{1}{2}a$ et $\cos. \frac{1}{2}a$.

Rendre calculable par logarithmes la somme de deux lignes trigonométriques, sinus ou cosinus.

Algèbre. — Logarithmes dont la base est 10. — Tables. — Règle des parties proportionnelles. — De la caractéristique. Changement qu'elle éprouve quand on multiplie ou quand on divise un nombre par une puissance de 10.

Usage des caractéristiques négatives.

Application des logarithmes aux questions d'intérêts composés et aux annuités.

9. *Géométrie.* — Mesure des angles. — Angles inscrits.

Usage de la règle et du compas dans les constructions sur le papier. — Vérification de la règle.

Problèmes élémentaires sur la construction des angles et des triangles.

Tracé des perpendiculaires et des parallèles. — Abréviations des constructions au moyen de l'équerre et du rapporteur. — Vérification de l'équerre.

Division d'une droite et d'un arc en deux parties égales. — Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés. — D'un point donné hors d'un cercle mener une tangente à ce cercle. — Mener une tangente commune à deux cercles. — Décrire sur une ligne donnée un segment de cercle capable d'un angle donné.

Trigonométrie rectiligne. — Résolution des triangles. — Relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectangle ou d'un triangle quelconque.

Connaissant un côté et deux angles d'un triangle quelconque, trouver les autres parties, ainsi que la surface du triangle.

Connaissant deux côtés, avec l'angle compris, trouver les autres parties, ainsi que la surface du triangle.

Connaissant les trois côtés, trouver les angles et la surface du triangle.

10. *Géométrie.* — Lignes proportionnelles¹. — Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. Réciproque. — Propriété de la bissectrice de l'angle d'un triangle.

Polygones semblables. — En coupant un triangle par une parallèle à l'un de ses côtés, on détermine un triangle partiel semblable au premier. — Conditions de similitude des triangles.

Décomposition des polygones semblables en triangles semblables. — Rapport des périmètres.

Trigonométrie rectiligne. — Application de la trigonométrie aux différentes questions que présente le levé des plans.

11. *Géométrie.* — Relations entre la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, les segments de l'hypoténuse, l'hypoténuse elle-même et les côtés de l'angle droit.

Relations entre le carré du nombre qui exprime la longueur du côté d'un triangle opposé à un angle droit, aigu ou obtus, et les carrés des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés.

1. En conservant les énoncés habituels, on devra remplacer, dans les démonstrations, l'algorithme des proportions par l'égalité des rapports.

Si d'un point pris dans le plan d'un cercle on mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la direction de la sécante. — Cas où elle devient tangente.

Diviser une droite donnée en parties égales, ou en parties proportionnelles à des lignes données. — Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes; une moyenne proportionnelle entre deux lignes.

Construire, sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné.

Mathématiques appliquées. — Tracé d'une droite sur le terrain. — Mesure d'une portion de droite au moyen de la chaîne. — Levé au mètre. — Tracé des perpendiculaires. — Usage de l'équerre d'arpenteur. — Mesure des angles au moyen du graphomètre. — Description et usage de cet instrument. — Rapporter le plan sur le papier. — Echelle de réduction.

Levé à la planchette.

Déterminer la distance à un point inaccessible; la distance entre deux points inaccessibles. — Prolonger une ligne droite au delà d'un obstacle qui arrête la vue.

Par trois points donnés, mener une circonférence, lors même qu'on ne peut approcher du centre.

Trois points, A, B, C, étant situés sur un terrain uni et rapportés sur une carte, déterminer sur cette carte le point P d'où les distances AB et AC ont été vues sous des angles qu'on a mesurés.

Notions sur l'arpentage. — Cas où le terrain serait limité dans une de ses parties par une ligne courbe.

12. *Géométrie.* — Le rapport des périmètres de deux polygones réguliers, d'un même nombre de côtés, est le même que celui des rayons des cercles circonscrits¹.

Le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.

Inscrire dans un cercle de rayon donné un carré, un hexagone régulier.

Manière d'évaluer le rapport approché de la circonférence au diamètre, en calculant les périmètres des

1. La longueur de la circonférence de cercle sera considérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, à mesure que les côtés diminuent indéfiniment.

polygones réguliers de 4, 8, 16, 32... côtés, inscrits dans un cercle de rayon donné.

Mathématiques appliquées. — Projection d'une droite. Angles formés par une droite avec les plans de projection.

Projections d'une courbe. — Exemple du cercle. — Projections d'un cube, d'une pyramide, d'un cylindre vertical ou incliné.

Ce que, dans les arts du dessin, l'on nomme *plan*, *élévation* et *coupe*.

Manière de représenter par plan, élévation et coupe, un bâtiment ou une machine simple.

13. *Géométrie.* — Mesure de l'aire du rectangle; du parallélogramme; du triangle; du trapèze; d'un polygone quelconque. — Méthodes de la décomposition en triangles et en trapèzes rectangles.

Relations entre le carré construit sur le côté d'un triangle, opposé à un angle droit ou aigu ou obtus, et les carrés construits sur les deux autres côtés.

Le rapport des aires de deux polygones semblables est le même que celui des carrés des côtés homologues.

Aire d'un polygone régulier. — Aire d'un cercle, d'un secteur et d'un segment de cercle. — Rapport des aires de deux cercles de rayons différents.

Mathématiques appliquées. — Objet du nivellement. — Description et usage du niveau d'eau. — Manière d'inscrire et de calculer les résultats des observations. Profils de nivellement.

Plan coté. — Plan de comparaison.

Représentation d'un point et d'une droite sur un plan coté.

Connaissant la cote d'un point situé sur une droite donnée, trouver la projection de ce point, et *vice versa*.

Manière de représenter les plans. — Ce qu'on nomme ligne de plus grande pente d'un plan. — Echelle de pente.

Comment on trouve l'échelle de pente d'un plan assujéti à passer par trois points donnés par leur projection et leur cote.

Sur un plan coté, tracer un chemin, une rigole d'irrigation.

7 Les énoncés de problèmes du *Théorèmes et problèmes de géométrie* de Reynaud (1833)

PREMIÈRE PARTIE.

Théorèmes et Problèmes relatifs à des points et à des lignes situés dans un même plan.

§ I^{er}. THÉORÈMES.

1. THÉORÈME (fig. 1). LORSQUE dans un triangle ABC on mène une droite CE, du sommet C de l'un des angles, au milieu E du côté opposé, on a

$$(1) \dots \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 2(\overline{CE}^2 + \overline{AE}^2).$$

2. THÉORÈME (fig. 2). Les trois droites qui divisent les angles d'un triangle ABC en deux parties égales, se rencontrent au même point.

3. THÉORÈME (fig. 3). Les trois perpendiculaires menées des sommets des angles d'un triangle ABC sur les côtés opposés, se rencontrent au même point.

4. THÉORÈME (fig. 4). Les trois perpendiculaires menées sur les milieux des côtés d'un triangle ABC, se rencontrent au même point.

5. THÉORÈME (fig. 5). Les trois droites menées des sommets des angles d'un triangle sur les milieux des côtés opposés, se coupent au même point.

6. THÉORÈME (fig. 6). Si d'un point O pris dans l'intérieur du triangle ABC, on mène les perpendiculaires OA', OB', OC', sur les côtés BC, AC, AB, on aura

$$(1) \dots \overline{AC'}^2 + \overline{BA'}^2 + \overline{CB'}^2 = \overline{C'B}^2 + \overline{A'C}^2 + \overline{B'A}^2.$$

7. THÉORÈME (fig. 7). Un point O étant pris dans l'intérieur du triangle ABC, si l'on mène les droites AO, BO, CO, et qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent les côtés du triangle en A', B', C', on aura

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A.$$

8. THÉORÈME (fig. 7). Un point O étant pris dans l'intérieur

d'un triangle ABC, si l'on mène les droites AO, BO, CO, et qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent les côtés du triangle en A', B', C', on aura

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

9. THÉORÈME (fig. 8). De tous les triangles formés avec un angle donné, compris entre deux côtés variables dont la somme est donnée, le plus grand en surface est celui dans lequel ces deux côtés sont égaux.

10. THÉORÈME (fig. 9). Parmi tous les triangles qui, ayant leurs sommets sur l'arc AMB, ont le côté commun AB, le triangle isocèle est celui dans lequel les deux autres côtés forment la plus grande somme.

11. THÉORÈME (fig. 10). Parmi tous les triangles de même base AB, et dont les sommets sont sur une même droite GH, le triangle dont le périmètre est un minimum, est celui dans lequel les deux autres côtés forment des angles égaux avec GH.

12. THÉORÈME (fig. 10). De tous les triangles de même base et de même périmètre, le triangle qui a la plus grande surface est celui dans lequel les deux côtés variables sont égaux.

13. THÉORÈME (fig. 10). Parmi tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est celui dont la surface est la plus grande.

14. THÉORÈME (fig. 11). Lorsque deux circonférences ABDF, ABGE, se coupent en A et B, il en résulte les propriétés suivantes : 1°. la droite CC', menée par les centres C, C', est perpendiculaire sur le milieu m de AB ; 2°. la droite DE, qui joint les extrémités D, E, des diamètres AD, AE, est perpendiculaire sur AB ; 3°. DE passe par le point B ; 4°. DE est la plus grande des droites menées par le point B, et terminées aux circonférences données.

15. THÉORÈME (fig. 12). Selon que deux cercles se touchent extérieurement ou intérieurement, la distance OO' des centres O, O', est égale à la somme ou à la différence des rayons.

16. THÉORÈME (fig. 13). Lorsque deux cercles se coupent, la distance OO' des centres est plus petite que la somme des rayons OA, O'A, et plus grande que leur différence.

17. THÉORÈME (fig. 14 et 15). Lorsque deux cercles ne se rencontrent pas, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, ou plus petite que leur différence.

18. THÉORÈME (fig. 16). Lorsque deux circonférences CS, OA se coupent en deux points A, B, si la seconde passe par le centre C de la première, et si par le point A on mène une sécante AN commune aux deux cercles, qui rencontre la circonférence OA, en D, la corde DB sera égale à DM.

19. THÉORÈME (fig. 17). Si deux cercles se touchent extérieurement ou intérieurement en un point M, et que par ce point on mène deux sécantes quelconques AB, CD, on aura

(1)... MA : MB :: MC : MD, ou (2)... MA : MB' :: MC : MD'.

20. THÉORÈME (fig. 17). Lorsque deux cercles OM, O'M, se touchent extérieurement en M, si par deux points A, C, pris sur une des circonférences, on mène des tangentes AT, CT', à l'autre circonférence, et si l'on tire les cordes AM, CM, on aura

(5)... AT : CT' :: AM : CM.

21. THÉORÈME (fig. 18). Le carré du côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle, égale le carré du rayon, plus le carré du côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle.

22. THÉORÈME. (fig. 19). Lorsque d'un point quelconque, situé dans l'angle formé par deux côtés contigus d'un parallélogramme, on tire des perpendiculaires sur la diagonale et sur les côtés contigus, le produit de la diagonale par la perpendiculaire menée sur sa direction, est égal à la différence des produits des deux côtés du parallélogramme, par les perpendiculaires menées sur ces côtés. Si le point était hors de l'angle formé par les deux côtés du parallélogramme, le premier produit serait égal à la somme des deux autres.

23. THÉORÈME (fig. 20). La somme des carrés des quatre côtés d'un parallélogramme ABCD, est égale à la somme des carrés des deux diagonales.

24. THÉORÈME (fig. 21). Si l'on divise proportionnellement les côtés opposés d'un quadrilatère ABCD, de sorte qu'on ait

$$(1) \dots DG : GC :: AH : HB, AE : ED :: BF : FC,$$

les droites GH, EF, se couperont en un point O, et l'on aura

$$(2) \dots EO : OF :: AH : HB, HO : OG :: BF : FC.$$

25. THÉORÈME (fig. 22). Dans tout quadrilatère, la droite qui joint les milieux des deux diagonales, et les deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés, se coupent en un même point qui est le milieu de ces trois lignes.

26. THÉORÈME (fig. 22). Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des deux diagonales est double de la somme des carrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

27. THÉORÈME (fig. 23). Lorsqu'un quadrilatère est inscrit dans un cercle, le rectangle des deux diagonales est égal à la somme des deux rectangles des côtés opposés.

28. THÉORÈME (fig. 24). Tout quadrilatère dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés, est circonscriptible au cercle.

29. THÉORÈME (fig. 25, 1°). Soit ABCD un quadrilatère ; si l'on décrit quatre cercles, de manière que chacun d'eux soit tangent intérieurement à trois côtés du quadrilatère, les centres de ces quatre cercles seront sur une même circonférence.

§ II. Construction de Lignes proportionnelles et de Rectangles.

30. PROBLÈME (fig. 26). Construire une quatrième proportionnelle géométrique à trois lignes données, a, b, c .

31. PROBLÈME (fig. 27). Construire une moyenne proportionnelle géométrique entre deux lignes données, a, b .

32. PROBLÈME (fig. 28). Connaissant la différence d de la diagonale au côté d'un carré, construire ce carré.

33. PROBLÈME (fig. 29). Construire un carré qui soit équivalent à n fois un carré donné a^2 .

34. PROBLÈME (fig. 30). Construire un rectangle dont la surface soit équivalente à un carré donné c^2 , et tel, que la somme ou la différence de deux côtés adjacens soit égale à une ligne connue a .

