



**HAL**  
open science

# Réduction en dynamique non-linéaire géométrique : Application au cas des structures à symétrie cyclique

Adrien Martin

► **To cite this version:**

Adrien Martin. Réduction en dynamique non-linéaire géométrique : Application au cas des structures à symétrie cyclique. Mécanique des structures [physics.class-ph]. École Centrale de Lyon, 2019. Français. NNT: . tel-02476146

**HAL Id: tel-02476146**

**<https://hal.science/tel-02476146>**

Submitted on 12 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**École Doctorale MEGA**

**Mémoire de Thèse**

présenté pour obtenir le grade de

**Docteur de l'École Centrale de Lyon**

**Spécialité : Mécanique**

par

**Adrien MARTIN**

---

**Réduction en dynamique non-linéaire géométrique**  
**Application au cas des structures à symétrie cyclique**

---

Soutenue publiquement le 18 octobre 2019, devant le jury d'examen :

<b>E. FOLTETE</b>	Professeur, ENSMM Institut FEMTO-ST	Président
<b>E. SADOULET-REBOUL</b>	Maître de Conférences, U. de Franche-Comté Institut FEMTO-ST	Rapporteur
<b>P. ARGOUL</b>	Maître de Conférences, École des Ponts IFSTTAR	Rapporteur
<b>D. LAVAZEC</b>	Ingénieure méthodes Safran Aircraft Engines	Examinatrice
<b>F. THOUVEREZ</b>	Professeur, École Centrale de Lyon LTDS	Directeur
<b>A. GROLET</b>	Maître de Conférences, Arts et Métiers Lille LISPEN	Invité



# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mon directeur de thèse, Fabrice Thouverez, pour m'avoir proposer ces travaux de recherche (pour un stage accepté, une thèse offerte) que j'ai pris un plaisir certain à réaliser à ses cotés. Les nombreuses discussions, que ce soit formelles, spontanées, orales ou écrites, et à toute heure, ont eu un impact fort que ce soit sur l'issue de ces travaux ou mon développement personnel. Merci encore !

Ces travaux n'auraient certainement pas vu le jour sans Louis Jézéquel, qui m'a permis d'intégrer l'École Centrale de Lyon lors de mon master. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde reconnaissance pour cela.

Je tiens ensuite à remercier les membres du jury : merci à Emmanuel Foltête d'avoir accepté de présider ce jury ; merci à Emeline Sadoulet-Reboul et Pierre Argoul d'avoir pris le temps de rapporter ces travaux ; merci à Déborah Lavazec d'avoir participé à l'examen de ces travaux et apporté son point de vue industriel sur ceux-ci ; merci enfin à Aurélien Grolet d'avoir accepté l'invitation à participer à ce jury et pour son aide indirecte (mais oh combien précieuse) au travers de ses travaux.

Mes remerciements vont ensuite à l'ensemble des membres du LTDS. Ainsi, je tiens à remercier vivement Isabelle Tixier, Olivier Dessombz et Lionel Sanchez qui ont permis à ces travaux de se dérouler sans encombre, que ce soit du coté administratif ou informatique. Merci aussi à Laurent Blanc pour la courte aventure que nous avons pu partager au travers du FUI MECASIF. Enfin, je tiens à remercier chaleureusement mes collègues, camarades et amis des bâtiments G8 et E6, ingénieurs, techniciens, doctorants, stagiaires, passés et présents, que je ne me hasarderais pas à lister par peur d'omission, les intéressés se reconnaîtront. Ces années ont été dures, mais elles ont été belles grâce à vous. Merci du fond du cœur.

Enfin, mes plus profonds remerciements vont à ma famille et à mes proches. Plus particulièrement, je tiens à remercier mes parents ainsi que mon frère qui m'ont supportés (et inversement) durant toutes ces années. Cela n'aurait pas été possible sans vous.





# Résumé

Le contexte écologique actuel amène les motoristes dans un processus de réduction drastique de leur impact sur l'environnement. Pour cela, de nouvelles architectures moteurs sont envisagées afin d'améliorer les performances des turboréacteurs et diminuer leur consommation de carburant. Une des pistes considérée est l'augmentation du taux de dilution des moteurs menant à une augmentation de la taille des hélices propulsives. Ce gain de taille est contrebalancé au niveau du poids par l'utilisation de matériaux légers tels que les fibres de carbone. Le couplage de ces deux solutions mène à la conception de structures élancées pouvant être le lieu de grands déplacements dont la prise en compte dans les études dynamiques peut être problématique du fait de leur nature non-linéaire.

L'objectif de ce travail de thèse est de proposer une méthode de réduction adaptée à l'étude des non-linéarités géométriques dans le cas d'une structure cyclique en rotation. Pour cela, les méthodes de réduction dédiées aux non-linéarités géométriques ont été adaptées afin de prendre en compte les effets centrifuges dus à la rotation. Dans un second temps, une méthode de sous-structuration a été proposée en couplant une méthode de synthèse modale classique aux approches non-linéaires établies précédemment.

L'application de ces méthodes a été réalisée dans un premier temps sur des exemples simples de type poutre bi-encastrée 1D et 3D non-linéaires qui ont démontrés des capacités de réduction importantes en conservant une bonne précision et en permettant un gain de temps substantiel. Dans un second temps, la méthode de sous-structuration a été utilisée sur une structure cyclique de type fan simplifié. Les résultats obtenus sont intéressants et cohérents avec l'ensemble de ceux donnés dans le mémoire, mais montrent cependant certaines limites liées aux hypothèses utilisées.

**Mots-clés** non-linéarité géométrique, vibrations, méthode de Galerkin, synthèse modale, réduction de modèle, structure cyclique.



# Abstract

The current ecological context is leading engine manufacturers to a process of drastically reducing their impact on the environment. To this end, new engine architectures are being considered to improve the performance of turbojet engines and reduce their fuel consumption. One of the tracks considered is the increase in engine dilution rate leading to an increase in propeller size. This height gain is offset by the use of lightweight materials such as carbon fibres. The coupling of these two solutions leads to the design of slender structures that can be the location of large displacements that may be difficult to take into account in dynamic studies due to their non-linear nature.

The objective of this thesis work is to propose a reduction method adapted to the study of geometric non-linearities in the case of rotating cyclic structures. For this purpose, reduction methods dedicated to geometric non-linearities have been adapted to take into account the centrifugal effects due to rotation. In a second step, a substructure method was proposed by coupling a classical modal synthesis method to the non-linear approaches established previously.

The application of these methods was initially carried out on simple examples like clamped-clamped 1D and 3D non-linear beam which demonstrated significant reduction capacities while maintaining good accuracy and allowing substantial time savings. In a second step, the substructure method was used on a simplified fan-type cyclic structure. The results obtained are interesting and consistent with all those given in the document, but do show some limitations related to the assumptions used.

**Keywords** geometric nonlinearity, vibrations, Galerkin's procedure, component mode synthesis, model reduction, cyclic structure.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Dynamique des machines tournantes</b>	<b>5</b>
1 Turboréacteurs pour l'aéronautique civile . . . . .	6
1.1 Principaux composants d'un turboréacteur . . . . .	6
1.2 Vers de nouvelles architectures moteur . . . . .	7
2 Dynamique d'un corps élastique en rotation . . . . .	10
2.1 Cinématique d'une particule . . . . .	10
2.2 Équations du mouvement . . . . .	11
2.3 Position d'équilibre en rotation . . . . .	15
3 Notion de symétrie cyclique . . . . .	16
3.1 Condition de fermeture . . . . .	17
3.2 Modes propres d'une structure à symétrie cyclique . . . . .	18
3.3 Réponse forcée . . . . .	20
4 Dimensionnement et aspects technologiques des roues aubagées . . . . .	22
4.1 Sources d'excitations . . . . .	22
4.2 Outils de dimensionnement . . . . .	23
4.3 Aspects technologiques des roues aubagées . . . . .	26
Bilan du chapitre . . . . .	29
<b>II Analyse fréquentielle non-linéaire</b>	<b>31</b>
1 Recherche des solutions périodiques . . . . .	32
1.1 Méthodes temporelles . . . . .	32
1.2 Méthode fréquentielle : Équilibrage Harmonique . . . . .	36
1.3 Méthodes de continuation . . . . .	39
2 Phénoménologie non-linéaire . . . . .	42
2.1 Stabilité locale des solutions périodiques . . . . .	42
2.2 Résonances non-linéaires . . . . .	47
2.3 Analyse fréquentielle non-linéaire : notion de mode non-linéaire . . . . .	49
3 Étude d'un système cyclique simple . . . . .	52
3.1 Présentation du système . . . . .	52
3.2 Étude linéaire . . . . .	53
3.3 Étude non-linéaire . . . . .	54
Bilan du chapitre . . . . .	59
<b>III Réduction des systèmes non-linéaires géométriques</b>	<b>61</b>
1 Réduction par projection de Galerkin . . . . .	62
1.1 Principe . . . . .	62

1.2	Application à la réduction de systèmes non-linéaires géométriques . . .	63
2	Bases de réduction . . . . .	68
2.1	Exemple d'application : poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastree . . . .	68
2.2	Réduction par les modes linéaires . . . . .	73
2.3	Réduction à l'aide des dérivées modales . . . . .	77
2.4	Réduction par les modes compagnons . . . . .	82
2.5	Réduction par Proper Orthogonal Decomposition (POD) . . . . .	86
	Bilan du chapitre . . . . .	88
<b>IV</b>	<b>Extension à la réduction des structures volumiques</b>	<b>91</b>
1	Poutre bi-encastree volumique . . . . .	92
1.1	Présentation et validation du modèle . . . . .	92
1.2	Réduction du modèle . . . . .	94
1.3	Réduction à l'aide du logiciel éléments finis SAMCEF . . . . .	98
2	Poutre encastree-libre en rotation . . . . .	102
2.1	Présentation du modèle . . . . .	102
2.2	Comparaison avec SAMCEF . . . . .	103
2.3	Détermination de l'état préchargé . . . . .	104
2.4	Calcul des solutions périodiques . . . . .	105
2.5	Réduction autour de la position d'équilibre . . . . .	108
2.6	Réduction à l'aide du logiciel éléments finis SAMCEF . . . . .	115
3	Étude du deuxième mode de flexion . . . . .	118
3.1	Simulations de référence avec MATLAB . . . . .	119
3.2	Réduction avec MATLAB . . . . .	119
3.3	Discrétisation et réduction avec SAMCEF . . . . .	124
4	Vers une géométrie de pale : plaque volumique . . . . .	127
4.1	Données du problème . . . . .	127
4.2	Résultats . . . . .	128
	Bilan du chapitre . . . . .	130
<b>V</b>	<b>Sous-structuration des systèmes cycliques non-linéaires</b>	<b>131</b>
1	Rappels sur les méthodes de sous-structuration . . . . .	132
1.1	Synthèse modale à interfaces fixes : Méthode de Craig-Bampton . . .	133
1.2	Synthèse modale à interfaces libres : Méthode de MacNeal . . . . .	134
1.3	Réduction des degrés de liberté d'interfaces . . . . .	137
2	Sous-structuration des systèmes non-linéaires géométriques . . . . .	138
2.1	Traitement des termes non-linéaires : hypothèses . . . . .	139
2.2	Évaluation : Structure cyclique simple . . . . .	140
3	Application : Modèle de Fan simplifié . . . . .	149
3.1	Modèle à 4 secteurs : Présentation, démarche et résultats . . . . .	149
3.2	Modèle de fan à 18 secteurs . . . . .	158
	Bilan du chapitre . . . . .	163
	<b>Conclusion</b>	<b>167</b>
	<b>Références</b>	<b>171</b>

<b>Table des figures</b>	<b>182</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>186</b>
<b>A Rappels sur la méthode des éléments finis</b>	<b>189</b>
1 Discrétisation . . . . .	189
2 Interpolation . . . . .	190
3 Transformation de la maille . . . . .	193
4 Intégration numérique . . . . .	194
5 Assemblage . . . . .	195
<b>B Matrices de raideurs des éléments 3D volumiques</b>	<b>197</b>
Notation . . . . .	197
1 Déplacements . . . . .	197
2 Déformations et contraintes . . . . .	197
2.1 Déformations linéaires . . . . .	199
2.2 Déformations non-linéaires . . . . .	199
3 Passage aux éléments finis . . . . .	200
4 Principe des travaux virtuels . . . . .	201
5 Matrices jacobiennes . . . . .	202
5.1 Efforts linéaires . . . . .	202
5.2 Efforts quadratiques . . . . .	202
5.3 Efforts cubiques . . . . .	203
<b>C Détails des éléments volumiques hexaédriques</b>	<b>205</b>
1 Coordonnées des nœuds . . . . .	205
2 Fonctions d'interpolation . . . . .	206
2.1 Élément hexaédrique à 8 nœuds H8 . . . . .	206
2.2 Élément hexaédrique à 20 nœuds H20 . . . . .	206
2.3 Élément hexaédrique à 27 nœuds H27 . . . . .	207
3 Intégration numérique . . . . .	208
<b>Publications personnelles</b>	<b>209</b>

# Introduction

## Contexte industriel

L'industrie du transport fait face aujourd'hui à une problématique sans précédent liée à son impact sur la planète. Le transport aéronautique, et les motoristes en première ligne, n'y échappent pas et se doivent d'entamer une réflexion sur les actions à mener afin de répondre à ce défi. Dans cette optique, de nombreux projets ont été lancés, comme le programme de recherche européen Clean Sky, afin de développer les technologies de rupture nécessaires à la diminution de l'impact carbone des aéronefs.

Parmi ces programmes se trouvent ceux associés au développement des moteurs de demain dont l'un des principaux objectifs est la diminution de consommation en carburant de ces derniers. L'une des pistes choisie afin d'y parvenir est l'augmentation du taux de dilution des moteurs à architecture de type turbofan, qui représente le rapport entre le flux d'air froid et le flux d'air chaud traversant la chambre de combustion. Cela a pour conséquence une augmentation significative du diamètre d'entrée du moteur et avec celui-ci de la soufflante.

Afin que cette croissance ne se fasse pas au détriment de l'efficacité du moteur, il a aussi été nécessaire de revoir les matériaux de fabrication de cette pièce maîtresse. Les récentes avancées en termes de procédés de fabrication ont permis de répondre à ces attentes avec des méthodes de moulage de fibres de carbone permettant d'allier légèreté, tenue mécanique et efficacité aérodynamique. Cependant, l'utilisation combinée de ces nouveaux matériaux à des géométries de grandes dimensions peut amener ces structures à expérimenter des comportements sortant du cadre d'une étude linéaire sous l'effet de grands déplacements.

Ces effets, connus sous le nom de non-linéarités géométriques, deviennent un enjeu majeur du processus de développement des nouveaux moteurs qu'il est important de savoir prédire durant la phase de conception numérique. D'une part car ceux-ci peuvent mener à la ruine des composants et donc à des avaries moteur qu'il est impératif d'éviter. D'autre part, car le développement de telles pièces est extrêmement onéreux et que la maîtrise en amont de ces phénomènes permettrait des économies substantielles aux motoristes.

## Contexte scientifique

L'étude des non-linéarités géométriques est une thématique scientifique abordée depuis un certain nombre de décennies maintenant, notamment au travers de systèmes simples



comportant des non-linéarités polynomiales pouvant être représentatives de ces effets. On peut notamment citer les travaux de Samaranayake [101, 102] et Vakakis [118] qui traitent de cette manière des structures cycliques comportant des non-linéarités, ou encore de ceux, fondateurs, de Rosenberg pour l'extension de la notion de mode aux systèmes comportant des non-linéarités polynomiales impaires [96-98].

Il est cependant possible d'inclure ces non-linéarités dans une procédure éléments finis classique, que ce soit par différentes approches Lagrangiennes, totale ou actualisée [5, 6], ou encore à l'aide d'hypothèses sur des modèles simplifiés tels que les poutres ou les plaques [110]. La résolution de tels modèles dans le cas volumique pour des simulations dynamiques temporelles nécessite des temps de calcul importants malgré l'optimisation des codes commerciaux. Se pose alors la question de l'utilisation de méthodologies de réduction afin de franchir cette difficulté. Cette question se pose d'autant plus que nous nous intéresserons au régime permanent des différents modèles que nous étudierons. Afin de se libérer de la phase transitoire inhérente aux méthodes temporelles, nous ferons appel à la méthode de l'équilibrage harmonique plus efficace dans la détermination de ce régime. Cependant, ce gain à un coût et nécessite d'augmenter la taille du problème à résoudre proportionnellement au nombre d'harmoniques retenus.

Des méthodologies de réduction dédiées existent, la plupart du temps utilisées sur des modèles simplifiés de poutre et de plaque, permettant des gains de temps extrêmement importants. Celles-ci reposent tout d'abord sur l'utilisation de bases de réduction adaptées comme les dérivées modales, proposées par Idelsohn & Cardona [52] et Slaats [107], les modes compagnons théorisés par Mignolet [123] ou encore l'utilisation d'une base POD [37, 62]. A cela, il est possible d'y adjoindre l'utilisation d'une procédure de détermination des raideurs réduites non-linéaires proposée par Muravyov [81] avec la méthode STEP, pour *STiffness Evaluation Procedure*, permettant de calculer a priori les termes non-linéaires réduits et ainsi ne pas avoir à les reconstruire à chaque pas de solveur lors de la procédure de Galerkin. Enfin, des méthodes de synthèses modales non-linéaires ont aussi été proposées, basées sur la notion de mode non-linéaire de Rosenberg [98], afin de condenser la dynamique du système sur des coordonnées modales non-linéaires. C'est notamment ce que propose Szemplinska [108] avec sa méthode du *single nonlinear mode method* ou encore Apiwattanalungarn [2], utilisant quant à lui la définition, plus large, de mode non-linéaire proposée par Shaw et Pierre [105, 106]. Plus récemment, Laxalde et Thouverez [69] ont proposé une approche harmonique de détermination du mode non-linéaire qui a été par la suite utilisée à des fins de réduction par Krack [64] et Joannin [58, 59].

## Objectifs

L'objectif de ce travail de thèse est l'étude de structures cycliques industrielles, tels que les fans aéronautiques, expérimentant des grands déplacements. Pour cela, des méthodes de réduction adaptées ont été utilisées avec, dans un premier temps, l'emploi de bases dédiées à la prise en compte des effets géométriques, ainsi qu'une procédure de détermination des efforts non-linéaires réduits *a priori*; dans un second temps, une proposition de méthode de sous-structuration a été faite afin de répondre à la problématique de la réduction des structures complexes. Enfin, la mise en place de ces méthodes a été faite de façon à être

compatible avec la méthode de recherche des solutions périodiques qu'est l'équilibrage harmonique, ainsi que de manière totalement non intrusive vis-à-vis des codes éléments finis commerciaux.

## Organisation du mémoire

Le chapitre I est dédié à la présentation globale du contexte général d'étude. Après une description sommaire du principe de fonctionnement d'un turboréacteur, et des différentes architectures associées, l'accent est mis sur la mise en équation de la dynamique d'un corps élastique en rotation. Un soin particulier est porté sur la prise en compte des non-linéarités géométriques durant cette phase. On s'intéresse ensuite à la méthodologie dédiée à l'étude des structures cycliques basée sur une décomposition harmonique spatiale du système. Enfin, le chapitre est conclu sur la présentation de divers aspects de dimensionnement et technologiques associés aux roues aubagées.

Avec le chapitre II sont introduits les méthodes et concepts associés à l'étude des systèmes non-linéaires. Les classiques méthodes d'intégration temporelle sont présentées avant l'introduction de l'équilibrage harmonique, méthode fréquentielle plus adaptée à la détermination des solutions périodiques qui nous intéressent dans ce mémoire. On aborde ensuite les études spécifiques que nécessitent les solutions des systèmes non-linéaires, comme la détermination de leur stabilité ou encore l'extension de la notion de mode à de tels systèmes. Le chapitre se clôt sur l'application de ces différentes méthodes à une structure cyclique simple.

Le chapitre III est consacré à la réduction des systèmes dynamiques. Après une présentation de la procédure de Galerkin, une extension de celle-ci est donnée pour le traitement des non-linéarités polynomiales. On présente ensuite différentes bases de réduction adaptées au traitement des non-linéarités géométriques. En parallèle, un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastrée non-linéaire est présenté et sert d'exemple d'application à toutes ces méthodes.

Le chapitre IV propose d'appliquer ces méthodes au cas des structures modélisées à l'aide d'éléments finis volumiques. Après la présentation et l'application d'éléments hexaédriques non-linéaires à la résolution et la réduction d'une structure de type poutre bi-encastrée, le cas d'une poutre encastrée-libre sous chargement centrifuge est abordé. Une adaptation des différentes bases de réduction ainsi que de la méthode STEP est proposée afin de prendre en compte cette nouvelle position d'équilibre statique dans la réduction. En parallèle, ces différentes méthodes sont appliquées à l'aide d'un logiciel éléments finis de manière non-intrusive.

Enfin, le chapitre V propose d'appliquer ces méthodes à une structure cyclique complète. Pour cela, les méthodes de synthèses modales sont présentées et une adaptation d'une de celles-ci est proposée afin de prendre en compte les non-linéarités géométriques à l'aide des méthodes présentées au cours du mémoire. L'application de cette méthode est ensuite réalisée sur des modèles cycliques de complexité croissante, et permet une ouverture à une autre problématique qu'est le désaccordage.



# Chapitre I

## Propulsion aéronautique et dynamique des machines tournantes

Ce premier chapitre permet une introduction globale à la problématique traitée dans ce manuscrit. Une présentation générale du fonctionnement et des organes constitutifs d'un turboréacteur est d'abord faite. L'établissement des équations du mouvement d'un solide discrétisé en rotation, incluant les non-linéarités en grands déplacements, est ensuite réalisé et constituera la base des développements présentés dans les chapitres suivants. Suit la description de la méthodologie d'étude des structures à symétrie cyclique, fortement présentes dans l'industrie aéronautique, basée sur une décomposition harmonique spatiale de l'objet d'étude. Enfin, le chapitre se clôt sur des considérations de dimensionnement des organes d'un turboréacteur ainsi que la présentation de diverses technologies associées aux roues aubagées.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Turboréacteurs pour l'aéronautique civile</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1	Principaux composants d'un turboréacteur . . . . .	6
1.2	Vers de nouvelles architectures moteur . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Dynamique d'un corps élastique en rotation</b> . . . . .	<b>10</b>
2.1	Cinématique d'une particule . . . . .	10
2.2	Équations du mouvement . . . . .	11
2.3	Position d'équilibre en rotation . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Notion de symétrie cyclique</b> . . . . .	<b>16</b>
3.1	Condition de fermeture . . . . .	17
3.2	Modes propres d'une structure à symétrie cyclique . . . . .	18
3.3	Réponse forcée . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Dimensionnement et aspects technologiques des roues aubagées</b> .	<b>22</b>
4.1	Sources d'excitations . . . . .	22
4.2	Outils de dimensionnement . . . . .	23
4.3	Aspects technologiques des roues aubagées . . . . .	26
	<b>Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>29</b>

---

# 1 Turboréacteurs pour l'aéronautique civile

## 1.1 Principaux composants d'un turboréacteur

La propulsion des avions est assurée par des moteurs dont la fonction est de fournir une force de poussée nécessaire au vol de ceux-ci. Il en existe de nombreuses architectures, adaptées à des utilisations plus ou moins spécifiques, mais le fonctionnement et les principaux composants de base ne varient pas.

### 1.1.1 Présentation générale : notions de corps et de flux

Les principaux organes d'un turboréacteur sont illustrés sur la figure I.1a. L'air en entrée du réacteur est comprimé au travers du **compresseur** jusqu'à la **chambre de combustion** où, mélangé à du carburant puis enflammé, il est éjecté. La majeure partie de cette énergie cinétique ainsi générée sert à la propulsion du moteur par éjection des gaz via la **tuyère**. L'autre partie de cette énergie est récupérée par la **turbine** en sortie de la chambre de combustion, qui entraîne le compresseur grâce à un arbre commun, l'**axe turbine**. Ce triptyque compresseur-chambre de combustion-turbine est ce que l'on appelle un **corps**, ou générateur de gaz. A cela peut s'ajouter une post-combustion, qui consiste à ré-enflammer les gaz d'échappement au niveau de la tuyère par une injection de carburant afin d'augmenter la poussée, mais cela concerne surtout les applications militaires.

Les performances d'une telle machine sont majoritairement liées à la vitesse de rotation des modules de compression, qui est elle-même limitée par les effets aérodynamiques, en bout de pale notamment. Afin de pallier cette problématique, une architecture à 2 corps a été imaginée. Le premier corps, appelé corps **Basse Pression** (BP), comprend le compresseur en entrée de réacteur et la turbine en sortie. Il tourne à basse vitesse, ce qui permet d'avoir des composants de grands diamètres. Le deuxième corps, appelé **Haute Pression** (HP), est constitué des compresseurs et turbines qui entourent la chambre de combustion. Ils vont travailler à une vitesse plus grande que le corps basse pression. Les deux corps étant ainsi indépendants, il est plus aisé d'adapter la vitesse de rotation de chacun afin d'optimiser la compression et donc les performances du moteur. Il est possible de trouver des architectures à 3 corps, spécifiques à la famille Trent de chez Rolls-Royce, avec un corps de Pression Intermédiaire (PI), mais la majorité des machines sont basées sur les solutions de simples et doubles corps.

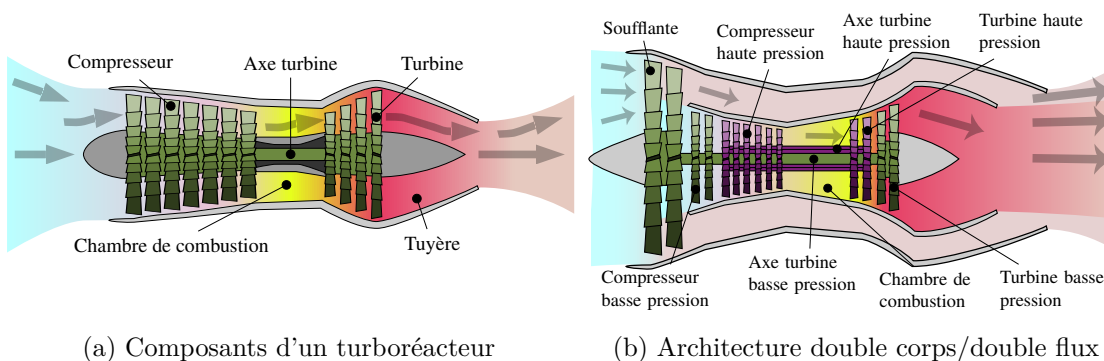


Figure I.1 – Principaux composants d'un turboréacteur et architecture à soufflante [Wikipedia]

A cette notion de corps s'ajoute celle de **flux**, qui représente l'air traversant la machine. Comme pour le corps, ce flux peut être simple ou double. Dans le cas d'une architecture simple flux, comme celle représentée sur la figure I.1a, tout l'air en entrée du moteur traverse la chambre de combustion. Une telle architecture mène à des rendements assez pauvres, une consommation de carburant importante ainsi que des émissions sonores considérables. C'est pour cela qu'elle est principalement utilisée dans le domaine militaire. Il est possible de remédier à ces problématiques en séparant le flux en deux après la traversée d'un étage de **soufflante**. On obtient ainsi un flux dit **primaire**, qui va traverser les corps, et donc la chambre de combustion, aussi appelé flux chaud ; et un **flux secondaire**, aussi appelé flux froid, qui va être directement éjecté via une tuyère secondaire. D'une part, la poussée n'est plus seulement due à la vitesse des gaz d'échappement en sortie de tuyère, mais est majoritairement générée par la poussée du flux secondaire due à la soufflante, le ratio de poussée étant d'environ 80% pour la soufflante et 20% pour les gaz d'échappement du flux chaud pour les applications civiles. D'autre part, l'augmentation du débit d'air à rendement thermique égal permet d'améliorer l'efficacité du moteur et donc de diminuer sa consommation. Il est à noter que le ratio entre le flux froid et le flux chaud est ce que l'on appelle le **taux de dilution**, ou By Pass Ratio (BPR), qui est une donnée importante quand à l'efficacité de la machine et dont va grandement dépendre le choix des futures architectures moteur comme nous le verrons plus loin. Enfin, le flux froid englobant le flux chaud, il permet d'atténuer grandement le bruit de jet. Une illustration d'un turboréacteur double corps/double flux, est visible figure I.1b.

### 1.1.2 Structure étagée

Le compresseur, comme la turbine, a une architecture dite **étagée** composée d'une succession de parties mobiles, appelées **rotor**, et de parties fixes appelées **stator**, cela afin de comprimer l'air en plusieurs étapes. Dans le cadre des turboréacteurs dont il est question ici, le compresseur est dit axial, car l'air suit l'axe de rotation de la machine comme cela est visible sur la figure I.1a. Il est alors composé, pour ce qui est du rotor, de **roues** ou **disques aubagés**, et d'**aubages fixes**, aussi appelés redresseurs, pour ce qui est du stator. Une illustration de ces composants est disponible figure I.2a. Nous reviendrons plus tard à l'étude de ces organes avec la section I.3 qui leur est dédiée grâce à l'utilisation de leur spécificité géométrique. Dans cette configuration, la partie tournante va accélérer le flux en le déviant de l'axe moteur quand la partie fixe va le redresser dans l'axe tout en le décélérant. Cette perte de vitesse va résulter en une augmentation de la pression. Le taux de compression d'un tel étage est d'environ 1,15 ce qui justifie la présence de plusieurs étages afin d'obtenir une pression optimale du flux en entrée de la chambre de combustion. A titre de comparaison, les compresseurs centrifuges présents notamment sur les moteurs d'hélicoptère sont capables de fournir un taux de compression de plus de 10 pour un seul étage.

## 1.2 Vers de nouvelles architectures moteur

### 1.2.1 Turbofan

La majorité des avions de ligne actuels sont équipés de moteurs double corps/double flux aussi appelé turbofans. Comme cela a déjà été dit, cette architecture permet une consommation modérée, un bruit moins important qu'une architecture simple flux et une

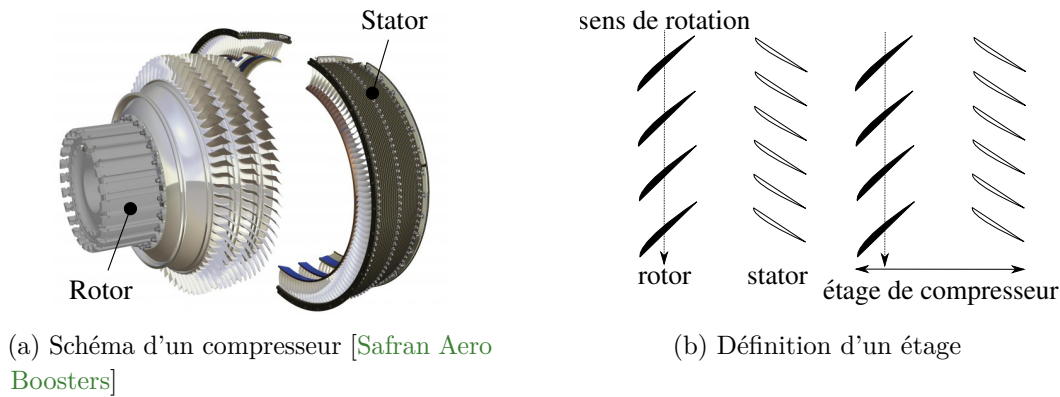
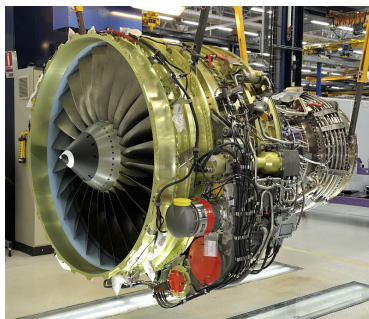


Figure I.2 – Architecture d'un compresseur axial

poussée en grande partie due à la soufflante. Le best-seller de cette catégorie reste le CFM-56, visible sur la figure I.3a dans sa version 7B, fabriqué par CFM International, joint venture entre Safran Aircraft Engines et General Electric, qui équipe quelques 13 400 avions aujourd'hui. Il est cependant peu à peu remplacé par des moteurs de nouvelle génération, comme le LEAP (figure I.3b), ayant de meilleures performances notamment grâce à des améliorations au niveau du module de soufflante. En effet, celle-ci est d'un diamètre supérieur, ce qui permet un plus fort taux de dilution, et est constituée de moins d'aubes, 18 contre 22 pour le CFM56-7, elles-mêmes plus légères car réalisées en matériau composite. Ces gains de consommation permis par des taux de dilution toujours plus grands mènent à des soufflantes de très grand diamètre.



(a) CFM-56-7B



(b) CFM LEAP

Figure I.3 – Turboréacteurs du constructeur CFM International [Safran]

### 1.2.2 Très fort taux de dilution

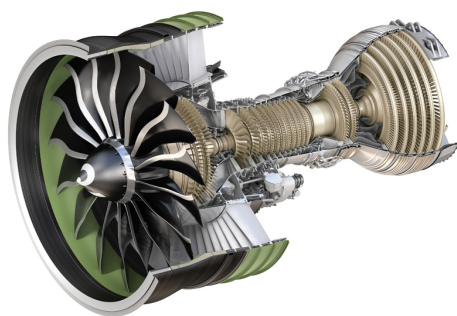
Le développement de moteurs à large soufflante intéresse les motoristes depuis un certain temps. On peut notamment citer le GE90 de chez General Electric lancé en 1990, et ses descendants GENx et GE9X, ou encore la famille Trent chez Rolls Royce. Ces moteurs sont caractérisés par un taux de dilution de l'ordre de 10, le même que le LEAP, mais surtout par le diamètre de leur soufflante, jusqu'à 3,40 m pour le GE9X (figure I.4a). Comme il a été dit précédemment, des organes d'une telle taille sont limités par les effets aérodynamiques. Il est alors nécessaire d'adapter leur vitesse de rotation afin d'en assurer un fonctionnement optimum. Une solution actuellement à l'étude est l'utilisation d'un réducteur entre le fan



et le compresseur BP. C'est notamment le cas chez Pratt & Whitney avec le PW1000G, ou encore du démonstrateur Ultra High Propulsive Efficiency du programme Clean Sky auquel participe Safran Aircraft Engines. Mais la transmission d'une telle puissance entre le fan et l'arbre BP pose le problème de la tenue sur la durée de tels engrenages et constitue aussi un enjeu pour le futur de la propulsion aéronautique.

### 1.2.3 Soufflante décarénée

L'augmentation continue du diamètre de la soufflante ne règle toutefois pas tous les problèmes. En effet, cela passe aussi par l'augmentation de la taille de la nacelle qui se répercute par une augmentation du poids du moteur ainsi que de la traînée générée par celle-ci. Une solution, imaginée dans les années 80, consiste à décaréner la soufflante et à la doubler, les deux soufflantes résultantes tournant de manière contrarotative (voir figure I.4b). Cela résulte en une augmentation significative du taux de dilution, jusqu'à 30, et donc une réduction conséquente de la consommation d'hydrocarbure, jusqu'à 15 % par rapport au LEAP, qui lui-même affiche déjà une réduction de 15% de la consommation vis-à-vis de son prédécesseur le CFM56. Initialement pensée par General Electric, cette architecture a été abandonnée à l'époque du fait de la chute des prix des hydrocarbures qui ne la rendait pas intéressante financièrement. Il est toutefois possible de trouver certains moteurs d'époque avec cette architecture, notamment chez le motoriste russe Kuznetsov avec le modèle NK-12 ou encore le motoriste ukrainien Ivtchenko-Progress avec le D-27. Plus récemment, Kuznetsov a proposé le NK-93 dont les deux soufflantes contrarotatives sont carénées conduisant à une sorte d'hybride turbofan à double soufflantes contrarotatives. La nécessité de réduire la consommation en hydrocarbures des avions pousse aujourd'hui à se tourner de nouveau vers ce type d'architecture.



(a) GE9X



(b) Open Rotor Safran Aircraft Engines  
[Safran]

Figure I.4 – Architectures moteur à fort taux de dilution

Un rapide état des lieux vient d'être réalisé concernant la propulsion aéronautique civile, où une tendance claire à l'augmentation du taux de dilution et de la taille de certains organes se dessine. Un tel choix amène à repenser aussi les matériaux utilisés pour la fabrication de pièces telles que les aubes fan, ce volet est notamment abordé plus loin. Ces évolutions simultanées peuvent amener à des comportements dynamiques s'éloignant du cadre usuel des études linéaires, notamment par l'apparition de grands déplacements. Nous proposons de réaliser la mise en équation d'un tel problème avec la prise en compte de ces effets dans la section suivante.



## 2 Dynamique d'un corps élastique en rotation

### 2.1 Cinématique d'une particule

Considérons un solide déformable de volume  $\Omega$ , délimité par une surface  $\Gamma = \partial\Omega$ , dans un référentiel fixe  $\mathcal{R}_f = \{O, X, Y, Z\}$  soumis à un mouvement quelconque au cours du temps, comme indiqué sur la figure I.5a. Dans sa configuration non-déformée de référence, chaque particule  $P_r$  de ce solide est repérée par son vecteur position  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T_{\mathcal{R}_f}$  dans le repère fixe.

A l'instant  $t = 0$ , la particule  $P_r$  se trouve en  $P_0$  de vecteur position  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  dans le référentiel mobile  $\mathcal{R}_m = \{\bar{O}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$  lié au solide, confondu alors avec le référentiel fixe  $\mathcal{R}_f$  (voir figure I.5b). En notant  $\mathbf{u}_0$  le déplacement vis-à-vis de la configuration de référence, le vecteur position  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  peut s'écrire

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I.1})$$

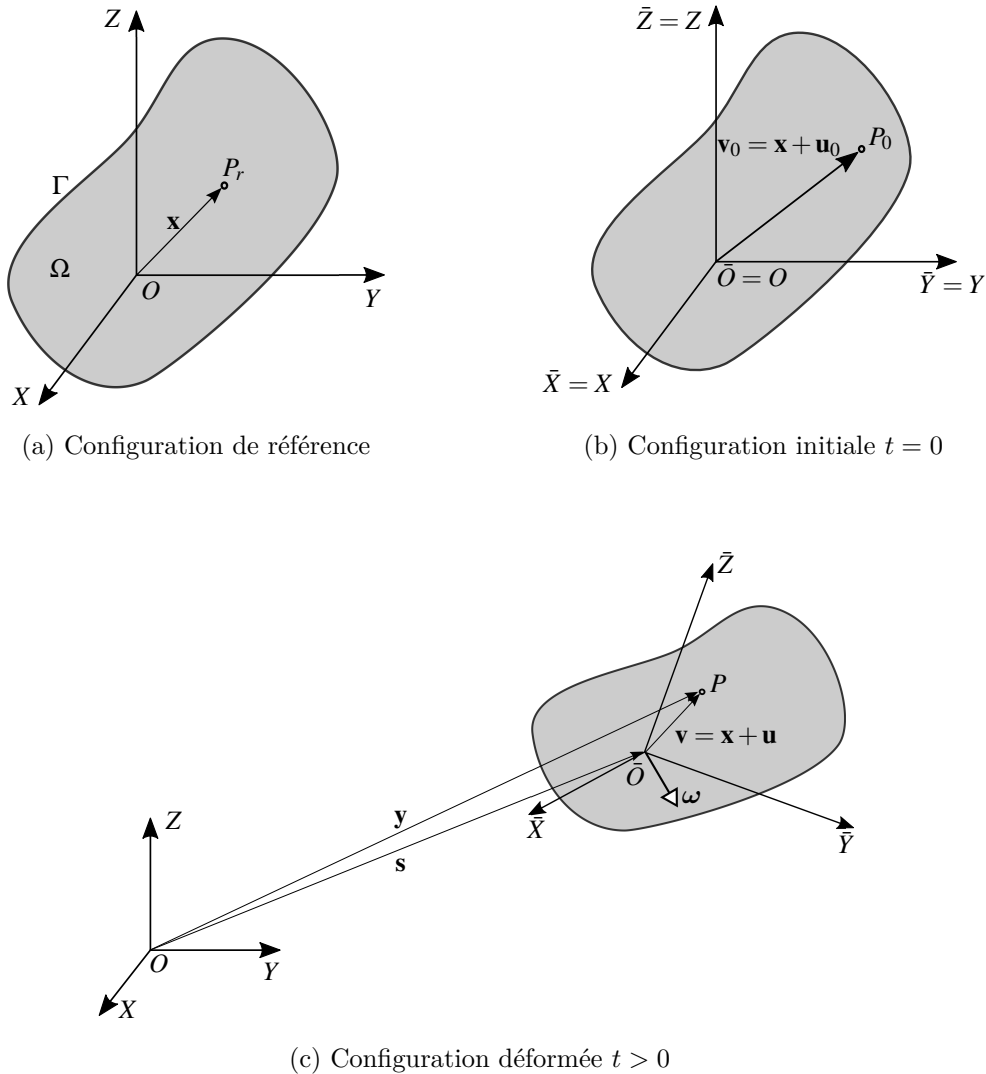


Figure I.5 – Différentes configurations du solide

A  $t > 0$ , sous l'effet du mouvement du solide et de sa déformation, la particule se retrouve au point  $P$  repéré par  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = [y_x, y_y, y_z]_{\mathcal{R}_f}^\top$  dans  $\mathcal{R}_f$ . Il est possible de même de repérer cette particule dans le référentiel lié au solide  $\mathcal{R}_m$  tel que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2})$$

Le déplacement du repère mobile  $\mathcal{R}_m$  dans le repère fixe  $\mathcal{R}_f$  peut se décomposer en une translation  $\mathbf{s}(t) = [s_x, s_y, s_z]_{\mathcal{R}_f}^\top$  de l'origine du repère mobile dans le référentiel fixe, et une vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]_{\mathcal{R}_m}^\top$  autour d'un axe du référentiel mobile  $\mathcal{R}_m$  passant par son origine  $\bar{O}$  (voir figure I.5c). Le vecteur position  $\mathbf{y}$  de la particule  $P$  s'exprime alors dans  $\mathcal{R}_f$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t) (\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

où  $\mathbf{R}(t)$  est la matrice de changement de base de  $\mathcal{R}_m$  à  $\mathcal{R}_f$  telle que  $\mathbf{R}^\top(t) \mathbf{R}(t) = \mathbf{I}$  et  $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\Omega}(t)$  avec  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  la matrice antisymétrique construite grâce aux composantes de la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}(t)$  dont l'expression est donnée par

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

Afin de pouvoir exprimer les équations d'équilibre du solide, il est nécessaire de définir la vitesse de la particule dans le repère fixe  $\mathcal{R}_f$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\Omega}(t) (\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.5})$$

## 2.2 Équations du mouvement

On présente ici la démarche utilisée afin d'établir les équations du mouvement du solide considéré. Celles-ci seront notamment obtenues en prenant en compte les termes non-linéaires du tenseur de Green-Lagrange.

### 2.2.1 Principe d'Hamilton

L'établissement des équations d'équilibre du système va être mené à l'aide du principe d'Hamilton. Celui-ci stipule une stationnarité de l'action Hamiltonienne sur un intervalle de temps quelconque [35]. Autrement dit, la variation sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  de cette fonctionnelle doit être nulle, ce qui peut s'écrire

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{W} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{W} dt = 0 \quad (\text{I.6})$$

avec  $\mathcal{T}$  l'énergie cinétique du système,  $\mathcal{V}$  l'énergie potentielle totale et  $\delta \mathcal{W}$  le travail des forces non-conservatives. La grandeur  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$  est appelée le Lagrangien du système. On propose dans ce qui suit de déterminer les différentes grandeurs nécessaires à l'application de la méthode.

### 2.2.2 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du système est obtenue à l'aide de la vitesse d'une particule dans le repère fixe  $\mathcal{R}_f$  donnée par l'équation (I.5). Elle s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{y}} \, d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} \, d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) \, d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} + 2 \dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) \, d\Omega
\end{aligned} \tag{I.7}$$

### 2.2.3 Énergie potentielle

L'énergie potentielle peut quant à elle s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \\
&= \mathcal{V}_i + \mathcal{V}_f + \mathcal{V}_t
\end{aligned} \tag{I.8}$$

avec  $\mathcal{V}_i$  l'énergie potentielle de déformation,  $\mathcal{V}_f$  et  $\mathcal{V}_t$  les travaux des forces volumiques  $\mathbf{f}$  et surfaciques  $\mathbf{t}$  externes appliquées au solide. Afin de déterminer l'énergie potentielle de déformation, et comme les effets de grands déplacements doivent être pris en compte, une loi matériau de type Saint-Venant-Kirchhoff [132] est utilisée. Ce n'est autre qu'une extension de la loi de Hooke au domaine non-linéaire. Celle-ci exprime le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction du tenseur des déformations de Green  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{I.9}$$

où  $\mathbb{D}$  est le tenseur d'ordre 4 des modules d'élasticité. Du fait de la symétrie de  $\mathbb{D}$  ainsi que de l'isotropie du matériau, cette relation peut être simplifiée et écrite comme suit

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{I.10}$$

où  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}]^T$  et  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}]^T$  sont exprimés à l'aide de la notation de Voigt, et  $\mathbf{D}$  le tenseur d'élasticité

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \tag{I.11}$$

dans lequel on retrouve les coefficients de Lamé

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\tag{I.12}$$

avec  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau.

Dans le cadre des non-linéarités géométriques que nous prenons en compte, l'hypothèse des petites perturbations n'est plus valable et il faut alors considérer le tenseur de Green-Lagrange complet. Ce dernier s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\nabla^T\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} \\ &= \left(\nabla + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}\end{aligned}\tag{I.13}$$

dans laquelle on retrouve

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\tag{I.14}$$

l'opérateur de dérivation usuel exprimant les déformations linéaires, et

$$\nabla_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \\ 2\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & 2\frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & 2\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ 2\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & 2\frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ 2\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & 2\frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\tag{I.15}$$

l'opérateur de dérivation non-linéaire car dépendant de la quantité à laquelle il est appliqué.

En injectant les relations (I.10) et (I.13) dans l'énergie potentielle de déformation des efforts internes, on obtient

$$\mathcal{V}_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \left( \nabla^T + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{u}}^T \right) \mathbf{D} \left( \nabla + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{u}} \right) \mathbf{u} \, d\Omega \quad (\text{I.16})$$

Les efforts volumiques  $\mathbf{f}$  et surfaciques  $\mathbf{t}$  externes appliqués aux solides étant supposés connus, le travail en découlant est parfaitement déterminé. L'expression complète de l'énergie potentielle est donc connue. Le travail des forces non-conservatives  $\delta\mathcal{W}$  sera quand à lui explicité par la suite.

### 2.2.4 Équations de Lagrange

Les formes intégrales des énergies ayant été déterminées, il est possible de rechercher une solution approchée de notre problème comme combinaison linéaire de fonctions de formes ou d'interpolations telle que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t) \quad (\text{I.17})$$

où  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  regroupe les fonctions de discrétisation choisies et  $\mathbf{q}(t)$  représente le vecteur des coordonnées généralisées, soit les nouvelles inconnues du problème. Associée à cette discrétisation, l'application du principe d'Hamilton équivaut à la vérification des équations de Lagrange [35]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad (\text{I.18})$$

Dans ce cadre, il est de même possible d'exprimer le travail des forces de dissipation grâce à la fonction de dissipation de Rayleigh

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_a \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (\text{I.19})$$

qui rend compte de la présence d'un amortissement visqueux caractérisé par le coefficient  $\eta_a$ .

L'application des équations de Lagrange aux énergies (I.7) et (I.8), en tenant compte de l'expression non-linéaire de l'énergie potentielle interne (I.16) ainsi que des termes de dissipation (I.19), mène aux équations d'équilibre de notre système discrétisé

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^q(\mathbf{q}(t)) + \mathbf{K}^c(\mathbf{q}(t)) + \mathbf{P} + \mathbf{N})\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) + \mathbf{f}^{\Omega}(t) \quad (\text{I.20})$$

avec

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.21})$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \eta_a \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.22})$$

$$\mathbf{G} = 2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.23})$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega \quad (\text{I.24})$$

$$\mathbf{K}^q(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{D} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q}) \, d\Omega \quad (\text{I.25})$$

$$\mathbf{K}^c(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q})^T \mathbf{D} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q}) \, d\Omega \quad (\text{I.26})$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.27})$$

$$\mathbf{N} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.28})$$

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{H}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (\text{I.29})$$

$$\mathbf{f}^{\Omega} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}) \, d\Omega \quad (\text{I.30})$$

Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{N}$  représentent respectivement les matrices de masse, amortissement, raideur et assouplissement centrifuge du système et sont symétriques par construction. Contrairement aux matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  qui sont respectivement définie et semi-définie positives, la matrice  $\mathbf{N}$  quand à elle est semi-définie négative et va donc induire une diminution des pulsations propres du système, d'où son appellation de matrice d'assouplissement. Les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{P}$  sont elles antisymétriques et représentent les effets de Coriolis et d'accélération angulaire respectivement. Les matrices  $\mathbf{K}^q$  et  $\mathbf{K}^c$  sont associées aux termes non-linéaires quadratiques et cubiques issus du tenseur de Green-Lagrange (I.13). En effet,  $\mathbf{K}^q$  est linéaire en  $\mathbf{q}$ , et donnera donc des termes quadratiques une fois multipliée par ce même vecteur. De manière analogue,  $\mathbf{K}^c$  est quadratique en  $\mathbf{q}$  et donnera donc naissance à des termes cubiques. Il est aussi intéressant de noter que  $\mathbf{K}^c$  est une matrice symétrique quand  $\mathbf{K}^q$  ne l'est pas, cela étant dû à la parité des énergies potentielles associées. Le vecteur  $\mathbf{f}^{\Omega}$  est le vecteur des excitations dites indirectes, c'est à dire dues à l'entraînement du système de coordonnées. Enfin,  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  est le vecteur des efforts extérieurs appliqués au système, résultants des forces volumiques et surfaciques  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{t}$ .

### 2.3 Position d'équilibre en rotation

Dans la suite de ce mémoire, la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  du solide sera supposée constante. De plus, le mouvement du repère mobile  $\mathcal{R}_m$  associé au solide sera composé uniquement d'une rotation, la translation  $\mathbf{s}$  étant supposée nulle. Enfin, les effets de Coriolis  $\mathbf{G}$  seront négligés. Cela mène à l'équation d'équilibre du solide en rotation uniforme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^q(\mathbf{q}(t)) + \mathbf{K}^c(\mathbf{q}(t)) + \mathbf{N})\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) + \mathbf{f}^{\Omega} \quad (\text{I.31})$$

avec

$$\mathbf{f}^{\Omega} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x} \, d\Omega \quad (\text{I.32})$$

Afin de connaître le comportement dynamique linéarisé autour de la précharge, nous écrivons que  $\mathbf{q}(t)$ , la solution du problème, peut s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}(t) \quad (\text{I.33})$$

avec  $\mathbf{p}(t)$  la nouvelle inconnue dynamique autour de la position d'équilibre  $\mathbf{q}^\Omega$  solution de

$$\left( \mathbf{K} + \mathbf{K}^q(\mathbf{q}^\Omega) + \mathbf{K}^c(\mathbf{q}^\Omega) + \mathbf{N} \right) \mathbf{q}^\Omega = \mathbf{f}^\Omega \quad (\text{I.34})$$

En injectant (I.33) dans l'équation générale (I.31), on obtient

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) (\mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}) + \mathbf{f}^q(\mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}) + \mathbf{f}^c(\mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}) = \mathbf{f}^{\text{ext}} + \mathbf{f}^\Omega \quad (\text{I.35})$$

où  $\mathbf{f}^q$  et  $\mathbf{f}^c$  représentent les efforts associés aux raideurs quadratiques et cubiques. Il est possible de réaliser un développement de Taylor à l'ordre 1 autour de la position d'équilibre  $\mathbf{q}^\Omega$  de ces efforts non-linéaires, sous la forme

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}^\Omega) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^\Omega) \mathbf{p} \quad (\text{I.36})$$

où apparaît la matrice jacobienne de l'effort non-linéaire. En utilisant cette relation (I.36) pour les termes quadratiques et cubiques, ainsi que l'équation d'équilibre statique (I.34) dans (I.35), on obtient l'équation d'équilibre autour de la position préchargée

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_\Omega \mathbf{p} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{I.37})$$

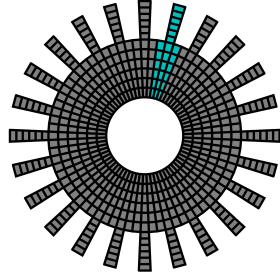
avec

$$\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{K} + \mathbf{N} + \frac{\partial(\mathbf{f}^q + \mathbf{f}^c)}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^\Omega) \quad (\text{I.38})$$

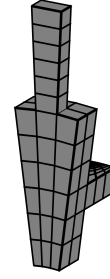
la matrice de raideur tangente du système en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\Omega$ .

### 3 Notion de symétrie cyclique

Comme nous avons pu le voir en début de chapitre, les roues aubagées jouent un rôle important au sein des turbomachines. Ces pièces ont des caractéristiques géométriques bien particulières, dites à **symétrie cyclique**. La géométrie de la roue, dont un exemple est donné figure I.6a, peut être obtenue par rotation successive d'un motif appelé secteur, visible sur la figure I.6b. Il va de soit que la roue ainsi représentée est constituée de secteurs identiques, on dit alors qu'elle est accordée. Ces conditions de symétrie particulières et l'omniprésence de ces structures dans des industries de pointe telles que l'aéronautique et la production d'énergie ont amenés à de nombreux travaux, dont certains font références comme ceux de Thomas [109] et Wildheim [127, 128], cela afin de diminuer considérablement les temps de calculs sur de telles structures en ne se restreignant qu'à l'étude du secteur de référence. A noter que les développements qui suivent se placent dans le cadre d'une étude linéaire.



