



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation bidimensionnelle et tridimensionnelle des phénomènes d'anisotropie dans les transformateurs triphasés

Jean Marc Dedulle

► **To cite this version:**

Jean Marc Dedulle. Contribution à la modélisation bidimensionnelle et tridimensionnelle des phénomènes d'anisotropie dans les transformateurs triphasés. Energie électrique. Institut National Polytechnique Grenoble (INPG), 1990. Français. NNT: . tel-02510910

**HAL Id: tel-02510910**

**<https://hal.science/tel-02510910>**

Submitted on 18 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

Présentée par

**Jean-Marc DEDULLE**

Pour obtenir le titre de DOCTEUR  
de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

( Arrêté ministériel du 23 novembre 1988 )

( Spécialité : Génie électrique )

\* \* \* \* \*

## CONTRIBUTION A LA MODELISATION BIDIMENSIONNELLE ET TRIDIMENSIONNELLE DES PHENOMENES D'ANISOTROPIE DANS LES TRANSFORMATEURS TRIPHASES

\* \* \* \* \*

Date de soutenance : Le 24 Janvier 1990

### Composition du jury

Monsieur	J.C. SABONNADIÈRE	Président
Messieurs	C. SOL M. SACOTTE A. FOGGIA G. MEUNIER	Examineurs

DEDULLE  
1990



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE GRENOBLE

46 avenue F. Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex -

Tél : 76.57.45.00

ANNEE UNIVERSITAIRE 1989

Président de l'Institut  
Monsieur Georges LESPINARD

## PROFESSEURS DES UNIVERSITES

ENSERG	BARIBAUD	Michel	ENSPG	JOST	Rémy
ENSIEG	BARRAUD	Alain	ENSPG	JOUBERT	Jean-Claude
ENSPG	BAUDELET	Bernard	ENSIEG	JOURDAIN	Geneviève
INPG	BEAUFILS	Jean-Pierre	ENSIEG	LACOUME	Jean-Louis
ENSERG	BLIMAN	Samuel	ENSIEG	LADET	Pierre
ENSHMG	BOIS	Philippe	ENSHMG	LESIEUR	Marcel
ENSEEG	BONNETAIN	Lucien	ENSHMG	LESPINARD	Georges
ENSPG	BONNET	Guy	ENSPG	LONGUEUE	Jean-Pierre
ENSIEG	BRISSONNEAU	Pierre	ENSHMG	LORET	Benjamin
IUFA	BRUNET	Yves	ENSEEG	LOUCHET	François
ENSHMG	CAILLERIE	Denis	ENSEEG	LUCAZEAU	Guy
ENSPG	CAVAIGNAC	Jean-François	ENSIEG	MASSE	Philippe
ENSPG	CHARTIER	Germain	ENSIEG	MASSELOT	Christian
ENSERG	CHENEVIER	Pierre	ENSIMAG	MAZARE	Guy
UFR PGP	CHERADAME	Hervé	ENSIMAG	MOHR	Roger
ENSIEG	CHERUY	Arlette	ENSHMG	MOREAU	René
ENSERG	CHOVET	Alain	ENSIEG	MORET	Roger
ENSERG	COHEN	Joseph	ENSIMAG	MOSSIERE	Jacques
ENSEEG	COLINET	Catherine	ENSHMG	OBLED	Charles
ENSIEG	CORNUT	Bruno	ENSEEG	OZIL	Patrick
ENSIEG	COULOMB	Jean-Louis	ENSEEG	PAULEAU	Yves
ENSERG	COUMES	André	ENSIEG	PERRET	Robert
ENSIMAG	CROWLEY	James	ENSHMG	PIAU	Jean-Michel
ENSHMG	DARVE	Félix	ENSERG	PIC	Etienne
ENSIMAG	DELLA DORA	Jean-François	ENSIMAG	PLATEAU	Brigitte
ENSERG	DEPEY	Maurice	ENSERG	POUPOT	Christian
ENSPG	DEPORTES	Jacques	ENSEEG	RAMEAU	Jean-Jacque
ENSEEG	DEROO	Daniel	ENSPG	REINISCH	Raymond
ENSEEG	DESRE	Pierre	UFR PGP	RENAUD	Maurice
ENSERG	DOLMAZON	Jean-Marc	UFR PGP	ROBERT	André
ENSEEG	DURAND	Francis	ENSIMAG	ROBERT	François
ENSPG	DURAND	Jean-Louis	ENSIEG	SABONNADIERE	Jean-Claude
ENSHMG	FAUTRELLE	Yves	ENSIMAG	SAUCIER	Gabriele
ENSIEG	FOGGIA	Albert	ENSPG	SCHLENKER	Claire
ENSIMAG	FONLUPT	Jean	ENSPG	SCHLENKER	Michel
ENSIEG	FOULARD	Claude	ENSERG	SERMET	Pierre
UFR PGP	GANDINI	Alessandro	UFR PGP	SILVY	Jacques
ENSPG	GAUBERT	Claude	ENSHMG	SIRIEYS	Pierre
ENSERG	GENTIL	Pierre	ENSEEG	SOHM	Jean-Claude
ENSIEG	GENTIL	Sylviane	ENSIMAG	SOLER	Jean-Louis
IUFA	GREVEN	Hélène	ENSEEG	SOUQUET	Jean-louis
ENSIEG	GUEGUEN	Claude	ENSHMG	TROMPETTE	Philippe
ENSERG	GUERIN	Bernard	ENSPG	VINCENT	Henri
ENSEEG	GUYOT	Pierre	ENSERG	ZADWORNY	François
ENSIEG	IVANES	Marcel			
ENSIEG	JAUSSAUD	Pierre			

.../...

SITUATION PARTICULIERE

## PROFESSEURS D'UNIVERSITE

DETACHEMENT

ENSIMAG	LATOMBE	J.Claude	Détachement.....	21/10/1989
ENSHMG	PIERRARD	J.Marie	Détachement.....	30/04/1989
ENSIMAG	VEILLON	Gérard	Détachement.....	30/09/1990
ENSIMAG	VERJUS	J.Pierre	Détachement.....	30/09/1989
ENSPG	BLOCH	Daniel	Récteur à c/.....	21/12/1988

SURNOMBRE

INPG	CHIAVERINA	Jean .....		30/09/1989
ENSHMG	BOUVARD	Maurice.. ..		30/09/1991
ENSEEG	PARIAUD	J.Charles .....		30/09/1991

**PERSONNES AYANT OBTENU LE DIPLOME  
d'habilitation à diriger des recherches**

BECKER	M.	DANES	F.	GHIBAUDO	G.	MULLER	J.
BINDER	Z.	DEROO	D.	HAMAR	S.	NGUYEN TRONG	B.
CHASSERY	J.M.	DIARD	J.P.	HAMAR	R.	NIEZ	J.J.
CHOLLET	J.P.	DION	J.M.	LACHENAL	D.	PASTUREL	A.
COEY	J.	DUGARD	L.	LADET	P.	PLA	F.
COLINET	C.	DURAND	M.	LATOMBE	C.	ROGNON	J.P.
COMMAULT	C.	DURAND	R.	LE HUY	H.	ROUGER	J.
CORNUEJOLS	G.	GALERIE	A.	LE GORREC	B.	TCHUENTE	M.
COULOMB	J.L.	GAUTHIER	J.P.	MADAR	R.	VINCENT	H.
COURNIL	M.	GENTIL	S.	MEUNIER	G.	YAVARI	A.R.
DALARD	F.						

**CHERCHEURS DU C.N.R.S.**

DIRECTEURS DE RECHERCHE CLASSE 0

LANDAU	Ioan
NAYROLLES	Bernard

DIRECTEURS DE RECHERCHE 1ère CLASSE

ANSARA	Ibrahim	KRAKOWIAK	Sacha
CARRE	René	LEPROVOST	Christian
FRUCHARD	Robert	VACHAUD	Georges
HOPFINGER	Emile	VERJUS	Jean-Pierre
JORRAND	Philippe		

DIRECTEURS DE RECHERCHE 2ème CLASSE

ALEMANY	Antoine	JOUD	Jean-Charles
ALLIBERT	Colette	KAMARINOS	Georges
ALLIBERT	Michel	KLEITZ	Michel
ARMAND	Michel	KOFMAN	Walter
AUDIER	Marc	LEJEUNE	Gérard
BERNARD	Claude	MADAR	Roland
BINDER	Gilbert	MERMET	Jean
BONNET	Roland	MICHEL	Jean-Marie
BORNARD	Guy	MEUNIER	Jacques
CAILLER	Marcel	PEUZIN	Jean-Claude
CALMET	Jacques	PIAU	Monique
CHATILLON	Christian	RENOUARD	Dominique
CLERMONT	Jean-Robert	SENATEUR	Jean-Pierre
COURTOIS	Bernard	SIFAKIS	Joseph
DAVID	René	SIMON	Jean-Paul
DION	Jean-Michel	SUERY	Michel
DRIOLE	Jean	TEODOSIU	Christian
DURAND	Robert	VAUCLIN	Michel
ESCUDIER	Pierre	VENNEREAU	Pierre
EUSTATHOPOULOS	Nicolas	WACK	Bernard
GARNIER	Marcel	YONNET	Jean-Paul
GUELIN	Pierre		

.../...

PERSONNALITES AGREEES A TITRE PERMANENT A DIRIGER DES TRAVAUX DE RECHERCHE  
( DECISION DU CONSEIL SCIENTIFIQUE )

<u>ENSEEG</u>	HAMMOU MARTIN-GARIN SARRAZIN SIMON	Abdelkader Régina Pierre Jean-Paul
<u>ENSERG</u>	BOREL	Joseph
<u>ENSIEG</u>	DESCHIZEAUX GLANGEAUD PERARD REINISCH	Pierre François Jacques Raymond
<u>ENSHMG</u>	ROWE	Alain
<u>ENSIMAG</u>	COURTIN	Jacques
<u>C.E.N.G</u>	CADET COEURE DELHAYE DUPUY JOUVE NICOLAU NIFENECKER PERROUD PEUZIN TAIEB VINCENDON	Jean Philippe Jean-Marc Michel Hubert Yvan Hervé Paul Jean-Claude Maurice Marc
	Laboratoire extérieurs :	
<u>C.N.E.T.</u>	DEVINE GERBER MERCKEL PAULEAU	Rodericq Roland Gérard Yves

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX



Président de l'Université :

M. NEMOZ Alain

ANNEE UNIVERSITAIRE 1988 - 1989

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ERE CLASSE

ADIBA Michel	Informatique
ANTOINE Pierre	Géologie I.R.I.G.M.
ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU Robert	Physique Nucléaire I.S.N.
AURIAULT Jean Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARJON Robert	Physique Nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean René	Statistiques - Mathématiques Appliquées
BECKER Pierre	Physique
BEGUIN Claude	Chimie Organique
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOEHLER Jean Paul	Mécanique
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CASTAING Bernard	Physique
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHARDON Michel	Géographie
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEMAILLY Jean Pierre	Mathématiques Pures
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DOLIQUE Jean Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Roland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FINKE Gerde	Informatique
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GAUTRON René	Chimie
GENIES Eugène	Chimie
GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GUITTON Jacques	Chimie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean René	Mathématiques Pures
JOSELEAU Jean Paul	Biochimie

KAHANE André, détaché  
 KAHANE Josette  
 KRAKOWIAK Sacha  
 LAJZEROWICZ Jeanine  
 LAJZEROWICZ Joseph  
 LAURENT Pierre Jean  
 LEBRETON Alain  
 DE LEIRIS Joël  
 LHOMME Jean  
 LLIBOUTRY Louis  
 LOISEAUX Jean Marie  
 LONGEQUEUE Nicole  
 LUNA Domingo  
 MACHE Régis  
 MASCLE Georges  
 MAYNARD Roger  
 OMONT Alain  
 OZENDA Paul  
 PANNETIER Jean  
 PAYAN Jean Jacques  
 PEBAY PEYROULA Jean Claude  
 PERRIER Guy  
 PIERRE Jean Louis  
 RENARD Michel  
 RIEDTMANN Christine  
 RINAUDO Marguerite  
 ROSSI André  
 SAXOD Raymond  
 SENDEL Philippe  
 SERGERAERT Francis  
 SOUCHIER Bernard  
 SOUTIF Michel  
 STUTZ Pierre  
 TRILLING Laurent  
 VAN CUTSEM Bernard  
 VIALON Pierre

Physique  
 Physique  
 Mathématiques Appliquées  
 Physique  
 Physique  
 Mathématiques Appliquées  
 Mathématiques Appliquées  
 Biologie  
 Chimie  
 Géophysique  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique  
 Mathématiques Pures  
 Physiologie Végétale  
 Géologie  
 Physique du Solide  
 Astrophysique  
 Botanique (Biologie Végétale)  
 Chimie  
 Mathématiques Pures  
 Physique  
 Géophysique  
 Chimie Organique  
 Thermodynamique  
 Mathématiques  
 Chimie C.E.R.M.A.V.  
 Biologie  
 Biologie Animale  
 Biologie Animale  
 Mathématiques Pures  
 Biologie  
 Physique  
 Mécanique  
 Mathématiques Appliquées  
 Mathématiques Appliquées  
 Géologie

PROFESSEURS DE 2EME CLASSE

ARMAND Gilbert  
 ATTANE Pierre  
 BARET Paul  
 BERTIN José  
 BLANCHI Jean Pierre  
 BLOCK Marc  
 BLUM Jacques  
 BOITET Christian  
 BORNAREL Jean  
 BORRIONE Dominique  
 BOUVET Jean  
 BROSSARD Jean  
 BRUANDET Jean François  
 BRUGAL Gérard  
 BRUN Gilbert  
 CERFF Rudiger  
 CHIARAMELLA Yves  
 CHOLLET Jean Pierre  
 COLOMBEAU Jean François  
 COURT Jean  
 CUNIN Pierre Yves

Géographie  
 Mécanique  
 Chimie  
 Mathématiques  
 S.T.A.P.S.  
 Biologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Mathématiques Appliquées  
 Physique  
 Automatique informatique  
 Biologie  
 Mathématiques  
 Physique  
 Biologie  
 Biologie  
 Biologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Mécanique  
 Mathématiques (ENSL)  
 Chimie  
 Informatique

DAVID Jean	Géographie
DHOUAILLY Danielle	Biologie
DUFRESNOY Alain	Mathématiques Pures
GASPARD François	Physique
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences Nucléaires
GILLARD Roland	Mathématiques Pures
GIORNI Alain	Sciences Nucléaires
GONZALEZ SPRINBERG Gérardo	Mathématiques Pures
GUIGO Maryse	Géographie
GUMUCHIAN Hervé	Géographie
HACQUES Gérard	Mathématiques Appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HERAULT Jeanny	Physique
HERINO Roland	Physique
JARDON Pierre	Chimie
KERCKHOVE Claude	Géologie
MANDARON Paul	Biologie
MARTINEZ Francis	Mathématiques Appliquées
MOREL Alain	Géographie
NEMOZ Alain	Thermodynamique C.N.R.S. C.R.T.B.T.
NGUYEN HUY Xuong	Informatique
OUDET Bruno	Mathématiques Appliquées
PAUTOU Guy	Biologie
PECHER Arnaud	Géologie
PELMONT Jean	Biochimie
PELLETIER Guy	Astrophysique
PERRIN Claude	Sciences Nucléaires I.S.N.
PIBOULE Michel	Géologie
RAYNAUD Hervé	Mathématiques Appliquées
REGNARD Jean René	Physique
RICHARD Jean Marc	Physique
RIEDTMANN Christine	Mathématiques Pures
ROBERT Danielle	Chimie
ROBERT Gilles	Mathématiques Pures
ROBERT Jean Bernard	Chimie Physique
SARROT REYNAULD Jean	Géologie
SAYETAT Françoise	Physique
SERVE Denis	Chimie
STOECKEL Frédéric	Physique
SCHOLL Pierre Claude	Mathématiques Appliquées
SUBRA Robert	Chimie
VALLADE Marcel	Physique
VIDAL Michel	Chimie Organique
VINCENT Gilbert	Physique
VIVIAN Robert	Géographie
VOTTERO Philippe	Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.U.T. 1

PROFESSEURS DE 1ERE CLASSE

BUISSON Roger	Physique I.U.T. 1 -
CHEHIKIAN Alain	E.E.A. I.U.T.1
DODU Jacques	Mécanique Appliquée I.U.T. 1
NEGRE Robert	Génie Civil I.U.T. 1
NOUGARET Marcel	Automatique I.U.T. 1
PERARD Jacques	E.E.A. I.U.T. 1

PROFESSEURS DE 2EME CLASSE

BEE Marc	Physique I.U.T. 1
BOUTHINON Michel	E.E.A. I.U.T. 1
CHAMBON René	Génie Mécanique I.U.T. 1.
CHENAVAS Jean	Physique I.U.T. 1
CHILO Jean	Physique I.U.T. 1
CHOUTEAU Gérard	Physique I.U.T. 1
CONTE René	Physique I.U.T. 1
FOSTER Panayotis	Chimie I.U.T. 1
GOSSE Jean Pierre	E.E.A. I.U.T. 1
GROS Yves	Physique I.U.T. 1
HAMAR Roger	Chimie I.U.T. 1
KUHN Gérard, détaché	Physique I.U.T. 1
LEVIEL Jean Louis	Physique I.U.T. 1
MAZUER Jean	Physique I.U.T. 1
MICHOULIER Jean	Physique I.U.T. 1
MONLLOR Christian	E.E.A. I.U.T. 1
PERRAUD Robert	Chimie I.U.T. 1
PIERRE Gérard	Chimie I.U.T. 1
TERRIEZ Jean Michel	Génie Mécanique I.U.T. 1
TOUZAIN Philippe	Chimie I.U.T. 1
TURGEMAN Sylvain	Génie civil
VINCENDON Marc	Chimie I.U.T. 1
ZIGONE Michel	Physique I.U.T. 1

*À ma tendre épouse Geneviève  
à mes enfants Rémi et Ariane*



# REMERCIEMENTS



## REMERCIEMENTS

Ce travail à été réalisé au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (L.E.G. - U.A. C.N.R.S. 355) grâce au support financier de la société FRANCE-TRANSFO, à qui j'adresse mes remerciements; je tiens aussi à remercier l'Association pour le Développement de la Recherche auprès des universités et des établissements publics à caractère scientifique et culturel de Grenoble (A.D.R.) pour avoir géré le financement de cette thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à :

Monsieur J.C. SABONNADIÈRE, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, Directeur du groupement A.M.P.E.R.E et de l'équipe modélisation et C.A.O. du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, pour m'avoir prodigué tout au long de cette thèse ses suggestions et encouragements, ainsi que pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être l'un des rapporteurs. Qu'il trouve ici, l'expression de ma plus profonde reconnaissance.

Monsieur C. SOL, Professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, coordinateur du GRECO "Structures Electrotechniques", pour l'intérêt qu'il a manifesté en honorant le jury de sa présence et en acceptant d'être l'un des rapporteurs.

Monsieur M. SACOTTE, Ingénieur responsable du Bureau d'Etude de la société FRANCE-TRANSFO, membre du jury, pour m'avoir proposé ce sujet intéressant et pour m'avoir accueilli à plusieurs reprises dans cette société.

Monsieur A. FOGGIA, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui m'a accueilli dans son équipe, a dirigé mes recherches et m'a prodigué tout au long de cette thèse ses conseils et encouragements.

Monsieur G. MEUNIER, Chargé de recherche au Centre National de Recherche Scientifique et habilité à diriger des recherches, pour m'avoir fait bénéficier de sa grande expérience, ses conseils et ses encouragements ; pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour sa grande disponibilité. Qu'il soit assuré de ma plus profonde reconnaissance ainsi que de ma sincère amitié.

Je tiens également à remercier :

Monsieur R. PERRET, Directeur du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, Messieurs M. IVANES puis J.L. COULOMB, Responsables de la formation Doctorale de Génie Electrique, pour l'accueil amical au sein du Laboratoire.

Monsieur L. PIERRAT, expert délégué auprès du Ministère de la Recherche (M.R.E.S.), pour l'intérêt et les remarques constructives qu'il a portés à ce travail.

Monsieur O. DESBORDES, Directeur du Laboratoire de Mécanique Appliquée de Marseille pour m'avoir accueilli à plusieurs reprises dans son Laboratoire et à Jean-Claude MICHEL pour m'avoir fait bénéficier de son expérience dans le domaine de l'homogénéisation.

Monsieur WILD et l'ensemble du personnel de la société FRANCE-TRANSFO que j'ai cotoyés au cours de cette étude.

Madame J. BRICHET, qui a assuré la frappe de ce mémoire en y mettant beaucoup de soin et de bonne volonté.

Pour leur aide précieuse et les discussions intéressantes que nous avons eues ensemble, je tiens à remercier : P. LABIE, A. RAIZER, A. ROULHAC DE ROCHEBRUNE, D. JOURDAN, A. DARCHERIF, S. ZOUZOU, B. CHIA.

Je remercie Messieurs P. GUILLOT, P. PERREAU du Service informatique pour leur aimable collaboration et leurs rapports amicaux.

J'aimerais enfin remercier chaleureusement l'ensemble des chercheurs, ingénieurs et techniciens du Laboratoire et tout particulièrement : Mesdames E.CALLAGHER, G. BUISSON, F. OSSART, A. LBOUC et O. SANTANA ; Messieurs X. BRUNOTTE, R. SALDANHA, S. PELISSIER, E. VASSENT, G. CARRON de la MORRINAIS, J.F. IMHOFF, H. MAGNIN, Y. MARECHAL, J. SAKELLARIS, T. RAFESTAIN, T. WAECKERLE, D. JOUVE, J.C. PERRIER, B. MOREL, F. MIERMONT, T. NGNEGUEU, LIEM, R. SHI, M. BENHAMED, N. HADJ-SAID.

# SOMMAIRE



# SOMMAIRE

<b>REMERCIEMENTS</b>	p.11
<b>SOMMAIRE</b>	p.15
<b>INTRODUCTION</b>	p.21
<b>CHAPITRE 1 : <i>Généralités sur les matériaux magnétiques doux et leurs utilisations dans la construction des transformateurs de puissance</i></b>	
<b>1. INTRODUCTION</b>	p.25
<b>2. LES TOLES MAGNETIQUES POUR LA CONSTRUCTION ELECTRIQUE</b>	
<b>2.1 Généralités</b>	p.26
<b>2.2 Historique</b>	p.27
<b>2.3 Influence de l'orientation</b>	p.29
<b>2.4 Le contrôle des impuretés et des tensions internes</b>	p.30
<b>2.5 Influence de la taille transverse des domaines</b>	p.31
<b>2.6 Influence de l'épaisseur</b>	p.31
<b>2.7 Influence de la teneur en silicium</b>	p.32
<b>2.8 Film isolant et irradiation de la surface</b>	p.33
<b>3. RECHERCHES RECENTES DANS L'ANALYSE DES CIRCUITS MAGNETIQUES DES TRANSFORMATEURS TRIPHASES</b>	
<b>3.1 Généralités</b>	p.34
<b>3.2 Historique</b>	p.35
<b>3.3 Analyse de la distribution de flux</b>	p.36
3.3.1 Distorsion de la forme d'onde	p.36
3.3.2 Flux transversaux	p.36
3.3.3 Variations du champ sur la section et dans le plan de la tôle	p.37
<b>3.4 Analyse des joints</b>	p.38
3.4.1 Joints imbriqués en T	p.38
3.4.2 Joints imbriqués de coin	p.39
<b>4. CONCLUSIONS</b>	p.41

## **CHAPITRE 2 : *Présentation de l'homogénéisation et de la méthode des moyennes.***

<b>1. GENERALITES SUR L'HOMOGENEISATION</b>	p.45
<b>1.1 Milieu homogène équivalent</b>	p.46
<b>2. DESCRIPTION DE LA METHODE DES MOYENNES</b>	p.48
<b>3. EXPRESSION DU TENSEUR DE PERMEABILITE HOMOGENEISE</b>	p.49
<b>4. APPLICATION A LA MODELISATION DU FEUILLETAGE FER-AIR D'UN TRANSFORMATEUR</b>	p.55
<b>4.1 Milieux linéaires</b>	p.56
<b>4.2 Milieux saturables</b>	p.58
<b>4.3 Technique d'homogénéisation et feuillette fer-air</b>	p.58
<b>5. CONCLUSIONS</b>	p.61

## **CHAPITRE 3 : *Modèles de représentation des matériaux à caractéristiques anisotropes non linéaires***

<b>1. INTRODUCTION</b>	p.63
<b>2. LOIS DE COMPORTEMENT NON LINEAIRES</b>	p.64
<b>2.1 Matériaux doux isotropes non linéaires</b>	p.64
<b>2.2 Matériaux feuilletés</b>	p.65
<b>2.3 Matériaux doux anisotropes non linéaires</b>	p.66
2.3.1 Modèle des deux axes	p.66
2.3.2 Modèle elliptique	p.69
2.3.3 Modèle elliptique avec rotation d'axes	p.72
2.3.4 Comparaison entre les différents modèles	p.76
<b>3. CONCLUSIONS</b>	p.77

## **CHAPITRE 4 : Modélisation des phénomènes magnétostatiques non linéaires dans les matériaux doux**

<b>1. INTRODUCTION</b>	p.81
<b>2. ETABLISSEMENT DE LA RELATION B(H)</b>	p.82
<b>2.1 Loi de comportement linéaire</b>	p.82
2.1.1 Les matériaux doux isotropes	p.82
2.1.2 Les matériaux doux anisotropes linéaires	p.82
2.1.3 Les aimants permanents à caractéristique linéaire	p.83
<b>2.2 Loi de comportement non linéaire</b>	p.84
<b>3. FORMULATION ELEMENTS FINIS EN POTENTIEL SCALAIRE TOTAL</b>	p.85
<b>3.1 Cas linéaire</b>	p.87
<b>3.2 Cas non linéaire</b>	p.88
<b>4. CALCUL DU TENSEUR DE PERMEABILITE INCREMENTALE</b>	p.90
<b>4.1 Analyse bidimensionnelle</b>	p.90
4.1.1 Milieux anisotropes	p.90
4.1.2 Milieux isotropes	p.91
4.1.3 Milieux feuilletés	p.91
<b>4.2 Analyse tridimensionnelle</b>	p.93
4.2.1 Milieux anisotropes	p.93
4.2.2 Milieux isotropes	p.94
4.2.3 Milieux anisotropes feuilletés	p.94
<b>5. CONCLUSIONS</b>	p.96

## **CHAPITRE 5 : *Application à la modélisation 2D et 3D d'un circuit magnétique de transformateur***

<b>1. INTRODUCTION</b>	p.99
<b>2. ANALYSE BIDIMENSIONNELLE DANS LE PLAN DES TOLES</b>	p.100
<b>2.1 Milieux anisotropes</b>	p.100
<b>2.2 Etude comparative entre milieux isotrope et anisotrope</b>	p.104
<b>3. ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE DU CIRCUIT MAGNETIQUE</b>	p.106
<b>4. TECHNIQUES NUMERIQUES POUR L'AMELIORATION DE LA CONVERGENCE</b>	p.111
<b>4.1 Méthode de Newton-Raphson accélérée</b>	p.112
<b>4.2 Maillage auto-adaptatif</b>	p.113
<b>5. CONCLUSIONS</b>	p.114
<b>CONCLUSIONS</b>	p.117
<b>ANNEXES</b>	p.121
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	p.125

# INTRODUCTION



## INTRODUCTION

Les transformateurs de distribution sont soumis à une norme Européenne qui permet de spécifier le niveau de pertes des transformateurs. Le niveau de pertes admis est reconsidéré suivant les changements qui interviennent dans le contexte économique, mais aussi dans la technologie et les procédés de fabrication. Le niveau optimal est déterminé par la valeur minimale de la somme du coût des pertes capitalisées sur toute la durée de vie du transformateur. Les pertes capitalisées sont calculées en fonction des régimes de charge et du coût des pertes en réseau, des transformateurs. Quant au coût des transformateurs, il est déterminé par différentes options, tenant compte des développements technologiques récents.

Compte tenu des progrès récents tant au niveau de la conception que de la fabrication et des matières premières, le niveau des pertes à vide admis dans les transformateurs de distribution et notamment de petite puissance (50 - 100 kVA) est reconsidéré à la baisse.

Les progrès technologiques récents portent tout d'abord sur la fabrication. En effet, compte tenu de l'utilisation de nouveaux produits comme les tôles magnétiques améliorées, les constructeurs ont été amenés à modifier leurs outillages. C'est ainsi que les machines automatiques de découpage des tôles ont permis d'améliorer la précision et la stabilité des cotes. Cette amélioration s'est traduite par une réduction importante des entrefers dans les zones de recouvrement noyaux-culasses et par conséquent, un gain substantiel sur le courant et les pertes à vide a pu être réalisé.

Les progrès portent aussi sur les matières premières. Le prix de la matière première entrant pour environ 50% dans le prix de revient du transformateur [Hochart 88], tous les progrès accomplis par les fournisseurs sont répercutés de façon très sensible sur les appareils. Ainsi les sidérurgistes proposent pour les meilleures tôles des pertes spécifiques de 0.7W/kg à 1.7T et 50Hz. Ce progrès provient de l'effort des sidérurgistes pour produire des tôles de plus en plus minces (30/100mm, 23/100mm et peut-être de 15/100mm) et aussi du développement des tôles à cristaux orientés.

Et enfin, les progrès touchent à la conception et l'assemblage des circuits magnétiques. Le développement des tôles à cristaux orientés a conduit à élaborer des modes de construction dans lesquels le flux magnétique suit d'aussi près que possible la direction préférentielle. D'où d'une part, la construction dite à joints obliques dans les zones de liaison entre noyaux et culasses et d'autre part la suppression des assemblages par broches et leur remplacement par des frettages à l'aide de rubans en tissu de verre imprégnés de résine thermodurcissable [Hochart 88].

Ces progrès issus du travail important de chercheurs et d'ingénieurs à travers le Monde, visent à minimiser les pertes dans les transformateurs et sont justifiés lorsque l'on sait que le coût capitalisé des pertes est du même ordre de grandeur que le coût du transformateur [Denoble]; on rajoutera, pour donner un chiffre plus global que les pertes à l'échelon national sont équivalentes à la puissance d'une centrale nucléaire de 960MW [Hochart 88].

Ce travail s'inscrit donc dans un programme de recherche visant à réduire les pertes à vide qui prédominent dans les transformateurs de distribution de petite puissance. Or le transformateur est en lui-même un appareil qui possède déjà un très bon rendement, le gain est donc difficile à obtenir. Notre contribution vise donc à prendre en compte les propriétés d'anisotropie cristalline et de géométrie (feuilletage) liées à l'utilisation des tôles à grains orientés et à la conception du circuit magnétique. La représentation de tels phénomènes physiques permettra d'améliorer les calculs de la répartition du champ. Ces calculs seront faits à partir des logiciels de calcul par éléments finis développés au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (FLUX2D et FLUX3D), après implémentation des modèles d'anisotropie.

Il est à noter que des efforts similaires sont faits pour les transformateurs de puissance mais compte tenu de la durée d'utilisation de la puissance de pointe et du coût des pertes dues à la charge qui sont respectivement 2 et 4 fois supérieurs à ceux des transformateurs de distribution de petite puissance [Denoble], ces efforts portent donc sur la minimisation des pertes en charge [Ngnegueu 89].

Après une synthèse bibliographique sur les progrès réalisés sur les matériaux magnétiques doux et les recherches récentes dans l'analyse des circuits magnétiques des transformateurs triphasés (Chapitre I), nous présentons dans le Chapitre II une technique générale permettant d'homogénéiser des matériaux hétérogènes à structures périodiques [De Rochebrune 89 - Dedulle 90.1]. Cette technique appelée méthode des moyennes est appliquée au feuilletage fer-air des transformateurs. Le Chapitre III propose différents modèles mathématiques pour la représentation des matériaux à caractéristiques anisotropes non linéaires. Nous étudions pour un type de matériau magnétique ou de structure donné, le modèle le plus représentatif. Il s'agit dans le Chapitre IV d'exposer une formulation spécifique aux structures anisotropes et de préciser la méthodologie d'implémentation des différents modèles. Nous verrons que la difficulté réside dans le calcul du tenseur de perméabilité incrémentale. Le Chapitre V est consacré à l'étude du circuit magnétique d'un transformateur de 100kVA. L'analyse de la répartition du champ magnétique est faite en 2 et 3 dimensions. Des techniques numériques telle que la méthode de Newton-Raphson accélérée [Shen 87] et la génération d'un maillage auto-adaptatif [Dedulle 89.1 - Raizer 89.1] sont utilisées afin d'améliorer la solution obtenue.

# CHAPITRE I

## **GENERALITES SUR LES MATERIAUX MAGNETIQUES DOUX ET LEURS UTILISATIONS DANS LA CONSTRUCTION DES TRANSFORMATEURS DE PUISSANCE**



## CHAPITRE 1

### GENERALITES SUR LES MATERIAUX MAGNETIQUES DOUX ET LEURS UTILISATIONS DANS LA CONSTRUCTION DES TRANSFORMATEURS DE PUISSANCE

#### I. INTRODUCTION

Les pertes à vide d'un transformateur de distribution sont les pertes dissipées dans le circuit magnétique sous l'effet de l'induction alternative. La fonction donnant les pertes spécifiques en fonction de l'induction dépend à la fois de la qualité intrinsèque de la tôle magnétique (mesurée sur cadre Epstein ou sur cadre une bande), de l'altération de cette qualité au cours des découpages et manutentions successifs et enfin de la géométrie et de la constitution du circuit magnétique (mode d'enchevêtrement noyau-culasse, nombre de gradins du circuit magnétique, nombre de tôles empilées simultanément, etc...). Nous analyserons dans ce chapitre les pertes intrinsèques de la tôle et celles liées à la construction du transformateur ainsi que les facteurs qui les influencent.