35. PROBLÈME (fig. 31). Trois droites MN, PQ, RS, se coupant deux à deux en A, B, C, construire un carré qui ait deux sommets sur MN, et dont les deux autres sommets soient respectivement sur PQ et RS.

§ III. Constructions de droites assujéties à des conditions données.

36. PROBLÈME. Mener une tangente commune à deux cercles.

37. PROBLÈME (fig. 34). Sur une droite MN, mener une perpendiculaire SS' telle, que la différence des carrés des distances de l'un de ses points aux extrémités M et N, soit égale à un carré connu d^2 .

38. PROBLÈME (fig. 35). Connaissant deux points A, B, et une droite GH, tirer deux droites AC, BC, qui se coupent sur GH, de manière que l'angle $ACG = BCH$.

39. PROBLÈME (fig. 35). Étant donnés deux points B, N, dans un angle connu HMT, mener par ces points des lignes BC, NQ, telles, qu'en tirant la droite CQ, les angles BCH, QCM, soient égaux entre eux, ainsi que les angles CQM, NQT.

40. PROBLÈME (fig. 36). Par un point M, donné hors de l'angle connu BAC, mener une droite MN, de manière que les parties MN, MP, soient entre elles dans le rapport de deux lignes données, m, n .

41. PROBLÈME (fig. 37). Par un point M, pris hors de l'angle BAC, mener une droite MN telle, que le rectangle $MN \times MP$ des parties MN, MP, soit équivalent au carré donné d^2 .

42. PROBLÈME (fig. 38). Dans un angle connu HBK, inscrire une droite PQ égale à une ligne donnée a , de manière que l'angle PQB soit égal à un angle donné δ .

43. PROBLÈME (fig. 39). Par un point M , pris sur la droite AR qui divise l'angle BAC en deux parties égales, mener une droite de manière que la partie de cette droite comprise dans l'angle donné BAC soit la plus petite possible.

44. PROBLÈME (fig. 39). Par un point M , pris sur la droite AR qui divise l'angle BAC en deux parties égales, mener une droite Sx de manière que la partie NP comprise dans l'angle BAC soit égale à une ligne donnée δ .

45. PROBLÈME (fig. 42). Par un point donné M , mener une droite telle, que la partie de cette droite comprise entre deux parallèles connues CB , PQ , soit égale à une ligne donnée δ .

46. PROBLÈME (fig. 43). Par un point M , pris dans l'angle BAC , mener une sécante ST telle, que la somme des segmens AF , AG , soit égale à une ligne donnée δ .

47. PROBLÈME (fig. 43). Par un point M , pris dans l'angle BAC , mener une sécante ST telle, que la différence $AF - AG$ des segmens AF , AG , soit égale à une ligne connue δ .

48. PROBLÈME (fig. 44). Par le sommet A d'un angle donné BAC , tirer une droite AD telle, qu'en menant par l'un quelconque de ses points des droites MP , MQ , formant des angles connus α , β , avec les côtés AC , AB , ces droites soient dans le rapport constant de deux lignes connues, γ , δ .

49. PROBLÈME (fig. 17). Par un point M , pris sur la circonférence $MB'D'$, mener une droite MSV d'une grandeur et d'une position telles, que les parties SM , SV , soient dans le rapport connu de α à β , et que le rectangle $SM \times SV$ de ces mêmes parties soit équivalent au carré donné δ^2 .

50. PROBLÈME (fig. 45). Par un point D , donné dans un cercle OS , mener la plus petite corde possible.

51. PROBLÈME (fig. 45). Par un point P , pris hors du cercle OS , mener une sécante de manière que la partie interceptée

52. PROBLÈME (fig. 45). Par un point P , donné hors d'un cercle OS , mener une sécante PC qui soit coupée par la circonférence OS en moyenne et extrême raison.

53. PROBLÈME (fig. 46 et 47). Par un point M , donné hors d'un cercle CA , mener une sécante MN , telle que la partie PN , interceptée dans le cercle, soit à la partie extérieure PM , dans le rapport de deux lignes connues, α , ζ .

54. PROBLÈME (fig. 48). Connaissant un cercle DA , la sécante indéfinie FB , et un point M de FB , mener une sécante NH telle, que la partie GH comprise dans le cercle soit égale à une ligne donnée δ , et que $NH = NM$.

55. PROBLÈME (fig. 49). Par un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle, que la différence des cordes qui en résultent dans les deux cercles soit égale à une ligne donnée δ .

56. PROBLÈME (fig. 49). Par un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle, que la somme des cordes qui en résultent dans les deux cercles soit égale à une ligne donnée δ .

57. PROBLÈME (fig. 50). Étant données deux circonférences concentriques, OA , OC , le diamètre AB et un angle α , mener une sécante MN qui fasse avec AB l'angle $OMN = \alpha$, et dont les parties MR , MN , comprises entre le diamètre AB et les circonférences, soient dans le rapport de deux lignes données, ζ , γ .

58. PROBLÈME (fig. 51). Dans un triangle ABC , mener une droite MN qui coupe deux côtés AB , AC , et le prolongement CE du troisième côté, de manière que les parties DM , DN , soient égales à deux lignes données α , ζ .

§ IV. Constructions de circonférences qui satisfassent à des conditions données.

59. PROBLÈME (fig. 17). On propose de décrire une circonférence $MB'D'$, qui touche une circonférence donnée MAC , en un point donné M , de manière qu'en menant par ce point une sécante quelconque MA , les cordes MA , MB' , soient dans le rapport de deux lignes connues, α , ζ .

60. PROBLÈME (fig. 17). Décrire une circonférence MCA qui touche le cercle $MD'F'B'$ au point donné M , de manière qu'en menant par ce point une sécante quelconque MA , les parties MB' , $B'A$, soient dans le rapport des lignes données α' , ζ' .

61. PROBLÈME (fig. 52). Par un point donné M , faire passer une circonférence tangente à deux droites données, AB , AC .

62. PROBLÈME (fig. 53). Décrire un cercle qui soit tangent à une droite donnée AB , et qui passe par deux points donnés M , N .

63. PROBLÈME (fig. 54). Connaissant une droite AB et un cercle OR , décrire une circonférence qui touche AB en un point donné M , et qui soit tangente au cercle donné.

64. PROBLÈME (fig. 55). Deux cercles concentriques CF , CG , étant donnés, décrire une circonférence OM qui soit telle, que, si aux points M et N , où elle rencontre les circonférences données, on mène des tangentes MP , MQ , NT , NR , aux trois circonférences, les angles PMQ , RNT , soient égaux à des angles connus α , ζ .

65. PROBLÈME (fig. 56). Décrire une circonférence telle, que les distances de l'un quelconque de ses points, aux extrémités A et B d'une droite AB , soient dans le rapport de deux lignes connues, α , ζ .

§ V. Constructions de points qui satisfassent à des conditions données.

66. PROBLÈME (fig. 57). Trouver un point X tel que la somme des quarrés de ses distances à deux points donnés A , B , soit égale à un quarré donné δ^2 .

67. PROBLÈME (fig. 58). Une circonférence CP et une sécante SS' étant données, trouver sur SS' un point M tel, que la tangente MT , au cercle CP , soit égale à une ligne connue δ .

68. PROBLÈME (fig. 59). Étant donné un arc ACB , et sa corde AB , trouver sur cet arc un point D tel, que le rectangle des droites DA , DB , soit égal à un quarré donné δ^2 .

70. PROBLÈME (fig. 11). Connaissant les grandeurs et les positions de deux droites qui se coupent, construire un point tel, que les trois droites menées de ce point aux extrémités des lignes données forment deux angles connus α , ζ .

71. PROBLÈME (fig. 56). Sur une droite donnée DE , trouver un point dont les distances à deux points connus A , B , soient proportionnelles à deux lignes connues α , ζ .

72. PROBLÈME (fig. 60). Trouver un point tel, que les droites menées de ce point aux sommets des angles d'un triangle donné, soient proportionnelles aux lignes données, α , β , γ .

73. PROBLÈME (fig. 61). Dans l'intérieur d'un triangle ABC, trouver un point tel, que les perpendiculaires menées de ce point sur les trois côtés du triangle soient proportionnelles aux lignes données α , β , γ .

74. PROBLÈME (fig. 61). Dans l'intérieur d'un triangle donné, trouver un point tel, qu'en menant des droites de ce point aux trois sommets du triangle, les surfaces des trois triangles partiels qui en résultent soient proportionnelles aux lignes données α' , β' , γ' .

§ VI. Constructions de Triangles.

75. PROBLÈME (fig. 62). Construire un triangle, connaissant deux de ses côtés, a , b , et la longueur d de la droite qui divise en deux parties égales l'angle compris par les côtés, a , b .

76. PROBLÈME (fig. 62). Construire un triangle, connaissant deux de ses côtés, a , b , et la longueur, d , de la droite qui, partant du sommet de l'angle compris par ces côtés, divise le troisième côté en parties proportionnelles à deux lignes données α , β .

77. PROBLÈME (fig. 63). Construire un triangle, connaissant un angle γ , un côté adjacent, a , et la somme S des deux autres côtés.

78. PROBLÈME (fig. 63). Construire un triangle, connaissant un angle γ , un côté adjacent, a , et la différence d des deux autres côtés.

79. PROBLÈME (fig. 64). Construire un triangle, connaissant sa base AB, ainsi que la somme S^2 et la différence d^2 des carrés des deux autres côtés.

80. PROBLÈME (fig. 65). Construire un triangle, connaissant sa base c , l'angle γ du sommet, et la hauteur h .

81. PROBLÈME. Construire un triangle, connaissant sa base c , sa surface d^2 , et l'angle γ du sommet.

82. PROBLÈME (fig. 66). Construire un triangle, connaissant sa surface δ^2 , un angle BAC, et le point M par lequel doit passer le côté NO opposé à l'angle donné BAC.

83. PROBLÈME (fig. 67). Étant donné un point M dans l'angle BAC, trouver, sur les côtés de cet angle, deux points N et P tels, que le triangle NMP soit semblable à un triangle donné EDF.

84. PROBLÈME (fig. 68). Construire un triangle rectangle, connaissant la longueur a de la perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, et la différence δ des deux côtés de l'angle droit.

85. PROBLÈME (fig. 69). Construire un triangle, connaissant son périmètre $2p$, et deux de ses angles α, ζ .

86. PROBLÈME (fig. 70). Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs α, ζ, γ , des trois perpendiculaires AD, BE, CF, menées des sommets sur les côtés opposés.

87. PROBLÈME (fig. 70). Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs des perpendiculaires AD, BE, menées des sommets A, B, sur les côtés opposés CB, CA. La droite AD est donnée de position, et l'on connaît le point O de AD par où passe BE.

88. PROBLÈME (fig. 70). Construire un triangle ABC, connaissant l'angle $\text{ACB} = \gamma$, et les longueurs des perpendiculaires BE, AD, menées des sommets B, A, sur les côtés opposés CA, CB.

89. PROBLÈME (fig. 71). Construire un triangle rectangle équivalent au trapèze ABCD, et qui ait un des côtés de l'angle droit égal à l'un des côtés parallèles AB, DC, de ce trapèze.

90. PROBLÈME (fig. 72). Le sommet M d'un triangle isocèle est donné; on sait que les extrémités N, L, de la base de ce triangle sont placées sur deux parallèles connues AB, CD, et la base du triangle doit faire un angle donné α avec ces parallèles. On propose de construire ce triangle.

91. PROBLÈME (fig. 73). Construire un triangle, connaissant sa base AB, et l'angle γ du sommet; on sait de plus que les deux autres côtés sont dans le rapport de deux lignes données, α, ζ .

92. La solution du problème du n° 63 (page 39), conduit très simplement à une autre manière de déterminer le triangle demandé.

93. PROBLÈME (fig. 56). *Construire un triangle, connaissant sa base AB; on sait que ses deux autres côtés sont dans le rapport des lignes données, α , β , et que son sommet est sur la droite DE.*

94. PROBLÈME (fig. 74). *Construire un triangle, connaissant un angle β , la somme S des côtés qui comprennent cet angle, et la longueur d de la perpendiculaire menée du sommet de l'angle connu sur le côté opposé.*

95. PROBLÈME (fig. 75). *Construire un triangle, connaissant un côté α , un des angles adjacents γ , et la perpendiculaire d menée du sommet de cet angle sur le côté opposé.*

96. PROBLÈME (fig. 76). *Construire un triangle, connaissant sa surface $m \times n$, et deux de ses angles α , γ .*

97. PROBLÈME (fig. 77). *Étant données deux circonférences concentriques OA', OC', construire un triangle A'B'C', qui ait deux sommets A', B', sur la grande circonférence, le troisième sommet C' sur la petite circonférence, et qui soit semblable au triangle donné ABC.*

98. PROBLÈME (fig. 78). *Construire un triangle, connaissant un angle γ , le rayon R du cercle circonscrit à ce triangle, et le rayon r du cercle inscrit.*

99. PROBLÈME (fig. 78). *Construire un triangle, connaissant un côté c, le rayon R du cercle circonscrit, et la distance d des centres des cercles inscrit et circonscrit.*

100. PROBLÈME (fig. 79). *Construire un triangle rectangle tel, que la somme des deux côtés de l'angle droit soit égale à la ligne donnée S, et que le rapport des carrés de ces mêmes côtés soit égal à celui des lignes connues, α , β .*

101. PROBLÈME (fig. 80). *Construire un triangle, connaissant un côté, c, et les longueurs α , β , des droites menées des sommets des angles adjacents aux milieux des côtés opposés.*

102. PROBLÈME (fig. 81). *Construire un triangle, connaissant les longueurs α , β , γ , des trois droites menées des sommets des angles aux milieux des côtés opposés.*

103. PROBLÈME (fig. 82). Par trois points donnés B, R, Q, mener des droites MN, PN, PM, qui forment un triangle MNP égal à un triangle donné DEF.