(a) Structure complète composée de 24 secteurs



(b) Secteur

Figure I.6 – Exemple de structure à symétrie cyclique et secteur générateur associé [issu d'un exemple SAMCEF]

### 3.1 Condition de fermeture

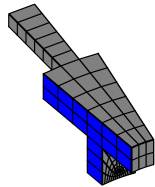
Considérons une structure à symétrie cyclique composée de  $N_s$  secteurs. Chaque secteur aura donc une ouverture angulaire de  $\alpha = 2\pi/N_s$ . Il est possible de reproduire la cyclicité de la structure sur le secteur d'étude par utilisation de la condition de fermeture, de propagation ou de périodicité, que l'on peut notamment trouver dans les travaux de Valid et Ohayon [122], qui exprime le déphasage entre les frontières cycliques gauche (figure I.7a) et droite (figure I.7b) du secteur. Soit  $k\alpha$  ce déphasage, avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Cette grandeur  $k$ , appelée **indice harmonique**, ou **nombre de diamètre**, va dépendre du nombre de secteurs  $N_s$ , la structure étant refermée sur elle-même. Dans la suite, nous considérerons  $k \geq 0$  tel que

$$\begin{aligned} k &\in \left[0, \frac{N_s}{2}\right] \text{ si } N_s \text{ est pair} \\ k &\in \left[0, \frac{N_s - 1}{2}\right] \text{ si } N_s \text{ est impair} \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

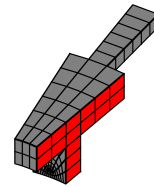
Les champs  $\mathbf{u}_g$  de la frontière gauche et  $\mathbf{u}_d$  de la frontière droite sont alors liés par la relation

$$\mathbf{u}_g = e^{ik\alpha} \mathbf{u}_d \quad (\text{I.40})$$

appelée condition de fermeture.



(a) Frontière gauche



(b) Frontière droite

Figure I.7 – Frontières cycliques du secteur

Les frontières gauche et droite ainsi liées, il est alors intéressant de partitionner les champs  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_d]^\top$  en composantes gauche, interne et droite, ainsi que les matrices



structurales du secteur telles que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{gg} & \mathbf{A}_{gi} & \mathbf{A}_{gd} \\ \mathbf{A}_{ig} & \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{A}_{id} \\ \mathbf{A}_{dg} & \mathbf{A}_{di} & \mathbf{A}_{dd} \end{bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

$\mathbf{A}$  pouvant représenter les matrices de raideur  $\mathbf{K}$  ou de masse  $\mathbf{M}$ . L'utilisation de la condition de fermeture (I.40) exprimant  $\mathbf{u}_g$  en fonction de  $\mathbf{u}_d$  permet de diminuer la taille du problème associé au secteur, ainsi que d'imposer la condition de cyclicité de l'onde  $k$  à travers de la matrice de passage  $\mathbf{T}_k$  définie telle que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_g \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{ik\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

L'application de cette transformation aux matrices du système mène aux matrices

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_k &= \mathbf{T}_k^* \mathbf{A} \mathbf{T}_k \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{dd} + \mathbf{A}_{gg} + e^{-ik\alpha} \mathbf{A}_{gd} + e^{ik\alpha} \mathbf{A}_{dg} & \mathbf{A}_{di} + e^{-ik\alpha} \mathbf{A}_{gi} \\ \mathbf{A}_{id} + e^{ik\alpha} \mathbf{A}_{ig} & \mathbf{A}_{ii} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

qui représentent les matrices structurales du secteur de référence pour le nombre d'onde  $k$  où on retrouve  $\mathbf{T}_k^*$  la matrice adjointe de  $\mathbf{T}_k$ .

### 3.2 Modes propres d'une structure à symétrie cyclique

La réduction de taille du problème induite par la restriction de la structure au secteur de référence ainsi que la condition de fermeture (I.40) permet d'envisager la résolution du problème aux valeurs propres du système de manière beaucoup plus simple. Cela revient à résoudre pour les nombres d'onde  $k$  voulus les problèmes aux valeurs propres généralisés réduits suivants

$$\left( \hat{\mathbf{K}}_k - \omega^2 \hat{\mathbf{M}}_k \right) \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{I.44})$$

Les modes  $\Phi$  obtenus correspondent aux modes du secteur exprimés selon les composantes droite et interne de ce secteur. La déformée de la roue complète peut être obtenue par reconstruction des secteurs à l'aide de la condition de cyclicité de l'onde  $k$ . La reconstruction du secteur  $p$  est alors obtenue par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_g \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{bmatrix}_p = \exp\left(\frac{i(p-1)2k\pi}{N_s}\right) \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}_{\text{référence}} \quad (\text{I.45})$$

Les déformées de la roue complète sont alors à classer en 3 catégories :

- $k = 0$  : les matrices structurales  $\hat{\mathbf{M}}_k$  et  $\hat{\mathbf{K}}_k$  sont symétriques réelles. Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1, et les valeurs propres réelles. Ces modes sont dit non-dégénérés. Dans ce cas, tous les secteurs vibrent en phase, la condition de fermeture étant  $\mathbf{u}_g = \mathbf{u}_d$ . Un exemple de tel mode est donné sur la figure I.8a.
- $k = N_s/2$  si  $N_s$  pair : même situation que  $k = 0$  seulement les secteurs vont vibrer en opposition de phase car  $\mathbf{u}_g = -\mathbf{u}_d$ . Voir figure I.8b pour un exemple.
- $k \in \llbracket 1, N_s/2 - 1 \rrbracket$  si  $N_s$  pair ou  $k \in \llbracket 1, (N_s - 1)/2 \rrbracket$  si  $N_s$  impair : les matrices structurales de l'harmonique  $k$  (I.43) sont alors hermitiennes, c'est à dire telles que  $\hat{\mathbf{A}}_k^* = \hat{\mathbf{A}}_k$ . Les valeurs propres sont alors réelles et de multiplicité 2, et les sous-espaces propres associés sont orthogonaux. De tels modes sont dits dégénérés, des exemples pour  $k = 1$  et  $k = 3$  sont donnés figure I.9. Ceci constitue un aspect important de l'étude des structures à symétrie cyclique car il permet de définir des ondes propagatives, ou tournantes, dont le sens va dépendre du signe de  $k$ . En ayant supposé  $k \geq 0$  nous avons restreint l'étude aux ondes dites directes, dont un exemple est donné figure I.10a où on peut observer la propagation des maxima se faire dans le sens croissant des secteurs, avec une numérotation de ceux-ci dans le sens trigonométrique. Pour  $k < 0$ , l'onde est dite rétrograde, comme représenté sur la figure I.10b pour  $k = -3$ , avec cette fois-ci 3 maxima à chaque instant, dus aux 3 diamètres, et une propagation dans le sens décroissant des secteurs.

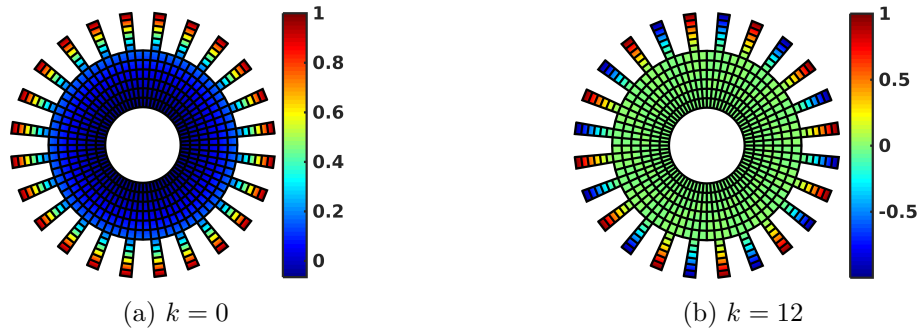


Figure I.8 – Modes non-dégénérés : 0 et N/2 diamètres

Pour des raisons numériques de recherche de valeur propre, il est souvent préférable de traiter les cas dégénérés à l'aide d'un formalisme réel [18]. Cela revient à séparer le problème en parties réelle et imaginaire tel que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{dd} + \mathbf{A}_{gg} + \cos(k\alpha) (\mathbf{A}_{gd} + \mathbf{A}_{dg}) & \mathbf{A}_{di} + \cos(k\alpha) \mathbf{A}_{gi} \\ \mathbf{A}_{id} + \cos(k\alpha) \mathbf{A}_{ig} & \mathbf{A}_{ii} \end{bmatrix} \\
&+ i \sin(k\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{dg} - \mathbf{A}_{gd} & -\mathbf{A}_{gi} \\ \mathbf{A}_{ig} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{A}}_k^r + i \hat{\mathbf{A}}_k^i
\end{aligned} \tag{I.46}$$

et à résoudre les problèmes aux valeurs propres associés à chaque sous-problème à l'aide des matrices structurales du secteur à l'harmonique  $k$  sous la forme

$$\bar{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_k^r & -\hat{\mathbf{A}}_k^i \\ \hat{\mathbf{A}}_k^i & \hat{\mathbf{A}}_k^r \end{bmatrix} \tag{I.47}$$

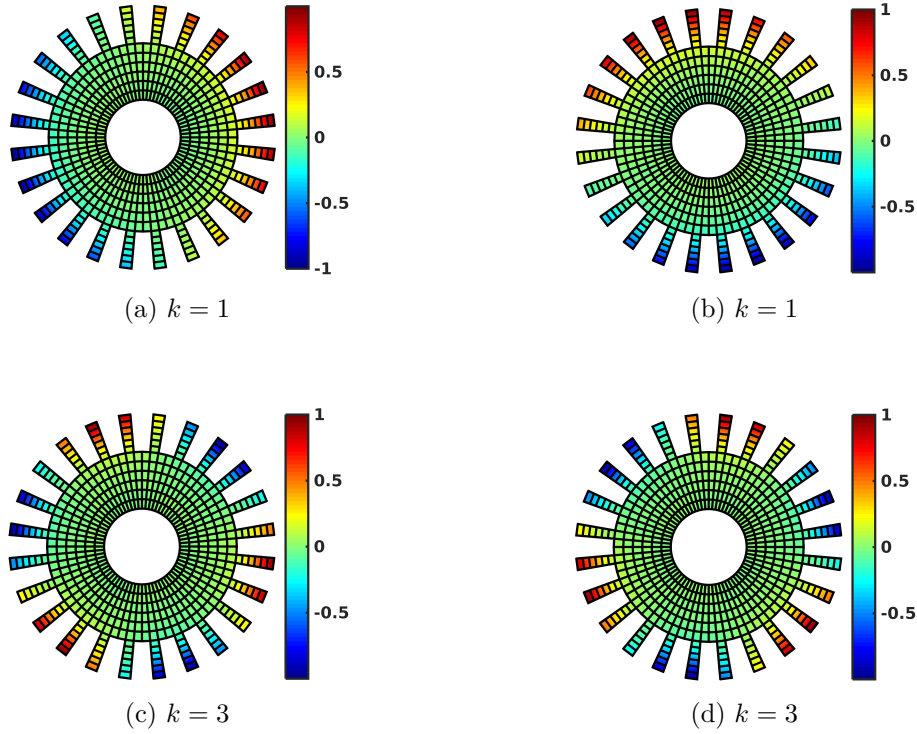


Figure I.9 – Exemples de modes dégénérés : 1 et 3 diamètres

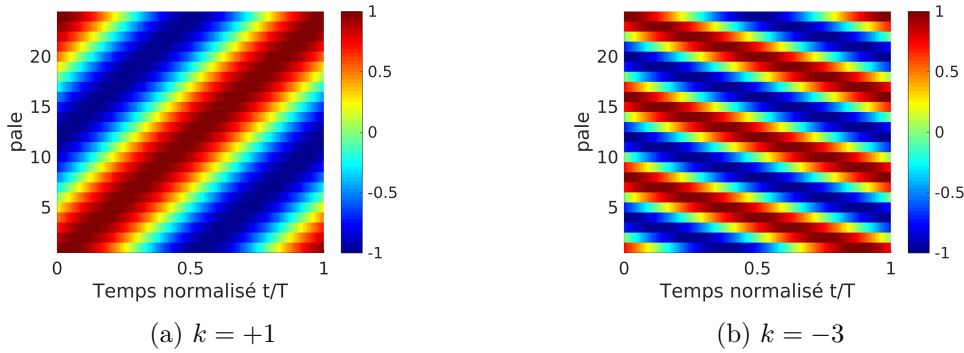


Figure I.10 – Exemples d'ondes directe et rétrograde

Le problème aux valeurs propres (I.44) devient ainsi

$$\left( \bar{\mathbf{K}}_k - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_k \right) \begin{bmatrix} \Phi^r \\ \Phi^i \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{I.48})$$

où les matrices  $\bar{\mathbf{M}}_k$  et  $\bar{\mathbf{K}}_k$  sont alors symétriques réelles et dont les valeurs propres sont doubles et les sous-espaces associés orthogonaux.

### 3.3 Réponse forcée

De la même manière que pour le calcul des modes propres, il est possible de tirer partie des conditions de symétries cycliques afin de simplifier le calcul de la réponse forcée de la structure.

La structure étudiée est dorénavant soumise à un effort extérieur  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  qu'il est possible de séparer en composantes selon les secteurs. Soit  $\mathbf{f}_l^{\text{ext}}$  les forces extérieures appliquées au secteur  $l$ . Afin de se ramener aux efforts harmoniques  $\bar{\mathbf{f}}_k^{\text{ext}}$  sur l'onde  $k$ , une transformée de Fourier discrète est appliquée ce qui mène à

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_0^{\text{ext}} &= \frac{1}{N_s} \sum_{l=0}^{N_s-1} \mathbf{f}_l^{\text{ext}} \\ \bar{\mathbf{f}}_{k,r}^{\text{ext}} &= \frac{2}{N_s} \sum_{l=0}^{N_s-1} \mathbf{f}_l^{\text{ext}} \cos(lk\alpha) \\ \bar{\mathbf{f}}_{k,i}^{\text{ext}} &= \frac{2}{N_s} \sum_{l=0}^{N_s-1} \mathbf{f}_l^{\text{ext}} \sin(lk\alpha) \\ \bar{\mathbf{f}}_{N_s/2}^{\text{ext}} &= \frac{1}{N_s} \sum_{l=0}^{N_s-1} (-1)^l \mathbf{f}_l^{\text{ext}}\end{aligned}\tag{I.49}$$

Il est alors possible de résoudre chaque sous-problème de réponse forcée pour les harmoniques  $k$  participants à la décomposition de Fourier de  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ . Comme pour l'analyse modale, 3 cas sont à considérer :

- $k = 0$  :

$$\hat{\mathbf{M}}_0 \ddot{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{C}}_0 \dot{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{K}}_0 \mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{f}}_0^{\text{ext}}\tag{I.50}$$

- $k \in [1, N_s/2 - 1]$  si  $N_s$  pair ou  $k \in [1, (N_s - 1)/2]$  si  $N_s$  impair :

$$\bar{\mathbf{M}}_k \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_k^r \\ \ddot{\mathbf{u}}_k^i \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{C}}_k \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_k^r \\ \dot{\mathbf{u}}_k^i \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{K}}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^r \\ \mathbf{u}_k^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{k,r}^{\text{ext}} \\ \bar{\mathbf{f}}_{k,i}^{\text{ext}} \end{bmatrix}\tag{I.51}$$

- $k = N_s/2$  si  $N_s$  pair :

$$\hat{\mathbf{M}}_{N_s/2} \ddot{\mathbf{u}}_{N_s/2} + \hat{\mathbf{C}}_{N_s/2} \dot{\mathbf{u}}_{N_s/2} + \hat{\mathbf{K}}_{N_s/2} \mathbf{u}_{N_s/2} = \bar{\mathbf{f}}_{N_s/2}^{\text{ext}}\tag{I.52}$$

Une fois les sous-problèmes résolus, il est à nouveau possible de remonter à la solution sur chaque secteur par une combinaison des différentes composantes harmoniques, tel que le déplacement sur le secteur  $p$  s'exprime

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_0 + \sum_{k=0}^K \left( \hat{\mathbf{u}}_k^r \cos(pk\alpha) + \hat{\mathbf{u}}_k^i \sin(pk\alpha) \right) + (-1)^p \mathbf{u}_{N_s/2}\tag{I.53}$$

où

$$\mathbf{K} = \begin{cases} \frac{N_s}{2} - 1 & \text{si } N_s \text{ est pair} \\ \frac{N_s - 1}{2} & \text{si } N_s \text{ est impair} \end{cases}\tag{I.54}$$

Le gain de cette méthode sera très dépendant de la décomposition (I.49). En effet, plus  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  sera décomposable sur un nombre important d'harmoniques, plus le nombre de sous-problèmes à résoudre sera grand. Cependant, ces sous-problèmes étant indépendants et de tailles raisonnables, il est possible de paralléliser leurs résolutions et ainsi permettre un gain en temps considérable.

## 4 Dimensionnement et aspects technologiques des roues autobagées

### 4.1 Sources d'excitations

Les sources d'excitations vibratoires au sein d'une turbomachine sont nombreuses et peuvent mener rapidement à des défaillances graves si elles ne sont pas réduites ou maîtrisées. D'une manière générale, il est possible de les classer en 2 catégories : les excitations d'origines mécaniques et aéroélastiques.

#### 4.1.1 Excitations d'origines mécaniques

L'entraînement d'un solide en rotation autour d'un axe peut mener à des vibrations si la répartition de la masse du solide autour de cet axe n'est pas homogène. C'est ce que l'on appelle l'effet de balourd. Les turbomachines peuvent expérimenter un tel phénomène en cas de mauvais équilibrage des parties tournantes ce qui peut mener, au vu des vitesses de rotation élevées, à des chargements sévères. L'équilibrage de telles pièces se fait à 2 niveaux : en statique, ce qui implique que l'axe de rotation de la pièce passe par son centre de masse ; en dynamique, l'axe de rotation doit alors être un axe principal d'inertie du solide. Cette hétérogénéité de masse peut aussi bien venir du matériau lui-même, de l'usinage de la pièce en rotation, du montage voire de la perte accidentelle d'une partie de la structure. Elle peut être corrigée par des ajouts de matière, des masselottes, ou à l'inverse des retraits de matière, par perçage ou meulage.

Une autre source d'origine mécanique, que l'on retrouve spécifiquement dans les situations accidentelles, est le choc induit par la perte d'une aube. Cela va mener d'une part à un chargement sévère de la structure, mais aussi à une situation de balourd important, dont il a déjà été question précédemment. Dans ces cas-là, il est important de contenir les débris dans le carter afin de ne pas endommager l'aile ou le fuselage de l'avion, et donc d'assurer la sécurité des passagers. Par le passé, cela nécessitait de réaliser des essais longs et coûteux pour les motoristes afin de certifier leurs moteurs. Mais aujourd'hui, avec les avancées en informatique, il est désormais possible de réaliser un pré-dimensionnement numérique à l'aide de la méthode des éléments finis [22], permettant une forte réduction de coût, ainsi qu'une homogénéisation des délais avec la durée de conception d'un moteur.

La recherche de rendements toujours meilleurs des turbomachines mène à fermer toujours plus le jeu entre le carter et le sommet des aubes tournantes. Cette proximité peut conduire à des contacts entre parties fixes et tournantes induisant des vibrations potentiellement dramatiques pour l'intégrité du moteur. L'initiation d'un tel contact peut être due à de multiples causes : ingestion de corps extérieurs, tels que oiseaux et grêlons, induisant un balourd, la dilatation thermique ou encore la vibration des différentes pièces.

De ce contact peut résulter des phénomènes de couplages entre rotor et stator [4, 72] avec pour effets une augmentation des amplitudes de vibration pouvant mener à la ruine des organes. Ces contacts répétés peuvent aussi mener à une usure prématurée des pièces, que ce soit en rotation ou fixe, qu'il est important d'éviter. Pour cela, il est possible d'avoir recours à un matériau "fusible", nommé abradable [73], recouvrant le carter qui va permettre de fermer le jeu entre rotor et stator, et qui, en cas de contact, va se détériorer tout en respectant l'intégrité des parties tournantes.

#### 4.1.2 Excitations d'origines aéroélastiques

Les chargements aéroélastiques dans les turbomachines se divisent en 2 catégories : les phénomènes synchrones, proportionnels à la vitesse de rotation, et asynchrones, indépendants de la vitesse de rotation.

Un étage de la turbomachine, fixe ou mobile, est soumis aux fluctuations d'écoulement fluide des étages qui le succèdent et le précèdent. Ces fluctuations prennent la forme de sillages créés par les pales, et sont perçues comme une excitation de fréquence égale à la vitesse de rotation de la machine que multiplie le nombre d'obstacles, d'où l'appellation de synchrone. Afin de pallier à toute coïncidence modale, il est préférable que les étages successifs aient des nombres d'aubes premiers entre eux. D'une manière générale, ces phénomènes sont prédits précisément, que ce soit numériquement ou expérimentalement.

Les phénomènes asynchrones sont quant à eux caractérisés par une fréquence d'apparition qui n'est pas un multiple de la vitesse de rotation. On peut citer par exemple le flottement, qui apparaît pour des fréquences d'excitations proches des fréquences de résonances des aubes. De cette manière, l'aube, en vibrant, va perturber le fluide, qui lui-même va exciter l'aube, et ainsi de suite. C'est ce que l'on appelle un phénomène auto-entretenu, pouvant mener à l'augmentation de l'amplitude des vibrations, et donc à la détérioration des organes du moteur. Ces phénomènes, du fait de leur imprévisibilité, ont donné et donnent toujours lieu à de nombreuses recherches. On pourra se référer aux synthèses de Hall [45] et Marshall [76] pour des approfondissements sur ces aspects ainsi que l'étude d'outils numériques de simulation.

## 4.2 Outils de dimensionnement

Les organes d'un turboréacteur sont soumis à des sollicitations, prévisibles ou non, dont il est important de pouvoir en estimer l'impact. Il est pour cela impératif d'être en capacité de statuer sur l'excitabilité d'un mode par une source d'excitation, ainsi que de la tenue mécanique des pièces à des chargements cycliques.

### 4.2.1 Dimensionnement modal

Les caractéristiques modales des roues aubagées évoluent avec le nombre de diamètres nodaux ainsi qu'avec la vitesse de rotation de la roue. La représentation de ces grandeurs dans des diagrammes permet d'appréhender certaines problématiques liées à ces structures particulières. Parmi ces représentations, deux sont particulièrement utilisées : le diagramme fréquences-diamètres et le diagramme de Campbell, représentant les pulsations des modes en fonction de la vitesse de rotation.

**Diagramme fréquences-diamètres** Comme son nom l'indique, ce diagramme représente les pulsations des différentes familles modales en fonction du nombre de diamètres nodaux de celles-ci. Cela permet d'obtenir des informations importantes sur les différentes interactions qui existent au sein de la structure. En premier lieu, il est possible de statuer sur les possibles interactions modales, qui peuvent notamment se manifester par un croisement des familles modales comme cela est visible sur la figure I.11a avec les courbes verte et violette pour 3 diamètres. Un tel cas de figure peut amener les modes en jeu à échanger de l'énergie, comme c'est le cas pour le phénomène de flottement par exemple [93], et à une augmentation significative des amplitudes vibratoires qu'il est d'indispensable d'éviter. Des interactions peuvent aussi apparaître lorsque les familles modales se rapprochent sans se croiser, comme cela est le cas pour les courbes jaune et verte pour 7 diamètres sur la figure I.11a, c'est ce que l'on appelle une zone de veering. A nouveau, des échanges d'énergie peuvent apparaître, ce qu'il est nécessaire d'éviter en phase de dimensionnement. Enfin, ce diagramme permet aussi d'observer l'influence, ou non, du disque sur les différentes familles modales. On peut notamment observer une très faible variation des pulsations des 2 premières familles modales, signe de la très faible participation du disque à ces déformées, les aubes réagissent alors de manière indépendante au disque, comme si elles étaient encastrées dans celui-ci. En revanche, les 3 autres familles représentées varient fortement pour les faibles diamètres nodaux, traduisant une participation significative du disque à leurs déformées.

**Diagramme de Campbell** Il est possible d'anticiper les coïncidences dues aux phénomènes aéroélastiques synchrones présentées au paragraphe 4.1.2 à l'aide du diagramme de Campbell. Pour cela, on superpose sur un graphe l'évolution des pulsations des différents modes de la roue en fonction de la vitesse de rotation de celle-ci, ainsi que des droites représentant les différents harmoniques de la vitesse de rotation du moteur (notés N sur le graphe pour Nominal), aussi appelés ordres moteurs, engine orders (EO) en anglais. Un exemple est donné sur la figure I.11b. Un tel diagramme va désigner un grand nombre d'intersections entre les pulsations de la roue et les ordres moteurs. Toutes ne vont pas mener à un phénomène de résonance de la structure, il faut pour cela qu'il y ait coïncidence entre le mode à diamètre et l'ordre moteur en jeu. Cette coïncidence peut être prédite à l'aide du diagramme Zig-Zag (ZZENF : Zig-Zag Excitation line in Nodal diameters versus Frequency) proposé par Wildheim [128], dont un exemple est donné figure I.11c. Celui-ci est une conséquence du phénomène de repliement du spectre des harmoniques spatiales de la structure cyclique. Ainsi, un mode à  $q$  diamètres de pulsation  $\omega_q$  d'une roue aubagée possédant  $N_s$  secteurs et tournant à une vitesse de rotation  $\Omega$  sera excité si

$$\omega_q = (pN_s \pm q)\Omega \quad (\text{I.55})$$

avec  $p$  un entier naturel. Un exemple sur une structure comportant 24 secteurs pour un ordre moteur 20 est donné en trait pointillé sur la figure I.11c, et une telle sollicitation excite les modes à 4 diamètres. Wildheim [128] montre de plus que le sens de propagation de l'onde ainsi créée va dépendre de la relation mise en jeu, comme cela est indiqué sur la figure I.11c avec les ondes directes ( $k > 0$ ), et les ondes rétrogrades ( $k < 0$ ).

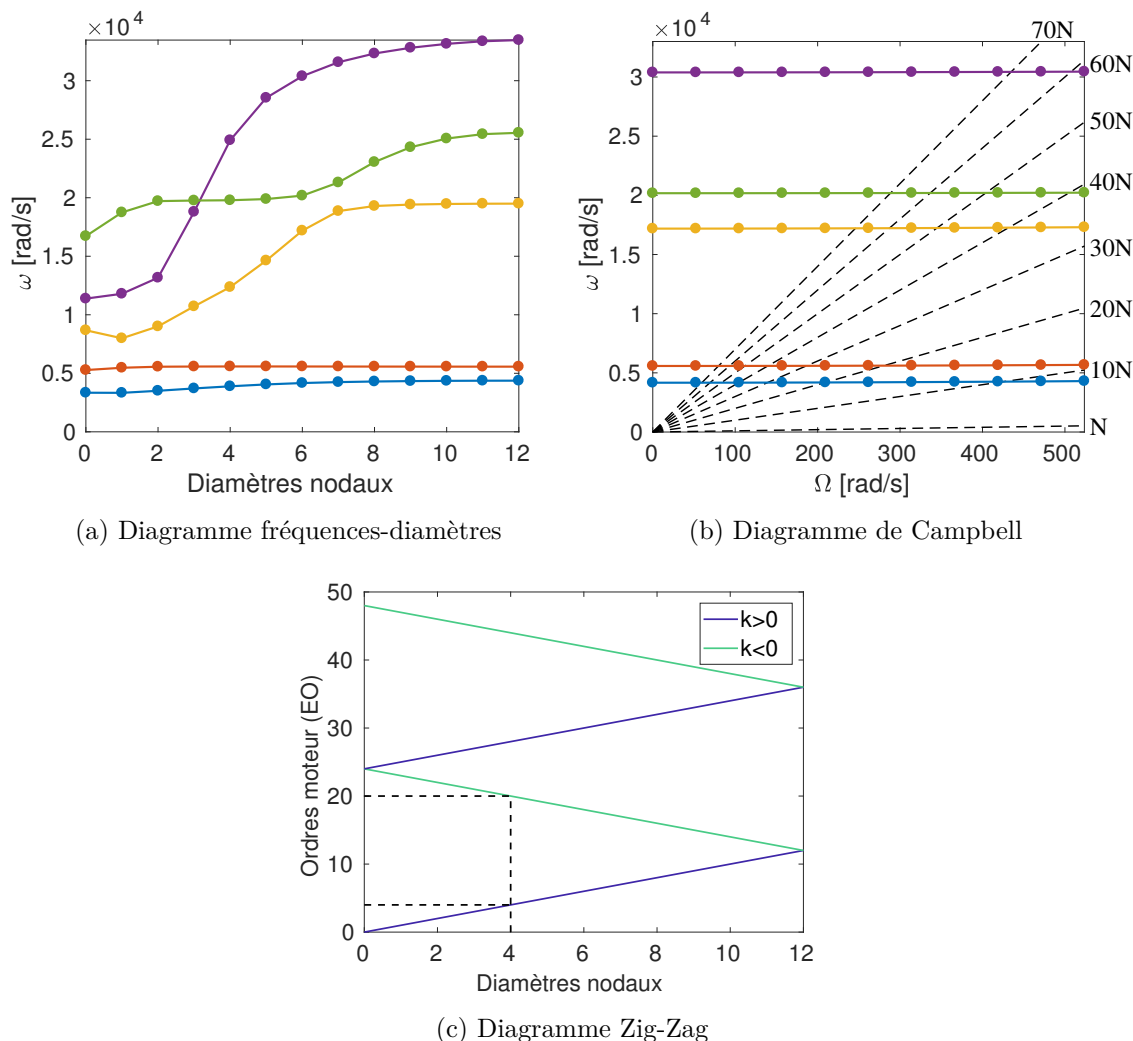


Figure I.11 – Outils de dimensionnement modaux des roues aubagées (Exemple pour une roue à 24 secteurs)

#### 4.2.2 Dimensionnement mécanique

Les contraintes auxquelles sont soumis les organes des turboréacteurs sont complexes, à la fois constantes, dues aux effets centrifuges, et alternées avec les sollicitations aéroélastiques. La ruine de certaines pièces peut mener à des événements graves, comme la perte d'aubages, dont il est impératif de se prémunir. Pour cela, des outils de dimensionnement ont été mis en place afin d'estimer la résistance en fatigue de ces matériaux.

**Courbe de Wöhler** La détermination de la tenue en fatigue des matériaux se fait généralement à l'aide de la courbe de Wöhler [83], aussi appelée courbe S-N pour Stress-Number of cycle. Celle-ci est construite expérimentalement et donne l'évolution de la contrainte alternée  $\sigma_a$  vue par l'éprouvette en fonction du nombre de cycle à la rupture  $N_F$ . Au vue de la disparité des caractéristiques matériau et du caractère répétitif de cette démarche, le tracé est généralement effectué pour une probabilité de rupture de 95%. Un exemple d'une telle courbe est donné sur la figure I.12a. On peut remarquer sur celle-ci qu'à partir d'une certaine valeur de contrainte alternée  $\sigma_e$ , la limite d'endurance, la courbe



présente une asymptote pour laquelle le nombre de cycles à la rupture est infini. Cette caractéristique se retrouve notamment pour les aciers.

**Diagramme de Haigh** La courbe de Wöhler ne tient pas compte des effets de contrainte statique, que l'on retrouve dans les turbomachines avec le chargement centrifuge, or celle-ci est loin d'être négligeable. Afin de pallier à cette lacune, des travaux ont été menés afin de déterminer l'évolution de la limite d'endurance du matériau  $\sigma_e$  en fonction de la contrainte statique  $\sigma_s$ . Plusieurs modèles ont été proposés. On peut se référer notamment à ceux de Goodman et Gerber (voir figure I.12b), proposant des évolutions de la contrainte alternée de manières respectivement linéaire et quadratique vers une limite statique égale à la limite à la rupture  $R_m$ ; ou encore Soderberg qui propose une loi plus conservatrice linéaire vers une limite statique égale à la limite élastique  $R_e$ .

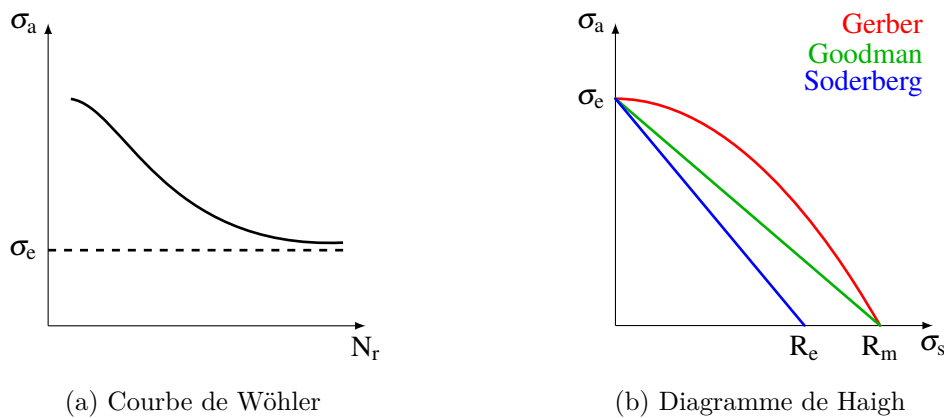


Figure I.12 – Outils de dimensionnement mécanique des roues aubagées

### 4.3 Aspects technologiques des roues aubagées

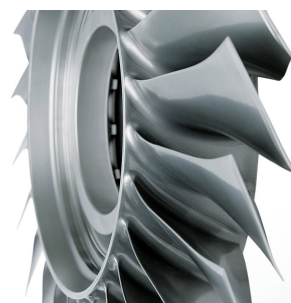
#### 4.3.1 Pales rapportées et Disques Aubagés Monoblocs (DAM)

La technologie initiale des roues aubagées utilisée pour les compresseurs et les turbines des moteurs est celle des disques dits "à pales rapportées". Le disque et les pales sont alors assemblés via des profils en queue d'aronde ou pied de sapin, comme le montre la figure I.13a. Cette configuration permet une maintenance facile des aubes, par simple changement. La liaison pale/disque va jouer un rôle important dans la mécanique de la roue puisque c'est elle qui va subir les plus fortes contraintes, sa forme dépendra donc de celles-ci afin que leur répartition soit le plus homogène possible [100]. De plus, la friction induite dans cette liaison par les vibrations va d'une part mener possiblement à une usure prématurée des pièces, mais va aussi dissiper une part de l'énergie transmise aux pales, qui vibreront donc moins fortement.

Avec les progrès réalisés en usinage, une nouvelle technologie de roue est apparue, usinée d'un seul tenant, appelée Disque Aubagé Monobloc, dont un exemple est donné figure I.13b. Comme la configuration à pales rapportées, le DAM a ses points forts et ses faiblesses. Pour ce qui est des atouts, cette technologie permet un fort gain de poids, d'une part car les éléments usinés sont moins volumineux, mais aussi car les performances aérodynamiques sont bien meilleures et permettent de réduire le nombre d'étages nécessaires



(a) Exemple de roue à pales rapportées



(b) Disque Aubagé Monobloc [GF Machining Solutions]

Figure I.13 – Différentes technologies de roues aubagées

à la compression. Mais cela se fait au détriment de l'amortissement de la structure qui est très faible, ce qui peut mener à des niveaux vibratoires importants. Afin de remédier à cette problématique, des dispositifs de friction ont été incorporés dans les DAMs afin d'apporter un surplus d'amortissement à la structure par le biais de joncs de friction insérés dans le disque. Une synthèse des différents systèmes de contrôle vibratoire des roues aubagées est disponible dans la thèse de Laxalde [68].

#### 4.3.2 Nouveaux matériaux

Les progrès en usinage ne sont pas les seuls à avoir permis des gains de poids et de performances. Les températures et les chargements mis en jeu rendent le choix des matériaux crucial. Quand les parties froides sont plutôt réalisées en alliage de titane [28], pour leur résistance, les parties chaudes se voient appliquer des chargements sévères tant du point de vue mécanique que thermique, de 450 °C jusqu'à 1200 °C, nécessiteront l'utilisation de super-alliages de nickel.

Plus récemment, un intérêt particulier a été porté pour les matériaux composites. La première famille utilisée, celle des composites unidirectionnels à matrice titane (CMTi) renforcée par des fibres en carbure de silicium [14, 47], est utilisée pour l'allègement des roues de compresseur. En effet, à l'aide de cette technologie, il est possible de se défaire de la partie "poireau" de la roue, présente pour la reprise des efforts centrifuges, à l'aide de la technologie dite d'ANneau Aubagé Monobloc (ANAM), dont un exemple est donné figure I.14a. Le composite unidirectionnel, visible sur la figure I.14b, se charge alors de la reprise des efforts circonférentiels centrifuges. On remarque ainsi une diminution conséquente du volume de matière du disque, de l'ordre de 30%, ce qui est très intéressant en terme de gain de masse mais qui souffre du même problème de manque d'amortissement intrinsèque de la structure que les DAMs.

Les matériaux composites démontrent aussi l'étendu de leur potentiel pour les pièces de grandes tailles, notamment la soufflante comme nous avons pu en parler dans la section dédiées aux architectures moteurs. A l'origine, les aubes de celle-ci étaient réalisées en titane, comme on peut le voir sur la figure I.15a avec le moteur CFM56-7B. Déjà par le passé, la nécessité d'augmentation du taux de dilution avait mené à différentes solutions technologiques comme les pales titanées creuses (voir figure I.15b), afin de remédier à l'augmentation de masse due au grand diamètre de la soufflante. Les moteurs de dernière

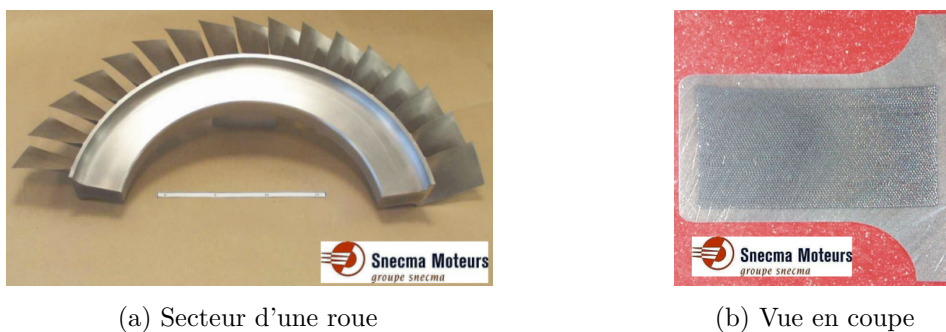
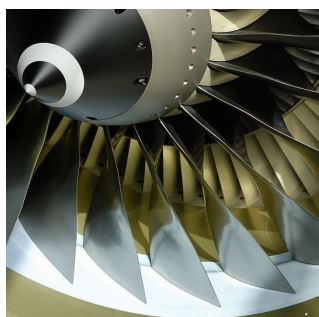


Figure I.14 – Technologie ANneau Aubagé Monobloc (ANAM) (issues de [47])

génération, tel que le CFM LEAP, intègrent dorénavant des soufflantes en fibre de carbone (voir figure I.15c). Dans cette optique, Safran Aircraft Engines a développé un procédé de fabrication par RTM (Resin Transfer Molding), qui est un procédé de moulage 3D à l'aide d'une résine thermodurcissable. En plus d'un gain de poids considérable, 450 kg environ par rapport au CFM56 juste pour le module fan, une telle méthode permet de réaliser des formes d'aubes complexes améliorant les capacités aérodynamiques de cet organe. De plus, comme cela est visible sur la figure I.15c, le bord d'attaque des pales est réalisé en titane afin d'en augmenter la résistance aux chocs dus aux éléments extérieurs, comme les grêlons ou les oiseaux. Enfin, il est à noter qu'un tel procédé de fabrication est dorénavant utilisé afin de réaliser le carter, amenant à de nouveaux gains de masse et résistance.



(a) Soufflante titane du moteur CFM56-7B [Safran]



(b) Coupe de pale titane creuse



(c) Soufflante composite du moteur LEAP [Safran]

Figure I.15 – Différents matériaux utilisés pour la fabrication des soufflantes

## Bilan du chapitre

Les moteurs d'avions sont des assemblages technologiques extrêmement complexes lieu de multiples excitations. Celles-ci peuvent être inhérentes à la machine, comme les balourds ou les sillages, ou externes avec l'ingestion de corps étrangers. Afin de prévenir tout problème critique, des méthodes de dimensionnement empiriques sont utilisées, basées sur la répétition de cycles de rotation. A cela s'ajoute une méthodologie d'étude numérique dédiée avec l'utilisation à bon escient des propriétés de symétrie des principaux organes des moteurs, les roues aubagées. Afin de garantir des performances toujours meilleures, de nouvelles solutions ont été développées avec les Disques Aubagées Monobloc permettant une meilleure efficacité aérodynamique et un gain significatif de poids au détriment de l'amortissement de la structure. Les performances globales de la machine sont aussi grandement dépendantes du taux de dilution, qui est décidé en entrée du moteur. Dans cette optique, les nouvelles architectures s'orientent vers des diamètres de soufflante toujours plus importants tout en étant allégés par l'utilisation de matériaux composites. Cette double évolution mène à la conception de structures élancées et souples, pouvant donc donner lieu à de grands déplacements. Une mise en équation d'un solide en rotation a donc été établie en tenant compte de ces phénomènes menant à un système complexe à résoudre, les méthodes conventionnelles frontales n'étant alors plus adéquates. Nous présentons dans le chapitre suivant diverses méthodes plus à même de traiter ce genre de problèmes de manière efficace.



## Chapitre II

# Analyse fréquentielle non-linéaire et phénoménologies associées

Ce chapitre aborde les différentes méthodes de résolution et d'étude des solutions périodiques des équations non-linéaires du mouvement déterminées dans le chapitre I. On s'intéresse tout d'abord aux méthodes de détermination de ces solutions avec les schémas d'intégration temporelle et les méthodologies associées dans un premier temps ; on présente dans un second temps une méthode dédiée de recherche des solutions périodiques dans le domaine fréquentiel avec la méthode de l'Équilibrage Harmonique. Ces méthodes sont complétées par divers outils comme les techniques de continuation, l'analyse de la stabilité des solutions, ou encore la détermination des solutions libres non-amorties du système plus connues sous la dénomination de modes non-linéaires. Enfin, la mise en place de ces diverses méthodes sera analysée sur un exemple simple de structure cyclique non-linéaire afin d'en déduire le potentiel sur les applications visées.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Recherche des solutions périodiques</b> . . . . .	<b>32</b>
1.1	Méthodes temporelles . . . . .	32
1.2	Méthode fréquentielle : Équilibrage Harmonique . . . . .	36
1.3	Méthodes de continuation . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Phénoménologie non-linéaire</b> . . . . .	<b>42</b>
2.1	Stabilité locale des solutions périodiques . . . . .	42
2.2	Résonances non-linéaires . . . . .	47
2.3	Analyse fréquentielle non-linéaire : notion de mode non-linéaire . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Étude d'un système cyclique simple</b> . . . . .	<b>52</b>
3.1	Présentation du système . . . . .	52
3.2	Étude linéaire . . . . .	53
3.3	Étude non-linéaire . . . . .	54
	<b>Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>59</b>

---

Dans le premier chapitre (I.2), nous avons pu réaliser la mise en équation d'un corps élastique en rotation en prenant en compte les effets non-linéaires en grands déplacements. La résolution du problème linéaire sous-jacent est aujourd'hui parfaitement maîtrisée, notamment grâce à l'utilisation de méthodes spécifiques comme la superposition modale [35]. L'ajout des non-linéarités complexifie considérablement l'étude de tels systèmes, et il est alors nécessaire de faire appel à des méthodes dédiées. On propose dans cette section de présenter quelques-unes de ces méthodes qui seront utilisées par la suite. Pour cela, nous supposons que l'équation différentielle régissant le système est de la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \quad (\text{II.1})$$

dans laquelle aucune hypothèse n'a été faite sur la forme de la non-linéarité. Comme nous le verrons dans la suite, il peut aussi être nécessaire de considérer notre système différentiel sous forme d'équation du premier ordre en se plaçant dans l'espace d'état tel que

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad (\text{II.2})$$

dans lequel

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t)] \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

## 1 Recherche des solutions périodiques

Dans la suite de ce mémoire, nous ne considérerons que le régime établi de notre système. Nous présentons dans cette section des méthodes de détermination des solutions périodiques associées à ce régime spécifique.

### 1.1 Méthodes temporelles

Une solution possible est de réaliser une intégration temporelle [32, 35]. Alliant souplesse d'utilisation et nécessitant peu d'hypothèses sur la non-linéarité, elles pâtissent cependant d'une certaine lourdeur d'application et peuvent présenter des défaillances en cas d'instabilité du système. On propose ici de présenter succinctement les principales méthodes numériques de résolution temporelles.

#### 1.1.1 Schémas d'intégration numérique

Les schémas d'intégration numérique supposent une discrétisation de l'intervalle de temps sur lequel se déroule l'étude. Soit  $[0, T]$  cet intervalle discrétisé en  $N_t + 1$  instants tel que

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t} = T \quad (\text{II.5})$$

et soit  $h_n$  l'incrément de temps défini tel que  $t_{n+1} = t_n + h_n$  pour  $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$ . Le but sera alors de déterminer la solution à un instant  $t_n$  en fonction d'un ou de plusieurs instants. Lorsque ceux-ci sont antérieurs à l'instant recherché on parle de schéma explicite; lorsqu'ils sont postérieurs on parle de schéma implicite.

**Méthodes numériques à un pas** Parmi les schémas d'intégration numérique existants, les plus simples qui soient sont ceux dits "à un pas" [23], la solution à l'instant  $t_n$  est alors recherchée seulement en fonction du pas précédent ou suivant. Pour cela, on considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Après discrétisation, et grâce à un développement de Taylor avec reste intégral, il est possible d'exprimer  $\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}_{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{y}(t_n) = \mathbf{y}_n$  par la relation

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{y}}(s) \, ds \\ &= \mathbf{y}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \, ds \\ &= \mathbf{y}_n + h_n \int_0^1 \mathbf{f}(t_n + uh_n, \mathbf{y}(t_n + uh_n)) \, du \\ &= \mathbf{y}_n + \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

De la manière de calculer  $\mathbf{I}_n$  va dépendre le schéma d'intégration mis en jeu. On peut citer par exemple comme méthodes d'intégration numérique

- la formule du rectangle à gauche : schéma d'Euler explicite

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h_n \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (\text{II.8})$$

- la formule du rectangle à droite : schéma d'Euler implicite

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h_n \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad (\text{II.9})$$

- la formule des trapèzes : schéma de Crank-Nicolson

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h_n}{2} (\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})) \quad (\text{II.10})$$

Ces schémas très simples présentent, en contrepartie, une précision et une stabilité faibles. On leur préférera pour cela des méthodes plus complexes mais plus stables et de meilleure précision. Une famille de schéma très répandue est celle de Runge-Kutta qui, en plus de l'instant précédent, considère aussi des instants intermédiaires  $t_{n,i} = t_n + c_i h_n$  avec  $c_i \in [0, 1]$ . Parmi les plus utilisés de ces schémas, on peut citer

- le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK-2), basé sur la méthode d'intégration du point milieu

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h_n \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h_n}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h_n}{2} \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)\right) \quad (\text{II.11})$$



- le schéma de Runge-Kutta "classique" d'ordre 4 (RK-4), basé sur la méthode d'intégration de Simpson

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{h_n}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
k_1 &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \\
k_2 &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h_n}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h_n}{2} k_1\right) \\
k_3 &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h_n}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h_n}{2} k_2\right) \\
k_4 &= \mathbf{f}(t_n + h_n, \mathbf{y}_n + h_n k_3)
\end{aligned} \tag{II.12}$$

Des variantes de ces schémas sont notamment utilisées dans les fonctions `ode23` et `ode45` d'intégration temporelle du logiciel `MATLAB` [25].

**Schéma de Newmark** Les méthodes qui viennent d'être présentées nécessitent l'utilisation d'un système d'équation différentielle d'ordre 1, comme celui donné équation (II.2). Cette forme, bien que pratique, nécessite de doubler la taille du système ce qui peut être préjudiciable au temps de résolution. Il existe cependant des méthodes permettant de traiter directement les systèmes différentiels d'ordre 2, comme (II.1) qui nous intéresse, et ainsi faire la résolution sur un nombre de variables plus raisonnable. Parmi les plus utilisées, la famille de Newmark [32] est la plus répandue pour l'étude des systèmes dynamiques en mécanique du solide.

A nouveau, le point de départ est un développement de Taylor, appliqué cette fois au déplacement et à la vitesse, tel que

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{x}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{x}}(s) ds \\
\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + h_n \dot{\mathbf{x}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s) \ddot{\mathbf{x}}(s) ds
\end{aligned} \tag{II.13}$$

Les intégrales de l'accélération sont ensuite déterminées par quadrature, grâce aux développements préalables de  $\ddot{\mathbf{x}}_n$  et  $\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}$ , ce qui mène aux approximations de la méthode de Newmark

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{x}}_n + (1 - \gamma) h_n \ddot{\mathbf{x}}_n + \gamma h_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} \\
\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + h_n \dot{\mathbf{x}}_n + \frac{h_n^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{x}}_n + h_n^2 \beta \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}
\end{aligned} \tag{II.14}$$

où  $\gamma$  et  $\beta$  sont des paramètres dépendant de la quadrature utilisée. Ce schéma est explicite, sauf cas particulier nécessitant des matrices structurales diagonales, et sa stabilité va dépendre des valeurs de  $\gamma$ ,  $\beta$  et  $h_n$ . Il existe 2 jeux de paramètres  $(\gamma, \beta)$  largement utilisés

- $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{6}$  qui correspond à une interpolation linéaire des accélérations sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ ;
- $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$  qui correspond à une valeur moyenne de l'accélération sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ . Cette configuration permet notamment d'avoir une stabilité inconditionnelle

du schéma et une précision maximale, ainsi qu'une conservation de l'énergie mécanique dans le cas d'un système linéaire libre non amorti.

Ces schémas de Newmark sont largement utilisés dans les codes de calculs éléments finis industriels, notamment le module **MECANO** de résolution non-linéaire du code SAMCEF.

Les méthodes qui viennent d'être présentées, aussi appelées **méthodes par force brute** [84], ont l'inconvénient de devoir être appliquées sur un intervalle temporel pouvant être conséquent. De plus, il se peut que la solution convergée ne soit pas celle recherchée, l'état périodique dépendant des conditions initiales imposées  $\mathbf{y}_0$ . Afin de pallier à ces faiblesses, des méthodes de recherche directes des solutions périodiques dans le domaine temporel ont été développées [84].

### 1.1.2 Méthode des différences finies

La recherche de solutions périodiques revient ici à résoudre le problème de Cauchy (II.6) en remplaçant la condition initiale par une condition de périodicité telle que le problème devient

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}(t_0 + T) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

où dans ce cas  $T$  désigne la période inconnue de la solution périodique recherchée. En reprenant la discrétisation temporelle (II.5) et en utilisant, par exemple, la méthode d'intégration numérique des trapèzes (II.10), la détermination de la solution périodique revient à résoudre le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0 = \frac{h_0}{2} (\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1)) \\ \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 = \frac{h_1}{2} (\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1) + \mathbf{f}(t_2, \mathbf{y}_2)) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_{N_t} = \frac{h_{N_t-1}}{2} (\mathbf{f}(t_{N_t}, \mathbf{y}_{N_t}) + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0)) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

où la condition de périodicité a été utilisée dans la dernière équation. Étant donné que la période  $T$  est une inconnue du problème, ce système d'équations est sous-déterminé. Il est alors nécessaire de rajouter une condition de phase [84] afin de fermer le système. La résolution est alors réalisée à l'aide d'un algorithme itératif de type Newton-Raphson. Le principal inconvénient de cette méthode est la taille du problème à résoudre, qui peut vite devenir problématique pour un système de grande taille et un pas de discrétisation faible.

### 1.1.3 Méthode de tir

La méthode de tir consiste de nouveau à résoudre le système (II.15), à la différence que cette fois, le système n'est pas résolu frontalement mais par correction des conditions initiales imposées. On définit ainsi la fonction de tir, ou **shooting function** [30]

$$\mathbf{s}(\mathbf{y}_0, T) = \mathbf{y}(\mathbf{y}_0, T) - \mathbf{y}_0 \quad (\text{II.17})$$

où  $\mathbf{y}(T, \mathbf{y}_0)$  désigne la solution de (II.6) obtenue en imposant les conditions initiales  $(\mathbf{y}_0, T)$  à l'instant  $T$ . Cette solution peut être déterminée à l'aide des schémas d'intégration numériques présentés précédemment (1.1.1). Dans le cas où la condition de périodicité  $\mathbf{s}(\mathbf{y}_0, T) \approx \mathbf{0}$  n'est pas respectée, les corrections  $(\Delta\mathbf{y}_0, \Delta T)$  à apporter aux conditions initiales sont alors déterminées à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson appliquée au développement de Taylor au premier ordre de  $\mathbf{s}(\mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}_0, T + \Delta T) \approx \mathbf{0}$  (Eq. (II.18)).

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}_0}(\mathbf{y}_0, T) \Delta\mathbf{y}_0 + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T}(\mathbf{y}_0, T) \Delta T = -\mathbf{s}(\mathbf{y}_0, T) \quad (\text{II.18})$$

Il est à noter que la détermination de la matrice jacobienne de  $\mathbf{s}$  par rapport à  $\mathbf{y}_0$  fait intervenir le calcul de la matrice de monodromie du système, que nous présenterons plus tard (2.1.1), et qui permet ainsi de déterminer la stabilité de la solution sans calcul additionnel. Enfin, dans le cadre de l'étude d'un système autonome, à nouveau la période  $T$  de la solution est une inconnue et il est nécessaire de rajouter une équation de phase afin de fermer le système [84]. Cette méthode est notamment utilisée par Georgiades [30, 31], Peeters [90] et Renson [94, 95] pour la détermination des solutions périodiques libres non-amorties de systèmes non-linéaires.

Les méthodes qui viennent d'être décrites présentent l'avantage d'être parfaitement maîtrisées et applicables, directement ou indirectement, à l'aide des outils commerciaux mécaniques et mathématiques. Cependant, celles-ci nécessitent de déterminer l'état transitoire du système, pour ce qui est des schémas d'intégration numériques, ou la résolution d'un système volumineux dans le cas des différences finies. On propose dans la suite de présenter une méthode plus adaptée à la détermination des solutions périodiques d'un système non-linéaire en se plaçant dans le domaine fréquentiel.

## 1.2 Méthode fréquentielle : Équilibrage Harmonique

Cette méthode, aussi appelée Harmonic Balance Method (HBM), trouve son origine dans les travaux de Krylov (Nikolai de son prénom, à ne pas confondre avec Alexei Krylov, à l'origine des sous-espaces du même nom) et Bogolioubov [12, 65] pour la résolution d'équations différentielles non-linéaires simples. Cette méthode consiste à rechercher les solutions de l'équation (II.1) dans l'espace engendré par les fonctions périodiques, ce qui revient à considérer une approximation de la solution sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'harmonique  $N_h$  telle que

$$\mathbf{x}(t) \approx \frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.19})$$

Cette méthode a connue un regain de popularité dans les années 70 pour l'étude des systèmes électroniques [34, 82], et a depuis été largement utilisée dans le cadre de la dynamique des structures non-linéaires que ce soit géométrique [37, 91], frottement [58, 68] ou encore usure [100].

