



HAL
open science

Utilisation de modèles lisses pour l'inversion tomographique de données sismiques

Delphine Sinoquet

► **To cite this version:**

Delphine Sinoquet. Utilisation de modèles lisses pour l'inversion tomographique de données sismiques. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Paris XIII Paris Villetaneuse, 1995. Français. NNT : . tel-02494340

HAL Id: tel-02494340

<https://hal.science/tel-02494340>

Submitted on 28 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Spécialité:

MATHEMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

Delphine SINOQUET

pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Sujet de la thèse :

**UTILISATION DE MODÈLES LISSES POUR L'INVERSION
TOMOGRAPHIQUE DE DONNÉES SISMIQUES**

Soutenue le 23 mars 1995 devant le jury composé de :

MM.	Alain BAMBERGER	
	Claude BASDEVANI	
	Yann BRENIER	Rapporteur
	Guy CANADAS	
M.	Guy CHAVENT	Rapporteur
MME.	Florence DELPRAI-JANNAUD	
M.	Jean-Claude GUILLOT	Directeur de thèse
MME.	Laurence HALPERN	
M.	Patrick LAILLY	

à mes courageux parents,
à mon valeureux mari.

Remerciements

J'adresse mes remerciements à

Jean-Claude Guillot, mon directeur de thèse, grâce à qui j'ai pu faire cette thèse et qui m'a encouragé pendant ces trois années,

Patrick Lailly qui m'a accueilli dans son équipe à l'I.F.P. et a su me guider tout au long de ma thèse par ses précieux conseils,

Florence Delprat-Jannaud qui m'a fait bénéficier de son expérience de la tomographie. Je lui suis également très reconnaissante pour ses nombreux conseils sur la rédaction de cette thèse,

Guy Chavent et Yann Brenier pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur,

Alain Bamberger, Claude Basdevant, Guy Canadas et Laurence Halpern qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury.

Je remercie Jean Brac qui m'a encadré et beaucoup aidé en début de thèse, il a su notamment me faciliter l'entrée dans le monde de la géophysique.

Cette étude a été réalisée avec l'aide du tracé de rayons de Lionel Jannaud et du programme d'optimisation de Quang-Huy Tran. Je leur suis très reconnaissante de leur aide.

Je remercie l'I.F.P. qui m'a accueilli dans de très bonnes conditions et Elf Aquitaine qui a financé cette thèse. J'ai eu la chance à l'I.F.P. de travailler dans une équipe internationale, je tiens à en remercier les membres dans leur propre langue.

Ik wil graag mijn Hollandse collega's bedanken die met mij mijn bureau gedeeld hebben, voor het feit dat ze het bij mij uitgehouden hebben (weliswaar slechts een paar maanden, maar toch) en voor de prachtige woorden die ze mij geleerd hebben uit hun zo rijke taal: bedankt Tijmen-Jan Moser, Sanne Dekker, Jaap Merkus.

Richard Clarke is the only one who succeeded in staying more than 15 years in the same office as me. I am very grateful to him for that and also for making tea and carrot cake.

Îi mulțumesc Irinei Apostoiu-Marin pentru că m-a susținut de-a lungul întregii mele teze atât pe plan științific cât și personal (mai ales cu pâlnică !)

Ich danke Andreas Ehinger dafür, daß er immer Zeit für mich hatte, um mir bei geophysikalischen Methoden und Problemen der Informatik zu helfen.

Ik bedank Jacques Jacobs voor zijn ondersteuning bij het werken met echte seismische gegevens.

J'ai une pensée également pour "Beau Poulet", Bébert, Frank, Fabrice, Isabelle, Mathieu, "Neuneu", Sophie qui m'ont aidé à supporter la vie en célibataire à Pau.

Je ne saurais oublier l'aide informatique de Christian Lebras et de Jocelyne Crocher à Rueil et celle de Marcel Gorin à Pau et nos supers secrétaires, Janine Baudet, Elisabeth Cattin et Béatrice Potdevin.

Je remercie également Michel Barut, Alain et Eric qui ont eu le courage de relire ma thèse et m'ont donné de très bons conseils.

Bien sûr, je ne saurais oublier mon mari et mes parents pour leurs encouragements

Résumé

La tomographie de réflexion permet en théorie la détermination de la distribution des vitesses de propagation dans le sous-sol et de la géométrie des réflecteurs à partir des temps de trajet des ondes sismiques. La solution de ce problème inverse est le modèle (distribution de vitesses et réflecteurs) qui minimise les écarts entre temps observés et temps calculés par un tracé de rayons (problème direct). Deux représentations du champ de vitesse sont généralement utilisées: les modèles *blocky* (discontinus) et les modèles lisses. L'objet de cette thèse est l'étude de la tomographie avec des modèles lisses, ces modèles présentant des propriétés intéressantes aussi bien au niveau pratique qu'au niveau mathématique et numérique.

Nous proposons une formulation originale du problème inverse qui permet l'intégration d'informations a priori adaptées aux modèles lisses. Cette formulation nous assure l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution du problème inverse linéarisé. Le problème inverse non linéaire est résolu par une méthode de Gauss-Newton alors que le problème linéarisé est résolu par une méthode d'optimisation avec contraintes, basée sur la méthode du Lagrangien augmenté. Cette méthode nous a ainsi permis de résoudre des problèmes géophysiques difficiles faisant intervenir des milliers d'inconnues satisfaisant des milliers de contraintes.

Nous montrons également que la formulation choisie réduit considérablement l'indétermination de la solution par rapport aux techniques classiques de régularisation et fournit une solution géologiquement plus acceptable. Cependant, malgré l'introduction d'informations a priori, de l'imprécision dans les données temps de trajet résulte une incertitude dans les données. Une analyse d'incertitude est donc nécessaire: nous proposons pour ce faire une méthode basée sur l'optimisation avec contraintes.

Abstract

Reflection tomography allows in theory the determination of the velocity distribution and the reflector geometries in the subsurface from the travel times of the seismic waves. The solution of the inverse problem is the model (velocity distribution and reflectors) that minimizes the misfits between observed travel times and travel times computed by raytracing (the forward problem). Two representations of the velocity field are generally used: blocky models (discontinuous) and smooth models. The object of this thesis is the study of tomography with smooth models which offer interesting properties at a practical level as well as at a mathematical and numerical level.

We propose an original formulation of the inverse problem which allow the integration of a priori information adapted to smooth models. This formulation assures the existence, the uniqueness and the stability of the solution of the linearized inverse problem. The non-linear inverse problem is solved by a Gauss-Newton method while the linearized problem is solved by an optimization method with constraints based on the augmented Lagrangian method. Using this method, we solve difficult geophysical problems involving thousands of unknowns satisfying thousands of constraints.

Moreover, we show that the chosen formulation substantially reduces the indetermination of the solution compared to classical regularization techniques and furnishes a solution which is geologically more acceptable. However, despite the introduction of a priori information, inaccuracies in the traveltimes data lead to an uncertainty on the solution. An uncertainty analysis is therefore necessary, for which we propose a method based on optimization with constraints.

Table des matières

Chapitre I. Introduction	9
Chapitre II. Présentation de la tomographie de réflexion	13
Chapitre III. Motivations géophysiques de l'étude: recherche d'un modèle lisse à partir des temps d'arrivée des réflexions	19
1. Introduction	21
2. Représentation du milieu pour la tomographie de réflexion	24
3. Tomographie de réflexion avec des modèles lisses	28
4. Les modèles <i>blocky</i> contre les modèles lisses pour la migration et l'analyse de vitesse par migration	37
5. Conclusions	39
Chapitre IV. Tomographie de réflexion avec des modèles lisses	41
1. Introduction	43
2. Information a priori sur le modèle de vitesse	43
3. Estimation du guidage de la vitesse le long de lignes interpolant les interfaces	45
Chapitre V. Etude du problème direct	51
1. Introduction	53
2. Equations des rayons	53
3. Continuité et dérivabilité de la solution du shooting	59
Chapitre VI. Etude du problème inverse	67
1. La méthode de Gauss-Newton	69
2. Etude du problème linéarisé	70
3. Conditions d'optimalité du problème linéarisé	75
Chapitre VII. Résolution numérique	79
1. Paramétrisation du modèle par des B-splines	81
2. Convergence des solutions discrètes du problème non linéaire	82
3. Calcul des termes de la fonction coût et de la jacobienne	82
4. Optimisation avec contraintes	84

Chapitre VIII. Une première application: problème d'approximation de courbes et de surfaces	89
1. Introduction	91
2. Formulation du problème d'approximation	91
3. Approximation de surfaces à partir de points et de lignes de niveau	92
4. Approximation de courbes: construction de lignes de niveau d'une surface	97
5. Approximation simultanée de courbes et de surfaces	98
6. Conclusions	101
Chapitre IX. Application de la tomographie de réflexion avec informations a priori sur des modèles synthétiques simples	103
1. Introduction	105
2. Cas pathologiques de non unicité de la solution du problème inverse linéarisé	105
3. Tests numériques	108
Chapitre X. Conclusions	125
Chapitre XI. Annexes	131
Annexe A. Régularité de la solution des équations des rayons	133
Annexe B. Conditions d'optimalité	139
Annexe C. Construction des B-splines	143
1. Définition des nœuds	143
2. Construction des fonctions de base	144
Annexe D. Calcul du terme de guidage de la vitesse	147
Références bibliographiques	149

Chapitre I. Introduction

L'exploration pétrolière a pour objet l'étude des structures dans lesquels les hydrocarbures ont pu s'accumuler: les pièges. Ainsi, la détermination précise des structures géologiques du sous-sol est une des clés de la prospection; toute information sur la disposition des couches géologiques est précieuse pour implanter ensuite le forage. La méthode la plus utilisée est la sismique qui consiste à engendrer des ébranlements dans le sol, à suivre la propagation de ces ondes qui se réfléchissent sur des discontinuités d'impédance acoustique et à enregistrer les temps de parcours de ces ondes aux géophones situés généralement à la surface. Une telle campagne d'acquisition a un coût modique (50 à 100MF) par rapport au coût d'une campagne de prospection nécessitant l'implantation de 5 à 10 puits (200 à 500MF) (Boy de la Tour, 1993). L'enjeu économique est donc non négligeable.

Dans notre projet, nous nous intéressons plus particulièrement aux structures géologiques complexes qui nécessitent des techniques d'imagerie particulières. La tomographie de réflexion ou inversion des temps de trajet est l'une de ces méthodes. Elle consiste à rechercher un modèle constitué d'un champ de vitesse de propagation et de la géométrie des réflecteurs (ou interfaces) à partir des temps de trajet des ondes sismiques. Nous introduisons les deux types de modèles généralement utilisés: les modèles *blocky* (discontinus de part et d'autre des réflecteurs) et les modèles lisses (continus). Le problème direct consiste à calculer les temps de trajet des ondes se propageant dans un milieu donné. Les données du problème direct sont donc les interfaces et la distribution de vitesse, les inconnues sont les temps de trajet. Le problème inverse consiste à comparer les temps pointés sur les sections sismiques et ces temps calculés par le problème direct. Le modèle ajustant "au mieux" les temps pointés est la solution du problème inverse (chapitre II).

L'imagerie des structures géologiques complexes est réalisée par la migration profondeur avant sommation. Cette technique nécessite une détermination précise de la vitesse de propagation. La tomographie de réflexion semble une méthode appropriée pour calculer la vitesse. Nous avons opté pour le modèle lisse qui est mieux adapté à la tomographie couplée à l'analyse de vitesse par la migration (chapitre III).

Néanmoins ce choix nécessite l'intégration d'informations géologiques adéquates pour éviter les problèmes de sous-détermination de la solution. Nous illustrons nos arguments par un exemple d'inversion de données réelles. Dans le chapitre IV, nous décrivons les informations géologiques que nous avons choisies d'intégrer dans la tomographie. Nous cherchons en fait à introduire dans les modèles lisses le concept de couche ou de bloc qui existe dans les modèles *blocky*: nous introduisons une régularisation qui permet un contrôle local de la courbure de la vitesse et des interfaces ainsi que des variations de la vitesse le long des interfaces.

Nous nous concentrons dans les chapitres V et VI sur les aspects mathématiques de cette formulation de la tomographie.

Dans le chapitre V, nous étudions la formulation continue du problème direct. Elle repose sur la résolution des équations des rayons, les temps de trajet étant la moyenne de la lenteur (inverse de la vitesse) le long du rayon correspondant. Nous démontrons la continuité et la dérivabilité de la solution du tracé de rayons à conditions initiales données par rapport au modèle. Ces résultats montrent l'intérêt de la modélisation choisie (modèles lisses à régularité C^2) et sont très importants pour la résolution du problème inverse décrit dans le chapitre VI.

Le problème inverse est la minimisation au sens des moindres carrés des résidus entre temps observés et temps calculés par le problème direct et des termes de pénalisation modélisant les informations a priori décrites dans le chapitre IV. Ce problème est non linéaire et est résolu par une méthode de Gauss-Newton qui consiste à résoudre successivement des problèmes linéarisés. Nous démontrons que le problème linéarisé associé à la tomographie avec informations a priori admet une et une seule solution sous une hypothèse dite de *complétude des données*.

Dans le chapitre VII, nous nous intéressons à la résolution numérique du problème inverse. Nous avons choisi une discrétisation du modèle par des fonctions B-splines cubiques qui permet de construire facilement des modèles C^2 (régularité nécessaire pour la stabilité du problème direct, chapitre V). Par ailleurs, nous avons opté pour une méthode d'optimisation avec contraintes pour résoudre les problèmes linéarisés intervenant à chaque itération de Gauss-Newton. Les contraintes d'égalité et d'inégalité sur le modèle sont très importantes pour introduire des informations a priori plus précises que celles décrites dans le chapitre IV, par exemple une estimation de la vitesse en surface. De telles informations contribuent également à réduire la sous-détermination de la solution. Le cœur de l'algorithme d'optimisation est la méthode du Lagrangien augmenté qui présente certains avantages par rapport à une méthode duale classique.

Dans le chapitre VIII, nous présentons une première application de la formulation avec informations a priori: nous remplaçons le problème de tomographie par un problème d'approximation de surfaces et de courbes. Ce type de problème est classique en géophysique: il permet de construire des surfaces ou des courbes à partir de points irrégulièrement espacés. Nous validons la formulation de nos informations a priori et nous montrons d'autres applications: l'interpolation d'une surface à partir de points et de lignes de niveau et la construction des lignes de niveau d'une surface

Avant d'appliquer la tomographie à des structures complexes (dans le chapitre III, un exemple d'application de la tomographie sur des données réelles est donné), il est intéressant de traiter des modèles synthétiques simples. Dans la première partie du chapitre IX, nous mettons en évidence des cas pathologiques où la solution du problème linéarisé n'est pas unique, l'hypothèse de complétude des données (chapitre VI) n'étant pas vérifiée. Ces cas pathologiques ne sont, cependant, pas très réalistes. Dans une deuxième partie, nous vérifions expérimentalement dans quelle mesure nous pouvons retrouver des modèles synthétiques simples avec la tomographie de réflexion. Nous montrons que l'introduction des informations géologiques a priori réduit considérablement l'indétermination, c'est-à-dire le nombre de solutions admissibles. Cependant, une analyse d'incertitude sur la solution est toujours utile pour détecter une éventuelle indétermination: nous proposons une technique basée sur l'optimisation avec contraintes. Cette technique est intéressante pour les cas réels tel que celui présenté dans le chapitre III pour vérifier qu'il n'existe pas de solution très différente de celle obtenue.

Chapitre II. Présentation de la tomographie de réflexion

Bois et al., 1971, ont introduit la tomographie pour la sismique de transmission, méthode très proche de la tomographie médicale. Plus tard, Bording et al., 1983, et Bishop et al., 1985, ont développé la tomographie de réflexion.

Le mot tomographie vient du grec *tomos* qui signifie section ou tranche. Les données sont des intégrales le long de lignes ou rayons d'une quantité physique (par exemple, le temps de trajet d'une onde qui est l'intégrale le long du rayon de l'inverse de la vitesse). La tomographie reconstruit un modèle de la quantité physique dont les intégrales le long des rayons s'approchent au mieux des données mesurées.

Nous ne nous intéresserons qu'à la sismique de réflexion. Cette méthode consiste à engendrer des ébranlements dans le sol (explosifs, camions vibrateurs en sismique terrestre, canons à air ou à eau en sismique marine) et à enregistrer en surface les temps de trajet des ondes réfléchies par les discontinuités d'impédance acoustique correspondant souvent à des contacts entre des formations géologiques. Après traitement des données, on obtient une image de la coupe plane verticale appelée *section sismique*.

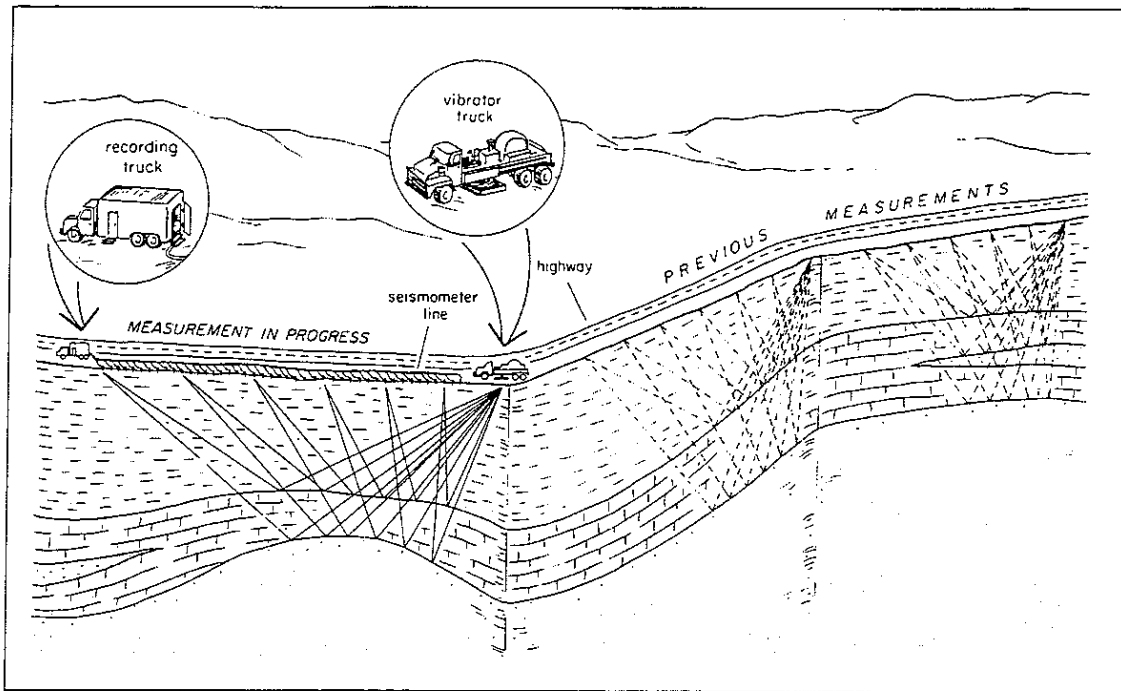


Fig. 1 Une campagne de sismique réflexion terrestre.

La tomographie permet la reconstruction du champ de vitesse de propagation et des interfaces ou réflecteurs, à partir des temps de trajet des ondes sismiques réfléchies pointées sur les sections sismiques. On parlera également d'inversion des temps d'arrivée (*traveltime inversion*).

La résolution d'un problème de tomographie nécessite la résolution de deux types de problème:

- (i) le **problème direct** qui consiste à calculer les temps de trajet des ondes dans un milieu donné, la vitesse et les interfaces étant connues,
- (ii) le **problème inverse** qui permet de déterminer le champ de vitesse et la géométrie des interfaces

à partir des temps de trajet observés

Nous considérons des milieux bi-dimensionnels, on note $\Omega = I_x \times I_z \subset \mathbb{R}^2$, $I_x = [x_m, x_M]$, $I_z = [z_m, z_M]$. Deux types de représentation du milieu sont généralement utilisés:

- les modèles dits **blocky** (défini par bloc) qui repose sur une partition du milieu en couches. Ces modèles se composent des distributions de vitesse associées aux couches et des interfaces qui délimitent les différentes couches. La vitesse peut présenter des discontinuités aux interfaces et est supposée C^2 dans les couches.
- les modèles **lisses** qui se composent d'une distribution unique de la vitesse définie globalement sur Ω et des interfaces. La vitesse est supposée C^2 sur tout le domaine Ω .

Dans cette thèse, nous avons choisi d'utiliser des modèles lisses. Les motivations d'un tel choix sont expliquées dans le chapitre III. Des exemples de modèles lisses et *blocky* sont donnés également dans ce chapitre, Figure 4 page 24 et Figure 5 page 25. Nous donnons la définition du modèle tel qu'il sera utilisé dans cette thèse à partir du chapitre V.

Définition 1

Un **modèle** m est constitué de

- (i) **la lenteur au carré,**

$$U(x, z), (x, z) \in \Omega, \quad (0.1)$$

où $U(x, z) = 1/V(x, z)^2$, V est la vitesse acoustique. Nous supposons que $V(x, z) \in C^2(x, z)$.

- (ii) **la profondeur des N réflecteurs ou interfaces,**

$$Z_i(x), x \in I_x, i = 1, 2, \dots, N. \quad (0.2)$$

On considère des fonctions $Z_i(x)$ univoques et régulières: $Z_i(x) \in C^2(I_x)$.

L'espace des modèles $m = (U, (Z_i)_{1 \leq i \leq N})$ est noté $\mathcal{M} = H^2(\Omega) \times (H^2(I_x))^N$. Nous verrons dans les chapitres V et VI les raisons d'une telle régularité du modèle.

Définition 2

Les **données** ou **observations** sont les temps de trajet des ondes sismiques pointés sur les sections.

Le pointé de ces temps consitue l'interprétation des données: à l'aide des renseignements fournis par les géologues sur le milieu considéré, l'interpréteur peut pointer les temps correspondant aux réflexions sur des interfaces, visibles sur les sections. Ces temps pointés sont donc classés par interface mais pour simplifier les notations, on les note T_k^{obs} , $k = 1, 2, \dots, N_{obs}$, N_{obs} est le nombre *total* d'observations, k numérote les triplets (S, R, i) où S est la source de laquelle est émise l'onde acoustique qui se propage dans le champ de vitesse de propagation $V(x, z)$, se réfléchit sur l'interface i pour atteindre la surface au récepteur R . La position des sources et des récepteurs est donnée. Le triplet (S, R, i) est **la signature du rayon** (Figure 2).

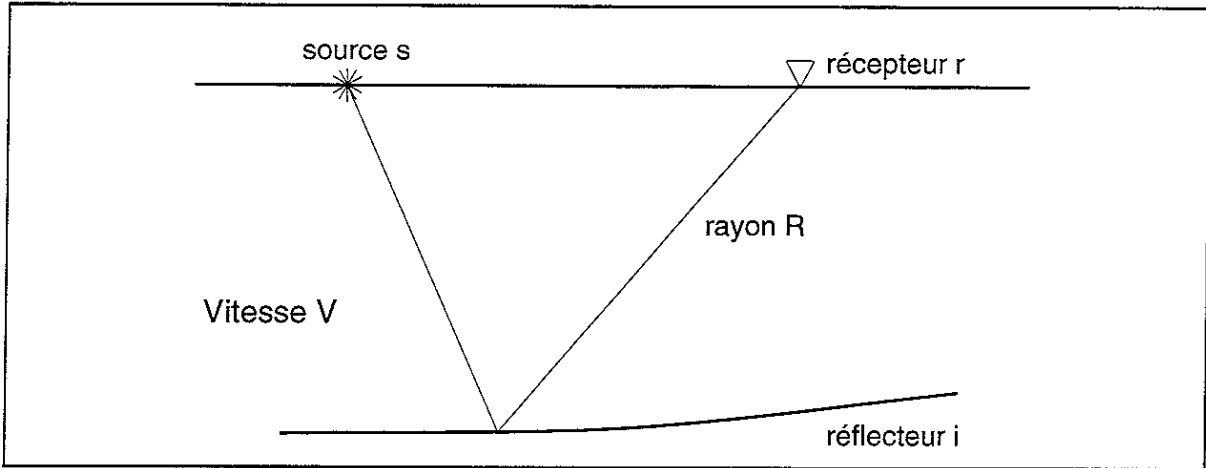


Fig 2 L'onde est émise de la source S , se propage dans le champ de vitesse V , se réfléchit sur le réflecteur i et se propage jusqu'à la surface au récepteur R où le temps de trajet est enregistré. Nous avons dessiné le rayon de signature (S, R, i)

Le problème direct: (voir chapitre V)

Le problème direct est le calcul des temps de trajet T des ondes réfléchies

Soit le modèle $m = (U(x, z), (Z_i(x))_{i=1,2,\dots,N}) \in \mathcal{M}$,
l'ensemble de sources S et de récepteurs R , calculer

$$T(S, R, i) = \int_{\mathcal{R}} \sqrt{U(x(s), z(s))} ds, \quad (0.3)$$

\mathcal{R} est le rayon de signature (S, R, i) .

Ce problème est résolu par le tracé de rayons écrit par Jannaud, 1992 (Figure 3).

On notera, par la suite, $T(m) = (T_k(m))_{k=1,2,\dots,N_{obs}}$, l'opérateur de modélisation qui à un modèle $m \in \mathcal{M}$ associe les temps de trajet calculés par le tracé de rayons, l'indice k correspondant à un triplet (S, R, i) .

Remarque importante: dans notre formulation, on ne prend pas en compte les arrivées multiples. En effet, s'il existe plusieurs rayons ayant la même signature, on ne considèrera que la première arrivée, c'est-à-dire le rayon correspondant au plus petit temps de trajet Delprat-Jannaud et Lailly, 1994, ont proposé une formulation généralisée aux arrivées multiples.

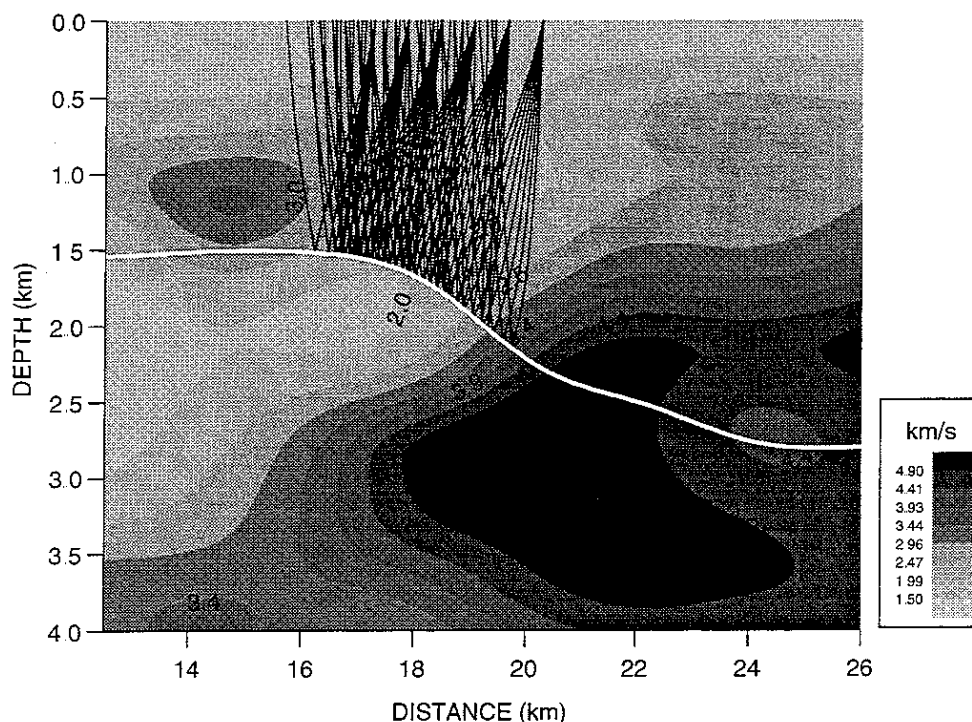


Fig. 3 Exemple de tracé de rayons dans le modèle de la Figure 5 page 25. Les 6 sources sont disposées à la surface tous les 600 m de 17 275 km à 20 2750 km Les récepteurs sont situés à gauche de la source tous les 250 m. 56 rayons sont dessinés

Le problème inverse: (voir chapitre VI)

Le problème inverse est la détermination du modèle qui satisfait les temps de trajet observés c'est-à-dire:

Soit l'ensemble de sources S , de récepteurs R et de réflecteurs, l'ensemble des temps de trajet observés T_k^{obs} , $k = 1, 2, \dots, N_{obs}$,
on cherche le modèle $m \in \mathcal{M}$ /

$$T_k(m) = T_k^{obs}, k = 1, 2..N_{obs} \quad (0.4)$$

Le pointé des temps de trajet sur les sections sismiques n'étant pas exact et les données pouvant être bruitées, le modèle solution peut ne pas satisfaire exactement les données. C'est pourquoi nous utilisons une formulation de moindres carrés du problème inverse:

Soit l'ensemble de sources S , de récepteurs R et de réflecteurs, l'ensemble des temps de trajet observés $T^{obs} = (T_k^{obs})_{k=1,2,\dots,N_{obs}}$,
on cherche le modèle $m \in \mathcal{M}$ qui minimise

$$C(m) = \|T(m) - T^{obs}\|^2 \quad (0.5)$$

La norme utilisée dans cette formulation peut être tout simplement la norme euclidienne ou une norme prenant en compte les incertitudes dans le pointé des temps.

Le problème inverse est sous-déterminé; le nombre de données étant fini et le nombre d'inconnues infini, les données ne suffisent pas à caractériser de façon unique le modèle. Il faut donc ajouter des informations sur le modèle comme des informations géologiques. Le chapitre III montre l'importance des informations géologiques dans la tomographie utilisant des modèles lisses. Le chapitre IV décrit une technique de régularisation qui permet d'avoir un problème bien posé.

Chapitre III. Motivations géophysiques de l'étude: recherche d'un modèle lisse à partir des temps d'arrivée des réflexions

Avertissements:

La lecture de ce chapitre nécessite des connaissances en géophysique, la lecture de Lavergne, 1986, peut constituer une bonne introduction aux méthodes sismiques

Ce chapitre est en fait un article soumis pour la publication dans *Geophysical Journal International*. C'est pourquoi il est rédigé en anglais.

Smooth velocity models in reflection tomography for imaging complex geological structures

P. Lailly and D. Sinoquet

PSI Research Consortium — Institut Français du Pétrole, France

Summary

Seismic imaging of geological structures with severe lateral velocity variations requires prestack depth migration of the seismic data. Such processing requires itself an accurate determination of the distribution of the propagation velocities. Reflection tomography turns out to be quite attractive for this purpose. Furthermore, migration velocity analysis can complete this technique whenever complexity of wave propagation makes picking of reflection traveltimes very cumbersome, if not impossible. Two different subsurface representations can be used to perform these methods: the blocky model representation and the smooth model representation. In reflection tomography, using blocky models with finite velocity jumps can create shadow zones and the possible non-definition of the forward problem. Smooth models, on the other hand, are created such that they do not have such shadow zones but require specific techniques to integrate a priori geological information. Also, use of blocky models for migration brings, in general, artificial discontinuities to migrated seismic events thus making almost impossible the interpretation of these events which is the basis of migration velocity analysis. Should we use smooth models, such an interpretation becomes possible. Thus, in spite of some inherent limitations, smooth models are well adapted to run reflection tomography coupled with migration velocity analysis for imaging of complex geological structures.

Key words: reflection tomography, prestack depth migration, migration velocity analysis

1 Introduction

In this paper, we are interested in seismic imaging of complex geological structures involving severe lateral velocity variations. A typical example is given in Figure 1. Figure 2 shows a seismic section of the same geological structure: the geometries of the different layers are clearly seen except for times larger than 1.5 s and surface locations ranging between 20 and 22 km, where we are not able to identify significant seismic events. The lateral velocity variations do not allow coherent summation of the seismic events during CMP stacking.

Obtaining a good seismic image of such a structure requires prestack depth migration which itself calls for the accurate determination of the distribution of propagation velocities. In particular, for well-known reasons that we will recall below, the velocity model to be used for prestack depth migration must be kinematically consistent with the seismic data. Reflection tomography or travelttime inversion (see for instance Chiu and Stewart, 1987, Bording et al, 1987, May and Covey, 1983, Harlan, 1992) is designed to obtain such a model. As picking of reflection traveltimes can be very cumbersome on complex geological structures, it can be replaced or completed by migration velocity analysis. For sake of simplicity (and because 3D migration velocity analysis is not of general use today!), we will only consider 2D problems in this paper.

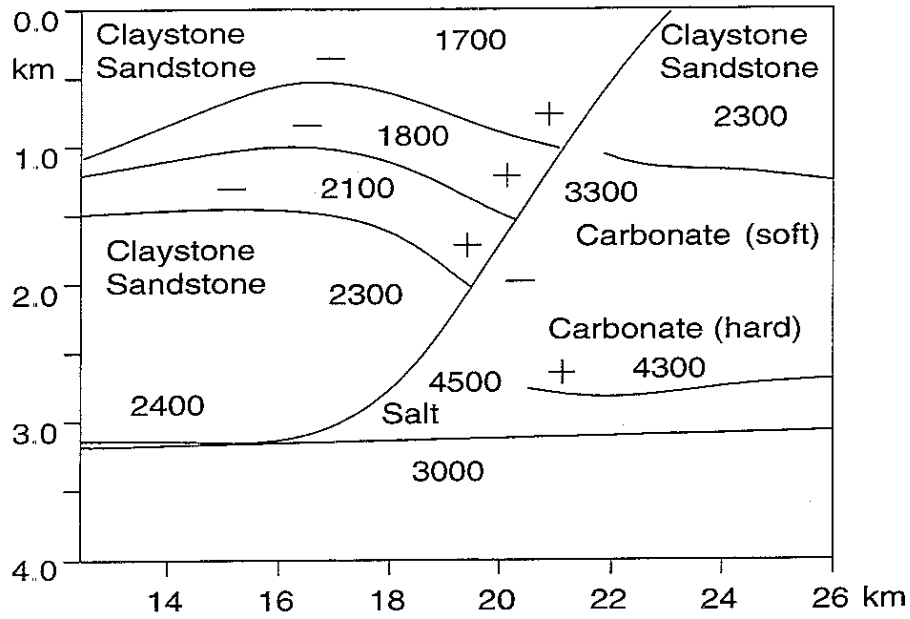


Fig 1 An example of a salt structure in a passive margin. The sediments have slid on a basement constituted of flat layers slightly dipping from the right to the left. This has given rise to a listric fault that puts in contact materials with very different propagation velocities. The salt may have disappeared after flowing but there could as well exist some salt body. The + or - signs indicate the tendency of possible variations of the velocity within one layer.

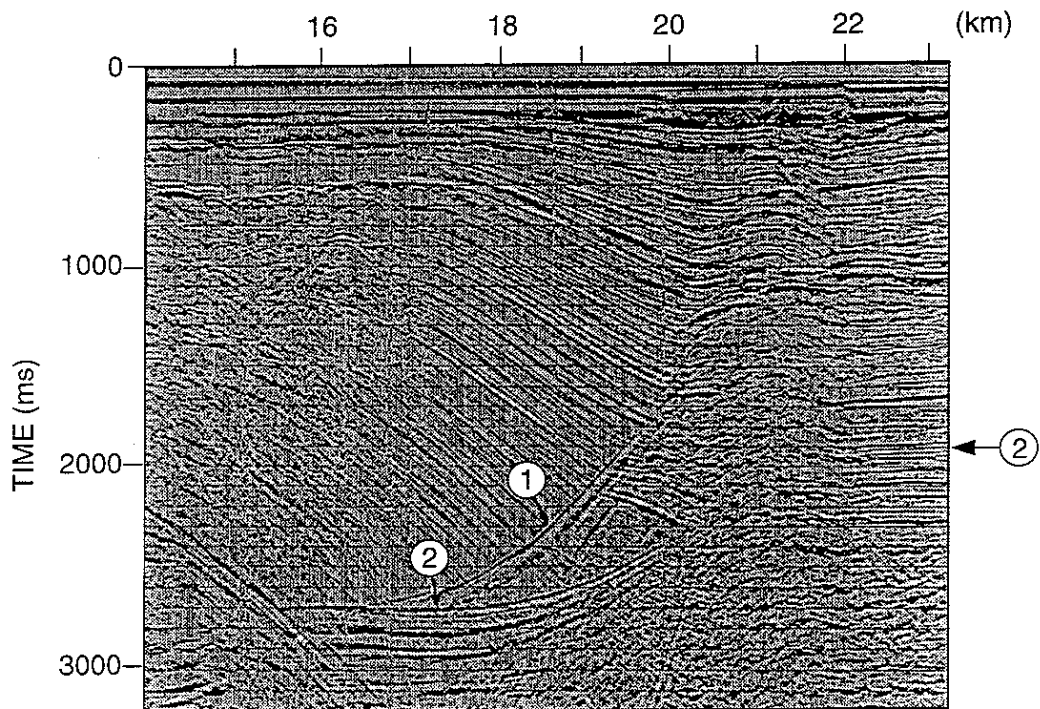


Fig 2 The CMP stacked section of real data associated with the geological structure in Figure 1. The arrows indicate the fault (1) and the base of salt (2).

Migration velocity analysis can, in principle, be implemented in the context of common shot record migration (Jacobs et al, 1992). But, from a practical point of view, this approach is cumbersome and a common offset implementation is much more preferable (e.g. Wang et al, 1991, Williams, Cowley and Notfors, 1992, Williams and Cowley, 1993). Common offset migration gives, for each offset, a migrated image of the recorded reflections: the result is thus a cube of migrated images (Figure 3). If the velocity model used for migration is correct, the migrated images associated with the different offsets are expected to be identical. The stack of all of these common offset migrated sections will be referred to as the post migration stacked section. If the migration velocity model is correct, the events that are added during the post migration stack are consistent with each other: the events in migration coherency panels (vertical cuts taken in the cube at a given horizontal location: Figure 3) are horizontal. If the migration velocity model is erroneous, the events in migration coherency panels are not flat and incoherent information is summed during the post migration stack.

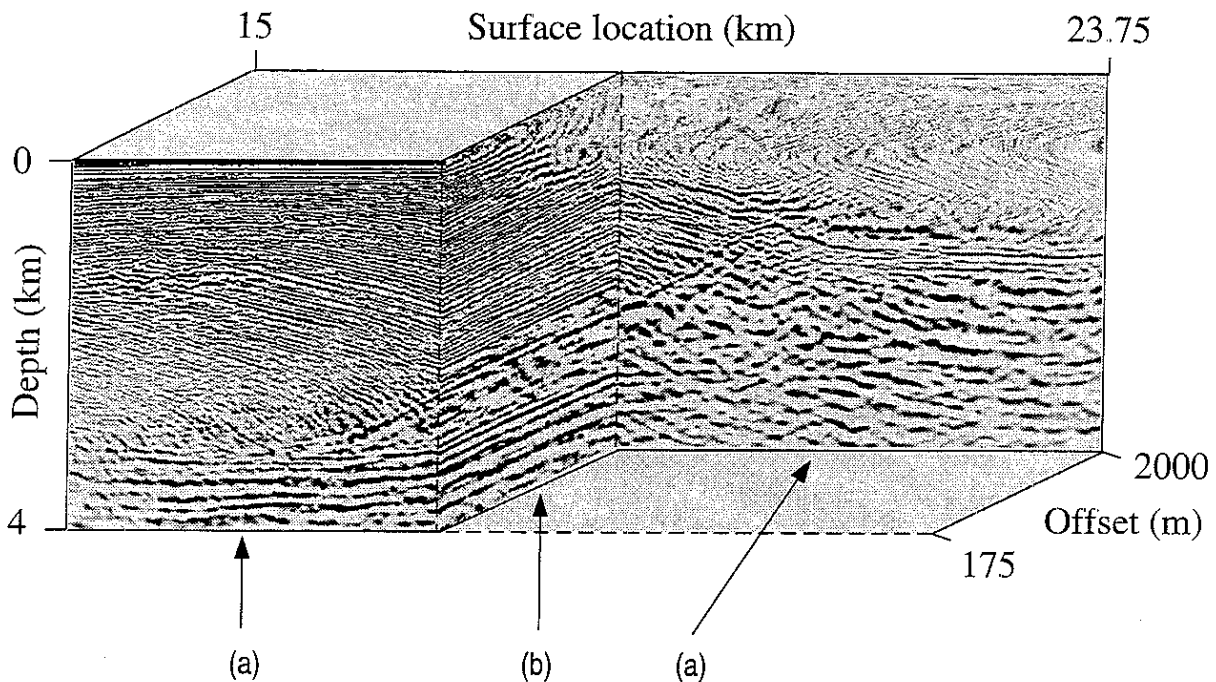


Fig 3 Cube of common offset migrated images and coherency panels. Common offset migration gives one common offset migrated image per offset (a). A migration coherency panel (b) is a vertical cut taken in the cube of migrated images for a given horizontal location. Examples of coherency panels are given in Figure 10 and 12.

The idea behind migration velocity analysis is to use the information contained in the deformation of migrated images from one offset to another to assess the incompatibility between the migration velocity model and the kinematics of seismic data. Yet we can use this information to update the velocity model. Migration velocity analysis basically relies on an interpretation of the cube of migrated images. From such an interpretation, the model can be updated by different techniques, for instance, the ones of van Trier (1990), Stork (1992), Lailly and Ehinger (1991). The last approach is based on reflection tomography; migration velocity analysis serves to access kinematic information on structures whose complexity makes interpretation of surface seismic sections very difficult. Migration velocity analysis thus yields additional kinematic information that can be processed by reflection tomography.

To run reflection tomography and migration velocity analysis, different subsurface representations can be envisaged. We mainly distinguish two classes: smooth models and blocky models. The goal of this paper is to emphasize the interest of smooth velocity models for such applications.

2 Subsurface representation for reflection tomography

Reflection tomography is an inverse problem. The forward problem, associated with reflection tomography, is two-point raytracing between a source and a receiver, which itself relies on a subsurface representation. We will be interested in two different representations of the subsurface.

2.1 The blocky model representation

Blocky models (Lines and Treitel, 1985, Chiu and Stewart, 1987) use a layer based representation of the subsurface, each layer being associated with a macrosequence in which the velocity varies gently. Such a representation of the subsurface has a very natural aspect. An example is given in Figure 4. If x and z denote the horizontal coordinate and the depth respectively, the mathematical definition of a blocky model requires the definition

- of a (slowly varying)¹ velocity distribution $V_i(x, z)$ within each layer i ;
- of the interfaces separating the different layers. For sake of simplicity, we only consider structures with moderate complexity, thus allowing an explicit representation of the interfaces. They are described by smooth¹ depth function $Z_j(x)$, subscript j referring to the considered interface

Finally, for reflection tomography we need to define reflectors: for a blocky model, reflectors are some of the previously defined interfaces². In the following, we denote by $M_{I,J}^{block}$ the set of blocky models built up of I layers and J interfaces.

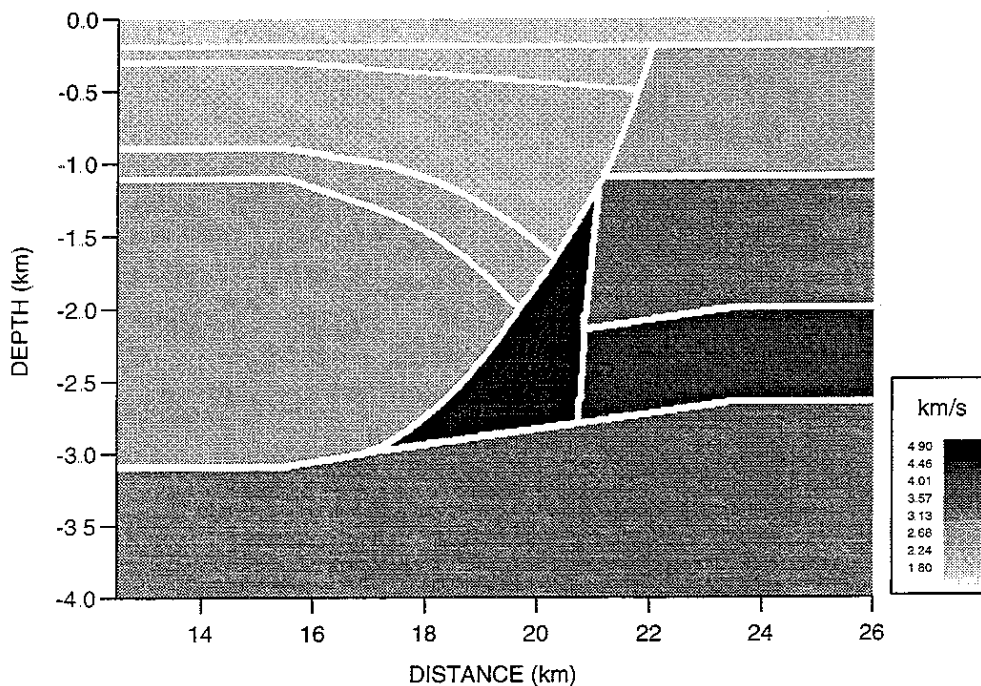


Fig 4 Blocky model associated with the geological structure in Figure 1. The layer velocities have been chosen constant, but are generally allowed to vary gently within each layer.

2.2 The smooth model representation

In reflection tomography, smooth velocity models with a non-natural character have met considerable interest (Bishop et al., 1985, Bording et al., 1987, Harlan, 1992, Jacobs et al., 1992). In such

¹ We require C^2 regularity to allow the use of paraxial ray techniques which are very useful for the solution of the two-point raytracing problem

² Note that not imposing all interfaces to be reflectors increases the generality of the definition of blocky models. Imposing reflectors to be interfaces is not restrictive whenever we allow layers separated by some interfaces to have the same properties

models, the notion of layer disappears and the velocity distribution is defined globally by a (single!) smooth¹ function $V(x, z)$. In smooth models, reflectors are defined by smooth¹ depth functions $Z_j(x)$ imbedded within the velocity distribution $V(x, z)$. An example of such a model is given in Figure 5. Contrary to blocky models, and for reasons that will be explained later, we allow reflectors in smooth models to cross each other. Thus, it is allowed that a reflector crosses a fault! (Figure 5)

In the following, we denote by M_j^{smooth} the set of smooth models built up of J reflectors.

2.3 The associated forward problems

Having defined the two types of models, we can now define the associated forward problems. We denote by A_j the set of source-receiver pairs (s, r) for which we want to calculate the arrival time of the reflection on reflector j ³.

