



**HAL**  
open science

# Autour des données initiales pour le problème de Cauchy en relativité générale

Romain Gicquaud

► **To cite this version:**

Romain Gicquaud. Autour des données initiales pour le problème de Cauchy en relativité générale. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Tours, 2019. tel-02498273

**HAL Id: tel-02498273**

**<https://hal.science/tel-02498273v1>**

Submitted on 4 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES

Discipline : **Mathématiques**  
Année universitaire : **2019–2020**

présentée et soutenue publiquement par  
**Romain Gicquaud**  
le 6 novembre 2019 à 15h

---

**Autour des données initiales pour le problème de Cauchy en relativité générale**

---

### Rapporteurs :

Dietrich	Häfner	Professeur	Université Grenoble Alpes
Marc	Herzlich	Professeur	Université de Montpellier
Andrea	Malchiodi	Professeur	École normale supérieure de Pise

### Jury :

Marie-Françoise	Bidaut-Véron	Professeur émérite	Université de Tours
Erwann	Delay	MCF HDR	Université d'Avignon
Dietrich	Häfner	Professeur	Université Grenoble Alpes
Marc	Herzlich	Professeur	Université de Montpellier
Emmanuel	Humbert	Professeur	Université de Tours
Benoît	KloECKner	Professeur	Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Cédric	Lecouvey	Professeur	Université de Tours



*À Édouard, Sélène et Ombeline, avec tout mon amour,  
À Marine pour son soutien constant au cours de ces années.*



# Remerciements

La rédaction du manuscrit d'habilitation est, pour moi, l'occasion de faire le point sur les dix années qui se sont écoulées depuis ma soutenance de thèse. S'il est certain que j'ai gagné en maturité scientifique, ceci n'aurait pas été possible sans les nombreuses rencontres que j'ai pu faire au fil des conférences, des séminaires et autres workshops.

Ce manuscrit se veut un résumé tant de mes projets aboutis que des questions qui restent en suspens. C'est avec grand plaisir que je remercie chaleureusement *Marc Herzlich*, qui me suit avec bienveillance depuis mes débuts, *Andrea Malchiodi*, et son immense gentillesse, et *Dietrich Häfner*, que je ne remerciais jamais assez de m'avoir sorti d'une mauvaise passe, d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit.

Je suis également reconnaissant envers *Emmanuel Humbert* qui a été mon référent pour mon dossier d'habilitation et d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je lui dois beaucoup d'un point de vue scientifique. Ma rencontre avec *Mattias Dahl* et lui, peu après ma thèse m'a ouvert de nombreuses portes.

*Erwann Delay* a accepté d'être mon directeur de thèse après quelques déboires avec mon premier sujet. Il a su me faire confiance et me donner la confiance dont j'avais besoin à l'époque. Je suis heureux qu'il participe à mon jury.

Un grand merci également à *Marie-Françoise Bidaut-Véron* et à son inséparable mari *Laurent*. J'ai toujours apprécié leur culture et leur disponibilité lorsque j'avais besoin d'informations pointues sur les équations aux dérivées partielles. Cette soutenance est un excellent prétexte pour les revoir et leur témoigner ma sympathie.

*Cédric Lecouvey* sera la caution algébrique de cette soutenance. Je lui dois sans doute plus qu'il ne l'imagine. Il m'a aidé à rentrer et à apprécier ce monde, qui m'apparaissait autrefois si absurde, de la théorie des représentations. C'est une thématique nouvelle que j'aborde maintenant plus sereinement.

S'il est deux autres personnes qui ont joué un rôle très important dans ma carrière de jeune chercheur, ce sont *Mattias Dahl* et *Anna Sakovich* qui m'ont ouvert à la géométrie des variétés asymptotiquement hyperboliques. Anna est devenue par la suite ma première étudiante en thèse et une véritable amie.

Je remercie aussi *Cang Nguyen* et *Jean-David Pailleron* de m'avoir fait confiance en tant que (co)directeur de thèse. Une mention particulière à Jean-David, devenu expert en déplacement de machine industrielle à cause de (ou grâce à ?) moi. Merci pour ton aide !

Chaque collaboration laisse également de bons souvenirs. J'ai eu notamment le plaisir de collaborer avec l'insatiable *Piotr Chruściel* qui m'a poussé hors de ma zone de confort, avec *Yuguang Shi* qui m'a fait confiance jusqu'au bout malgré un démarrage difficile de ma part. La collaboration avec *Rafe Mazzeo* (infructueuse pour le moment) m'apporte beaucoup, parce que, là encore, elle me pousse à me remettre en question et apprendre de nouvelles choses. Je n'oublie pas non plus *Eric Bahuaud* et *Julien Cortier* qui gardent toujours une place particulière pour moi, ni *Cécile Huneau* et *Anh Ngô* avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler.

Je remercie ensuite ma famille qui m'a toujours porté et supporté au cours de ces années, qu'ils trouvent ici un témoignage de tout mon amour pour eux. Un infini merci à ma compagne Marine qui me soutient au quotidien, qui comprend et accepte les particularités du métier de chercheur tiraillé entre l'excitation, les doutes, le découragement et la nécessité de s'absenter régulièrement du domicile. Ma vie serait sans doute infiniment moins heureuse sans les trois merveilleux enfants que tu m'as donnés...

Finalement, mes pensées vont à *Ahmad El Soufi* disparu malheureusement trop vite ainsi qu'à sa famille. Je n'oublierai jamais ton rire si communicatif ni ce superbe séjour au Ghana. Elles vont également à *Jim Isenberg* et son indéfectible bonne humeur malgré ce tragique accident.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Construction de données initiales</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation de la méthode conforme	5
1.2 L'équation de Lichnerowicz	8
1.2.1 Le cas du vide	8
1.2.2 Le cas avec constante cosmologique positive	13
1.3 Une première méthode pour résoudre les équations de contrainte conforme	17
1.4 La méthode de l'équation limite	22
1.5 Variations sur la méthode de Holst-Nagy-Tsogtgerel	24
1.5.1 Le cas du vide avec $\mathcal{Y}_g(M) > 0$	24
1.5.2 Le cas d'un champ scalaire avec $\mathcal{Y}_g(M) > 0$	27
1.5.3 Le cas du vide avec $\mathcal{Y}_g(M) = 0$	27
1.6 Un résultat de non-existence	29
<b>2 Variétés asymptotiquement hyperboliques</b>	<b>31</b>
2.1 Présentation des variétés asymptotiquement hyperboliques	31
2.1.1 L'espace hyperbolique	31
2.1.2 Définitions	32
2.1.3 Espaces de fonctions	33
2.2 Existence de compactification conforme	34
2.3 Rigidité des variétés asymptotiquement hyperboliques à Ricci minoré	37
2.4 Masse des variétés asymptotiquement hyperboliques	38
2.4.1 Isométries asymptotiques	39
2.4.2 Covariants de type masse	41
2.4.3 La masse de Wang–Chruściel-Herzlich	45
2.4.4 L'inégalité de Penrose	50
2.5 Les équations de contrainte sur une variété asymptotiquement hyperbolique	53
2.5.1 Courbure scalaire prescrite	53
2.5.2 L'équation de Lichnerowicz	54
2.5.3 Les équations de contrainte conforme	54
<b>Articles présentés</b>	<b>57</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>64</b>





# Introduction

Ce mémoire présente un panorama sur mes travaux de recherche depuis ma thèse jusqu'à mes projets en cours. La motivation première de toutes ces années de travail a été la compréhension des données initiales pour le problème de Cauchy en relativité générale, tant dans la manière de les construire que dans l'étude de leurs propriétés. Ces deux domaines ont marqué mes années de thèse et continuent, de par leur richesse, à susciter ma curiosité.

Ce mémoire se scinde donc naturellement en deux parties, un premier sur la construction de données initiales et un second sur l'étude de leur géométrie dans le cas où celles-ci sont asymptotiquement hyperboliques. Cette dichotomie ne s'est cependant pas traduite dans la structure du document car les outils de base d'analyse sur les variétés asymptotiquement hyperboliques sont requis pour chacune des deux questions.

La structure que j'ai finalement retenue est la suivante. Le premier chapitre sera consacré à la construction de données initiales sur des variétés compactes. Le second sera, quant à lui, consacré à la construction et à la géométrie des données initiales asymptotiquement hyperboliques. Décrivons maintenant chacun des chapitres.

• **PREMIER CHAPITRE** : La théorie de la relativité générale décrit l'espace-temps comme une variété lorentzienne de dimension  $3 + 1$  (ou plus généralement  $n + 1$ ) munie d'une métrique  $\gamma$  de signature  $(n, 1)$  décrivant le champ de gravitation ainsi que la structure causale de l'espace-temps. Les équations d'Einstein

$$\text{Ric}^{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{\text{Scal}^{\gamma}}{2}\gamma_{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4}T_{\mu\nu}$$

régissent la manière avec laquelle cette métrique interagit avec les autres champs (matière, électromagnétisme, interactions nucléaires, ...) décrits par le *tenseur d'énergie-impulsion*  $T_{\mu\nu}$ . On a par ailleurs coutume de dire que la masse crée le champ de gravité, or, en vertu de la célèbre formule  $E = mc^2$ , c'est plus généralement toute forme énergie qui influence le champ de gravitation. En particulier, le champ de gravitation s'influence lui-même, ce qui rend les équations d'Einstein non-linéaires. Un autre point, qui va s'avérer fondamental dans tout ce qui suit, est que cette théorie utilise le formalisme de la géométrie lorentzienne ; ce qui signifie que cette théorie possède le groupe des difféomorphismes de la variété comme groupe de symétrie. L'existence d'un tel groupe (dit de jauge comme on en retrouve dans l'électromagnétisme ou les interactions nucléaires) a deux conséquences importantes d'un point de vue mathématique :

1. Les équations d'Einstein ne sont pas hyperboliques sans fixation de la jauge, i.e. sans imposer de restriction sur le système de coordonnées de l'espace-temps.
2. Les équations d'Einstein contiennent des équations, dites *de contrainte*, qui n'encodent pas la dynamique du champ de gravité mais restreignent le choix des données initiales.

Pour un exposé détaillé sur ces questions, nous renvoyons le lecteur par exemple à [Rin09]. Les aspects mathématiques plus généraux de la relativité générale sont décrits par exemple dans [CB09].

C'est le second point qui va nous intéresser plus particulièrement dans toute la suite de ce mémoire. La théorie de la relativité générale étant de nature géométrique, il est naturel que les données initiales soient données en termes de la géométrie de l'hypersurface de Cauchy  $M$ . Ce sont, si l'on pense à  $M$  comme plongée dans l'espace-temps  $(\mathcal{M}, \gamma)$  solution des équations d'Einstein,

- La métrique  $\widehat{g}$  induite par  $\gamma$  sur  $M$ ,
- La seconde forme fondamentale de  $M$  dans  $\mathcal{M}$ ,  $\widehat{K}$  définie pour toute paire de champs de vecteurs  $X, Y$  tangents à  $M$  par  $\widehat{K}(X, Y) = \gamma(\nabla_X \nu, Y)$  avec  $\nu$  la normale à  $M$  dans  $\mathcal{M}$  et orientée vers le futur.

Les équations de contraintes s'écrivent

$$\begin{cases} \text{Scal}_{\widehat{g}} - 2\Lambda + (\text{tr}_{\widehat{g}} \widehat{K})^2 - |\widehat{K}|_{\widehat{g}}^2 = 2\rho & (0.1a) \\ \text{div}_{\widehat{g}} \widehat{K} - d(\text{tr}_{\widehat{g}} \widehat{K}) = j, & (0.1b) \end{cases}$$

(voir par exemple [BI04] pour une dérivation de ces équations, qui sont des conséquences directes des analogues lorentziens des équations de Gauss et Codazzi). Ici  $\rho = T_{00}$  désigne la densité d'énergie,  $j_i = T_{0i}$  le courant d'énergie et  $\Lambda$  la constante cosmologique. La plupart des cas que nous considérerons correspondront à des espaces-temps vides,  $\rho = 0$ ,  $j = 0$ . En effet, à l'exception notable du champ scalaire, (voir la section 1.5.2) les champs de matière n'introduisent pas de difficulté supplémentaire du point de vue de l'analyse.

Ce chapitre se borne également aux résultats sur des variétés  $M$  compactes, ce qui évite, dans un premier temps, les questions liées au comportement asymptotique des solutions et aux espaces de fonctions adaptés à cette étude. Une section entière (section 2.5) du second chapitre sera consacrée à cette étude.

La méthode de construction des données initiales que j'ai étudiée est dite *méthode conforme*. Elle est introduite dans la section 1.1. Elle permet de ramener les équations de contrainte, sous déterminées, à un système de deux équations elliptiques appelé *équations de contraintes conformes*. La première équation est appelée *équation vecteur*, ses propriétés sont décrites dans la proposition 1.1.3. La seconde, l'*équation de Lichnerowicz* est plus intéressante d'un point de vue analytique. Nous y consacrons la section 1.2. Je présente en particulier un résultat obtenu en collaboration avec P. Chruściel [2] dans lequel nous étudions en grand détail la multiplicité des solutions de l'équation de Lichnerowicz avec une constante cosmologique positive.

L'étude du système complet s'avère ardue. Deux méthodes existent actuellement pour l'étudier. Nous présentons un point de vue qui englobe les deux méthodes dans la section 1.3 où nous présentons également la difficulté intrinsèque à ce système. Ce point de vue unique n'est cependant pas pleinement satisfaisant. Nous étudions donc chacune des deux méthodes séparément dans les deux sections suivantes 1.4 et 1.5 :

La première méthode, dite *de l'équation limite* est un travail en collaboration avec M. Dahl et E. Humbert [4]. La seconde (antérieure) est due à M. Holst, G. Nagy et G. Tsogtgerel [HNT08, HNT09] puis à D. Maxwell [Max09]. Ma contribution à cette seconde méthode a été double. J'ai tout d'abord montré avec Q. A. Ngô [13] qu'elle pouvait être vue comme un résultat de perturbation, mais, fait surprenant, pas par rapport au paramètre auquel on s'attend. Ce résultat permet de se rendre compte que la méthode peut s'étendre à un cadre plus large, ce que j'ai exploré en collaboration avec T. C. Nguyen dans [14] et dans [9].

La dernière section, section 1.6, est consacrée à l'étude d'une légère modification du système des équations de contrainte conformes. Dans un travail en collaboration avec M. Dahl et E. Humbert [5], nous montrons que, sous certaines conditions, ce système n'admet pas de solution. Ce résultat montre qu'un critère général d'existence de solution aux équations de contrainte conformes est certainement difficile à obtenir.

- **SECOND CHAPITRE :** Le second chapitre est consacré à l'étude d'une classe particulière de variétés, les variétés asymptotiquement hyperboliques. Comme leur nom l'indique, ce sont des variétés dont le "modèle à l'infini" est l'espace hyperbolique. Il n'existe pas cependant (contrairement au cas asymptotiquement euclidien) une unique bonne définition de ces variétés.

Le chapitre 2 s'ouvre sur quelques rappels sur les différents modèles de l'espace hyperbolique (section 2.1.1), puis sur la description d'une catégorie de variétés asymptotiquement hyperboliques (section 2.1.2) et des espaces de fonctions naturels dans ce contexte (section 2.1.3).

Nous étudions ensuite, dans la section 2.2, ce à quoi conduit la définition naïve de "variété dont la courbure sectionnelle tend vers  $-1$  à l'infini". J'y présente un premier résultat obtenu en collaboration avec E. Bahuaud [1] puis un résultat plus difficile [10]. Je présente ensuite, dans la section 2.3, un résultat obtenu avec D. Ji et Y. Shi [12] autour de la rigidité des variétés asymptotiquement hyperboliques d'Einstein sous des hypothèses d'intégrabilité du tenseur de Weyl.

L'étude de la théorie de la relativité générale comme un système hamiltonien par R. Arnowitt, S. Deser et C. Misner a mis en évidence un invariant asymptotique des variétés asymptotiquement euclidiennes, la masse, dont l'étude et les applications se sont révélées riches. Un "covariant" similaire a été introduit pour les variétés asymptotiquement hyperboliques (voir la section 2.4). La principale différence avec le cas asymptotiquement euclidien est qu'il s'agit d'un vecteur dans l'espace-temps de Minkowski (au lieu d'un scalaire) dont les transformations sous des changements de cartes à l'infini sont étudiées dans la section 2.4.1. Cette particularité a donné lieu à un travail en collaboration avec J. Cortier et M. Dahl [3] dans lequel nous classifions l'ensemble des objets possédant des propriétés similaires. Ce travail est présenté dans la section 2.4.2.

La masse des variétés asymptotiquement hyperboliques est présentée dans la section 2.4 comme un cas particulier des objets que nous avons introduits auparavant. Elle se distingue des autres covariants par son intérêt physique, mais également par le théorème de la masse positive (théorème 2.4.21). La section 2.4.3 présente un résultat obtenu en collaboration avec M. Dahl et A. Sakovich dans lequel nous étudions la stabilité (dans un cadre restreint) du théorème de la masse positive : en quel sens peut-on dire que, si la masse d'une variété asymptotiquement hyperbolique est proche de 0, la variété elle-même est proche de l'espace hyperbolique ?

La section 2.4.4 décrit ensuite un développement autour du théorème de la masse positive : l'inégalité de Penrose. La masse est, de par sa nature même, un covariant subtil, difficile à cerner. L'inégalité de Penrose (conjecturée dans le cas asymptotiquement hyperbolique) lève une partie du voile sur ce qu'elle décrit : la masse est minorée en fonction de l'aire totale des trous noirs présents sur la variété. Dans le cadre purement riemannien dans lequel nous nous plaçons, le terme "trou noir" doit être compris en tant que surface minimale la plus extérieure. Nous présentons alors un type particulier de variétés asymptotiquement hyperboliques pour lequel l'inégalité de Penrose peut être démontrée, c'est un travail en collaboration avec M. Dahl et A. Sakovich [6]. Je présente ensuite une piste sérieuse de démonstration de l'inégalité de Penrose asymptotiquement hyperbolique riemannienne.

La dernière section, section 2.5, est consacrée à l'étude des équations de contrainte sur une variété asymptotiquement hyperbolique. J'étudie tout d'abord l'équation de prescription de courbure scalaire (2.20) qui est un cas particulier de l'équation de Lichnerowicz dans la section 2.5.1 et présente les résultats des deux articles [Gic10a, 8]. Cette étude nous permet alors de classifier les cas d'existence et d'unicité des solutions à l'équation de Lichnerowicz (section 2.5.2) puis d'étudier les équations de contrainte conforme dans la section 2.5.3 avec les résultats de [Gic10b] et ceux obtenus en collaboration avec A. Sakovich [15].

De nombreuses questions jalonnent ce mémoire. Certaines sont des projets actuellement en cours, d'autres des questions pour lesquelles je n'ai pas encore réussi à apporter de réponse satisfaisante, d'autres encore des questions ouvertes qui me semblent pertinentes.

La bibliographie a naturellement été scindée en deux parties. Les références données sous forme numériques, par exemple [3], correspondent aux articles présentés dans ce manuscrit alors que les références sous forme alphanumérique comme [CH03] sont des articles d'autres auteurs ou non présentés dans ce manuscrit [Gic10a, Gic10b].



# Chapitre 1

## Construction de données initiales

Dans ce chapitre, nous abordons une première partie importante de mon travail de recherche, celui de la construction de données initiales pour le problème de Cauchy en relativité générale. Nous nous bornerons à donner des résultats sur une variété compacte. Les résultats sur les variétés asymptotiquement hyperboliques nécessitant l'introduction d'espaces de fonctions adaptés, nous leur consacrerons une section entière (section 2.5) dans le prochain chapitre. Nous allons de plus nous restreindre au cas des équations de contrainte du vide ( $\rho \equiv 0, j \equiv 0$  dans (0.1)), qui deviennent alors

$$\begin{cases} \text{Scal}_{\widehat{g}} + (\text{tr}_{\widehat{g}} \widehat{K})^2 - |\widehat{K}|_{\widehat{g}}^2 = 0 & (1.1a) \\ \text{div}_{\widehat{g}} \widehat{K} - d(\text{tr}_{\widehat{g}} \widehat{K}) = 0, & (1.1b) \end{cases}$$

La raison de cette restriction est principalement cosmétique. En effet, l'introduction d'autres champs complique quelque peu les équations sans pour autant introduire de nouvelles difficultés (on prendra garde cependant au champ scalaire qui sera traité plus loin), voire tendent à simplifier le problème. Nous ne considérerons par ailleurs, sauf mention du contraire, que des données initiales  $C^\infty$ , renvoyant le lecteur curieux aux références pour des régularités plus faibles.

La méthode que j'ai principalement utilisée est la méthode dite conforme introduite par Y. Choquet-Bruhat, A. Lichnerowicz et J. York (voir [Max14] pour un aperçu historique). Nous la décrivons dans la section 1.1. Cette méthode s'est révélée très fructueuse pour construire et classifier l'ensemble des solutions des équations de contrainte avec  $\tau = \text{tr}_{\widehat{g}} \widehat{K}$  constant [Ise95] ( $\tau$  représentant la courbure moyenne de  $M$  dans  $\mathcal{M}$ , ce cas est dit à courbure moyenne constante, CMC). Cependant, ce n'est qu'à partir de 2008 que les techniques sont devenues assez robustes pour l'utiliser dans le cas d'une fonction  $\tau$  arbitraire. Les premiers travaux dûs à Holst-Nagy-Tsogetgerel [HNT08, HNT09] ont été raffinés par D. Maxwell [Max09]. Nous avons introduit la seconde méthode dans [4].

La méthode conforme ramène la résolution du système (1.1) (fortement sous déterminé) à l'étude d'un système elliptique formé d'une équation scalaire non linéaire, l'équation de Lichnerowicz, que nous étudierons dans la section 1.2 et d'une équation vectorielle dont les propriétés sont résumées dans la proposition 1.1.3. Le système porte alors le nom d'équations de contraintes conformes. Nous présentons les deux méthodes utilisées pour le résoudre de manière unifiée dans la section 1.3 et nous étudions chacune des méthodes séparément dans les sections 1.4 et 1.5.

### 1.1 Présentation de la méthode conforme

La méthode conforme est, historiquement, avec sa généralisation, la méthode dite "conformal thin sandwich", la principale méthode utilisée pour construire des données initiales, i.e. des solutions des équations de contrainte (0.1). Pour une présentation plus détaillée que celle que nous allons donner ici, nous renvoyons le lecteur à l'excellent article de revue [BI04].

Constatons tout d'abord que ces équations sont fortement sous-déterminées. En effet, de façon simplifiée, elles portent sur  $\widehat{g}$  et  $\widehat{K}$ , deux 2-tenseurs symétriques, soit, dans une carte locale,  $n(n+1)$  fonctions indéterminées, mais sont scalaire (pour l'équation (0.1a)) et vectorielle (pour l'équation (0.1b)), soit localement  $n+1$  équations (en toute rigueur, il faudrait ici calculer le symbole principal du système (0.1) et vérifier sa surjectivité).

Comme pour les systèmes linéaires, l'idée de la méthode conforme est de geler un certain nombre de variables (appelées parfois données "graine") pour obtenir un système déterminé pour les autres (les inconnues). Plusieurs choix sont possibles pour décomposer  $\widehat{g}$  et  $\widehat{K}$ . Nous donnerons ici uniquement le plus

simple possible, celui correspondant à la *méthode conforme*. Nous renvoyons à [Max, Del17] pour d'autres décompositions possibles et à [Max14] pour un aperçu historique de cette méthode.

L'idée première de la méthode conforme est de remarquer que, dans la contrainte hamiltonienne (0.1a), le seul terme contenant des dérivées de  $\widehat{g}$  (ou de  $\widehat{K}$ ) est  $\text{Scal}_{\widehat{g}}$ . Comme cette équation est scalaire, il est naturel de considérer  $\widehat{g}$  comme une "déformation scalaire" d'une métrique  $g$  fixée. La plus simple de ces déformations est un changement conforme<sup>1</sup> :

$$\widehat{g} = \varphi^{N-2}g,$$

pour une certaine fonction  $\varphi > 0$  avec  $N = 2n/(n-2)$  l'exposant critique pour l'injection de Sobolev  $L^2$ . Rappelons que ce choix de l'exposant de  $\varphi$  conduit à une formule particulièrement simple pour la transformation conforme de la courbure scalaire :

$$\text{Scal}_{\widehat{g}} = \left( -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g \varphi + \text{Scal}_g \varphi \right) \varphi^{1-N}. \quad (1.2)$$

Pour décomposer  $\widehat{K}$ , introduisons l'*opérateur de Killing conforme* (également appelé opérateur de Ahlfors dans [AALS18]) défini, pour tout champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TM)$ , comme étant la partie sans trace de la dérivée de Lie de la métrique  $g$  :

$$\mathbb{L}_g X = \mathcal{L}_X g - 2 \text{div}(X)g \quad (1.3)$$

En coordonnées, on a donc

$$\mathbb{L}_g X_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i - \frac{2}{n} \nabla^k X_k g_{ij}.$$

Nous allons utiliser le résultat classique suivant :

**Proposition 1.1.1** (Décomposition de York). *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte (sans bord). Supposons que  $g$  n'admet pas de champ de vecteur de Killing conforme non trivial :*

$$\mathbb{L}_g X \equiv 0 \Rightarrow X \equiv 0.$$

On a une décomposition  $L^2$ -orthogonale de l'ensemble  $\mathring{\text{Sym}}^2(M)$  des 2-tenseurs symétriques de trace nulle en

$$\mathring{\text{Sym}}^2(M) = \mathcal{T}_g(M) \perp_{L^2} \text{Im } \mathbb{L}_g,$$

où  $\mathcal{T}_g(M)$  désigne l'ensemble des 2-tenseurs symétriques de trace nulle  $\sigma$  satisfaisant

$$\text{div}_g \sigma = 0.$$

Les éléments de  $\mathcal{T}_g(M)$  sont appelés *TT-tenseurs* (pour Transverse et sans Trace). La contrainte sur les champs de vecteurs de Killing conforme est une hypothèse de généralité sur la métrique  $g$  [BCS05], elle exclut cependant des cas particuliers intéressants tels que la sphère ronde ou les tores plats.

*Démonstration.* La preuve de ce résultat peut être vue comme une application simple du théorème de Lax-Milgram. En effet, l'adjoint formel  $L^2$  de l'opérateur  $\mathbb{L}_g$  est  $-2 \text{div}_g$  : pour tout 2-tenseur symétrique de trace nulle  $T$  et tout champ de vecteur  $X$ , on a

$$\int_M \langle \mathbb{L}_g X, T \rangle_g d\mu^g = \int_M \langle X, -2 \text{div}_g T \rangle_g d\mu^g \quad (1.4)$$

(Cette formule montre par ailleurs l'orthogonalité  $L^2$  de  $\mathcal{T}_g(M)$  et  $\text{Im } \mathbb{L}_g$ ).

Étant donné  $T \in \mathring{\text{Sym}}^2(M)$ , on introduit la fonctionnelle

$$F(X) := \frac{1}{2} \int_M |\mathbb{L}_g X|^2 d\mu^g + 2 \int_M \langle \text{div}_g T, X \rangle_g d\mu^g,$$

définie sur  $H^1(M, TM)$ .  $F$  est continue et l'inexistence de champ de vecteur de Killing conforme assure qu'elle est coercive. Si  $X$  est un minimiseur de  $F$  ( $X \in \Gamma(TM)$  est alors lisse par régularité elliptique), on obtient l'équation

$$\text{div}_g (T - \mathbb{L}_g X) = 0,$$

autrement dit

$$T - \mathbb{L}_g X \in \mathcal{T}(M).$$

Ceci montre l'existence de la décomposition de York. Le détail de cette preuve est donné dans [9].  $\square$

<sup>1</sup>Remarquons que nous parlons ici de fixer une métrique  $g$  et non pas une classe conforme. L'article [Max11a] montre que (dans un cas dégénéré du moins) la méthode conforme n'est pas conformément covariante ! Nous reviendrons sur ce point dans la section 1.5.

**Proposition 1.1.2** (Transformation conforme de la divergence). *Pour tout 2-tenseur symétrique de trace nulle, on a*

$$\operatorname{div}_{\widehat{g}}(\varphi^{-2}T) = \varphi^{-N} \operatorname{div}_g T.$$

En particulier l'application  $\sigma \mapsto \varphi^{-2}\sigma$  définit un isomorphisme entre  $\mathcal{T}_g(M)$  et  $\mathcal{T}_{\widehat{g}}(M)$ .

*Démonstration.* Nous renvoyons par exemple à [Gic10a]. Ce résultat est un cas particulier de la covariance conforme des opérateurs dits de Stein-Weiss [Feg76].  $\square$

Pour décomposer  $\widehat{K}$ , nous allons tout d'abord extraire sa trace  $\tau = \operatorname{tr}_{\widehat{g}} \widehat{K}$  (que nous supposons fixée) :

$$\widehat{K} = \frac{\tau}{n} \widehat{g} + \widehat{L}.$$

$\widehat{L}$  est alors un tenseur symétrique de trace nulle (pour l'une ou l'autre des métriques  $g$  et  $\widehat{g}$ ) et l'équation (1.1b) devient

$$\operatorname{div}_{\widehat{g}} \widehat{L} = \frac{n-1}{n} d\tau.$$

Deux choix s'offrent maintenant à nous :

1. soit décomposer  $\widehat{L}$  en utilisant la méthode de York pour la métrique  $\widehat{g}$  :

$$\widehat{L} = \widehat{\sigma} + \mathbb{L}_{\widehat{g}} X$$

avec  $\widehat{\sigma} \in \mathcal{T}_{\widehat{g}}(M)$ . En utilisant la Proposition 1.1.2, on a  $\widehat{\sigma} = \varphi^{-2}\sigma$  avec  $\sigma \in \mathcal{T}_g(M)$  :

$$\widehat{L} = \varphi^{-2}(\sigma + \varphi^N \mathbb{L}_g X).$$

Un calcul montre alors que les équations de contrainte (1.1) se réécrivent :

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g \varphi + \operatorname{Scal}_g \varphi = -\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{N-1} + \frac{|\sigma + \varphi^N \mathbb{L}_g X|_g^2}{\varphi^{N+1}}, & (1.5a) \\ \operatorname{div}_g (\varphi^N \mathbb{L}_g X) = \frac{n-1}{n} \varphi^N d\tau. & (1.5b) \end{cases}$$

Cette méthode est appelée méthode B de York (voir par exemple [Del17]). Elle est covariante conforme, mais apparaît plus complexe à étudier d'un point de vue analytique que la méthode que nous allons proposer ensuite.

2. soit décomposer  $\widehat{L}$  en utilisant la méthode de York pour la métrique  $g$ . Plus exactement, pour profiter de la covariance conforme de la divergence, nous allons décomposer  $L := \varphi^2 \widehat{L}$  :

$$L = \sigma + \mathbb{L}_g X,$$

avec  $\sigma \in \mathcal{T}_g(M)$ . D'où

$$\widehat{L} = \varphi^{-2}(\sigma + \mathbb{L}_g X).$$

Et les équations de contrainte (1.1) deviennent maintenant :

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g \varphi + \operatorname{Scal}_g \varphi = -\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{N-1} + \frac{|\sigma + \mathbb{L}_g X|_g^2}{\varphi^{N+1}}, & (1.6a) \\ \operatorname{div}_g (\mathbb{L}_g X) = \frac{n-1}{n} \varphi^N d\tau. & (1.6b) \end{cases}$$

C'est cette méthode (dite aussi méthode A de York) qui est appelée *méthode conforme* et que nous étudierons.

**Notation :** Par la suite, pour alléger les notations, nous enlèverons toutes les références à la métrique  $g$ . Nous définissons aussi l'opérateur

$$\Delta_{\mathbb{L}} X := \operatorname{div} \mathbb{L} X.$$

Les équations de la méthode conforme s'écrivent donc sous la forme finale suivante :

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + \operatorname{Scal} \varphi = -\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{N-1} + \frac{|\sigma + \mathbb{L}_g X|_g^2}{\varphi^{N+1}}, & (1.7a) \\ \Delta_{\mathbb{L}} X = \frac{n-1}{n} \varphi^N d\tau. & (1.7b) \end{cases}$$

L'équation (1.7a) est appelée *équation de Lichnerowicz* et l'équation (1.7b) sera désignée sous le nom d'équation vecteur. L'étude de ce système débute par l'étude de chacune des deux équations. La seconde étant linéaire en  $X$ , nous la traitons en premier :



**Proposition 1.1.3.** Soit  $(M, g)$  une variété compacte. L'opérateur  $\Delta_{\mathbb{L}}$  est un isomorphisme entre  $W^{2,p}(M, TM)$  et  $L^p(M, T^*M)$  pour tout  $p \in (1, \infty)$  si et seulement si  $(M, g)$  n'admet pas de champ de vecteur de Killing conforme non trivial.

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle donnée pour la proposition 1.1.1. Voir par exemple [9].  $\square$

## 1.2 L'équation de Lichnerowicz

L'équation de Lichnerowicz appartient à la catégorie des équations semi-linéaires (voir [GT01]). L'un des ingrédients les plus utiles pour étudier cette équation est la méthode de monotonie (dite aussi méthode des sur- et sous-solutions, ou méthode des barrières) :

**Théorème 1.2.1.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte. Considérons une équation de la forme

$$-\Delta u + F(u, x) = 0 \quad (1.8)$$

où  $F$  est une fonction régulière de  $u$  et de  $x$ . On suppose de plus qu'il existe deux fonctions régulières  $u_+$  et  $u_-$  telles que

$$-\Delta u_+ + F(u_+, x) \geq 0 \quad \text{resp.} \quad -\Delta u_- + F(u_-, x) \leq 0.$$

Alors, si  $u_+ \geq u_-$ , il existe une fonction  $u$  solution de (1.8) telle que  $u_- \leq u \leq u_+$ . L'hypothèse  $u_+ \geq u_-$  est de plus immédiatement satisfaite si  $F(u, x)$  est croissante en  $u$ . On a alors, en plus, que la solution  $u$  de (1.8) est unique.

Ce théorème est démontré par exemple dans [Tay11], voir également [Gic10a] pour une autre preuve. Il est à noter que ce théorème peut s'étendre à beaucoup de situations différentes (variétés non compactes, variétés à bord...).

### 1.2.1 Le cas du vide

Attardons-nous tout d'abord un peu au cas le plus simple, celui du vide. Celui-ci a principalement été traité par J. Isenberg [Ise95] dans le cas où  $\tau$  est une constante. Le cas  $\tau$  non constant est très bien décrit dans [Max09].

Avant d'énoncer le théorème, nous devons définir l'invariant de Yamabe d'une variété compacte :

**Définition 1.2.2.** Soit  $(M, g)$  une variété compacte sans bord de dimension  $n \geq 3$ . On appelle *invariant de Yamabe* de  $(M, g)$  la quantité

$$\mathcal{Y}_g(M) := \inf_{u \in C^\infty(M, \mathbb{R}), u \neq 0} \frac{\int_M \left( \frac{4(n-1)}{n-2} |du|^2 + \text{Scal } u^2 \right) d\mu^g}{\left( \int_M |u|^N d\mu^g \right)^{2/N}}. \quad (1.9)$$

La preuve que l'infimum dans cette définition est atteint est le célèbre problème de Yamabe. Nous renvoyons le lecteur à l'article de revue [LP87] pour plus de détails. Contentons nous de rappeler deux points principaux :

1. L'invariant de Yamabe est un invariant conforme : si  $g$  et  $h = \varphi^{N-2}g$  sont deux métriques conformes l'une à l'autre, on a

$$\mathcal{Y}_g(M) = \mathcal{Y}_h(M).$$

2. Les minimiseurs  $u$  (plus généralement les points critiques) de la fonctionnelle de Yamabe (apparaissant dans (1.9)) conduisent à des métriques  $u^{N-2}g$  conformes à  $g$  et à courbure scalaire constante du signe de  $\mathcal{Y}_g(M)$ . Ils sont uniques (à multiplication par un scalaire près) si  $\mathcal{Y}_g(M) \leq 0$ . Le cas  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$  est beaucoup plus complexe, voir par exemple [BM11].