### 1.2.1 Équation générale de la HBM

La projection de notre problème (II.1) dans l'espace de Fourier se fait à l'aide d'une procédure de Galerkin dans laquelle les fonctions d'approximations et tests sont les fonctions

périodiques, ainsi que par l'utilisation du produit scalaire associé

$$\langle f | g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) g(t) dt \quad (\text{II.20})$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions périodiques sur l'intervalle  $[0, T]$ . La décomposition de la solution (II.19) selon la base de Fourier peut s'écrire matriciellement

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t)\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{II.21})$$

où on retrouve

- $\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & \cdots & \cos(N_h \omega t) & \sin(N_h \omega t) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n$  la matrice des fonctions harmoniques ;
- $\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{a}_0^\top \quad \mathbf{a}_1^\top \quad \mathbf{b}_1^\top \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{N_h}^\top \quad \mathbf{b}_{N_h}^\top]^\top$  le vecteur des coefficients de Fourier.

Les dérivées par rapport au temps qui en découlent se déduisent aisément grâce aux formules

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{Q}(t)\nabla\hat{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{Q}(t)\nabla^2\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

où l'opérateur de dérivation dans le domaine fréquentiel  $\nabla$  est défini par

$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \nabla_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \nabla_{N_h} \end{bmatrix}, \quad \nabla_p = \begin{bmatrix} 0 & p\omega \\ -p\omega & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad (\text{II.23})$$

La HBM consiste alors à orthogonaliser le résidu  $\mathbf{r}(t)$  de l'équation (II.1), obtenu par substitution de (II.19), vis-à-vis des fonctions tests. La base de fonctions utilisée étant orthogonale par rapport au produit scalaire (II.20), la projection du résidu sur cette même base se simplifie et on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | 1 \rangle &= \mathbf{K}\mathbf{a}_0 + \langle \mathbf{f}^{\text{nl}} | 1 \rangle - \langle \mathbf{f}^{\text{ext}} | 1 \rangle \\ \langle \mathbf{r} | \cos(p\omega t) \rangle &= (\mathbf{K} - (p\omega)^2 \mathbf{M})\mathbf{a}_p + p\omega \mathbf{C}\mathbf{b}_p + \langle \mathbf{f}^{\text{nl}} | \cos(p\omega t) \rangle - \langle \mathbf{f}^{\text{ext}} | \cos(p\omega t) \rangle \\ \langle \mathbf{r} | \sin(p\omega t) \rangle &= (\mathbf{K} - (p\omega)^2 \mathbf{M})\mathbf{b}_p - p\omega \mathbf{C}\mathbf{a}_p + \langle \mathbf{f}^{\text{nl}} | \sin(p\omega t) \rangle - \langle \mathbf{f}^{\text{ext}} | \sin(p\omega t) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

L'annulation de la projection de ce résidu mène à l'équation générale de la HBM qui peut s'exprimer sous forme matricielle

$$\mathbf{Z}(\omega) \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}} \quad (\text{II.25})$$

où les nouvelles inconnues du problème sont les coefficients de Fourier  $\hat{\mathbf{x}}$ . La matrice  $\mathbf{Z}$ , appelée raideur dynamique du système, inclue les participations des matrices structurales linéaires et peut s'écrire

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & & & & \\ & \mathbf{Z}_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{Z}_{N_h} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

avec

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (p\omega)^2 \mathbf{M} & p\omega \mathbf{C} \\ -p\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - (p\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

$\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}$  et  $\hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}}$  représentent quant à eux les vecteurs des coefficients harmoniques de  $\mathbf{f}^{\text{nl}}$  et  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  respectivement.

La résolution du système différentiel initial (II.1) est ainsi ramenée à celle d'un système algébrique dont le traitement peut être réalisé plus simplement à l'aide d'un solveur itératif de type Newton-Raphson [29] par exemple. La contrepartie de cela est l'augmentation de la taille du problème proportionnellement au nombre d'harmoniques considéré dans la décomposition de la solution (II.19). Il est toutefois possible de remédier à ce problème en réalisant une sélection d'harmonique comme proposé par Grolet [41] et ainsi ne conserver que les coefficients prépondérants associés à chaque degré de liberté physique.

### 1.2.2 Traitement des termes non-linéaires

La détermination analytique des coefficients harmoniques non-linéaires  $\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}$  n'est envisageable que dans certains cas très simples, comme les non-linéarités polynomiales, même si cela mène à des expressions assez lourdes. Il est cependant possible de contourner cette difficulté à l'aide d'une méthode numérique d'alternance temps/fréquence (Alternating Frequency/Time (AFT) en anglais) proposée par Cameron & Griffin [15]. Cette méthode tire partie de la connaissance de l'expression des efforts non-linéaires dans le domaine temporel et procède à un aller/retour entre les domaines fréquentiel et temporel. A partir du vecteur des coefficients harmoniques  $\hat{\mathbf{x}}$  il est possible de reconstruire les déplacements et vitesses, dont dépendent les termes non-linéaires, dans le domaine temporel sur une voire plusieurs périodes à l'aide d'une matrice de Transformée de Fourier Discrète (DFT) inverse  $\bar{\mathbf{F}}$  définie telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \bar{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{F}} \nabla \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

avec

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \cos(\omega t_1) & 2 \sin(\omega t_1) & \cdots & 2 \cos(N_h \omega t_1) & 2 \sin(N_h \omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \cos(\omega t_{N_t}) & 2 \sin(\omega t_{N_t}) & \cdots & 2 \cos(N_h \omega t_{N_t}) & 2 \sin(N_h \omega t_{N_t}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad (\text{II.29})$$

où  $N_t$  représente le nombre de pas de temps de reconstruction du signal temporel. Il est possible de rendre cette matrice indépendante de  $\omega$  par la relation

$$\omega t_k = \frac{2\pi k}{N_t}, \quad k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket \quad (\text{II.30})$$

et ainsi ne pas avoir à recalculer pour chaque valeur de la pulsation. Le choix de  $N_t$  va dépendre du nombre d'harmonique  $N_h$  mis en jeu dans la HBM ; en effet, la discrétisation ne doit être ni trop grossière, ce qui nuirait à la précision de la méthode, ni trop fine, ce qui nécessiterait une mémoire et un temps de résolution plus importants. Une fois les efforts non-linéaires construits dans le domaine temporel, on les repasse dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une matrice de DFT directe  $\mathbf{F}$  (II.31), elle aussi pouvant être exprimée indépendamment de la pulsation grâce à la relation (II.30).

$$\mathbf{F} = \frac{2}{N_t} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_{N_t}) \\ \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_{N_t}) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(N_h \omega t_1) & \cdots & \cos(N_h \omega t_{N_t}) \\ \sin(N_h \omega t_1) & \cdots & \sin(N_h \omega t_{N_t}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad (\text{II.31})$$

On peut résumer la méthode sous la forme de l'équation suivante

$$\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{F} \mathbf{f}^{\text{nl}}(\bar{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{F}} \nabla \hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{II.32})$$

ou encore du schéma

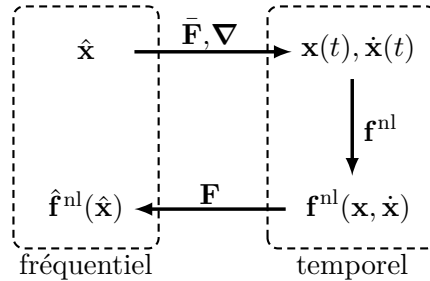


Figure II.1 – Schéma de principe de la méthode AFT

La procédure qui vient d'être présentée afin de déterminer les efforts non-linéaires est aussi applicable pour le calcul de la matrice jacobienne de ces termes, qui est nécessaire pour la résolution du système par un algorithme itératif de type Newton-Raphson. En effet, cela est bien plus rapide qu'un calcul par différences finies comme le propose la fonction `fsolve` de MATLAB si cette matrice jacobienne ne lui est pas fournie.

### 1.3 Méthodes de continuation

Les méthodes de recherches de solutions périodiques qui viennent d'être présentées précédemment ne permettent de déterminer que les solutions associées à un jeu de paramètres fixés. Dans notre cas, nous nous intéresserons à la variation de certains de ces paramètres sur des plages données, comme la fréquence d'excitation, afin de déterminer la fonction de réponse en fréquence. Le système étant non-linéaire, la solution associée à un

jeu de paramètres pourra ne plus être unique menant à des comportements non-linéaires classiques comme les points de retournement ou encore des bifurcations. Afin de pallier à cette problématique de multiplicité des solutions, des méthodes existent afin de ne suivre qu'une solution particulière, souvent initialisée loin des résonances où la non-linéarité n'a que peu d'impact. Ces méthodes, dites de **continuation**, sont basées sur 3 principes : la paramétrisation, la prédiction et la correction [43]. Dans ce qui suit, nous présentons 2 méthodes de continuations largement utilisées : la continuation séquentielle et la continuation arc-length. Celles-ci seront appliquées à un système traité par HBM, d'équation (II.33), dont les inconnues sont les coefficients de Fourier  $\hat{\mathbf{x}}$  ainsi qu'un paramètre dit de continuation, qui dans notre cas sera la pulsation  $\omega$ .

$$\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) - \hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}} \quad (\text{II.33})$$

### 1.3.1 Continuation séquentielle

Le système (II.33) est composé de  $(2N_h + 1)n$  équations et  $(2N_h + 1)n + 1$  inconnues, il est donc sous-déterminé. La continuation séquentielle propose de fixer une des inconnues, le paramètre de continuation  $\omega$  en l'occurrence, au cours de la résolution afin de rendre celle-ci possible, comme le montre la figure II.2a. Le choix du paramètre de continuation pendant la résolution peut être fixé de diverses manières : par ajout d'un même incrément entre 2 points consécutifs, ou encore en conservant la valeur obtenue à l'aide d'un prédicteur présenté dans la suite. Cette méthode très simple présente cependant des difficultés pour traiter des configurations de type point de retournement par exemple, pourtant très largement présents dans les systèmes non-linéaires polynomiaux notamment. Il est possible de remédier à cette faiblesse par l'utilisation d'une paramétrisation sélective [43] qui consiste à donner le rôle de paramètre de continuation à une autre inconnue du système quand cela est nécessaire.

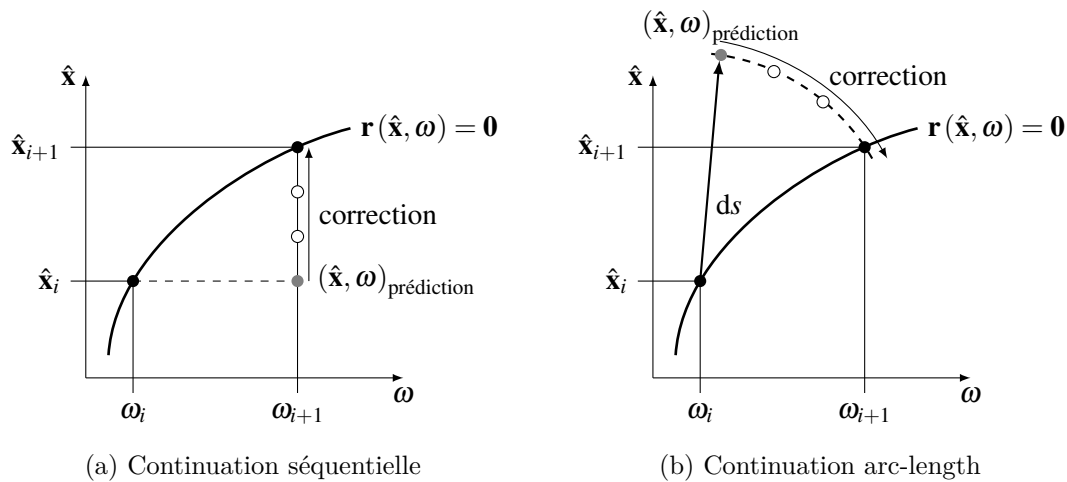


Figure II.2 – Différents schémas de continuation

### 1.3.2 Continuation arc-length

Cette méthode propose de traiter la solution de l'équation (II.33) en tant que courbe paramétrée de l'abscisse curviligne  $s$ . Plus précisément, on va approcher la solution par un

enchaînement de prédiction/correction. Le caractère sous-déterminé du système va ainsi pouvoir être levé à l'aide de l'équation de fermeture

$$\|\Delta\hat{\mathbf{x}}\|_i^2 + |\Delta\omega|_i^2 = ds^2 \quad (\text{II.34})$$

basée sur la distance  $ds$  entre 2 points successifs (voir figure II.2b) dans laquelle on retrouve  $\|\Delta\hat{\mathbf{x}}\|_i = \|\hat{\mathbf{x}}_{i+1} - \hat{\mathbf{x}}_i\|$  et  $|\Delta\omega|_i = |\omega_{i+1} - \omega_i|$ . La solution est ainsi recherchée sur une hypersphère centrée sur le dernier point convergé et de rayon  $ds$ . Cette hypersphère ayant 2 points d'intersections au moins avec la courbe solution recherchée, il est possible que la solution convergée ne soit pas celle voulu, et que l'on "retourne en arrière". Afin de forcer la convergence vers le point voulue, il est possible de chercher la solution non pas sur l'hypersphère mais sur l'hyperplan orthogonal à la prédiction [43, 84, 103], méthode plus couramment appelée *pseudo arc-length*.

### 1.3.3 Prédiction

Les méthodes de continuation présentées précédemment permettent de suivre la solution du système non-linéaire à résoudre. La résolution non-linéaire qui suit la prédiction va grandement dépendre de cette dernière, celle-ci étant choisie comme initialisation du solveur non-linéaire. Diverses méthodes existent et nous proposons ici de présenter les prédicteurs dits sécant et tangent.

**Prédiction sécante** La première grande famille de prédicteurs est celle basée sur une interpolation polynomiale construite à partir des points solutions déjà déterminés, le nombre de points nécessaires dépendant du degrés du polynôme mis en jeu (voir [19] pour un exemple de degré 3). La prédiction sécante repose sur l'utilisation d'une interpolation de Lagrange d'ordre 1 (II.35) et nécessite la connaissance des 2 derniers points convergés, comme illustré sur la figure II.3a.

$$(\hat{\mathbf{x}}, \omega)_{\text{prédiction}} = (\hat{\mathbf{x}}, \omega)_i + ds \frac{(\hat{\mathbf{x}}, \omega)_i - (\hat{\mathbf{x}}, \omega)_{i-1}}{\|(\hat{\mathbf{x}}, \omega)_i - (\hat{\mathbf{x}}, \omega)_{i-1}\|} \quad (\text{II.35})$$

Cette méthode, simple et robuste, peut cependant mener à des prédictions éloignées de la solution dans des zones de forte courbure, ce qui implique de réaliser plus d'itérations afin de converger, et donc une résolution ralentie. Il peut alors être intéressant de mettre en place une variation du pas de continuation  $ds$  en fonction du nombre d'itérations du solveur.

**Prédiction tangente** La prédiction par la tangente s'obtient par un développement de Taylor à l'ordre 1 de l'équation (II.33) au niveau du dernier point convergé tel que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}_i, \omega_i) \Delta \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega}(\hat{\mathbf{x}}_i, \omega_i) \Delta \omega = 0 \quad (\text{II.36})$$

avec les variations définis telles que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{\text{prédiction}} &= \hat{\mathbf{x}}_i + \Delta \hat{\mathbf{x}} \\ \omega_{\text{prédiction}} &= \omega_i + \Delta \omega \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$



L'utilisation de l'équation de fermeture (II.34) permet alors de déterminer les incréments

$$\Delta\omega = \frac{\pm ds}{\sqrt{1 + \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \right\|^2}} \quad (\text{II.38})$$

$$\Delta\hat{\mathbf{x}} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \Delta\omega$$

Le sens de parcours de la courbe ( $\pm ds$ ), selon les  $\omega$  croissants ou décroissants, peut être déterminé à l'aide d'un calcul de déterminant [43, 103], ou encore en comparant les directions des 2 prédictions précédentes [37, 84]. Cette méthode, bien que très efficace, pêche par son coût numérique élevé, notamment l'inversion de la matrice jacobienne du système par rapport aux variables  $\hat{\mathbf{x}}$  pour le calcul des incréments.

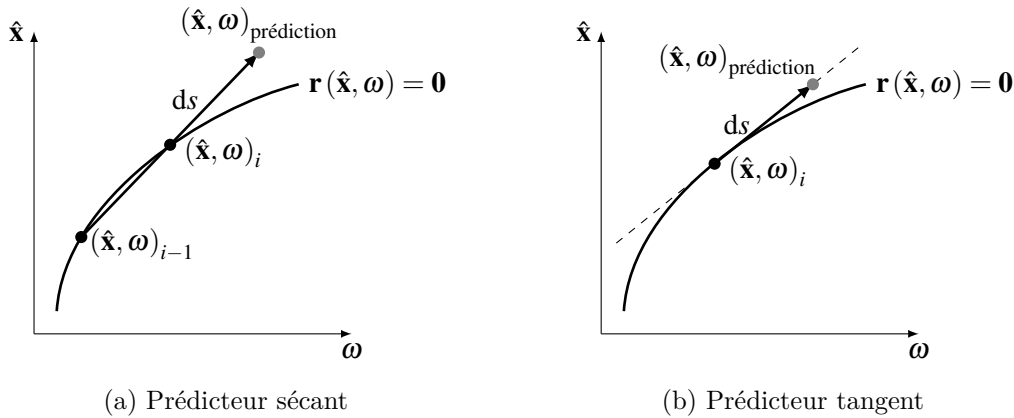


Figure II.3 – Différents types de prédicteurs

## 2 Phénoménologie non-linéaire

On présente ici différents aspects spécifiques associés aux systèmes non-linéaires. On s'intéresse dans un premier temps à la stabilité des solutions périodiques de tels systèmes, en présentant deux méthodes d'étude effective de la stabilité. Le cas des résonances secondaires est ensuite abordé avec les définitions des différentes configurations possibles. Enfin, l'extension de la notion de mode au cas non-linéaire est présenté.

### 2.1 Stabilité locale des solutions périodiques

La stabilité des systèmes mécaniques est un thème abordée depuis des siècles. Il a cependant connu un regain de popularité au XVIII<sup>e</sup> siècle avec l'étude de la stabilité du système solaire. Dans leurs travaux, Liapounov [74] et Poincaré proposent des définitions de la stabilité d'un système différentiel. Ces définitions restent malgré tout très générales et assez peu adaptées à l'étude des systèmes qui nous intéressent ici. Il existe cependant des méthodes permettant de statuer sur la stabilité locale d'une solution, notamment par l'étude du système linéarisé autour de la solution perturbée, cela étant rendu possible par le théorème de Hartman-Grobman [84] qui justifie l'équivalence entre l'étude du

système perturbé et celle de la perturbation. Dans la suite nous présentons deux méthodes permettant de déterminer la stabilité locale d'une solution : la théorie de Floquet, basée sur l'étude des valeurs propres de la matrice de monodromie de la solution, et la méthode de Hill, adaptée à une étude dans un cadre fréquentiel.

### 2.1.1 Théorie de Floquet

Soit  $\mathbf{y}_p(t)$  une solution périodique de (II.2) de période  $T$ , et soit  $\mathbf{y}(t)$  cette même solution perturbée par l'ajout du terme  $\mathbf{z}(t)$  telle que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{z}(t) \quad (\text{II.39})$$

En injectant  $\mathbf{y}(t)$  dans l'équation générale (II.2), et en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 autour de  $\mathbf{y}_p(t)$ , on obtient un système différentiel par rapport à la perturbation  $\mathbf{z}$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_p) \mathbf{z}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{z}(t) \quad (\text{II.40})$$

avec

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p) \right] & -\mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p) \right] \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

la matrice jacobienne du système évaluée au point  $\mathbf{y}_p$ . De cette manière,  $\mathbf{A}$  hérite du caractère périodique de  $\mathbf{y}_p$  tel que  $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t)$ , sans pour autant que  $T$  soit sa période minimale [84], et l'équation (II.40) représente ainsi un système différentiel linéaire à coefficients périodiques qu'il est possible de résoudre grâce à la théorie de Floquet. Ce système de dimension  $2n$  admet  $2n$  solutions linéairement indépendantes  $\mathbf{z}_i$  appelées **solutions fondamentales** qui forment la **matrice fondamentale**  $\mathbf{Z}$  telle que

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) & \mathbf{z}_2(t) & \cdots & \mathbf{z}_{2n}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Par définitions, cette matrice est solution de (II.40) et tire de  $\mathbf{A}$  sa périodicité,  $\mathbf{Z}(t+T)$  est donc aussi une matrice fondamentale du système (II.40). Il en découle que, l'espace des solutions de (II.40) étant généré par  $\mathbf{Z}(t)$ ,  $\mathbf{Z}(t+T)$  est une combinaison linéaire des  $\mathbf{z}_i(t)$ , ce qui peut s'écrire

$$\mathbf{Z}(t+T) = \mathbf{Z}(t) \mathbf{\Phi} \quad (\text{II.43})$$

où  $\mathbf{\Phi}$  est la matrice de monodromie du système de taille  $(2n \times 2n)$ , constante mais non-unique car dépendante de la matrice fondamentale génératrice. Cette matrice revêt un intérêt particulier car elle permet de statuer sur la stabilité de la solution périodique  $\mathbf{y}_p(t)$ . En effet, par applications successives de la relation (II.43), il est possible d'écrire que

$$\mathbf{Z}(t+mT) = \mathbf{Z}(t) \mathbf{\Phi}^m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (\text{II.44})$$

En supposant de plus que  $\Phi$  est diagonalisable, on peut écrire

$$\Phi = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & \\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_{2n} \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice des vecteurs propres de  $\Phi$ , et  $\{\rho_i\}_{1 \leq i \leq 2n}$  l'ensemble de ses valeurs propres. En effectuant le changement de variable  $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}$ , il vient

$$\mathbf{V}(t + mT) = \mathbf{V}(t)\mathbf{D}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t)\rho_1^m & \mathbf{v}_2(t)\rho_2^m & \cdots & \mathbf{v}_{2n}(t)\rho_{2n}^m \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

et 3 cas se présentent alors pour les valeurs propres de  $\Phi$ , aussi appelées **multiplicateurs de Floquet** ou **caractéristiques** :

- $\max_k |\rho_k| < 1$  : l'amplitude de la perturbation décroît vers 0 et la solution  $\mathbf{y}_p$  est asymptotiquement stable ;
- $\max_k |\rho_k| > 1$  : l'amplitude de la perturbation tend vers l'infini et la solution  $\mathbf{y}_p$  est instable ;
- $\max_k |\rho_k| = 1$  : la perturbation est périodique et il n'est pas possible de conclure à une quelconque stabilité à ce niveau.

Le traitement de la stabilité qui vient d'être énoncé concerne spécifiquement le cas d'un système non-autonome (II.2). Dans le cas d'un système autonome, il existe nécessairement un coefficient de Floquet unitaire [84] et l'indétermination de la stabilité intervient alors si au moins 2 coefficients de Floquet se situent sur le cercle unité.

D'une manière plus pratique, le calcul de la matrice de monodromie se déduit de l'équation (II.43) en se plaçant à  $t = 0$

$$\mathbf{Z}(T) = \mathbf{Z}(0)\Phi \quad (\text{II.47})$$

De cette manière, en imposant  $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}_{2n}$ , il vient  $\Phi = \mathbf{Z}(T)$ . On va pouvoir ainsi calculer la matrice de monodromie par intégration temporelle de l'équation (II.40) sur une seule période en imposant successivement en conditions initiales les vecteurs de la matrice identité. Il ne restera alors plus qu'à concaténer les différentes solutions obtenues à l'instant  $T$  afin de construire  $\Phi$ .

La détermination de la stabilité d'une solution par théorie de Floquet qui vient d'être faite offre l'avantage d'une certaine facilité de mise en place, mais pêche par son coût numérique lorsque le nombre d'inconnues augmente, du fait de l'intégration numérique. Afin de pallier ce désavantage, une méthode d'étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel est présentée dans la suite avec la méthode de Hill. Celle-ci permet de statuer de la stabilité d'une solution à moindre coût lorsqu'elle est utilisée de paire avec la HBM.

### 2.1.2 Méthode de Hill

La méthode de Hill consiste, comme la théorie de Floquet, à perturber la solution périodique à étudier et à déterminer le comportement de la perturbation, mais cette fois-ci directement dans le domaine fréquentiel. Soient  $\mathbf{x}_p(t)$  la solution périodique de l'équation (II.1) dont on cherche à établir la stabilité, et  $\mathbf{p}(t)$  la perturbation appliquée à celle-ci

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{p}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{z}(t)e^{\lambda t} \quad (\text{II.48})$$

La stabilité de  $\mathbf{x}_p(t)$  va alors dépendre du terme  $\lambda$ , pilotant le comportement de la perturbation.  $\mathbf{p}(t)$  étant supposée de même période que  $\mathbf{x}_p(t)$ , il est donc possible de décomposer la perturbation selon la même base harmonique que la solution

$$\mathbf{p}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{Q}(t) \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{II.49})$$

et ainsi écrire  $\mathbf{x}(t)$  sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t) \left( \hat{\mathbf{x}}_p + e^{\lambda t} \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (\text{II.50})$$

Il est donc possible d'appliquer la procédure d'équilibrage harmonique à l'équation (II.1) dans laquelle on a substitué la solution (II.48). On obtient donc l'équation générale de la HBM associée

$$\mathbf{Z} \hat{\mathbf{x}}_p + e^{\lambda t} \left( \mathbf{Z} + \lambda \mathbf{\Lambda}_1 + \lambda^2 \mathbf{\Lambda}_2 \right) \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}} \left( \hat{\mathbf{x}}_p + e^{\lambda t} \hat{\mathbf{z}} \right) = \hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}} \quad (\text{II.51})$$

avec

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & & \\ & \mathbf{\Lambda}_{1,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{\Lambda}_{1,N_h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_{1,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2k\omega \mathbf{M} \\ -2k\omega \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

En effectuant un développement de Taylor au premier ordre des termes non-linéaires

$$\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}} \left( \hat{\mathbf{x}}_p + e^{\lambda t} \hat{\mathbf{z}} \right) = \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}} \left( \hat{\mathbf{x}}_p \right) + e^{\lambda t} \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \left( \hat{\mathbf{x}}_p \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{II.54})$$

et en utilisant l'hypothèse selon laquelle  $\mathbf{x}_p(t)$  est solution de l'équation générale de la HBM (II.25), on obtient finalement le problème aux valeurs propres

$$\left( \mathbf{\Lambda}_0 + \lambda \mathbf{\Lambda}_1 + \lambda^2 \mathbf{\Lambda}_2 \right) \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (\text{II.55})$$

dans lequel

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{Z} + \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \left( \hat{\mathbf{x}}_p \right) \quad (\text{II.56})$$

Il a été montré par Moore [80] que les multiplicateurs de Floquet du système correspondent aux  $2n$  valeurs propres dont la partie imaginaire est la plus faible en module. Comme pour la théorie de Floquet, afin de statuer sur la stabilité de la solution il est nécessaire d'envisager 3 cas de figures :

- $\max_k (\operatorname{Re}(\lambda_k)) < 0$  : la perturbation tend vers 0 et la solution est stable ;
- $\max_k (\operatorname{Re}(\lambda_k)) > 0$  : la perturbation tend vers l'infini et la solution est instable ;
- $\max_k (\operatorname{Re}(\lambda_k)) = 0$  : la perturbation est périodique et il n'est pas possible de conclure sur la stabilité de la solution à ce niveau.

Cette méthode permet donc à moindre coût, moyennant la connaissance de la jacobienne des efforts non-linéaires, de statuer sur la stabilité d'une solution calculée par balance harmonique. Cependant, comme nous le verrons plus tard, cette méthode surestime les zones d'instabilités, comme le montre Guskov [44]. Afin de palier à cette faiblesse, Lazarus et Thomas [70, 111] ont proposés une variante de cette méthode, couplant cette approche harmonique à celle de la théorie de Floquet pour ce qui est de la forme de la perturbation, et ont obtenus des résultats similaires à ceux de la théorie de Floquet avec un gain de temps de l'ordre de 4.

**Complément sur la théorie de Floquet : Notion de bifurcation** Nous avons pu présenter jusqu'à présent des méthodes de suivi des solutions par continuation du problème résolu par équilibrage harmonique, ainsi que des méthodes permettant de statuer sur la stabilité de ces solutions. Durant un processus de continuation, la stabilité de la solution peut être amenée à changer ce qui donne lieu à des phénomènes dits de bifurcation [84] qui vont dépendre de la manière dont les multiplicateurs de Floquet vont quitter le cercle unité. Il faut alors considérer 3 scénarios comme illustrés sur la figure II.4.

- Un multiplicateur quitte le cercle unité par  $+1$  (comme illustré en **rouge** sur la figure II.4) : c'est le cadre d'une instabilité de type **cyclic fold**. C'est un cas extrêmement courant en dynamique non-linéaire et il correspond au point de coalescence de 2 solutions, l'une stable et l'autre instable, qui se détruisent mutuellement. Il n'existe généralement pas d'autre solution que les 2 mises en jeu dans le voisinage d'un tel point, ce qui peut mener à une forte discontinuité de la solution, aussi appelé phénomène de saut, possiblement critique. Dans le vocabulaire de la continuation, cette instabilité est aussi appelé **point de retournement**. Cette configuration peut aussi correspondre à une instabilité de type **rupture de symétrie**, dans le cas où la solution périodique est symétrique, i.e. invariante selon une certaine transformation. La bifurcation se caractérise alors par une rupture de la caractéristique de symétrie de la solution, qui peut se manifester par des phénomènes de localisations forcées. C'est notamment le cas des systèmes cycliques comme nous le verront plus tard.
- Un multiplicateur quitte le cercle unité par  $-1$  (comme illustré en **bleu** sur la figure II.4) : on est dans ce cas en présence d'une bifurcation de type **doublement de période**, ou **flip**. La solution ainsi bifurquée devient instable de période  $2T$ , et une branche de solution stable de période  $2T$  est créée, ce que l'on appelle une bifurcation **sur-critique**. A l'inverse, en un point de bifurcation **sous-critique**, une solution instable de période  $2T$  est détruite. Cette notion de bifurcation sur et sous-critique

est employée dès lors qu'une branche de solution est créée, ou détruite. A noter que ce deuxième cas de bifurcation sous-critique fait intervenir un phénomène de saut, comme pour le cas cyclic fold.

- Deux multiplicateurs complexes conjugués quittent simultanément le cercle unité (comme illustré en **vert** sur la figure II.4) : bifurcation de **Hopf de type II**, ou bifurcation de type **Neimark**. Dans ce cas, la bifurcation peut à nouveau être sur ou sous-critique avec la création, ou la destruction, d'une solution quasi-périodique stable, respectivement instable, et la présence d'un phénomène de saut.

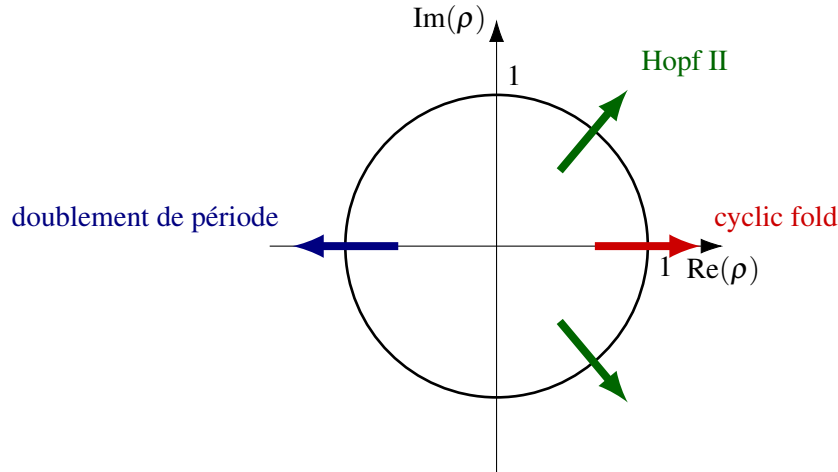


Figure II.4 – Schéma de bifurcation des solutions périodiques

## 2.2 Résonances non-linéaires

Les résonances principales, i.e. résonances linéaires, vont être particulièrement impactées par les effets non-linéaires en tant que maxima locaux en déplacement ou en vitesse. Cela va avoir des répercussions d'une part sur la pulsation de résonance qui va être dépendante de l'amplitude, notamment dans le cas des non-linéarités polynomiales avec des effets de raidissement ou d'assouplissement pour des déplacements importants comme nous le verrons dans la suite. On peut aussi citer les non-linéarités de frottement [58, 68] avec le passage de l'état collé à l'état glissant qui se caractérise par un décalage en fréquence selon l'amplitude des vitesses relatives. Ces effets vont aussi se répercuter de manière plus globale par des couplages de modes, la base des modes linéaires n'étant plus suffisante pour découpler les équations, rendant ainsi caduque le principe de superposition dans ce cadre. On présente dans la suite des configurations propices aux couplages modaux prenant places principalement en présence de non-linéarités polynomiales.

### 2.2.1 Résonances secondaires

Les résonances secondaires sont définies par des relations du type

$$p\Omega \approx q\omega_m, \quad (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad (\text{II.57})$$

où  $\Omega$  est la pulsation d'excitation et  $\omega_m$  une pulsation propre du système. Celles-ci peuvent être rencontrées sous 2 formes : les résonances sur et sous-harmoniques.

**Résonance sur-harmonique** Les résonances sur-harmoniques sont caractérisées par une réponse du système à une fraction unitaire d'une pulsation propre (II.58). Une telle configuration se retrouve naturellement pour les non-linéarités polynomiales, le développement des puissances des fonctions sinus et cosinus faisant intervenir les harmoniques.

$$\Omega \approx \frac{\omega_m}{p}, \quad p \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.58})$$

La méthode de l'équilibrage harmonique est particulièrement adaptée pour mettre en évidence ce genre de phénomènes, la base de projection pouvant être construite à partir des harmoniques de la pulsation d'excitation, ce qui sera le cas dans ce manuscrit. Il est alors nécessaire de considérer suffisamment d'harmoniques, au moins  $p$ , dans la décomposition.

**Résonance sous-harmonique** Les résonances sous-harmoniques se manifestent pour des excitations multiples d'une pulsation de résonance (II.59). La mise en évidence d'un tel phénomène est plus complexe et nécessite généralement la présence d'une résonance interne [101, 119], que nous présentons plus loin (2.2.3).

$$\Omega \approx q\omega_m, \quad q \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.59})$$

### 2.2.2 Résonances combinées

Les résonances combinées [85] sont une généralisation des résonances secondaires à plusieurs pulsations propres, la relation liant la pulsation d'excitation à celles-ci devenant

$$p\Omega = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k, \quad (p, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \quad (\text{II.60})$$

avec  $n$  le nombre de degrés de liberté,  $p$  et  $a_k$  tels que

$$p + \sum_{k=1}^n |a_k| = M, \quad M \in \mathbb{N} \quad (\text{II.61})$$

où  $M$  représente l'ordre de la non-linéarité plus 1. Ainsi, un système comportant une non-linéarité quadratique pourra expérimenté des résonances combinées du type  $\Omega \approx \omega_m \pm \omega_p$ , quand un système comportant une non-linéarité cubique le fera pour  $\Omega \approx \omega_m \pm \omega_p \pm \omega_q$  ou encore  $\Omega \approx \omega_m \pm 2\omega_p$ .

### 2.2.3 Résonance interne

Le phénomène de résonance interne intervient lorsqu'une relation du type (II.62) lie les pulsations propres des modes. Un échange d'énergie va alors se mettre en place entre ces modes et la déformée de chacun va pouvoir participer au mouvement général de la structure.

$$\sum_{k=1}^N m_k \omega_k \approx 0, \quad (m_1, m_2, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N \quad (\text{II.62})$$

De telles propriétés existent naturellement dans les structures à symétrie cycliques pour ce qui est des modes dégénérés, la relation étant alors  $\omega_p = \omega_q$ , et ont été notamment étudiées par Samaranayake [102] ou Georgiades [30], ou plus généralement les structures à

symétrie de révolution comme les plaques circulaires [113].

Il est à noter que toutes les relations qui viennent d'être présentées sont à mettre en regard de la dépendance en amplitude des pulsations. Ainsi, des pulsations ne remplissant pas les conditions de résonance interne ou combinée dans le cadre linéaire peuvent, à plus hautes amplitudes, se trouver liées par de telles relations [71].

### 2.3 Analyse fréquentielle non-linéaire : notion de mode non-linéaire

La notion de mode linéaire est un outil extrêmement puissant permettant de statuer sur les éléments propres du système que sont les pulsations de résonance et les déformées modales. Ces éléments décrivent exactement l'espace des solutions du système linéaire et sont donc un outil d'étude privilégié. L'extension d'une telle notion au système non-linéaire peut être problématique étant donné la dépendance des pulsations et déformées propres en amplitude. Cependant, des définitions ont été proposées notamment par Rosenberg [96-98] dans les années 60, dans le cadre de systèmes conservatifs bien spécifiques, et étendu par Shaw et Pierre à une classe de systèmes plus large [105, 106] au début des années 90.

#### 2.3.1 Définitions

**Définition de Rosenberg : cas d'un système conservatif** Rosenberg définit sa notion de mode non-linéaire dans un cadre bien précis à savoir un système conservatif, i.e. non-amorti, comportant des non-linéarités impaires. Dans ce cadre, il définit un mode non-linéaire selon 3 critères :

1. tous les degrés de liberté vibrent à la même fréquence ;
2. les degrés de liberté atteignent leurs maxima et passent par 0 simultanément : ils vibrent à l'"unisson" ;
3. les trajectoires de tous les degrés de liberté du système sont paramétrables par rapport à un degré de liberté quelconque : ce sont les relations modales

$$x_k = g_k(x_p), k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus p \quad (\text{II.63})$$

Le 3<sup>ème</sup> critère permet de se ramener à la résolution d'un système différentiel dont les  $n - 1$  inconnues sont les fonctions  $g_k$ . Il est rarement possible de déterminer l'expression analytique de ces fonctions, dont on cherche en général une approximation à l'aide d'un développement polynomial. La connaissance des  $g_k$  permet alors de représenter les modes non-linéaires dans l'espace des phases, i.e. l'espace associé aux degrés de liberté. Il faut alors considérer 2 cas :

- le mode est dit **similaire** : la représentation dans l'espace des phases est alors une droite. Dans ce cas, les relations modales sont simplement des relations de proportionnalités du type  $x_k = \alpha_k x_p$ , les  $\alpha_k$  étant des réels, et la forme du mode ne change pas avec l'amplitude, elle reste identique à la déformée du mode linéaire en 0 ;
- le mode est dit **non-similaire** : les relations liants les degrés de liberté ne sont plus linéaires et la forme du mode change avec l'amplitude de ceux-ci. Sa représentation dans l'espace des phases est alors une courbe passant par 0. Il est à noter que dans ce cas, le mode linéaire à une amplitude donnée est tangent au mode non-linéaire.



Enfin, la propriété d'orthogonalité du mode vis-à-vis des équipotentielles est toujours respectée, bien que l'énergie potentielle ne soit plus une forme quadratique.

Cette définition, bien que restrictive, a donné lieu à de nombreux travaux que ce soit numériques [56, 61, 108, 120, 121] ou encore pour de l'identification non-linéaire expérimentale [33, 88, 89].

**Définition de Shaw et Pierre : extension aux systèmes non-conservatifs** On considère dans ce cas le système de  $2n$  équations sous forme d'état (II.2) sans hypothèse a priori sur la non-linéarité. L'idée est ici de paramétrer en plus du déplacement, la vitesse vis-à-vis des déplacement et vitesse d'un degré de liberté  $p$  tels que

$$x_k = g_k(x_p, \dot{x}_p), \dot{x}_k = h_k(x_p, \dot{x}_p), k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus p \quad (\text{II.64})$$

Le mode non-linéaire est ainsi défini sur une **variété invariante non-linéaire** (*non-linear invariant manifold* en anglais) **de dimension 2**. A nouveau, afin de caractériser le mode non-linéaire, il sera nécessaire de déterminer les  $2n - 2$  nouvelles inconnues du problème que sont les fonctions  $g_k$  et  $h_k$  par substitution des dérivées des relations modales (II.64) dans le système général. La problématique de la solution analytique se pose à nouveau, qu'un développement polynomial permet de contourner. De plus, la propriété de tangence au point d'équilibre par rapport au mode linéaire est vérifiée dans ce cas aussi. Bien que plus générale que la définition de Rosenberg, cette approche admet quelques faiblesses ayant amenées à des travaux d'améliorations, comme pour la gestion des résonances internes [57].

Ces deux définitions, bien qu'englobant une grande variété de systèmes, restent analytiques et donc très peu adaptées à une application sur des systèmes complexes. Des méthodes numériques, comme la méthode de tir [30, 31, 90, 94, 95] et l'équilibrage harmonique [58, 68, 69] permettent de traiter de tels cas. Nous proposons de présenter ici une adaptation de la méthode d'équilibrage harmonique à la détermination de solutions périodiques libres d'un système conservatif.

### 2.3.2 Détermination par équilibrage harmonique

Nous nous intéressons ici à la détermination des solutions périodiques du système libre et conservatif suivant

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0} \quad (\text{II.65})$$

où on a supposé que les termes non-linéaires étaient uniquement fonction des déplacements. L'application de l'approximation de l'équilibrage harmonique (II.19) à ce système mène à l'équation

$$\mathbf{Z}(\omega)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{0} \quad (\text{II.66})$$

dans laquelle la matrice de raideur dynamique est de la forme

$$\mathbf{Z}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & & & \\ & \mathbf{Z}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{Z}_{N_h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (p\omega)^2 \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} - (p\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{II.67})$$

avec l'absence de couplage entre les termes sinus et cosinus d'un même harmonique. Le système à résoudre comporte donc  $(2N_h + 1)n$  équations et  $(2N_h + 1)n + 1$  inconnues. Afin de fermer ce système, il est possible d'utiliser une équation de phase en imposant une vitesse initiale nulle à un degré de liberté quelconque  $p$ , ce qui peut se traduire par

$$\dot{x}_p(0) = \omega \sum_{k=1}^{N_h} kb_k = 0 \quad (\text{II.68})$$

Enfin, de la même manière que pour une fonction de réponse en fréquence, l'initialisation de cette procédure peut être réalisée à basse amplitude, où les termes non-linéaires sont négligeables, à l'aide du mode linéaire. On fixe alors la pulsation initiale sur celle du mode linéaire et les coefficients cosinus  $\mathbf{a}_1$ , ou sinus  $\mathbf{b}_1$ , de la première harmonique sur la déformée du mode, pondérée d'un coefficient faible afin de se placer à basse amplitude, tous les autres termes harmoniques étant fixés à 0.

Une extension de cette méthode a été proposée par Laxalde et Thouverez [68, 69] afin de traiter les systèmes non-conservatifs avec la notion de **mode complexe non-linéaire** qui permet de prendre en compte la variation de la pulsation propre en fonction de l'amortissement du système en utilisant la forme complexe de celle-ci (II.69). Cette méthode a depuis donnée lieu à de nombreuses études, notamment en ce qui concerne le frottement en pied de pale [58, 100].

$$\lambda = -\beta + i\omega \quad (\text{II.69})$$

### 2.3.3 Complément sur les modes non-linéaires : gestion des bifurcations

Nous avons présenté précédemment les notions de stabilité et de bifurcation (II.2.1) appliquées aux systèmes non-autonomes, i.e. sous régime forcé. Le même genre d'étude est applicable dans le cadre des systèmes autonomes, l'étude portant alors, dans notre cas, sur le mode non-linéaire. Ce genre d'étude est extrêmement intéressante car elle permet de déterminer les éléments de dynamique intrinsèque de la structure, parmi lesquels les points de bifurcation, et ainsi de pouvoir statuer en amont de la construction des courbes de réponse en fréquence de certains comportements spécifiques.

Dans ce cadre, un phénomène de bifurcation apparaît lorsque la matrice jacobienne du système (II.66) vis-à-vis des inconnues  $\hat{\mathbf{x}}$ , notée  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}$ , devient singulière, c'est à dire qu'au moins une de ses valeurs propres devient nulle. De même, nous noterons  $\mathbf{J}_\omega$  le vecteur des dérivées de ce même système par rapport à  $\omega$ . Soit  $(\omega_b, \hat{\mathbf{x}}_b)$  un point de bifurcation. Il faut alors considérer 2 cas [84] :

- $\mathbf{J}_\omega$  n'appartient pas à l'image de  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}$  : le point de bifurcation est un **point de retournement**, une méthode de continuation arc-length suffit afin de passer ce point ;

- $\mathbf{J}_\omega$  appartient à l'image de  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}$  : le point de bifurcation est du type **pitchfork** ou **point d'embranchement**. Il existe alors au moins 2 vecteurs  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  tels que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}} & \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}} & \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \mathbf{t}_2 = \mathbf{0} \quad (\text{II.70})$$

ce sont les vecteurs tangents au point de bifurcation des différentes solutions.

D'un point de vue pratique, ce point sera localisé durant la continuation en observant le changement de signe du déterminant de la matrice jacobienne. Suite à cette estimation, et afin de déterminer plus finement le point de bifurcation, Moore et Spence [84] proposent de résoudre le système (II.71) à l'aide d'une méthode de Newton. La première équation de ce système assure que le point recherché est bien solution ; la deuxième assure le caractère de point de bifurcation ; la troisième équation permet d'éviter la solution triviale  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\omega_b, \hat{\mathbf{x}}_b) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}(\omega_b, \hat{\mathbf{x}}_b) \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\top \mathbf{v} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

Le point de bifurcation ainsi déterminé, il est alors possible de calculer la matrice jacobienne et les tangentes associées. Il est alors tout à fait possible d'utiliser ces tangentes comme directions de prédiction dans un processus de continuation afin de déterminer les branches de bifurcation.

### 3 Étude d'un système cyclique simple

Nous allons maintenant appliquer certaines des méthodes présentées dans ce chapitre à un système cyclique simple. Le choix s'est porté sur ce type de système d'une part car il en sera question plus tard dans ce manuscrit ; et d'autre part, ce type de système faisant intervenir un large panel de comportements spécifiques aux études non-linéaires, il sera intéressant d'en exhiber un certain nombre ici.

#### 3.1 Présentation du système

Comme nous avons pu le voir, une structure est dite à symétrie cyclique si elle comporte un schéma, appelé secteur, qui se répète tel que la structure se "referme" sur elle-même. Dans ce cadre, nous considérerons dans cette étude un système composé de masses et de ressorts, comme illustré sur la figure II.5. Un tel système peut être assimilé, comme le montre Grolet [40] sous certaines conditions, à des pales couplées réduites selon leur premier mode de flexion. L'équation générale du système peut donc s'écrire sous la forme standard suivante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \quad (\text{II.72})$$

avec

$$\mathbf{M} = m\mathbf{I}_4 \quad (\text{II.73})$$

$$\mathbf{C} = c\mathbf{I}_4 \quad (\text{II.74})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k + 2k_c & -k_c & 0 & -k_c \\ -k_c & k + 2k_c & -k_c & 0 \\ 0 & -k_c & k + 2k_c & -k_c \\ -k_c & 0 & -k_c & k + 2k_c \end{bmatrix} \quad (\text{II.75})$$

$$\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}(t)) = k_{\text{nl}} \mathbf{x}^3(t) \quad (\text{II.76})$$

et dont les caractéristiques sont données dans le tableau II.1.

Tableau II.1 – Données du système cyclique

$m$	$c$	$k$	$k_c$	$k_{\text{nl}}$
$1 \text{ kg.m.s}^{-1}$	$0,1 \text{ N.s.m}^{-1}$	$1 \text{ N.m}^{-1}$	$2 \text{ N.m}^{-1}$	$1 \text{ N.m}^{-3}$

On peut remarquer que le couplage cyclique du système est réalisé au travers de la matrice de raideur linéaire  $\mathbf{K}$  (II.75) avec sa forme particulière circulante que l'on retrouve dans les structures cycliques [87].

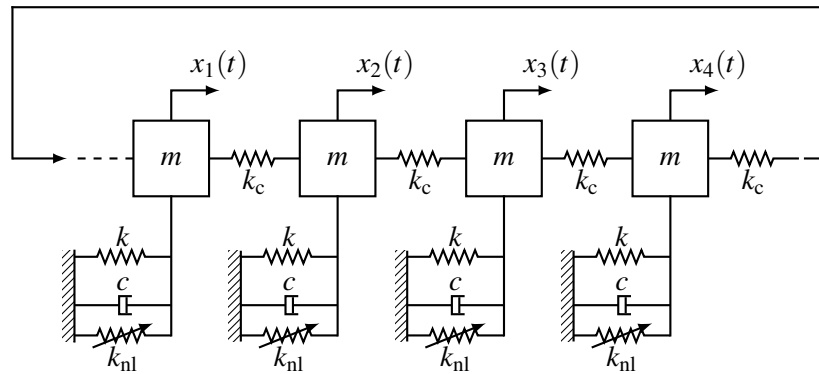


Figure II.5 – Schéma du système cyclique étudié

### 3.2 Étude linéaire

Ce type de système a déjà donné lieu à de nombreuses études par le passé [101, 118], et il est possible d'en déterminer les modes propres analytiquement en fonction du nombre de secteurs du système. Ainsi, pour un système comportant  $N_m$  masses, la pulsation propre associée au  $p^{\text{ème}}$  diamètre sera

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k_c}{m}(1 - \cos \theta_p)}, \quad \theta_p = \frac{2\pi p}{N_m} \quad (\text{II.77})$$

le nombre maximal de diamètres dépendant de la parité de  $N_m$ . Les vecteurs propres sont

quant à eux donnés par les expressions

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^\top \\
\phi_p^c &= [\cos \theta_p \quad \cos 2\theta_p \quad \cdots \quad \cos N_m \theta_p]^\top \\
\phi_p^s &= [\sin \theta_p \quad \sin 2\theta_p \quad \cdots \quad \sin N_m \theta_p]^\top \\
\phi_{N_m/2} &= [\cos \pi \quad \cos 2\pi \quad \cdots \quad \cos N_m \pi]^\top \text{ si } N_m \text{ pair}
\end{aligned} \tag{II.78}$$

où  $\phi_p^c$  et  $\phi_p^s$  sont les composantes cosinus et sinus des modes dégénérés. Les grandeurs déterminées numériquement sont en accord avec les formules (II.77) et (II.78), que ce soit pour les pulsations (voir tableau II.2) ou les vecteur propres, à une normalisation près, illustrés sur la figure II.6. Comme attendu, le système comportant 4 masses, celui-ci verra ses éléments propres composés de 2 modes non-dégénérés, à 0 et 2 diamètres, et 2 modes dégénérés à 1 diamètre. On peut noter de même la relation de proportionnalité  $\omega_2 = 3\omega_0$  entre les pulsations des diamètres 0 et 2 qui pourrait résulter en une résonance interne entre ces deux modes.

Tableau II.2 – Pulsations propres du système cyclique

Diamètres	Pulsation [rad.s <sup>-1</sup> ]
0	1
1	2,2361
2	3

### 3.3 Étude non-linéaire

L'étude non-linéaire qui va être menée sera réalisée au moyen de la HBM avec 5 harmoniques ( $N_h = 5$ ), 256 pas de temps pour l'AFT ( $N_t = 256$ ) et une méthode de continuation de type arc-length.

#### 3.3.1 Réponse forcée

Nous allons ici considérer une excitation sur une seule masse, la numéro 1 en l'occurrence, selon le premier harmonique tel que

$$\mathbf{f}^{\text{ext}}(t) = A \cos(\omega t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{II.79}$$

De cette manière, le vecteur des efforts externes dans le domaine fréquentiel  $\hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}}$  ne comportera qu'une seule composante non-nulle, celle associée au coefficient  $\mathbf{a}_1$  de la première masse, de valeur  $A$ . Les courbes obtenues pour plusieurs amplitudes d'excitation aux niveaux des 4 masses sont données figure II.7. La première remarque qui peut être faite est l'effet rigidifiant global de la non-linéarité cubique sur le système, les pics de résonances se décalant vers les hautes fréquences avec l'augmentation de l'amplitude. C'est un effet qui

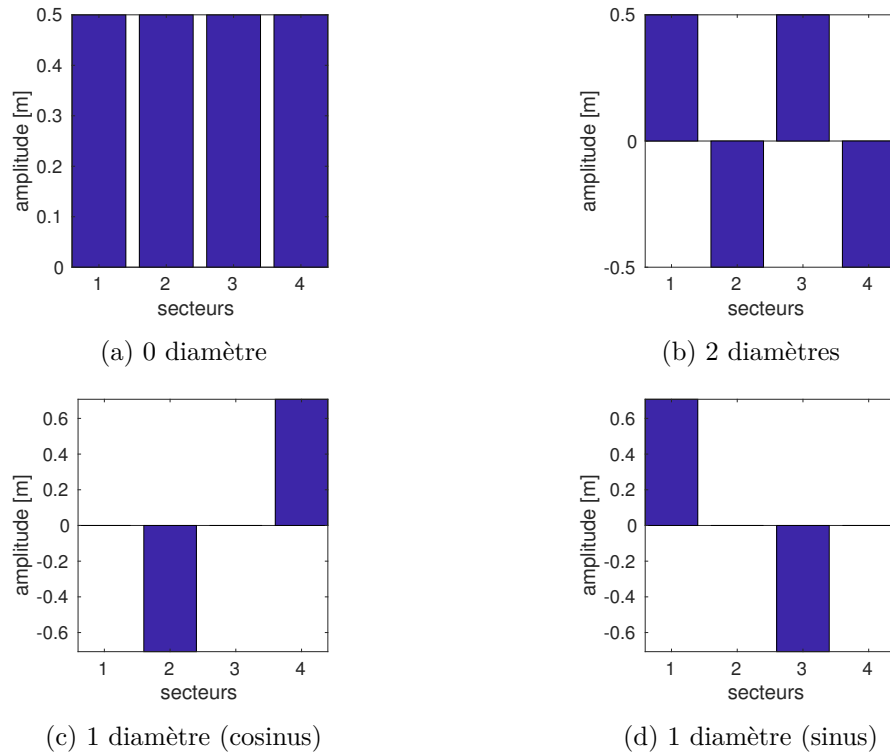


Figure II.6 – Modes linéaires du système cyclique. Haut : modes non-dégénérés. Bas : modes dégénérés.

se vérifie de manière générale pour les non-linéarités polynomiales impaires à coefficients positifs. On peut aussi remarquer un changement assez brusque au niveau des fonctions de réponse en fréquence pour des amplitudes d'excitation  $A = 2\text{ N}$  et plus. L'amplitude de la masse 1 augmente subitement quand celle des autres masses diminue fortement, ce que l'on appelle un phénomène de localisation forcée. Celui-ci est mis en valeur sur la figure II.8 dans la plage de pulsation  $\omega = [3\ 5]$  pour une amplitude d'excitation de  $2\text{ N}$ . La figure II.8b représente l'amplitude des masses au cours d'une période au niveau du pic de résonance, et on peut observer une nette concentration des déplacements sur la masse 1, dont l'échelle est donnée sur la droite de la figure. Cela est dû à un phénomène de bifurcation du mode à 2 diamètres que nous mettrons plus en évidence dans la suite. Il est intéressant de noter que la déformée semble garder la structure du mode à 2 diamètres. Enfin, on peut observer des phénomènes de résonances sur-harmoniques pour des pulsations inférieures à 1, notamment pour  $\omega = 1\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  qui correspond à une résonance sur-harmonique d'ordre 3 du mode à 2 diamètres.