Actuellement, à cause de la géométrie et de la constitution des circuits magnétiques des transformateurs, les pertes fer sont supérieures à celles mesurées dans les tôles. Cette augmentation est représentée par le coefficient de construction (B.F.) défini par :

$$\text{B.F.} = \frac{\text{Pertes fer dans le circuit magnétique}}{\text{Pertes fer mesurées par le cadre Epstein}}$$

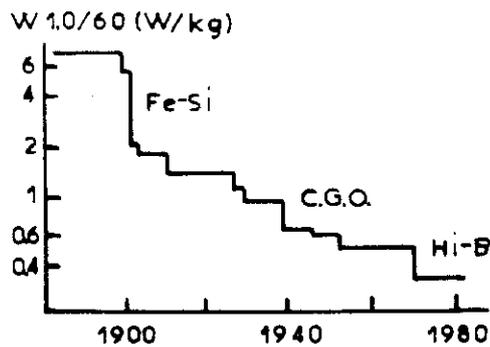
Il apparaît donc deux axes de recherches importants, l'un consistant à comprendre et améliorer chacune des étapes du processus de fabrication et l'autre consistant à optimiser le dimensionnement du transformateur en vue de réaliser le double objectif de minimiser les pertes intrinsèques des tôles et de s'approcher du coefficient de construction idéal.

Il y a encore beaucoup de place pour des progrès à venir dans ces deux domaines, car d'une part les pertes réellement observées dans des tôles de bonne qualité sont environ de 2.5 à 3 fois plus grandes que les pertes théoriques minimales calculées [Brissonneau] et d'autre part le coefficient de construction d'un transformateur avec des tôles de bonne qualité est de l'ordre de 1.2 [Ichijima 84]

## II. LES TOLES MAGNETIQUES POUR LA CONSTRUCTION ELECTRIQUE

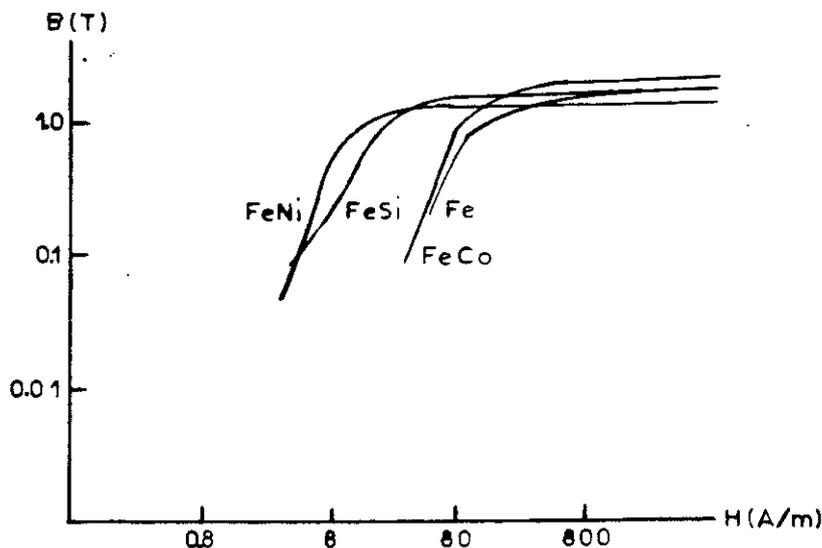
### II.1 Généralités

On ne peut construire des machines électriques performantes que si l'on dispose des meilleurs matériaux : ferromagnétiques, conducteurs et isolants. Nous nous intéresserons aux matériaux ferromagnétiques et plus particulièrement aux matériaux magnétiques doux utilisés pour la construction des circuits magnétiques des transformateurs. Les matériaux magnétiques doux sont caractérisés par une forte aimantation à saturation, une haute perméabilité, un faible champ coercitif et de faibles pertes magnétiques. Les propriétés magnétiques de ces matériaux n'ont cessé d'évoluer, entraînant une diminution importante des pertes. La figure I.1 montre l'évolution de ces pertes dans la période 1880-1980 ; ainsi en cent ans, les pertes mesurées à 1 Tesla et 60 hz passent de 8 W/kg à 0,4 W/kg [Degauque 85].



- Figure I.1 -  
Evolution des pertes d'énergie  
magnétiques dans les tôles

En fonction de leurs applications, il est possible de les classer en six groupes : le fer et les aciers, les alliages Fe-Si, les alliages Fe-Al et Fe-Al-Si, les alliages Fe-Ni, les alliages Fe-Co et des alliages amorphes (Figure I.2).



- Figure I.2 -  
Caractéristiques  
magnétiques des alliages  
magnétiques doux  
[Doc. metalimphy]

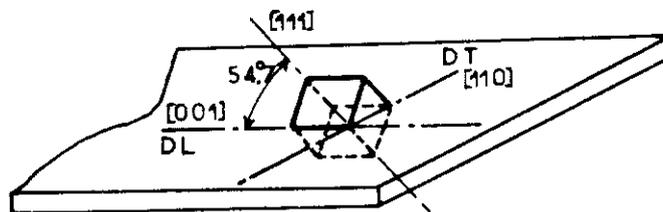
## II.2 Historique

La chronologie des événements qui montre les progrès réalisés, débute vers 1885 par la mise au point du transformateur et de l'alternateur montrant les qualités du fer dans les circuits magnétiques mais aussi ses deux défauts majeurs en régime alternatif : son hystérésis et sa bonne conductivité électrique, défauts qui conduisent l'un et l'autre à une perte d'énergie.

Une première solution au niveau de la construction fut presque immédiate, on feuilleta les circuits. La production de matériaux à pertes plus faibles fut plus longue. C'est tout d'abord en 1882 que Hadfield prépara les premières tôles en fer-silicium. C'est ensuite vers 1900 que le développement industriel fut rapide en raison des avantages qui en résultaient :

- \* augmentation de la perméabilité, diminution du champs coercitif et des pertes par hystérésis ;
- \* augmentation de la résistivité avec comme conséquence la réduction des courants de Foucault.

On notera la brusque diminution de 8 à 2 W/kg (Figure I.1) due à l'apparition de ce type d'alliage. Une deuxième innovation est apparue en 1935, avec la mise au point par N.P. Goss de la fabrication de tôles d'acier à grains orientés, dans lesquelles la direction d'une arête de la maille cubique [001] est orientée dans le sens de laminage (Figure I.3).



- Figure I.3 -  
Orientation de Goss

D.L. : Direction de laminage

D.T. : Direction travers

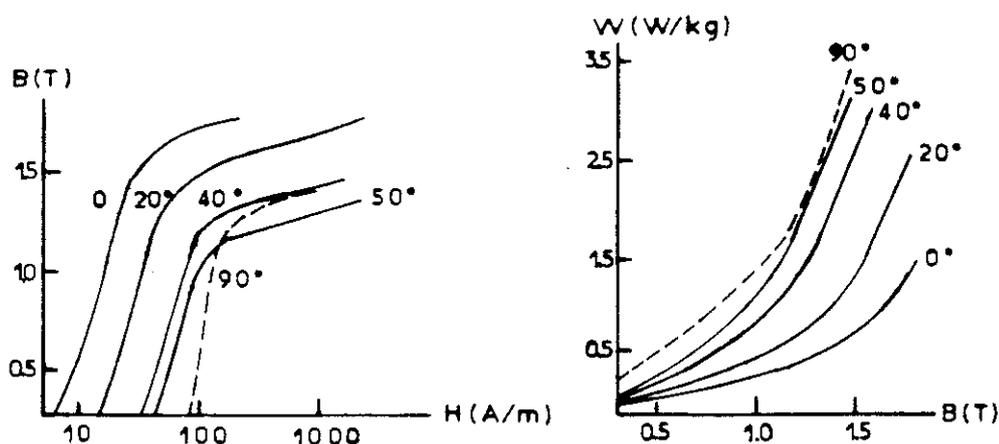
Les tôles ainsi obtenues ont, lorsque le champ agit dans le sens du laminage, des caractéristiques magnétiques nettement supérieures à celles des tôles de même épaisseur non orientées (Tableau I.4), à condition de les utiliser dans la direction du laminage.

En effet le caractère fortement anisotrope des tôles à cristaux orientés fait que leurs caractéristiques dépendent beaucoup de l'orientation du champ magnétique par rapport au sens du laminage (Figures I.5). Pour cette raison l'emploi des tôles à cristaux orientés s'est généralisé dans la construction des circuits magnétiques des transformateurs, à partir des années quarante aux USA et dans les années cinquante en Europe. Les améliorations constantes conduisent vers 1970 au Japon, à l'apparition des tôles hautement orientées dites Hi-B(High-Induction). La tôle Hi-B,

obtenue selon un processus mettant en jeu un laminage à froid unique, se distingue de la tôle à grains orientés classique, produite par double laminage à froid, par une perméabilité plus élevée et des pertes plus faibles.

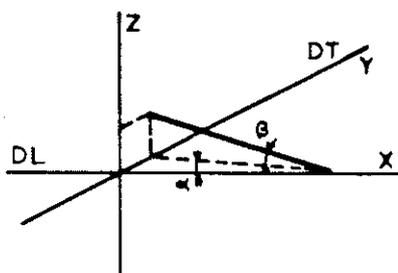
Teneur en Si (%)	Orientation	Perméabilité maximale relative	Champ coercitif (A/m)	Hystérésis $B_m=1T$ (J/m <sup>3</sup> )	W 1.5/60 (W/kg) $e=0.35mm$
0.5		5500	72	230	9.5
1.25		6100	68	220	8.0
2.75	non	5800	60	190	5.8
3.25	orientée	5800	52	160	4.7
3.75		7000	40	120	4.4
4.25		9000	24	70	3.1
3.0	orientation de Goss	65000	5.6	20	1.46

- Tableau I.4 - Comparaison des principales propriétés des tôles Fe-Si



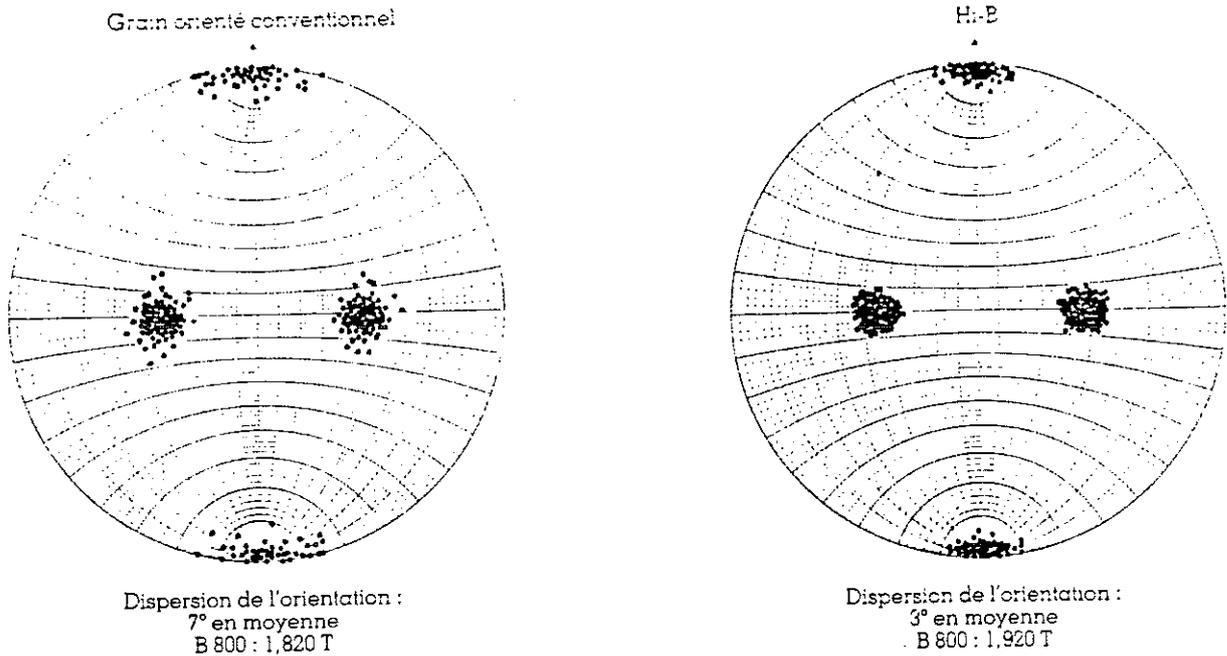
- Figure I.5 -

Caractéristiques magnétiques et pertes en fonction de l'angle fait entre le champ  $H$  et la direction  $[001]$



-Figure I.6 - Représentation de l'orientation cristalline dans une tôle G.O.

Si l'orientation cristalline idéale ( Figure I.3 ) peut être obtenue, toute la tôle ne serait qu'un monocristal. Ce n'est pas le cas, les écarts à l'orientation idéale sont représentés par les angles  $\alpha$  et  $\beta$  de la figure I.6. Les figures polaires (Figure I.7) font bien ressortir la différence de précision de l'orientation cristalline entre les tôles Hi-B et les tôles à grains orientés conventionnelles.



- Figure I.7 - Figures polaires [Doc. Usinor]

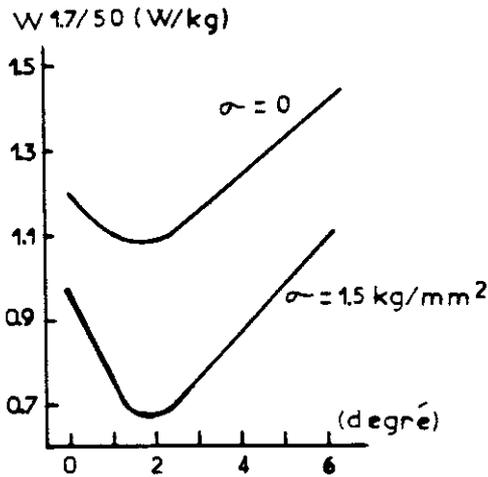
Parmi les voies conduisant à la minimisation des pertes intrinsèques aux tôles, citons :

- \* l'obtention d'un plus grand degré d'orientation des grains ;
- \* le contrôle des impuretés et des tensions internes ;
- \* influence de la teneur en silicium ;
- \* la diminution de la taille transverse des domaines ;
- \* l'amincissement des tôles ;
- \* l'augmentation de la résistivité électrique ;
- \* la réduction de la largeur des domaines magnétiques principaux par application d'une contrainte de traction parallèle à la direction de laminage et par irradiation de la surface avec un faisceau laser.

### II.3 Influence de l'orientation

Les pertes totales varient avec l'orientation du matériau. La figure I.8 montre l'évolution des pertes totales en fonction de l'angle  $\beta$  entre la direction [001] et le plan de la tôle. Les pertes minimales sont obtenues pour une désorientation non nulle, voisine de  $2^\circ$ .

Les tôles industrielles commercialisées sont encore loin d'avoir la texture optimale.



- Figure I.8 -

$\sigma$  : contrainte de traction suivant [001]  
Relation entre l'angle de désorientation et les pertes [Nozawa 78]

#### II.4 Le contrôle des impuretés et des tensions internes

Les impuretés les plus nocives sont le carbone, l'azote, le soufre et l'oxygène. Pour cela on a recours, lors du processus de fabrication, à une opération de décarburation, qui abaisse la teneur en carbone au-dessous de  $3 \cdot 10^{-3} \%$ .

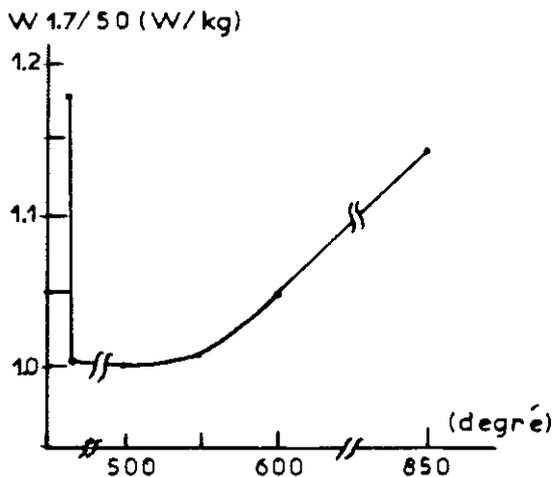


Figure I.9 - Influence de la température de recuit sur les pertes totales d'une tôle Hi-B soumise à l'irradiation [Nakamura 82]

Pour les tôles à grains orientés un recuit de relaxation des tensions internes à  $800^\circ\text{C}$ , permet de les atténuer. Les tensions internes sont liées aux découpages et manutentions successifs. Par contre pour les tôles de type Hi-B, l'avantage de l'irradiation par laser disparaît si un recuit est effectué à une température supérieure à  $550^\circ\text{C}$  (Figure I.9). L'utilisation des tôles Hi-B nécessite un nombre limité de découpes et une manutention délicate.

## II.5 Influence de la taille transverse des domaines

En accord avec le modèle de Pry and Bean [Pry and Bean 52], cité par la plupart des articles traitant des pertes d'énergie, les pertes classiques, dues aux courants de Foucault sont alors :

$$P_c = \frac{8.4}{\pi} \cdot \frac{2L.d (f.B_m)^2}{\varphi} \quad (\text{W/m}^3) \quad (\text{I.10})$$

$\varphi$     résistivité

$2L$     taille transverse des domaines magnétiques

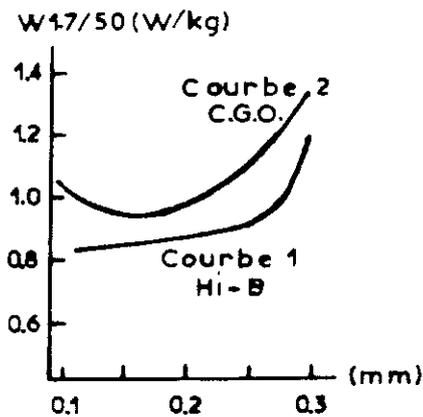
$d$     épaisseur de la tôle

Ce modèle permet de rendre compte de la configuration en domaines des tôles FeSi à grains orientés. Bien que les hypothèses du calcul soient importantes (parois rigides, nombre de parois constant) l'équation (I.10) met en évidence l'influence de la taille des domaines. Ainsi les efforts de ces dernières années ont consisté à obtenir une structure en domaine fine et régulière, et se sont concrétisés par l'application d'une contrainte de traction et par l'irradiation de la surface. Les pertes mesurées se rapprochant alors des pertes théoriques données par le modèle classique (équation I.11), qui ne tient pas compte de l'existence des domaines.

$$P_c = \frac{(\pi d B_m f)^2}{6 \varphi} \quad (\text{W/m}^3) \quad (\text{I.11})$$

## II.6 Influence de l'épaisseur

Compte tenu de l'équation (I.10) les pertes par courant de Foucault sont directement proportionnelles à l'épaisseur de la tôle. D'autre part, étant donné la formule de l'épaisseur de peau ( $\delta = \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$ ), les tôles dites Hi-B auront une épaisseur plus faible (en pratique (23 à 27)/100 de mm) que les tôles orientées classiques (en pratique (30 à 35)/100 de mm). Plus la perméabilité est grande, plus mince doit être la tôle ; une épaisseur supérieure à 1,5 fois l'épaisseur de peau est déconseillée.



- Figure I.12 -

Influence de l'épaisseur de la tôle Hi-B (Courbe 1) et d'une tôle Conventiennelle Grains Orientés C.G.O. (Courbe 2) sur les pertes.

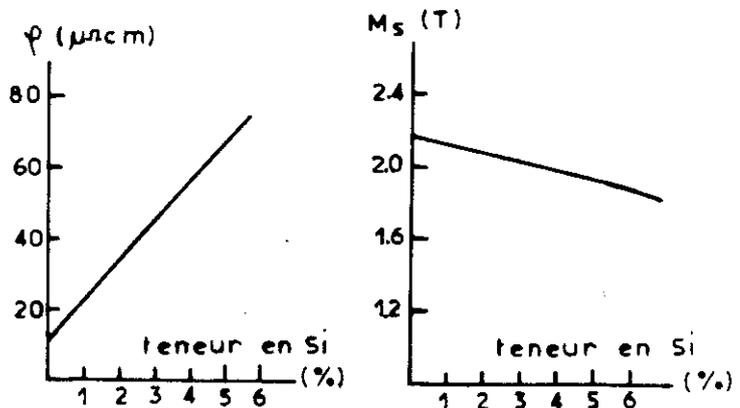
Il a été observé pour les tôles Hi-B une diminution des pertes totales jusqu'à une épaisseur aussi faible que  $d=0.10$  mm (Courbe 1, Figure I.12) [Ichijima 84]. Il en est autrement pour les tôles à grains orientés classiques, qui possèdent une épaisseur optimum qui minimise les pertes (Courbe 2, Figure I.12) [Yamada - 81].

L'existence de ce minimum est due aux pertes par hystérésis, qui varient peu pour les épaisseurs comprises entre 0.25 et 0.35 mm s'accroissent ensuite rapidement quand l'épaisseur devient inférieure à 0.2mm.

## II.7 Influence de la teneur en silicium

Une des conséquences importantes de la présence du silicium dans l'alliage est l'accroissement de la résistivité (figures I.13).

- Figure I.13 -  
Effet de la teneur en silicium sur la résistivité et sur l'aimantation à saturation [Viale]



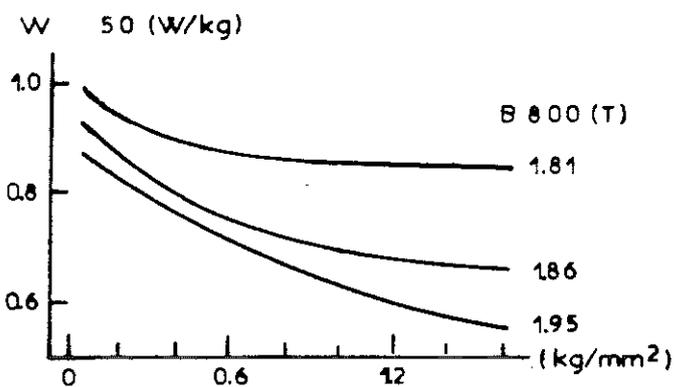
La résistivité accrue réduit les pertes par courant de Foucault conformément à l'équation I.10. L'addition du silicium diminue l'induction à saturation (Figure I.13) mais par contre, elle améliore les propriétés magnétiques suivantes :

- \* augmente la perméabilité relative maximale ;
- \* diminue les pertes par hystérésis ;
- \* diminue le champ coercitif.

L'addition de silicium contribue aussi à l'amélioration du vieillissement, c'est-à-dire que l'accroissement des pertes est faible pour des teneurs au-dessus de 1,5 %.

## II.8 Film isolant et irradiation de la surface

L'isolement superficiel des tôles à grain orientés est réalisé progressivement au cours du processus de fabrication dont il fait partie intégrante.



Le revêtement isolant d'épaisseur très réduite (2 à 3  $\mu\text{m}$ ) est un verre de type silicate de magnésie phosphaté.

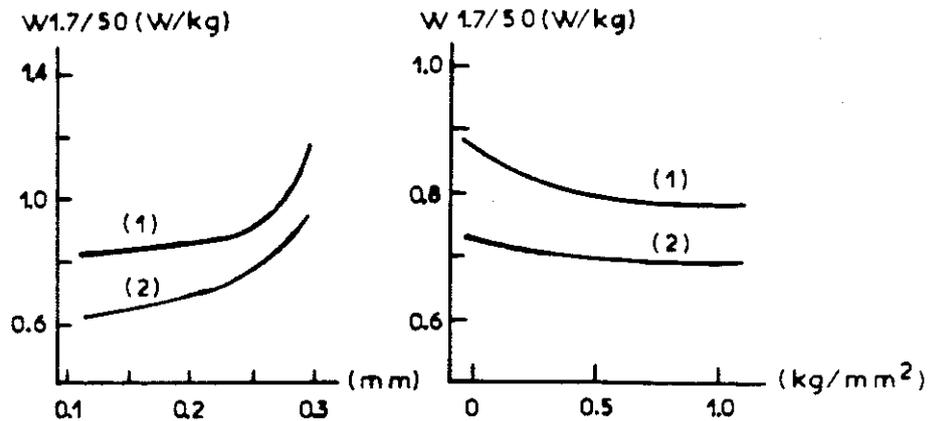
Ce revêtement exerce sur l'alliage une contrainte de traction dirigée selon l'axe de facile aimantation [001]. La réduction des pertes augmente avec la valeur de l'induction et la valeur de la contrainte appliquée (Figure I.14) [Bavay 84].

- Figure I.14 -

Réduction des pertes d'un monocrystal par application d'une contrainte de traction parallèle à la direction de laminage

Comme nous l'avons vu au paragraphe II.5 (Equation I.10) pour diminuer les pertes, il est nécessaire de réduire l'espacement entre les parois à  $180^\circ$ . L'irradiation de la surface perpendiculaire à la direction de laminage, provoque un affinement des domaines. Cette technique est appelée "scratching", elle est associée aux autres améliorations et permet une diminution sensible de pertes (figures I.15) [Ichijima 84].

- Figures I.15 -  
Effet de l'irradiation de surface  
sur les pertes totales.  
(1) Avant irradiation  
(2) Après irradiation



On notera que les meilleures tôles commercialisées cummulent l'ensemble des améliorations (Tôle Hi-B 23/100 mm, application d'une contrainte "scratching") possèdent à 50 Hz des pertes de 0,7 W/kg à 1,7 T.

Les tôles magnétiques à grains orientés n'ont pas atteint la limite de leur qualité potentielle. La minimisation des pertes totales intrinsèques des tôles est obtenue en contrôlant des paramètres tels que l'orientation, la largeur des domaines, les tensions mécaniques, l'épaisseur et les traitements de surface.

### III. RECHERCHES RECENTES DANS L'ANALYSE DES CIRCUITS MAGNETIQUES DES TRANSFORMATEURS TRIPHASES

#### III.1 Généralités

Le coefficient de construction définit au paragraphe I de ce chapitre est influencé par les facteurs suivants et ce pour une qualité de tôle donnée [Nakata 84] :

- \* La non uniformité de la distribution de flux due aux différentes longueurs de parcours dans les circuits magnétiques.
- \* La distortion de la forme d'onde de flux localisée, due à la saturation magnétique.
- \* Les flux de circulation dans les joints dûs à l'anisotropie des matériaux magnétiques.
- \* Les flux suivant une direction différente de celle du laminage dûs aux joints d'imbrications.
- \* Les champs tournants dans les joints en T dûs aux forces magnétomotrices triphasées.
- \* Les flux transversaux entre deux tôles, dûs aux entrefers dans les joints.

- \* Détérioration des caractéristiques magnétiques dûe aux contraintes mécaniques.

L'ensemble de ces facteurs a été analysé, aussi bien par des méthodes numériques que par des mesures expérimentales.

### III.2 Historique

Le facteur de construction est étroitement lié à la distribution de flux dans la structure. C'est tout d'abord Brailsford et Mazza [Brailsford 62] qui ont déterminé expérimentalement la distribution de flux dans un joint de coin à l'aide de spires traversant la tôle disposées sur toute la surface du joint. Cette technique a été ensuite améliorée [Moses 72] en offrant la possibilité de mesurer les trois composantes du flux dans un joint en T de transformateurs. Cette méthode de mesures est de nos jours toujours utilisée ; elle a donné lieu à un nombre de publications important, concernant :

- \* Les flux traversant le plan des tôles [Jones 73, Swift 75].
- \* Les variations du champ sur la section du noyau [Abdul Qader 82, Basak 83].
- \* Les variations du champ le long des largeurs des tôles [Basak 80, Basak 83, Shen 86].
- \* Le contrôle local des distorsions du flux dans les joints de coin [Bengston 87].

Comme toute technique expérimentale, elle s'avère coûteuse et nécessite beaucoup de temps. De plus certains résultats sont contradictoires, comme par exemple l'existence de la longueur optimale de recouvrement des joints de coin. Parallèlement une autre technique de mesures de pertes locales est utilisée [Laffoon 27, Brailsford 56, Gilbert 61, Ball 65]. A l'aide de thermocouples miniatures on mesure l'augmentation de température, après application du champ magnétique. Les pertes locales sont alors directement proportionnelles à l'augmentation de température par la loi :

$$P = C_v \cdot dT / dt$$

$C_v$  : chaleur spécifique  
 $T$  : température  
 $P$  : pertes locales

Cette méthode est toujours utilisée et notamment par l'équipe de Fiorillo [Fiorillo 87].

Grâce aux progrès des méthodes de calcul numérique du champ électromagnétique, telles que la méthode des éléments finis, de nombreuses analyses peuvent être accomplies, se substituant ainsi à la mise en oeuvre délicate de prototypes. Toutefois les méthodes expérimentales ne sont pas à écarter car elles permettent la vérification des modèles physiques implémentées dans les logiciels de Conception Assistée par Ordinateur (hystérésis, anisotropie).

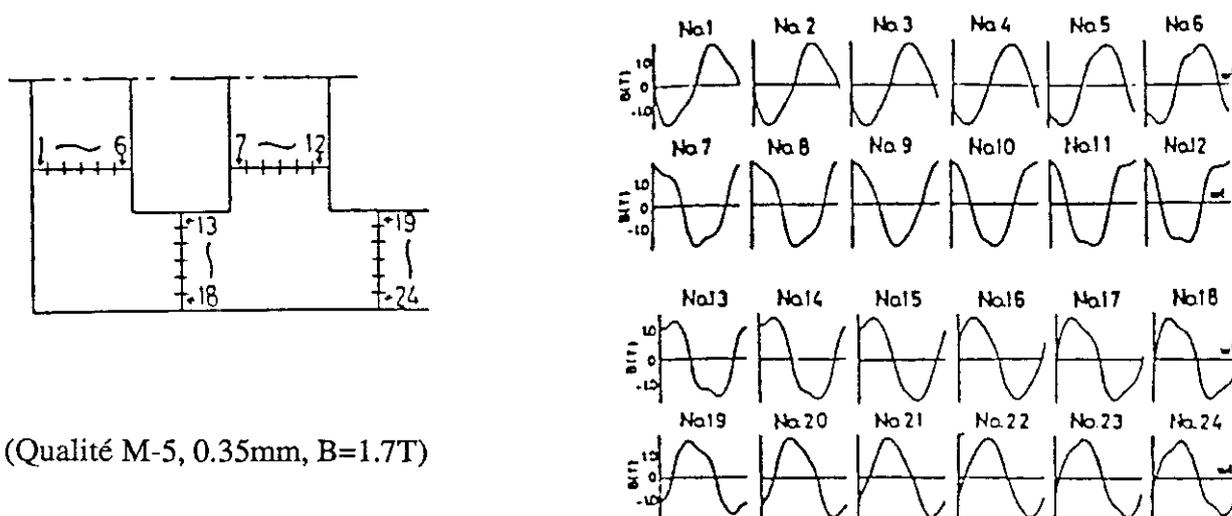
Depuis les années 70, l'analyse bidimensionnelle, des circuits magnétiques des transformateurs triphasés, a été développé par T. Nakata, pour l'analyse de la distribution du flux sans tenir compte de l'effet d'imbrication [Nakata 75]. L'analyse des joints droits [Nakata 82] et des joints obliques

[Nakata 84, Nakata 86, Shen 87] a été accomplie en détail. Barton a développé une méthode permettant de prendre en compte l'effet du feuilletage [Barton 80]. L'analyse tridimensionnelle [Zienkiewics 80] a été introduite dans l'étude des transformateurs à partir de 1980, par Chiampi [Chiampi 80]. C'est ensuite Nakata [Nakata 87] puis Shen [Shen 88] qui proposent respectivement une étude tridimensionnelle du joint en T et du joint en coin.

### III.3 Analyse de la distribution de flux

#### 3.3.1 Distorsion de la forme d'onde

Bien que le flux total soit sinusoïdal, le flux subit localement des distorsions du fait des non linéarités magnétiques et des longueurs de parcours différentes des lignes de flux, c'est tout d'abord Basak [Basak 80] par des mesures locales, puis Nakata [Nakata 84] par une analyse numérique, qui mettent en évidence ce phénomène (Figure I.16).

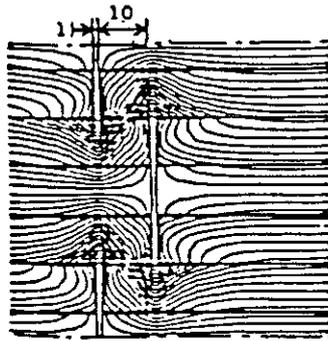
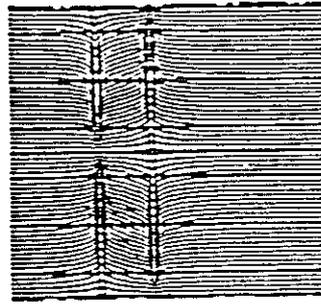
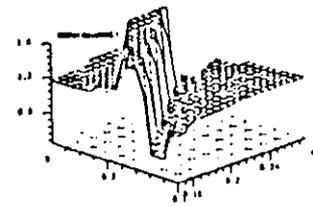


(Qualité M-5, 0.35mm, B=1.7T)

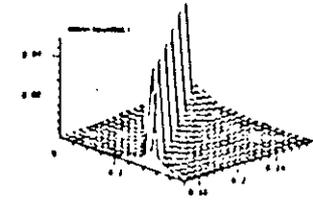
- Figure I.16 - Distorsion de la forme d'onde [Nakata 84]

#### III.3.2 Les flux transversaux

C'est tout d'abord Moses [Moses 72] qui a permis de mesurer les flux transversaux par l'intermédiaire de spires collées à la surface de la tôle dans un joint en T. L'analyse numérique bidimensionnelle [Nakata 82] puis tridimensionnelle [Shen 88] permet de rendre compte de ce phénomène (figure I.17). Le flux transversal se concentre au voisinage des joints d'imbrication et dépend essentiellement de l'induction et de la valeur de l'entrefer.

Induction faible,  $B_m=1.0T$ Induction élevée,  $B_m=1.7T$ 

Induction dans la tôle



Induction dans la couche d'isolation

- Figure I.17 - Flux transversaux [Nakata 82, Shen 88]

### III.3.3 Variations du champ sur la section et dans le plan de la tôle

Ces phénomènes sont observés lors des mesures expérimentales [Basak 80, Abdel Qader 82, Basak 83] et lors des analyses numériques pour les variations dans le plan de la tôle [Shen 87]. Ces deux variations (Tableaux I.18) sont dues à la distorsion du flux dans le temps et l'espace.