Cependant, dans l'étude de l'équation de Lichnerowicz, l'ensemble des points où  $\tau$  s'annule joue un rôle particulier car ses propriétés conditionnent l'existence de solutions. Introduisons donc l'invariant de Yamabe relatif d'une partie  $\Omega$  mesurable de  $M$ . Pour cela, définissons tout d'abord <sup>2</sup>

$$W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) := \{u \in W^{1,2}(M, \mathbb{R}), u \equiv 0 \text{ p.p. sur } M \setminus \Omega\}.$$

<sup>2</sup>La notation que nous utilisons ici est habituellement utilisée pour désigner l'adhérence des fonctions  $C^\infty$  à support dans  $\Omega$ . Les deux notations coïncident donc si  $\Omega$  est un ouvert régulier.

Nous pouvons maintenant définir l'*invariant de Yamabe relatif* de la manière suivante :

$$\mathcal{Y}_g(\Omega) := \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}), u \neq 0} \frac{\int_M \left( \frac{4(n-1)}{n-2} |du|^2 + \text{Scal } u^2 \right) d\mu^g}{\left( \int_M |u|^N d\mu^g \right)^{2/N}}, \quad (1.10)$$

étant entendu que, si  $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) = \{0\}$ ,  $\mathcal{Y}_g(\Omega) = \infty$ . Cette quantité a été introduite dans [Rau95, DM] et reprise dans [8] dans le cas asymptotiquement hyperbolique. Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette section :

**Théorème 1.2.3.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte. Soit  $\tau$  une fonction donnée,  $\tau \not\equiv 0$  si  $\mathcal{Y}_g(M) \leq 0$ . Considérons l'équation de Lichnerowicz suivante :*

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + \text{Scal } \varphi = -\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{N-1} + \frac{A^2}{\varphi^{N+1}} \quad (1.11)$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une solution  $\varphi > 0$ , à l'équation de Lichnerowicz (1.11) pour tout  $A \neq 0$ ,
2. Il existe une solution  $\varphi > 0$  à l'équation de Lichnerowicz (1.7a) pour au moins un  $A \neq 0$ ,
3. L'ensemble  $\mathcal{Z} = \tau^{-1}(0)$  satisfait  $\mathcal{Y}_g(\mathcal{Z}) > 0$ .

De plus, la solution de (1.11), si elle existe, est unique.

La preuve de ce résultat reproduit celle donnée dans [8]. Elle est plus simple que celles des articles précédemment cités (par exemple [Max09]) dans le sens où elle n'exige pas de distinction de cas (du moins si  $A \neq 0$ ) et ne repose pas sur la résolution (partielle) du problème de Yamabe. Commençons par un lemme :

**Lemme 1.2.4.** *Sous les hypothèses du théorème, si  $\mathcal{Y}_g(\mathcal{Z}) > 0$ , il existe  $K > 0$  tel que l'opérateur*

$$u \mapsto -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + \text{Scal } u + K \frac{n-1}{n} \tau^2 u$$

soit positif.

Dans ce qui suit, nous désignons par  $s > 0$  la plus grande constante telle que

$$\|u\|_{W^{1,2}}^2 \geq s \|u\|_{L^N}^2 \quad \forall u \in W^{1,2}(M, \mathbb{R}). \quad (1.12)$$

*Preuve du lemme 1.2.4.* Supposons par l'absurde que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la première valeur propre de

$$L_k : u \mapsto -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + \text{Scal } u + k \frac{n-1}{n} \tau^2 u$$

est négative ou nulle. Notons-la  $\lambda_{0,k}$ . Désignons par  $u_k$  la première fonction propre. Cette fonction est positive et nous pouvons la normaliser pour que  $\|u_k\|_{L^2} = 1$ . La suite  $(\lambda_{0,k})_k$  est croissante puisque

$$\begin{aligned} \lambda_{0,k+1} &= \int_M u_{k+1} L_{k+1} u_{k+1} d\mu^g \\ &= \int_M u_{k+1} L_k u_{k+1} d\mu^g + \int_M \frac{n-1}{n} \tau^2 u_{k+1}^2 d\mu^g \\ &\geq \int_M u_{k+1} L_k u_{k+1} d\mu^g \\ &\geq \lambda_{0,k}. \end{aligned}$$

Montrons que la suite  $(u_k)_k$  est bornée dans  $W^{1,2}(M, \mathbb{R})$ . En effet, nous avons, en utilisant l'inégalité d'Hölder

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \left[ \frac{4(n-1)}{n-2} |du_k|^2 + \text{Scal } u_k^2 \right] d\mu^g \\ &\geq \frac{4(n-1)}{n-2} \int_M |du_k|^2 d\mu^g - \|\text{Scal}\|_{L^{p/2}} \|u_k\|_{L^N}^{2\frac{n}{p}} \|u_k\|_{L^2}^{2\frac{p-n}{p}} \\ &\geq \frac{4(n-1)}{n-2} \int_M |du_k|^2 d\mu^g - \|\text{Scal}\|_{L^{p/2}} \left[ \frac{n}{p} \varepsilon \|u_k\|_{L^N}^2 + \frac{p-n}{p} \|u_k\|_{L^2}^2 \varepsilon^{-n/(p-n)} \right] \\ &\geq \frac{4(n-1)}{n-2} \int_M |du_k|^2 d\mu^g - \|\text{Scal}\|_{L^{p/2}} \left[ \frac{n}{sp} \varepsilon \|u_k\|_{W^{1,2}}^2 + \frac{p-n}{p} \|u_k\|_{L^2}^2 \varepsilon^{-n/(p-n)} \right], \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les inégalités d' $\varepsilon$ -Young et de Sobolev (1.12). Supposons de plus que  $\text{Scal} \neq 0$  (si  $\text{Scal} \equiv 0$  l'argument est plus simple) et choisissons  $\varepsilon$  tel que

$$\|\text{Scal}\|_{L^{p/2}} \frac{n}{sp} \varepsilon = \frac{2(n-1)}{n-2},$$

de sorte que

$$0 \geq \frac{2(n-1)}{n-2} \int_M |du_k|^2 d\mu^g - C \|u_k\|_{L^2}^2,$$

pour une certaine constante  $C = C(n, s, p, \|\text{Scal}\|_{L^{p/2}})$  explicite. Comme  $\|u_k\|_{L^2} = 1$ , ceci montre que la suite  $(u_k)_k$  est bornée dans  $L^2(M, \mathbb{R})$ . En utilisant le théorème de Rellich, nous pouvons maintenant extraire une sous-suite  $(k_i)_i$  de  $k$  telle que

$$u_{k_i} \rightarrow u_\infty \text{ dans } L^2(M, \mathbb{R})$$

pour un certain  $u_\infty \in W^{1,2}(M, \mathbb{R})$ . En particulier,  $\|u_\infty\|_{L^2} = 1$ . Nous pouvons de plus supposer que

$$u_{k_i} \rightharpoonup u_\infty \text{ dans } W^{1,2}(M, \mathbb{R}).$$

Montrons finalement que  $u_\infty \equiv 0$  p.p. sur  $M \setminus \mathcal{Z}$ . Autrement,

$$\int_M \tau^2 u_{k_i}^2 d\mu^g \rightarrow \int_M \tau^2 u_\infty^2 d\mu^g \neq 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} \lambda_{0,k} &= \int_M u_{k_i} L_{k_i} u_{k_i} d\mu^g \\ &= \int_M u_{k_i} L_0 u_{k_i} d\mu^g + k_i \frac{n-1}{n} \int_M \tau^2 u_{k_i}^2 d\mu^g \\ &\geq \lambda_0 + k_i \frac{n-1}{n} \int_M \tau^2 u_{k_i}^2 d\mu^g \\ &\rightarrow_{i \rightarrow \infty} \infty, \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que  $(\lambda_{0,k})_k$  est bornée. Comme  $\|u_\infty\|_{L^2} = 1$  et que  $u \in W_0^{1,2}(\mathcal{Z})$ , nous obtenons une contradiction si  $W_0^{1,2}(\mathcal{Z}) = \{0\}$ . Dans le cas où  $W_0^{1,2}(\mathcal{Z}) \neq \{0\}$ , nous avons également une contradiction car

$$\lambda_{0,k_i} = G(u_{k_i}) + k_i \frac{n-1}{n} \int_M \tau^2 u_{k_i}^2 \geq G(u_{k_i}),$$

et donc, comme  $G$  est faiblement semi-continu inférieurement,

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \lambda_{0,k_i} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} G(u_{k_i}) \geq G(u_\infty) \geq \lambda_g(\mathcal{Z}) > 0.$$

Ce qui contredit l'hypothèse de départ et conclut la preuve du lemme.  $\square$

*Preuve du théorème 1.2.3.* L'implication  $1 \Rightarrow 2$  est triviale. Montrons maintenant que  $2 \Rightarrow 3$ . Si  $W_0^{1,2}(\mathcal{Z}) = \{0\}$ , l'assertion 3 est satisfaite car  $\mathcal{Y}_g(\mathcal{Z}) = \infty$ . Sinon, supposons  $A$  donné et  $\varphi$  solution de l'équation de Lichnerowicz (1.7a). Posons  $\widehat{g} = \varphi^{N-2} g$ . Pour tout  $u \in W_0^{1,2}(\mathcal{Z})$ , notons  $\widehat{u} = u\varphi^{-1}$ . On a

$$\begin{aligned} G(u) &= G(\varphi \widehat{u}) \\ &= \int_M \left[ \frac{4(n-1)}{n-2} (\varphi^2 |\widehat{d}\widehat{u}|_g^2 + \langle \varphi d\varphi, d(\widehat{u}^2) \rangle_g + \widehat{u}^2 |d\varphi|_g^2) + \text{Scal} \varphi^2 \widehat{u}^2 \right] d\mu^g \\ &= \int_M \left[ \frac{4(n-1)}{n-2} (\varphi^2 |\widehat{d}\widehat{u}|_g^2 - (\varphi \Delta \varphi) \widehat{u}^2) + \text{Scal} \varphi^2 \widehat{u}^2 \right] d\mu^g \\ &= \int_M \left[ \frac{4(n-1)}{n-2} \varphi^2 |\widehat{d}\widehat{u}|_g^2 + \left( \frac{A^2}{\varphi^N} - \frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^N \right) \widehat{u}^2 \right] d\mu^g \\ &= \int_M \left[ \frac{4(n-1)}{n-2} |\widehat{d}\widehat{u}|_{\widehat{g}}^2 + \left( \frac{A^2}{\varphi^{2N}} - \frac{n-1}{n} \tau^2 \right) \widehat{u}^2 \right] d\mu^{\widehat{g}} \\ &\geq \frac{4(n-1)}{n-2} \int_M |\widehat{d}\widehat{u}|_{\widehat{g}}^2 d\mu^{\widehat{g}} \quad (\text{puisque } \widehat{u} \in W_0^{1,2}(\mathcal{Z})). \end{aligned}$$

Maintenant,  $\widehat{u} \equiv 0$  sur l'ensemble de mesure positive  $M \setminus \mathcal{Z}$  (c'est ici que nous utilisons l'hypothèse  $\tau \neq 0$ ). Il s'en suit, en utilisant l'inégalité de Poincaré, que pour une certaine constante  $\mu = \mu(g, \tau)$ ,

$$G(u) \geq \mu \|\widehat{u}\|_{W^{1,2}}^2,$$

(voir par exemple [GT01, Lemme 7.16]) et donc, par l'inégalité de Sobolev (1.12),  $G(u) \geq s\mu \|\widehat{u}\|_{L^N}^2$ . Ce qui montre que  $\mathcal{Y}_g(\mathcal{Z}) = s\mu > 0$ .

Montrons finalement que 3  $\Rightarrow$  1. La preuve utilise la méthode des sur- et sous-solutions telle que nous l'avons décrite dans le théorème 1.2.1. Soit  $K > 0$  le réel obtenu par application du lemme 1.2.4. Soit  $u$  la solution de l'équation

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + \text{Scal } u + K \frac{n-1}{n} \tau^2 u = A^2. \quad (1.13)$$

Puisque l'opérateur à gauche est positif, sa fonction de Green l'est également et donc  $u$  l'est aussi. Posons

$$\begin{cases} u_+ = \lambda_+ u, \\ u_- = \lambda_- u \end{cases}$$

avec  $\lambda_{\pm}$  des constantes à déterminer. Nous voulons que  $u_+$  satisfasse

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u_+ + \text{Scal } u_+ + \frac{n-1}{n} \tau^2 u_+^{N-1} \geq \frac{A^2}{u_+^{N+1}}.$$

En vertu de l'équation (1.13), ceci est équivalent à

$$\frac{n-1}{n} \tau^2 (\lambda_+^{N-1} u^{N-1} - K \lambda_+ u) + \lambda_+ A^2 \geq \frac{A^2}{\lambda_+^{N+1} u^{N+1}}.$$

Cette inégalité est satisfaite pourvu que les deux inégalités suivantes le soient :

$$\begin{cases} \lambda_+^{N-2} u^{N-2} \geq K, \\ \lambda_+^{N+2} \geq u^{-N-1}. \end{cases}$$

Ces deux inégalités sont vraies dès lors que  $\lambda_+$  est suffisamment grand. Les calculs pour la sous-solution sont identiques. Par la méthode des sur- et sous-solutions, nous obtenons l'existence de  $u$  solution de l'équation de Lichnerowicz (1.11).  $\square$

La preuve de l'unicité de la solution dans le théorème 1.2.3 est obtenue par le principe du maximum que nous donnons ici

**Proposition 1.2.5.** *Soit  $\varphi_1$  (resp.  $\varphi_2$ ) une solution positive de l'équation de Lichnerowicz (1.11) avec  $\tau$ ,  $\tau \neq 0$  si  $\mathcal{Y}_g(M) \leq 0$ , et  $A \equiv A_1$ , (resp.  $A \equiv A_2$ ) avec  $\tau$ ,  $A_1$  et  $A_2$  donnés :*

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi_1 + \text{Scal } \varphi_1 = -\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi_1^{N-1} + \frac{A_1^2}{\varphi_1^{N+1}}, \\ -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi_2 + \text{Scal } \varphi_2 = -\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi_2^{N-1} + \frac{A_2^2}{\varphi_2^{N+1}}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Alors, si  $A_1^2 \geq A_2^2$ , on a  $\varphi_1 \geq \varphi_2$ .

*Démonstration.* Traitons le cas  $\tau \neq 0$ . L'idée consiste à poser  $\psi_1 = \log \varphi_1$  (resp.  $\psi_2 = \log \varphi_2$ ), de sorte que  $\psi_1$  et  $\psi_2$  satisfont

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} (\Delta \psi_1 + |d\psi_1|^2) + \text{Scal} = -\frac{n-1}{n} \tau^2 e^{(N-2)\psi_1} + A_1^2 e^{-(N+2)\psi_1}, \\ -\frac{4(n-1)}{n-2} (\Delta \psi_2 + |d\psi_2|^2) + \text{Scal} = -\frac{n-1}{n} \tau^2 e^{(N-2)\psi_2} + A_2^2 e^{-(N+2)\psi_2}. \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on trouve

$$\begin{aligned} & -\frac{4(n-1)}{n-2} [\Delta(\psi_1 - \psi_2) + \langle d(\psi_1 + \psi_2), d(\psi_1 - \psi_2) \rangle] \\ & = -\frac{n-1}{n} \tau^2 [e^{(N-2)\psi_1} - e^{(N-2)\psi_2}] + A_1^2 (e^{-(N+2)\psi_1} - e^{-(N+2)\psi_2}) + (A_1^2 - A_2^2) e^{-(N+2)\psi_2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

On utilise alors la formule

$$e^{k\psi_1} - e^{k\psi_2} = k(\psi_1 - \psi_2) \int_0^1 e^{k(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2)} d\lambda$$

avec  $k = N - 2$  et  $k = -(N + 2)$ . L'équation (1.15) devient

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} [\Delta(\psi_1 - \psi_2) + \langle d(\psi_1 + \psi_2), d(\psi_1 - \psi_2) \rangle] + f(\psi_1 - \psi_2) = (A_1^2 - A_2^2) e^{-(N+2)\psi_2} \quad (1.16)$$

où on a noté

$$f = \frac{n-1}{n} (N-2) \tau^2 \int_0^1 e^{(N-2)(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2)} d\lambda + (N+2) A_1^2 \int_0^1 e^{-(N+2)(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2)} d\lambda \geq 0$$

L'hypothèse  $\tau \neq 0$  implique alors que  $f \neq 0$ . On conclut alors, en utilisant le principe du maximum appliqué à  $\psi_1 - \psi_2$  dans l'équation (1.16) (voir par exemple [GT01, Théorème 9.1]), que  $\psi_1 \geq \psi_2$ , i.e.  $\varphi_1 \geq \varphi_2$ .

Le cas  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$ ,  $\tau \equiv 0$  est plus simple : il suffit de soustraire les deux équations dans (1.14) sans prendre le logarithme.  $\square$

Nous verrons par la suite (section 1.3) que, si  $(A_k)_k$  est une suite de fonctions de plus en plus grandes (dans un certain sens à définir) et  $\tau > 0$ , les fonctions  $\varphi_k^N$  solutions de l'équation de Lichnerowicz (1.11) avec  $A \equiv A_k$ ) ressemblent de plus en plus à  $\sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{A_k}{\tau}$  (voir la proposition 1.3.4). C'est cette constatation qui donne lieu à la méthode de l'équation limite décrite dans les théorèmes 1.3.5 et 1.4.1. Cette convergence a lieu dans  $L^\infty(M, \mathbb{R})$ . Cependant, en regardant l'équation vecteur (1.7b), on voit qu'on a un contrôle en norme  $W^{1,p}$  de  $A$  dès lors qu'on contrôle  $\varphi^N$  en norme  $L^\infty$ . Il semble naturel que ce contrôle implique, par le biais de l'équation de Lichnerowicz, un contrôle  $W^{1,p}$  sur  $\varphi^N$  :

**Question 1.2.6.** Existe-t-il une constance  $C = C(M, g, \tau)$  telle que si  $\varphi$  est solution de l'équation de Lichnerowicz (1.11) avec  $A \in W^{1,p}(M, \mathbb{R})$  donné, on a

$$\|\varphi^N\|_{W^{1,p}} \leq C \|A\|_{W^{1,p}}?$$

Une réponse affirmative à cette question permettrait d'éviter l'astuce de la preuve de la proposition 1.3.4 et d'obtenir un contrôle plus fort sur la convergence vers une solution de l'équation limite.

Une manière (pour l'instant infructueuse) d'aborder cette question est la suivante :

**Proposition 1.2.7.** Soit  $\varphi$  une solution de l'équation de Lichnerowicz (1.11). Alors, pour tout  $p > 0$  et tout  $\alpha > 0$ , on a

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_M \frac{|d\varphi^\alpha|^{p+2}}{\varphi^{2\alpha}} d\mu^g + 2\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} \frac{\text{Hess } \varphi^\alpha}{\varphi^\alpha} (\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\alpha) d\mu^g \\ & + (p-2) \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-4} |\text{Hess } \varphi^\alpha (\nabla \varphi^\alpha, \cdot)|^2 d\mu^g + \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} |\text{Hess } \varphi^\alpha|^2 d\mu^g \\ & + \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} \text{Ric}(\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\alpha) d\mu^g \\ & + \frac{n-2}{4(n-1)} \alpha \int_M \left( \text{Scal} |d\varphi^\alpha|^p + \varphi^\alpha |d\varphi^\alpha|^{p-2} \langle d\text{Scal}, d\varphi^\alpha \rangle + |d\varphi^\alpha|^{p-2} \varphi^{\alpha+N-2} \langle d\tilde{\tau}^2, d\varphi^\alpha \rangle \right) d\mu^g \\ & + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M \left\{ \left( \frac{\alpha}{\alpha'} \right)^p \left[ (N-2+\alpha) \tilde{\tau}^2 + (N+2-\alpha) \frac{A^2}{\varphi^{2N}} \right] |d\varphi^{\alpha'}|^p \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{\alpha^p}{\alpha'^{p-1}} \frac{A}{\varphi^{2N-\alpha'}} |d\varphi^{\alpha'}|^{p-2} \langle dA, d\varphi^{\alpha'} \rangle \right\} d\mu^g, \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec  $\alpha' = \alpha + \frac{N-2}{p}$ . En particulier, si  $\alpha' = N$ , i.e.  $\alpha = N - \frac{N-2}{p}$ , on a

$$\begin{aligned} 0 \geq & -\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_M \frac{|d\varphi^\alpha|^{p+2}}{\varphi^{2\alpha}} d\mu^g + 2\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} \frac{\text{Hess } \varphi^\alpha}{\varphi^\alpha} (\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\alpha) d\mu^g \\ & + (p-2) \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-4} |\text{Hess } \varphi^\alpha (\nabla \varphi^\alpha, \cdot)|^2 d\mu^g + \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} |\text{Hess } \varphi^\alpha|^2 d\mu^g \\ & + \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} \text{Ric}(\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\alpha) d\mu^g \\ & + \frac{n-2}{4(n-1)} \alpha \int_M \left( \text{Scal} |d\varphi^\alpha|^p + \varphi^\alpha |d\varphi^\alpha|^{p-2} \langle d\text{Scal}, d\varphi^\alpha \rangle + |d\varphi^\alpha|^{p-2} \varphi^{\alpha+N-2} \langle d\tilde{\tau}^2, d\varphi^\alpha \rangle \right) d\mu^g \\ & + \frac{n-2}{4(n-1)} \left( \frac{\alpha}{N} \right)^p \int_M \left[ (N-2+\alpha) \tilde{\tau}^2 |d\varphi^N|^p - \frac{N^2}{N+2-\alpha} |dA|^2 |d\varphi^N|^{p-2} \right] d\mu^g, \end{aligned} \quad (1.18)$$

L'idée derrière ces formules est de calculer  $\Delta|d\varphi^\alpha|^p$  en utilisant l'équation de Lichnerowicz (1.11) puis d'intégrer sur  $M$ . Cette idée est une variante de la méthode de Bernstein [Ber06, Ber10]. On voit sur l'inégalité (1.18) que la cinquième ligne contient les termes que nous souhaitons comparer. Il faut donc estimer les autres termes. Ceux de la quatrième ligne ne sont pas source d'ennuis. Cependant ceux des trois premières lignes apparaissent délicats à estimer inférieurement (remarquons que ce sont les termes qui contiennent " $p+2$  dérivées"). Pour essayer de formuler différemment le problème, posons

$$\begin{aligned} I(\varphi) = & -\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_M \frac{|d\varphi^\alpha|^{p+2}}{\varphi^{2\alpha}} d\mu^g + 2\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} \frac{\text{Hess } \varphi^\alpha}{\varphi^\alpha} (\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\alpha) d\mu^g \\ & + (p-2) \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-4} |\text{Hess } \varphi^\alpha(\nabla\varphi^\alpha, \cdot)|^2 d\mu^g + \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} |\text{Hess } \varphi^\alpha|^2 d\mu^g \\ & + \int_M |d\varphi^\alpha|^{p-2} \text{Ric}(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\alpha) d\mu^g. \end{aligned}$$

Alors si  $\varphi_t, t \geq 0$ , désigne la solution de l'équation de la chaleur sur  $M$  :

$$\partial_t \varphi_t = \Delta \varphi_t$$

avec pour condition initiale  $\varphi_0 = \varphi$ , et si on pose  $J(\psi) = \int_M |d\psi^\alpha|^p$ , on a  $I(\varphi) = \frac{d}{dt} J(\varphi_t)|_{t=0}$ , et on est ramené à montrer que la croissance de  $J$  est contrôlée d'une certaine manière. Ceci apparaît vrai (sous certaines conditions) en dimension 1, mais faux sans hypothèse supplémentaire en dimension plus grande. On consultera à ce sujet les réponses à la question posée sur MathOverflow [Gic18].

## 1.2.2 Le cas avec constante cosmologique positive

Nous avons étudié dans la section précédente l'équation de Lichnerowicz dans le cas le plus simple, celui du vide. Qu'en est-il dans le cas où nous introduisons d'autres champs dans la méthode conforme ? La plupart des champs de matière ou le champ électromagnétique introduisent des termes "sous-critiques" en un certain sens (voir par exemple [HNT09] ou [IMP05]). Une exception notable est celle du champ scalaire  $\Psi$  dont le tenseur d'énergie-impulsion est donné par

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \left( \frac{1}{2} |d\Psi|_h^2 + V(\Psi) \right) h_{\mu\nu}. \quad (1.19)$$

Le champ  $\Psi$  satisfait l'équation des ondes

$$\square_h \Psi = V'(\Psi).$$

Notons  $\widehat{\psi} = \Psi|_M$  et  $\widehat{\pi} = \nabla_\nu \Psi$  les données initiales pour  $\Psi$ . La méthode conforme conduit ici à écrire

$$\widehat{\psi} = \psi, \quad \widehat{\pi} = \varphi^{-N} \pi,$$

avec  $\psi$  et  $\pi$  deux fonctions sur  $M$  données. Les nouvelles équations de contrainte conforme sont alors

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + \mathcal{R}_\psi \varphi &= \mathcal{B}_{\tau, \psi} \varphi^{N-1} + \frac{|\sigma + \mathbb{L}W|^2 + \pi^2}{\varphi^{N+1}}, \end{aligned} \right. \quad (1.20a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{\mathbb{L}} W &= \frac{n-1}{n} \varphi^N d\tau + \pi d\psi, \end{aligned} \right. \quad (1.20b)$$

où les fonctions  $\mathcal{R}_\psi$  et  $\mathcal{B}_{\tau, \psi}$  sont données par

$$\mathcal{R}_\psi = \text{Scal}^g - |d\psi|_g^2, \quad \mathcal{B}_{\tau, \psi} = -\frac{n-1}{n} \tau^2 + 2V(\psi).$$

Le cas CMC de ces équations a été étudié dans [CBIP07] et [HPP08]. Le cas "near-CMC" a été principalement étudié par B. Premoselli dans [Pre14b, Pre14a]. Nous renvoyons également le lecteur à [CBIP06] et [Sak10] pour le traitement des cas non compacts. Dans [14], nous avons montré le résultat suivant :

**Théorème 1.2.8.** [14, Théorème 4.2] *Supposons que la fonctionnelle*

$$G_\psi(u) := \int_M \left[ \frac{4(n-1)}{n-2} |du|^2 + \mathcal{R}_\psi u^2 \right] d\mu^g$$

*est coercive sur  $W^{1,2}(M, \mathbb{R})$ , alors il existe  $\mu = \mu(M, g, \tau, \psi) > 0$  tel que si*

$$0 < |\sigma + \mathbb{L}W|^2 + \pi^2 < \mu,$$

*l'équation (1.20a) admet au moins une solution  $\varphi > 0$ .*

La preuve de ce résultat découle d'une méthode variationnelle fine. Il est utilisé pour démontrer l'existence de solutions au système (1.20) par la méthode HNT (voir section 1.5.2). Le fait que le terme  $\mathcal{B}_{\tau,\psi}$  puisse être positif rend partiellement impossible l'utilisation du principe du maximum et l'unicité des solutions n'a plus forcément lieu (le lecteur comparera ici les méthodes de preuve du théorème 1.2.8, basée sur la construction d'un minimum local stable, et du résultat principal de [HPP08] basé sur la méthode du col, produisant une solution d'indice 1). Voir également [PW16].

En particulier, le cas  $\psi = \pi = 0$  est déjà très intéressant. En effet, la valeur  $V(0)$  correspond, à la constante cosmologique  $\Lambda$ . Dans l'article [2] en collaboration avec P. Chruściel, nous avons étudié en détail un exemple simple. Nous y considérons le cas  $n = 3$  avec  $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  et une métrique  $g$   $SO(3) \times U(1)$  invariante :

$$g = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 dx^2 + \frac{2}{R} d\Omega^2,$$

où  $x$  est la coordonnée  $2\pi$ -périodique le long de  $\mathbb{S}^1$ ,  $T$  est alors la longueur des fibres  $\mathbb{S}^1$ , et  $d\Omega^2$  est la métrique ronde sur  $\mathbb{S}^2$ . La constante  $R > 0$  donne la courbure scalaire de  $g$  :

$$\text{Scal}_g = R.$$

Nous prenons également pour  $\sigma$  le TT-tenseur suivant :

$$\sigma = \frac{2\alpha}{\sqrt{6}} \left( \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 dx^2 - \frac{1}{R} d\Omega^2 \right)$$

avec  $\alpha$  une constante ajustable. Nous supposons de plus que  $\tau$  est constant de sorte à n'avoir que l'équation de Lichnerowicz (1.20a) à considérer. Celle-ci devient

$$-8\Delta_g \varphi + R\varphi = \beta^2 \varphi^5 + \alpha^2 \varphi^{-7}, \quad (1.21)$$

où nous avons noté  $\beta^2 = -\frac{2}{3}\tau^2 + 2\Lambda$  pour mettre en évidence le fait que nous allons supposer  $\beta^2 > 0$ . En effet, si  $\beta^2 \leq 0$ , nous nous retrouvons dans le cadre du théorème 1.2.3 : la solution est unique et possède toutes les symétries du modèle. Elle est donc constante. Supposons donc  $\beta^2 > 0$ . Nous allons également exclure le cas  $\alpha = 0$  traité précédemment par R. Schoen dans [Sch89], voir également [Pet14, HP14]. Le premier résultat, fondamental dans cette étude est le suivant :

**Proposition 1.2.9.** [2, Théorème 3.1] *Les solutions de l'équation de Lichnerowicz (1.21) dans le modèle considéré ne dépendent que de la coordonnée  $x$  du  $\mathbb{S}^1$ .*

Cette première proposition 1.2.9 est fondamentale. En effet, elle ramène l'étude de l'équation de Lichnerowicz (1.20a) à celle d'une équation différentielle sur  $\mathbb{S}^1$  :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{8} [-R\varphi + \beta^2 \varphi^5 + \alpha^2 \varphi^{-7}], \quad (1.22)$$

où nous avons posé  $t = \frac{T}{2\pi}x$ . La fonction  $\varphi$  doit donc être  $T$ -périodique.

Si  $\varphi$  est une solution de (1.22) et  $t_0$  tel que  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t_0) = 0$  (un tel point existe, c'est par exemple un extremum de  $\frac{d\varphi}{dt}$ ), nous avons, avec  $\varphi_0 = \varphi(t_0)$

$$-R\varphi_0 + \beta^2 \varphi_0^5 + \alpha^2 \varphi_0^{-7} = 0. \quad (1.23)$$

Un peu d'algèbre élémentaire montre qu'il existe une solution  $\varphi_0 > 0$  à cette équation si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\alpha^2 \beta^4 \geq \frac{4}{27} R^3, \quad (1.24)$$

voir [2, Proposition 2.1], ce que nous supposons par la suite. Les solutions  $\varphi$  de l'équation (1.22) conservent l'énergie suivante :

$$H(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{R}{16} \varphi^2 + \frac{\beta^2}{48} \varphi^6 - \frac{\alpha^2}{48} \varphi^{-6}. \quad (1.25)$$

Posons

$$V(\varphi) = -\frac{R}{16} \varphi^2 + \frac{\beta^2}{48} \varphi^6 - \frac{\alpha^2}{48} \varphi^{-6}. \quad (1.26)$$

Les points critiques positifs de  $V$  sont donnés par

$$\varphi^4 = 1 \quad \text{et} \quad \varphi^4 = \frac{\lambda}{4} \left( \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8} \right),$$

où nous avons supposé  $R = \alpha^2 + \beta^2$  (ce qui peut être obtenu par une renormalisation de  $g$ ) et posé

$$\lambda = \frac{|\alpha|\sqrt{2}}{\beta}.$$

Les deux points critiques sont distincts sauf si  $\lambda = 1$ , notons-les  $\varphi_i$  et  $\varphi_s$  avec  $\varphi_i < \varphi_s$ .  $\varphi_s$  est stable,  $\varphi_i$  instable. La figure 1.1 montre deux exemples de portraits de phase correspondant aux cas  $\lambda < 1$  et  $\lambda > 1$ .

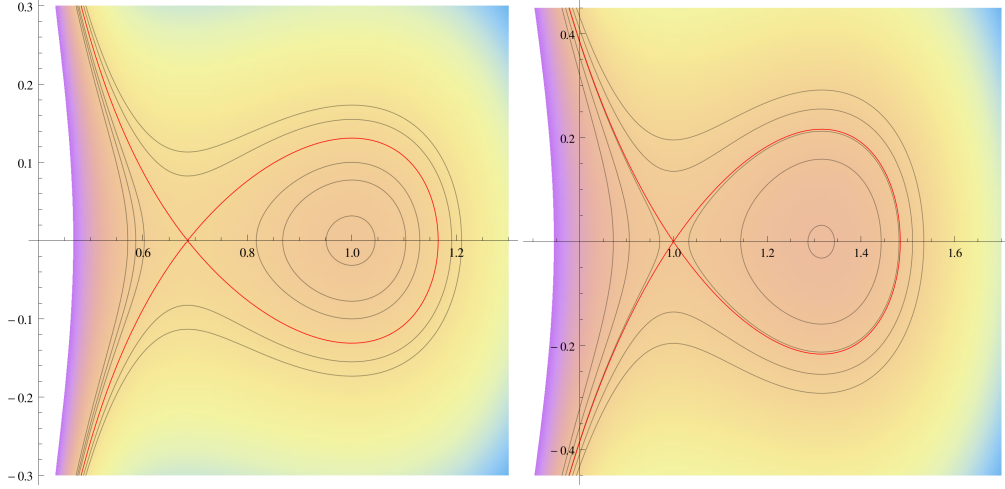


FIGURE 1.1 – Portraits de phase avec  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 0.2$  (à gauche) et  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 1.2$  (droite) dans le plan  $(\varphi, \dot{\varphi})$ . La couleur de fond correspond à la valeur de l'énergie  $H(\varphi, \dot{\varphi})$ . Les deux courbes rouges correspondent aux lignes de niveau de la solution constante instable.

Chacune des courbes rouges sur la figure 1.1 se divise en 3 parties : Deux solutions partant du point critique instable  $(\varphi_i, 0)$  décroissant jusqu'à  $\varphi = 0$  en temps fini et une solution homoclinique (partant de  $[\varphi_i, 0)$  à  $t = -\infty$  et convergeant à nouveau vers ce point en  $t = \infty$ ). Cette troisième trajectoire encercle le point critique stable  $(\varphi_s, 0)$  ainsi que toutes les orbites périodiques.

Notons  $V_s = V(\varphi_s)$  et  $V_i = V(\varphi_i)$  les valeurs du potentiel en les points critiques. Soit  $P(E)$  la période d'une orbite périodique d'énergie  $E = H(\varphi, \dot{\varphi})$ ,  $V_s < E < V_i$  :

$$P(E) = \sqrt{2} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - V(\varphi)}}$$

avec  $\varphi_{\min}, \varphi_{\max}$  les valeurs minimales et maximales de  $\varphi$  sur l'orbite. On peut voir que  $T$  est une fonction régulière de  $E$  avec

$$\lim_{E \rightarrow V_s} P(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{V''(\varphi_s)}} \quad \text{et} \quad \lim_{E \rightarrow V_i} P(E) = \infty$$

(la première formule correspondant aux oscillations linéarisées autour de  $\varphi_s$ ). La monotonie de  $P$  est obtenue en utilisant le critère de l'article [Chi87] :

**Théorème 1.2.10.** Soit  $G(E) = V(E) - V(\varphi_s)$ , la fonction  $P$  est strictement croissante si la fonction

$$C := (G')^4 \left( \frac{G}{(G')^2} \right)''$$

est partout positive sur l'intervalle  $(V_s, V_i)$ .

Ce critère est satisfait dans notre cas. La vérification utilise un calcul (pénible) fait à l'aide de MATHEMATICA. La fonction  $P$  est donc strictement croissante. Pour qu'une solution périodique  $\varphi$  de l'équation (1.22) et d'énergie  $E$  soit une solution sur  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  de (1.20a), il faut et il suffit que  $T$  soit un multiple de  $P(E)$ . Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

**Théorème 1.2.11.** [2, Théorème 5.1] L'équation de Lichnerowicz (1.21) admet

- Aucune solution si (1.24) n'est pas satisfaite,
- Une solution constante si (1.24) est une égalité,



- Deux solutions constantes et  $k$  solutions non constantes si  $kP_0 < T \leq (k+1)P_0$  où  $P_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{V''(\varphi_s)}}$ .

Il est intéressant d'adopter un point de vue de théorie des bifurcations pour étudier l'équation (1.21). Rappelons ici quelques résultats fondamentaux. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [CR71, Pöt11, Rab85, Rab71a, Rab71b], [Nir01, Sections 3.2 and 3.3], pour un point de vue plus détaillé sur la théorie des bifurcations. Nous ne supposons plus dorénavant que  $R = \alpha^2 + \beta^2$ .