104. PROBLÈME (fig. 83). Circonscrire au triangle donné BST, le plus grand triangle équilatéral possible.

105. PROBLÈME (fig. 84). Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle, connaissant la somme S de la base et de la hauteur de ce triangle.

§ VII. Des Lieux géométriques.

106. PROBLÈME (fig. 85). Soit $XX'X''$ un cercle donné, O son centre, et P un point donné dans le plan du cercle; on tire des droites PX, PX', PX'', etc., du point fixe P aux différens points X, X', X'', etc., de la circonférence OA; sur les prolongemens de ces droites, on prend des parties PY, PY', PY'', etc., telles qu'on ait constamment

$$a : b :: PX : PY :: PX' : PY' :: PX'' : PY'' :: \text{etc.}$$

(a et b désignent des lignes données). Il s'agit de trouver le lieu géométrique des points Y, Y', Y'', etc., ainsi déterminés.

107. PROBLÈME (fig. 86). On donne de position un point P, et une droite AB; on tire une droite PX, du point P à un point quelconque X de AB, et l'on mène une droite PK qui forme avec PX l'angle donné γ ; on prend sur PK une partie PY telle, que PX soit à PY dans le rapport de deux lignes données, a, b. Il s'agit de trouver le lieu géométrique de l'extrémité Y de la droite PY.

108. PROBLÈME (fig. 87). On donne de position un point P et une droite AB; on mène une droite PX, du point P à un point quelconque X de AB; et l'on détermine sur PX un point Y tel, que le rectangle $PX \times PY$ soit égal à un quarré donné a^2 . On demande le lieu géométrique des points Y.

109. PROBLÈME (fig. 87). On donne un point P sur une circonférence PYD connue, de grandeur et de position; on mène par le point P une corde quelconque PY, que l'on prolonge d'une longueur YX telle, que $PX \times PY$ soit égal à un quarré donné a^2 . Trouver le lieu géométrique des points X.

110. PROBLÈME (fig. 88). On donne un point P et un cercle OA. On joint le point fixe P avec un point quelconque X de la circonférence OA, et l'on tire une droite PM qui forme avec PX un angle constant γ . On prend sur PM une partie PX' telle, que les longueurs PX, PX', soient dans le rapport de deux lignes données, a, b. Il s'agit de trouver le lieu géométrique des points X' ainsi déterminés.

111. PROBLÈME (fig. 89). On donne, de grandeur et de position, le cercle OX et la droite AB. Par un point quelconque X de la circonférence, on tire une droite XY parallèle et égale à AB. Il s'agit de trouver le lieu géométrique des points Y.

112. PROBLÈME (fig. 90). Deux droites indéfinies BB', CC', étant données de position, trouver le lieu géométrique des points X tels qu'en menant des droites XP, XQ, qui forment avec BB' et CC' des angles donnés α, β , les longueurs XP, XQ, soient dans le rapport constant de deux lignes connues, a, b.

113. PROBLÈME (fig. 93). Deux droites indéfinies AA', BB', étant données de position, déterminer le lieu géométrique des points X tels qu'en menant les perpendiculaires XP, XQ, aux droites AA', BB', la somme des produits de ces perpendiculaires par les lignes connues, a, b, soit égale à un carré donné δ^2 .

114. PROBLÈME (fig. 94). Deux points A, B, étant donnés sur une droite indéfinie HH', trouver le lieu géométrique des points X tels que la différence $\overline{XA}^2 - \overline{XB}^2$, soit égale à un carré donné δ^2 .

115. PROBLÈME (fig. 95). Deux points A, B, étant donnés, déterminer le lieu géométrique des points X tels, que la somme $\overline{AX}^2 + \overline{BX}^2$ soit égale à un carré donné δ^2 .

116. PROBLÈME (fig. 96). Deux points A, B, étant donnés, trouver le lieu géométrique des points X tels, que les distances XA, XB, soient constamment dans le rapport des lignes données, a, b.

8 Les annales de concours dans les *Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions* de Rémond (1887)

ÉNONCÉS.

I. — École Polytechnique.

1842. — 1° Étant donné un triangle ABC et deux points P et Q sur la base AB, on mène, par ces deux points, deux droites rencontrant respectivement les côtés CA, CB en deux points a, b , variables de telle manière qu'on ait la relation

$$p \frac{Ca}{Aa} + q \frac{Cb}{Bb} = 1,$$

p et q étant des constantes : trouver le lieu géométrique du point de rencontre des droites Pa, Qb.

2° Par un point fixe O, pris dans le plan d'une ellipse, on mène arbitrairement une sécante Omm' et un diamètre aa' parallèle à cette sécante; puis on prend sur la sécante un point M tel que $OM = \frac{aa'^2}{mm'}$, mm' étant le segment déterminé par l'ellipse sur la sécante mobile : on demande le lieu géométrique des points M.

1849. — LYON. Lieu des projections du sommet d'une parabole sur ses tangentes; trouver ses asymptotes.

DOUAI. Conditions de similitude de deux courbes en général; théorie des levers des plans par la Géométrie et la Trigonométrie.

Lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote commune et une directrice commune.

STRASBOURG. 1° Construction des racines des équations des deuxième, troisième et quatrième degrés en les ramenant à la construction d'un cercle et d'une courbe du deuxième degré. — 2° Soient un angle

ABC; A, C deux points pris sur ses côtés; par son sommet B, on mène une droite quelconque By; des points A et C on abaisse sur cette droite les perpendiculaires AD, CE. Trouver le lieu du point O, milieu du segment DE de By compris entre les pieds des perpendiculaires

1851. — PARIS. *Première série.* Exposer la méthode de Newton pour calculer approximativement les racines des équations numériques.

Calculer la plus grande racine de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

à 0,001 près.

Deuxième série. Démontrer que lorsqu'on substitue une suite de nombres équidistants dans une fonction entière de degré m et qu'on forme les différences des divers ordres, entre les résultats, les différences de l'ordre m sont égales.

Décomposer en fractions simples l'expression

$$\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2(x + 1)}$$

Troisième série. Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction? Trouver les dérivées de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\log \cos x$.

Quatrième série. Exposer la multiplication des polynômes.

Résoudre l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

1852. — *Première et deuxième séries.* Résoudre et discuter l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Donner à moins de $\frac{1}{1000}$ les valeurs numériques des racines de l'équation

$$\frac{1}{1225}x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Troisième et quatrième séries. Exposer la théorie des racines égales et l'appliquer à l'équation

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0,$$

en indiquant les simplifications qu'on peut, dans cet exemple, apporter aux calculs.

Cinquième et sixième séries. Exposer la méthode de la résolution des équations numériques du premier degré à deux inconnues et la discussion des formules.

1853. — *Première série.* Faire connaître une méthode pour calculer les valeurs approchées des racines incommensurables d'une équation algébrique.

On indiquera l'usage des constructions graphiques pour l'application de la méthode.

Deuxième série. Construire la courbe $y = \frac{F'(x)}{F(x)} \cdot F(x)$ est un polynôme du quatrième degré dont les racines sont réelles et inégales : $F'(x)$ sa dérivée.

Déterminer les asymptotes de la courbe et la tangente en un de ses points.

Troisième série. Exposer la théorie des triangles sphériques et des petits cercles considérés sur la sphère.

Mettre particulièrement en évidence, dans cet exposé, les théorèmes analogues à ceux qui concernent les triangles rectilignes et le cercle en Géométrie plane.

1854. — *Première et deuxième séries.* Exposer la méthode de Newton pour le calcul des racines d'une équation numérique. On donnera l'interprétation géométrique de cette méthode.

Appliquer à l'équation

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Troisième et quatrième séries. Exposer les considérations géométriques sur lesquelles repose la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues.

Appliquer à

$$\begin{cases} y^2 - 3xy + 2x^2 - 6x = 0, \\ y^2 + 2y - 2x^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

On fera voir géométriquement pourquoi ces deux équations n'admettent ici que trois solutions communes.

1855. — *Première série.* On donne l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3,$$

trouver les droites situées sur cette surface, l'intersection des plans passant par ces droites avec la surface.

Deuxième série. $x = \operatorname{tang} x$. Démontrer que cette équation a une infinité de racines. Calculer la plus petite racine positive à $\frac{1}{10000}$ près.

Troisième série. Trouver avec la précision que comportent les Tables de logarithmes les quatre points d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole qui ont un foyer commun F et dont les centres sont respectivement O, O'. On donne l'angle $\text{OFO}' = d$; les deux demi-axes a, b de l'ellipse; a' et b' de l'hyperbole. Faire le calcul dans le cas où

$$d = 22^{\circ}30', \quad a = 10, \quad b = 7, \quad a' = 1, \quad b' = 1.$$

1856 (1). — Discuter l'équation

$$\rho^2 = A + B \sin \omega + C \sin^2 \omega$$

et faire la classification des courbes qu'elle peut représenter quand on considère ρ et ω comme des coordonnées polaires.

1857. — Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = A \sin x + B$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B et effectuer la séparation de toutes ces racines.

Application à l'équation

$$x = 3,142 \sin x + 1,57$$

(Solution par M. DUPAIN. — *Nouvelles Annales*; 1^{re} Série, t. XVI, p. 376.)

1858. — x, y, z désignant des coordonnées rectangulaires et m un paramètre variable, on demande de déterminer les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz) = 2m^2 - 3m + 1,$$

m variant de $-\infty$ à $+\infty$.

(Solution par M. BRAULT. — *Nouvelles Annales*; 1^{re} Série, t. XVIII, p. 220.)

1859. — La corde AB du cercle O partage la surface de ce cercle en deux segments, tels que le plus grand est moyen proportionnel entre le plus petit et le cercle entier.

(1) A partir de 1856, il n'y a qu'une seule composition pour tous les candidats. Quelques-uns d'entre eux ne pouvant pas prendre part à la composition générale concourent plus tard. Le sujet ainsi donné est intitulé dans ce qui suit *Deuxième sujet*.

On demande de calculer, à $\frac{1}{10}$ de seconde près, le plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde AB.

1860. — Étant donnée la parabole CAB, la sécante MAB se meut sous la condition que les normales menées à la parabole par les points d'intersection A et B se coupent en un point C de cette courbe. Par ce point C on mène la tangente CM qui coupe la sécante MAB en un point M.

Cela posé, on demande de trouver l'équation de la courbe décrite par le point M, quand la sécante MAB prend toutes les positions compatibles avec la condition à laquelle elle est assujettie; on construira cette courbe qui est du troisième degré.

1861. — Reconnaître les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1$$

et démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une surface de révolution est

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0,$$

en supposant les axes de coordonnées rectangulaires.

(Solution par M. DARBOUX. — *Nouvelles Annales*; 1^{re} Série, t. XX, p. 384.)

1862. — Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by - 2cz = 0$$

(a, b, c étant des nombres positifs donnés, p et q des paramètres variables) : 1^o lorsque p et q varient de toutes les manières possibles; 2^o lorsque p et q varient de manière à ce que l'équation représente un cône.

Distinguer la partie du lieu qui correspond à des hyperboloïdes à une nappe de celle qui correspond à des hyperboloïdes à deux nappes.

(Solution par M. DE LYS. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. II, p. 5.)

1863. — *Premier sujet.* On donne sur un plan deux circonférences C et C'; d'un point A de C, on mène des tangentes à C', on joint les points de contact de ces tangentes; cette droite coupe la tan-

gente menée en A à la circonférence C en un point M : on demande l'équation du lieu décrit par M, lorsque A parcourt la circonférence C.

Examiner les différentes formes de ce lieu selon la grandeur et la position relative des circonférences C et C'.

Indiquer les cas où il se décompose : faire voir que le lieu des points M est tangent à la circonférence C en chacun des points d'intersection de cette courbe et de la circonférence C'.

(Solution par M. LEMONNIER. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. II, p. 460.)

Deuxième sujet. On donne sur un plan une courbe de deuxième degré σ , et une circonférence décrite de l'un de ses foyers F comme centre; en chaque point M de la conique σ , on trace la normale à cette courbe; on mène des tangentes au cercle F par les deux points où cette normale le rencontre; ces deux tangentes se coupent en un point T.

On demande le lieu que décrit le point T, lorsque le point M parcourt la courbe σ .

Examiner les différentes formes de ce lieu selon le genre de la conique σ et la grandeur du rayon de la circonférence donnée.