Induction (T)	Variation (%) sur colonne centrale	Variation (%) sur colonne extérieure
1.3	13	20
1.5	8.6	15
1.7	4.5	9.5
1.9	4.3	5.7

Gradin n°	Variation (%) colonnes	Variation (%) culasses
1	18	20
2	18	23
3	15	14
4	17	15
5	22	20

- Tableau I.18 - Variations du champ dans le plan de la tôle et sur la section

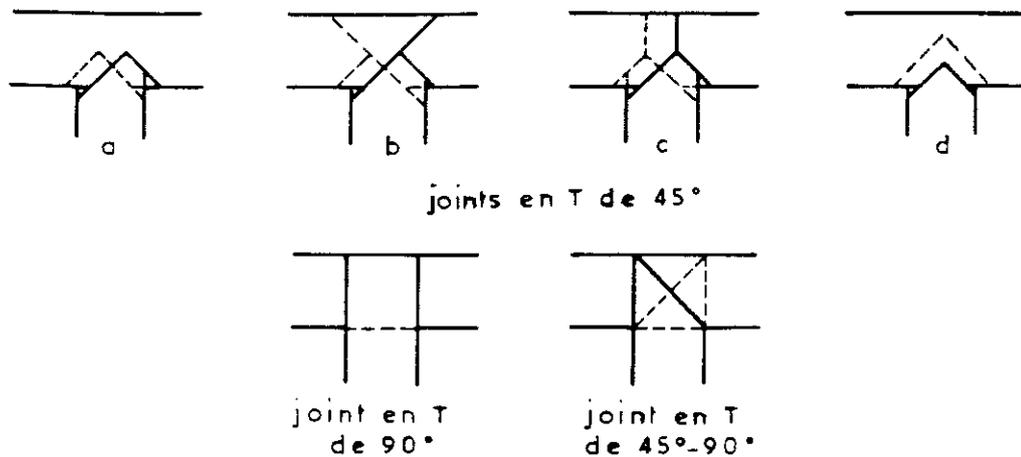
De plus, il a été constaté que la circulation des flux harmoniques cause des pertes supplémentaires de 15 % environ [Basak 78].

### III.4 Analyse des joints

Les circuits magnétiques triphasés sont constitués de colonnes entourées par les enroulements et les culasses. Les raccordements entre colonnes et culasses sont appelés joints. Ils sont de deux types : les joints de coins et les joints en T qui relient la colonne centrale et le milieu des culasses.

#### III.4.1 Joints imbriqués en T

Il existe différents types de joints imbriqués en T (Figure I.19).



- Figure I.19 - Différents types de joints en T

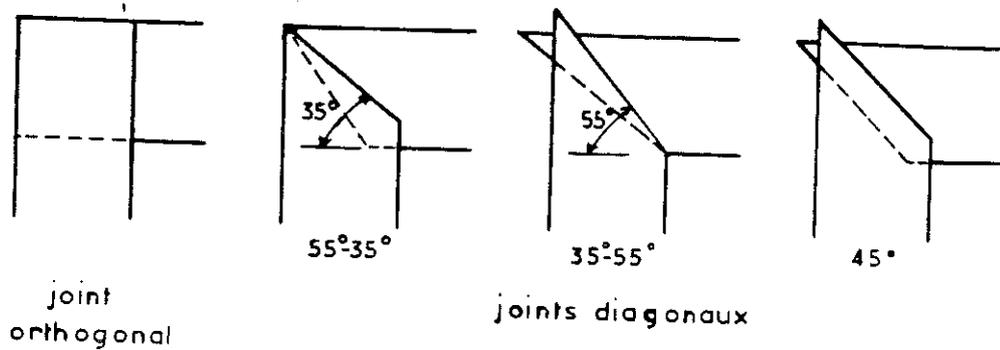
Les plus couramment utilisés sont le joint en T de 45° et le joint en T de 45°-90°. En effet le joint en T de 90° possède la surface de recouvrement la plus importante et n'apparaît donc pas comme le joint optimal. Une étude de Moses [Moses 73] montre que les pertes des joints en T de 45°-90° sont de l'ordre de 12 % plus importantes que celles du joint en T de 45° de type b), mais que cet avantage était perdu par un coût de fabrication plus important. Une étude comparative des différents types de joint à 45° de Valkovic [Valkovic 84] a montré un écart relatif maximum de 2 % (Tableau I.20) sur les pertes, mais un courant magnétisant pour les modèles b) et c) plus important.

Joint en T de 45° Figure	B en (T)				
	1.5	1.6	1.7	1.8	
19b	1.01	1.00	0.99	0.98	Pertes en p.u.
19c	1.01	0.99	0.99	0.98	
19d	1.01	1.00	1.00	0.99	
19b	1.49	1.36	1.26	1.21	Courant magnétisant
19c	1.61	1.59	1.45	1.21	
19d	1.03	1.03	1.03	1.02	

- Tableau I.20 - Comparaison des propriétés magnétiques pour différents joints en T de 45° par rapport à celui de la figure I.19a [Valkovic 84]

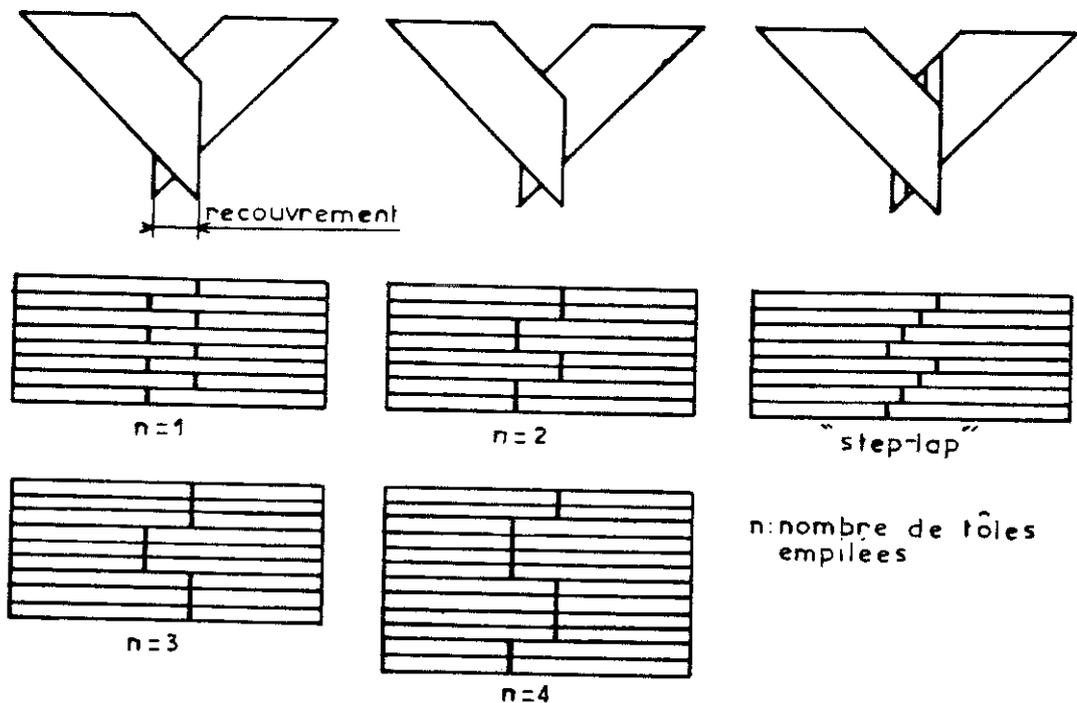
### III.4.2 Joints imbriqués de coin

Parmi les différents types de joints (Figure I.21) le joint imbriqué diagonal est considéré comme optimal.



- Figure I.21 - Différents types de joints de coin

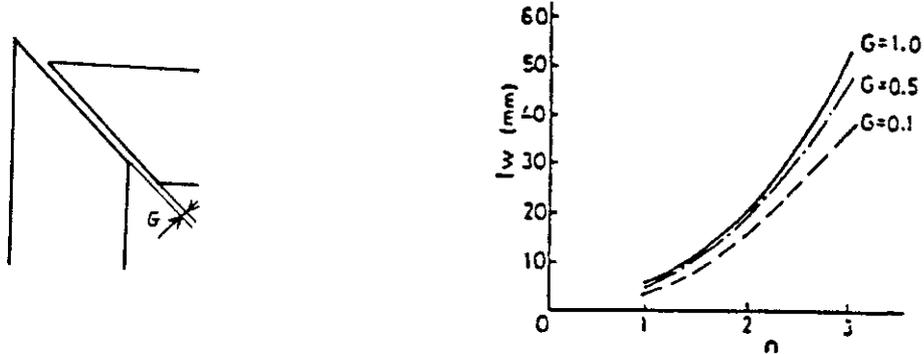
C'est le joint diagonal de 45° qui est le plus couramment utilisé. Il existe pour ce joint cinq types de montages différents (Figure I.22).



- Figure I.22 - Joints diagonaux imbriqués, différents montages

L'effet du nombre de tôles empilées a été analysé expérimentalement par Swift [Swift 75] et

numériquement par Shen [Shen 87] (Figure I.23).



G : Entrefer parasite à la jonction des tôles

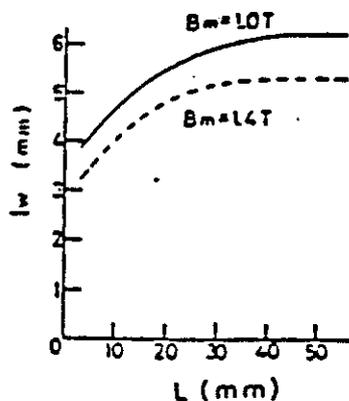
$l_w$  = Longueur équivalente des pertes

$l_w = (\text{Pertes fer avec recouvrement} - \text{Pertes fer sans recouvrement}) / \text{Pertes fer sans recouvrement de longueur unitaire}$

- Figure I.23 - Effet du nombre de tôles imbriquées

Les pertes minimales sont obtenues au détriment du temps de montage. Les tôles empilées en "step lap" permettent de diminuer considérablement le courant magnétisant (de 10 à 30% [Swift 75]), sans avoir de modifications significatives sur les pertes.

L'existence de la longueur optimale de recouvrement a été analysée par Swift et Jones [Jones 73, Swift 75], qui trouvaient des résultats contradictoires sur des prototypes semblables. C'est ensuite Shen [Shen 87] qui par une analyse numérique bidimensionnelle dans le plan du feuilletage, trouvait des résultats semblables à ceux de Swift, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de longueur optimale de recouvrement (Figure I.24).



- Figure I.24 - Effet de la longueur de recouvrement

Dans une analyse expérimentale [Bengston 87], il a été mis en évidence l'influence de l'entrefer et de la largeur de la tôle sur la longueur optimale de recouvrement. Compte tenu des erreurs de recouvrement et d'entrefer inévitables lors de l'assemblage, il apparaît improbable d'aboutir à une solution industrielle si une largeur optimale existe.

Les méthodes de mesures exposées permettent d'obtenir une représentation fidèle des lignes de flux mais lorsqu'il s'agit de mener une étude paramétrique, les résultats sont difficilement reproductibles et peuvent être contradictoires ; il est indéniable que les méthodes numériques sont de ce point de vue, avantageuses. Mais si 90 % des problèmes peuvent être traités par une analyse bidimensionnelle, le circuit magnétique du transformateur est un problème tridimensionnel. En effet la variation du champ sur la section ne peut être prise en compte que par une analyse tridimensionnelle. Et compte tenu de la géométrie les difficultés liées à la modélisation sont importantes. De plus, compte tenu de la forte anisotropie des tôles, utilisée dans la construction des circuits magnétiques, il est important que le code de calcul par éléments finis soit pourvu de modèles permettant la représentation d'un tel phénomène.

#### IV. CONCLUSIONS

La minimisation des pertes dans les transformateurs triphasés passe par un double enjeu, celui de réduire les pertes intrinsèques des tôles et celui d'améliorer le dimensionnement en vue d'une meilleure répartition du flux dans le circuit magnétique. Un nombre important de chercheurs essaie de comprendre et d'améliorer chacune des étapes du processus de fabrication ainsi que, par des approches expérimentales et numériques, de proposer des géométries optimales. L'ensemble de ces travaux de recherche contribue à l'effort de réduction des pertes entrepris depuis plus d'un demi siècle.



## CHAPITRE II

### **PRESENTATION DE L'HOMOGENEISATION ET DE LA METHODE DES MOYENNES**



## CHAPITRE 2

### PRESENTATION DE L'HOMOGENEISATION ET DE LA METHODE DES MOYENNES

A partir d'un matériau hétérogène, composé de constituants différents, ou présentant des défauts de petite taille devant les dimensions de l'échantillon, on essaie d'établir la loi de comportement d'un matériau homogène équivalent. Il est à noter que différentes approches peuvent être envisagées pour déterminer cette loi de comportement macroscopique: la méthode de l'énergie [Bensoussans 78, Duvaut 76], la méthode des développements asymptotiques [Sanchez- Palencia 80] et celle des moyennes [Suquet 82]. La méthode des moyennes est devenue classique pour les mécaniciens qui l'utilisent avec succès depuis quelques années. On se propose dans ce chapitre d'en exposer le principe et de l'appliquer à la modélisation du feuilletage des transformateurs.

#### I. GENERALITES SUR L'HOMOGENEISATION

L'homogénéisation est la démarche qui consiste à substituer à un matériau hétérogène un matériau homogène que l'on souhaite équivalent au précédent. On est conduit à cette démarche lorsque l'on cherche à obtenir des renseignements de nature globale sur des milieux dont la nature hétérogène est évidente car résultant de leur conception :

- \* En mécanique : matériaux composites.
- \* En électrotechnique : matériaux feuilletés.

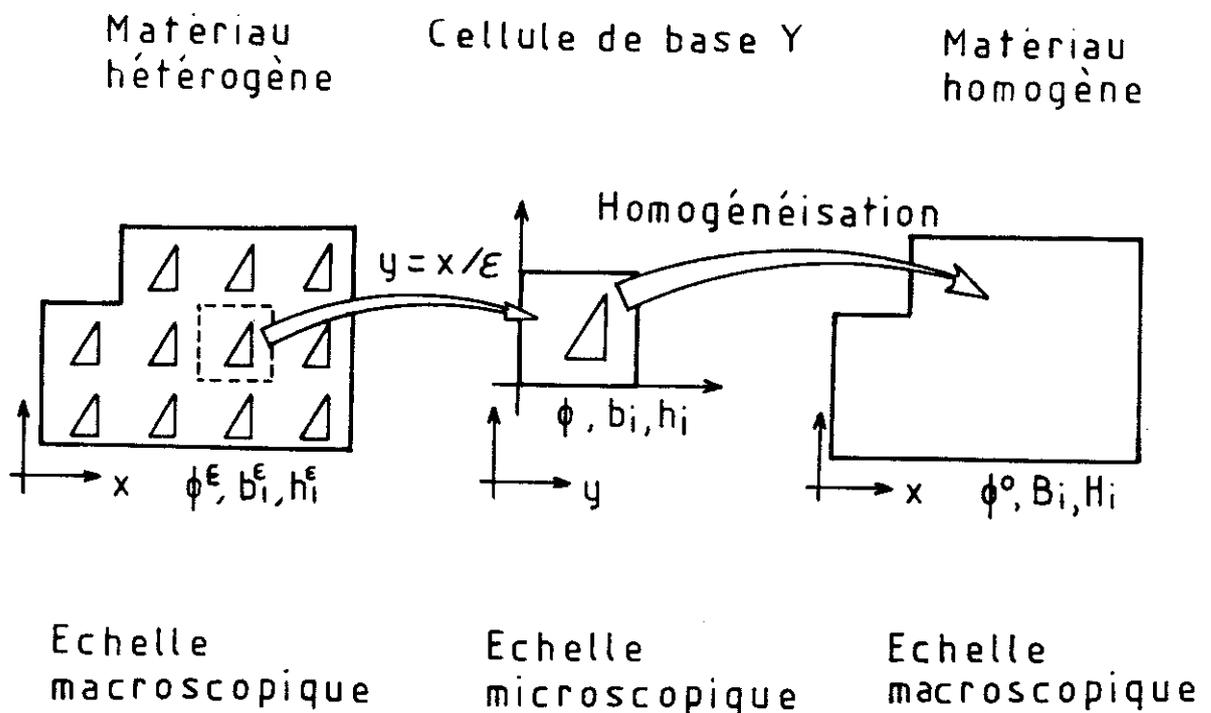
Le calcul de telles structures avec prise en compte rigoureuse de toute la géométrie est long et couteux voire impossible. Il faut alors pouvoir effectuer ces calculs sur des structures plus simples, mais à définir. On présente ici une méthode d'homogénéisation qui contourne cette difficulté en permettant d'approcher un matériau hétérogène à structure périodique par un matériau homogène dont les coefficients sont calculés sur une période de référence. Cette technique est dite "d'homogénéisation périodique" ou méthode des moyennes.

Le nouveau matériau constituant cette dernière structure homogène dépend à la fois de la nature et

de la géométrie des composants associés. C'est cette opération de substitution que l'on se propose d'exposer en magnéto-statique.

### I.1 Milieu homogène équivalent

A partir d'un matériau hétérogène, composé de constituants différents de petite taille devant la dimension de l'échantillon, on essaie de définir les propriétés d'un matériau homogène équivalent (Figure II.1).



- Figure II.1 - Principe de la méthode d'homogénéisation

On utilise pour décrire le milieu hétérogène deux échelles. Celle correspondant à la taille de l'échantillon est qualifiée de macroscopique et on note  $(x_i)_{i=1,2}$  les coordonnées s'y rapportant. A cette échelle la taille des hétérogénéités est petite. Si l'on note  $\epsilon$  le paramètre relatif à cette taille, on peut par un grossissement de  $1/\epsilon$  se ramener à une nouvelle échelle, dite microscopique et on note

$(y_i)_{i=1,2}$  les coordonnées s'y rapportant. On note  $\phi, b_i, h_i$ , les grandeurs correspondant respectivement au potentiel scalaire magnétique, à l'induction et au champ magnétique de l'échelle microscopique et  $\phi^\varepsilon, b_i^\varepsilon, h_i^\varepsilon$  les grandeurs respectives dans le milieu hétérogène. Les grandeurs macroscopiques que l'on cherche à définir dans le milieu homogène équivalent sont notées respectivement  $\phi^0, B_i, H_i$  et ne dépendent que de la variable  $x$ . Elles sont telles que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi^\varepsilon = \phi^0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_i^\varepsilon = B_i$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_i^\varepsilon = H_i$$

Les postulats que l'on fait au départ dans la méthode utilisée sont :

1. Le milieu hétérogène occupant un domaine  $\Omega$  a une "structure périodique", c'est à dire qu'à partir d'une surface élémentaire reproduite par périodicité on peut engendrer toute la structure. Cette surface de base élémentaire est appelée : CELLULE DE BASE  $Y$ .
2. Dans cette cellule  $Y$ ,  $\phi, b_i, h_i$  dépendent d'un paramètre  $x$  qui localise la cellule dans le domaine  $\Omega$ .
3. Les grandeurs du milieu hétérogène sont obtenues en prolongeant par périodicité par rapport à  $y = x/\varepsilon$  les grandeurs  $\phi, b_i, h_i$  :

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi(x, y)$$

$$b_i^\varepsilon(x) = b_i(x, y)$$

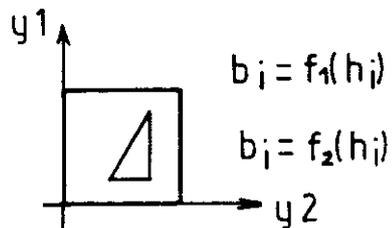
$$h_i^\varepsilon(x) = h_i(x, y)$$

On présente ci-après les différentes étapes de la méthode des moyennes relatives à la construction du tenseur de perméabilité homogénéisé.

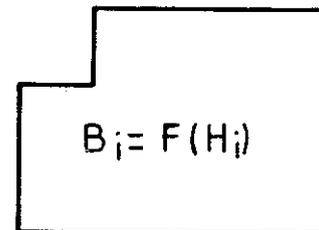
## II. DESCRIPTION DE LA METHODE DES MOYENNES

La loi de comportement au niveau de la cellule de base Y est supposée connue et l'on recherche la loi de comportement du matériau homogène équivalent (Figure II.2).

Cellule de base Y



Matériau homogène équivalent



LOI DE  
COMPORTEMENT  
MICROSCOPIQUE  
(connue)

HOMOGENEISATION

LOI DE  
COMPORTEMENT  
MACROSCOPIQUE  
(?)

- Figure II.2 - Cellule de base et matériau homogène équivalent

Pour cela la démarche à suivre est la suivante :

- 1°) Nous commençons par définir un certain nombre de grandeurs dites macroscopiques liées à l'échelle de la structure, en fonction de leurs correspondantes microscopiques liées elles mêmes à l'échelle de la cellule Y.

En l'absence de défauts les grandeurs macroscopiques sont définies comme les moyennes des quantités microscopiques :

$$B_i(x) = \langle b_i(x,y) \rangle = 1/|Y| \int_Y b_i(x,y) dy \quad (\text{II.1})$$

$$H_i(x) = \langle h_i(x,y) \rangle = 1/|Y| \int_Y h_i(x,y) dy \quad (\text{II.2})$$

$$|Y| = \int_Y dy$$

$B_i(x)$  : induction macroscopique

$H_i(x)$  : champ magnétique macroscopique

$|Y|$  : surface de la cellule de base  $Y$ .

Ces définitions sont justifiées par des résultats de convergence lorsque les grandeurs moyennes sont périodiques et suffisamment régulières [Suquet 82].

- 2°) Ensuite, le champ magnétique macroscopique  $H_j$  est imposé et l'on cherche par l'intermédiaire d'un problème de magnétostatique posé sur la cellule  $Y$  le potentiel scalaire  $\phi$  solution de ce problème en fonction de  $H_j$ . La loi de comportement microscopique ( $b_i = f(h_i)$ ) permet de déduire la solution microscopique telle que l'on vérifie la définition (II.1)  $B_j(x) = \langle b_j(x,y) \rangle$ .
- 3°) La dernière étape consiste à exprimer, à l'aide des définitions précédentes ((II.1) et (II.2)), l'induction macroscopique  $B_j$  qui en résulte en fonction de  $H_j$ . On en déduit alors une relation qui met en évidence l'expression du tenseur de perméabilité homogénéisé.

### III. EXPRESSION DU TENSEUR DE PERMEABILITE HOMOGENEISE

Compte-tenu de l'hypothèse d'une géométrie périodique, on suppose que le champ magnétique microscopique  $h$  est  $Y$ -périodique et que la composante normale de l'induction microscopique  $b.n$  ( $n$ -normale extérieure au bord) est  $Y$ -antipériodique. Un vecteur est dit  $Y$ -périodique si ces composantes prennent des valeurs égales sur des faces opposées de la cellule de base  $Y$  ; est dit  $Y$ -antipériodique si ces composantes prennent des valeurs opposées sur des faces opposées à  $Y$ .

Le champ magnétique macroscopique  $H$  étant imposé, le problème magnétostatique à résoudre sur

la cellule de base  $Y$ , pour connaître le potentiel scalaire microscopique  $\phi$  est le suivant :

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\mathbf{b} = [\mu] \mathbf{h} = - [\mu] \operatorname{grad} \phi \quad (\text{II.4})$$

$$(\text{PB}) \quad \phi = -H.y + \phi^* \quad \text{avec} \quad \phi^* \text{ p\u00e9riodique} \quad (\text{II.5})$$

$$H = 1/Y \int_Y h_i(x,y) dy \quad (\text{II.6})$$

Nous supposons que dans le domaine d'\u00e9tude il n'y a pas de courant ( $\operatorname{rot} H = 0$ ) alors nous pouvons introduire un potentiel scalaire magn\u00e9tique  $\phi$  v\u00e9rifiant :  $H = \langle -\operatorname{grad} \phi \rangle$ . Ce qui justifie l'\u00e9criture de (II.4).

La condition de p\u00e9riodicit\u00e9 sur  $h$ , se traduit de fa\u00e7on \u00e9quivalente au niveau du potentiel scalaire par l'\u00e9quation (II.5) [Besson 83]. D'apr\u00e8s [Suquet 82] les grandeurs \u00e0 champ magn\u00e9tique p\u00e9riodique sont des combinaisons de grandeurs lin\u00e9aires et de grandeurs p\u00e9riodiques, ce qui justifie l'\u00e9criture de (II.5).

La perm\u00e9abilit\u00e9 des diff\u00e9rents constituants de la cellule de base peut \u00eatre consid\u00e9r\u00e9e comme un tenseur ou un scalaire. Dans le but d'avoir une formulation g\u00e9n\u00e9rale nous consid\u00e9rons la perm\u00e9abilit\u00e9 comme un tenseur not\u00e9  $[\mu]$ .

En appliquant la m\u00e9thode de Galerkin au probl\u00e8me (PB) :

$$\operatorname{div} (-[\mu] \operatorname{grad} \phi) = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\int_Y \alpha_i (\operatorname{div} (-[\mu] \operatorname{grad} \phi)) dY = 0 \quad (\text{II.8})$$

$\alpha_i$  : fonctions de forme

Une int\u00e9gration par parties permet de transformer cette int\u00e9grale :

$$\int_Y \alpha_i (\operatorname{div} (-[\mu] \operatorname{grad} \phi)) dY = \int_Y \operatorname{grad} \alpha_i [\mu] \operatorname{grad} \phi dY - \int \alpha_i [\mu] \partial\phi/\partial n d\Gamma = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\int_Y \operatorname{grad} \alpha_i [\mu] \operatorname{grad} \phi dY = \int \alpha_i [\mu] \partial\phi/\partial n d\Gamma \quad (\text{II.10})$$

Compte-tenu de l'hypothèse d'une géométrie périodique,  $\partial\phi/\partial n$  est antipériodique, alors le deuxième terme disparaît et il vient :

$$\int_Y \text{grad } \alpha_i [\mu] \text{ grad } \phi \, dY = 0 \quad (\text{II.11})$$

avec  $\phi = -H y + \phi^*$  (II.12)

soit  $\int_Y \text{grad } \alpha_i [\mu] \text{ grad } \phi^* \, dY = \int_Y \text{grad } \alpha_i [\mu] \cdot H \, d y$  (II.13)

l'application de la méthode des éléments finis conduit à utiliser une famille de fonctions  $\alpha_i$  définies par morceaux sur chaque élément et telle que :

$$\phi^*(x,y) = \sum \alpha_i \phi_i^*(x,y) \quad i = 1, N \quad (\text{II.14})$$

$N$  : nombre de noeuds.

Alors l'ensemble des relations (II.13) constitue un système d'équations linéaires qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[S] [\phi^*] = [Q] \quad (\text{II.15})$$

où  $[S]$  est une matrice et  $[Q]$  un vecteur de dimension  $N$ , ayant pour coefficients :

$$S_{ij} = \int_Y \text{grad } \alpha_i^T [\mu] \text{ grad } \alpha_j \, d Y \quad (\text{II.16})$$

$$Q_i = \int_Y \text{grad } \alpha_i^T [\mu] \cdot H \, d Y \quad (\text{II.17})$$

où  $[\phi^*]$  est le vecteur des paramètres inconnus.

Les coefficients de l'expression (II.16) sont ceux de la formulation classique d'un problème de magnétostatique en potentiel scalaire. Les coefficients de l'expression (II.17) correspondent à l'action du champ macroscopique  $H$  sur la cellule de base  $Y$ .

La dernière étape de la méthode d'homogénéisation consiste à calculer la moyenne de l'induction microscopique  $b = - [\mu] \text{ grad } \phi$ , sur la cellule de base, afin de faire apparaître la loi de comportement macroscopique.

Conformément à la définition (II.1) le champ macroscopique s'écrit :

$$B_i = 1/Y \int_Y b_i \, d y \quad (\text{II.18})$$

$$B_i = 1/Y \int_Y - [\mu] \text{grad} (-H_y + \phi^*) \, dY \quad (\text{II.19})$$

$$B_i = 1/Y \int_Y - [\mu] (H_j - \text{grad} \phi_j^*) \, dY \quad (\text{II.20})$$

On convient de noter  $\phi_1^*$  et  $\phi_2^*$  les potentiels scalaires magnétiques du problème (PB) pour des champs macroscopiques égaux respectivement à :  $H_1(1,0)$  et  $H_2(0,1)$ .

Compte tenu de la loi de comportement macroscopique :

$$B_i = [\mu]_{\text{homog.}} H_j \quad (\text{II.21})$$

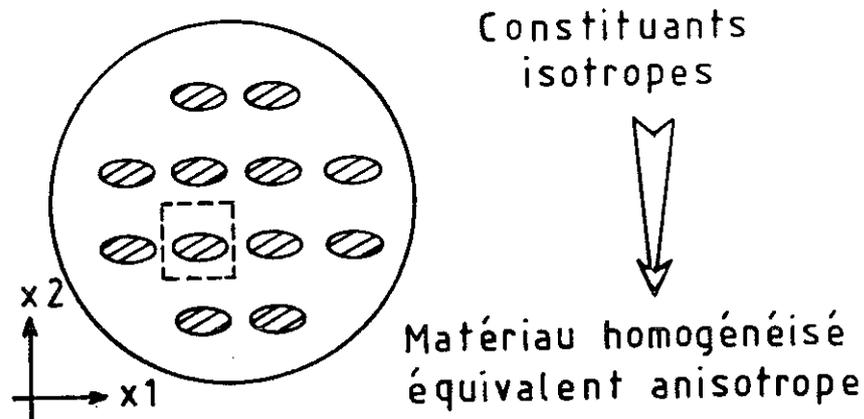
où  $[\mu]_{\text{homog.}}$  représente le tenseur de perméabilité homogénéisé, on en déduit la relation suivante :

$$\mu_{ij \text{ homog.}} = 1/Y \int_Y - [\mu] (H_j - \text{grad} \phi_j^*) \, dY \quad (\text{II.22})$$

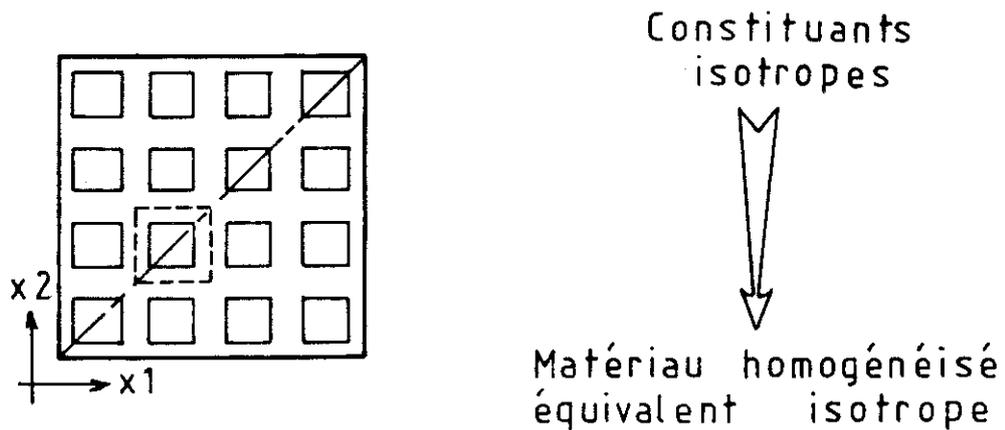
Ainsi deux résolutions du problème (PB) sur la cellule de base, en imposant successivement un champ macroscopique  $H_1$  puis  $H_2$ , permettent de déterminer l'ensemble du tenseur de perméabilité homogénéisé.

Le problème ainsi posé, peut être résolu avec des matériaux linéaires mais aussi avec des matériaux non linéaires. En effet, pour un champ microscopique donné on peut reconstituer la loi macroscopique caractérisant le matériau homogène équivalent. L'organigramme de résolution d'un problème d'homogénéisation est présenté à la figure II.3.

Le matériau homogénéisé est en général anisotrope (c'est à dire que le tenseur  $[\mu]_{\text{homog.}}$  n'est pas un tenseur scalaire) même si chaque constituant est isotrope ; cependant si certaines conditions de symétrie sont remplies le matériau homogénéisé est encore isotrope (Figures II.4)[Cioranescu 89].



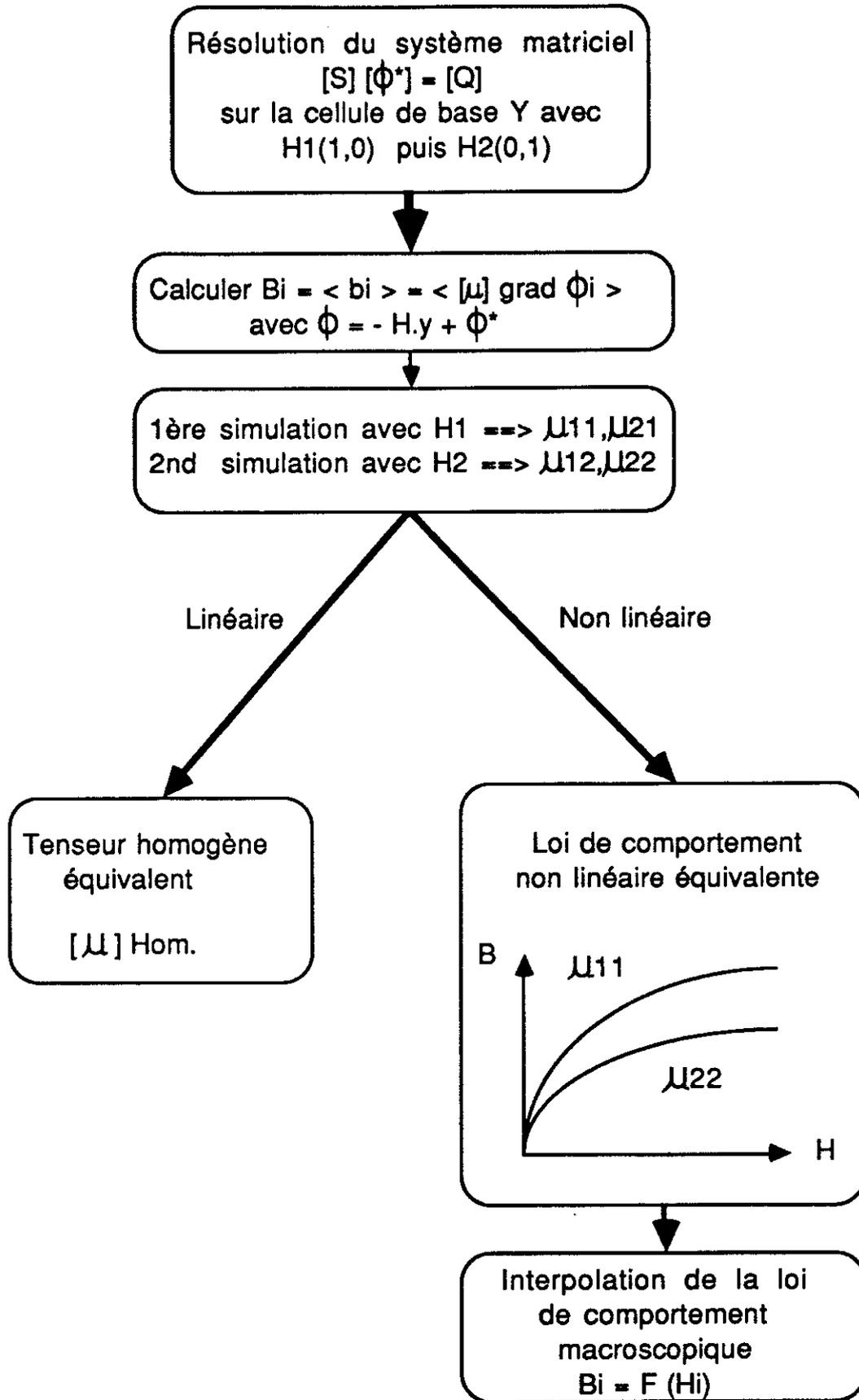
Dans ce cas de figure où les inclusions sont très allongées on s'attend à ce que le matériau homogénéisé ait un comportement différent dans les directions  $Ox_1$  et  $Ox_2$ .