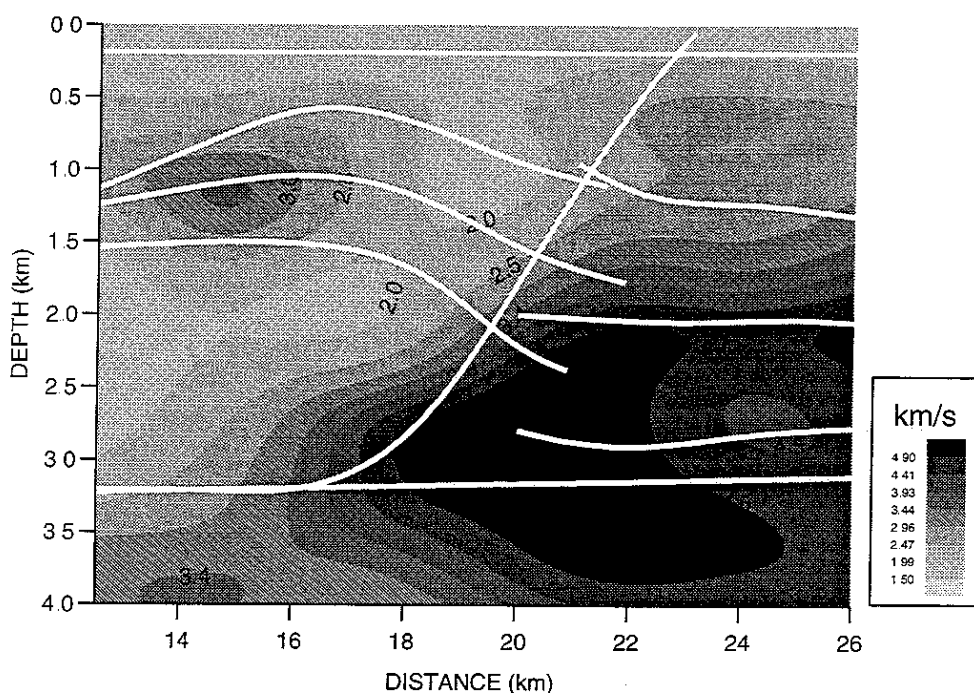


Fig. 5 Smooth model associated with the geological structure in Figure 1. The reflectors are imbedded in the globally defined velocity distribution and are allowed to cross each other: they go from the left to the right of the model. To keep this display clear, we have not drawn the very right part of the reflectors at the left of the fault and the very left part of the reflectors at the right of the fault.

For a given model $m \in M_{I,J}^{block}$, two-point raytracing allows us to compute the arrival times $F_j^{block}(m)$ of the reflection on reflector j , $j \in J$, for all source-receiver pairs in A_j . Similarly, we denote by $F_j^{smooth}(m)$, the arrival times of reflection j when model $m \in M_j^{smooth}$.

We have thus introduced the forward modeling operator associated with the reflection tomography problem. Note that the modeling operator F_j^{block} may be undefined for some models in $M_{I,J}^{block}$: this happens whenever there exists a pair $(s, r) \in A_j$ for which no ray leaving source s can reach receiver r after reflection on reflector j , a common situation since discontinuous models generate, in general, discontinuous ray families. In contrast, as a consequence of the continuity of ray families for smooth models, the forward modeling operator F_j^{smooth} is, except for rare pathological situations, defined for all models in M_j^{smooth} ⁴.

³ Note that A_j can be empty (case of a blocky model where interface j is not considered as reflector).

⁴ Difficulties resulting from possible multivalued traveltimes can be overcome either by using a special formulation of reflection tomography (Delprat-Jannaud and Lailly, 1994) or by considering the smallest of these traveltimes to define the forward modeling operator. In our paper, we make use of this second strategy.

2.4 The associated inverse problems

For the inverse problem, the data are, for a certain number of reflections j , $j \in J$, the multi-offset arrival times T_j^{pick} of each reflection for the different couples (source, receiver) for which this data is available, thus defining the set of measurements A_j . These multi-offset arrival times can be obtained by picking on prestack seismic sections. The inverse problem is formulated as a classical least-square problems. Having defined a norm $\| \cdot \|_j$ in the space of arrival times associated with reflection j , we want to find the model that best matches this data according to the norms $\| \cdot \|_j$. We are thus led to the formulations:

(i) **blocky model reflection tomography**

Find $\hat{m}_{block} \in M_{I,J}^{block}$ that minimizes

$$C^{block}(m) = \sum_{j \in J} \left\| F_j^{block}(m) - T_j^{pick} \right\|_j^2 \quad (2.1)$$

(ii) **smooth model reflection tomography**

Find $\hat{m}_{smooth} \in M_J^{smooth}$ that minimizes

$$C^{smooth}(m) = \sum_{j \in J} \left\| F_j^{smooth}(m) - T_j^{pick} \right\|_j^2 \quad (2.2)$$

Delprat-Jannaud and Lailly (1993) show that the above problems are ill-posed but can be made well-posed by introducing curvature regularization. We thus obtain

(i) **blocky model reflection tomography with curvature regularization**

Find $\tilde{m}_{block} \in M_{I,J}^{block}$ that minimizes

$$\begin{aligned} C_{reg}^{block}(m) = C^{block}(m) &+ \sum_{i \in I} \varepsilon_i^V \int_{D_i} \left[\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ &+ \sum_{j \in J} \varepsilon_j^Z \int \left(\frac{\partial^2 Z_j}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

where D_i is the domain associated with layer i and ε_i^V and ε_j^Z are regularization weights.

(ii) **smooth model reflection tomography with curvature regularization**

Find $\tilde{m}_{smooth} \in M_J^{smooth}$ that minimizes

$$\begin{aligned} C_{reg}^{smooth}(m) = C^{smooth}(m) &+ \varepsilon^V \int_{D_0} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ &+ \sum_{j \in J} \varepsilon_j^Z \int \left(\frac{\partial^2 Z_j}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

where D_0 is the domain of the overall velocity distribution V and ε^V and ε_j^Z are again regularization weights.

Minimization of this objective function in reflection tomography is performed classically by an iterative Gauss-Newton algorithm. Note that reflection tomography basically requires the possibility of evaluating how good a model is, by comparing the reflection traveltimes it generates (for all different pairs $(s, r) \in A_j$, $j \in J$) with the observed times T_j^{pick} . This fundamental requirement is far from fulfilled in blocky model reflection tomography since the forward modeling operator may be undefined.

Reflection tomography is understood as a non linear inverse problem, the associated objective function often having several local minima (e.g. Whiting, 1991). **Non-definition of the forward modeling operator simply increases the chance of being trapped in some local minimum.** This is not only a theoretical difficulty but indeed a practical one. For the example in Figure 4, at some stage of the tomography iterative process, there will not be any ray path joining some sources and receivers lying on either side of the fault. This amounts to giving no importance to the associated picked traveltimes whereas they contain the most precious information when velocity variations in the vicinity of the fault are to be retrieved.

On the other side, the definition of the forward modeling operators F_j^{smooth} assures that a traveltimes exists for each couple $(s, r) \in A_j, j \in J$, so that we expect the objective function C_{reg}^{smooth} to be well-behaved. Although we do not claim that local minima do not exist, our many experiments with smooth model reflection tomography have always provided us with a model that at least matches the data⁵.

Application of smooth model reflection tomography with curvature regularization on our example under study produces the result in Figure 6. The fit of calculated and picked traveltimes is very good. However, the model is not satisfying. In particular, the distribution of isovelocity lines is rather strange. But, this should not be surprising and is, in fact, the result of underdetermination. Even though smooth model reflection tomography with curvature regularization is a well-posed problem (in particular, it has a unique solution which is mathematically stable), it is in practice very unstable as a result of:

- sparse kinematic data (in particular, when we have no traveltimes data from the ininterpretable parts of the seismic sections)
- the low value given to the regularization weight ε^V .

Thus, there exists a very wide variety of smooth models with moderate curvature that match the traveltimes data with satisfactory accuracy. The solution in Figure 6 is nothing but an arbitrary representative of all these possible solutions

Increasing the value of the regularization weight ε^V would improve quantitative stability (Delprat-Jannaud and Lailly, 1993), but imposing zero curvature a priori (large ε^V) would be contradictory with what we know a priori about the velocity (it can vary rapidly for instance in the vicinity of the fault) and, in turn, with the kinematics of the seismic data. Instead of this inadequate approach, we have to reduce underdetermination by integrating **relevant** a priori geological information

We thus reach the following conclusions:

- blocky model reflection tomography can lead to a local minimum but offers the advantage of straightforward integration of a priori geological information. The solution will meet the a priori geological information implicitly contained in the model with the velocity distributions varying gently within a given layer and with discontinuities at the macrosequence boundaries;
- use of smooth models in reflection tomography assures the convergence to a global minimum. Most important, we can expect to take correctly into account the traveltimes associated with rays that travel in the vicinity of, and are most sensitive to velocity variations across, the fault. The output of smooth model reflection tomography with curvature regularization is of limited interest in case of complex geological structures. What is wrong is not the use of a smooth model but the use of global curvature regularization in such situations. In other words, **use of smooth models for such applications requires the design of an adequate technique for integrating relevant a priori geological information into reflection tomography.** This is what we do in the next section: we reintroduce the concept of layers in smooth models.

⁵ Even though the model is not the one we were looking for; we point out here the very different nature of underdetermination and of convergence towards local minima. i.e. situation in which the computed model does not match the data

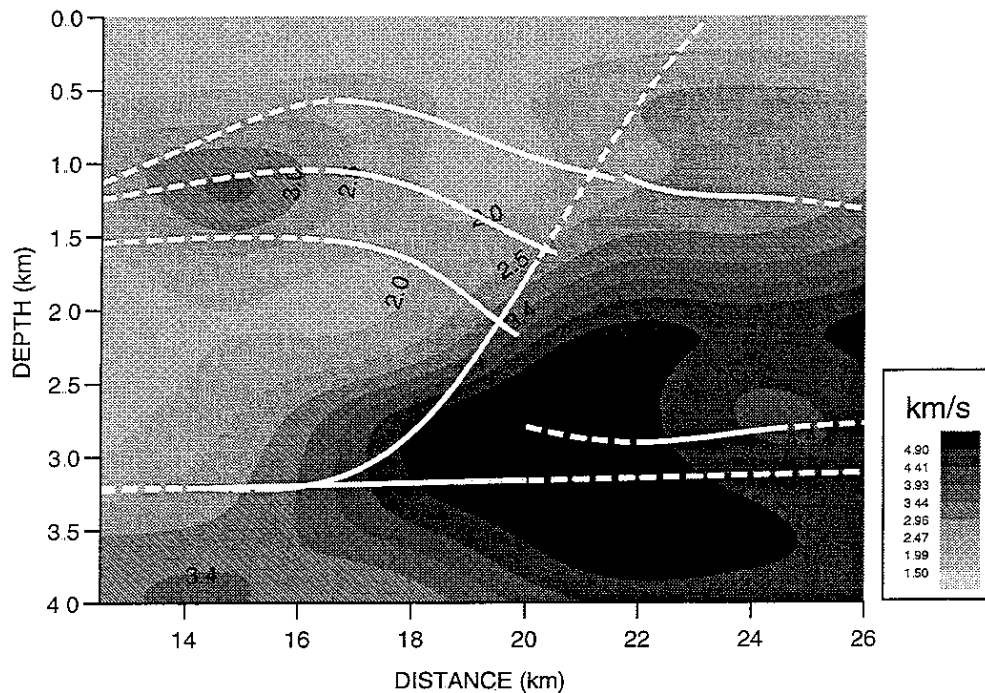


Fig. 6 Application of smooth model reflection tomography with curvature regularization. The traveltimes data have been obtained by picking seven reflections in the interpretable part of the common offset seismic sections, associated with the CMP stacked section of Figure 2. No traveltimes data were available for times larger than 1.5 ms and surface locations ranging between approximately 20 and 22 km, because the sections were not interpretable in this area. The parts of the reflectors represented by a dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated zero curvature a priori information. This also indicates those areas that are not crossed by rays, and where the velocity is thus not determined by kinematic data. The RMS traveltimes misfit is about 15 ms.

3 Making reflection tomography work with smooth models

Integrating a priori geological information is essential to reduce the underdetermination inherent in reflection tomography. In this section, we examine a variety of geological information and how to integrate it into reflection tomography.

3.1 A priori information on the structure of the velocity field

With the exception of turbidites and volcanics, the earth's subsurface is not chaotic, rather it is governed by processes of sedimentary deposition and tectonic deformation, such that a given velocity structure results from its geological history. We use two types of geological information on the velocity field: information on the regularity of the velocity and on the anisotropy of regularity due to sedimentation (Sinoquet, 1993).

As far as the regularity of the velocity is concerned, we deal only with macroscopic phenomena: very slight velocity variations will not be determined by traveltimes inversion. Versteeg (1991) showed that only velocity field wavelengths greater than 100 meters are of importance for prestack migration. Accordingly, this defines the objective for complex structure tomography. Additionally, geology tells us that velocity is more regular in some places than in others. Figure 1 shows the possible velocity variations in our example under study: we expect large velocity variations in the vicinity of the fault whereas the velocity should be more regular within the claystone/sandstone formations.

Sedimentation results in regular, roughly horizontal deposits such that velocity varies little along those reflectors that are geological isochrons (Figure 7). Sedimentation thus gives rise to some anisotropy in the velocity regularity.

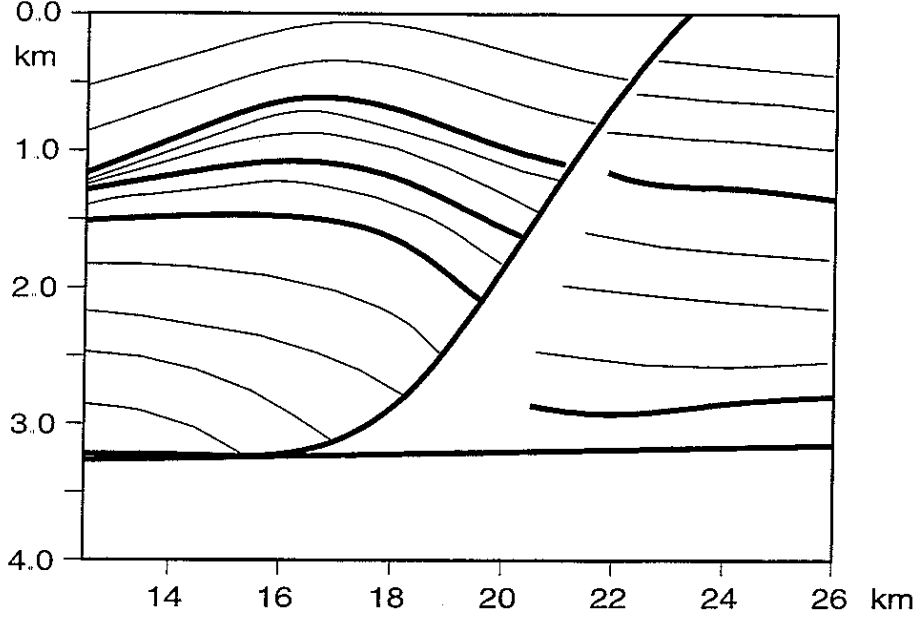


Fig 7 Possible distribution of isovelocity lines according to sedimentation effects for the geological structure in Figure 1

To integrate the above described a priori information into reflection tomography, we add penalization terms to the original objective function (2.2). We obtain

$$\begin{aligned}
 C_{a\ priori}^{smooth}(m) = & \underbrace{C^{smooth}(m)}_{tomography} + \underbrace{\sum_{j \in J} \int \varepsilon_j^G(m, x)^2 \left(\vec{\nabla} V(x, Z_j) \cdot \vec{t}_j(x) \right)^2 dx}_{velocity\ guide} \\
 & + \underbrace{\int_{D_0} \varepsilon^V(m, x, z)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] dx dz}_{velocity\ regularization} \quad (3.1) \\
 & + \underbrace{\sum_{j \in J} (\varepsilon_j^Z)^2 \int \left(\frac{\partial^2 Z_j}{\partial x^2} \right)^2 dx}_{reflector\ regularization}
 \end{aligned}$$

where $\vec{\nabla} V$ is the gradient of velocity and $\vec{t}_j(x)$ is the normalized tangent vector to the reflector j .

The velocity guide term constrains the velocity to vary little along certain reflectors by forcing the gradient of the velocity to be orthogonal to the reflectors: it integrates the a priori information associated with anisotropy of velocity regularity. The velocity regularization term controls the velocity variations so as to make them agree with what we expect a priori. In addition, the velocity regularization term plays an active role in making the isovelocity lines honor the geometry of deposition lines. By imposing gentle variations on the velocity gradient, we keep this gradient approximately orthogonal to the deposition lines that have, within a layer, a geometry similar to the reflectors that surround them. In this way, we can constrain the isovelocity lines and the deposition lines to have similar directions within a whole layer. Finally, the reflector regularization term measures the variations of the slope of the reflectors.

The weighting functions $\varepsilon_j^G(m, x)$, $\varepsilon^V(m, x, z)$, ε_j^Z allow the interpreter to express the uncertainties associated with each piece of information. They are input to our formulation of reflection tomography. They enable us to normalize the functional terms according to their physical meaning.

They have been made space and model dependent to allow, for instance, large velocity variations in the vicinity of faults whose geometry is to be determined by reflection tomography.

The linearized problem associated with the minimization of the objective function $C_{a\ priori}^{smooth}(m)$ is a well posed problem: as in Delprat-Jannaud and Lailly (1993), uniqueness and stability of its solution are ensured.

The model is represented by cubic B-spline functions, adequate to build C^2 functions (Barsky, Bartels and Beatty, 1986). The velocity parameters and the interface parameters are thus respectively the coefficients of a tensor of B-spline functions defined by an uniform knot grid (x, z) and the coefficients of a B-spline function defined from an uniform sequence of x knots. The representation of a smooth velocity model thus requires a large number of parameters. The model shown in Figure 8 is represented by 599, namely 21×25 velocity coefficients and 74 reflector coefficients.

3.2 Numerical results

The model in Figure 8 is the result of tomography integrating the a priori information described above.

To compute it, we have constrained the velocity to vary minimally along the interfaces, except along the fault and the base of salt. All the interfaces have been regularized by their second derivatives. Also the second derivatives of the velocity have been penalized everywhere but with different weights according to the region. Indeed, we defined three zones: the neighbourhood of the fault, where the regularization weight is very low to allow large velocity variations, and the two regions on either side of the fault.

The model in Figure 8 is satisfactory since:

- it matches the traveltimes data with reasonable accuracy,
- the velocity varies regularly within each macrosequence and has rapid variations across the fault, and
- the distribution of isovelocity lines is reasonable.

In the region of approximately 1 km around the fault, the velocity is poorly determined because of the weak value of the regularization weight in this area. Thus, this lack of a priori information generates a strange distribution of isovelocity lines around the fault.

The area below the fault (denoted by A in Figure 8) is not illuminated by rays at all (as a result of the sparsity of our traveltimes data!). Consequently, this area is determined only by the integrated a priori geological information in which, however, we have almost no confidence (is there any salt body or do we have a fractured zone with tilted blocks?) In other words, the velocity model is basically undetermined in this area.

Note the velocity anomaly B in Figure 8. It is the result of poor ray coverage together with limited confidence⁶ in the integrated a priori geological information since this area is associated with a fractured zone as can be seen on the seismic section in Figure 2.

⁶ See our comments below on the tuning of the weighting functions

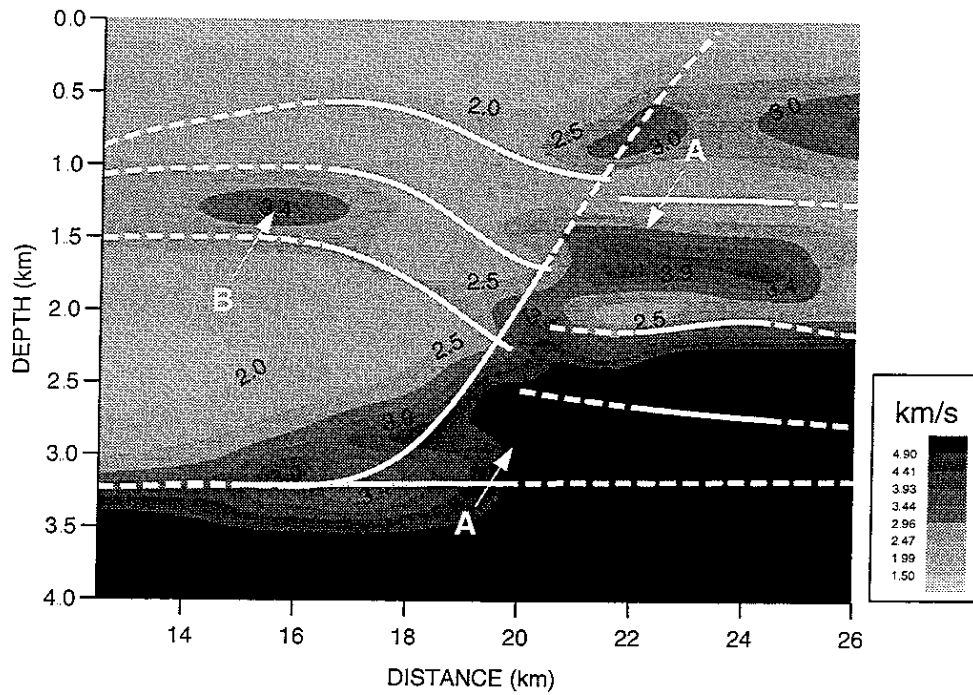


Fig 8 Model obtained by reflection tomography with a priori information on the velocity structure with the following weight values: velocity guide: $\epsilon_j^G = 5 \cdot 10^{-1}$ — velocity regularization: ϵ^V fault region: 10^{-5} , left and right sides: 10^{-2} — interface regularization: $\epsilon_j^Z = 10^{-1}$ for the interfaces at the right of the fault and 10^{-2} for the others. Compared to the experiment in Figure 6, an additional reflection has been picked to the right of the fault RMS travelt ime misfit : 16 ms.

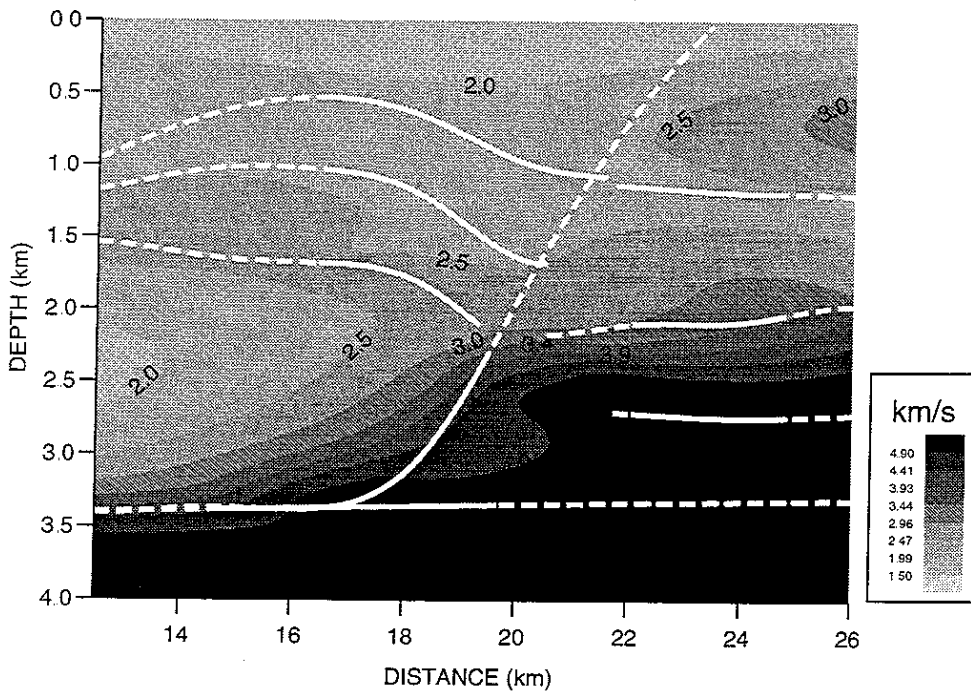


Fig 9 Model obtained by reflection tomography with a priori information on velocity structure but with a different choice of the weight values: velocity guide: $\epsilon_j^G = 5$ — velocity regularization: ϵ^V fault region: 10^{-5} , left and right sides: $5 \cdot 10^{-1}$ — interface regularization: $\epsilon_j^Z = 10^{-1}$ for the interfaces at the right of the fault and 10^{-2} for the others. RMS travelt ime misfit : 79,2 ms.

However, to obtain such a result, the interpreter needs to tune the different weighting functions involved in the definition of our objective function. Both types of data, traveltimes and a priori geological information, are not exact but rather only known with limited accuracies. In general, they will conflict with each other. The weighting functions in (3.1) have to be correctly tuned so as to obtain a solution that matches the different pieces of information according to the confidence we have in them.

To illustrate the sensitivity to these weights, we show the model in Figure 9 which was obtained in the same way as the model in Figure 8 but with different weighting functions, in particular, we increased the weights associated with the velocity regularization and with the velocity guide. This model is very regular on both sides of the fault and presents high velocity variations at the top and the bottom of the fault. The model respects the a priori information quite well but does not match traveltimes to the degree of Figure 8. Such a model is over-regularized. We have not correctly managed our conflicting integrated data. It is the interpreter's job to find a good compromise between the conflicting pieces of information and the subsequent choice of weights.

We can guess a priori the order of magnitude of the uncertainty in the different kinds of data. However, an iterative trial and error approach turned out to be quite effective to improve those initial guesses for a better calibration of those weights. If the weights guessed a priori had led to the model in Figure 9 we would conclude that, the traveltimes match being unacceptable, we should decrease the weights associated with the velocity guide and/or with the velocity curvature. This interpreter driven approach was effectively used to calibrate iteratively the weights so as to obtain the model in Figure 8.

3.3 Other kinds of a priori geological information

In fact, the result shown in Figure 8 has been obtained with the help of additional constraints on the model. We constrained the velocity to be equal to 1.5 km/s and to 5 km/s at the surface and at depth $z = 4$ km, respectively. We also deal with inequality constraints on the interfaces, for instance, the fault was constrained to be above the base of the salt and the slope of the interfaces at the right of the fault is constrained to be weak. Additionally, we limited the range of all parameters: the velocity has to be between 1.5 km/s and 5 km/s, the interface depths should be between 0 km and 4 km. We thus dealt with 639 inequality constraints and 105 equality constraints. Integrating as much a priori information as possible is essential for reducing the underdetermination inherent in reflection tomography. Instead of introducing additional penalization terms in the objective function, we preferred to use constrained optimization algorithms. However, the solution of large size (several hundreds of parameters, several thousands of data) optimization problems with many constraints of different types can be very difficult. We have used a dedicated algorithm (Glowinski and Tran, 1993) based on the augmented Lagrangian technique.

Another kind of information which is especially important for our application is information associated with faults. In order to ensure the definition of the forward modeling operators, it was necessary to allow our reflectors to cross the fault. In fact, we would like the reflectors to end at the fault. In order to meet this requirement, Jannaud and Delprat-Jannaud (1994) have developed a special technique in which they use the location of the impact points of the rays as constraints on the model. However, we have not used this technique to compute the result in the Figure 8: this result shows a moderate extension to the right of reflectors supposed to lie on the left of the fault. This has not seemed unreasonable to us since we process a 3D problem on an approximate 2D dip profile.

3.4 Relations between tomography and migration

Migration is, from a kinematic point of view, the inverse of raytracing (Apostoiu-Marin and Ehinger, 1994, for instance). If we use for migration a velocity model which has been determined

by reflection tomography, the migrated images of a picked reflection lie, for each offset, on the reflector determined by tomography⁷. Thus the picked reflections will appear as horizontal events in the migration coherency panels. This can be verified in Figure 10 **Reflection tomography can be understood as a technique to update the velocity model so as to flatten events interpreted in migration coherency panels and to construct coherent summations during the post migration stack.** This leads us to the following definition: a velocity model will be said to be *kinematically consistent with some prestack picked events* if these events appear horizontally aligned in the migration coherency panels when this velocity model is used to perform the migration.

Reflection tomography is thus a means of building a velocity model that is kinematically consistent with some picked events. This might look obvious but we will see in the next subsection that there are some restrictions to this apparently obvious result.

3.5 Limitations in the use of smooth models in reflection tomography

Use of smooth model reflection tomography on geological structures with severe lateral variations requires the following conjecture to be true: whatever the velocity discontinuities of a subsurface, it is possible to find a smooth model that matches the traveltimes of seismic data acquired upon this subsurface. We can easily realize that this conjecture does not hold: to a subsurface with velocity discontinuities correspond discontinuous kinematic events both regarding the spatial location of these events and their slopes (e.g. de Bazelaire and Viallix, 1988). Attempts at matching such kinematics with a smooth model (that generates continuous events both regarding their locations and slope) would lead to very rapid velocity variations that go beyond the range of applicability of raytracing. Raytracing can model the propagation of seismic waves only if the characteristic length of the velocity variations is large with respect to the characteristic wave length of the seismic waves.

Our interest for smooth models come from Versteeg (1991) who showed that:

- smooth models allow seismic imaging by prestack depth migration of very complex geological structures; however progressive smoothing of the true velocity model gives rise to progressive degradation of the post migration stacked section;
- those smooth models that allow reasonable seismic imaging are those which are approximately kinematically consistent with the prestack seismic data; however the kinematic consistency is progressively degraded when we increase the smoothing of the model.

Thus using smooth model reflection tomography, we aim at finding an approximately kinematically consistent model. Such a model, used for prestack depth migration, yields a migrated image that is only slightly degraded. But, in order to find such a model, we must not go beyond the range of applicability of raytracing regarding the propagation of seismic waves. Here is the limit not to be overcome. **We must not allow our smooth velocity models to have rapid variations.**

What is the allowed degree of variations for the velocity? Or, what does “large with respect to the wave length” mean? In this context it is very helpful to check a posteriori that the smooth model that has been computed by reflection tomography is indeed, to a reasonable extent, kinematically consistent with the seismic data.

In the result shown by the Figure 8, we can see that the velocity varies very rapidly for lateral locations ranging between 19 and 20 km. It is thus essential to check the relevance of that part of the model. Migration coherency panels for this interval of lateral locations (Figure 10 bottom) show a base of salt only slightly deviating from horizontality. This confirms the good work achieved by smooth model reflection tomography to compute the result in Figure 8 and thus confirms the validity of raytracing for modeling seismic waves in this subsurface area.

⁷ whenever reflection tomography has succeeded in matching synthetic and picked traveltimes

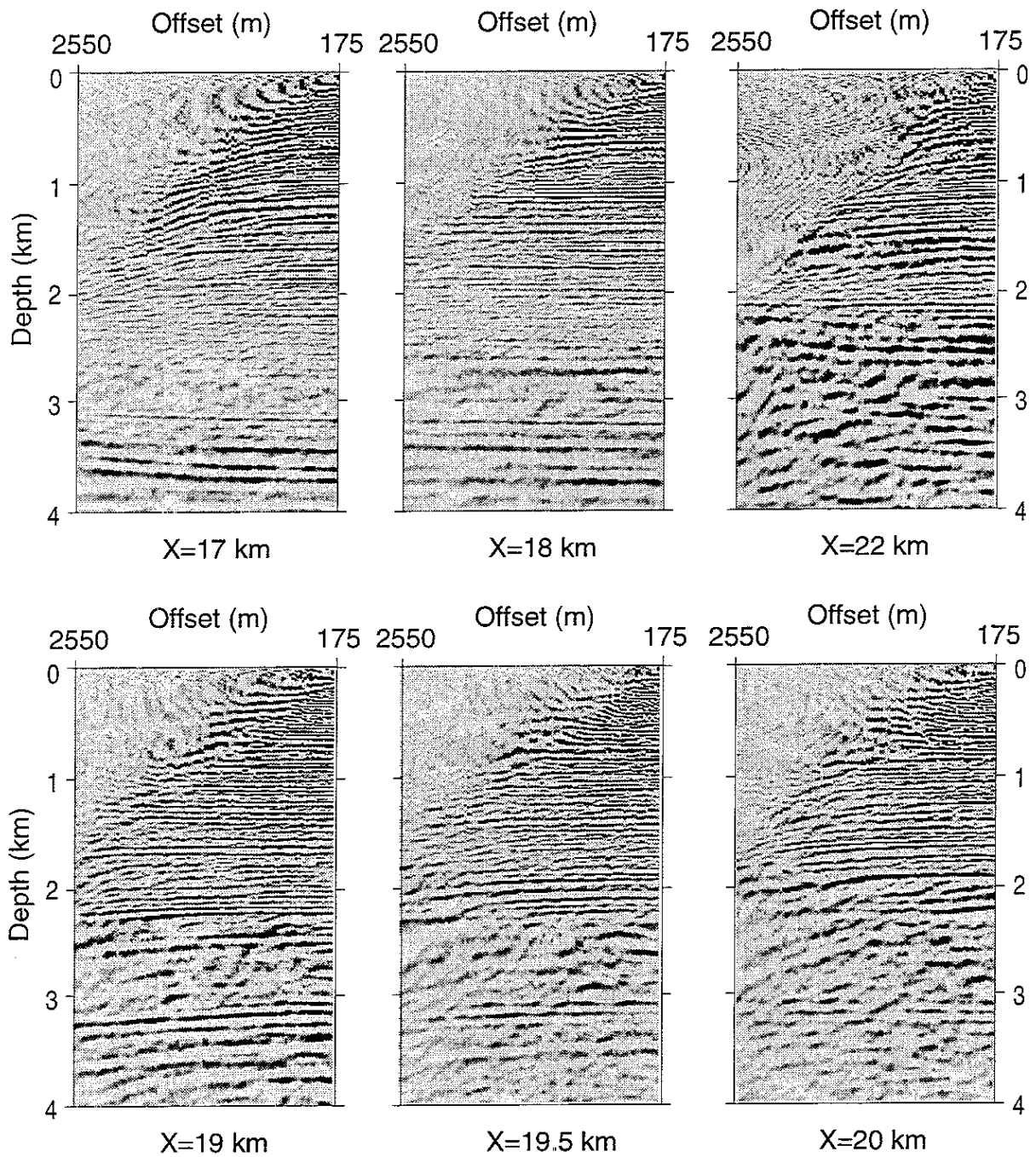


Fig. 10 Coherency panels associated with the smooth model in Figure 8

Top: results for surface locations in the simple part of the subsurface. Flat events illustrate that reflection tomography is a technique to construct a model kinematically consistent with the seismic data. For $x = 22$ km, we observe for large offsets some steeply dipping events which are associated with propagation in the complex part of the subsurface.

Bottom: results obtained when entering the complex part of the subsurface. Events appear almost flat. This illustrates that reflection tomography has constructed a model approximately kinematically consistent with the seismic data in spite of the rapid velocity variations. The base of salt is clearly visible just below depth 3 km. The visible dipping events (for instance, the one clearly visible above the base of salt for $x = 20$ km) are of prime importance for use in migration velocity analysis.

The post migration stacked section (Figure 11) shows clear seismic events at least for those parts of the reflectors which have been illuminated by rays (Figure 8)⁸. This is what we expect since reflection tomography made events kinematically coherent (i.e., produced flat coherency panels) and thus, the summation of these events, during the post migration stack, is constructive. The lower part of the image between surface locations 20 and 22 km is not satisfactory: this is not surprising because the velocity model (Figure 8) is almost completely undetermined in this area. However, the degradation of the image is progressive when, starting from the right of the section, we enter the undetermined area. This does not hold any longer if the velocity model used for the migration is blocky such as the one in Figure 4. This model has been determined by a kind of manual blocky model reflection tomography (Delprat-Jannaud et al., 1991). Although this model has kinematic qualities (Figure 12) equivalent to those of the model computed by smooth model reflection tomography, the post migration stacked section associated with this blocky model (Figure 13) shows a very abrupt degradation when horizontal location becomes less than 22 km: this part of the section is composed of many mixed events that make accurate interpretation almost impossible. The reason for this will be given in the next section.

Coming back to the smooth model coherency panels (Figure 10) we observe some events below the image of the fault that deviate somewhat from horizontality. As mentioned before, the goal of migration velocity analysis is to use those deviations and to transform them into additional kinematic data to compute a new and better velocity model.

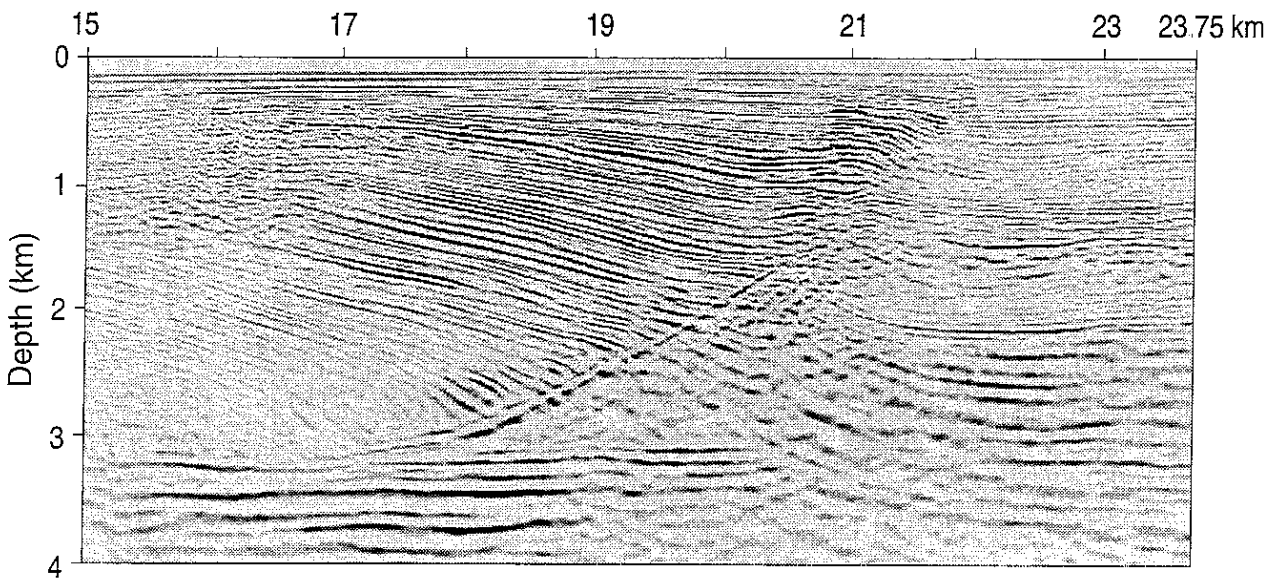


Fig 11 Post migration stacked section associated with the smooth model in Figure 8.

⁸ The image is not good in the upper left corner because the velocity is not well-determined in this area (see the explanations about the velocity anomalies in Figure 8)

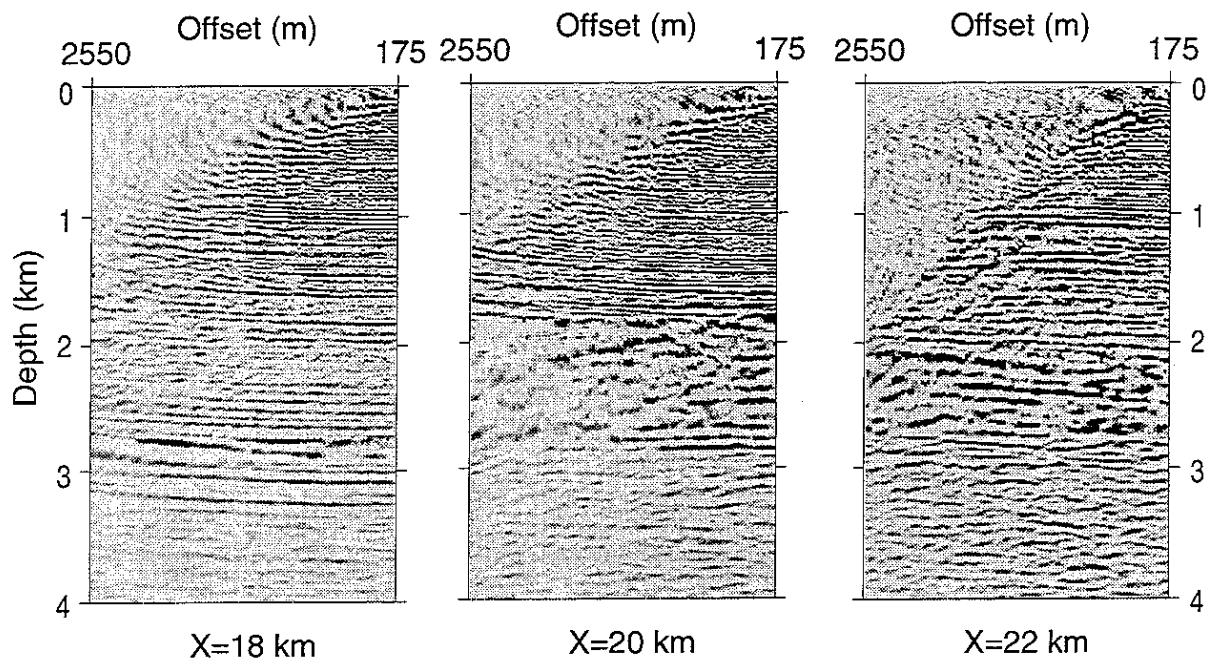


Fig 12 Coherency panels associated with the blocky model in Figure 4. Flat events indicate that the model is approximately kinematically consistent with the seismic data.

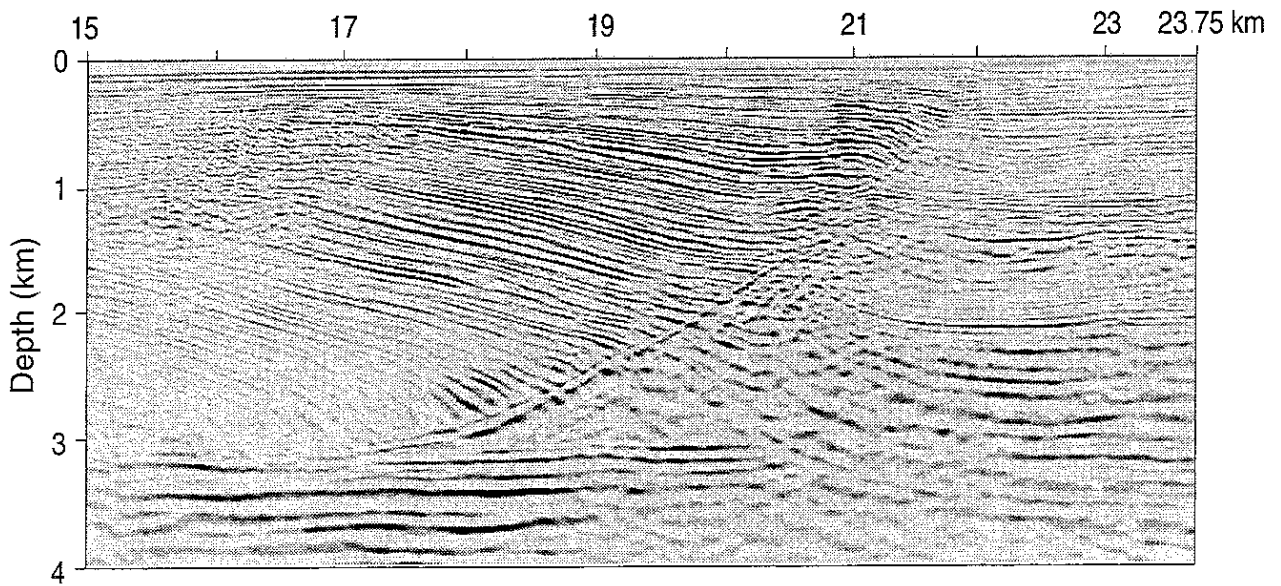


Fig 13 Post migration stacked section associated with the blocky model in Figure 4

4 Blocky versus smooth models for migration and migration velocity analysis

On complex geological structures the result of prestack depth migration can be very sensitive to the migration algorithm used (Geoltrain and Brac, 1993, for instance). In the context of common offset migration, which seems to be the preferred strategy for migration velocity analysis, Kirchhoff migration has met considerable interest (e.g. Wang et al., 1991, Williams et al., 1992). We have to realize a major difficulty associated with blocky models: Kirchhoff migration makes use of computed traveltimes and these traveltimes are tremendously sensitive to perturbations brought to the velocity model, especially to perturbations of the geometry of interfaces that separate layers with very different velocities. We must thus be very careful when specifying a blocky velocity model for Kirchhoff depth migration. In contrast, specifying a smooth model for Kirchhoff depth migration is straightforward. What must not be done is to smooth a carefully determined blocky velocity model and to use this

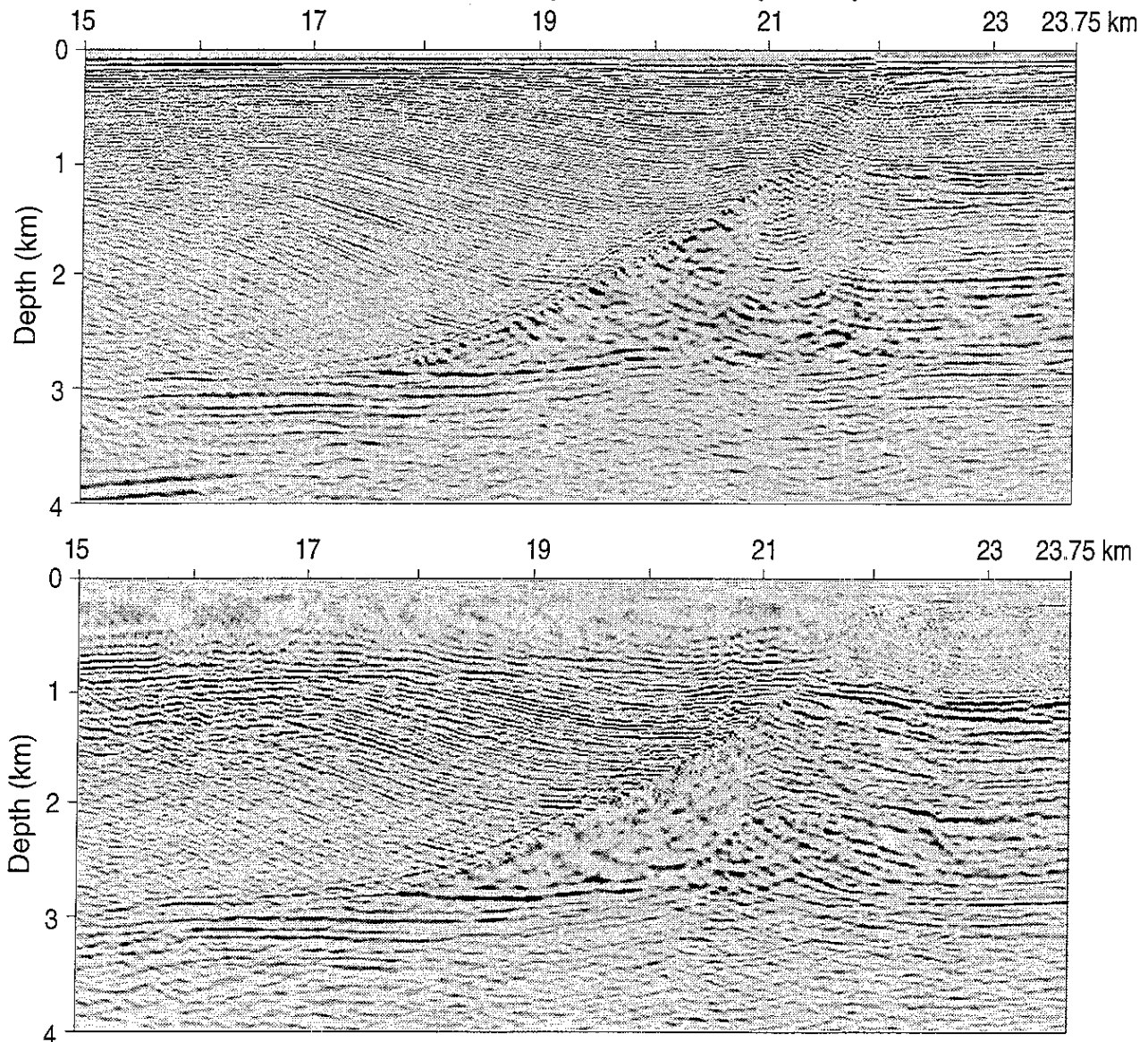


Fig. 14 Common offset migrated sections associated with the blocky model in Figure 4.