1864. — *Premier sujet.* On donne le cercle représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

et la parabole représentée par l'équation

$$\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2 y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = \frac{3\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2}$$

où α et β sont des paramètres positifs quelconques.

On propose de déterminer : 1^o le nombre des points réels communs aux deux courbes pour les différentes valeurs de α et de β ; 2^o les coordonnées des quatre points communs lorsque $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, lorsque $\alpha = 1$ avec $\beta > 0$, lorsque $\beta = \sqrt{(x^2 - 1)(4x^2 - 1)}$.

Deuxième sujet. On donne sur un plan une circonférence O, un point A et une droite D; du point A on mène une droite qui coupe D au point B; sur AB comme diamètre on décrit une circonférence; cette circonférence et la circonférence O ont pour corde commune une droite qui rencontre AB en M. On demande le lieu décrit par le point M lorsque la droite AB tourne autour du point A.

1^o Le point A et la circonférence O étant fixes, examiner quelles

sont les différentes formes que présente le lieu M lorsque l'on considère des droites telles que D parallèles entre elles.

2° Faire voir que les différentes courbes ainsi obtenues passent par quatre points fixes et ont leurs axes parallèles.

(Solution par M. CAYLA. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. V, p. 474.)

1865. — On donne dans un plan une parabole. On considère une circonférence passant par le foyer de cette parabole. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre de la circonférence pour que cette courbe ait successivement avec la parabole : quatre points réels communs, quatre points imaginaires communs, deux points réels et deux points imaginaires communs. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare les deux premières régions de la troisième.

(Solution par M. MOESSARD. — *Nouvelles Annales*; 2^e série, t. V, p. 21.)

1866. — Étant données une parabole

$$y^2 = 2px$$

et une hyperbole équilatère

$$xy = m^2$$

ayant pour asymptotes l'axe et la tangente au sommet de la parabole, on propose :

1° De former l'équation ayant pour racines les abscisses ou les ordonnées des pieds des normales communes aux deux courbes;

2° De déduire de cette équation que le nombre des normales communes réelles est au moins *un* et au plus *trois*;

3° De démontrer que lorsque $7p^3$ est plus grand que $2m^3$, il n'y a qu'une normale commune réelle.

(Solution par M. CHIRON, suivie d'une note de M. GÉRONO. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. VI, p. 252.)

1867. — Étant donné un triangle BOA rectangle en O, et une droite D située sur le plan de ce triangle, on propose :

1° De former l'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle BOA;

2° De calculer l'équation du lieu L des points où ces différentes hyperboles ont pour tangentes des parallèles à D;

3° D'examiner les différentes formes du lieu L correspondantes aux différentes directions de la droite D.

1868. — Soient deux paraboles P_1, P_2 ayant toutes deux pour

foyer le point fixe O , et pour axes respectifs les deux droites fixes Ox , Oy perpendiculaires l'une sur l'autre : menant à ces deux courbes une tangente commune qui touche P_1 en M_1 et P_2 en M_2 ; prenons le milieu M de la portion de droite $M_1 M_2$.

On demande le lieu du point M lorsque les paramètres des paraboles varient de manière que la tangente commune $M_1 M_2$ passe constamment par un point fixe A .

1869. — On donne un triangle rectangle isocèle AOB et l'on demande :

1^o L'équation générale des paraboles P , tangentes aux trois côtés du triangle AOB ;

2^o L'équation de l'axe de l'une quelconque de ces paraboles;

3^o L'équation et la forme du lieu des projections du point O , sommet de l'angle droit du triangle AOB , sur les axes des paraboles P .

(Solution anonyme. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. VIII, p. 379.)

(Autre Solution par M. HILAIRE. — p. 381.)

1870. — *Premier sujet.* Exposer la théorie des asymptotes rectilignes des courbes algébriques en l'accompagnant d'exemples.

Deuxième sujet. On donne une circonférence O et un point P dans son plan; on mène par le point P une droite PA qui coupe la circonférence en A ; sur le rayon OA on élève au point O une perpendiculaire à OA ; elle coupe la droite PA en M . — On demande le lieu du point M .

On examinera les différentes formes de la courbe suivant la position du point P dans le plan.

1871. — *Il n'y a pas eu de composition de Mathématiques.*

1872. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et deux droites A et B respectivement parallèles aux axes, et l'on demande :

1^o De former l'équation générale des courbes du second degré qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui admettent comme normales les droites données A et B ;

2^o De démontrer que, par un point du plan, il passe en général trois de ces courbes, à savoir deux ellipses et une hyperbole;

3^o De faire connaître les points du plan pour lesquels cette règle générale souffre une exception.

(Solution anonyme. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XI, p. 454.)

1873. — On donne un cercle et un point A, et l'on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par le point donné A et à toucher en deux points le cercle donné.

On discutera la courbe obtenue pour les différentes positions du point A, et l'on démontrera que, dans le cas général, les points de contact des tangentes qu'on peut mener au lieu par le point A sont situés sur une circonférence de cercle.

(Solution par M. HEURTAULT. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XIII, p. 93.)

1874. — Étant donnés un triangle et un point M, on sait que l'on peut généralement faire passer par ce point deux paraboles circonscrites au triangle.

Cela posé, on demande de construire et de discuter le lieu des points M pour lesquels les axes des deux paraboles correspondantes font un angle donné.

(Solution par M. TOURETTES. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XIV, p. 172.)

1875. — Trouver le lieu géométrique de l'intersection des deux normales menées à la parabole aux deux extrémités de toutes les cordes dont les projections orthogonales sur une perpendiculaire à l'axe ont une même valeur.

Que dire du cas où l'on fait tendre vers zéro cette valeur de la projection? Revenant au cas général, on propose de mener par un point quelconque du lieu trois normales à la parabole.

Application particulière au point maximum du lieu.

Question retirée. — Une conique donnée de forme et de grandeur se déplace de manière que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée.

Dans chaque position, on mène à la conique des tangentes parallèles à la droite que décrit l'un des foyers.

Déterminer le lieu des points de contact.

(Solution par M. MORET-BLANC. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XVII, p. 116.)

1876. — *Admissibilité* ⁽¹⁾. 1^o Expliquer la recherche du lieu des milieux des cordes parallèles à la droite qui joint l'origine au point

(¹) De 1876 à 1879 inclus les candidats n'étaient admis à l'examen oral d'admissibilité qu'après avoir satisfait à un examen écrit portant sur les Mathématiques, la Physique, la Chimie et le Dessin graphique.

dont les coordonnées sont $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$, pour la surface représentée par l'équation

$$(1) \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy + 5x + z = 0.$$

NOTA. — L'explication doit être faite sur les données numériques qui ont été indiquées et non avec des relations générales littérales, faute de quoi la composition serait considérée comme nulle et non avenue.

2^o On demande de trouver les limites entre lesquelles doit varier le coefficient a pour que l'équation

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

ait ses quatre racines réelles.

(Solutions par M. MORET-BLANC. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XVI, p. 264.)

Admission. On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles concentriques à cette courbe. A chacun de ces cercles, on mène des tangentes qui soient en même temps normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de contact du cercle variable du point d'incidence sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu géométrique de ces milieux.

Si l'équation se présente sous une forme irrationnelle, on aura à la rendre rationnelle. En second lieu, on exprimera en fonction du rayon du cercle les coordonnées du point d'incidence, en s'attachant à spécifier les solutions réelles distinctes.

(Solution par M. MORET-BLANC. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XVI, p. 266.)

1877. — *Admissibilité.* 1^o On donne la surface qui, par rapport à un système de plans coordonnés rectangulaires, a pour équation

$$3x^2 - 3y^2 + z^2 - 2yz - 4xz + 8xy - 8x + 6y + 2z = 0.$$

On demande de trouver l'équation de la même surface par rapport à un système de plans principaux.

On admettra comme connue l'équation générale des plans diamétraux, et l'on fera directement sur l'équation donnée les raisonnements et les calculs nécessaires pour la solution de la question proposée.

2^o Démontrer que dans une équation à coefficients réels, qui a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal

au nombre des variations du premier membre ordonné suivant les puissances de l'inconnue. On supposera démontrée la règle des signes de Descartes.

Admission. On donne l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

d'une hyperbole rapportée à ses axes et les coordonnées μ, ν d'un point M de son plan.

Par le point M on mène deux tangentes à l'hyperbole la touchant aux points A, B. On mène le cercle passant par ces points A, B et le centre O de l'hyperbole. Ce cercle rencontre l'hyperbole en deux points C et D, distincts de A et de B; trouver l'équation de la droite CD.

Si le point M décrit une droite du plan, aux diverses positions du point M correspondront diverses positions de la droite CD; quel est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de l'hyperbole sur ces droites?

(Solution par M. LEZ. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XVII, p. 193.)

1878. — *Admissibilité.* 1^o Exposer la méthode de Newton (méthode fondée sur la considération des dérivées) pour trouver une limite supérieure des racines positives d'une équation numérique.

2^o Construire la courbe dont les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires sont données par les formules

$$x = \frac{t}{1-t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{t(1-\gamma t^2)}{1-t^2}$$

t étant un paramètre variable.

Admission. On donne une droite dont l'équation par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy est $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, et l'on considère les différentes coniques qui, ayant pour axes Ox et Oy , sont normales à la droite D.

Chacune d'elles rencontre cette droite en deux points. En ces points on mène les tangentes à la conique. Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Démontrer: 1^o que ce lieu est une parabole; 2^o que la distance du foyer de cette parabole à son sommet est le quart de la distance du

point O à la droite D. On construira géométriquement l'axe et le sommet de la parabole.

(Solution par M. BOREL. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XVIII, p. 234.)

(Solution géométrique par M. MANNHEIM. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XVII, p. 408.)

1879. — *Admissibilité.* 1^o Comment déduit-on du théorème de Sturm les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation algébrique de degré donné?

2^o Construire la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{\sin \omega}{2\omega - 3 \cos \omega}.$$

Admission. On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$$

et un point M sur cette conique; par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point M on fait passer un cercle; prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique K passant par l'origine O des axes. Si autour du point O on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique K en deux points: prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpendiculaire au segment OM, et passant par le milieu de ce segment.

Par le point O on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point O, trois autres droites normales à la conique K.

1^o Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où l'on a $A = 1$ et $B = 1$, montrer qu'une seule de ces normales est réelle et calculer les coordonnées de son pied.

2^o Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.

OBSERVATION. — Le pied d'une normale est le point de la courbe d'où part la normale.

(Solution par M. MORET-BLANC. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XX, p. 65.)

(Solution géométrique par M. MANNHEIM. — *Nouvelles Annales*; 2^e Série, t. XIX, p. 5.)

1880. — Soient M et N les points où l'axe des x rencontre le cercle $x^2 + y^2 = R^2$; considérons une quelconque des hyperboles

équilatères qui passent par les points M et N ; menons, par un point Q pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole.

Soient A et B les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites QA et QB, l'une est parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe P.

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante qui passe par les points M et N est déterminée ; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point P décrit la droite $y = x$, quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole ? On déterminera son équation et on le construira.

(Solution par M. LEZ. — *Nouvelles Annales* ; 2^e Série, t. XX, p. 127.)

(Solution géométrique par M. MANNHEIM. — *Nouvelles Annales* ; 2^e Série, t. XIX, p. 337.)

1881. — *Premier sujet.* Une parabole étant donnée, on lui mène une normale en l'un des points P situés, avec le foyer F, sur une même perpendiculaire à l'axe.

Trouver le lieu des sommets des sections faites par des plans contenant cette normale dans le cylindre dont la parabole donnée est la section droite.

(Solution par M. J.-B. POMEY. — *Nouvelles Annales* ; 3^e Série, t. I, p. 111.)

(Solution par M. H. CARTIER. — *Nouvelles Annales* ; 3^e Série, t. II, p. 420.)

Deuxième sujet. On donne une asymptote d'une hyperbole et un point P de la courbe. Sachant que l'un des foyers décrit la perpendiculaire menée du point P sur l'asymptote considérée, on demande le lieu du point M d'intersection de la seconde asymptote avec la directrice correspondant au foyer donné.

1882. — On donne deux cercles se coupant aux points A et B. Une conique quelconque passant par ces points et tangente aux deux cercles rencontre l'hyperbole équilatère, qui a ces points pour sommets, en deux autres points C et D :

1^o Démontrer que la droite CD passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés ;

2^o Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par A et B, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences E et F ;

3^o Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences E ou F ; démontrer que les asymptotes

de cette conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux circonférences données.

(Solution par M. A. HILAIRE. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. II, p. 504.)

(Solution géométrique par M. MANNHEIM. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. I, p. 351.)

1883. — On donne une parabole et une droite. Trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à la parabole forment avec la droite donnée un triangle de surface donnée.

1884. — On donne une conique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1;$$

on joint un point M de cette conique aux deux foyers F, F' :

1^o On demande d'exprimer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF', au moyen des coordonnées du point M ;

2^o Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et M' de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu du segment MM' ;

3^o Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P : on déterminera en coordonnées polaires l'équation du lieu décrit par le point P. (On prendra le foyer F pour origine des rayons et l'axe des x pour origine des angles.)

NOTA. — Dans toutes ces questions, il est nécessaire de distinguer le cas où la conique donnée est une ellipse de celui où elle est une hyperbole.