Une étude à l'aide de la théorie de Floquet est présentée sur la figure II.9 pour une excitation de  $2\text{ N}$ , avec d'une part la stabilité sur la courbe de réponse en fréquence de la masse 1 (voir figure II.9a), et d'autre part l'évolution des coefficients de Floquet vis-à-vis du cercle unité (figure II.9b). Les deux premières pertes de stabilité, au niveau des deux premiers pics de résonance, sont dues à des bifurcations de type point de retournement et se traduisent par des phénomènes de sauts lors du parcours de la courbe. Le troisième pic comporte plusieurs zones d'instabilité distinctes. La première, dans le sens "montant" du pic, est mixte entre d'une part des zones de type point de retournement, et d'autre part des zones d'instabilité de Hopf de type 2; la seconde intervient au niveau du pic et

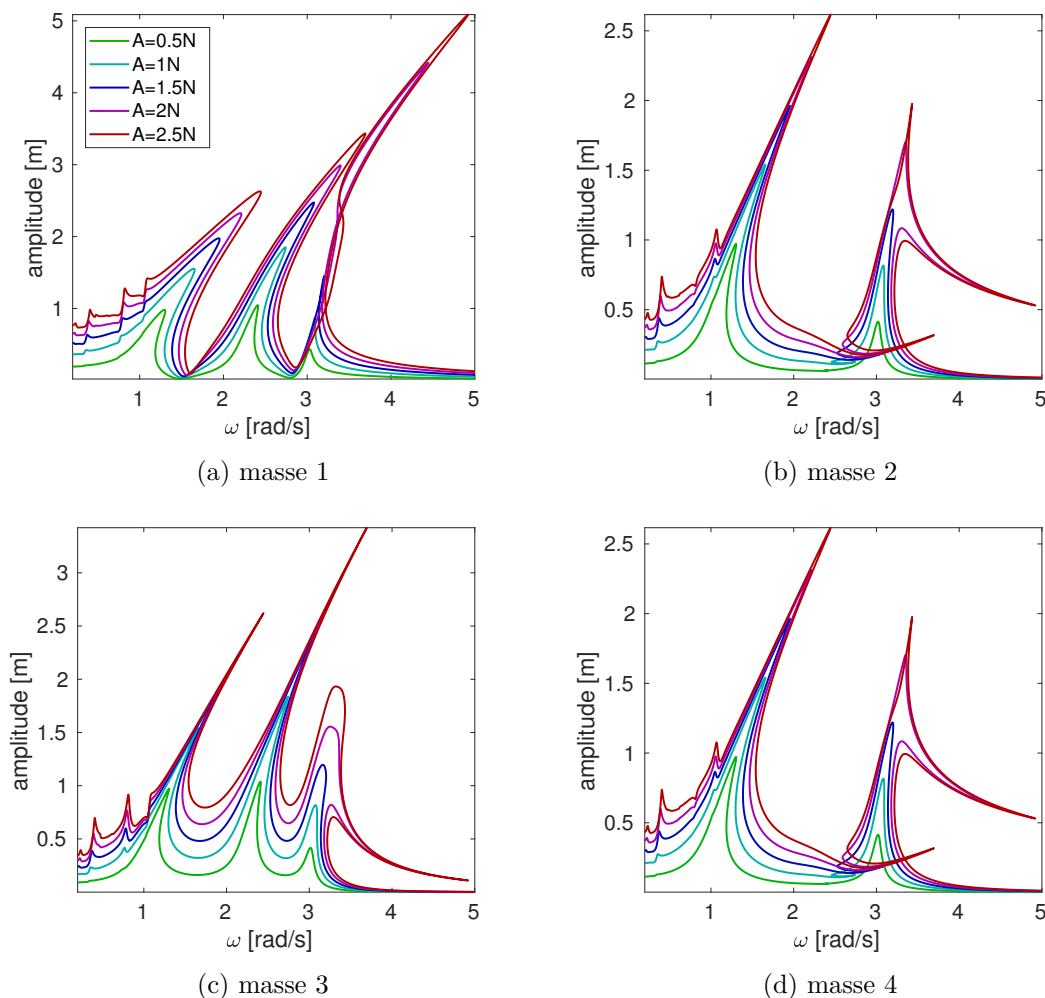


Figure II.7 – Réponses forcées du système cyclique non-linéaire pour différentes amplitudes de forçage

est un simple point de retournement. Pour en terminer sur la stabilité, la méthode de Hill a aussi été appliquée au système, dont le résultat est visible sur la figure II.10. Cette méthode semble donner des résultats corrects pour les modes à 0 et 2 diamètres, malgré une certaine sur-estimation des zones d'instabilité. Concernant le mode à 1 diamètre, le résultat obtenu est complètement erroné sur le bord gauche du pic, qui est sensé être stable selon la théorie de Floquet. Ce manque de précision est probablement dû au caractère double de ce mode, mais d'une manière générale la détermination de la stabilité par cette méthode est problématique comme le montre Guskov [44] notamment.

### 3.3.2 Excitation selon le mode à 2 diamètres

L'étude qui vient d'être faite montre la présence de phénomènes de bifurcations au niveau du mode à 2 diamètres. Afin d'approfondir cet aspect, une étude particulière au niveau de ce mode est menée dans ce qui suit. Pour cela, on applique un effort selon ce

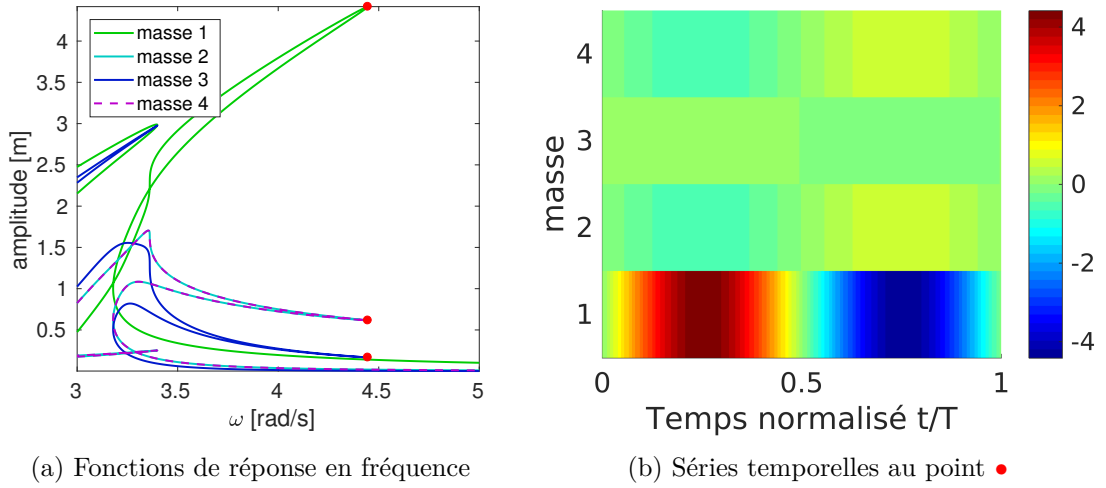


Figure II.8 – Mise en évidence d'un phénomène de localisation forcée ( $A = 2\text{ N}$ )

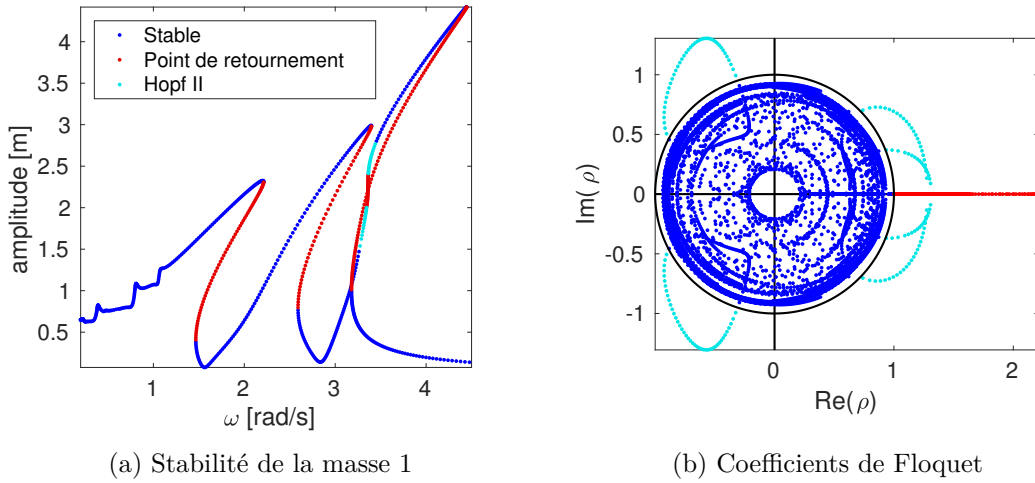


Figure II.9 – Stabilité au sens de Floquet ( $A = 2\text{ N}$ )

mode tel que

$$\mathbf{f}^{\text{ext}}(t) = A \cos(\omega t) \begin{bmatrix} 1 + \epsilon \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.80})$$

le paramètre  $\epsilon$  permettant de perturber la forme du mode rendant ainsi compte d'un chargement imparfait plus réaliste. Une telle excitation permet aussi de favoriser l'apparition de solutions annexes comme nous l'observerons.

Deux cas de chargements ont été envisagés. Le premier correspond au mode pur pour  $\epsilon = 0$ ; le second à une perturbation de 0,1 %, soit  $\epsilon = 0,001$ . Les résultats obtenus dans ces deux configurations sont donnés figure II.11. Pour une perturbation nulle, la réponse obtenue est un simple pic rigidifiant et toutes les masses vibrent à la même amplitude et en opposition de phase 2 à 2 comme prévu par le mode à 2 diamètres. Dans le cas perturbé, la



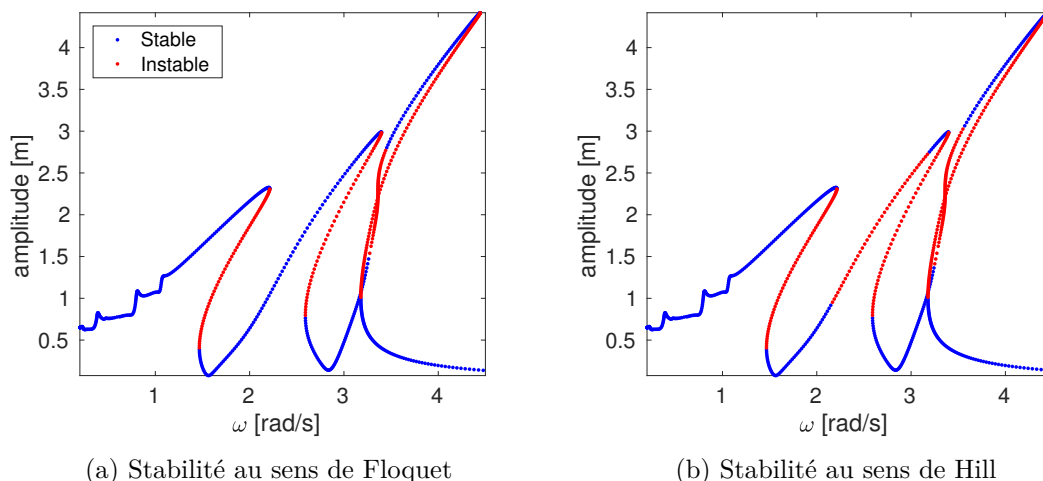


Figure II.10 – Comparaison des stabilités prédites par les méthodes de Floquet et Hill ( $A = 2N$ )

réponse est beaucoup plus riche. On peut notamment remarquer la présence des "poches" de solutions autour du pic de résonance du diamètre pur. Celles-ci sont issues de solutions autonomes associées à des bifurcations que la méthode de continuation parvient cependant à accrocher, comme cela est illustré sur la figure II.11b où on peut apprécier la manière dont les différentes branches sont gérées. De telles solutions ont pu être mises en évidence par Grolet sur un système similaire [40].

Dans le but d'affiner cet aspect de solutions associées aux bifurcations, le mode non-linéaire à 2 diamètres a été tracé sur cette même figure. Certaines zones de bifurcations ont pu être déterminées grâce au changement de signe de la matrice jacobienne (comme expliqué au paragraphe 2.3.3), c'est le cas de la bifurcation apparaissant aux alentours de  $\omega = 3,6 \text{ rad.s}^{-1}$ . Un focus sur celle-ci est disponible figure II.12 où on peut observer les déformées des différentes branches. La branche principale, en trait plein, laisse clairement apparaître un mode à 2 diamètres, comme le montre la figure II.12b. Les deux branches bifurquées, en pointillés, montrent quant à elles une localisation sur deux masses opposées, la 1 et la 3 (figure II.12c), et la 2 et la 4 (figure II.12d).

L'exemple qui vient d'être traité montre combien, même sur des systèmes très simples, les non-linéarités peuvent mener à des phénomènes complexes dus à la multiplicité des solutions. Cela se traduit par la présence de bifurcations pouvant conduire à l'apparition d'une ou plusieurs solutions stables ou instables. La détermination de la totalité de celles-ci est difficile et nécessite des méthodes dédiées. Dans le cadre des non-linéarités polynomiales, les méthodes d'homotopie [103] ou de base de Gröbner [37, 39, 42] peuvent être utilisées. Grolet [38] a aussi proposé une adaptation de la méthode des matrices de multiplication permettant de tirer partie des symétries des structures cycliques. Toutes ces méthodes restent cependant très lourdes et restreintes à des applications sur des systèmes comportant peu d'inconnues.

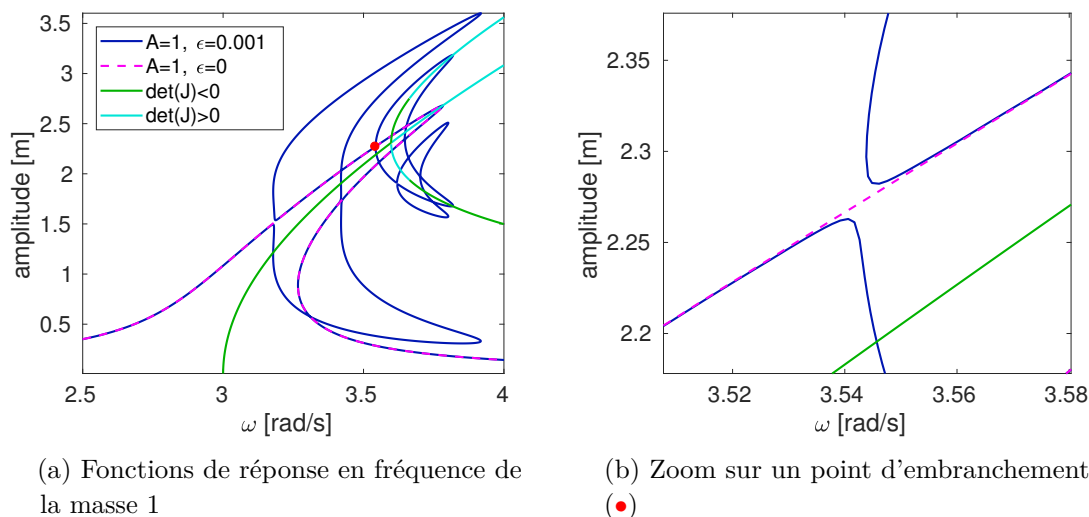
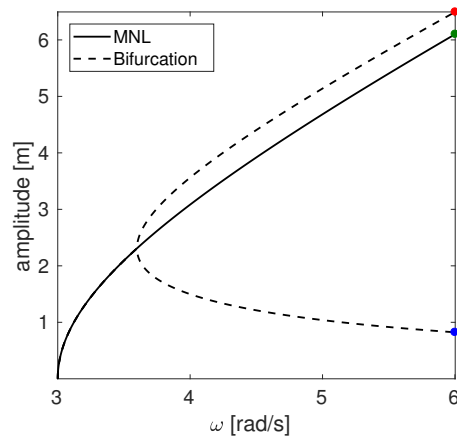


Figure II.11 – Mise en évidence des bifurcations du mode à 2 diamètres

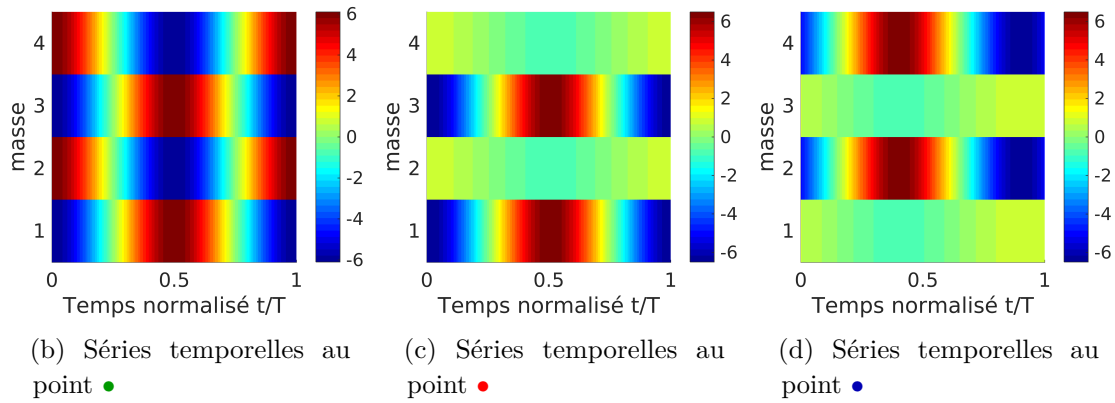
## Bilan du chapitre

La recherche des solutions périodiques par une méthode fréquentielle telle que l'équilibrage harmonique qui vient d'être présentée revêt un véritable intérêt par rapport aux méthodes conventionnelles temporelles. Celle-ci permet notamment de s'affranchir du régime transitoire mais nécessite en contre partie d'augmenter le nombre d'inconnues du problème. Cependant, elle ne permet pas de statuer correctement de la stabilité du système, au travers de la méthode de Hill, et il est nécessaire de faire appel à des méthodes temporelles telles que la détermination des multiplicateurs de Floquet.

Dans le cadre de systèmes simples comme celui qui vient d'être traité, la taille du système permet la détermination des solutions périodiques par la méthode de l'équilibrage harmonique dans un temps raisonnable. L'application d'une telle méthode à un système de grande taille est en revanche beaucoup moins aisée et il est alors nécessaire de faire appel à une procédure de réduction. Nous proposons dans le chapitre suivant de présenter de telles méthodes adaptées au traitement des non-linéarités en déplacements dont il est question dans ce manuscrit.



(a) Fonction de réponse en fréquence de la masse 1



(b) Séries temporelles au point ●

(c) Séries temporelles au point ●

(d) Séries temporelles au point ●

Figure II.12 – Comportement du système au niveau des différentes branches de solution du mode non-linéaire associé au mode à 2 diamètres

## Chapitre III

# Réduction des systèmes non-linéaires géométriques

On aborde dans ce chapitre la problématique de la réduction des systèmes mécaniques comportant des non-linéarités géométriques. Après une présentation de la méthodologie générale utilisée, basée sur une procédure de Galerkin, le cas non-linéaire est illustré au moyen d'un exemple de poutre bi-encastree. Différentes bases sont utilisées, telles que les modes linéaires, dérivées modales et modes compagnons, afin d'en évaluer l'efficacité et la robustesse. Ces bases sont facilement accessibles car issues de calculs simples, que ce soit un problème aux valeurs propres ou un chargement statique. Le chapitre se clôt par la présentation de la base POD plus complexe à mettre en œuvre car nécessitant une connaissance *a priori* du comportement dynamique du système complet.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Réduction par projection de Galerkin</b> . . . . .	<b>62</b>
1.1	Principe . . . . .	62
1.2	Application à la réduction de systèmes non-linéaires géométriques . .	63
<b>2</b>	<b>Bases de réduction</b> . . . . .	<b>68</b>
2.1	Exemple d'application : poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastree . . . . .	68
2.2	Réduction par les modes linéaires . . . . .	73
2.3	Réduction à l'aide des dérivées modales . . . . .	77
2.4	Réduction par les modes compagnons . . . . .	82
2.5	Réduction par Proper Orthogonal Decomposition (POD) . . . . .	86
	<b>Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>88</b>

---

## 1 Réduction par projection de Galerkin

La méthode de Galerkin est un outil extrêmement puissant et largement utilisé en mécanique numérique. Elle permet le passage d'une formulation continue du problème à une forme discrétisée de celui-ci. Cela est notamment à l'origine de la méthode des éléments finis dont bons nombres d'ouvrages décrivent la procédure [5, 24, 36, 131] et dont nous rappelons les principales étapes en annexe A. Le problème ainsi discrétisé peut comporter un très grand nombre d'inconnues pouvant mener à des difficultés numériques. Il peut alors être intéressant de projeter cette solution sur un espace de dimension inférieure à celui de départ et ainsi diminuer drastiquement le nombre d'inconnues du problème. C'est ce que propose la réduction par projection de Galerkin que nous présentons ici.

### 1.1 Principe

Considérons le système dynamique (III.1) sans rotation dans lequel ne sont pris en compte que les non-linéarités relatives aux déplacements.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \quad (\text{III.1})$$

Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des solutions  $\mathbf{x}$  de cette équation ; et soit  $\mathcal{V}$  un sous-espace de  $\mathcal{U}$  dont la matrice  $\Phi$  est une base. Il est alors possible de rechercher des solutions approchées  $\mathbf{x}_r$  de cette équation dans le sous-espace  $\mathcal{V}$  telles que

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_r(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (\text{III.2})$$

avec  $\mathbf{q}$  les nouvelles inconnues du problème, aussi appelées coordonnées généralisées. Du fait de l'approximation, ces nouvelles inconnues ne vérifient pas exactement (III.1) et mènent à l'apparition d'un terme résiduel  $\mathbf{r}$  tel que

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Phi\mathbf{q}(t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (\text{III.3})$$

Après cette première étape de projection, la méthode consiste à rechercher les coordonnées généralisées rendant ce résidu orthogonal à un sous-espace  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{U}$  ; soit  $\Psi$  une base de ce sous-espace. L'orthogonalité de ce résidu vis-à-vis de ce sous-espace peut s'exprimer par la nullité du produit scalaire de ces deux entités. En utilisant le produit scalaire

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{A}} = \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (\text{III.4})$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des vecteurs et  $\mathbf{A}$  une matrice symétrique définie positive, il vient pour l'orthogonalité du résidu par rapport au sous-espace de projection

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \mathbf{r}(t) \rangle_{\mathbf{I}} &= \mathbf{0} \\ &= \Psi^{\text{T}} \left( \mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Phi\mathbf{q}(t)) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Les solutions approchées sont ainsi projetées sur  $\mathcal{V}$  parallèlement à  $\mathcal{W}^{\perp}$ , et leurs déterminations revient à résoudre le système réduit

$$\mathbf{M}_r\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_r\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_r\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_r^{\text{nl}}(\Phi\mathbf{q}(t)) = \mathbf{f}_r^{\text{ext}}(t) \quad (\text{III.6})$$

dans lequel les matrices réduites sont de la forme  $\mathbf{A}_r = \mathbf{\Psi}^\top \mathbf{A} \mathbf{\Phi}$ , et les vecteurs réduits  $\mathbf{a}_r = \mathbf{\Psi}^\top \mathbf{a}$ . Le cas global présenté ici, tel que  $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$ , est généralement appelé procédure de Petrov-Galerkin. Dans le cas où les espaces de projection et d'orthogonalisation sont pris égaux, soit  $\mathcal{V} = \mathcal{W}$  et  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}$ , on parle alors de procédure de Galerkin. Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons cette dernière méthode afin de réduire les systèmes considérés.

Concernant l'erreur dont nous avons parlé précédemment, celle-ci peut être définie comme la différence entre la solution du système complet (III.1)  $\mathbf{x}$  et la solution du système approché (III.6)  $\mathbf{x}_r$  telle que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_r \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{\Phi} \mathbf{q} \end{aligned} \tag{III.7}$$

En faisant appel au projecteur sur  $\mathcal{V}$  parallèlement à  $\mathcal{V}^\perp$ , dont la représentation matricielle est  $\mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^\top$  (qui est bien un projecteur dès lors que la base  $\mathbf{\Phi}$  est orthonormale vis-à-vis de l'identité), il est possible de décomposer l'erreur telle que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{x} - \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^\top \mathbf{x} + \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^\top \mathbf{x} - \mathbf{\Phi} \mathbf{q} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^\top) \mathbf{x} + \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{x} - \mathbf{q}) \\ &= \varepsilon_{\mathcal{V}^\perp} + \varepsilon_{\mathcal{V}} \end{aligned} \tag{III.8}$$

comme représentée sur la figure III.1 où apparaissent deux composantes :

- $\varepsilon_{\mathcal{V}^\perp}$  l'erreur selon  $\mathcal{V}^\perp$  directement induite par l'approximation (III.2) : la solution du système complet n'est pas entièrement contenue dans le sous-espace de projection  $\mathcal{V}$  (où on reconnaît  $\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^\top$  le projecteur associé à  $\mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^\top$ ) ;
- $\varepsilon_{\mathcal{V}}$  l'erreur selon  $\mathcal{V}$  qui traduit la différence entre la solution du système réduit  $\mathbf{x}_r = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}$  et le projeté orthogonal de la solution du système complet  $\mathbf{x}$  sur  $\mathcal{V}$ . Elle traduit le fait que le système réduit résolu diffère du système complet initial.

L'erreur orthogonale  $\varepsilon_{\mathcal{V}^\perp}$  peut être quantifiée indépendamment de la solution du système réduit, mais nécessite cependant la connaissance de la solution du système complet, et constitue ainsi une bonne estimation *a priori* de l'erreur induite par la réduction. Il existe cependant des estimateurs d'erreurs indépendants de la solution du système complet [37] notamment basés sur l'équation du mouvement réduit.

## 1.2 Application à la réduction de systèmes non-linéaires géométriques

La procédure de réduction par projection de Galerkin qui vient d'être présentée a l'avantage de pouvoir déterminer les matrices linéaires réduites *a priori* et de manière définitive. Ce n'est pas le cas pour les termes non-linéaires, ceux-ci dépendants explicitement des coordonnées généralisées. Dans un processus de résolution non-linéaire itératif, il est envisageable de reconstruire les termes non-linéaires complets et de les projeter, sur le même principe que la méthode AFT (1.2.2), mais cela peut se montrer chronophage dans le cadre de structures comportant un grand nombre de degrés de liberté. Afin de pallier ce problème, il est possible de déterminer les raideurs réduites non-linéaires du système *a priori*. Nous proposons de présenter trois approches pour cela. Les deux premières restent

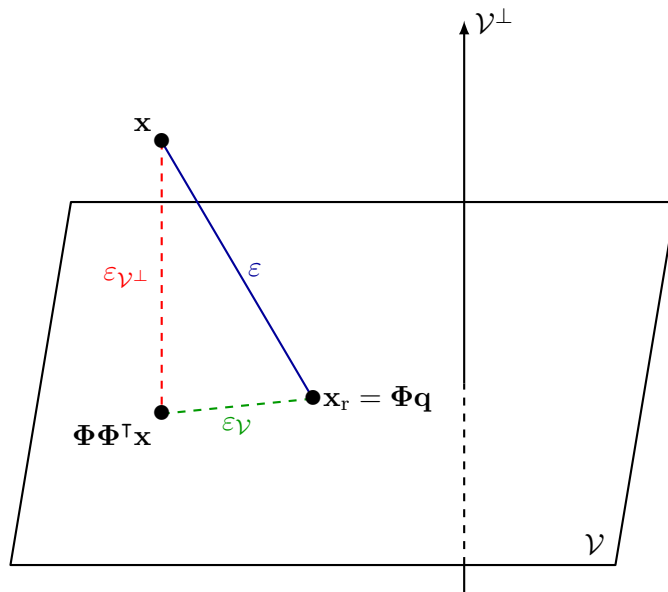


Figure III.1 – Erreur de projection induite par la procédure de Galerkin (adapté de [27])

très analytiques et adaptées à des systèmes simples, quant à la troisième elle est plus pragmatique et permet une application à des cas plus complexes à l'aide de codes éléments finis industriels. Dans ce but, nous ne considérerons dans cette section que les efforts internes du système (III.9), les seuls à être non-linéaires dans notre cas.

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}^{\text{q}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}^{\text{c}}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (\text{III.9})$$

### 1.2.1 Projection du système complet

La mise en équations proposée au premier chapitre (I.20) est basée sur une approche éléments finis et mène à la construction de tenseurs d'ordre 2 et dont les termes non-linéaires prennent la forme de matrices dépendantes des inconnues. Il est cependant possible, en se passant de l'utilisation de l'opérateur de dérivation non-linéaire (I.15) et par la dérivation de l'énergie potentielle interne (I.8) dans les équations de Lagrange (I.18), d'écrire les termes non-linéaires à l'aide de tenseurs d'ordres 3 et 4 indépendants des inconnues, ce qui mène à exprimer les efforts intérieurs (III.9) sous la forme

$$f_p^{\text{int}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n k_{pi} x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{pij}^{\text{q}} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{pijk}^{\text{c}} x_i x_j x_k \quad (\text{III.10})$$

Le système ainsi construit ne comporte plus de termes dépendant des inconnues et les tenseurs associés aux efforts non-linéaires peuvent être déterminés *a priori*. Cette expression des efforts internes est à rapprocher du développement en série entière de ceux-ci

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{H}^{\text{q}}\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{H}^{\text{c}}\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \quad (\text{III.11})$$

que l'on peut retrouver dans la modélisation des non-linéarités polynomiales en électronique notamment [21],  $\otimes$  désignant le produit de Kronecker et  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}^{\text{q}}$  et  $\mathbf{H}^{\text{c}}$  des matrices de tailles respectives  $(n \times n)$ ,  $(n \times n^2)$  et  $(n \times n^3)$ . En appliquant la procédure de Galerkin

présentée précédemment, telle que  $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q}$ , on obtient les efforts non-linéaires réduits suivants

$$\begin{aligned} f_{r,p}^{\text{int}}(\mathbf{q}) &= \phi_p^\top f^{\text{int}}(\Phi \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^r \tilde{k}_{pi} q_i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \tilde{k}_{pij}^q q_i q_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \tilde{k}_{pijk}^c q_i q_j q_k \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

où  $r$  désigne la dimension de l'espace de projection, soit le nombre de colonnes de  $\Phi$ . L'expression de la partie linéaire reste bien inchangée, on retrouve le terme  $\Phi^\top \mathbf{K} \Phi$ , et les matrices de raideurs non-linéaires réduites sont telles que

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{pij}^q &= \sum_{q=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n k_{qst}^q \phi_{pq} \phi_{is} \phi_{jt} \\ \tilde{k}_{pijk}^c &= \sum_{q=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{u=1}^n k_{qstu}^c \phi_{pq} \phi_{is} \phi_{jt} \phi_{ku} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

ou encore en utilisant l'écriture (III.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r^q &= \Phi^\top \mathbf{H}^q \Phi \otimes \Phi \\ \mathbf{H}_r^c &= \Phi^\top \mathbf{H}^c \Phi \otimes \Phi \otimes \Phi \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

La difficulté de cette méthode réside dans la détermination des coefficients des tenseurs  $\mathbf{H}^q$  et  $\mathbf{H}^c$  du système complet, soit  $n^3$  et  $n^4$  termes. Bien qu'un certain nombre puissent être nuls, le calcul d'une telle quantité de termes peut être problématique pour des systèmes comportant un nombre important de degrés de liberté. Pour ces raisons, cette méthode est restreinte à une utilisation sur des systèmes simples.

### 1.2.2 Projection élémentaire

Une manière de contourner les problématiques de la méthode qui vient d'être présentée est de considérer la projection de Galerkin directement au moment de l'étape de discrétisation (I.17), comme proposé par Sénéchal [104] ou encore Touzé [116], telle que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \Phi \mathbf{q}(t) \quad (\text{III.15})$$

à noter qu'ici  $\mathbf{x}$  désigne la variable d'espace et non le vecteur des inconnues du système discrétisé.

De cette manière, on retrouve bien pour ce qui est des parties linéaires les matrices réduites présentées précédemment. Les parties non-linéaires en revanche vont prendre la forme

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{pij}^q &= \phi_p^\top \mathbf{K}^q(\phi_i) \phi_j \\ &= \phi_p^\top \left[ \int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{H} \phi_i)^\top \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^\top \mathbf{D} (\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{H} \phi_i) \, d\Omega \right] \phi_j \\ \tilde{k}_{pijk}^c &= \phi_p^\top \mathbf{K}^c(\phi_i, \phi_j) \phi_k \\ &= \phi_p^\top \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{H} \phi_i)^\top \mathbf{D} (\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{H} \phi_j) \, d\Omega \right] \phi_k \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$



Contrairement à la méthode précédente, cette projection élémentaire permet de déterminer directement les termes réduits et ne nécessite donc que le calcul des  $r^3$  et  $r^4$  coefficients des matrices de raideurs réduites. Il est cependant nécessaire d'avoir accès aux termes quadratiques et cubiques séparément, ce qui n'est généralement pas le cas lors de l'utilisation d'un logiciel éléments finis. On présente dans la suite une méthode permettant de s'affranchir de ce problème.

### 1.2.3 Méthode STEP

La méthode STEP [81] propose de déterminer les raideurs réduites en prenant le problème à l'envers. En effet, cette méthode suggère d'imposer un certain nombre de cas de chargements à coordonnées généralisées fixées et ainsi d'en déduire les raideurs réduites. De cette manière, on se concentrera sur les monômes et non plus sur les raideurs. En d'autres mots, prenons par exemple le cas des monômes quadratiques  $x_1x_2$  et  $x_2x_1$ , ils sont identiques mais associés à des raideurs différentes  $k_{p12}^q$  et  $k_{p21}^q$ . Cette méthode permet de déterminer la totalité des raideurs associées aux différents monômes, soit ici directement  $k_{p12}^q + k_{p21}^q$ , ce qui représente un nombre de raideurs réduites à déterminer bien moindre que précédemment. Cela revient à écrire l'équation (III.12) sous la forme

$$f_{r,p}^{\text{int}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^r \tilde{k}_{pi} q_i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^r \tilde{k}_{pij}^q q_i q_j + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^r \sum_{k=j}^r \tilde{k}_{pijk}^c q_i q_j q_k \quad (\text{III.17})$$

et ainsi supprimer toute redondance de monôme. Afin de réaliser cette méthode, Muravyov [81] propose de considérer 3 cas de chargement que nous présentons ici.

**1<sup>er</sup> cas : chargements selon 1 mode** Dans ce cas, le chargement aura la forme

$$\mathbf{x}_1 = \alpha \phi_i \quad (\text{III.18})$$

En injectant cette expression dans l'équation (III.10) et en projetant le système sur la base complète, on obtient

$$\phi_p^T \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}_1) = \tilde{k}_{pi} \alpha + \tilde{k}_{pii}^q \alpha^2 + \tilde{k}_{pii}^c \alpha^3 \quad (\text{III.19})$$

qui est une équation à 3 inconnues, elle nécessitera donc 3 cas de chargement, donc 3 valeurs de  $\alpha$  différentes afin de pouvoir déterminer les raideurs réduites. A noter que ce cas est suffisant pour déterminer les raideurs réduites linéaires, qu'il est possible de comparer à  $\mathbf{K}_r = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$  afin de vérifier les résultats obtenus. Connaissant ces raideurs réduites, il est possible de passer au deuxième cas.

**2<sup>ème</sup> cas : chargement selon 2 modes** De la même manière que pour le premier cas, le chargement sera de la forme, en considérant  $i < j$ ,

$$\mathbf{x}_2 = \alpha \phi_i + \beta \phi_j \quad (\text{III.20})$$

et le système projeté devient

$$\begin{aligned}\phi_p^T \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}_2) &= \tilde{k}_{pi} \alpha + \tilde{k}_{pii}^q \alpha^2 + \tilde{k}_{piii}^c \alpha^3 \\ &+ \tilde{k}_{pj} \beta + \tilde{k}_{pjj}^q \beta^2 + \tilde{k}_{pjjj}^c \beta^3 \\ &+ \tilde{k}_{pij}^q \alpha \beta + \tilde{k}_{piij}^c \alpha^2 \beta + \tilde{k}_{pijj}^c \alpha \beta^2\end{aligned}\quad (\text{III.21})$$

A nouveau, il y a 3 inconnues, les raideurs réduites  $\tilde{k}_{pij}^q$ ,  $\tilde{k}_{piij}^c$  et  $\tilde{k}_{pijj}^c$ , celles correspondant aux termes de couplages, et il est à nouveau nécessaire de réaliser 3 cas de chargement différents. Pour cela, Muravyov propose de considérer les chargements suivants

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2^1 &= \alpha \phi_i + \beta \phi_j \\ \mathbf{x}_2^2 &= -\alpha \phi_i - \beta \phi_j \\ \mathbf{x}_2^3 &= \alpha \phi_i - \beta \phi_j\end{aligned}\quad (\text{III.22})$$

et de déterminer ces raideurs réduites par des jeux de simplifications.

**3<sup>ème</sup> cas : chargement selon 3 modes** Il ne reste plus qu'à déterminer, dans le cas où la base est composée d'au moins 3 vecteurs, les raideurs réduites cubiques de la forme  $\tilde{k}_{pijk}^c$  avec  $i < j < k$ . Pour cela, on applique un chargement de la forme

$$\mathbf{x}_3 = \alpha \phi_i + \beta \phi_j + \gamma \phi_k \quad (\text{III.23})$$

soit une fois injecté dans (III.10) et projeté

$$\begin{aligned}\phi_p^T \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}_3) &= \tilde{k}_{pi} \alpha + \tilde{k}_{pii}^q \alpha^2 + \tilde{k}_{piii}^c \alpha^3 \\ &+ \tilde{k}_{pj} \beta + \tilde{k}_{pjj}^q \beta^2 + \tilde{k}_{pjjj}^c \beta^3 \\ &+ \tilde{k}_{pk} \gamma + \tilde{k}_{pkk}^q \gamma^2 + \tilde{k}_{pkkk}^c \gamma^3 \\ &+ \tilde{k}_{pij}^q \alpha \beta + \tilde{k}_{piij}^c \alpha^2 \beta + \tilde{k}_{pijj}^c \alpha \beta^2 \\ &+ \tilde{k}_{pik}^q \alpha \gamma + \tilde{k}_{piik}^c \alpha^2 \gamma + \tilde{k}_{pikk}^c \alpha \gamma^2 \\ &+ \tilde{k}_{pjk}^q \beta \gamma + \tilde{k}_{pjjk}^c \beta^2 \gamma + \tilde{k}_{pjkk}^c \beta \gamma^2 \\ &+ \tilde{k}_{pijk}^c \alpha \beta \gamma\end{aligned}\quad (\text{III.24})$$

et il est alors possible de déterminer les dernières raideurs réduites manquantes.

A cela il faut rajouter une remarque concernant le côté purement numérique de la méthode. Afin de balayer correctement le domaine des amplitudes de déplacements visé, il est nécessaire d'imposer de manière conjointe des coefficients faibles, afin de rendre compte du comportement linéaire, et des coefficients plus importants afin d'activer les non-linéarités.

Cette procédure est parfaitement adaptée à l'utilisation d'un code éléments finis, celui-ci permettant de calculer les efforts internes associés aux différents chargements présentés. Cette démarche propose la détermination des raideurs réduites autour d'une position d'équilibre nulle, mais il est tout à fait envisageable de réaliser cela autour d'une position d'équilibre non-nulle. C'est notamment ce qui est mis en place par Chang [17] pour l'étude du flambage de structure courbe, ou encore, comme nous le verrons plus tard,

autour d'une position d'équilibre de précharge statique centrifuge.

Il y a cependant une réserve à émettre vis-à-vis de cette méthode. En effet, le modèle réduit est construit selon l'hypothèse de linéarité entre les tenseurs de Green et de Piola-Kirchhoff II, ce qui, dans les cas des logiciels éléments finis n'est pas assuré, les études non-linéaires étant réalisées au moyen d'une méthode de Lagrangien actualisé. Cette incompatibilité de modélisation peut mener, dans le cas de structure de type cantilever notamment, à des valeurs de raideurs réduites erronées et rendant le système réduit instable. Wang [123] montre parfaitement cela et propose, afin d'y remédier, de réaliser un "nettoyage" des coefficients réduits en négligeant l'inertie longitudinale de la poutre menant à des relations entre ces coefficients.

## 2 Bases de réduction

La partie théorique de la réduction des structures comportant des non-linéarités géométriques vient d'être présentée. Il reste maintenant la partie la plus importante du travail de réduction à réaliser, à savoir choisir le sous-espace de projection adapté. Nous allons pour cela présenter dans la suite des stratégies de bases de projection adaptées à la réduction des systèmes non-linéaires géométriques. Ces présentations seront précédées de l'introduction d'un exemple qui permettra une application simple et directe des ces approches.

### 2.1 Exemple d'application : poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastrée

Afin de mettre en application les méthodes de projection présentées dans la section précédente (III.1.2), ainsi que de tester les performances de ces bases, nous allons nous appuyer sur un exemple simple et largement utilisé dans le contexte des non-linéarités géométriques à savoir une poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastrée [20, 37, 71].

#### 2.1.1 Cinématique d'une poutre

La cinématique d'un point quelconque appartenant à la poutre est régie par la relation suivante [7]

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x) - y\theta(x) \\ v(x) \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

dans laquelle  $u$  désigne le déplacement longitudinal,  $v$  le déplacement transverse et  $\theta$  la rotation de la section comme représenté sur le schéma III.2.

#### 2.1.2 Tenseur de Green-Lagrange et troncature de von Kàrmàn

Comme précédemment (I.13), le tenseur de Green-Lagrange liant les déformations aux déplacements est considéré complet. La structure étudiée étant bi-encastrée, et donc contrainte longitudinalement, elle est admissible à l'hypothèse de von Kàrmàn [110] qui propose de négliger la partie non-linéaire hormis les termes quadratiques transverses de la déformation longitudinale. Il vient donc pour les déformations

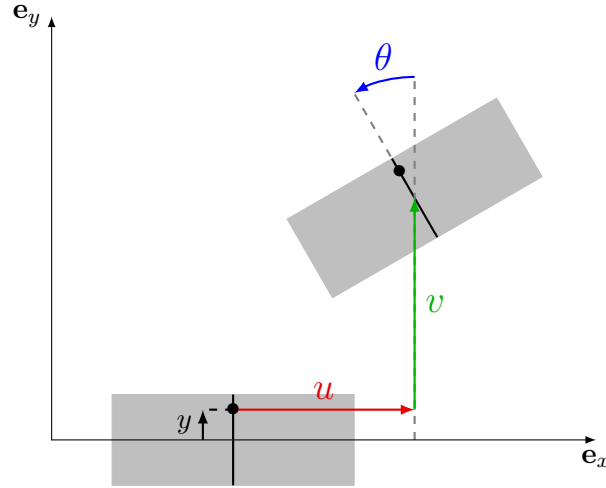


Figure III.2 – Cinématique d'une poutre

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{III.26})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) \quad (\text{III.27})$$

En se plaçant de plus dans les hypothèses de poutre d'Euler-Bernoulli, qui suppose la nullité du cisaillement, il est possible grâce à l'équation (III.27) de retrouver la relation classique liant  $v$  et  $\theta$  dans ce cas. L'énergie potentielle associée peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon_{xx}^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ ES \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 \right) + EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

dans laquelle  $E$  désigne le module d'Young du matériau,  $L$  la longueur de la poutre,  $S$  la surface de la section droite et  $I$  le module d'inertie en flexion. On retrouve bien dans cette expression les termes quadratiques associés à la partie linéaire du tenseur de Green-Lagrange. On notera aussi la présence de termes cubiques et quartiques qui donneront lieu aux termes non-linéaires quadratiques et cubiques respectivement. Il est intéressant de remarquer que le couplage membrane/flexion à l'origine de la non-linéarité se traduit ici au travers du terme cubique dans l'énergie potentielle.

### 2.1.3 Mise en place du modèle

La relation d'égalité entre la dérivée première de  $v$  en espace et  $\theta$  permet l'utilisation des polynômes d'Hermite afin d'approcher la solution sur un élément. Soit :

$$v(x) = N_1(x) v(0) + N_2(x) \frac{\partial v}{\partial x}(0) + N_3(x) v(L) + N_4(x) \frac{\partial v}{\partial x}(L) \quad (\text{III.29})$$

avec

$$\begin{aligned}
N_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\
N_3(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
N_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}
\end{aligned} \tag{III.30}$$

où  $x \in [0, L]$  et  $L$  désigne la longueur d'un élément.

En ce qui concerne les déplacements longitudinaux  $u$ , il a été choisi d'interpoler ces derniers à l'aide des polynômes d'Hermite en prenant en compte comme nouvelle inconnue la dérivée spatiale première de  $u$ , qui n'est autre que la déformation linéaire longitudinale pure. La discrétisation de  $u$  prend donc la forme suivante

$$u(x) = N_1(x)u(0) + N_2(x)\frac{\partial u}{\partial x}(0) + N_3(x)u(L) + N_4(x)\frac{\partial u}{\partial x}(L) \tag{III.31}$$

L'ajout de cette inconnue en déformation va avoir un impact sur les conditions limites appliquées à la poutre. Ainsi l'encastrement va concerner les degrés de liberté en déplacement, soient  $u$ ,  $v$  et  $\theta$ . L'inconnue en déformation sera elle laissée libre au niveau des encastrements. En effet, imposer une déformation nulle à cet endroit reviendrait à imposer une contrainte longitudinale nulle, ce qui n'est pas le cas.

L'interpolation sur un élément est donc de la forme

$$\begin{aligned}
u(x) &= \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & 0 & 0 & N_3(x) & N_4(x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{q} \\
v(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1(x) & N_2(x) & 0 & 0 & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{N}_v(x) \mathbf{q}
\end{aligned} \tag{III.32}$$

avec

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u(0) & \frac{\partial u}{\partial x}(0) & v(0) & \theta(0) & u(L) & \frac{\partial u}{\partial x}(L) & v(L) & \theta(L) \end{bmatrix}^\top \tag{III.33}$$

En substituant ces expressions dans l'énergie potentielle (III.28) et en appliquant les équations de Lagrange, on obtient les expressions suivantes pour les matrices de raideur du système

$$k_{ij} = \int_0^L \left( ES \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x}(i) \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x}(j) + EI \frac{\partial^2 \mathbf{N}_v}{\partial x^2}(i) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_v}{\partial x^2}(j) \right) dx \tag{III.34}$$

$$k_{ijk}^q = \int_0^L ES \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x}(i) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(j) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(k) + \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(i) \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x}(j) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(k) \right) dx \tag{III.35}$$

$$k_{ijkl}^c = \frac{1}{2} \int_0^L ES \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(i) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(j) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(k) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(l) dx \tag{III.36}$$

On retrouve bien les propriétés de symétrie des tenseurs associés aux termes linéaires et cubiques, ainsi que les tenseurs d'ordre 3 et 4 pour les termes non-linéaires quadratiques et

cubiques respectivement.

En ce qui concerne les propriétés d'inertie du système, l'énergie cinétique

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx \quad (\text{III.37})$$

mène à la matrice de masse

$$m_{ij} = \int_0^L \rho S (\mathbf{N}_u(i)\mathbf{N}_u(j) + \mathbf{N}_v(i)\mathbf{N}_v(j)) dx \quad (\text{III.38})$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du matériau.

#### 2.1.4 Données du problème

Les dimensions ainsi que les spécifications matériau de la poutre sont rassemblées dans le tableau III.1, avec  $I$  et  $S$  définis tels que

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{III.39})$$

$$S = bh \quad (\text{III.40})$$

Tableau III.1 – Dimensions et données matériau de la poutre

$L$	$b$	$h$	$\rho$	$E$
1 m	0,03 m	0,02 m	7800 kg.m <sup>-3</sup>	210 · 10 <sup>9</sup> N.m <sup>-2</sup>

La poutre sera discrétisée avec 20 éléments. Une telle discrétisation permet d'avoir un système convergé selon les quatre premiers modes de chaque nature, comme le montre la figure III.3, où les pulsations propres du modèle sont comparées aux pulsations théoriques données par les formules (III.41) et (III.42).

$$\omega_n^{\text{longitudinale}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{III.41})$$

$$\omega_n^{\text{transverse}} = \frac{k_n^2}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (\text{III.42})$$

L'effort harmonique sera appliqué transversalement au milieu de la poutre afin de permettre une étude selon le premier mode de flexion de celle-ci. Concernant l'amortissement, celui-ci sera appliqué sous forme de Rayleigh avec un coefficient d'amortissement  $\zeta_{1F} = 0,15\%$  selon le premier mode de flexion tel que

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} \quad (\text{III.43})$$

où  $\alpha = 2\zeta_{1F}\omega_{1F} = 2,0107$ .

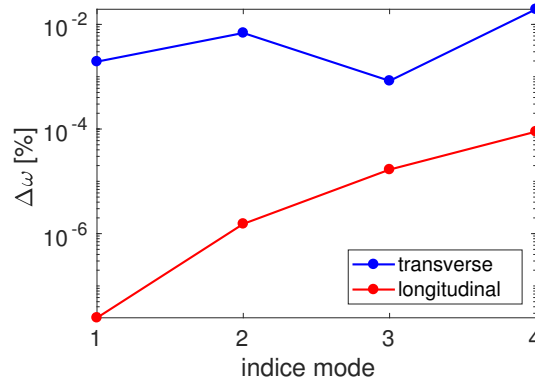


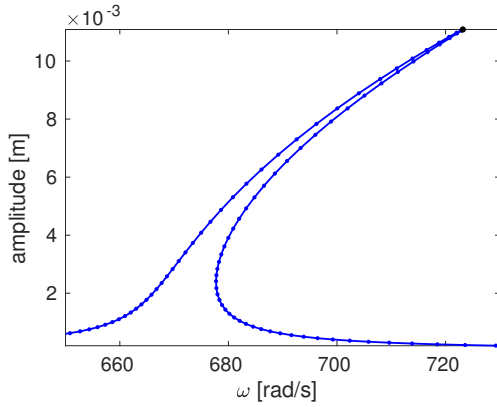
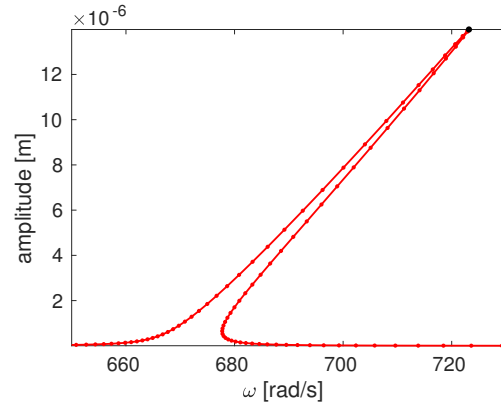
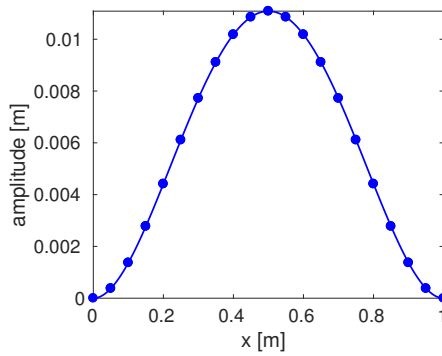
Figure III.3 – Erreur relative sur les pulsations propres des quatre premiers modes transverses et longitudinaux de la poutre d’Euler-Bernoulli bi-encastree à 20 éléments

### 2.1.5 Simulation sur le système complet

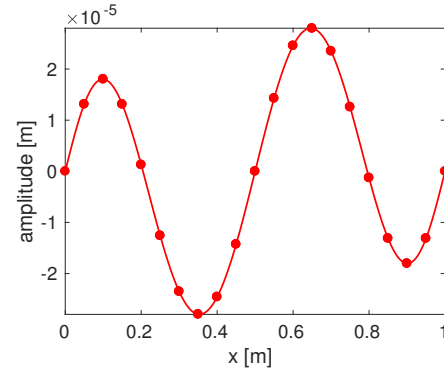
Une simulation sur ce système a été menée à l’aide de la méthode de l’équilibrage harmonique pour lequel 7 harmoniques ( $N_h = 7$ ) ont été retenus, ainsi que 140 pas de temps ( $N_t = 140$ ) pour la méthode AFT. Un effort transverse de 30 N est appliqué au centre de la poutre. Les résultats sont donnés sur la figure III.4.

Les figures III.4a et III.4b représentent les fonctions de réponses en fréquence non-linéaires du système au niveau du nœud milieu pour les degrés de liberté transverse et longitudinal respectivement. La réponse transverse (fig. III.4a), prise au niveau du degré de liberté d’excitation, exhibe un comportement déjà rencontré au chapitre précédent sur le système cyclique (II.5) avec une inclinaison du pic de résonance vers les hautes fréquences signe d’une rigidification du système. Cet apport de raideur est dû au couplage non-linéaire entre flexion et tension dans la poutre, comme on peut l’observer sur la figure III.4b avec l’apparition de déplacements transverses. Ce couplage fait intervenir le premier mode de flexion, comme illustré sur la figure III.4c, et une déformée longitudinale s’apparentant à un quatrième mode de membrane, visible sur la figure III.4d. Ainsi, une sollicitation en flexion va créer une tension au sein de celle-ci à cause des conditions d’encastrement. Il est à noter que ce couplage du premier mode de flexion avec un mode longitudinal d’ordre élevé a motivé l’utilisation d’une interpolation de type Hermite des déplacements longitudinaux afin d’avoir un modèle convenablement convergé pour ces modes avec un nombre d’éléments raisonnable.