Results for offsets 200 m (top) and 1500 m (bottom).

For migration velocity analysis, we are interested in the images of deep events such as the base of salt for surface locations ranging between 20 and 22 km. The discontinuities of these events and the many interferences make their picking very difficult if not impossible.

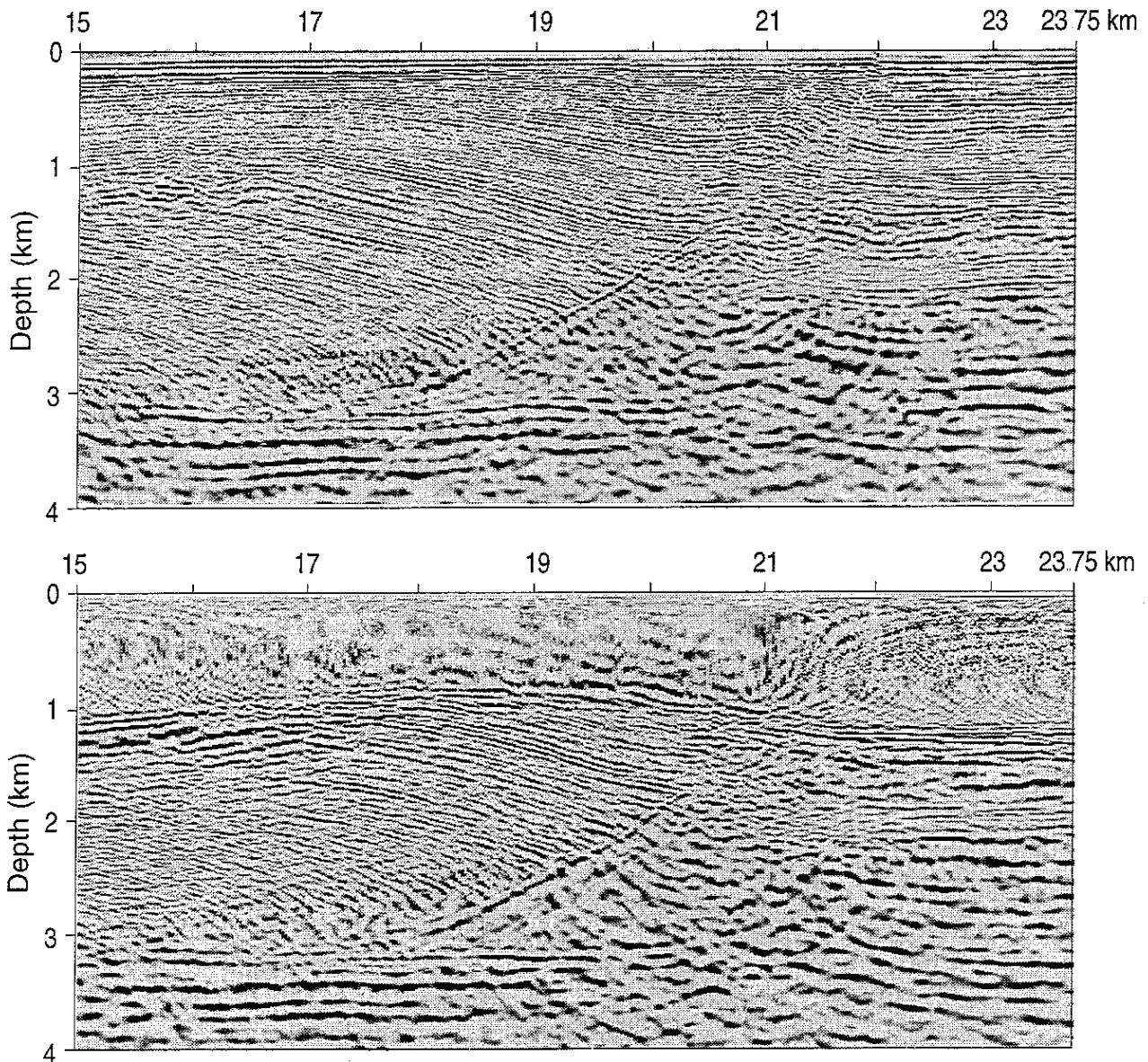


Fig 15 Common offset migrated section associated with the smooth model in Figure 8.

Top: result for offset 200 m. Since the migration has been performed with an erroneous velocity model, the events have to be understood as deformed images of the actual geological structure. To perform migration velocity analysis, we are interested in the identification of events for which we have no traveltimes data, for instance, the reflection on the base of salt or deeper events. Knowing that the basement is constituted of flat parallel layers, we can easily identify such events which are split into 3 pieces:

- the left piece is nearly horizontal and situated between surface locations 15 and 20 km;
- the right piece, horizontal at the right edge, is progressively pulled up when moving from surface location 22 km to surface location 21 km;
- the central piece is almost circular for surface locations ranging between 21 and 22 km

Bottom: result for offset 1500 m. The same comments as in top apply but the central piece of migrated events has disappeared whereas the left piece goes further to the right and is then strongly pulled up

smoothed version as input for Kirchhoff depth migration. The smoothing would indeed give raytraced traveltimes that have nothing to do with those associated with the original blocky model.

We now study below the practicability of migration velocity analysis, that is of interpretation of the cube of common offset depth migrated images, when a blocky or a smooth model is used for migration. To avoid the above mentioned difficulties associated with the use of Kirchhoff migration

on blocky models, we use the common offset wave field migration algorithm of Ehinger et al. (1994). Such an algorithm is robust with respect to perturbations of interface geometries.

The goal of depth migration is to put reflections at their right places and to join reflections which had split during propagation in a medium with lateral velocity discontinuities. This being said, we immediately realize some difficulties when migration velocity analysis is performed with an erroneous blocky velocity model. Instead of joining reflections, we will in general (since the velocity discontinuities are misplaced) do the opposite and further split these reflections. Then migration velocity analysis appears to be very difficult, if ever possible (Figure 14), as interpretation of events mainly relies on their continuity. **In contrast, a smooth velocity model, even if erroneous, preserves the continuity of seismic events during the migration process (Figure 15). Migration velocity analysis can then be effective.**

5 Conclusions

Seismic imaging of geological structures with severe lateral velocity variations calls for the use of adequate imaging techniques such as prestack depth migration and for accurate determination of the distribution of propagation velocities. Reflection tomography and migration velocity analysis are today understood as attractive techniques for this determination. Two kinds of subsurface representations are classically used in this context: blocky models and smooth models.

We have seen some difficulties associated with the use of blocky models:

- they can result in non-convergence of the reflection tomography iterative process;
- when the model is erroneous, the interpretation of individual common offset images which is the basis of migration velocity analysis can be extremely difficult.

Although smooth models do not offer perfect kinematic consistency with seismic data associated with such complex geological structures, they have the potential, through an approximate kinematic consistency, to give reasonable seismic images of such structures.

Reflection tomography and migration velocity analysis are appropriate techniques to complete this approximate kinematic consistency. Smooth models are then quite suited to run such techniques:

- together with a adequate integration of a priori geological information they provide us with a reliable reflection tomography avoiding possible local minima;
- they make possible the difficult interpretation of the cube of common offset migrated images which is the key for migration velocity analysis.

Acknowledgments

This research was carried out as part of the Prestack Structural Interpretation consortium project (PSI). The authors hereby acknowledge the support provided by the sponsors of this project. One of the authors (D. S.) wants to thank Elf Aquitaine for its financial support.

We acknowledge TOTAL, who provided the real data set studied in this paper.

We thank the members of the PSI team and especially Andreas Ehinger for his invaluable cooperation.

We also thank several scientists from Amoco Research Center who have inspired this paper in different aspects:

- Larry Lines and John Scales for the very instructive discussions we have had about reflection tomography,
- Sam Gray who spent many efforts to push us towards the common offset strategy which is the adequate one for migration velocity analysis,

Chapitre III

- Kurt Marfurt with whom we have cooperated on many subjects and especially on the development of the common offset migration program used to produce some results presented in this paper,
- and especially, Sven Treitel who is the initiator of the many fruitful exchanges we have had with Amoco for more than 15 years

Chapitre IV. Tomographie de réflexion avec des modèles lisses

1 Introduction

Nous avons déjà signalé dans le chapitre II que le problème inverse associé à la tomographie est mal posé. En effet, le nombre de données est fini et le nombre d'inconnues est infini. Même si, pour résoudre le problème numériquement, nous discrétisons l'espace des modèles (ce qui rend le nombre d'inconnues fini) une importante difficulté demeure: le modèle solution dépend de la discrétisation choisie. Delprat-Jannaud a étudié ce problème dans sa thèse en 1991 et a proposé une régularisation du modèle qui stabilise le problème inverse:

on cherche le modèle $m \in \mathcal{M}$ minimisant la fonctionnelle

$$\begin{aligned}
 C^{reg}(m) = & \left\| T(m) - T^{obs} \right\|^2 \\
 & + (\varepsilon^V)^2 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^2 \right] d\Omega \\
 & + (\varepsilon_i^Z)^2 \int_{I_x} \left(\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} \right)^2 dx
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où ε^V et $(\varepsilon_i^Z)_{i=1,N}$ sont des poids de pénalisation permettant de calibrer la régularisation par rapport au terme cinématique.

Cette nouvelle formulation est bien posée (Delprat-Jannaud et Lailly, 1993). En effet, en plus des données temps de trajet, nous disposons d'une donnée "continue" (en tout point) sur la courbure du modèle. En pratique cela signifie que, si la discrétisation est suffisamment fine, la solution de ce problème inverse ne dépend plus du nombre de paramètres choisi pour décrire le modèle.

Cependant, une telle régularisation ne s'avère pas suffisante en pratique lorsqu'on s'intéresse aux structures complexes. En effet, les modèles correspondants à ce type de structure n'admettant pas une faible courbure, pour obtenir le modèle de la Figure 6 page 28, nous ne pouvons qu'utiliser une faible régularisation (un faible poids ε^V), ce qui conduit à un résultat instable. Ce modèle est satisfaisant du point de vue cinématique (il vérifie les temps de trajet avec une précision acceptable) mais il est inacceptable d'un point de vue géologique. Il n'y a en particulier aucune cohérence entre le modèle de vitesse et les interfaces. De plus, la trop faible régularisation provoque des anomalies de vitesse qui reflètent l'instabilité sous-jacente.

Dans le chapitre III qui présentait le contexte de cette étude, nous avons motivé le choix de la représentation lisse du modèle de vitesse aux dépens d'un modèle discontinu, dit *blocky*. Ce choix a une forte incidence sur le résultat décrit précédemment. En effet, dans cette modélisation, il n'y a aucune corrélation explicite entre la vitesse et les interfaces alors que dans le modèle *blocky*, la vitesse est définie par couches délimitées par les interfaces, la corrélation est alors plus facile à introduire (Figure 4 page 24). Ainsi, dans ces modèles discontinus, on peut prendre en compte plus facilement la nature faillée du milieu, ce qui n'est pas le cas dans la représentation lisse: le modèle de la Figure 6 page 28 ne présente pas les fortes variations de vitesse auxquelles on pouvait s'attendre au voisinage de la faille.

Il faut donc développer une technique adaptée pour introduire de l'information géologique dans la tomographie utilisant des modèles lisses.

2 Information a priori sur le modèle de vitesse

Nous disposons de plusieurs types d'informations a priori. Nous avons déjà décrit dans le chapitre III les connaissances géologiques a priori auxquelles on a accès: les informations sur la régularité du milieu, sur les dépôts sédimentaires mais aussi sur les parties éclairées des réflecteurs (Jannaud

et Delprat-Jannaud, 1994). Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux deux premiers types d'information.

En effet, le géologue est capable de nous donner une idée "qualitative" assez précise du milieu (Figure 1 page 22). Il sait que la vitesse est plus régulière dans certaines régions que dans d'autres: par exemple, autour d'une faille, on s'attend à de fortes variations de vitesse alors que dans une région sédimentaire, la vitesse devrait être plus régulière. D'autre part, la vitesse varie moins le long des lignes de dépôts sédimentaires (à peu près horizontales) que verticalement. Certaines interfaces sont elles-mêmes des lignes de dépôts, la géométrie des autres lignes étant fortement corrélées à celles-ci. On peut alors se faire une idée des variations de vitesse dans les zones sédimentaires (Figure 7 page 29).

De plus, on a souvent accès à des estimations de la vitesse dans certaines régions (à la surface ou dans des puits) ou à des estimations de la profondeur des interfaces. Il est alors intéressant de pouvoir introduire également ce type d'information dans la formulation de la tomographie.

Nous cherchons donc maintenant un modèle qui approche les temps de trajet pointés et qui, en plus, vérifie ces **informations a priori**:

- (i) dans certaines régions, le champ de vitesse (respectivement champ de lenteur au carré) est régulier au sens géologique, c'est-à-dire son gradient ne présente pas de fortes variations,
- (ii) la vitesse (respectivement la lenteur au carré) varie peu le long de lignes de dépôt sédimentaire dont la géométrie peut être généralement déduite de celle des interfaces, (cf. Figure 1),
- (iii) la vitesse peut être connue en certains points du milieu,
- (iv) la profondeur des interfaces peut être connue en certains points,
- (v) les interfaces sont régulières, c'est-à-dire leurs pentes ne présentent pas de fortes variations.

Soit la formulation des moindres carrés du nouveau problème inverse avec informations a priori: **on cherche le modèle $m \in \mathcal{M}$ minimisant la fonctionnelle**

$$\begin{aligned}
 C^{a\ priori}(m) = & \left\| T(m) - T^{obs} \right\|^2 \\
 & + (\varepsilon^{U^{obs}})^2 \left\| U - U^{obs} \right\|^2 + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^{Z^{obs}})^2 \left\| Z_i - Z_i^{obs} \right\|^2 \\
 & + \sum_{i=1}^N \int_{I_x} \varepsilon_i^G(x, m)^2 (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}_i)^2 dx \\
 & + \int_{\Omega} \varepsilon^V(x, z, m)^2 \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^2 \right) d\Omega \\
 & + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^Z)^2 \int_{I_i} \left(\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} \right)^2 dx,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où \vec{t}_i est la tangente unitaire à l'interface i , $\vec{\nabla} U$ est le gradient du carré de la lenteur et \cdot désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^2 , $\left\| U - U^{obs} \right\|^2 = \sum_{k=1}^{N^{U^{obs}}} (U(x_k^{U^{obs}}, z_k^{U^{obs}}) - U_k^{obs})^2$, $(x_k^{U^{obs}}, z_k^{U^{obs}}, U_k^{obs})$ étant les coordonnées des points auxquels la lenteur au carré est donnée, $\left\| Z_i - Z_i^{obs} \right\|^2 = \sum_{k=1}^{N^{Z^{obs}}} (Z_i((x_k^{Z^{obs}})_i) - (Z_k^{obs})_i)^2$, $((x_k^{Z^{obs}})_i, (Z_k^{obs})_i)$ étant les coordonnées des points donnés de l'interface I_i .

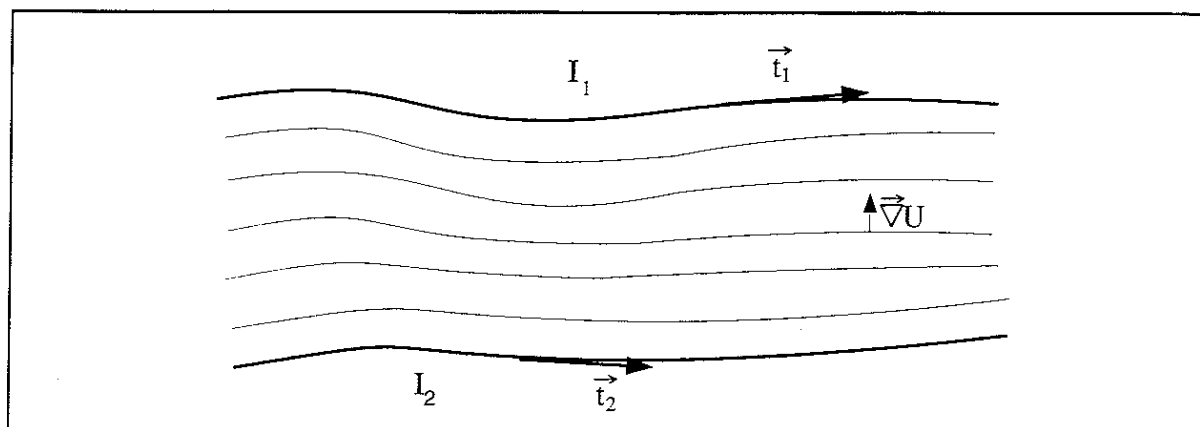


Fig 1 La géométrie des lignes iso-vitesse est déduite de celle des interfaces. La vitesse varie peu le long d'une interface.

Le premier terme de la **fonction coût**, le **terme cinématique**, mesure l'écart entre les temps de trajet calculés et les temps observés. Le terme suivant, le **terme de guidage de la vitesse**, estime la projection du gradient de la lenteur au carré sur la tangente à l'interface i , c'est-à-dire les variations du carré de la lenteur le long de cette interface (Figure 1). Enfin, les deux derniers termes sont les **termes de régularisation** du modèle : ils mesurent la courbure du modèle et induisent la propagation du guidage de la vitesse au voisinage des interfaces; on décrira ce phénomène dans la sous-section suivante (3).

Les fonctions $\varepsilon^{U_{obs}}$, $\varepsilon_i^{Z_{obs}}$, ε_i^G , ε^V , ε_i^Z sont les **poids** et ont un rôle primordial pour la calibration des différents termes de la fonctionnelle. En effet, ces quantités permettent de donner plus ou moins d'importance à un terme suivant la confiance qu'on lui porte. L'autre rôle très important de ces poids est d'affaiblir l'effet des termes de régularisation de la vitesse dans certaines régions, par exemple au voisinage d'une faille; c'est pourquoi ε_i^G et ε^V dépendent de la position du point courant et du modèle (de la géométrie de la faille).

Dans la section VII, nous détaillerons le calcul de ces termes ainsi que la définition des poids.

3 Estimation du guidage de la vitesse le long de lignes interpolant les interfaces

Nous cherchons des modèles qui ont, entre autres, la propriété suivante : *la vitesse varie peu le long de lignes de dépôt sédimentaire. La géométrie de ces lignes est généralement déduite de celle des interfaces*

Or, dans notre formulation 2.1, nous avons choisi de minimiser les variations de vitesse (lenteur au carré en pratique) uniquement le long des interfaces et non pas le long de lignes de dépôt définies, par exemple, par une interpolation des interfaces. Nous avons fait ce choix tout d'abord pour simplifier la formulation mais aussi parce que l'information sur la régularité de la vitesse (information introduite par les dérivées secondes de la vitesse dans la fonctionnelle) complète ce guidage de la vitesse le long des interfaces.

En effet, intuitivement on peut remarquer que la minimisation des dérivées secondes de la lenteur au carré induit la propagation de ce guidage "localisé" dans toute la couche, c'est-à-dire le long de lignes interpolant les interfaces. Aux interfaces, on impose par le terme de guidage une direction au gradient de la lenteur au carré, la direction orthogonale aux interfaces. D'autre part, on minimise les variations du gradient dans la couche (minimisation des dérivées secondes). Donc, dans un voisinage des interfaces, le gradient conservera la même direction que celle imposée aux interfaces.

En d'autres termes, dans cette région, les iso-lignes du carré de la lenteur interpoleront les interfaces. Les exemples du chapitre VIII illustrent cette propriété.

Nous cherchons dans cette section à quantifier cette propagation du guidage en estimant les variations de la lenteur au carré le long des lignes interpolant les interfaces. Pour cela, nous considérons un domaine comprenant une seule interface I et nous introduisons un champ de vecteurs unitaires \vec{t} extrapolant les tangentes unitaires \vec{t} à l'interface, c'est-à-dire coïncidant avec \vec{t} sur l'interface

Soit $Z_1(x)$ la fonction représentant la profondeur de l'interface I et $Z_2(x)$ la fonction représentant la profondeur d'une ligne I' (on suppose que $Z_2(x) > Z_1(x)$, $\forall x \in I_x$) définie par le champ de vecteurs \vec{t} (cf. Figure 2).

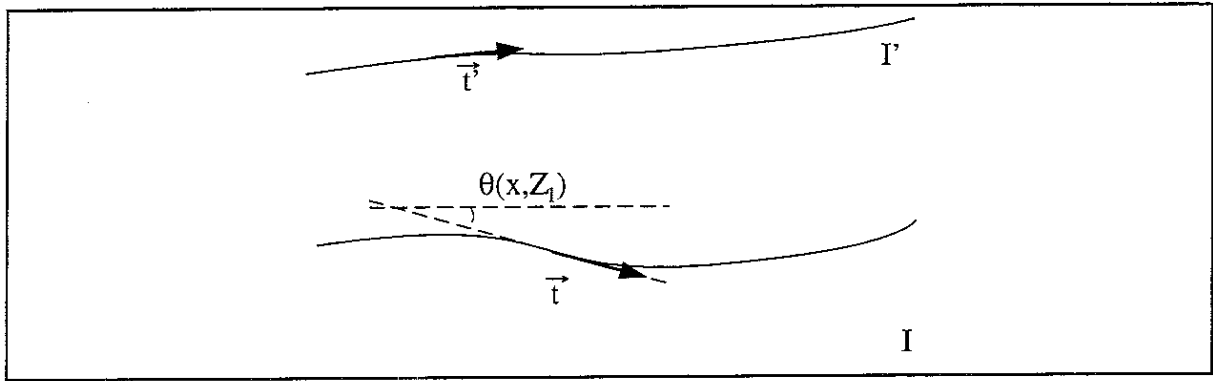


Fig. 2 L'interface I et la ligne I' . On définit les tangentes aux interfaces et la fonction pendage $\theta(x, z)$, c'est-à-dire l'angle entre la tangente à l'interface et l'horizontale.

Notre objectif est d'estimer

$$\int_{I_x} |\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}|(x, Z_2(x)) dx \quad (3.1)$$

en fonction de

$$\int_{I_x} |\vec{\nabla} U(x, Z_1(x)) \cdot \vec{t}(x)| dx \quad (3.2)$$

et de $\|D^2U\|_{L^2(\Omega)}$

Notations :

Soit le domaine $\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / x \in I_x, z \in (Z_1(x), Z_2(x))\}$, domaine compris entre l'interface I et la ligne I'

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne

On définit $\vec{t}(x, z)$ par la fonction *pendage* $\theta(x, z)$, $|\theta(x, z)| < \frac{\pi}{2} \quad \forall (x, z) \in \Omega$ (cf. Figure 2):

$$\vec{t}(x, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta(x, z) \\ \sin\theta(x, z) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Proposition 3.1

On a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{I_z} \left| \vec{\nabla} U \cdot \vec{t} \right| (x, Z_2(x)) dx &\leq \int_{I_z} \left| \vec{\nabla} U(x, Z_1(x)) \cdot \vec{t}(x) \right| dx \\ &+ \|Z_2(x) - Z_1(x)\|_{L^1(I_z)}^{\frac{1}{2}} \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial U}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \vec{\nabla} U \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial \vec{t}}{\partial z} \right\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} U \cdot \vec{t}(x, Z_2(x)) &= \vec{\nabla} U \cdot \vec{t}(x, Z_1(x)) + \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}) dz \\ \left| \vec{\nabla} U \cdot \vec{t}(x, Z_2(x)) \right| &\leq \left| \vec{\nabla} U \cdot \vec{t}(x, Z_1(x)) \right| + \int_{Z_1}^{Z_2} \left| \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}) \right| dz \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left| \vec{\nabla} U \cdot \vec{t}(x, Z_2(x)) \right| dx \leq \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left| \vec{\nabla} U \cdot \vec{t}(x, Z_1(x)) \right| dx + \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}) \right\|_{L^1(\Omega)}$$

Il nous reste à trouver une estimation de $\left\| \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}) \right\|_{L^1(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}) \right\|_{L^1(\Omega)} &\leq \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{t} \right\|_{L^1(\Omega)} + \left\| \vec{\nabla} U \cdot \frac{\partial \vec{t}}{\partial z} \right\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial U}{\partial z} \right\|_{L^1(\Omega)} + \left\| \vec{\nabla} U \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial \vec{t}}{\partial z} \right\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|Z_2(x) - Z_1(x)\|_{L^1(I_z)}^{\frac{1}{2}} \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial U}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \vec{\nabla} U \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial \vec{t}}{\partial z} \right\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

dont nous déduisons facilement l'inégalité (3.4) □

Remarques :

L'estimation obtenue dans la proposition 3.1 fait intervenir le guidage de la vitesse sur l'interface I et les dérivées secondes de la lenteur au carré mais aussi les variations des vecteurs \vec{t} dans Ω et le gradient de la lenteur au carré: $\left\| \frac{\partial \vec{t}}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}$ et $\left\| \vec{\nabla} U \right\|_{L^\infty(\Omega)}$. De plus, on remarque que l'effet des dérivées secondes dépend de la distance entre l'interface et la ligne I' , ce qui semble logique : le guidage sera meilleur dans le voisinage des interfaces.

- (i) Le choix des vecteurs \vec{t} est arbitraire, ils interpolent les tangentes à I et à I' . On prend par exemple une interpolation linéaire:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(x, z) = \frac{\theta_2(x) - \theta_1(x)}{Z_2(x) - Z_1(x)} \quad (3.7)$$

où θ_1, θ_2 sont les pentages respectifs en $(x, Z_1(x))$ et $(x, Z_2(x))$.
 Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\|_{L^1} &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{Z_1(x)}^{Z_2(x)} \frac{|\theta_2(x) - \theta_1(x)|}{|Z_2(x) - Z_1(x)|} dz \\ &\leq \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} |\theta_2(x) - \theta_1(x)| dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

Cette quantité peut être facilement évaluée à partir de $Z_1(x)$ et $Z_2(x)$. Elle sera d'autant plus petite que les pentes des deux lignes sont proches pour un même x .

- (ii) Pour nous convaincre de l'importance du terme $\left\| \vec{\nabla} U \right\|_{L^\infty(\Omega)}$ dans l'estimation (3.4), nous considérons un exemple avec deux interfaces rectilignes $Z_1(x)$ et $Z_3(x)$ faisant un angle $-\alpha$ et $+\alpha$ respectivement avec l'horizontale.

Nous nous intéressons à $\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}$ sur l'interface 2 définie par la fonction $Z_2(x)$ et qui constitue l'axe de symétrie entre les interfaces 1 et 3 (cf. Figure 3).

Nous considérons une distribution de lenteur au carré à gradient constant : la direction du gradient

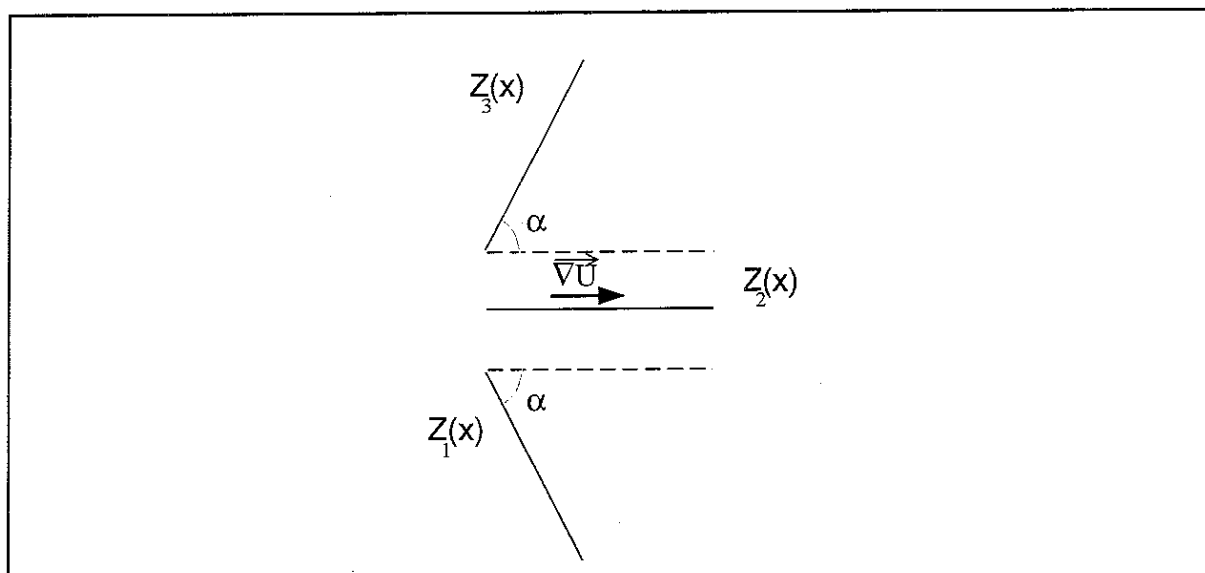


Fig 3 Domaine Ω qui comprend 3 interfaces de profondeur respective $Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x)$. La distribution de lenteur au carré a un gradient constant de direction horizontale

est horizontale et son module est égal à g . Alors, $\left\| \vec{\nabla} \frac{\partial U}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Si on fait tendre α vers $\frac{\pi}{2}$, alors

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left| \vec{\nabla} U \cdot \vec{t} \right| (x, Z_1(x)) dx \quad (3.9)$$

et

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left| \vec{\nabla} U \cdot \vec{t} \right| (x, Z_3(x)) dx \quad (3.10)$$

tendent vers 0 tandis que

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} |\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}|(x, Z_2(x)) dx \quad (3.11)$$

reste constant égal à $g(x_{max} - x_{min})$. Il est évident qu'on ne peut pas obtenir une estimation de cette dernière quantité en fonction de $\|D^2U\|_{L^2(\Omega)}$ uniquement. Il est donc essentiel d'avoir une estimation de $\|\vec{\nabla}U\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Dans le cas où les pentages des interfaces successives varient rapidement, il est nécessaire de définir des bornes pour le gradient de la lenté au carré pour assurer le guidage de la vitesse entre les interfaces (c'est-à-dire sur des lignes interpolant celles-ci). Nous préférons cette approche à l'introduction d'un terme supplémentaire dans la fonctionnelle, c'est-à-dire un poids supplémentaire à régler. Les variations de la lenté au carré le long des lignes interpolant les interfaces dans la couche seront d'autant plus faibles que les bornes seront sévères.



Chapitre V. Etude du problème direct

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution du problème direct par le tracé de rayons. Nous étudierons le problème de Cauchy associé et nous donnerons des conditions suffisantes sur la régularité du modèle assurant l'existence et l'unicité de solution de ce problème. Dans le cadre de la tomographie de réflexion, nous cherchons des rayons de signature donnée (source, récepteur, interface): ce problème est appelé le *two-point raytracing* (tracé de rayons reliant deux points, la source et le récepteur, avec réflexion sur l'interface).

Nous étudions ici à un problème plus simple de type Cauchy: le *shooting* où l'on calcule le rayon issu de la source avec un angle de tir donné (la position du récepteur est inconnue). Nous mettrons en évidence des cas pathologiques où les problèmes de *shooting* et de *two-point raytracing* n'admettent pas de solution.

Dans une deuxième section, nous nous intéressons à la continuité et à la dérivabilité de la solution du *shooting* par rapport au modèle et aux conditions initiales.

2 Equations des rayons

Le tracé de rayons consiste à fournir une solution haute fréquence de l'équation des ondes. Nous nous contenterons ici de donner les équations (pour plus de détails voir Jannaud, 1992).

On cherche à calculer les temps de trajet $T_k(m)$ des ondes se propageant dans la distribution de lenteur au carré et se réfléchissant sur une interface. Ces temps de trajet sont associés à ce modèle et à un dispositif d'acquisition: un ensemble de sources S et de récepteurs R .

Le temps de trajet associé à un triplet (S, R, i) est donné par

$$T_k(m) = \int_{\mathcal{R}_k} \sqrt{u} ds, \quad (2.1)$$

où s est l'abscisse curviligne le long du rayon \mathcal{R}_k et l'indice k correspond au triplet (S, R, i) . Dans la suite, nous ne considérons qu'un seul rayon \mathcal{R} .

La géométrie du rayon est donnée par le système d'équations suivantes

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{U}} \vec{p} \\ \frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{\nabla} \sqrt{U} \\ \frac{dT}{ds} = \sqrt{U} \end{cases} \quad (2.2)$$

dans lesquelles nous avons introduit le vecteur $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, point courant du rayon et le vecteur lenteur $\vec{p} = \vec{\nabla} T(\vec{X})$ tangent au rayon et de module égal à la lenteur \sqrt{U} .

Pour simplifier ces équations, nous posons

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{U}} ds. \quad (2.3)$$

Ainsi, les équations du rayon avec cette nouvelle paramétrisation s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}}{d\tau} = \vec{p} \\ \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{\nabla} U \\ \frac{dT}{d\tau} = U \end{cases} \quad (2.4)$$

Les conditions initiales sont les suivantes:

$$\begin{cases} \vec{X}(0) = \vec{X}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ z_S \end{pmatrix} \\ \vec{p}(0) = \sqrt{U(x_S, z_S)} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ T(0) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

où \vec{X}_S est la position de la source et θ , l'angle de tir du rayon (angle entre le rayon et l'horizontale à la source).

Le rayon incident se réfléchit sur l'interface et le rayon réfléchi vérifie les lois de Snell-Descartes (voir Figure 1).

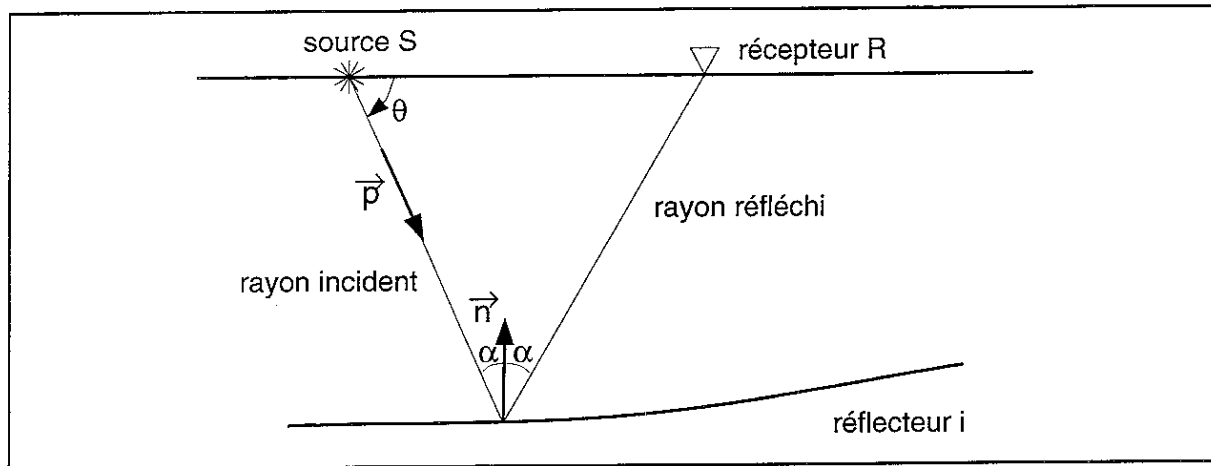


Fig 1 Rayon de signature (S, R, i) . Dans le cas du *shooting*, l'angle de tir θ est donné et R est inconnu: on résoud le problème de Cauchy associé (2.4), (2.5). Dans le cas du *two-point raytracing*, θ est inconnu et R est connu: on cherche le rayon de signature (S, R, i) .

Dans le problème direct de la tomographie, nous cherchons le rayon qui relie une source et un récepteur donnés et nous ne connaissons pas l'angle de tir (*two-point raytracing*). Nous devons donc déterminer l'angle de tir pour que le rayon arrive, après réflexion sur l'interface, au récepteur R de coordonnées \vec{X}_R . Nous devons donc résoudre

$$\vec{X}(\theta) = \vec{X}_R \quad (2.6)$$

où θ est l'inconnue. Nous utilisons une méthode de Newton (Jannaud, 1992) qui nécessite le calcul de $\partial \vec{X} / \partial \theta$. Nous utilisons la technique des rayons paraxiaux (Virieux et al, 1988), c'est-à-dire qu'au lieu de résoudre seulement (2.4), nous résolvons également les équations paraxiales

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}}{d\tau} = \vec{p} \\ \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\vec{\nabla}U \\ \frac{dT}{d\tau} = U \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} D^2 U \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \vec{\nabla}U \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2.7)$$

où

$$D^2U = \begin{pmatrix} \partial^2 U / \partial x^2 & \partial^2 U / \partial x \partial z \\ \partial^2 U / \partial x \partial z & \partial^2 U / \partial z^2 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Les conditions initiales associées aux équations (2.7) sont les suivantes

$$\begin{cases} \vec{X}(0) = \vec{X}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ z_s \end{pmatrix} \\ \vec{p}(0) = \sqrt{U(x_s, z_s)} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ T(0) = 0 \end{cases} \quad (2.9a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta}(0) = 0 \\ \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta}(0) = \sqrt{U(x_s, z_s)} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta}(0) = 0. \end{cases} \quad (2.9b)$$

Nous notons $W(\tau) = (\vec{X}, \vec{p}, T, \partial \vec{X} / \partial \theta, \partial \vec{p} / \partial \theta, \partial T / \partial \theta)^t$ et
 $F(\tau, W(\tau)) = A(W(\tau)) W(\tau) + B(W(\tau))$
 avec

$$A(W(\tau)) = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_p(W(\tau)) \end{pmatrix}, \quad A_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_p(W(\tau)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(\vec{X}(\tau))}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(\vec{X}(\tau))}{\partial x \partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(\vec{X}(\tau))}{\partial x \partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(\vec{X}(\tau))}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial U(\vec{X}(\tau))}{\partial x} & \frac{\partial U(\vec{X}(\tau))}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

et

$$B(W(\tau)) = (B_s(W(\tau)) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^t, \quad B_s(W(\tau)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{\nabla} U(\vec{X}(\tau)) \\ U(\vec{X}(\tau)) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

(2.7) est un système d'équations différentielles d'ordre 1 qui peut s'écrire

$$\frac{dW}{d\tau} = F(\tau, W(\tau)) \quad (2.12)$$

avec les conditions initiales (2.9).

On résout ces équations jusqu'à l'interface sur $[0, \tau_0]$. Puis on applique les lois de Snell-Descartes et on résout à nouveau ces équations sur $[\tau_0, \tau_1]$ avec de nouvelles conditions initiales. Pour les

équations du *shooting* (2.4), ces nouvelles conditions initiales sont les suivantes

$$\begin{cases} \vec{X}(\tau_0) = \vec{X}_{imp} = \begin{pmatrix} x^{inc}(\tau_0) \\ Z_i(x^{inc}(\tau_0)) \end{pmatrix} \\ p_x(\tau_0) = \frac{p_x^{inc}(\tau_0)(1-Z'_{imp})+2Z'_{imp}p_z^{inc}(\tau_0)}{1+Z'^2_{imp}} \\ p_z(\tau_0) = \frac{2p_z^{inc}(\tau_0)Z'_{imp}+p_x^{inc}(\tau_0)(Z'^2_{imp}-1)}{1+Z'^2_{imp}} \\ T(\tau_0) = T^{inc}(\tau_0) \end{cases} \quad (2.13)$$

où $(x^{inc}(\tau_0), Z_i(x^{inc}(\tau_0)))^t$ sont les coordonnées du point d'impact du rayon incident sur l'interface i , $(p_x^{inc}(\tau_0), p_z^{inc}(\tau_0))^t$, le vecteur lenteur, et $T^{inc}(\tau_0)$, le temps de trajet au point d'impact. Toutes ces quantités sont déterminées par la résolution des équations du rayon (2.4) pour le rayon incident c'est-à-dire avec les conditions initiales (2.9a) (voir Jannaud, 1992, Moser, 1993, Bécache et Joly, 1993, pour la résolution numérique de ces équations).

Théorème 2.1 (Existence et unicité de la solution de (2.7),(2.9))

F est continue sur $[0, \tau_0] \times \mathbb{R}^{10}$ et vérifie la condition de Lipschitz:
il existe un réel L tel que

$$\begin{aligned} \forall (\tau, W_1), (\tau, W_2) \in [0, \tau_0] \times \mathbb{R}^{10}, \\ |F(\tau, W_1) - F(\tau, W_2)| \leq L|W_1 - W_2|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le problème (2.7) avec les conditions initiales (2.9) admet donc une solution et une seule.

Démonstration:

On vérifiera uniquement que F est continue et lipschitzienne, la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz étant donnée, par exemple, dans *Crouzeix et Mignot (1983)*.

U étant supposé $C^2(\Omega)$, U est borné et à dérivées premières et secondes bornées:

$\exists U_{min}, U_{max}, C_1, C_2 / \forall (x, z) \in \Omega,$

$$\begin{aligned} 0 < U_{min} \leq U(x, z) \leq U_{max} < \infty \\ \|\vec{\nabla}U\| \leq C_1 < \infty \\ \|D^2U\| \leq C_2 < \infty, \end{aligned} \quad (2.15)$$

et

$$\begin{aligned} |U(\vec{X}_1) - U(\vec{X}_2)| \leq C_3|\vec{X}_1 - \vec{X}_2| \\ |\vec{\nabla}U(\vec{X}_1) - \vec{\nabla}U(\vec{X}_2)| \leq C_4|\vec{X}_1 - \vec{X}_2|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \forall (\tau, W_1), (\tau, W_2) \in [0, \tau_0] \times \mathbb{R}^{10}, \\ |F(\tau, W_1) - F(\tau, W_2)| \leq |A||W_1 - W_2| + |B(\vec{X}_1) - B(\vec{X}_2)| \\ \exists L / |F(\tau, W_1) - F(\tau, W_2)| \leq L|W_1 - W_2|. \end{aligned} \quad (2.17)$$

On remarquera que pour les équations de shooting (2.4), si U est $C^1(\Omega)$, donc borné et à dérivées premières bornées, la condition de Lipschitz (2.14) est vérifiée et donc l'existence et l'unicité de la solution sont assurées.

□

Remarque importante: le théorème précédent montre l'existence et l'unicité de solution du problème (2.7), (2.9), c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'un rayon à conditions initiales données mais sans réflexion sur une interface. Pour le problème de *shooting* dans lequel on recherche un rayon se réfléchissant sur l'interface et revenant à la surface, l'existence d'une solution n'est pas assurée. Citons trois cas pathologiques:

- (i) le cas pathologique le plus courant correspond à un rayon sortant du domaine de définition du modèle,
- (ii) dans l'exemple du haut de la Figure 2, le rayon 2 ne se réfléchit pas sur l'interface et n'est donc pas solution du problème de *shooting*.
- (iii) dans l'exemple du centre de la Figure 2, le rayon coupe plusieurs fois l'interface. Ce cas peut être réglé par la convention suivante: on ne considère que la première réflexion sur l'interface.

Néanmoins, si une solution du problème de *shooting* existe, elle est unique.

Pour le *two-point raytracing*, l'existence et l'unicité d'une solution n'est pas assurée. Dans l'exemple du bas de la Figure 2, il existe une infinité de rayons issus de la source S se réfléchissant sur l'interface et revenant en S . Par contre, on ne peut pas trouver de rayons issus de S se réfléchissant sur l'interface et revenant en un récepteur quelconque à la surface mais différent de S . Plus généralement, le cas des arrivées multiples peut être rencontré dans les applications de la tomographie aux structures complexes. Delprat-Jannaud et Lailly, 1994, utilisent une formulation de la tomographie généralisée aux arrivées multiples et s'affranchissent ainsi de cette difficulté en prenant comme problème direct un problème de *shooting*.

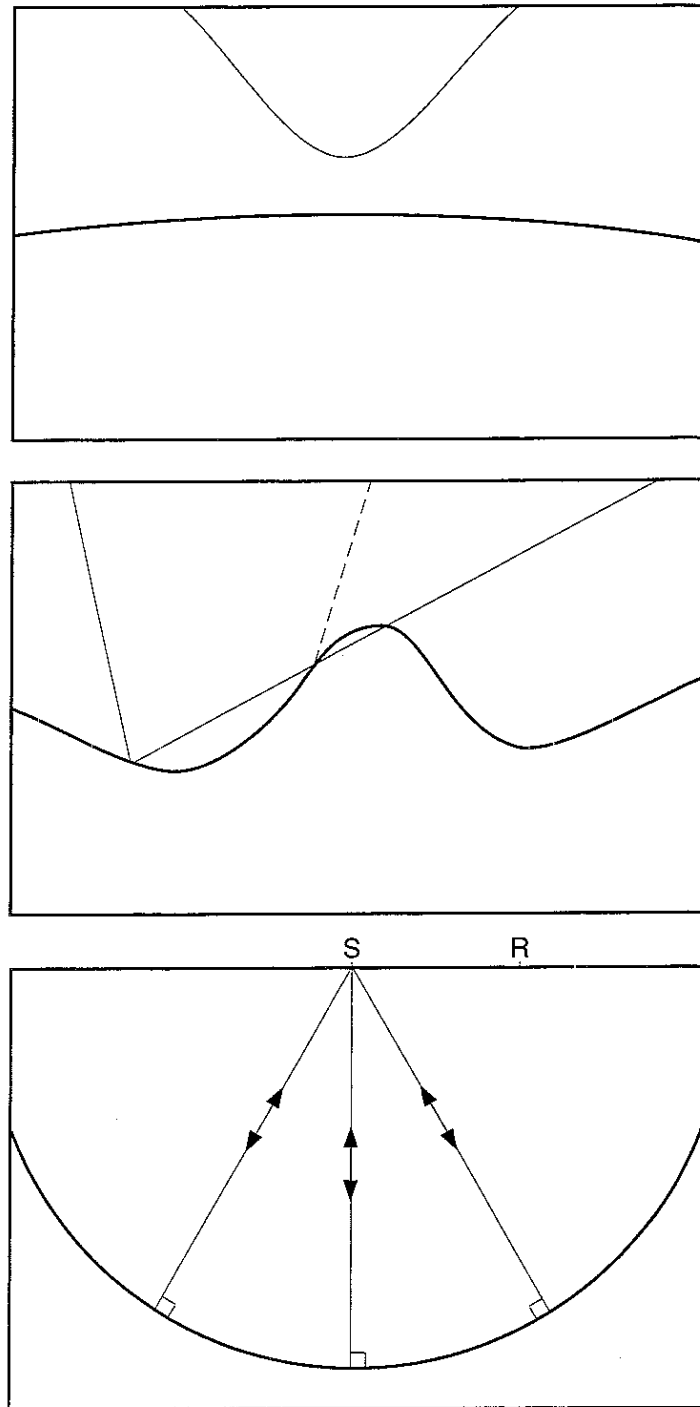


Fig 2 Cas pathologiques: l'existence d'une solution du problème de *shooting* et du *two-point raytracing* n'est pas assurée. Haut: le rayon n'est pas solution du *shooting* puisqu'il ne se réfléchit pas sur l'interface. Il n'y a pas de solution au problème de *shooting* pour cette condition initiale et cette signature. Centre: le rayon coupe l'interface trois fois. Plusieurs solutions sont possibles. On doit préciser par exemple qu'on n'autorise qu'une seule réflexion sur l'interface (par rayon) pour lever l'ambiguïté, la solution est alors le rayon en trait continu. Si on autorise plusieurs réflexions, on obtient le rayon en pointillé. Bas: l'existence et l'unicité d'une solution du problème de *two-point raytracing* ne sont pas assurées. Le problème admet une infinité de solutions de signature (S, S, i) mais n'admet pas de solution de signature (S, R, i) .