Dans ce cas de figure compte tenu des symétries le matériau homogénéisé est encore isotrope.

- Figures II.4 -

Le tenseur de perméabilité ainsi déterminé affecté à la géométrie homogénéisée permet le calcul des grandeurs macroscopiques par l'intermédiaire d'une résolution par éléments finis. Le code de calcul nécessite la prise en compte de l'anisotropie linéaire ou non linéaire. Dans le cas non linéaire, il faut effectuer les interpolations de la loi de comportement macroscopique nécessaires à la construction du tenseur de perméabilité incrémentale (Chapitre 4 § IV).

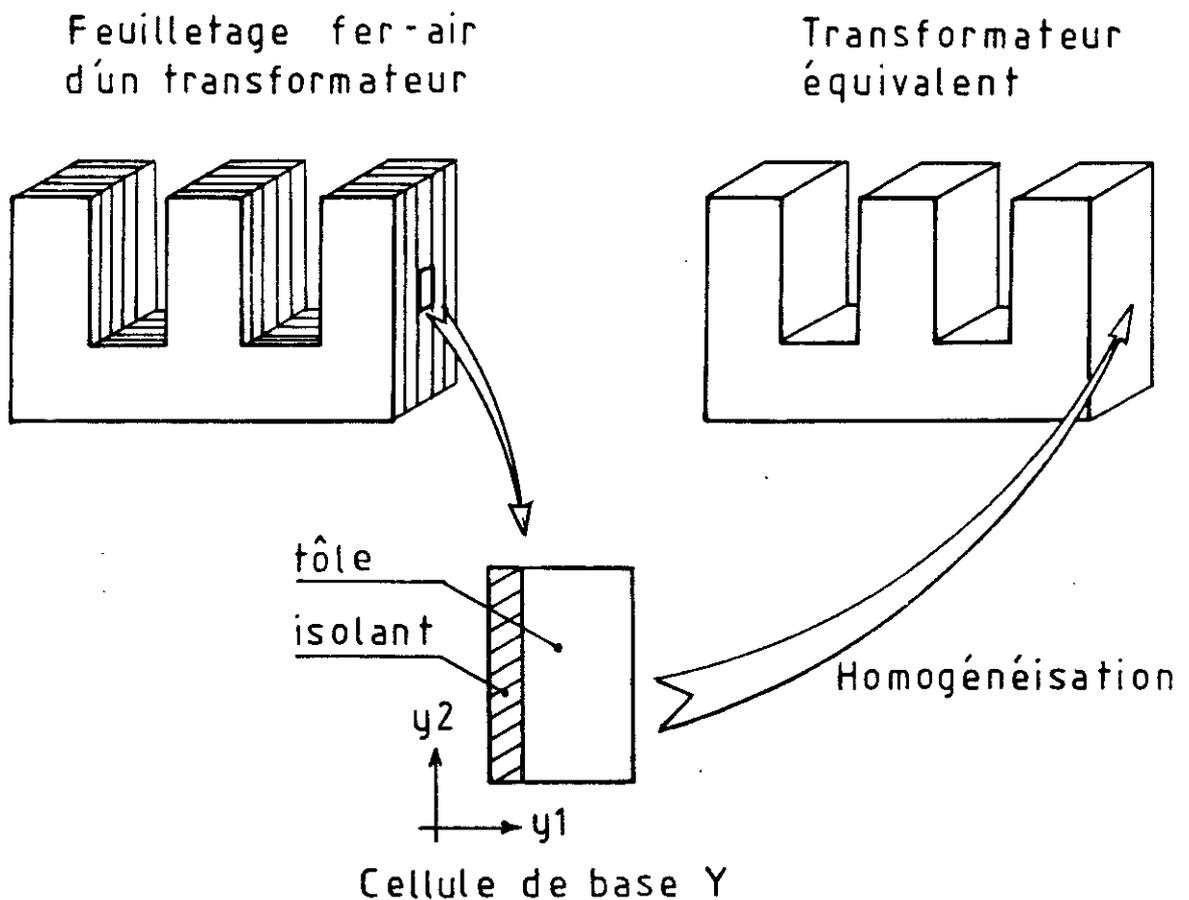


- Figure II.3 - Organigramme de résolution

#### IV. APPLICATION A LA MODELISATION DU FEUILLETAGE FER-AIR D'UN TRANSFORMATEUR

La technique d'homogénéisation périodique est applicable aux milieux hétérogènes à structure périodique, par conséquent au feuilletage fer-air d'un transformateur.

Dans ce cas la cellule de base est simple, elle est formée de deux constituants : l'isolant et la tôle (Figure II.5).

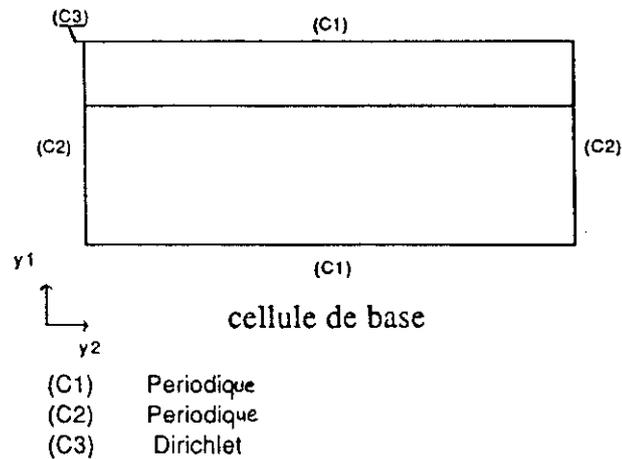


- Figure II.5 - Modélisation du feuilletage fer-air du transformateur

Cette technique est applicable dans le cas d'un comportement linéaire de la tôle, ainsi que compte tenu de l'induction imposée dans les tôles de transformateurs, dans le cas d'un comportement non linéaire.

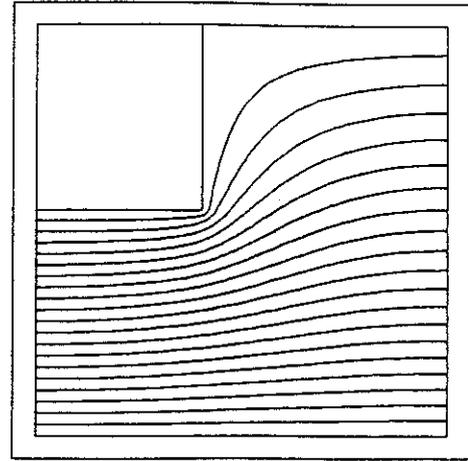
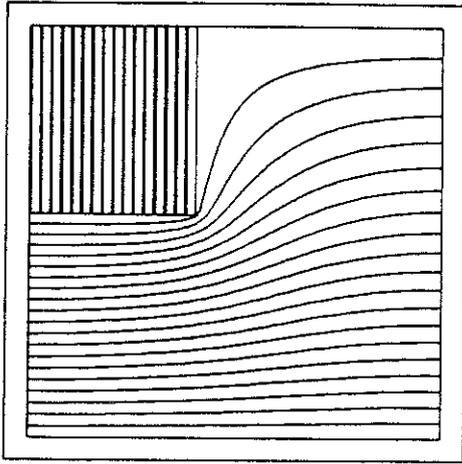
#### IV.1 Milieux linéaires

Si l'on considère la cellule de base Y, qui reproduite par périodicité permet d'engendrer tout le noyau, nous devons appliquer les conditions de périodicité sur les frontières de la cellule et imposer une condition de Dirichlet en un point de la cellule (Figure II.6).



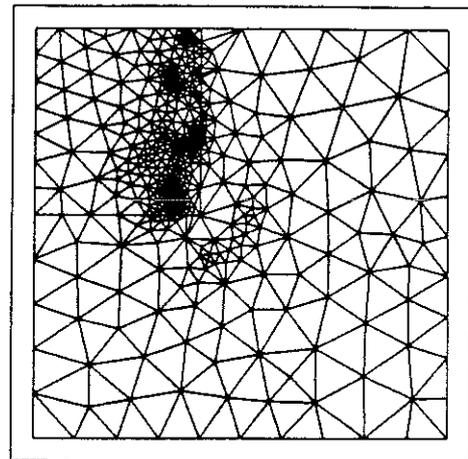
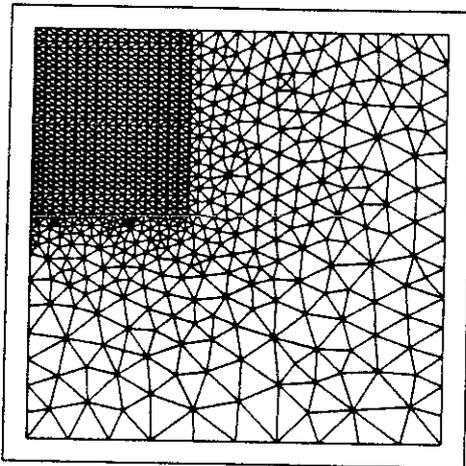
- Figure II.6 - Cellule de base du feuilletage fer-air

Après détermination des coefficients du tenseur homogénéisé il est alors possible de mener une comparaison des résultats obtenus à partir de la géométrie feuilletée (hétérogène) avec ceux de la géométrie homogénéisée. On remarque la canalisation du flux vers le bord latéral, ce qui est dû au feuilletage vertical (Figures II.7a).



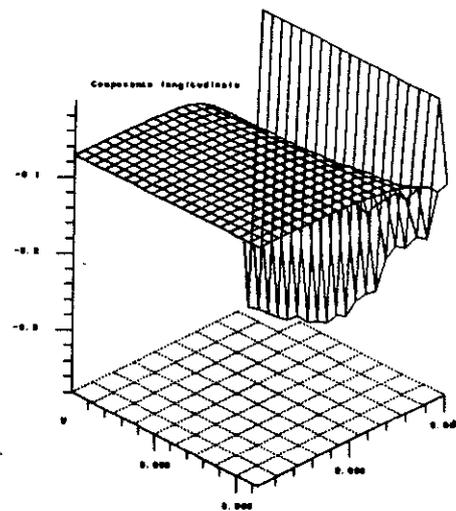
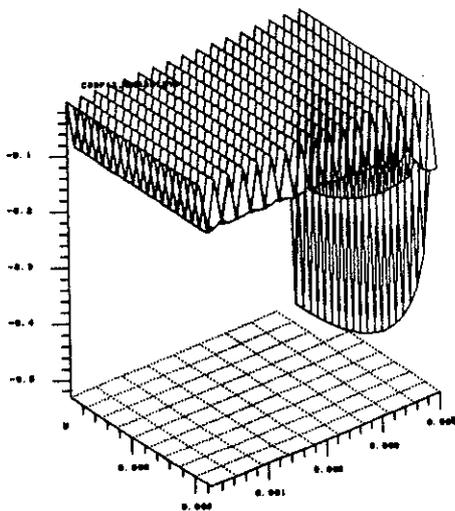
Structure feuilletée  $\mu_{\text{fer}} = 1000$  ;  $1 - \epsilon = 0.85$     Bloc homogène équivalent  $\mu_{//} = 850.15$  ;  $\mu_{\perp} = 6.63$

Comparaison des équipotentiels



Maillage de la géométrie feuilletée

Maillage de la géométrie équivalente



Comparaison de la composante longitudinale de l'induction sur toute la surface de la structure feuilletée et du bloc homogène équivalent

- Figures II.7a - Homogénéisation dans les milieux à comportement linéaire

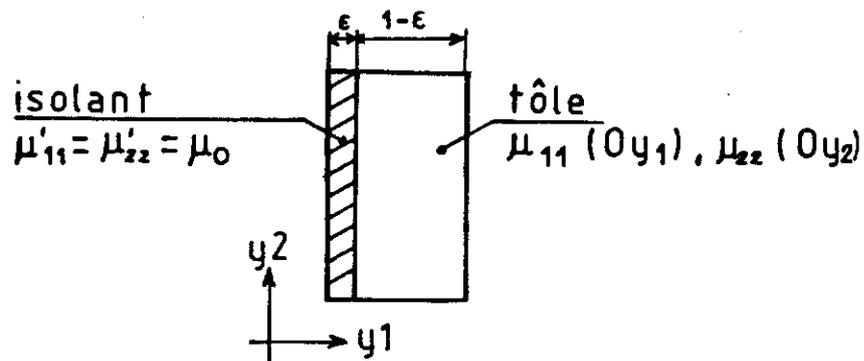
## IV.2 Milieux saturables

Dans le cas des matériaux saturables il faut alors déterminer la loi de comportement macroscopique du bloc homogène équivalent à partir des lois de comportement de chacun des constituants de la cellule de base Y.

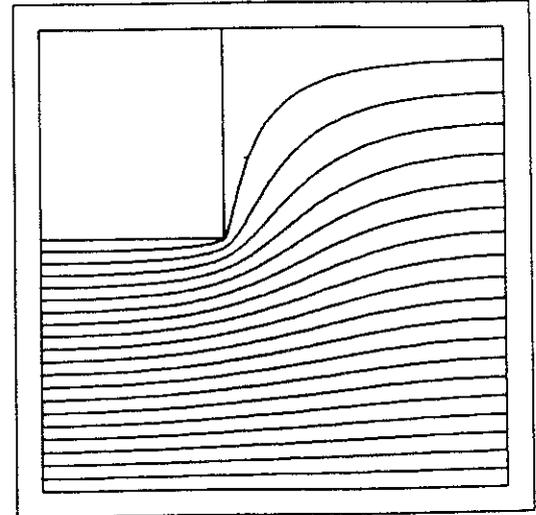
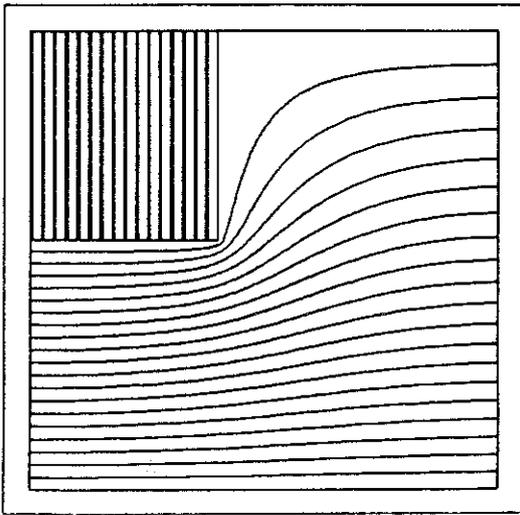
C'est en fait un ensemble de résolutions sur la cellule de base Y pour des champs microscopiques donnés qui permettent de reconstituer la loi de comportement non linéaire du bloc homogène. L'application de la méthode des éléments finis au problème d'anisotropie non linéaire (Chapitre 4 § III) permet de faire la résolution avec la géométrie homogénéisée (Figures II.7b).

## IV.3 Technique d'homogénéisation et feuilletage fer-air

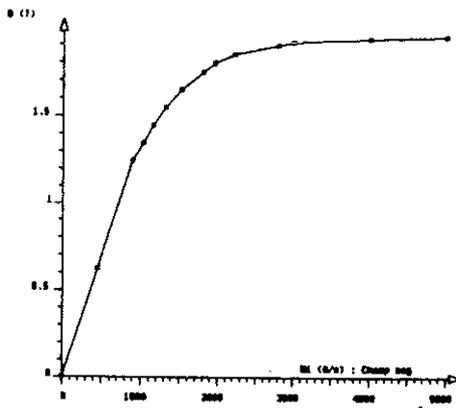
Compte tenu de la situation géométrique simple du feuilletage (Figure II.8) il est possible d'obtenir les caractéristiques du matériau homogène en fonction de celles des constituants.



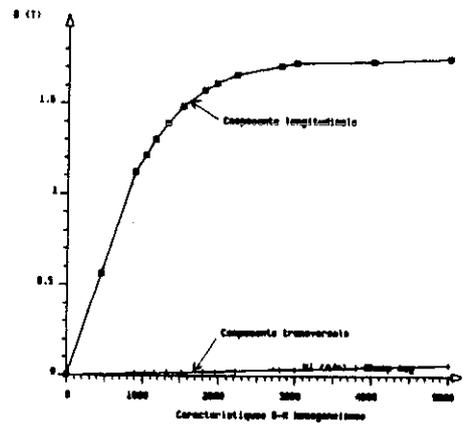
- Figure II.8 - Caractéristiques des constituants de la cellule de base



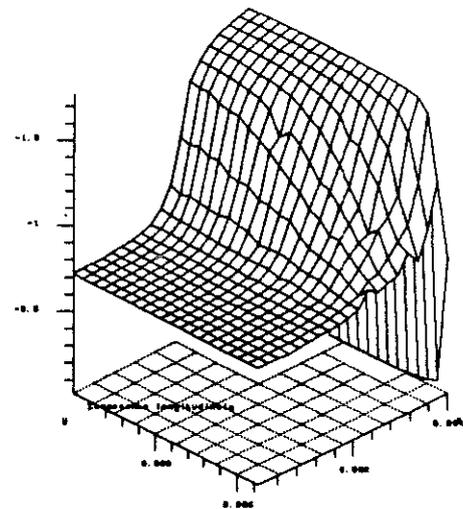
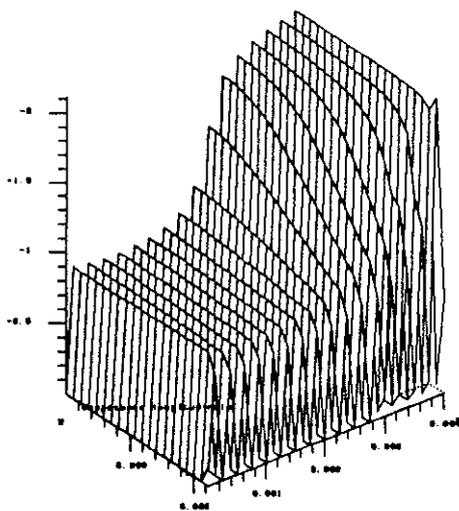
Comparaison des équipotentiels pour un comportement de la tôle non linéaire



Coube B-H de la tôle



Courbes B-H équivalentes



Composante longitudinale de l'induction pour la structure feuilletée et le bloc homogène équivalent  
- Figures II.7b - Homogénéisation dans les milieux non linéaires

Il est possible par un calcul direct en exprimant les moyennes respectives des champs magnétiques dans la tôle et dans l'isolant [Barton 80, Bastos 80], de trouver l'expression du tenseur de perméabilité sous forme analytique (chapitre III §2.2) :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 / \langle 1 / \mu_{ii} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \mu_{jj} \rangle \end{bmatrix} [\mathbf{H}] \quad (\text{II.23})$$

soit :

$$[\boldsymbol{\mu}] = \begin{bmatrix} 1 / ((1-\varepsilon)/\mu_{11} + \varepsilon/\mu'_{11}) & 0 \\ 0 & (1-\varepsilon)\mu_{22} + \varepsilon\mu'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & \mu_{//} \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Le tableau II.9 permet de comparer les valeurs données par l'utilisation de la méthode d'homogénéisation et par l'application des formules analytiques ( $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{\text{Tôle}}$  ;  $\mu'_{11} = \mu'_{22} = \mu_0$ ) :

$\mu_{\text{Tôle}}$ 1- $\varepsilon = 0,9$	Composante longitudinale $\mu_{//}$		Composante transversale $\mu_{\perp}$	
	Homogénéisation	Calcul analytique	Homogénéisation	Calcul analytique
1105	994,6	994,58	9,92	9,919
1043	938,6	938,58	9,915	9,914
994,7	895,6	895,62	9,911	9,910
934,4	841,2	841,22	9,905	9,905
863,8	777,2	777,3	9,897	9,897
773,7	697,8	697,8	9,886	9,885
730,8	657,1	657,0	9,879	9,878
663,2	596,1	596,13	9,866	9,866
540,0	486,6	486,59	9,837	9,836
509,3	459,3	459,28	9,827	9,827
385	346,3	346,25	9,772	9,771
310,3	279,6	279,6	9,719	9,718

- Tableau II.9 -

Comparaison entre la méthode d'homogénéisation appliquée au feuilletage et le calcul analytique

Dans le cas du feuilletage fer-air du transformateur deux techniques sont alors envisageables :

- 1°) Application de la méthode d'homogénéisation. Détermination de la loi de comportement homogénéisée. Puis faire les interpolations nécessaires de la loi de comportement afin de résoudre un problème de magnétostatique non linéaire ou linéaire, anisotrope.
- 2°) Faire directement les interpolations des lois de comportement des constituants, connaissant les formules analytiques du tenseur équivalent puis résoudre un problème de magnéto-statique non linéaire ou linéaire, anisotrope feuilleté [Féliachi 86, Bastos 84].

## V. CONCLUSIONS

Dans le cas de situation géométrique simple (feuilletage fer-air) la technique d'homogénéisation périodique n'est pas préférable, mais en général, il n'existe pas de recette aussi simple pour obtenir les caractéristiques d'un matériau hétérogène en fonction de celles des constituants.

L'homogénéisation périodique s'étend à d'autres problèmes physiques, par exemple en électrostatique, en thermique (les équations sont les mêmes, seules changent les significations des paramètres) en élasticité linéaire (en travaillant avec des vecteurs et des systèmes).

Dans le cas de matériaux à structure non périodique, dont la proportion des constituants est connue, on peut donner un encadrement des coefficients homogénéisés [Cioranescu 89].

La méthode d'homogénéisation périodique est utilisée avec succès depuis quelques années, au sein du Laboratoire de Mécanique Appliquée de Marseille et notamment sur des géométries tridimensionnelles. En effet le grand intérêt de cette technique est de rendre le coût de calcul raisonnable et dans le cas de structure périodique petite devant l'ensemble de la géométrie, de rendre le calcul possible ; et ce surtout depuis le développement sans cesse croissant des calculs tridimensionnels.



# CHAPITRE III

## **MODELES DE REPRESENTATION DES MATERIAUX A CARACTERISTIQUES ANISOTROPES NON LINEAIRES**



## CHAPITRE 3

### MODELES DE REPRESENTATION DES MATERIAUX A CARACTERISTIQUES ANISOTROPES NON LINEAIRES

#### I. INTRODUCTION

La tôle magnétique mince en fer-silicium représente le matériau le plus utilisé par les constructeurs électriciens. En pratique on distingue les tôles à grains non orientés et les tôles à grains orientés qui correspondent à des utilisations différentes. Dans les transformateurs de puissance, le vecteur induction magnétique en chaque point garde une direction fixe et varie sinusoïdalement (sauf dans les joints). Il est alors intéressant d'utiliser la tôle à grains orientés. Dans les machines, au contraire, on rencontre des champs tournants et la tôle à grains orientés, qui présente une direction nettement privilégiée, ne possède plus d'avantages déterminants. Les constructeurs utilisent alors la tôle à grains non orientés.

Nous présenterons dans ce chapitre des modèles de ce type de matériaux dans le but d'une modélisation statique plus fine des phénomènes d'anisotropie cristalline. Dans le plan perpendiculaire aux tôles, les transformateurs présentent aussi des caractéristiques anisotropes liées au feuilletage, dans ce cas on parle de "pseudo-anisotropie". Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la prise en compte du feuilletage passe nécessairement par un procédé d'homogénéisation.

Dans le cadre d'une modélisation du circuit magnétique de transformateurs, il faut donc être capable de prendre en compte ces phénomènes afin de mener des calculs tridimensionnels en vue de minimiser les pertes à vide.

Le traitement de matériaux à caractéristiques complexes, telle que l'anisotropie, apparaît rarement dans les logiciels de calculs des champs. Dans le cas le plus général la relation vectorielle  $B(H)$  s'écrit sous la forme des trois familles de courbes :

$$B_x (H_x, H_y, H_z)$$

$$B_y (H_x, H_y, H_z)$$

$$B_z (H_x, H_y, H_z)$$

La mise en oeuvre expérimentale permettant de décrire de telles familles de courbes est très délicate

puisqu'il faut être capable de mesurer à la fois le module et la direction de l'induction magnétique en fonction du champ  $H$ . En effet, l'acquisition de la direction de  $B$  reste délicate avec le cadre Epstein. En supposant que ces caractéristiques soient fournies, il est alors nécessaire de les introduire au niveau du logiciel de calcul de façon à ce que ce dernier soit capable de réaliser les interpolations nécessaires lors du traitement numérique. En outre, le traitement des non linéarités nécessite l'établissement du tenseur de perméabilité incrémentale  $[\partial B/\partial H^T]$  lorsque l'on veut utiliser une méthode de type Newton-Raphson (chapitre 4, § III.2), ce qui conduit à un nombre de calculs important.

Ces raisons ont fait que pour l'établissement des modèles, on s'est basé sur des représentations mathématiques plus simples issues de quelques caractéristiques significatives du matériau traité. Pour traiter un matériau à anisotropie cristalline, la méthodologie consiste à exprimer la relation vectorielle  $B(H)$  à partir des trois directions principales du matériau et de réaliser les interpolations les plus représentatives possibles.

Il n'existe pas de méthodologie générale pour traiter ce problème et chaque classe de matériau doit être examinée séparément (matériaux doux [Shen 87], aimants permanents [Chavanne 88]).

Dans ce chapitre, on propose des modèles de représentation de l'anisotropie pouvant être mis en oeuvre à partir de données fournies par les constructeurs, puis on les compare à ces dernières.

## II. LOIS DE COMPORTEMENT NON LINEAIRES

### II.1 Matériaux doux isotropes non linéaires

Les matériaux doux isotropes non linéaires sont représentés par la caractéristique de première aimantation. Cette caractéristique est représentée par une fonction mathématique qui s'obtient généralement par l'introduction d'un certain nombre de couples de valeurs  $(B, H)$ , issues d'une expérimentation ou du catalogue constructeur, on peut aussi utiliser des fonctions d'interpolation de type splines. Une fonction analytique qui peut-être utilisée s'écrit de la façon suivante [Marocco 76]

$$v(B^2) = [\alpha + (\beta - \alpha) B^{2\gamma}] / (B^{2\gamma} + \tau) \quad (\text{III.1})$$

où  $v$  est la reluctivité et  $\alpha, \beta, \gamma, \tau$  sont déterminés par la méthode des moindres carrés à partir des couples de points  $(B, H)$ . Comme nous le verrons (chapitre 4), il est nécessaire dans le cas d'une

formulation en potentiel scalaire de connaître la courbe  $\mu(H^2)$  qui est déduite de la précédente et qui a pour expression :

$$\mu(H^2) = [(\mu H)^{2\gamma} + \tau] / [\beta(\mu H)^{2\gamma} + \alpha \tau] \quad (\text{III.2})$$

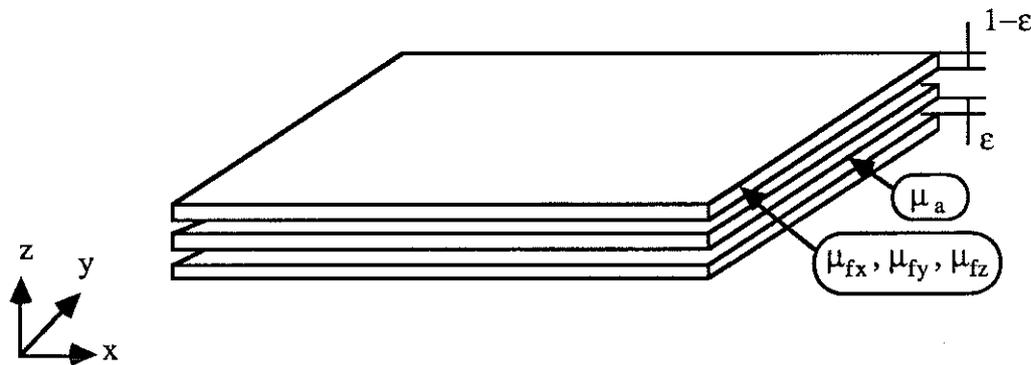
La loi de comportement pour les matériaux isotropes s'exprime alors de la façon suivante :

$$B = \mu(H) \cdot H \quad (\text{III.3})$$

Le champ magnétique et l'induction seront alors toujours colinéaires.

## II.2 Matériaux feuilletés

Lorsque le matériau est feuilleté (figure III.1), les éléments du tenseur  $[\mu(H)]$  peuvent être approchés à partir d'une méthode d'homogénéisation qui consiste à calculer les perméabilités moyennes suivant chacun des axes.



- Figure III.1 - Feuilletage fer-air du transformateur

La conservation des composantes normales de  $B$  dans l'air ( $B_{az}$ ) et dans le fer ( $B_{fz}$ ) ainsi que des composantes tangentielles de  $H$  dans l'air ( $H_{ax}$ ,  $H_{ay}$ ) et dans le fer ( $H_{fx}$ ,  $H_{fy}$ ) nous permet d'établir les relations :

$$B_z = B_{az} = B_{fz} \quad (\text{III.4})$$

$$H_y = H_{ay} = H_{fy} \quad (\text{III.5})$$

$$H_x = H_{ax} = H_{fx} \quad (\text{III.6})$$

En écrivant que les flux magnétiques  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont la somme des flux dans l'air et dans le fer

suivant les directions tangentielles  $O_x$  et  $O_y$ , nous obtenons à l'aide de (III.5) et (III.6) les perméabilités  $\mu_x$  et  $\mu_y$  suivantes :

$$\mu_x = \varepsilon \mu_a + (1-\varepsilon) \mu_{fx} \quad (\text{III.7})$$

$$\mu_y = \varepsilon \mu_a + (1-\varepsilon) \mu_{fy} \quad (\text{III.8})$$

D'autre part, la circulation du champ  $H_z$  étant la somme des circulations des champs  $H_{fz}$  et  $H_{az}$ , nous obtenons à l'aide de (III.4) l'expression de la perméabilité  $\mu_z$  suivante :

$$\mu_z = \mu_a \mu_{fz} / [\mu_a (1-\varepsilon) + \mu_{fz} \varepsilon] \quad (\text{III.9})$$

Les perméabilités  $\mu_{fx}$ ,  $\mu_{fy}$ ,  $\mu_{fz}$  possèdent des formes différentes suivant les phénomènes pris en compte dans la tôle (isotropie, anisotropie cristalline).

### II.3 Matériaux doux anisotropes non linéaires

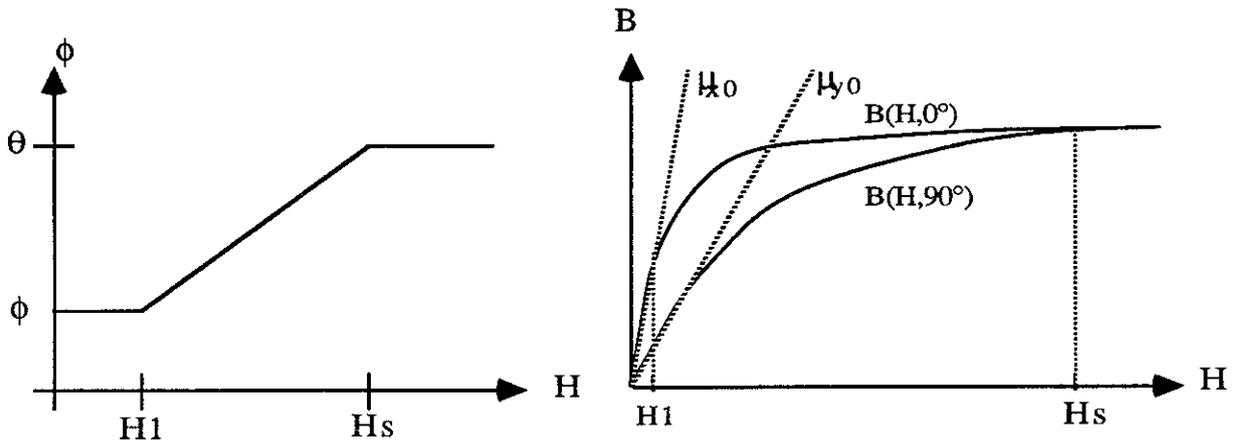
Nous présentons dans ce paragraphe trois modèles permettant de représenter les phénomènes d'anisotropie dans les tôles utilisées pour la construction électrique. Ils nécessitent la connaissance des courbes d'aimantation dans les directions longitudinale et transversale qui sont fournies en général dans les catalogues constructeurs. Les tôles utilisées dans la construction des transformateurs étant à grains orientés, nous mènerons une comparaison entre les différents modèles et les données constructeurs pour ce type de tôles et ce pour deux qualités différentes (M-2H et M-4H).

#### II.3.1 Modèle des deux axes [Huttenlohn 84]

Les courbes dans le sens du laminage et dans la direction perpendiculaire permettent de reconstituer l'ensemble des courbes B-H correspondant chacune à une direction  $\theta$  du champ. Ces courbes intermédiaires sont obtenues à partir d'une interpolation linéaire entre les deux directions, l'une que l'on caractérise de facile aimantation ( $\theta(O_x, H)=0^\circ$ ) et l'autre de difficile aimantation ( $\theta(O_y, H)=90^\circ$ ).

$$B(H, \theta) = B(H, 0^\circ) + (B(H, 90^\circ) - B(H, 0^\circ)) \cdot \theta / 90^\circ \quad (\text{III.10})$$

Pour calculer la direction de l'induction magnétique ( $\phi$ ), l'interpolation linéaire se fait entre la direction de l'induction magnétique en régime linéaire ( $\phi_0$ ) et la direction en régime saturé ( $\theta = \phi$ ) (figure III.2).