(Solution géométrique par M. MANNHEIM. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. III, p. 449.)

(Solution par M. GOFFART. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. VI, p. 395.)

1885. — *Premier sujet.* Par les deux foyers d'une ellipse fixe, on fait passer une circonférence variable :

1^o A quelle condition doit satisfaire cette ellipse pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points, et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection ?

2^o En chacun des points d'intersection, on mène la tangente à

l'ellipse, ces quatre droites forment un quadrilatère; quel est le lieu des sommets de ce quadrilatère quand le cercle varie?

3° Quel est le lieu de l'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse?

4° On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Trouver le lieu de leurs points de contact avec le cercle.

(Solution par M. JUHEL-RENOY. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. IV, p. 498.)

(Solution géométrique par M. MANNHEIM. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. IV, p. 345.)

Deuxième sujet. Soient les deux paraboles données

$$y^2 - 2p_1x + 6x - 1 = 0,$$

$$y^2 - 2p_2x - 4x + 3 = 0.$$

On demande

1° De trouver les relations du second degré en u et v

$$f_1(u, v) = 0, \quad f_2(u, v) = 0,$$

qui expriment que la droite

$$ux + vy + 1 = 0$$

est tangente soit à l'une, soit à l'autre de ces courbes;

2° De trouver les racines de l'équation du troisième degré en μ qui exprime que la combinaison linéaire

$$f_1 + \mu f_2 = 0$$

se décompose en deux facteurs linéaires en u et v ;

3° Démontrer que, l'une de ces racines fournissant une décomposition de la forme

$$u(\alpha u + \beta v + \gamma) = 0,$$

α, β, γ sont les coordonnées homogènes du point de rencontre P des deux tangentes communes à distance finie des deux paraboles.

1886. — On donne un rectangle ABA'B'. Deux hyperboles équilatères A et B, ayant toutes deux leurs asymptotes parallèles aux côtés du rectangle, passent: l'une A par les sommets opposés A et A'; l'autre B par les sommets opposés B et B'.

1° Démontrer que le centre de l'hyperbole A a, par rapport à l'hyperbole B, la même polaire P que le centre de l'hyperbole B. par rapport à l'hyperbole A; 2° le rectangle restant fixe, on fait varier en même temps les deux hyperboles, de manière qu'elles soient égales

entre elles sans être symétriques par rapport à l'un des axes du rectangle : examiner si elles se coupent en des points réels. Trouver le lieu du milieu de la droite qui joint leurs centres et prouver que la droite P est constamment tangente à ce lieu; 3^o si l'on prend une quelconque des hyperboles A et une quelconque des hyperboles B , il existe une infinité de rectangles ayant, comme le rectangle donné, les sommets opposés sur chacune de ces hyperboles, et les côtés parallèles aux asymptotes : trouver le lieu des centres de ces rectangles.

(Solution géométrique par M. MANNHEIM. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. V, p. 401.)

1887. — On donne dans un plan un point ω fixe, et deux axes rectangulaires fixes Ox , Oy . Par le point ω , on fait passer deux droites rectangulaires rencontrant Ox en B et D , Oy en A et C . Par les points A , B , on fait passer une parabole P tangente aux axes Ox et Oy en ces points; par les points C , D , on fait passer une parabole P' tangente aux axes Ox et Oy en ces points.

On fait tourner les droites rectangulaires AB , CD autour du point ω , et l'on demande :

- 1^o Les équations des paraboles P , P' , de leurs axes et de leurs directrices;
- 2^o L'équation du lieu du point de concours des axes et des directrices;
- 3^o L'équation du lieu du point de concours de leurs axes, qui se compose de deux cercles;
- 4^o On prouvera que la distance des foyers est constante.

(Solution par M. BARISIEN. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. VII, p. 244.)

1888. — On donne un quadrilatère plan $OACB$, et deux séries de paraboles, les unes tangentes en A et AC et ayant pour diamètre OA , les autres tangentes en B à BC et ayant pour diamètre OB .

On demande :

- 1^o De trouver le lieu du point de contact M d'une parabole de la première série avec une parabole de la deuxième série;
- 2^o D'indiquer, en laissant le triangle AOB invariable, dans quelle région du plan il faut placer le point C pour que le lieu soit une ellipse et pour qu'il soit une hyperbole;
- 3^o De démontrer, dans l'hypothèse où $OACB$ est un parallélogramme, que la tangente commune en M aux deux paraboles pivote autour du point de concours K des médianes du triangle ABC ;

3° De trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point d'intersection P de la tangente en M aux deux paraboles avec l'autre tangente commune DE que l'on peut mener à ces deux courbes.

NOTA. — On représentera la longueur OA par a et la longueur OB par b .

(Solution par M. BRISSE. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série, t. VII, p. 305.)

(Solution géométrique par M. ROUX. — *Nouvelles Annales*; 3^e Série t. VII, p. 384.)

1889. — Étant donnés, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires OX et OY, et deux séries de paraboles : les unes (P), de paramètre p , tangentes à OY du côté des X positifs et ayant leur axe parallèle à OX; les autres (Q), de paramètre q , tangentes à OX du côté des Y positifs et ayant leur axe parallèle à OY.

On demande :

1° De trouver le lieu décrit par le centre d'une conique qui se déplace, sans changer de grandeur, en passant constamment par les points communs à l'une des paraboles (P) et à l'une des paraboles (Q) :

2° De démontrer que, quand on associe une parabole P et une parabole Q, de manière que la droite qui joint leurs foyers respectifs reste constamment parallèle à une direction donnée, la somme des angles que font les tangentes communes à ces deux paraboles avec un axe fixe, OX par exemple, demeure constante; et de trouver, dans ces conditions, le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles;

3° De placer une parabole P et une parabole Q de façon qu'elles aient trois points communs confondus en un seul, et de calculer, pour cette position des deux courbes, les coordonnées de leur point commun et le coefficient angulaire de leur tangente commune en ce point;

4° De démontrer que tout triangle circonscrit à la fois à l'une quelconque des paraboles P et à l'une quelconque des paraboles Q est inscrit dans une conique fixe, et de trouver l'équation de cette conique.

1890. — On donne, dans un plan, une hyperbole équilatère H, dont l'équation par rapport à ses axes pris pour axes de coordonnées est

$$x^2 - y^2 = a^2;$$

Bibliographie

SOURCES PRIMAIRES

AIMÉ, Georges, BOUCHARDAT, Apollinaire et FERMOND, Charles. *Manuel complet du baccalauréat ès-sciences physiques mathématiques*. 2^e éd. Paris : Germer-Baillière, 1846.

ALLAIZE et al. *Cours de mathématiques à l'usage des Écoles impériales militaires*. Paris : Magimel, 1813.

AMIOT, Antoine. *Éléments de géométrie*. Paris : Dézobry, Magdeleine et c^{ie}, 1855.

AMIOT, Antoine. *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*. Paris : Dézobry et Magdeleine, 1850.

AMIOT, Antoine et DESVIGNES, A. *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de géométrie*. Paris : Dézobry, Magdeleine et c^{ie}, 1858.

ANDRÉ, Philippe. *Éléments de géométrie, contenant plus de mille problèmes résolus et à résoudre*. 7^e éd. Paris : André-Guédon, 1875.

ANDRÉ, Philippe. *Exercices de géométrie (Problèmes et théorèmes)*. Paris : André Guédon, 1871.

ARNAULD, Antoine. *Nouveaux éléments de géométrie*. 2^e éd. Paris : Desprez, 1683.

Bibliographie

ARNAULD et NICOLE. *La logique ou l'art de penser*. Paris : Charles Savreux, 1662.

BARY. *Nouveaux problèmes de physique, suivis des questions proposées au concours général*. Paris : Hachette, 1838.

BERGERY, Claude Lucien. *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers. Leçons publiques données dans l'hôtel de ville de Metz*. Metz : Lamort, 1826.

BÉZOUT, Etienne. *Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie. Seconde partie. Géométrie, Trigonométrie rectiligne et Trigonométrie sphérique*. Avignon : Séguin frères, 1811.

BIOCHE, Charles Marie Paul. *Introduction à l'étude de la géométrie moderne*. Paris : Delagrave, 1891.

BIOT, Jean-Baptiste. *Essai de Géométrie Analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre*. 5^e éd. Paris : Klostermann, 1813.

BIZARD, Pierre. *Recueil d'exercices et de problèmes élémentaires usuels et instructifs sur l'arithmétique et la géométrie pratique*. Paris : Delagrave, 1870.

BLANCHET, Marie Parfait Alphonse. *Solutions raisonnées des problèmes de la géométrie Legendre et Blanchet*. Paris : Firmin-Didot, 1885.

BLUM, Auguste. *Cours complet de mathématiques*. Paris : Carilian-Gœury et Vve Dalmont, 1845.

BOBILLIER, Étienne. « Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue ». In : *Annales de mathématiques pures et appliquées* 18 (1827-1828), p. 320–339.

BOBILLIER, Étienne. *Géométrie*. 3^e éd. Châlons-sur-Marne : Barrat, 1837.

BOBILLIER, Étienne. *Principes l'algèbre*. Lons-le-Saunier : Gauthier, 1825-27.

BONNEL, Joseph Florentin. *Essai de géométrie rationnelle*. Lyon : Palud, 1891.

BOQUEL, E.J. *Leçons nouvelles de géométrie analytique à l'usage des candidats aux écoles polytechnique, normale supérieure et centrale des arts et manufactures*. Paris : Chauvin, 1872.

BOUCHARLAT, Jean. *Théorie des courbes et des surfaces du second ordre, précédées des principes fondamentaux de la Géométrie Analytique*. 2^e éd. Paris : Courcier, 1810.

BOURDON, Pierre Marie. *Application de l'algèbre à la géométrie*. Paris : Bachelier, 1825.

BOURGET, Justin. *Journal de mathématiques élémentaires à l'usage des candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès-sciences*. Paris : Delagrave, 1877-1901.

BRIANCHON, Charles. « Démonstration du premier des deux théorèmes [...] ». In : *Annales de Gergonne* 4 (1813-1814). Sous la dir. de GERGONNE.

BRIANCHON, Charles. *Mémoire sur les lignes du second ordre*. Paris : Bachelier, 1817.

BRIANCHON, Charles. « Solution de plusieurs problèmes de géométrie ». In : *Journal de l'École polytechnique* IV.10 (1810).

BRIOT, Charles et BOUQUET, Jean-Claude. *Complément de géométrie analytique*. Paris : Dunod, 1864.

BRIOT, Charles et BOUQUET, Jean-Claude. *Leçons nouvelles de géométrie analytique*. 2^e éd. Paris : Dezobry et Magdeleine, 1851.

BRIOT, Charles et VACQUANT, Charles. *Éléments de géométrie. Applications*. 3^e éd. Paris : Hachette, 1862.

CARNOT, Lazare. *De la corrélation des figures de géométrie*. Paris : Duprat, 1801.

Bibliographie

CARNOT, Lazare. *Géométrie de position*. Paris : Duprat, 1803.

CARNOT, Lazare. *Mémoire sur les relations qui existent entre les distances respectives qui existent entre cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales*. Paris : Courcier, 1806.

CARTON, Abbé. *Éléments de géométrie*. Paris : Poussièlgue frères, 1879.

CARTON, Abbé. *Solutions raisonnées des exercices de géométrie contenus dans les deux cours*. Paris : Poussièlgue frères, 1882.

CATALAN, Eugène. *Éléments de géométrie*. Paris : Bachelier, 1847.

CATALAN, Eugène. *Traité de géométrie descriptive*. Paris : Carilian-Gœury et V^{ve} Dalmont, 1850-1852.

CATALAN, Eugène et FRÉMOIRE, Henri de la. *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*. Paris : Carilian-Gœury et V^{ve} Dalmont, 1852.

CAUCHY, Augustin. *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique*. Paris : Debure, 1821.

CHASLES, Michel. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*. Bruxelles : Hayez, 1837.

CHASLES, Michel. *Les trois Livres de porismes d'Euclide*. Paris : Mallet-Bachelier, 1860.

CHASLES, Michel. *Rapport sur les progrès de la géométrie*. Paris : Imprimerie nationale, 1870.

CHASLES, Michel. *Traité de géométrie supérieure*. Paris : Bachelier, 1852.

CHASLES, Michel. *Traité des sections coniques*. Paris : Gauthier-Villars, 1865.

CHAUVIN, Victor. *Histoire des lycées et collèges de Paris*. Paris : Hachette, 1866.