Soient  $I$  un intervalle non-vide de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  un ouvert d'un espace de Banach  $A$ ,  $B$  un second espace de Banach et  $F : I \times \Omega \rightarrow B$  une application continue. Nous voulons étudier l'ensemble des zéros de  $F$ , i.e. l'ensemble des paires  $(\lambda, x) \in I \times A$  pour lesquelles  $F(\lambda, x) = 0$ .

Une paire  $(\lambda_0, x_0) \in I \times \Omega$  est appelé *point de bifurcation* pour  $F$  s'il existe une suite  $(\lambda_i)_{i>0}$  convergeant vers  $\lambda_0$  avec  $\lambda_i \in I$  et deux suites  $(x_i^1)_{i>0}, (x_i^2)_{i>0}$  dans  $\Omega$  telles que

- $\forall i, x_i^1 \neq x_i^2$ ,
- $x_i^1, x_i^2 \rightarrow x_0$ ,
- $F(\lambda_i, x_i^1) = F(\lambda_i, x_i^2) = 0$ .

Si l'application  $F$  est  $C^1$ , ceci impose que la différentielle  $\partial_x F$  n'est pas inversible en  $(\lambda_0, x_0)$  sinon ceci contredirait la conclusion du théorème des fonctions implicites. Deux types de points de bifurcations seront importants pour nous par la suite. Ils sont décrits dans les propositions suivantes.

**Proposition 1.2.12** (Bifurcation col-nœud). *Soit  $(\lambda_0, x_0)$  un zéro de  $F$ . Supposons que  $\partial_x F(\lambda_0, x_0)$  est Fredholm d'indice 0 et que le noyau de  $\partial_x F(\lambda_0, x_0)$  est de dimension 1 engendré par  $x_1$ . Supposons de plus que  $\partial_\lambda F(\lambda_0, x_0)$  n'est pas dans l'image de  $\partial_x F(\lambda_0, x_0)$ . Alors, il existe un voisinage  $J \times \Omega' \subset I \times \Omega$  de  $(\lambda_0, x_0)$  et une courbe  $\gamma : U \rightarrow J \times \Omega'$  de classe  $C^1$ , avec  $U \subset \mathbb{R}$  un voisinage de 0, tels que*

- $\gamma(0) = (\lambda_0, x_0)$ ,
- $\dot{\gamma}(0) = (0, x_1)$ ,
- $\forall (\lambda, x) \in J \times \Omega', F(\lambda, x) = 0 \Leftrightarrow \exists t \in U, (\lambda, x) = \gamma(t)$ .

Cette proposition est démontrée dans [Pöt11, Théorème 2.3.1]. On peut avoir plus d'information si  $F$  est de classe  $C^2$  :

**Proposition 1.2.13** (Bifurcation col-nœud 2). *Sous les hypothèses de la proposition 1.2.12, il existe une forme linéaire  $\mu \in B^*$ ,  $\mu \neq 0$ , dont le noyau est l'image de  $\partial_x F(\lambda_0, x_0)$ . Supposons de plus que  $F$  est de classe  $C^2$  et que  $\mu(\partial_x^2 F(\lambda_0, x_0)(x_1, x_1)) \neq 0$ . Alors la courbe  $\gamma = (\gamma_\lambda, \gamma_x)$  est de classe  $C^2$  et  $\ddot{\gamma}_\lambda(0) = \frac{\mu(\partial_\lambda F(\lambda_0, x_0))}{\mu(\partial_x^2 F(\lambda_0, x_0)(x_1, x_1))}$ .*

*En particulier, quitte à diminuer le voisinage  $J \times \Omega'$  de  $(\lambda_0, x_0)$ , on a*

- Si  $\ddot{\gamma}_\lambda(0) > 0$ , alors, pour tout  $\lambda \in J$ ,

$$\#\{x \in \Omega', F(\lambda, x) = 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < \lambda_0, \\ 1 & \text{si } \lambda = \lambda_0, \\ 2 & \text{si } \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

- Si  $\ddot{\gamma}_\lambda(0) < 0$ , alors, pour tout  $\lambda \in J$ ,

$$\#\{x \in \Omega', F(\lambda, x) = 0\} = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda < \lambda_0, \\ 1 & \text{si } \lambda = \lambda_0, \\ 0 & \text{si } \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

Le deuxième type de bifurcation a été introduit dans [CR71] :

**Proposition 1.2.14** (Bifurcation de fourche). *Supposons que  $F$  est de classe  $C^2$  et que  $\gamma = (\gamma_\lambda, \gamma_x) : U \rightarrow I \times \Omega$  est une courbe de classe  $C^2$  de zéros de  $F$  :*

$$\forall t \in U, F(\gamma_\lambda(t), \gamma_x(t)) = 0,$$

*avec  $U$  un voisinage de  $\lambda_0$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $\gamma_\lambda(t) = t$ ,  $\gamma_x(\lambda_0) = x_0$ . Supposons de plus que  $\partial_x F(\lambda_0, x_0)$  a un noyau de dimension 1 engendré par  $v \in A$  et que  $D^2 F(\lambda_0, x_0)(\dot{\gamma}(0), v) \neq 0$ . Alors  $(\lambda_0, x_0)$  est un point de bifurcation pour  $F$  et il existe un voisinage  $J \times \Omega'$  de  $(\lambda_0, x_0)$  tel que l'ensemble des solutions de  $F(\lambda, x) = 0$  dans  $J \times \Omega'$  consiste en la réunion de deux courbes de classe  $C^2$  ( $\gamma$  et une autre) s'intersectant (transversalement) seulement en  $(\lambda_0, x_0)$ .*

Nous allons maintenant appliquer ces résultats à l'équation (1.22) en choisissant le paramètre  $\alpha$  comme paramètre de bifurcation. Nous avons vu qu'il existe deux solutions constantes  $\varphi_i < \varphi_s$  à l'équation (1.22) dès lors que la condition (1.24) est satisfaite. Un graphe des valeurs de ces deux solutions est donné dans la figure 1.2. Remarquons que la valeur  $\alpha = \alpha_{\max}$ , avec  $\alpha_{\max}$  telle que

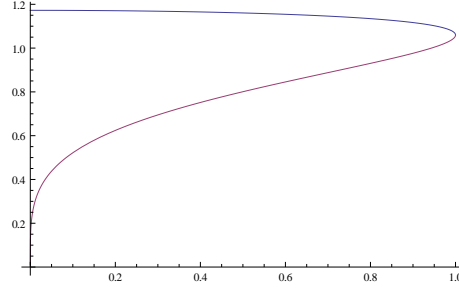


FIGURE 1.2 – Graphes des valeurs  $\varphi_i$  (rouge) et  $\varphi_s$  (bleu) pour  $\beta = 1$  et  $R = \left(\frac{27}{4}\right)^{1/3}$  en fonction de  $\alpha$ .

$$\alpha_{\max}^2 \beta^4 = \frac{4}{27} R^3, \quad (1.27)$$

correspond à une bifurcation col-nœud au point  $(\alpha_{\max}, \varphi_i(\alpha)) = (\alpha_{\max}, \varphi_s(\alpha))$ . On montre alors le résultat suivant (nous supposons ici que  $\alpha > 0$ ) :

**Théorème 1.2.15.** Soit  $k_{\max}$  le plus grand entier  $k$  tel que  $2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 k^2 < R$ . Pour tout entier  $k$ ,  $0 \leq k \leq k_{\max}$ , posons

$$\alpha_k = \frac{2}{3\sqrt{3}\beta^2} \left( R + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 k^2 \right) \sqrt{R - 2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 k^2}.$$

La suite des  $\alpha_k$  forme une suite strictement décroissante et  $\alpha_0 = \alpha_{\max}$ . Les seuls points de bifurcation de l'équation (1.22) sont

- $(\alpha_{\max}, \varphi_s(\alpha_{\max}))$  correspondant à une bifurcation de type col-nœud,
- $(\alpha_k, \varphi_s(\alpha_k))$  pour tout entier  $k$ ,  $1 \leq k \leq k_{\max}$  correspondant à des bifurcations de type fourche. Ces bifurcations conduisent chacune à une solution  $T/k$ -périodique de (1.22) pour tout  $\alpha \in (0, \alpha_k)$ .

L'équation de Lichnerowicz (1.22) a donc

- aucune solution si  $\alpha > \alpha_{\max}$ ,
- une solution constante si  $\alpha = \alpha_{\max}$ ,
- deux solutions constantes et  $k$  solutions non constantes si  $\alpha \in [\alpha_{k+1}, \alpha_k)$ .

Ce théorème est illustré par la figure 1.3 où nous avons appelé indice d'une solution non constante  $\varphi$  l'entier  $k$  tel que  $\varphi$  est  $T/k$ -périodique. C'est, dans le diagramme des phases, l'indice de la courbe  $(\varphi, \dot{\varphi})$  (prise sur l'intervalle  $[0, T]$ ) autour du point  $(\varphi_s, 0)$ . Nous avons également noté  $\varphi_i^*$  la seconde solution de l'équation  $H(\varphi, 0) = H(\varphi_i, 0)$ , autrement dit la valeur maximale de  $\varphi$  sur la trajectoire homoclinique (voir la figure 1.2).

A cause de leur symétrie  $SO(3)$ , les solutions de l'équation de Lichnerowicz (1.21) que nous venons de construire donnent lieu à des solutions à symétrie sphérique des équations d'Einstein. Le théorème de Birkhoff (voir par exemple [Sta98]) implique alors que l'espace-temps ainsi construit est soit l'espace-temps de de Sitter-Schwarzschild soit l'espace-temps de Nariai. L'article [2] présente alors une étude détaillée de la localisation de l'hypersurface de genre espace correspondant à chacune des solutions ainsi construite.

### 1.3 Une première méthode pour résoudre les équations de contrainte conforme

Intéressons-nous maintenant au système (1.7) complet.

Dans le cas où  $\tau$  est une fonction constante, l'équation vecteur se réduit à  $\Delta_{\mathbb{L}} X = 0$ , ce qui conduit à  $X \equiv 0$  (Proposition 1.1.3). Le système se réduit alors à l'équation de Lichnerowicz que nous avons étudiée

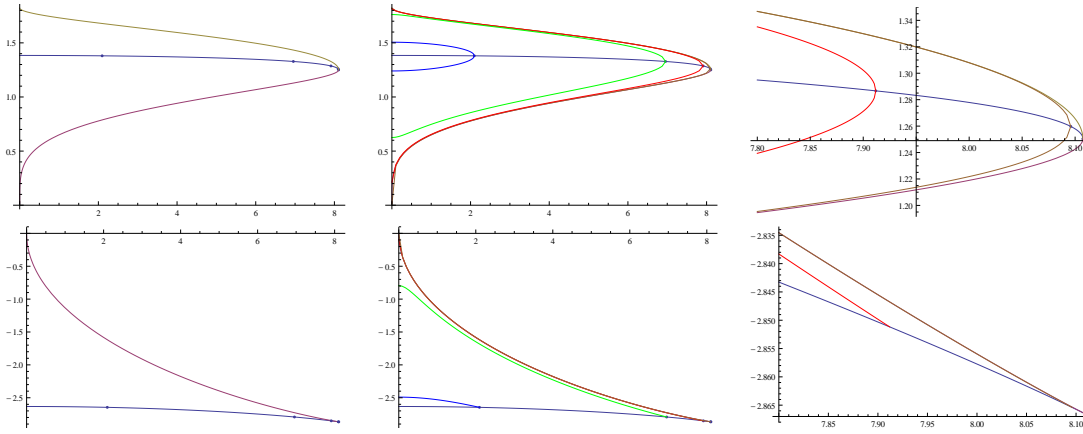


FIGURE 1.3 – Une illustration du théorème 1.2.15 pour  $T = 2\pi$ ,  $R = 33$  et  $\beta = 3$ . Sur chaque graphe,  $\alpha$  varie le long de l’axe horizontal. Sur la première ligne, le graphe de gauche montre les courbes  $\varphi_i(\alpha)$  (magenta),  $\varphi_s(\alpha)$  (bleu marine) et  $\varphi_i^*(\alpha)$  (jaune). Les points indiquent les positions des points de bifurcation. Au voisinage de  $\alpha = \alpha_{\max}$ , il y a deux points qui coïncident presque. Le premier correspond à la bifurcation col-nœud alors que le second est une bifurcation de fourche. Tous les autres points sont des bifurcations de fourche. Le second graphe montre les valeurs minimales et maximales des solutions d’indice 1 (marron), 2 (rouge), 3 (vert) et 4 (bleu). Le troisième graphe est un zoom du second au voisinage de  $\alpha_{\max}$ . Les graphes sur la seconde ligne montrent les énergies  $H(\varphi, \dot{\varphi})$  des solutions.

dans la section précédente. Une classification complète des solutions a été donnée par J. Isenberg dans [Ise95].

Dans le cas d’une fonction  $\tau$  quelconque, la principale difficulté du système des équations de contrainte conformes (1.7) réside dans l’obtention d’estimation a priori pour les solutions. Supposons en effet qu’on ait assigné une mesure  $\gamma$  de la taille de  $\varphi$  pour une solution  $(\varphi, W)$  du système (1.7) (nous restons volontairement vague pour le moment, nous prendrons bientôt  $\gamma(\varphi, W) = \|\varphi\|_{L^\infty}$ ). Alors l’équation vecteur (1.7b) montre que la taille de  $X$  (par exemple  $\|\mathbb{L}X\|_{L^\infty}$ ) est de l’ordre de  $\gamma^N$ . En injectant maintenant ces “estimées” dans l’équation de Lichnerowicz (1.7a), nous obtenons naïvement

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta\varphi + \text{Scal } \varphi \sim \gamma \\ \frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{N-1} \sim \gamma^{N-1} \\ \frac{|\sigma + \mathbb{L}X|^2}{\varphi^{N+1}} \sim \frac{\gamma^{2N} + O(\gamma^N)}{\gamma^{N+1}} \sim \gamma^{N-1} \end{array} \right.$$

où  $\sim$  signifie “de l’ordre de”. Nous avons supposé ici  $\gamma$  grand. Les deux termes dominants de l’équation de Lichnerowicz (1.7a) sont donc

$$\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{N-1} \quad \text{et} \quad \frac{|\mathbb{L}X|^2}{\varphi^{N+1}}.$$

Ces deux termes viennent avec un signe opposé. Ils peuvent donc se compenser l’un l’autre, ce qui interdit toute estimation a priori. Remarquons cependant que, si une telle compensation se produit, on s’attend à avoir

$$\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{N-1} \simeq \frac{|\mathbb{L}X|^2}{\varphi^{N+1}},$$

et, en injectant dans l’équation vecteur (1.7b),

$$\Delta_{\mathbb{L}} X \simeq \sqrt{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{L}X| \frac{d\tau}{\tau}.$$

C’est l’idée à la base de la méthode de l’équation limite introduite dans [4] que nous présentons dans cette section et dans la prochaine.

La première méthode historiquement pour résoudre le système (1.7) est la méthode de Holst-Nagy-Tsogtgerel [HNT08, HNT09] (HNT en abrégé) reprise ensuite par Maxwell dans [Max09]. Nous la détaillerons dans la section 1.5. Les deux méthodes peuvent sembler diamétralement opposées l’une de l’autre : la

méthode HNT s'attache à construire des solutions  $(\varphi, W)$  avec  $\varphi$  proche de zéro alors que la méthode de l'équation limite étudie le comportement asymptotique de solutions de plus en plus grandes.

Nous décrivons ici la méthode introduite dans [13] et développée dans [Ngu16] et nous verrons en quoi elle n'est pas satisfaisante. Cette méthode donne cependant une version unifiée des deux méthodes précédentes et permet de mieux cerner les hypothèses faites dans [HNT08, HNT09, Max09]. Nous supposons dans la suite de cette section que  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$ ,  $\sigma \neq 0$  et que  $(M, g)$  n'admet pas de champ de vecteur de Killing conforme de sorte que les hypothèses de la proposition 1.1.3 soient satisfaites.

L'idée principale est la suivante. Introduisons un paramètre  $\lambda \in [0, 1]$  et changeons  $\tau$  en  $\lambda\tilde{\tau}$  (resp.  $\sigma$  en  $\tilde{\sigma}$ ) dans le système (1.7) :

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\tilde{\varphi} + \text{Scal}\tilde{\varphi} = -\frac{n-1}{n}\lambda^2\tilde{\tau}^2\tilde{\varphi}^{N-1} + \frac{|\tilde{\sigma} + \mathbb{L}_g\tilde{X}|^2}{\tilde{\varphi}^{N+1}}, \\ \Delta_{\perp}\tilde{X} = \lambda\frac{n-1}{n}\tilde{\varphi}^N d\tilde{\tau}. \end{cases} \quad (1.28a)$$

$$\Delta_{\perp}\tilde{X} = \lambda\frac{n-1}{n}\tilde{\varphi}^N d\tilde{\tau}. \quad (1.28b)$$

Lorsque  $\lambda = 0$ , nous obtenons

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_0 + \text{Scal}\varphi_0 = \frac{|\sigma + \mathbb{L}_gX|^2}{\varphi_0^{N+1}}, \\ \Delta_{\perp}X_0 = 0. \end{cases}$$

La proposition 1.1.3 donne alors que  $X_0 = 0$  et l'équation de Lichnerowicz pour  $\varphi_0$  se simplifie en

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_0 + \text{Scal}\varphi_0 = \frac{|\sigma|^2}{\varphi_0^{N+1}}, \quad (1.29)$$

Remarquons ici que, comme nous avons supposé  $\sigma \neq 0$ , cette équation ne peut admettre de solution que si  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$ . En effet, la courbure scalaire de la métrique  $\tilde{g} = \varphi_0^{N-2}g$  est donnée par

$$\widetilde{\text{Scal}} = |\sigma|_g^2 \varphi_0^{-2N}.$$

Elle est donc positive ou nulle mais non identiquement nulle, ce qui contraint  $\mathcal{Y}_g(M) = \mathcal{Y}_{\tilde{g}}(M) > 0$ . L'unique solution  $\varphi_0$  est alors strictement positive. En utilisant le théorème des fonctions implicites, nous pouvons alors trouver une courbe de solutions  $(\lambda, \varphi_\lambda, X_\lambda)$  au système (1.28) pour tout  $\lambda$  dans un petit intervalle  $[0, \lambda_0)$  (les détails sont donnés dans l'article [13]).

Bien sûr, si l'on tient à avoir une solution du système (1.7), nous devons, d'un point de vue heuristique, essayer de suivre cette courbe pour espérer atteindre  $\lambda = 1$ . C'est ce que nous ferons par la suite. Remarquons cependant la chose suivante (dont la preuve est un calcul direct) :

**Proposition 1.3.1.** *Si  $(\tilde{\varphi}, \tilde{X})$  est une solution du système (1.28), autrement dit une solution des équations de contrainte conforme (1.7) pour  $\tau = \lambda\tilde{\tau}$  et  $\sigma = \tilde{\sigma}$ , avec  $\lambda > 0$ , alors*

$$(\varphi = \lambda^{\frac{n-2}{2}}\tilde{\varphi}, X = \lambda^{n-1}\tilde{X})$$

*est une solutions des équations de contrainte conforme pour  $\tau = \tilde{\tau}$  et  $\sigma = \lambda^{n-1}\tilde{\sigma}$  :*

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g\varphi + \text{Scal}_g\varphi = -\frac{n-1}{n}\tau^2\varphi^{N-1} + \frac{|\lambda^{n-1}\sigma + \mathbb{L}_gX|_g^2}{\varphi^{N+1}}, \\ \text{div}_g(\mathbb{L}_gX) = \frac{n-1}{n}\varphi^N d\tau. \end{cases} \quad (1.30)$$

Cette renormalisation permet donc de "cacher" la petitesse de  $\tau = \lambda\tilde{\tau}$  dans ce début de courbe que nous avons trouvé précédemment en la faisant "porter" sur  $\sigma = \lambda^{n-1}\tilde{\sigma}$ .  $\sigma$  se retrouve alors petit mais non nul, c'est l'hypothèse de [Max09, Théorème 1] ! Nous obtenons alors le résultat suivant :

**Théorème 1.3.2.** [13, Théorème 2.1] *Etant donné  $(M, g)$ , avec  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$ ,  $\tau$  quelconque et  $\tilde{\sigma} \neq 0$  un TT-tenseur, il existe  $\mu_0 > 0$  tel que, pour tout  $\mu \in (0; \mu_0)$ , les équations de contrainte conforme (1.7) avec  $\sigma = \mu\tilde{\sigma}$  admettent au moins une solution  $(\varphi, X)$ .*

Ce théorème, très simple et constructif, donne un résultat proche de celui de la méthode de Holst-Nagy-Tsogetgerel dans laquelle  $\sigma$  est supposé petit (en norme  $L^\infty$  dans [Max09] et en norme  $L^2$  dans [Ngu16]) mais non nul (voir la section 1.5.1). Essayons maintenant d'étudier le comportement de notre courbe de solutions au delà de ce que nous avons obtenu à l'aide du théorème des fonctions implicites. Nous utiliserons pour cela le théorème point fixe de Leray-Schauder (voir par exemple [Smo94]) :

**Théorème 1.3.3.** Soient  $E$  un espace de Banach et  $F : [0; 1] \times E \rightarrow E$  une application continue compacte. Si  $F(0, \cdot)$  est constante et si l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in E \mid \exists \lambda \in [0; 1], x = F(\lambda, x)\}$$

est borné, alors  $F(1, \cdot)$  admet un point fixe.

L'espace  $E$  que nous allons choisir est  $L^\infty(M, \mathbb{R})$ . L'opérateur  $F$  que nous allons considérer ici est défini de la manière suivante :

- Pour tout  $\tilde{\varphi} \in L^\infty(M, \mathbb{R})$ , notons  $V_\lambda(\tilde{\varphi}) \in W^{2,p}(M, TM)$  la solution de l'équation vecteur (1.28b) (ici  $p > n$  est quelconque). L'application  $V : [0; 1] \times L^\infty(M, \mathbb{R})$  est continue en vertu de la proposition 1.1.3.
- Pour tout  $\tilde{X} \in C^1(M, TM)$ , soit  $\text{Lich}_\lambda(\tilde{X}) \in W^{2,p}(M, \mathbb{R})$  la solution de l'équation de Lichnerowicz (1.28a). On montre que cette application est continue dans [4, Lemme 2.3].

Posons maintenant

$$F(\lambda, \cdot) := \text{Lich}_\lambda \circ \mathcal{I} \circ V_\lambda,$$

où  $\mathcal{I} : W^{2,p}(M, TM) \hookrightarrow C^1(M, TM)$  désigne l'injection de Sobolev. Cette injection est compacte par le théorème de Rellich, et assure ainsi la compacité de l'opérateur  $F$ .

Supposons maintenant que l'hypothèse sur  $\mathcal{S}$  ne soit pas satisfaite : il existe une suite  $(\lambda_k, \tilde{\varphi}_k, \tilde{X}_k)$ ,  $\lambda_k \in (0; 1]$ , de solutions du système (1.28), avec  $(\varphi_k, X_k)_k$  non bornée : si nous notons

$$\gamma_k := \|\tilde{\varphi}_k\|_{L^\infty}, \quad (1.31)$$

la suite  $(\gamma_k)_k$  tend vers  $+\infty$ .<sup>3</sup> Nous pouvons également, sans perte de généralité, supposer que la suite  $(\lambda_k)_k$  converge vers  $\lambda_\infty \in [0; 1]$ . Distinguons deux cas :

1. Si  $\lambda_\infty > 0$  : Posons

$$\bar{\varphi}_k = \frac{1}{\gamma_k} \tilde{\varphi}_k \quad \text{et} \quad \bar{X}_k = \frac{1}{\gamma_k^N} \tilde{X}_k,$$

de sorte que  $\|\bar{\varphi}_k\|_{L^\infty} = 1$ . Le système (1.28) devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\gamma_k^{N-2}} \left( -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \bar{\varphi}_k + \text{Scal} \bar{\varphi}_k \right) = -\frac{n-1}{n} \lambda_k^2 \tilde{\tau}^2 \bar{\varphi}_k^{N-1} + \frac{|\gamma_k^{-N} \tilde{\sigma} + \mathbb{L}_g \bar{X}_k|^2}{\bar{\varphi}_k^{N+1}}, \\ \Delta_{\mathbb{L}} \bar{X}_k = \lambda_k \frac{n-1}{n} \bar{\varphi}_k^N d\tilde{\tau}. \end{array} \right. \quad (1.32a)$$

$$\Delta_{\mathbb{L}} \bar{X}_k = \lambda_k \frac{n-1}{n} \bar{\varphi}_k^N d\tilde{\tau}. \quad (1.32b)$$

La proposition 1.1.3 permet de voir que la suite  $(\bar{X}_k)_k$  est bornée dans  $W^{2,p}(M, TM)$ . Comme nous avons supposé  $p > n$ , on a une injection compacte

$$W^{2,p}(M, TM) \hookrightarrow C^1(M, TM).$$

Nous pouvons donc supposer que  $X_k$  converge dans  $C^1(M, TM)$  vers un certain  $X_\infty \in W^{2,p}(M, TM)$ . En passant formellement à la limite dans l'équation (1.32a) nous obtenons

$$0 = -\frac{n-1}{n} \lambda_\infty^2 \tilde{\tau}^2 \bar{\varphi}_\infty^{N-1} + \frac{|\mathbb{L}_g \bar{X}_\infty|^2}{\bar{\varphi}_\infty^{N+1}} \quad (1.33)$$

ce que nous pouvons réécrire

$$\bar{\varphi}_\infty^N = \sqrt{\frac{n}{n-1} \frac{|\mathbb{L}_g \bar{X}_\infty|}{\lambda_\infty |\tilde{\tau}|}}. \quad (1.34)$$

Nous voyons ici que si  $\tilde{\tau}$  s'annule, le comportement du membre de droite est singulier. Si l'on suppose que  $\tilde{\tau} > 0$  partout, le raisonnement formel que nous avons fait est juste :

**Proposition 1.3.4.** Si  $\tilde{\tau} > 0$ , on a  $\bar{\varphi}_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_\infty$  dans  $L^\infty(M, \mathbb{R})$ .

<sup>3</sup>Remarquons, en utilisant l'équation vecteur (1.28b), que si  $(\gamma_k)_k$  est bornée,  $(\tilde{X}_k)_k$  est également bornée dans  $W^{2,p}(M, TM)$ .  $\gamma_k$  est donc une bonne mesure de la taille de  $(\tilde{\varphi}_k, \tilde{X}_k)$ .

*Démonstration.* L'idée est de revenir à la définition de la convergence uniforme. Pour cela, fixons-nous un  $\varepsilon > 0$ . Nous voulons montrer qu'il existe  $k_0 > 0$  tel que pour tout  $k \geq k_0$ , on a

$$\bar{\varphi}_\infty - \varepsilon \leq \bar{\varphi}_k \leq \bar{\varphi}_\infty + \varepsilon.$$

Ceci sera satisfait si  $\varphi_\infty - \varepsilon$  (resp.  $\varphi_\infty + \varepsilon$ ) est une sous-solution (resp. sur-solution) de l'équation (1.32a). Vu la faible régularité que nous avons ici ( $\bar{\varphi}_\infty \in C^0(M, \mathbb{R})$ ), cette idée doit être raffinée car nous ne contrôlons pas le laplacien de  $\bar{\varphi}_\infty$  : construisons deux fonctions  $\bar{\varphi}_\pm$  lisses telles que

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_\infty - \varepsilon \leq \bar{\varphi}_- \leq \bar{\varphi}_\infty - \varepsilon/2, \\ \bar{\varphi}_\infty + \varepsilon/2 \leq \bar{\varphi}_+ \leq \bar{\varphi}_\infty + \varepsilon. \end{cases}$$

Un calcul simple fait dans [4] montre alors que  $\bar{\varphi}_-$  (resp.  $\bar{\varphi}_+$ ) est une sous-solution (resp. sur-solution) de (1.32a) si  $k \geq k_0$  pour  $k_0$  assez grand. En utilisant le principe du maximum 1.2.5, nous obtenons

$$\bar{\varphi}_- \leq \bar{\varphi}_k \leq \bar{\varphi}_+,$$

ce qui montre

$$|\bar{\varphi}_k - \bar{\varphi}_\infty| \leq \varepsilon.$$

□

En particulier, comme  $\|\bar{\varphi}_k\|_{L^\infty} = 1$  pour tout  $k$ , nous avons  $\|\bar{\varphi}_\infty\|_{L^\infty} = 1$ . En passant à la limite dans (1.32b), nous obtenons finalement que  $\bar{X}_\infty \neq 0$  satisfait

$$\Delta_{\mathbb{L}} \bar{X}_\infty = \sqrt{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{L} \bar{X}_\infty| \frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}}. \quad (1.35)$$

C'est l'équation limite de [4].

2. Si, maintenant,  $\lambda_\infty = 0$ . Nous pouvons utiliser à nouveau la proposition 1.3.1 : les fonctions  $\varphi_k = \lambda_k^{\frac{n-2}{2}} \tilde{\varphi}_k$  et les champs de vecteurs  $X_k = \lambda_k^{n-1} \tilde{X}_k$  satisfont

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi_k + \text{Scal} \varphi_k = -\frac{n-1}{n} \tilde{\tau}^2 \varphi_k^{N-1} + \frac{|\sigma_k + \mathbb{L}_g X_k|^2}{\varphi_k^{N+1}}, \\ \Delta_{\mathbb{L}} X_k = \frac{n-1}{n} \varphi_k^N d\tilde{\tau}. \end{cases} \quad (1.36a)$$

$$\Delta_{\mathbb{L}} X_k = \frac{n-1}{n} \varphi_k^N d\tilde{\tau}. \quad (1.36b)$$

avec  $\sigma_k = \lambda_k^{n-1} \tilde{\sigma} \rightarrow 0$ . Nous avons, à nouveau, deux sous-cas à distinguer :

2a. Si la suite des  $\|\varphi_k\|_{L^\infty}$  est non-bornée, l'argument du premier cas s'applique à nouveau et nous obtenons une solution non-triviale de l'équation limite (1.35).

2b. Si la suite des  $\|\varphi_k\|_{L^\infty}$  est bornée, nous pouvons, par un argument de compacité, extraire une sous-suite des  $\varphi_k$  qui converge vers une solution du système (1.7) avec  $\sigma \equiv 0$ .

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

**Théorème 1.3.5.** [Ngu] Soient  $(M, g)$  une variété compacte avec  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$  et  $\tau$  une fonction strictement positive. Alors au moins l'un des trois points suivants est satisfait :

1. Il existe une solution  $(\varphi, X)$  aux équations de contrainte conforme (1.7) avec  $\tau \equiv \tilde{\tau}$  et  $\sigma \equiv \tilde{\sigma}$ .
2. Il existe une solution aux équations de contrainte conforme (1.7) avec  $\tau \equiv \tilde{\tau}$  et  $\sigma \equiv 0$ .
3. Il existe une solution non-triviale de l'équation limite (1.35).

Le cas favorable est, bien entendu le premier cas. Nous montrerons comment exclure le troisième dans la section suivante. La difficulté vient du second cas. La seule situation dans lequel nous pouvons l'exclure est lorsque  $d\tilde{\tau}/\tilde{\tau}$  est petit en norme  $L^n$  (voir [13, Théorème 2.4] ou [4, Théorème 1.7]).

L'idée de C. Nguyen dans [Ngu] est au contraire de trouver des situations dans lesquelles ni le point 1 ni le point 3 est satisfait pour conclure à l'existence de solutions avec  $\sigma \equiv 0$  répondant ainsi à une question soulevée par D. Maxwell.

## 1.4 La méthode de l'équation limite

Nous présentons ici la preuve donnée dans [Ngu16] de la méthode de l'équation limite. La preuve originelle de [4] est plus complexe.

Nous avons mentionné la difficulté à exclure le deuxième cas dans le théorème 1.3.5. Pour remédier à cela, nous allons modifier légèrement la méthode de la section précédente. Au lieu de changer  $\tau$  en  $\lambda\tilde{\tau}$ , contentons-nous d'introduire le paramètre  $\lambda$  devant  $d\tau$  dans (1.7) :

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \text{Scal } \varphi = -\frac{n-1}{n}\tau^2\varphi^{N-1} + \frac{|\sigma + \mathbb{L}_g X|^2}{\varphi^{N+1}}, \\ \Delta_{\mathbb{L}} X = \frac{n-1}{n}\lambda\varphi^N d\tau. \end{cases} \quad (1.37a)$$

$$\quad (1.37b)$$

Nous ne supposons plus  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$ , mais imposons  $\tau > 0$ . Pour  $\lambda = 0$ , ce système admet pour unique solution la paire  $(\varphi_0, X \equiv 0)$  où  $\varphi_0$  désigne l'unique solution de

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_0 + \text{Scal } \varphi_0 = -\frac{n-1}{n}\tau^2\varphi_0^{N-1} + \frac{|\sigma|^2}{\varphi_0^{N+1}}. \quad (1.38)$$

En procédant à l'identique de la section précédente, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 1.4.1.** *Soient  $(M, g)$  une variété compacte,  $\tau$  une fonction strictement positive et  $\sigma$  un TT-tenseur non nul. Alors au moins l'un des deux points suivants est satisfait :*

1. Il existe une solution non nulle  $Y$  à l'équation

$$\Delta_{\mathbb{L}} Y = \alpha \sqrt{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{L}Y| \frac{d\tau}{\tau} \quad (1.39)$$

pour un certain  $\alpha \in [0; 1]$ ,

2. l'ensemble des solutions au système des équations de contrainte conforme (1.7) est non vide et compact dans  $L^\infty(M, \mathbb{R}) \times W^{2,p}(M, TM)$ .

Le prix que nous avons eu à payer pour éliminer le deuxième cas du théorème 1.3.5 est l'introduction du paramètre  $\alpha$  dans l'équation (1.39). Les deux résultats que nous allons énoncer ci-dessous sont des résultats de nature perturbative qui ne voient pas le coefficient  $\alpha$  :

**Proposition 1.4.2.** [4, Corollaires 1.4 et 1.5] et [15, Proposition 6.2] *L'équation limite (1.39) n'admet de solution non-nulle  $Y$  pour aucune valeur  $\alpha \in [0; 1]$  si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

1. PETITESSE EN NORME  $L^n$  : Si

$$\left\| \frac{d\tau}{\tau} \right\|_{L^n} < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1}} C_g$$

avec

$$C_g := \inf_{X \neq 0} \frac{(\int_M |\mathbb{L}X|^2 d\mu^g)^{1/2}}{(\int_M |X|^N d\mu^g)^{1/N}} > 0. \quad (1.40)$$

2. PETITESSE EN NORME  $L^\infty$  : Si  $\text{Ric} \leq -\beta g$ , avec  $\beta > 0$  et si

$$\left\| \frac{d\tau}{\tau} \right\|_{L^\infty} < \sqrt{\frac{n\beta}{n-1}}.$$

*Démonstration.* La preuve du second point repose sur l'utilisation de la formule de Bochner pour l'opérateur  $\mathbb{L}$  :

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad \frac{1}{2} \int_M |\mathbb{L}X|^2 d\mu^g = \int_M \left[ |\nabla X|^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) (\text{div } X)^2 - \text{Ric}(X, X) \right] d\mu^g. \quad (1.41)$$

Soit  $Y$  une solution de l'équation limite (1.39) pour un certain  $\alpha \in [0; 1]$ . En contractant avec  $Y$  et en intégrant sur  $M$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_M |\mathbb{L}Y|^2 d\mu^g &= - \int_M \langle Y, \Delta_{\mathbb{L}} Y \rangle d\mu^g \\ &= -\alpha \sqrt{\frac{n-1}{n}} \int_M |\mathbb{L}Y| \left\langle \frac{d\tau}{\tau}, Y \right\rangle d\mu^g \\ &\leq \alpha \sqrt{\frac{n-1}{n}} \int_M |\mathbb{L}Y| \left| \frac{d\tau}{\tau} \right| |Y| d\mu^g \\ &\leq 2 \sqrt{\frac{n-1}{n}} \int_M |\nabla Y| \left| \frac{d\tau}{\tau} \right| |Y| d\mu^g \\ &\leq \int_M |\nabla Y|^2 d\mu^g + \frac{n-1}{n} \int_M \left| \frac{d\tau}{\tau} \right|^2 |Y|^2 d\mu^g. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Bochner (1.41), nous en déduisons

$$\int_M (-\text{Ric})(Y, Y) d\mu^g \leq \frac{n-1}{n} \int_M \left| \frac{d\tau}{\tau} \right|^2 |Y|^2 d\mu^g.$$

En utilisant l'hypothèse  $-\text{Ric} \geq \beta g$ , nous obtenons finalement

$$\beta \int_M |Y|^2 d\mu^g \leq \left\| \frac{d\tau}{\tau} \right\|_{L^\infty}^2 \int_M |Y|^2 d\mu^g,$$

ce qui force  $Y \equiv 0$  sous la seconde hypothèse de la proposition.  $\square$

L'article [4] donne également un cas dans lequel l'équation limite admet une solution.