- Figures III.2 - Direction ( $\phi$ ) et module  $B$  en fonction du champ magnétique

$$\phi = \phi_0 + (H - H_1) \cdot (\phi - \phi_0) / (H_s - H_1) \quad (\text{III.11})$$

$$\text{avec } \phi_0 = \tan^{-1} (\mu_{y0} / \mu_{x0} \tan \theta) \quad (\text{III.12})$$

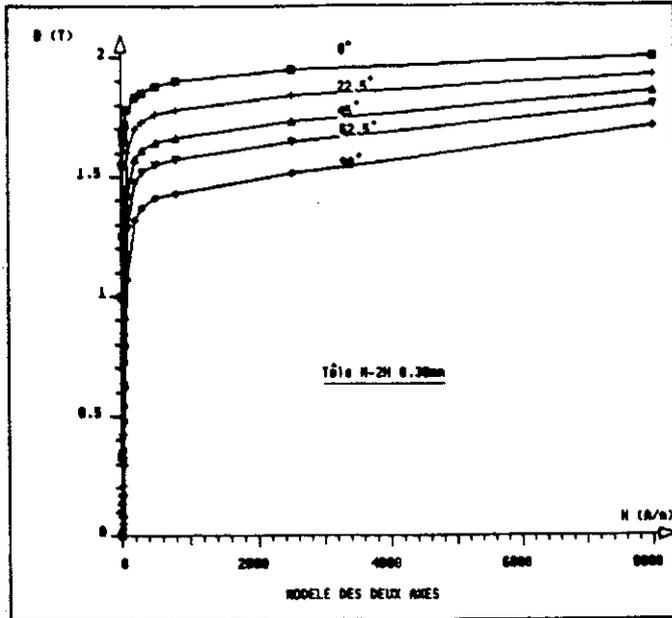
$H_1$  : limite du comportement linéaire

$H_s$  : limite du comportement non linéaire

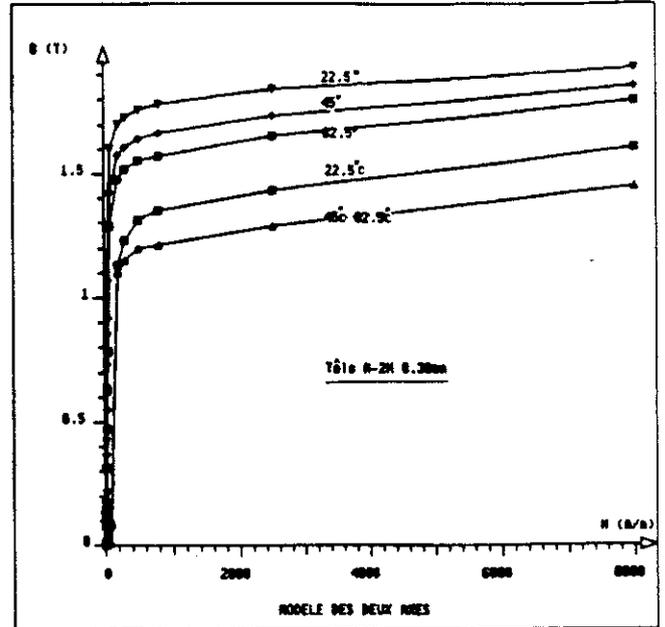
$\mu_{y0}$  : perméabilité initiale suivant la direction de difficile aimantation

$\mu_{x0}$  : perméabilité initiale suivant la direction de facile aimantation

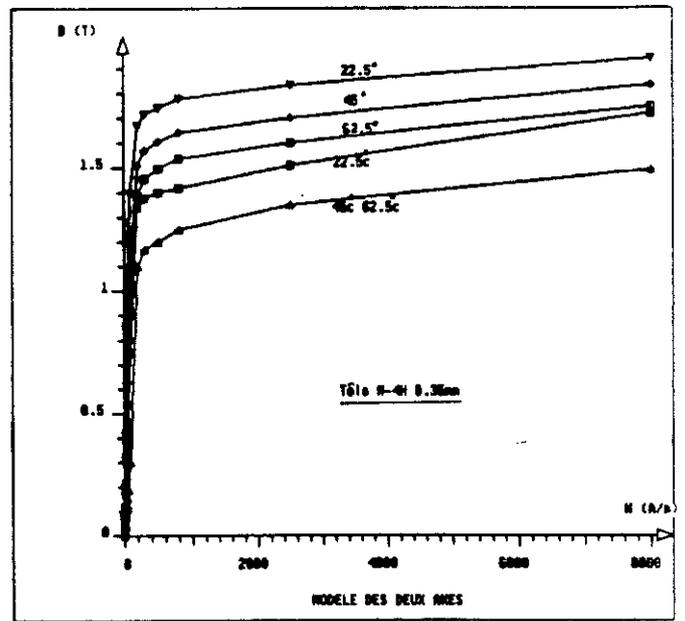
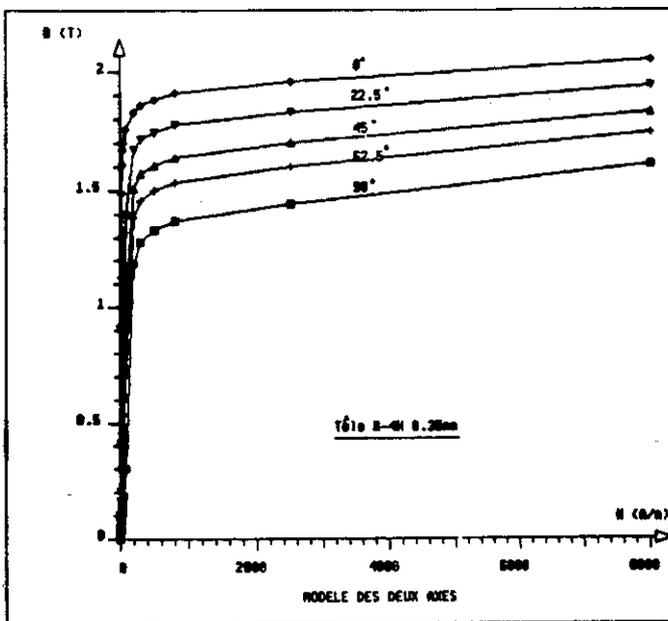
Comme le montre les figures III.3.a et III.3.c, la difficulté d'aimantation varie de manière uniforme. La comparaison entre les courbes données par le constructeur (avec l'indice  $c$ ) et celles calculées (figures III.3.b et III.3.d) permet de conclure que ce type de modèle est mal adapté pour la représentation des phénomènes physiques mis en jeu dans les tôles à grains orientés. Il peut néanmoins avoir une bonne précision pour les tôles non orientées laminées à froid [Shen 87].



$0^\circ, 90^\circ$  : courbes constructeurs  
 $22.5^\circ, 45^\circ, 62.5^\circ$  : courbes calculées à partir des 2 courbes constructeurs ( $0^\circ, 90^\circ$ )



$22.5^\circ, 45^\circ, 62.5^\circ$  : calculs  
 $22.5^\circ\text{C}, 45^\circ\text{C}, 62.5^\circ\text{C}$  : courbes constructeurs



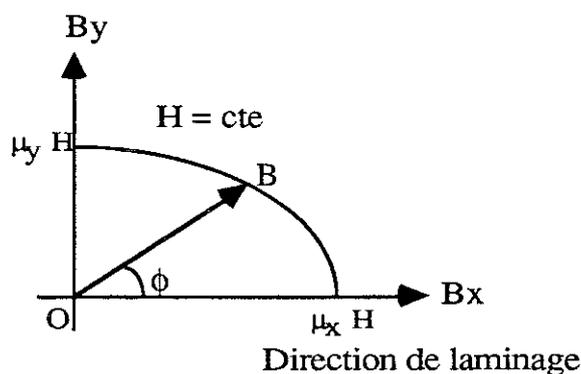
- Figures III.3 - Modèle des deux axes - Comparaison avec les courbes constructeurs

### II.3.2 Modèle elliptique [Di-Napoli 83]

Pour ce modèle, la trajectoire du vecteur induction magnétique  $B$  dans le plan  $B_x - B_y$  pour un champ magnétique constant  $H$  est approchée par une ellipse ( Figure III.4 ).

$$H_x^2 + H_y^2 = H^2 \quad \nu_x^2 \cdot B_x^2 + \nu_y^2 \cdot B_y^2 = H^2 \quad (\text{III.13})$$

où  $\nu_x$  et  $\nu_y$  sont les réductivités, respectivement dans le sens longitudinal et transversal.



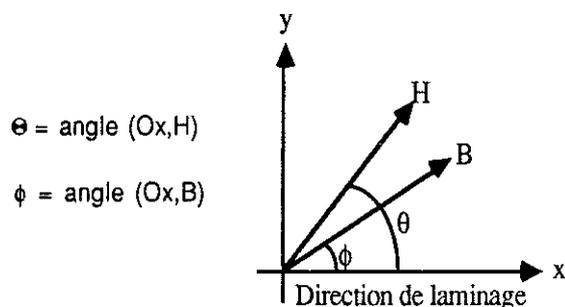
- Figure III.4 - Modèle elliptique

Ainsi les intersections avec les axes  $Ox$  et  $Oy$  correspondent respectivement aux courbes constructeurs dans le sens longitudinal et transversal.

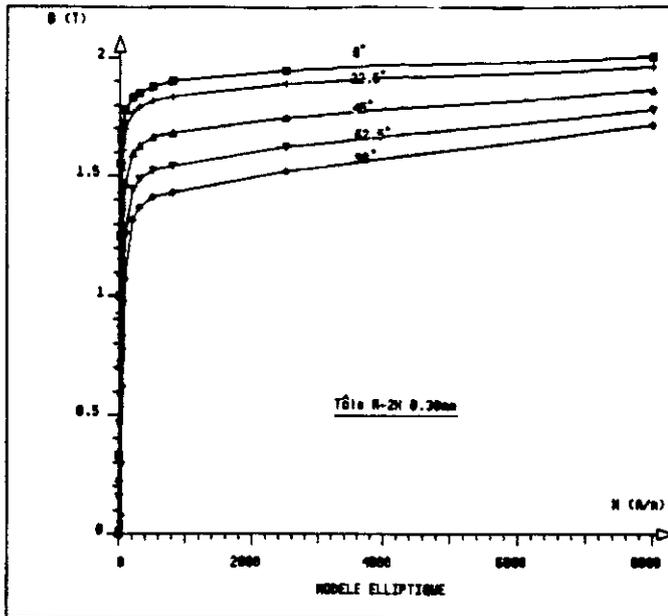
Le module et la direction de l'induction magnétique sont alors donnés par les expressions suivantes:

$$B = H / \sqrt{(\nu_x \cdot \cos \phi)^2 + (\nu_y \sin \phi)^2} \quad (\text{III.14})$$

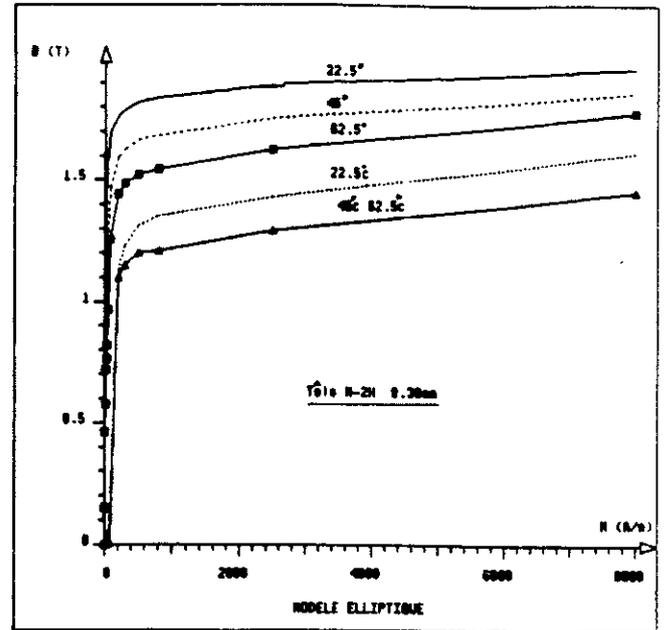
$$\phi = \arctan (\nu_x / \nu_y \cdot \tan \theta) \quad (\text{III.15})$$



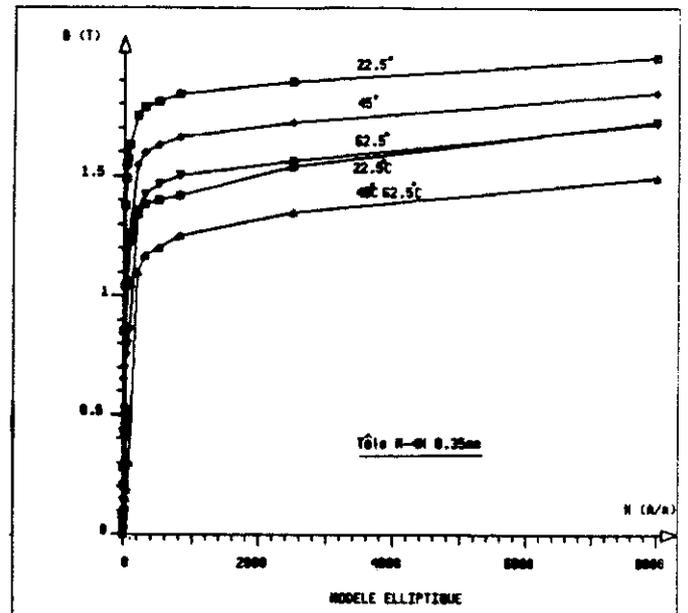
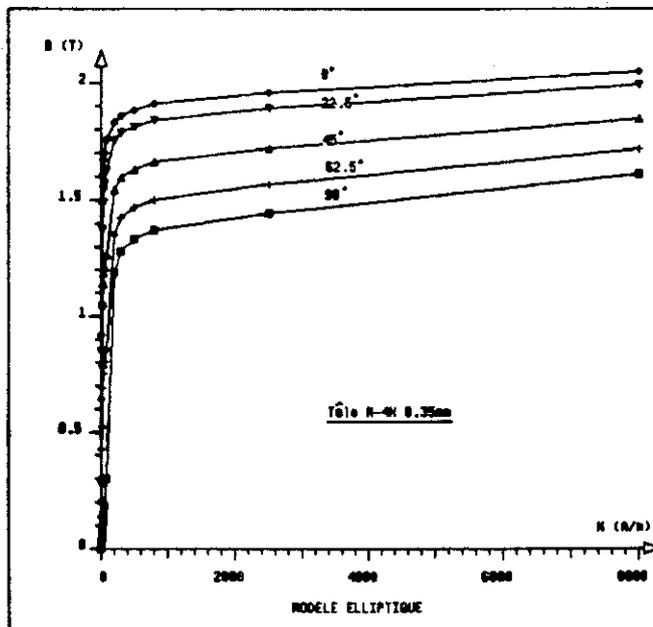
Les figures III.5.a et III.5.c montrent que la difficulté d'aimantation varie de manière monotone.



$0^\circ, 90^\circ$  : courbes constructeurs  
 $22.5^\circ, 45^\circ, 62.5^\circ$  : courbes calculées à partir des 2 courbes constructeurs ( $0^\circ, 90^\circ$ )

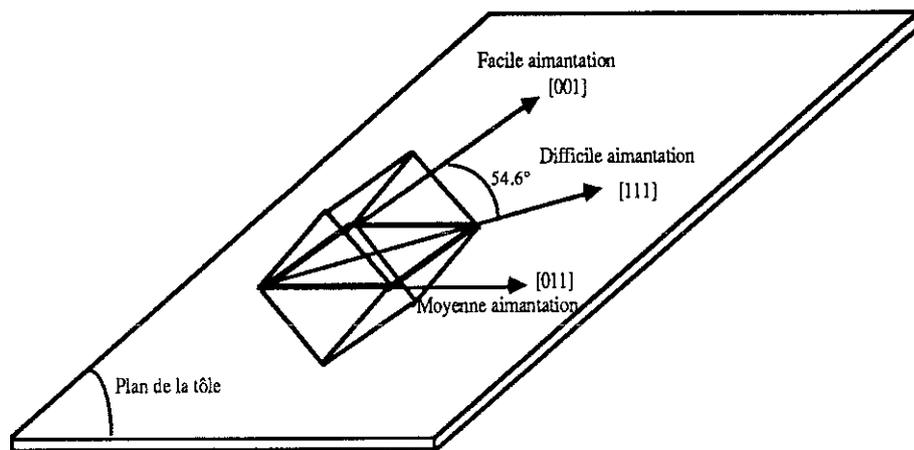


$22.5^\circ, 45^\circ, 62.5^\circ$  : calculs  
 $22.5^\circ c, 45^\circ c, 62.5^\circ c$  : courbes constructeurs



- Figure III.5 - Modèle elliptique - Comparaison avec les courbes constructeurs

De part la structure cristalline des tôles Fe-Si à grains orientés (Figure III.6) et les lois de comportement qui en résultent, on en déduit que la direction [001], qui est une arête de la maille cubique est une direction de facile aimantation ; la direction [011], qui est la petite diagonale du cube est alors une direction de moyenne aimantation ; et la grande diagonale du cube est une direction de difficile aimantation.



- Figure III.6 - Structure cristalline des tôles à grains orientés

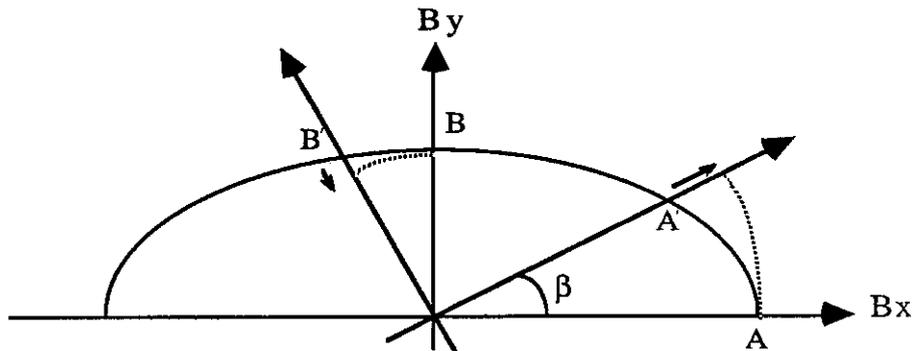
L'angle entre la direction [001] et l'axe de difficile aimantation [111] est alors de :

$$\alpha = \arctan \sqrt{2} \approx 54,6^\circ \quad (\text{III.16})$$

Le modèle elliptique tel qu'il est décrit ne permet pas de rendre compte de l'axe de difficile aimantation (Figure III.5.b et III.5.c), mais par une rotation d'axes de  $(90^\circ - \alpha)$  cela devient possible.

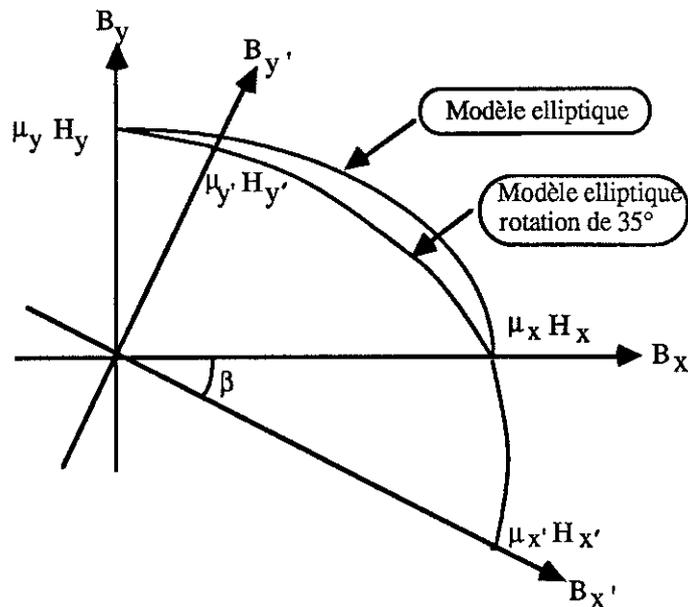
### II.3.3 Modèle elliptique avec rotation d'axes [Di Napoli 83]

La présence d'un axe de difficile aimantation se traduit par un minimum d'induction magnétique (pour un champ magnétique donné), pour une direction de  $54,6^\circ$ . A partir du modèle elliptique on peut rendre compte de ce phénomène si l'on considère le petit axe de l'ellipse comme la direction de difficile aimantation. Donc en faisant une rotation de  $\beta = (90^\circ - \alpha) \approx 35,4^\circ$  (Figure III.7).



- Figure III.7 - Modèle elliptique, rotation d'axes

Il faut néanmoins que les points A' et B' correspondent aux courbes longitudinale et transversale données par le constructeur et représentées, pour un champ magnétique donné, par les points A et B (Figure III.7).



- Figure III.8 - Modèle elliptique avec rotation d'axes de  $\beta$

Dans le repère  $Ox'y'$  l'équation de l'ellipse qui vérifie cette condition s'écrit :

$$v'_x{}^2 B_x{}^2 + v'_y{}^2 B_y{}^2 - H^2 = 0 \quad (\text{III.17})$$

alors que dans le repère  $Oxy$ , elle s'écrit :

$$\alpha_{11} B_x{}^2 + \alpha_{12} B_y{}^2 + 2\alpha_{12} B_x B_y - H^2 = 0 \quad (\text{III.18})$$

$$\text{avec } \alpha_{11} = v_x{}^2 \cos^2 \beta + v'_y{}^2 \sin^2 \beta$$

$$\alpha_{22} = v_x{}^2 \sin^2 \beta + v'_y{}^2 \cos^2 \beta$$

$$\alpha_{12} = (v_y{}^2 - v_x{}^2) \sin \beta \cos \beta$$

$v_x, v_y$  : réductivités longitudinale et transversale correspondantes aux courbes constructeurs.

$v'_x, v'_y$  : réductivités équivalentes.

Dans le système d'axe  $Oxy$  le tenseur de réductivité est un tenseur plein de la forme :

$$[v] = \begin{bmatrix} v_x & v_{xy} \\ v_{yx} & v_y \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Alors que dans le système d'axe  $Ox'y'$  il s'écrit :

$$[v'] = \begin{bmatrix} v'_x & 0 \\ 0 & v'_y \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Les réductivités équivalentes  $v'_x$  et  $v'_y$  s'expriment en fonction de  $v_x$  et  $v_y$  de la façon suivante :

$$v'_x = A v_x + B v_y \quad (\text{III.21})$$

$$v'_y = B v_x + A v_y \quad (\text{III.22})$$

$$\text{avec } A = (1 + \cos 2\beta) / (2 \cos 2\beta)$$

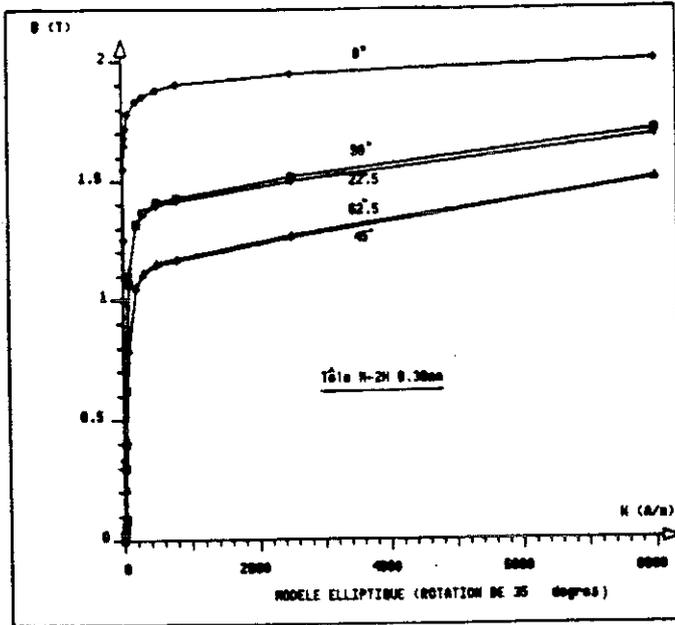
$$B = (\cos 2\beta - 1) / (2 \cos 2\beta)$$

Le module et la direction de l'induction magnétique sont alors donnés par les expressions suivantes:

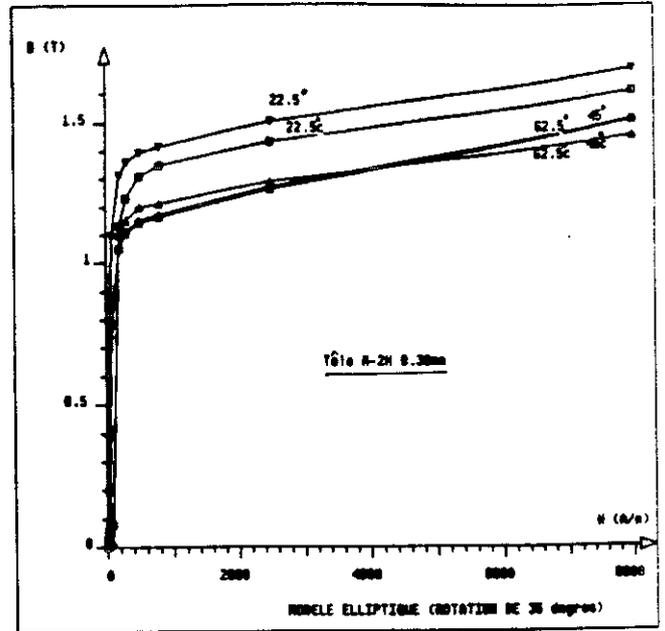
$$B = H / \sqrt{(v'_x \cos(\phi+\beta))^2 + (v'_y \sin(\phi+\beta))^2} \quad (\text{III.23})$$

$$\phi = \arctan(v'_x/v'_y \cdot \tan \theta) \quad (\text{III.24})$$

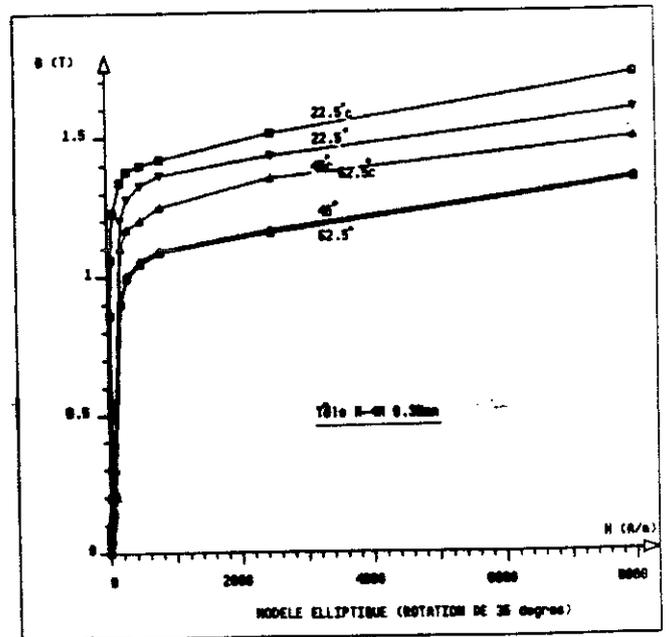
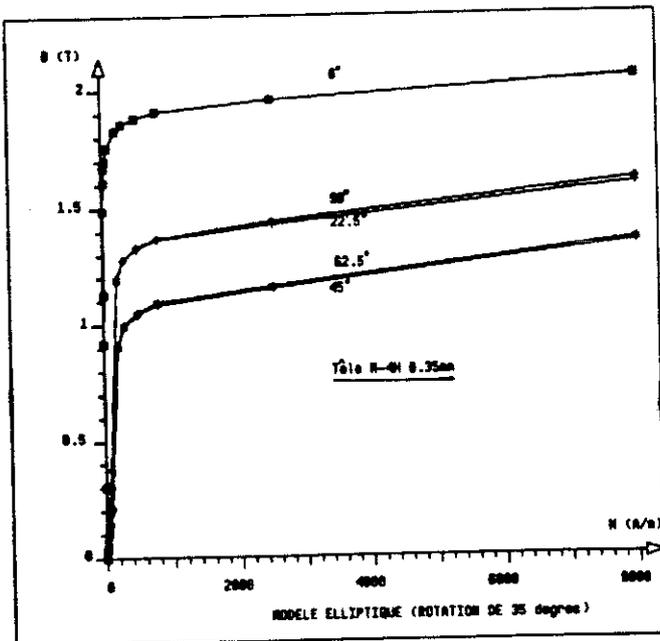
Le modèle elliptique ainsi décrit (Figure III.8) permet de rendre compte du phénomène de difficile aimantation. La comparaison avec les courbes constructeurs atteste de la validité du modèle pour les tôles à grains orientés (Figure III.9.b et III.9.d).



0°, 90° : courbes constructeurs  
 22.5°, 45°, 62.5° : courbes calculées à partir des 2 courbes constructeurs (0°, 90°)



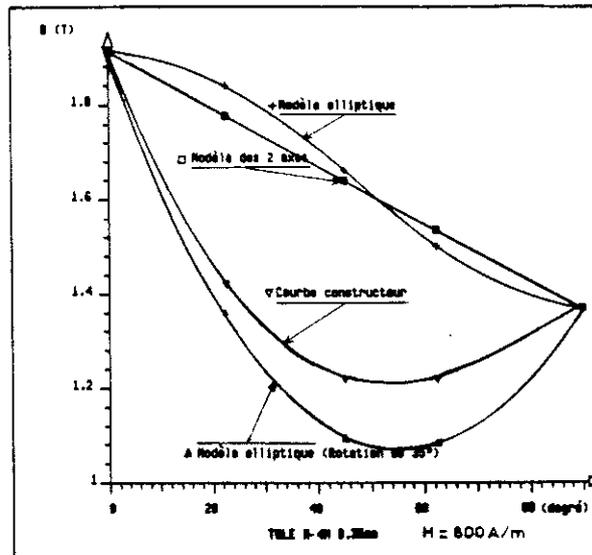
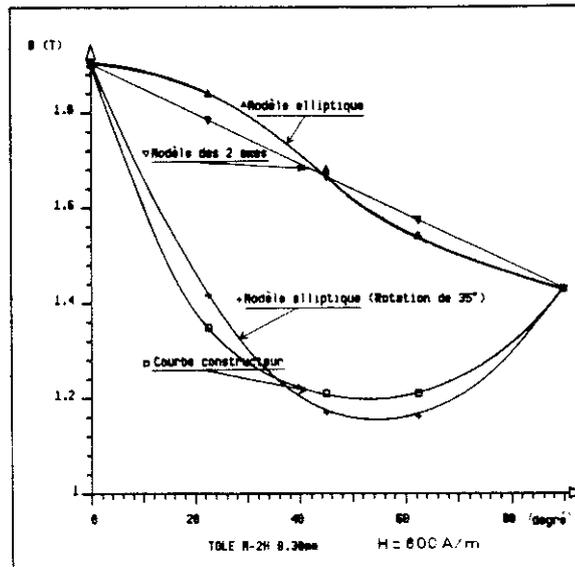
22.5°, 45°, 62.5° : calculs  
 22.5°c, 45°c, 62.5°c : courbes constructeurs



- Figure III.9 - Modèle elliptique avec rotation d'axes d'un angle de 35.4°

### II.3.4 Comparaison entre les différents modèles

Les comparaisons effectuées (Figure III.10) sont faites pour un champ magnétique donné ( $H=800\text{A/m}$ ) et ce, pour les deux qualités de tôle. Il apparaît évident que pour les tôles à grains orientés, le modèle elliptique avec rotation des axes est le plus représentatif.



- Figure III.10 - Comparaison entre les différents modèles pour deux qualités de tôles M-2H et M-4H

### III. CONCLUSIONS

Ces trois modèles nécessitent seulement la donnée de deux courbes d'aimantation (longitudinale et transversale), que l'on trouve généralement dans les catalogues constructeurs. En effet, en vue d'une implémentation dans un code de calcul par éléments finis, il est important que l'utilisateur dispose de ces informations sans avoir à faire de mesures au préalable.

Il ressort de ce chapitre que les deux premiers modèles, compte tenu de la variation monotone de la difficulté d'aimantation, sont plus adaptés pour les tôles à grains non orientés ; et que le troisième modèle représente avec une bonne approximation les phénomènes d'anisotropie des tôles à grains orientés.

Ceci dit, il faut souligner que ces modèles ne sont qu'approximatifs car la direction de l'induction magnétique, difficile à mesurer, ne figure pas dans les catalogues constructeurs; les comparaisons ne sont donc faites que sur le module.

Néanmoins, suivant le type de tôles utilisées, nous disposons de modèles représentant l'anisotropie cristalline avec une précision acceptable ; ainsi que d'un modèle pour les matériaux feuilletés.

L'implémentation dans un code de calcul par éléments finis (FLUXLAB et FLUX3D) de ce type de modèles et de l'anisotropie en général fait l'objet du chapitre suivant.



# CHAPITRE IV

**MODELISATION DES PHENOMENES MAGNETOSTATIQUES**

**NON LINEAIRES DANS LES MATERIAUX DOUX**



## CHAPITRE 4

### MODELISATION DES PHENOMENES MAGNETOSTATIQUES NON LINEAIRES DANS LES MATERIAUX DOUX

#### I. INTRODUCTION

Dans le domaine des études magnétostatiques, les principales méthodes connues : différences finies, intégrales de frontières, éléments finis sont aujourd'hui couramment utilisés dans l'analyse des problèmes bidimensionnels et plus récemment pour des problèmes tridimensionnels. La méthode des éléments finis appliquée à l'analyse tridimensionnelle connaît un développement considérable depuis cette dernière décennie. En effet, un nombre important de structures construites dans des entreprises ne peuvent être modélisées correctement que par une analyse tridimensionnelle.

Il existe de nombreux logiciels de calcul de champs électromagnétiques ; ils permettent généralement la prise en compte de matériaux magnétiques de deux types :

- \* Les matériaux à caractéristiques linéaires, isotropes ou non et avec ou sans aimantation résiduelle.
- \* Les matériaux doux isotropes non linéaires.

Cependant des dispositifs dont les matériaux qui les constituent, ont des caractéristiques plus complexes, notamment ceux où interviennent des phénomènes anisotropes non linéaires (les aimants permanents, les tôles à grains orientés), sont de plus en plus répandus.