D’un point de vue cinématique, il est intéressant de remarquer que peu importe le sens de déplacement transverse, la sollicitation longitudinale sera toujours la même. Cela amène à deux remarques. Premièrement, les déplacements de tension ainsi créés seront toujours de même signe en un point ce qui traduit la présence d’un terme quadratique de couplage, comme cela était prévu par le terme d’énergie de couplage cubique de l’équation (III.28). Deuxièmement, cela va conduire les déplacements longitudinaux à avoir une fréquence double de celle des transverses, comme cela est visible sur les figures III.4e et III.4f. D’une manière plus générale, les déplacements transverses répondront selon les harmoniques pairs de la pulsation d’excitation et les déplacements transverses selon les harmoniques impairs. Enfin, les termes quadratiques impliquant un signe constant des déplacements longitudinaux, ils induisent par là même l’apparition d’un terme statique  $\mathbf{a}_0$  comme représenté sur la

(a) Réponse en fréquence transverse à l'abscisse  $x = 0,5$  m(b) Réponse en fréquence longitudinale à l'abscisse  $x = 0,35$  m

(c) Déformée transverse au niveau du pic de résonance (●)



(d) Déformée longitudinale au niveau du pic de résonance (●)

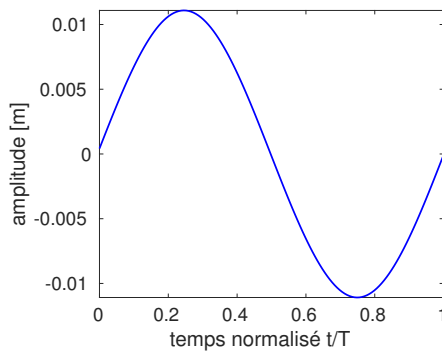
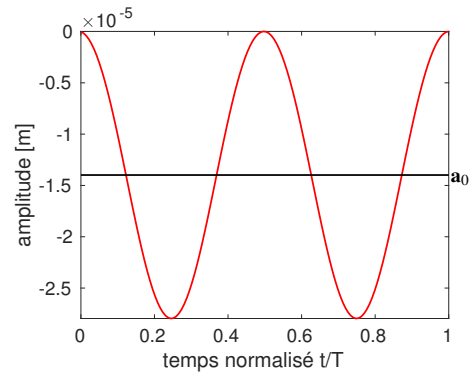
(e) Évolution temporelle transverse à l'abscisse  $x = 0,5$  m au niveau du pic de résonance (●)(f) Évolution temporelle longitudinale à l'abscisse  $x = 0,35$  m au niveau du pic de résonance (●)

Figure III.4 – Résultats de simulation pour la poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastée avec une excitation transverse de 30 N

figure III.4f.

## 2.2 Réduction par les modes linéaires

Les modes linéaires, solutions du problème aux valeurs propres généralisé (III.44), constituent la base la plus largement utilisée pour la réduction des systèmes linéaires. Dans



ce cadre, le choix des vecteurs à conserver dans la base de réduction peut être motivé par des critères fréquentiels, liés à la bande de fréquence d'étude, ou encore d'excitabilité, les vecteurs conservés devant avoir un certain niveau de colinéarité avec l'effort appliqué à la structure.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{III.44})$$

De tels critères ne sont plus adéquats pour ce qui concerne une structure non-linéaire géométrique. En effet, les couplages induits par les effets non-linéaires vont amener des modes, dont la pulsation est largement hors de la bande fréquentielle d'intérêt, à participer à la réponse de la structure.

A la lumière des résultats obtenus sur le modèle complet à la section précédente, un choix évident de base de réduction est de considérer le premier mode de flexion (fig. III.5a) et le quatrième de membrane (fig. III.5b). Les résultats associés à ces vecteurs sont donnés figure III.6.

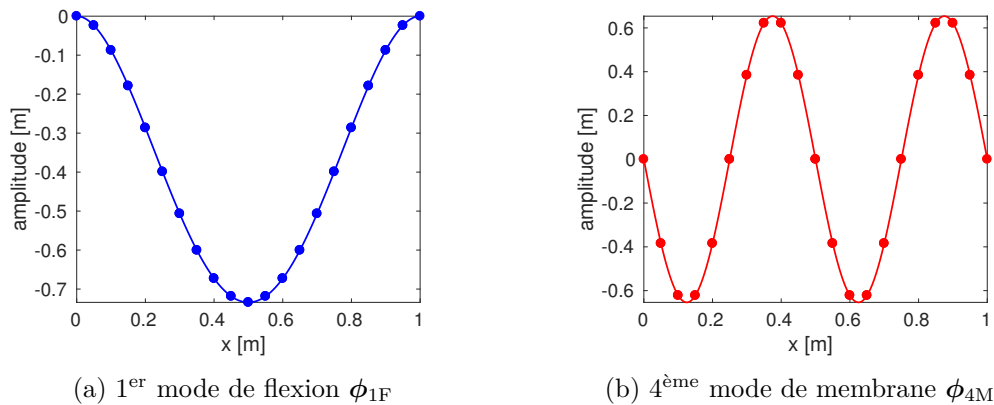


Figure III.5 – Base de réduction composée de modes linéaires

La première base utilisée est constituée uniquement du premier mode de flexion, elle conduit aux courbes rouges représentées sur les figures III.6a-III.6b. Le résultat obtenu est clairement mauvais avec une réponse transverse beaucoup plus raide que la référence et une absence de composante longitudinale, ce qui était prévisible vu la base de réduction utilisée. L'adjonction du quatrième mode de membrane à la base de réduction permet une amélioration considérable des résultats, visible avec les courbes vertes. La réponse transverse est presque superposée à la solution de référence, mais les déplacements longitudinaux restent cependant assez éloignés du résultat attendu, bien que dorénavant présents grâce à l'ajout du mode de membrane. Cela s'explique par la différence de déformée entre les composantes longitudinales du mode linéaire et de la réponse du système complet. Cette différence est quantifiée à l'aide d'un critère de MAC (éq. (III.45)) dans le tableau III.2 et illustre la corrélation moyenne entre ces deux déformées, alors que les parties transverses sont fortement semblables. Il est tout de même possible d'obtenir de très bons résultats par réduction sur une base de modes linéaires, comme le fait Lazarus [71], mais cela mène à des bases de réduction composées d'un grand nombre de vecteurs, ce qui peut être problématique pour des systèmes comportant un grand nombre de degrés de liberté notamment lors de la

détermination des raideurs réduites.

$$\text{MAC}(\phi_i, \phi_j) = \frac{\langle \phi_i | \phi_j \rangle_{\mathbf{M}}^2}{\langle \phi_i | \phi_i \rangle_{\mathbf{M}} \langle \phi_j | \phi_j \rangle_{\mathbf{M}}} \quad (\text{III.45})$$

Tableau III.2 – Critère de MAC entre la déformée du système complet (figs. III.4c-III.4d) et la base réduction de modes linéaires (figs. III.5a-III.5b)

	$\phi_{1F}$	$\phi_{4M}$
$\phi_{\text{reel},v}$	0,999	$2,39 \cdot 10^{-29}$
$\phi_{\text{reel},u}$	$2,85 \cdot 10^{-29}$	0,844

Les graphiques III.6c et III.6d représentent les composantes harmoniques associées aux deux modes linéaires utilisés issues de la HBM. Ceux-ci mettent bien en évidence, comme cela a pu être dit précédemment, la filiation entre le mode transverse et les coefficients harmoniques impairs d'une part, et le mode longitudinal et les coefficients harmoniques pairs d'autre part. Dans cet exemple, chaque famille de mode joue ainsi un rôle bien spécifique dans la réduction, et il apparaît judicieux de considérer, dans la base de réduction, des famille de modes bien distinctes.

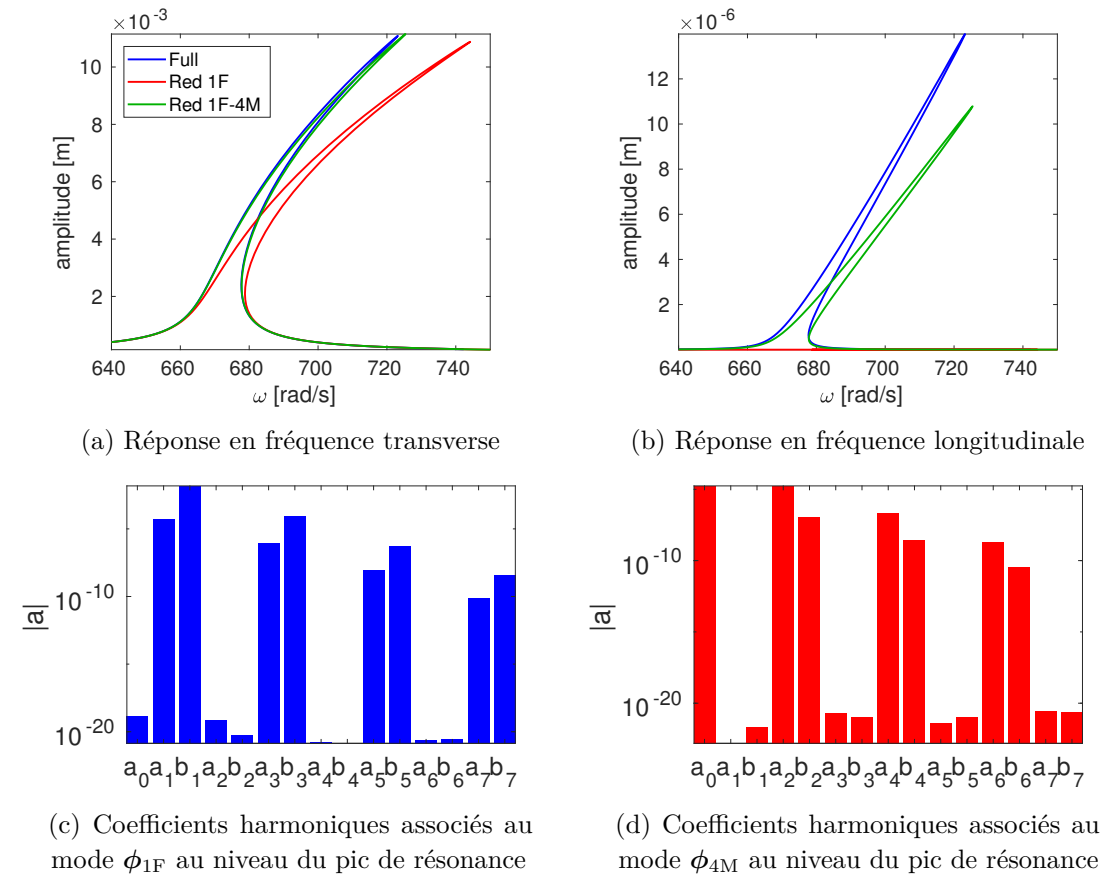


Figure III.6 – Réduction de la poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastée à l'aide de modes linéaires

Les résultats réduits qui viennent d'être présentés l'ont été sans préciser la méthode

d'estimation des termes non-linéaires réduits utilisée, en l'occurrence la procédure STEP ici. Une comparaison des différentes méthodes présentées précédemment est proposée avec la figure III.7. On y retrouve :

- la procédure de Galerkin : reconstruction des termes non-linéaires complets à partir des coordonnées généralisées comme cela est fait à l'équation (III.6) ;
- la méthode dite de projection élémentaire (1.2.2) d'évaluation des raideurs réduites ;
- la procédure STEP (1.2.3) réalisée à l'aide de coefficients pris dans l'intervalle  $[-5 \cdot 10^{-2} \quad 5 \cdot 10^{-2}]$ .

Les résultats en terme de réponse en fréquence donnés figures III.7a-III.7b montrent une parfaite équivalence entre ces méthodes avec des courbes parfaitement superposées, ce qui signifie qu'il n'y a pas de perte d'information avec la détermination a priori des raideurs réduites.

Une comparaison des méthodes d'évaluation de ces raideurs réduites est visible sur les figures III.7c-III.7d représentant les valeurs absolues des raideurs réduites quadratiques et cubiques respectivement. On y compare les méthodes dites de projection élémentaire (1.2.2) et STEP (1.2.3). Celle de projection des matrices complètes (1.2.1) n'est pas traitée ici. Il en ressort que les deux méthodes donnent des résultats identiques en ce qui concerne les raideurs de valeurs importantes, que l'on peut considérer comme prépondérantes. Pour ce qui est des raideurs de faibles valeurs, la méthode de projection élémentaire donne des valeurs pouvant être extrêmement faibles, jusqu'à  $1 \cdot 10^{-50} \text{ N.m}^{-3}$  pour les raideurs cubiques, et qui peuvent être considérées comme théoriquement nulles. Dans ce cas, la méthode STEP peine à atteindre un tel degré de précision et atteint ses limites numériques.

Enfin, le dernier point crucial à aborder lorsqu'il est question de réduction est le gain de temps de ces méthodes. Le tableau III.3 rassemble les temps de résolutions ainsi que les gains en temps associés aux différentes méthodes d'évaluation des termes réduits. Il ressort de celui-ci un temps de résolution plus long pour une projection de type Galerkin vis-à-vis du système complet ce qui semble assez contradictoire mais s'explique par la petite taille du système complet qui ne permet pas de tirer partie de cette méthode. Les méthodes d'évaluation a priori des termes non-linéaires permettent en revanche un gain de temps non négligeable de plus de 96 % ce qui est très intéressant.

Tableau III.3 – Comparaison des différents temps de résolution et gains des méthodes d'évaluation des termes non-linéaires réduits

	Temps de résolution [s]	Gain [%]
Modèle complet	110,26	–
Galerkin $\phi_{1F}$	125,59	–13,9
Galerkin $[\phi_{1F} \quad \phi_{4M}]$	138,29	–25,42
Projection élémentaire $\phi_{1F}$	3,09	97,198
Projection élémentaire $[\phi_{1F} \quad \phi_{4M}]$	4,27	96,13
STEP $\phi_{1F}$	3,039	97,244
STEP $[\phi_{1F} \quad \phi_{4M}]$	4,21	96,182

A la vue des résultats qui viennent d'être présentés, et sauf mention contraire, la méthode d'évaluation des raideurs réduites qui sera dorénavant utilisée est la méthode

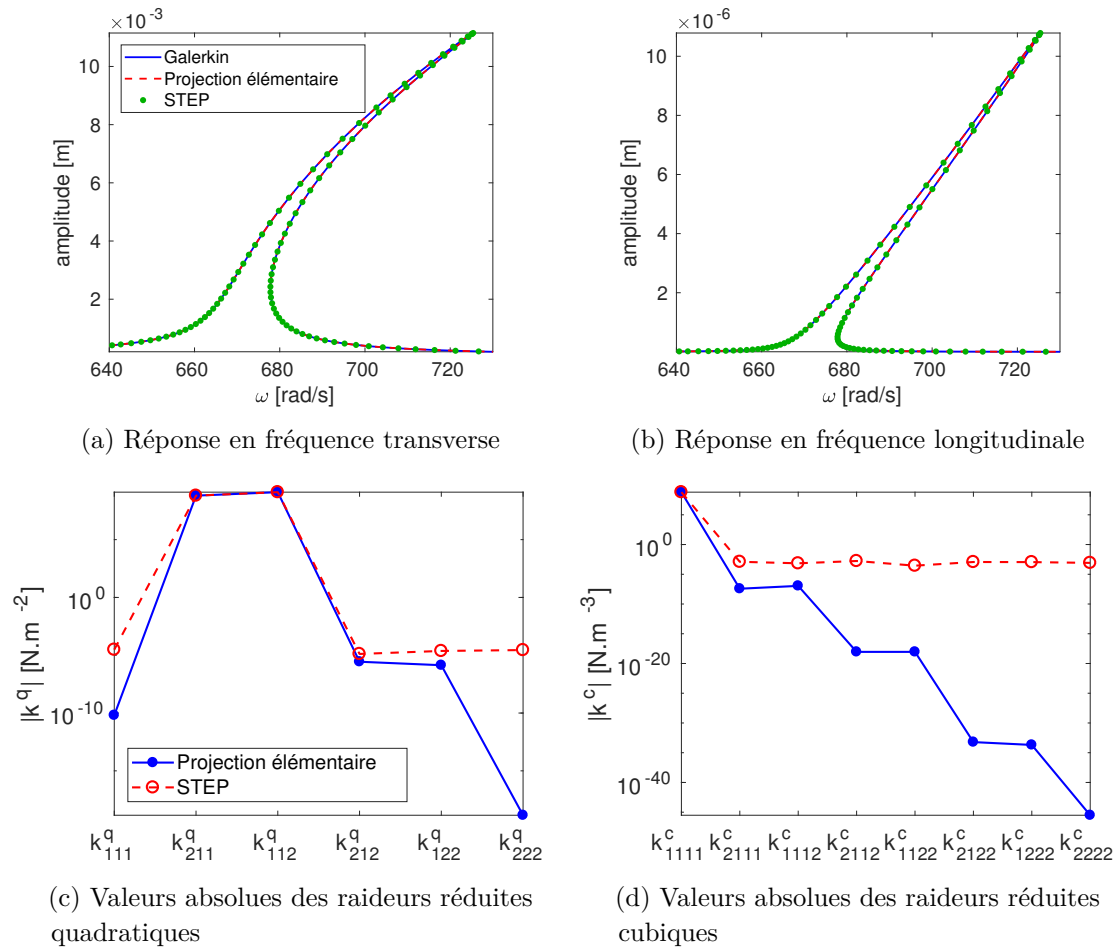


Figure III.7 – Comparaison des différentes méthodes d'évaluation des termes non-linéaires

STEP pour son efficacité et la flexibilité qu'elle offre au travers de l'utilisation à l'aide d'un logiciel éléments finis du commerce.

### 2.3 Réduction à l'aide des dérivées modales

La notion de dérivée modale trouve son origine dans les travaux de Noor [86] avec la notion de *path derivative*, utilisée dans une procédure de Galerkin pour la réduction de problèmes non-linéaires statiques. Les efforts internes non-linéaires étant dépendants des coordonnées généralisées, il est alors possible de les dériver selon une des ces coordonnées, ou *direction*, d'où la dénomination *path*. Ces travaux furent repris plus tard par Idelsohn et Cardona [52] pour la réduction de systèmes dynamiques cette fois. Ceux-ci proposent une détermination analytique des dérivées modales, nécessitant le calcul des dérivées seconde et troisième des efforts internes, ainsi que des routines spécifiques pour la détermination des termes non-linéaires au niveau élémentaire. Enfin, Slaats [107] propose dans ses travaux des méthodes numériques plus globales pour la détermination de ces dérivées modales. Ce que nous présentons dans la suite s'appuie sur ces développements. A noter que tous ces travaux proposent de se placer autour d'une position d'équilibre possiblement non-nulle, ce qui peut se révéler intéressant dans l'optique d'une utilisation sur un système soumis à une précharge statique centrifuge.

### 2.3.1 Notion de dérivée modale

La notion de dérivée modale existe du fait de la dépendance en amplitude des modes de la structure, comme nous avons pu le voir avec la notion de mode non-linéaire (voir II.2.3). Cette dépendance en amplitude permet d'effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 de l'étape de projection. En posant  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  les déplacements autour de la position d'équilibre  $\mathbf{x}_0$ , il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \Phi(\mathbf{q})\mathbf{q} \\ &= \mathbf{y}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q_i}(\mathbf{q} = \mathbf{0})q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial q_i \partial q_j}(\mathbf{q} = \mathbf{0})q_i q_j \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

avec les termes du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q_i}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) &= \phi_i(\mathbf{q} = \mathbf{0}) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i}(\mathbf{q})q_k \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \\ &= \phi_i(\mathbf{q} = \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

qui ne sont autres que les modes tangents au niveau du point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$ . Les termes du second ordre s'expriment de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial q_i \partial q_j}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) &= \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) + \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial q_i \partial q_j} q_k \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \\ &= \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) + \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) \\ &= \partial \phi_{ij}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

où on voit apparaître les dérivées modales  $\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}$ . Finalement, l'expression (III.46) peut s'écrire

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \phi_i(\mathbf{q} = \mathbf{0})q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \partial \phi_{ij}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) q_i q_j \quad (\text{III.49})$$

La solution  $\mathbf{y}$  s'écrit donc naturellement comme une combinaison de modes tangents linéaires et de dérivées modales, tous considérés au point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$ . L'étude de la réduction à l'aide de cette forme a donné lieu à des travaux portant sur des variétés quadratiques [54, 99]. En ce qui nous concerne, nous considérerons les termes quadratiques  $q_i q_j$  sous forme d'une coordonnée généralisée linéaire  $p_{ij}$ , ce qui revient à écrire

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \phi_i(\mathbf{q} = \mathbf{0})q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \partial \phi_{ij}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) p_{ij} = \begin{bmatrix} \Phi & \partial \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (\text{III.50})$$

### 2.3.2 Détermination des dérivées modales

Slaats [107] propose trois méthodes de détermination des dérivées modales. Les deux premières sont basées sur un cheminement analytique analogue à une analyse de sensibilité

de type Nelson [50], qui concernerait dans ce cas la sensibilité du mode, obtenu en différenciant le problème aux valeurs propres généralisé (III.44) vis-à-vis des coordonnées généralisées (III.51) menant aux équations

$$\left(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}\right) \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j}\right) \phi_i \quad (\text{III.51})$$

$$\phi_i^\top \mathbf{M} \phi_j = \delta_{ij} \quad (\text{III.52})$$

où la singularité de la matrice  $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$  est abordée plus loin. On a de plus supposé les modes orthonormés par rapport à la matrice de masse (éq. (III.52)). Il est possible en dérivant cette dernière relation

$$\phi_i^\top \mathbf{M} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = 0 \quad (\text{III.53})$$

de montrer l'orthogonalité d'un mode avec ses dérivées modales. En utilisant cette propriété dans l'équation (III.51) pré-multipliée par  $\phi_i^\top$ , il est possible de déterminer la dérivée de  $\omega_i^2$  par rapport à la coordonnées  $q_j$

$$\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} = \phi_i^\top \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \phi_i \quad (\text{III.54})$$

Enfin, la détermination de la dérivée de la matrice de raideur peut être réalisée par différences finies, comme le propose Slaats [107]

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} = \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x}_0 + h_j \phi_j) - \mathbf{K}(\mathbf{x}_0)}{h_j} \quad (\text{III.55})$$

Toutes les grandeurs de l'équation (III.51) étant connues, Slaats propose 3 méthodes afin de déterminer la dérivée modale.

**Méthode 1 : Calcul avec prise en compte de l'inertie** Dans ce cas, la détermination de la dérivée modale grâce à l'équation (III.51) nécessite certaines modifications, la matrice  $\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}$  étant singulière. Slaats [107] propose l'utilisation d'une matrice de transformation spécifique afin de diminuer la taille du problème et de le rendre inversible. On préférera dans ce cas la méthode proposée par Jain [54] qui consiste à résoudre un problème composé des équations (III.51) et (III.53) tel que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M} & -\mathbf{M} \phi_i \\ -[\mathbf{M} \phi_i]^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \phi_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.56})$$

On détermine ainsi en une seule opération les dérivées du mode et de la pulsation par rapport à la coordonnées généralisée voulue.

**Méthode 2 : Calcul en négligeant l'inertie** La détermination de la dérivée modale est ici immédiate par l'équation (III.51). Ainsi, en négligeant les termes de masse, la dérivée modale est donnée par l'expression

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \phi_i \quad (\text{III.57})$$

On peut montrer que dans ce cas les dérivées modales ont des propriétés de symétrie [53]

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad (\text{III.58})$$

ce qui permet de diminuer significativement le nombre de calcul à réaliser.

Les deux méthodes qui viennent d'être détaillées ne présentent pas de difficultés particulières. Il reste tout de même le problème du calcul de la dérivée de la matrice de raideur. D'une part, il est nécessaire de pouvoir réaliser son extraction, ce qui n'est pas toujours possible avec un logiciel commercial. D'autre part, selon la taille du système, son extraction peut nécessiter une grande quantité de mémoire et de temps, ce qui peut mener à certaines limites si plusieurs dérivées modales sont à déterminer. La troisième méthode proposée par Slaats permet de contourner ces problématiques.

**Méthode 3 : Méthode numérique par différences finis** Cette troisième méthode propose de déterminer les dérivées modales par différences finies directement au niveau des vecteurs propres. Les dérivées modales se calculent alors telles que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = \frac{\phi_i(\mathbf{x}_0 + h_j \phi_j(\mathbf{x}_0)) - \phi_i(\mathbf{x}_0)}{h_j} \quad (\text{III.59})$$

où on retrouve

- $\phi_i(\mathbf{x}_0)$  : le  $i^{\text{ème}}$  mode linéaire tangent au point  $\mathbf{x}_0$ . Ces modes sont les solutions du problème aux valeurs propres généralisé

$$\left[ \mathbf{K}(\mathbf{x}_0) - \omega^2 \mathbf{M} \right] \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{III.60})$$

où  $\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$  désigne la matrice de raideur tangente en  $\mathbf{x}_0$

- $\phi_i(\mathbf{x}_0 + h_j \phi_j)$  : le  $i^{\text{ème}}$  mode de la structure déformée selon le mode  $\phi_j$  au point  $\mathbf{x}_0$ . Ces modes sont les solutions du problème aux valeurs propres généralisé

$$\left[ \mathbf{K}(\mathbf{x}_0 + h_j \phi_j) - \omega^2 \mathbf{M} \right] \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{III.61})$$

où  $\mathbf{K}(\mathbf{x}_0 + h_j \phi_j)$  désigne la matrice de raideur tangente au point  $\mathbf{x}_0 + h_j \phi_j$

La résolution de ces deux problèmes aux valeurs propres peut être réalisée à l'aide des codes éléments finis commerciaux, ce qui rend cette approche très intéressante.

Cette troisième méthode proposée fait intervenir un schéma aux différences finis à droite, ou avant. Comme on peut le voir sur la figure III.8a, l'utilisation d'un tel schéma pour la détermination de la dérivée modale  $\partial \phi_{11}$  du premier mode de flexion induit l'apparition

d'une composante transverse. Il peut alors être intéressant de faire appel à un schéma centré

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = \frac{\phi_i(\mathbf{x}_0 + h_j \phi_j(\mathbf{x}_0)) - \phi_i(\mathbf{x}_0 - h_j \phi_j(\mathbf{x}_0))}{2h_j} \quad (\text{III.62})$$

qui permet de déterminer une dérivée modale purement longitudinale, comme cela est visible sur les figures III.8c et III.8d, permettant ainsi un découplage des composantes transverses et longitudinales comme cela a pu être justifié précédemment (voir figure III.4).

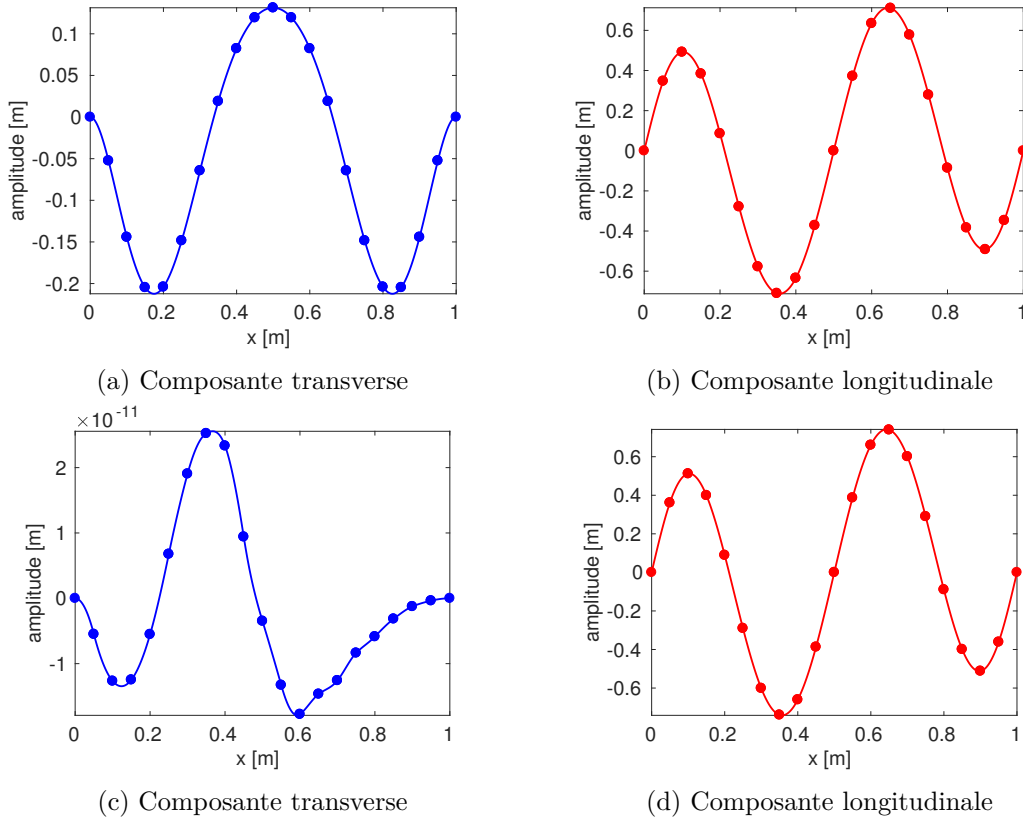


Figure III.8 – Dérivée modale  $\partial \phi_{11}$  de la poutre d'Euler-Bernoulli. Haut : différence finie à droite. Bas : différence finie centrée.

Ce schéma demande en revanche plus de travail avec la résolution de deux problèmes aux valeurs propres de la structure déformée. A noter que ce schéma est aussi applicable pour la détermination de la dérivée de la matrice de raideur (III.55). On peut constater que les composantes longitudinales de la dérivées modale  $\partial \phi_{11}$  figures III.8b et III.8d ont des déformées fortement semblables à celle du modèle complet (fig. III.4d). Ceci conduit à des résultats sur les composantes transverses (fig. III.9a) et longitudinales (fig. III.9b) très bons. Il est à noter que le choix de la méthode de détermination de la dérivée modale n'a que peu d'impact sur les résultats dans ce cas. Sur notre exemple, une seule dérivée modale est nécessaire dans la base de réduction, ce qui n'est *a priori* pas toujours le cas. Pour des systèmes nécessitant une base modale linéaire plus riche, le choix des dérivées modales à conserver peut être problématique. Pour cela Tiso [54, 114] propose des critères énergétiques d'interaction modale déterminés à partir de simulations temporelles linéaires. Mais dans ce cas, les bases utilisées peuvent être constituées d'un grand nombre de vecteurs,



ce qui peut vite conduire à des difficultés numériques liées à la détermination des raideurs réduites.

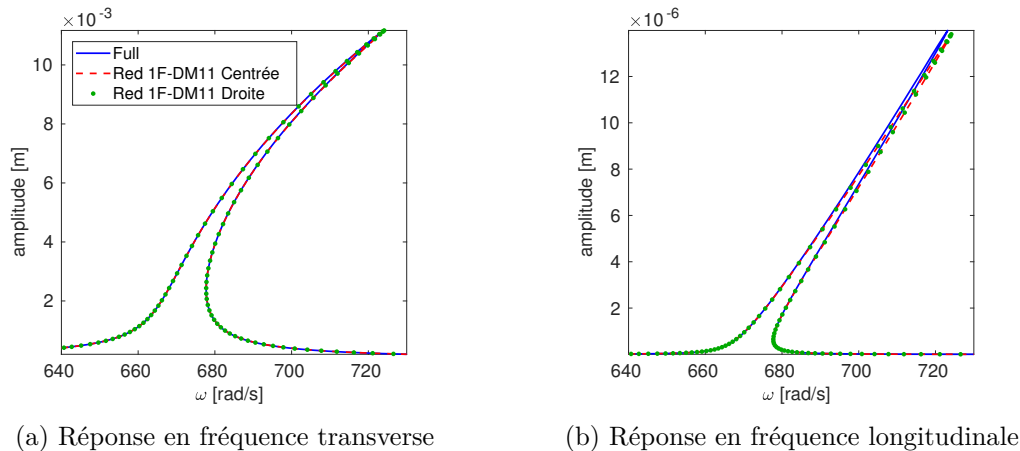


Figure III.9 – Résultats de simulations du système réduit selon  $\phi_{1F}$  et  $\partial\phi_{11}$

Enfin le gain de temps, présenté dans le tableau III.4 pour la méthode de différence finie centrée, est extrêmement important, de l'ordre de 96 %. Associée à une très bonne précision, cela en fait une méthode très intéressante pour la réduction des systèmes non-linéaires géométriques.

Tableau III.4 – Comparaison des différents temps de résolution et gains de réduction associés à la méthode des dérivées modales

	Temps total [s]	Gain [%]	Calcul $\partial\phi_{11}$ [s]	STEP [s]
Modèle complet	110,26	–	–	–
Réduit $[\phi_{1F} \partial\phi_{11}]$	4,335	96,068	$9,27 \cdot 10^{-3}$	$7,35 \cdot 10^{-3}$

## 2.4 Réduction par les modes compagnons

Les modes compagnons, ou modes duaux, sont une autre manière de compléter la base des modes linéaires. Développés par les équipes de Mignolet [17, 63, 79, 123], ceux-ci sont le résultat d'une extraction des composantes principales, aussi appelée décomposition en valeurs singulières ou *Singular Value Decomposition* (SVD), de cas de chargements statiques en efforts selon un ou plusieurs modes dits dominants, c'est à dire participants de manière importante à la réponse de la structure. Il a cependant été montré [17] que considérer deux modes était suffisant afin de capter les couplages non-linéaires. Ainsi, les efforts extérieurs appliqués seront de la forme

$$\mathbf{f}^{i,\alpha} = \alpha \mathbf{K} \phi_i \quad (\text{III.63})$$

$$\mathbf{f}^{ij,\alpha} = \frac{\alpha}{2} \mathbf{K} (\phi_i + \phi_j) \quad (\text{III.64})$$

où  $\mathbf{K}$  désigne la matrice de raideur linéaire du système, et  $\alpha$  le paramètre permettant de faire varier l'amplitude de l'effort appliqué. Les valeurs assignées à ce paramètre pourront

être aussi bien positives que négatives, ainsi que dans des amplitudes couvrant les domaines linéaires et non-linéaires (faibles et grandes amplitudes). Dans ces deux configurations, il faudra résoudre les systèmes suivants

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_i^\alpha) = \mathbf{f}^{i,\alpha} \quad (\text{III.65})$$

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{ij}^\alpha) = \mathbf{f}^{ij,\alpha} \quad (\text{III.66})$$

avec  $\mathbf{f}^{\text{int}}$  les efforts internes non-linéaires (III.9) et  $\mathbf{u}^\alpha$  le vecteur solution de l'équation pour un paramètre d'amplitude  $\alpha$  donné.

La deuxième étape de cette méthode consiste à retirer des vecteurs solutions  $\mathbf{u}^\alpha$  les composantes des vecteurs de la base  $\Phi$ , celle-ci pouvant contenir des modes compagnons calculés précédemment, afin de ne garder que les composantes associées aux effets non-linéaires. Cela peut être fait de la manière suivante

$$\mathbf{v}_i^\alpha = \mathbf{u}_i^\alpha - \sum_{k=1}^r \langle \phi_k | \mathbf{u}_i^\alpha \rangle_{\mathbf{M}} \phi_k \quad (\text{III.67})$$

$$\mathbf{v}_{ij}^\alpha = \mathbf{u}_{ij}^\alpha - \sum_{k=1}^r \langle \phi_k | \mathbf{u}_{ij}^\alpha \rangle_{\mathbf{M}} \phi_k \quad (\text{III.68})$$

où  $\langle \bullet | \bullet \rangle_{\mathbf{M}}$  est le produit scalaire défini précédemment (III.4).

Enfin, en concaténant l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{v}^\alpha$  dans une matrice  $\mathbf{V}$ , il est possible d'extraire de celle-ci les composantes prépondérantes au moyen d'une SVD, tel que

$$\mathbf{V}_i = \Psi_i \Sigma_i \Gamma_i^\top \quad (\text{III.69})$$

$$\mathbf{V}_{ij} = \Psi_{ij} \Sigma_{ij} \Gamma_{ij}^\top \quad (\text{III.70})$$

où  $\Psi$  est la matrice regroupant les composantes principales de notre système, et  $\Sigma$  est la matrice des valeurs singulières. Nous reviendrons de manière plus précise sur cette méthode à la section suivante III.2.5 traitant de la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Le choix des vecteurs compagnons repose alors sur deux critères [17]. Ils doivent d'une part être associés à une valeur singulière élevée, mais aussi induire une énergie de déformation linéaire élastique importante. Une fois les modes compagnons choisis, ils sont intégrés à la base  $\Phi$  et le processus peut recommencer.

Afin d'appliquer cette méthode à notre système, les chargements statiques  $\mathbf{u}^\alpha$  selon le premier mode de flexion ont été obtenus au moyen d'une méthode de continuation selon les degrés de liberté du système complétés du paramètre  $\alpha$  de telle manière que le système à résoudre soit

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}) &= \alpha \mathbf{K} \phi \\ \|\Delta \mathbf{x}\|^2 + |\Delta \alpha|^2 &= ds^2 \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

Les  $\mathbf{u}^\alpha$ , obtenus pour des  $\alpha$  positifs et négatifs, sont représentés sur la figure III.10a selon leurs amplitudes transverses au centre de la poutre et constituent un ensemble de

186 vecteurs dans ce cas. Les valeurs singulières obtenues après retrait du premier mode de flexion de ces chargements statiques sont données figure III.10b. Leur chute rapide dans des valeurs inférieures à  $1 \cdot 10^{-5}$  montre que ces vecteurs peuvent être représentés de manière beaucoup plus compacte. Les caractéristiques des vecteurs associés aux trois plus grandes valeurs singulières sont données dans le tableau III.5 ainsi que leurs déformées figures III.11. Celles-ci ont d'ailleurs la caractéristique d'être purement transverse ou longitudinale.

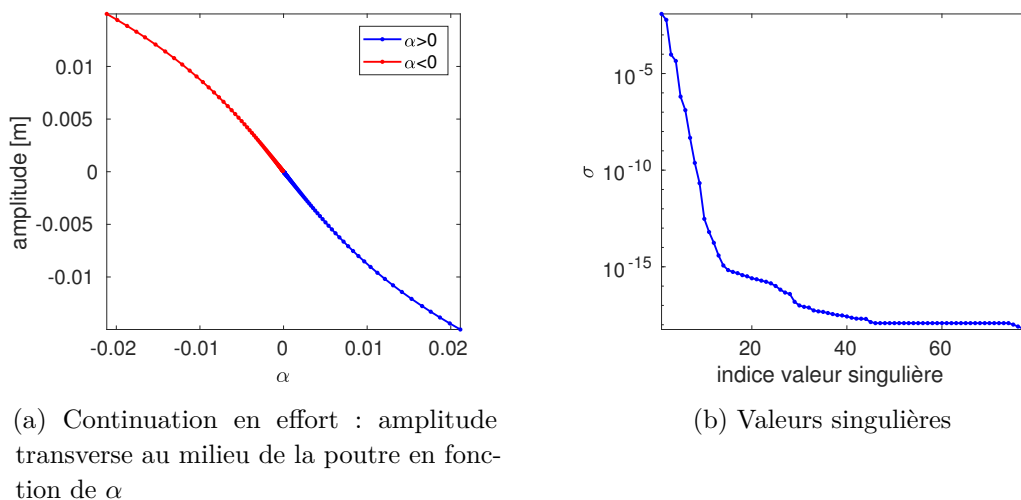


Figure III.10 – Construction des modes compagnons

Le premier vecteur (figs. III.11a-III.11b) rappelle fortement la dérivée modale  $\partial\phi_{11}$  calculée par différences finis avant (figs. III.8a-III.8b) pour ce qui est de la composante transverse, il s'agit donc certainement d'une réminiscence du premier mode de flexion. Le deuxième mode (figs. III.11c-III.11d) contient l'information dont nous avons besoin, à savoir l'équivalent d'un quatrième mode de membrane. Le troisième (figs. III.11e-III.11f) est quand à lui un mode longitudinal plus complexe inutile dans notre cas.

La difficulté est maintenant de sélectionner les vecteurs qui vont venir compléter le premier mode de flexion. Le critère de choix selon la valeur singulière nécessite de considérer deux vecteurs afin de converger vers la référence, comme le montre la figure III.12 On remarquera que le premier vecteur singulier n'apporte pas grand chose (la réponse à un vecteur est très semblable à la réduction selon le premier mode de flexion seul présentée précédemment III.6). Le critère en énergie de déformation permet en revanche de choisir directement le mode nécessaire au couplage non-linéaire et permet une très bonne réduction, comme cela est visible sur la figure III.12. Il apparait ici tout l'intérêt de ce critère en énergie qui permet d'aller chercher des modes de membranes, ceux-ci étant très énergétiques, et donc le pendant longitudinal du mode transverse considéré, son mode *dual* ou *compagnon*.

Tableau III.5 – Caractéristiques des trois premiers modes compagnons obtenus

Mode compagnon	valeur singulière	Énergie de déformation [N.m]
1	0,0121	$1,4766 \cdot 10^7$
2	0,005 99	$3,7749 \cdot 10^9$
3	$9,576 \cdot 10^{-5}$	$1,8075 \cdot 10^9$

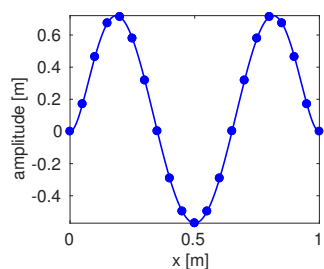
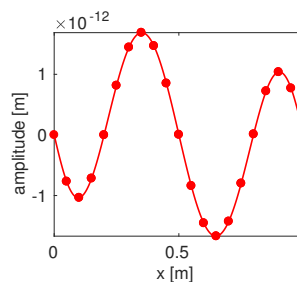
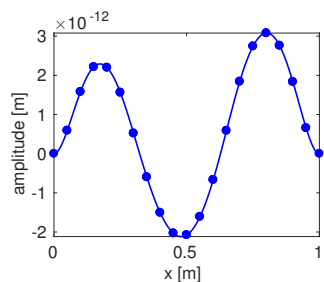
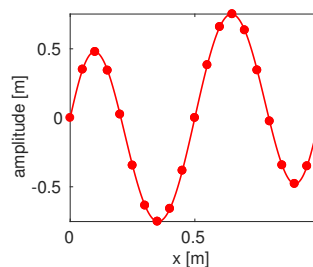
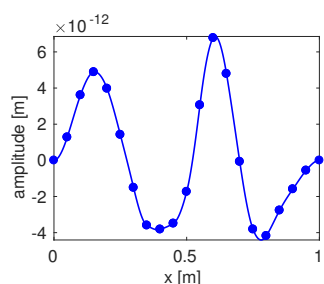
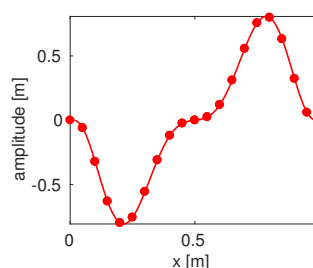
(a) déformée transverse du mode compa-  
gnon 1(b) déformée longitudinale du mode com-  
pagnon 1(c) déformée transverse du mode compa-  
gnon 2(d) déformée longitudinale du mode com-  
pagnon 2(e) déformée transverse du mode compa-  
gnon 3(f) déformée longitudinale du mode com-  
pagnon 3

Figure III.11 – Déformées des trois premiers modes compagnons

Les gains de temps obtenus, présentés dans le tableau III.6, sont légèrement moins bons que pour la dérivée modale. Cela s'explique par le temps de calcul de la base de réduction, de l'ordre de la seconde, ce qui sur un temps de résolution de quelques secondes représente beaucoup. Malgré cela, cette méthode propose une excellente précision et un temps de résolution tout à fait convenable.

Tableau III.6 – Comparaison des différents temps de résolution et gains de réduction associés à la méthode des modes compagnons

	Temps total [s]	Gain [%]	Calcul modes compagnons [s]	STEP [s]
Modèle complet	110,26	–	–	–
Réd 1V Énergie	6,031	94,53	1,03	$1 \cdot 10^{-2}$
Réd 1V Val.Sing.	5,83	94,713	1,05	$6,1 \cdot 10^{-2}$
Réd 2V Val.Sing.	6,2	94,38	0,94	$2 \cdot 10^{-2}$

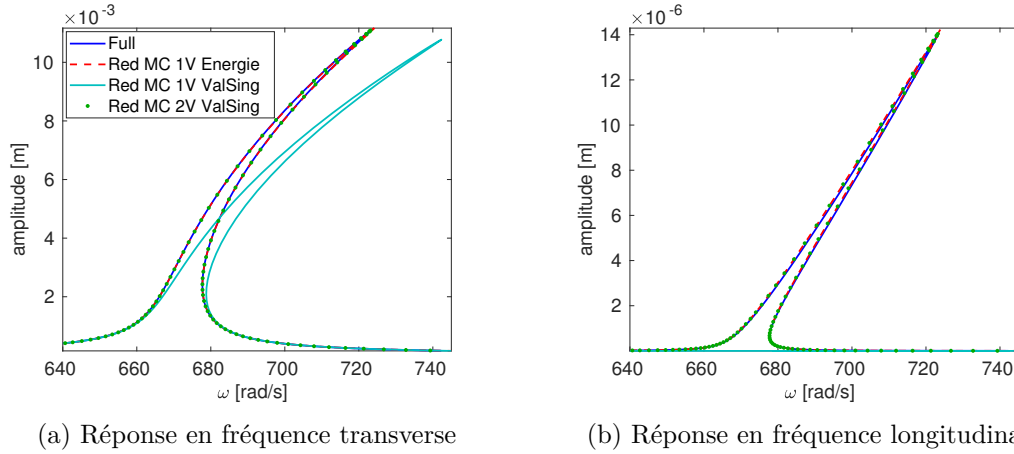


Figure III.12 – Résultats de simulations du système réduit à l'aide des modes compagnons

## 2.5 Réduction par Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Les bases de projection qui viennent d'être présentées ont toute en commun de pouvoir être déterminées *a priori*, c'est à dire ne nécessitant aucun résultat du système complet, hormis des chargements statiques. La méthode que nous présentons ici est basée sur l'utilisation de solutions dynamiques non-linéaires du système complet, pour cela elle est dite *a posteriori*.

La méthode POD, pour **Proper Orthogonal Decomposition**, est une méthode d'analyse des données permettant, à partir d'échantillons de taille importante, de se ramener à un problème de taille plus faible. Elle a été initialement utilisée en mécanique des fluides [9], thématique connue pour la taille considérable de ses résultats, pour l'étude du phénomène de turbulence. Cette méthode propose de rechercher une fonction  $\Phi$  dont la projection, au sens des moindres carrés, est maximale vis-à-vis des échantillons à analyser. Autrement dit, elle consiste à rechercher la solution du problème d'optimisation sous contrainte

$$\max_{\substack{\Psi \in L^2(\Omega) \\ \|\Psi\|^2=1}} \frac{\text{moy}_a \left( \langle \mathbf{u} | \Psi \rangle^2 \right)}{\|\Psi\|^2} = \frac{\text{moy}_a \left( \langle \mathbf{u} | \Phi \rangle^2 \right)}{\|\Phi\|^2} \quad (\text{III.72})$$

où  $L^2(\Omega)$  désigne l'ensemble des fonctions de carré intégrable et  $\text{moy}_a(\bullet)$  la moyenne selon la grandeur  $a$ , qui peut représenter aussi bien le temps que l'espace.

Dans le cadre d'un problème discret [1], la POD revient à réaliser une SVD sur la matrice des échantillons temporels concaténés. Soit  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}(t_1) \ \mathbf{u}(t_2) \ \cdots \ \mathbf{u}(t_{N_t})]$  cette matrice de taille  $(n \times N_t)$ . L'application de la SVD à celle-ci donne

$$\mathbf{U} = \Psi \Sigma \Gamma^\top \quad (\text{III.73})$$

avec  $\Psi$  et  $\Gamma$  des matrices unitaires (c'est à dire telles que  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}$ ) et de tailles respectives  $(n \times n)$  et  $(N_t \times N_t)$ ,  $\Sigma$  une matrice rectangulaire  $(n \times N_t)$  comportant sur sa diagonale  $r$  valeurs telles que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$ , où  $r = \min(n, N_t)$ . Ces  $\sigma_i$  sont les valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{U}$ , et les  $r$  premiers vecteurs de  $\Psi$  et  $\Gamma$  sont respectivement

appelés les vecteurs singuliers à gauche et à droite de  $\mathbf{U}$ . Dans notre cas, les vecteurs d'intérêts seront ceux à gauche car associés aux variables d'espace. Les valeurs singulières  $\sigma_i$  jouent aussi un rôle important en permettant d'évaluer la participation des vecteurs singuliers auxquels elles sont associées. Il est alors possible de mettre en place un critère  $\varepsilon_{\text{POD}}$  pour choisir le nombre de vecteurs  $p$  à conserver dans la base telle que

$$\varepsilon_{\text{POD}} < \frac{\sum_{k=1}^p \sigma_k}{\sum_{k=1}^r \sigma_k} \quad (\text{III.74})$$

Enfin, les valeurs singulières permettent de statuer sur la réductibilité du système. En effet, si les valeurs de celles-ci chutent rapidement, c'est que peu de vecteurs participent de manière prépondérante à la réponse de la structure, et que la réduction peut être faite sur un sous-espace de dimension faible. En revanche, des valeurs singulières variant peu vont amener à un sous-espace de réduction de dimension importante.

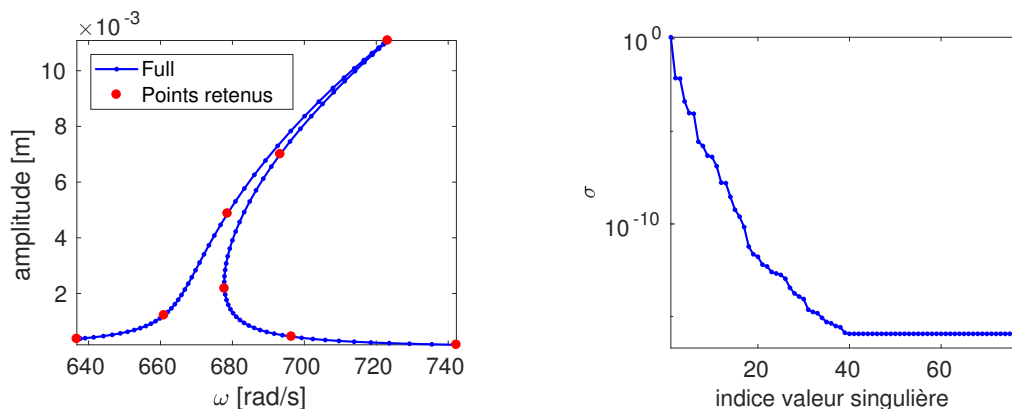
D'un point de vue numérique, il peut être intéressant dans notre cas de considérer la matrice  $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^\top &= \mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Gamma}^\top\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Sigma}^\top\mathbf{\Psi}^\top \\ &= \mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^\top\mathbf{\Psi}^\top \\ &= \mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Psi}^\top \\ &= \mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice carrée diagonale dont les termes diagonaux sont les carrés des valeurs singulières de  $\mathbf{U}$ . La recherche des valeurs singulières et des vecteurs singuliers à gauche se ramène donc à un problème aux valeurs propres sur la matrice  $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top$  de taille  $(n \times n)$ , ce qui peut se révéler intéressant numériquement dans le cas où  $n \ll N_t$ .

Dans le cadre de l'application de cette méthode à notre poutre bi-encastrée, les échantillons seront construits à partir des coefficients harmoniques de huit points solutions choisis sur la courbe. Ces points sont donnés sur la figure III.13a et ont été choisis afin de décrire tous les états du système, du linéaire au non-linéaire. Chacune des huit solutions temporelles est reconstruite selon 140 pas de temps, ce qui donne un total de 1120 échantillons temporels. L'application d'une SVD à la matrice  $\mathbf{U}$  ainsi formée mène aux valeurs singulières données figure III.13b, dont une description plus précise des trois premières est rassemblée dans le tableau III.7. La décroissance des valeurs singulières est très rapide, les trois premières rassemblant plus de 99,9 % de la somme totale de celles-ci, démontrant à nouveau la très bonne réductibilité du système. Les déformées associées à ces trois premières valeurs singulières sont données sur la figure III.14 où l'on retrouve sans surprise le premier mode de flexion (figs. III.14a-III.14b) comme déformée prépondérante associée à la plus grande des valeurs singulières. Le deuxième vecteur singulier (figs. III.14c-III.14d) quant à lui est bien le quatrième mode de membrane issu du couplage non-linéaire.

L'utilisation des deux premiers vecteurs singuliers donne d'excellents résultats illustrés sur la figure III.15. Les temps de résolution ne sont pas mentionnés dans ce cas car il



(a) Points solution retenus pour la construction de la base de réduction

(b) Valeurs singulières

Figure III.13 – Construction des modes POD

Tableau III.7 – Caractéristiques des trois premiers modes POD obtenus

p	$\sigma_p$	$\frac{\sum_{k=1}^p \sigma_k}{\sum_{k=1}^r \sigma_k}$
1	1,2107	0,9876
2	$7,52 \cdot 10^{-3}$	0,9937
3	$7,08 \cdot 10^{-3}$	0,9995

n'ont pas beaucoup de sens, la construction de la base nécessitant la résolution du système complet. Il apparait donc que cette méthode n'est pas extrêmement intéressante en tant que méthode de réduction de la manière dont nous l'utilisons ici. Elle représente cependant un excellent outil d'étude par l'extraction des composantes indépendantes de la solution ainsi que de leurs pondération via les valeurs singulières. De plus, cette représentation est associée à une réponse forcée donnée et peut donc ne pas être adaptée pour d'autres situations comme le montre Kerschen [62].