-
- CIRODDE, Paul Louis. *Leçons de géométrie analytique*. 2^e éd. Paris : Hachette, 1848.
- CIRODDE, Paul Louis. *Leçons de géométrie théorique et pratique*. Dijon : Douillier, 1839.
- CLAIRAUT, Alexis. *Éléments de géométrie*. réédité par Saigey. Paris : Hachette, 1852.
- COMBEROUSSE, Charles de. *Cours de mathématiques*. Paris : Mallet-Bachelier, 1860-1862.
- COMBETTE, Étienne. *Cours de géométrie élémentaire*. 2^e éd. Paris : Félix Alcan, 1887.
- COMPAGNON, Pierre François. *Éléments de géométrie*. Paris : Gauthier-Villars, 1868.
- COMPAGNON, Pierre François. *Questions proposées sur les Éléments de géométrie*. Paris : Gauthier-Villars, 1877.
- COMTE, Auguste. *Cours de philosophie positive . Tome premier. Les préliminaires généraux et la philosophie mathématique*. Paris : L'Harmattan, 2009.
- COMTE, Auguste. *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux et à trois dimensions contenant toutes les théories générales de géométrie accessibles à l'analyse ordinaire*. Paris : Carilian-Gœury et V^{ve} Dalmont, 1843.
- D'ALEMBERT, Jean. « Essai sur les Éléments de philosophie ». In : *Œuvres de D'Alembert*. Paris : Belin, 1821.
- D'ALEMBERT, Jean. *Mélanges de littérature, d'histoire, et de philosophie*. 2^e éd. Amsterdam : Zacharie Chatelain, 1770.
- DELISLE, A. et GERONO, Camille. *Géométrie analytique*. Paris : Mallet-Bachelier, 1854.

Bibliographie

DESARGUES, Girard. *Brouillon project d'une atteinte d'une atteinte aux évènements des rencontres du cône avec un plan*. Lyon, 1639.

DESBOVES, Adolphe. *Questions de géométrie*. Paris : Delagrave, 1870.

DESBOVES, Adolphe. *Questions de trigonométrie, méthodes et solutions, avec plus de 400 exercices proposés*. Paris : Delagrave, 1872.

DESCARTES, René. *Discours de la méthode*. Leyde : Ian Maire, 1637.

DESCARTES, René. « Règles pour la direction de l'esprit ». In : *Œuvres*. rééd. Victor Cousin. Paris : Levrault, 1826.

DEVELEY, Isaac Emmanuel Louis. *Éléments de géométrie*. Paris : Courcier, 1812.

DUCHESNE, E. *Questions inédites relatives aux examens de l'École polytechnique et de la Marine*. Paris : Hachette, 1836.

DUFAILY, Jules. *Géométrie*. Paris : Delagrave, 1888.

DUFAILY, Jules. *Problèmes de mathématiques. Recueil de principes, formules et exercices à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles du gouvernement*. 4^e éd. Paris : Delagrave, 1883.

DUHAMEL, Jean Marie Constant. *Des méthodes dans les sciences du raisonnement*. Paris : Gauthier-Villars, 1865-1870.

DUHAMEL, Jean Marie Constant. « Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes ». In : *Mémoires de l'académie des sciences de l'Institut impérial de France*. T. 32. Paris : Firmin Didot, 1864.

DUPIN, Charles. *Géométrie et Mécanique des arts et métiers et des beaux-arts, Cours normal à l'usage des artistes et des ouvriers, des sous-chefs et des chefs d'ateliers et des manufactures. Tome premier : Géométrie*. 2^e éd. Paris : Bachelier, 1828.

DUPORCQ, Ernest. *Premiers principes de géométrie moderne*. Paris : Gauthier-Villars, 1899.

ESCOUBÈS. *Compositions mathématiques, ou problèmes géométriques et trigonométriques*. Paris : Hachette, Bachelier, Delalain, Roret, 1854.

EUCLIDE. *Éléments de géométrie*. trad. Peyrard. Paris : Louis, 1804.

EULER, Leonhard. *Introduction à l'analyse infinitésimale*. trad. Labbey. Paris : Barrois, 1796-1797.

EYSSÉRIC, Antoine Dominique et PASCAL, J.-C. *Traité de géométrie théorique et pratique*. Paris : Langlois et Leclercq, 1850.

FÉRUSSAC, André Étienne. *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*. Paris : Bachelier, 1824-1831.

F.I.C. *Appendice aux Éléments de géométrie*. 3^e éd. Tours : Mame et fils, 1878.

F.I.C. *Éléments de géométrie*. 2^e éd. Tours : Mame et fils, 1875.

F.I.C. *Exercices de géométrie : comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*. 2^e éd. Tours : Mame, 1882.

FINCK, Pierre Joseph Étienne. *Géométrie élémentaire*. Strasbourg : Derivaux, 1838.

FONTENELLE, Bernard le Bouyer de. « Sur les spirales à l'infini ». In : *Histoire de l'Académie royale des sciences, Année 1704*. Paris : Gabriel Martin, 1745.

FOURCY, Amboise. *Histoire de l'École polytechnique*. Paris : École polytechnique, 1828.

FRANCŒUR, Louis Benjamin. *Cours complet de mathématiques pures*. Paris : V^{ve} Bernard, 1809.

Bibliographie

GARNIER, Jean-Guillaume. *Éléments de géométrie analytique*. Paris : Courcier, 1808.

GARNIER, Jean-Guillaume. *Réciproques de la géométrie*. 2^e éd. Paris : Courcier, 1810.

GERGONNE, Joseph Diaz. « Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue ». In : *Annales de mathématiques pures et appliquées* (1825-1826), p. 209–231.

GERGONNE, Joseph Diaz. « Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue ». In : *Annales de Gergonne* 16 (1825-1826).

GERGONNE, Joseph Diaz. « De l'analyse et de la synthèse, dans les sciences mathématiques ». In : *Annales de géométrie pures et appliquées* 7 (1817), p. 345–372.

GIROD, Félicien. *Cours de géométrie théorique et pratique*. 11^e éd. Paris : André Guédon, 1893.

GIROD, Félicien. *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans le cours et dans le traité élémentaire de géométrie*. Paris : André-Guédon, 1881.

GOHIERRE DE LONGCHAMPS, Gaston. « Géométrie analytique à deux dimensions ». In : *Cours de mathématiques spéciales*. T. 2. Paris : Delagrave, 1884.

GOURÉ, M. É. *Éléments de géométrie et de trigonométrie suivis d'un précis de l'arpentage et du levé des plans*. Paris : Bachelier, 1836.

GRANDSAGNE, Jean Baptiste François Étienne dit Stéphane jasson de. *Éléments de géométrie d'après les Éléments de Clairaut*. Bibliothèque populaire, 1833.

GUETTIER, André. *Histoire des Écoles impériales des arts et métiers*. Paris : St^e des anciens élèves, 1865.

GUIBAL, Charles François. *Conseils propres à faciliter la solution des problèmes de géométrie*. Nancy : Vve Raybois, 1846.

GUILMIN, Adrien. *Cours de géométrie élémentaire*. Paris : Durand, 1854.

GUILMIN, Adrien. *Solutions des questions proposées dans le cours de géométrie*. Paris : Thunot, 1862.

HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Correspondance sur l'École polytechnique*. Paris : Bernard, 1804-1815.

HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Second supplément de la géométrie descriptive*. Paris : Firmin Didot, 1818.

HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Supplément de la géométrie descriptive*. Paris : Klosterman, 1812.

HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Traité de Géométrie descriptive*. Paris : Corby, Guillaume et c^{ie}, 1822.

HOUEL, Jules. *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*. Paris : Gauthiers-Villars, 1867.

HOUSEL, Charles. *Introduction à la géométrie supérieure*. Paris : Bachelier, 1865.

IDOUX, Auguste J. *Nouveaux éléments de géométrie*. Paris : Delalain et Roret, 1842.

JACOB, Christophe Charles. *Application de l'algèbre à la géométrie*. Paris : Hachette, 1842.

JANNI, Vincenzo. « Démonstration de quelques théorème de M. Steiner ». In : *Nouvelles annales de mathématiques* 2.1 (1862), p. 78–79.

JUBÉ, Eugène. *Exercices de géométrie analytique, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales*. Paris : Noblet et Baudry, 1866.

Bibliographie

KOEHLER, J. *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale et à l'Agrégation*. Paris : Gauthier-Villars, 1886.

LACROIX. *Essai sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier*. Paris : Courcier, 1805.

LACROIX, Sylvestre François. *Éléments de géométrie à l'usage de l'école centrale des quatre-nations*. 7^e éd. Paris : Courcier, 1808.

LACROIX, Sylvestre François. *Traité de calcul différentiel et intégral*. Paris : Duprat, 1797.

LACROIX, Sylvestre François. *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*. Paris : Courcier, 1798.

LAFFITE, Pierre. « Comte examinateur d'admission à l'École polytechnique ». In : *Nouvelles annales de mathématiques* 3.13 (1894), p. 65–80.

LAGRANGE, Joseph Louis. *Mécanique analytique*. Paris : V^{ve} Desaint, 1788.

LAMÉ, Gabriel. *Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie*. Paris : V^{ve} Courcier, 1818.

LAMY, Bernard. *Nouveaux éléments de Géométrie*. Paris : André Pralard, 1692.

LECOINTE, Ignace-Louis-Alfred. *Solutions développées de 300 problèmes qui ont été donnés dans les compositions mathématiques pour l'admission au grade de bachelier ès-sciences dans diverses facultés de France*. Paris : Gauthier-Villars, 1865.

LEFÉBURE DE FOURCY, Louis. *Leçons de géométrie analytique*. Paris : Bachelier, 1827.

LEFRANÇOIS, Frederic Louis. *Essais de géométrie analytique*. 2^e éd. Paris : Courcier, 1804.

LEGENDRE, Adrien-Marie. *Éléments de géométrie*. Paris : Firmin-Didot, 1794.

LEGENDRE, Adrien-Marie. *Éléments de géométrie, avec additions et modifications par M. A. Blanchet*. 2^e éd. Paris : Firmin Didot, 1846.

LENTHERIC, Jacques. *Cours d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent aux écoles spéciales*. Paris : Bachelier, 1840.

LENTHERIC, Jacques. *Cours de géométrie théorique et pratique*. Montpellier : Sevalle, 1844.

LENTHÉRIC, Jacques. *Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie moderne*. Nîmes : Clavel-Ballivet, 1865.

LEPRAZ, I. *Problèmes de géométrie*. Paris : Fouraut, 1869.

LESLIE, John. *Elements of geometry, geometrical analysis and plane trigonometry*. 2^e éd. Edinbough : Ballantyne, 1811.

LHUILIER, Simon. *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques*. Paris, Genève : Paschoud, 1809.

LIUVILLE, Joseph. « Note ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 12 (1847), p. 265.

LIUVILLE, Joseph. « Note au sujet de l'article précédent ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 12 (1847), p. 265–290.

LONCHAMPT, A. *Recueil de problèmes posés dans les examens d'admission à l'École impériale polytechnique et à l'École impériale centrale des arts et manufactures, ainsi que dans les conférences des principales écoles préparatoire*. Paris : Gauthier-Villars, 1865.

LONCHAMPT, A. *Recueil de problèmes [...] suivis des compositions de mathématiques élémentaires données aux concours généraux de 1846 à 1862*. Paris : Institution polytechnique, 1862.

Bibliographie

LONCHAMPT, A. *Recueil des formules les plus usuelles servant à la résolution des problèmes donnés aux baccalauréats ès sciences*. Paris : Mallet-Bachelier, 1863.

LONCHAMPT, A. *Recueil des problèmes tirés des compositions données à la Sorbonne de 1853 à 1875 pour les baccalauréats es sciences*. 2^e éd. Paris : Gauthier-Villars, 1876.

MASCHERONI, Lorenzo. *Géométrie du compas*. trad. Carette. Paris : Duprat, 1798.

MASCHERONI, Lorenzo. *Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni*. Pavie : Baldassare, 1793.

MÉRAY, Charles. *Nouveaux éléments de géométrie*. Paris : Savy, 1874.

MILLET, Luc Alphonse. *Principales méthodes de géométrie moderne*. Laval : Deverdun, 1870.

MINISTÈRE DE LA GUERRE. *Programme des conditions d'admission à l'École impériale polytechnique*. Paris : Delalain, 1855-1888.

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. *Bulletin administratif de l'instruction publique*. T. 3. Paris : Imprimerie impériale, 1865.

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. *Circulaires et instructions officielles relatives à l'instruction publique*. T. 6. Ministère de l'Instruction publique. Paris : Delalain, 1870.

MONGE, Gaspard. *Application de l'analyse à la géométrie*. 4^e éd. Paris : V^{ve} Bernard, 1809.

MONGE, Gaspard. *Géométrie descriptive*. Paris : Baudoin, an VII.

MUTEL, A. *Cours de géométrie et de trigonométrie, à l'usage des aspirants à l'École polytechnique, et des Écoles d'Artillerie et de Marine*. Lyon : Périsse frères, 1831.

NEEL, E. *Les applications de Blanchet. Théorèmes, lieux géométriques et problèmes.* Bruxelles, 1879.

NEWTON, Isaac. *Arithmétique universelle.* trad. Beaudeau. Paris : Bernard, 1802.

OZANAM, Jacques. *Récréations mathématiques et physiques.* Paris : Jombert, 1694.

PAINVIN, Louis Félix. *Principes de la géométrie analytique. Géométrie de l'espace.* Paris : Gauthier-Villars, 1872.

PAINVIN, Louis Félix. *Principes de la géométrie analytique. Géométrie plane.* Douai : Robaut, 1866.

PAPPUS. *La collection mathématique.* trad. Ver Eecke. Paris : Blanchard, 1933.

PERCIN, Nicolas Jules. *Complément de géométrie.* Nancy : Grimblot et Ve Raybois, 1848.