Nous avons présenté dans le Chapitre 3 des modèles de ce type de matériaux, il convient maintenant dans ce chapitre de préciser la méthodologie d'implémentation dans un code de calcul de type éléments finis, qui a été utilisée pour chacun d'eux. De nombreux ouvrages ont été publiés sur la méthode des éléments finis dans le domaine de l'électromagnétisme [Zienkiewics 71, Sabonnadière 85, Sabonnadière 86].

Ainsi, nous ne présenterons dans ce chapitre qu'un rappel où les aspects dont nous aurons besoin pour résoudre notre problème de traitement de caractéristiques magnétiques spécifiques.

## II. ETABLISSEMENT DE LA RELATION B(H)

L'établissement de la relation intrinsèque qui lie l'induction magnétique B au champ magnétique H fait appel généralement à des relevés expérimentaux car il s'avère très difficile de prendre en compte de façon théorique tous les phénomènes apparaissant à l'échelle microscopique. C'est le cas en particulier des modèles couramment utilisés dans les logiciels éléments finis actuels. Ils concernent tout d'abord les milieux à caractéristiques linéaires sachant qu'il s'agit en fait de limiter leur utilisation dans une plage telle que la relation B(H) soit une relation linéaire.

### II.1 Loi de comportement linéaire

#### II.1.1 Les matériaux doux isotropes

L'aimantation M s'exprime linéairement en fonction du champ H. Nous écrivons dans ce cas :

$$M = \chi \cdot H$$

où  $\chi$  est une grandeur scalaire qui représente la susceptibilité du matériau. Dans ce cas l'aimantation M est toujours colinéaire au champ H. L'induction magnétique B s'écrit sous la forme :

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu H \quad (\text{IV.1})$$

où  $\mu$  est un scalaire qui représente la perméabilité magnétique et qui est égal à  $\mu_0 (1 + \chi)$ .

#### II.1.2 Les matériaux doux anisotropes linéaires

L'aimantation M s'exprime encore de façon linéaire en fonction du champ H mais par l'intermédiaire d'une relation tensorielle :

$$M = [\chi] \cdot H \quad (\text{IV.2})$$

Dans les axes principaux du matériau le tenseur de perméabilité  $[\mu] = \mu_0 ([I] + [\chi])$  prend la forme :

$$[\mu]_R = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (IV.4)$$

où  $[I]$  est la matrice unité et  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  et  $\mu_z$  représentent trois grandeurs caractéristiques du matériau.

Si le matériau n'est pas situé dans les axes principaux, une rotation doit être effectuée et la perméabilité s'exprime par la relation :

$$[\mu]_{R'} = [R]^T [\mu]_R [R] \quad (IV.5)$$

où  $[R]^T = [R]^{-1}$  est la matrice inverse de  $[R]$ . La matrice de rotation du repère  $R$  au repère  $R'$  est :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ -\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (IV.6)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont les rotations successives à effectuer respectivement par rapport aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Ainsi la description d'un tel matériau nécessite simplement la connaissance de trois grandeurs scalaires ( $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_z$ ), généralement fournies par le constructeur.

### II.1.3 Les aimants permanents à caractéristique linéaire

L'aimantation est exprimée sous la forme :

$$M = [\chi] H + M_r \quad (IV.7)$$

où  $M_r$  est l'aimantation rémanente qui caractérise les matériaux durs et  $[\chi]$  est un tenseur indépendant de  $H$ . Généralement la structure des aimants est caractérisée par une aimantation uniaxiale qui définit la direction de facile aimantation. Dans ce cas la description de l'aimant se fera par l'intermédiaire de trois grandeurs scalaires  $\chi_{//}$  la susceptibilité longitudinale,  $\chi_{\perp}$  la susceptibilité transverse et  $M_r$ .

On peut prendre une valeur scalaire  $\chi$  pour décrire la susceptibilité compte tenu de la relative proximité des valeurs de  $\chi_{//}$  et  $\chi_{\perp}$  dans les caractéristiques d'aimants.

## II.2 Loi de comportement non linéaire

Un autre modèle utilisé dans les logiciels de calcul des champs est celui caractérisant les matériaux doux isotropes non linéaires. Les caractéristiques magnétiques ne dépendent pas de la direction du champ mais uniquement de son module. C'est le cas des matériaux doux à anisotropie faible. Dans ce cas, l'induction rémanente s'annule et le tenseur des perméabilités se réduit à une grandeur scalaire :

$$B = \mu(H) \cdot H \quad (\text{IV.8})$$

où  $\mu$  représente la perméabilité du matériau fonction du champ  $H$ .

Une telle non linéarité magnétique est donc caractérisée par la courbe de première aimantation. Cette non linéarité est généralement traitée par l'algorithme de Newton-Raphson dans les calculs de champs par éléments finis.

Le traitement des matériaux à caractéristiques plus complexes se fait à partir de quelques caractéristiques significatives du matériau traité et en appliquant les modèles développés au Chapitre 3 pour les matériaux doux et le modèle phénoménologique de Chavanne [Chavanne 88] pour les matériaux durs.

Dans le paragraphe suivant nous rappelons une formulation éléments finis permettant de traiter les matériaux anisotropes non linéaires.

### III. FORMULATION ELEMENTS FINIS EN POTENTIEL SCALAIRE TOTAL

La formulation présentée utilise le potentiel scalaire magnétique. Comme nous le verrons, cette formulation nécessite la connaissance de la relation  $B(H)$  et du tenseur de perméabilité incrémentale  $[\partial B/\partial H^T]$ . La formulation en potentiel vecteur est duale de la formulation en potentiel scalaire, elle nécessite la connaissance d'une relation  $H(B)$  et du tenseur  $[\partial H/\partial B^T]$ . Mais dans le cas d'une analyse tridimensionnelle pour des problèmes de type magnétostatique, la résolution qui utilise le potentiel scalaire est préférable car moins coûteuse que celle qui utilise le potentiel vecteur car elle implique l'existence d'une inconnue par noeud au lieu de trois.

Les équations de Maxwell pour un problème de magnétostatique s'écrivent :

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$\operatorname{rot} H = J \quad (\text{IV.10})$$

Dans un dispositif sans courant, ce qui est le cas dans l'analyse particulière du circuit magnétique de transformateurs que l'on aborde dans le chapitre suivant, l'équation  $\operatorname{rot} H = 0$  permet de définir un potentiel scalaire magnétique  $\phi$  tel que :

$$H = -\operatorname{grad} \phi \quad (\text{IV.11})$$

L'équation de  $\phi$  s'obtient par combinaison de (IV.9 et IV.10) et de la loi de comportement du matériau

$$\operatorname{div} (-[\mu] \operatorname{grad} \phi) = 0 \quad (\text{IV.12})$$

où  $[\mu]$  est le tenseur de perméabilité magnétique.

A l'équation générale aux dérivées partielles (IV.12), il convient d'associer les conditions aux limites à satisfaire sur les frontières du domaine d'étude. Les conditions sur les frontières du domaine portent sur la composante tangentielle du champ  $H$  (condition de Dirichlet) ou sur la composante normale de l'induction  $B$  (condition de Neumann).

L'utilisation de la méthode des éléments finis consiste à ramener la résolution de l'équation (IV.12), à la minimisation de la fonctionnelle représentant l'énergie du système, par rapport à la fonction inconnue.

A la minimisation est associée une subdivision du domaine d'étude en région élémentaire: les éléments finis (linéique, rectangulaire, triangulaire, parallélépipédique, tétraédrique). Dans chacun de ces éléments l'inconnue  $\phi$  est approchée par une interpolation polynomiale en fonction des valeurs de  $\phi$  en chacun des noeuds de l'élément.

L'inconnue devra vérifier les conditions de continuité à l'interface des éléments et au passage d'un milieu physique à l'autre. La fonctionnelle à minimiser s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F} = \int_{\Omega} \int_0^H B^T \cdot dH \, d\Omega \quad (\text{IV.13})$$

où  $\Omega$  est l'espace correspondant au domaine d'étude.

En notant  $\phi_i$  les valeurs de  $\phi$  aux noeuds d'un élément, on approche le potentiel  $\phi$  par :

$$\phi = \sum \alpha_i(x,y,z) \phi_i \quad i=1, N_e \quad N_e : \text{nombre de noeuds de l'élément} \quad (\text{IV.14})$$

où les  $\alpha_i(x,y,z)$  sont des fonctions d'interpolation définies dans l'élément.

La solution du problème est alors obtenue par la minimisation de  $\mathcal{F}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  c'est à dire en écrivant les relations :

$$\partial \mathcal{F} / \partial \phi_i = 0 \quad i=1, N \quad N : \text{nombre de noeuds du domaine} \quad (\text{IV.15})$$

Le développement de cette condition nous conduit à :

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{F} / \partial \phi_i &= \partial / \partial \phi_i \left[ \int_{\Omega} \int_0^H B^T \, dH \, d\Omega \right] = \int_{\Omega} \partial / \partial H \left[ \int_0^H B^T \, dH \right] \partial H / \partial \phi_i \, d\Omega \\ \partial \mathcal{F} / \partial \phi_i &= \int_{\Omega} B^T \partial H / \partial \phi_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \partial H^T / \partial \phi_i \, B \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

En utilisant la discrétisation nous avons :

$$H = - \text{grad } \phi = - \sum (\text{grad } \alpha_i) \phi_i \quad (\text{IV.17})$$

$$\partial H / \partial \phi_i = - \text{grad } \alpha_i \quad (\text{IV.18})$$

et donc finalement :

$$\partial \mathcal{F} / \partial \phi_i = \int_{\Omega} - \text{grad } \alpha_i^T B \, d\Omega \quad (\text{IV.19})$$

Il convient maintenant de distinguer le cas linéaire du cas non linéaire, bien qu'il en ressortira une méthode globale de construction du système matriciel.

### 3.1 Cas linéaire

Compte tenu de la loi de comportement des matériaux linéaires définis au paragraphe 2.1, l'induction magnétique s'exprime sous la forme :

$$B = [\mu]_{R'} \cdot H + B_r \quad (\text{IV.20})$$

où  $[\mu]_{R'}$  est le tenseur de perméabilité exprimé dans le repère global :

$$[\mu]_{R'} = [R]^T [\mu]_R [R] \quad (\text{IV.21})$$

$$B_r = [R]^T \mu_0 M_r \quad (\text{IV.22})$$

Pour le passage du repère local à un repère global, nous utilisons la matrice de rotation  $[R]$  définie par (IV.16). Les équations de minimisation (IV.11), compte tenu de (IV.12) et (IV.9), se mettent sous la forme :

$$\partial \mathcal{F} / \partial \phi_i = \int_{\Omega} \{ \text{grad } \alpha_i^T \cdot [\mu]_{R'} \Sigma \text{ grad } \alpha_j \cdot \phi_j \} \, d\Omega - \int_{\Omega} \{ \text{grad } \alpha_i^T \cdot B_r \} \, d\Omega \quad (\text{IV.23})$$

La minimisation de la fonctionnelle de co-énergie  $\mathcal{F}$  conduit ainsi à la résolution d'un système linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues  $\phi_i$  :

$$[S] [\phi] = [Q] \quad (\text{IV.24})$$

où :

$$S_{ij} = \int_{\Omega} \{ \text{grad } \alpha_i^T \cdot [\mu]_{R'} \text{ grad } \alpha_j \} \, d\Omega \quad : \quad \text{matrice de terme général} \quad (\text{IV.25})$$

$$Q_i = \int_{\Omega} \{ \text{grad } \alpha_i^T \cdot B_r \} \, d\Omega \quad : \quad \text{matrice des termes sources} \quad (\text{IV.26})$$

### 3.2 Cas non linéaire

Dans les milieux saturables, le système d'équations non linéaires (IV.15) doit être résolu par une méthode itérative.

Il existe plusieurs techniques, les deux méthodes les plus couramment utilisées sont la méthode d'approximations successives [Bastos 80] et la méthode de Newton-Raphson [Andersen 72, Coulomb 81]. La méthode d'approximations successives a l'avantage d'être obtenue par un processus qui est toujours convergent, mais dans certains cas la convergence est lente [Bastos 84]. La méthode de Newton-Raphson s'avère très efficace car la vitesse de convergence quadratique est plus rapide bien qu'elle ne soit pas toujours assurée [Bastos 84]. C'est la méthode de Newton-Raphson que nous allons mettre en oeuvre.

Le développement en série de Taylor limité au premier ordre d'une matrice colonne  $[\partial\mathcal{F}/\partial\phi]$  fonction de la matrice colonne  $[\phi]$  s'écrit au voisinage de la solution  $[\phi]_{m+1} = [\phi]_m$  :

$$[\partial\mathcal{F}/\partial\phi]_{m+1} = [\partial\mathcal{F}/\partial\phi]_m + [\partial^2\mathcal{F}/\partial\phi^T\partial\phi]_m ([\phi]_{m+1} - [\phi]_m) \quad (\text{IV.27})$$

où :  $[\partial\mathcal{F}/\partial\phi]_{m+1}$  et  $[\partial\mathcal{F}/\partial\phi]_m$

sont les matrices colonnes obtenues à la suite de deux itérations successives.

L'algorithme de Newton-Raphson permet d'obtenir  $[\partial\mathcal{F}/\partial\phi]_{m+1} = 0$ , soit à résoudre :

$$[\partial^2\mathcal{F}/\partial\phi^T\partial\phi]_m ([\phi]_{m+1} - [\phi]_m) = - [\partial\mathcal{F}/\partial\phi]_m \quad (\text{IV.28})$$

La méthode consiste donc, à partir d'une solution préliminaire  $[\phi]_0$  à modifier cette dernière par le système itératif (IV.28).

L'expression de la matrice colonne  $[\partial\mathcal{F}/\partial\phi]_m$  a déjà été calculée (IV.19) ; la matrice  $[\partial^2\mathcal{F}/\partial\phi^T\partial\phi]_m$  est la matrice jacobienne calculée par dérivation de (IV.19) :

$$\partial^2\mathcal{F}/\partial\phi_j\partial\phi_i = \int_{\Omega} -\text{grad } \alpha_i^T \partial B/\partial\phi_j \, d\Omega \quad (\text{IV.29})$$

Nous avons compte tenu de la relation (IV.18) :

$$\partial B / \partial \phi_j = [\partial B / \partial H^T] \cdot \partial H / \partial \phi_j = - [\partial B / \partial H^T] \cdot \text{grad } \alpha_j \quad (\text{IV.30})$$

$$\partial^2 \mathcal{F} / \partial \phi_j \partial \phi_i = \int_{\Omega} \{ \text{grad } \alpha_i^T \cdot [\partial B / \partial H_j] \cdot \text{grad } \alpha_j \} d\Omega \quad (\text{IV.31})$$

Le système linéaire à résoudre à chaque itération  $m$  de la procédure de Newton-Raphson est donc :

$$[J]_m \cdot [\phi_{m+1} - \phi_m] = [R]_m \quad (\text{IV.32})$$

$$J_{ij} = \int_{\Omega} \{ \text{grad } \alpha_i^T \cdot [\partial B / \partial H^T] \cdot \text{grad } \alpha_j \} d\Omega : \text{ terme de la matrice jacobienne} \quad (\text{IV.33})$$

$$R_i = \int_{\Omega} \{ \text{grad } \alpha_i^T B(H) \} d\Omega \quad : \text{ terme général de la matrice des résidus} \quad (\text{IV.34})$$

Notons que dans le cas linéaire  $[\partial B / \partial H^T]$  est égal à  $[\mu]$  et que lorsque  $H=0$  nous avons  $B=B_T$ . Ce résultat suggère une méthode globale de construction du système matriciel dans les cas linéaires et non linéaires.

Le calcul numérique des éléments de Jacobien  $\partial^2 \mathcal{F} / \partial \phi_j \partial \phi_i$  nécessite la détermination du tenseur  $[\partial B / \partial H^T]$  appelé tenseur de perméabilité incrémentale. Le caractère tensoriel de ce tenseur conduit à écrire dans un repère global :

$$[\partial B / \partial H^T]_{R'} = [R]^T \cdot [\partial B / \partial H^T]_R \cdot [R] \quad (\text{IV.35})$$

Le calcul du tenseur de perméabilité incrémentale est différent suivant le type de matériau utilisé (matériau doux isotrope ou anisotrope, aimants permanents). Le paragraphe suivant est consacré au calcul de ce tenseur pour les matériaux doux isotrope ou anisotrope.

## IV. CALCUL DU TENSEUR DE PERMEABILITE INCREMENTALE

Il convient de distinguer les milieux isotropes des milieux anisotropes par leurs modèles respectifs développés au Chapitre 3, ainsi que le type d'analyse, bidimensionnelle ou tridimensionnelle.

### 4.1 Analyse bidimensionnelle

#### 4.1.1 Milieux anisotropes

Pour les milieux anisotropes il est nécessaire de connaître deux courbes, une courbe B-H dans le sens longitudinal et une courbe B-H dans le sens transverse.

Si le milieu est anisotrope de part sa structure cristalline, ces deux courbes sont celles données par le constructeur, correspondant aux courbes de première aimantation dans le sens du laminage et dans la direction perpendiculaire. Par contre, si le milieu est anisotrope après utilisation de la technique d'homogénéisation périodique, les courbes B-H dans les deux directions sont des courbes équivalentes. Dans les deux cas, chacune d'elles est approximée par une fonction analytique [Marocco 76].

Afin d'avoir une forme générale de la perméabilité incrémentale, on écrit :

$$B_i = \mu_i H_i \quad i = x, y \quad (\text{IV.36})$$

Alors la perméabilité s'écrit :

$$\partial B_i / \partial H_j = \mu_i \partial H_i / \partial H_j + H_i \partial \mu_i / \partial H_j = \mu_i \partial H_i / \partial H_j + 2 H_i H_j \partial \mu_i / \partial H^2 \quad (\text{IV.37})$$

ou sous forme tensorielle :

$$[\partial B_i / \partial H_j^T] = \begin{bmatrix} \mu_x + 2 H_x^2 \partial \mu_x / \partial H^2 & 2 H_x H_y \partial \mu_x / \partial H^2 \\ 2 H_x H_y \partial \mu_y / \partial H^2 & \mu_y + 2 H_y^2 \partial \mu_y / \partial H^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

Le calcul des termes de (IV.30) fait intervenir  $\mu_i$  et  $\partial \mu_i / \partial H^2$ . Le calcul de ces termes se fait à partir des fonctions analytiques  $\mu_i(H^2)$ . Ainsi nous pouvons calculer  $(\mu_x, \mu_y)$  et  $(\partial \mu_x / \partial H^2, \partial \mu_y / \partial H^2)$  à partir du module du champ magnétique H.

#### 4.1.2 Milieux isotropes

Les milieux isotropes sont considérés comme un cas particulier des milieux anisotropes. Dans ce type de milieux les caractéristiques magnétiques ne dépendent pas de la direction du champ mais uniquement de son module.

Ainsi les termes différentiels  $\partial B_i / \partial H_j^T$  s'écrivent :

$$[\partial B_i / \partial H_j^T] = \begin{bmatrix} \mu + 2 H_x^2 \partial \mu / \partial H^2 & 2 H_x H_y \partial \mu / \partial H^2 \\ 2 H_x H_y \partial \mu / \partial H^2 & \mu_x + 2 H_y^2 \partial \mu / \partial H^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

#### 4.1.3 Milieux feuilletés

Les milieux à structures périodiques simples comme le feuilletage des tôles de transformateur ne nécessite pas l'application de la technique d'homogénéisation développée au Chapitre 2. Il est possible à partir des formules développées au Chapitre 3 (n°III.7 et n°III.9) de calculer directement les termes du tenseur de perméabilité incrémentale à partir des perméabilités intrinsèques des matériaux. Nous allons calculer les termes différentiels  $\partial B_i / \partial H_j^T$  dans le repère des axes d'anisotropie du matériau :

$$\partial B_x / \partial H_x = \mu_x + H_x \partial \mu_x / \partial H_x = \mu_x + 2 H_x^2 \partial \mu_x / \partial \mu_{fx} \cdot \partial \mu_{fx} / \partial H_f^2 \cdot \partial H_f^2 / \partial H_x^2 \quad (\text{IV.40})$$

$$\partial B_x / \partial H_y = H_x \partial \mu_x / \partial H_y = 2 H_x H_y \partial / \partial \mu_{fx} \cdot \partial \mu_{fx} / \partial H_f^2 \cdot \partial H_f^2 / \partial H_y^2 \quad (\text{IV.41})$$

$$\partial B_y / \partial H_x = H_y \partial \mu_y / \partial H_x = 2 H_x H_y \partial \mu_y / \partial \mu_{fy} \cdot \partial \mu_{fy} / \partial H_f^2 \cdot \partial H_f^2 / \partial H_x^2 \quad (\text{IV.42})$$

$$\partial B_y / \partial H_y = \mu_y + H_y \partial \mu_y / \partial H_y = \mu_y + 2 H_y^2 \partial \mu_y / \partial \mu_{fy} \cdot \partial \mu_{fy} / \partial H_f^2 \cdot \partial H_f^2 / \partial H_y^2 \quad (\text{IV.43})$$

Le calcul des termes de  $\partial\mu_i/\partial\mu_{fi}$  se fait à partir des expressions des perméabilités homogénéisées :

$$\mu_x = \mu_0 \epsilon + \mu_{fx} \cdot (1 - \epsilon) \quad (\text{IV.44})$$

$$\mu_y = \mu_0 \mu_{fy} / (\epsilon \mu_{fy} + (1 - \epsilon) \mu_0) \quad (\text{IV.45})$$

d'où :

$$\partial\mu_x/\partial\mu_{fx} = (1 - \epsilon) \quad (\text{IV.46})$$

$$\partial\mu_y/\partial\mu_{fy} = (1 - \epsilon) \mu_0^2 / (\epsilon \mu_{fy} + (1 - \epsilon) \mu_0)^2 \quad (\text{IV.47})$$

Le calcul des termes en  $\partial H_f^2/\partial H^2$  se fait à partir de la relation suivante :

$$H_f^2 = H_{fx}^2 + H_{fy}^2 \quad (\text{IV.48})$$

or  $H_{fx} = H_x$  (continuité de la composante tangentielle de H)

et  $B_{fy} = B_y = \mu_{fy} H_{fy} = \mu_y H_y$  (continuité de la composante normale de B)

$$H_{fy} = \mu_{fy}/\mu_{fy} H_y$$

nous pouvons réécrire (IV.48) compte tenu de (IV.45) sous la forme :

$$H_f^2 = H_x^2 + (\mu_0 / \epsilon \mu_{fy} + (1-\epsilon) \mu_0)^2 H_y^2 \quad (\text{IV.49})$$

en utilisant (IV.49) on peut alors calculer les termes en  $\partial^2 H_f/\partial H_i^2$  :

$$\frac{\partial H_f^2}{\partial H_y^2} = \frac{(\epsilon \mu_{fy} + (1+\epsilon) \mu_0)^3}{(\epsilon \mu_{fy} + (1+\epsilon) \mu_0)^3 + 2 \epsilon \mu_0^2 H_y^2 \frac{\partial \mu_{fy}}{\partial H_f^2}}$$

$$\frac{\partial H_f^2}{\partial H_x^2} = \frac{\mu_0^2 (\epsilon \mu_{fy} + (1+\epsilon) \mu_0)}{(\epsilon \mu_{fy} + (1+\epsilon) \mu_0)^3 + 2 \epsilon \mu_0^2 H_y^2 \frac{\partial \mu_{fy}}{\partial H_f^2}}$$

On pose :

$$\mu_m = \epsilon \mu_{fy} + (1-\epsilon) \mu_0 \quad (\text{IV.51a})$$

et  $A = \mu_m^3 + 2 \epsilon \mu_0^2 H_y^2 \partial\mu_{fy}/\partial H_f^2 \quad (\text{IV.51b})$

Ainsi nous pouvons exprimer les relations (IV.40 à IV.43) :

$$\partial B_x / \partial H_x = \mu_x + 2 H_x^2 (1-\epsilon) \mu_0^3 / A \cdot \partial \mu_{fx} / \partial H_f^2 \quad (\text{IV.52})$$

$$\partial B_x / \partial H_y = 2 H_x H_y (1-\epsilon) \mu_0^2 \mu_m / A \cdot \partial \mu_{fx} / \partial H_f^2 \quad (\text{IV.53})$$

$$\partial B_y / \partial H_x = 2 H_x H_y (1-\epsilon) \mu_0^2 \mu_m / A \cdot \partial \mu_{fy} / \partial H_f^2 \quad (\text{IV.54})$$

$$\partial B_y / \partial H_y = \mu_y + 2 H_y^2 (1-\epsilon) \mu_0^4 / \mu_m A \cdot \partial \mu_{fy} / \partial H_f^2 \quad (\text{IV.55})$$

Le calcul des  $\mu_i$  et  $\partial \mu_{fi} / \partial H_f^2$ , se fait à partir des interpolations des courbes B-H de la tôle, données dans les sens longitudinal et transverse.

Le calcul de  $H_f^2$  à partir de  $H_x$  et  $H_y$  s'effectue en résolvant (IV.49), pour cela nous utilisons une méthode itérative de Newton-Raphson car  $\mu_{fy}$  est fonction de  $H_f^2$ .

## 4.2 Analyse tridimensionnelle

### 4.2.1 Milieux anisotropes

A partir des relations (IV.36) et (IV.37) en posant successivement  $i = x, y, z$ , il vient la relation tensorielle suivante :

$$[\partial B_i / \partial H^T_j] = \begin{bmatrix} \mu_x + 2 H_x^2 \partial \mu_x / \partial H^2 & 2 H_x H_y \partial \mu_x / \partial H^2 & 2 H_x H_z \partial \mu_x / \partial H^2 \\ 2 H_x H_y \partial \mu_y / \partial H^2 & \mu_y + H_y^2 \partial \mu_y / \partial H^2 & 2 H_y H_z \partial \mu_y / \partial H^2 \\ 2 H_x H_z \partial \mu_z / \partial H^2 & 2 H_y H_z \partial \mu_z / \partial H^2 & \mu_z + 2 H_z^2 \partial \mu_z / \partial H^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.56})$$

Compte tenu de la structure cristalline des tôles à grains orientés, nous considérons que la direction  $O_z$  est un axe de moyenne aimantation, il suffit donc de donner deux courbes expérimentales dans le sens longitudinal et transverse.

#### 4.2.2 Milieux isotropes

Une seule courbe B-H est alors nécessaire. Les termes différentiels ont alors les expressions suivantes :

$$[\partial B_i / \partial H^T_j] = \begin{bmatrix} \mu + 2 H_x^2 \partial \mu / \partial H^2 & 2 H_x H_y \partial \mu / \partial H^2 & 2 H_x H_z \partial \mu / \partial H^2 \\ 2 H_x H_y \partial \mu / \partial H^2 & \mu + H_y^2 \partial \mu / \partial H^2 & 2 H_y H_z \partial \mu / \partial H^2 \\ 2 H_x H_z \partial \mu / \partial H^2 & 2 H_y H_z \partial \mu / \partial H^2 & \mu + 2 H_z^2 \partial \mu / \partial H^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.57})$$

#### 4.2.3 Milieux anisotropes feuilletés

De même que dans le cas bidimensionnel il est possible à partir des formules développées au Chapitre III (équations III.7 à III.9) de calculer les termes différentiels.  $[\partial B_i / \partial H^T_j]$  à partir des propriétés des matériaux dans les trois directions principales.

Les termes de la perméabilité incrémentale s'expriment de la façon suivante dans les axes principaux du matériau.

$$[\partial B_i / \partial H^T_j] = \begin{bmatrix} \partial B_x / \partial H_x & \partial B_x / \partial H_y & \partial B_x / \partial H_z \\ \partial B_y / \partial H_x & \partial B_y / \partial H_y & \partial B_y / \partial H_z \\ \partial B_z / \partial H_x & \partial B_z / \partial H_y & \partial B_z / \partial H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \mu_x H_x / \partial H_x & \partial \mu_x H_x / \partial H_y & \partial \mu_x H_x / \partial H_z \\ \partial \mu_y H_y / \partial H_x & \partial \mu_y H_y / \partial H_y & \partial \mu_y H_y / \partial H_z \\ \partial \mu_z H_z / \partial H_x & \partial \mu_z H_z / \partial H_y & \partial \mu_z H_z / \partial H_z \end{bmatrix} \quad (\text{IV.58})$$

$\mu_x, \mu_y, \mu_z$  sont les perméabilités du bloc homogène équivalent. Elles peuvent s'exprimer en fonction de  $\mu_{fx}, \mu_{fy}, \mu_{fz}$ , perméabilités du fer suivant les trois axes :

$$\mu_x = \mu_0 \varepsilon + (1-\varepsilon) \mu_{fx} \quad (\text{IV.59})$$

$$\mu_y = \mu_0 \varepsilon + (1-\varepsilon) \mu_{fy} \quad (\text{IV.60})$$

$$\mu_z = \mu_0 \mu_{fz} / \varepsilon \mu_{fz} + (1-\varepsilon) \mu_0 \quad (\text{IV.61})$$

Alors la perméabilité incrémentale s'écrit sous la forme :

$$\partial B_i / \partial H_j = \mu_i \partial H_i / \partial H_j + 2 H_i H_j \partial \mu_i / \partial \mu_{fi} \cdot \partial \mu_{fi} / \partial H_f^2 \cdot \partial H_f^2 / \partial H_j^2 \quad (\text{IV.62})$$

Les dérivées en  $\partial\mu_i/\partial\mu_{fi}$  se calculeront à partir des relations (IV.59) à (IV.61) :

$$\partial\mu_x/\partial\mu_{fx} = \partial\mu_y/\partial\mu_{fy} = (1 - \epsilon) \quad (\text{IV.63})$$

$$\partial\mu_z/\partial\mu_{fz} = (1 - \epsilon) \mu_0^2 / (\epsilon \mu_{fz} + (1 - \epsilon) \mu_0)^2 \quad (\text{IV.64})$$

Il reste à calculer les termes en  $\partial H_f^2/\partial H_j^2$  pour  $j = x, y, z$ .

$$\text{Nous avons d'une part : } H_f^2 = H_{fx}^2 + H_{fy}^2 + H_{fz}^2 \quad (\text{IV.65})$$

et d'autre part la continuité des composantes tangentielles de H et normales de B nous permettent d'écrire :

$$H_{fx} = H_x \quad (\text{IV.66})$$

$$H_{fy} = H_y \quad (\text{IV.67})$$

$$B_{fz} = B_z \quad (\text{IV.68})$$

$$\text{d'où : } H_f^2 = H_x^2 + H_y^2 + B_{fz}^2/\mu_{fz}^2 = H_x^2 + H_y^2 \mu_z^2/\mu_{fz}^2 H_z^2 \quad (\text{IV.69})$$

$$\text{soit : } H_f^2 = H_x^2 + H_y^2 + \mu_0^2 / (\epsilon \mu_{fz} + (1 - \epsilon) \mu_0)^2 \cdot H_z^2 \quad (\text{IV.70})$$

A partir de (IV.70) on peut calculer  $\partial H_f^2/\partial H_j^2$  :

$$\text{on pose } A = (\epsilon \mu_{fz} + (1 - \epsilon) \mu_0)^3 + 2 \epsilon \mu_0^2 H_z^2 \partial\mu_{fz}/\partial H_f^2 \quad (\text{IV.71})$$

$$\text{et } \mu_m = \epsilon \mu_{fz} + (1 - \epsilon) \mu_0 \quad (\text{IV.72})$$

$$\partial H_f^2/\partial H_x^2 = \partial H_f^2/\partial H_y^2 = \mu_m^3/A \quad (\text{IV.73})$$

$$\partial H_f^2/\partial H_z^2 = \mu_0^2 \mu_m/A \quad (\text{IV.74})$$

Ainsi nous pouvons exprimer les termes de (IV.58) :

$$\partial B_i/\partial H_j^2 = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} + 2(1-\epsilon)/A \begin{bmatrix} H_x^2 \mu_m^3 \partial\mu_{fx}/\partial H_y^2 & H_x H_y \mu_m^3 \partial\mu_{fx}/\partial H_y^2 & H_x H_z \mu_0^2 \mu_m \partial\mu_{fx}/\partial H_f^2 \\ H_x H_y \mu_m^3 \partial\mu_{fy}/\partial H_y^2 & H_y^2 \mu_m^3 \partial\mu_{fy}/\partial H_f^2 & H_y H_z \mu_0^2 \mu_m \partial\mu_{fy}/\partial H_f^2 \\ H_x H_z \mu_0^2 \mu_m \partial\mu_{fz}/\partial H_f^2 & H_y H_z \mu_0^2 \mu_m \partial\mu_{fz}/\partial H_f^2 & H_z^2 \mu_0^4/\mu_m \partial\mu_{fz}/\partial H_f^2 \end{bmatrix}$$

La méthode d'éléments finis impose le calcul du tenseur de perméabilité incrémentale à partir des champs  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ , ce qui nécessite la résolution de l'équation (IV.70) avec  $\mu_{fz}$  fonction de  $H^2_f$ . Cette équation associée à la fonction analytique constitue un système d'équations résolu par la méthode de Newton-Raphson.

## V. CONCLUSION

La méthodologie développée dans ce chapitre revêt un caractère général. Seule la façon de calculer le tenseur de perméabilité incrémentale diffère, suivant le type d'analyse (2D ou 3D), le type de matériaux (matériaux doux ou matériaux durs). L'ensemble des modèles proposés sont implémentés dans le logiciel FLUXLAB pour l'analyse bidimensionnelle et FLUX3D pour l'analyse tridimensionnelle. Ils permettent ainsi de prendre en compte des phénomènes d'anisotropie cristalline ou d'anisotropie géométrique (feuillette) à partir d'un nombre limité de paramètres.

# CHAPITRE V

## APPLICATION A LA MODELISATION 2D ET 3D D'UN CIRCUIT MAGNETIQUE DE TRANSFORMATEUR



## CHAPITRE 5

### MODELISATION BIDIMENSIONNELLE ET TRIDIMENSIONNELLE DU CIRCUIT MAGNETIQUE D'UN TRANSFORMATEUR TRIPHASE

#### I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, l'analyse bidimensionnelle par la méthode des éléments finis, utilisant le potentiel scalaire est faite dans le plan des tôles. Cette analyse permet de prendre en compte l'anisotropie cristalline par le modèle elliptique développé au chapitre II et dont la méthodologie d'implémentation dans le code de calcul est précisée au chapitre IV. Une étude comparative entre les modèles d'anisotropie et d'isotropie permet de mettre en évidence les différences constatées. Nous analyserons dans cette étude la forme d'onde locale, ainsi que le champ tournant localisé dans le joint en T.