La méthode de l'équation limite s'étend au cas asymptotiquement hyperbolique (voir section 2.5), au cas asymptotiquement cylindrique [Lea14] et au cas de la dimension 2 (avec une fibration en cercles), c'est un résultat que j'ai obtenu en collaboration avec C. Huneau [11]. Nous ne décrivons pas ici cet article car il n'introduit pas réellement de nouvelle méthode mais nécessite d'introduire de nouvelles notations.

Les cas asymptotiquement euclidien et des variétés à bord restent encore en suspend car ils posent des difficultés techniques que nous ne sommes pas encore parvenus à lever, là où la méthode HNT s'adapte : voir [DIMM14] pour le cas asymptotiquement euclidien et [HMT18] pour le cas compact avec bord. Voir également [HM15] pour le cas asymptotiquement euclidien avec bord ainsi que [13].

Dans le cas asymptotiquement euclidien, la principale difficulté pour montrer le critère de l'équation limite provient de la non-compacité des injections de Sobolev avec un poids critique (voir par exemple [Bar86] pour la compacité des injections de Sobolev avec un poids non critique). Cette compacité est cruciale pour assurer que la solution de l'équation limite que nous obtenons est non-triviale. Une autre façon de voir les choses est de dire qu'il n'est pas (encore) possible de contrôler la région dans laquelle  $\varphi$  (la solution de l'équation de Lichnerowicz) atteint son maximum, autrement dit d'avoir un phénomène de confinement comme dans le cas asymptotiquement hyperbolique (voir chapitre 2). En effet, de manière simplifiée, si  $\tau = O_1(r^{-\delta})$  pour un certain  $\delta \in (1, n-1)$ , on a  $|d\tau| = O(r^{-\delta-1})$  et  $X = O_2(r^{1-\delta})$  (avec  $X$  la solution de l'équation vecteur (1.7b), rappelons ici qu'on suppose que  $\varphi$  tend vers 1 à l'infini) d'où  $|\mathbb{L}X| = O(r^{-\delta})$  a la même décroissance que  $\tau$ . En particulier, le fait que les solutions de l'équation de Lichnerowicz tendent vers une constante à l'infini est lié au laplacien conforme. Or, justement, la méthode de l'équation limite consiste à dire qu'il joue un rôle de moins en moins important lorsque la taille des solutions grandit.

**Question.** Dans quelle mesure est-ce que le critère de l'équation limite s'applique au cas des variétés asymptotiquement euclidiennes ?

Cette question fait l'objet d'un travail en collaboration avec J. Isenberg et J. Dilts.

Dans le cas général (i.e. hors des cas d'application de la proposition 1.4.2), l'équation limite est subtile. Mentionnons deux questions raisonnables dans ce contexte :

**Question.** Soit  $\overline{X}_\infty$  une solution de l'équation limite (1.35),

1. Que peut-on dire de l'ensemble des points où  $\mathbb{L}\overline{X}_\infty = 0$  (rectifiabilité, dimension de Hausdorff...)?
2. Peut-on construire une courbe  $(\varphi_t, X_t, \sigma_t)$  avec  $(\varphi_t, X_t)$  solution des équations de contrainte conforme (1.7) avec  $\sigma \equiv \sigma_t$  telle que  $\sigma_t$  converge vers un  $\sigma_0$  en  $t = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\varphi_t\|_{L^\infty} = \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\varphi_t\|_{L^\infty}^{-N} X_t = \overline{X}_\infty$  ?



Une réponse à la première question peut sans doute être apportée en utilisant la fonction fréquence d'Almgren (voir par exemple [CNV15]). La seconde question est, quant à elle, un problème de perturbation singulière dont la résolution utilise la méthode de Nash-Moser (voir par exemple [TZ11]). Ceci est un projet en collaboration avec R. Mazzeo.

## 1.5 Variations sur la méthode de Holst-Nagy-Tsogtgerel

Le résultat de [13] que nous avons présenté précédemment (Théorème 1.3.2) donne une construction très simple de données initiales avec  $\tau$  quelconque et  $\sigma$  petit (dite *méthode GN*) et permet une étude préliminaire à l'adaptation de la méthode HNT. C'est le travail conduit dans les articles [14, 9]. Nous donnons ici une variante de la preuve de C. Nguyen de la méthode HNT dans la section 1.5.1 dans le cas  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$  puis nous donnerons deux adaptations de la méthode GN, renvoyant le lecteur curieux aux articles [14, 9] pour la construction HNT.

### 1.5.1 Le cas du vide avec $\mathcal{Y}_g(M) > 0$

Commençons par montrer en détail dans cette section le résultat suivant :

**Théorème 1.5.1.** [Ngu16] *Soient  $(M, g)$  une variété compacte avec  $\mathcal{Y}_g(M) > 0$  et  $\tau$  une fonction quelconque. Alors, il existe  $\varepsilon = \varepsilon(M, g, \tau)$  tel que si*

$$\|\sigma\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \sigma \neq 0,$$

*il existe (au moins) une solution  $(\varphi, X)$  aux équations de contrainte conforme (1.7).*

La valeur de  $\varepsilon$  est relativement explicite, voir la condition (1.47). Cette preuve donne la structure des preuves des généralisations de la méthode HNT que nous allons proposer par la suite tout en restant assez simple. Nous allons supposer de plus que  $\text{Scal} > 0$ . Cette hypothèse peut être enlevée en travaillant dans le contexte du "conformal thin sandwich" (voir par exemple [Max14]).

La preuve se fait en utilisant le théorème du point fixe de Schauder (voir par exemple [GT01]) :

**Théorème 1.5.2.** *Soit  $E$  un espace de Banach et  $\Omega$  une partie convexe bornée de  $E$ . Soit  $F : E \rightarrow E$  une application continue compacte telle que  $F(\Omega) \subset \Omega$ . Alors  $F$  admet un point fixe.*

L'espace  $E$  que nous considérons ici sera, de nouveau,  $L^\infty(M, \mathbb{R})$  et l'application  $F$  sera construite comme dans la section 1.3, à ceci près que maintenant  $\lambda = 1$  :

- Soit  $V : L^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow W^{2,p}(M, TM)$  l'application qui à  $\varphi$  associe l'unique solution  $X$  de l'équation vecteur (1.7b) (voir proposition 1.1.3),
- Soit  $\text{Lich} : C^1(M, TM) \rightarrow L^\infty(M, \mathbb{R})$  l'application qui à  $X$  associe la solution  $\varphi$  à l'équation de Lichnerowicz (1.7a),

on pose  $F = \text{Lich} \circ \mathcal{I} \circ V$  avec  $\mathcal{I} : W^{2,p}(M, TM) \hookrightarrow C^1(M, TM)$  l'injection de Sobolev.  $F : E \rightarrow E$  est une application continue et compacte. Nous allons maintenant construire la partie  $\Omega$  du théorème 1.5.2 en trois étapes.

1. INITIALISATION : Soit  $R > 0$  à préciser ultérieurement. Posons

$$\Omega_0 = \left\{ \varphi \in L_+^\infty(M, \mathbb{R}), \|\varphi^N\|_{L^{N/2+1}} \leq R \right\}.$$

Nous avons voir que si  $\|\sigma\|_{L^2}$  et  $R$  sont suffisamment petits, on peut avoir  $\Omega_0$  stable pour  $F$ . Soit  $\varphi \in \Omega_0$ , notons  $X = V(\varphi)$ . Alors, en contractant l'équation vecteur (1.7b) avec  $X$  et en intégrant sur  $M$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_M |\mathbb{L}X|^2 d\mu^g &= -\frac{n-1}{n} \int_M \varphi^N \langle d\tau, X \rangle d\mu^g \\ &\leq \frac{n-1}{n} \int_M \varphi^N |d\tau| |X| d\mu^g \\ &\leq \frac{n-1}{n} \|\varphi^N\|_{L^{N/2+1}} \|X\|_{L^N} \|d\tau\|_{L^n} \text{Vol}(M, g)^\alpha, \end{aligned}$$

avec  $\alpha = \frac{1}{2(n-1)}$ . En utilisant la constante  $C_g$  introduite dans (1.40), nous obtenons

$$\frac{1}{2} \|\mathbb{L}X\|_{L^2}^2 \leq \frac{n-1}{n} \frac{R}{C_g} \|\mathbb{L}X\|_{L^2} \|d\tau\|_{L^n} \text{Vol}(M, g)^\alpha,$$

d'où

$$\|\mathbb{L}X\|_{L^2}^2 \leq \left(2 \frac{n-1}{n} \frac{R}{C_g}\right)^2 \|d\tau\|_{L^n}^2 \text{Vol}(M, g)^{2\alpha}. \quad (1.42)$$

Posons  $\psi = \text{Lich}(X)$  de sorte que  $\psi$  satisfait

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g \psi + \text{Scal}_g \psi = -\frac{n-1}{n} \tau^2 \psi^{N-1} + \frac{|\sigma + \mathbb{L}_g X|_g^2}{\psi^{N+1}}. \quad (1.43)$$

Multiplions maintenant l'équation (1.43) par  $\psi^{N+1}$  et intégrons sur  $M$ . Un calcul simple donne

$$\int_M \left[ \frac{3n-2}{n-1} |d\psi^{N/2+1}|^2 + \text{Scal} \psi^{N+2} \right] d\mu^g = -\frac{n-1}{n} \int_M \tau^2 \psi^{2N} + \int_M |\sigma + \mathbb{L}_g X|^2 d\mu^g. \quad (1.44)$$

Comme nous supposons  $\text{Scal} > 0$ , il existe une constante  $s > 0$  telle que

$$\forall u \in W^{1,2}(M, \mathbb{R}), s \|u\|_{L^N}^2 \leq \int_M \left[ \frac{3n-2}{n-1} |du|^2 + \text{Scal} u^2 \right] d\mu^g. \quad (1.45)$$

Prenant  $u = \psi^{N/2+1}$ , l'équation (1.44) donne

$$s \|\psi^{N/2+1}\|_{L^N}^2 \leq \int_M |\sigma + \mathbb{L}_g X|^2 d\mu^g = \int_M |\sigma|^2 d\mu^g + \|\mathbb{L}X\|_{L^2}^2.$$

Remarquons que  $\|\psi^{N/2+1}\|_{L^N}^2 = \|\psi^N\|_{L^{N/2+1}}^{1+2/N}$  et utilisons finalement l'estimée (1.42) :

$$s \|\psi^N\|_{L^{N/2+1}}^{1+2/N} \leq \int_M |\sigma|^2 d\mu^g + \left(2 \frac{n-1}{n} \frac{R}{C_g}\right)^2 \|d\tau\|_{L^n}^2 \text{Vol}(M, g)^{2\alpha}.$$

On aura donc  $\psi \in \Omega_0$  si

$$\int_M |\sigma|^2 d\mu^g + \left(2 \frac{n-1}{n} \frac{R}{C_g}\right)^2 \|d\tau\|_{L^n}^2 \text{Vol}(M, g)^{2\alpha} \leq s R^{1+2/N}. \quad (1.46)$$

Notons

$$x := \frac{1}{s} \int_M |\sigma|^2 d\mu^g \quad \text{et} \quad \Lambda_{g,\tau} := \left(2 \frac{n-1}{n C_g}\right)^2 \frac{\|d\tau\|_{L^n}^2}{s} \text{Vol}(M, g)^{2\alpha},$$

de sorte que l'inégalité (1.46) devient

$$x + \Lambda_{g,\tau} R^2 \leq R^{1+2/N} \Leftrightarrow x R^{-1-2/N} + \Lambda_{g,\tau} R^{1-2/N} \leq 1.$$

Cette inégalité sera satisfaite si, par exemple,

$$\Lambda_{g,\tau} R^{1-2/N} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x R^{-1-2/N} \leq \frac{1}{2}. \quad (1.47)$$

Remarquons que la première inégalité fixe la valeur de  $R$  et la seconde, la valeur de  $x$ .

2. AMÉLIORATION DE  $\Omega_0$  PREMIÈRE PARTIE : L'objectif est maintenant de transformer  $\Omega_0$  en une partie convexe fermée bornée de  $L^\infty(M, \mathbb{R})$ . L'idée est de construire une suite de parties  $\Omega_i$  convexes fermées de  $L^\infty(M, \mathbb{R})$  telles que  $F(\Omega_i) \subset \Omega_{i+1}$  avec  $\Omega_{i+1} = \Omega_i \cap \{\varphi, \|\varphi^N\|_{p_{i+1}} \leq R_i\}$  pour un certain choix de  $p_i$  et  $R_i$ . En particulier  $\Omega_{i+1} \subset \Omega_i$  est stable par  $F$ .

Posons donc  $p_0 = \frac{N}{2} + 1$  et  $R_0 = R$ . Supposons  $p_i$  et  $R_i$  obtenus, avec  $p_i < n$ . En utilisant l'estimation de la proposition 1.1.3 pour l'équation vecteur (1.7b), on a, si  $X = V(\varphi)$  avec  $\varphi \in \Omega_i$ ,  $\|X\|_{W^{2,p_i}} \lesssim R_i \|d\tau\|_{L^\infty}$ , d'où, en utilisant l'injection de Sobolev,  $\|\mathbb{L}X\|_{L^{q_i}} \lesssim R_i$  avec

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{n}$$

(c'est ici que nous utilisons le fait que  $p_i < n$ ). Multiplions l'équation de Lichnerowicz (1.43) pour  $\psi = \text{Lich}(X)$  par  $\psi^{N+1+2k_i}$  pour une certaine constante  $k_i > 0$  à déterminer et intégrons sur  $M$ . On obtient

$$\int_M \left[ \frac{4(n-1)}{n-2} \frac{N+1+2k_i}{\left(\frac{N}{2}+1+k_i\right)^2} |d\psi^{N/2+1+k_i}|^2 + \text{Scal}(\psi^{N/2+1+k_i})^2 \right] d\mu^g \leq \int_M |\sigma + \mathbb{L}X|^2 \varphi^{2k_i} d\mu^g.$$

En utilisant l'injection de Sobolev  $L^2$ , et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|\psi^{N/2+1+k_i}\|_{L^N}^2 \lesssim \int_M |\sigma + \mathbb{L}X|^2 \varphi^{2k_i} d\mu^g \leq \left( \int_M |\sigma + \mathbb{L}X|^{2a} d\mu^g \right)^{1/a} \left( \int_M \psi^{2k_i b} d\mu^g \right)^{1/b}$$

avec  $a, b > 0$ ,  $1/a + 1/b = 1$ . On peut réécrire l'inégalité précédente sous la forme

$$\|\psi^N\|_{L^{N/2+1+k_i}}^{\frac{2}{N}(N/2+1+k_i)} \lesssim \left( \int_M |\sigma + \mathbb{L}X|^{2a} d\mu^g \right)^{1/a} \left( \int_M \psi^{2k_i b} d\mu^g \right)^{1/b} \quad (1.48)$$

On pose alors  $p_{i+1} = N/2 + 1 + k_i$ . Vu l'estimée que nous avons pour  $\mathbb{L}X$ , posons  $2a = q_i$ . Le choix naturel pour  $k_i$  serait de prendre  $2k_i b = p_{i+1}$ , cependant l'expression obtenue pour  $p_{i+1}$  est peu maniable. On prendra plutôt  $2k_i b = p_i$ , ce qui conduit à une relation de récurrence affine pour  $p_i$  :

$$p_{i+1} = 1 - \frac{N}{2} + N p_i \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)$$

Notons que, puisque  $\psi = F(\varphi)$  avec  $\varphi \in \Omega_i$ , on a

- $\psi \in \Omega_0$  si  $i = 0$ ,
- ou  $\varphi \in \Omega_i \subset \Omega_{i-1}$  donc  $\psi \in F(\Omega_{i-1}) \subset \Omega_i$  si  $i > 0$ .

L'équation (1.48) implique donc

$$\|\psi^N\|_{L^{p_{i+1}}}^{\frac{2}{N}(N/2+1+k_i)} \lesssim \left( \int_M |\sigma + \mathbb{L}X|^{2a} d\mu^g \right)^{1/a} \left( \int_M \psi^{2k_i b} d\mu^g \right)^{1/b}$$

avec le membre de droite contrôlé par une fonction croissante  $f$  de  $R_i$ . On peut donc poser  $R_{i+1} = f(R_i)$ , ce qui achève la construction de  $\Omega_{i+1}$ .

Remarquons que la suite  $p_i$  forme une suite arithmético-géométrique de raison  $N \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{n+2}{n-2}$ . Il existe donc un rang  $i$  où  $p_i \geq n$ . On peut même supposer  $p_i > n$  en diminuant un peu  $p_0$  et en faisant une itération de plus.

2. AMÉLIORATION DE  $\Omega_0$  SECONDE PARTIE : L'estimation de l'équation vecteur nous donne cette fois-ci  $\|\mathbb{L}X\|_{L^\infty} \lesssim \|\varphi^N\|_{L^{p_i}}$ .  $\mathbb{L}X$  appartient plus exactement à un certain espace de Hölder. Les coefficients dans l'équation de Lichnerowicz (1.43) pour  $\psi$  étant continus, nous pouvons appliquer le principe du maximum. Puisque nous avons supposé  $\text{Scal} > 0$ , nous avons, en un point où  $\varphi$  atteint son maximum  $\varphi_{\text{sup}}$  :

$$\text{Scal} \varphi_{\text{sup}} + \frac{n-1}{n} \varphi_{\text{sup}}^{N-1} \leq \frac{|\sigma + \mathbb{L}X|^2}{\varphi_{\text{sup}}^{N+1}}$$

d'où  $\text{Scal} \varphi_{\text{sup}}^{N+2} \leq |\sigma + \mathbb{L}X|^2$  ce qui montre que  $\|\psi^N\|_{L^\infty} \leq C \left( R_i^{\frac{N}{N+2}} + 1 \right)$  avec  $C = \|\text{Scal}^{-1}\|_{L^\infty}$ . Posons

$$R_\infty = C \left( R_i^{\frac{N}{N+2}} + 1 \right). \text{ La partie}$$

$$\Omega = \Omega_i \cap \{ \varphi \in L^\infty(M, \mathbb{R}), \|\varphi^N\|_{L^\infty} \leq R_\infty \}$$

est finalement une partie fermée convexe de  $L^\infty(M, \mathbb{R})$  stable par  $F$ . En vertu du théorème de Schauder (théorème 1.5.2),  $F$  admet un point fixe, autrement dit, il existe une solution des équations de contrainte conforme (1.7).

Nous venons de voir que la construction GN (voir théorème 1.3.2) donne un moyen très rapide de tester si la méthode HNT s'adapte à certains cas des équations de contrainte conforme. La preuve de la généralisation de la méthode HNT est ensuite un joli problème d'analyse. Dans les deux sections suivantes, nous allons étudier des cas où la méthode GN s'applique en nous contentant d'énoncer le résultat correspondant pour la méthode HNT.

Dans l'application de la méthode HNT, la principale source de difficultés est la première étape, autrement dit la construction d'une première partie convexe stable (mais non compacte) à l'aide de techniques " $L^2$ " (c'est-à-dire l'intégration par parties et les injections de Sobolev  $L^2$ , mais pas la régularité elliptique). Les deux étapes suivantes sont peu changées. Nous renvoyons le lecteur aux articles [9, 14] pour le détail des constructions.

### 1.5.2 Le cas d'un champ scalaire avec $\mathcal{Y}_g(M) > 0$

Le premier cas est le cas des équations de contrainte conforme avec un champ scalaire données en (1.20). Introduisons cette fois-ci le paramètre  $\lambda$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + \mathcal{R}_\psi \varphi = \lambda^2 \mathcal{B}_{\tau, \psi} \varphi^{N-1} + \frac{|\tilde{\sigma} + \mathbb{L}W|^2 + \tilde{\pi}^2}{\varphi^{N+1}}, \\ \Delta_{\mathbb{L}} W = \frac{n-1}{n} \lambda \varphi^N d\tau + \tilde{\pi} d\psi, \end{cases} \quad (1.49a)$$

$$\Delta_{\mathbb{L}} W = \frac{n-1}{n} \lambda \varphi^N d\tau + \tilde{\pi} d\psi, \quad (1.49b)$$

de sorte que  $\lambda$  apparaît devant  $\mathcal{B}_{\tau, \psi}$  et  $d\tau$ . Lorsque  $\lambda = 0$ , le système devient

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + \mathcal{R}_\psi \varphi = \frac{|\sigma + \mathbb{L}W|^2 + \tilde{\pi}^2}{\varphi^{N+1}}, \\ \Delta_{\mathbb{L}} W = \tilde{\pi} d\psi, \end{cases} \quad (1.50a)$$

$$\Delta_{\mathbb{L}} W = \tilde{\pi} d\psi, \quad (1.50b)$$

La seconde équation admet une unique solution (proposition 1.1.3) et la première est aussi simple à résoudre par une méthode de sur- et sous-solutions :

**Proposition 1.5.3.** *Si l'opérateur*

$$L_{g, \psi} : u \mapsto -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + \mathcal{R}_\psi \varphi \quad (1.51)$$

est positif, l'équation (1.50a) admet une unique solution.

Les arguments de fonction implicite et de scaling donné dans la section 1.3 s'applique alors mutatis mutandis et donne lieu au théorème suivant :

**Théorème 1.5.4.** [14, Théorème 3.1] *Soient  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte,  $\tau, \psi, \tilde{\pi}$  trois fonctions et  $\tilde{\sigma}$  un TT-tenseur. Supposons de plus que l'opérateur  $L_{g, \psi}$  défini en (1.51) soit coercif et que  $(M, g)$  n'a pas de champs de vecteur de Killing conforme non trivial. Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , le système (1.20) avec*

$$\sigma \equiv \varepsilon \tilde{\sigma}, \quad \pi \equiv \varepsilon \tilde{\pi}$$

admet une solution  $(\varphi, X)$  avec  $\varphi > 0$ .

On devine alors le résultat obtenu par la méthode HNT :

**Théorème 1.5.5.** [14, Théorème 4.1] *Soient  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte,  $\tau, \psi, \pi$  trois fonctions et  $\sigma$  un TT-tenseur. Supposons de plus que l'opérateur  $L_{g, \psi}$  défini en (1.51) soit coercif et que  $(M, g)$  n'a pas de champs de vecteur de Killing conforme non trivial. Alors il existe  $\varepsilon = \varepsilon(M, g, \tau, \psi) > 0$  tel que, si*

$$\int_M (|\sigma|^2 + \pi^2) d\mu^g < \varepsilon,$$

le système (1.20) admet une solution  $(\varphi, W)$  avec  $\varphi > 0$ .

### 1.5.3 Le cas du vide avec $\mathcal{Y}_g(M) = 0$

La construction dans le cas  $\mathcal{Y}_g(M) = 0$  diffère de celle de [13]. Dans ce cas, le laplacien conforme

$$u \mapsto -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + \text{Scal } u \quad (1.52)$$

a un noyau de dimension 1 engendré par une fonction positive, que nous noterons  $\varphi_0$ , normalisée par  $\|\varphi_0\|_{L^N} = 1$  (autrement dit, la métrique scalaire plate  $\varphi_0^{N-2} g$  est de volume 1). L'équation

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + \text{Scal } u = f$$

admet une solution  $u$  si et seulement si

$$\int_M \varphi_0 f d\mu^g = 0.$$

Cette solution est de plus unique si on impose (par exemple)

$$\int_M u \varphi_0 d\mu^g = 0.$$

Ceci montre que l'équation (1.29) ne peut pas admettre de solution positive. L'idée consiste alors à imposer un comportement différent pour le facteur conforme  $\varphi$  dans la direction proportionnelle à  $\varphi_0$  et dans la direction  $L^2$ -orthogonale à  $\varphi_0$  :

$$\varphi = \lambda^\alpha c_\lambda \varphi_0 + \lambda^\beta \varphi_\perp, \quad (1.53)$$

où  $\alpha, \beta$  sont deux constantes à préciser,  $0 < \alpha < \beta$ ,  $c_\lambda$  est une constante qui tend vers une valeur  $c_0 > 0$  lorsque  $\lambda$  tend vers 0 et  $\varphi_\perp = \varphi_\perp(\lambda)$  est dans

$$\mathring{L}^2(M, \mathbb{R}) := \left\{ \varphi_\perp \in L^2(M, \mathbb{R}), \int_M \varphi \varphi_0 d\mu^g = 0 \right\}.$$

*Remarque 1.5.6.* Nous adopterons plus généralement la notation suivante. Si  $F$  est un espace de fonctions sur  $M$  qui est un sous-espace de  $L^2(M, \mathbb{R})$ , nous poserons

$$\mathring{F} := F \cap \mathring{L}^2(M, \mathbb{R}).$$

Soit  $X_0$  la solution de l'équation suivante :

$$\Delta_{\mathbb{L}} X_0 = \frac{n-1}{n} \varphi_0^N d\tau,$$

de sorte que l'équation vecteur (1.7b) implique que

$$X = \lambda^{N\alpha} c_\lambda^N X_0 + \lambda^{(N-1)\alpha+\beta} X_\perp,$$

avec  $X_\perp$  solution de

$$\Delta_{\mathbb{L}} X_\perp = N \frac{n-1}{n} (\varphi_0^{N-1} \varphi_\perp + O(\lambda^{\beta-\alpha})) d\tau$$

(notons ici qu'il s'agit juste d'une notation pour  $X_\perp$ ). On a donc

$$X = \lambda^{N\alpha} c_\lambda^N X_0 + O(\lambda^{(N-1)\alpha+\beta}).$$

Posons  $\sigma = \lambda^\gamma \tilde{\sigma}$  pour un TT-tenseur  $\tilde{\sigma}$ . Introduisons cette estimation dans l'équation de Lichnerowicz :

$$\begin{aligned} & \lambda^\beta \left( -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi_\perp + \text{Scal} \varphi_\perp \right) \\ &= \lambda^{(N-1)\alpha} \left[ -\frac{n-1}{n} \tau^2 (c_\lambda \varphi_0 + \lambda^{\beta-\alpha} \varphi_\perp)^{N-1} + \frac{|\lambda^{\gamma-N\alpha} \tilde{\sigma} + c_\lambda^N \mathbb{L} X_0 + O(\lambda^{\beta-\alpha})|^2}{(c_\lambda \varphi_0 + \lambda^{\beta-\alpha} \varphi_\perp)^{N+1}} \right] \end{aligned}$$

Il apparaît naturel d'imposer  $\beta = (N-1)\alpha$ ,  $\gamma = N\alpha$ . En prenant comme normalisation  $\beta - \alpha = 1$ , on obtient

$$\alpha = \frac{n-2}{4}, \quad \beta = \frac{n+2}{4}, \quad \gamma = \frac{n}{2}.$$

L'équation de Lichnerowicz devient alors

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi_\perp + \text{Scal} \varphi_\perp = -\frac{n-1}{n} \tau^2 (c_\lambda \varphi_0 + \lambda \varphi_\perp)^{N-1} + \frac{|\tilde{\sigma} + c_\lambda^N \mathbb{L} X_0 + O(\lambda)|^2}{(c_\lambda \varphi_0 + \lambda \varphi_\perp)^{N+1}}.$$

Cette équation fait maintenant parfaitement sens dans la limite  $\lambda = 0$  :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi_\perp + \text{Scal} \varphi_\perp = -\frac{n-1}{n} \tau^2 (c_0 \varphi_0)^{N-1} + \frac{|\tilde{\sigma} + c_0^N \mathbb{L} X_0|^2}{(c_0 \varphi_0)^{N+1}}. \quad (1.54)$$

Le membre de droite de l'équation ne dépend plus de  $\varphi_\perp$ . On ajuste alors la constante  $c_0$  de manière à ce qu'il soit  $L^2$ -orthogonal à  $\varphi_0$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \left[ -\frac{n-1}{n} (c_0 \varphi_0)^{N-1} + \frac{|\tilde{\sigma} + c_0^N \mathbb{L} X_0|^2}{(c_0 \varphi_0)^{N+1}} \right] \varphi_0 d\mu^g \\ &= \left[ -\frac{n-1}{n} \int_M \tau^2 \varphi_0^N d\mu^g + \int_M \frac{|\mathbb{L} X_0|^2}{\varphi_0^N} d\mu^g \right] c_0^{N-1} + 2c_0^{-1} \int_M \frac{\langle \tilde{\sigma}, \mathbb{L} X_0 \rangle}{\varphi_0^N} d\mu^g + c_0^{-N-1} \int_M \frac{|\tilde{\sigma}|^2}{\varphi_0^N} d\mu^g. \end{aligned}$$

On obtient une équation du second degré en  $x = c_0^N$

$$0 = \left[ -\frac{n-1}{n} \int_M \tau^2 \varphi_0^N d\mu^g + \int_M \frac{|\mathbb{L} X_0|^2}{\varphi_0^N} d\mu^g \right] x^2 + 2x \int_M \frac{\langle \tilde{\sigma}, \mathbb{L} X_0 \rangle}{\varphi_0^N} d\mu^g + \int_M \frac{|\tilde{\sigma}|^2}{\varphi_0^N} d\mu^g \quad (1.55)$$

dont nous cherchons les racines positives. Remarquons que la règle des signes de Descartes donne un premier résultat très simple : L'équation (1.55) a une unique solution positive si et seulement si

$$\frac{n-1}{n} \int_M \tau^2 \varphi_0^N d\mu^g > \int_M \frac{|\mathbb{L}X_0|^2}{\varphi_0^N} d\mu^g \quad (1.56)$$

(nous omettons ici le cas dégénéré où les deux termes peuvent être égaux, c'est-à-dire lorsque l'équation (1.55) est du premier degré). Nous pouvons alors résoudre l'équation (1.54) et trouver la fonction  $\varphi_\perp$ .

L'application du théorème des fonctions implicites pour  $(c_\lambda, \varphi_\perp, X_\perp)$  (valable plus généralement dès lors que les racines de (1.55) sont distinctes) donne alors le théorème suivant :

**Théorème 1.5.7.** [9, Théorème 3.3] Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte avec  $\mathcal{Y}_g(M) = 0$ , telle que  $(M, g)$  n'a pas de champs de vecteur de Killing conforme non trivial. Soient ensuite  $\tau$  une fonction sur  $M$  et  $\tilde{\sigma} \neq 0$  un TT-tenseur. Supposons que l'équation (1.55) admette une ou deux racines positives. Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , le système (1.7) avec  $\sigma \equiv \varepsilon \tilde{\sigma}$  admet au moins une solution  $(\varphi, X)$  avec  $\varphi > 0$ .

La condition (1.56) a un gros avantage : elle est indépendante du choix de  $\tilde{\sigma}$  ! C'est donc dans ce cas qu'il est le plus aisé de mettre en place la méthode HNT :

**Théorème 1.5.8.** [9, Théorème 4.4] Soient  $(M, g)$  une variété compacte avec  $\mathcal{Y}_g(M) = 0$  et  $\tau$  une fonction telle que l'inégalité (1.56) soit satisfaite. Alors, il existe  $\varepsilon = \varepsilon(M, g, \tau)$  tel que si

$$\|\sigma\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \sigma \neq 0,$$

il existe (au moins) une solution  $(\varphi, X)$  aux équations de contrainte conforme (1.7).

Il serait intéressant de regarder comment se comporte l'équation (1.55) sous un changement conforme  $(g \mapsto \psi^{N-2}g, \sigma \mapsto \psi^{-2}\sigma, \tau \mapsto \tau)$ , et, en particulier, de voir si ces changements préservent le nombre de racines positives de l'équation (1.55). Ce point n'est pas évident. En effet,  $X_0$  dépend de manière non-triviale de la métrique  $g$  dans une classe conforme donnée.

L'intérêt de cette question est tester la covariance conforme des équations de contrainte conformes. Remarquons en effet que les méthodes GN et HNT produisent des solutions dont le volume  $\text{Vol}(\varphi^{N-2}g)$  tend vers zéro avec le paramètre  $\lambda$ . Peut-on affirmer que ce sont les seules solutions de volume petit ? Plus exactement,

**Question 1.5.9.** Est-ce que l'affirmation suivante est vraie :

Il existe  $V_0 > 0$  tel que si  $\lambda > 0$  est suffisamment petit, les seules solutions  $(\varphi, X)$  du système (1.30) satisfaisant  $\text{Vol}(\varphi^{N-2}g) \leq V_0$  sont celles données par le théorème 1.5.7.

Un exemple particulier dans lequel il serait simple numériquement d'étudier si le nombre de solutions à l'équation (1.55) varie sous une transformation conforme serait de prendre une variété  $(M, g)$  plate compacte (ces variétés sont également appelées variétés de Biberbach) de dimension 3 choisie de sorte que  $g$  n'admette pas de champ de vecteur de Killing (conforme). Ces variétés admettent un tore plat comme revêtement fini, ce qui permet soit de les trianguler facilement (en utilisant une triangulation du tore invariante sous les automorphismes de revêtement), soit d'envisager des méthodes spectrales. Les transformations conformes peuvent alors être encodées en utilisant les équations du "conformal thin sandwich" (voir [Max14]).

D. Maxwell a déjà donné un exemple montrant que la méthode conforme n'a pas de bonnes propriétés de covariance conforme dans [Max11b], cependant, l'exemple correspond à un cas très dégénéré et est (à mon sens) noyé dans ce gros article, ce qui fait qu'il n'a pas obtenu l'attention qu'il mérite.

## 1.6 Un résultat de non-existence

Nous présentons finalement le résultat de l'article [5] en collaboration avec M.Dahl et E. Humbert dans lequel nous nous intéressons à la non-existence de solutions aux équations de contrainte conforme. L'idée de cet article est considérer, non pas le système original (1.7) mais un système un peu différent :

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + \text{Scal} \varphi = -\frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{N-1} + |\sigma + \mathbb{L}X|^2 \varphi^{-N-1}, \\ \Delta_\perp X = a \varphi^N \xi, \end{cases} \quad (1.57)$$

dans lequel  $a$  est un paramètre réel et  $\xi$  est un champ de vecteurs sur  $M$ . Le principal intérêt de remplacer  $d\tau$  par  $a\xi$  dans le système (1.7) est de pouvoir imposer à  $\xi$  de ne jamais s'annuler (ce qui suppose que la

caractéristique d'Euler- Poincaré de la variété  $M$  est nulle) et donc permet d'estimer  $\|\varphi\|_{L^N}$  en fonction de  $\|\mathbb{L}X\|_{L^2}$  par

$$-\frac{1}{2} \int_M \langle \mathbb{L}\xi, \mathbb{L}X \rangle d\mu^g = \int_M \langle \xi, \Delta_{\mathbb{L}} X \rangle = a \int_M \varphi^N |\xi|^2 d\mu^g,$$

d'où on tire

$$a (\inf |\xi|^2) \int_M \varphi^N d\mu^g \leq \frac{1}{2} \|\mathbb{L}X\|_{L^2} \|\mathbb{L}\xi\|_{L^2}.$$

Cette estimée va dans le sens inverse du sens que nous avons utilisé jusqu'à présent (estimer supérieurement  $\mathbb{L}X$  en fonction de  $\varphi^N$ ). Le résultat principal de [5] est le suivant :

**Théorème 1.6.1.** [5] Soient  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ ,  $3 \leq n \leq 5$  de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle, avec  $\text{Scal} \leq 0$ ,  $\text{Scal} \neq 0$ ,  $\tau$  une fonction strictement positive sur  $M$  et  $\sigma$  un  $TT$ -tenseur. Alors il existe  $a_0 > 0$  tel que, pour tout  $a > a_0$ , le système (1.57) n'admet pas de solution.

La preuve de ce résultat n'est pas très éclairante. Elle est basée sur une suite d'estimations pour  $\varphi$  et  $X$  en fonction de  $a$  qui, mises bout-à-bout, donnent une contradiction dès lors que  $a$  est assez grand. Des cas de non-existence de solutions et de non unicité pour le système des équations de contrainte conformes (1.7) sont donnés dans les deux articles de C. Nguyen [Nguu, Ngub] et rendent en grande partie caduc ce résultat.