3 Continuité et dérivabilité de la solution du *shooting*

Nous étudions les conséquences d'une perturbation de lenteur au carré et de conditions initiales sur la solution du problème de *shooting* (2.4) et (2.5) sur $[\tau_0, \tau_1]$:

$$\begin{cases} \frac{dW_\varepsilon}{d\tau} = F_{\varepsilon_1}(\tau, W_\varepsilon(\tau)) \\ W_\varepsilon(\tau_0) = W_0 + \varepsilon_0\alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $W_\varepsilon(\tau) = (\vec{X}_\varepsilon, \vec{p}_\varepsilon, T_\varepsilon)^t$, $W_0 = (\vec{X}(0), \vec{p}(0), T(0))^t$, $F_{\varepsilon_1}(\tau, W_\varepsilon(\tau)) = F(\tau, W_\varepsilon(\tau)) + \varepsilon_1 G(W_\varepsilon(\tau))$ (d'après les notations (2.10) et (2.11)) et $G(W_\varepsilon(\tau)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\nabla} \partial U(\vec{X}_\varepsilon(\tau)) \\ \partial U(\vec{X}_\varepsilon(\tau)) \end{pmatrix}$, ∂U est supposée $C^2(\Omega)$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}^5$.

Théorème 3.1

Le problème (3.1) admet une solution et une seule W_ε et on a

$$\begin{aligned} \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1], \exists K / \\ |W_\varepsilon(\tau) - W(\tau)| \leq e^{K(\tau - \tau_0)} (|\varepsilon_0\alpha| + \varepsilon_1 \|\partial U\|_{H^2(\Omega)}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où W est la solution du problème non perturbé (2.4).

De plus, F admettant une dérivée partielle par rapport à W ,

$$D_W F(\tau, W(\tau)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

qui est continue sur $[\tau_0, \tau_0 + \tau_1] \times \mathbb{R}^5$, on a alors

$$|W_\varepsilon(\tau) - W(\tau) - \varepsilon_0 Y_0(\tau) - \varepsilon_1 Y_1(\tau)| \leq C(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1), \quad (3.4)$$

avec $\lim_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = 0$

où Y_0 et Y_1 désignent les solutions sur $[\tau_0, \tau_0 + \tau_1]$ de

$$\begin{cases} \frac{dY_0}{d\tau} = D_W F(\tau, W(\tau)) Y_0(\tau) \\ Y_0(\tau_0) = \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{dY_1}{d\tau} = F(\tau, W(\tau)) Y_1(\tau) + G(W(\tau)) \\ Y_1(\tau_0) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

La démonstration est analogue à celle donnée dans *Crouzeix et Mignot (1983)*.

Corollaire 3.2 (continuité et dérivabilité de la solution des équations des rayons)

La solution des équations (2.4), (2.5) est continue et dérivable par rapport aux conditions initiales et par rapport à la lenteur au carré pour la norme $H^2(\Omega)$.

La démonstration est une conséquence directe du théorème 3.1.

D'après (3.4), on a

$$|W(\tau, U + \varepsilon_1 \partial U) - W(\tau, U) - \varepsilon_1 Y_1(\tau)| \leq C \varepsilon_1 \alpha(\varepsilon_1), \tag{3.6}$$

avec $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon_1) = 0$

Donc, $W(\tau, U)$ est dérivable par rapport à U et

$$\frac{\partial W}{\partial U} \partial U = Y_1. \tag{3.7}$$

□

Nous avons cité des cas pathologiques page 57 pour lesquels nous ne pouvons assurer l'existence d'une solution du problème de *shooting*. Nous excluons ces cas particuliers pour étudier la continuité et la dérivabilité de la solution du problème de *shooting*. Nous supposons donc que les rayons non perturbé et perturbé atteignent l'interface et ne sortent pas du domaine de définition du modèle. Nous excluons d'autre part les rayons tangents à l'interface: dans l'exemple de la Figure 3, l'abscisse du récepteur en fonction de l'angle de tir présente une discontinuité en θ_{tgt} , angle de tir donnant un rayon tangent à l'interface.

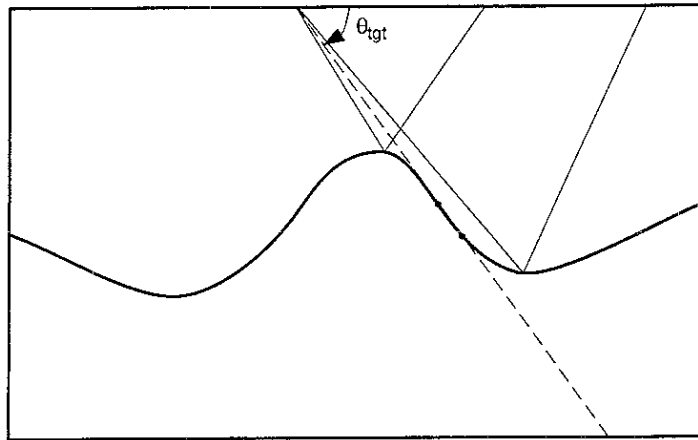


Fig 3 Cas pathologique: la solution du problème de *shooting* est discontinue par rapport à l'angle de tir en θ_{tgt} .

Hypothèses 3.3

Nous supposons que les rayons

- (i) ne sortent pas de Ω , domaine de définition du modèle,
- (ii) atteignent l'interface,
- (iii) et ne sont ni tangents à l'interface, ni horizontaux aux récepteurs.

Théorème 3.4 (Continuité et dérivabilité de la solution du *shooting*)

Sous les hypothèses 3.3, la solution du problème de *shooting* avec réflexion sur une interface est continue et dérivable par rapport aux conditions initiales, par rapport au

milieu de lenteur au carré pour la norme $H^2(\Omega)$ et par rapport aux interfaces pour la norme $H^1(I_x)$.

On appelle W^{inc}, W^{ref} la solution de (2.4) pour les conditions initiales (2.5) (rayon incident) et pour les conditions initiales (2.13) (rayon réfléchi) respectivement. Le rayon non perturbé W^{inc} se réfléchit sur l'interface en τ_0 et arrive au récepteur en τ_1 . Le rayon perturbé W^{ref} se réfléchit sur l'interface en $\tau_0 + \partial\tau_0$ et arrive au récepteur en $\tau_1 + \partial\tau_1$ (voir Figure 4).

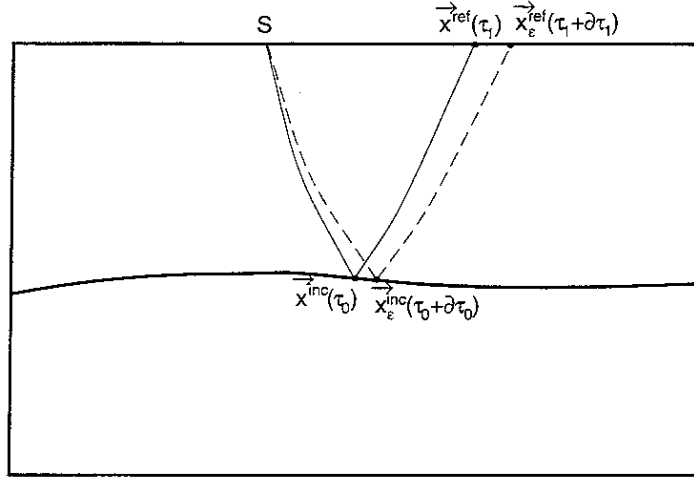


Fig 4 Rayon (trait pointillé) correspondant à une perturbation d'angle de tir.

Démonstration du théorème 3.4:

(i) CONTINUITE.

a. Continuité par rapport aux conditions initiales et à la lenteur de carré.

D'après le théorème 3.1 et le résultat suivant démontré en annexe A, on a pour le rayon incident sur $[0, \tau_0]$

$$|W_{\epsilon}^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{inc}(\tau_0)| \leq K e^{K\tau_0} (|\epsilon_0\alpha| + \epsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}), \quad (3.8)$$

et, de la même manière, pour le rayon réfléchi sur $[\tau_0', \tau_1]$

$$|W_{\epsilon}^{ref}(\tau_1 + \partial\tau_1) - W^{ref}(\tau_1)| \leq K e^{K(\tau_1 - \tau_0')} (|W_{\epsilon}^{ref}(\tau_0') - W^{ref}(\tau_0')| + \epsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}). \quad (3.9)$$

Or, les conditions initiales associées au rayon réfléchi s'écrivent en fonction des coordonnées du point d'impact et de la normale à l'interface, c'est-à-dire en fonction de $Z_i(x)$, de sa dérivée première (en fait, en fonction de $Z_{imp} = Z_i(x_{imp})$ et de $Z'_{imp} = Z'_i(x_{imp})$) et de $W^{inc}(\tau_0)$: d'après (2.13), on a

$$W^{ref}(\tau_0') = A_s^0 W^{inc}(\tau_0), \quad A_s^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - Z'_{imp}{}^2}{1 + Z'_{imp}{}^2} & \frac{2Z'_{imp}}{1 + Z'_{imp}{}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2Z'_{imp}}{1 + Z'_{imp}{}^2} & \frac{Z'_{imp}{}^2 - 1}{1 + Z'_{imp}{}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

et $W_\varepsilon^{ref}(\tau_0') = A_s^0 W_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0)$.

$Z_i(x)$ étant $C^2(I_x)$, $Z_i(x)$ et sa dérivée première sont bornées sur I_x :

$\exists Z_{min}, Z_{max}, C / \forall x \in I_x,$

$$\begin{aligned} 0 < Z_{min} \leq Z_i(x) \leq Z_{max} < \infty \\ |Z_i'(x)| \leq C. \end{aligned} \quad (3.11)$$

On a alors

$$|W_\varepsilon^{ref}(\tau_0') - W^{ref}(\tau_0')| \leq K |W_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{inc}(\tau_0)|. \quad (3.12)$$

On obtient donc

$$|W_\varepsilon^{ref}(\tau_1 + \partial\tau_1) - W^{ref}(\tau_1)| \leq K e^{K\tau_0} (|\varepsilon_0 \alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}). \quad (3.13)$$

b. Continuité par rapport aux interfaces.

On considère une petite perturbation d'interface $\varepsilon_2 \partial Z_i$ (Figure 5).

Le rayon incident perturbé $W_{\varepsilon_2}^{inc}$ a les mêmes conditions initiales que le rayon non perturbé mais est soit allongé ($\partial\tau_0 > 0$), soit raccourci ($\partial\tau_0 < 0$) pour se réfléchir sur l'interface perturbée $Z_i(x) + \partial Z_i(x)$.

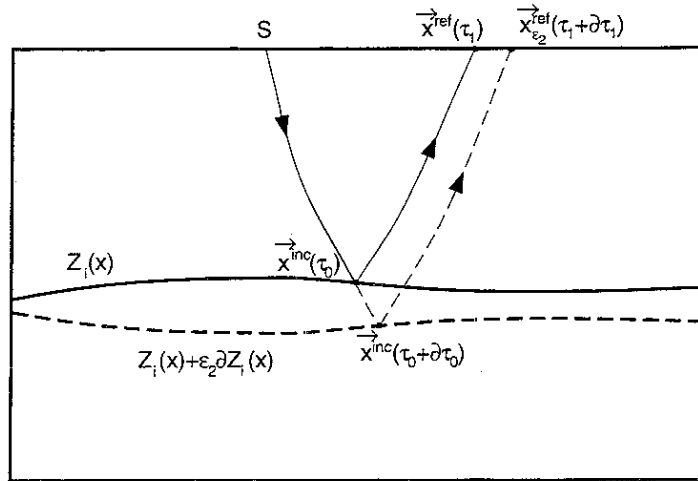


Fig 5 Rayon (trait pointillé) correspondant à une perturbation d'interface $Z_i(x) + \varepsilon_2 \partial Z_i(x)$

D'après (3.8) et le résultat suivant du lemme 3 (démontré dans l'annexe A), on a

$$\begin{aligned} |W^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{inc}(\tau_0)| &\leq K |\partial\tau_0| \\ &\leq K |\varepsilon_2| \|\partial Z_i\|_{H^1(I_x)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

La perturbation d'interface correspond à une perturbation de conditions initiales pour le rayon réfléchi, on a, comme précédemment,

$$\begin{aligned} |W_{\varepsilon_2}^{ref}(\tau_1 + \partial\tau_1) - W^{ref}(\tau_1)| &\leq K |W_{\varepsilon_2}^{ref}(\tau_0') - W^{ref}(\tau_0')| \\ &\leq K |W^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{inc}(\tau_0)| \\ &\leq K |\varepsilon_2| \|\partial Z_i\|_{H^1(I_x)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

on en déduit la continuité par rapport à l'interface pour la norme $H^1(I_x)$.

(ii) *DERIVABILITE*

a Dérivabilité par rapport aux conditions initiales et par rapport au champ de lenteur au carré.

On va montrer, comme dans le théorème 3.1, que

$$\left| W_\varepsilon^{ref}(\tau_1 + \partial\tau_1) - W^{ref}(\tau_1) - \varepsilon_0 Y_0^{ref}(\tau_1) - \varepsilon_1 Y_1^{ref}(\tau_1) - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \xi_1(\tau_1) \frac{dW^{ref}}{d\tau}(\tau_1) \right| \leq K(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1), \quad (3.16)$$

$$\lim_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = 0,$$

avec $Y_0^{inc}, Y_0^{ref}, Y_1^{inc}$ et Y_1^{ref} , les solutions de

$$\begin{cases} \frac{dY_0^{inc}}{d\tau} = D_W F(\tau, W(\tau)) Y_0^{inc}(\tau) \\ Y_0^{inc}(0) = \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dY_0^{ref}}{d\tau} = D_W F(\tau, W(\tau)) Y_0^{ref}(\tau) \\ Y_0^{ref}(\tau_0) = A_s^0 \left(Y_0^{inc}(\tau_0) + \xi_0(\tau_0) \frac{dW^{inc}}{d\tau}(\tau_0) \right) \end{cases}, \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \frac{dY_1^{inc}}{d\tau} = D_W F(\tau, W(\tau)) Y_1^{inc}(\tau) + G(W(\tau)) \\ Y_1^{inc}(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} \frac{dY_1^{ref}}{d\tau} = D_W F(\tau, W(\tau)) Y_1^{ref}(\tau) + G(W(\tau)) \\ Y_1^{ref}(\tau_0) = A_s^0 \left(Y_1^{inc}(\tau_0) + \xi_0(\tau_0) \frac{dW^{inc}}{d\tau}(\tau_0) \right) \end{cases}, \quad (3.19)$$

où

$$\xi_0(\tau_0) = \frac{Z'_i(x^{inc}(\tau_0)) (dx^{inc}/d\varepsilon)(\tau_0) - (dz^{inc}/d\varepsilon)(\tau_0)}{p_z^{inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{inc}(\tau_0)) p_x^{inc}(\tau_0)}. \quad (3.20)$$

La démonstration est celle qu'on peut trouver dans *Crouzeix et Mignot (1983)*.

D'après le théorème 3.1, on a pour le rayon incident

$$W_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - W^{inc}(\tau_0) - \varepsilon_0 Y_0^{inc}(\tau_0) - \varepsilon_1 Y_1^{inc}(\tau_0) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1), \quad (3.21)$$

$$\text{avec } \lim_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = 0.$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} W_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - \partial\tau_0 \frac{dW_\varepsilon^{inc}}{d\tau}(\tau_0) &= W_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W_\varepsilon^{inc}(\tau_0) \\ &\quad - \partial\tau_0 \left(\frac{dW_\varepsilon^{inc}}{d\tau}(\tau_0) - A_s(W_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - W^{inc}(\tau_0)) \right) \\ &\quad + \partial\tau_0 (-\varepsilon_1 G(W_\varepsilon^{inc}(\tau_0)) + B_s(W^{inc}(\tau_0)) - B_s(W_\varepsilon^{inc}(\tau_0))). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
 \left| W_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - \partial\tau_0 \frac{dW_\varepsilon^{inc}}{d\tau}(\tau_0) \right| &= O(|\partial\tau_0|^2), \\
 |W_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - W^{inc}(\tau_0)| &= O(\varepsilon_0 + \varepsilon_1), \\
 |\partial\tau_0| &= O(\varepsilon_0 + \varepsilon_1), \\
 |B_s(W_\varepsilon^{inc}(\tau_0)) - B_s(W^{inc}(\tau_0))| &= O(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

et

$$\partial\tau_0 = \frac{Z'_i(x^{inc}(\tau_0))(x_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - x^{inc}(\tau_0)) + z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - z^{inc}(\tau_0)}{p_\varepsilon^z{}^{inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{inc}(\tau_0))p_\varepsilon^x{}^{inc}(\tau_0)} + O(\partial\tau_0^2). \tag{3.24}$$

On sait que W^{inc} admet une dérivée par rapport à ε_0 et ε_1 (3.21). On a donc

$$\begin{aligned}
 x_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - x^{inc}(\tau_0) &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \frac{dx^{inc}}{d\varepsilon}(\tau_0) + O(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2), \\
 z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - z^{inc}(\tau_0) &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \frac{dz^{inc}}{d\varepsilon}(\tau_0) + O(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2), \\
 p_\varepsilon^x{}^{inc}(\tau_0) - p_x^{inc}(\tau_0) &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \frac{dp_x^{inc}}{d\varepsilon}(\tau_0) + O(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2), \\
 p_\varepsilon^z{}^{inc}(\tau_0) - p_z^{inc}(\tau_0) &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \frac{dp_z^{inc}}{d\varepsilon}(\tau_0) + O(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2),
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

et

$$|\partial\tau_0| = O(\varepsilon_0 + \varepsilon_1), \tag{3.26}$$

d'où

$$\partial\tau_0 = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\xi_0(\tau_0) + O(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2). \tag{3.27}$$

On en déduit que

$$\left| W_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\xi_0(\tau_0) \frac{dW_\varepsilon^{inc}}{d\tau}(\tau_0) \right| = O(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2), \tag{3.28}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
 \left| W_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{inc}(\tau_0) - \varepsilon_0 Y_0^{inc}(\tau_0) - \varepsilon_1 Y_1^{inc}(\tau_0) - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\xi_0(\tau_0) \frac{dW_\varepsilon^{inc}}{d\tau}(\tau_0) \right| \\
 \leq K(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1),
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec $\lim_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = 0$.

Par une démonstration analogue à celle donnée dans *Crouzeix et Mignot (1983)*, on obtient pour le rayon réfléchi

$$\left| W_\varepsilon^{ref}(\tau_1) - W^{ref}(\tau_1) - \varepsilon_0 Y_0^{ref}(\tau_1) - \varepsilon_1 Y_1^{ref}(\tau_1) \right| \leq K(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1), \tag{3.30}$$

avec $\lim_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = 0$.

Par le même raisonnement que précédemment, on obtient

$$\left| W_{\varepsilon}^{ref}(\tau_1 + \partial\tau_1) - W^{ref}(\tau_1) - \varepsilon_0 Y_0^{ref}(\tau_1) - \varepsilon_1 Y_1^{ref}(\tau_1) - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \xi_1(\tau_1) \frac{dW^{ref}}{d\tau}(\tau_1) \right| \leq K(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1), \quad (3.31)$$

avec $\lim_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = 0$,

et où $\xi_1(\tau_1) = -(dz^{ref}/d\varepsilon)(\tau_1)/p_z^{ref}(\tau_1)$.

b. Dérivabilité par rapport aux interfaces:

On utilise les mêmes arguments que précédemment. Pour le rayon incident, on a

$$\left| W^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{inc}(\tau_0) - \partial\tau_0 \frac{dW^{inc}}{d\tau}(\tau_0) \right| = O(\partial\tau_0^2) \quad (3.32)$$

et

$$\begin{aligned} \partial\tau_0 &= \frac{\varepsilon_2 \partial Z_i(x^{inc}(\tau_0))}{p_z^{inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{inc}(\tau_0)) p_x^{inc}(\tau_0)} + O(\partial\tau_0^2), \\ &= \frac{\varepsilon_2 \partial Z_i(x^{inc}(\tau_0))}{p_z^{inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{inc}(\tau_0)) p_x^{inc}(\tau_0)} + O(\varepsilon_2^2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Soit Y_2^{ref} , la solution de

$$\begin{cases} \frac{dY_2^{ref}}{d\tau} = D_W F(\tau, W(\tau)) Y_2^{ref}(\tau) \\ Y_2^{ref}(\tau'_0) = A_s^0 \left(\xi_2(\tau_0) \frac{dW^{inc}}{d\tau}(\tau_0) \right) \end{cases} \quad (3.34)$$

où

$$\xi_2(\tau_0) = \frac{\partial Z_i(x^{inc}(\tau_0))}{p_z^{inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{inc}(\tau_0)) p_x^{inc}(\tau_0)} \quad (3.35)$$

Comme pour la lenteur au carré (voir le paragraphe précédent), on a

$$\left| W_{\varepsilon_2}^{ref}(\tau_1 + \partial\tau_1) - W^{ref}(\tau_1) - \varepsilon_2 Y_2^{ref}(\tau_1) - \varepsilon_2 \xi_1(\tau_1) \frac{dW^{ref}}{d\tau}(\tau_1) \right| \leq K \varepsilon_2 \alpha(\varepsilon_2), \quad (3.36)$$

avec $\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon_2) = 0$.

□

Chapitre VI. Etude du problème inverse

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, au problème de minimisation de la fonctionnelle (2.1) page 44 définie dans le chapitre précédent. Ce problème est non linéaire, le terme de tomographie et le terme de guidage de la vitesse n'étant pas quadratiques. On le résoud par la méthode de Gauss-Newton.

1 La méthode de Gauss-Newton

Soit le problème non linéaire général suivant

$$\begin{cases} \text{Nous cherchons } m \in \mathcal{M} \text{ minimisant} \\ C_F(m) = \|F(m)\|_{\mathcal{D}}^2 \end{cases} \quad (1.1)$$

où F est une application de l'espace des modèles \mathcal{M} dans un espace de données \mathcal{D} qu'on supposera muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$. \mathcal{D} est un espace de Hilbert dont la norme associée est notée $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$. On suppose que F est différentiable.

On effectue un développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction F ,

$$F(m_0 + \partial m) = F(m_0) + J(m_0)\partial m + \|\partial m\|_{\mathcal{M}} \varepsilon(\|\partial m\|_{\mathcal{M}}) \quad (1.2)$$

où

$$\lim_{\|\partial m\|_{\mathcal{M}} \rightarrow 0} \varepsilon(\|\partial m\|_{\mathcal{M}}) = 0,$$

et $J(m_0) = (\partial F / \partial m)(m_0) = d_{m_0} F$ est la **jacobienn**e de F en m_0 , $J(m_0) \in L(\mathcal{M}, \mathcal{D})$, $L(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ étant l'ensemble des applications linéaires de \mathcal{M} dans \mathcal{D} .

On définit le **problème inverse linéarisé** comme la minimisation de la fonctionnelle suivante

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_F(\partial m) &= \|J(m_0)\partial m + F(m_0)\|_{\mathcal{D}}^2 \\ &= \|F(m_0)\|_{\mathcal{D}}^2 + 2\langle J(m_0)\partial m, F(m_0) \rangle_{\mathcal{D}} + \langle J(m_0)\partial m, J(m_0)\partial m \rangle_{\mathcal{D}} \\ &= \|F(m_0)\|_{\mathcal{D}}^2 + \langle G_0, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} + \langle H_0 \partial m, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

où $G_0 = 2J^*(m_0)F(m_0)$ est le **gradient** de la fonctionnelle C_F en m_0 ,

$H_0 = J^*(m_0)J(m_0)$ est la **hessienne** de la fonctionnelle C_F en m_0 ,

$J^*(m_0)$ est l'adjoint de $J(m_0)$.

Les étapes de la méthode de Gauss-Newton sont les suivantes :

1. Choix d'un modèle initial $m^0 = m_0$ ($n = 0$)
 2. $n^{\text{ème}}$ itération : résolution du problème linéarisé autour de m^n
 - (i) Calcul de $F(m^n)$ et de $J(m^n)$
 - (ii) Détermination de ∂m^n solution du problème linéarisé
- Détermination de m^{n+1} :

$$m^{n+1} = m^n + \partial m^n \quad (1.5)$$

(iii) Recherche linéaire éventuelle dans la direction ∂m^n :

$$m^{n+1} = m^n + \varepsilon \partial m^n, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (1.6)$$

On applique cette recherche linéaire quand le coût non linéaire augmente. Cela signifie que le pas ∂m^n est trop grand (la linéarisation de la fonctionnelle n'est plus valide).

2 Etude du problème linéarisé

Nous étudions dans cette section le problème linéarisé associé au problème non linéaire (2.1), la résolution de ce problème linéarisé constitue une étape de Gauss-Newton. Nous chercherons à montrer que ce problème est bien posé

Ce problème linéarisé s'écrit: (nous avons simplifié la fonctionnelle en prenant tous les poids égaux à 1)

on cherche une perturbation de modèle $\partial m \in \mathcal{M}$ qui minimise

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}(\partial m) = & C^{a priori}(m_0) - 2 \sum_{k=1}^{N^{obs}} \partial T_k (J_o^D)_k \partial m \\
 & - 2 \sum_{k=1}^{N^{Uobs}} \partial U_k^{obs} \partial U(x_k^{Uobs}, z_k^{Uobs}) - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i^{Zobs}} \partial Z_i^{obs} \partial Z_i \left((x_k^{Zobs})_i \right) \\
 & + 2 \langle D^2 m_0, D^2 \partial m \rangle_{L^2} + 2 \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \left(\vec{\nabla} U_0 \cdot (\vec{t}_o)_i \right) (J_o^G)_i \partial m \, dx \\
 & + \langle H_o^D \partial m, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} + \sum_{k=1}^{N^{Uobs}} \partial U^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i^{Zobs}} (\partial Z_i)^2 \\
 & + \langle H_o^G \partial m, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} + \|D^2 \partial m\|_{L^2}^2.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nous explicitons les termes de cette fonctionnelle. Pour simplifier nous considérons une seule interface ($N = 1$).

Soit le rayon \mathcal{R}_k qui se réfléchit sur l'interface et qui correspond au temps observé T_k^{obs} et au temps calculé $T_k(m_0)$.

1. $\partial T_k = T_k^{obs} - T_k(m_0)$ est le résidu correspondant au temps de trajet k .
2. La jacobienne associée au rayon \mathcal{R}_k et correspondant à une perturbation de modèle $\partial m = (\partial U, \partial Z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (J_o^D)_k \partial m &= \int_{R_k} \frac{\partial U}{2\sqrt{U_0}} \, ds + \lim_{P \rightarrow P'} \int_{Z(P)}^{Z(P')} \sqrt{U_0(x_k, z)} \, dz \\
 &= \int_{R_k} \frac{\partial U}{2\sqrt{U_0}} \, ds + \sqrt{U_0(x_k, z_k)} \partial Z(x_k) \left(\cos \theta_k^{inc} + \cos \theta_k^{ref} \right)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $p_k(x_k, z_k)$ est le point d'impact sur l'interface du rayon non perturbé et p'_k , point d'impact du rayon perturbé de même abscisse x_k que p_k , $\theta_k^{inc}, \theta_k^{ref}$ sont les angles entre l'axe vertical et, respectivement, les rayons incident et réfléchi.

- 3 La hessienne de la tomographie s'écrit

$$\langle H_o^D \partial m_1, \partial m_2 \rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{k=1}^{N^{obs}} \left((J_o^D)_k \partial m_1 \right) \left((J_o^D)_k \partial m_2 \right) \tag{2.3}$$

pour des perturbations de modèle ∂m_1 et ∂m_2 .

4. $\partial U_k^{obs} = U_k^{obs} - U_0(x_k^{Uobs}, z_k^{Uobs})$ et $\partial Z_k^{obs} = Z^{obs} - Z_0(x_k^{Zobs})$.

5. Soit la tangente unitaire à l'interface du modèle de référence

$$\vec{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + Z_0'(x)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ Z_0'(x) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

où $Z_0' = \partial Z_0 / \partial x$.

6. La jacobienne du terme de guidage de la vitesse sur l'interface s'écrit

$$J_0^G \partial m = \left(\vec{\nabla} \frac{\partial U_0}{\partial z} \cdot \vec{t}_0 \right) \partial Z + \vec{\nabla} U_0 \cdot \partial \vec{t}_0 + \vec{\nabla} \partial U \cdot \partial \vec{t}_0 \quad (2.5)$$

avec

$$\partial \vec{t}_0 = \frac{\partial \vec{t}_0}{\partial z'} \partial Z', \quad \frac{\partial \vec{t}_0}{\partial z'} = \frac{-Z_0'}{(1 + Z_0'^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ Z_0' \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1 + Z_0'^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$\partial Z' = \partial(\partial Z_i) / \partial x$.

7. Soit

$$\langle H_o^G \partial m_1, \partial m_2 \rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} ((J_0^G)_i \partial m_1) ((J_0^G)_i \partial m_2) ds \quad (2.7)$$

la hessienne du terme de guidage.

8. On note

$$\begin{aligned} \langle D^2 m_0, D^2 \partial m \rangle_{L^2} &= \left\langle \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \partial U}{\partial x^2} \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \partial U}{\partial x \partial z} \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \partial U}{\partial z^2} \right\rangle_{L^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial^2 (Z_0)_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 (\partial Z_0)_i}{\partial x^2} \right\rangle_{L^2} \quad (2.8) \\ \|D^2 \partial m\|_{L^2}^2 &= \left\| \frac{\partial^2 \partial U}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \partial U}{\partial z^2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \partial U}{\partial x \partial z} \right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial^2 \partial Z_i}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

les termes de régularisation du modèle.

Pour étudier ce problème, on procède en deux étapes: on étudie d'abord le problème sans terme de guidage (paragraphe A) puis le problème complet (paragraphe B).

A. Problème sans terme de guidage

on cherche la perturbation de modèle $\partial m \in \mathcal{M}$ qui minimise

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1(\partial m) &= C^{a priori}(m_0) - 2 \sum_{k=1}^{N^{obs}} \partial T_k (J_o^D)_k \partial m \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^{N^{Uobs}} \partial U_k^{obs} \partial U(x_k^{Uobs}, z_k^{Uobs}) - 2 \sum_{k=1}^{N^{Zobs}} \partial Z_k^{obs} \partial Z(x_k^{Zobs}) \quad (2.9) \\ &\quad + 2 \langle D^2 m_0, D^2 \partial m \rangle_{L^2} \\ &\quad + \langle H_o^D \partial m, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} + \sum_{k=1}^{N^{Uobs}} \partial U^2 + \sum_{k=1}^{N^{Zobs}} \partial Z^2 + \|D^2 \partial m\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
 a_1(\partial m_1, \partial m_2) &= 2\langle H_0^D \partial m_1, \partial m_2 \rangle_{\mathcal{M}} + 2\langle D^2 \partial m_1, D^2 \partial m_2 \rangle_{L^2} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N^{Uobs}} \partial U(x_k^{Uobs}, z_k^{Uobs})^2 + \sum_{k=1}^{N^{Zobs}} \partial Z(x_k^{Zobs})^2 \\
 \langle b_1, \partial m \rangle_{L^2(\Omega)} &= 2 \sum_{k=1}^{Nobs} \partial T_k(J_0^D)_k \partial m \\
 &\quad + 2 \sum_{k=1}^{N^{Uobs}} \partial U_k^{obs} \partial U(x_k^{Uobs}, z_k^{Uobs}) + 2 \sum_{k=1}^{N^{Zobs}} \partial Z_k^{obs} \partial Z(x_k^{Zobs}) \\
 &\quad + 2\langle D^2 m_0, D^2 \partial m \rangle_{L^2}, \quad \forall \partial m_1, \partial m_2, \partial m \in \mathcal{M}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Un problème similaire a été étudié par Delprat-Jannaud et Lailly, 1992; nous ne donnerons donc pas les démonstrations des résultats suivants.

Proposition 2.1

La jacobienne de la tomographie est continue pour la norme de \mathcal{M} .

Remarque : la jacobienne de la tomographie n'est pas continue pour la norme L^2 .

Définition 2.2

On appelle **hypothèse de complétude des données** (pour les temps de trajet) l'hypothèse suivante :

$$ker J_0^D \cap P_1 = \{0\} \tag{2.11}$$

avec P_1 , espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 (vitesse à gradient constant et interfaces droites). En général, l'hypothèse (72) est vérifiée si le nombre de temps pointés est suffisant (voir le chapitre IX pour des exemples de cas pathologiques). Le choix des polynômes du premier degré vient du fait que la régularisation par les dérivées secondes utilisée s'annule pour de tels polynômes.

Proposition 2.3

$a_1(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ sous l'hypothèse de complétude des données, si $N^{Uobs} \geq 3$ (points non alignés) et $N^{Zobs} \geq 2$.

Proposition 2.4

Soit \mathcal{M}' le dual de \mathcal{M} .

La forme linéaire $b_1 \in \mathcal{M}'$.

B. Problème complet

Nous nous intéressons maintenant au problème complet avec le terme de guidage. Nous

introduisons les quantités suivantes

$$\begin{aligned}
 a(\partial m_1, \partial m_2) &= a_1(\partial m_1, \partial m_2) + 2\langle H_0^G \partial m_1, \partial m_2 \rangle_{L^2(\Omega)} \\
 \langle b, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} &= \langle b_1, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} + \langle b_G, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} \\
 \langle b_G, \partial m \rangle_{\mathcal{M}} &= -2 \int_{I_x} \left(\vec{\nabla} U_0 \cdot \vec{t}_0 \right) J_0^G \partial m \, dx, \quad \forall \partial m, \partial m_1, \partial m_2 \in \mathcal{M}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Proposition 2.5

La forme bilinéaire, symétrique $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

Démonstration:

(i) *Etudions la continuité de la jacobienne du terme de guidage de la vitesse sur l'interface i .*

On va montrer que

$$\|J_0^G \partial m\|_{L^2(I_x)}^2 \leq K \|\partial m\|_{\mathcal{M}}^2 \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 \|J_0^G \partial m\|_{L^2(I_x)}^2 &= \int_{I_x} \left[\left(\vec{\nabla} \frac{\partial U_0}{\partial z} \cdot \vec{t}_0 \right) \partial Z + \vec{\nabla} U_0 \cdot \frac{\partial \vec{t}_0}{\partial z'} \partial Z' + \vec{\nabla} \partial U \cdot \vec{t}_0 \right]^2 dx \\
 &\leq K \int_{I_x} \left[\left(\vec{\nabla} \frac{\partial U_0}{\partial z} \cdot \vec{t}_0 \right)^2 \partial Z^2 + \left(\vec{\nabla} U_0 \cdot \frac{\partial \vec{t}_0}{\partial z'} \right)^2 \partial Z'^2 + \left(\vec{\nabla} \partial U \cdot \vec{t}_0 \right)^2 \right] dx \\
 &\leq K \int_{I_x} \left[\left\| \vec{\nabla} \frac{\partial U_0}{\partial z} \right\|^2 \partial Z^2 + \left\| \vec{\nabla} U_0 \right\|^2 \left\| \frac{\partial \vec{t}_0}{\partial z'} \right\|^2 \partial Z'^2 + \left\| \vec{\nabla} \partial U \right\|^2 \right] dx \\
 &\leq K \int_{I_x} \left[\partial Z^2 + \partial Z'^2 + \left\| \vec{\nabla} \partial U \right\|^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

car le modèle de référence est C^2 sur un fermé borné. On a donc:

$$\begin{aligned}
 \|J_0^G \partial m\|_{L^2(I_x)}^2 &\leq K \left(\|\partial U\|_{H^1(I_x)}^2 + \|\partial Z\|_{H^1(I_x)}^2 \right) \\
 &\leq K \left(\|\partial U\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\partial Z\|_{H^1(I_x)}^2 \right) \\
 &\leq K \|\partial m\|_{\mathcal{M}}^2
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

en appliquant le théorème de trace sur l'interface i , interface qui est dans $H^2(I_x)$ et par conséquent dans $C^1(I_x)$.

$\langle H_0^G m_1, m_2 \rangle_{L^2(\Omega)}$ est donc continu sur $L^2(\Omega) \times (L^2(I_x))^N$.

La proposition 2.3 nous permet de conclure.

(ii) *La coercivité de a est une conséquence de la coercivité de a_1 (proposition 2.3) car $a(m, m) = a_1(m, m) + 2\langle H_0^G m, m \rangle_{L^2(\Omega)}$ et $2\langle H_0^G m, m \rangle_{L^2(\Omega)}$ est un terme positif.*

□

Proposition 2.6

$$b \in \mathcal{M}'.$$

Démonstration:

On sait par la proposition (2.4) que $b_1 \in \mathcal{M}'$. Il nous suffit donc de montrer que b_G est continu. Or,

$$\begin{aligned} |\langle b_G, \partial m \rangle_{\mathcal{M}}| &\leq 2 \int_{I_x} \left| \left(\vec{\nabla} U_0, \vec{t}_0 \right) \right| |J_0^G \partial m| \, dx \\ &\leq K \|J_0^G \partial m\|_{L^2(I_x)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La continuité du gradient J_0^G entraîne la continuité de b (proposition 2.5). b est donc un élément de \mathcal{M}' . □

Théorème 2.7 (Lax-Milgram)

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive sur un Hilbert \mathcal{M} .

Soit $b \in \mathcal{M}'$, forme linéaire continue sur \mathcal{M} .

Alors, $\exists! \widehat{m} \in \mathcal{M}/$

$$\frac{1}{2}a(\widehat{m}, \widehat{m}) - \langle b, \widehat{m} \rangle \leq \frac{1}{2}a(m, m) - \langle b, m \rangle, \quad \forall m \in \mathcal{M}. \quad (2.17)$$

Théorème 2.8

Les problèmes de minimisation de $\widetilde{C}(\partial m)$ (2.1) et $\widetilde{C}_1(\partial m)$ (2.9) admettent une unique solution $\partial \widetilde{m}$ et $\partial \widetilde{m}_1 \in \mathcal{M}$.

Démonstration:

On applique le théorème (2.7) avec:

$$\begin{aligned} a &= a_1 \text{ ou } a \\ b &= b_1 \text{ ou } b. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Les propositions (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) justifient l'utilisation de ce théorème.

$\exists! \partial \widetilde{m} \in \mathcal{M}/$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(\partial \widetilde{m}, \partial \widetilde{m}) - \langle b, \partial \widetilde{m} \rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}a(\partial m, \partial m) - \langle b, \partial m \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \partial m \in \mathcal{M} \\ \frac{1}{2}a(\partial \widetilde{m}, \partial \widetilde{m}) - \langle b, \partial \widetilde{m} \rangle_{L^2(\Omega)} + K &\leq \frac{1}{2}a(\partial m, \partial m) - \langle b, \partial m \rangle_{L^2(\Omega)} + K \end{aligned} \quad (2.19)$$

On choisit $K = C^{\text{a priori}}(m_0)$. On a alors

$$\frac{1}{2}a(\partial m, \partial m) - \langle b, \partial m \rangle + K = \widetilde{C}(\partial m). \quad (2.20)$$

$\exists! \partial \widetilde{m} \in \mathcal{M}/$

$$\widetilde{C}(\partial \widetilde{m}) \leq \widetilde{C}(\partial m) \quad \forall \partial m \in \mathcal{M}. \quad (2.21)$$

On montre de la même manière que $\exists! \partial \widetilde{m}_1 \in \mathcal{M}/$

$$\widetilde{C}_1(\partial \widetilde{m}_1) \leq \widetilde{C}_1(\partial m) \quad \forall \partial m \in \mathcal{M}. \quad (2.22)$$

□

On a donc montré dans cette section que le problème linéarisé admettait une et une seule solution dans \mathcal{M} si le modèle de référence est $C^2(\Omega) \times C^2(I_x)$.

3 Conditions d'optimalité du problème linéarisé

Afin de mieux comprendre l'effet des termes de structuration du champ de vitesse dans la minimisation de la fonctionnelle $C^a \text{ priori}(m)$, nous traitons un problème simplifié. En effet, nous fixons les interfaces et nous cherchons un champ de vitesse, solution de ce nouveau problème (linéarisé):

on cherche une perturbation de lenteur au carré ∂U qui minimise

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_U(\partial U) &= C_U(U_0) - 2 \sum_{i=1}^{N_{obs}} \partial T_i(J_0^D)_i \partial U + \langle H_0^D \partial U, \partial U \rangle_{H^2(\Omega)} \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{I_z} (\vec{\nabla} \partial U \cdot \vec{t}_i)^2 ds \\ &+ \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial z^2} \right)^2 \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nous nous plaçons dans le cas de la tomographie de transmission. Simplifions encore le problème en ne considérant qu'une seule interface qu'on notera I .

Ce problème simplifié est intéressant en pratique; en effet, nous résolvons le problème linéarisé par une méthode de relaxation, en inversant à tour de rôle la vitesse et les interfaces (voir section VII) La difficulté est alors l'inversion de la vitesse qui est un problème de grande taille par rapport au problème des interfaces. Il est donc intéressant de caractériser physiquement la solution d'un tel problème.

La solution U de (3.1) est caractérisée par

$$\frac{\partial \widetilde{C}_U}{\partial U}(U) \partial U = 0, \quad \forall \partial U \in H^2(\Omega) \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow a(U, \partial U) + \langle H_0^D U, \partial U \rangle_{H^2(\Omega)} - 2 \sum_{i=1}^N \partial T_i(J_0^D)_i \partial U = 0, \quad \forall \partial U \in H^2(\Omega), \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} a(U, \partial U) &= \int_I (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}) (\vec{\nabla} \partial U \cdot \vec{t}) dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial z^2} \right) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le domaine d'étude est celui décrit par la figure (1) et nous utilisons les mêmes notations que dans la section 2

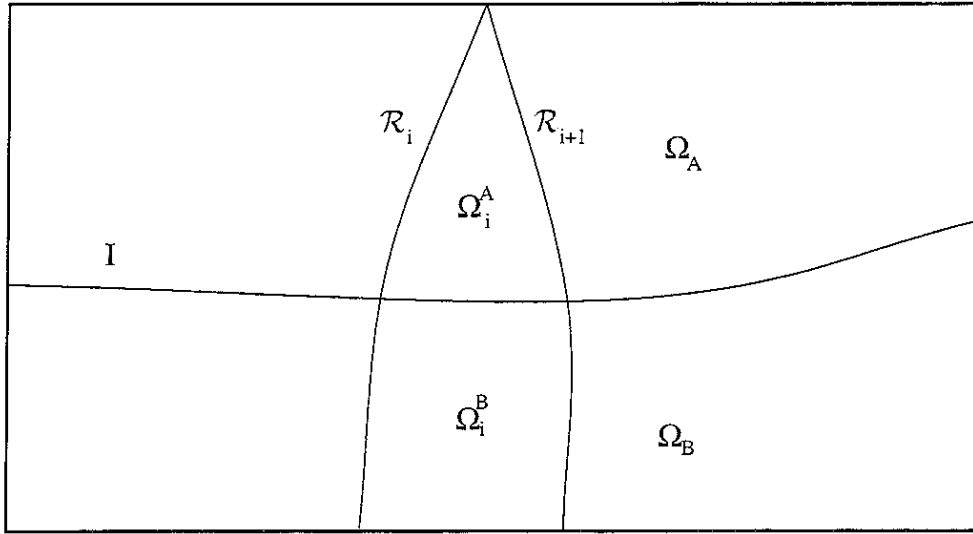


Fig. 1 Domaine Ω On note : Ω^A, Ω^B les sous-domaines de Ω partagé par l'interface I et Ω_i les sous-domaines de Ω partagé par les 2 rayons \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_{i+1} .

En choisissant $\partial U \in \mathcal{D}(\Omega_i^{A,B})$ dans l'équation 3.3 et en intégrant par parties, on obtient

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_i^{A,B}). \quad (3.5)$$

Remarque : les étapes des calculs permettant d'obtenir les conditions d'optimalités sont détaillées en annexe B.

Comme $U \in H^2(\Omega)$, la continuité de la trace de U sur $\partial\Omega$, sur I et sur les rayons donne

$$\begin{cases} U_A = U_B \\ \frac{\partial U_A}{\partial n_A} = -\frac{\partial U_B}{\partial n_B} \end{cases} \text{ sur } I \implies \vec{\nabla} U_A \cdot \vec{t} = \vec{\nabla} U_B \cdot \vec{t} \text{ sur } I \quad (3.6)$$

et

$$\begin{cases} u^+ = u^- \\ \frac{\partial u^+}{\partial n^+} = -\frac{\partial u^-}{\partial n^-} \end{cases} \text{ sur } R_i \quad (3.7)$$

On obtient par des calculs analogues à ceux de l'annexe B des conditions sur les bords du domaine, sur l'interface et sur les rayons :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \end{cases} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_A}{\partial n_A^2} = \frac{\partial^2 U_B}{\partial n_B^2} \\ \frac{\partial \Delta U_A}{\partial n_A} + \frac{\partial \Delta U_B}{\partial n_B} = -\frac{d^2 U}{ds^2} \end{cases} \text{ sur } I. \quad (3.9)$$

Remarque : on a

$$\int_I (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}) (\vec{\nabla} \partial U \cdot \vec{t}) ds = \int_I \left(\frac{dU}{ds} \right) \left(\frac{d\partial U}{ds} \right) ds. \quad (3.10)$$

En choisissant une perturbation ∂U à support localisé au voisinage d'un point x_0 sur le rayon R_i , on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U^+}{\partial n^{+2}} = \frac{\partial^2 U^-}{\partial n^{-2}} \\ \left(\frac{\partial \Delta U^+}{\partial n^+} + \frac{\partial \Delta U^-}{\partial n^-} \right) (x_0) + \frac{1}{4\sqrt{U_0(x_0)}} \int_{R_i} \frac{U}{\sqrt{U_0}} - \frac{\partial T_i}{\sqrt{U_0(x_0)}} = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Nous pouvons donc interpréter maintenant ces conditions d'optimalité:

- (i) la somme des dérivées quatrièmes de la lenteur au carré entre les rayons est nulle (condition (3.5));
- (ii) sur l'interface, la dérivée seconde normale de la lenteur au carré est continue et le saut de pente du laplacien de la lenteur au carré est donné par la dérivée seconde curviligne de la lenteur au carré (condition (3.9));
- (iii) sur les rayons, la dérivée seconde normale est continue et on a une condition non locale donnant le saut de pente du laplacien de la lenteur au carré : cette condition dépend de la lenteur au carré le long du rayon (condition (3.11)).

Ces conditions caractérisent le modèle optimal du problème linéarisé (à interfaces fixées) et nous donne donc une idée des modèles de vitesse, solutions du problème de tomographie avec ces informations a priori.

Chapitre VII. Résolution numérique

Après s'être assuré que le problème linéarisé est bien posé (section précédente), nous décrivons la méthode de résolution utilisée. Le modèle est paramétré par des fonctions B-splines, nous expliquons dans la première partie l'intérêt d'une telle paramétrisation, puis nous décrivons les calculs des termes de la fonction coût et enfin la méthode d'optimisation utilisée.