Dans une seconde partie, nous effectuerons une analyse tridimensionnelle du circuit magnétique d'un transformateur de 100 kVA.

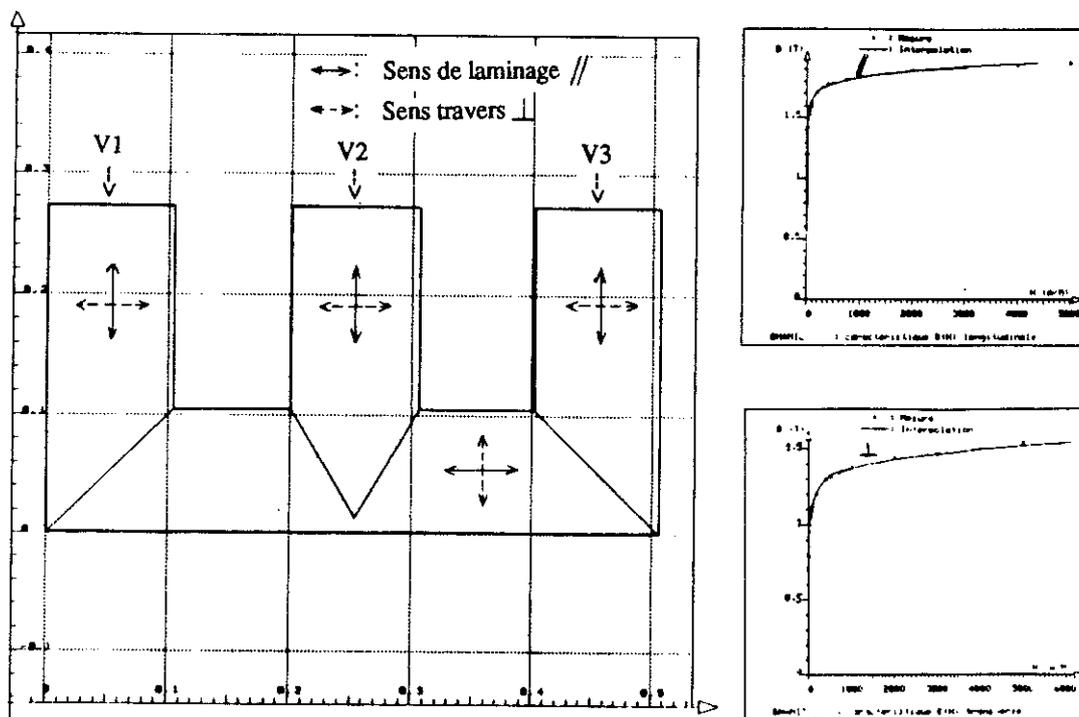
Au cours de cette étude, deux techniques numériques ont été utilisées : la méthode de Newton-Raphson accélérée permettant, d'améliorer le processus de convergence et une technique de génération d'un maillage auto-adaptatif.

La formulation en potentiel scalaire conduit à définir un domaine d'étude sans courant, les flux triphasés sinusoïdaux dans les colonnes sont donc imposés par des différences de potentiels scalaires entre les faces. On suppose ainsi qu'il n'y a pas de flux de fuite et que le domaine d'étude est entièrement défini par la géométrie du circuit magnétique.

## II. ANALYSE BIDIMENSIONNELLE DANS LE PLAN DES TOLES

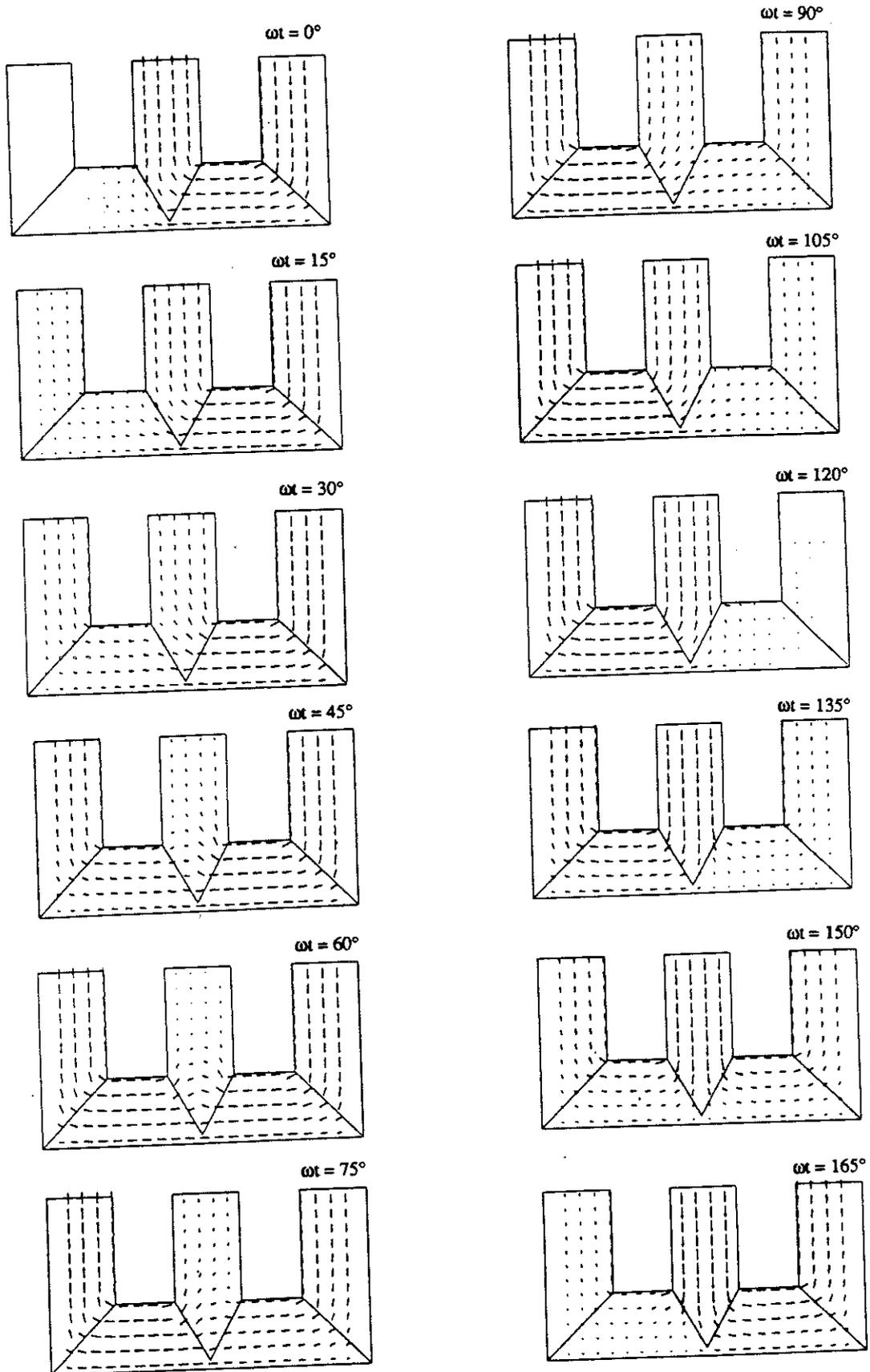
### II.1 Milieux anisotrope

Le domaine d'étude se limite au plan de la tôle (figure V.1) et les trois lignes  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  sont des frontières sur lesquelles des conditions de type Dirichlet ( $\phi=ct^e$ ) sont imposées, toutes les autres sont soumises à une condition de type Neumann homogène ( $\partial\phi/\partial n=ct^e$ ).

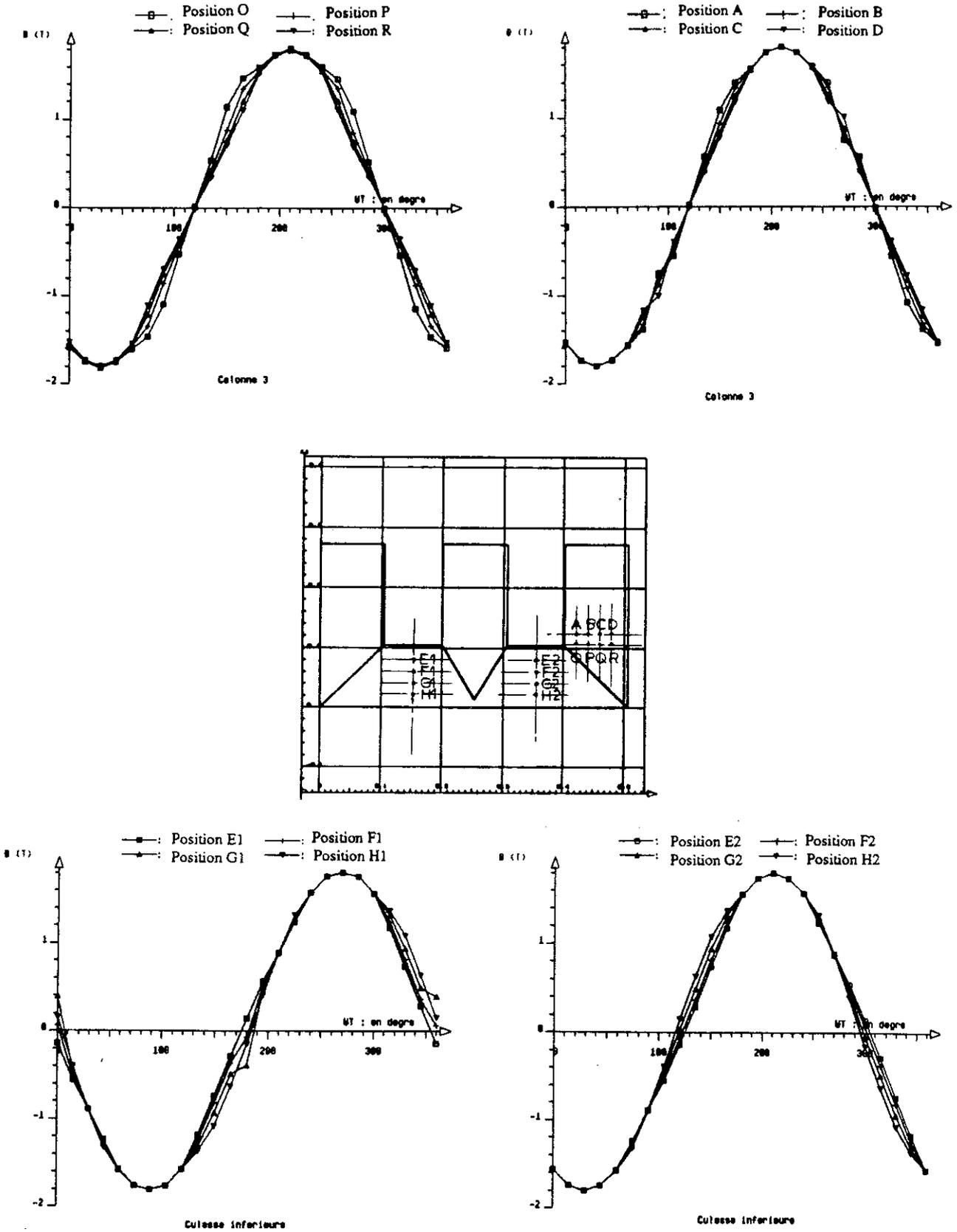


- Figure V.1 - Géométrie et conditions aux limites

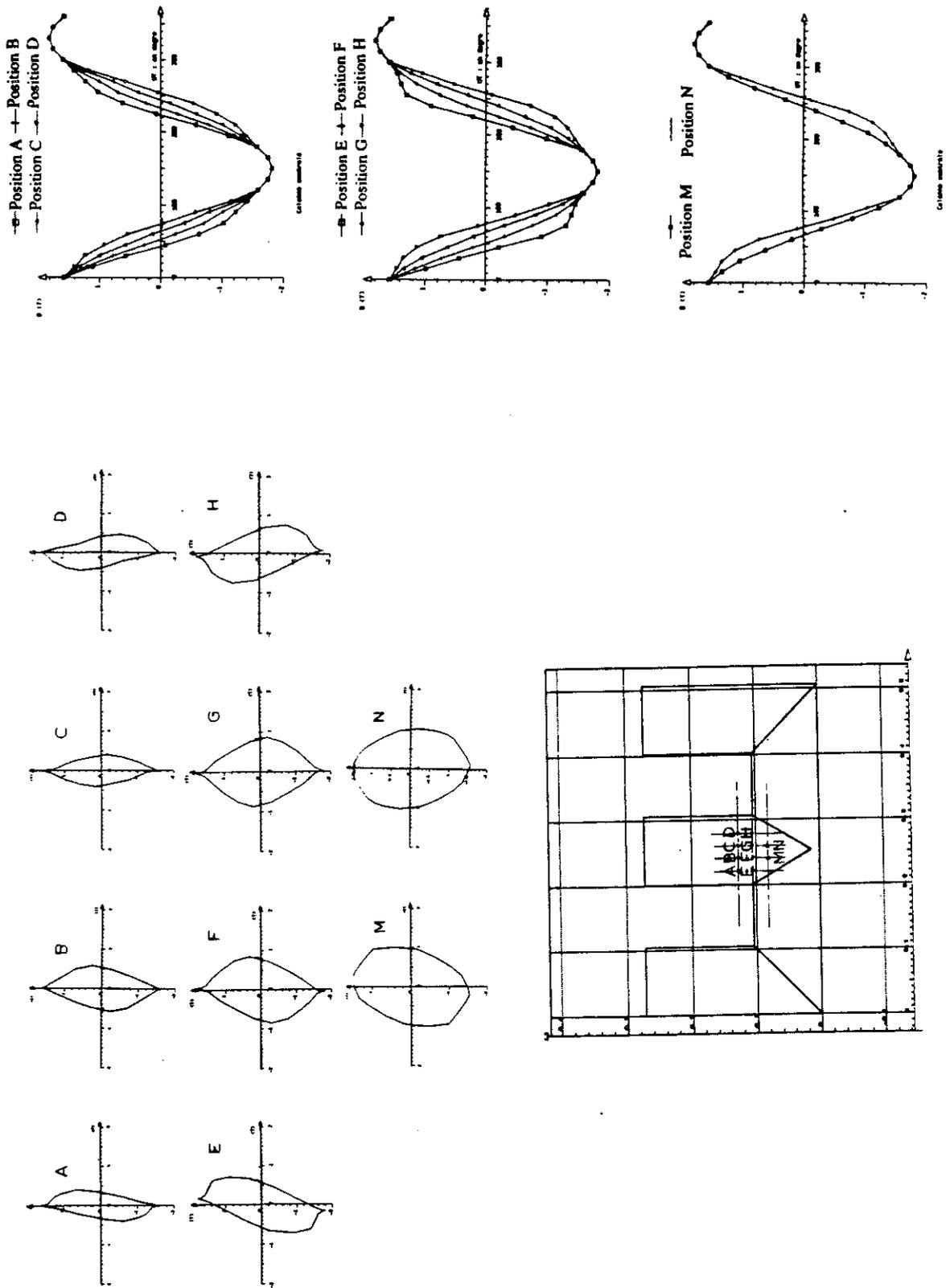
Les potentiels scalaires  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  imposés en  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  sont calculés pour que les flux triphasés soient sinusoïdaux. L'ajustement de ces conditions aux limites est délicat car le problème est non linéaire. Plusieurs résolutions sont alors nécessaires pour ajuster l'induction dans les colonnes. L'induction magnétique sous forme de flèches permet de visualiser le trajet des lignes d'induction pour chaque pas de temps et ce, pour une demi-période (Figure V.2). Les formes d'ondes sont calculées pour différents emplacements dans les colonnes et la culasse (Figures V.3 et V.4).



- Figure V.2 - Induction magnétique sous forme de flèches



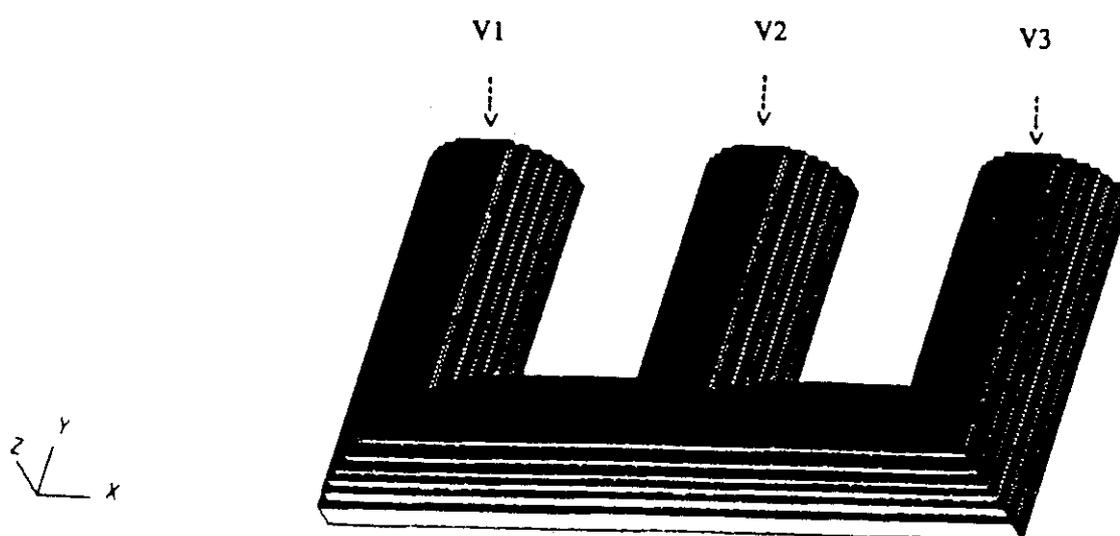
- Figure V.3 - Formes d'ondes dans la colonne extérieure et la culasse



- Figure V.4 - Formes d'ondes dans la colonne centrale et champs tournants dans le joint en T

### III. ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE DU CIRCUIT MAGNETIQUE

Dans cette analyse, le domaine d'étude se limite à l'ensemble du circuit magnétique (Figure V.7). Les conditions aux limites, du type Dirichlet ( $\phi=Cte$ ) sont imposées sur les faces V1, V2 et V3. Les potentiels  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$ , imposés sur les faces sont les mêmes que ceux calculés lors de l'analyse bidimensionnelle. Toutes les autres faces sont soumises à la condition de Neumann homogène ( $\partial\phi/\partial n=0$ ).

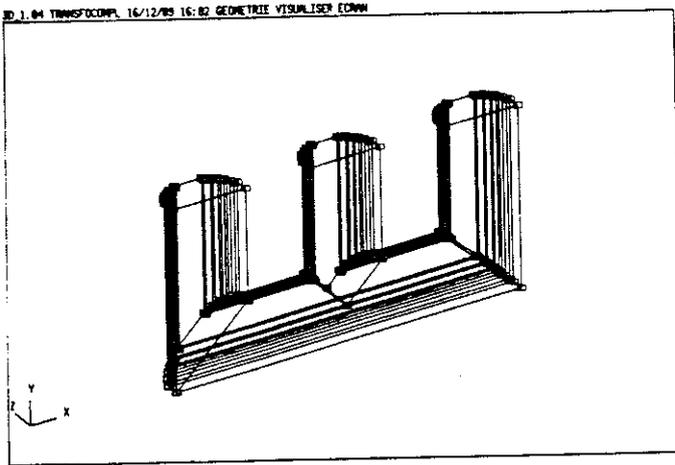


- Figure V.7 - Géométrie tridimensionnelle du circuit magnétique

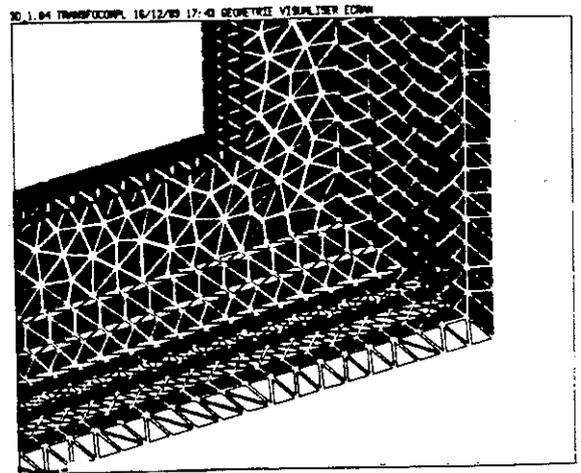
Le problème à résoudre est anisotrope et feuilleté dans la direction Oz. Les propriétés physiques nécessaires à la résolution de ce type de problème sont d'une part l'épaisseur relative de la tôle ( $1-\epsilon$ ) et d'autre part les courbes B-H dans les directions Ox, Oy et Oz. Or on peut considérer, compte-tenu de la structure cristalline des tôles, que la direction Oz est un axe de moyenne aimantation ( $\mu_{fy}=\mu_{fz}$ ). Ainsi les propriétés intrinsèques de la tôle dans les directions Oy et Oz seront les mêmes. Mais la présence du feuilletage, fait que les perméabilités homogénéisées dans ces deux directions seront différentes.

Le mailleur automatique de FLUX3D est un mailleur tétraédrique [Albertini 88]. Il permet de construire les éléments surfaciques (figure V.8) et volumiques à partir des densités de maillage définies auparavant et ainsi de découper le domaine en un ensemble d'éléments finis.

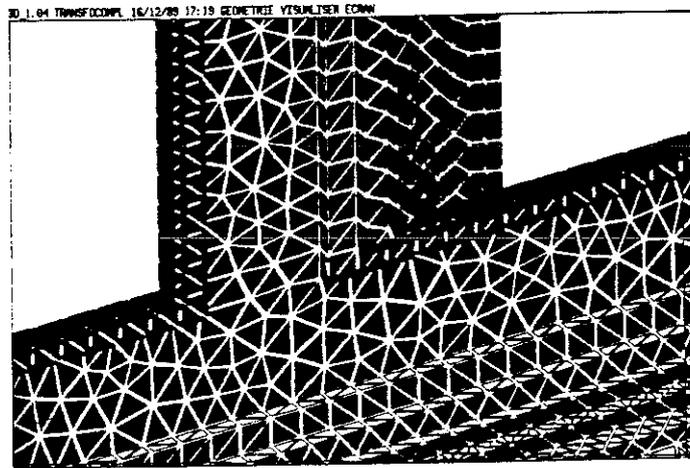
L'induction magnétique est représentées (Figure V.9) pour différents pas de temps pour un plan de coupe donné ( $z=0$ ). Les formes d'ondes de l'induction magnétique, sont représentées pour différents emplacements dans les joints et pour l'ensemble des gradins sur la Figure V.10.



Lignes et points créés avec le descripteur de géométrie



Maillage surfacique dans un joint de coin

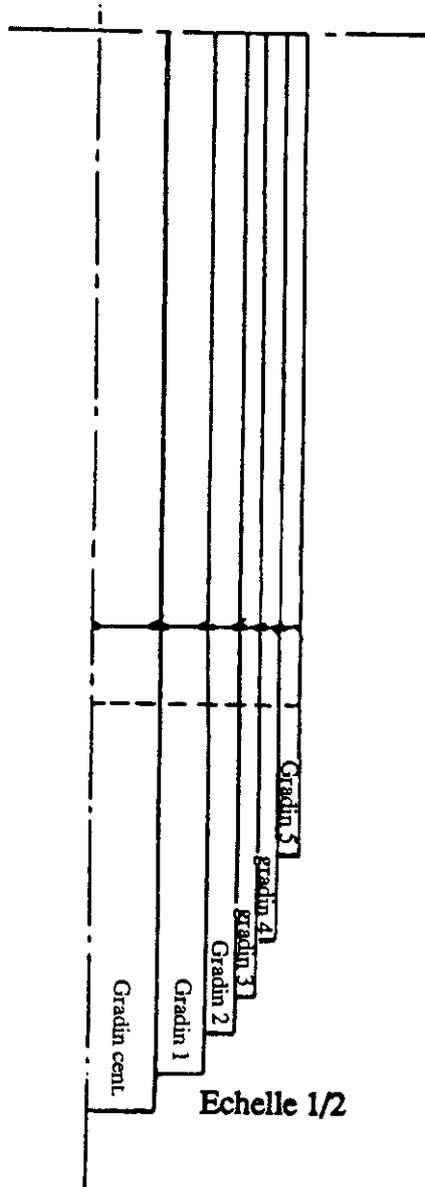
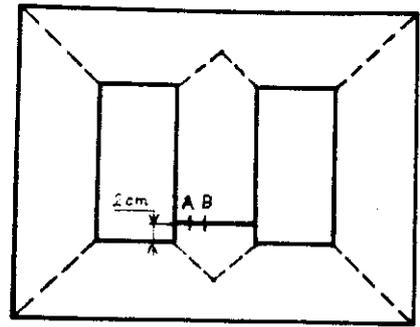


Maillage surfacique dans le joint en T

- Figure V.8 - Géométrie et maillage du circuit magnétique

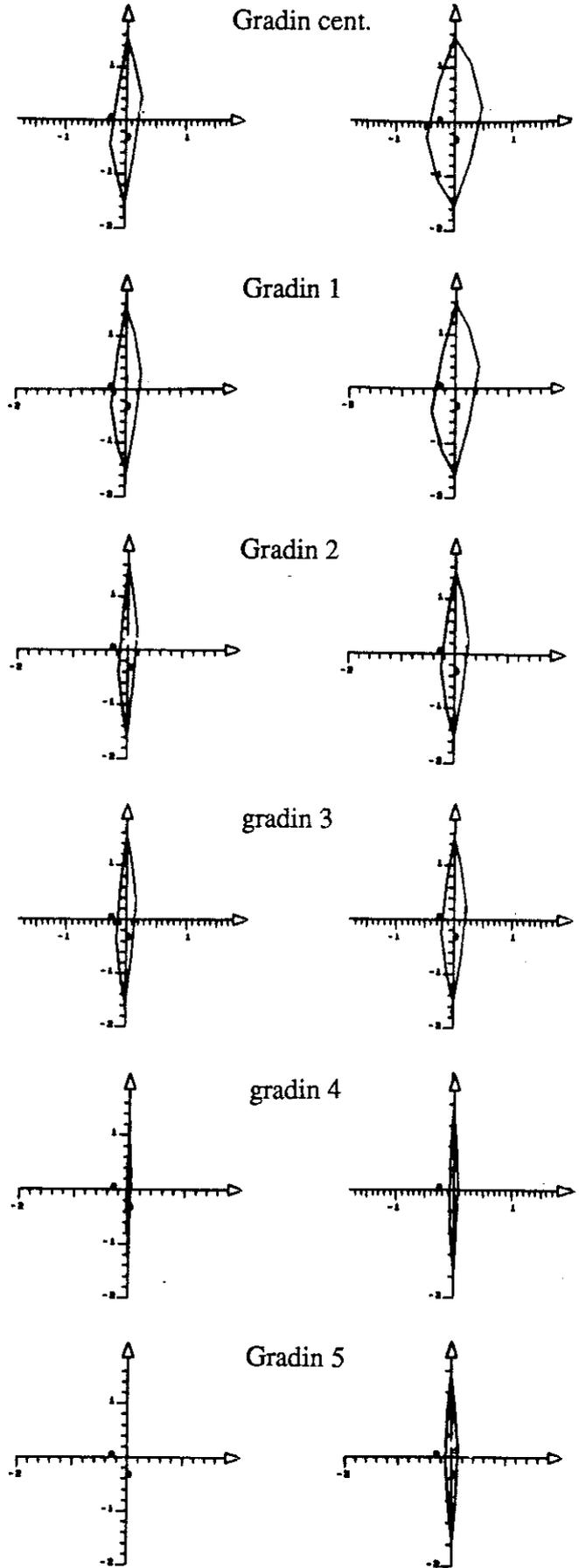
La figure V.11 permet de mettre en évidence les champs tournants pour 2 emplacements situés dans le joint en T et ce pour l'ensemble des gradins.

Nous analyserons plus particulièrement, la distribution de l'induction dans une section droite perpendiculaire au plan des tôles. Dans les sections droites situées dans les joints de coin et en T, les formes d'ondes de l'induction magnétique subissent localement des distorsions (Figure V.10). Ces distorsions sont maximales pour le gradin central et diminuent progressivement pour être minimales dans le gradin extrême (gradin 5). Il en est de même pour le champ tournant qui se développe (Figure V.11) essentiellement dans le gradin 1 et central. En effet compte tenu de la géométrie des joints obliques, lorsque l'on s'écarte du gradin central, les zones analysées se trouvent de plus en plus éloignées du joint. Les formes d'ondes sont donc de moins en moins déformées et l'induction magnétique tend à devenir parallèle à la direction de laminage.



Position A

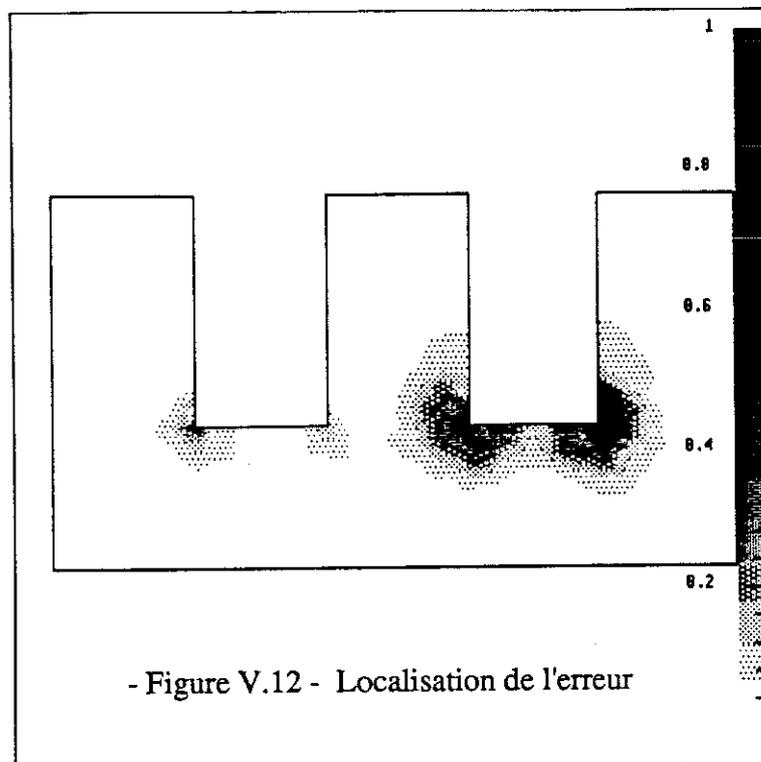
Position B



- Figure V.11 - Champs tournants sur l'ensemble des gradins dans le joint en T

#### IV. TECHNIQUES NUMERIQUES POUR L'AMELIORATION DE LA CONVERGENCE

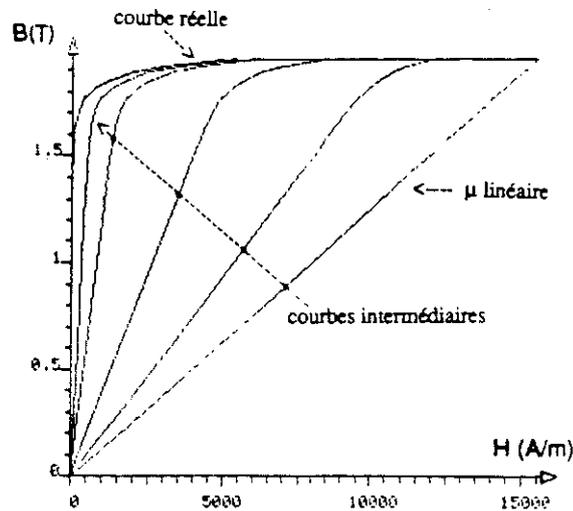
La méthode de Newton-Raphson avec sous-relaxation ne permet pas dans certains cas particuliers d'obtenir la convergence. La convergence est fonction de l'adaptation du maillage à la solution, mais aussi du niveau de non linéarité du matériau. Or l'une des caractéristiques des tôles Hi-B est de posséder une perméabilité très importante dans la zone linéaire ( $10^5$ ). La figure V.12 met en évidence les zones où l'erreur est importante si l'on utilise un maillage régulier. Ceci nous conduit à utiliser deux techniques numériques en vue d'obtenir et d'améliorer la convergence. La première est la méthode de Newton-Raphson accélérée [Shen 87] et la seconde est l'utilisation d'un mailleur auto-adaptatif [Raizer 89.2].



##### IV.1 Méthode de Newton-Raphson accélérée

Cette méthode consiste à abaisser le niveau de non-linéarité de la courbe B-H en créant un réseau de courbes intermédiaires (Figure V.13). Le principe est le suivant : la solution de la première itération obtenue avec la première courbe B-H (correspondante à une perméabilité linéaire) est utilisée comme solution initiale pour la seconde courbe et ainsi de suite jusqu'à la courbe réelle. On conserve alors cette courbe jusqu'à la convergence.

Pour faciliter l'utilisation d'une telle technique dans un code de calcul par éléments finis, on réalise une interpolation entre la courbe linéaire et la courbe B-H réelle. Il est alors demandé à l'utilisateur la perméabilité de la courbe linéaire et le nombre de courbes intermédiaires.