## Bilan du chapitre

La réduction d'un système dynamique a été abordée dans ce chapitre. Dans le cadre linéaire, la procédure de Galerkin a été présentée. Celle-ci propose une méthodologie simple et efficace afin de réduire le nombre d'inconnues du problème traité. L'ajout de termes non-linéaires ne permet plus une application aussi directe de cette méthode et il est alors nécessaire d'adapter cette procédure. Dans un premier temps, la détermination des termes non-linéaires réduits a été abordée au travers de diverses méthodes. La procédure STEP se distingue des autres par son utilisation simple et son application à l'aide d'un logiciel éléments finis. Celle-ci démontre une précision remarquable sur l'exemple de poutre bi-encastée non-linéaire traité dans ce chapitre en comparaison des autres méthodes plus analytiques. Ensuite, la présence des termes non-linéaires rendant l'utilisation des modes linéaires inefficace, des bases de réduction dédiées ont été utilisées afin de capter les couplages non-linéaires. Ainsi, les dérivées modales et les modes compagnons ont été employés et ont démontré une excellente précision. L'association de ces bases à la méthode

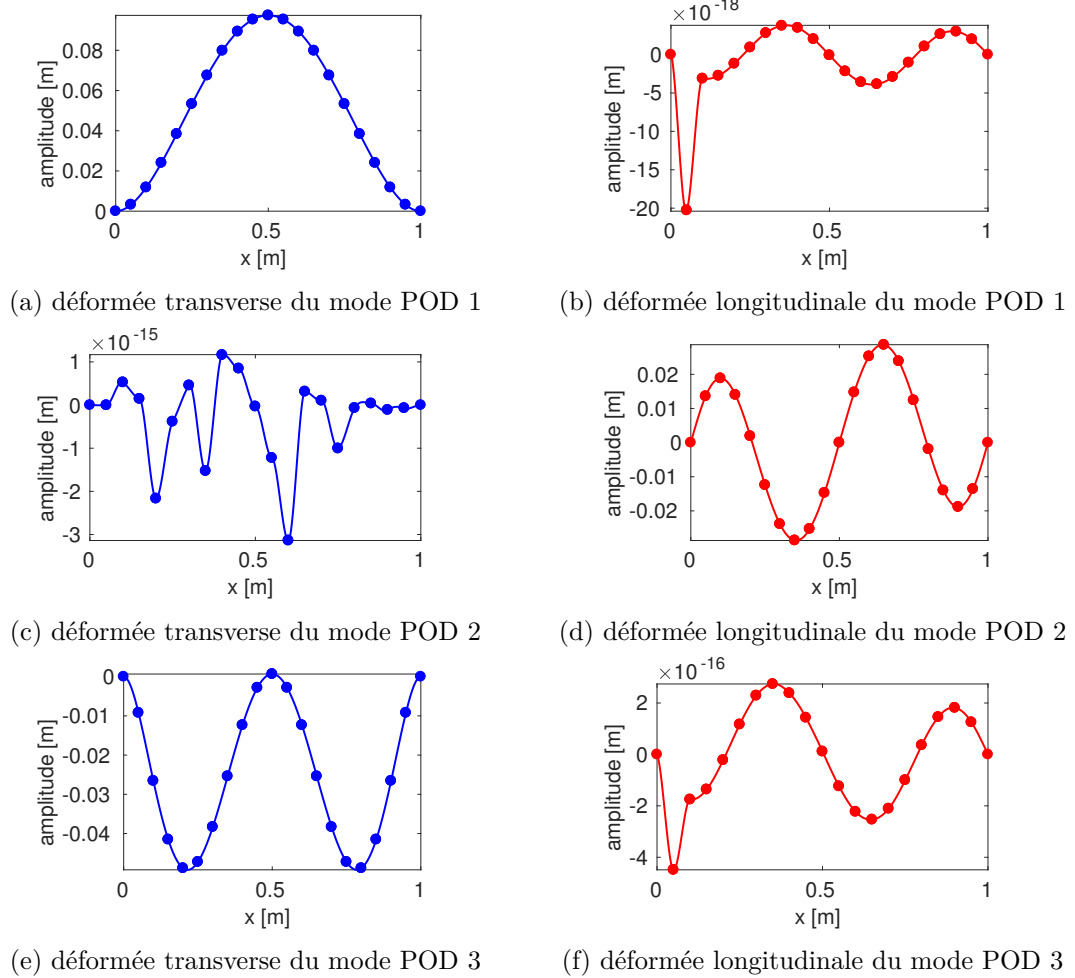


Figure III.14 – Déformées des trois premiers modes POD

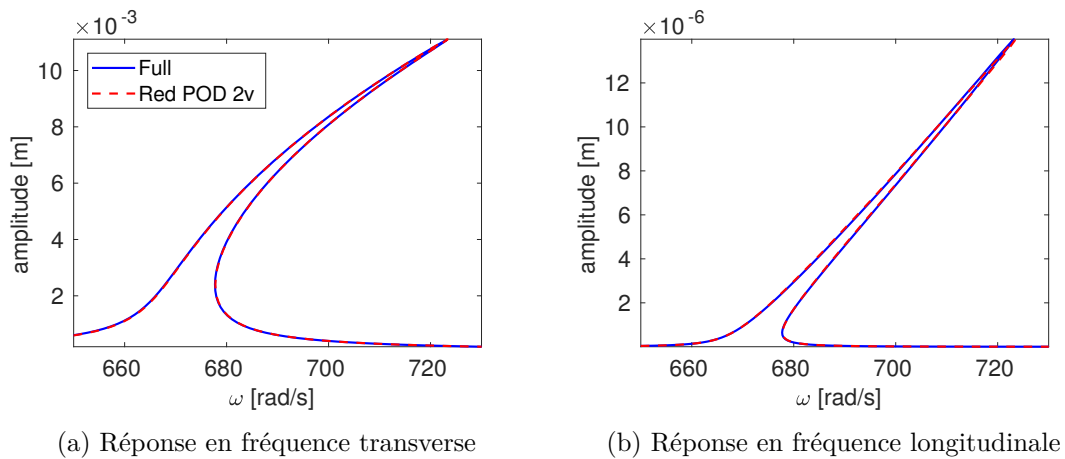


Figure III.15 – Résultats de simulations du système réduit à l'aide des modes POD

STEP a donc mené à des résultats précis obtenus dans un temps très réduit. Il faut cependant mettre cela en regard de la simplicité de l'application utilisée, que ce soit en terme de modélisation et de complexité. On propose dans le chapitre suivant d'appliquer ces méthodes dans le cadre des éléments finis volumiques avec la prise en compte de



chargements statiques.

## Extension à la réduction des structures volumiques

Les méthodes de réduction présentées dans le chapitre précédent sont ici étendues au cas des structures modélisées à l'aide d'éléments volumiques. Dans un premier temps, les résultats obtenus à l'aide d'éléments volumiques développés sous MATLAB pour une poutre bi-encastree sont confrontés à ceux obtenus sur le modèle d'Euler-Bernoulli du chapitre III. On s'intéresse ensuite au cas d'une poutre encastree-libre soumise à un chargement centrifuge en mettant en place les modifications nécessaires aux méthodes initiales afin de prendre en compte les spécificités de ce type de chargement. Enfin, le chapitre se clos sur l'étude d'une plaque encastree-libre sous chargement centrifuge.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Poutre bi-encastree volumique</b>	<b>92</b>
1.1	Présentation et validation du modèle	92
1.2	Réduction du modèle	94
1.3	Réduction à l'aide du logiciel éléments finis SAMCEF	98
<b>2</b>	<b>Poutre encastree-libre en rotation</b>	<b>102</b>
2.1	Présentation du modèle	102
2.2	Comparaison avec SAMCEF	103
2.3	Détermination de l'état préchargé	104
2.4	Calcul des solutions périodiques	105
2.5	Réduction autour de la position d'équilibre	108
2.6	Réduction à l'aide du logiciel éléments finis SAMCEF	115
<b>3</b>	<b>Étude du deuxième mode de flexion</b>	<b>118</b>
3.1	Simulations de référence avec MATLAB	119
3.2	Réduction avec MATLAB	119
3.3	Discrétisation et réduction avec SAMCEF	124
<b>4</b>	<b>Vers une géométrie de pale : plaque volumique</b>	<b>127</b>
4.1	Données du problème	127
4.2	Résultats	128
	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>130</b>

---

## 1 Poutre bi-encastrée volumique

Ce paragraphe a pour objectif de mettre en place un modèle volumique basé sur les éléments hexaédriques à 20 nœuds, qui permettront de réaliser à la fois des calculs linéaires et non-linéaires. Afin de valider les différentes étapes de notre développement, ce modèle sera comparé aux résultats obtenus avec le logiciel SAMCEF pour ce qui est des calculs linéaires et non-linéaires statiques, et aux résultats obtenus sur le modèle d'Euler-Bernoulli du chapitre précédent (III.2.1) pour ce qui est des simulations non-linéaires harmoniques. Le détail des éléments utilisés est donné à l'annexe C.

### 1.1 Présentation et validation du modèle

Le modèle mis en place correspond à une poutre bi-encastrée dont la géométrie, rappelée au tableau IV.1, est analogue à celle utilisée au chapitre précédent. On remarquera cependant l'ajout du coefficient de Poisson aux propriétés matériaux nécessaire dans le cas volumique.

Tableau IV.1 – Dimensions et données matériau de la poutre

$b$ (dimension $x$ ) [m]	$h$ (dim. $y$ ) [m]	$L$ (dim. $z$ ) [m]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [N.m <sup>-2</sup> ]	$\nu$ [–]
0,03	0,02	1	7800	$210 \cdot 10^9$	0,3

La discrétisation éléments finis utilisée est de 15 éléments dans la longueur et 4 selon la section, comme illustré sur la figure IV.1. Cette discrétisation permet un compromis entre un nombre de degrés de liberté raisonnable, 1413 dans ce cas, et des pulsations linéaires des modes d'intérêts convergées avec moins de 0,4% de différence par rapport aux pulsations prédites par la théorie de la RDM comme cela est donné dans le tableau IV.2.

Tableau IV.2 – Pulsations propres des modes d'intérêts de la poutre bi-encastrée H20

	$\omega_{\text{RDM}}$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	$\omega_{\text{H20}}$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	$\varepsilon$ [%]
$\phi_{1F}$	670,23	672,75	0,36
$\phi_{4M}$	65 204	65 316	0,17

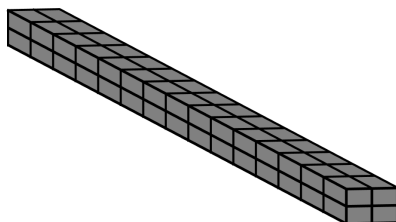


Figure IV.1 – Poutre modélisée avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds

#### 1.1.1 Validation du comportement linéaire

La validation du modèle linéaire est effectuée en comparant les éléments propres du modèle obtenus avec le logiciel SAMCEF et ceux obtenus avec MATLAB. Concernant le modèle SAMCEF, les pulsations et vecteurs propres sont ceux obtenus grâce au module

**DYNAM.** Pour ce qui est du modèle MATLAB, les résultats sont obtenus à l'aide d'une procédure éléments finis qui a été développée en s'appuyant sur des éléments hexaédriques à 20 nœuds (voir annexes A et C). L'intégration sur chaque élément est réalisée au moyen d'une méthode de quadrature de Gauss avec 2 points dans chaque direction, soit 8 points d'intégration. Les éléments propres sont ensuite extraits grâce à la fonction `eigs` de MATLAB.

La comparaison de ces deux problèmes est donnée sur la figure IV.2. Que ce soit en terme de pulsation (fig. IV.2a, avec une différence inférieure à  $2 \cdot 10^{-6}$  %) ou de déformée (fig. IV.2b, le critère de MAC (III.45) donne une matrice proche de l'identité) les résultats sont quasi-identiques. On peut donc en conclure que les résultats obtenus avec le code que nous avons développé sont en parfait accord avec ceux de SAMCEF.

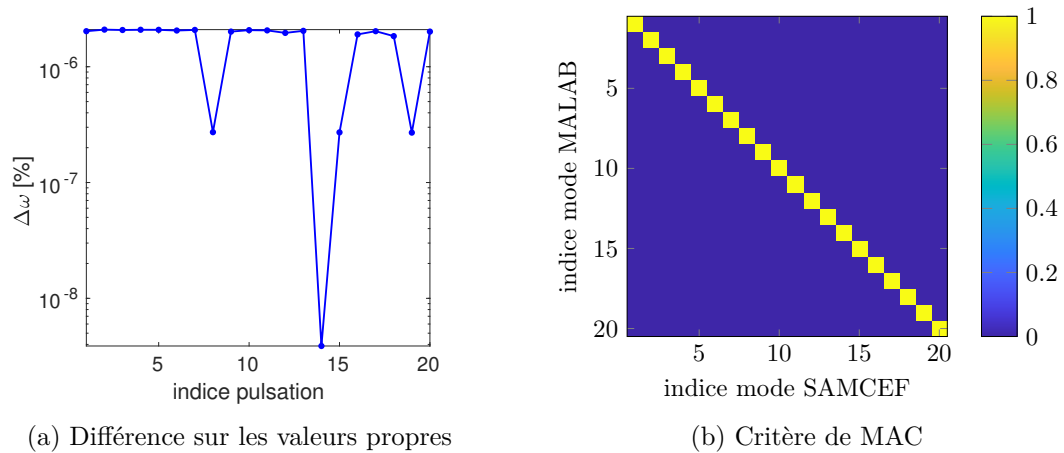


Figure IV.2 – Comparaison des modes propres des modèles MATLAB et SAMCEF

### 1.1.2 Validation du comportement non-linéaire

Les termes non-linéaires déterminés à l'aide de MATLAB, dont la démarche est présentée en annexe B, sont ici pris en compte. On s'intéresse dans un premier temps à une étude statique, permettant une comparaison avec SAMCEF ; dans un second temps, une analyse par équilibrage harmonique (II.1.2) est menée et est comparée à celle de la poutre d'Euler-Bernoulli du chapitre précédent (III.2.1).

**Chargement statique** Le chargement statique considéré est une simple sollicitation transverse selon l'axe  $y$  au milieu de la poutre au niveau de la fibre neutre. Afin de faciliter la résolution non-linéaire sous MATLAB, une méthode de continuation a été utilisée. Comme dans le cas des modes compagnons (III.2.4), celle-ci a été menée sur les déplacements et l'intensité de l'effort  $\alpha$  tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}) &= \alpha \mathbf{f} \\ \|\Delta \mathbf{x}\|^2 + |\Delta \alpha|^2 &= ds^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

où  $\mathbf{f}$  est un vecteur nul avec une composante unitaire selon le degré de liberté où est appliqué l'effort.

Des calculs analogues ont été menés sous SAMCEF à l'aide du module **MECANO** pour les mêmes intensités d'efforts afin de pouvoir comparer les deux résultats. La figure IV.3 illustre cette comparaison. Le premier graphe (fig. IV.3a) montre la différence entre les normes des vecteurs obtenus pour les différents efforts et celle-ci reste très faible, moins de  $6 \cdot 10^{-3} \%$ . Les figures IV.3b et IV.3c montrent les déplacements obtenus avec SAMCEF et MATLAB. On peut remarquer que les déplacements transverses, sur la figure IV.3b, se superposent bien, comme cela est de plus illustré sur la figure IV.3d avec une différence inférieure à  $12 \cdot 10^{-4} \%$ . Les résultats longitudinaux concordent eux de manière moins précise, comme cela est visible sur la figure IV.3c, mais la différence reste cependant inférieure à 2% (fig. IV.3e), ce qui est raisonnable.

**Réponse en fréquence** La deuxième partie de la validation de ce modèle concerne une étude réalisée à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique. Les simulations réalisées sur la poutre d'Euler-Bernoulli du chapitre précédent avec 7 harmoniques seront prises ici comme références. Le cas volumique est lui résolu à l'aide de 5 harmoniques ( $N_h = 5$ ), ce qui représente un total de 7065 inconnues fréquentielles, et 105 pas de discrétisation temporelle pour la procédure AFT ( $N_t = 105$ ). Ce nombre d'harmoniques semble suffisant à la vue de la figure IV.4 où on compare les résultats pour 3 et 5 harmoniques et où les courbes se superposent. Enfin, l'amortissement utilisé est le même que pour le cas Euler-Bernoulli, soit 0,15% sur le premier mode de flexion appliqué au travers de la matrice de masse, soit  $\alpha = 2,0182$  (III.43).

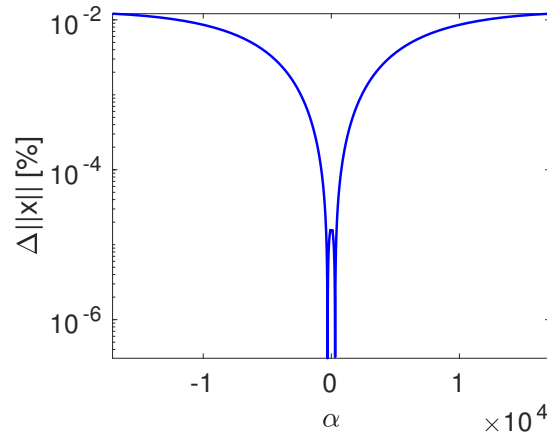
La comparaison des résultats fréquentiels entre la poutre d'Euler-Bernoulli et le modèle volumique est visible sur la figure IV.5. Les figures IV.5a et IV.5b représentent les fonctions de réponse en fréquence respectivement dans la direction transverse et longitudinale. On constate une excellente concordance du comportement non-linéaire entre ces deux modèles. Il existe cependant un léger décalage en fréquence dû à l'erreur commise sur la pulsation linéaire du premier mode de flexion donnée au tableau IV.2. En terme de déformée, représentées sur les figures IV.5c et IV.5d, les deux modèles montrent à nouveau des résultats extrêmement proches.

Comme pour l'étude statique, les résultats dynamiques de la poutre volumique coïncident de manière précise avec les calculs réalisés sur la poutre d'Euler-Bernoulli. Il semble donc légitime de pouvoir considérer notre modèle volumique, à la vue de ces résultats, comme validé d'un point de vue non-linéaire.

## 1.2 Réduction du modèle

Les méthodes de réduction présentées au chapitre précédent (III.2.2-III.2.3-III.2.4) vont être appliquées à notre modèle de poutre volumique. Comme pour la poutre d'Euler-Bernoulli, l'utilisation des modes linéaires (premier mode de flexion et quatrième de membrane), dont les résultats sont donnés sur la figure IV.6, conduit à des termes non-linéaires surestimés et à une rigidification globale du système, comme cela est visible sur les fonctions de réponse en fréquence IV.6a et IV.6b.

Même si cette base conduit à des écarts de réduction importants, elle va permettre de quantifier la précision de la méthode STEP dans le cadre volumique. A nouveau, il est possible de réaliser une projection directe du système afin d'obtenir des raideurs réduites de références (1.2.2). Celles-ci sont données sur les figures IV.6c et IV.6d, ainsi que celles obtenues par STEP avec des coefficients compris entre  $-5 \cdot 10^{-2}$  et  $5 \cdot 10^{-2}$ . De même que



(a) Différence sur la norme des déformées

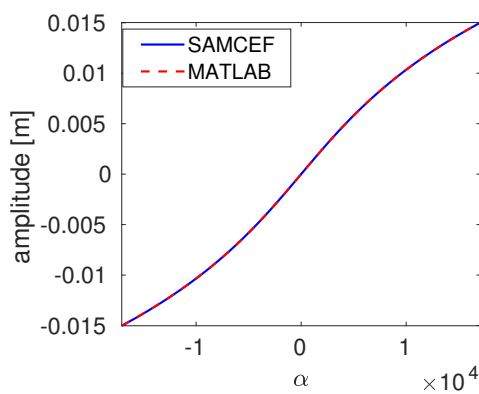
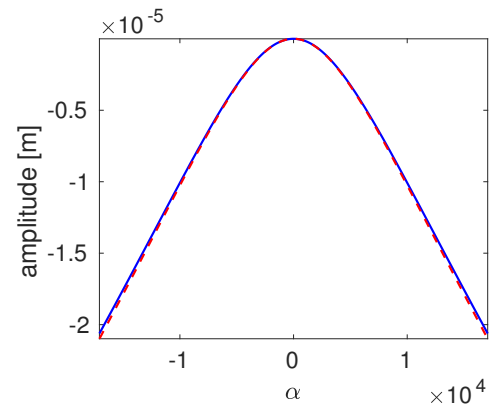
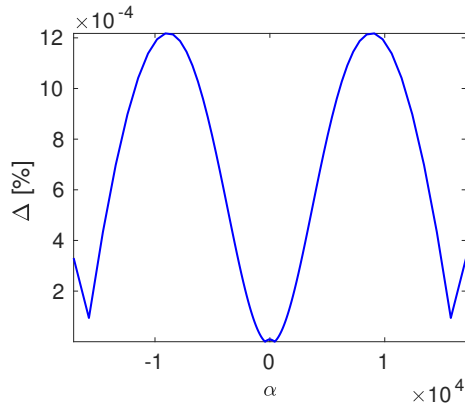
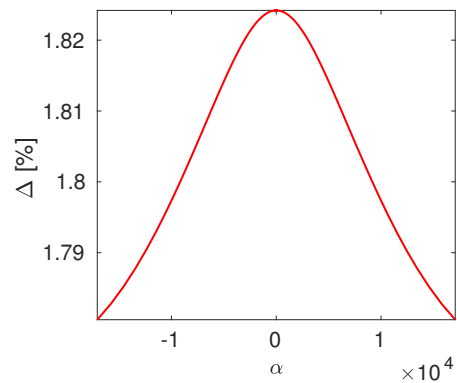
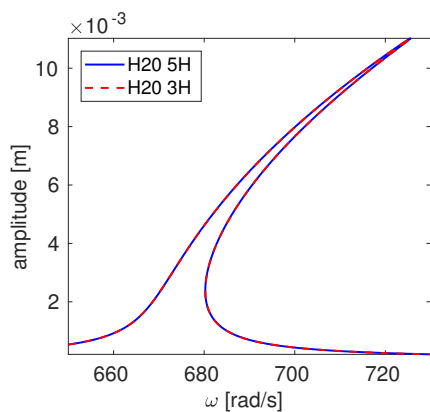
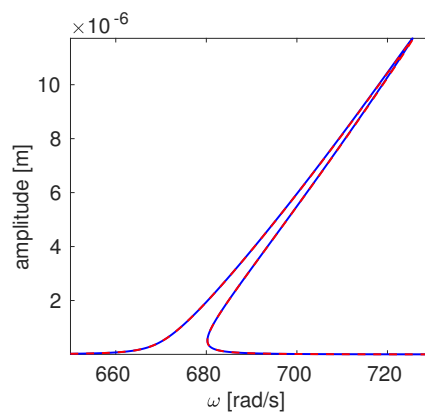
(b) Déplacements transverses à l'abscisse  $z = 0,5$  m(c) Déplacements longitudinaux à l'abscisse  $z = 0,3$  m(d) Différence relative des déplacements transverses à l'abscisse  $z = 0,5$  m(e) Différence relative des déplacements longitudinaux à l'abscisse  $z = 0,3$  m

Figure IV.3 – Comparaison des résultats statiques non-linéaires des modèles MATLAB et SAMCEF

pour la poutre d'Euler-Bernoulli, la méthode STEP coïncide parfaitement avec les raideurs réduites de références pour ce qui est des valeurs de fortes intensités. En revanche, les raideurs faibles présentent une différence plus grande mais tout à fait acceptable compte tenu de leurs valeurs.

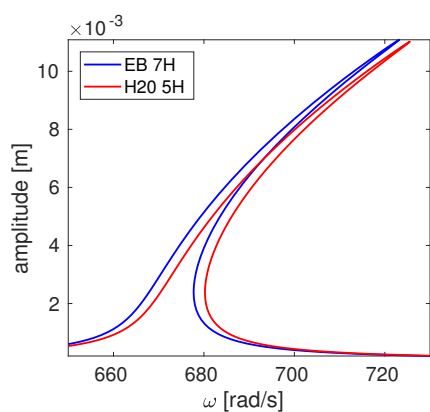


(a) Déplacements transverses à l'abscisse  $z = 0,5$  m

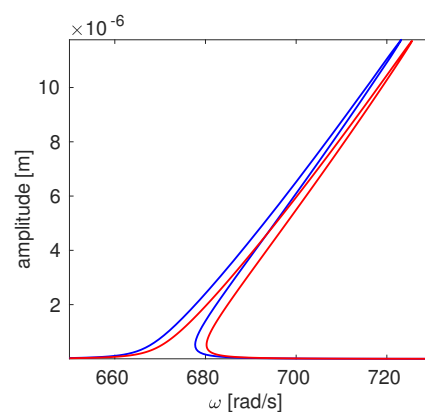


(b) Déplacements longitudinaux à l'abscisse  $z = 0,3$  m

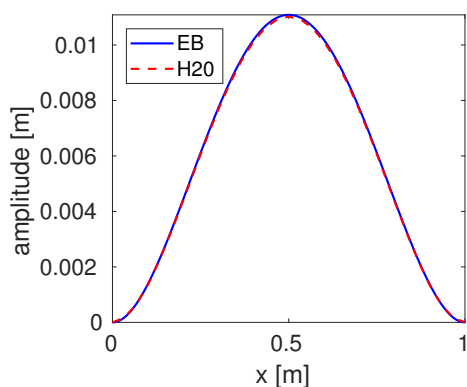
Figure IV.4 – Convergence harmonique de la résolution de la poutre H20 MATLAB



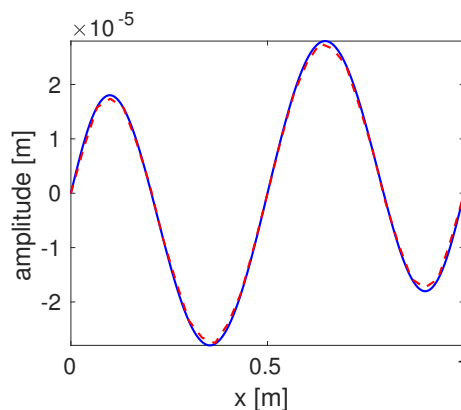
(a) Déplacements transverses à l'abscisse  $z = 0,5$  m



(b) Déplacements longitudinaux à l'abscisse  $z = 0,3$  m



(c) Déformées transverses au niveau des pics de résonances



(d) Déformées longitudinales au niveau des pics de résonances

Figure IV.5 – Comparaison des résultats non-linéaires harmoniques des modèles MATLAB Euler-Bernoulli et hexaédrique 20 nœuds

L'utilisation des bases non-linéaires composées des dérivées modales d'une part (figure IV.7), et des modes compagnons d'autre part (figure IV.8) donne en revanche de

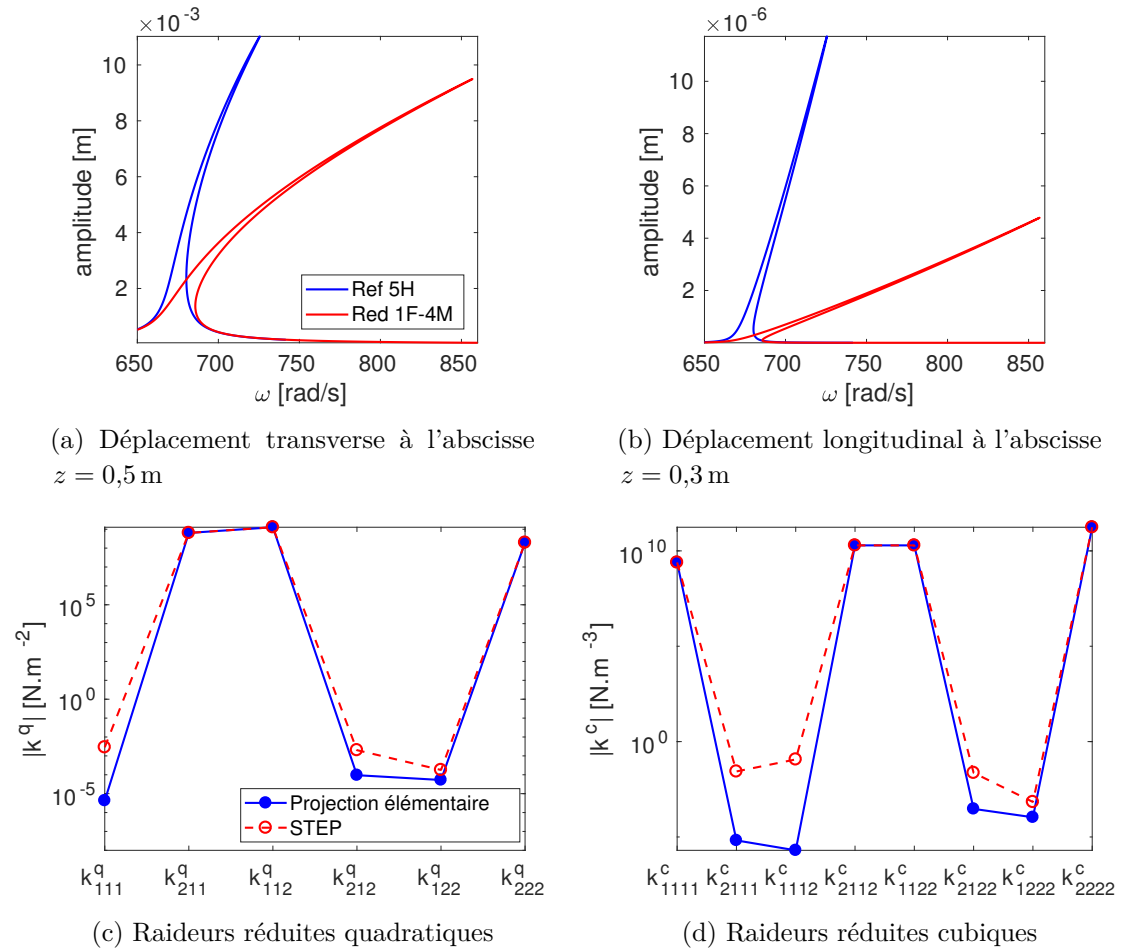


Figure IV.6 – Réduction de la poutre bi-encastée H20 à l'aide de modes linéaires

très bons résultats. La dérivée modale associée au premier mode de flexion (figures IV.7c et IV.7d), calculée par différence finie centrée (III.62), est purement transverse et représente bien la déformée recherchée. Les modes compagnons, comme pour la poutre d'Euler-Bernoulli, permettent bien d'obtenir le quatrième mode de membrane recherché à l'aide du critère en énergie (figure IV.8d). Le critère en valeur singulière en revanche nécessite un deuxième (figures IV.8e et IV.8f) vecteur afin de correctement restituer les couplages non-linéaires. Dans les deux cas, la réduction effectuée est de très bonne qualité, que ce soit en transverse, figure IV.8a, ou en longitudinal, figure IV.8b.

Les gains en temps sont eux aussi extrêmement avantageux comme le montre le tableau IV.3, où on compare la référence calculée avec 5 harmoniques aux réductions réalisées avec les différentes bases. Trois remarques peuvent être formulées à propos de ce tableau. Premièrement, le gain de temps est très important pour chacune des bases, plus de 99,7 %, ce qui est plus intéressant que pour la poutre d'Euler-Bernoulli. Deuxièmement, il apparaît clairement que la base la plus performante est celle construite à l'aide de la dérivée modale, avec un temps de résolution dix fois inférieur à celui d'une réduction par modes compagnons pour une précision équivalente. Enfin, on peut observer l'impact de l'ajout d'un vecteur de base sur le temps de calcul des raideurs réduites par méthode STEP avec la réduction par modes compagnons par critère de valeur singulière, base composée de



3 vecteurs, où ce temps est presque doublé par rapport à une base composée de 2 vecteurs.

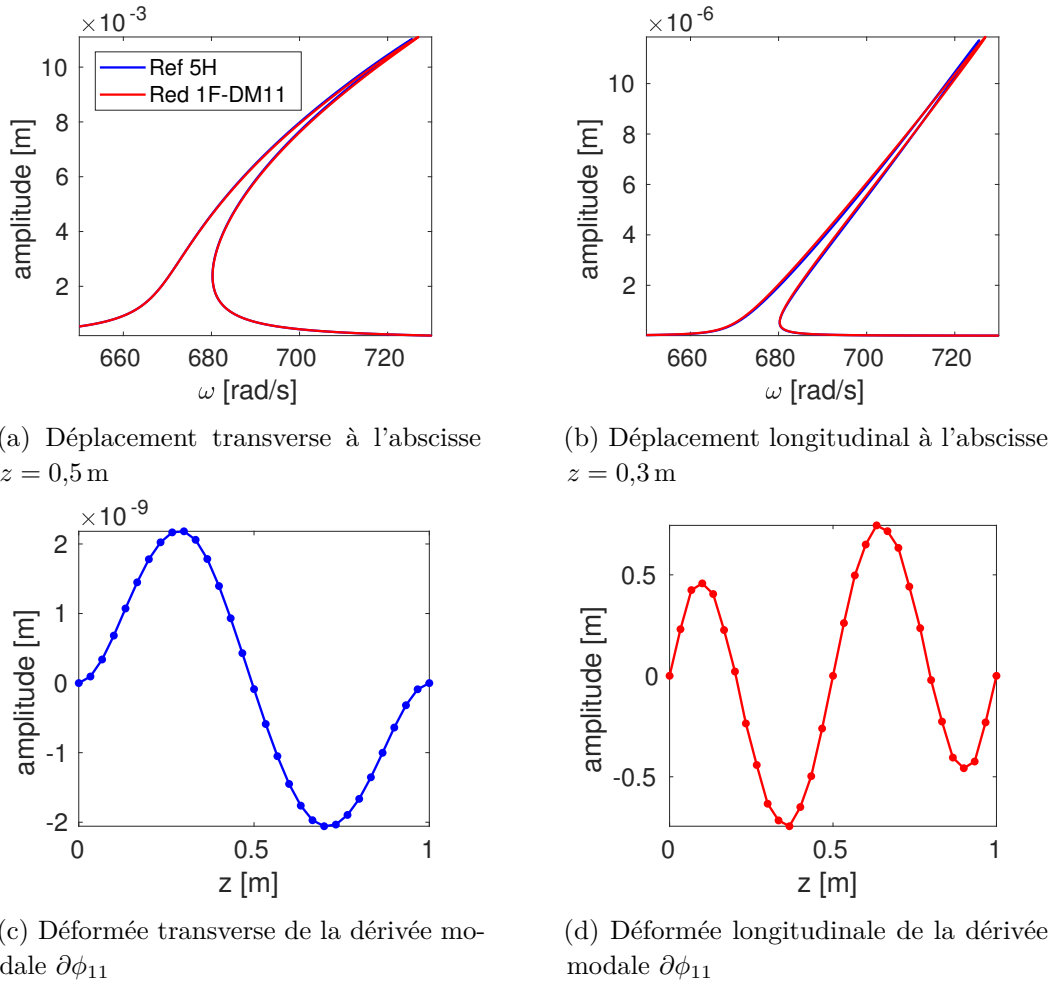


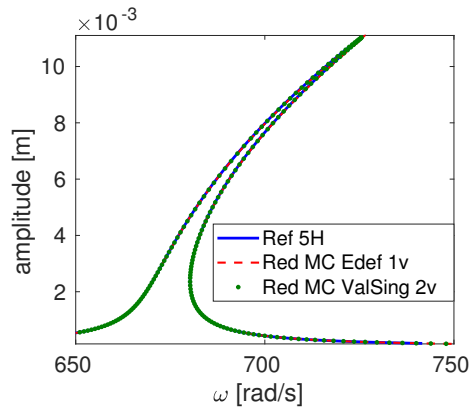
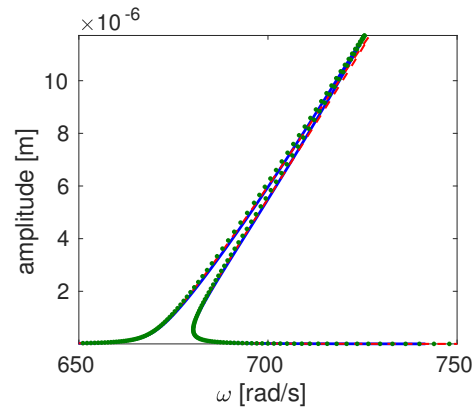
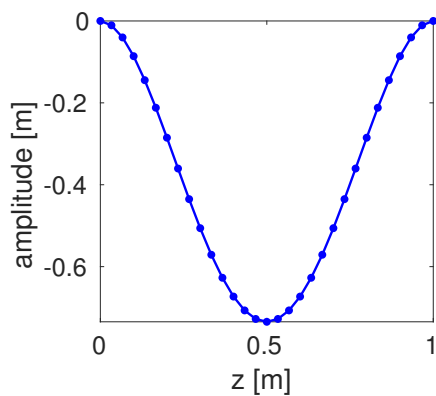
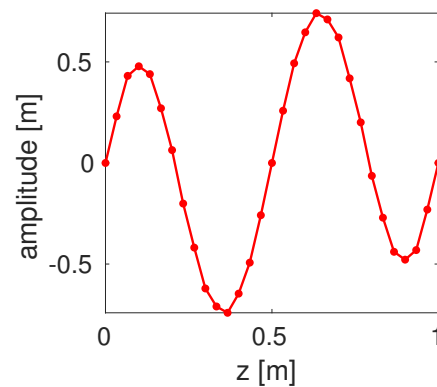
Figure IV.7 – Réduction de la poutre bi-encastée H20 à l'aide des vecteurs  $\phi_{1F}$  et  $\partial\phi_{11}$

Tableau IV.3 – Gains de temps sur la poutre bi-encastée H20 MATLAB

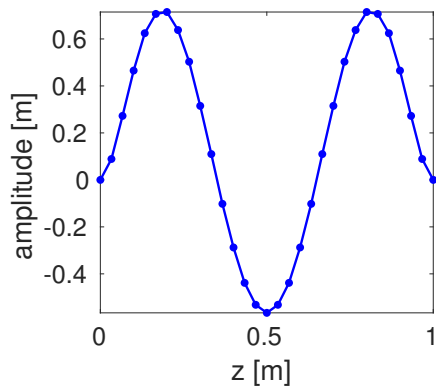
	Base [s]	STEP [s]	Continuation [s]	Total [s]	Gain [%]
Complet 5H	-	-	-	71 485	-
Réduit $[\phi_{1F} \phi_{4M}]$	$4 \cdot 10^{-5}$	3,8	6,7	14,5	99,98
Réduit $[\phi_{1F} \partial\phi_{11}]$	0,74	3,8	5,789	15,053	99,979
Réduit MC E.déf. 1v	65,269	3,7	6,58	145,57	99,796
Réduit MC Val.sing. 2v	67,948	7,53	6,91	158,94	99,778

### 1.3 Réduction à l'aide du logiciel éléments finis SAMCEF

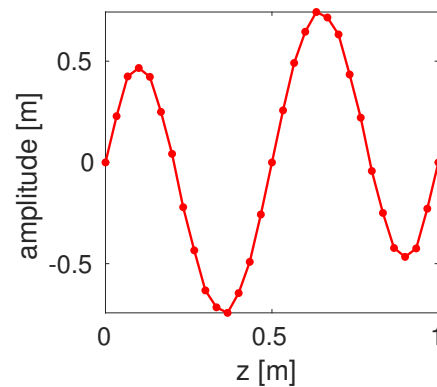
Afin d'être en capacité de pouvoir utiliser nos développements sur des cas concrets, souvent modélisés à l'aide de codes éléments finis commerciaux, une attention particulière a été portée sur les performances en utilisant les données issues d'un logiciel comme SAMCEF. Ainsi, les dimensions de la poutre sont conservées (voir tableau IV.1) afin de garder en référence les résultats de la poutre d'Euler-Bernoulli, en revanche le maillage est raffiné

(a) Déplacement transverse à l'abscisse  $z = 0,5$  m(b) Déplacement longitudinal à l'abscisse  $z = 0,3$  m(c) Déformée transverse du mode  $\phi_{1F}$ 

(d) Déformée longitudinale du mode compagnon en énergie



(e) Déformée transverse du premier mode compagnon en valeur singulière



(f) Déformée longitudinale du second mode compagnon en valeur singulière

Figure IV.8 – Réduction de la poutre bi-encastée H20 à l'aide de modes compagnons

avec 16 éléments selon la section et 50 dans la longueur, comme illustré sur la figure IV.9. Cela mène à un modèle composé de 13 695 inconnues. Une telle discrétisation permet aux pulsations propres de se rapprocher des valeurs issues de la RDM de manière assez importante comme cela est visible au tableau IV.4 avec une précision inférieure à 0,1 %.

Les bases de réduction sont déterminées à l'aide du code SAMCEF. Concernant les dérivées modales, celles-ci sont calculées via la procédure suivante :

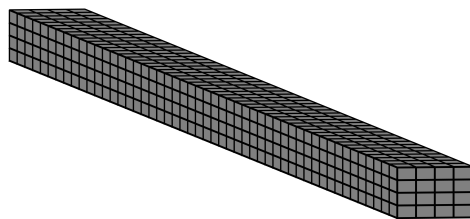


Figure IV.9 – Poutre modélisée sous SAMCEF avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds

Tableau IV.4 – Pulsations propres des modes d'intérêts de la poutre bi-encastée H20 modélisée avec SAMCEF

	$\omega_{\text{RDM}} [\text{rad.s}^{-1}]$	$\omega_{\text{SAMCEF}} [\text{rad.s}^{-1}]$	$\varepsilon [\%]$
$\phi_{1\text{F}}$	670,23	670,53	$4,5 \cdot 10^{-2}$
$\phi_{4\text{M}}$	65 204	65 262	$8,9 \cdot 10^{-2}$

1. Analyse statique non-linéaire : détermination de l'état d'équilibre associé à l'application des déplacements statiques dus à un des modes ;
2. analyse modale : le problème aux valeurs propres associé aux matrices déterminées à l'étape précédente est résolu ;
3. construction des dérivées modales par différences finies.

Les modes compagnons sont quant à eux déterminés tels que

1. analyse statique non-linéaire : détermination des échantillons statiques non-linéaires ;
2. retrait des composantes des vecteurs de la base de réduction de ces échantillons ;
3. extraction des vecteurs et valeurs singuliers à l'aide d'une SVD ;
4. choix des vecteurs selon les différents critères (valeurs singulières ou énergie de déformation).

Une fois la base de réduction construite, les raideurs réduites sont déterminées à l'aide d'une procédure STEP (1.2.3), avec les coefficients  $1 \cdot 10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-2}$  et  $1 \cdot 10^{-1}$ . Les raideurs réduites obtenues pour une base composée du premier mode de flexion et de sa dérivée modale sont données sur les figures IV.10c et IV.10d où elles sont comparées à celles issues de la même base et de la méthode STEP du modèle d'Euler-Bernoulli ainsi que du modèle 3D développé sous MATLAB présenté précédemment. On peut voir que les modèles H20, que ce soit SAMCEF ou MATLAB, sont globalement non-linéairement plus raides que le modèle Euler-Bernoulli. Cette rigidité semble inhérente à la modélisation 3D, les raideurs de grandes amplitudes étant très proches pour le modèle MATLAB peu discrétisé et le modèle SAMCEF discrétisé plus finement. Ce raffinement de maillage amène aussi certaines raideurs, comme  $\tilde{k}_{212}^q$  (figure IV.10c),  $\tilde{k}_{1112}^c$  et  $\tilde{k}_{2122}^c$  (figure IV.10d) à être beaucoup plus importantes que dans le cas peu discrétisé. Cela s'explique peut-être par la répartition plus homogène des efforts dans la section de la poutre SAMCEF impliquant d'autres couplages, amenant à diminuer certaines raideurs et à en activer d'autres initialement plus faibles.

Les résultats obtenus à l'aide de ces raideurs réduites sont donnés sur les figures IV.10a

et IV.10b. Ceux-ci montrent à nouveau l'inefficacité des modes linéaires à capturer les effets non-linéaires. La dérivée modale associée au premier de flexion complète parfaitement celui-ci et permet une très bonne réduction du système. Concernant les modes compagnons, seul le cas du critère énergétique est tracé et celui-ci fournit aussi une excellente approximation du système. Les temps de résolution sont fournis tableau IV.5. Hormis dans le cas des modes linéaires, où la nécessité d'aller chercher le quatrième mode de membrane haut en fréquence demande un certain temps, l'extraction des matrices du système complet reste le même dans tous les autres cas. La détermination de la base de réduction est en revanche nettement à l'avantage de la dérivée modale avec une durée près de 7 fois inférieure à celle nécessaire pour le calcul des modes compagnons. L'évaluation des raideurs réduites par la méthode STEP est sensiblement la même pour les bases composées uniquement de deux vecteurs. On donne à titre indicatif les temps associés aux modes compagnons avec critère en valeur singulière afin de montrer l'impact de l'ajout d'un vecteur dans la base qui, comme précédemment, double la durée de la procédure STEP et a motivé le choix de considérer le critère en énergie comme le critère le plus efficace. Enfin, les temps de continuation sont eux aussi du même ordre de grandeur pour toutes les bases.

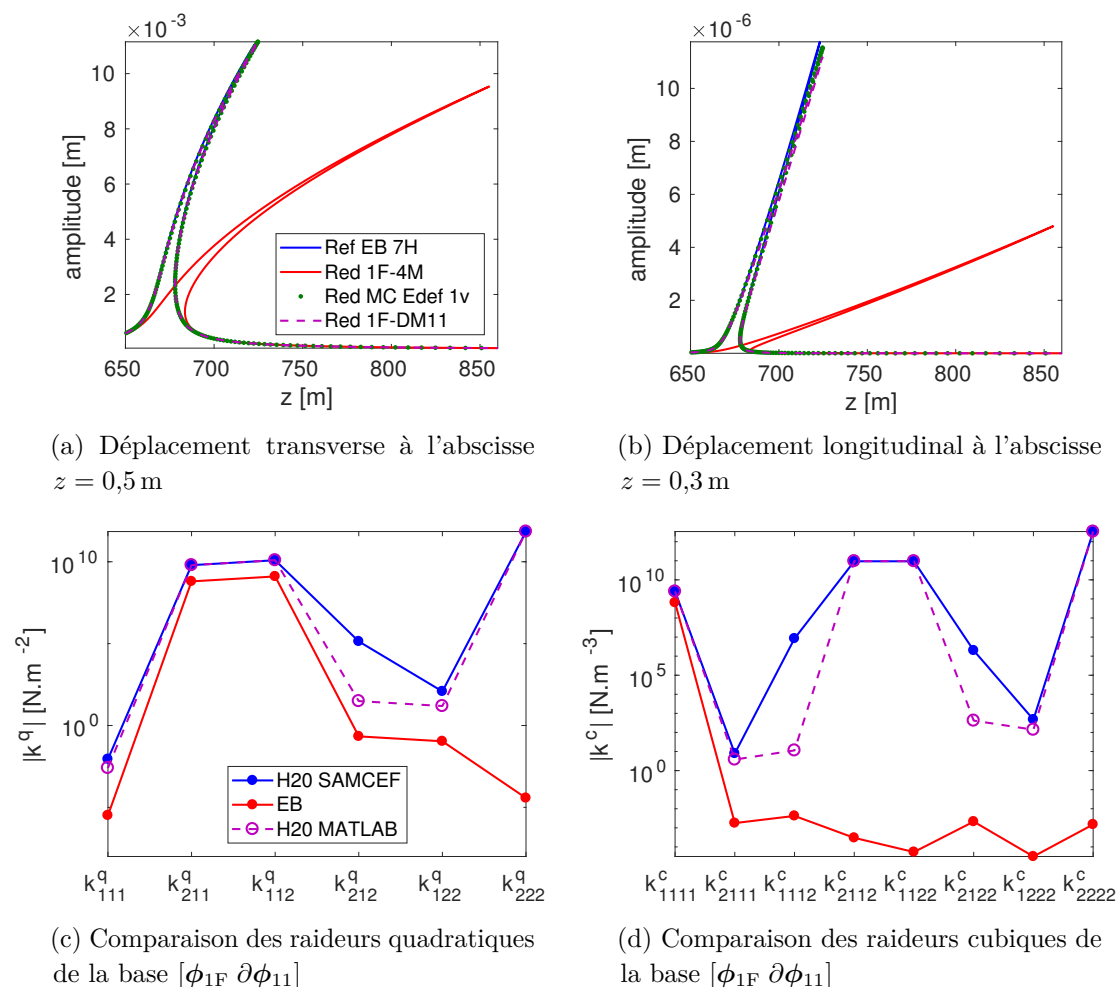


Figure IV.10 – Réduction de la poutre bi-encastée H20 à l'aide de SAMCEF

L'application des méthodes de réduction au cas de la poutre bi-encastée volumique montre des résultats très intéressants d'un point de vue de la précision et des gains en

Tableau IV.5 – Temps de calcul de la poutre bi-encastree H20 SAMCEF

[s]	Matrices	Base	STEP	Continuation	Total
Réduit $[\phi_{1F} \phi_{4M}]$	53,99	0,043	194,8	18,19	267,2
Réduit $[\phi_{1F} \partial\phi_{11}]$	26,98	55,99	190,56	16,96	290,49
Réduit MC E.déf. 1v	26,51	357,52	194,8	16,66	594,77
Réduit MC Val.sing. 2v	26,88	370,16	391,18	17,59	805,82

temps extrêmement avantageux. Ceux-ci ont fait l'objet d'un proceedings au Congrès Français de Mécanique 2017 [77]. On propose maintenant de s'orienter vers des conditions limites différentes où l'activation des termes non-linéaires suit un mécanisme distinct du cas qui vient d'être étudié.

## 2 Poutre encastree-libre en rotation

L'étude menée sur la poutre bi-encastree volumique a montré d'une part que les résultats obtenus étaient cohérents avec le modèle simplifié 1D d'Euler-Bernoulli et hypothèses de von Kàrmàn, tout en exhibant une dynamique de couplages non-linéaires plus complexe illustrée par les raideurs réduites de la poutre discrétisée sous SAMCEF. L'objectif est maintenant de tendre vers des conditions d'encastrement plus proches de celles ayant lieu dans la dynamique des roues aubagées, à savoir du type encastree-libre. A cela nous ajouterons aussi les effets dus à la rotation, avec la prise en compte notamment de la matrice d'assouplissement ainsi que les efforts centrifuges. Pour cela, nous considérerons dans la suite de ce chapitre l'équation générale suivante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}^q(\mathbf{q}(t)) + \mathbf{K}^c(\mathbf{q}(t)) + \mathbf{N}]\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) + \mathbf{f}^\Omega \quad (\text{IV.2})$$

L'étude des poutres encastrees-libres a donné lieu à de nombreuses recherches basées sur différents niveaux de modèles dont on peut trouver une synthèse dans les travaux de Thomas [110]. Dans notre cas, nous réaliserons cette étude à l'aide des éléments volumiques précédemment utilisés sans aucune hypothèse simplificatrice.

### 2.1 Présentation du modèle

La géométrie de la poutre utilisée pour cette étude est quasi identique à la précédente, à la différence de l'épaisseur qui est désormais de 1,75 cm comme mentionné dans le tableau IV.6. La discrétisation dans la longueur est elle aussi modifiée et fixée à 8 éléments comme illustré sur la figure IV.11, ce qui donne un modèle composé de 783 degrés de liberté. Ce choix a été fait afin de rendre les calculs plus rapides car, comme nous le verrons, l'activation des non-linéarités est plus difficile dans ce cas.

Tableau IV.6 – Dimensions et données matériau de la poutre

$b$ (dimension $x$ )	$h$ (dim. $y$ )	$L$ (dim. $z$ )	$\rho$	$E$	$\nu$
0,03 m	0,0175 m	1 m	7800 kg.m <sup>-3</sup>	210 · 10 <sup>9</sup> N.m <sup>-2</sup>	0,3

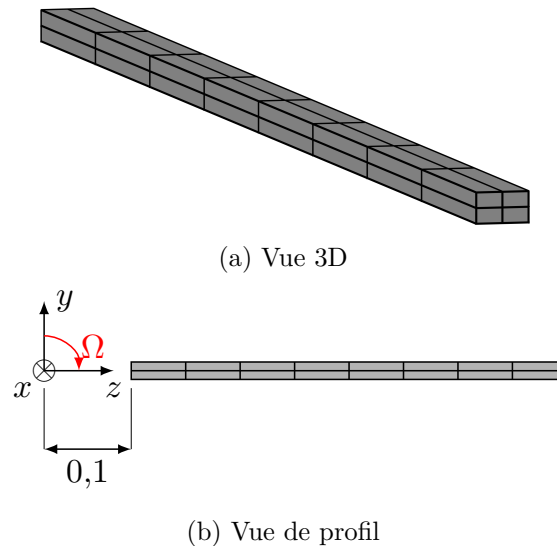


Figure IV.11 – Modèle de poutre pour le cas encastré-libre

L'axe de rotation de la poutre sera porté par l'axe  $x$ . De plus, afin de se rapprocher des conditions de fonctionnement d'une pale sur un disque, un excentrement de la poutre selon l'axe  $z$  de 0,1 m est considéré.

## 2.2 Comparaison avec SAMCEF

Une corrélation avec SAMCEF a aussi été menée dans ce cas. L'étude non-linéaire réalisée en appliquant un effort transverse en bout de poutre dans la direction  $y$  à rotation nulle, de manière similaire à (IV.1), a nécessité de modifier le nombre de points de Gauss dans l'intégration numérique utilisé pour le calcul de la matrice de raideur linéaire. Comme on peut le voir sur la figure IV.12, qui représente l'amplitude du déplacement en bout de poutre selon la direction  $y$  en fonction de l'effort imposé, la courbe de chargement calculée avec une matrice linéaire déterminée par intégration numérique avec 2 points dans chaque direction a un comportement singulier passé les 2 cm. Ce problème a été résolu en réalisant l'intégration numérique des termes de la matrice de raideur linéaire avec 3 points dans chaque direction. Il en résulte un comportement régulier et proche de celui obtenu grâce à SAMCEF, bien que légèrement plus rigide, comme le montre la figure IV.12.

Désormais, la matrice de raideur linéaire du modèle de poutre encastrée-libre sera déterminée à l'aide de 3 points d'intégration. Un tel choix a un impact sur les pulsations propres du système, comme le montre la figure IV.13a, avec un écart de quelques pour-cents pour la majorité des pulsations, les valeurs obtenues avec notre code étant supérieures à celles de SAMCEF. L'étude à venir étant réalisée sur le premier mode de la structure, la précision obtenue sur celui-ci est considérée comme suffisante, que ce soit en terme de pulsation ou de déformée modale, comme illustré sur le critère de MAC figure IV.13b. Enfin, il est aussi intéressant de noter la quasi-inexistence d'effets non-linéaires sur les déplacements transverses en comparaison au cas bi-encastré (fig. IV.3b).