# Chapitre 2

## Analyse et géométrie des données initiales asymptotiquement hyperboliques

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Présentation de la méthode conforme</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>L'équation de Lichnerowicz</b>	<b>8</b>
1.2.1	Le cas du vide	8
1.2.2	Le cas avec constante cosmologique positive	13
<b>1.3</b>	<b>Une première méthode pour résoudre les équations de contrainte conforme</b>	<b>17</b>
<b>1.4</b>	<b>La méthode de l'équation limite</b>	<b>22</b>
<b>1.5</b>	<b>Variations sur la méthode de Holst-Nagy-Tsogtgerel</b>	<b>24</b>
1.5.1	Le cas du vide avec $\mathcal{Y}_g(M) > 0$	24
1.5.2	Le cas d'un champ scalaire avec $\mathcal{Y}_g(M) > 0$	27
1.5.3	Le cas du vide avec $\mathcal{Y}_g(M) = 0$	27
<b>1.6</b>	<b>Un résultat de non-existence</b>	<b>29</b>

## 2.1 Présentation des variétés asymptotiquement hyperboliques

### 2.1.1 L'espace hyperbolique

Avant de nous embarquer dans la jungle des variétés asymptotiquement hyperboliques, prenons un peu de temps pour rappeler quelques notions fondamentales sur l'espace hyperbolique. Ceci nous permettra, en particulier, de fixer les notations que nous utiliserons par la suite. De manière assez intrigante, il n'existe pas de description canonique de cet espace (contrairement à l'espace euclidien ou à la sphère). Nous aurons besoin par la suite des trois définitions suivantes.

Soit  $\mathbb{R}^{n,1}$  l'espace de Minkowski, c'est à dire  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de la forme quadratique

$$\eta := -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

Une première définition de l'espace hyperbolique est alors

$$\mathcal{H}^n := \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n,1} \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = -1, x^0 > 0\}.$$

C'est donc une des deux composantes connexes de l'hyperboloïde à deux nappes munie de la métrique induite. Ce modèle permet de voir simplement que le groupe des isométries de l'espace hyperbolique est  $O_{\uparrow}(n, 1)$ , le sous-groupe du groupe orthogonal de  $\eta$  préservant l'orientation en temps. Une variante lorentzienne de la formule de Gauss-Codazzi permet de voir que cet espace est à courbure (sectionnelle) constante  $-1$ .

La deuxième définition se déduit de la première par une projection stéréographique. Soit  $p_0 = (-1, 0, \dots, 0)$  le "sommet" de la seconde nappe de l'hyperboloïde. Définissons la projection

$$\pi : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$



de la manière suivante. Pour tout  $p \in \mathcal{H}^n$ , traçons la droite reliant  $p_0$  à  $p$ . Elle coupe l'hyperplan  $\{x^0 = 0\}$  (que nous identifions à  $\mathbb{R}^n$ ) en le point  $\pi(p)$ . Un calcul simple donne

$$\pi(x^0, x^1, \dots, x^n) = \left( \frac{x^1}{x^0 + 1}, \dots, \frac{x^n}{x^0 + 1} \right)$$

et  $\pi$  est un difféomorphisme entre  $\mathcal{H}^n$  et la boule unité  $B_1(0)$  de  $\mathbb{R}^n$ . La métrique poussée en avant par  $\pi$  sur  $B_1(0)$  est donnée par

$$b = \left( \frac{1 - |x|^2}{2} \right)^{-2} \delta \quad (2.1)$$

où  $\delta$  est la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . C'est le *modèle de la boule conforme de Poincaré*.

Enfin la troisième définition de l'espace hyperbolique est obtenue en utilisant une transformation de Möbius du modèle de la boule : Soit  $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ , avec  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0\}$ , la fonction définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{1 - |x|^2}{(1 - x_1)^2 + |\tilde{x}|^2}, \frac{2\tilde{x}}{(1 - x_1)^2 + |\tilde{x}|^2} \right)$$

où nous avons noté  $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_n)$ . On voit alors que  $f$  est un difféomorphisme et que l'image de la métrique  $b$  du modèle de la boule est donnée par  $f_*b = \frac{1}{x_1^2}\delta$ . Ce modèle est celui du *demi-espace de Poincaré*.

Nous noterons  $(\mathbb{H}^n, b)$  l'espace hyperbolique ou plus exactement la classe d'isométrie des trois espaces que nous venons d'introduire. Nous travaillerons principalement dans le modèle de la boule conforme.

## 2.1.2 Définitions

Contrairement au (relatif) consensus qui semble reposer sur la définition des variétés asymptotiquement euclidiennes, la terminologie autour des variétés asymptotiquement hyperboliques ne s'est pas stabilisée. La raison en est, sans doute, qu'il existe de nombreuses définitions "très inéquivalentes" de variété asymptotiquement hyperbolique suivant qu'elles incluent des infinis conformes différents de la sphère ronde ou non.

La terminologie que nous allons utiliser est celle des articles de J. Lee (voir par exemple [GL91, Lee06]). Soit  $\overline{M}$  une variété compacte à bord. On note  $\partial M$  le bord de  $\overline{M}$  et  $M$  l'intérieur de  $M$  si bien que  $M$  est une variété non-compacte dès lors que  $\partial M \neq \emptyset$  (ce que nous supposons par la suite).

On appelle *fonction définissante* pour  $\partial M$  toute fonction  $\rho : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  (ou du moins suffisamment régulière pour l'application considérée) telle que

- $\rho \geq 0$  sur  $\overline{M}$  et  $\rho^{-1}(0) = \partial M$ ,
- 0 est une valeur régulière pour  $\rho$ , autrement dit  $d\rho(\bar{p}) \neq 0$  pour tout  $\bar{p} \in \partial M$ .

On dit qu'une métrique  $g$  sur  $M$  est  $C^{l,\beta}$ -conformément compacte,  $l \geq 2$ ,  $\beta \in [0, 1)$ , si la métrique  $\bar{g} := \rho^2 g$  s'étend en une métrique  $C^{l,\beta}$  sur  $\overline{M}$ . Remarquons ici que nous imposons que (l'extension de)  $\bar{g}$  soit une métrique sur  $\overline{M}$ , autrement dit qu'elle soit non-dégénérée sur tous les points de  $\partial M$ .

Si  $\pi$  est un 2-plan de  $T_p M$  avec  $p \in M$  et  $X, Y \in \pi$  deux vecteurs orthonormés pour  $g$  ( $\bar{X} = \rho^{-1}X$ ,  $\bar{Y} = \rho^{-1}Y$  orthonormés pour  $\bar{g}$ ), les courbures sectionnelles  $\sec_\pi(g)$  de  $\pi$  pour  $g$  et  $\sec_\pi(\bar{g})$  sont reliées par

$$\sec_\pi(g) = \rho^2 \sec_\pi(\bar{g}) + \rho \left[ \overline{\text{Hess}}\rho(\bar{X}, \bar{X}) + \overline{\text{Hess}}\rho(\bar{Y}, \bar{Y}) \right] - |d\rho|_{\bar{g}}^2.$$

C'est une conséquence directe de la formule de transformation conforme de la courbure (voir par exemple [Gic09, Equation (1.1.3)] ou [Bes87, Théorème 1.159]). En particulier, cette formule montre qu'au voisinage de  $\partial M$ , on a

$$\sec_\pi(g) = -|d\rho|_{\bar{g}}^2 + O(\rho). \quad (2.2)$$

Autrement dit, la courbure sectionnelle de  $g$  tend vers une constante lorsqu'on s'approche d'un point de  $\partial M$ . Nous dirons donc qu'une métrique  $g$  est  $C^{l,\beta}$ -asymptotiquement hyperbolique si  $g$  est  $C^{l,\beta}$ -conformément compacte et si la courbure sectionnelle de  $g$  tend vers  $-1$  lorsqu'on s'approche de  $\partial M$ , c'est-à-dire si

$$|d\rho|_{\bar{g}}^2 \equiv 1 \quad \text{sur } \partial M.$$

On montre que si  $g$  est  $C^2$ -asymptotiquement hyperbolique,  $g$  est complète et si  $r$  désigne la distance à un point donné (ou plus généralement à un compact  $K$ ) de  $M$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$C^{-1}\rho \leq e^{-r} \leq C\rho.$$

L'asymptotique (2.2) s'écrit donc, de manière intrinsèque

$$\sec_\pi(g) = -1 + O(e^{-r}). \quad (2.3)$$

Il est à noter que si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux fonctions définissantes pour  $\partial M$ , il existe une fonction  $f > 0$  telle que

$$\rho_2 = f\rho_1.$$

Les deux métriques  $\bar{g}_1 = \rho_1^2 g$  et  $\bar{g}_2 = \rho_2^2 g$  sont donc conformes l'une à l'autre :  $\bar{g}_2 = f\bar{g}_1$ . En particulier, les métriques induites sur  $\partial M$  le sont également. C'est l'un des intérêts majeurs des variétés asymptotiquement hyperboliques : leur étude fournit de précieux renseignements sur la géométrie conforme de  $\partial M$ , c'est l'idée de départ des travaux de C. Feffermann et R. Graham [FG12] (et de tout leur développement). Nous renvoyons à [DGH08] pour une introduction à ce vaste sujet.

Cependant, les métriques asymptotiquement hyperboliques apparaissent aussi dans d'autres contextes, en particulier en relativité générale où elles modélisent :

- des hypersurfaces de Cauchy asymptotiquement hyperboloïdales dans des variétés asymptotiquement simples (autrement dit, des hypersurfaces de Cauchy pour lesquelles  $|K - g|_g \rightarrow 0$  à l'infini),
- des hypersurfaces de Cauchy asymptotiquement maximales ( $|K|_g \rightarrow 0$  à l'infini) dans des espaces-temps asymptotiquement anti-de Sitter (voir la section 2.4 pour la définition de l'espace d'anti-de Sitter).

Il est à remarquer, dans ces deux cas, que l'infini conforme correspond à un infini spatial (ou une partie de  $\mathcal{S}^+$  dans le cas d'une surface de Cauchy asymptotiquement hyperboloïdale, voir [Wal84] pour la définition de  $\mathcal{S}^+$ ) et qu'il n'est donc pas accessible à un observateur dans l'espace-temps. Ceci motive donc l'introduction d'une définition intrinsèque de variété asymptotiquement hyperbolique ne faisant intervenir que  $(M, g)$ . C'est l'objet de la section 2.2.

### 2.1.3 Espaces de fonctions

Afin de pouvoir énoncer les résultats précis concernant les solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques, nous devons définir des espaces de fonctions adaptés à la géométrie des variétés asymptotiquement hyperboliques. Les deux premières classes d'espaces (de Sobolev et de Hölder) sont décrits en détail dans l'article de J. Lee [Lee06, Chapitre 3]. Nous avons introduit la troisième classe avec A. Sakovich dans [15]. Cette classe est à mi-chemin entre les deux premières dans le sens où elle décrit des fonctions ayant une régularité locale de type Sobolev, mais un contrôle global de type Hölder.

Dans toute cette section, nous nous donnerons  $(M, g)$  une variété  $C^{l,\beta}$ -asymptotiquement hyperbolique avec  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l \geq 2$  et  $\beta \in [0, 1)$ .

**Définition 2.1.1.** Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq l$ ,  $p \in [1, \infty)$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ . Soit  $E$  un fibré géométrique sur  $M$ . On définit l'espace  $W_\delta^{k,p}(M, E)$  comme l'ensemble des sections  $u \in \Gamma(E)$  telles que

$$\|u\|_{W_\delta^{k,p}} := \sum_{i=0}^k \left( \int_M |\nabla^i u|^p \rho^{-p\delta} d\mu^g \right)^{1/p} < \infty.$$

C'est un espace de Banach.

Cette première famille d'espaces, bien qu'importante et simple à définir n'est cependant pas adaptée pour contrôler la décroissance des fonctions. Par exemple, une section  $u \in W_\delta^{k,p}(M, E)$  se comporte, moralement, à l'infini, en  $o(\rho^{\delta+n/p})$  (pourvu, du moins, que  $kp > n$  (pour que  $W_\delta^{k,p}(M, E) \subset L_{\text{loc}}^\infty(M, E)$ ). Cette estimation est cependant fautive (voir par exemple [Gic10b, Section 2.2]). Pour palier à cette difficulté, on introduit deux autres classes d'espaces.

Avant cela, nous devons introduire des cartes locales particulières sur  $M$  appelées *cartes de Möbius* dans [Lee06, Chapitre 2]. Choisissons tout d'abord un nombre fini de cartes  $(\Omega, \Phi)$ , avec  $\Phi = (\rho, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ , sur  $\bar{M}$  de sorte que leurs domaines de définition  $\Omega$  recouvrent  $\partial M$ . Complétons cet atlas en ajoutant un nombre fini de cartes dont les domaines de définition sont précompacts dans  $M$  (i.e. n'intersectent pas  $\partial M$ ). Soit  $B_r$  la boule hyperbolique centrée en  $(1, 0, \dots, 0)$  et de rayon  $r$  dans le modèle du demi-espace de  $\mathbb{H}^n$ . Si  $p_0 \in M$  est dans l'image réciproque d'une des cartes  $(\Omega, \Phi)$  que nous avons choisies,  $p_0 = \Phi^{-1}(\rho_0, \theta_0^1, \dots, \theta_0^{n-1})$ , nous définissons une carte de Möbius  $\Phi_{p_0}^r : \Phi_{p_0}^{-1}(B_r) \rightarrow B_r$  sur un voisinage de  $p_0$  par

$$\Phi_{p_0}(p) = \left( \frac{\rho(p)}{\rho_0}, \frac{\theta^1(p) - \theta_0^1}{\rho_0}, \dots, \frac{\theta^{n-1}(p) - \theta_0^{n-1}}{\rho_0} \right).$$

Nous pouvons maintenant introduire les deux dernières classes d'espaces.

**Définition 2.1.2. • Espaces de Sobolev locaux à poids :** Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq l$ ,  $p \in [1, \infty)$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ . L'espace de Sobolev local à poids  $X_\delta^{k,p}(M, E)$  est l'ensemble des sections  $u \in \Gamma(M, E)$  telles que  $u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(M, E)$  et telles que la norme

$$\|u\|_{X_\delta^{k,p}} = \sup_{p_0 \in M} \rho^{-\delta}(p_0) \left\| \left( (\Phi_{p_0}^1)^{-1} \right)^* u \right\|_{W^{k,p}}$$

est finie.

• **Espaces de Hölder à poids :** Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 0$ , et  $\alpha \in [0, 1)$  tels que  $k + \alpha \leq l + \beta$ , et  $\delta \in \mathbb{R}$ . L'espace de Hölder à poids  $C_\delta^{k,\alpha}(M, E)$  est l'ensemble des sections  $u \in \Gamma(M, E)$  telles que  $u \in C_{\text{loc}}^{k,\alpha}$  et telles que la norme

$$\|u\|_{C_\delta^{k,\alpha}} = \sup_{p_0 \in M} \rho^{-\delta}(p_0) \left\| \left( (\Phi_{p_0}^1)^{-1} \right)^* u \right\|_{C^{k,\alpha}}$$

est finie.

Les propriétés des espaces de Sobolev et de Hölder à poids sont décrites dans [Lee06, Chapitre 2]. Les espaces de Sobolev locaux à poids ont été introduits dans [15, Section 2]. Ils sont bien adaptés à l'étude des équations elliptiques non-linéaires sur les variétés asymptotiquement hyperboliques car ils permettent un contrôle asymptotique de la solution mais ne requièrent pas d'estimée a priori  $C^{0,\alpha}$ . Le théorème suivant est sans doute l'un des plus importants dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques sur une variété asymptotiquement hyperbolique :

**Théorème 2.1.3.** [Lee06, Théorème C] et [15, Théorème A.1] Soit  $(M, g)$  une variété  $C^{l,\beta}$ -asymptotiquement hyperbolique de dimension  $n \geq 2$ , avec  $l \geq 2$ , et  $0 \leq \beta < 1$ . Soit  $E \rightarrow M$  un fibré géométrique sur  $M$ . Supposons que  $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$  est un opérateur différentiel elliptique formellement autoadjoint d'ordre  $m$ ,  $0 < m \leq l$  et qu'il existe un compact  $K \subset M$  et une constante positive  $C$  telle que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|Pu\|_{L^2} \text{ pour tout } u \in C_c^\infty(M \setminus K, E). \quad (2.4)$$

Soit  $R$  le rayon indicial<sup>1</sup> de  $P$ .

- Si  $1 < p < \infty$  et  $m \leq k \leq l$  alors l'extension naturelle

$$P : W_\delta^{k,p}(M, E) \rightarrow W_\delta^{k-m,p}(M, E)$$

est Fredholm si et seulement si  $|\delta + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{2}| < R$ .

- Si  $k \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in (0, 1)$  satisfont  $m < k + \alpha \leq l + \beta$  alors l'extension naturelle

$$P : C_\delta^{k,\alpha}(M, E) \rightarrow C_\delta^{k-m,\alpha}(M, E)$$

est Fredholm si et seulement si  $|\delta - \frac{n-1}{2}| < R$ .

- Si  $1 < p < \infty$  et  $m \leq k \leq l$  alors l'extension naturelle

$$P : X_\delta^{k,p}(M, E) \rightarrow X_\delta^{k-m,p}(M, E)$$

est Fredholm si et seulement si  $|\delta - \frac{n-1}{2}| < R$ .

Pour chacune des extensions de  $P$  que nous venons d'introduire, si elle est de Fredholm, son indice est nul et son noyau est égal au noyau  $L^2$  de  $P$ .

## 2.2 Existence de compactification conforme

Nous allons voir ici que la notion de variété asymptotiquement hyperbolique s'éloigne finalement assez peu de la notion (définie en 2.2.4) de variété dont la courbure sectionnelle tend vers  $-1$  à l'infini dès lors qu'une hypothèse supplémentaire (interdisant les comportements de type cusp) est imposée :

**Définition 2.2.1.** Soit  $(M, g)$  une variété complète non compacte. Une partie compacte  $K$  de  $M$  est appelée *partie essentielle* si

1. le bord  $\partial K$  de  $K$  est lisse,

<sup>1</sup>Le rayon indicial s'obtient par un calcul décrit dans [Lee06]

2.  $\sec_g < 0$  sur  $M \setminus K$ ,
3.  $K$  est *totale*ment convexe, c'est-à-dire si pour toute géodésique  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  telle que  $\gamma(a), \gamma(b) \in K$ , on a  $\gamma([a, b]) \subset K$ .

Cette notion a été introduite dans [BM08]. Le résultat suivant [Gic09, Lemme 2.5.11] donne un critère pratique pour l'existence d'une partie essentielle :

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $(M, g)$  une variété complète non compacte. Alors  $(M, g)$  admet une partie essentielle si et seulement s'il existe une partie compacte  $K$  de  $M$  et une application  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  telles que*

1.  $\sec_g < 0$  sur  $M \setminus K$ ,
2.  $f$  est propre (l'image réciproque de tout compact de  $\mathbb{R}$  est un compact),
3.  $\text{Hess } f \geq 0$  sur  $M \setminus K$ .

Ce critère s'applique notamment si  $(M, g)$  est une variété asymptotiquement hyperbolique, au sens défini dans la section 2.1.2, en prenant  $f = 1/\rho$ , ce qui montre que les variétés asymptotiquement hyperboliques admettent des parties essentielles. De même si  $(M, g)$  est de Cartan-Hadamard (i.e. simplement connexe et à courbure sectionnelle négative, voir [Pet06]), le critère s'applique avec  $f = d_g(p_0, \cdot)^2$  avec  $p_0 \in M$  quelconque.

L'existence d'une partie essentielle  $K$  permet un contrôle strict sur la géométrie à l'extérieur de  $K$  :

**Proposition 2.2.3.** [BM08] *Soit  $(M, g)$  une variété complète non compacte admettant une partie essentielle  $K$ . Notons  $\Sigma = \partial M$  le bord de  $K$  et  $N_+\Sigma$  le fibré normal sortant à  $\Sigma$ . Alors l'application exponentielle*

$$\exp : N_+\Sigma \rightarrow M \setminus \overset{\circ}{K}$$

*est un difféomorphisme.*

Nous pouvons maintenant introduire le principal objet de cette section :

**Définition 2.2.4.** Soient  $(M, g)$  une variété complète non compacte et  $a > 0$ . On dit que  $(M, g)$  est *asymptotiquement localement hyperbolique* (ALH) d'ordre  $a0$  si

1.  $(M, g)$  admet une partie essentielle  $K$ ,
2.  $|\sec_g + 1| = O(e^{-ar})$ , avec  $r = d_g(\cdot, K)$ .

Une réponse affirmative à la question suivante permettrait de justifier pleinement la terminologie :

**Question.** Obtient-on une définition équivalente si l'existence d'une partie essentielle est remplacée par une minoration sur le rayon d'injectivité ?

Maintenant que nous avons défini une classe qui possède de bonnes propriétés, nous devons définir ce qui va jouer le rôle de  $\partial M$  dans la définition d'une variété asymptotiquement hyperbolique :

**Définition 2.2.5.** [EO73] Soit  $(M, g)$  une variété complète non compacte. On appelle *bord à l'infini*, l'ensemble des rayons géodésiques  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  non bornés quotienté par la relation d'équivalence

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ ssi } d_g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \text{ est bornée sur } [0, \infty).$$

Cette définition de bord à l'infini est tout à fait adaptée au cadre que nous venons de définir, c'est le contenu de la proposition suivante. De plus, si  $(M, g)$  est  $C^2$ -asymptotiquement hyperbolique, il est relativement aisé de voir que  $M(\infty)$  s'identifie à  $\partial M$ .

**Proposition 2.2.6.** [Bah09] *Si  $(M, g)$  est asymptotiquement localement hyperbolique et  $K$  une partie essentielle de  $M$ , l'application exponentielle définit une bijection naturelle entre  $\Sigma = \partial K$  et  $M(\infty)$  en associant à tout point  $p$  de  $\Sigma$  la classe d'équivalence du rayon géodésique normal sortant à  $\Sigma$  en  $p$ .*

Les propositions 2.2.3 et 2.2.6 permettent de construire une variété compacte à bord  $\overline{M}$  de la manière suivante. Définissons la fonction

$$\rho := e^{-d_g(K, \cdot)}.$$

La proposition 2.2.3 montre que l'application exponentielle définit un difféomorphisme

$$M \setminus \overset{\circ}{K} \simeq \Sigma \times [0, \infty)$$

où la composante radiale (dans  $[0, \infty)$ ) est la distance  $r := d_g(K, \cdot)$  à  $K$ . En utilisant la fonction  $\rho$  au lieu de  $r$ , on obtient un difféomorphisme  $M \setminus \hat{K} \simeq \Sigma \times (0, 1]$  qu'on peut prolonger en une bijection  $(M \setminus \hat{K}) \cup M(\infty) \simeq \Sigma \times [0, 1]$  où un point  $\hat{p} \in M(\infty)$  est identifié au point  $(p, 0) \in \Sigma \times [0, 1]$  avec  $p$  l'unique point de  $\Sigma$  dont le rayon émanant est dans la classe d'équivalence  $\hat{p}$  (Proposition 2.2.6). Ceci définit une structure de variété à bord sur

$$\overline{M} := M \cup M(\infty).$$

Posons maintenant  $\bar{g} := \rho^2 g$ . Deux questions se posent alors :

1. Quelle est la régularité de  $\bar{g}$  ?
2. Dans quelle mesure la structure de variété ainsi définie dépend du choix de la partie essentielle ?

Ce sont ces deux questions que nous avons étudiées dans les articles [1, 10]. Le résultat principal de [1] est le suivant :

**Théorème 2.2.7.** [1] *Soit  $(M, g)$  une variété asymptotiquement localement hyperbolique d'ordre  $a > 0$ . Alors, si, de plus,*

$$|\nabla_g \mathcal{R}|_g = O(e^{-ar}), \quad (\text{AH1})$$

on a

- Si  $0 < a < 1$ ,  $\overline{M}$  est munie d'une structure de  $C^{1,a}$ -variété indépendante de  $K$ , et  $\bar{g}$  s'étend en une métrique  $C^{0,a}$  sur  $\overline{M}$ .
- Si  $a = 1$ ,  $\overline{M}$  est munie d'une structure de  $C^{1,b}$ -variété indépendante de  $K$ , et  $\bar{g}$  s'étend en une métrique  $C^{0,b}$  sur  $\overline{M}$ , pour tout  $b \in (0, 1)$ .
- Si  $a > 1$ ,  $\overline{M}$  est munie d'une structure de  $C^{1,1}$ -variété indépendante de  $K$ , et  $\bar{g}$  s'étend en une métrique  $C^{0,1}$  sur  $\overline{M}$ .

Supposons de plus que

$$|\nabla_g^2 \mathcal{R}|_g = O(e^{-ar}), \quad (\text{AH2})$$

on a

- Si  $1 < a < 2$ ,  $\overline{M}$  est munie d'une structure de  $C^{2,a-1}$ -variété indépendante de  $K$ , et  $\bar{g}$  s'étend en une métrique  $C^{1,a-1}$  sur  $\overline{M}$ .
- Si  $a = 2$ ,  $\overline{M}$  est munie d'une structure de  $C^{2,b}$ -variété indépendante de  $K$ , et  $\bar{g}$  s'étend en une métrique  $C^{1,b}$  sur  $\overline{M}$ , pour tout  $b \in (0, 1)$ .
- Si  $a > 2$ ,  $\overline{M}$  est munie d'une structure de  $C^{2,1}$ -variété indépendante de  $K$ , et  $\bar{g}$  s'étend en une métrique  $C^{1,1}$  sur  $\overline{M}$ .

La preuve de ce résultat repose principalement sur l'étude du comportement asymptotique des solutions du système de Riccati suivant pour la métrique  $g$  et la seconde forme fondamentale des lignes de niveau de  $r = d_g(K, \cdot)$

$$\begin{cases} \partial_0 S^\alpha_\beta + S^\alpha_\gamma S^\gamma_\beta = -\mathcal{R}^\alpha_{0\beta 0}, \\ \partial_0 g_{\alpha\beta} = 2g_{\alpha\gamma} S^\gamma_\beta \end{cases}$$

où nous avons utilisé l'indice 0 pour désigner la coordonnée "radiale"  $r$  et les lettres grecques pour désigner les coordonnées de Fermi sur les lignes de niveau  $\Sigma_r$  de la fonction  $d_g(K, \cdot)$ . Ces coordonnées sont obtenues en choisissant une carte locale sur  $\Sigma$  et en étendant les coordonnées  $x^\mu$  ainsi définies en imposant  $g(dr, dx^\mu) = 0$ . Ce type de système de coordonnées est souvent très utile pour faire des calculs asymptotiques. Nous renvoyons le lecteur à [Pet06] pour plus d'information.

Il est cependant connu que les résultats de régularité optimaux de la métrique (sous des hypothèses sur le tenseur de Ricci en particulier) sont obtenus non pas dans des coordonnées géodésiques, comme nous venons de le faire, mais dans des systèmes de coordonnées harmoniques (voir par exemple [HH97]) et qu'un contrôle  $W^{k-2,p}$  sur le tenseur de Ricci implique un contrôle  $W^{k,p}$  sur la métrique (modulo un contrôle sur le rayon d'injectivité). L'objet de l'article [10] est de construire ces systèmes de coordonnées.

Nous devons donc modifier notre fonction  $\rho$  ainsi que notre définition des coordonnées tangentielles. La construction de la fonction  $\rho$  est relativement aisée :

**Lemme 2.2.8.** [10, Lemme 2.7] Soient  $(M, g)$  une variété asymptotiquement localement hyperbolique d'ordre  $a > 0$  et  $K \subset M$  une partie essentielle. Soit  $b \leq a$ ,  $0 < b < 2$ . Il existe une unique fonction  $t$  sur  $M$  telle que

$$\begin{cases} \Delta t = nt, \\ t = e^r + O(e^{(1-b)r}), \end{cases}$$

avec  $r := d_g(K, \cdot)$ .

Nous pouvons maintenant poser  $\rho := 1/t$ . Pour les coordonnées tangentielles, la construction est plus délicate :

**Lemme 2.2.9.** [10, Proposition 4.1] Sous les hypothèses du lemme précédent, pour tout  $\widehat{p}_0 \in M(\infty)$ , il existe un voisinage  $D \subset \overline{M}$  de  $\widehat{p}$  et des fonctions  $(y^1, \dots, y^{n-1})$  sur  $D$  telles que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,

$$\begin{cases} \Delta y^i = 0, \\ \langle dt, dy^i \rangle = O(\rho^a), \end{cases}$$

et telles que  $(\rho, y^1, \dots, y^{n-1})$  forment un système de coordonnées sur  $D$ .

Ceci nous permet, dans une large mesure de donner un résultat analogue au théorème 2.2.7 sans les hypothèses (AH1) et (AH2) sur les dérivées covariantes de la courbure :

**Théorème 2.2.10.** [10, Théorème 1.1] Soit  $(M, g)$  une variété asymptotiquement localement hyperbolique d'ordre  $a > 0$ . En utilisant les systèmes de coordonnées construits précédemment, on a que

1. Si  $0 < a < 1$ , il existe un atlas sur  $\overline{M}$  pour lequel la métrique  $\overline{g}$  est de classe  $C^{0,a}$ .
2. Si  $1 < a < 2$ , il existe un atlas sur  $\overline{M}$  pour lequel la métrique  $\overline{g}$  est de classe  $C^{1,\mu}$  pour tout  $\mu < a - 1$ .

La preuve de ce résultat (ainsi que du lemme 2.2.9) est assez technique. Nous renvoyons donc le lecteur curieux à l'article original [10]. Signalons que le cas  $a > 2$  est traité dans l'article [HQS12] : si l'on impose de plus l'hypothèse (AH1), il existe un atlas sur  $\overline{M}$  pour lequel la métrique  $\overline{g}$  est  $C^{2,a-2}$  (en supposant  $2 < a < 3$ ).

**Question.** Les résultats que nous présentons ici s'inscrivent naturellement dans le cadre de la géométrie conforme. Peut-on remplacer l'hypothèse de décroissance de la courbure sectionnelle par une hypothèse sur le tenseur de Weyl (ou le tenseur de Cotton en dimension 3) ?

## 2.3 Rigidité des variétés asymptotiquement hyperboliques à Ricci minoré

Nous allons maintenant nous intéresser à des résultats de rigidité des variétés asymptotiquement hyperboliques sous des hypothèses sur le tenseur de Ricci. Des résultats analogues pour la courbure scalaire seront prouvés dans la prochaine section. Historiquement, le premier résultat de rigidité de l'espace hyperbolique pour la courbure de Ricci est celui de Y. Shi et G. Tian [ST05]. Le résultat le plus général est celui de S. Dutta et M. Javaheri [DJ10] (voir aussi [LQS17] pour plus de détails sur certaines preuves) :

**Théorème 2.3.1.** Soit  $(M, g)$  une variété  $C^3$ -asymptotiquement hyperbolique de dimension  $n \geq 3$ . Alors, si

1. L'infini conforme de  $(M, g)$  est la sphère ronde,
2.  $\text{Ric} \geq -(n-1)g$ ,
3.  $\text{Scal} + n(n-1) = o(\rho^2)$ ,

$(M, g)$  est isométrique à l'espace hyperbolique.

Dans l'article [12] en collaboration avec D. Ji et Y. Shi, nous avons démontré un résultat dans le même esprit (voir les corollaires 2.3.3 et 2.3.4) :

**Théorème 2.3.2.** [12, Théorème 1.2] Soit  $(M, g)$  une variété complète non-compacte de dimension  $n \geq 7$ . Supposons que

1.  $(M, g)$  admet une partie essentielle  $K$ ,

2.  $(M, g)$  est Einstein :  $\text{Ric}_g = -(n-1)g$ ,
3. la courbure de Weyl  $W$  de  $g$  satisfait  $\int_M |W|^p d\mu^g < \infty$ , avec  $p \in [1, \frac{n}{2}]^2$ .

Alors  $\text{sec}_g + 1 = O(e^{-nr})$ , avec  $r := d_g(K, \cdot)$ .

Avant de commenter les hypothèses de ce théorème, donnons-en deux applications :

**Corollaire 2.3.3.** *Sous les hypothèses du théorème 2.3.2, si  $(M, g)$  est simplement connexe à l'infini, alors  $(M, g)$  est isométrique à l'espace hyperbolique.*

**Corollaire 2.3.4.** *Soit  $(M, g, V)$  une variété statique de dimension  $n \geq 6$ , c'est-à-dire telle que la métrique  $\gamma = -V^2 dt^2 + g$  soit solution des équations d'Einstein*

$$\text{Ric}_{\mu\nu}^\gamma - \frac{\text{Scal}^\gamma}{2} \gamma_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

avec  $\Lambda = -\frac{n(n-1)}{2}$ . Supposons que  $(M, g)$  contienne une partie essentielle  $K$ , que  $V$  est une application propre et que

$$\int_M V |\mathcal{R} + \mathcal{K}|^p d\mu^g < \infty,$$

où on a noté  $\mathcal{K}$  le "tenseur de courbure constante +1" :  $\mathcal{K}_{ijkl} = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}$ . Alors  $(M \times \mathbb{R}, \gamma)$  est isométrique à l'espace d'anti-de Sitter, c'est-à-dire que  $g$  est la métrique hyperbolique et  $V$  est une fonction lapse (voir la définition 2.4.19).

La preuve des deux corollaires consiste à vérifier (pour 2.3.4) que les hypothèses du théorème 2.3.2 sont satisfaites puis à utiliser les théorèmes de la section précédente pour voir que  $(M, g)$  est conformément compacte et finalement appliquer ensuite le résultat idoine de rigidité ([HQS12, Théorème 5.1] pour le corollaire 2.3.3 et [Wan05] pour 2.3.4).

La preuve du théorème 2.3.2 est basée sur des estimées  $L^2$ -asymptotique de type Poincaré sur le tenseur de Weyl pour prouver que  $W \in W_n^{2,2}$  puis sur l'utilisation d'un principe du maximum pour  $|W|$ . En effet, le tenseur de Weyl d'une variété d'Einstein satisfait l'équation

$$\Delta W_{ijkl} = -2(n-1)W_{ijkl} - 2\tilde{Q}_{ijkl}, \quad (2.5)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{abcd} &= \tilde{B}_{abcd} - \tilde{B}_{bacd} + \tilde{B}_{acbd} - \tilde{B}_{bcad}, \\ \tilde{B}_{abcd} &= W^i{}_a{}^j{}_b W_{icjd}, \end{aligned}$$

un terme quadratique en  $W$  (voir par exemple [1], cette équation dérive du calcul du laplacien du tenseur de Riemann, voir [CLN06]). C'est l'utilisation du principe du maximum pour  $|W|$  qui conduit à un résultat non optimal (on comparera par exemple la méthode de [GL91] basée sur cette idée et celle de [Lee06] basée sur la construction d'une paramétrix) et fait que ce résultat, qui devrait être vrai en toute dimension  $n \geq 5$  n'est démontré que pour  $n \geq 7$ .

## 2.4 Masse des variétés asymptotiquement hyperboliques

Dans toute cette section, nous allons adopter une notion plus restrictive de variété asymptotiquement hyperbolique et ne regarder que le cas où l'infini conforme est la sphère ronde. Cette définition est plus proche de la définition d'une variété asymptotiquement euclidienne. Les notations que nous utilisons ici sont celles introduites dans la section 2.1.1. Dans toute cette partie, nous ne considérerons que le modèle de la boule conforme de l'espace hyperbolique.

**Définition 2.4.1.** Soit  $(M, g)$  une variété complète non compacte. On dit que  $(M, g)$  est *fortement asymptotiquement hyperbolique* d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$  s'il existe une partie compacte  $K \subset M$  et un difféomorphisme

$$\varphi : M \setminus K \rightarrow B_1(0) \setminus \overline{B}_{1-\varepsilon}(0),$$

$\varepsilon \in (0, 1)$ , tel que  $\bar{g} := \rho^2 \varphi_* g$  s'étend en une métrique lisse sur  $\overline{B}_1(0) \setminus \overline{B}_{1-\varepsilon}(0)$  avec

$$\bar{g} = \delta + O(\rho^k).$$

Le difféomorphisme  $\varphi$  est appelé *carte asymptotique*.

L'objectif de cette section est de généraliser la notion de masse usuelle d'une variété fortement asymptotiquement hyperbolique telle qu'elle est définie dans [Wan01, CH03] (voir également [Her05]). Nous reviendrons plus longuement sur cette masse dans la section 2.4.3 car c'est elle qui est la plus intéressante des points de vue géométrique et physique.