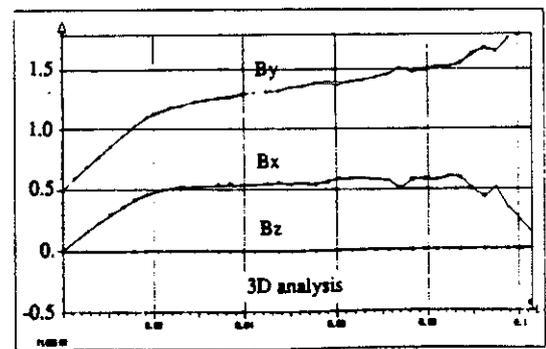
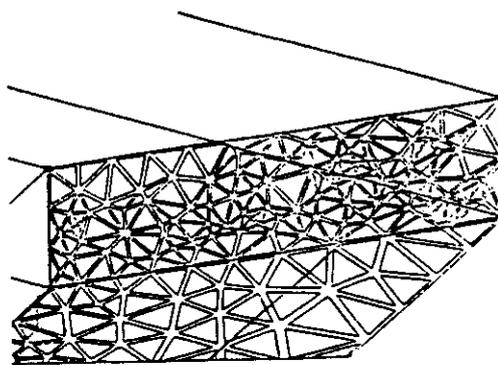
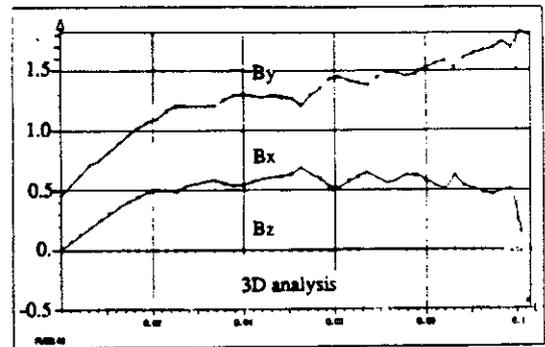
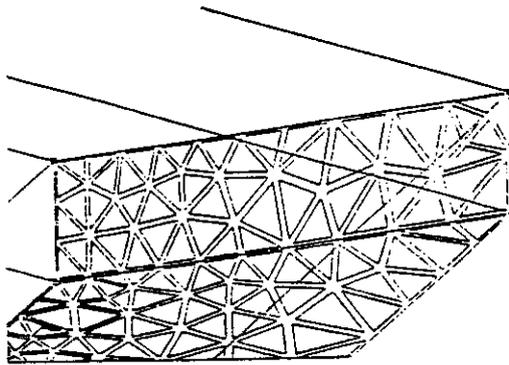
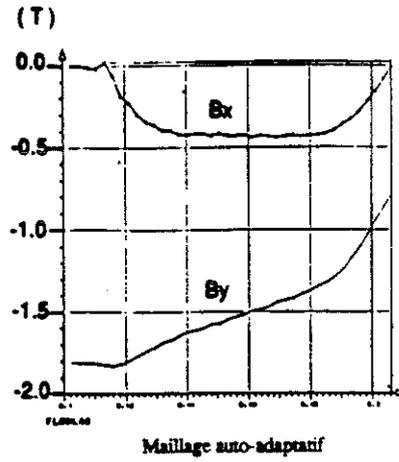
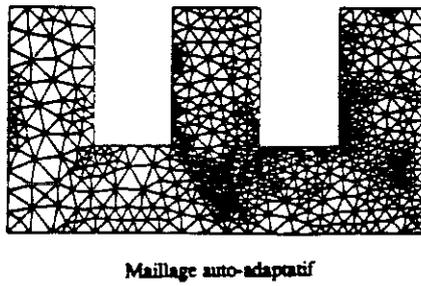
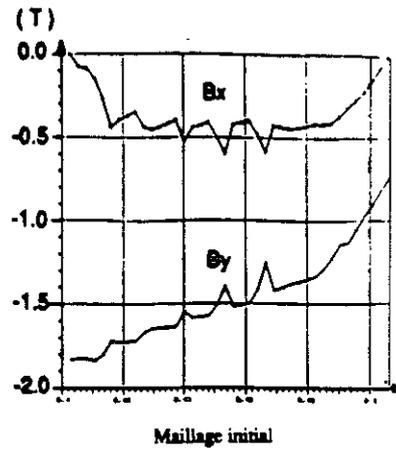
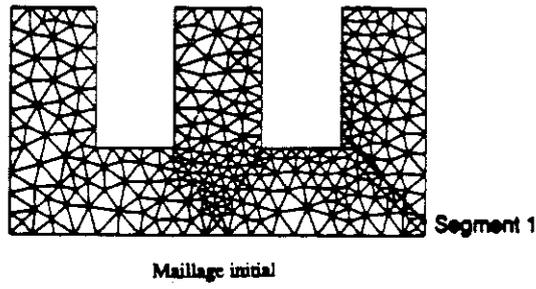


- Figure V.13 - Courbes B-H dans le sens longitudinal et le réseau de caractéristiques intermédiaires

Cette technique permet d'obtenir la convergence pour la qualité de tôle utilisée ( Tôle Hi-B "scratché" qualité ZDKH ), mais aussi d'améliorer la convergence pour d'autres qualités de tôles [Shen 87]. La technique initiale de sous-relaxation, consistant à ralentir la convergence lorsque l'erreur relative est importante, est alors supprimée et remplacée par la méthode dite de "Newton-Raphson accélérée".

#### IV.2 Maillage auto-adaptatif

Le principe du maillage auto-adaptatif, en potentiel scalaire, est basé sur la vérification de la continuité de la composante normale de B entre éléments. Cette technique permet de supprimer les triangles ou les tétraèdres dans les zones où la discontinuité de la composante normale, entre éléments, est trop importante. La figure V.14 permet d'illustrer les discontinuités observées sur l'induction magnétique et l'efficacité de cette technique pour les analyses bidimensionnelle et tridimensionnelle. L'utilisation de cette technique est étendue au traitement des problèmes dont les matériaux constitutifs sont à caractéristiques anisotropes.



- Figure V.14 - Maillage auto-adaptatif en 2 et 3 dimensions, appliqué au circuit magnétique du transformateur

## V. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre l'analyse bidimensionnelle dans le plan des tôles a permis de mettre en évidence la déformation de l'induction électromagnétique dans le temps et l'espace : les champs tournants dans la région du joint en T, la déformation de la forme d'onde dans les joints. Comme nous l'avions précisé auparavant, le transformateur est un appareil qui possède un bon rendement, une amélioration possible des pertes à vide passe nécessairement par la prise en compte des phénomènes d'anisotropie. La mise en évidence des différences entre le modèle anisotrope et isotrope justifie la prise en compte de ces phénomènes.

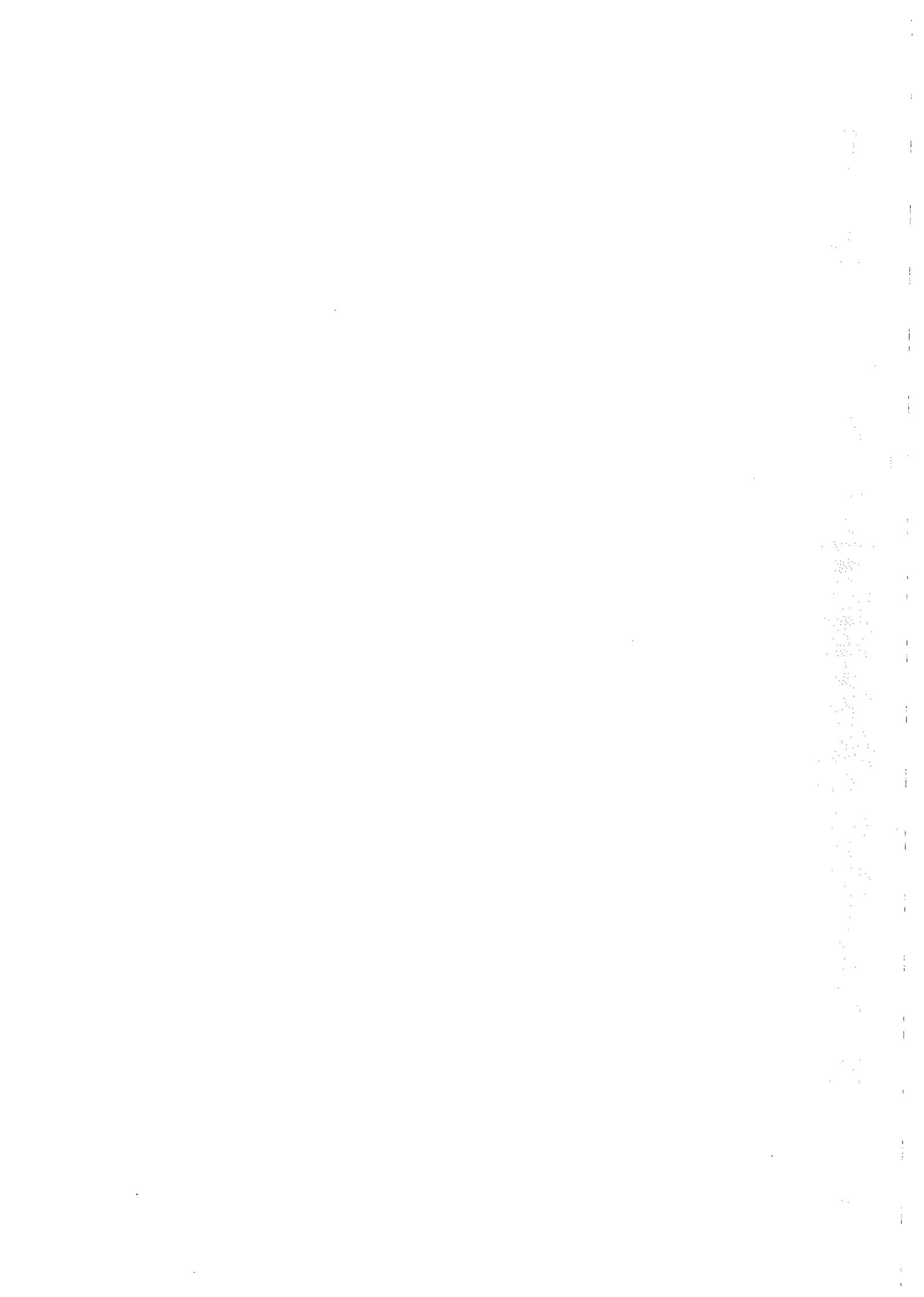
La mise en œuvre du calcul tridimensionnel permet d'avoir une compréhension globale de la répartition de l'induction dans l'ensemble du circuit magnétique.

A partir des résultats de calcul que nous avons obtenus en deux et trois dimensions il est maintenant envisageable, dans le cadre d'études ultérieures, de développer les points suivants :

La zone de recouvrement des tôles est le siège de pertes par courant de Foucault, il est alors important d'en modéliser les effets par une technique qu'il reste à définir.

De mettre en œuvre un modèle de calcul des pertes, sachant qu'il existe, tout comme les courbes  $B(H)$ , une caractéristique de pertes en fonction de l'induction pour chacune des directions de  $\mathbf{B}$ .

# CONCLUSIONS



## CONCLUSIONS

Nous avons proposé au cours de cette étude la modélisation des phénomènes d'anisotropie cristalline dans les tôles pour la construction de matériel électrique et du phénomène de pseudo-anisotropie lié à toute structure périodique en vue d'appliquer ces modèles à l'étude des circuits magnétiques des transformateurs triphasés.

Ainsi une méthode d'homogénéisation, applicable à tous les types de structure périodique a été développée pour les problèmes d'électromagnétisme, permettant de calculer le tenseur de perméabilité homogénéisé. Cette méthode est applicable en particulier à la structure périodique du feuilletage fer-air des transformateurs.

Nous avons en outre développé puis étudié les domaines d'application possibles des modèles mathématiques pour la représentation des phénomènes d'anisotropie. Il en ressort que le modèle elliptique avec rotation d'axes est le plus approprié aux tôles à cristaux orientés utilisées pour la construction des circuits magnétiques des transformateurs.

Nous nous sommes attachés par la suite à préciser la méthodologie d'implémentation des modèles d'anisotropie dans un logiciel de calcul par éléments finis (FLUX2D et FLUX3D) et avons concentré nos efforts dans la détermination du tenseur de perméabilité incrémentale suivant le type d'analyse et le type de matériau.

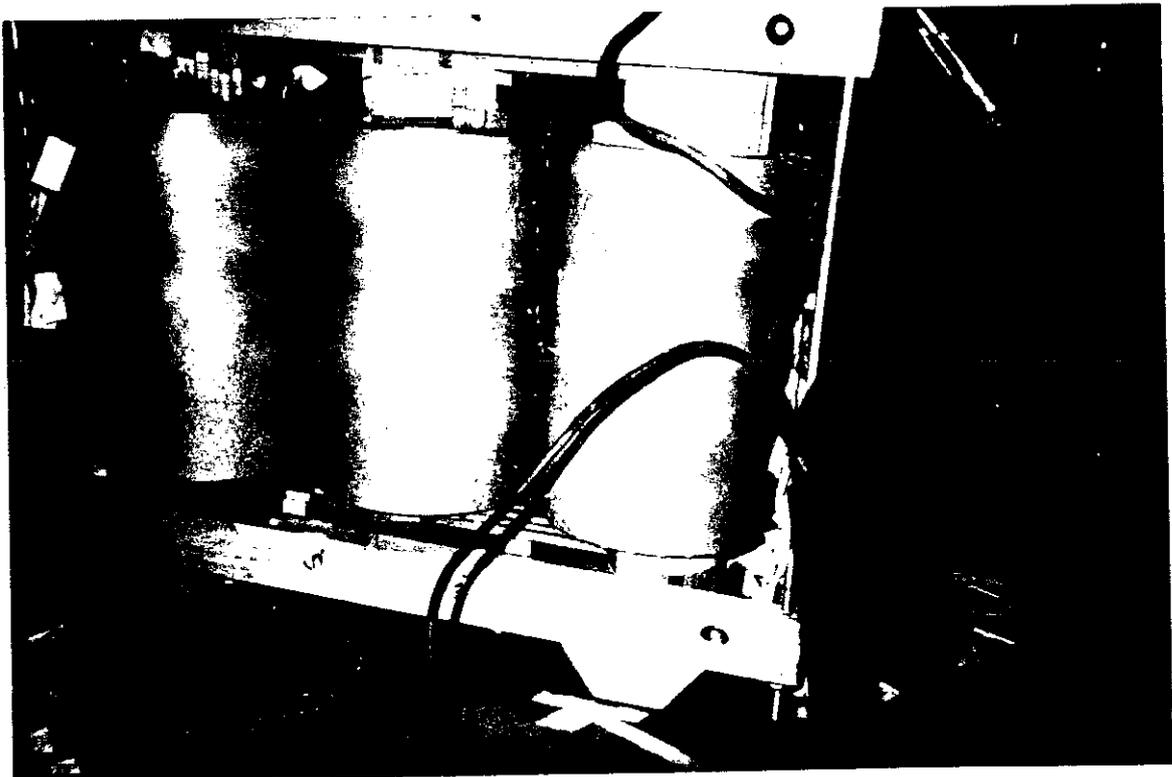
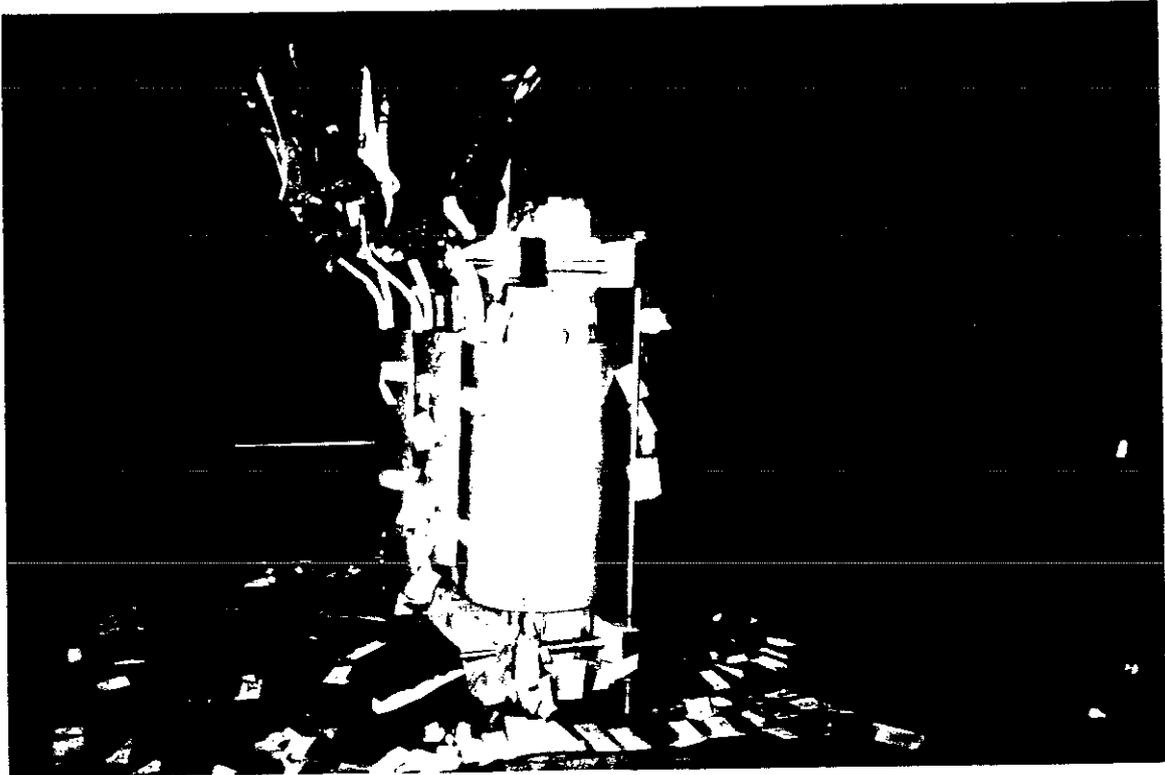
L'application de ces travaux a portée sur l'étude bidimensionnelle puis tridimensionnelle de la répartition de l'induction dans un circuit magnétique de transformateur, prenant en compte l'effet d'anisotropie et de feuilletage des tôles. Il a été en outre adapté aux problèmes anisotropes des techniques numériques telles que le maillage auto-adaptatif et la méthode de Newton-Raphson accélérée, afin d'améliorer la convergence du processus itératif. Un prototype a été élaboré au sein de la société France-Transfo (Annexe). Ce prototype permet, par l'intermédiaire de spires, de mesurer l'induction magnétique et de visualiser les formes d'ondes. L'ensemble des mesures effectuées sur ce prototype a fait l'objet d'un rapport fourni à la société France-Transfo.

Nous espérons, par l'ensemble de ces travaux, avoir contribué à l'avancement des méthodes de modélisation des phénomènes physiques ainsi qu'à une meilleure compréhension des phénomènes d'induction dans les transformateurs triphasés.



## DESCRIPTION DU PROTOTYPE

## Emplacement des spires de mesures





# BIBLIOGRAPHIE



## BIBLIOGRAPHIE

- [ABDUL QADER 82]: A.A. Abdul Qader and A. Basak  
 "Building factor of 100 kVA, 3 phase distribution transformer core", IEEE T.Mag., Vol. MAG-18, n°6, 1982, pp.1487-1489
- [ALBERTINI 88] : J.B. Albertini  
 "Contribution à la réalisation d'un logiciel de modélisation de phénomènes électromagnétiques en trois dimensions par la méthode des éléments finis", Thèse INPG, Grenoble 1988
- [ANDERSEN 72] : O.W. Andersen  
 "Iterative solution of Finite Element Equations in magnetic Field problems" IEEE T.PES Paper T.72, 1972, pp.411-417
- [BALL 65] : D.A. Ball and H.O. Lorch  
 "An improved thermometric method of measuring local power dissipation" Journal of Sci.Instrum., Vol.42, 1965, pp.90-93
- [BARTON 80] : M.L. Barton  
 "Loss calculation in laminated steel utilizing anisotropic magnetic permeability" IEEE T.PAS. Vol. PAS-99, n°3, 1980, pp.1280-1286
- [BASAK 73] : A. Basak, A.J. Moses  
 "Harmonic losses in a three phase transformer core", IEEE T.Mag. 14, Vol.5, 1987, pp.990-992
- [BASAK 80] : A. Basak  
 "The spatial distribution of flux waveform accross the links in a three-phase transformer core", IEEE T. Mag., Vol. MAG-16, n°3, 1980, pp.540-544
- [BASAK 83] : A. Basak and A.A. Abdul Qader  
 "Fundamental and harmonic flux behaviour in a 100 kVA distribution transformer core", IEEE T.Mag., Vol. MAG-19, n°5, 1983, pp.2100-2102
- [BASTOS 80] : J.P. Bastos, C. Jablon, G. Quichaud, F. Rioux-Damidau  
 "Modélisation magnétique et numérique par éléments finis de feuilletages ferro-magnétiques", Revue Physique Appliquée, Décembre 1980, pp.1625-1630
- [BASTOS 84] : J.P. Bastos et G. Quichaud  
 "Modélisation tridimensionnelle des feuilletages ferromagnétiques par éléments finis", Revue Physique Appliquée, Février 1984, pp.139-147
- [BAVAY 84] : J.C. Bavay  
 "Les tôles magnétiques à grains orientés : évolution et perspectives" Revue de Métallurgie.
- [BENGSTON 87] : C. Bengston, H. Pfutzner, P. Schönhuber  
 "On the optimisation of mitred overlaps in transformer cores", Proceedings SMM7.
- [BENSOUSSANS 78] : A. Bensoussas, J.L. Lions, G. Papanicolaou  
 "Asymptotic analysis for periodic structures", North Holland, Amsterdam 1978

- [BESSON 83] : J.M. Besson, M Jaeger, O. Debordes  
"Homogénéisation de composites à base de tissus de fibres"
- [BRAILSFORD 56] : F. Brailsford, C.G. Bratshaw  
"Iron losses at high magnetic flux densities in Electrical Sheet Steels"  
IEE Paper n°1749, Février 1955, pp.463
- [BRAILSFORD 62] : F. Brailsford, R. Mazza  
"The alternating magnetic flux distribution in right angled corners of transformer laminations", IEE paper n° 38705, Avril 62, pp.173-180
- [BRISSENEAU] : P. Brissonneau  
"Les tôles magnétiques pour la construction électrique des années 90"
- [CHAVANNE 88] : J. Chavanne  
"Contribution à la modélisation des systèmes statiques à aimants permanents"  
Thèse de Doctorat INPG, 1988
- [CHIAMPI 80] : M. Chiampi, A.L. Negro, M. Tartaglia  
"A f.e.m. to compute three dimensional magnetic field distribution in transformer cores", IEEE T.Mag., Vol.Mag-16, n°6, 1980, pp.1413-1419
- [CIORANESCU 88] : D. Cioranescu et J. Saint-Jean Paulin  
"Une méthode d'étude du comportement global des matériaux composites : l'homogénéisation", Courrier du CNRS, pp.15-23
- [COULOMB 81] : J.L. Coulomb  
"Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis", Thèse USMG-INPG, Grenoble 1981
- [DEDULLE 89.1] : J.M. Dedulle, G. Meunier, A. Foggia, J.C. Sabonnadière  
"Magnetic fields in non linear anisotropic grain-oriented", Proceedings de COMPUMAG89, à paraître IEEE T. Mag., Mars 1990
- [DEDULLE 89.2] : J.M. Dedulle, G. Meunier  
"3D anisotropie magnetic fields in transformer core laminated with grain-oriented", proceedings de SMM9, Sept.1989, à paraître Anales de Fisica
- [DEDULLE 90.1] : J.M. Dedulle, G. Meunier, L. Pierrat, J.C. Sabonnadière  
"Homogeneisation for non linear problems applied to the modelling of transformers", soumis à IMACS, 1990
- [DEDULLE 90.2] : J.M. Dedulle, G. Meunier, A. Foggia, J.C. Sabonnadière, M. Sacotte  
"Numerical analysis of flux distribution in transformer with laminated cores"  
soumis à INTERMAG, 1990
- [DEGAUQUE 85] : J. Degauque  
"Les pertes d'énergie dans les ferro-magnétiques métalliques doux : origines physiques", Mémoires et études scientifiques, Revue de Métallurgie, Janvier 1985, pp.5-20
- [DENOBLE] : R. Denoble, J. Horvilleur, Y. Tournier  
"Vers une nouvelle série de transformateurs de distribution à pertes réduites ?",  
Congrès CIRED

- [DE ROCHEBRUNE 89] : A. De Rochebrune, J.M. Dedulle, J.C. Sabonnadière  
 "A technique of homogénéisation applied to the modelling of transformers"  
 COMPUMAG89, à paraître IEEE T. Mag., Mars 1990
- [DI-NAPOLI 83] : A. Di-Napoli, R. Paggi  
 "A model of anisotropic grain-oriented steel", IEEE T.Mag., Vol. MAG-19,  
 n°4, 1983, pp.1557-1561
- K [DUVAUT 76] : D. Duvaut  
 "Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus", Theoretical and  
 applied mechanics, North Holland publishing company, 1976
- X [FELIACHI 86] : M. Feliachi  
 " Sur la modélisation des phénomènes électromagnétiques liés à l'enregistrement  
 perpendiculaire", Thèse de Doctorat d'état es-sciences physiques,  
 USMG-INPG, 1986
- [FIORILLO 87] : F. Fiorillo and M. Rietto  
 "Extended induction range analysis of rotational losses in soft magnetic  
 materials", Proceedings EMMA, 1987
- [GILBERT 61] : A.J. Gilbert  
 "A Method of measuring loss distribution in electrical machines"  
 IEE Paper n°3548 M, Juin 1961, pp.239-244
- [HOCHART 88] : B. Hochart  
 "Le transformateur de puissance", 2<sup>e</sup> édition, Technique et Documents  
 Lavoisier, 1988
- [HUTTENLOHN 84] : D.Huttenlohn, H.W. Lorenzen, R. Nuscheler  
 "Investigation of the importance of the anisotropy of cold-rolled electrical  
 steel sheet", IEEE T.Mag, Vol. MAG-20, n°5 - 1984, pp.1968-1970
- [ICHIJIMA 84] : I.Ichijima, M. Nakamura, T. Nozawa, T. Nakata  
 "Improvement of magnetic properties in thinner Hi-B with domain refinement"  
 IEEE Transactions on magnetics, Vol. Mag 20, N°5, 1984,  
 pp.1557-1559
- [JONES 73] : M.A. Jones, A.J. Moses, J.E. Thompson  
 "Flux distribution and power loss in the mitered overlap joint in power  
 transformer cores", IEEE T. Mag., Vol MAG-9, n°2, 1973, pp.114-121
- [LAFFOON 27] : C.M. Laffoon and J.F. Calvert  
 "Additional losses of synchronous machines", Transactions of the american IEE  
 N°46, 1927, p.84
- [MARROCCO 76] : A. Marrocco and R. Glowinski  
 "Finite Element approximation and iterative methods of solution for 2D non  
 linear magnetostatic problems", Proceedings de COMPUMAG Oxford,  
 1976, pp.112-125
- [MEUNIER 89] : G. Meunier, J. Chavanne, J.M. Dedulle  
 "Modélisation des phénomènes magnétostatiques non linéaires" Journées SEE,  
 1989, pp.1-12

- [MOSES 72] : A.J. Moses and B. Thomas and J.G. Thomson  
 "Power loss and flux density distributions in the T-Joint of a three phase transformer core", IEEE T.Mag., Vol MAG-8, n°4, 1972, pp.785-790
- [MOSES 73] : A.J. Moses and B. Thomas  
 "The spatial variation of localized power loss in two practical transformer T joint", IEEE T.Mag., Vol. MAG-9, n°4, 1973, pp.655-659
- [NAKAMURA 82] : M. Nakamura, K. Hirose, T. Iuchi, S. Yamaguchi, Y. Ohya  
 "Characteristic ticsof laser irradiated grains oriented silicon steel"  
 IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-18, n°6, 1982, pp.1508-1510
- [NAKATA 75] : T. Nakata  
 "Analysis of flux distribution of three-phase, three limbed transformer cores"  
 IEE of Japan, Vol 95, n°3, 1975, pp.43-50
- [NAKATA 82] : T. Nakata, Y. Kawase  
 "Analysis of the magnetic characteristics in the straight overlap joint of laminated cores", IEE of Japan, Vol.102, n°1, 1982, pp.78-86
- [NAKATA 84] : T. Nakata  
 "Numerical analysis of flux and loss distributions in electrical machinery"  
 IEEE T. Mag., Vol Mag-20, N°5, 1984, pp.1750-1755
- [NAKATA 86] : T. Nakata  
 "Analysis of magnetic characteristics of laminated cores for establishing on accuracy standart of joint dimension", IEE of Japan Vol 1058, n°11, 1985, pp.48-55
- [NAKATA 87] : T. Nakata  
 "Approximation analysis of three-dimensional magnetic fields in iron cores laminated with grain oriented silicon steel", IEEof Japan, Vol 107, n°6, 1987, pp.90-97
- [NGNEGUEU 89] : T. Ngnegueu  
 "Contribution à la modélisation mathématique et informatique des pertes supplémentaires dans les transformateurs de puissance de type cuirassé", Thèse INPG, Grenoble 1989
- [NOZAWA 78] : T. Nozawa, T. Yamamoto, Y. Matsho, Y. Chya  
 IEEE Transactions on Magnetics, vol MAG-14, n°4, 1978), pp.252-257
- [PRY, BEAN 58] : R.H. Pry and C.P. Bean  
 "Calculation of the energy loss in magnetic sheet Materials using a domain model", Journal of Appl. Phys. 29, 1958, pp.532
- [RAIZER 89.1] : A. Raizer, J.M. Dedulle, G. Meunier  
 "Magnetic field computation in a transformer core with an automatic adaptive mesh generator", Proceedings de MMM89 à paraître Journal of Applied Physics, Mai 1990

- [RAIZER 89.2] : A. Raizer, G. Meunier, J.L. Coulomb, J.C.Sabonnadière  
"An approach for automatic adaptive mesh refinement in finite elements computation of magnetic fields", IEEE T.Mag., Vol.25, 1989
- [RAIZER 89.3] : A. Raizer, G. Meunier, J.L. Coulomb, J.C. Sabonnadière  
"Three dimension error estimation for automatically adaptive mesh refinement in finite element computation of magnetic fields", Proceedings de COMPUMAG, 1989
- [SABONNADIÈRE 85] : J.C. Sabonnadière, J.L. Coulomb  
"C.A.O. en Electrotechnique", Edition Hermès, Paris 1985
- [SABONNADIÈRE 86] : J.C. Sabonnadière, J.L. Coulomb  
"Elements finis et CAO", Edition Hermès, Paris 1986
- X [SANCHEZ-PALENCIA 80] : E. Sanchez-Palencia  
"Non homogenous media and vibration theory", Lecture notes in physics n°127, Springer Verlag Berlin, 1980
- [SHEN 86] : D. Shen, J.C. Sabonnadière, J.L. Coulomb, G. Meunier  
"Influence of overlap length over power loss for the straight overlap joint of laminated core", INTERMAG, Phoenix, 1986
- [SHEN 87-1] : D. Shen, J.C. Sabonnadière, G. Meunier, J.L. Coulomb, M. Sacotte  
"3D anisotropic magnetic field calculation in transformer joints"  
IEEE T.Mag., Vol. MAG-23, n°5 - 1987, pp.3783-3785
- [SHEN 87-2] : D. Shen  
"Contribution à la modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques", Thèse INPG, Grenoble 1987
- [SHEN 88] : D. Shen, J.C. Sabonnadière, G. Meunier, J.L. Coulomb  
"Three dimensional anisotropic magnetic field calculation in transformer"
- X [SUQUET 82] : P. Suquet  
"Plasticité et homogénéisation", Thèse Paris VI, 1982
- [SWIFT 75] : G.W. Swift  
"Excitation current and power loss characteristics for mitered joint power transformer cores", IEEE T. Mag., Vol MAG-11, n°1, 1975, pp.61-64
- [VALKOVIC 84] : Z. Valkovic  
"Additional losses in three-phase transformer cores"  
Journal of MMM 41, 1984, pp.424-426
- [VIALE] : F. Viale  
"Alliage fer-silicium", Techniques de l'ingénieur, D 195, pp.1-11
- [YAMADA 81] : S. Yamada, Y. Obala, T. Sadayori  
Transactions ISIL, Vol 21, n°4, 1981, pp.200
- [ZIENKIEWICS 71] : O.C. Zienkiewics  
The Finite Element Method in Engineering Science., Mc Graw Hill, London, 1971



A U T O R I S A T I O N de S O U T E N A N C E

VU les dispositions de l'Arrêté du 23 novembre 1988 relatif aux Etudes doctorales

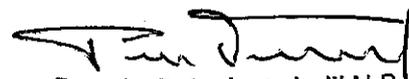
VU les rapports de présentation de

- Monsieur SABONNADIERE Jean-Claude
- Monsieur SOL Charles

Monsieur DEDULLE Jean-Marc

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme de DOCTEUR de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, spécialité "Génie Electrique"

Fait à Grenoble, le 15 Janvier 1990

  
Pour le Président de l'I.N.P.G.  
et par délégation,  
le Vice-Président  
P. VENNEREAU



# CONTRIBUTION A LA MODELISATION BIDIMENSIONNELLE ET TRIDIMENSIONNELLE DES PHENOMENES D'ANISOTROPIE DANS LES TRANSFORMATEURS

## RESUME :

Nous présentons dans ce mémoire, notre contribution à la modélisation des phénomènes d'anisotropie dans les circuits magnétiques des transformateurs. Ces phénomènes sont de deux sortes, tout d'abord l'anisotropie cristalline des tôles à cristaux orientés et d'autre part l'anisotropie géométrique ou "pseudo-anisotropie", liée au feuilletage des transformateurs.

Différents modèles mathématiques pour la représentation des matériaux à caractéristiques anisotropes non linéaires sont proposés et analysés.

Une technique générale permettant d'homogénéiser des matériaux hétérogènes à structures périodiques a été développée. Cette technique appelée méthode des moyennes est appliquée au feuilletage fer-air des transformateurs.

Nous présentons une formulation en potentiel scalaire spécifique aux structures anisotropes et nous précisons la méthodologie d'implémentation des différents modèles dans les logiciels de calculs par éléments finis (FLUX2D et FLUX3D).

L'étude 2D et 3D du circuit magnétique d'un transformateur de distribution, permet de mettre en œuvre l'ensemble de ces modèles et d'analyser la répartition spatio-temporelle de l'induction magnétique.

## 2D AND 3D MODELLING OF ANISOTROPIC PHENOMENA IN TRANSFORMERS

## ABSTRACT :

In this doctorate thesis, we present our contribution of the modelling of anisotropic phenomena in the magnetic core of transformers. We have two kinds of anisotropic effect, first the crystals' anisotropy of oriented steel sheets and also the geometrical anisotropy due to the iron-air lamination of transformers.

In order to represent the non-linear anisotropic characteristics of materials, we have examined different models.

Furthermore we have developed a general technique of homogenization of heterogeneous materials with periodic structure. This method is applied to the iron-air lamination.

A formulation is presented for the specific calculation of magnetostatic fields with non-linear anisotropic materials, using the Finite Elements Method (FEM). All these models have been implemented on the software FLUX2D and FLUX3D.

Finally, we applied the FEM to the analysis of the time-space evolution of flux density distribution.

## MOTS-CLES :

Transformateur de distribution triphasé  
Homogénéisation périodique  
Méthode des moyennes  
Méthode des éléments finis 2D et 3D

Tôles magnétiques  
Anisotropie cristalline  
Feuilletage  
Modélisation