1 Paramétrisation du modèle par des B-splines.

Nous avons choisi de paramétrer le champ de vitesse et les interfaces par des fonctions B-splines cubiques, tout d'abord parce que c'est une méthode simple pour construire des fonctions C^2 mais aussi parce qu'elles présentent des propriétés intéressantes. Elles permettent un contrôle local de la courbe: la modification de la position d'un point donné n'entraîne que la modification d'une partie de la courbe. Ces points sont appelés sommets de contrôle ("control vertices") et ils forment le polygone de contrôle. La courbe est contenue dans l'enveloppe convexe de ces points, ceci constitue une autre propriété intéressante des B-splines (Figure 1) Contrairement à certaines techniques telles que l'interpolation d'Hermite, on parlera ici d'approximation plutôt que d'interpolation à partir des sommets.

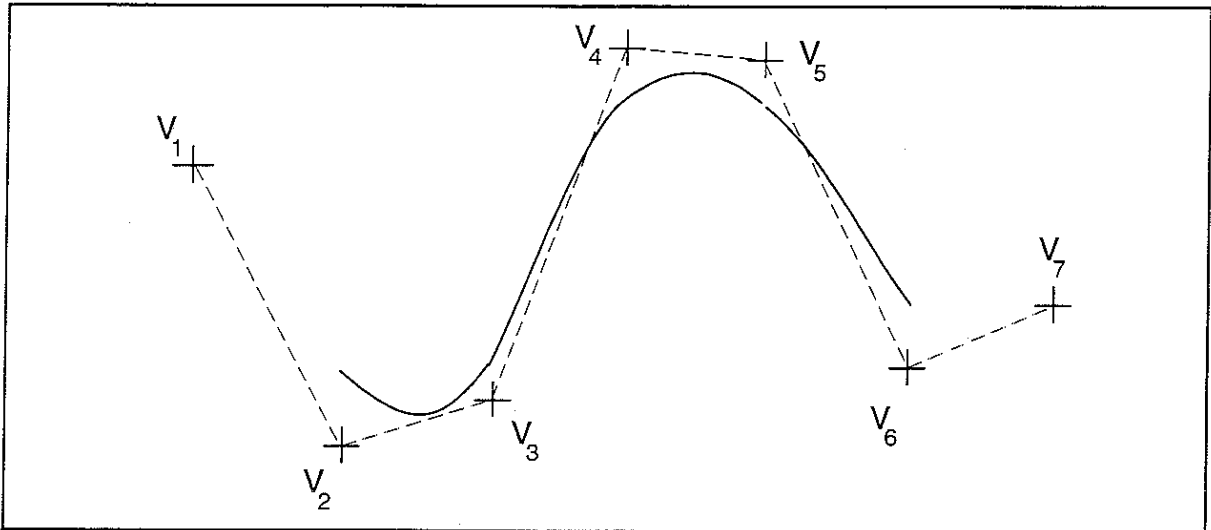


Fig. 1 Exemple d'une courbe définie à partir d'une suite de sommets de contrôle V_i , près desquelles la courbe passe. Les segments de droite en pointillés représentent le polygone de contrôle

Nous décrivons en Annexe C la construction des fonctions B-splines. Nous nous contentons ici de donner les expressions de la lenteur au carré et de la profondeur des interfaces.

Nous remplaçons donc les inconnues du problème inverse de la tomographie, les fonctions $(Z_i(x))_{i=1,2,\dots,N}$ et $U(x, z)$ par les sommets ou coefficients des B-splines. Nous représentons donc la profondeur des interfaces par une fonction B-spline cubique de x définie à partir d'une suite uniforme de nœuds $(x_j^i)_{j=1,2,\dots,N_i^z+4}$, $i = 1, 2, \dots, N$:

$$Z_i(x) = \sum_{m=1}^{N_i^z} p_m^{Z_i} B_m(x) \quad (1.1)$$

pour chaque interface i , $B_m(x)$ est la fonction de base centrée en x_{m+2} (Annexe C).

De même, la lenteur au carré est représentée par un tenseur d'une fonction B-spline définie à partir d'une suite uniforme de nœuds $(x_i)_{i=1, N_x^U+4}$ et d'une fonction B-spline définie à partir d'une

suite uniforme de nœuds $(z)_{i=1, N_z^U+4}$:

$$U(x, z) = \sum_{k=1}^{N_x^U} \sum_{l=1}^{N_z^U} p_{kl}^U B_k(x) B_l(z) \quad (1.2)$$

Le modèle continu est donc remplacé par le modèle discret

$$m = \left((p_k^U)_{k=1,2,\dots,N^U}, \left((p_m^{Z_i})_{m=1,2,\dots,N^{Z_i}} \right)_{i=1,2,\dots,N} \right), \quad (1.3)$$

avec $N^U = N_x^U \times N_z^U$ et nous appellerons $N^Z = \sum_{i=1}^N N^{Z_i}$.

Brac et Nguyen, 1990, ont fourni la librairie B-splines utilisée pour toutes nos expériences numériques.

2 Convergence des solutions discrètes du problème non linéaire

Notons \mathcal{M}^h , le sous-espace de dimension finie de \mathcal{M} , espace des modèles discrets définis dans la section précédente, h représentant la finesse de la discrétisation (plus h est petit, plus la discrétisation est fine).

Dans le cas d'une discrétisation par des B-splines (de Boor, 1978), on peut montrer que

$$\forall m \in \mathcal{M}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{m^h \in \mathcal{M}^h} \|m - m^h\|_{\mathcal{M}} = 0. \quad (2.1)$$

Théorème 2.1

Soit $m \in \mathcal{M}$ et $\tilde{m}^h \in \mathcal{M}^h$ tel que

$$\|\tilde{m}^h - m\|_{\mathcal{M}} = \inf_{m^h \in \mathcal{M}^h} \|m^h - m\|_{\mathcal{M}}. \quad (2.2)$$

Soient $T(m)$, $T(\tilde{m}^h)$ solutions d'un problème de *shooting* (mêmes conditions initiales).

On a alors (à part dans les cas pathologiques exposés page 60)

$$\lim_{h \rightarrow 0} |T(\tilde{m}^h) - T(m)| = 0. \quad (2.3)$$

La démonstration repose sur le théorème 3.4 de continuité du problème de shooting dans le chapitre V (page 60).

Nous avons donc montré que, si l'on considère un modèle discret qui approche le modèle continu, la solution du *shooting* correspondant au modèle discret est proche de celle du *shooting* correspondant au modèle continu. Nous pouvons espérer qu'il en est de même pour la solution du *two-point raytracing*. Si c'est le cas, la solution discrète de la tomographie converge vers la solution continue quand le pas de discrétisation tend vers 0.

3 Calcul des termes de la fonction coût et de la jacobienne

La résolution du problème linéarisé nécessite le calcul de la hessienne, du gradient et de la fonction coût (chapitre VI).

3.1 Calculs des termes de la fonctionnelle

La fonction coût de la tomographie avec information a priori est composée de deux termes: le terme cinématique et les termes de régularisation (informations a priori).

L'évaluation du premier terme est faite par le tracé de rayons (Jannaud, 1992) qui fournit les temps de trajet et la jacobienne discrète associée. Il est alors facile de construire la hessienne et le gradient associés (voir le chapitre VI).

Nous avons opté pour un calcul analytique de ces quantités pour l'évaluation du deuxième terme.

Considérons la norme L^2 de la dérivée seconde de la lenteur au carré par rapport à x (terme quadratique)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega, \quad (3.1)$$

ce qui donne en discret

$$C_x^U = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{N_x^U} \sum_{l=1}^{N_z^U} \frac{\partial^2 B_k(x)}{\partial x^2} B_l(z) p_{kl}^U \right)^2 d\Omega. \quad (3.2)$$

où p_{kl}^U sont les paramètres de lenteur au carré (sommets de la B-spline). L'expression du gradient est alors

$$\langle G_x^U, \partial U \rangle = 2 \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{N_x^U} \sum_{l=1}^{N_z^U} \frac{\partial^2 B_k(x)}{\partial x^2} B_l(z) \partial p_{kl}^U \right) \left(\sum_{k=1}^{N_x^U} \sum_{l=1}^{N_z^U} \frac{\partial^2 B_k(x)}{\partial x^2} B_l(z) p_{kl}^U \right) d\Omega. \quad (3.3)$$

où ∂U est une perturbation de lenteur au carré et ∂p_{kl}^U sont les perturbations de paramètres associées (perturbations des sommets de B-spline). La hessienne associée s'écrit

$$\langle H_x^U \partial U_1, \partial U_2 \rangle = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{N_x^U} \sum_{l=1}^{N_z^U} \frac{\partial^2 B_k(x)}{\partial x^2} B_l(z) (\partial p_{kl}^U)_1 \right) \left(\sum_{k=1}^{N_x^U} \sum_{l=1}^{N_z^U} \frac{\partial^2 B_k(x)}{\partial x^2} B_l(z) (\partial p_{kl}^U)_2 \right) d\Omega, \quad (3.4)$$

où $\partial U_1, \partial U_2$ sont des perturbations de lenteur au carré et $(\partial p_{kl}^U)_1, (\partial p_{kl}^U)_2$ sont les perturbations de paramètres associées (perturbations des sommets de B-spline).

On peut réécrire ces expressions sous la forme matricielle

$$\begin{aligned} C_x^U &= (p_1^U \quad p_2^U \quad \dots \quad p_{N^U}^U) D_x^U \begin{pmatrix} p_1^U \\ p_2^U \\ \dots \\ p_{N^U}^U \end{pmatrix} \\ G_x^U \partial U &= (p_1^U \quad p_2^U \quad \dots \quad p_{N^U}^U) D_x^U \begin{pmatrix} \partial p_1^U \\ \partial p_2^U \\ \dots \\ \partial p_{N^U}^U \end{pmatrix} \\ H_x^U \partial U &= (\partial p_1^U \quad \partial p_2^U \quad \dots \quad \partial p_{N^U}^U) D_x^U \begin{pmatrix} \partial p_1^U \\ \partial p_2^U \\ \dots \\ \partial p_{N^U}^U \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec

$$(D_x^U)_{K_1 K_2} = 2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 B_{k_1}(x)}{\partial x^2} B_{l_1}(z) \right) \left(\frac{\partial^2 B_{k_2}(x)}{\partial x^2} B_{l_2}(z) \right) d\Omega. \quad (3.6)$$

On peut remarquer que l'utilisation de B-splines simplifie les calculs: le calcul de la fonction coût, du gradient et de la hessienne se limite au calcul de D_x^U (calcul analytique) et de plus, les fonction de base B_* n'étant non nulles que sur 4 intervalles de nœuds, ce calcul se limite au calcul de 136 intégrales pour les dérivées secondes de la lenteur au carré et au calcul de 10 intégrales pour la dérivée seconde de la profondeur des interfaces. Le calcul du guidage de la vitesse est décrit dans l'annexe D.

3.2 Définition et calculs des poids

Si nous voulons permettre de fortes variations de vitesse dans certaines régions (au voisinage d'une faille, par exemple) tout en conservant une vitesse régulière ailleurs, il est nécessaire d'avoir une régularisation variable en espace et donc de prendre des poids variables: avec des faibles valeurs au voisinage d'une faille et de plus fortes valeurs dans les régions sédimentaires calmes. Dans la formulation (2.1) dans la section IV, on utilise des poids qui sont des fonctions dépendant des coordonnées spatiales et du modèle (de la position de la faille).

Ceci introduit deux difficultés:

le calcul analytique des intégrales décrit précédemment est plus compliqué et ils introduisent une non-linéarité supplémentaire dans la fonction coût.

Pour surmonter la première difficulté, nous avons choisi de définir les poids comme des fonctions constantes par morceau, les morceaux étant les intervalles de nœuds: pour calculer les intégrales sur les intervalles de nœuds, l'introduction de ces poids variables revient à multiplier ces intégrales par une constante. Une région associée à un poids est donc définie par des intervalles de nœuds; ainsi, si on veut appliquer un poids plus faible sur la régularisation de la lenteur au carré autour d'une faille, on doit définir la région par les intervalles de nœuds de la lenteur au carré traversés par la faille, cette région pouvant être étendue aux intervalles voisins. La définition de ces poids dépend donc de la discrétisation choisie.

D'autre part, les poids dépendant du modèle, leurs dérivées par rapport au modèle interviennent dans le calcul du gradient et de la hessienne. On introduit alors des non-linéarités supplémentaires. Pour éviter cette difficulté, à chaque étape $n + 1$ de Gauss-Newton, plutôt que de considérer la faille du modèle $n + 1$ encore inconnue, nous considérons la faille du modèle à l'étape n . En pratique (notamment dans l'exemple présenté dans la section III), avant l'introduction de ces poids variables, nous commençons par déterminer la géométrie de la faille. Quand la géométrie de la faille ne change plus au cours des itérations de Gauss-Newton, nous introduisons les poids variables. Dans une itération, les poids ne dépendent donc plus que de la région et du modèle de référence autour duquel on linéarise.

4 Optimisation avec contraintes

Jusqu'à présent, nous avons introduit des informations a priori sur le milieu en ajoutant des termes dans la fonction coût décrivant certaines informations sur le modèle. Une autre méthode pour introduire des informations sur le modèle est d'introduire des contraintes dans le problème de minimisation. En effet, il est très courant d'avoir accès à des informations telles que des estimations assez précises de la vitesse dans certaines régions (à la surface ou dans des puits), ou des estimations du pendage des interfaces. Ces informations sont traduites par des contraintes d'égalité ou d'inégalité dans le problème linéarisé:

on cherche un modèle $m \in \mathcal{M}$ qui minimise

$$\tilde{C}(\partial m) = \frac{1}{2} \|J\partial m + b\|^2 \quad \text{avec } d_{inf} \leq C\partial m \leq d_{sup} \text{ et } E\partial m = f,$$

les matrices C, E sont rectangulaires de taille $n_C \times (N^U + N^Z)$ et $n_E \times (N^U + N^Z)$, n_C et n_E étant les nombres de contraintes d'égalité et d'inégalité.

Afin d'éviter les problèmes de conditionnement dus à la minimisation d'une fonctionnelle dépendant de paramètres de natures différentes (lenteur au carré et profondeurs des interfaces), nous utilisons une méthode de relaxation pour résoudre le problème linéarisé. Nous allons tout d'abord expliquer la méthode de relaxation, puis la méthode du Lagrangien augmenté (Tran, 1992, 1993).

4.1 Méthode de relaxation

Le problème linéarisé revient au problème suivant
trouver $\partial m \in \mathcal{M}$ tel que

$$\begin{aligned} \underbrace{J^t J}_H \partial m &= \underbrace{-J^t b}_G && \text{avec } d_{inf} \leq C\partial m \leq d_{sup}, E\partial m = f \\ \iff \begin{cases} H_{UU}\partial U + H_{UZ}\partial Z = G_U \\ H_{ZZ}\partial Z + H_{UZ}^t\partial U = G_Z \end{cases} && \begin{aligned} &\text{avec } d_{inf}^U \leq C_U\partial U \leq d_{sup}^U, E_U\partial U \\ &\text{avec } d_{inf}^Z \leq C_Z\partial Z \leq d_{sup}^Z, E_Z\partial Z \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.1)$$

avec

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} H_{UU} & H_{UZ} \\ H_{UZ}^t & H_{ZZ} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} G_U \\ G_Z \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} C_U & 0 \\ 0 & C_Z \end{pmatrix}, d_{inf} = \begin{pmatrix} d_{inf}^U \\ d_{inf}^Z \end{pmatrix}, d_{sup} = \begin{pmatrix} d_{sup}^U \\ d_{sup}^Z \end{pmatrix}, \\ E &= \begin{pmatrix} E_U & 0 \\ 0 & E_Z \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f^U \\ f^Z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous avons donc supposé qu'il n'y a pas de contraintes couplant les 2 familles de paramètres.

Nous utilisons une méthode de relaxation, Gauss-Seidel par blocs (Céa et Glowinski, 1973) dont nous exposons l'algorithme à l'itération $n + 1$:

(i) trouver ∂U^{n+1} tel que

$$H_U\partial U^{n+1} = G_U - H_{UZ}\partial Z^n \quad \text{avec } d_{inf}^U \leq C^U\partial U^{n+1} \leq d_{sup}^U, E^U\partial U^{n+1} = f_U \quad (4.3)$$

(ii) trouver ∂Z^{n+1} tel que

$$H_Z\partial Z^{n+1} = G_Z - H_{UZ}^t\partial U^{n+1} \quad \text{avec } d_{inf}^Z \leq C^Z\partial Z^{n+1} \leq d_{sup}^Z, E^Z\partial Z^{n+1} = f_Z \quad (4.4)$$

La convergence de cet algorithme est donné dans Ciarlet, 1988 et repose sur l'ellipticité de la fonction coût (qui est ici quadratique et coercive) et sur la convexité du domaine admissible

Les 2 sous-problèmes (en lenteur et en interfaces) similaires au problème global sont résolus par la méthode du Lagrangien augmenté.

4.2 Méthode du Lagrangien augmenté

La méthode du Lagrangien augmenté (Fortin et Glowinski, 1982) est une méthode de programmation quadratique qui utilise la matrice hessienne (sa dimension est le carré du nombre de paramètres, elle ne dépend donc pas des données): on évite ainsi la manipulation de la matrice jacobienne dont la

dimension dépend du nombre de données. C'est une méthode duale qu'on peut aussi considérer comme une combinaison d'une méthode de pénalisation et d'une méthode duale. Cette méthode présente de nombreux avantages: sa convergence est plus rapide que celle des méthodes duales traditionnelles, le point initial peut ne pas vérifier les contraintes. De plus, on considère les contraintes globalement, on ne sépare pas les contraintes actives et inactives, ce qui évite une grande consommation de temps CPU pour trouver le "bon" ensemble de contraintes actives dans les méthodes dites *active set methods* (Hanson, 1986, Lawson and Hanson, 1974)

Dans ce paragraphe, nous oublierons les indices U et Z pour simplifier les notations et nous appellerons x la perturbation de modèle recherché (perturbation de longueur au carré ou de profondeur d'interface).

Le Lagrangien augmenté s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{aug}(x, y, \mu_E, \mu_C) &= \frac{1}{2} \|Jx + b\|^2 + (\mu_E, Ex - f) + (\mu_C, y - Cx) \\ &\quad + \frac{\tau_E}{2} \|Ex - f\|^2 + \frac{\tau_C}{2} \|y - Cx\|^2 \\ &= \mathcal{L}(x, y, \mu_E, \mu_C) + \frac{\tau_E}{2} \|Ex - f\|^2 + \frac{\tau_C}{2} \|y - Cx\|^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec $y = Cx$ et $d_{inf} \leq y \leq d_{sup}$

\mathcal{L} est le Lagrangien classique associée au problème (4.1).

Nous appliquons la méthode duale d'Usawa (Ciarlet, 1988) pour minimiser (4.5)

$$\begin{cases} (J^t J + \tau_E E^t E + \tau_C C^t C) x^{n+1} = -J^t b + E^t(\tau_E f - \mu_E^n) + C^t(\tau_C y^n + \mu_C^n) \\ y^{n+1} = \text{Projection}_{[d_{inf}, d_{sup}]} \left(Cx^{n+1} - \frac{1}{\tau_C} \mu_C^n \right) \\ \mu_C^{n+1} = \mu_C^n + \tau_C (y^{n+1} - Cx^{n+1}) \\ \mu_E^{n+1} = \mu_E^n + \tau_E (Ex^{n+1} - f) \end{cases} \quad (4.6)$$

Le problème primal (4.6) est résolu par une méthode de gradient conjugué. Le critère d'arrêt est le critère classique qui compare le gradient initial et le gradient final.

La convergence du Lagrangien augmenté est contrôlée par la convergence des multiplicateurs de Lagrange μ_E^n et μ_C^n et celle des x^n qu'on peut exprimer comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_C} \|\mu_C^{n+1} - \mu_C^n\|_{L^\infty} &= \|y^{n+1} - Cx^{n+1}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_C \\ \frac{1}{\tau_E} \|\mu_E^{n+1} - \mu_E^n\|_{L^\infty} &= \|Ex^{n+1} - f\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_E \\ \|x^{n+1} - x^n\|_{L^\infty} &\leq \varepsilon_x \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nous devons donc introduire les poids de pénalisation $\tau_E^U, \tau_C^U, \tau_E^Z, \tau_C^Z$ ainsi que les critères d'arrêt $\varepsilon_{GC}^U, \varepsilon_{GC}^Z, \varepsilon_E^U, \varepsilon_E^Z, \varepsilon_C^U, \varepsilon_C^Z, \varepsilon_x^U, \varepsilon_x^Z$. Le réglage des poids de pénalisation τ a une forte influence sur la vitesse de convergence du Lagrangien augmenté et est difficile en pratique. Tran, 1993, a développé une technique pour un calcul automatique des poids τ_C et τ_E .

Nous résumons la méthode de résolution utilisée dans la Figure 2.

Résolution numérique

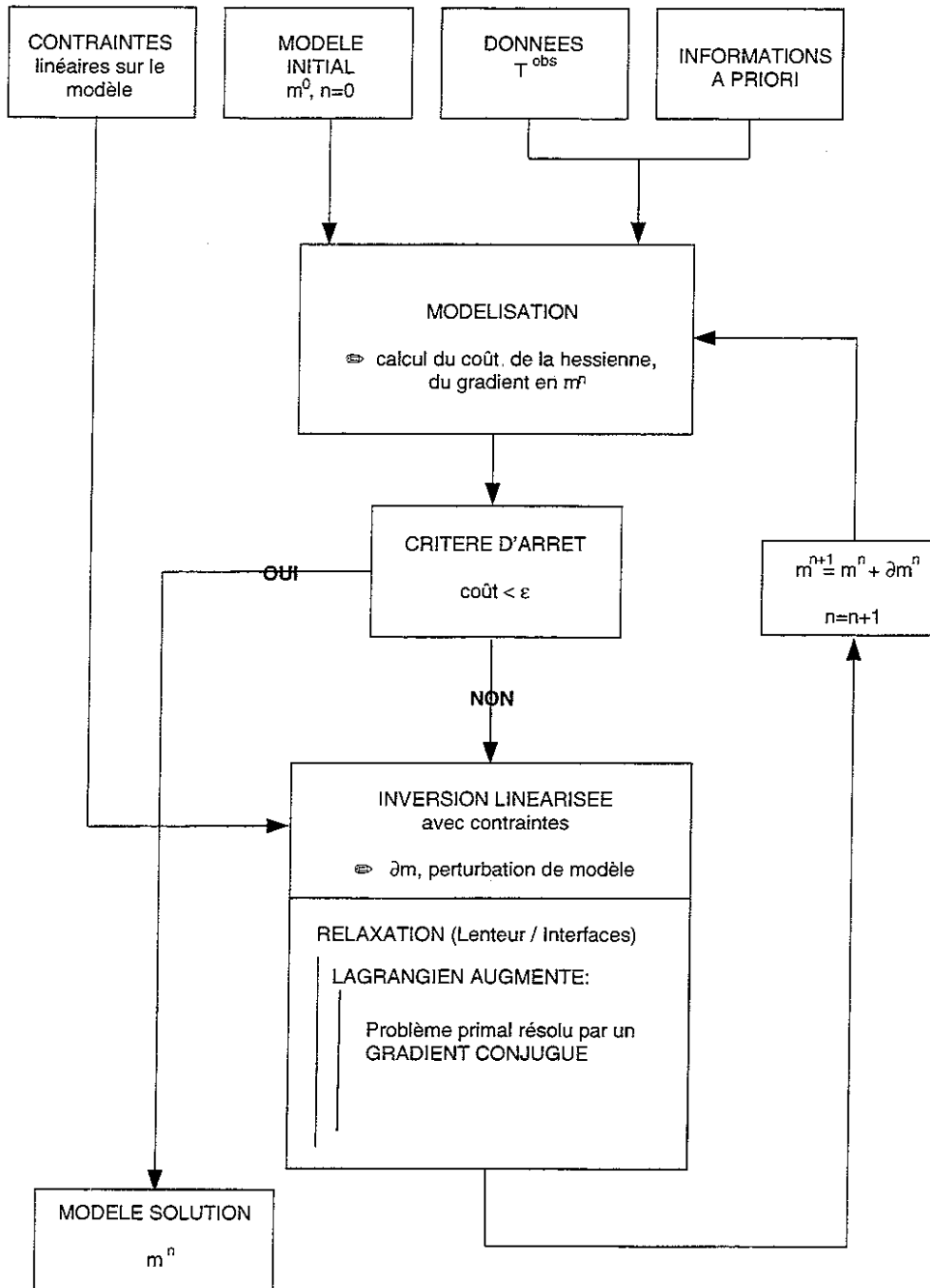


Fig. 2 La méthode de résolution de la tomographie de réflexion avec informations a priori.

Chapitre VIII. Une première application: problème d'approximation de courbes et de surfaces

Avertissement: ce chapitre est en fait extrait d'un article paru dans le rapport annuel PSI 1992 (IFP). C'est pourquoi il est rédigé en anglais.

Modeling a priori information on the velocity field for reflection tomography

D. Sinoquet and J. Brac

1 Introduction

In this chapter, we will present a first application of the formulation presented in the chapter IV: we reduce the formulation of reflection tomography with a priori information to an approximation problem of curves and surfaces by removing the tomography term. The set of data can be irregularly distributed. Such an approximation problem is classical in geophysics (Inoue, 1986, for example). The originality of our approach lies in the introduction of the guide term in the objective function.

In a first section, we will describe the formulation of this approximation problem. Then, we will validate it with experiments on realistic examples to show the practical applications.

2 Formulation of the approximation problem

Instead of considering the whole formulation of reflection tomography with a priori information (chapter IV page 44), we reduce it to the following problem:

we look for a model $m \in \mathcal{M}$ minimizing the cost function

$$\begin{aligned}
 C^{approx}(m) = & (\varepsilon^{Vobs})^2 \|V - V^{obs}\|^2 + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^{Zobs})^2 \|Z_i - Z_i^{obs}\|^2 \\
 & + (\varepsilon^V)^2 \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)^2 \right) d\Omega \\
 & + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^Z)^2 \int_{I_x} \left(\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 & + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^G)^2 \int_{I_x} (\vec{\nabla} V \cdot \vec{t}_i)^2 dx,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

In this paper, we will consider instead of the squared slowness the velocity which makes easier the physical interpretation: it changes nothing in our formulation except the orders of magnitude. We consider also constant weights.

So, we have at our disposal velocity and interface observations, i.e. velocity values $(x_k^{Vobs}, z_k^{Vobs}, V_k^{obs})$ and depths of the interface i , $((x_k^{Zobs})_i, (Z_k^{obs})_i)$.

We are looking for a model m , i.e., a velocity distribution and N interfaces, that minimizes the objective function. The first four terms of the objective function involve only one family of parameters: velocity or interfaces. It is easy to check that they are quadratic in velocity or in interface parameters. The guide term is different: it involves both families of parameters. If we fix the interfaces, the problem can be interpreted as a surface interpolation from given contour lines (the interfaces) and points. With fixed velocities, we are looking for isovalue lines (the interfaces) that pass through given points. C^{approx} is quadratic without the velocity guide term, and it is still quadratic with this term, if the interfaces are fixed. The velocity along the interface is then a function of the interface parameters, in fact we have $\vec{\nabla} V \cdot \vec{t}_i = \vec{\nabla} V(x, Z_i(x)) \cdot \vec{t}_i(x)$ (see annexe D). In addition, the fact that the vector

tangent to the interface is normed is yet another reason for this term not to be quadratic with respect to the interface parameters.

To minimize the objective function C^{approx} , we use a block relaxation method (see section 4 of chapter VII). The relaxation method steps are solved by means of a quasi-Newton algorithm with boundary constraints (Lemaréchal and Panier, 1983). This method minimizes the functional by constraining the parameters to remain within an interval chosen beforehand by the user. Here, we use this possibility to constrain the velocity to remain positive and to constrain the interfaces not to go out of the considered domain.

The purpose of the tests is to understand the advantages and limitations of the chosen formulation and to check how well the algorithm works before integrating the tomography term. Several tests are run before solving the overall approximation problem: tests with fixed interfaces and tests with fixed velocity. For tests with fixed interfaces, we also study the effect of the weights associated with the velocity guide term and with the regularization term. Then we solve the overall problem for two different sets of data. Finally, we refine the discretization to assess its impact on the result.

3 Approximation of surfaces from given points and contour lines

The problem consists in interpolating a surface from observed points and contour lines. Velocity distribution plays the role of the surface. So we have at our disposal velocities at certain points and interfaces where velocity is assumed to be approximately constant. The interfaces being fixed, the effective terms in the objective function C^{approx} are the velocity misfits, the velocity regularization term and the velocity guide term. We process two examples that differ in their data.

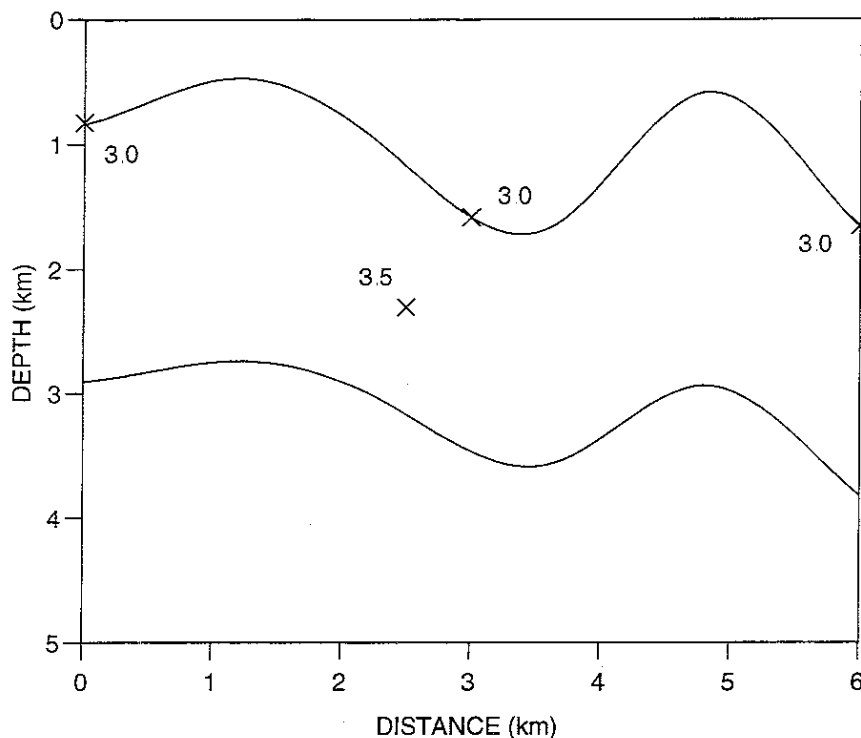


Fig. 1 Available data for the first test with fixed interfaces: the depth of 2 interfaces, velocity values in 4 points indicated by crosses (km s⁻¹)

In the first test (Figure 1), the velocity is known in three points on one of the two interfaces and on one point inside the layer (data are indicated by crosses). The three values of velocity on the interface are identical (3 km.s^{-1}) and the fourth is at 3.5 km.s^{-1} . The eight B-spline coefficients describing each interface are given. The inversion parameters are the 72 B-spline coefficients describing the velocity distribution (9 horizontally and 8 vertically). We use this model parameterization for all the examples. For the quasi-Newton method, the initial model is a constant velocity model.

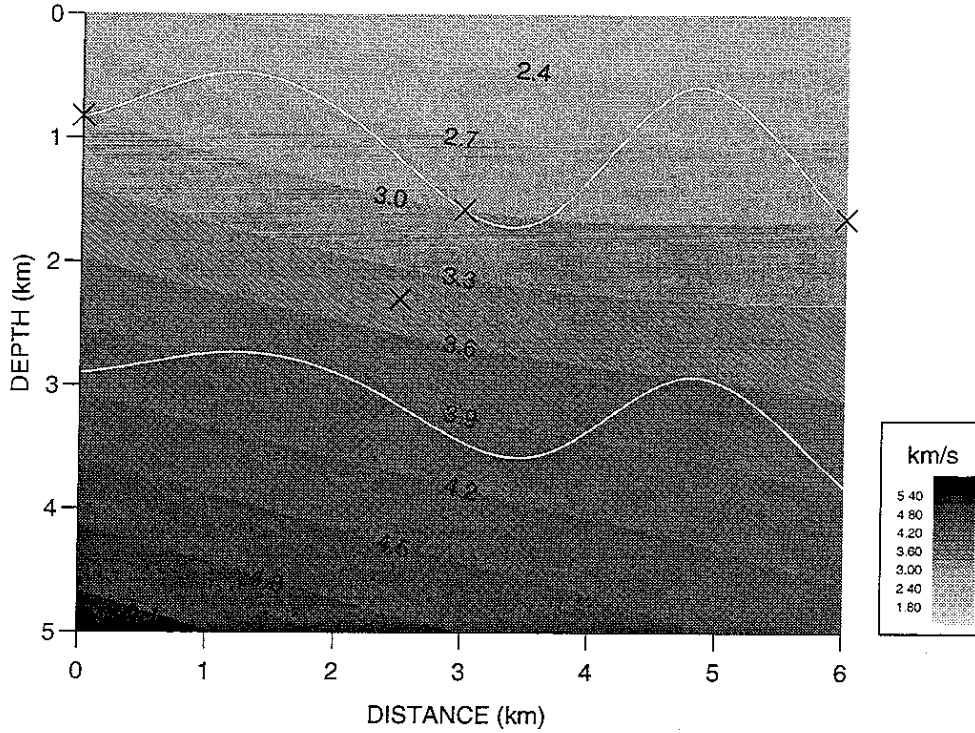


Fig 2 Solution model of the first test with fixed interfaces, without velocity guide and with the following weights: $\epsilon^{V^{obs}} = 2$ (velocity misfits), $\epsilon^V = 2 \cdot 10^{-2}$ (velocity regularization), $\epsilon_{1,2}^G = 0$ (velocity guide).

To show the effect of the velocity guide term, we first solve the approximation problem without guiding, i.e., solely with velocity misfit and velocity regularization terms. Figure 2 shows the solution model for this problem. *In Figure 2, the velocity and interfaces appear completely uncorrelated.*

On the contrary, when we solved the same problem adding the velocity guide term, we obtained the models in Figures 3, 4 and 5. These results were obtained for different choices of the weights appearing in the objective function (Table 1).

misfit weight $\epsilon^{U^{obs}}$	regularization weight ϵ^V	guide weight $\epsilon_{1,2}^G$	Solution	Misfits (km.s^{-1})
2	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-1}$	Figure 3.3	$10^{-3}/10^{-4}$
2	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	Figure 3.4	$10^{-2}/10^{-4}$
2	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	Figure 3.5	$10^{-2}/10^{-3}$

Table 1 Weights chosen for the different experiments, solutions and computed velocity misfits (first example).

The model in Figure 3 is not very regular but the misfits are small and the velocity varies very little along the interfaces. The weight assigned to the regularization term might be too low. Conversely, the one in Figure 4 is very regular but the isovelocity lines in the vicinity of the interfaces do not have the same geometry as the interfaces. The weight on the velocity guide term is not large enough. It can be noted that the misfits are not quite as small. Figure 5 shows a regular velocity distribution with isovelocity lines following the interfaces. However, the model misfits are not as low as for the preceding examples. The reason is the incompatibility of the data and information.

These examples (Figures 3, 4, 5) show the sensitivity of the result to weighting of the functional terms. The weights must be chosen properly. An estimate of the order of magnitude of the associated uncertainties - available a priori - generally turns out to be insufficient. Nevertheless, the user can modify the weights a posteriori (i.e. once the misfits have been obtained) and step by step obtain the physical solution that suits him

The model in Figure 5 seems to be a good compromise among all the items of information used. The isovelocity lines follow the interfaces well and keep that shape in the layer between these two interfaces. As a result, the velocity varies little along the lines deduced from the interfaces by intuitive interpolation (Figure 5). It confirms the theoretical result obtained in the section 3.

The second example uses two interfaces with highly different geometries and the velocity is given in points located on the interfaces with identical values on each one: 4.5 km.s^{-1} on the deeper one and 3 km.s^{-1} on the other (Figure 6).

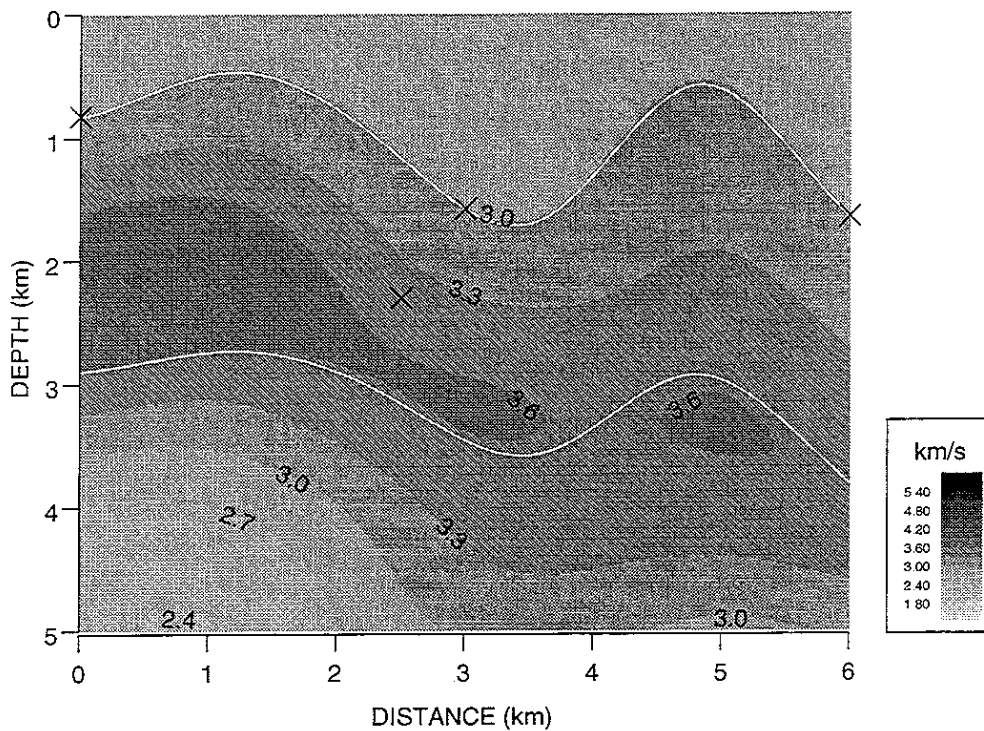


Fig. 3 Solution model of the first test with fixed interfaces and with: $\epsilon^{V^{obs}} = 2$ (velocity misfits), $\epsilon^V = 2 \cdot 10^{-3}$ (velocity regularization), $\epsilon_{1,2}^G = 2 \cdot 10^{-1}$ (velocity guide).

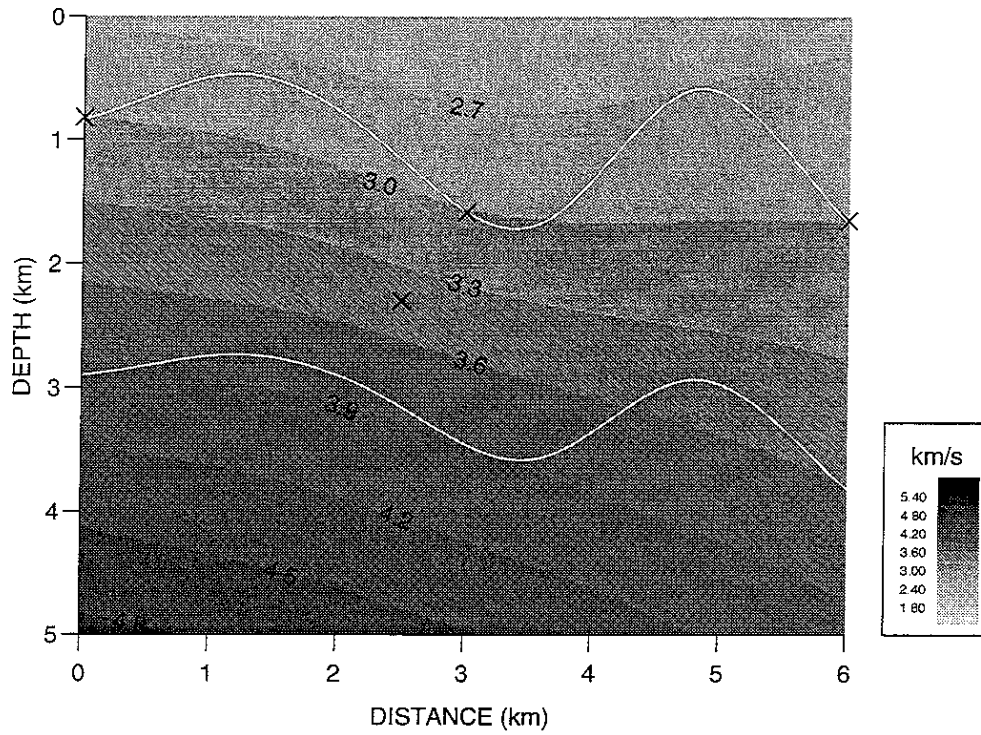


Fig 4 Solution model of the first test with fixed interfaces and with: $\epsilon^{V^{obs}} = 2$ (velocity misfits), $\epsilon^V = 2 \cdot 10^{-2}$ (velocity regularization), $\epsilon_{12}^G = 2 \cdot 10^{-2}$ (velocity guide)

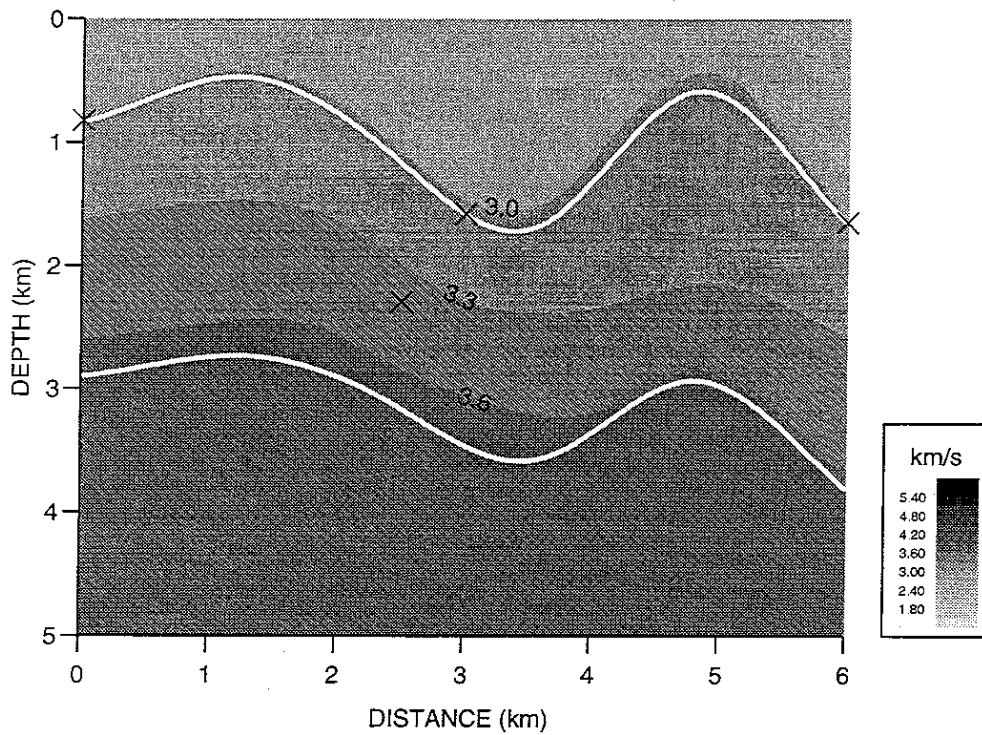


Fig. 5 Solution model of the first test with fixed interfaces and with: $\epsilon^{V^{obs}} = 2$ (velocity misfits), $\epsilon^V = 2 \cdot 10^{-2}$ (velocity regularization), $\epsilon_{12}^G = 2 \cdot 10^{-1}$ (velocity guide)

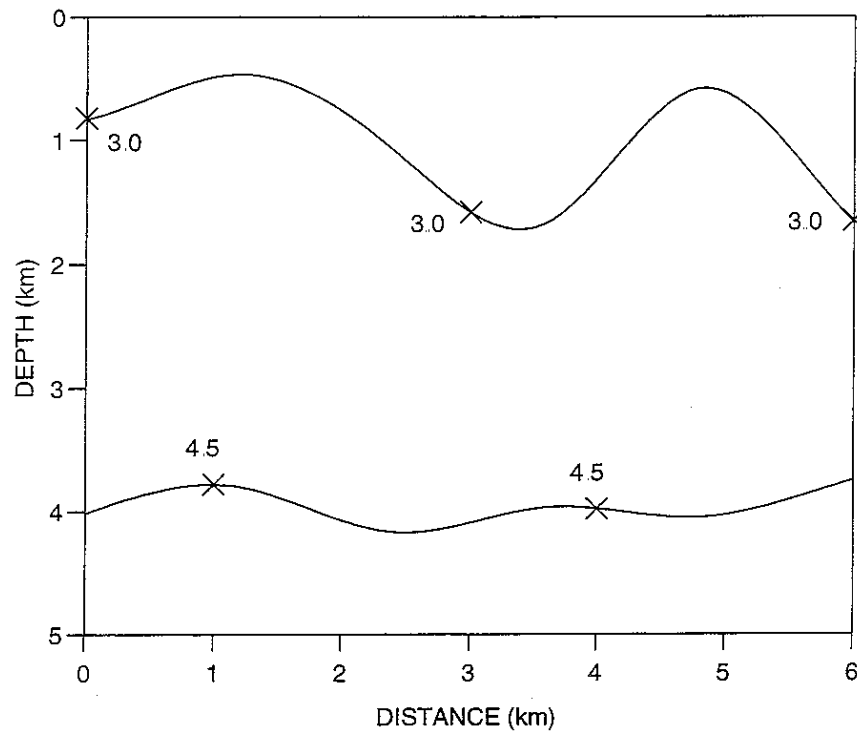


Fig 6 Available data for the second test with fixed interfaces: the depth of 2 interfaces, velocity values in 5 points indicated by crosses (km s^{-1})

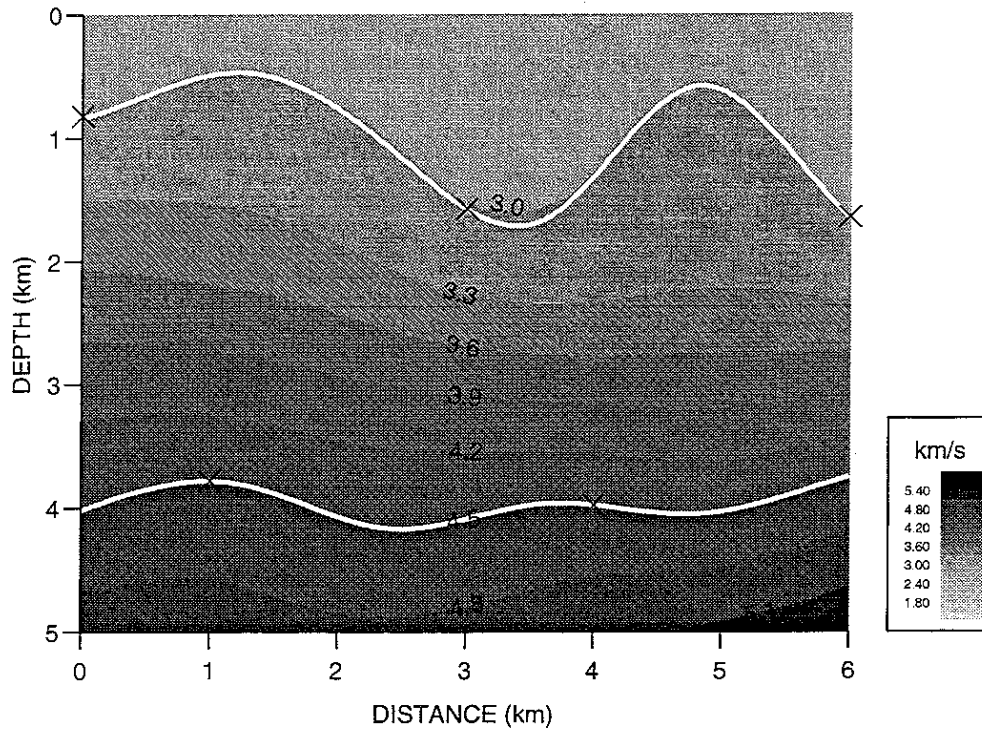


Fig 7 Solution model of the second test with fixed interfaces and with: $\epsilon^{V^{obs}} = 2$ (velocity misfits), $\epsilon^V = 2.10^{-2}$ (velocity regularization), $\epsilon^V = 2.10^{-1}$ (velocity guide).