<sup>2</sup>Remarquons ici que le résultat dans le cas  $p = \frac{n}{2}$  n'apparaît pas dans l'article car postérieur, la preuve n'est pas encore publiée.

### 2.4.1 Isométries asymptotiques

Nous allons définir des masses pour les variétés fortement asymptotiquement hyperboliques et étudier quelques propriétés de la masse usuelle. L'une des propriétés fondamentales de la masse est qu'elle se transforme bien sous les changements de carte à l'infini  $\varphi$ . C'est la propriété de covariance que nous allons décrire.

Nous allons uniquement nous intéresser ici à la géométrie asymptotique des variétés fortement asymptotiquement hyperboliques. Pour cela, nous n'allons plus considérer de variétés, mais plutôt regarder les métriques au travers des cartes à l'infini. Introduisons quelques définitions :

**Définition 2.4.2.** On appelle *voisinage de l'infini* toute partie  $V \subset \mathbb{H}^n$  telle que  $\mathbb{H}^n \setminus V$  est un compact de  $\mathbb{H}^n$ . On note  $\mathcal{N}_\infty$  l'ensemble des voisinages de l'infini.

**Définition 2.4.3.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On définit l'ensemble

$$G_k^0 := \{(U, g), U \in \mathcal{N}_\infty, g \text{ métrique sur } U \text{ telle que } \bar{g} := \rho^2 g \in C^\infty(U \cup S_1(0)) \text{ avec } |\bar{g} - \delta|_\delta = O(\rho^k)\}.$$

$G_k^0$  est muni de la relation d'équivalence suivante :

$$(U_1, g_1) \sim (U_2, g_2) \text{ si et seulement s'il existe } U_3 \in \mathcal{N}_\infty, U_3 \subset U_1 \cap U_2 \text{ tel que } g_1 \equiv g_2 \text{ sur } U_3.$$

On note  $G_k = G_k^0 / \sim$  l'ensemble des classes d'équivalence. Les éléments de  $G_k$  sont appelés *germes de métriques asymptotiquement hyperboliques*.

Il est à noter que cette définition est un abus par rapport à la définition usuelle des germes (voir par exemple [Bre97]). Nous allons maintenant définir une notion qui correspond au changement de carte asymptotique dans la définition 2.4.1 :

**Définition 2.4.4.** • On appelle *difféomorphisme asymptotique* toute paire  $(U, \varphi)$ , avec  $U \in \mathcal{N}_\infty$  et  $\varphi$  difféomorphisme de  $U$  sur son image, modulo la relation d'équivalence

$$(U_1, \varphi_1) \sim (U_2, \varphi_2) \text{ si et seulement s'il existe } U_3 \in \mathcal{N}_\infty, U_3 \subset U_1 \cap U_2, \text{ tel que } \varphi_1 \equiv \varphi_2 \text{ sur } U_3.$$

• Soit  $g \in G_k$ . On définit

$$I^k(g) = \{\varphi \text{ difféomorphisme asymptotique tel que } \varphi_* g \in G_k\}.$$

Les éléments de  $I^k(g)$  sont appelés *isométries asymptotiques* de  $g$ .

• Nous définissons finalement

$$I_0^{k+1} = \{\varphi \text{ difféomorphisme asymptotique tel que } |\varphi(x) - x|_\delta = O(\rho^{k+1})\}.$$

Les éléments de  $I_0^{k+1}$  sont appelés *difféomorphismes asymptotiques à l'identité*.

Le premier théorème que nous énonçons ici est une réécriture de résultats antérieurs de P. Chruściel et G. Nagy [CN01] puis de P. Chruściel et M. Herzlich [CH03] (voir également [Her05]) :

**Théorème 2.4.5.** [3, Théorème 2.11]

- L'ensemble  $I^k(g)$  ne dépend pas du choix de  $g \in G_k$  et il est muni d'une structure de groupe pour la composition.
- L'ensemble  $I_0^{k+1}$  est un sous-groupe distingué de  $I^k(g)$ .
- On a une suite exacte courte scindée

$$1 \longrightarrow I_0^{k+1} \xrightarrow{i} I^k(g) \xrightarrow{\pi} O_\dagger(n, 1) \longrightarrow 1.$$

La preuve de ce résultat est basée sur la preuve du théorème 2.2.7. L'idée étant de montrer qu'un élément  $\varphi$  de  $I^k(g)$  s'étend de manière régulière à la sphère  $S_1(0)$  où il définit une isométrie conforme, i.e. un élément de  $O_\dagger(n, 1)$ . C'est cette isométrie qui donne  $\pi(\varphi)$ .

Un point crucial de la preuve du théorème 2.4.5 est contenu dans la proposition 2.4.7 suivante. Définissons avant une classe d'éléments de  $G_k$  qui vont jouer un rôle important par la suite :



**Définition 2.4.6.** Soit  $g \in G_k$ . On dit que  $g$  est *transverse* si  $g$  satisfait

$$g_{ij}x^j = b_{ij}x^j,$$

autrement dit si  $g(\delta^\nabla|x|^2, \cdot) = b(\delta^\nabla|x|^2, \cdot)$  avec  $\delta^\nabla$  le gradient pour la métrique euclidienne. On note  $G_k^T$  l'ensemble des éléments transverses de  $G_k$ .

Cette condition est similaire au choix d'une fonction définissante géodésique qui apparaît naturellement dans l'étude des variétés asymptotiquement hyperboliques (voir par exemple [FG12]). L'intérêt de cette classe de métriques est qu'elle est transverse à l'action de  $I_0^{k+1}$  :

**Proposition 2.4.7.** [3, Proposition 2.7] *Etant donné  $g \in G_k$ , il existe un unique  $\varphi \in I_0^{k+1}$  tel que  $\varphi_*g$  soit transverse.  $\varphi$  est appelé difféomorphisme de redressement de  $g$ .*

La preuve de cette proposition requiert l'utilisation de techniques analogues à celles utilisées pour montrer l'existence d'une fonction définissante géodésique (voir par exemple [Lee95]) et présente donc le problème de perte de régularité que nous avons mentionné dans la section 2.2. C'est pour cela que nous avons dû nous limiter aux variétés  $C^\infty$ -conformément compactes.

Une conséquence de la proposition 2.4.7 est la suivante :

**Proposition 2.4.8.** [3, Proposition 2.12] *L'action de  $I^k(g)$  sur  $G_k$  induit une action de  $O_\uparrow(n, 1)$  sur  $G_k^T$ .*

Remarquons deux points importants ici :

1. L'action de  $O_\uparrow(n, 1)$  sur  $G_k^T$  n'est pas affine.
2. Il n'existe pas de topologie naturelle sur  $G_k^T$  ni sur  $G_k$ , c'est un fait général pour les limites inductives (voir par exemple [Tay95]).

Pour remédier à ces problèmes, nous devons ne pas nous concentrer sur les germes de métriques asymptotiquement hyperboliques mais sur les jets :

**Définition 2.4.9.** Etant donné  $l \geq k$ , on définit sur  $G_k^T$  la relation d'équivalence  $\sim_l$  suivante :

$$g_1 \sim_l g_2 \Leftrightarrow |\bar{g}_1 - \bar{g}_2|_\delta = O(\rho^{l+1}).$$

On note  $T_l^k = G_k^T / \sim_l$  l'ensemble des classes d'équivalence.

L'ensemble  $T_l^k$  est à comprendre comme l'ensemble des  $l+1-k$  premiers termes non triviaux dans le développement asymptotique des métriques asymptotiquement hyperboliques :

$$g = \rho^{-2} (\delta + g_{(k)}\rho^k + g_{(k+1)}\rho^{k+1} + \dots + g_{(l)}\rho^l + O(\rho^{l+1})).$$

Puisque nous ne regardons que les éléments de  $T_k$ , les tenseurs  $g_{(i)}$  sont des 2-tenseurs symétriques sur  $S_1(0)$  et s'identifie donc au produit cartésien de  $l+1-k$  fois  $\text{Sym}_2(S_1(0))$ , d'où la proposition suivante :

**Proposition 2.4.10.** [3, Théorème 2.18] *L'ensemble  $T_l^k$  est muni d'une structure d'espace de Fréchet et d'une action naturelle de  $O_\uparrow(n, 1)$  (projetée de celle de la proposition 2.4.8). Cette action est continue (au sens de la topologie forte d'opérateur<sup>3</sup> et linéaire tant que  $l \leq 2k$ .*

Nous verrons par la suite que, dans les masses que nous allons définir, seul le premier terme non trivial dans le développement asymptotique de  $g \in G_k$  importe. Nous l'appellerons le *tenseur de mass aspect* par extension de la définition classique (voir [Wan01]). Nous le noterons systématiquement  $m$ .

**Proposition 2.4.11.** [3, Proposition 2.16] *Soient  $g \in G_k$  un germe de métrique asymptotiquement hyperbolique et  $\tilde{g} = \varphi_*g$  la métrique transversalisée (voir la proposition 2.4.7), alors si  $m$  est le premier terme non-trivial dans le développement asymptotique de  $g$ ,*

$$g = \rho^{-2} (\delta + \rho^k m + O(\rho^{k+1})),$$

le premier terme non trivial de  $\tilde{g}$  dans son développement asymptotique est  $\tilde{m}$  avec

$$\tilde{m}_{ij} = m_{ij} - m_{ia}x^a x_j - m_{aj}x^a x_i + m_{ab} \frac{x^a x^b}{k} [(k-1)x_i x_j + \delta_{ij}].$$

<sup>3</sup>voir [Tay95, Ham82] : si  $F$  est un espace de Fréchet, l'espace  $\mathcal{L}(F)$  n'est en général pas muni d'une structure d'espace de Fréchet.

## 2.4.2 Covariants de type masse

Nous avons maintenant un cadre pour définir les covariants de type masse :

**Définition 2.4.12.** Soit  $V$  une représentation de dimension finie du groupe  $O_{\uparrow}(n, 1)$ . Un *covariant de type masse* pour l'ensemble des métriques fortement asymptotiquement hyperboliques d'ordre  $k$  est une application  $\Phi : G_k \rightarrow V$  telle que :

1.  $\Phi(b) = 0$ .
2. Pour tout  $g \in G_k$  et tout  $\Psi \in I^k(g)$ , on a

$$\Phi(\Psi \cdot g) = \pi(\Psi) \cdot \Phi(g).$$

Autrement dit  $\Phi$  entrelace l'action de  $I^k(g)$  sur  $G_k$  et celle de  $O_{\uparrow}(n, 1)$  sur  $V$ .

3. Il existe  $l \geq k$  telle que  $\Phi$  se factorise via  $T_k^l$ ,

$$\begin{array}{ccc} G_k & \xrightarrow{\Phi} & V \\ & \searrow \tilde{\Pi}_k^l & \nearrow \varphi \\ & T_k^l & \end{array}$$

où  $\tilde{\Pi}_k^l$  est la "projection" de  $G_k$  sur  $T_k^l$ .

4. L'application affine  $\varphi$  est continue et entrelace l'action de  $O_{\uparrow}(n, 1)$ .

### Classification

Avant d'énoncer le résultat principal de l'article [3], nous devons introduire deux notations :

**Définition 2.4.13.** [3] Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

1. Notons  $\mathcal{H}_p$  l'ensemble des polynômes homogènes de degré  $p$  et harmoniques sur  $\mathbb{R}^{n,1}$  :

$$\mathcal{H}_p := \{P \in \mathbb{R}[X^0, X^1, \dots, X^n], P \text{ homogène de degré } p, \square P = 0\}.$$

2. Notons ensuite  $\mathcal{W}_p$  l'ensemble des tenseurs de Weyl polynomiaux de degré  $p$  sur  $\mathbb{R}^{n,1}$ , autrement dit l'ensemble des 4-tenseurs  $W_{\mu\nu\alpha\beta}$  dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré  $p$  sur  $\mathbb{R}^{n,1}$  et satisfaisant les identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_{\nu\mu\alpha\beta} = -W_{\mu\nu\alpha\beta} & \text{(antisymétrie du premier bloc),} \\ W_{\mu\nu\beta\alpha} = -W_{\mu\nu\alpha\beta} & \text{(antisymétrie du second bloc),} \\ W_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\mu\nu\alpha\beta} & \text{(symétrie par l'échange des deux blocs),} \\ W_{\mu\nu\alpha\beta} + W_{\mu\alpha\beta\nu} + W_{\mu\beta\nu\alpha} = 0 & \text{(première identité de Bianchi),} \\ \partial_\alpha W_{\mu\nu\beta\gamma} + \partial_\beta W_{\mu\nu\gamma\alpha} + \partial_\gamma W_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 & \text{(seconde identité de Bianchi).} \end{array} \right.$$

Chacune des représentations  $\mathcal{H}_p$  et  $\mathcal{W}_p$  est réelle et irréductible pour l'action de  $O_{\uparrow}(n, 1)$ . Cependant, lorsque  $n = 3$ , les représentations  $\mathcal{W}_p$  se décomposent en deux représentations irréductibles pour l'action de  $SO_{\uparrow}(n, 1)$ , c'est la généralisation du fait, bien connu, que l'ensemble des tenseurs de Weyl se décompose en deux représentations (complexes) irréductibles de  $SO(3, 1)$  par l'action de l'étoile de Hodge (voir par exemple [Bes87]).

L'espace  $\mathcal{H}_0$  n'est constitué que des fonctions constantes, alors que  $\mathcal{H}_1$  contient les fonctions coordonnées sur  $\mathbb{R}^{n,1}$  (la condition  $\square P = 0$  étant trivialement satisfaite si  $P$  est un polynôme de degré 1). Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de [3] :

**Théorème 2.4.14.** [3, Théorèmes 4.2, 4.4 et 4.5, Proposition 5.1] Si  $\Phi : G_k \rightarrow V$  est un covariant de type masse (au sens de la définition 2.4.12) pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\Phi$  ne dépend que du tenseur de mass aspect (i.e. se factorise via  $T_k^k$ ) et appartient à l'une des deux familles ci-dessous (à un coefficient de proportionnalité près) :

- **MASSES CONFORMES** :  $k \geq n - 1$ ,  $V = \mathcal{H}_{k-n+1}$  et

$$\Phi_k^c : T_k^k \rightarrow \mathcal{H}_{k-n+1}^*$$

est donné par

$$\Phi_k^c(g)(P) = \int_{S_1(0)} \text{tr}^\sigma(m) P(1, x^1, \dots, x^n) d\mu^\sigma$$

où  $\sigma$  est la métrique ronde sur  $S_1(0)$  et  $x^1, \dots, x^n$  sont les fonctions coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$  restreintes à  $S_1(0)$ .

- **MASSES DE WEYL** :  $k \geq n + 1$ ,  $V = \mathcal{W}_{k-n-1}$  et

$$\Phi_k^W : T_k^k \rightarrow \mathcal{W}_{k-n-1}^*$$

est donné par

$$\Phi_k^W(g)(W) = \int_{S_1(0)} \langle m, W(e_+, \cdot, e_+, \cdot) \rangle_\sigma d\mu^\sigma$$

où  $e_+ := (1, x^1, \dots, x^n)$  est le vecteur de genre lumière sortant à  $S_1(0)$  et  $W$  est évalué au point  $(1, x^1, \dots, x^n)$ .

Nous ne donnerons pas d'éléments sur la preuve de ce résultat qui utilise une bonne dose d'algèbre, nous nous contenterons de quelques remarques. Les dimensions des représentations  $\mathcal{H}_p$  et  $\mathcal{W}_p$  sont données par

$$\dim \mathcal{H}_p = \binom{p+n-2}{p} \frac{2p+n-1}{n-1}, \quad \dim \mathcal{W}_p = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n-1} \binom{p+n}{p+3} \frac{(p+1)(p+n+2)(2p+n+3)}{p+n}$$

et croissent donc polynomialement en  $p$  et  $n$ . Il est également possible de calculer la signature de la forme quadratique invariante sur chacune de ces représentations :

$$n_+(\mathcal{H}_p) = \binom{p+n-1}{n-1}, \quad n_-(\mathcal{H}_p) = \binom{p+n-2}{n-1},$$

$$n_+(\mathcal{W}_p) = \frac{1}{2} (n^2 + (n+1)p + 3) \frac{(p+1)(p+n+2)}{(n-1)(p+n)} \binom{p+n}{p+3}, \quad n_-(\mathcal{W}_p) = \frac{1}{2} (np + 4n + p) \frac{(p+1)(p+n+2)}{(n-1)(p+n)} \binom{p+n}{p+3},$$

ceci montre que ces représentations ont une structure beaucoup plus compliquée que celle de  $\mathbb{R}^{n,1}$ .

### Covariants et invariants

Il serait intéressant d'avoir plus d'information concernant ces représentations, en particulier de pouvoir calculer explicitement l'anneau des invariants de ces représentations :

**Définition 2.4.15.** Soit  $V$  une représentation de  $O_\uparrow(n, 1)$ . On appelle *anneau des invariants* de  $V$  le sous anneau  $\text{Inv}(V)$  de  $\mathbb{C}[V]$  formé par les polynômes invariants sous l'action de  $O_\uparrow(n, 1)$  i.e.

$$\text{Inv}(V) := \{P \in \mathbb{C}[V] \mid \forall (h, v) \in O_\uparrow(n, 1) \times V, P(h^{-1} \cdot v) = P(v)\}.$$

On appelle *série de Hilbert* de  $\text{Inv}(V)$  la série

$$H_V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$$

avec  $d_k = \dim(\text{Inv}(V) \cap \mathbb{C}_k[V])$  la dimension de l'ensemble des polynômes invariants homogènes de degré  $k$ .

L'intérêt de l'anneau des invariants serait de pouvoir passer de covariants (sous l'action de  $O_\uparrow(n, 1)$ ) à de vrais invariants et donc éliminer totalement la dépendance vis-à-vis de la carte à l'infini.

Des méthodes générales existent pour trouver  $\text{Inv}(V)$  (basées sur des méthodes de bases de Gröbner, voir par exemple [DK15]) mais sont inopérantes pour les représentations qui nous intéressent car leur dimension est trop importante. Le calcul de la série de Hilbert (qui se ramène à calculer le coefficient constant dans le développement de Laurent d'une fraction rationnelle en  $l$  variables,  $l = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  étant le rang de  $O_\uparrow(n, 1)$ , voir [DK15]) s'avère déjà être un exercice difficile de calcul formel même pour  $n = 3$ . Signalons cependant 3 cas particuliers :

1.  $\mathcal{H}_0$  est une représentation de dimension 1, donc triviale.

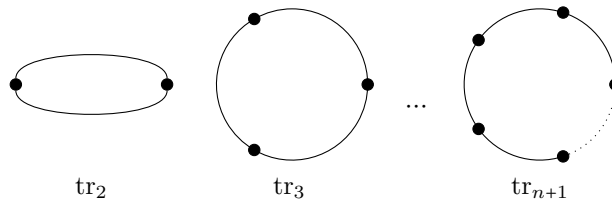


FIGURE 2.1 – Représentation graphique des invariants de la proposition 2.4.16.

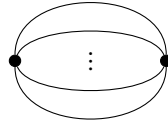


FIGURE 2.2 – Représentation de la forme quadratique invariante.

2.  $\mathcal{H}_1$  s'identifie à l'espace de Minkowski (c'est son dual), l'anneau des invariants est engendré par la forme quadratique (duale) de Minkowski.
3.  $\mathcal{H}_2$  correspond à l'ensemble des formes quadratiques (de trace nulle) sur  $\mathbb{R}^{n,1}$ . L'ensemble des formes quadratiques définies positives forme une partie Zariski-dense de  $\mathcal{H}_2$  et il existe, pour chacune de ces formes quadratiques, un représentant de leur orbite qui est diagonal. On démontre alors le résultat suivant :

**Proposition 2.4.16.** *L'anneau des invariants de  $\mathcal{H}_2$  est  $\mathbb{C}[\text{tr}_2, \dots, \text{tr}_{n+1}]$  où  $\text{tr}_k : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  est défini par*

$$\text{tr}_k(P) = \text{tr } \ell(P)^k$$

où  $\ell(P)$  est l'application linéaire définie par

$$\eta(x, \ell(P)(y)) = p(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{n,1}$$

avec  $p$  la forme bilinéaire symétrique associée à  $P$ .

La proposition 2.4.16 suggère la généralisation suivante. Restreignons-nous aux représentations  $\mathcal{H}_p$ . Les éléments de  $\mathcal{H}_p$  peuvent être vus comme des  $p$ -tenseurs symétriques de trace nulle. Nous pouvons engendrer des invariants de  $\mathcal{H}_p$  considérant les contractions totales d'un certain nombre  $q$  de copies d'un élément de  $\mathcal{H}_p$ . Nous pouvons coder une telle contraction par un multigraphe régulier à  $q$  sommets et de valence  $p$ <sup>4</sup>. Par exemple, les invariants de la proposition 2.4.16 sont donnés par les graphes de la figure 2.1. La forme quadratique invariante est représentée par la figure 2.2.

L'énumération des graphes réguliers est un problème résolu algorithmiquement de manière satisfaisante (voir par exemple [Mer99]). Nous pouvons définir l'algèbre abélienne libre  $\mathcal{G}_p$  sur les multigraphes  $p$ -réguliers connexes. Nous venons de voir qu'il existe une application

$$\Psi_p : \mathcal{G}_p \rightarrow \text{Inv}(\mathcal{H}_p).$$

- Question.** 1. Est-ce que l'application  $\Psi_p$  est surjective ? Si elle l'est, peut-on décrire son noyau (autrement dit, généraliser, au moins dans des cas simples, les formules de Newton voir par exemple [Pro07]) ?
2. Est-ce qu'une description similaire existe pour les représentations  $\mathcal{W}_p$  ?

### Définition dans un cadre plus général

Le point de vue que nous avons adopté jusqu'à présent sur les variétés fortement asymptotiquement hyperboliques imitait la définition de X. Wang [Wan01]. Il existe une autre manière de définir la masse d'une variété asymptotiquement hyperbolique qui est l'analogue de la définition usuelle de la masse d'une variété asymptotiquement euclidienne (voir par exemple [Bar86]). Elle a été donnée par P. Chruściel et M. Herzlich dans [CH03]. Le cadre général que nous présentons ici est dû à B. Michel [Mic11].

<sup>4</sup>c'est ici qu'intervient la restriction à  $\mathcal{H}_p$ , les indices des éléments de  $\mathcal{H}_p$  sont permutés par l'action du groupe symétrique et sont donc indiscernables.

**Définition 2.4.17.** Soit  $\mathcal{M} = \Gamma(\text{Sym}_2^+(TM))$  l'ensemble des métriques riemanniennes sur une variété  $M$ . On appelle *opérateur de courbure* sur  $\mathcal{M}$  tout opérateur

$$\mathcal{C} : \mathcal{M} \rightarrow \Gamma(E)$$

où  $E$  est un fibré naturel sur  $M$  tel que

1. (LOCALITÉ) Il existe  $r \geq 0$  tel que  $\mathcal{C}$  se factorise en une application  $\bar{\mathcal{C}}$  régulière préservant la base entre le fibré des  $r$ -jets de métriques et le fibré  $E$

$$\bar{\mathcal{C}} : J^r(M, \text{Sym}_2^+(TM)) \rightarrow E$$

$\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \circ J_r$  avec  $J_r : \mathcal{M} \rightarrow J^r(M, \text{Sym}_2^+(TM))$  l'application qui, à une métrique, associe son  $r$ -jet en chaque point de  $M$ . (on consultera par exemple [KMS93] pour une introduction aux jets).

2. (COVARIANCE) Si  $\varphi : M \rightarrow M$  est un difféomorphisme, on a, pour tout  $g \in \mathcal{M}$ ,

$$\varphi_* \mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(\varphi_* g).$$

3. (NORMALISATION)  $\mathcal{C}(b) \equiv 0$ .

Cette définition inclut bien évidemment les opérateurs de courbure classiques (tenseur de courbure de Riemann, de Ricci...) pour peu que ceux-ci soient renormalisés pour satisfaire  $\mathcal{C}(b) \equiv 0$ . Pour la propriété de covariance, on pourra éventuellement se limiter au cas des difféomorphismes isotopes à l'identité pour inclure, par exemple, le tenseur de Cotton-York.

Plaçons-nous maintenant sur un voisinage de l'infini, par exemple  $V = B_1(0) \setminus B_{1-\varepsilon}(0)$ . Soit  $DC_b$  le linéarisé de  $\mathcal{C}$  en  $b \in \mathcal{M}$ . Notons  $DC_b^\dagger$  son adjoint  $L^2$ -formel, c'est-à-dire tel que pour toute section  $h \in \Gamma(\text{Sym}_2(V))$  et toute section à support compact  $v \in \Gamma_c(E)$ , on a

$$\int_V \langle DC_b^\dagger(v), h \rangle_b d\mu^b = \int_V \langle v, DC_b(h) \rangle_b d\mu^b,$$

autrement dit

$$\langle v, DC_b(h) \rangle_b = \text{div}_b \mathbb{U}(v, h) + \langle DC_b^\dagger(v), h \rangle_b \quad (2.6)$$

pour un certain champ de vecteur  $\mathbb{U}(v, h)$  dépendant de manière bilinéaire en  $v$  et  $h$ . Notons  $\mathcal{L}_C = \ker DC_b^\dagger$ , remarquons que le groupe  $O_\dagger(n, 1)$  agit de manière naturelle sur cet espace par push forward. Si  $v \in \mathcal{L}_C$ , la formule (2.6) devient

$$\langle v, DC_b(h) \rangle_b = \text{div}_b \mathbb{U}(v, h) \quad (2.7)$$

Choisissons maintenant  $h = e := g - b$  pour  $g$  une certaine métrique (asymptotiquement hyperbolique dans un sens à préciser par la suite). On a

$$\langle v, \mathcal{C}(g) \rangle_b = \langle v, DC_b(e) \rangle_b + \langle v, \mathcal{Q}(e) \rangle_b = \text{div}_b \mathbb{U}(v, e) + \langle v, \mathcal{Q}(e) \rangle_b \quad (2.8)$$

avec  $\mathcal{Q}(e) = \mathcal{C}(g) - DC_b(e)$  un certain objet dépendant de manière au moins quadratique en  $e$  et ses dérivées. En supposant que  $\langle v, \mathcal{C}(g) \rangle_b, \langle v, \mathcal{Q}(e) \rangle_b \in L^1$ , on peut définir alors une *charge totale*<sup>5</sup> :

$$m_{\mathcal{C}}(v, g) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{S_r} b(\mathbb{U}(v, e), \nu) d\mu^b$$

où  $S_r$  est la sphère de rayon  $r$  dans  $B_1(0)$  (centrée en un point quelconque) et  $\nu$  son vecteur unitaire normal sortant pour la métrique hyperbolique  $b$ . Supposons que, pour tout  $g \in G_k$ , les charges totales sont bien définies pour tout  $v \in \mathcal{L}_C$ . On a alors le résultat suivant ([3, Lemme 6.3]) : pour tout  $g \in G_k$  et tout  $\varphi \in I^k(g)$ ,

$$m_{\mathcal{C}}(v, \varphi_* g) = m_{\mathcal{C}}(\pi(\varphi)^* v, g).$$

En particulier, si on choisit  $V$  une sous-représentation de  $O_\dagger(n, 1)$  de dimension finie dans  $\mathcal{L}_C$ , l'application  $\Phi : G_k \rightarrow V^*$  définie par  $g \mapsto m_{\mathcal{C}}(\cdot, g)$  est un des covariants de type masse que nous avons classifiés précédemment.

L'intérêt principal de cette nouvelle définition de charge totale est qu'elle requiert des hypothèses beaucoup plus faibles sur la métrique  $g$  que l'appartenance à un  $G_k$  :

<sup>5</sup>remarquons que  $g$  n'est défini a priori qu'en dehors d'un compact de  $\mathbb{H}^n$ , l'hypothèse faite ici caractérise donc le comportement asymptotique de ces deux fonctions.

**Définition 2.4.18.** On dit que  $(M, g)$  est  $W_\delta^{k,p}$ -fortement asymptotiquement hyperbolique s'il existe un compact  $K \subset M$  et un difféomorphisme  $\varphi : M \setminus K \rightarrow B_1(0) \setminus B_{1-\varepsilon}(0)$  tel qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$C^{-1}b \leq \varphi_*g \leq Cb$$

et tel que

$$\int_{B_1(0) \setminus B_{1-\varepsilon}(0)} \left[ \sum_{i=0}^k |{}^b \nabla^{(i)}(\varphi_*g - b)|_b^p \right] \rho^{-p\delta} d\mu^g < \infty.$$

Plus généralement, pour tous les espaces de fonctions sur l'espace hyperbolique tels que nous les avons définis dans la section 2.1.3, il est possible de définir une notion de variété fortement asymptotiquement hyperbolique de la manière suivante (nous prenons ici l'exemple des espaces de Hölder) : On dit que  $(M, g)$  est une variété  $C_\delta^{k,\alpha}$ -fortement asymptotiquement hyperbolique s'il existe un compact  $K \subset M$  et un difféomorphisme  $\varphi : M \setminus K \rightarrow B_1(0) \setminus B_{1-\varepsilon}(0)$  tel qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$C^{-1}b \leq \varphi_*g \leq Cb$$

et tel que, si  $\chi$  est une fonction de troncature, avec  $\chi \equiv 0$  sur  $B_{1-2\varepsilon/3}(0)$  et  $\chi \equiv 1$  sur  $B_1(0) \setminus B_{1-\varepsilon/3}(0)$ , et si  $e := \chi(\varphi_*g - b)$  est étendu par zéro sur  $B_{1-\varepsilon}(0)$ , on a

$$e \in C_\delta^{k,\alpha}(\mathbb{H}^n, \text{Sym}_2(\mathbb{H}^n)).$$

Nous pouvons donc obtenir une nouvelle définition du covariant de type masse associé à une représentation  $V$  de  $O_\dagger(n, 1)$  pour peu qu'il existe un opérateur de courbure  $\mathcal{C}$  tel que  $V \subset \mathcal{L}_\mathcal{C}$ . Or, on connaît la décomposition isotypique de chacun des espaces de sections des fibrés naturels sur  $\mathbb{H}^n$  car ce sont des représentations induites [3, Propositions 6.6 et 6.9]. La proposition 6.12 de [3] montre alors qu'il suffit de prendre une combinaison linéaire judicieuse de 2 opérateurs de courbure scalaires (par exemple  $\text{Scal}$  et  $\Delta \text{Scal}$  pour les masses conformes) pour pouvoir donner une définition de type charge totale de tous les opérateurs de type masse que nous avons construits. Nous renvoyons le lecteur à [3, Section 6] pour plus de détails.

Dans la prochaine section, nous allons détailler cette construction dans le cas particulier de la masse standard. Ce cas est, sans doute le plus simple. Pour les autres représentations et pour les opérateurs de courbure que nous construisons, les espaces  $\mathcal{L}_\mathcal{C}$  sont de dimension infinie.

**Question.** • Comment se singularise la représentation  $V$  dans l'espace  $\mathcal{L}_\mathcal{C}$  ? Dans [3, Remarque 6.15], nous montrons qu'il est possible, pour la représentation  $\mathcal{H}_2$  d'utiliser le formalisme de Palatini de la relativité générale (voir par exemple [Wal84, Appendice E]) pour singulariser  $V$ . Est-il possible d'étendre cette construction en utilisant des formalismes de Palatini d'ordre supérieur (par exemple pour des théories de la gravité modifiée comme les théories de Lovelock [Lov71]) ? Une autre manière de voir les choses, plus systématique, serait de voir  $V$  comme un groupe de cohomologie d'une certaine suite de Bernstein-Gelfand-Gelfand sur  $S_1(0)$  (voir par exemple [CD01], on peut également envisager des structures plus compliquées tels des bicomplexes) étendu à  $\mathbb{H}^n$ .

Par exemple, la représentation standard  $\mathbb{R}^{n,1}$  de  $O_\dagger(n, 1)$  peut être vue comme  $\ker(\mathbb{L}) \cap \ker(d) \subset \Lambda_1(S_1(0))$  avec  $\mathbb{L}$  l'opérateur de Killing conforme défini en (1.3) et  $d : \Lambda^1(S_1(0)) \rightarrow \Lambda^2(S_1(0))$  la différentielle extérieure.

- Peut-on construire des familles canoniques de métriques associées à chacun des invariants de type masse que nous avons construits, de manière analogue aux métriques d'anti-de Sitter–Schwarzschild naturellement associées à la masse classique ? L'idée serait de comprendre la structure de  $L_\delta^2(\mathbb{H}^n, \text{Sym}_2(TM))$  comme représentation de  $O_\dagger(n, 1)$  (Cet espace de 2-tenseurs symétriques est à comprendre ici comme les variations infinitésimales de métriques au voisinage de la métrique hyperbolique) pour comprendre "à quoi se couple chacun des covariants de masse". On peut alors penser (très naïvement) que la représentation  $W$  (non-semisimple mais indécomposable car elle possède la représentation de dimension finie  $V$  comme quotient) à laquelle se couple le covariant de type masse peut être décrite comme une convolution d'un certain espace de fonctions avec une certaine fonction  $G$ . Dans le cas de la masse standard, un tel  $G$  correspondrait à un espace de Kottler de masse infinitésimale.

### 2.4.3 La masse de Wang–Chruściel–Herzlich

Concentrons-nous maintenant sur la masse conforme avec  $k = n$ , autrement dit  $\Phi_n^c : G_n \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$ . C'est cette masse qui présente le plus d'intérêt en relativité générale car elle encode "l'énergie du champ de gravité" ainsi que le centre de masse de la métrique (voir par exemple [CCS16]). Un panorama détaillé sur la masse est donné dans [Her05]. Dans toute cette section, nous ne considérerons que des variétés fortement asymptotiquement hyperboliques au sens de la définition 2.4.18. Pour définir la masse, nous aurons besoin de l'espace des fonctions dites *lapsés* :

**Définition 2.4.19.** Soit

$$\mathcal{N} := \{V : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{Hess } V = Vb\}$$

l'ensemble des fonctions *lapses* sur l'espace hyperbolique. Cet espace est de dimension  $n + 1$  et engendré par  $V_{(0)}, V_{(1)}, \dots, V_{(n)}$  avec, dans le modèle de la boule

$$V_{(0)} = \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}, V_{(1)} = \frac{2x^1}{1 - |x|^2}, \dots, V_{(n)} = \frac{2x^n}{1 - |x|^2}.$$

Ces fonctions s'identifient, via la projection stéréographique, aux restrictions des fonctions coordonnées sur  $\mathbb{R}^{n,1}$  à l'hyperboloïde.

**Définition 2.4.20.** Soient  $(M, g)$  une variété  $W_{1/2}^{1,2}$ -fortement asymptotiquement hyperbolique et  $\varphi : M \setminus K \rightarrow B_{1-\varepsilon}(0)$  une carte à l'infini. Supposons de plus que la courbure scalaire de  $g$  satisfait

$$\int_M V_{(0)} |\text{Scal} + n(n-1)| d\mu^g < \infty$$

(où nous identifions  $V_{(0)}$  à  $V_{(0)} \circ \varphi$  et l'étendons à  $M$  de manière arbitraire). Notons  $e = \varphi_* g - b$ . La masse de  $(M, g)$  pour la carte  $\varphi$  est l'application linéaire  $H_g^\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$H_g^\varphi(V) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{S_r(0)} (V(\text{div}^b e - d \text{tr}^b e) + (\text{tr}^b e) dV - e(\nabla^b V, \cdot)) (\nu_r) d\mu^b$$

avec  $\nu_r$  le vecteur unitaire normal sortant à  $S_r(0)$  pour la métrique  $b$ .

Dans le cas particulier où  $g \in G_n^T$  (définition 2.4.6), on a les formules suivantes qui lient la définition de [CH03] et celle de [Wan01] :

$$\begin{cases} H_g^\varphi(V_{(0)}) = (n+1) \Phi_n^c(g)(X^0) = (n+1) \int_{S_1(0)} \text{tr}^\sigma(m) d\mu^\sigma, \\ H_g^\varphi(V_{(i)}) = (n+1) \Phi_n^c(g)(X^i) = (n+1) \int_{S_1(0)} x^i \text{tr}^\sigma(m) d\mu^\sigma \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Le premier résultat concernant la masse est le théorème de la masse positive :

**Théorème 2.4.21.** [Wan01, CH03] Soit  $(M, g)$  une variété  $W_\delta^{1,2}$ -fortement asymptotiquement hyperbolique avec  $\delta = 1/2$ . On suppose de plus que  $M$  est spin et que

$$\text{Scal} \geq -n(n-1), \quad \int_M V_{(0)} |\text{Scal} + n(n-1)| d\mu^b < \infty.$$

Alors le vecteur de masse est de genre temps et orienté vers le futur :

$$H_g^\varphi(V_{(0)}) > \sqrt{\sum_{i=1}^n (H_g^\varphi(V_{(i)}))^2}$$

sauf si  $(M, g)$  est isométrique à  $\mathbb{H}^n$  auquel cas  $H_g^\varphi(V_{(0)}) = H_g^\varphi(V_{(1)}) = \dots = H_g^\varphi(V_{(n)}) = 0$ .