PERCIN, Nicolas Jules. *Géométrie simplifiée, à l'usage des collèges et des écoles primaires supérieures.* 2^e éd. Nancy : Grimblot et V^{ve} Raybois, 1842.

PETERSEN, Julius. *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec application à plus de 400 problèmes.* trad. O. Chemin, rééd. Jacques Gabay 1990. Paris : Gauthier-Villars, 1880.

PICQUET, Henry. *Traité de géométrie analytique à l'usage des candidats aux Écoles du gouvernement et aux grades universitaires.* Paris : Masson, 1882.

PLANCHE, Jules. *Cahiers de géométrie élémentaire pour servir de complément au traité de Legendre.* Paris : Bachelier et Hachette, 1845.

PLANCHE, Jules. *Observations sur les propositions de géométrie en général, et sur les problèmes en particulier.* Paris : Hachette, 1828.

Bibliographie

PONCELET, Jean-Victor. « Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences ». In : *Annales de Gergonne* 17 (1826-1827).

PONCELET, Jean-Victor. *Applications d'analyse et de géométrie*. Paris : Mallet-Bachelier, 1862.

PONCELET, Jean-Victor. « Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle ». In : *Annales de mathématiques pures et appliquées* 8 (1817-1818).

PONCELET, Jean-Victor. *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris : Bachelier, 1822.

POULLET-DELISLE, Antoine Charles Marcellin. *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*. Paris : Bachelier, 1806.

PRUVOST, E. *Leçons de géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École Normale Supérieure et à l'École Polytechnique*. Paris : Dupont, 1886.

PUISSANT, Louis. *Recueil de diverses propositions de géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique, suivant les principes de Monge et de Lacroix*. Paris : Duprat, 1801.

PUISSANT, Louis. *Traité de géodésie, ou exposition des méthodes trigonométriques et astronomiques*. Paris : Courcier, 1805.

PUISSANT, Louis. *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement*. Paris : Courcier, 1807.

QUERRET. « Démonstration du théorème de géométrie élémentaire énoncé à la page 28 ». In : *Annales de mathématiques pures et appliquées* 14 (1824), p. 280–285.

QUÉTELET, Adolphe. *Correspondance mathématique et physique*. Bruxelles : Hayez, 1825-1835.

RÉMOND, Claude Joseph Adrien. *Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions, avec un exposé des méthodes de résolution*. Paris : Gauthier-Villars, 1887.

REYDELLET, Maurice et REBOUL, Pierre-Jacques. *Éléments de géométrie*. 7^e éd. Paris : Delagrave, 1885.

REYE, Théodore. *Leçons sur la géométrie de position*. trad. O. Chemin. Paris : Dunod, 1881-1882.

REYNAUD, Antoine André Louis. *Introduction à l'algèbre*. Paris : Auteur, 1804.

REYNAUD, Antoine André Louis. *Théorèmes et problèmes de géométrie*. Paris : Bachelier, 1833.

REYNAUD, Antoine André Louis. *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie, et de trigonométrie*. Paris : Courcier, 1819.

REYNAUD, Antoine André Louis. *Traité d'arithmétique*. Paris : Auteur, 1804.

REYNAUD, Antoine André Louis. *Trigonométrie analytique*. Paris : Courcier, 1810.

REYNAUD, Antoine André Louis et DUHAMEL, Jean Marie Constant. *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*. Paris : Bachelier, 1823.

RICHARD, Jules. *Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne*. Paris : S^{té} d'éditions scientifiques, 1898.

RION, Adolphe. *Éléments de géométrie*. 3^e éd. Paris, 1855.

RION, Adolphe. *Exercices et problèmes de géométrie*. Paris, 1876.

RITT, Georges. *Manuel des aspirants à l'École polytechnique, contenant un très grand nombre de questions recueillies dans les derniers examens de concours*. Paris : Hachette, 1839.

Bibliographie

RITT, Georges. *Problèmes d'algèbre et exercices de calcul algébrique*. Paris : Hachette, 1836.

RITT, Georges. *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie*. Paris : Hachette, 1836.

RITT, Georges. *Problèmes de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique*. Paris : Hachette, 1836.

ROUCHÉ, Eugène et COMBEROUSSE, Charles. *Traité de géométrie élémentaire*. Paris : Gauthier-Villars, 1866.

SALMON, Georges. *A treatise on conic sections*. Dublin : Hodges et Smith, 1848.

SALMON, Georges. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*. Dublin : Hodges, Smith, et Co, 1862.

SALMON, Georges. *A Treatise on the Higher Plane Curves*. Dublin : Hodges et Smith, 1852.

SALMON, Georges. *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*. Dublin : Hodges, Smith, et Co, 1859.

SALMON, Georges. *Traité de géométrie analytique. Sections coniques. Contenant un exposé des méthodes les plus importantes de la géométrie et de l'algèbre modernes*. trad. Résal et Vaucheret. Paris : Gauthier-Villars, 1870.

SARAZIN, J.-N. *Nouveau recueil de problèmes de géométrie, à l'usage des classes élémentaires de mathématiques des collèges, des pensions et des écoles primaires supérieures*. Paris : Delalain, 1849.

SERRET, Paul. *Des méthodes en géométrie*. Paris : Mallet-Bachelier, 1855.

SERVOIS, François Joseph. « Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume ». In : *Annales de mathématiques pures et appliquées* 1 (1810-1811), p. 337–341.

SERVOIS, François Joseph. *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique*. Paris : Bachelier, an XII.

SIMPSON, Thomas. *Éléments d'analyse pratique, ou application des principes de l'Algèbre & de la Géométrie à la solution d'un très grand nombre de problèmes numériques & géométriques*. Paris : Jombert, 1771.

SIMPSON, Thomas. *Elements of geometry*. London : Nourse, 1760.

SIMPSON, Thomas. *Select exercises for young proficient in the mathematics*. Londres : Nourse, 1752.

SONNET, Hippolyte. *Nouvelle géométrie théorique et pratique*. Paris : Hachette, 1839.

SONNET, Hyppolite et FRONTERA, Géronimo. *Éléments de géométrie analytique*. Paris : Hachette, 1854.

TANNERY, Paul. « Sur la méthode en géométrie. D'après M. Jacques Hadamard ». In : *L'enseignement mathématique* 1 (1899), p. 333–338.

TERQUEM, Olry et GÉRONO, Camille. « Géométrie segmentaire ». In : *Nouvelles annales de mathématiques* 1.9 (1850), p. 148–150.

TOURS, Gaultier de. « Mémoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions ». In : *Journal de l'École polytechnique* IX.16 (1813).

VINCENT, Alexandre Joseph Hidulphe. *Cours de géométrie élémentaire*. Paris : Bachelier, 1826.

VINCENT, Alexandre Joseph Hidulphe et SAIGEY, Jacques. *Géométrie élémentaire*. Paris : Mallet-Bachelier, 1856.

VUIBERT, Henry. Paris : Éditeur inconnu, 1879.

VUIBERT, Henry. *Problèmes de baccalauréat*. Paris : Nony, 1886.

Bibliographie

SOURCES SECONDAIRES

AEBISCHER, Anne-Marie et LANGUEREAU, Hombeline. *Servoies ou la géométrie à l'école de l'artillerie*. Besançon : P.U. F.-C., 2010.

ALFONSI, Liliane. *Étienne Bezout (1730-1783), Mathématicien des Lumières*. Paris : L'Harmattan, 2011.

AUVINET, Jérôme. « Charles-Ange Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1840-1920) ». Thèse de doct. Université de Nantes, 2011.

BARBIN, Evelyne. « Universality vs generality : an interpretation of the dispute over tangents between Descartes and Fermat ». In : *Perspectives on generality*. à paraître. Oxford University Press.

BARBIN, Evelyne. « Descartes ». In : *Les philosophes et les mathématiques*. Sous la dir. de BARBIN, Evelyne et CAVEING, Maurice. Paris : Ellipses, 1996.

BARBIN, Evelyne. « Descriptive Geometry in France : History of the Elementation of a Method (1795-1865) ».

BARBIN, Evelyne. *La révolution mathématique du XVII^e siècle*. Paris : Ellipses, 2006.

Bibliographie

BARBIN, Evelyne. « L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé ». In : *Gabriel Lamé. Les pérégrinations d'un ingénieur du XIXe siècle*. Sous la dir. de BARBIN, Evelyne. Sabix, École polytechnique, 2009.

BARBIN, Evelyne. « Le mouvement et le calcul : le rôle de l'expérience mathématique selon Jules Hoüel ». In : *Les mathématiques et l'expérience : ce qu'en ont dit les philosophes et les mathématiciens*. Sous la dir. de BARBIN, E. et CLÉRO, J.-P. à paraître 2015. Paris : Hermann.

BARBIN, Evelyne. « Les Éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée ». In : *Repères IREM* 4 (1991), p. 119–133.

BARBIN, Evelyne. « L'exposé moderne des mathématiques élémentaires de Lucienne Félix (1959) : le genre "ouvrage d'initiation" ». In : *Les ouvrages de mathématiques entre recherche, enseignement et culture*. Sous la dir. de BARBIN, E. et MOYON, M. Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 117–130.

BARBIN, Evelyne. « On the argument of simplicity in Elements and school-books of Geometry ». In : *Educational Studies in Mathematics* 66.2 (2007), p. 225–242.

BARBIN, Evelyne. « Que faut-il enseigner, pour qui, pour quoi : des réponses dans l'histoire des mathématiques ». In : *Repères-IREM* 38 (2000), p. 43–51.

BARBIN, Evelyne. « Teaching of conics in 19th and 20th centuries : on the conditions of changing (1854-1997) ». In : *Dig where you stand. Proceedings of the Second International conference on the History of Mathematics Education*. Sous la dir. de BJARNADOTTIR, K. et al. Lisbon, 2012, p. 44–59.

BARBIN, Evelyne. « The notion of Magnitude in Teaching : The new Elements of Arnauld and his inheritance ». In : *International Journal for the History of Mathematics Education* 4.2 (2009).

BARBIN, Evelyne. « Voir des figures, des raisonnements et des équations : une approche sémiotique de la démonstration ». In : *La Figure et la Lettre. Actes du 17^e Colloque de la Commission Inter-Irem Histoire et Épistémologie*

des Mathématiques. Sous la dir. de BARBIN, Evelyne et LOMBARD, Philippe. Presses universitaires de Nancy, 2011.

BARBIN, Evelyne et MENGhini, Marta. « Handbook on the History of Mathematics Education ». In : sous la dir. de KARP, Alexander et GERT, Schüring. Berlin : Springer Verlag, 2014, p. 473–492.

BARBIN, Evelyne, MENGhini, Marta et MOKTEFI, Mohamed. « Les dernières batailles d'Euclide : sur l'usage des *Éléments* pour l'enseignement de la géométrie au XIX^e siècle ». In : *Les ouvrages de mathématiques entre recherche, enseignement et culture*. Sous la dir. de BARBIN, E. et MOYON, M. Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 57–68.

BELHOSTE, Bruno. « Anatomie d'un concours. L'organisation de l'examen d'admission à l'École polytechnique de la Révolution à nos jours ». In : *Histoire de l'éducation* 94 (2002).

BELHOSTE, Bruno. « De l'École Polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet ». In : *Bulletin de la SABIX* 19 (1998).

BELHOSTE, Bruno. « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIX^e siècle : établissements publics et institutions privées ». In : *Histoire de l'éducation* 90 (2001).

BELHOSTE, Bruno. *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels 1789-1914*. Paris : INRP-Economica, 1995.

BELHOSTE, Bruno, PICON, Antoine et SAKAROVITCH, Joël. « Les exercices dans les écoles d'ingénieurs sous l'Ancien Régime et la Révolution ». In : *Histoire de l'éducation* 46 (1990).

BÉNARD, Dominique. « Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible ». In : *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*. Sous la dir. de BARBIN, Evelyne. Paris : Ellipses, 2014, p. 27–56.

BIOESMAT-MARTAGON, Lise, éd. *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*. Nancy : Presses universitaires de Nancy, 2010.

Bibliographie

BKOUCHE, Rudolf. « Les démonstrations du postulat des parallèles ». In : *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, Erreurs, Raisonnements*. Sous la dir. de BARBIN, Evelyne et BÉNARD, Dominique. Paris : INRP, 2007.

BKOUCHE, Rudolf et DELATTRE, Joëlle. « Quand mouvement et géométrie se retrouvent ». In : *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*. Sous la dir. de BARBIN, Evelyne. Paris : Ellipses, 1993.

BOS, Henk. *Redefining geometrical exactness*. Springer, 2001.

BRU, Bernard et MARTIN, Thierry. « Le baron de Férussac. La couleur de la statistique et la topologie des sciences ». In : *Journ@l électronique d'histoire des probabilités et de la statistique* 1.2 (2005).

BUISSON, Ferdinand. *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*. Paris : Hachette, 1911.

CHAMPION, Jacques. « Le concours général et son rôle dans la formation des élites universitaires au XIX^e siècle ». In : *Revue française de pédagogie* 31 (1975).

CHARNAY, Jean-Paul, éd. *Lazare Carnot ou le savant citoyen*. Paris : presses de l'université de Paris-Sorbonne, 1990.

CHEMLA, Karine. « Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaüs ». In : *Revue d'histoire des mathématiques* 4 (1998).