The model obtained from these data is represented in Figure 7. *The geometry of the isovelocity lines is an interpolation of the geometry of the two interfaces.* It can be noted that the velocity gradient is weak in the vicinity of the first interface. We mentioned the adverse effect of the formulation and the remedy. *If the interpreter judges that a model with a low velocity gradient in the vicinity of the interface is unacceptable, the a priori information on the norm of the gradient in the vicinity of the interfaces should be introduced.*

4 Approximation of curves: building contour lines of a surface passing through given points

Here the idea is to build isovalue lines of a given velocity distribution, with the lines constrained to pass through given points. The velocity being fixed, the effective terms in the objective function C^{approx} are the interface misfit term, the interface regularization term and the velocity guide term. We have already pointed out that this problem is not linear and so there is no guarantee of obtaining the minimum of C^{approx} by a descent method.

It is not simple to build an example to solve this problem. This is why we use the models obtained in the preceding examples. We use the model velocity distribution and several points of the interfaces. We know that the velocity varies little on these interfaces and so there should be an isovelocity line coming close to the chosen points.

Accordingly, the inversion parameters are the eight B-spline vertices of each interface. The initial model of the quasi-Newton algorithm is made up of horizontal interfaces. We process two examples whose velocity distributions are shown in Figures 5 and 7. The results (Figures 8 and 9) obtained are totally satisfactory. The interfaces follow the isovelocity lines.

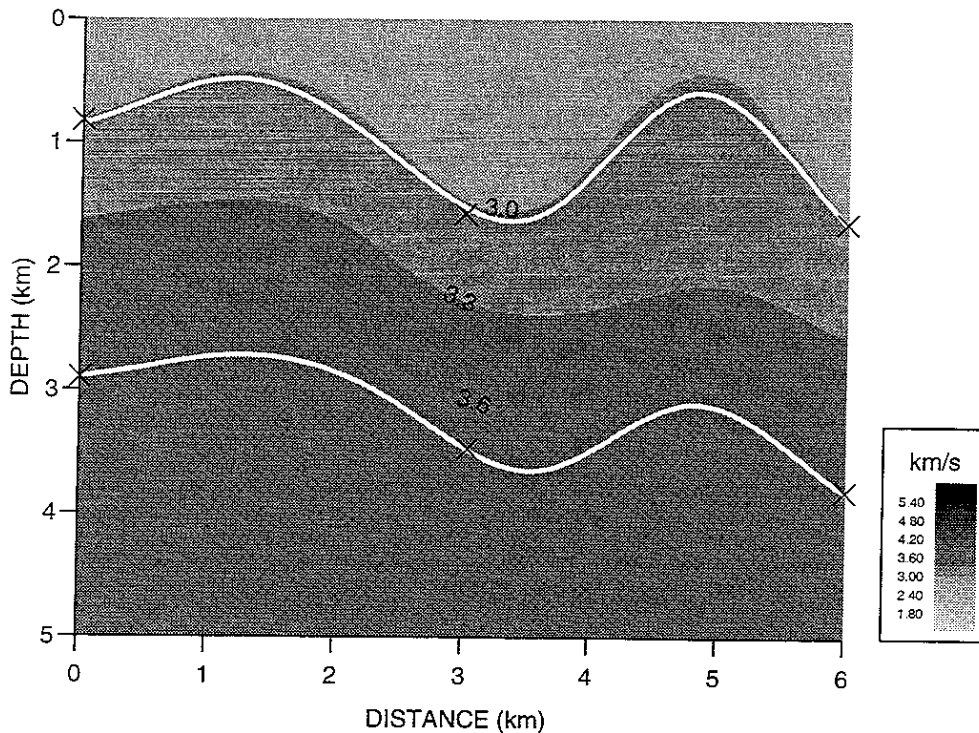


Fig. 8 Solution model of the first test with a fixed velocity and with: $\varepsilon_{1,2}^{Z,obs} = 1$ (interface misfits), $\varepsilon_{1,2}^Z = 0$ (interface regularization), $\varepsilon_{1,2}^G = 2$ (velocity guide).

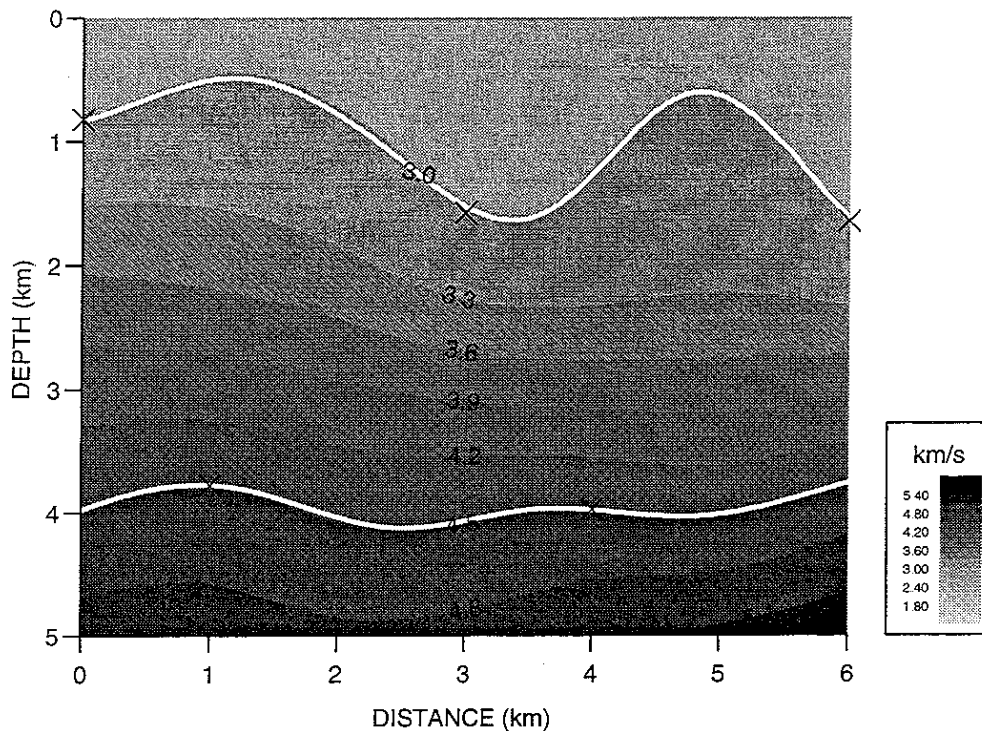


Fig. 9 Solution model of the second test with a fixed velocity and with: $\varepsilon_{1,2}^{Z^{obs}} = 1$ (interface misfits), $\varepsilon_{1,2}^Z = 0$ (interface regularization), $\varepsilon_{1,2}^G = 2$ (velocity guide).

5 Approximation of curves and surfaces simultaneously

Up to now we tested the algorithm with fixed interfaces or fixed velocity. Now we solve the overall problem with a relaxation method.

We have two types of data available: velocity values at certain points and some interface depth values at some points. We are looking for a velocity distribution and two interface geometries. Two examples are processed. They use the same interface data but different velocity data. Velocity varies little in the first set of data contrary to the variations in the second set. Figure 10 describes the data for the two examples.

Figure 11 shows the model obtained from the data of the first example. The isovelocity lines near the interfaces have the same geometry as the interfaces and the data are correctly approximated.

Figure 12 illustrating the second example shows the limitations of the chosen formulation. The computed model satisfies all the data and information provided, in particular the velocity varies little along the interfaces. Nevertheless, the isovelocities do not follow the first interface. The data impose variations in gradient that are incompatible with the regularization that constrains the gradient to vary little. Accordingly, the velocity gradient direction imposed on the interface by the guide term is propagated only into a small portion of the layer. It should, however, be emphasized that the example discussed is somewhat particular. There are very few data to build a velocity distribution. So the velocity field is largely determined solely by the regularization terms. In that sense, this example differs from an actual tomographic problem. We will come back to this point for tomography problems in the chapter IX.

The chosen formulation can thus regularize the velocity by preventing wide variations in its gradient and by imposing small velocity variations along certain interfaces. If the velocity gradient does not show wide variations in the layer, the geometry of the isovelocity lines could be an interpolation of the geometry of the interfaces.

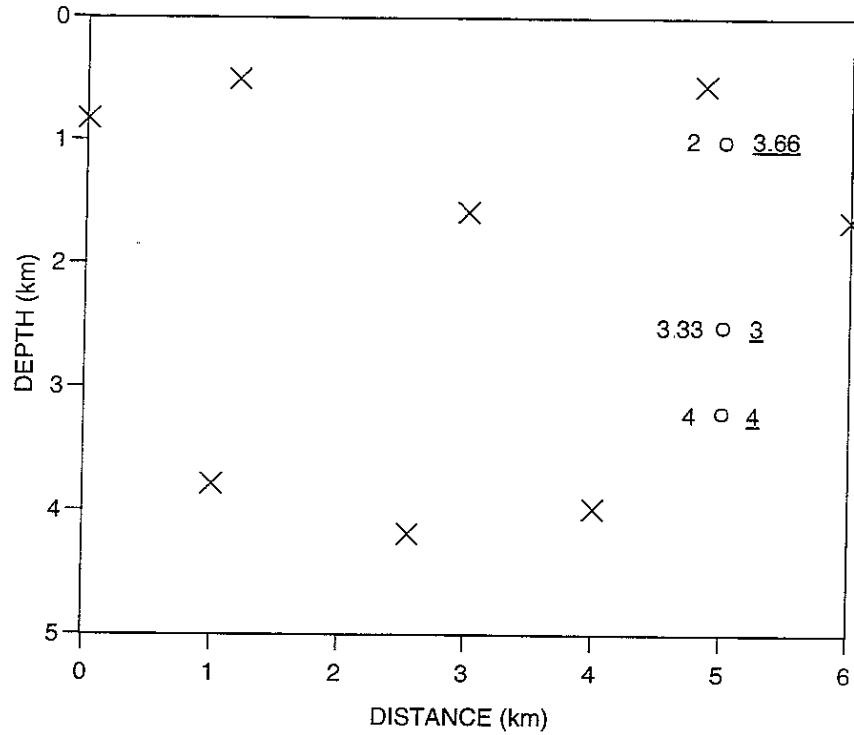


Fig 10 Available data for the overall problem: 5 points of the first interface (5 crosses in the upper part of the model), 3 points of the second interface (the other crosses), 3 points where velocity is given (circles, velocities in $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, normal values correspond to the first example and underlined ones to the second example)

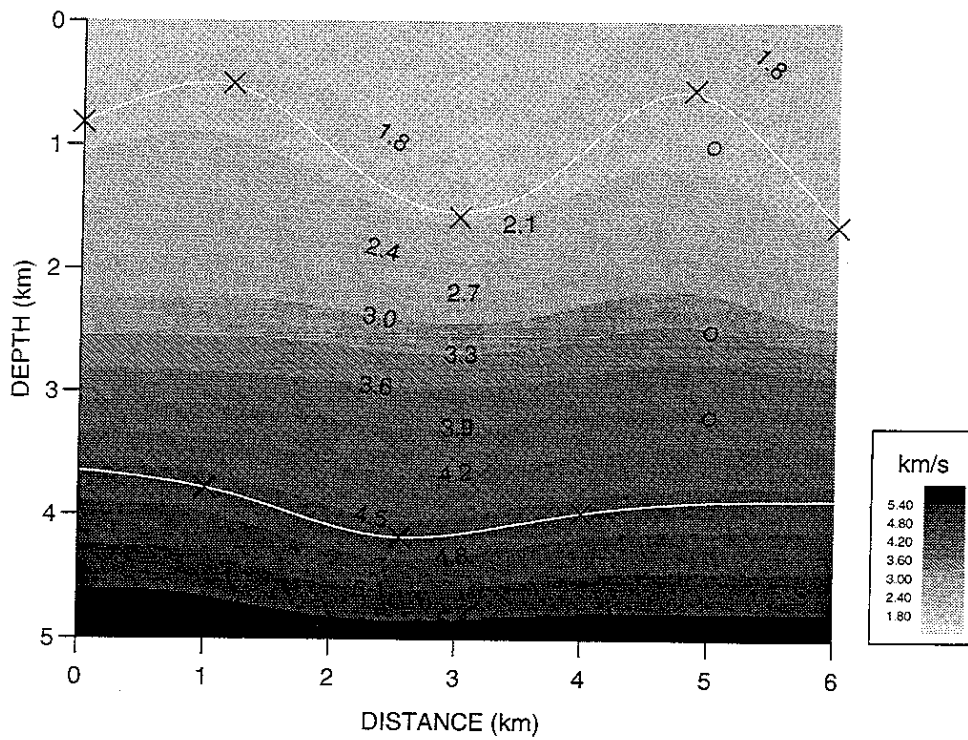


Fig 11 First global test: $\epsilon^{V^{obs}} = 3$ (velocity misfits), $\epsilon_{12}^{Z^{obs}} = 20$ (interface misfits), $\epsilon^V = 3 \cdot 10^{-2}$ (velocity regularization), $\epsilon_{12}^Z = 10^{-1}$ (interface regularization), $\epsilon_{12}^G = 3$ (velocity guide)

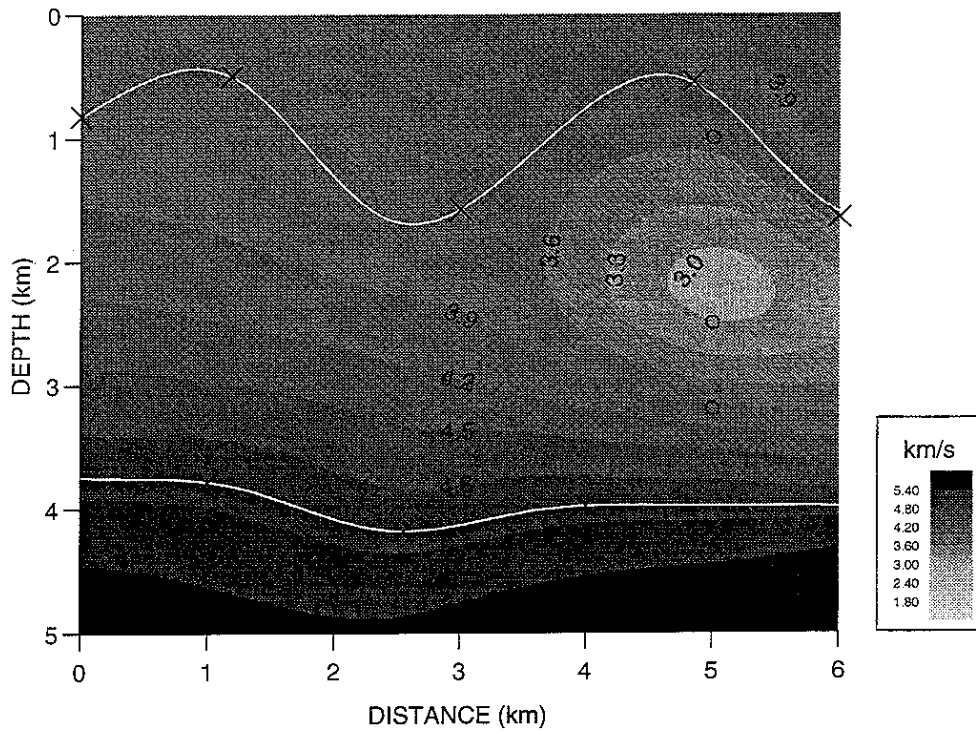


Fig. 12 Second global test: $\epsilon^{V_{obs}} = 3$ (velocity misfits), $\epsilon_{1,2}^{Z_{obs}} = 1$ (interface misfits), $\epsilon^V = 3 \cdot 10^{-2}$ (velocity regularization), $\epsilon_{1,2}^Z = 10^{-1}$ (interface regularization), $\epsilon_{1,2}^G = 3$ (velocity guide).

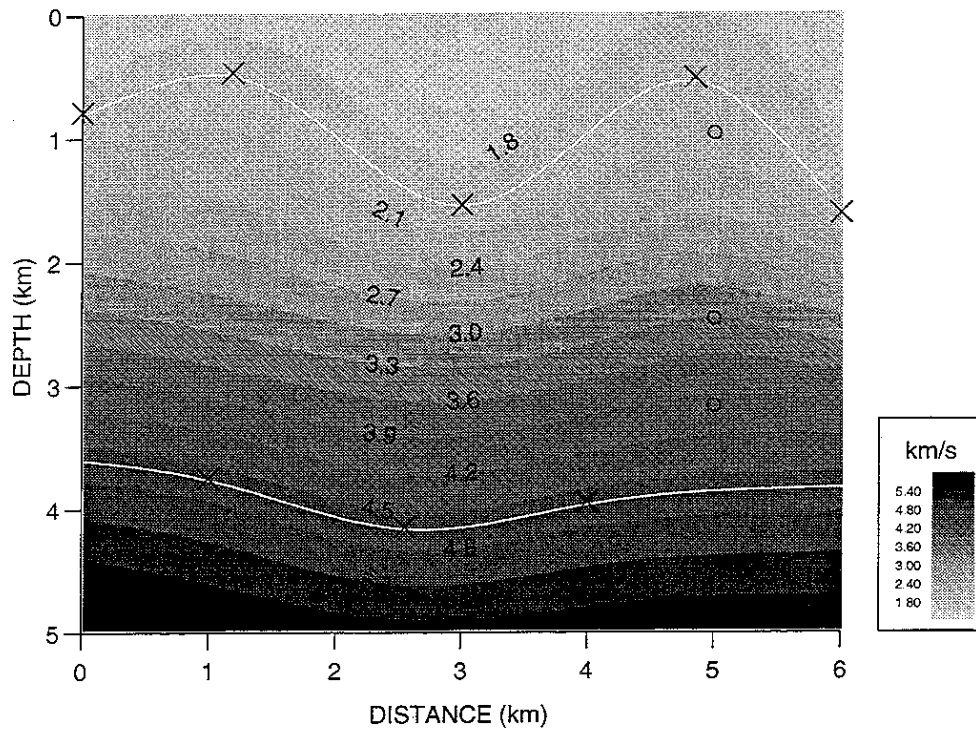


Fig 13 Solution model of the global test with Figure 11 data and weights and with 20x20 velocity parameters and 20 interface parameters

Impact of discretization: (Figure 13)

We use the example of Figure 11 to assess the impact of discretization. We refine the discretization: the velocity field is represented by 400 B-spline coefficients (20 horizontally, 20 vertically) and each interface by 20 coefficients. We obtain the model of Figure 13 that is similar to the model of Figure 11. The misfits have the same order of magnitude. The chosen discretization intervals does not act upon the solution.

This result is possible only for well-conditionned problems, i.e. with a lot of data and a lot of a priori information that we trust. Notice that, on the contrary, for ill-conditionned problems the impact of discretization is important. For example, the regularization involved by a rough discretization can lead to a smooth model whereas we can find a rough model with a finer discretization.

6 Conclusions

The first results obtained by solving the test problem of approximating irregularly distributed velocity and interface data validate our formulation. Especially, we confirm the result of the section 3 of chapter IV: the effect of the velocity guide on the interfaces, added to the minimization of the second derivatives of the velocity, is propagated in the layer on lines which interpolate the interfaces.

Nevertheless, we have shown certain limitations of the formulation, for models showing wide velocity variations in the layers between the interfaces. There is in that case incompatibility between the information on the velocity regularity (small variations of the gradient) and the velocity data. We will see in detail this problem in chapter IX.

In practice, we use this approximation problem to build models with a velocity field geologically compatible with the interfaces. In the chapter IX, we use it to build the synthetic models.

Chapitre IX. Application de la tomographie de réflexion avec informations a priori sur des modèles synthétiques simples

Avertissement: la deuxième section de ce chapitre est un article paru dans le rapport annuel PSI 1992 (IFP). C'est pourquoi il est rédigé en anglais.

1 Introduction

Dans les expériences du chapitre précédent, nous avons testé la formulation des informations a priori. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la formulation suivante de la tomographie avec information a priori

$$\begin{aligned}
 C_{a\text{ priori}}(m) = & \left\| T(m) - T^{obs} \right\|^2 + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^G)^2 \int_{I_x} (\vec{\nabla} U \cdot \vec{t}_i)^2 dx \\
 & + (\varepsilon^V)^2 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] dx dz \\
 & + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^Z)^2 \int_{I_x} \left(\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} \right)^2 dx.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nous appliquons cette nouvelle formulation de la tomographie à des exemples synthétiques simples avant de l'appliquer à des données réelles associées à des milieux complexes (chapitre III, section 3).

Dans une première partie, nous mettons en évidence des cas pathologiques où la solution du problème linéarisé n'est pas unique (hypothèse de complétude des données (2.11), chapitre VI, n'est pas vérifiée).

Nous vérifions expérimentalement, dans une deuxième partie, dans quelle mesure nous pouvons retrouver des modèles synthétiques simples avec la tomographie de réflexion.

2 Cas pathologiques de non unicité de la solution du problème inverse linéarisé

Nous explicitons l'hypothèse de complétude des données (chapitre VI, (2.11)) qui assure l'unicité et l'existence de la solution du problème linéarisé associé à (1.1) sans le terme de guidage, page 72): pour $\partial U \in P_1(\Omega)$, $\partial Z_i \in P_1(I_x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, pour $k = 1, 2, \dots, N_{obs}$,

$$\begin{aligned}
 \partial T_k = (J_0^D)_k \partial m = & \int_{\mathcal{R}_k} \frac{\partial U}{2\sqrt{U_0}} ds + \sum_{i=1}^N \sqrt{U_0(x_k, z_k)} \partial Z_i(x_k) (\cos \theta_k^{inc} + \cos \theta_k^{ref}) = 0 \\
 \implies & \partial U = \partial Z_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Soit $\partial U = ax + bz + c$ et $\partial Z_i = a_i x + b_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Il est clair qu'un nombre minimum de rayons est nécessaire pour espérer vérifier l'hypothèse 2.1, c'est-à-dire $2N + 3$. Nous supposons, dans la suite, que nous disposons de suffisamment de données pour remplir cette condition.

Nous nous contenterons ici de donner des exemples de perturbations de modèles appartenant à $\ker J_0^D \cap P_1$ dans le cas de modèle de référence homogène et de modèle à gradient constant.

Considérons un **modèle de référence m_0 homogène** avec une interface horizontale: $U_0 = cst$, $Z_0 = cst$. Les rayons sont alors des droites (Figure 1)

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{1}{U_0} \vec{p} \\ \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \vec{\nabla} U_0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{X} = \frac{1}{U_0} \vec{p}_0 s + \vec{X}_0 \\ \vec{p} = \vec{p}_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

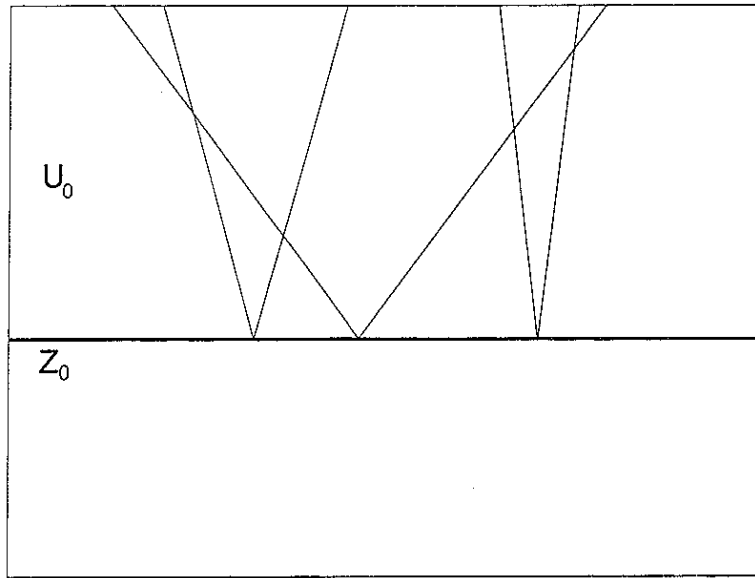


Fig 1 Exemple de rayons dans un modèle homogène à interface horizontale.

Bube, 1995, a caractérisé complètement $\ker J_0^D \cap P_1$ dans ce cas. En particulier il a montré que les perturbations de la profondeur des interfaces sont déterminées de façon unique.

$$\int_{R_k} \frac{\partial U}{\sqrt{U_0}} ds = \frac{1}{\sqrt{U_0}} \int_{R_k} \partial U ds = \frac{1}{\sqrt{U_0}} \left(a \int_{R_k} x ds + b \underbrace{\int_{R_k} z ds}_{=0, \forall R_k} + c \int_{R_k} ds \right) \quad (2.3)$$

Le choix de b est arbitraire. On peut donc trouver une infinité de perturbations de modèle de la forme $\partial U = b z$ qui fait partie du noyau de J_0^D .

Remarquons que le terme de guidage ne réduit pas l'indétermination, les perturbations $\partial U = b z$ satisfaisant $\vec{\nabla} \partial U \cdot (\vec{t}_0)_i = 0$.

Dans le cas de modèles de référence homogènes, les perturbations de lenteur au carré ne sont pas déterminées de façon unique par les perturbations des temps de trajet, même avec régularisation par les dérivées secondes ou guidage de la vitesse le long des interfaces. Nous pouvons néanmoins espérer que la taille du noyau de J_0^D pour un milieu quelconque ne sera pas plus grande que celle du noyau pour un modèle homogène. En effet, la simplicité et la symétrie des milieux homogènes rendent l'indétermination plus importante.

Etudions maintenant le cas d'un **modèle de référence à gradient constant**

Soit $U_0 = a_0 x + b_0 z + c_0$, $(Z_0)_i = (a_0)_i + (b_0)_i x$. Dans un tel modèle, les rayons sont des paraboles

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} = \vec{p} \\ \frac{\partial \vec{p}}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{U_0}} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\sqrt{U_0}} \right) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} U_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{avec } d\tau = \frac{1}{\sqrt{U_0}} ds \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{X} = \vec{p}_0 \tau + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \tau^2 + \vec{X}_0 \\ \vec{p} = \vec{p}_0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \tau. \end{cases}$$

La perturbation de temps de trajet (le long du rayon incident) associée à une perturbation de lenteur au carré à gradient constant s'écrit alors

$$\begin{aligned} \partial T_k &= (ax_0 + bz_0 + c)\tau + (a(p_0^x)_k + b(p_0^z)_k)\frac{\tau^2}{2} + (aa_0 + bb_0)\frac{\tau^3}{12} \\ &= \partial U(x_0, z_0)\tau + \left(\vec{\nabla}\partial U \cdot (\vec{p}_0)_k\right)\frac{\tau^2}{2} + \left(\vec{\nabla}\partial U \cdot \vec{\nabla}U_0\right)\frac{\tau^3}{12}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si la perturbation est telle que

$$\partial U(x_0, z_0) = \vec{\nabla}\partial U \cdot (\vec{p}_0)_k = \vec{\nabla}\partial U \cdot \vec{\nabla}U_0 = 0, \text{ alors } \partial T_k = 0. \quad (2.6)$$

Explicitons les hypothèses (2.6):

- $\partial U(x_0, z_0) = 0$: la perturbation est nulle à la source,
- $\vec{\nabla}\partial U \cdot (\vec{p}_0)_k = 0$: le gradient de la perturbation est orthogonal au vecteur lenteur à la source,
- $\vec{\nabla}\partial U \cdot \vec{\nabla}U_0 = 0$: le gradient de la perturbation est orthogonal au gradient de la lenteur au carré de référence.

Ces hypothèses impliquent également que les vecteurs lenteur des rayons sont parallèles au gradient de la lenteur au carré de référence à la source.

Prenons le cas particulier d'un **modèle de référence à gradient vertical et à interface horizontale**: $U_0 = b_0z + c_0$, $(Z_0)_i = (a_0)_i$. Dans ce cas, le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à la verticale passant par le point d'impact.

Ainsi, une perturbation de lenteur au carré vérifiant (2.6) appartient au noyau $\ker J_0^D \cap P_1$ puisque $\partial T_k = 0$ le long du rayon incident et donc aussi le long du rayon réfléchi, par symétrie.

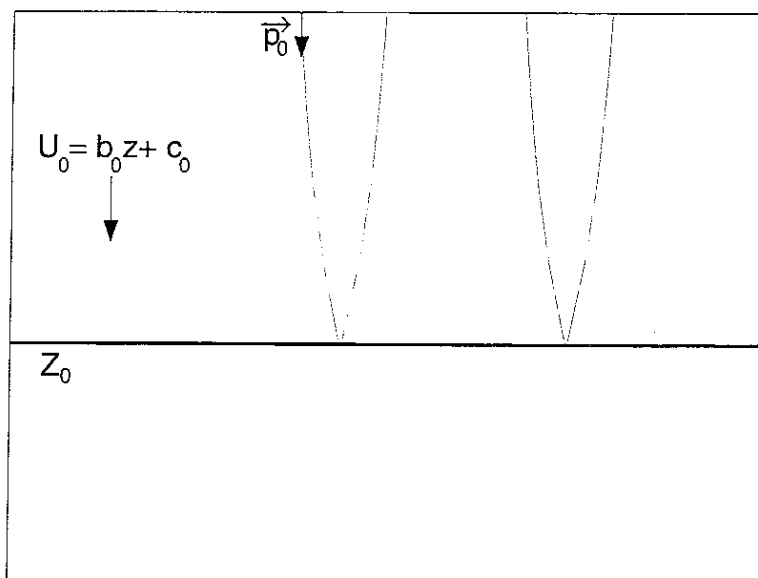


Fig. 2 Exemple de rayons dans un modèle de gradient de lenteur au carré constant et à interface horizontale

L'angle de tir des rayons par rapport à la verticale étant nul, ces rayons correspondent donc tous au même offset (Figure 2). Dans une telle configuration, une perturbation de lenteur au carré à gradient horizontal et nulle aux sources appartiendra à $\ker J_0^D \cap P_1$. Mais, dans ce cas, le terme

de guidage de la vitesse réduit l'indétermination. En effet, celui-ci impose à la perturbation d'être orthogonale à l'interface, ce qui n'est pas le cas des perturbations mises en évidence ci-dessus. Nous avons donc mis en évidence des cas pathologiques où le problème linéarisé n'admet pas une solution unique. Cependant, il faut reconnaître que ces cas ne sont pas très réalistes.

Dans la section suivante, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de solution du problème non linéaire en appliquant la tomographie à des exemples synthétiques simples.

3 Tests numériques

Can we retrieve simple models with reflection tomography ?

D. Sinoquet

Abstract

The indetermination of the solution of reflection tomography makes the introduction of a priori information necessary. Regularization by penalizing the second derivatives of the model, for instance, can reduce this indetermination. However, this still turns out to be insufficient when carrying out reflection tomography on complex field examples. In previous work, we proposed an original technique to integrate geological information about the velocity field into the least-square formulation. We undertake this updated version of tomography on simple synthetic examples. This technique is quite effective to reduce substantially the class of possible solutions of reflection tomography. But an uncertainty analysis on the solution is still necessary to detect any possible remaining underdetermination. We propose an original technique using optimization with constraints.

3.1 Introduction

Reflection tomography is an attractive method for determining a velocity field and reflector geometries from multioffset traveltimes picked on seismic sections (Bishop et al, 1985, Chiu and Stewart, 1987). However, the tomographic inverse problem is known to be ill-posed. Additional information is necessary to reduce the set of acceptable models

For instance, regularization by penalizing second derivatives of the model (Delprat-Jannaud and Lailly, 1993) makes the inverse problem mathematically well-posed. Nevertheless, in practice, even with this regularized formulation, a great deal of instability remains, especially when dealing with complex geological structures with large velocity variations. In a previous work (Sinoquet, 1993) we proposed the integration of relevant a priori geological information.

Before applying this upgraded version of reflection tomography to complex field examples, it is important to master the technique on simple examples. In this paper we analyze to what extent we can retrieve simple synthetic models with reflection tomography. Of prime importance in this analysis will be the relevance of the integrated a priori information and the confidence we can have in it. We start by recalling our proposed formulation

3.2 Reflection tomography with a priori information on the velocity field

Reflection tomography is composed of the forward problem and the inverse problem. We deal with two-dimensional media restricted to a rectangular domain Ω defined by an horizontal interval $I_x = [x_{min}, x_{max}]$ and by a depth interval $I_z = [z_{min}, z_{max}]$.

The model m is composed of a velocity field represented by the squared slowness distribution $u(x, z)$, and of interfaces represented by explicit depth functions $z_i(x)$, i indicating the number of interface ($i = 1, \dots, N$). As the velocity model obtained by reflection tomography is used to carry out depth migration, we prefer a smooth representation of the velocity field: such a representation is better suited than a blocky one for the migration (chapitre III). The function $u(x, z)$ is supposed to be $C^2(\Omega)$ (i.e. twice continuously differentiable on Ω) and the functions $z_i(x)$ are supposed to be $C^2(I_x)$.

We consider acoustic waves propagating from a source, reflecting on an interface (reflector) and propagating to a receiver at the surface. For a given model, the forward problem consists in computing the traveltimes of the reflections for all source-receiver couples of interest by raytracing. A ray R_j is defined by the source-reflector-receiver triplet indexed by j . The corresponding traveltime is given by $T_j(m) = \int_{R_j} \sqrt{u} ds$.

For the inverse problem, we have at our disposal a set of observed traveltimes T^{obs} for all triplets and we look for a model that best matches these data. The classical least-square formulation of the inverse problem consists in minimizing the misfit between observed and computed traveltimes:

$$C(m) = \left\| T(m) - T^{obs} \right\|^2, \quad (3.1)$$

where $\| \cdot \|$ is a norm in data space, for instance the Euclidian norm.

This nonlinear inverse problem is solved by the Gauss-Newton method which consists in iteratively solving linearized problems that can be expressed as the minimization of the quadratic functional

$$\tilde{C}(\partial m^{n+1}) = \left\| J(m^n) \partial m^{n+1} - \partial T^{obs} \right\|^2 \quad (3.2)$$

where m^n is the current model at iteration n , $J(m^n)$ is the Jacobian of the forward modeling operator $T(m)$, $\partial T^{obs} = T^{obs} - T(m^n)$, and $\partial m^{n+1} = m^{n+1} - m^n$ (i.e. the model perturbation giving the new model m^{n+1})

These linearized inverse problems are indeterminate: they have an infinity of solutions. Additional information is necessary (Delprat-Jannaud and Lailly, 1993). To overcome the difficulties associated with indetermination and underdetermination, we have proposed (Sinoquet, 1993) a specific formulation of reflection tomography.

We add to the objective function (3.1) penalization terms associated with a priori information on the model:

$$\begin{aligned} C_{a\ priori}(m) = & \underbrace{\left\| T(m) - T^{obs} \right\|^2}_{\text{Tomography}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^G)^2 \int_{I_z} (\vec{\nabla} u \cdot \vec{t}_i)^2 dx}_{\text{velocity guide}} \\ & + \underbrace{(\varepsilon^V)^2 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] dx dz}_{\text{velocity (curvature) regularization}} \\ & + \underbrace{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^Z)^2 \int_{I_x} \left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} \right)^2 dx}_{\text{inter face (curvature) regularization}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

where $\vec{\nabla}u$ is the gradient of the squared slowness and \vec{t}_i is the unit tangent vector to interface i

The motivations that have led to this formulation are given in Sinoquet, 1993. Let us just underline that the penalization terms in (3.3) can be interpreted as a Bayesian integration of a priori geological information, the a priori model having

- a squared slowness distribution with zero curvature (constant gradient) (velocity regularization)
- flat reflectors (interface regularization) orthogonal to the squared slowness gradient (velocity guide)

The weights ε_i^G , ε_i^V , ε_i^Z enable us to express the uncertainties associated with each piece of information and to normalize the functional terms according to their physical meaning. They are input to our formulation of reflection tomography.

The linearized problem associated with the minimization of the objective function (3.3) is a well-posed problem: as in Delprat-Jannaud and Lailly (1993), uniqueness and mathematical stability of its solution are ensured.

The model is represented by cubic B-spline functions, adequate to build C^2 functions (Barsky et al, 1986). The velocity and interface parameters are thus respectively the vertices of a tensor of B-spline functions defined by an uniform knot grid (x, z) and the vertices of a B-spline function defined from an uniform sequence of x knots.

We use the discretized form of (3.3) to carry out the experiments described in the next sections. Considering the mathematical results of Delprat-Jannaud and Lailly (1993) on the linearized problem, we can hope for an unique solution. So, can we retrieve the model (henceforth called *the exact model*) which was used to create the synthetic data set? In particular, we will study the role of the velocity guide (the originality of the formulation) in retrieving the exact model. We carry out two types of experiment:

- we consider an exact model with a constant gradient of the squared slowness which is orthogonal to the interfaces, the a priori information is thus exact;
- we consider an exact model with a weak curvature, thus there is a small error in the a priori information.

3.3 Constant gradient model

In this section, we consider the exact model with a constant gradient of the squared slowness orthogonal to the flat interfaces (Figure 3). It is parametrized by 11×9 vertices for the squared slowness and 8 vertices for each interface. The synthetic data set is composed of 147 arrival times of the two reflections. The x ordinates of the 7 sources range from 3 to 9km and the offsets from 25m to 2km.

We run reflection tomography with an initial model which has a constant squared slowness ($0.3\text{s}^2/\text{km}^2$) and horizontal interfaces at 2 and 3km. We use the same parametrization as for the exact model. What a priori information does tomography require to retrieve the exact model?

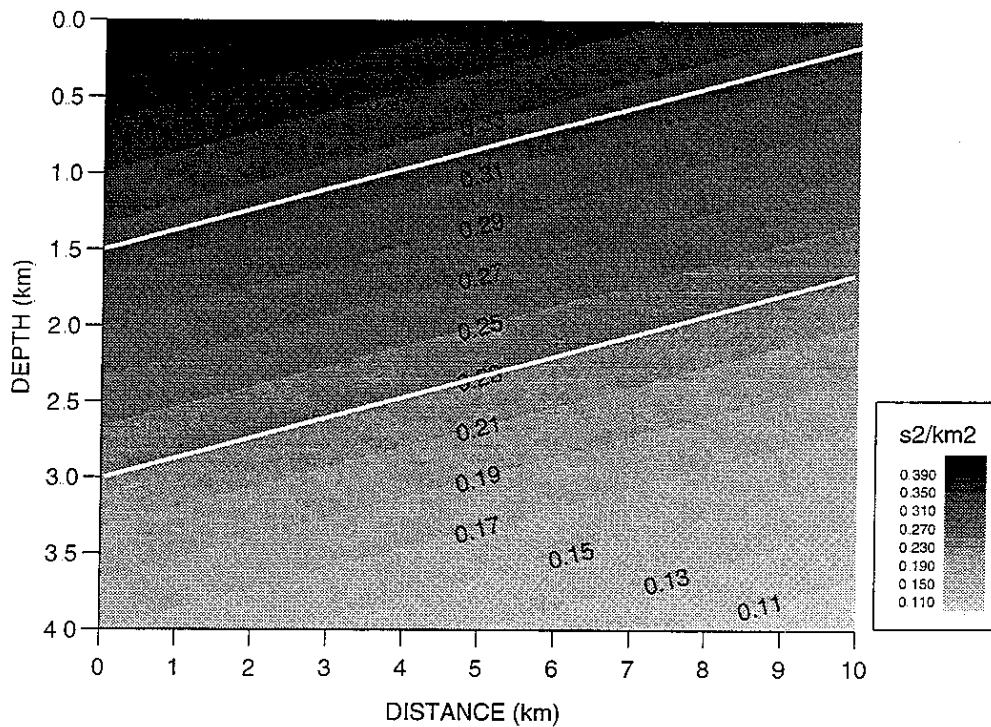


Fig 3 Synthetic model with a constant gradient of the squared slowness and constant slope interfaces. We calculate the data by raytracing in this model.

First example: 1 interface.

For this first experiment, we restrict the data set to the traveltimes associated with the deeper interface.

We carry out reflection tomography with only the information on the model curvature (zero curvature). We retrieve the geometry of the interface but we do not retrieve the velocity model (Figure 4). The misfits between the observed traveltimes and the traveltimes computed on the obtained model are quite satisfactory: smaller than 1ms.

The problem is underdetermined: the model we found matches the traveltime data and the a priori information on the curvature (the model has a constant gradient). However it is not the exact model we were looking for. This is quite understandable: the traveltime “measures” only a mean of the velocity along the ray and thus we have difficulties in retrieving the vertical variations of the velocity. We need extra information about the model to reduce the set of possible solution models: the size of this set characterizes the extent of underdetermination

Second example: 2 interfaces.

In this section, we consider the whole data set built from the model in Figure 3. The solution should be better determined than in the previous test as we have more data.

We carry out reflection tomography with only the a priori information on the model curvature. We are now able to retrieve the model with a good accuracy (Figure 5).

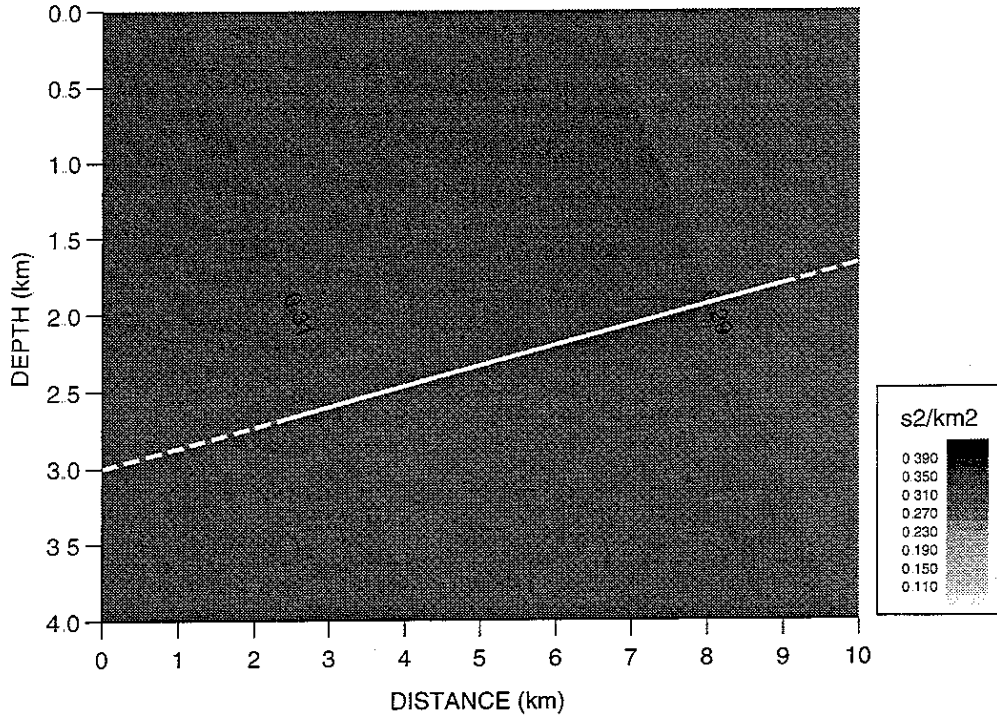


Fig. 4 Model obtained by reflection tomography with a priori information only on the model curvature with weights equal to 1. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltimes misfit is about 0.1ms.

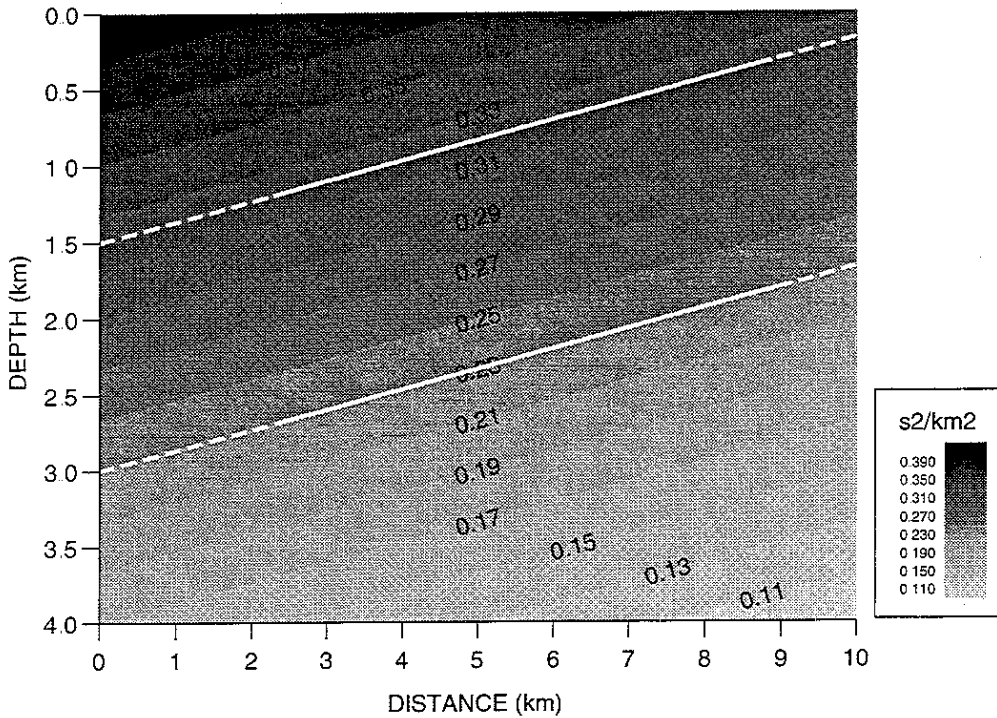


Fig. 5 Model obtained by reflection tomography with a priori information only on the model curvature with weights equal to 1. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltimes misfit is about 0.03ms.

The addition of traveltime data corresponding to reflections on another interface seems to be sufficient together with the information on the model curvature to retrieve the vertical variations of the velocity. This result was expected. We corroborate experimentally the mathematical results predicting the uniqueness of the solution.

Should we change the values of the weights, we would still obtain a model very close to the exact one whenever these values are high enough. The a priori information being exact, the calibration of the different terms involved in the objective function is useless.

Uncertainty analysis

In the previous examples, we obtain results with very small traveltime misfits ($\leq 1\text{ms}$). But, in practice, the confidence we have in the traveltime data is much smaller: in the case of real data, there are uncertainties associated with the traveltime picking. In that case, we may be satisfied by a model with misfits as bad as 10–15ms. So, can we be sure not to retrieve a constant gradient model which satisfies the traveltime data with a chosen accuracy but which is different from the exact one?