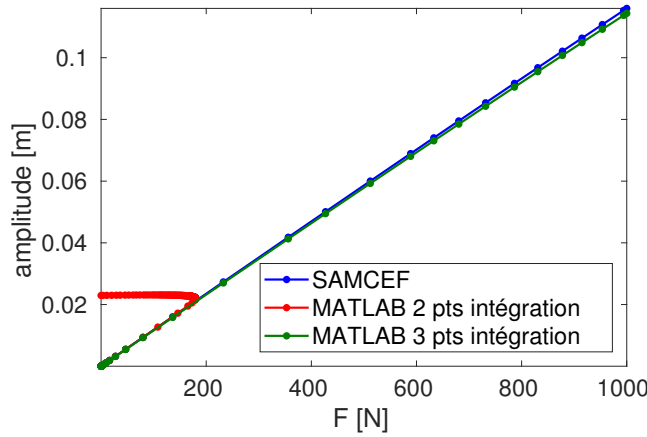
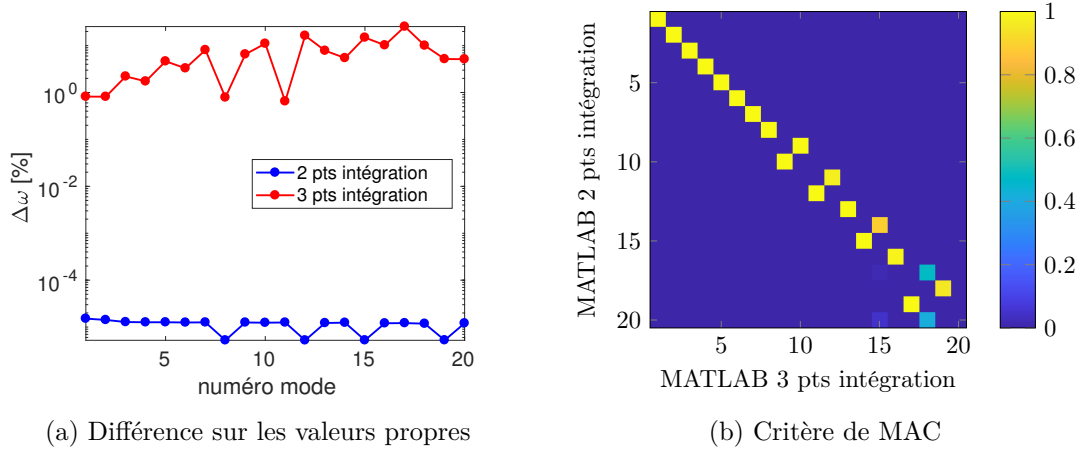


Figure IV.12 – Influence du nombre de points d'intégration de Gauss considérés pour le calcul de la matrice de raideur linéaire sur la solution statique non-linéaire (amplitude transverse en bout de poutre)



(a) Différence sur les valeurs propres

(b) Critère de MAC

Figure IV.13 – Comparaison des éléments propres des modèles SAMCEF et MATLAB avec 2 et 3 points d'intégration pour le calcul de la matrice de raideur linéaire

### 2.3 Détermination de l'état préchargé

La rotation n'étant considérée qu'autour de l'axe  $x$ , la matrice de rotation  $\mathbf{\Omega}$  (I.4) peut ainsi s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \Omega \mathbf{\Omega}_x \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

avec  $\Omega$  la vitesse de rotation selon l'axe  $x$  et  $\mathbf{\Omega}_x$  une matrice antisymétrique indépendante de la rotation. En utilisant cette expression, il est possible de réécrire la matrice

d'assouplissement centrifuge  $\mathbf{N}$  (I.28) telle que

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \Omega^2 \int_V \rho \mathbf{H}^\top \Omega_x^2 \mathbf{H} dV \\ &= \Omega^2 \mathbf{N}_x\end{aligned}\tag{IV.4}$$

ainsi que les efforts centrifuges

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^\Omega &= \Omega^2 \int_V \rho \mathbf{H}^\top \Omega_x^2 \mathbf{x} dV \\ &= \Omega^2 \mathbf{f}_x^\Omega\end{aligned}\tag{IV.5}$$

Avec les différentes grandeurs associées à la rotation exprimées en fonction de la composante  $\Omega$ , il va être possible de déterminer l'état préchargé de la poutre à l'aide d'une méthode de continuation selon les déplacements ( $\mathbf{q}$ ) et la composante de rotation selon  $x$  ( $\Omega$ ) telle que

$$\begin{aligned}\left[ \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{N}_x + \mathbf{K}^q(\mathbf{q}) + \mathbf{K}^c(\mathbf{q}) \right] \mathbf{q} &= \Omega^2 \mathbf{f}_x^\Omega \\ \|\Delta \mathbf{q}\|^2 + |\Delta \Omega|^2 &= ds^2\end{aligned}\tag{IV.6}$$

Les résultats obtenus pour atteindre une vitesse de rotation de 5000 rpm sont donnés sur la figure IV.14. Le premier graphe, figure IV.14a, représente l'évolution des quatre premières pulsations propres de la poutre en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ . En traits pleins sont représentés les résultats obtenus avec MATLAB par continuation, et avec des ronds ceux obtenus avec SAMCEF, considérés comme références. Les résultats obtenus coïncident de manière précise pour ce qui est des deux premiers modes. Dans les cas des modes trois et quatre, les résultats MATLAB sont légèrement plus rigides du fait de la problématique exposée précédemment (voir sous-section IV.2.2) mais respectent bien la tendance des résultats donnés par SAMCEF. D'une manière plus globale, on observe bien l'effet rigidifiant des efforts centrifuge sur la poutre, ces effets étant de plus en plus marqués avec l'augmentation de l'ordre du mode. Cette rigidification est due à un allongement de la poutre dû aux effets d'inertie, visible sur la figure IV.14b, qui va avoir pour effet de contraindre la poutre longitudinalement. A nouveau, les déplacements obtenus avec SAMCEF et MATLAB à 5000 rpm sont comparés, comme illustré sur la figure IV.14c, et montrent une très bonne coïncidence.

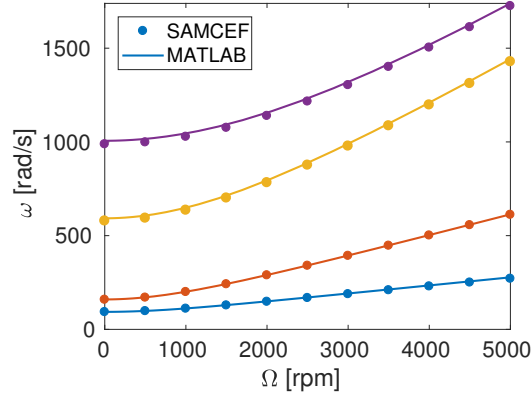
## 2.4 Calcul des solutions périodiques

### 2.4.1 Méthodologie

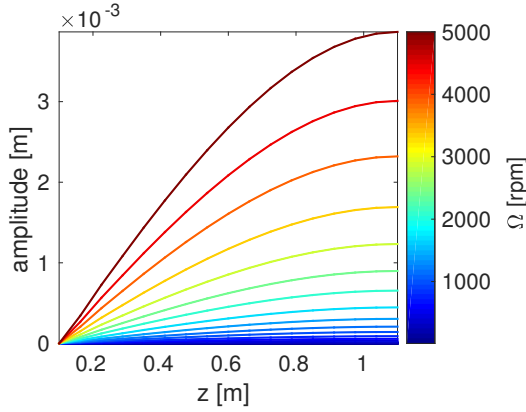
Afin de déterminer les solutions périodiques de notre système (IV.2), nous nous appuyerons sur la technique de l'équilibrage harmonique, qui conduit à l'équation (IV.7), à laquelle il est nécessaire d'apporter quelques modifications afin de prendre en compte les effets dus à la rotation.

$$\mathbf{Z}(\omega) \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}}\tag{IV.7}$$

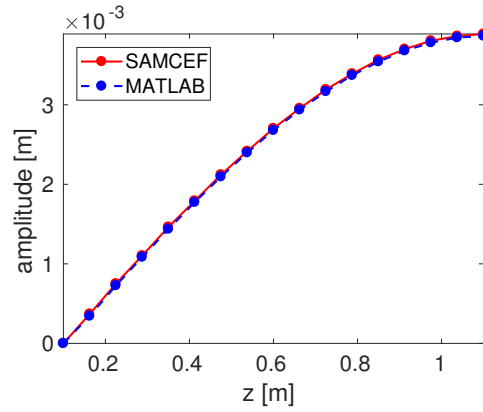




(a) Évolution des 4 premières pulsations propres de la poutre en fonction de la rotation



(b) Évolution du déplacement longitudinal de la poutre en fonction de la vitesse de rotation



(c) Comparaison des déplacements longitudinaux à 5000 rpm obtenus avec MATLAB et SAMCEF

Figure IV.14 – Comparaison des résultats obtenus avec MATLAB et SAMCEF pour la détermination de l'état préchargé de la poutre encastree-libre

Dans un premier temps, il s'agit de compléter la matrice de raideur dynamique  $\mathbf{Z}$  en y incluant les effets d'assouplissement centrifuge (IV.4), ce qui donne

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{N}_x & & & \\ & \mathbf{Z}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{Z}_{N_h} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

avec

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{N}_x - (p\omega)^2 \mathbf{M} & p\omega \mathbf{C} \\ -p\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{N}_x - (p\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

Ensuite, les efforts extérieurs harmoniques  $\hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}}$  doivent intégrer les efforts centrifuges (IV.6). Ces derniers étant constants, leurs projections sur la base harmonique mène

à

$$\hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\Omega} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

où  $\mathbf{g}$  représente la répartition spatiale de l'effort extérieur harmonique de pulsation  $\omega$  appliqué à la poutre (eq. (IV.11)).

$$\mathbf{f}^{\text{ext}}(t) = \mathbf{g} \cos(\omega t) \quad (\text{IV.11})$$

Les efforts non-linéaires ne seront eux pas modifiés. De cette manière, l'équilibre entre les efforts centrifuges et non-linéaires se fera naturellement. Nous pourrons ainsi vérifier que les résonances obtenues de cette manière coïncident bien avec les pulsations propres calculées à l'aide de la matrice de raideur tangente issue de la précharge centrifuge (I.38).

### 2.4.2 Application

L'étude est ici menée autour du premier mode de flexion de la poutre encastree-libre sous chargement centrifuge à  $\Omega = 5000\text{rpm}$ . L'effort extérieur  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  est donc appliqué transversalement en bout de poutre selon la direction  $y$  au niveau du centre géométrique de la section. C'est aussi au niveau de ce nœud que seront tracés les différents résultats. L'amortissement est lui pris égal à 0,15 % sur le mode étudié soit  $\alpha = 0,833$  (III.43). Enfin, la HBM sera appliquée au moyen de 5 harmoniques ( $N_h = 5$ ), menant à un système de 8613 inconnues, et une discrétisation AFT de 125 pas de temps ( $N_t = 125$ ). Ce nombre d'harmoniques semble suffisant à la vue de la figure IV.15 où sont comparés les résultats pour 3 et 5 harmoniques.

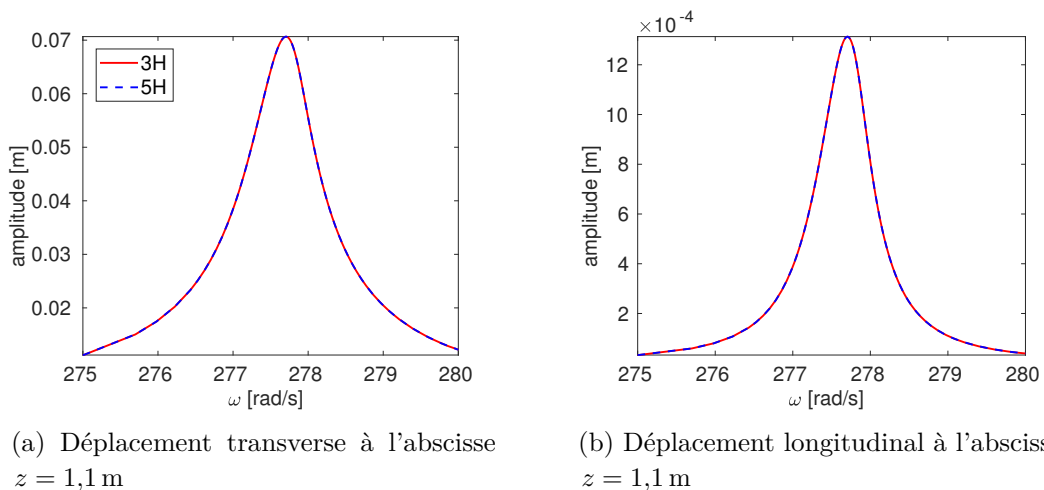


Figure IV.15 – Comparaison des solutions obtenues avec la HBM pour 3 et 5 harmoniques

Les résultats détaillés pour une excitation de 20 N sont donnés sur la figure IV.16. Ceux-ci montrent, voir figure IV.16a la courbe représentant le déplacement transverse

en bout de poutre, un léger raidissement de la structure avec un pic "penché" vers les hautes fréquences, en comparaison à la réponse linéaire. La faiblesse des effets non-linéaires dans ce cas s'explique par l'amplitude des débattements relativement modérée pour cette configuration, en comparaison aux travaux de Thomas [112] par exemple. Les effets non-linéaires apparaissent plus clairement sur la courbe représentant le déplacement longitudinal figure IV.16b, où le déplacement linéaire est nul en bout de poutre, mais est bien présent dans le cas non-linéaire. Concernant les déplacements transverses figure IV.16a, il est aussi à noter que l'on retrouve bien la résonance prévue par la matrice tangente, la courbe linéaire étant construite grâce à celle-ci. Comme dans le cas de la poutre bi-encastree, l'étude des signaux temporels et des coefficients harmoniques est riche d'enseignements. Concernant les déplacements transverses, ceux-ci sont synchronisés avec la fréquence d'excitation, comme le montre la figure IV.16c, et plus largement avec les harmoniques impairs de cette fréquence comme illustré par les coefficients figure IV.16e. Concernant les termes longitudinaux, il apparaît que ces déplacements se font selon le double de la fréquence d'excitation (figure IV.16d), et plus généralement, selon les harmoniques pairs de cette fréquence (figure IV.16f). Ensuite, ceux-ci sont aussi intéressants d'un point de vue statique. Comme dans le cas bi-encastree, la sollicitation transverse amène à une déformation longitudinale identique, que ce soit pour un déplacement transverse positif ou négatif, comme on peut le voir sur les figures IV.16c et IV.16d, cela amenant au doublement de la fréquence des déplacements longitudinaux vis-à-vis des transverses, ainsi que l'apparition d'une composante statique  $\mathbf{a}_0$ .

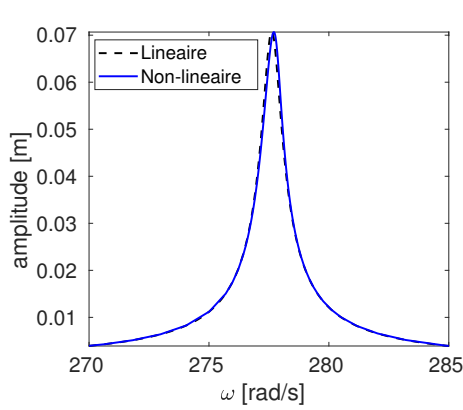
Afin de bien dissocier les composantes dynamiques et celles statiques dues à la précharge, il est intéressant de retrancher les déplacements dus à cette dernière aux déplacements globaux de la poutre en mouvement. Ainsi, en retranchant ces déplacements, on regarde les déplacements dus à la dynamique autour de la position d'équilibre que représente la précharge statique. Ces déplacements sont représentés sur les figures IV.17a pour ce qui est des transverses, et IV.17b pour les longitudinaux. En ce qui concerne les déplacements transverses, on retrouve bien une déformée selon le premier mode de flexion avec une faible courbure due à la précharge. Les déplacements longitudinaux sont en revanche bien différents du premier mode longitudinal illustré sur la figure IV.17c. Il apparaît ici difficile d'envisager une réduction à l'aide des modes linéaires, ou alors en en considérant un nombre important afin de capturer ce mouvement longitudinal.

## 2.5 Réduction autour de la position d'équilibre

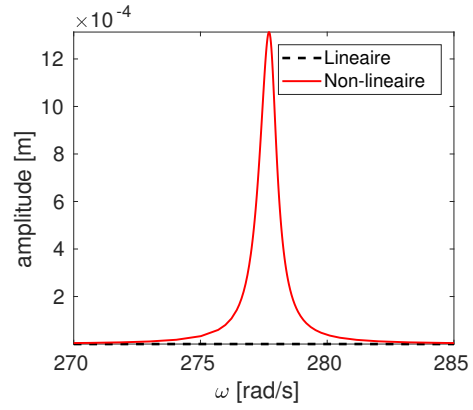
Nous présentons ici les modifications apportées aux différentes méthodes utilisées dans ce mémoire afin de réduire un système soumis à une précharge centrifuge, la réduction étant réalisée dans ce cas autour de la position d'équilibre associée à ce chargement. La réduction va ainsi être réalisée au moyen des modes autour de cette position d'équilibre, déterminés à l'aide de la matrice de raideur tangente associée à la précharge centrifuge. Enfin, il est à noter que les résultats présentés dans cette section sont obtenus à l'aide du code MATLAB et des éléments H20 développés.

### 2.5.1 Procédure STEP

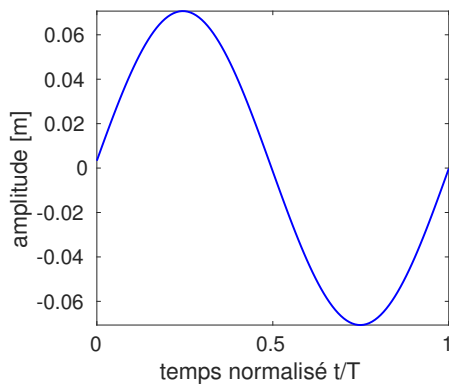
Afin d'adapter la procédure STEP à la réduction d'une structure soumise à une précharge statique, il est intéressant de décomposer les efforts internes selon les composantes statiques



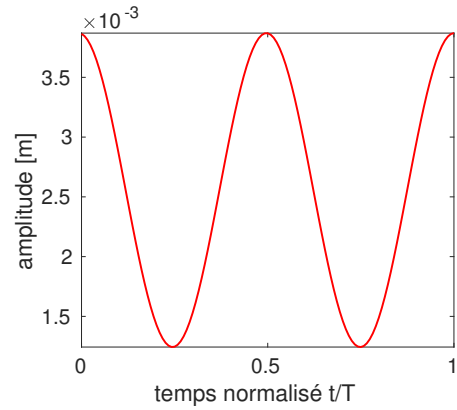
(a) Déplacement transverse à l'abscisse  $z = 1,1$  m



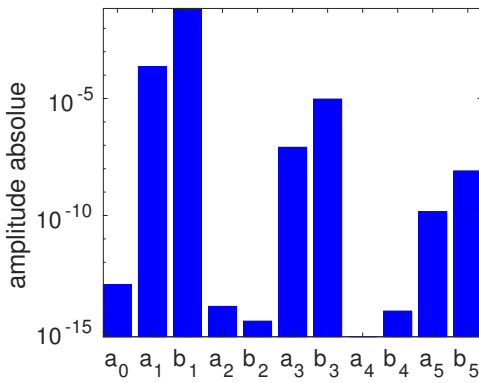
(b) Déplacement longitudinal à l'abscisse  $z = 1,1$  m



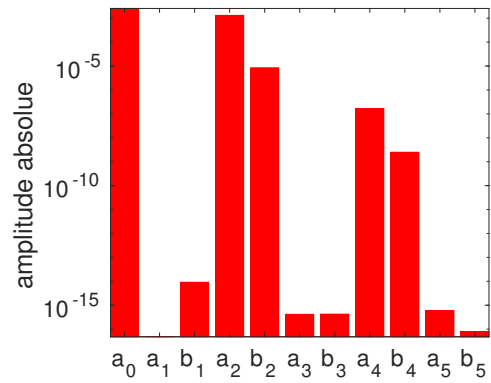
(c) Évolution temporelle transverse à l'abscisse  $z = 1,1$  m à la résonance



(d) Évolution temporelle longitudinale à l'abscisse  $z = 1,1$  m à la résonance



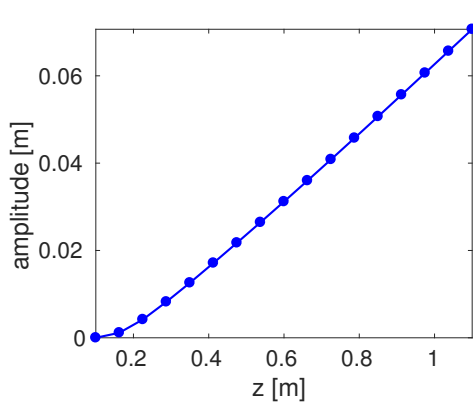
(e) Coefficients harmoniques du déplacement transverse à l'abscisse  $z = 1,1$  m à la résonance



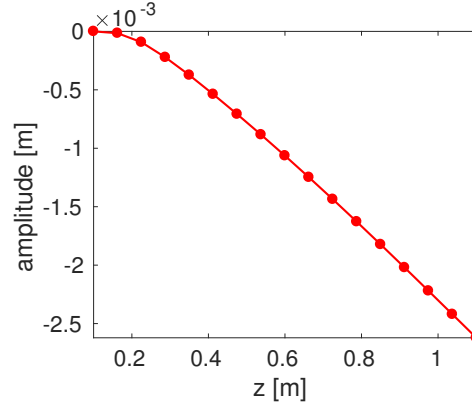
(f) Coefficients harmoniques du déplacement longitudinal à l'abscisse  $z = 1,1$  m à la résonance

Figure IV.16 – Résultats de simulation pour la poutre encastrée-libre en rotation à 5000 rpm avec un forçage de 20 N

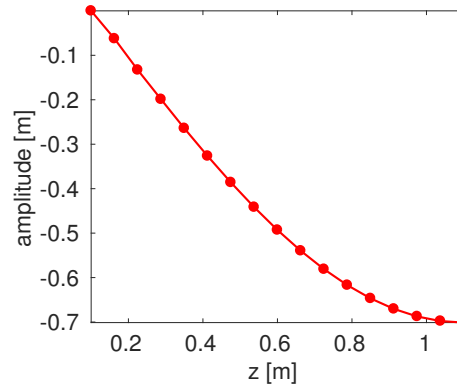
associées purement à la précharge, et celles associées à la dynamique et aux couplages avec la précharge. Soit  $\mathbf{x}_0$  les déplacements associés à la précharge et  $\mathbf{x}$  un vecteur de



(a) Déformée transverse dynamique au niveau du pic de résonance



(b) Déformée longitudinale dynamique au niveau du pic de résonance



(c) Déformée longitudinale du premier mode longitudinal à 5000 rpm

Figure IV.17 – Composantes statique et dynamiques de la poutre encastée-libre résolue par HBM

déplacements autour de cette position d'équilibre. Les efforts internes s'expriment alors

$$\begin{aligned}
 f_p^{\text{int}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left( k_{pi} + \Omega^2 n_{x,pi} \right) (x_{0,i} + x_i) \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{pij}^q (x_{0,i} + x_i)(x_{0,j} + x_j) \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{pijk}^c (x_{0,i} + x_i)(x_{0,j} + x_j)(x_{0,k} + x_k)
 \end{aligned} \tag{IV.12}$$

où  $\mathbf{N}_x = (n_{x,ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ . En développant cette expression, il est possible d'identifier les composantes de ces efforts internes avec :

- les termes constants associés à la précharge

$$\begin{aligned}
 f_p^{\Omega}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left( k_{pi} + \Omega^2 n_{x,pi} \right) x_{0,i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{pij}^q x_{0,i} x_{0,j} \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{pijk}^c x_{0,i} x_{0,j} x_{0,k}
 \end{aligned} \tag{IV.13}$$

- les termes linéaires

$$\begin{aligned}
f_p^l(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left( k_{pi} + \Omega^2 n_{x,pi} \right) x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{pij}^q (x_i x_{0,j} + x_{0,i} x_j) \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{pijk}^c (x_{0,i} x_{0,j} x_k + x_{0,i} x_j x_{0,k} + x_i x_{0,j} x_{0,k})
\end{aligned} \tag{IV.14}$$

- les termes quadratiques

$$\begin{aligned}
f_p^q(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{pij}^q x_i x_j \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{pijk}^c (x_{0,i} x_j x_k + x_i x_{0,j} x_k + x_i x_j x_{0,k})
\end{aligned} \tag{IV.15}$$

- les termes cubiques

$$f_p^c(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{pijk}^c x_i x_j x_k \tag{IV.16}$$

où les degrés des différents termes sont indiqués en fonction de la variable  $\mathbf{x}$ .

Le but va donc être ici de déterminer les raideurs réduites associées aux termes linéaires (IV.14), quadratiques (IV.15) et cubiques (IV.16). Cela revient donc à appliquer la procédure STEP à la structure déformée selon les déplacements dus à la précharge auxquels on ajoute les différentes combinaisons de modes (III.18)-(III.20)-(III.23), ceux-ci décrivant la dynamique autour de cette position d'équilibre. Il faut ensuite retirer aux efforts issus de ces résolutions statiques ceux dus à la précharge. Enfin, on projette le résultat sur les différents vecteurs de la base. Cela donne donc pour les différents cas de chargements :

- chargements selon 1 mode

$$[\phi_p(\mathbf{x}_0)]^\top \left( \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}^\Omega \right) = \tilde{k}_{pi} \alpha + \tilde{k}_{pii}^q \alpha^2 + \tilde{k}_{pii}^c \alpha^3 \tag{IV.17}$$

avec  $\mathbf{x}_1 = \alpha \phi_i(\mathbf{x}_0)$

- chargements selon 2 modes

$$\begin{aligned}
[\phi_p(\mathbf{x}_0)]^\top \left( \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_2) - \mathbf{f}^\Omega \right) &= \tilde{k}_{pi} \alpha + \tilde{k}_{pii}^q \alpha^2 + \tilde{k}_{pii}^c \alpha^3 \\
&+ \tilde{k}_{pj} \beta + \tilde{k}_{pjj}^q \beta^2 + \tilde{k}_{pjj}^c \beta^3 \\
&+ \tilde{k}_{pij}^q \alpha \beta + \tilde{k}_{piij}^c \alpha^2 \beta + \tilde{k}_{pijj}^c \alpha \beta^2
\end{aligned} \tag{IV.18}$$

avec  $\mathbf{x}_2 = \alpha \phi_i(\mathbf{x}_0) + \beta \phi_j(\mathbf{x}_0)$

- chargements selon 3 modes

$$\begin{aligned}
[\phi_p(\mathbf{x}_0)]^T \left( \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_3) - \mathbf{f}^\Omega \right) = & \tilde{k}_{pi} \alpha + \tilde{k}_{pii}^q \alpha^2 + \tilde{k}_{piii}^c \alpha^3 \\
& + \tilde{k}_{pj} \beta + \tilde{k}_{pjj}^q \beta^2 + \tilde{k}_{pjjj}^c \beta^3 \\
& + \tilde{k}_{pk} \gamma + \tilde{k}_{pkk}^q \gamma^2 + \tilde{k}_{pkkk}^c \gamma^3 \\
& + \tilde{k}_{pij}^q \alpha \beta + \tilde{k}_{piij}^c \alpha^2 \beta + \tilde{k}_{pijj}^c \alpha \beta^2 \\
& + \tilde{k}_{pik}^q \alpha \gamma + \tilde{k}_{piik}^c \alpha^2 \gamma + \tilde{k}_{pikk}^c \alpha \gamma^2 \\
& + \tilde{k}_{pjk}^q \beta \gamma + \tilde{k}_{pjjk}^c \beta^2 \gamma + \tilde{k}_{pjkk}^c \beta \gamma^2 \\
& + \tilde{k}_{pijk}^c \alpha \beta \gamma
\end{aligned} \tag{IV.19}$$

$$\text{avec } \mathbf{x}_3 = \alpha \phi_i(\mathbf{x}_0) + \beta \phi_j(\mathbf{x}_0) + \gamma \phi_k(\mathbf{x}_0)$$

Ces raideurs sont ensuite comparées à la matrice de raideur tangente projetée afin de vérifier leur valeur.

### 2.5.2 Résultats

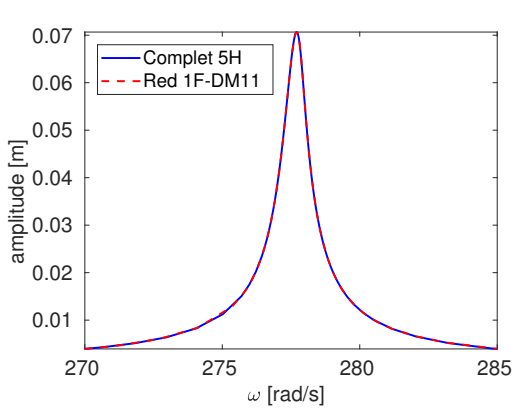
**Réduction par dérivées modales** La définition donnée précédemment (III.62) avec un schéma centré est appliquée en considérant la déformée  $\mathbf{x}_0$  comme étant celle associée à la précharge statique. Les résultats obtenus sont donnés sur la figure IV.18. Le mode linéaire déterminé à l'aide de la matrice tangente autour de la précharge centrifuge, figures IV.18c et IV.18d, fournit bien une déformée semblable à celle de la déformée dynamique de la poutre autour de la précharge statique figure IV.17a. Le schéma des différences finies centrées appliqué avec un coefficient  $h = 1 \cdot 10^{-3}$  permet d'obtenir une dérivée modale purement longitudinale dont la déformée figure IV.18f est similaire à celle de la déformée dynamique longitudinale figure IV.17b. Enfin, la méthode STEP est appliquée avec les coefficients  $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$  et  $\beta = 5 \cdot 10^{-2}$ . La réduction qui résulte de l'utilisation de cette base est excellente, comme illustrés sur les figures IV.18a et IV.18b. La dérivée modale associée au premier mode de flexion permet bien à nouveau d'obtenir le mode couplé longitudinal.

**Réduction par modes compagnons** La détermination des modes compagnons nécessite elle une modification afin de prendre en compte les effets dus à la précharge. Il va falloir d'une part rajouter le terme d'assouplissement centrifuge, ainsi que les efforts centrifuges. De plus, les efforts modaux (III.63) appliqués en conditions en efforts seront dorénavant ceux associés aux modes tangents autour de la précharge, appliqués grâce à la matrice tangente en ce point. Cela nous conduit à résoudre le système suivant par continuation

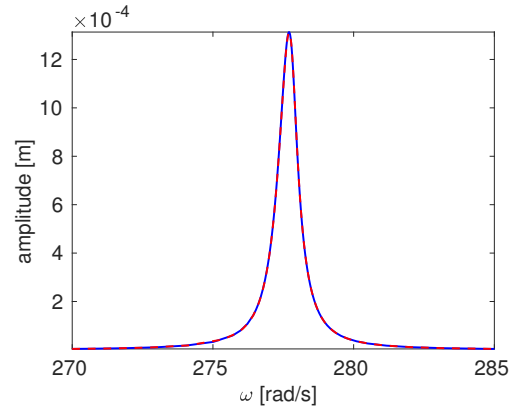
$$\begin{aligned}
\left( \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{N}_x \right) \mathbf{x} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}) = & \alpha \mathbf{K}(\mathbf{x}_0) \phi_i(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}^\Omega \\
\| \Delta \mathbf{x} \|^2 + | \Delta \alpha |^2 = & ds^2
\end{aligned} \tag{IV.20}$$

avec comme pour les dérivées modales

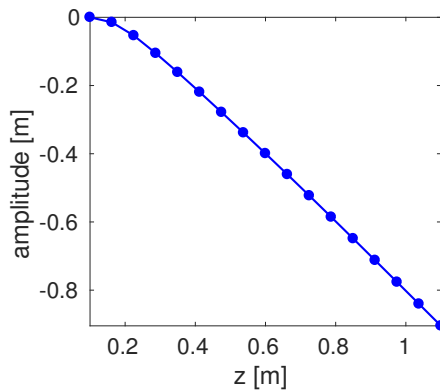
- $\mathbf{x}_0$  : déplacements induits par la précharge statique ;
- $\phi_i(\mathbf{x}_0)$  : le  $i^{\text{ème}}$  mode linéaire tangent au point  $\mathbf{x}_0$  ;



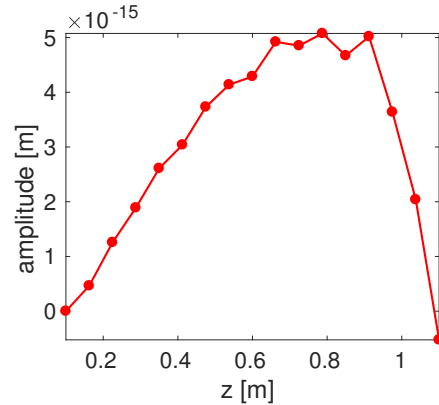
(a) Déplacement transverse à l'abscisse  $z = 1,1$  m



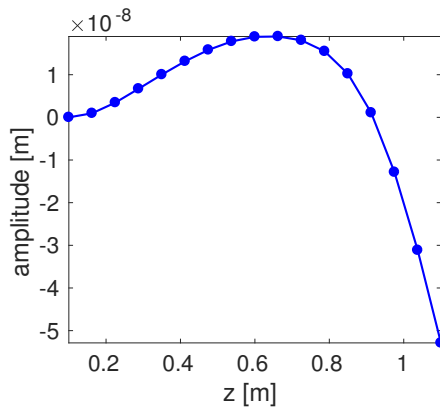
(b) Déplacement longitudinal à l'abscisse  $z = 1,1$  m



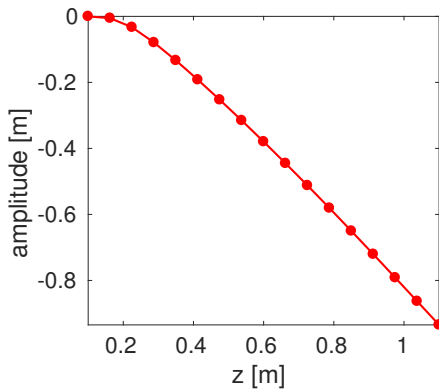
(c) Déformée transverse du premier mode de flexion



(d) Déformée longitudinale du premier mode de flexion



(e) Déformée transverse de la dérivée modale  $\partial\phi_{11}$



(f) Déformée longitudinale de la dérivée modale  $\partial\phi_{11}$

Figure IV.18 – Réduction de la poutre encastrée-libre préchargée à l'aide du premier mode de flexion et de sa dérivée modale associée

- $\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$  : la matrice de raideur tangente en  $\mathbf{x}_0$ .

Il est ensuite nécessaire de retirer à ces échantillons statiques la déformée associée à la précharge  $\mathbf{x}_0$  afin de réaliser la SVD sur les composantes associées aux efforts modaux uniquement, ceux-ci étant représentatifs de la dynamique.



Les résultats obtenus sont donnés figure IV.19. La première remarque qui peut être faite est que, comme dans le cas bi-encastree, le critère en énergie, après une première sélection des modes compagnons associés à 99% des valeurs singulières, permet bien de retenir le mode longitudinal couplé, représenté sur les figures IV.19c et IV.19d. La projection STEP, opérée avec les mêmes coefficients que pour la dérivée modale, sur la base composée du premier mode de flexion complété du mode compagnon est à nouveau très bonne, comme cela est visible sur les réponses en fréquences figures IV.19a et IV.19b.

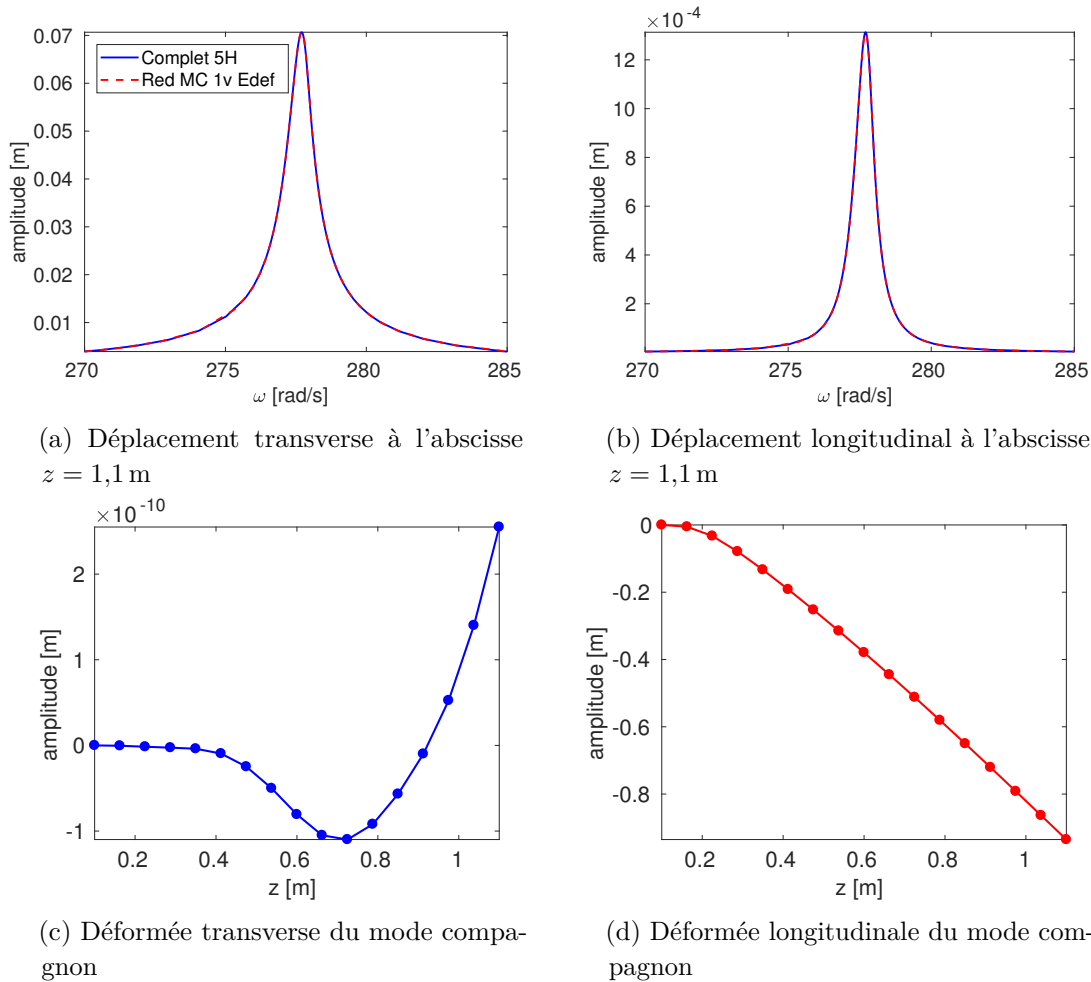


Figure IV.19 – Réduction de la poutre encastree-libre préchargée à l'aide du premier mode de flexion et du premier mode compagnon en critère énergétique

**Gains de temps** Les durées des différentes résolutions sont données dans le tableau IV.7. On peut remarquer que le temps de simulation du modèle complet est important. Pour un nombre de degrés de liberté deux fois moindre par rapport au modèle bi-encastree étudié précédemment, sa durée de résolution est plus longue, confère les tableaux IV.3 et IV.7. Cela illustre parfaitement la difficulté de résolution associée à ce problème.

Les temps de réduction sont aussi fournis et montrent un gain de temps extrêmement important, plus de 99,7%. Comme dans le cas bi-encastree, la base ayant le temps de résolution le plus faible est celle de la dérivée modale, les chargements utiles à la détermination des modes compagnons étant plus longue, ceux-ci mènent à un gain de temps légèrement

inférieur.

Tableau IV.7 – Gains de temps sur la poutre encastrée-libre H20 MATLAB

[s]	Précharge	Base	STEP	Continuation	Total	Gain [%]
Complet 5H	-	-	-	-	84 991	-
Réduit [ $\phi_{1F}$ $\partial\phi_{11}$ ]	20,943	0,41	1,76	4,54	27,67	99,97
Réduit MC E.déf. 1v	22,33	92,97	1,72	4,42	121,45	99,86

## 2.6 Réduction à l'aide du logiciel éléments finis SAMCEF

On présente ici la démarche utilisée afin de réduire une structure soumise à une précharge centrifuge à l'aide du logiciel éléments finis SAMCEF. On présente dans un premier temps quelques modifications apportées à la méthode STEP dans ce cadre afin de correctement déterminer les raideurs réduites. Nous exposons ensuite les différentes procédures suivies afin de calculer les bases de réduction.

### 2.6.1 Procédure STEP avec précharge centrifuge

La détermination des raideurs réduites avec le logiciel SAMCEF se décompose en 2 étapes dans ce cas :

**Première étape : détermination des termes réduits linéaires** Dans ce cas, les déplacements imposés, liés au chargement centrifuge et aux déplacements modaux, sont appliqués conjointement dans un calcul en rotation. De cette manière, la matrice d'assouplissement centrifuge sera prise en compte et les termes linéaires seront correctement projetés.

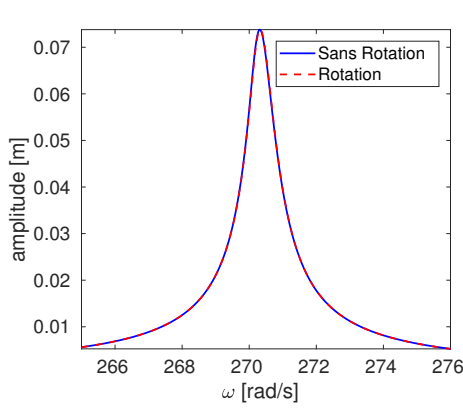
**Seconde étape : détermination des termes réduits non-linéaires** Dans ce cas, seuls les déplacements sont imposés, le calcul est réalisé à rotation nulle. De cette manière, les raideurs réduites non-linéaires sont correctement déterminées.

Afin que la réduction soit correctement réalisée on conservera donc les raideurs linéaires issues de la première étape et les raideurs non-linéaires issues de la seconde. Une méthode alternative aurait été de considérer une détermination des raideurs réduites par efforts imposés. Une telle méthode est envisageable mais, comme l'explique Grolet [37], complexe à mettre en œuvre. Pour cela, nous avons choisis de conserver la démarche expliquée ci-dessus en déplacements imposés.

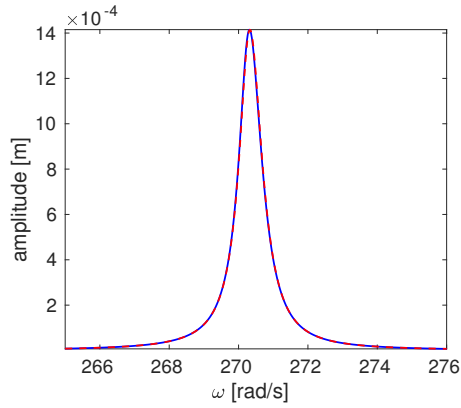
### 2.6.2 Construction des bases de réduction

**Réduction par dérivées modales** Il a pu être observé au cours de ces travaux que la prise en compte de la matrice d'amortissement centrifuge dans le calcul des dérivées modales avait peu d'impact. Cela est illustré ici sur le premier mode de flexion de la poutre. Les résultats obtenus avec des dérivées modales calculées sans et avec prise en compte de la rotation sont donnés figure IV.20. On peut voir sur les figures IV.20c-IV.20d-IV.20e la proximité des résultats en terme de raideurs réduites que ce soit linéaires, quadratiques ou

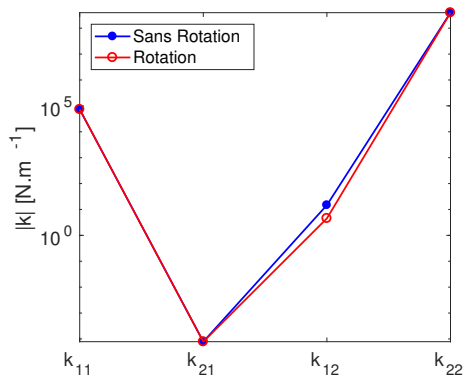
cubiques. Dans ce dernier cas, il existe une différence pour la raideur  $k_{2122}^c$  entre les deux calculs. Cela n'a cependant pas de répercussion sur les réponses en fréquences, comme illustré figures IV.20a-IV.20b où les courbes se superposent. Il apparaît donc convenable de pouvoir négliger les effets de rotation dans la détermination des dérivées modales, ce que nous ferons dans la suite du document.



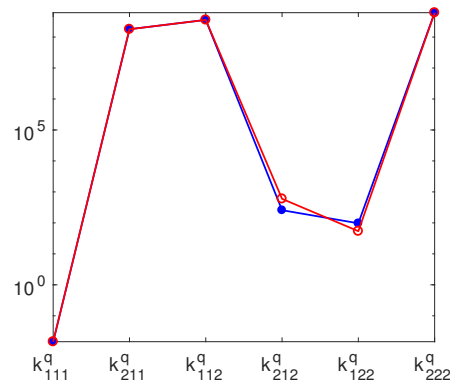
(a) Déplacement transverse à l'abscisse  $z = 1,1$  m



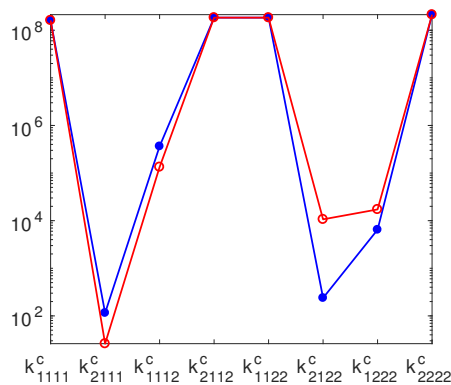
(b) Déplacement longitudinal à l'abscisse  $z = 1,1$  m



(c) Raideurs réduites linéaires



(d) Raideurs réduites quadratiques



(e) Raideurs réduites cubiques

Figure IV.20 – Comparaison des résultats obtenus avec des dérivées modales déterminées avec et sans rotation avec SAMCEF

Le résultat obtenu en terme de déformée est donné figure IV.21 et exhibe bien un vecteur purement longitudinal avec la forme attendue.

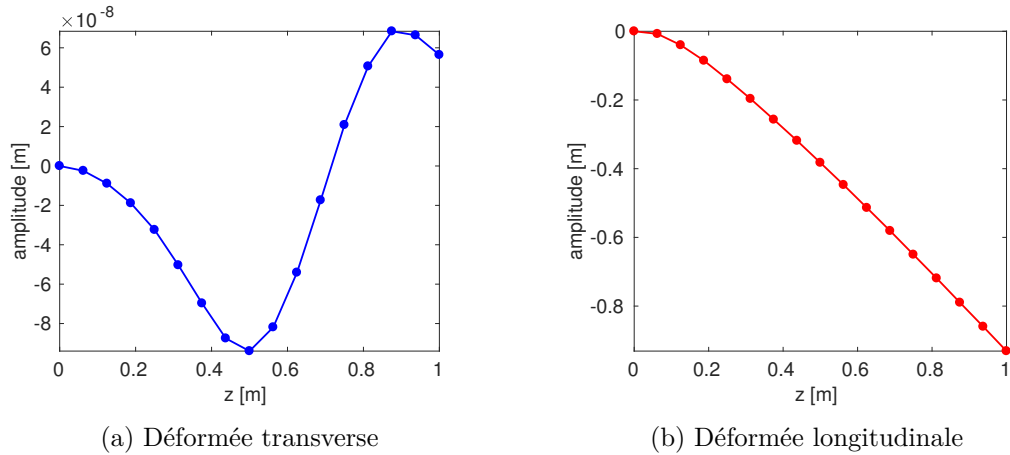


Figure IV.21 – Dérivée modale du premier mode de flexion obtenue avec SAMCEF

**Réduction par modes compagnons** Les échantillons statiques sont obtenus en prenant en compte les effets de rotation et en appliquant les efforts dus au mode linéaire tangent, grâce à la matrice de raideur tangente, pour différentes amplitudes. Le traitement est ensuite le même que celui présenté précédemment (2.5.2). Le résultat, illustré figure IV.22, est à nouveau celui qui était attendu.

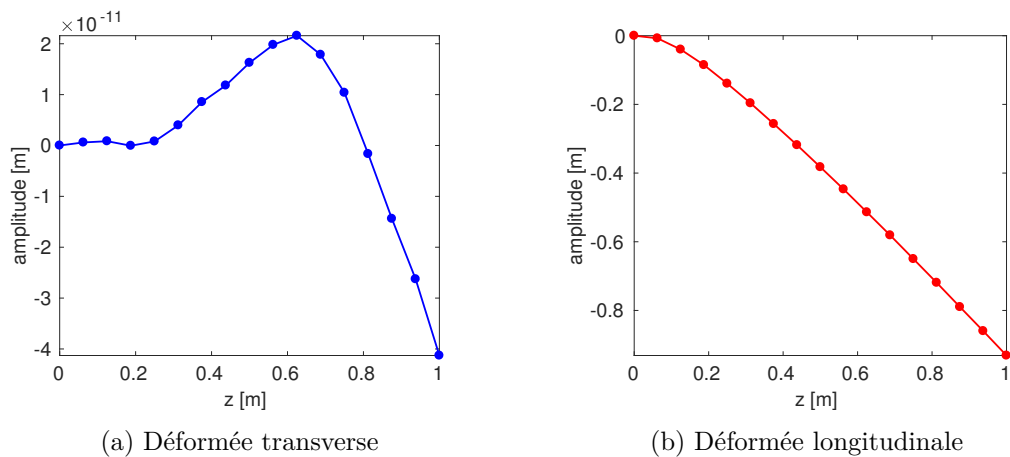


Figure IV.22 – Premier mode compagnon avec critère en énergie obtenu avec SAMCEF

### 2.6.3 Résultats

Les résultats obtenus avec les deux bases de réduction qui viennent d'être données sont fournis sur la figure IV.23. Afin de pouvoir réaliser une comparaison des fonctions de réponse en fréquence avec la référence obtenue avec MATLAB, celles-ci ont été normalisées en pulsation par rapport au premier mode de flexion. Il ressort de ces résultats tout d'abord une réponse avec une plus forte amplitude de la part du système traité avec SAMCEF. Cela peut s'expliquer par le fait que la structure est légèrement plus souple et que l'amortissement induit par la pulsation de flexion, plus faible que celle obtenue avec MATLAB, est donc moins important. On remarque ensuite que le pic de résonance obtenu avec SAMCEF est moins penché que celui obtenu avec MATLAB. Une fois de plus, la raideur plus importante du système résolu avec MATLAB peut expliquer cette plus forte non-linéarité. Mais il

est aussi intéressant de regarder les raideurs réduites obtenues pour les deux systèmes, données figures IV.23c et IV.23d, pour les bases associées à la dérivée modale du premier mode de flexion et au premier mode compagnon en critère énergétique. Il apparait que les raideurs réduites de grandes amplitudes sont du même ordre de grandeur dans les deux cas, que ce soit quadratiques ou cubiques. Il existe cependant une différence pour les raideurs plus faibles, où le système SAMCEF admet des raideurs plus importantes, tant cubiques que quadratiques. Ces dernières ayant un fort effet assouplissant sur le système peuvent expliquer cette inclinaison du pic moins importante. Les réponses non-linéaires des deux systèmes restent cependant très semblables et valident la réduction du système sous précharge centrifuge avec SAMCEF.

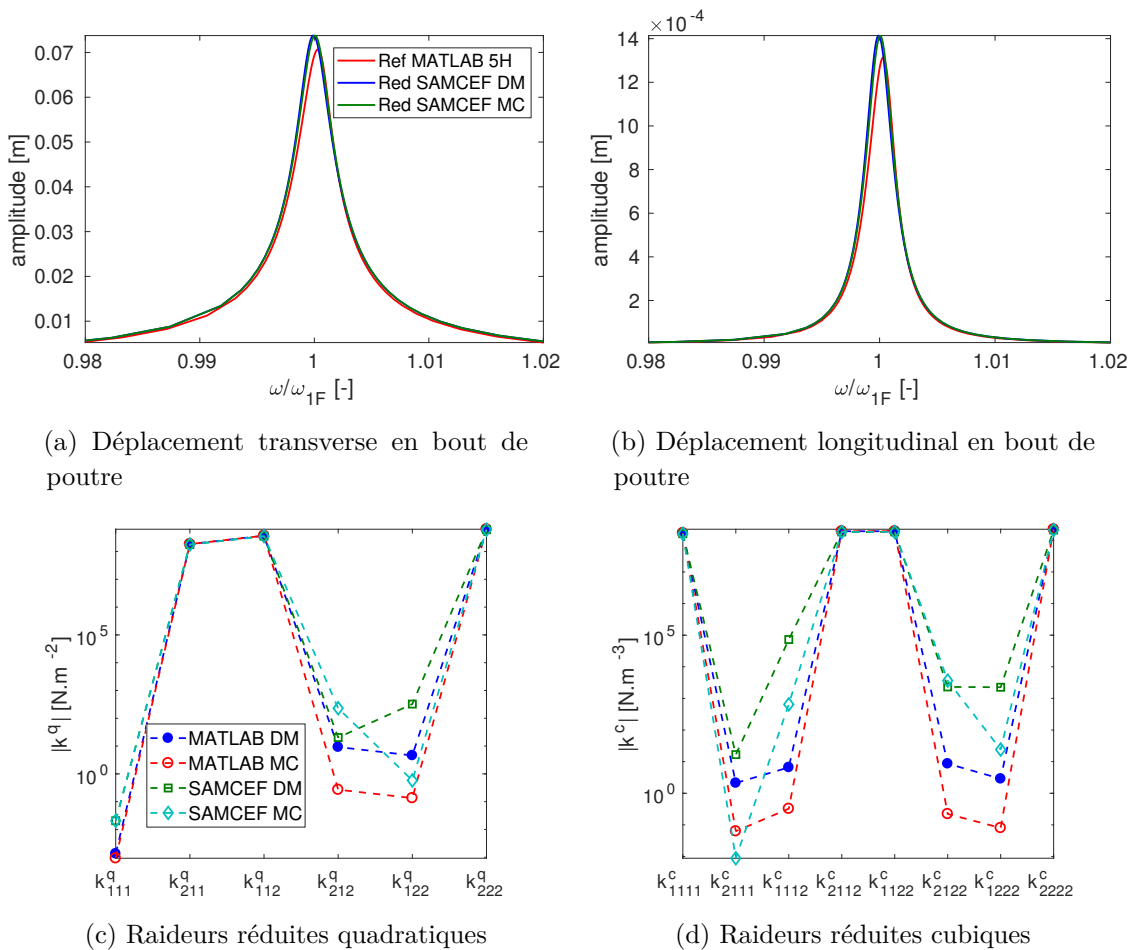


Figure IV.23 – Résultats de réduction avec SAMCEF pour la poutre encastree-libre en rotation à 5000 rpm avec une excitation de 20 N pour le premier mode de flexion

### 3 Étude du deuxième mode de flexion

L'étude du premier mode de flexion de la poutre encastree-libre a permis d'adapter les méthodologies de réduction pour la prise en compte des effets de rotation. Il n'empêche que les non-linéarités sont très peu marquées et donc d'un intérêt assez limité. Afin de palier à cela, une étude du deuxième mode de flexion a été menée. En effet, au regard des résultats obtenus par Thomas [112] celui-ci exhibe un comportement non-linéaire beaucoup

plus marqué pour des amplitudes moindres.