L'hypothèse  $M$  spin peut être remplacée par  $\dim M < 8$ , voir [ACG08, CGNP18].

Nous allons maintenant nous intéresser aux variétés asymptotiquement hyperboliques qui sont conformes à la métrique hyperbolique en dehors d'un compact  $K$  avec  $\text{Scal} \equiv -n(n-1)$  sur  $M \setminus K$ . Ces métriques possèdent un comportement asymptotique bien contrôlé. Elles sont de plus denses dans le sens suivant :

**Proposition 2.4.22.** [7, Proposition B.1] Soit  $(M, g)$  une variété  $C_\tau^{2,\alpha}$ -asymptotiquement hyperbolique avec  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\tau > 0$ . Supposons de plus que  $\text{Scal}^g \in L^\infty(M, \mathbb{R})$  et  $\text{Scal}^g \geq -n(n-1)$ . Alors, si  $\varphi : M \setminus K \rightarrow B_1(0) \setminus B_{1-\varepsilon}(0)$  est une carte à l'infini, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $R \in (1-\varepsilon, 1)$  et une métrique  $\lambda_R$  sur  $M$  tels que

- $|\lambda_R - g|_g < \varepsilon$ ;
- $\varphi_* \lambda_R$  est conforme à  $b$  en dehors de  $B_R(0)$ , i.e.  $\varphi_* \lambda_R = U^{N-2} b$  avec  $U \rightarrow 1$  à l'infini ;
- $\text{Scal}^{\lambda_R} \geq -n(n-1)$  et  $\text{Scal}^{\lambda_R} = -n(n-1)$  sur  $B_1(0) \setminus B_R(0)$ .

Supposons de plus que  $\tau > \frac{n}{2}$  et  $\int_M (\text{Scal}^g + n(n-1)) V_{(0)} d\mu^g < \infty$ . On peut imposer alors en plus que

$$|H_{\varphi}^{\lambda_R}(V_{(i)}) - H_{\varphi}^g(V_{(i)})| < \varepsilon$$

pour tout  $i = 0, \dots, n$ .

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, introduisons une dernière notation. On dit qu'une carte à l'infini est *équilibrée* si

$$H_g^\varphi(V_1) = \dots = H_g^\varphi(V_n) = 0.$$

Il est facile de voir, en utilisant la covariance de la masse sous les changements de carte à l'infini, que c'est une condition sur  $\varphi$  uniquement et qu'une telle carte existe toujours. La masse est alors donnée par

$$m := \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} H_\varphi(V_0). \quad (2.9)$$

Nous allons maintenant prouver un analogue asymptotiquement hyperbolique d'un résultat de D. Lee [Lee09] que nous avons démontré dans un travail en collaboration avec M. Dahl et A. Sakovich [7]. Définissons tout d'abord une classe particulière de variétés asymptotiquement hyperboliques :

**Définition 2.4.23.** Pour tout  $R_0 \in (0, 1)$ , désignons par  $\mathcal{A}(R_0)$  la classe des 4-uplets  $(M, g, \varphi, U)$  tels que

- $(M, g)$  est une variété riemannienne complète qui est asymptotiquement hyperbolique pour le difféomorphisme  $\varphi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{H}^n \setminus \overline{B}_{R_0}(0)$  ;
- $\text{Scal}^g \geq -n(n-1)$ , et  $\text{Scal}^g = -n(n-1)$  sur  $M \setminus K$  ;
- $U$  est une fonction positive sur  $\mathbb{H}^n \setminus B_{R_0}(0)$  telle que  $U \rightarrow 1$  à l'infini et  $\varphi_*g = U^{N-2}b$  ;
- La carte à l'infini  $\varphi$  est équilibrée ;
- Le théorème de la masse positive est satisfait pour toutes les métriques asymptotiquement hyperboliques sur  $M$ .

Le résultat que nous allons décrire donne une forme de stabilité pour le théorème de la masse positive :

**Théorème 2.4.24.** Soit  $R_1 \in (R_0, 1)$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe une constante  $\delta > 0$  telle que

$$|U - 1| \leq \varepsilon e^{-nr}$$

sur  $\mathbb{H}^n \setminus B_{R_1}(0)$  pour tout  $(M, g, \varphi, U) \in \mathcal{A}(R_0)$  dès lors que  $m^g < \delta$ .

La preuve du théorème 2.4.24 procède en plusieurs étapes. Le schéma est le même que dans [Lee09] et s'inspire de la preuve du cas d'égalité de la masse positive de [SY79]. Cependant chacune des étapes s'avère plus compliquée et technique dans le cas asymptotiquement hyperbolique que dans le cas asymptotiquement euclidien.

La première est de se ramener au cas des métriques à courbure scalaire constante  $\text{Scal}^g = -n(n-1)$ . Pour cela, nous montrons que le facteur conforme qui transforme la métrique  $g$  en une métrique à courbure scalaire constante<sup>6</sup> peut être uniformément contrôlé sur  $B_1(0) \setminus B_{R_1}(0)$  par la différence des masses des deux métriques (ou plus exactement par la composante  $H_\varphi(V_{(0)})$  des vecteurs de masse) :

**Proposition 2.4.25.** [7, Proposition 3.6] Etant donnée  $(M, g, \varphi, U) \in \mathcal{A}$ , il existe une unique fonction positive  $w$  sur  $M$  telle que  $\tilde{g} := w^{N-2}g$  est fortement asymptotiquement hyperbolique à courbure scalaire constante  $\text{Scal}^{\tilde{g}} = -n(n-1)$ . La métrique  $\tilde{g}$  a une masse  $m^{\tilde{g}} \leq m^g$ . De plus, pour tout  $p > n/2$  il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $(M, g, \varphi, U)$  telle que

$$\sup_{\mathbb{H}^n \setminus B_{R_1}} |U - \tilde{U}| \leq C (m^g - m^{\tilde{g}})^{1/p},$$

avec  $\tilde{U} := Uw$ .

Cette réduction s'avère intéressante pour obtenir des estimées dans la seconde partie de la preuve. Introduisons maintenant la classe réduite  $\mathcal{A}_0(R_0)$  des 4-uplets  $(M, g, \varphi, U) \in \mathcal{A}$  avec  $g$  à courbure scalaire constante  $\text{Scal}^g \equiv -n(n-1)$ . Il suffit maintenant de montrer le théorème 2.4.24 pour les éléments de  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(R_0)$ .

L'idée de base est d'appliquer le théorème de la masse positive à une certaine famille à un paramètre de métriques. Pour cela, nous modifions  $g$  sur un anneau en une famille de métriques  $g_s$  de (voir l'équation (2.11)) puis nous opérons une transformation conforme à  $g_s$  pour la ramener en une métrique à courbure scalaire constante  $\text{Scal} \geq -n(n-1)$  à laquelle nous pourrions alors appliquer le théorème de la masse positive.

Donnons-nous cinq constantes  $R'_0, R''_0, R_1, R'_1, R''_1$  telles que

$$R_0 < R'_0 < R''_0 < R_1 < R'_1 < R''_1 < 1,$$

la construction repose sur les deux lemmes suivants :

<sup>6</sup>Pour l'existence de ce facteur conforme, nous renvoyons le lecteur à la section 2.5.1.



**Lemme 2.4.26.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $(M, g, \varphi, U)$  dans la classe  $\mathcal{A}$ , on a*

$$\frac{1}{C} \leq U \leq C$$

sur  $B_1(0) \setminus B_{R'_0}(0)$ . De plus, la fonction  $U - 1$  est contrôlée en norme  $C_n^{k,\alpha}$  sur ce même ensemble indépendamment de  $(M, g, \varphi, U)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Lemme 2.4.27.** [7, Lemme 3.7] *Soit  $(M, g, \varphi, U) \in \mathcal{A}$ . Il existe une unique fonction  $V^g$  sur  $M$  solution de l'équation*

$$\Delta^g V = nV \quad (2.10)$$

telle que  $V^g \sim V_{(0)}$ . De plus,  $V^g - V_{(0)}$  est contrôlé en norme  $C_{n-1}^{k,\alpha}$  sur  $B_1(0) \setminus B_{R'_0}$  indépendamment de  $(M, g, \varphi, U)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

Posons maintenant

$$T := \mathring{\text{Ric}}^g - \frac{\mathring{\text{Hess}}^g V^g}{V^g},$$

avec  $\mathring{\text{Ric}}^g = \text{Ric}^g + (n-1)g$  la partie sans trace du tenseur de Ricci de  $g$  et  $\mathring{\text{Hess}}^g V = \text{Hess}^g V - Vg$  la partie sans trace de la hessienne de  $V$ . Il s'avère que le tenseur  $V^g T$  est le gradient de la fonctionnelle masse en  $(M, g)$  dans la classe  $\mathcal{A}_0(R''_1)$ .

Choisissons ensuite une fonction  $\chi$  telle que

$$\chi = \begin{cases} 0 & \text{sur } B_{R''_0}(0), \\ 1 & \text{sur } B_{R'_1}(0) \setminus B_{R''_1}(0), \\ 0 & \text{sur } B_1(0) \setminus B_{R''_1}, \end{cases}$$

et définissons la métrique

$$g_s := g + s\chi T \quad (2.11)$$

avec  $s$  dans un certain voisinage de 0.

Nous allons maintenant transformer conformément les métriques  $g_s$  pour avoir des métriques à courbure scalaire constante :

**Lemme 2.4.28.** [7, Lemme 3.8] *Il existe  $s_0 > 0$  tel que, pour tout  $s \in [-s_0, s_0]$  et tout  $(M, g, \varphi, U) \in \mathcal{A}_0$ , on a*

$$\frac{1}{2}g \leq g_s \leq 2g$$

et

$$|\text{Scal}^{g_s} + n(n-1)| \leq n-1.$$

De plus, pour tout  $s \in [-s_0, s_0]$  il existe une unique fonction positive  $\varphi_s$  sur  $M$  telle que la métrique

$$\lambda_s := \varphi_s^{N-2} g_s$$

soit à courbure scalaire constante  $-n(n-1)$ . La fonction  $\varphi_s$  satisfait

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/(N-2)} \leq \varphi_s \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/(N-2)}.$$

Les fonctions  $\varphi_s$ ,  $s \in [-s_0, s_0]$ , sont contrôlées en norme  $C_{n-1}^{k,\alpha}$  sur  $B_1(0) \setminus B_{R_1}(0)$  indépendamment de  $(M, g, \varphi, U)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

Pour  $V = V_{(0)}$ , posons  $H(s) := H_{\varphi_s}^{\lambda_s}(V)$  la composante temporelle de la fonctionnelle de masse, ce qui donne une borne supérieure à la masse :  $m^{\lambda_s} \leq \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} H(s)$ . Puisque les coordonnées à l'infini sont équilibrées pour  $g$ , on a  $m^g = m^{\lambda_0} = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} H(0)$ . Par la suite, nous allons noter les dérivées par rapport à  $s$  avec un point.

**Lemme 2.4.29.** [7, Lemme 3.9] *L'application  $s \mapsto H(s)$  est une fonction de classe  $C^2$ . De plus, il existe une constante  $A$  indépendante de  $(M, g, \varphi, U) \in \mathcal{A}_0$  telle que*

$$|\ddot{H}(s)| \leq A.$$

Dans le lemme suivant, nous montrons que  $\dot{H}(0)$  est relié à la norme  $L^2$  de  $\mathring{\text{Ric}}^g - \frac{1}{V^g} \mathring{\text{Hess}}^g V^g$  sur un anneau, et peut donc s'interpréter comme une mesure de la "non-staticité" de la métrique  $g$  sur cet anneau :

**Lemme 2.4.30.** [7, Lemme 3.10] Soit  $(M, g, \varphi, U) \in \mathcal{A}_0$ . Alors, avec les notations précédentes, on a

$$\dot{H}(0) = \int_M \chi V^g \left| \mathring{\text{Ric}}^g - \frac{\mathring{\text{Hess}}V^g}{V^g} \right|_g^2 d\mu^g.$$

Ce résultat marque une différence fondamentale avec le cas asymptotiquement euclidien. En effet, dans ce cas, la fonction  $V$  qui apparaît<sup>7</sup> est la fonction constante 1. La variation de la masse est alors simplement proportionnelle au carré de la norme  $L^2$  du tenseur de Ricci de  $g$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.4.24. Supposons tout d'abord que  $g$  est à courbure scalaire constante. En appliquant la formule de Taylor à  $H(s)$  sur l'intervalle,  $(-s_0, s_0)$ , on a

$$\begin{aligned} H(s) &= H(0) + s\dot{H}(0) + \int_0^s (s-t)\ddot{H}(t)dt \\ &\leq H(0) + s\dot{H}(0) + A \int_0^s (s-t)dt \\ &\leq H(0) + s\dot{H}(0) + \frac{A}{2}s^2. \end{aligned}$$

En supposant que le théorème de la masse positive a lieu pour toutes les métriques asymptotiquement hyperboliques sur  $M$ , on a  $H(s) \geq 2(n-1)\omega_{n-1}m^{\lambda_s} \geq 0$  pour  $s \in (-s_0, s_0)$ . Par conséquent,

$$0 \leq H(0) + s\dot{H}(0) + \frac{A}{2}s^2.$$

Supposons que  $H(0) \leq \frac{2s_0^2}{A}$ , nous pouvons écrire l'inégalité précédente avec  $s = -\sqrt{\frac{2H(0)}{A}}$ . On obtient alors

$$\dot{H}(0) \leq \sqrt{2AH(0)} = \sqrt{4A(n-1)\omega_{n-1}m^g}. \quad (2.12)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Montrons par l'absurde qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $(M, g, \varphi, U) \in \mathcal{A}_0$  avec une masse  $m^g \leq \delta$ , on a

$$\sup_{B_1(0) \setminus B_{R_1}(0)} |U - 1| \leq \varepsilon.$$

Dans le cas contraire, il existerait une suite  $(M_k, g_k, \varphi_k, U_k)$  d'éléments de  $\mathcal{A}_0$  tels que  $m_k := m^{g_k}$  tend vers 0 alors que  $|U_k - 1| \geq \varepsilon$ . On peut alors construire, en regardant la limite d'une sous-suite, des fonctions  $U_\infty$  et  $V_\infty$  sur  $B_1(0) \setminus B_{R'_0}(0)$ .

La métrique  $g_\infty := U_\infty^{N-2}b$  est à courbure scalaire constante et  $V_\infty$  est solution de l'équation  $\Delta^{g_\infty} V_\infty = nV_\infty$ . Toutes deux satisfont les estimées des lemmes 2.4.26 et 2.4.27. De plus,

$$\sup_{\mathbb{H}^n \setminus B_{R_1}(0)} |U_\infty - 1| \geq \varepsilon. \quad (2.13)$$

La métrique  $g_\infty$  a une masse nulle par la continuité de la masse en fonction de  $U - 1 \in X_\delta^{2,p}(M, \mathbb{R})$ .

Le lemme 2.4.30 combiné avec l'estimée (2.12) et appliqué à  $(M_k, g_k, \varphi_k, U_k)$  donne l'inégalité

$$\int_M \chi V^{g_k} \left| \mathring{\text{Ric}}^{g_k} - \frac{\mathring{\text{Hess}}V^{g_k}}{V^{g_k}} \right|_{g_k}^2 d\mu^{g_k} \leq \sqrt{4A(n-1)\omega_{n-1}m_k}$$

pour tout  $k$ . En passant à la limite, on trouve alors

$$\int_{B_1(0) \setminus B_{R'_0}(0)} \chi V^{g_\infty} \left| \mathring{\text{Ric}}^{g_\infty} - \frac{\mathring{\text{Hess}}V^{g_\infty}}{V^{g_\infty}} \right|_{g_\infty}^2 d\mu^{g_\infty} = 0.$$

Donc  $\mathring{\text{Ric}}^{g_\infty} = \frac{\mathring{\text{Hess}}V^{g_\infty}}{V^{g_\infty}}$  sur  $B_{R'_1}(0) \setminus B_{R'_0}(0)$ . Puisque  $U_\infty$  et  $V_\infty$  sont des fonctions analytiques, cette égalité a lieu sur tout  $B_1(0) \setminus B_{R'_0}(0)$ . La proposition A.4 de [7] permet de montrer que  $g_\infty$  coïncide (sur son domaine de définition) avec une métrique d'anti-de Sitter-Schwarzschild (voir la définition (2.15) dans la section suivante). Comme elle a une masse nulle, on en déduit que  $g_\infty$  est la métrique hyperbolique donc que  $U_\infty \equiv 1$ , ce qui est en contradiction avec (2.13).

<sup>7</sup>ou plus exactement qui n'apparaît pas...

### 2.4.4 L'inégalité de Penrose

Une des principales conjectures concernant la masse d'une variété asymptotiquement hyperbolique est la suivante :

**Conjecture** (Conjecture de Penrose asymptotiquement hyperbolique). Soit  $(M, g)$  une variété à bord complète de dimension  $n$  et fortement asymptotiquement hyperbolique. Supposons que le bord (intérieur)  $\Sigma$  de  $M$  est une surface minimale et qu'aucune surface minimale compacte séparante  $S$  ne contienne  $\Sigma$  (i.e. que  $\Sigma$  ne soit pas incluse dans la composante bornée de  $M \setminus S$ ). Alors la masse  $m$  de  $g$  satisfait l'inégalité suivante

$$m \geq \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right], \quad (2.14)$$

avec  $\omega_{n-1}$  le volume de la sphère unité  $\mathbb{S}^{n-1}$  et  $|\Sigma|$  la  $(n-1)$ -aire de  $\Sigma$ . L'égalité a lieu si et seulement si l'extérieur de  $\Sigma$  est isométrique à un espace d'anti-de Sitter-Schwarzschild).

Les espaces de Kottler (ou d'anti-de Sitter-Schwarzschild) sont des solutions statiques à symétrie sphérique des équations d'Einstein avec une constante cosmologique  $\Lambda$  négative normalisée à  $-\frac{n(n-1)}{2}$  (voir [Wal84, Chapitre 6] pour la définition d'une métrique statique). En dimension  $n$ , ces métriques sont paramétrées par leur masse  $m$  :

$$\gamma_{\text{AdS-Schw}} = - \left( 1 + \rho^2 - \frac{2m}{\rho^{n-2}} \right) dt^2 + \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2 - \frac{2m}{\rho^{n-2}}} + \rho^2 \sigma, \quad (2.15)$$

avec  $\sigma$  la métrique ronde sur la sphère  $S^{n-1}$ . Une étude des sections spatiales de ces métriques est donnée dans l'appendice de l'article [7].

L'inégalité de Penrose asymptotiquement euclidienne a été établie par G. Huisken et T. Ilmanen dans [HI01] en dimension 3 avec une surface  $\Sigma$  connexe, puis, consécutivement, par H. Bray dans [Bra01] dans le cas général d'une surface minimale  $\Sigma$  non nécessairement connexe et en dimension  $3 \leq n \leq 7$ .

Les deux preuves sont basées sur des flots : celle de Huisken-Ilmanen sur le flot de la courbure moyenne inverse, c'est donc la surface  $\Sigma$  qui évolue, alors que la preuve de Bray utilise un flot conforme ad hoc que nous détaillerons par la suite.

L'inégalité (2.14) est notoirement difficile à démontrer. A. Neves a montré dans [Nev10] que le flot de la courbure moyenne inverse ne permet pas de conclure. Avant de tenter d'adapter la méthode de Bray, mentionnons un cas particulier.

L'espace  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  muni de la métrique  $b + V_{(0)}^2 dt^2$  est isométrique à  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{H}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière, on peut alors voir le graphe de  $f$  comme une hypersurface dans  $\mathbb{H}^{n+1}$  et considérer la métrique induite. Il se trouve que si  $\Omega$  est l'extérieur d'un compact, il existe une formule simple donnant la masse du graphe de  $f$  en fonction de données géométriques locales. Ce résultat est une adaptation au cas hyperbolique d'un article de M. Lam [Lam10] que j'ai obtenu en collaboration avec M. Dahl et A. Sakovich [6].

Remarquons, avant toute chose, que les métriques de Kottler, étant à symétrie sphérique, peuvent s'exprimer très simplement comme une métrique induite sur un graphe (voir [6, Section 2.3]).

**Proposition 2.4.31.** [6, Lemme 2.3 et Proposition 4.1] Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{H}^n$  à bord régulier. Supposons que  $f : \mathbb{H}^n \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\int_{\mathbb{H}^n \setminus K} \left( |df|^4 + |\text{Hess } f|^4 \right) V_{(0)}^5 d\mu^b < \infty,$$

alors la masse du graphe de  $f$  (muni de la métrique induite par  $b + V_{(0)}^2 dt^2$ ) est bien définie et

$$H_\varphi(V_{(0)}) = \int_{\mathbb{H}^n \setminus K} \frac{V_{(0)}[\text{Scal} + n(n-1)]}{\sqrt{1 + V_{(0)}^2 |df|^2}} d\mu^g + \int_{\partial K} HV_{(0)} \frac{V_{(0)}^2 |df|^2}{1 + V_{(0)}^2 |df|^2} d\mu^b,$$

avec  $H$  la courbure moyenne de  $\partial K$  pour la métrique  $b$  et  $\varphi$  l'application qui projette un point du graphe  $(x, f(x))$  sur  $x$ .

En particulier, si  $f$  est constante sur chacune des composantes connexes de  $\partial K$ , avec  $|df| \rightarrow \infty$  au voisinage de  $\partial K$ ,  $\partial K$  est une surface minimale compacte du graphe de  $f$ . Si, de plus la courbure scalaire du graphe est minorée par  $-n(n-1)$ , on a

$$H_\varphi(V_{(0)}) \geq \int_{\partial K} V_{(0)} H d\mu^b.$$

Nous voyons donc que nous aurons une estimation de la masse  $H_\varphi(V_{(0)})$  dès que nous avons l'inégalité de type Alexandroff-Fenchel :

$$\int_{\partial K} V_{(0)} H d\mu^g \geq (n-1)\omega_{n-1} \left[ \left( \frac{|\partial K|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left( \frac{|\partial K|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right]. \quad (2.16)$$

Cette inégalité a été démontrée par L. de Lima et F. Girao dans [dLGa16] dans le cas où  $\Omega$  est convexe. Ces mêmes auteurs ont, par ailleurs, démontré des résultats similaires à la proposition 2.4.31 dans [dLGa15].

Nous obtenons donc

$$H_\varphi(V_{(0)}) \geq (n-1)\omega_{n-1} \left[ \left( \frac{|\partial K|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left( \frac{|\partial K|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right]. \quad (2.17)$$

L'article [6] montre alors que l'égalité a lieu dans (2.17) uniquement lorsque le graphe est celui d'une métrique de Kottler centrée en  $0 \in B_1(0)$ . La preuve suit celle de L. H. Huang et D. Wu dans [HW13, HW15].

Avant de revenir à l'inégalité de Penrose, il est intéressant de comprendre géométriquement l'intégrale qui apparaît à gauche dans (2.16). Nous allons voir comment le faire apparaître dans une formule de Steiner (voir par exemple [Sch14]). Rappelons, pour cela, que l'espace d'anti-de Sitter peut être vu comme  $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$  muni de la métrique

$$g_{\text{AdS}} = -V_{(0)}^2 dt^2 + b.$$

Soit  $\nu$  la normale sortante à  $\partial K$ , alors le vecteur  $e_+ = \partial_t + V_{(0)}\nu$  est un vecteur de genre lumière (isotrope) pour  $g_{\text{AdS}}$  et l'intégrale du membre de gauche de l'inégalité (2.16) est la variation de l'aire de  $\partial K$  dans la direction  $e_+$ .

De manière plus rigoureuse, considérons  $J^+(\{0\} \times K)$  (resp.  $I^+(\{0\} \times K)$ ) l'ensemble des points  $(t, x)$  de l'espace d'anti-de Sitter,  $t \geq 0$  pour lesquels il existe une courbe causale (resp. de genre temps) reliant  $(t, x)$  à un point de  $\{0\} \times K$ . Définissons

$$E^+(\{0\} \times K) := J^+(\{0\} \times K) \setminus I^+(\{0\} \times K)$$

l'horizmos futur de  $\{0\} \times K$ . Nous renvoyons le lecteur à [HE73, Wal84] pour des définitions plus précises de ces différents ensembles. Soit, pour tout  $t_0 \geq 0$ ,  $\partial K_{t_0} := E^+(\{0\} \times K) \cap \{t = t_0\}$ . Posons  $\mu(K, t) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial K_{t_0})$ .  $\mu$  est une fonction régulière de  $t$  pour  $t \geq 0$  petit. Et on a

$$\int_{\partial K} V_{(0)} H d\mu^b = \frac{d}{dt} \mu(t, K)|_{t=0}. \quad (2.18)$$

La fonction  $\mu$  peut être calculée explicitement. Cependant, contrairement à la formule de Steiner, il n'est pas évident de voir ce qui pourrait jouer le rôle d'intégrale de quermass :

**Question.** Existe-t-il une famille de quantités "naturelles" définies en termes de la géométrie extrinsèque de  $\partial K$  à laquelle appartiennent l'aire de  $\partial K$  et l'intégrale (2.18) et pour lesquelles il serait possible de prouver des inégalités de type Alexandroff-Fenchel ?

Revenons maintenant à l'inégalité de Penrose générale. Le flot de Bray est un flot conforme défini à partir d'une métrique asymptotiquement euclidienne  $g_0$  de la manière suivante. Notons  $g_t$  la métrique au temps  $t \geq 0$ ,  $\Sigma_t$  la surface minimale compacte la plus extérieure de  $g_t$  et  $M_t$  l'extérieur de  $\Sigma_t$ . L'évolution de  $g_t$  est alors donnée par

$$\frac{d}{dt} g_t = -v_t g_t$$

avec  $v_t$  la fonction harmonique (pour  $g_t$ ) telle que  $v_t|_{\Sigma_t} = 0$  et  $v_t \rightarrow 1$  à l'infini.<sup>8</sup>

Une manière naïve de voir ce flot est de dire qu'il s'agit d'un flot conforme de métriques (i.e. n'importe quelles deux métriques  $g_{t_1}$  et  $g_{t_2}$  sont conformes l'une à l'autre) défini de telle sorte que la surface  $\Sigma_t$  engloutit petit à petit toute la variété  $M$  alors que la métrique  $g_t$  reste asymptotiquement euclidienne. Il s'opère alors une sorte de "simplification" de la variété  $(M_t, g_t)$ . Plus précisément, Bray démontre que

1. Le flot préserve la condition  $\text{Scal}(g_t) \geq 0$ ,
2. L'aire de  $\Sigma_t$  est constante au cours du temps,
3. La masse de  $(M_t, g_t)$  décroît sous le flot,

<sup>8</sup>Nous omettons ici volontairement de mentionner que ce flot peut présenter des sauts pour ne pas alourdir l'exposé.

4. Les métriques de Schwarzschild sont des solitons pour ce flot (i.e.  $\frac{d}{dt}g_t = \mathcal{L}_X g_t$  pour un certain champ de vecteurs  $X$ ),
5. Après redimensionnement, les métriques  $g_t$  convergent vers la métrique de Schwarzschild dont l'aire de l'horizon est égale à  $|\Sigma_t|$ .

L'inégalité de Penrose asymptotiquement euclidienne (2.14) ainsi que la rigidité dans le cas d'égalité découlent alors de ces quatre points. Il n'est pas évident de voir comment cette preuve peut s'adapter au cas asymptotiquement hyperbolique. Le quatrième point va nous servir de guide. Les métriques de Kottler  $g_{K,m}$  sont conformes à un anneau dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous voulons qu'elles soient des solitons pour notre flot conforme. Si nous posons

$$\frac{d}{dt}g_t = -Vg, \quad (2.19)$$

nous avons  $-Vg_{K,m} = \mathcal{L}_X g_{K,m}$  pour un certain champ de vecteurs  $X$ . Autrement dit,  $X$  est un champ de vecteurs de Killing conforme pour la métrique de Kottler, donc un champ de vecteurs de Killing conforme pour la métrique euclidienne. Le choix le plus simple est alors de prendre  $X = r\partial_r = x^i\partial_i$ , le champ de vecteurs engendrant les dilatations dans  $\mathbb{R}^n$ , qui donne  $\mathcal{L}_X g_{K,m} = -Vg_{K,m}$  avec  $V$  la fonction lapse de l'espace de Kottler.

Ceci suggère que l'analogue asymptotiquement hyperbolique du flot de Bray doit être l'équation (2.19) avec  $V$  la solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta^{g_t} V = nV, \\ V \equiv 0 \quad \text{sur } \Sigma_t, \\ V \sim \cosh(r) \quad \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Cependant, pour les métriques de Kottler, l'anneau correspondant à l'extérieur de l'horizon est dilaté exponentiellement en  $t$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Les métriques  $g_t$  ne doivent donc plus être des métriques sur  $M$ , mais sur un espace plus grand : Si  $\varphi$  est une carte à l'infini donnée pour  $(M, g)$  nous pouvons définir sur  $\widetilde{M} = M \sqcup (\mathbb{R}^n \setminus B_1(0))$  une structure de variété en étendant la carte

$$\varphi : M \setminus K \rightarrow B_1(0) \setminus B_{1-\varepsilon}(0)$$

en une carte

$$\widetilde{\varphi} : M \setminus K \sqcup (\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B_{1-\varepsilon}(0)$$

par

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in M \setminus K, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0). \end{cases}$$

L'idée du nouveau flot est alors d'imposer à l'infini conforme de  $(M_t, g_t)$  d'être situé en  $r = e^t$  où  $r$  désigne la coordonnée radiale sur  $\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_1(0)$ . Sans cette procédure, les métriques  $g_t$  seraient instantanément incomplètes.

Le flot ainsi défini présente les propriétés 1, 2 et 4 du flot de Bray. La propriété 3 est la plus difficile à démontrer. Bray la démontre en utilisant l'astuce de Bunting–ul-Alam [BM87] qui repose fortement sur le fait qu'on considère une variété asymptotiquement euclidienne. La propriété 5 est une conséquence de la propriété 3.

Dans notre cas, il est possible de calculer la variation de la masse (plus précisément de  $H_{g_t}^{\varphi_t}(V_0)$ ). Des résultats standards sur les EDPs sur les variétés asymptotiquement hyperboliques (voir [AC96, ACF92]) montrent que  $V$  admet une expansion asymptotique de la forme

$$V = \cosh(r) + v_{-1}e^{-(n-1)r} + v_0e^{-nr} + O(e^{-(n+1)r}),$$

avec  $v_{-1}$  et  $v_0$  deux fonctions lisses sur l'infini conforme  $S_1(0)$ .  $v_{-1}$  s'identifie (à une constante près) à la trace du mass-aspect de  $(M, g)$  et  $v_0$  est le premier terme formellement indéterminé dans l'expansion asymptotique. On a alors

$$\frac{d}{dt}H_{g_t}^{\varphi_t}(V_0) = - \int_{S_1(0)} v_0 d\mu^\sigma.$$

Il faut donc montrer que

$$\int_{S_1(0)} v_0 d\mu^\sigma \geq 0$$

avec égalité si et seulement si  $g$  est une métrique de Kottler. Nous n'avons réussi à démontrer cette inégalité (péniblement) que dans le cas où  $g$  est à symétrie sphérique.

## 2.5 Les équations de contrainte sur une variété asymptotiquement hyperbolique

### 2.5.1 Courbure scalaire prescrite

Intéressons-nous tout d'abord à l'équation de courbure scalaire prescrite :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \text{Scal}\varphi - \widetilde{\text{Scal}}\varphi^{N-1} = 0 \quad (2.20)$$

avec  $\text{Scal}$  la courbure scalaire de  $g$  et  $\widetilde{\text{Scal}}$  la courbure scalaire (prescrite) d'une métrique  $\tilde{g} = \varphi^{N-2}g$  à déterminer. Rappelons ici que  $N = 2n/(n-2)$  avec  $n$  la dimension de la variété  $M$ .

Cette équation peut être vue comme un cas particulier de l'équation de Lichnerowicz (1.11),

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \text{Scal}\varphi = -\frac{n-1}{n}\tau^2\varphi^{N-1} + \frac{A^2}{\varphi^{N+1}}$$

avec  $A \equiv 0$ , au moins dans le cas  $\widetilde{\text{Scal}} \leq 0$  qui est le cas qui nous intéressera par la suite.

Considérons tout d'abord une variété  $(M, g)$  asymptotiquement hyperbolique sans bord interne. Remarquons tout d'abord que si nous souhaitons que  $\tilde{g}$  reste asymptotiquement hyperbolique, nous devons imposer la condition  $\widetilde{\text{Scal}} \rightarrow -n(n-1)$ , voire un comportement asymptotique plus contraignant pour  $\widetilde{\text{Scal}}$  : si  $\tilde{g}$  est  $C^2$ -asymptotiquement hyperbolique, on a  $|\widetilde{\text{Scal}} + n(n-1)| = O(\rho)$ . Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.5.1.** [8] Soient  $\delta \in (0, n)$ ,  $p > n$  et  $\widetilde{\text{Scal}}$  une fonction telle que  $\widetilde{\text{Scal}} + n(n-1) \in X_\delta^{0,p}(M, \mathbb{R})$ ,  $\widetilde{\text{Scal}} \leq 0$  p.p.. Il existe une solution  $\varphi > 0$ ,  $\varphi \in L^\infty(M, \mathbb{R})$  à l'équation de prescription de courbure scalaire (2.20) si et seulement si  $\mathcal{Y}_g(\mathcal{Z}) > 0$  avec  $\mathcal{Z} = \widetilde{\text{Scal}}^{-1}(0)$  l'ensemble des zéros de  $\widetilde{\text{Scal}}$  et  $\mathcal{Y}_g(\mathcal{Z})$  l'invariant de Yamabe relatif défini en (1.10).

Ce résultat est une adaptation au cas asymptotiquement hyperboliques de résultats d'A. Rauzy [Rau95] et de J. Dilts et D. Maxwell [DM]. La preuve simplifie et donne un éclairage différent sur certains points de ces articles et corrige certains détails.

Disons quelques mots sur la preuve. Le fait que l'existence d'une solution à (2.20) implique que  $\mathcal{Y}_g(\mathcal{Z}) > 0$  est similaire à l'argument donné dans la preuve du théorème 1.2.3 sur les solutions de l'équation de Lichnerowicz.

Dans l'autre sens, l'idée est, comme dans [Rau95, DM], de chercher les points critiques de la fonctionnelle

$$I_g(u) = \int_M \left[ \frac{4(n-1)}{n-2} |du|_g^2 + \text{Scal}_g((u+1)^2 - 1) - \frac{2}{N} \widetilde{\text{Scal}}((u+1)^N - 1) \right] d\mu^g \quad (2.21)$$

définie sur  $W^{1,2}(M, \mathbb{R})$  puis de poser  $\varphi = 1 + u$ . Remarquons qu'il est nécessaire de "normaliser" cette fonctionnelle en mettant  $(u+1)^2 - 1$  (resp.  $(u+1)^N - 1$ ) dans la fonctionnelle pour prendre en compte le fait que  $\text{Scal}, \widetilde{\text{Scal}} \rightarrow -n(n-1)$  à l'infini. Ce point est absent dans les cas compacts et asymptotiquement euclidiens.

Cette fonctionnelle est bien définie si  $\widetilde{\text{Scal}} \in L^\infty(M, \mathbb{R})$  (ce que nous allons supposer dans un premier temps) et si  $\widetilde{\text{Scal}} - \text{Scal}_g \in L^2(M, \mathbb{R})$ . Cependant nous voulons introduire des décroissances potentiellement plus faibles pour  $\widetilde{\text{Scal}} - \text{Scal}$  qu'une décroissance  $L^2$ . Une première étape est donc nécessaire :

**Proposition 2.5.2.** Soit  $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  une fonction  $C^\infty$  telle que  $\chi \equiv 1$  sur  $[0, 1]$  et  $\chi \equiv 0$  sur  $[2, \infty)$ . Sous les hypothèses du théorème 2.5.1, il existe  $\rho_0 > 0$  et une fonction  $\varphi_0$  telle que  $\varphi_0 - 1 \in X_\delta^{2,p}(M, \mathbb{R})$  tels que  $\varphi_0$  résout l'équation de courbure scalaire prescrite

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_0 + \text{Scal}\varphi_0 - \text{Scal}_{g_0}\varphi_0^{N-1} = 0$$

avec

$$\text{Scal}_{g_0} = \chi\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\widetilde{\text{Scal}} + \left(1 - \chi\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)\text{Scal}$$

la courbure scalaire de la métrique  $g_0 := \varphi_0^{N-2}g$ .