We run several experiments to clarify this point. In this section, we try to find other solutions of reflection tomography by introducing of constraints which make the solution model, by construction, different from the exact model.

We want to check first if the velocity is well determined by looking for a solution with a vertical gradient of the squared slowness 10 times smaller than the exact one. By imposing the constraint while running reflection tomography with only the information on the model curvature, we find a model with a constant gradient, which satisfies the constraints and with a RMS traveltime misfit at 7.5ms (Figure 6). So, the information on the model curvature is not sufficient to retrieve the exact model. When we consider a model to be a solution when it matches the data with an accuracy of 8ms, then the set of possible solutions becomes very large.

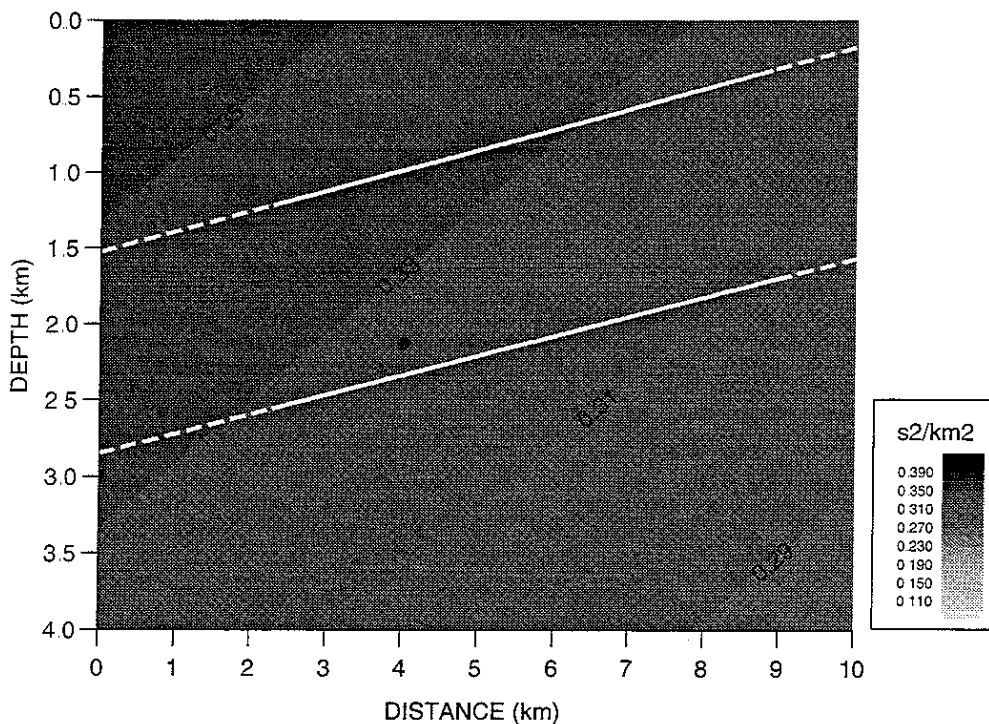


Fig. 6 Model obtained by reflection tomography with a priori information only on the model curvature with weights equal to 1. We constrained the vertical component of the squared slowness gradient to be 10 times smaller than the exact one. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltime misfit is about 7.5ms.

We then add extra a priori information: we fix the exact velocity at the surface. Again, we find a model with a constant gradient and a RMS traveltimes misfit equal to 10.5ms which can be still acceptable in practice (Figure 7). So, we are not able to retrieve a model with a constant gradient even if we know a priori the exact velocity at the surface. It is clear that, if we had added the velocity guide to the information on the model curvature and on the velocity at the surface, the velocity would have been completely determined, even without the traveltimes information. To retrieve the exact squared slowness, we need to know its value at the surface, that it has a constant gradient and that it does not vary along the interfaces! If we remove one of these pieces of information, a great deal of ambiguity appears in the solution.

After these experiments, which show that the velocity is strongly underdetermined in this example, we want to know if the interfaces are well determined. By constraining the slope of the interfaces to be 25% smaller than the exact one, we obtain the model in Figure 8 without the velocity guide and the model in Figure 9 with it. The model in Figure 8 satisfies the a priori information and the data with acceptable misfits but the slope of the interfaces is not retrieved because of the constraint. So, we realize here that even the interfaces are underdetermined. This underdetermination is known as the velocity-depth ambiguity. Nevertheless the velocity guide reduces this underdetermination: the model in Figure 9 satisfies the a priori information but does not satisfy the traveltimes data with a good accuracy. We have thus reduced the size of the set of possible solutions: we exclude a model such as the one in Figure 8.

In the previous experiments, we have chosen strong values for the weights associated with the curvature information. This means that we have a great confidence in this a priori information. But, in practice, as for traveltimes data, we only have limited confidence in such a priori information. In the next two experiments, we consider an even worse situation in which we are not sure whether the model to be retrieved has a constant gradient and flat interfaces. We choose, for instance, an uncertainty of $1\text{s}^4/\text{km}^6$ for the curvature of the squared slowness and of 1km^{-1} for the curvature of the interfaces, and we use weaker weights on the information on the model curvature. We constrain the model curvature to be strictly greater than zero to be sure to obtain a model different from the exact one. The model in Figure 10 is obtained by reflection tomography with the a priori information on the model curvature: it satisfies the traveltimes data and has a small curvature (acceptable with respect to the chosen uncertainties). This is another model which matches the data and the a priori information. Integration of the velocity guide excludes such a model: indeed the model in Figure 11 fits the a priori information but not the traveltimes data. If we trust the optimization, reflection tomography cannot find a model with a weak but non-zero curvature, with a constant velocity along the interfaces and which matches the traveltimes data.

As conclusions about these experiments on models with constant gradient, we can partially answer the question formulated in the title: no, we cannot retrieve a model as simple as a model with a constant gradient unless we have an infinite confidence both in the traveltimes data (RMS misfit smaller than 1ms in the first experiments) and in the fact that the gradient of the squared slowness and the interface slope are constant: a situation never met in practice!

The motivation of the experiments presented in the next section is to illustrate the difficulties met when the model to be retrieved does not match accurately the a priori information integrated in (3.3).

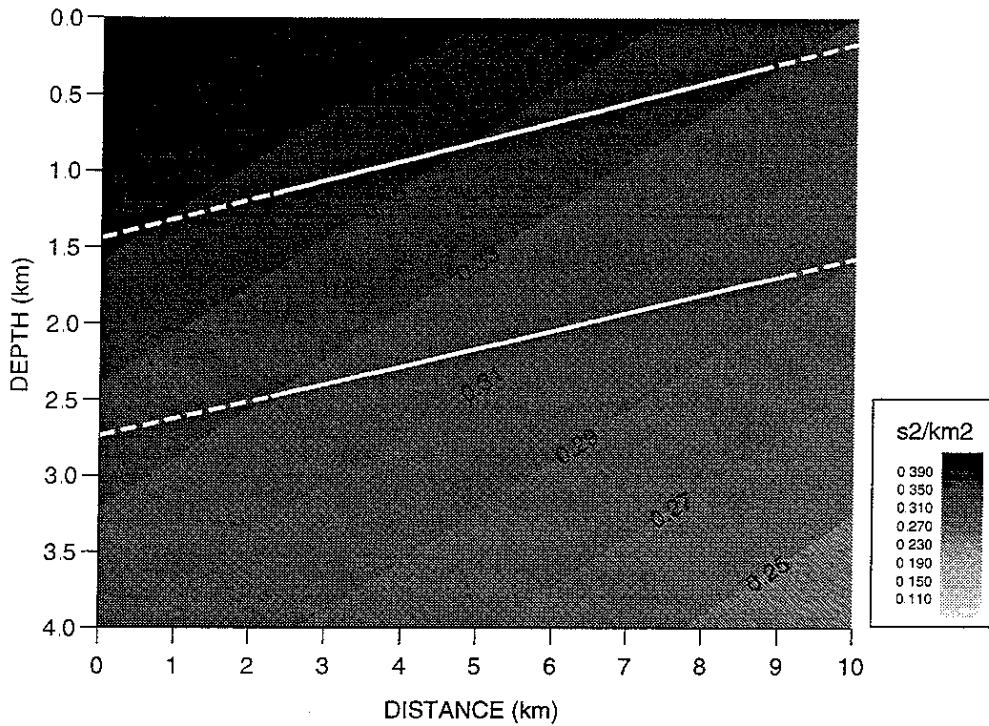


Fig 7 Model obtained by reflection tomography with a priori information only on the model curvature with weights equal to 1. We constrained the vertical component of the squared slowness gradient to be 10 times smaller than the exact one (weights and constraints as for model in Figure 6). We introduce a new a priori information: the exact velocity is given at the surface. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltimes misfit is about 10.5ms

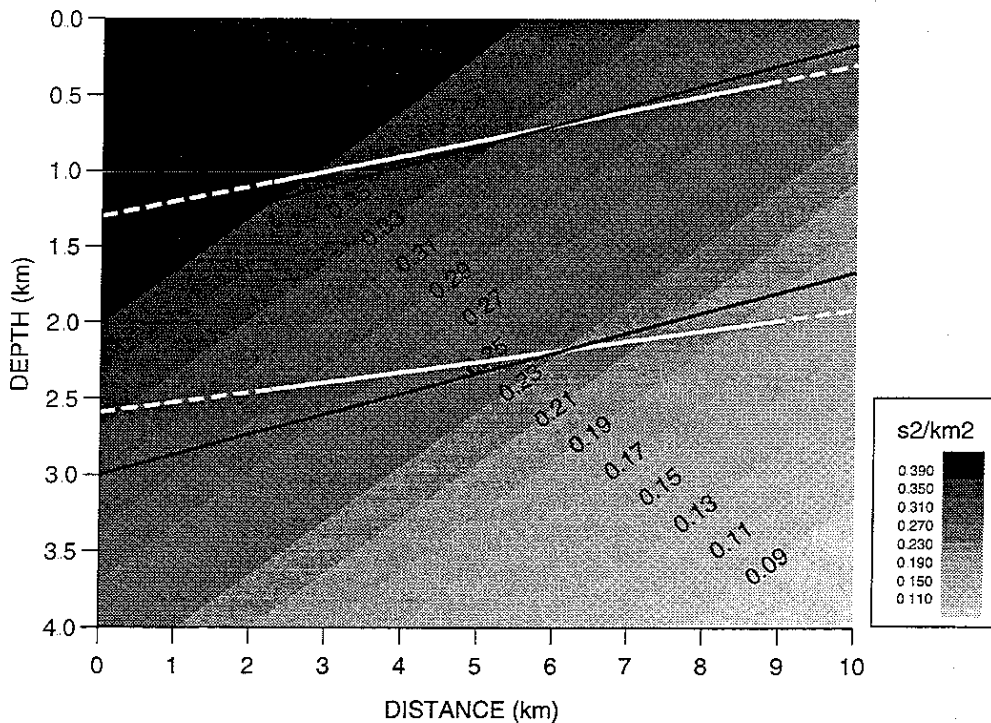


Fig 8 Model obtained by reflection tomography with a priori information only on the model curvature with weights equal to 1. We constrained the slope of the interfaces to be 25% smaller than the exact one (both interfaces of the true model, represented in black, have the same slope in the true model). The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltimes misfit is about 16ms.

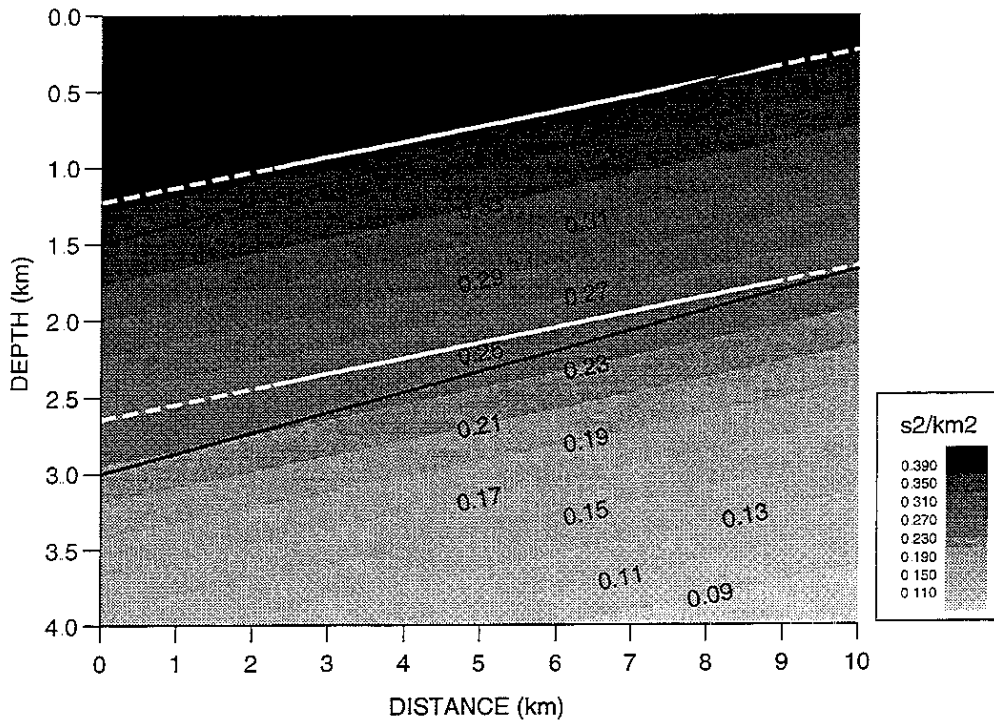


Fig 9 Model obtained by reflection tomography with a priori information with weights equal to 10. We constrained the slope of the interfaces to be 25% smaller than the exact one (both interfaces of the true model, represented in black, have the same slope in the true model) The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltme misfit is about 57ms.

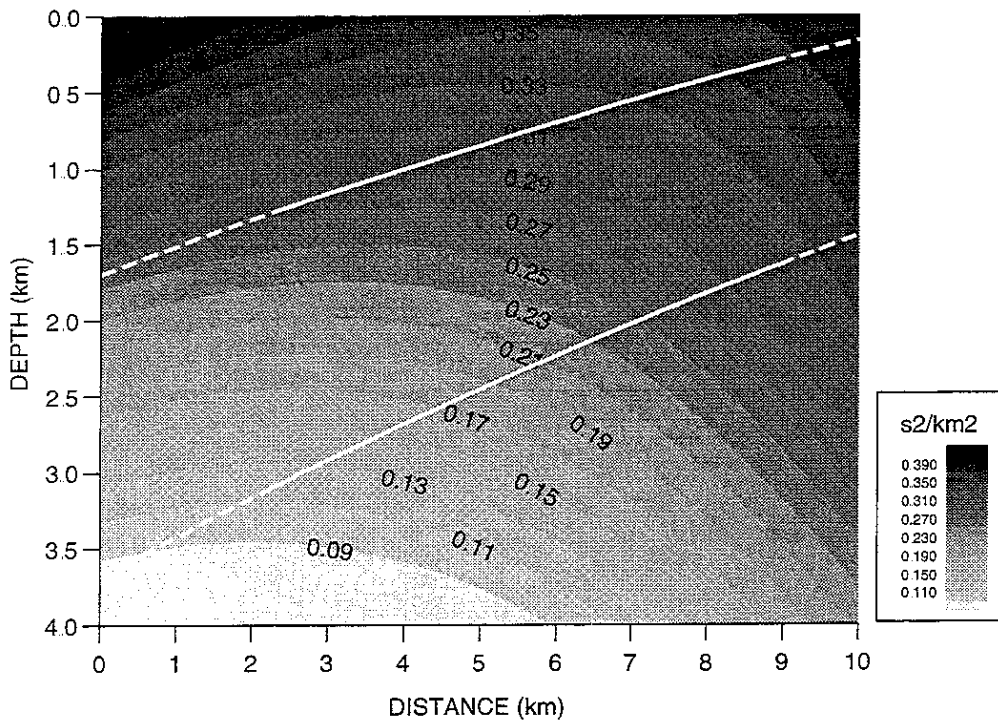


Fig 10 Model obtained by reflection tomography with a priori information only on the curvature with weights equal to 10^{-1} . We constrained the curvature of the model (slowness and interfaces) to be strictly greater than zero: in practice, $\partial^2 v / \partial x^2 \geq 5 \cdot 10^{-3}$, $\partial^2 z / \partial x^2 \geq 10^{-2}$. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltme misfit is about 14ms.

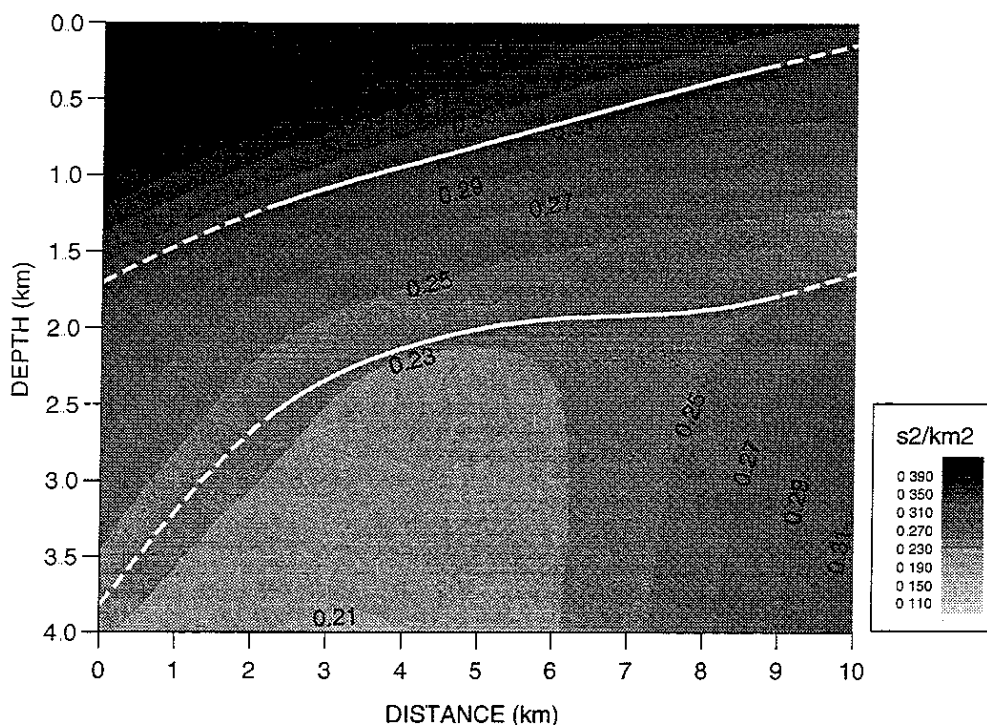


Fig. 11 Model obtained by reflection tomography with a priori information with weights equal to 10^{-1} for the a priori information on the curvature and 10 for the velocity guide. We constrained the curvature of the model (slowness and interfaces) to be greater than zero: in practice, $\partial^2 v / \partial x^2 \geq 5 \cdot 10^{-3}$, $\partial^2 z / \partial x^2 \geq 10^{-2}$. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltimes misfit is about 43.8ms

3.4 Models with a weak curvature

We now consider models with a weak curvature both regarding the squared slowness and the interfaces. Thus, contrary to the previous examples, we consider in this section a problem where the integrated a priori information is not exact: the exact model in Figure 12 does not have zero curvature but a weak one. The velocity is almost constant along the interfaces. We perform reflection tomography with the information on the curvature and then we add the velocity guide.

The acquisition configuration is the same as in the previous example. We also use the same parameterization.

A priori information: curvature of the exact model (Figure 13)

We start by integrating the exact a priori information by introducing the curvature of the exact model and not the zero curvature. We want to check that we are able to retrieve the exact model in this ideal situation. This experiment is thus similar to the experiments described in the previous section on the model with constant gradient. We obtain the model of Figure 13 which is quite close to the exact one. But, of course, in practice we do not have access to such ideal information.

A priori information: zero curvature (Figure 14)

The a priori information we use now is approximative. Therefore, we can expect a conflict between the traveltimes data and the a priori information on the zero curvature.

The difficulty is then the adequate tuning of the weights in the objective function. The weights are chosen according to the uncertainties on the different pieces of information. We can guess a priori

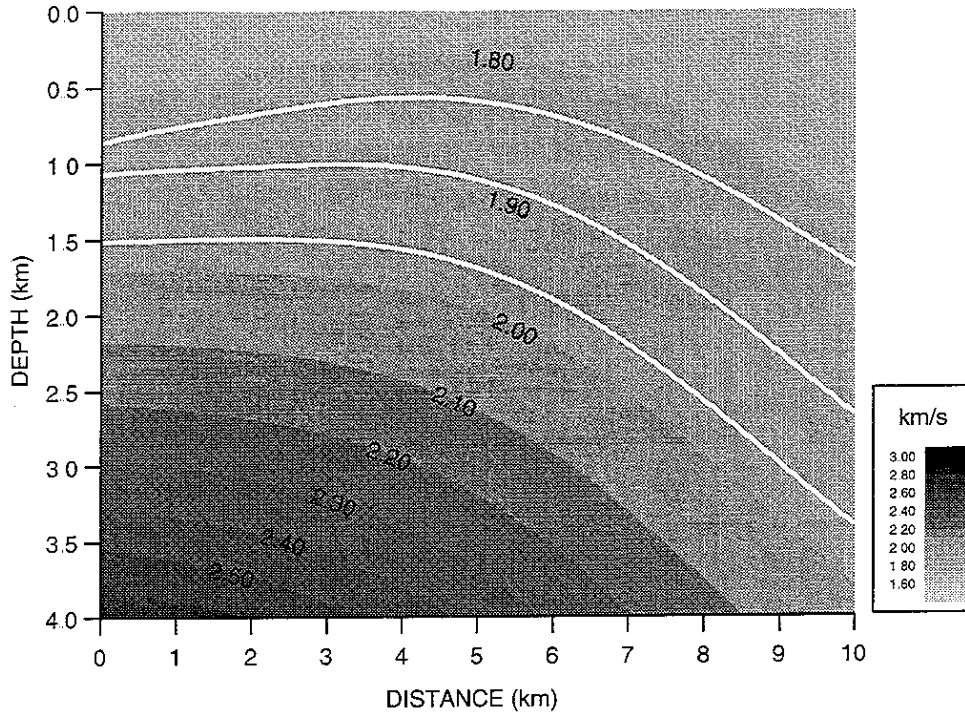


Fig. 12 Synthetic model with a weak curvature of the squared slowness and of the interfaces. We calculate the data by raytracing in this model.

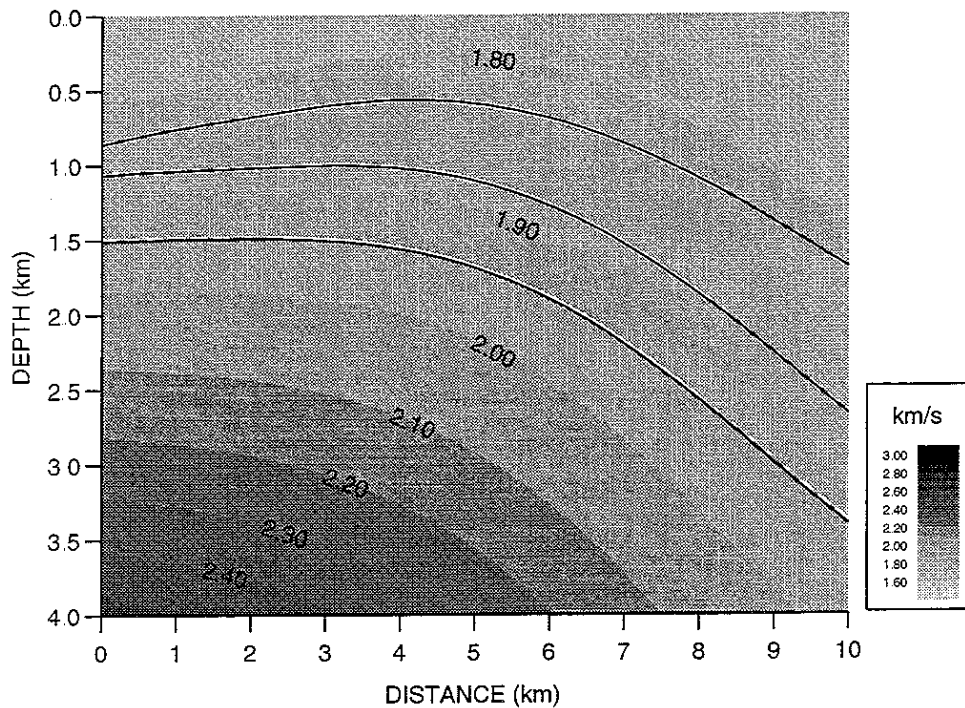


Fig. 13 Model obtained by reflection tomography with regularization by the *curvature of the exact model* with weights equal to 1. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltme misfit is about 0.5ms

the order of magnitude of those uncertainties. However, in practice, we use an iterative trial and error approach to improve these initial estimates (see Sinoquet, 1993, for greater detail). In synthetic examples, we know the curvature of the model and therefore we can estimate straightforwardly the order of magnitude of the associated uncertainty.

We use this technique to obtain the model in Figure 14. It satisfies quite well the traveltime data and it is close to the exact model in the part illuminated by the rays.

The erroneous a priori information does not prevent the matching of the data: this shows the indetermination of the problem. However, we succeed in finding a model which is close to the exact model.

A priori information: zero curvature and velocity guide along the interface

We add the velocity guide to the information on the model curvature used in the experiment in Figure 14. We find a model (Figure 15) closer to the exact one than the model in Figure 14 (in the illuminated part of the velocity field).

In those examples, the introduction of realistic uncertainties allows us to conciliate constructively contradictory pieces of information.

Can we find a model with flat interfaces?

The two models in Figures 16 and 17 are obtained with a different choice of weights, without and with velocity guide respectively. In Figure 16, the model shows the indetermination when we perform reflection tomography with the curvature regularization. The addition of velocity guide reduces this indetermination (Figure 17): the model no longer satisfies the traveltime data. The integration of the velocity guide highlights a conflict between the a priori information and the data.

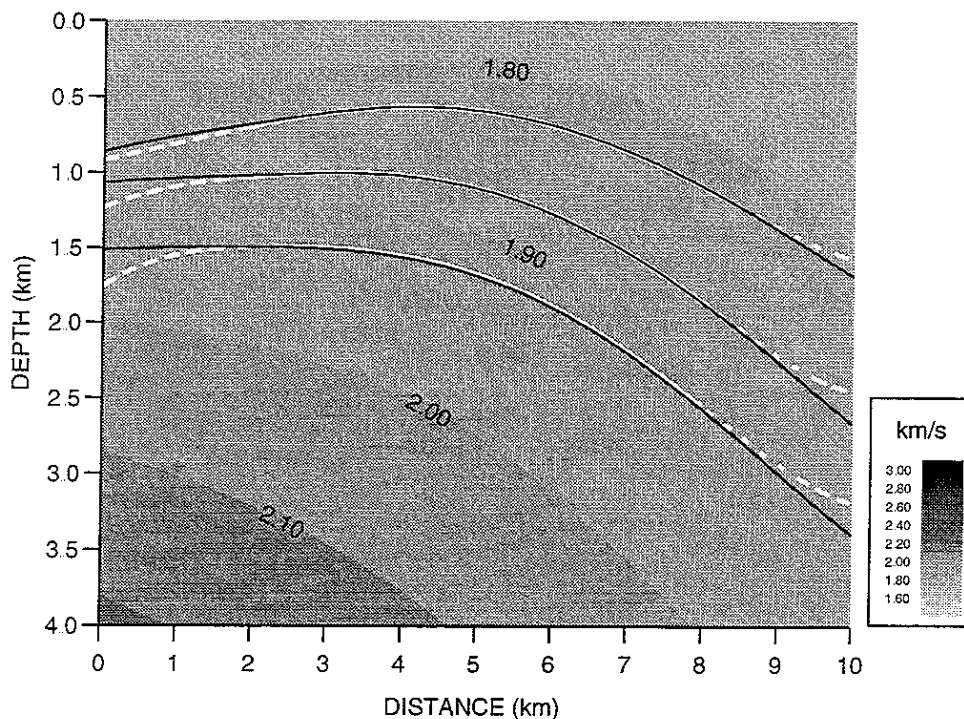


Fig. 14 Model obtained by reflection tomography with curvature regularization with the following weights: $(\epsilon^V)^2 = 10^{-2}$, $(\epsilon_i^I)_{i=1,3}^2 = 25 \cdot 10^{-5}$, $(\epsilon_i^G)_{i=1,3}^2 = 0$. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltime misfit is about 0.86ms

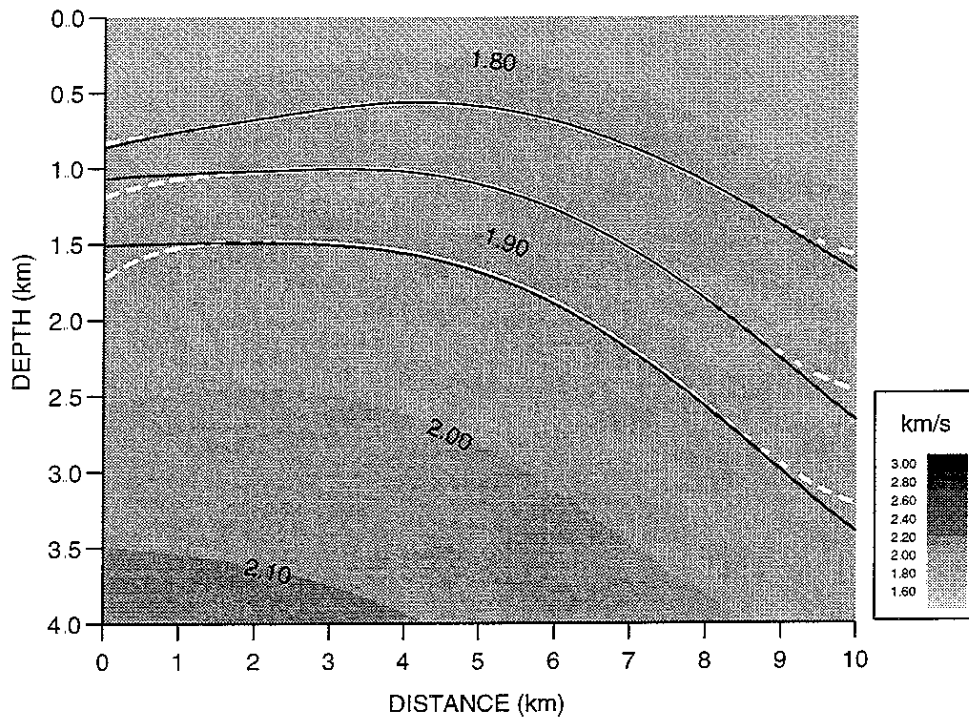


Fig. 15 Model obtained by reflection tomography with a priori information with the following weights: $(\epsilon^V)^2 = 10^{-2}$, $(\epsilon_i^I)_{i=1,3}^2 = 25 \cdot 10^{-5}$, $(\epsilon_i^G)_{i=1,3}^2 = 1$. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltimes misfit is about 0.88ms

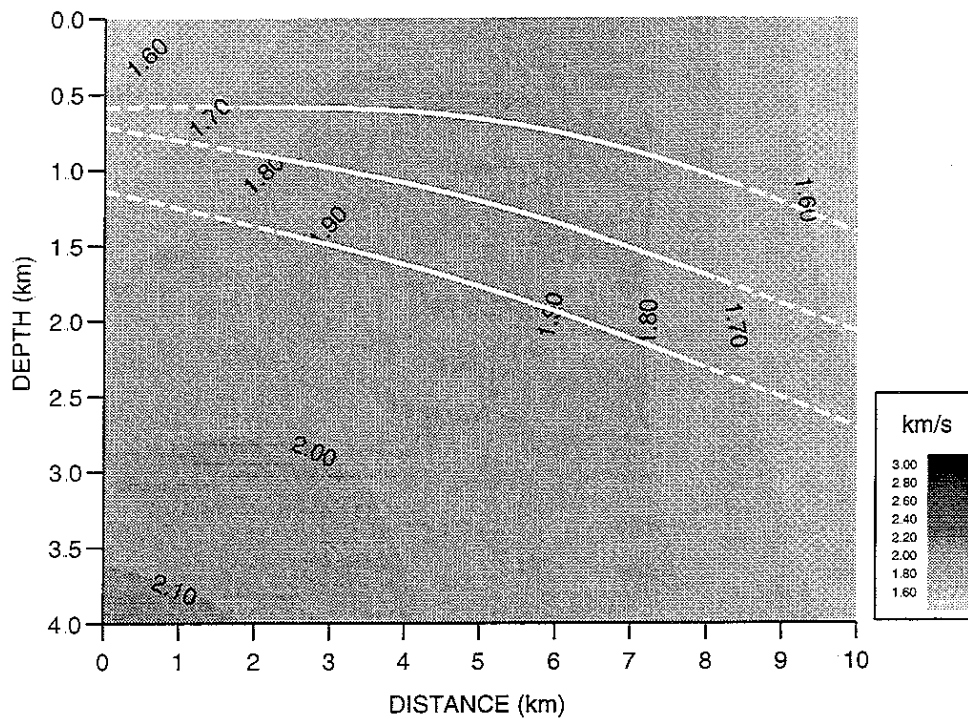


Fig. 16 Model obtained by reflection tomography with curvature regularization with the following weights: $(\epsilon^V)^2 = 10^{-1}$, $(\epsilon_i^I)^2 = 10^{-2}$, $(\epsilon_i^G)_{i=2,3}^2 = 5 \cdot 10^{-1}$, $(\epsilon_i^G)_{i=1,2}^2 = 0$. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltimes misfit is about 15.3ms

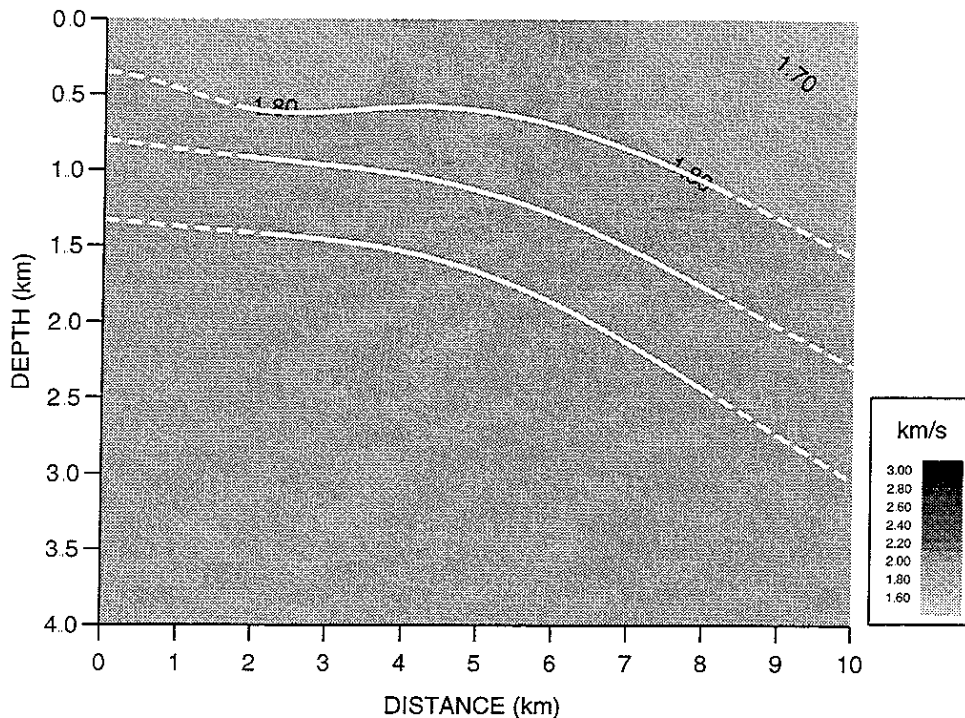


Fig. 17 Model obtained by reflection tomography with a priori information with the following weights: $(\varepsilon^V)^2 = 10^{-1}$, $(\varepsilon_I)^2 = 10^{-2}$, $(\varepsilon_i^I)_{i=2,3}^2 = 5 \cdot 10^{-1}$, $(\varepsilon_i^G)_{i=1,2}^2 = 25$. The parts of the reflector represented by dashed line are not illuminated by rays: their geometry is therefore only determined by the integrated a priori information. The RMS traveltimes misfit is about 20 2ms.

3.5 How to cope with indetermination in practice?

We have tried to design a reflection tomography method ensuring uniqueness and stability of the result. The experiments we have carried out show that the result is in fact well determined only

- if we have great confidence in the traveltimes data (expected misfits less than 1ms)
- and if we have “reasonable” confidence in the a priori zero curvature we prescribe in our formulation.

This of course requires such a priori information to be “reasonably” fulfilled by the exact model. In such a situation, the velocity guide term does not play an important role, the model being determined by our very accurate traveltimes data.

In practice we cannot have so much confidence in our traveltimes data. This results in an underdetermination of the solution: the less confidence we have in the traveltimes data, the greater the extent of the underdetermination.

For practical applications of reflection tomography, we have to cope with this underdetermination. This leads us to suggest a specific strategy whose principles are given below:

- (i) Understand that a solution found by reflection tomography is nothing but an arbitrary solution within a wide class of possible solutions

The velocity guide plays here a very important role to reduce the size of this class (as shown by the results in Figures 9, 11 and 17).

Also, because the solution found is an arbitrary solution among a lot of others, there is no reason for this solution to match some feature we are expecting a priori. Instead of criticizing and dropping the solution found (or even the reflection tomography software) we should rather use valuable a priori information to reduce with underdetermination.

- (ii) Integrate as much a priori information as possible.

This is the only way to reduce the size of the class of solutions. A great deal of such a priori information is usually available (look at how critical we can be when analyzing a result of reflection tomography): velocities available at the surface, from well logs*, from geological considerations; information on reflector geometries available from wells*, from geologic considerations. Techniques which may be used for such integration are

- optimization with constraints (see for instance Tran (1992) for applications to reflection tomography)
- the Bayesian approach which leads to additional penalty terms and additional weights to be calibrated. The weights are chosen according to the uncertainties associated with the penalty terms. The estimation of these uncertainties being cumbersome, in practice we carry out an iterative trial and error method to correct the initial values of the weights. The tuning of these weights is crucial when the a priori information is approximate and a conflict is possible between the a priori information and the travelttime data (this is usually the case in practice!). We have to find a good compromise by tuning correctly the weights.

(iii) Once a model matching all the data at hand (kinematic as well as all possible kinds of a priori geologic information) has been obtained, carry out an uncertainty analysis. In other words, check that a very different solution (which could lead for instance to a different exploration or production strategy) is not possible.

Uncertainty analysis in reflection tomography has been the subject of many studies (Bishop and al, 1985, Stork, 1988, Farra, 1988, Delprat-Jannaud and Lailly, 1992). Such an uncertainty analysis requires investigating the huge a posteriori covariance matrix which is quite cumbersome. Also, such an approach cannot take into account the nonlinear effects as well as the different pieces of a priori information that have been integrated as constraints in the optimization. The technique we have used in the section “uncertainty analysis” leads to a practical procedure for solving the difficult problems of uncertainty analysis while taking into account, in particular, the nonlinearities involved. This procedure consists in detecting the possibility (or, in probabilistic terms, in assessing the likelihood) of solutions different from the one computed by reflection tomography in the sense that they would lead to conclusions opposite to the exploration strategy foreseen through the solution of reflection tomography. For instance, we could think of testing the possibility of having a synclinal or flat reflector when reflection tomography has computed a model with an anticlinal structure. In this cases, exactly as we did in the section “uncertainty analysis”, we just have to test, using optimization with constraints, the compatibility between the a priori information “synclinal or flat reflector” and the different pieces of information integrated at stage 2. If the best model found with this new constraint does not match the travelttime data or any piece of information according to the specified confidences, then we conclude that this new constraint is incompatible with the original data set.** On the contrary, if the model found with this new constraint matches the travelttime data and the information according to the specified confidences, we conclude that additional data are required to distinguish between an anticlinal and a synclinal reflector.

3.6 Conclusions

The solution of reflection tomography is not unique: an infinite number of models match the travelttime data. The integration of a priori information (e.g. regularization by penalizing second derivatives of the model) reduces the indetermination. However, great confidence in the travelttime data and in the a priori information is necessary to obtain a well determined solution. In practice,

* Note that integrating well data and keeping consistent with surface seismic data requires a ray tracing technique taking anisotropic effects into account

** We assume here that we can fully rely on the optimization algorithm and, in particular, that it cannot be trapped in some local minimum

the confidence we have in the traveltimes data being limited and the a priori information approximate, the solution of reflection tomography can still be underdetermined. The solution found by reflection tomography is then just an arbitrary solution among many.

So, to reduce the size of the class of solutions, we have to integrate as much relevant a priori information as possible: by adding penalty terms in the least-square formulation or by adding constraints in the optimization process. We have shown that the velocity guide used in our formulation of reflection tomography is a very useful a priori information: it reduces substantially the underdetermination.

However, when we have obtained a model matching the traveltimes data and the a priori information, an uncertainty analysis is still necessary to detect any remaining underdetermination. An uncertainty analysis carried out by means of the a posteriori covariance matrix is quite cumbersome and does not take into account nonlinear effects. We have found it more practical to test, using optimization with constraint, the existence of another solution of reflection tomography that could lead to a different exploration strategy.

Acknowledgments

I thank Patrick Lailly and Florence Delprat-Jannaud for their invaluable advice and their critical reading of the paper, and Richard Clarke for correcting my English.

This research was carried out as part of the Prestack Structural Interpretation consortium project (PSI). I hereby acknowledge the support provided by the sponsors of this project.

Chapitre X. Conclusions

L'imagerie sismique de structures géologiques complexes nécessite la détermination précise de la distribution des vitesses de propagation dans le sous-sol. C'est pourquoi les géophysiciens de l'exploration pétrolière se sont intéressés de très près à la tomographie de réflexion qui permettrait en théorie de déterminer cette distribution de vitesses à partir de la cinématique des données sismiques.

La tomographie est un problème inverse pour lequel nous avons choisi une formulation de moindres carrés qui consiste à rechercher le modèle qui minimise les résidus entre les temps observés et les temps calculés dans le problème direct. Un modèle est constitué d'une distribution de vitesses et des réflecteurs. Nous utilisons pour résoudre le problème direct la technique du tracé de rayons entre deux points (*two-point raytracing*): nous calculons ainsi, pour un modèle donné, le temps de trajet le long du rayon reliant une source et un capteur. Les géophysiciens ont envisagé deux représentations possibles du champ de vitesse: les modèles *blocky* (discontinus) et les modèles lisses. L'objet de cette thèse était l'étude de la tomographie avec des modèles lisses bidimensionnels.

Notre étude a montré que les modèles lisses présentent des propriétés intéressantes aussi bien au niveau pratique qu'au niveau mathématique et numérique.

Sur le plan pratique, le pointé des temps de trajet des réflexions dans les sections sismiques peut être délicat, notamment pour des structures géologiques complexes. Dans ce cas, il est fondamental de faire travailler la tomographie avec une technique géophysique appelée l'analyse de vitesse de migration. Les modèles lisses offrent alors par rapport aux modèles *blocky* un énorme avantage.

Sur le plan mathématique, les modèles lisses de vitesse garantissent la définition de l'opérateur de modélisation des temps de trajet, ce qui n'est pas le cas des modèles *blocky*. Avec les modèles lisses, rayons et temps de trajet varient (tant avec le modèle qu'avec les conditions initiales définissant le rayon) de façon continue (et même différentiable). Ces propriétés sont très importantes pour la résolution du problème direct: elles sont utilisées explicitement dans l'algorithme de résolution du problème direct (Jannaud, 1992) qui m'a servi pour l'étude du problème inverse. Définition de la fonction coût, continuité et différentiabilité sont des propriétés tout aussi fondamentales au niveau de la résolution du problème inverse.

Nous avons donc étudié une formulation originale du problème inverse qui intègre dans la fonction coût des termes de pénalisation adaptés (permettant l'intégration d'informations a priori). Sur le plan mathématique, cette formulation nous assure l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution du problème inverse linéarisé. Dans ce contexte, le calcul numérique de la solution du problème inverse non linéaire sera immédiat pour peu que la méthode de Gauss-Newton (qui semble particulièrement adaptée puisque le jacobien est très facilement accessible) converge et que l'on sache résoudre correctement le problème linéarisé.

Nous avons donc accordé une grande attention au choix et au développement de la méthode d'optimisation résolvant le problème linéarisé d'autant que cette résolution est difficile:

- en raison du nombre de données,
- en raison du nombre d'inconnues qui, de plus, sont de natures physiques complètement différentes,
- en raison du nombre de contraintes que l'on souhaite imposer à ces inconnues, contraintes également de nature physique différente,
- en raison des termes de pénalisation qui peuvent perturber le conditionnement des systèmes linéaires.

Nous avons opté pour une méthode d'optimisation avec contraintes basée sur la méthode du Lagrangien augmenté couplée avec une méthode de relaxation. Cette méthode numérique a permis l'obtention de résultats satisfaisants sur des problèmes géophysiques difficiles: nous avons pu ainsi calculer des modèles comprenant plusieurs milliers d'inconnues, satisfaisant des milliers de contraintes, et expliquant avec une précision moyenne d'environ 15ms des données cinématiques d'une certaine complexité.

Vouloir aller plus loin, par exemple en voulant améliorer la précision de l'ajustement cinématique, conduit à une impasse:

- les systèmes linéaires seraient très difficiles à résoudre de par l'accroissement en nombre d'inconnues et la dégradation du conditionnement,
- et surtout, le problème mathématique n'aurait plus de rapport avec le problème physique puisque nous sortirions du cadre d'application de la théorie des rais.

Telle est la limite des modèles lisses. Cette limite ne doit pas pour autant masquer l'intérêt de ces modèles: les modèles lisses permettent la mise en œuvre d'une inversion tomographique fiable fournissant ainsi des résultats très appréciables sur le plan géophysique pour des problèmes d'une certaine complexité.

De tels résultats ont été obtenus grâce au choix des modèles lisses et de la spécificité de la formulation que nous avons proposée pour traiter certaines difficultés inhérentes à ces modèles lisses. L'inversion tomographique nécessite l'intégration d'informations a priori sur le modèle recherché et les modèles lisses se prêtent mal à une telle intégration. Nous avons donc proposé une formulation du problème adaptée à ces modèles: dans cette formulation, nous réintroduisons dans les modèles lisses la notion de couche. L'intégration d'une telle information a priori permet de réduire considérablement l'indétermination par rapport aux techniques classiques de régularisation. Elle fournit aussi une solution géologiquement plus acceptable, à condition de savoir préciser la confiance que l'on peut accorder aux informations manipulées. Ceci conduit à un problème de réglage de poids qui peut être délicat notamment quand il y a un conflit entre les différentes informations et les données sismiques. Une estimation de l'ordre de grandeur des incertitudes associées à chaque information permet de choisir un jeu initial de poids qui pourra être corrigé itérativement a posteriori.