CHERVEL, André. *Histoire de l'agrégation. Contribution à l'histoire de la culture scolaire*. Paris : Kimé, 1993.

CHEVALARIAS, Nathalie. « Changes in the teaching of similarity in France : From similar triangles to transformations (1845-1910) ». In : *International journal for the history of mathematics education* 9.1 (2014).

CHEVALARIAS, Nathalie. *Des figures semblables à la similitude dans l'enseignement secondaire français : 1845 à 1910. Des choix témoins des tensions*

entre pratique et théorie dans l'enseignement des mathématiques. Mémoire de Master. Université de Nantes, 2012.

CHRISTIANSEN, M. et al. « Julius Petersen annotated bibliography ». In : *Discrete Mathematics* 100.1-3 (1992), p. 83–97.

COOLIDGE, Julian Lowell. *A history of geometrical methods*. Mineola, Dover, 1963.

COURT, N. A. « Notes on inversion ». In : *The Mathematics Teacher* 55.8 (1962), p. 655–657.

DELATTRE, Joëlle et BKOUCHE, Rudolf. « Pourquoi la règle et le compas ». In : *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*. Paris : Ellipses, 1993.

D'ENFERT, Renaud. « Inventer une géométrie pour l'école primaire au XIX^e siècle ». In : *Trema* 22 (2003), p. 41–49.

D'ENFERT, Renaud. *L'enseignement du dessin en France : Figure humaine ou dessin géométrique (1750-1850)*. Paris : Belin, 2003.

D'ENFERT, Renaud. « L'offre d'enseignement mathématique pour les ouvriers dans la première moitié du XIX^e siècle : concurrences et complémentarités ». In : *Les études sociales* 159 (2015).

DHOMBRES, Jean. « Enseignement moderne ou enseignement révolutionnaire des sciences ? » In : *Histoire de l'éducation* 42 (1989).

DHOMBRES, Jean. « La pratique philosophique des mathématiques chez Auguste Comte : une conceptualisation de l'espace par l'analytique ». In : *Auguste Comte et l'idée d'une science de l'homme*. Sous la dir. de BOURDEAU, Michel. Paris : L'Harmattan, 2002.

DHOMBRES, Jean. *L'école Normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Édition annotée des cours de Laplace, Lagrange et Monge avec introductions et annexes*. Paris : Dunod, 1992.

Bibliographie

DHOMBRES, Jean. « Où observer la postérité mathématique d'Auguste Comte ? »
In : *Auguste Comte aujourd'hui*. Sous la dir. de BOURDEAU, Michel. Paris : Kimé, 2003.

EHRHARDT, Caroline. « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant ».
In : *Histoire de l'éducation* 123 (2009).

FRIEDELMEYER, Jean-Pierre. « Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse, a la fin du dix-huitième siècle ». sous la direction de Jean Dhombres. Thèse de doct. Université de Nantes, 1993.

FRIEDELMEYER, Jean-Pierre. « Le théorème de clôture de Poncelet, une démonstration imparfaite qui fait tout une histoire ». In : *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs, raisonnements*. Sous la dir. de BARBIN, Evelyne et BÉNARD, Dominique. INRP, 2007.

GARDIÈS, Jean-Louis. *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse. Essai de définition*. Paris : Vrin, 2001.

GASCOIGNE, John. « Mathematics and meritocracy : the emergence of the Cambridge mathematical tripos ». In : *Social studies of science* 14.4 (1984).

GERGONNE. « Théorie analytique des pôles des lignes et des surfaces du second ordre ». In : *Annales de mathématiques pures et appliquées* 3 (1812-1813).

GÉRINI, Christian. « Les "Annales" de Gergonne, apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques ». Thèse de doct. Université d'Aix-Marseille, 2000.

GERINI, Christian et VERDIER, Norbert. *L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle : formes éditoriales et études de cas. (France, Espagne, Italie et Portugal)*. London : college publications, 2014.

GILLEPSIE, Charles et YOUSCHKÉVITCH, Adolf. *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématiques*. Paris : Vrin, 1979.

- GIOVANNI, Mingari et SCARPELLO, Aldo Scimone. « The Work of Tschirnhaus, La Hire and Leibniz on catacaustics and the Birth of the Envelopes of Lines in the 17th Century ». In : *Archive for history of exact sciences* 59.3 (2005).
- GISPERT, Hélène. *La France mathématique. La société mathématique de France (1870-1914)*. T. 34. Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. nouvelle série. Paris : société mathématique de France, 1991.
- GIUSTI, Enrico. « Les méthodes des maxima et minima de Fermat ». In : *Annales de la Faculté des Sciences* 6.18 (2009).
- GLIÈRES, André-Jean. « Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours : le passage des quantités aux nombres ». sous la direction de Jean Dhombres. Thèse de doct. Paris : EHESS, 2007.
- GOW, Rod. « Georges Salmon 1819-1904. His mathematical work and influence ». In : *Irish Mathematical Society Bulletin* 39 (1997).
- GUYOT, Patrick. « Un carré dans un triangle, De l'utilisation de textes anciens pour résoudre un problème ». In : *Repères IREM* 51 (2003).
- HÉBERT, Élisabeth. *Instruments scientifiques à travers l'histoire*. Paris : Ellipse, 2004.
- HUGUET, Françoise. « Les pensions et institutions privées secondaires pour garçons dans la région parisienne (1700-1940) ». In : *Histoire de l'éducation* 90 (2001).
- HULIN, Nicole. « À propos de l'enseignement scientifique : une réforme de l'enseignement secondaire sous le Second Empire, la "bifurcation" ». In : *Revue d'histoire des sciences* 35 (1982), p. 217–245.
- HULIN-JUNG, Nicole. *L'organisation de l'enseignement des sciences. La voie ouverte par le second empire*. Paris : C.T.H.S., 1989.

Bibliographie

KAREN, Parshall. « The British development of the theory of invariants ». In : *Journal of the British Society for the History of Mathematics* 21 (2006), p. 186–199.

KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford university press, 1972.

KOLMOGOROV, Andrei et YOUSHKÉVICH, Adolf-Andrei. *Geometry. Analytic function theory*. Mathematics of the 19th century. Basel : Birkhäuser, 1996.

LAMANDÉ, Pierre. « Trois traités français de géométrie à l'orée du XIX^e siècle : Legendre, Peyrard et Lacroix ». In : *Physis rivista internazionale di storia della scienza* 30 (1993).

LAURENTIN, Jérôme. « Fidélités et reconstructions. L'exemple de l'école géométrique de Gaspard Monge ». sous la direction de Jean Dhombres. Thèse de doct. Paris : EHESS, 2000.

LORIA, Gino. « Perfectionnements, évolution métamorphoses du concept de coordonnées : contribution à l'histoire de la géométrie analytique ». In : *Osiris* 8 (1948), p. 218–288.

MARCHAND, Philippe. « Un chantier à ouvrir : l'histoire du baccalauréat, 1808-1940 ». In : *Histoire de l'éducation* 94 (2002), p. 201–208.

MARONNE, Sébastien. « La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne : 1637-1661 ». sous la direction de Marco Panza. Thèse de doct. université Paris VII, 2007.

MENGHINI, Marta. « The role of Projective Geometry in Italian Education and Institutions at the end of the 19th century ». In : *The International Journal for the History of Mathematics education* 1 (2006), p. 35–55.

MOUSSARD, Guillaume. « Les constructions à la règle et au compas : les Éléments d'Euclide ». In : *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*. Sous la dir. de BARBIN, Evelyne. Paris : Ellipses, 2014, p. 1–26.

MOUSSARD, Guillaume. *Problèmes de géométrie et méthodes de résolution. Trois recueils de problèmes de la deuxième moitié du XIX^e siècle en France.* Mémoire de Master d'histoire des sciences et des techniques. Nantes, 2006.

MOUSSARD, Guillaume. « The notion of method in 19th century French geometry teaching : three textbooks ». In : *Dig where you stand, Proceedings of the second international conference on the history of mathematics education.* Sous la dir. de BJARNADOTTIR, Kristin, MATOS, Jose et SCHUBRING, Gert. Lisbon, 2012, p. 333–350.

NABONNAND, Philippe. *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19^e siècle.* Document présenté pour l'HDR. 2006.

NABONNAND, Philippe. « L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles ». In : *Justifier en mathématiques.* Sous la dir. de FLAMENT, Dominique et NABONNAND, Philippe. Paris : Éditions de la maison des sciences de l'homme, 2011.

ORTIZ, Eduardo. « La communauté mathématique internationale au XIX^e siècle et ses connexions avec la périphérie ibérique ». In : *L'Europe mathématique : histoires, mythes, identités.* Sous la dir. de GOLDSTEIN, Catherine, GRAY, Jeremy et RITTER, Jim. Paris : Maison des sciences de l'homme, 1996, p. 323–346.

PAGE, C. E. *Complément de géométrie analytique.* Paris : Carilian-Gœury et Vve Dalmont, 1841.

PANZA, Marco et OTTE, Michael. *Analysis and synthesis in Mathematics : History and Philosophy.* 196. Boston : Boston Studies in the Philosophy of Science, 1997.

PATTERSON, Boyd. « The Origins of the Geometric Principle of Inversion ». In : *Isis* 19.1 (1933), p. 154–180.

PETIT, Annie. « Comte et les mathématiques ». In : *Les Philosophies et les mathématiques.* Sous la dir. de BARBIN, Évelyne et CAVEING, Maurice. Paris : Ellipses, 1996.

Bibliographie

PROST, Antoine. *Histoire de l'enseignement en France. 1800-1967*. Paris : Colin, 1968.

PROST, Antoine. *Regards historiques sur l'éducation en France*. Paris : Belin, 2007.

ROLLET, Laurent et NABONNAND, Philippe. « Les Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux Écoles polytechnique et normale ». In : *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis* (2012), p. 1–10.

SAKAROVITCH, Joël. *Épures d'architecture : de la coupe des pierres à la géométrie descriptive, XVI^e-XIX^e siècles*. Basel : Birkhäuser, 1996.

SCHUBRING, Gert. « On the methodology of analysing historical textbooks : Lacroix as textbook author ». In : *For the Learning of mathematics* 7.3 (1987).

SCHUBRING, Gert. « Researching into the History of Teaching and Learning Mathematics : the State of the art ». In : *Paedagogica Historica* 42.4-5 (2006), p. 665–667.

STROMHOLM, Per. « Fermat's methods of maxima and minima and of tangents. A reconstruction ». In : *Archives for History of Exact Sciences* 5 (1968), p. 47–69.

TATON, René. *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII^e siècle*. Paris : Hermann, 1987.

TATON, René. *L'œuvre scientifique de Monge*. Paris : P.U.F., 1951.

TAZZIOLI, Rossana et BECCHERE, Maria. « Il concetto di volume nei libri di testo : una analisi storico-critica nell'ambito dell'evoluzione dei programmi (1867-1986) ». In : *L'educazione matematica* VI.2 (2000), p. 102–115.

TAZZIOLI, Rossana, GIACARDI, Livia et BOI, Luciano. *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère. Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Houël (1868-1881)*. Paris : Albert Blanchard, 1998.

TAZZIOLI, Rossana et MAMMANA, Carmelo. « The Mathematical School in Catania at the beginning of the 20th Century and its Influence on Didactics ». In : *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*. Proceedings ESU. Université de Louvain la Neuve, 2001, p. 223–232.

TOURNÈS, Dominique. « Les cours d'André-Louis Cholesky à l'École spéciale des travaux publics, du bâtiment et de l'industrie ». In : *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire*. Sous la dir. de BARBIN, Évelyne et MOYON, Marc. Limoges : Presses universitaires de Limoges, 2013, p. 319–332.

TOURNÈS, Dominique. « Une discipline à la croisée de savoirs et d'intérêts multiples : la nomographie ». In : *Circulation Transmission Héritage, Actes du XVIIIe colloque inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques*. Sous la dir. d'AGERON, Pierre et BARBIN, Évelyne. Caen : Université de Caen-Basse-Normandie, 2011, p. 415–448.

VATIN, François. *Morale industrielle et calcul économique dans le premier XIX^e siècle. L'économie industrielle de Claude-Lucien Bergery (1787-1863)*. Paris : L'Harmattan, 2007.

VERDIER, Norbert. « Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885) ». Thèse de doct. Université Paris XI, 2009.

VERDIER, Norbert. *Les journaux de mathématiques du XIX^e siècle en France et en Europe*. Images des Mathématiques, CNRS, 2009.

VERDIR, Norbert. « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIX^e siècle en Europe ». In : *Philosophia Scientiæ* 13.2 (2009), p. 97–126.

VOLKERT, Klaus. « A quoi sert la figure ? Le problème des polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions ». In : *La Figure et la lettre*. Sous la dir. de BARBIN, E. et LOMBARD, P. Presses universitaires de Nancy, 2011, p. 241–256.

VOLKERT, Klaus. « Are there points at infinity ? a debate among German teachers around 1870 ». In : *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*.

Bibliographie

Sous la dir. de BIOESMAT-MARTAGON, Lise. Presses universitaires de Nancy, 2010.

VOLKERT, Klaus. « Projective plane : a history ». In : *Bulletin of the Manifold Atlas* (2013).