Cette proposition est une conséquence du théorème des fonctions implicites et du théorème 2.1.3. En effet, lorsque  $\rho_0 \rightarrow 0$ , on a  $\text{Scal}_{g_0} \rightarrow \text{Scal}$  dans  $X_{\delta'}^{2,p}(M, \mathbb{R})$  pour tout  $\delta' \in (0, \delta)$ .

Par construction de la métrique  $g_0$ ,  $\widetilde{\text{Scal}} - \text{Scal}_{g_0} \in L^2(M, \mathbb{R})$  est à support compact. Remarquons cependant que cette première opération nous a fait sortir légèrement du cadre des variétés asymptotiquement

hyperboliques car  $\rho^2 g_0$  n'est pas nécessairement conformément compacte avec une régularité au moins  $C^2$ . Nous omettrons cette complication technique.

L'idée est alors de considérer maintenant la fonctionnelle (2.21) non pas pour la métrique  $g$  mais pour la métrique  $g_0$ . L'argument est ensuite classique. On démontre que  $I_{g_0}$  est séquentiellement continue pour la topologie faible sur  $W^{1,2}(M, \mathbb{R})$  (rappelons que la topologie faible n'est métrisable que sur les parties bornées de  $W^{1,2}(M, \mathbb{R})$ ), puis qu'elle est coercive (ce passage est relativement délicat). Un argument de compacité classique permet de conclure à l'existence d'un minimiseur  $u_1 \geq -1$  de  $I_{g_0}$ .

La métrique  $g_1 = (1 + u_1)^{N-2} g_0$  a pour courbure scalaire  $\widetilde{\text{Scal}}$  donc  $\varphi = \varphi_0(1 + u_1)$  résout (2.20). La régularité de  $\varphi$  provient alors d'une estimée elliptique standard basée sur le théorème 2.1.3.

Nous devons finalement lever l'hypothèse  $\widetilde{\text{Scal}} \in L^\infty(M, \mathbb{R})$ . L'idée est de considérer, pour tout entier  $k \geq n(n-1)$ , la fonction  $\widetilde{\text{Scal}}_k = \max\{\widetilde{\text{Scal}}, -k\} \in L^\infty(M, \mathbb{R})$ . On obtient ainsi une suite de fonctions décroissant vers  $\widetilde{\text{Scal}}$ . Les solutions  $\varphi_k$  des équations de courbure scalaire prescrite à  $\widetilde{\text{Scal}}_k$  forment une suite de fonctions positives décroissant vers une fonction  $\varphi_\infty$  solution de (2.20). La principale difficulté vient ici du fait qu'il faut montrer que  $\varphi_\infty \neq 0$ . Ceci s'obtient en montrant que les  $\varphi_k$  sont minorées par une fonction  $\psi$  solution de (2.20) dans un voisinage  $C_{\rho_0} = \rho^{-1}(0, \rho_0)$  avec  $\rho_0 > 0$  avec  $\psi \rightarrow 1$  à l'infini et  $\psi = 0$  sur le bord  $\rho^{-1}(\rho_0)$ .

## 2.5.2 L'équation de Lichnerowicz

Regardons maintenant l'équation de Lichnerowicz (1.11) sur une variété asymptotiquement hyperbolique. La principale raison pour laquelle nous nous sommes intéressés à l'équation de prescription de la courbure scalaire est le résultat d'A. Sakovich suivant :

**Théorème 2.5.3.** [Sak10, Théorème 7.1] Soit  $(M, g)$  une variété asymptotiquement hyperbolique. Alors l'équation de Lichnerowicz (1.11) admet une solution  $\varphi$  telle que  $\varphi \rightarrow 1$  à l'infini si et seulement si l'équation correspondante avec  $A \equiv 0$  (autrement dit l'équation de prescription de la courbure scalaire (2.20) avec  $\widetilde{\text{Scal}} \equiv -\frac{n-1}{n}\tau^2$ ) admet une solution.

Combiné avec le théorème 2.5.1, nous obtenons alors le résultat suivant qui décrit complètement les cas d'existence de solutions à l'équation de Lichnerowicz :

**Théorème 2.5.4.** [8] Soient  $(M, g)$  une variété  $C^{l,\beta}$ -asymptotiquement hyperbolique,  $\tau$  et  $A$  deux fonctions sur  $M$  telles que  $\tau - n, A \in C_{\delta/2}^{k,\alpha}(M, \mathbb{R})$  avec  $k$  entier et  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $k + \alpha \leq l + \beta$  et  $\delta \in (0, n)$ . Supposons  $\text{Scal} + n(n-1) \in C_{\delta}^{k,\alpha}(M, \mathbb{R})$ . Alors, si  $\mathcal{Y}_g(\mathcal{Z}) > 0$  avec  $\mathcal{Z} = \tau^{-1}(0)$ , l'équation de Lichnerowicz (1.11) admet une unique solution  $\varphi$  telle que  $\varphi - 1 \in C_{\delta}^{k,\alpha}(M, \mathbb{R})$ .

## 2.5.3 Les équations de contrainte conforme

Le résultat suivant est l'application du théorème 2.1.3 pour l'opérateur  $\Delta_{\mathbb{L}}$ . Soit  $(M, g)$  une variété asymptotiquement hyperbolique, on a :

**Théorème 2.5.5.** [Gic10a, Théorème 6.8] Soit  $(M, g)$  une variété  $C^{l,\beta}$ -asymptotiquement hyperbolique avec  $l + \beta \geq 2$ . L'opérateur  $\Delta_{\mathbb{L}}$  est un isomorphisme entre les espaces suivants :

- $W_{\delta}^{k,p}(M, TM) \rightarrow W_{\delta}^{k-2,p}(M, T^*M)$ , si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq k \leq l$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$  avec  $\left| \delta + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{2} \right| < \frac{n+1}{2}$ ,
- $C_{\delta}^{k,\alpha}(M, TM) \rightarrow C_{\delta}^{k-2,\alpha}(M, T^*M)$ , si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $k + \alpha \leq l + \beta$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$  avec  $\left| \delta - \frac{n-1}{2} \right| < \frac{n+1}{2}$ ,
- $X_{\delta}^{k,p}(M, TM) \rightarrow X_{\delta}^{k-2,p}(M, T^*M)$ , si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq k \leq l$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$  avec  $\left| \delta - \frac{n-1}{2} \right| < \frac{n+1}{2}$ .

Nous allons maintenant voir comment adapter la méthode de l'équation limite introduite dans la section 1.4. Ce travail [15] est en collaboration avec A. Sakovich. Remarquons tout d'abord que la méthode HNT (voir section 1.5) ne s'adapte pas au cas asymptotiquement hyperbolique. En effet, elle consiste à construire des solutions  $(\varphi, X)$  aux équations de contrainte conforme (1.7) avec  $\varphi$  proche de zéro (en norme  $L^\infty$  par exemple), ce qui est incompatible avec la condition  $\varphi \rightarrow 1$  à l'infini. La méthode de l'équation limite, par contre, s'applique :

**Théorème 2.5.6.** [15, Théorème 2.8] Soit  $(M, g)$  une variété  $C^{l,\beta}$ -asymptotiquement hyperbolique à courbure scalaire constante  $-n(n-1)$  avec  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l \geq 2$  et  $\beta \in [0, 1)$ . Soit  $\sigma_0 \in X_\delta^{1,p}(M, \mathring{\text{Sym}}^2(M))$  un TT-tenseur, avec  $p \in (n, \infty)$ , et  $\delta \in (0, n)$ . Supposons de plus que  $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction positive telle que  $\tau - 1 \in X_\delta^{1,p}(M, \mathbb{R})$ . Si l'équation limite

$$\Delta_{\mathbb{L}} Y = \lambda \sqrt{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{L}Y|_g \frac{d\tau}{\tau}$$

n'admet pas de solution  $Y \in W^{1,2}(M, TM)$  non nulle pour tout  $\lambda \in (0, 1]$ , alors l'ensemble des solutions  $(\varphi, X) \in X_+^{2,p}(M, \mathbb{R}) \times X_\delta^{2,p}(M, TM)$  des équations de contrainte conforme (1.7) est non vide et compact.

Si  $(\varphi, X)$  est une solution, on a que  $\varphi - 1 \in X_\delta^{2,p}(M, \mathbb{R})$  et  $X \in X_\delta^{2,p}(M, TM)$ .

De plus,

- Si  $\sigma_0 \in X_\delta^{k-1,p}(M, \mathring{\text{Sym}}^2(M))$  et  $\tau - n \in X_\delta^{k-1,p}(M, \mathbb{R})$  pour un certain  $k \in \{1, \dots, l\}$ , alors l'importe quelle solution  $(\varphi, X) \in X_+^{2,p}(M, \mathbb{R}) \times X_\delta^{2,p}(M, TM)$  est dans  $(1 + X_\delta^{k,p}(M, \mathbb{R})) \times X_\delta^{k,p}(M, TM)$ , et l'ensemble  $\{(\varphi - 1, X)\} \subset X_\delta^{k,p}(M, \mathbb{R}) \times X_\delta^{k,p}(M, TM)$  est compact.
- Si  $\sigma_0 \in C_\delta^{k-1,\alpha}(M, \mathring{\text{Sym}}^2(M))$  et  $\tau - n \in C_\delta^{k-1,\alpha}(M, \mathbb{R})$  pour  $k \geq 1$  et  $\alpha \in (0, 1)$  tels que  $k + \alpha \leq l + \beta$ , alors n'importe quelle solution  $(\varphi, \psi) \in X_+^{2,p}(M, \mathbb{R}) \times X_\delta^{2,p}(M, TM)$  est dans  $(1 + C_\delta^{k,\alpha}(M, \mathbb{R})) \times C_\delta^{k,\alpha}(M, TM)$ , et l'ensemble  $\{(\varphi - 1, \psi)\} \subset C_\delta^{k,\alpha}(M, \mathbb{R}) \times C_\delta^{k,\alpha}(M, TM)$  est compact.

*Remarque 2.5.7.* 1. L'hypothèse de courbure scalaire constante permet uniquement d'obtenir la décroissance optimale des solutions à l'infini. Elle peut être affaiblie en  $\text{Scal} + n(n-1) \in C_\delta^{k-2,\alpha}(M, \mathbb{R})$ .

2. La compacité de l'ensemble des solutions a lieu dès lors que l'équation limite (1.35) n'a pas de solution non nulle pour  $\lambda = 1$ .
3. Les conditions de non-existence de solution à l'équation limite sont similaires à celles donnés dans la proposition 1.4.2.





# Articles présentés

- [1] E. Bahuaud and R. Gicquaud, *Conformal compactification of asymptotically locally hyperbolic metrics*, J. Geom. Anal. **21** (2011), no. 4, 1085–1118.
- [2] P. Chruściel and R. Gicquaud, *Bifurcating solutions of the Lichnerowicz equation*, Ann. Henri Poincaré **18** (2017), no. 2, 643–679. MR 3596773
- [3] J. Cortier, M. Dahl, and R. Gicquaud, *Mass-like invariants for asymptotically hyperbolic metrics*, <http://arxiv.org/abs/1603.07952>, 2016.
- [4] M. Dahl, R. Gicquaud, and E. Humbert, *A limit equation associated to the solvability of the vacuum Einstein constraint equations by using the conformal method*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 14, 2669–2697.
- [5] ———, *A non-existence result for a generalization of the equations of the conformal method in general relativity*, Classical Quantum Gravity **30** (2013), no. 7, 075004, 8.
- [6] M. Dahl, R. Gicquaud, and A. Sakovich, *Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic graphs*, Ann. Henri Poincaré **14** (2013), no. 5, 1135–1168.
- [7] ———, *Asymptotically hyperbolic manifolds with small mass*, Comm. Math. Phys. **325** (2014), no. 2, 757–801.
- [8] R. Gicquaud, *Prescribed non positive scalar curvature on asymptotically hyperbolic manifolds with application to the Lichnerowicz equation*, preprint, 2019.
- [9] ———, *Solutions to the Einstein constraint equations with a small TT-tensor and vanishing Yamabe invariant*, arXiv :1802.05080v2.
- [10] ———, *Conformal compactification of asymptotically locally hyperbolic metrics II : weakly ALH metrics*, Comm. Partial Differential Equations **38** (2013), no. 8, 1313–1367.
- [11] R. Gicquaud and C. Huneau, *Limit equation for vacuum Einstein constraints with a translational Killing vector field in the compact hyperbolic case*, J. Geom. Phys. **107** (2016), 175–186.
- [12] R. Gicquaud, D. Ji, and Y. Shi, *On the asymptotic behavior of Einstein manifolds with an integral bound on the Weyl curvature*, Comm. Anal. Geom. **21** (2013), no. 5, 1081–1113.
- [13] R. Gicquaud and Q.A. Ngô, *A new point of view on the solutions to the Einstein constraint equations with arbitrary mean curvature and small TT-tensor*, Class. Quantum Grav. **31** (2014), no. 19, 195014 (20pp).
- [14] R. Gicquaud and C. Nguyen, *Solutions to the Einstein-scalar field constraint equations with a small TT-tensor*, Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), no. 2, Art. 29, 23.
- [15] R. Gicquaud and A. Sakovich, *A large class of non constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold*, Comm. Math. Phys. **310** (2012), no. 3, 705–763.



# Bibliographie

- [AC96] L. Andersson and P.T. Chruściel. Solutions of the constraint equations in general relativity satisfying “hyperboloidal boundary conditions”. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 355 :100, 1996.
- [ACF92] L. Andersson, P.T. Chruściel, and H. Friedrich. On the regularity of solutions to the Yamabe equation and the existence of smooth hyperboloidal initial data for Einstein’s field equations. *Comm. Math. Phys.*, 149(3) :587–612, 1992.
- [ACG08] L. Andersson, M. Cai, and G. J. Galloway. Rigidity and positivity of mass for asymptotically hyperbolic manifolds. *Ann. Henri Poincaré*, 9(1) :1–33, 2008.
- [AILS18] Paul T. Allen, James Isenberg, John M. Lee, and Iva Stavrov Allen. Weakly asymptotically hyperbolic manifolds. *Commun. Anal. Geom.*, 26(1) :1–61, 2018.
- [Bah09] E. Bahuaud. Intrinsic characterization for Lipschitz asymptotically hyperbolic metrics. *Pacific J. Math.*, 239(2) :231–249, 2009.
- [Bar86] R. Bartnik. The mass of an asymptotically flat manifold. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(5) :661–693, 1986.
- [BCS05] R. Beig, P.T. Chruściel, and R. Schoen. KIDs are non-generic. *Ann. Henri Poincaré*, 6(1) :155–194, 2005.
- [Ber06] S. Bernstein. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. *Math. Ann.*, 62(2) :253–271, 1906.
- [Ber10] S. Bernstein. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. *Math. Ann.*, 69(1) :82–136, 1910.
- [Bes87] A. L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [BI04] R. Bartnik and J. Isenberg. The constraint equations. In *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, pages 1–38. Birkhäuser, Basel, 2004.
- [BM87] G. Bunting and A. K. M. Massod-ul-Alam. Nonexistence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time. *Gen. Relativ. Gravitation*, 19 :147–154, 1987.
- [BM08] E. Bahuaud and T. Marsh. Hölder compactification for some manifolds with pinched negative curvature near infinity. *Canad. J. Math.*, 60(6) :1201–1218, 2008.
- [BM11] S. Brendle and F. C. Marques. Recent progress on the Yamabe problem. In *Surveys in geometric analysis and relativity. Dedicated to Richard Schoen in honor of his 60th birthday*, pages 29–47. Somerville, MA : International Press ; Beijing : Higher Education Press, 2011.
- [Bra01] H. L. Bray. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. *J. Differential Geom.*, 59(2) :177–267, 2001.
- [Bre97] G. E. Bredon. *Sheaf theory*, volume 170 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [CB09] Y. Choquet-Bruhat. *General relativity and the Einstein equations*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [CBIP06] Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, and D. Pollack. The Einstein-scalar field constraints on asymptotically Euclidean manifolds. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 27(1) :31–52, 2006.

- [CBIP07] Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, and D. Pollack. The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds. *Classical Quantum Gravity*, 24(4) :809–828, 2007.
- [CCS16] C. Cederbaum, J. Cortier, and A. Sakovich. On the center of mass of asymptotically hyperbolic initial data sets. *Ann. Henri Poincaré*, 17(6) :1505–1528, 2016.
- [CD01] David M. J. Calderbank and Tammo Diemer. Differential invariants and curved Bernstein-Gelfand-Gelfand sequences. *J. Reine Angew. Math.*, 537 :67–103, 2001.
- [CGNP18] P. Chruściel, G. Galloway, L. Nguyen, and T. Paetz. On the mass aspect function and positive energy theorems for asymptotically hyperbolic manifolds. <http://arxiv.org/abs/1801.03442>, 2018.
- [CH03] P. T. Chruściel and M. Herzlich. The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds. *Pacific J. Math.*, 212(2) :231–264, 2003.
- [Chi87] C. Chicone. The monotonicity of the period function for planar Hamiltonian vector fields. *J. Differential Equations*, 69(3) :310–321, 1987.
- [CLN06] B. Chow, P. Lu, and L. Ni. *Hamilton’s Ricci flow*, volume 77 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [CN01] P. T. Chruściel and G. Nagy. The mass of spacelike hypersurfaces in asymptotically anti-de Sitter space-times. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 5(4) :697–754, 2001.
- [CNV15] J. Cheeger, A. Naber, and D. Valtorta. Critical sets of elliptic equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 68(2) :173–209, 2015.
- [CR71] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. *Jour. Funct. Anal.*, 8 :321–340, 1971.
- [Del17] E. Delay. Conformally covariant parametrizations for relativistic initial data. *Classical Quantum Gravity*, 34(1) :01LT01, 11, 2017.
- [DGH08] Z. Djadli, C. Guillarmou, and M. Herzlich. *Opérateurs géométriques, invariants conformes et variétés asymptotiquement hyperboliques*. Panorama et Synthèses **26**. Société Mathématique de France, Paris, 2008.
- [DIMM14] J. Dilts, J. Isenberg, R. Mazzeo, and C. Meier. Non-CMC solutions of the Einstein constraint equations on asymptotically Euclidean manifolds. *Class. Quantum Grav.*, 31(6) :065001, 10, 2014.
- [DJ10] S. Dutta and M. Javaheri. Rigidity of conformally compact manifolds with the round sphere as the conformal infinity. *Adv. Math.*, 224(2) :525–538, 2010.
- [DK15] H. Derksen and G. Kemper. *Computational invariant theory*, volume 130 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, Heidelberg, enlarged edition, 2015. With two appendices by Vladimir L. Popov, and an addendum by Norbert A’Campo and Popov, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VIII.
- [dLGa15] Levi Lopes de Lima and Frederico Girão. Positive mass and Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic hypersurfaces. *Gen. Relativity Gravitation*, 47(3) :Art. 23, 20, 2015.
- [dLGa16] Levi Lopes de Lima and Frederico Girão. An Alexandrov-Fenchel-type inequality in hyperbolic space with an application to a Penrose inequality. *Ann. Henri Poincaré*, 17(4) :979–1002, 2016.
- [DM] J. Dilts and D. Maxwell. Yamabe Classification and Prescribed Scalar Curvature in the Asymptotically Euclidean Setting. arXiv :1503.04172.
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill. Visibility manifolds. *Pacific J. Math.*, 46 :45–109, 1973.
- [Feg76] H. D. Fegan. Conformally invariant first order differential operators. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 27(107) :371–378, 1976.
- [FG12] C. Fefferman and R. Graham. *The ambient metric*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2012.

- [Gic09] R. Gicquaud. *Étude de quelques problèmes d'analyse et de géométrie sur les variétés asymptotiquement hyperboliques*. PhD thesis, Université Montpellier 2, 2009.
- [Gic10a] R. Gicquaud. De l'équation de prescription de courbure scalaire aux équations de contrainte en relativité générale sur une variété asymptotiquement hyperbolique. *J. Math. Pures Appl.*, 94(2) :200–227, 2010.
- [Gic10b] R. Gicquaud. Linearization stability of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold. *J. Math. Phys.*, 51(7) :072501, 14, 2010.
- [Gic18] R. Gicquaud. Functional decaying under the heat flow (?). <https://mathoverflow.net/questions/301673/functional-decaying-under-the-heat-flow>, 2018.
- [GL91] C. R. Graham and J. M. Lee. Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball. *Adv. Math.*, 87(2) :186–225, 1991.
- [GT01] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [Ham82] R. S. Hamilton. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(1) :65–222, 1982.
- [HE73] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.
- [Her05] M. Herzlich. Mass formulae for asymptotically hyperbolic manifolds. In *AdS/CFT correspondence : Einstein metrics and their conformal boundaries*, volume 8 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 103–121. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.
- [HH97] E. Hebey and M. Herzlich. Harmonic coordinates, harmonic radius and convergence of Riemannian manifolds. *Rend. Mat. Appl. (7)*, 17(4) :569–605 (1998), 1997.
- [HI01] G. Huiskens and T. Ilmanen. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J. Differential Geom.*, 59(3) :353–437, 2001.
- [HM15] M. Holst and C. Meier. Non-CMC solutions to the Einstein constraint equations on asymptotically Euclidean manifolds with apparent horizon boundaries. *Classical Quantum Gravity*, 32(2) :025006, 28, 2015.
- [HMT18] M. Holst, C. Meier, and G. Tsogtgerel. Non-CMC solutions of the Einstein constraint equations on compact manifolds with apparent horizon boundaries. *Comm. Math. Phys.*, 357(2) :467–517, 2018.
- [HNT08] M. Holst, G. Nagy, and G. Tsogtgerel. Far-from-constant mean curvature solutions of Einstein's constraint equations with positive Yamabe metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 100(16) :161101, 4, 2008.
- [HNT09] M. Holst, G. Nagy, and G. Tsogtgerel. Rough solutions of the Einstein constraints on closed manifolds without near-CMC conditions. *Comm. Math. Phys.*, 288(2) :547–613, 2009.
- [HP14] G. Henry and J. Petean. Isoparametric hypersurfaces and metrics of constant scalar curvature. *Asian Jour. Math.*, 18 :53–67, 2014.
- [HPP08] E. Hebey, F. Pacard, and D. Pollack. A variational analysis of Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 278(1) :117–132, 2008.
- [HQS12] X. Hu, J. Qing, and Y. Shi. Regularity and rigidity of asymptotically hyperbolic manifolds. *Adv. Math.*, 230(4-6) :2332–2363, 2012.
- [HW13] Lan-Hsuan Huang and Damin Wu. Hypersurfaces with nonnegative scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 95(2) :249–278, 2013.
- [HW15] Lan-Hsuan Huang and Damin Wu. The equality case of the Penrose inequality for asymptotically flat graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(1) :31–47, 2015.
- [IMP05] J. Isenberg, D. Maxwell, and D. Pollack. A gluing construction for non-vacuum solutions of the Einstein-constraint equations. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 9(1) :129–172, 2005.

- [Ise95] J. Isenberg. Constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds. *Class. Quantum Grav.*, 12(9) :2249–2274, 1995.
- [KMS93] I. Kolář, P. Michor, and J. Slovák. *Natural operations in differential geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Lam10] M.-K. G. Lam. The graph cases of the Riemannian positive mass and Penrose inequalities in all dimensions. <http://arxiv.org/abs/1010.4256>, 2010.
- [Lea14] J. Leach. A far-from-CMC existence result for the constraint equations on manifolds with ends of cylindrical type. *Class. Quantum Grav.*, 31(3) :035003, 2014.
- [Lee95] J. M. Lee. The spectrum of an asymptotically hyperbolic Einstein manifold. *Comm. Anal. Geom.*, 3(1-2) :253–271, 1995.
- [Lee06] J. M. Lee. Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 183(864) :vi+83, 2006.
- [Lee09] D. A. Lee. On the near-equality case of the positive mass theorem. *Duke Math. J.*, 148(1) :63–80, 2009.
- [Lov71] D. Lovelock. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, 12 :498–501, 1971.
- [LP87] J.M. Lee and T.H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1) :37–91, 1987.
- [LQS17] G. Li, J. Qing, and Y. Shi. Gap phenomena and curvature estimates for conformally compact Einstein manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(6) :4385–4413, 2017.
- [Max] D. Maxwell. Initial Data in General Relativity Described by Expansion, Conformal Deformation and Drift. arXiv :1407.1467.
- [Max09] D. Maxwell. A class of solutions of the vacuum Einstein constraint equations with freely specified mean curvature. *Math. Res. Lett.*, 16(4) :627–645, 2009.
- [Max11a] D. Maxwell. A model problem for conformal parameterizations of the Einstein constraint equations. *Comm. Math. Phys.*, 302(3) :697–736, 2011.
- [Max11b] D. Maxwell. A model problem for conformal parameterizations of the Einstein constraint equations. *Comm. Math. Phys.*, 302(3) :697–736, 2011.
- [Max14] D. Maxwell. The conformal method and the conformal thin-sandwich method are the same. *Classical Quantum Gravity*, 31(14) :145006, 34, 2014.
- [Mer99] M. Meringer. Fast generation of regular graphs and construction of cages. *J. Graph Theory*, 30(2) :137–146, 1999.
- [Mic11] B. Michel. Geometric invariance of mass-like asymptotic invariants. *J. Math. Phys.*, 52(5) :052504, 14, 2011.
- [Nev10] A. Neves. Insufficient convergence of inverse mean curvature flow on asymptotically hyperbolic manifolds. *J. Differential Geom.*, 84(1) :191–229, 2010.
- [Ngua] T. C. Nguyen. Nonexistence and Nonuniqueness Results for Solutions to the Vacuum Einstein Conformal Constraint Equations. submitted, arXiv :1507.01081.
- [Ngub] T. C. Nguyen. Progress on nonuniqueness of solutions to the vacuum Einstein conformal constraint equations with positive Yamabe invariant . submitted, arXiv :1802.00077.
- [Ngu16] T. C. Nguyen. Applications of fixed point theorems to the vacuum Einstein constraint equations with non-constant mean curvature. *Ann. Henri Poincaré*, 17(8) :2237–2263, 2016.
- [Nir01] L. Nirenberg. *Topics in nonlinear functional analysis*, volume 6 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Chapter 6 by E. Zehnder, Notes by R. A. Artino, Revised reprint of the 1974 original.
- [Pet06] P. Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.

- [Pet14] J. Petean. Degenerate solutions of a nonlinear elliptic equation on the sphere. *Nonlinear Anal.*, 100 :23–29, 2014.
- [Pöt11] C. Pötzsche. Bifurcation theory. Lecture Notes, SS 2010, TU München, [http://wwwu.uni-klu.ac.at/cpoetzsc/Christian\\_Potzsche\\_%28Publications%29/Publications\\_files/BifScript.pdf](http://wwwu.uni-klu.ac.at/cpoetzsc/Christian_Potzsche_%28Publications%29/Publications_files/BifScript.pdf), July 2011.
- [Pre14a] B. Premoselli. Effective multiplicity for the Einstein-scalar field Lichnerowicz equation. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, pages 1–36, 2014.
- [Pre14b] B. Premoselli. The Einstein-scalar field constraint system in the positive case. *Comm. Math. Phys.*, 326(2) :543–557, 2014.
- [Pro07] C. Procesi. *Lie groups*. Universitext. Springer, New York, 2007. An approach through invariants and representations.
- [PW16] B. Premoselli and J. Wei. Non-compactness and infinite number of conformal initial data sets in high dimensions. *J. Funct. Anal.*, 270(2) :718–747, 2016.
- [Rab71a] P.H. Rabinowitz. A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applicatons. In *Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971)*, pages 11–36. Academic Press, New York, 1971.
- [Rab71b] P.H. Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *Jour. Funct. Analysis*, 7 :487–513, 1971.
- [Rab85] P.H. Rabinowitz. Global aspects of bifurcation. In *Topological methods in bifurcation theory*, volume 91 of *Sém. Math. Sup.*, pages 63–112. Presses Univ. Montréal, Montreal, QC, 1985.
- [Rau95] A. Rauzy. Courbures scalaires des variétés d’invariant conforme négatif. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(12) :4729–4745, 1995.
- [Rin09] H. Ringström. *The Cauchy problem in general relativity*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009.
- [Sak10] A. Sakovich. Constant mean curvature solutions of the Einstein-scalar field constraint equations on asymptotically hyperbolic manifolds. *Classical Quantum Gravity*, 27(24) :12, 2010.
- [Sch89] R. Schoen. Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics. In *Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987)*, volume 1365 of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–154. Springer, Berlin, 1989.
- [Sch14] R. Schneider. *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory. 2nd expanded ed.*, volume 151. Cambridge : Cambridge University Press, 2nd expanded ed. edition, 2014.
- [Smo94] J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations*, volume 258 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1994.
- [ST05] Y. Shi and G. Tian. Rigidity of asymptotically hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 259(3) :545–559, 2005.
- [Sta98] C. Stanculescu. Spherically symmetric solutions of the vacuum Einstein field equations with positive cosmological constant, 1998. Diploma Thesis, University of Vienna, <http://ubdata.univie.ac.at/AC02358808>.
- [SY79] R. Schoen and S. T. Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1) :45–76, 1979.
- [Tay95] J. Taylor. Notes on topological vector spaces. <http://www.math.utah.edu/~taylor/LCS.pdf>, 1995.
- [Tay11] M. Taylor. *Partial differential equations III. Nonlinear equations*, volume 117 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2011.
- [TZ11] B. Texier and K. Zumbrun. Nash-Moser iteration and singular perturbations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 28(4) :499–527, 2011.



- [Wal84] R. M. Wald. *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.
- [Wan01] X. Wang. The mass of asymptotically hyperbolic manifolds. *J. Differential Geom.*, 57(2) :273–299, 2001.
- [Wan05] X. Wang. On the uniqueness of the AdS spacetime. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 21(4) :917–922, 2005.

# Résumé

Ce manuscrit présente les travaux de recherche que j'ai conduits depuis ma soutenance de thèse. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre de la relativité générale et, plus particulièrement dans l'étude des données initiales pour le problème de Cauchy. Deux axes se dessinent alors : celui de la construction de ces données et celui de l'analyse de leurs propriétés géométriques. Cette dichotomie se reflète dans la structure du manuscrit qui est naturellement divisé en deux chapitres.

Le premier chapitre concerne la construction de données initiales. De manière très naïve, il s'agit d'un instantané à un "temps initial" de l'univers qu'on souhaite décrire contenant toute l'information sur les différents champs (gravitationnel, électromagnétique, de matière(s)...) ainsi que de leur "vitesse". Une bonne partie de la difficulté de ce problème vient du fait qu'il existe des relations, appelées équations de contrainte, que doivent satisfaire ces champs.

Ce chapitre étudie donc la construction de solutions aux équations de contrainte dans le cadre très particulier où seul le champ de gravitation est présent. Cette restriction est la plupart du temps cosmétique car elle permet de simplifier les équations tout en gardant les difficultés conceptuelles du problème. La méthode utilisée ici est appelée méthode conforme. Elle s'est avérée très utile pour classer une classe particulière de données initiales (dites à courbure moyenne constante) dans les années 90, mais jusqu'en 2009, peu de choses étaient connues hors de ce cadre, c'est-à-dire pour des données initiales à courbure moyenne non constante.

Le premier chapitre propose donc un panorama sur les résultats que j'ai obtenus dans la construction de telles données. Essentiellement deux approches existent pour résoudre les équations de la méthode conforme.

La première que j'ai introduite en collaboration avec M. Dahl et E. Humbert utilise un théorème de point fixe de type Leray-Schauder et étudie ce qu'il se passe lorsqu'il y a perte de compacité des solutions à famille à un paramètre d'équations considérée. Ceci conduit à une équation dite limite associée au profil d'explosion. La non-existence de solution à cette équation assure donc l'hypothèse de compacité dans le théorème de Leray-Schauder, ce qui garantit l'existence d'au moins une solution aux équations de la méthode conforme.

La seconde approche consiste à court-circuiter la difficulté à obtenir une estimée a priori et forcer les solutions à être "petites". C'est l'approche de M. Holst, G. Nagy et G. Tsogtgerel (HNT) raffinée ensuite par D. Maxwell. Avec A. Ngo, nous avons montré comment cette méthode peut se reformuler en un argument de perturbation au prix d'un résultat légèrement plus faible, mais néanmoins constructif. Ce nouveau point de vue permet de tester plus simplement de potentielles extensions de l'approche HNT, ce qui nous a permis, avec C. Nguyen, de montrer qu'elle est plus robuste que ce qui était initialement espéré et s'applique notamment dans des cas inaccessibles à la méthode de l'équation limite.

L'introduction d'une constante cosmologique ou, plus généralement, d'un champ scalaire, modifie en profondeur les équations de la méthode conforme. Ceci peut conduire, par exemple, à la non-unicité des solutions de l'une d'entre elles, l'équation de Lichnerowicz. Nous avons étudié ce problème avec P. Chruściel dans un cas très symétrique pour lequel l'équation de Lichnerowicz se réduit à l'étude d'une équation différentielle. Il est alors possible d'utiliser des techniques issues de la théorie des bifurcations pour obtenir une caractérisation complète des solutions en fonction des différents paramètres.

Le second chapitre est consacré à un type particulier de données initiales (dites asymptotiquement hyperboliques) qui apparaissent dans l'étude de systèmes isolés ou dans les modèles d'univers à constante cosmologique négative. Nous considérons ici essentiellement des données symétriques en temps, c'est-à-dire des variétés riemanniennes (avec une seconde forme fondamentale nulle ou proportionnelles à la métrique).

La première question à laquelle nous nous intéressons est d'établir un lien entre la définition usuelle des variétés asymptotiquement hyperboliques (existence d'une compactification conforme régulière) et celle, plus naturelle d'un point de vue géométrique, de variété dont la courbure ressemble asymptotiquement à celle de l'espace hyperbolique (variété asymptotiquement localement hyperbolique). Sous une certaine hy-

pothèse, nous montrons que les variétés asymptotiquement localement hyperboliques admettent une compactification conforme dont nous précisons la régularité.

Nous nous intéressons ensuite à des questions de rigidité : lorsque qu'on impose trop de contraintes sur une classe d'espaces, seul subsiste l'espace modèle, l'espace hyperbolique dans notre cas. En collaboration avec D. Ji et Y. Shi, nous avons montré qu'une hypothèse sur la courbure de Ricci (variété d'Einstein) combinée à une hypothèse d'intégrabilité du tenseur de Weyl conduit à un tel phénomène de rigidité.

Un autre phénomène de rigidité a lieu sous des hypothèses fortes à l'infini des variétés asymptotiquement hyperboliques combinées à des hypothèses sur la courbure scalaire. Ceci conduit à la notion de masse d'une variété asymptotiquement hyperbolique. Dans des travaux en collaboration avec M. Dahl et A. Sakovich, nous avons montré que la masse contrôle, du moins dans une certaine classe de variétés asymptotiquement hyperboliques et dans un voisinage de l'infini, l'écart entre la métrique et la métrique hyperbolique.

Une inégalité dite de Penrose et encore conjecturale stipule que la masse est minorée par une certaine fonction dépendant de l'aire de l'ensemble des trous noirs présents dans l'univers. Dans un second travail en collaboration avec M. Dahl et A. Sakovich, nous montrons que cette inégalité est vraie dans un cadre très particulier (celui des graphes) et donnons quelques pistes pour une étude dans le cas général.

Contrairement à son analogue asymptotiquement euclidienne, la masse d'une variété asymptotiquement hyperbolique est un vecteur dans l'espace de Minkowski qui possède des propriétés de covariance sous les changements de carte à l'infini. Dans un article avec M. Dahl et J. Cortier nous avons montré qu'il existe une infinité d'autres objets possédant des propriétés similaires (de covariance notamment) à la masse. Le statut de ces objets est encore inconnu et ouvre de nombreuses perspectives de recherche.

De nombreuses questions jalonnent le manuscrit. Celles-ci sont des pistes de recherche future en tant que projets personnels, en collaboration ou en tant que proposition de sujet de thèse.