Malgré les précautions prises, la sous-détermination reste un problème majeur: nous pouvons obtenir une solution approchant correctement les données sismiques mais cette solution reste une solution arbitraire parmi d'autres. La confiance dans les temps trajet étant limitée, la confiance dans le modèle solution sera elle aussi limitée. Il faut donc intégrer des informations supplémentaires pour encore réduire le nombre de solutions admissibles par exemple en utilisant des contraintes sur le modèle dans la méthode d'optimisation. Cependant, malgré l'introduction de nombreuses informations a priori, une analyse d'incertitude de la solution est toujours nécessaire pour estimer le crédit que l'on peut lui accorder: c'est là un problème très difficile puisqu'il s'agit fondamentalement de déterminer l'ensemble des modèles possibles compte-tenu de la confiance que l'on accorde aux données. Plutôt que d'explorer un espace à plusieurs milliers d'éléments, nous proposons de résoudre un sous-problème d'intérêt pratique important: là encore l'optimisation avec contraintes joue un rôle essentiel pour la mise en œuvre.

L'objet de cette thèse était de discerner le potentiel offert par les modèles lisses pour la tomographie de réflexion. La situation serait claire si

- l'optimisation avec contraintes pouvait satisfaire les exigences insatiables du géophysicien; notre étude a fait toucher les limites de l'algorithme du Lagrangien augmenté que nous avons utilisé et des travaux sur ce sujet sont nécessaires pour dépasser ces limites,
- si les temps de trajet étaient toujours une fonction univoque, hypothèse fondamentale utilisée dans notre travail et qui n'est pas toujours vérifiée en pratique, surtout lorsqu'il s'agit de structures complexes. Des travaux sont en cours (Delprat-Jannaud et Lailly, 1994) pour s'affranchir de cette hypothèse.

Le potentiel des modèles lisses étant néanmoins à peu près cerné, il importe aussi d'aller plus loin:

- vers un ajustement plus précis de la cinématique des données sismiques, vers des cinématiques plus complexes; cela demande, comme nous l'avons dit, de s'affranchir des modèles lisses et

Conclusions

donc de revenir aux modèles *blocky* et donc de résoudre les difficultés associées à la possible non-définition de l'opérateur de modélisation,

- vers des problèmes 3D, qui restent le principal objectif des géophysiciens. Disons simplement à ce propos que la transposition à 3D de notre méthode pose des difficultés numériques très importantes.

XI. Annexes

Annexe A Régularité de la solution des équations des rayons

Nous donnons les démonstrations des lemmes utilisés pour démontrer la continuité et la dérivabilité de la solution du problème direct dans le chapitre V. Les notations sont les mêmes que dans le chapitre V

Lemme 1 (Régularité de la solution $W(\tau)$ des équations des rayons)

Soit W , solution de (2.4), (2.5).

Il existe une constante K telle que, $\forall \tau, \partial\tau \in [0, \tau_1]$,

$$|W(\tau + \partial\tau) - W(\tau)| \leq K|\partial\tau|. \quad (3.1)$$

Démonstration:

On a d'après (2.4)

$$\begin{aligned} \|\vec{X}(\tau + \partial\tau) - \vec{X}(\tau)\| &\leq \left| \int_{\tau}^{\tau+\partial\tau} \left(\int_{\tau_0}^{\xi} \|\vec{\nabla}U(\zeta)\| d\zeta \right) d\xi \right| \\ &\leq \left(\int_R \|\vec{\nabla}U(\zeta)\|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} |\partial\tau| \\ &\leq K \|\vec{\nabla}U\|_{H^1(\Omega)} |\partial\tau| \leq K \|U\|_{H^2(\Omega)} |\partial\tau|, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\|\vec{p}(\tau + \partial\tau) - \vec{p}(\tau)\| \leq \left| \int_{\tau}^{\tau+\partial\tau} \|\vec{\nabla}U(\xi)\| d\xi \right| \leq C_1 |\partial\tau|, \quad (3.3)$$

$$\|T(\tau + \partial\tau) - T(\tau)\| \leq \left| \int_{\tau}^{\tau+\partial\tau} |U(\xi)| d\xi \right| \leq U_{max} |\partial\tau|. \quad (3.4)$$

□

Lemme 2

On considère une perturbation de la lenteur au carré et des conditions initiales. On note $W_\epsilon = (\vec{X}_\epsilon, \vec{p}_\epsilon, T_\epsilon)^t$, la solution du problème perturbé.

Il existe une constante K telle que

$$|\partial\tau_0| \leq K \left\| \vec{X}_\epsilon^{inc}(\tau_0) - \vec{X}^{inc}(\tau_0) \right\|. \quad (3.5)$$

Démonstration.

Si on considère une petite perturbation des conditions initiales et du champ de lenteur au carré (ε_0 et ε_1 petits), on a d'après le théorème 3.1

$$|x_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - x^{inc}(\tau_0)| = O(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \quad (3.6)$$

et on peut supposer que $\partial\tau_0$ est petit (cette hypothèse est réaliste si le rayon n'est pas tangent à l'interface).

On a d'autre part,

$$\begin{aligned} |\partial x_{imp}| &= |x_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - x^{inc}(\tau_0)| \\ &\leq |x_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - x_\varepsilon^{inc}(\tau_0)| + |x_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - x^{inc}(\tau_0)| \\ &\leq K(|\partial\tau_0| + \varepsilon_0 + \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

c'est-à-dire $|\partial x_{imp}| = O(|\partial\tau_0| + \varepsilon_0 + \varepsilon_1)$.

D'après les équations (2.4) et les hypothèses précédentes, on a

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - x_\varepsilon^{inc}(\tau_0) &= p_\varepsilon^{x inc}(\tau_0)\partial\tau_0 + O(\partial\tau_0^2), \\ z_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) &= p_\varepsilon^{z inc}(\tau_0)\partial\tau_0 + O(\partial\tau_0^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

De plus,

$$\begin{aligned} z_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) &= z_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - z^{inc}(\tau_0) + z^{inc}(\tau_0) - z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) \\ &= Z_i(x_\varepsilon^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0)) - Z_i(x^{inc}(\tau_0)) + z^{inc}(\tau_0) - z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) \\ &= Z'_i(x^{inc}(\tau_0))\partial x_{imp} + z^{inc}(\tau_0) - z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) + O(\partial x_{imp}^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

en négligeant les termes en $(\partial x_{imp})^2$ c'est-à-dire les termes en $\partial\tau_0^2, \varepsilon_0^2$ et ε_1^2 .

En injectant (3.8) dans (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} \partial\tau_0 \left(p_\varepsilon^{z inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{inc}(\tau_0))p_\varepsilon^{x inc}(\tau_0) \right) &= Z'_i(x^{inc}(\tau_0)) \left(x_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - x^{inc}(\tau_0) \right) \\ &\quad + z^{inc}(\tau_0) - z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) + O(\partial\tau_0^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

• Si $p_\varepsilon^{z inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{inc}(\tau_0))p_\varepsilon^{x inc}(\tau_0) \neq 0$,

on a

$$\begin{aligned} \vec{p}_\varepsilon^{inc}(\tau_0) \wedge \vec{t}_i(x^{inc}(\tau_0)) &= \|\vec{p}_\varepsilon^{inc}(\tau_0)\| \|\vec{t}_i(x^{inc}(\tau_0))\| \sin(\vec{p}_\varepsilon^{inc}(\tau_0), \vec{t}_i(x^{inc}(\tau_0))) \\ &\neq 0 \\ \implies \exists C / \sin(\vec{p}_\varepsilon^{inc}(\tau_0), \vec{t}_i(x^{inc}(\tau_0))) &\geq C > 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

et

$$\begin{aligned}
|\partial\tau_0| &= \left| \frac{Z'_i(x^{inc}(\tau_0))(x_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - x^{inc}(\tau_0)) + z^{inc}(\tau_0) - z_\varepsilon^{inc}(\tau_0) + O(\partial\tau_0^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2)}{p_\varepsilon^{z, inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{inc}(\tau_0))p_\varepsilon^{x, inc}(\tau_0)} \right| \\
&= \frac{\left| \left(\vec{X}_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - \vec{X}^{inc}(\tau_0) \right) \wedge \vec{t}_i(x^{inc}(\tau_0)) \right| + O(\partial\tau_0^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2)}{\left\| \vec{p}_\varepsilon^{inc}(\tau_0) \wedge \vec{t}_i(x^{inc}(\tau_0)) \right\|} \\
&\leq \frac{\left\| \vec{X}_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - \vec{X}^{inc}(\tau_0) \right\| + O(\partial\tau_0^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2)}{C \left\| \vec{p}_\varepsilon^{inc}(\tau_0) \right\|} \\
&\leq \frac{\left\| \vec{X}_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - \vec{X}^{inc}(\tau_0) \right\| + O(\partial\tau_0^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2)}{C \sqrt{U(\vec{X}_\varepsilon^{inc}(\tau_0))}} \\
&\leq \frac{\left\| \vec{X}_\varepsilon^{inc}(\tau_0) - \vec{X}^{inc}(\tau_0) \right\| + O(\partial\tau_0^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2)}{C \sqrt{U_{min}}} \\
&\leq K e^{K\tau_0} \left(|\varepsilon_0 \alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)} \right) + O(\partial\tau_0^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

On peut négliger les termes en ε_0^2 et en ε_1^2 devant les termes en ε_0 et en ε_1 .

On veut montrer qu'on peut également négliger les termes en $\partial\tau_0^2$ devant les termes en ε_0 et en ε_1 . Pour cela, on veut montrer que

$$\exists C / (\partial\tau_0)^2 \leq C e^{K\tau_0} \left(|\varepsilon_0 \alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)} \right). \tag{3.13}$$

Supposons l'inégalité contraire

$$\forall C / (\partial\tau_0)^2 > C e^{K\tau_0} \left(|\varepsilon_0 \alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)} \right). \tag{3.14}$$

On en déduit que

$$e^{K\tau_0} \left(|\varepsilon_0 \alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)} \right) = O(\partial\tau_0^2), \tag{3.15}$$

et en injectant dans (3.12), on obtient

$$\exists K' > 0 / |\partial\tau_0| < K' (\partial\tau_0)^2, \tag{3.16}$$

avec $K' = K + C$

Si on choisit $C \ll 1$, on trouve, si $|\partial\tau_0| \neq 0$,

$$|\partial\tau_0| > \frac{1}{K+C} \gg 1, \tag{3.17}$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse que $|\partial\tau_0|$ est petit

Donc,

$$\begin{aligned}
\exists C / (\partial\tau_0)^2 &\leq C e^{K\tau_0} \left(|\varepsilon_0 \alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}^2 \right), \\
|\partial\tau_0| &\leq (K + C) e^{K\tau_0} \left(|\varepsilon_0 \alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

- Si $p_\varepsilon^z \text{inc}(\tau_0) - Z'_i(x^{\text{inc}}(\tau_0))p_\varepsilon^x \text{inc}(\tau_0) = 0$,

le rayon perturbé est alors parallèle en $\vec{X}_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0)$ au vecteur tangent à l'interface en $x^{\text{inc}}(\tau_0)$ et on a alors

$$\begin{aligned} z_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0) - z_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0) &= p_\varepsilon^z \text{inc}(\tau_0)\partial\tau_0 = Z'_i(x^{\text{inc}}(\tau_0))p_\varepsilon^x \text{inc}(\tau_0)\partial\tau_0 \\ &= Z'_i(x^{\text{inc}}(\tau_0))(x_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0) - x_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

et

$$z_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0) - z_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0) = Z_i(x_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0)) - z_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0). \quad (3.20)$$

Ces deux dernières équations donnent

$$\begin{aligned} Z_i(x_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0)) - z_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0) &= Z_i(x_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0)) - Z_i(x_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0)) \\ z_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0) &= Z_i(x_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

ce qui implique $\partial\tau_0 = 0$. □

On déduit de ces deux lemmes le résultat suivant utile dans la démonstration du théorème 3.4

$$|W_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{\text{inc}}(\tau_0)| \leq Ke^{K\tau_0} (|\varepsilon_0\alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}). \quad (3.22)$$

En effet,

$$\begin{aligned} |W_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{\text{inc}}(\tau_0)| &\leq |W_\varepsilon^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0)| \\ &\quad + |W^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0) - W^{\text{inc}}(\tau_0)| \\ &\leq Ce^{K(\tau_0 + \partial\tau_0)} (|\varepsilon_0\alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}) + K|\partial\tau_0| \\ &\leq C(K + 1 + O(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2))e^{K\tau_0} (|\varepsilon_0\alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\leq Ce^{K\tau_0} (|\varepsilon_0\alpha| + \varepsilon_1 \|U\|_{H^2(\Omega)}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Lemme 3

On considère une perturbation d'interface $\varepsilon_2 \partial Z_i$.

On note $W_{\varepsilon_2} = (\vec{X}_{\varepsilon_2}, \vec{p}_{\varepsilon_2}, T_{\varepsilon_2})^t$, la solution du problème perturbé.

Il existe une constante K telle que

$$|\partial\tau_0| \leq K \|\partial Z_i\|_{H^1(I_z)}. \quad (3.24)$$

Démonstration

Le rayon incident perturbé $W_{\varepsilon_2}^{\text{inc}}$ a les mêmes conditions initiales que le rayon non perturbé mais est soit allongé ($\partial\tau_0 > 0$), soit raccourci ($\partial\tau_0 < 0$) pour se réfléchir sur l'interface perturbée $Z_i(x) + \partial Z_i(x)$.

On a donc

$$\begin{aligned} z^{\text{inc}}(\tau_0) &= Z_i(x^{\text{inc}}(\tau_0)) \\ z^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0) &= Z_i(x^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0)) + \varepsilon_2 \partial Z_i(x^{\text{inc}}(\tau_0 + \partial\tau_0)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Soit $\partial x_{imp}, \partial z_{imp}$ les perturbations de point d'impact associées à la perturbation d'interface.

$$\begin{aligned}\partial z_{imp} &= z^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - z^{inc}(\tau_0) \\ &= Z_i(x^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0)) - Z_i(x^{inc}(\tau_0)) + \varepsilon_2 \partial Z_i(x^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0)).\end{aligned}\quad (3.26)$$

En appliquant la formule de Taylor, on obtient

$$\partial z_{imp} = Z_i'(x^{inc}(\tau_0)) \partial x_{imp} + \varepsilon_2 \partial Z_i(x^{inc}(\tau_0)) + O(\partial x_{imp}^2). \quad (3.27)$$

Or, d'après le résultat du lemme 1,

$$|x^{inc}(\tau_0 + \partial\tau_0) - x^{inc}(\tau_0)| \leq K |\partial\tau_0|. \quad (3.28)$$

On obtient finalement

$$\partial z_{imp} = Z_i'(x^{inc}(\tau_0)) \partial x_{imp} + \varepsilon_2 \partial Z_i(x^{inc}(\tau_0)) + O(\partial\tau_0^2). \quad (3.29)$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}\partial x_{imp} &= p_x^{inc}(\tau_0) \partial\tau_0 + O(\partial\tau_0^2) \\ \partial z_{imp} &= p_z^{inc}(\tau_0) \partial\tau_0 + O(\partial\tau_0^2)\end{aligned}\quad (3.30)$$

En injectant (3.30) dans (3.29), on a

$$\partial\tau_0 \left(p_z^{inc}(\tau_0) - Z_i'(x^{inc}(\tau_0)) p_x^{inc}(\tau_0) \right) = \varepsilon_2 \partial Z_i(x^{inc}(\tau_0)) + O(\partial\tau_0^2). \quad (3.31)$$

Puisqu'on exclut les rayons tangents à l'interface, $p_z^{inc}(\tau_0) - Z_i'(x^{inc}(\tau_0)) p_x^{inc}(\tau_0) \neq 0$.
On a alors

$$\partial\tau_0 = \frac{\varepsilon_2 \partial Z_i(x^{inc}(\tau_0))}{p_z^{inc}(\tau_0) - p_x^{inc}(\tau_0) Z_i'(x^{inc}(\tau_0))} + O(\partial\tau_0^2), \quad (3.32)$$

et

$$\begin{aligned}|\partial\tau_0| &\leq K \frac{|\varepsilon_2| |\partial Z_i(x^{inc}(\tau_0))|}{\| \vec{p}^{inc}(\tau_0) \| \| \vec{t}_i(x^{inc}(\tau_0)) \|}} + O(\partial\tau_0^2) \\ &\leq K |\varepsilon_2| |\partial Z_i(x^{inc}(\tau_0))| + O(\partial\tau_0^2) \\ &\leq K |\varepsilon_2| \| \partial Z_i \|_{H^1(I_x)} + O(\partial\tau_0^2).\end{aligned}\quad (3.33)$$

En utilisant le même raisonnement que dans la démonstration du lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned}\exists K / \\ |\partial\tau_0| &\leq K |\varepsilon_2| \| \partial Z_i \|_{H^1(I_x)}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Annexe B Conditions d'optimalité

Pour simplifier les calculs, nous considérons un domaine $\Omega = I_x \times I_z$ et nous cherchons à caractériser la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } U \in H^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall \partial U \in H^2(\Omega), \text{ on ait} \\ \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial z^2} \right) \right) d\Omega = \langle f, \partial u \rangle_{L^2(\Omega)}, \\ \text{avec } f \in L^2(\Omega) \text{ donnée.} \end{array} \right. \quad (\text{B.35})$$

Soit $\partial U \in \mathcal{D}(\Omega)$. En intégrant par parties le terme de gauche de l'égalité (B.35), on obtient: (les termes de bord sont nuls par le choix de ∂U)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} \right) \partial U \, d\Omega = \int_{\Omega} f \partial U \, d\Omega, \quad \forall \partial U \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (\text{B.36})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ dans } L^2(\Omega) \quad (\text{3.37})$$

et presque partout dans Ω .

On multiplie l'équation 3.37 par une fonction $\partial U \in H^2(\Omega)$ et on intègre par parties plusieurs fois:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} \right) \partial U \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} \right) \frac{\partial \partial U}{\partial x} \, d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial z} \right) \frac{\partial \partial U}{\partial z} \, d\Omega \\
& + \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} \right) \partial U \, dz \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} + \left[\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial z} \right) \partial U \, dx \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} \\
& = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial z^2} \right) \right) d\Omega \\
& + \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} \right) \partial U \, dz \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} + \left[\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial z} \right) \partial U \, dx \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} \\
& - \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \partial U}{\partial x} \, dz \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} - \left[\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \partial U}{\partial z} \, dx \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} \quad (3.38) \\
& = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \partial U}{\partial z^2} \right) \right) d\Omega \\
& + \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} \right) \partial U \, dz \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} + \left[\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial z} \right) \partial U \, dx \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} \\
& + \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial \partial U}{\partial x} \, dz \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} + \left[\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \partial U}{\partial z} \, dx \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} \\
& - \frac{1}{2} \left[\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \partial U \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} \\
& = \int_{\Omega} f \partial U \, d\Omega.
\end{aligned}$$

Grâce à l'équation B 35, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} \right) \partial U \, dz \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} + \left[\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial z} \right) \partial U \, dx \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} \\
& + \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial \partial U}{\partial x} \, dz \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} + \left[\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \partial U}{\partial z} \, dx \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} \\
& - \frac{1}{2} \left[\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \partial U \right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} \right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} = 0, \quad \forall \partial U \in H^2(\Omega).
\end{aligned} \tag{3 39}$$

On en déduit les conditions aux bords par des choix particuliers de ∂U :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = 0 \\ \frac{\partial \Delta U}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3 40}$$

Les équations 3.37 et 3.40 caractérisent le modèle optimal du problème B.35.

Annexe C Construction des B-splines

1 Définition des nœuds

Soit $z(x)$ une fonction supposée univoque qui pourrait être la profondeur d'une interface dans notre problème (Figure 1). La construction d'une fonction B-spline de 2 variables (telle que la longueur au carré) ne sera pas décrite dans cette annexe mais la généralisation est facile.

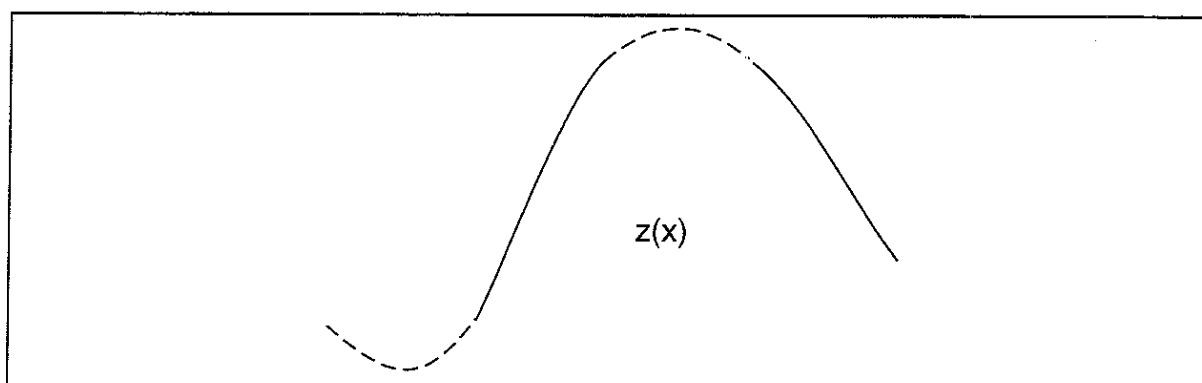


Fig. 1

La construction d'une telle courbe avec un unique polynôme s'avérant difficile, on découpe la courbe en segments définis par des polynômes indépendants. Ces segments sont reliés pour former une courbe polynômiale par morceaux (Figure 1).

On appelle nœuds, les valeurs de x qui correspondent aux points reliant les segments de la courbe. La suite de nœuds s'écrit:

$$x_1 \leq \dots \leq x_4 = x_m \leq \dots \leq x_{n-4} = x_M \leq x_n. \quad (1.1)$$

On peut noter que la suite de nœuds est une suite croissante, 6 nœuds sont en dehors du domaine physique de définition de la courbe $I_x = [x_m, x_M]$. Nous expliquerons pourquoi plus loin. Nous considérons des B-splines uniformes: les intervalles de nœuds $[x_i, x_{i+1}]$ ont une longueur constante

Pour assurer la régularité C^2 , on impose aux polynômes cubiques $z_i(x)$ (Figure 2) des contraintes aux nœuds, la fonction, ses dérivées première et seconde doivent y être continues:

$$\begin{aligned} z_{i-1}(x_i) &= z_i(x) \\ \frac{dz_{i-1}}{dx}(x_i) &= \frac{dz_i}{dx}(x) \\ \frac{d^2 z_{i-1}}{dx^2}(x_i) &= \frac{d^2 z_i}{dx^2}(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ces polynômes $z_i(x)$ sont construits à l'aide de fonctions de base (d'où le "B" de B-spline). Nous décrivons la définition de telles fonctions dans la section suivante.

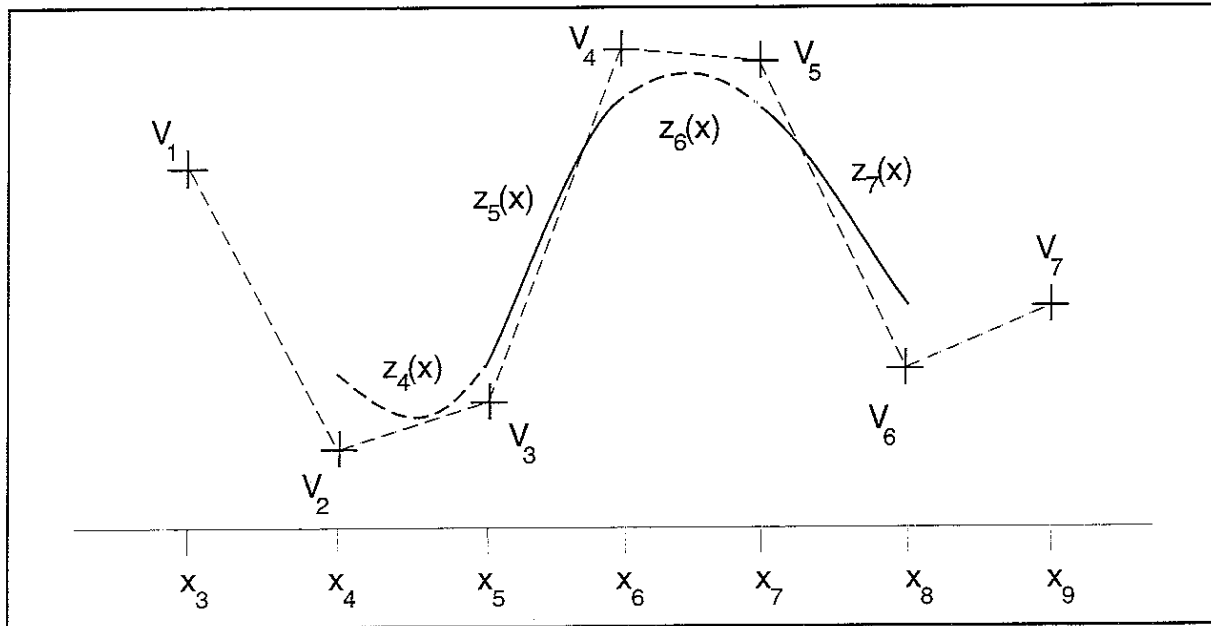


Fig. 2 La courbe régulière $z(x)$ (Figure 1) est construite à partir de segments (polynômes cubiques) de façon à approcher les sommets V_i . Ces sommets ont pour coordonnées (x_{i+2}, Z_i) , Z_i étant un coefficient de la fonction B-spline (voir paragraphe suivant).

2 Construction des fonctions de base

Une fonction de base est polynômiale cubique sur chaque intervalle de noeuds et est non nulle sur seulement 4 intervalles de noeuds (Figure 3). Pour assurer la régularité C^2 , on impose la continuité de la fonction et de ses dérivées première et seconde aux extrémités des intervalles de noeuds. La définition de la fonction nécessite la détermination de 16 inconnues (la détermination de 4 polynômes cubiques) et nous avons 15 équations. La 16^{ème} équation est l'équation de normalisation: la somme des 4 fonctions de base non nulles sur un intervalle de noeuds (Figure 4) est constante et égale à 1.

L'expression des fonctions de base est donc:

$$B_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_m \\ b_1(\bar{x}) & \text{si } x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ b_2(\bar{x}) & \text{si } x_{m+1} \leq x \leq x_{m+2} \\ b_3(\bar{x}) & \text{si } x_{m+2} \leq x \leq x_{m+3} \\ b_4(\bar{x}) & \text{si } x_{m+3} \leq x \leq x_{m+4} \\ 0 & \text{si } x_{m+4} \leq x \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $\bar{x} = \frac{x-x_m}{x_{m+1}-x_m}$, si $x_m \leq x \leq x_{m+1}$ et

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{Spl} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x} \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

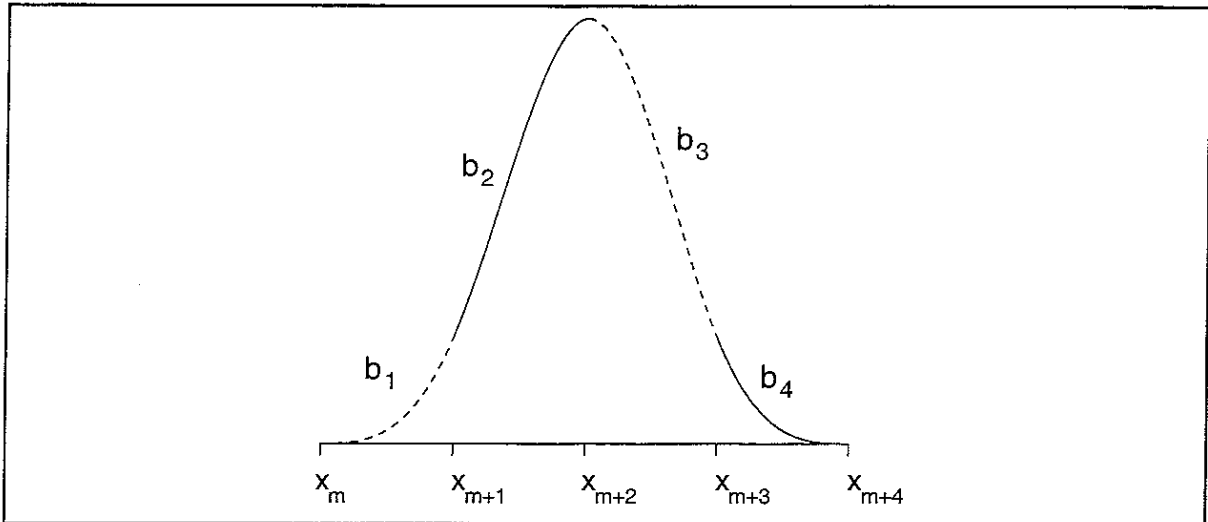


Fig. 3 La fonction de base $B_m(x)$ Cette fonction B-spline cubique est une fonction C^2 centrée en x_{m+2} et nulle pour $x \leq x_m$ et $x \geq x_{m+4}$.

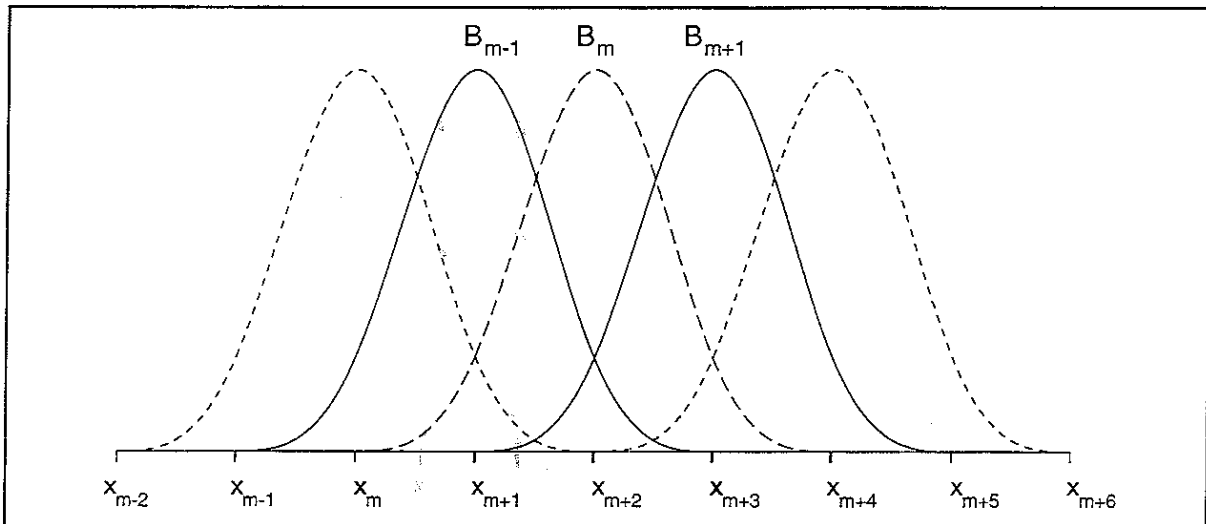


Fig. 4 Représentation des fonctions de base

La fonction $z(x)$ s'écrit alors comme la somme pondérée des fonctions de base:

$$z(x) = \sum_{m=1}^{N^z} Z_m B_m(x), \quad (2.5)$$

Z_m sont les coefficients (ou sommets) de la fonction B-spline. On peut également écrire:

$$z(x) = (1 \quad \bar{x} \quad \bar{x}^2 \quad \bar{x}^3) Spl \begin{pmatrix} Z_{m-3} \\ Z_{m-2} \\ Z_{m-1} \\ Z_m \end{pmatrix}, \quad \text{pour } x_m \leq x < x_{m+1}. \quad (2.6)$$

Cette dernière expression est illustrée par la Figure 5, seuls 4 coefficients interviennent puisque seules 4 fonctions de bases sont non nulles sur chaque intervalle de noeuds.

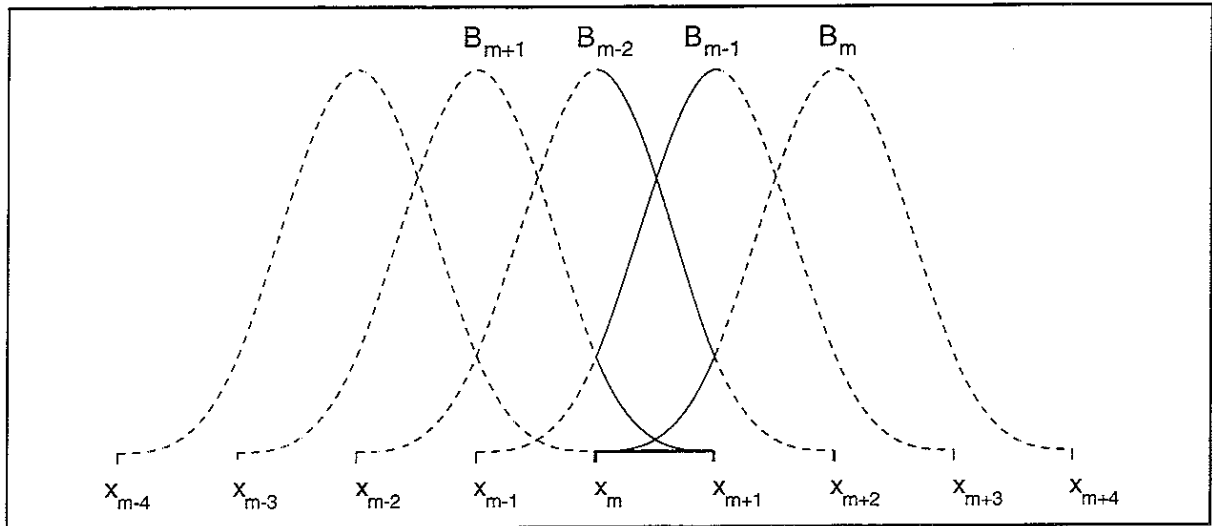


Fig 5 Les 4 fonctions de base non nulles sur l'intervalle de noeuds $[x_m, x_{m+1}]$ sont indiquées en ligne continue

Annexe D Calcul du terme de guidage de la vitesse

Le terme de guidage de la vitesse est un terme de la fonction coût non quadratique et couplant la vitesse et les interfaces. Voici l'expression du guidage le long de l'interface I_i :

$$C_i^G(m) = \int_{I_i} \left(\vec{\nabla} U(x, Z_i(x)) \cdot \vec{t}_i(x) \right)^2 dx. \quad (2.1)$$

où le vecteur $\vec{t}_i(x)$ est le vecteur unité tangent à l'interface I_i .

Nous l'écrivons en remplaçant la lenteur au carré et la profondeur de l'interface par les B-splines associées

$$C_i^G(p^U, p^{Z_i}) = \int_{I_i} \left(\sum_{m=1}^{N_i^Z} \sum_{k=1}^{N_i^U} \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial B_m(x)}{\partial x} p_m^{Z_i} \right)^2} \left(\frac{\partial B_k(x)}{\partial x} \underbrace{B_l(B_m(x) p_m^{Z_i})}_{B_l(Z_i(x))} p_{kl}^U + B_k(x) \underbrace{\frac{\partial B_l}{\partial x} (B_m(x) p_m^{Z_i})}_{B_l(Z_i(x))} p_{kl}^U \frac{\partial B_m(x)}{\partial x} p_m^{Z_i} \right)^2 dx. \quad (2.2)$$

Pour calculer cette intégrale, on doit la découper en suite d'intégrales définies sur des segments *seg* qui sont les intersections entre la grille de noeuds de la lenteur au carré et les intervalles de noeuds de l'interface. De plus, pour pouvoir intégrer analytiquement cette intégrale, nous simplifions la normalisation du vecteur tangent

$$C_i^G(p^U, p^{Z_i}) = \sum_{m=1}^{N_i^Z} \int_{seg} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial B_m(x)}{\partial x} p_m^{Z_i} \right)^2 \right) dx} \times \sum_{seg} \int_{seg} \left(\sum_{k=K-3}^K \sum_{l=L-3}^L \left(\frac{\partial B_k(x)}{\partial x} B_l(B_m(x) p_m^{Z_i}) p_{kl}^U + B_k(x) \frac{\partial B_l}{\partial x} (B_m(x) p_m^{Z_i}) p_{kl}^U \frac{\partial B_m(x)}{\partial x} p_m^{Z_i} \right) \right)^2 dx \quad (2.3)$$

Les segments *seg* sont les segments inclus dans un intervalle de noeuds de l'interface sur lesquels interviennent les 16 mêmes coefficients de la lenteur au carré. Ainsi, si l'on appelle x_{min}^{seg} et x_{Max}^{seg} les bornes du segment *seg*, avec $x_k^U \leq x_{min}^{seg} < x_{k+1}^U$ (intervalle de noeuds en x de la lenteur au carré), $x_m^{Z_i} \leq x_{min}^{seg} < x_{m+1}^{Z_i}$ (intervalle de noeuds de l'interface) et $z_l^U \leq Z_i(x_{min}^{seg}) < z_{l+1}^U$, alors $x_{Max}^{seg} = \inf \left(x^I, x_{k+1}^U, x_{m+1}^{Z_i} \right)$ où x^I est l'abscisse de l'éventuel point d'intersection de l'interface avec l'une des lignes de noeuds $z = z_l^U$ et $z = z_{l+1}^U$ (Figure 1).

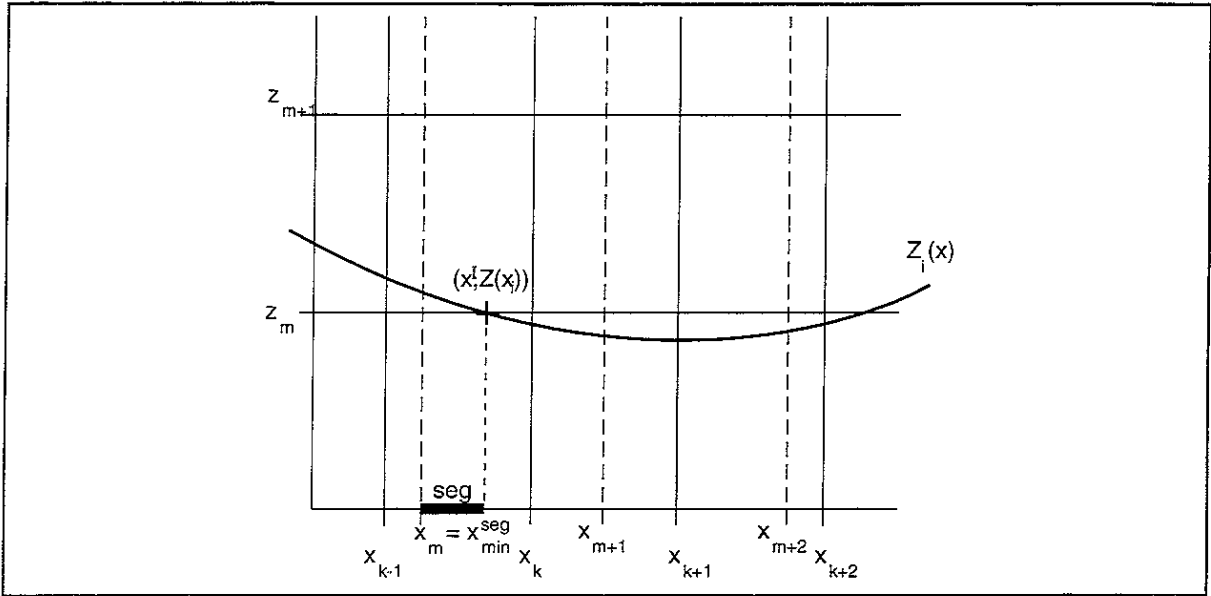


Fig. 1 Définition d'un segment *seg* dans le calcul du guidage: intersection entre la grille de noeuds de la lenteur au carré (grille de lignes continues) et les intervalles de noeuds de l'interface (lignes pointillées). L'interface est représentée par une ligne continue en gras et sa profondeur est appelée $Z_i(x)$. Le segment est représenté en gras: $seg = [x_m, x^f]$

Références bibliographiques

- Apostoiu-Marin, I. et Ehinger, A., 1994. Kinematical exercises on prestack depth migrated images, to be submitted to Geophysics.
- Barsky, R. H., Bartels, B. A. et Beatty, J. C., 1986. An introduction to splines for use in computer graphics and geometry modeling, Morgan Kaufmann Publishers.
- de Bazelaire, E. et Viallix, J. R., 1988. Optical interpretation of seismic events, part II: distorted NMO curves can tell where to drill, paper presented at 50th Mtg., Eur. Assn. Expl. Geophys., The Hague.
- Bécache, E. et Joly, P., 1993. Numerical analysis of adaptative stepsize schemes for the approximation of the ray equations, PSI 1993 Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France.
- Bishop, T. N., Bube, K. P., Cutler, R. T., Love, P. L., Resnick, J. R., Shuey, R. T., Spindler, D. A., et Wyld, H. W., 1985. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media, Geophysics, **50**, 903–923.
- Bording, R. P., Gersztenkorn, A., Lines, L., Scales, J. A. et Treitel, S., 1987. Applications of seismic travel-time tomography. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., **90**, 285–303.
- Brac, J., 1988. 3D modeling of wave speeds in complex geological regions, Geophysical Inversion Project, Weidlinger Associates, Volume 1.
- Brac, J. et Pereyra, V., 1989. Modeling velocity field in three dimensional blocky media, Geophysical Inversion Project, Weidlinger Associates, Volume 2.
- Brac, J. et Nguyen, L.L., 1990. Modeling of geological objects with spline, PSI 1990 Annual report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France.
- Brezis, H., 1983. Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson.
- Bube, K. P., 1995. Uniqueness of reflector depths and characterization of the slowness null space in linearized seismic reflection tomography, accepted for publication in SIAM J. Appl. Math., to appear Feb. 1995.
- Céa, J. et Glowinski, R., 1973. Sur les méthodes d'optimisation par relaxation, R.A.I.R.O., 5–32.
- Chiu, S. K. L., et Stewart, R. R., 1987. Tomographic determination of three-dimensional seismic velocity structure using well logs, vertical seismic profiles, and surface seismic data, Geophysics, **52**, 1085–1098.
- Ciarlet, P.G., 1982. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson.
- Dautray, R. et Lions, J.L., 1984. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tome 1, Masson.

De Boor, C , 1978 A practical guide to splines, Springer-Verlag.

Delprat-Jannaud, F. et Lailly, P., 1992 What information on the Earth model do reflection travel times provide?: J Geophys. Res., **97**, 19827–19844.

Delprat-Jannaud, F., 1991. Tomographie de réflexion : quelle est l'information contenue dans les temps d'arrivée? , Thèse de Doctorat de l'université d'Orsay.

Delprat-Jannaud, F., Farra, V., Jardin, A., Jacobs, J. A. C., Lailly, P. et Versteeg, R., 1991. A first application of the PSI approach on 2D data, PSI 1991 Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France.

Delprat-Jannaud, F. et Lailly, P., 1993. Ill-posed and well-posed formulations of the reflection tomography problem, J. Geophys. Res., **98**, 6,589–6,605.

Delprat-Jannaud, F. et Lailly, P., 1994. Reflection tomography: how to handle multiple arrivals?, submitted to J. Geophys. Res.

Ehinger, A., Lailly, P. et Marfurt, K., 1994. Green's function implementation of common offset wave equation migration, submitted to Geophysics.

Farra, V. et Madariaga, R., 1988. Non-linear reflection tomography, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., **95**, 135–147.

Fortin, M. et Glowinski, R., 1982. Méthodes de Lagrangien augmenté, Dunod, Bordas, Paris.

Geoltrain, S. et Brac, J., 1993. Can we image complex structures with first-arrival traveltimes?, Geophysics, **58**, 564–575.

Glowinski, R. et Tran, Q-H., 1993. Constrained optimization in reflection tomography, the Augmented Lagrangian method: East-West J. Numer. Math., **1** (3), 213–234.

Hanson, R.J., 1986. Linear least-squares with bounds and linear constraints, SIAM J. Sci Stat. Comput. **7**, no. 3, 826–834.

Harlan, W.S., 1992. Robust strategies for reflection et crosswell traveltimes tomography, 54th Mtg., Eur. Assn. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 250–251.

Inoue, H., 1986. A least-squares smooth fitting for irregularly spaced data: finite element approach using the cubic B-splines basis, Geophysics, **51**, 2051-2066.

Jacobs, J. A. C., Delprat-Jannaud, F., Ehinger, A. et Lailly, P., 1992. Sequential migration-aided reflection tomography: A tool for imaging complex structures, 63rd Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 231–234.

Jacobs, J. A. C. et Sinoquet, D., 1994. The Shell data, PSI 1994 Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France

- Jannaud, L., 1992. Two-point raytracing in complex media, PSI 1992 Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France.
- Jannaud, L. et Delprat-Jannaud, F., 1994. Traveltime inversion with a priori information on illuminated parts of the reflectors, submitted to *J. Geophys. Res.*
- Lailly, P., et Ehinger, A., 1991. Overview of the PSI approach to complex structure imaging, PSI 1991 Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France.
- Lavergne, M., 1986. Méthodes sismiques, éditions Technip, Paris.
- Lawson, C.L. et Hanson, R.J., 1974. Solving least-squares problems, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Lemaréchal, C. et Panier, E., 1983. Modulopt, INRIA report, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Rocquencourt, France.
- Lines, L. R. et Treitel S., 1985. Inversion with a grain of salt, *Geophysics*, **50**, 99–109.
- May, B. I. et Covey, J. D., 1983. Structural inversion of salt dome flanks, *Geophysics*, **48**, 1039–1050.
- Moser, T.J., 1993. Comparison of numerical schemes for solving ray equations in the Marmousi model, PSI 1993 Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France.
- Nečas, J., 1967. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson
- Sinoquet, D., 1993. Modeling a priori information on velocity field in reflection tomography, 63rd Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 591–594.
- Stork, C., 1988. Ray trace tomographic velocity analysis of surface seismic reflection data, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology
- Stork, C., 1992. Reflection tomography in the postmigrated domain, *Geophysics*, **57**, 680–692.
- Tarantola, A., 1987. Inverse problem theory, methods for data fitting and model parameter estimation, Elsevier Science Publishers.
- Tarantola, A., Valette, B., 1982. Inverse problems=Quest for information, *J. Geophysics*, **50**, 159–170
- Tarantola, A., Valette, B., 1982. Generalized non linear inverse problems solved using the least squares criterion, *Rev. Geophysics Space Phys.*, **20**, 219–232
- Tran, Q-H., 1992. Constrained optimization in reflection tomography: the Augmented Lagrangian method, PSI 1992 Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France.
- Tran, Q-H., 1993. Short note on the Augmented Lagrangian method, PSI 1993 Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France.

van Trier, J., 1990. Structural velocity analysis, PhD thesis, Stanford University.

Versteeg, R. J., 1991. Analyse du problème de la détermination du modèle de vitesse pour l'imagerie sismique, thèse de Doctorat, Université Paris VII, France.

Virieux, J., Farra, V. et Madariaga, R., 1988. Ray tracing in laterally heterogeneous media for earthquake location, *J. Geophys. Res.*, **93**, 6585–6599.

Wang, S. S., Baumel, R. I., Hanson, D. W., Bell, D. W., Boyd, M., Cavanaugh, T. D., Cox, V. D., D'Onfro, P. S., Durrani, J. A. et Standlee, L. A., 1991. Common offset depth migration as a velocity analysis tool, the Marmousi Experience, *Eur. Assn. Expl. Geophys.*, Zeist.

Whiting, P. M., 1991. Practical reflection tomography and maximum entropy imaging, 61st Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 986–989.

Williams, R. G., Cowley, J. et Nottfors C., 1992. Migration velocity analysis using common offset depth migration, 54th Mtg., Eur. Assn. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 258–259.

Williams, R. G. et Cowley, J., 1993. Residual depth moveout after common offset depth migration, 55th Mtg., Eur. Assn. Expl. Geophys., Expanded Abstracts.