### 3.1 Simulations de référence avec MATLAB

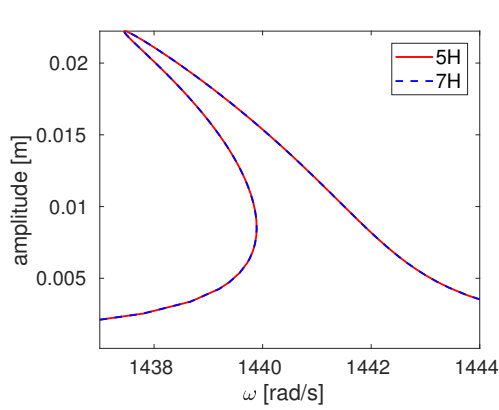
Les résultats de simulations HBM menées autour du deuxième mode de flexion sont données sur la figure IV.24. Les figures IV.24a et IV.24b montrent les fonctions de réponse en fréquence en bout de poutre pour les déplacements transverses et longitudinaux respectivement. On peut déjà remarquer que la convergence harmonique du système est obtenue pour 5 harmoniques, on peut voir que les solutions obtenues avec 5 et 7 harmoniques se superposent parfaitement justifiant ainsi que 5 harmoniques suffisent afin de bien retranscrire le mouvement. Deuxièmement, comme attendu la non-linéarité est bien plus marquée, avec un comportement assouplissant prononcé. Cette caractéristique assouplissante du deuxième mode de flexion a déjà été observée dans les résultats de Thomas [112]. Les figures IV.24c et IV.24d représentent les déformées transverses et longitudinales de la poutre au niveau du pic de résonance pour la simulation réalisée avec 7 harmoniques. On y reconnaît le deuxième mode de flexion sur la figure IV.24c. Pour ce qui est de la figure IV.24d pour la composante longitudinale, la déformée est plus complexe à appréhender mais montre, comme pour le premier mode de flexion, un déplacement global négatif dû à la courbure. Enfin, les figures IV.24e et IV.24f représentent les coefficients harmoniques au niveau du pic de résonance. On retrouve aussi à ce niveau les liens entre déplacements et parité des coefficients.

### 3.2 Réduction avec MATLAB

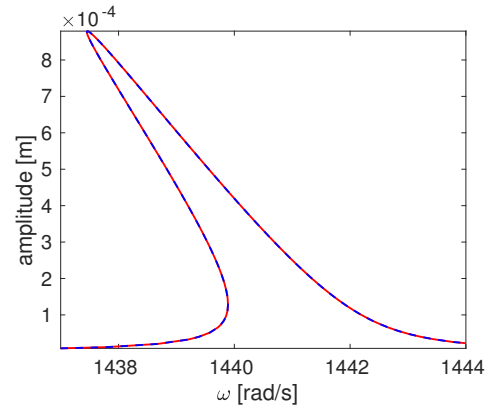
#### 3.2.1 Réduction par dérivées modales

La réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre à l'aide des dérivées modales est ici réalisée. Dans un premier temps, seul le mode linéaire et sa dérivée modale associée, soit  $[\phi_{2F} \partial\phi_{22}]$ , ont été utilisés. Le résultat obtenu est visible sur la figure IV.25 avec les courbes rouges. L'approximation obtenue retranscrit bien l'évolution non-linéaire de la réponse en fréquence. Afin d'améliorer ce résultat, différents modes de flexion voisins, du 2 au 4, ont été progressivement incorporés ainsi que leurs dérivées modales, soient les  $\partial\phi_{ij}$  avec  $i \leq j$ . La réduction converge vers la référence progressivement jusqu'à atteindre une quasi-superposition des courbes pour quatre modes de flexion et leurs dérivées modales.

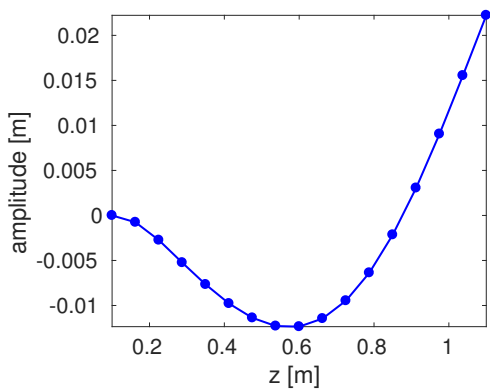
La base ainsi obtenue est constituée de 14 vecteurs dont nous allons analyser la participation à l'aide des coefficients harmoniques au niveau du pic de résonance. Sur la première figure IV.26a sont représentés les coefficients harmoniques où on peut voir de façon logique une forte domination du coefficient harmonique sinus de la pulsation fondamentale (coefficient  $b_1$ ) du mode  $\phi_{2F}$ . La figure IV.26b représente ces mêmes coefficients sans la présence de ce coefficient harmonique. La participation de chacun apparaît ainsi de manière beaucoup plus claire et on peut se rendre compte notamment de l'importance de la dérivée modale  $\partial\phi_{14}$  dans ces coefficients, ainsi que de la dérivée modale  $\partial\phi_{22}$ . Il apparaît aussi que le troisième mode de flexion ainsi que la plupart de ses dérivées modales participent assez peu. Il semble intéressant d'envisager un "nettoyage" de la base afin de ne retenir que les vecteurs participant majoritairement. Pour cela, ont été retirés à la base les vecteurs  $\phi_{3F}$ ,  $\partial\phi_{23}$ ,  $\partial\phi_{33}$  et  $\partial\phi_{44}$  pour atteindre une base de dimension 10, soit une réduction d'environ un tiers.



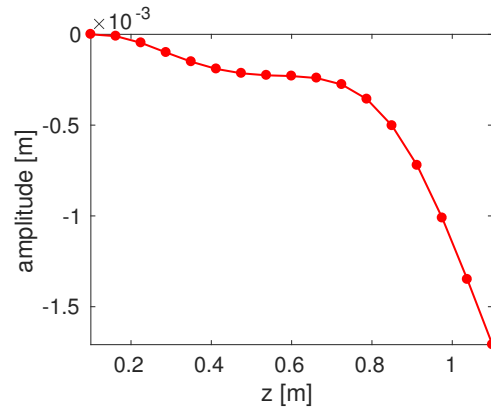
(a) Déplacements transverses à l'abscisse  $z = 1,1$  m pour 5 et 7 harmoniques



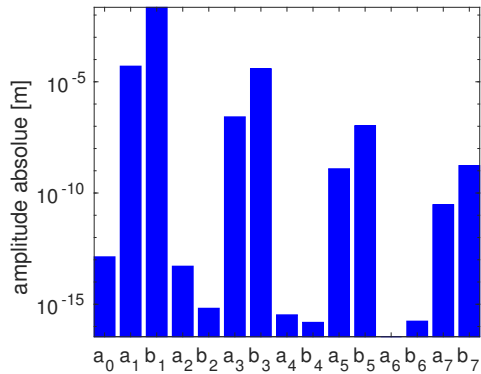
(b) Déplacements longitudinaux à l'abscisse  $z = 1,1$  m pour 5 et 7 harmoniques



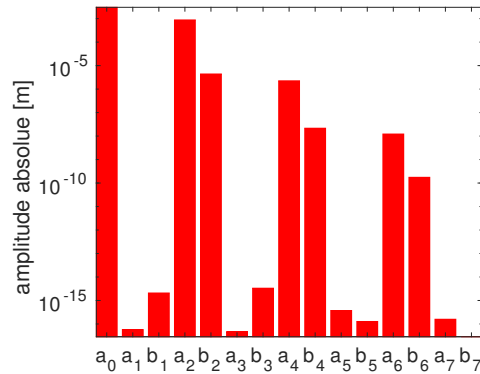
(c) Déformée transverse dynamique au niveau du pic de résonance pour 7 harmoniques



(d) Déformée longitudinale dynamique au niveau du pic de résonance pour 7 harmoniques



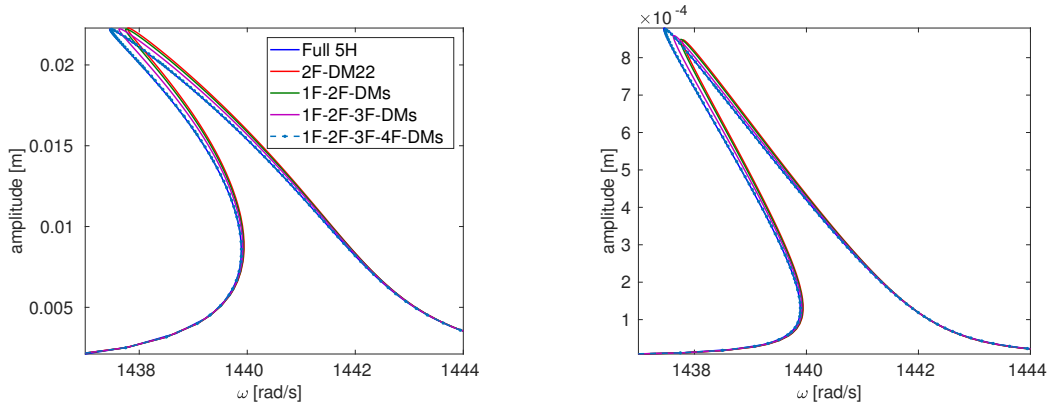
(e) Coefficients harmoniques transverses à l'abscisse  $z = 1,1$  m au niveau du pic de résonance pour 7 harmoniques



(f) Coefficients harmoniques longitudinaux à l'abscisse  $z = 1,1$  m au niveau du pic de résonance pour 7 harmoniques

Figure IV.24 – Résultats de simulation pour la poutre encastree-libre en rotation à 5000 rpm avec un forçage de 20 N pour le deuxième mode de flexion

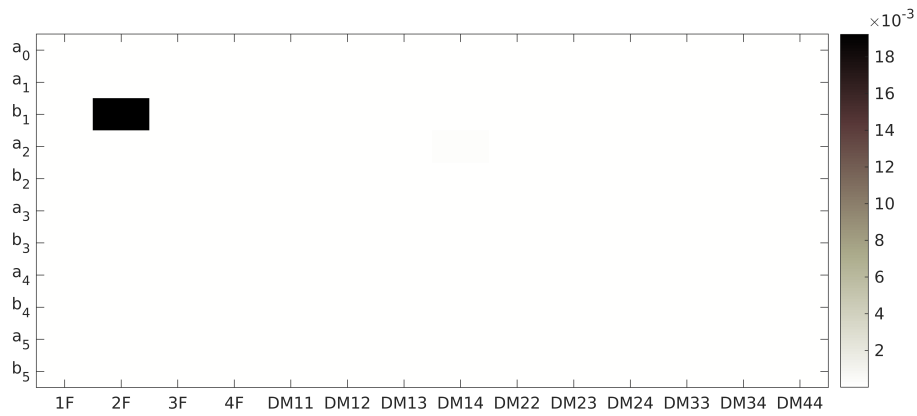
Le résultat obtenu est donné sur la figure IV.27 aux côtés de la référence à 5 harmoniques et de la base complète. La base ainsi nettoyée permet d'approcher de manière précise la solution de référence, comme cela est visible sur les figures IV.27a et IV.27b, mais



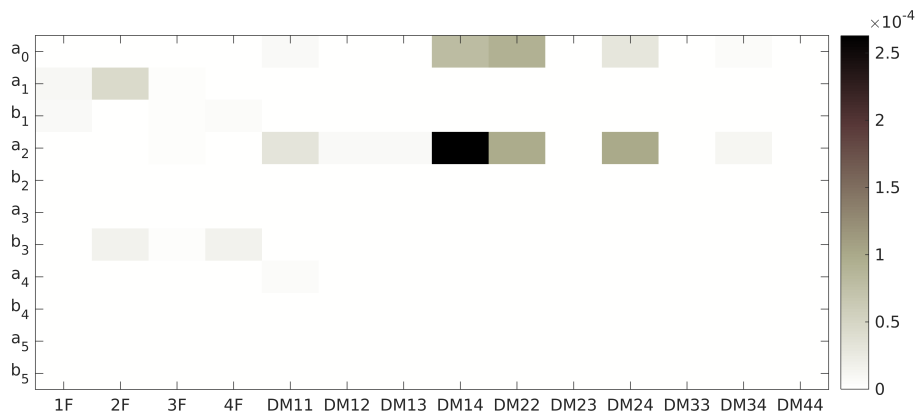
(a) Déplacements transverses à l'abscisse  $z = 1,1$  m

(b) Déplacements longitudinaux à l'abscisse  $z = 1,1$  m

Figure IV.25 – Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre obtenus avec les modes linéaires de flexion et leurs dérivées modales avec MATLAB



(a) Coefficients harmoniques de la base de projection  $\phi_{1F}-\phi_{2F}-\phi_{3F}-\phi_{4F}$  et leurs dérivées modales



(b) Coefficients harmoniques sans la composante  $b_1$  du mode  $\phi_{2F}$

Figure IV.26 – Optimisation de la base de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre : Coefficients harmoniques

montre tout de même un légère différence au niveau du pic de résonance, dont un zoom est fournis sur les figures IV.27c et IV.27d. La réduction du deuxième mode de flexion



est bien envisageable mais au prix d'une base assez conséquente, 14 vecteurs menant à la détermination de 1470 termes réduits quadratiques et 7840 termes réduits cubiques pouvant représenter un coût de calcul important sur des structures industrielles. La base composée du deuxième mode de flexion et de sa dérivée modale semble donc constituer un bon compromis entre précision et taille de l'espace de projection.

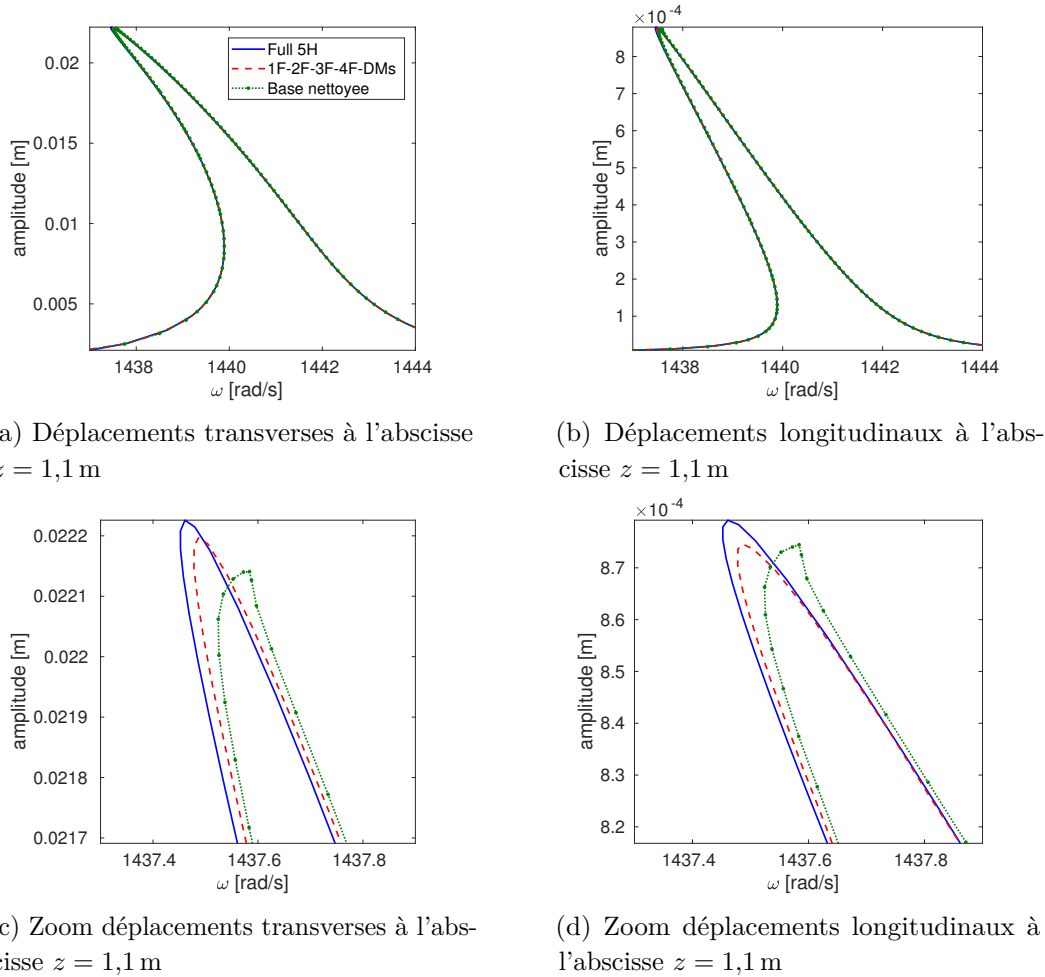


Figure IV.27 – Optimisation de la base de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastrée-libre : Résultats

### 3.2.2 Réduction par modes compagnons

Les modes compagnons ont aussi été utilisés afin de réduire ce système. Les résultats obtenus avec des chargements selon le deuxième mode de flexion sont donnés sur la figure IV.28 ainsi que sur la tableau IV.8. Les résultats des simulations (figures IV.28a-IV.28b) montrent clairement l'inefficacité du premier mode compagnon choisi avec un critère énergétique. Cela se vérifie à l'aide des déformées, illustrées figures IV.28c et IV.28d, ainsi que par les résultats de la SVD donnés tableau IV.8. Une fois le deuxième vecteur en terme d'énergie inséré dans la base, la solution réduite devient cohérente et donne une bonne tendance, sans pour autant être parfaite. L'ajout d'autres modes compagnons n'améliore pas la qualité de la réduction, ceux-ci ne semblent rien apporter de plus, hormis le quatrième amenant à une singularité de la solution aux alentours de  $1441 \text{ rad.s}^{-1}$ .

On remarquera que le critère en énergie qui semblait donner satisfaction pour le premier mode de flexion montre ici ses limites au détriment du critère en valeur singulière. De plus, contrairement aux dérivées modales, l'ajout de vecteurs supplémentaires dans la base ne semble pas améliorer la solution.

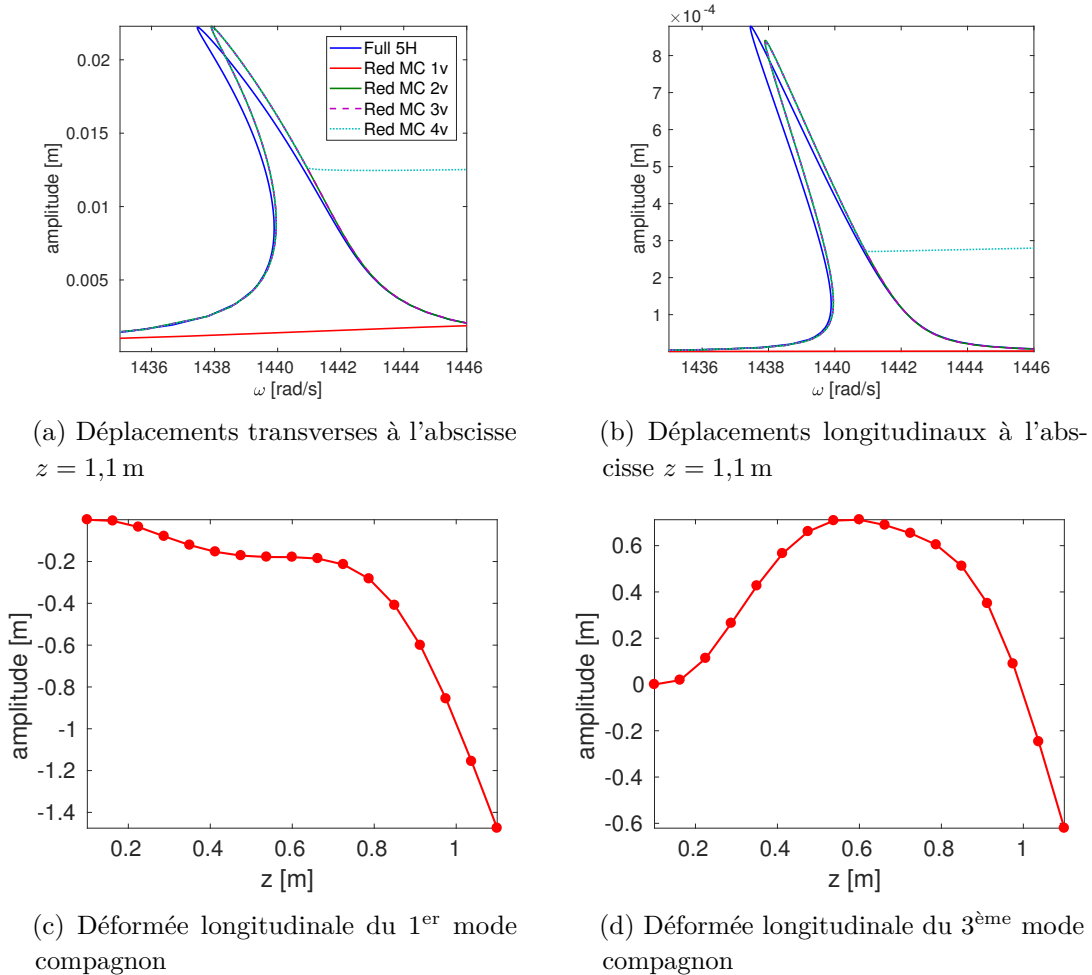


Figure IV.28 – Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre obtenus avec les modes compagnons avec MATLAB

Tableau IV.8 – Caractéristiques des trois premiers modes compagnons obtenus

Mode compagnon	valeur singulière	Énergie de déformation [N.m]
1	$4,0698 \cdot 10^{-2}$	$2,1916 \cdot 10^9$
2	$5,9485 \cdot 10^{-3}$	$1,6127 \cdot 10^5$
3	$3,5933 \cdot 10^{-5}$	$3,0733 \cdot 10^9$

Afin de clore cette section dédiée à la réduction du deuxième mode de flexion avec MATLAB, nous donnons les gains de temps associés aux différentes bases utilisées au tableau IV.9. De manière globale, ces gains sont extrêmement importants, bien qu'ils soient à mettre en parallèle de la qualité du résultat obtenu, notamment pour ce qui est des modes compagnons à 1 et 4 vecteurs. Concernant ces derniers, les temps de résolution sont

assez similaires pour tous les cas envisagés, la majeure partie du temps étant consacrée à la détermination des échantillons statiques. Pour ce qui est des dérivées modales, ces durées sont plus hétérogènes, les dimensions des espaces de réductions étant très différentes. Enfin, ces résultats sont à mettre en regard de la taille du modèle étudié, qui reste très modeste. Nous proposons dans la section suivante de discrétiser cette poutre de manière plus fine et de réaliser la réduction à l'aide de SAMCEF.

Tableau IV.9 – Gains de temps sur la poutre encastree-libre H20 MATLAB pour le deuxième mode de flexion

	Temps total [s]	Gain [%]
Complet 5H	82 955	-
Réduit [ $\phi_{2F}$ $\partial\phi_{22}$ ]	57,04	99,93
Réduit [ $\phi_{1F}$ $\phi_{2F}$ $\partial\phi_{ij}$ ], $(i, j) \in \{1, 2\}$ , $i \leq j$	85,47	99,9
Réduit [ $\phi_{1F}$ $\phi_{2F}$ $\phi_{3F}$ $\partial\phi_{ij}$ ], $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$ , $i \leq j$	143,36	99,83
Réduit [ $\phi_{1F}$ $\phi_{2F}$ $\phi_{3F}$ $\phi_{4F}$ $\partial\phi_{ij}$ ], $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}$ , $i \leq j$	315,05	99,62
Réduit Base nettoyée	158,05	99,81
Réduit MC E.déf. 1v	233,37	99,72
Réduit MC E.déf. 2v	251,06	99,7
Réduit MC E.déf. 3v	260,51	99,67
Réduit MC E.déf. 4v	270,89	99,67

### 3.3 Discrétisation et réduction avec SAMCEF

Dans cette section, la géométrie de la poutre est conservée (voir tableau IV.6) et un maillage densifié est utilisé (figure IV.29). La discrétisation est dorénavant de 50 éléments dans la longueur (direction  $z$ ), 4 dans la largeur (direction  $x$ ) et 3 dans l'épaisseur (direction  $y$ ), menant à un modèle composé de 10 803 degrés de liberté. La réduction de ce modèle sera réalisée à l'aide des dérivées modales et des modes compagnons.

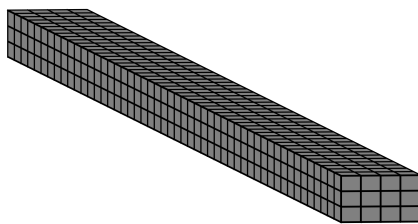


Figure IV.29 – Maillage fin de la poutre encastree-libre

Les résultats associés aux dérivées modales sont donnés sur la figure IV.30. La même démarche que pour le cas traité avec MATLAB a été suivie : prise en compte du deuxième mode de flexion et de sa dérivée modale, ajout de modes de flexion ainsi que leurs dérivées modales. Une étude des coefficients harmoniques au niveau du pic de résonance non-linéaire a été réalisée, voir figure IV.31. Les coefficients mis en jeu dans ce cas sont différents des précédents mais beaucoup plus marqués. Ainsi, il apparaît clairement que les coefficients des vecteurs  $\partial\phi_{11}$ ,  $\partial\phi_{12}$  et  $\partial\phi_{13}$  répondent de façon marquée. On peut voir de même une réponse légère du quatrième mode de flexion ainsi que de la dérivée modale  $\partial\phi_{14}$ .

L'utilisation de ces vecteurs en complément des modes linéaires  $\phi_{2F}$  et  $\phi_{4F}$  conduit à la courbe marron (figure IV.30 Base Net SAM) qui n'est pas très satisfaisante ne serait-ce qu'en comparaison du deuxième mode de flexion et de sa dérivée modale (voir zooms sur les figures IV.30c et IV.30d). En retenant la base de réduction nettoyée utilisée dans le cas précédent avec MATLAB en pointillé violet sur la figure (Base Net MAT), le résultat est bien meilleur et se confond avec la base complète des modes de flexions et de leurs dérivées modales.

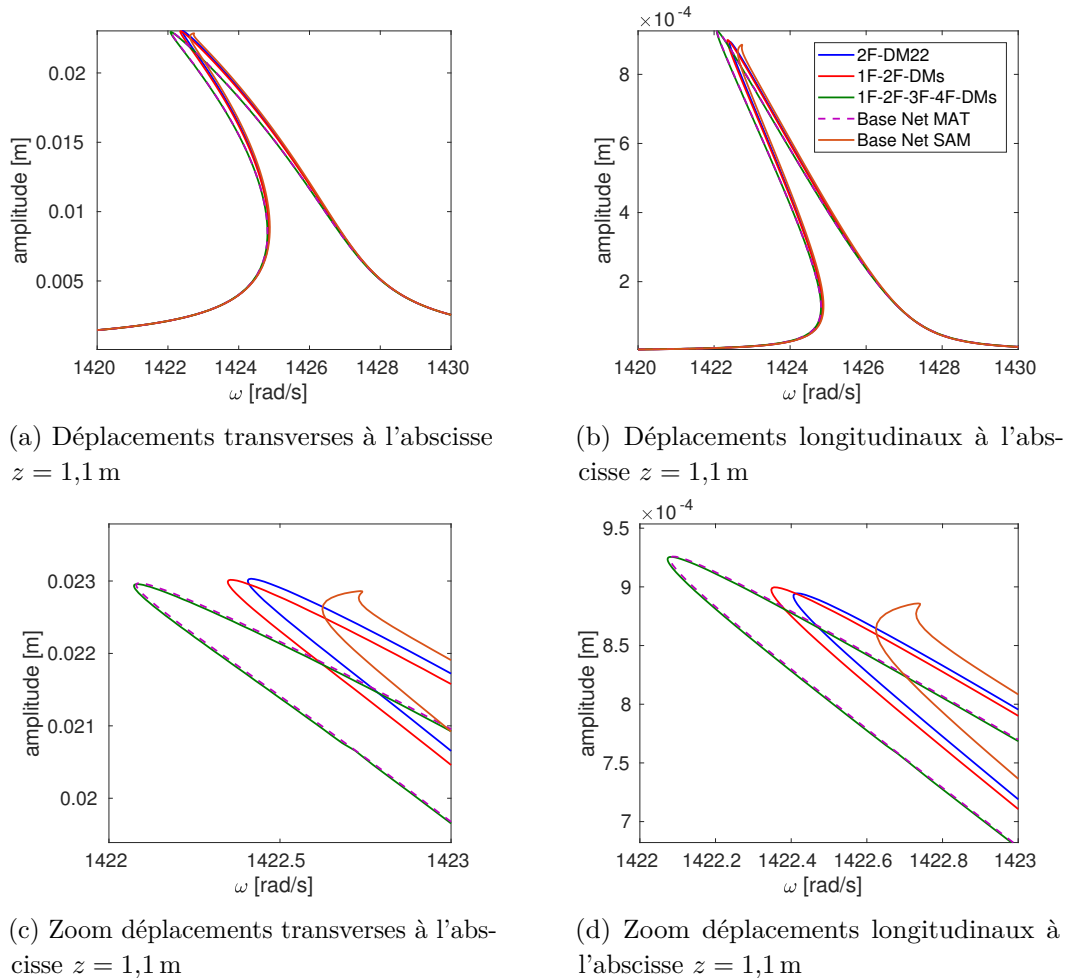
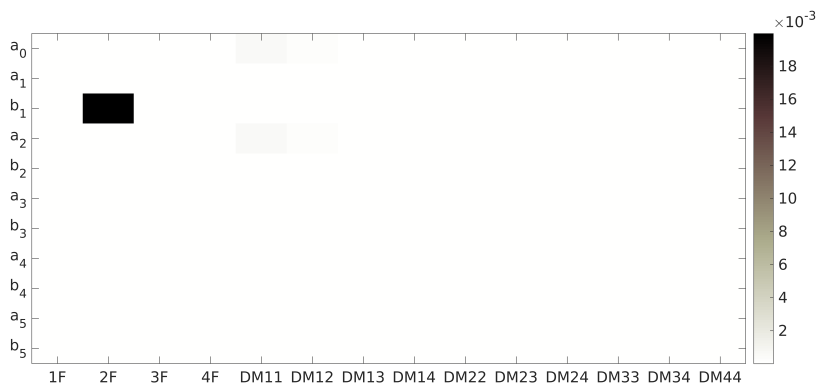


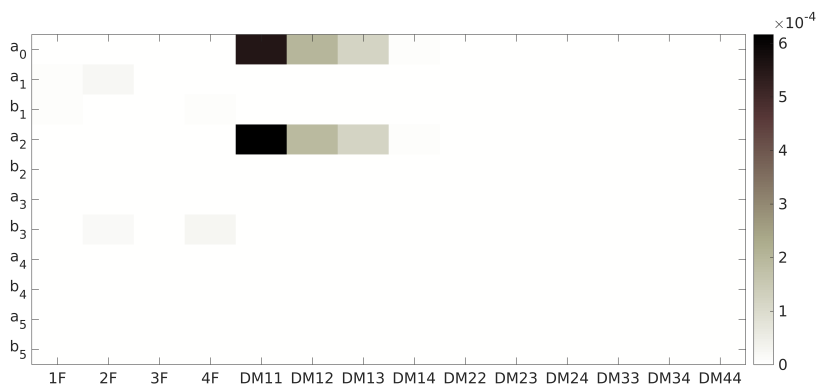
Figure IV.30 – Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre obtenus avec les modes linéaires de flexion et leurs dérivées modales avec SAMCEF

Concernant les modes compagnons, les échantillons statiques ont été réalisés au moyen de 20 chargements que ce soit pour  $\alpha$  positif et négatif, et les résultats sont donnés figure IV.32. Ceux-ci sont très similaires aux résultats obtenus avec MATLAB. En effet, le premier mode compagnon avec critère en énergie donne à nouveau une réponse très raide, et il faut aller chercher le deuxième afin de simuler de manière convenable le couplage non-linéaire. Les autres modes apportent peu de précision et peuvent même, comme dans le cas à quatre modes, conduire à des comportements singuliers.

Concernant les temps de calcul, fournis au tableau IV.10, il est intéressant de remarquer à quel point le nombre de dérivées modales calculées impacte la durée de résolution ce qui n'est pas le cas des modes compagnons. Le temps nécessaire à la détermination de la

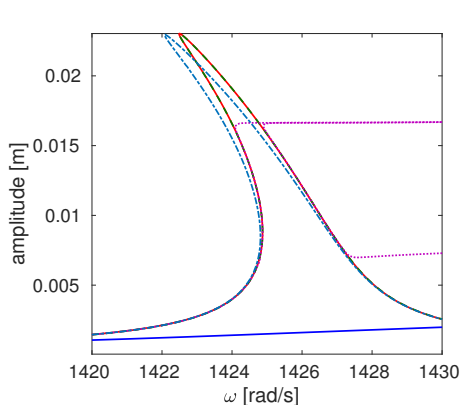


(a) Coefficients harmoniques de la base de projection  $\phi_{1F}-\phi_{2F}-\phi_{3F}-\phi_{4F}$  et leurs dérivées modales

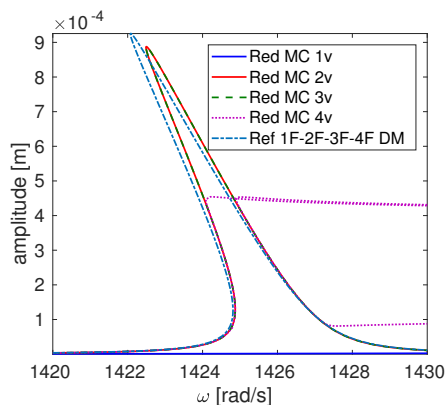


(b) Coefficients harmoniques sans la composante  $b_1$  du mode  $\phi_{2F}$

Figure IV.31 – Coefficients harmoniques de la réduction avec les quatre premiers modes de flexion et leurs dérivées modales



(a) Déplacements transverses à l'abscisse  $z = 1,1$  m



(b) Déplacements longitudinaux à l'abscisse  $z = 1,1$  m

Figure IV.32 – Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre obtenus avec des modes compagnons avec SAMCEF

solution de référence avec les quatre modes de flexion et leurs dérivées modales est assez important, presque 3h. Cependant, l'utilisation de la base nettoyée MATLAB permet un

gain de près de 50 % par rapport à la référence des 4 modes de flexion et de leurs dérivées modales.

Tableau IV.10 – Temps de résolution de la poutre encastree-libre H20 SAMCEF pour le deuxième mode de flexion

[s]	Précharge	Base	STEP	Continuation	Total
Réduit [ $\phi_{2F}$ $\partial\phi_{22}$ ]	41.213	44.373	257.13	21.691	364.59
Réduit [ $\phi_{1F}$ $\phi_{2F}$ $\partial\phi_{ij}$ ]	44.292	181.14	989.05	30.892	1245.6
Réduit [ $\phi_{1F}$ $\phi_{2F}$ $\phi_{3F}$ $\phi_{4F}$ $\partial\phi_{ij}$ ]	42.488	808.07	8962.5	127.23	9940.7
Réduit Base nettoyée SAM	50.479	428.04	1427.5	37.217	1943.4
Réduit Base nettoyée MAT	47.213	926.12	4585.7	50.801	5610
Réduit MC E.déf. 1v	42.514	409.63	256.54	5.7841	714.6
Réduit MC E.déf. 2v	41.436	394.46	441.82	25.037	902.89
Réduit MC E.déf. 3v	41.059	403.47	693.7	26.606	1165
Réduit MC E.déf. 4v	45.056	573.1	1349.9	107.61	2075.8

## 4 Vers une géométrie de pale : plaque volumique

Avec les résultats qui viennent d'être obtenus sur une structure élancée de type poutre, il serait intéressant maintenant d'appliquer ces méthodes à une plaque volumique, nous permettant ainsi de nous rapprocher progressivement d'une aube fan. On va pour cela considérer une structure de type plaque encastree-libre maillée avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds. Comme précédemment, celle-ci sera soumise à un chargement centrifuge dont la vitesse de rotation est fixée à 5000 rpm. Enfin, du fait de l'expérience sur la poutre droite, seule la réduction par dérivées modales sera envisagée ici.

### 4.1 Données du problème

La géométrie qui sera considérée ici est illustrée sur la figure IV.33 et ses dimensions sont données au tableau IV.11. Le modèle ainsi créé comporte 14 841 degrés de liberté. Les propriétés matériaux restent elles inchangées par rapport au cas de la poutre et sont disponibles au tableau IV.6. Enfin, l'axe de rotation est porté par la direction  $x$  et est décalé par rapport à la plaque et est situé 0,3 m en dessous de celle-ci dans la direction  $z$ , comme illustré sur la figure IV.33b.

Tableau IV.11 – Dimensions et discrétisation éléments finis de la plaque

	Directions		
	$x$	$y$	$z$
Dimensions [m]	0.2	0.01	0.7
Discrétisation EF	10	3	30

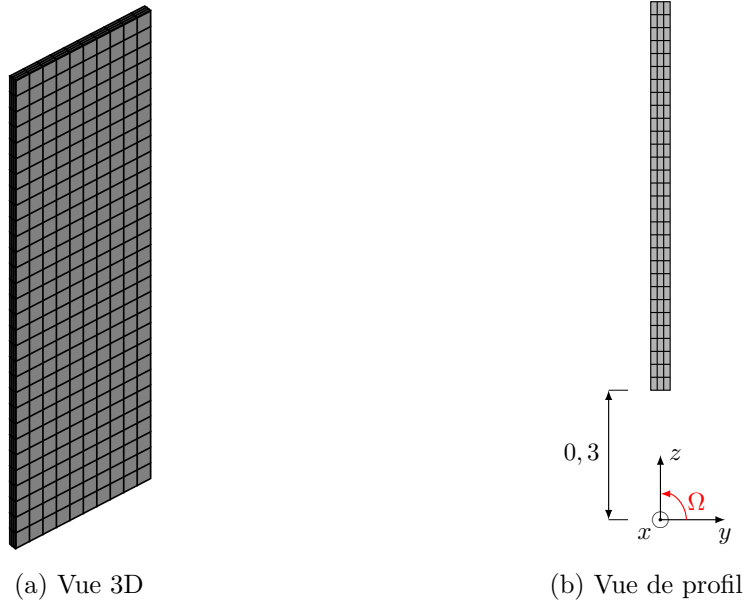


Figure IV.33 – Géométrie de la plaque droite

## 4.2 Résultats

Après les résultats obtenus sur la poutre encastree-libre, l'étude va se focaliser directement sur le deuxième mode de flexion, plus enclin à avoir un comportement non-linéaire marqué. Afin de réaliser cela, l'excitation sera appliquée au sommet de la plaque, en son milieu, et selon la direction  $y$  avec une intensité de 100 N. Enfin, un amortissement de 0,15 % selon le premier mode de flexion sera appliqué, soit  $\alpha = 1,39$  (III.43). Les résultats obtenus pour différentes bases de réduction sont donnés sur la figure IV.34.

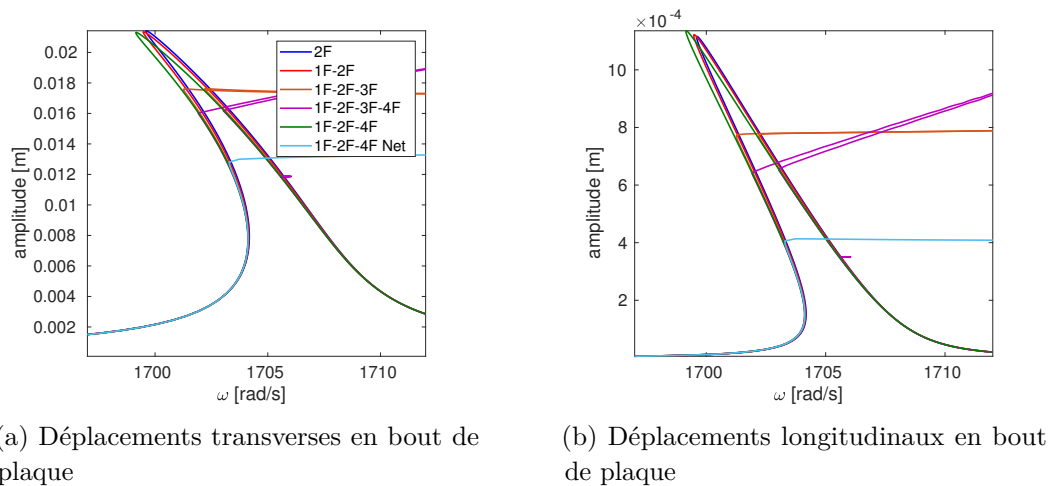
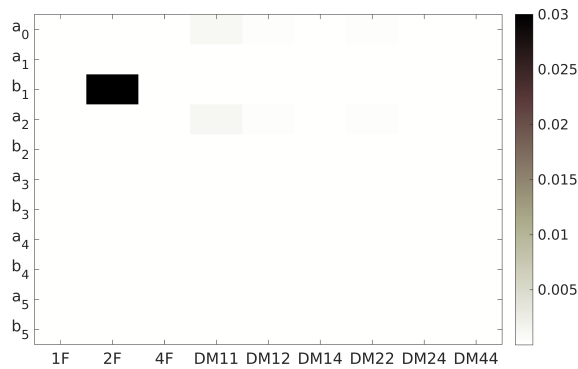


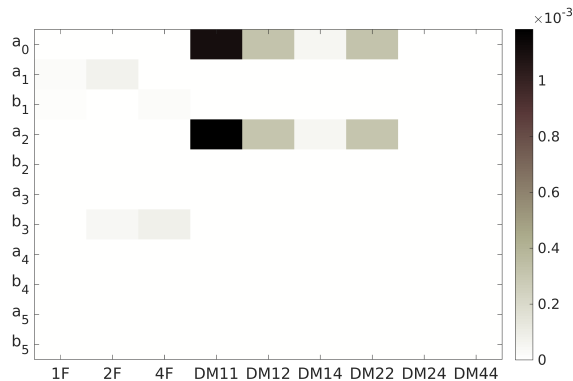
Figure IV.34 – Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la plaque encastree-libre obtenus avec des dérivées modales avec SAMCEF

Les bases considérées seront composées des modes de flexion ainsi que de leurs dérivées modales associées. Dans ce contexte, de la même manière que pour la poutre encastree libre, les quatre premiers mode de flexion seront utilisés. Cependant, les résultats de la figure IV.34 illustrent un comportement différent de ces bases de réduction dans le cas

de la plaque encastree-libre. En effet, les bases construites à l'aide des modes  $\phi_{2F}$  et  $\phi_{1F}$  et de leurs dérivées modales (en rouge et bleu) donnent des résultats cohérents avec un comportement assouplissant et une convergence similaire au cas de la poutre avec l'ajout des vecteurs associés au premier mode de flexion. En revanche, l'ajout des modes  $\phi_{3F}$  et  $\phi_{4F}$  ainsi que leurs dérivées modales (en marron et mauve) dégrade fortement la réduction à partir d'une certaine amplitude. En retirant le mode  $\phi_{3F}$  ainsi que ses dérivées modales, la singularité disparaît et la réponse obtenue s'assouplit vis-à-vis de celle associée aux modes  $\phi_{1F}$ - $\phi_{2F}$ . La présence du mode  $\phi_{3F}$  conduit donc à un comportement singulier à partir d'un certain niveau.



(a) Coefficients harmoniques de la base de projection  $\phi_{1F}$ - $\phi_{2F}$ - $\phi_{4F}$  et leurs dérivées modales



(b) Coefficients harmoniques sans la composante  $b_1$  du mode  $\phi_{2F}$

Figure IV.35 – Coefficients harmoniques de la réduction avec les modes  $\phi_{1F}$ - $\phi_{2F}$ - $\phi_{4F}$  et leurs dérivées modales

Comme précédemment, un nettoyage de la base a été envisagé sur celle composée des modes linéaires  $\phi_{1F}$ - $\phi_{2F}$ - $\phi_{4F}$  et de leurs dérivées modales en s'appuyant sur les coefficients harmoniques à la résonance donnés figure IV.35. Les coefficients, privés du coefficient  $b_1$  du mode  $\phi_{2F}$  largement prépondérant, montrent que tous les vecteurs répondent hormis les dérivées modales  $\partial\phi_{24}$  et  $\partial\phi_{44}$ . La résolution menée avec cette base nettoyée donne les courbes en bleu clair sur la figure IV.34 et il s'avère qu'à nouveau le retrait de ces vecteurs soit néfaste pour la qualité de la réponse.

La réduction de la plaque droite à l'aide des dérivées modales ne semble pas po-



ser de problème avec l'utilisation des modes linéaires  $\phi_{1F}$ - $\phi_{2F}$ - $\phi_{4F}$  et de leurs dérivées modales. Cependant, la géométrie utilisée reste encore trop simple pour approcher celle d'une pale. Nous proposons dans la section suivante de considérer cette même plaque mais avec l'ajout d'un vrillage.

## Bilan du chapitre

Dans l'optique d'appliquer les méthodes de réduction présentées au chapitre précédent aux structures volumiques, des éléments hexaédriques à 20 nœuds non-linéaires ont été mis en place. Leur validation a pu être réalisée de manière statique et dynamique en comparaison de SAMCEF ou encore MATLAB grâce aux résultats obtenus précédemment sur le modèle d'Euler-Bernoulli. L'application dans un premier temps au cas de la poutre bi-encastree n'a pas posé de problème et a consisté en une application en tout point identique de celle qui a pu être faite sous MATLAB. Le passage à une structure de type encastree-libre a nécessité une adaptation de la méthode de projection, notamment pour sa réalisation à l'aide de SAMCEF, afin de prendre en compte les effets de précharge appliqués sur ce type de modèle. Enfin, une géométrie de type plaque a été étudiée afin de s'approcher d'un modèle plus représentatif d'une aube de soufflante. La plaque considérée a pu être réduite grâce aux résultats obtenus au cours de ce chapitre pour ce qui est de son deuxième mode de flexion.

Les résultats obtenus sur la plaque droite sont intéressants et permettent d'envisager la réduction d'une structure cyclique par sous-structuration avec prise en compte des non-linéarités géométriques. C'est ce que nous proposons de réaliser dans le chapitre suivant.

## Application à la sous-structuration des systèmes cycliques non-linéaires

Ce chapitre aborde la problématique de la sous-structuration des systèmes comportant des non-linéarités géométriques. Dans un premier temps, une revue des méthodes classiques de synthèse modale est réalisée avec les approches de type Craig-Bampton, basée sur l'utilisation de modes encastés, et MacNeal, faisant appel aux modes libres. On propose ensuite une adaptation de l'approche de Craig-Bampton pour le traitement des structures comportant des non-linéarités géométriques. Cette méthode est dans un premier temps appliquée à un système simple construit à l'aide de poutres d'Euler-Bernoulli. On aborde ensuite le cas d'une structure volumique de type fan avec 2 niveaux de complexités, 4 et 18 secteurs, avant de clore le chapitre sur l'étude d'une structure cyclique désaccordée.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Rappels sur les méthodes de sous-structuration . . . . .</b>	<b>132</b>
1.1	Synthèse modale à interfaces fixes : Méthode de Craig-Bampton . . .	133
1.2	Synthèse modale à interfaces libres : Méthode de MacNeal . . . . .	134
1.3	Réduction des degrés de liberté d'interfaces . . . . .	137
<b>2</b>	<b>Sous-structuration des systèmes non-linéaires géométriques . . . .</b>	<b>138</b>
2.1	Traitement des termes non-linéaires : hypothèses . . . . .	139
2.2	Évaluation : Structure cyclique simple . . . . .	140
<b>3</b>	<b>Application : Modèle de Fan simplifié . . . . .</b>	<b>149</b>
3.1	Modèle à 4 secteurs : Présentation, démarche et résultats . . . . .	149
3.2	Modèle de fan à 18 secteurs . . . . .	158
	<b>Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>163</b>

---

## 1 Rappels sur les méthodes de sous-structuration

Les méthodes de sous-structuration, aussi appelées synthèse modale (*Component Mode Synthesis* (CMS) en anglais), ont fait leurs apparitions au début des années 60 afin de rendre envisageable des calculs sur des modèles dont la taille dépassait largement les possibilités informatiques de l'époque. La stratégie a donc été de découper la structure en sous-structures plus petites dont chaque résolution pouvait alors être menée à bien. On doit principalement ces méthodes à l'industrie aéronautique et aérospatiale américaine, où elles ont pu être appliquées sur des modèles d'avions complets notamment. Ces méthodes de sous-structuration se divisent en deux grandes familles : les méthodes à interfaces fixes initiées par Hurty [51] et dont l'approche de Craig-Bampton [3] est parmi les plus répandues ; et les méthodes à interfaces libres initiées par Hou [49] et généralisées par MacNeal [75]. Aujourd'hui, un grand nombre de travaux ont permis de formaliser ces approches et ont ainsi donné naissance à des outils extrêmement performants. On citera en particulier les travaux réalisés par Jézéquel [11, 55] ou encore Tran [117].

La première étape commune à toute ces méthodes est celle dite de sous-structuration, comme illustrée sur la figure V.1, qui consiste à découper la structure globale (voir figure V.1a) en plusieurs sous-structures notées SS (voir figure V.1b). Il s'agit ensuite de séparer les degrés de liberté de chaque sous-structure selon ceux appartenant à l'interface commune aux sous-structures, visible en rouge sur la figure V.1c, ceux-ci seront notés  $\mathbf{x}_b$  ; et ceux appartenant à l'intérieur de la sous-structure, c'est à dire n'étant pas sur une interface, seront notés  $\mathbf{x}_i$ .

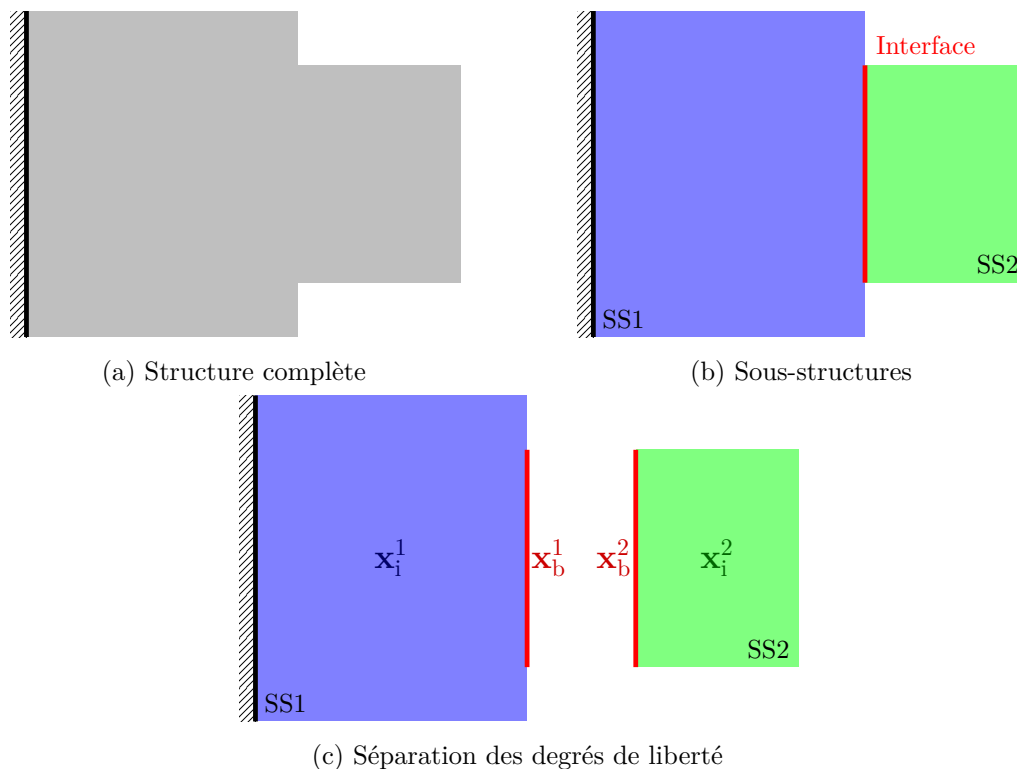


Figure V.1 – Principe de la sous-structuration

De la même manière que pour les degrés de liberté, il est possible de ré-ordonner les matrices structurales du problème, dans notre cas l'équation (I.37), selon les composantes

internes et d'interfaces de telle façon à pouvoir écrire les équations du mouvement sous la forme suivante

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \quad (\text{V.1})$$

### 1.1 Synthèse modale à interfaces fixes : Méthode de Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton [3] dite méthode de synthèse modale à interfaces fixes est basée sur deux concepts : les modes encastrés et les modes statiques, chacun étant associé à un type d'inconnue, i.e. interne ou de frontière.

Les modes encastrés permettent de définir les déplacements associés aux degrés de liberté internes  $\mathbf{x}_i$ . Ils sont définis comme étant les modes de la sous-structure lorsque les degrés de liberté de frontière  $\mathbf{x}_b$  sont bloqués. Les modes encastrés de la  $j^{\text{ème}}$  sous-structure  $\Phi^j$  sont donc la solution du problème aux valeurs propres généralisé

$$\left( \mathbf{K}_{ii}^j - \omega^2 \mathbf{M}_{ii}^j \right) \Phi^j = \mathbf{0} \quad (\text{V.2})$$

Les modes statiques sont quand à eux définis comme étant les déplacements des degrés de liberté internes de la sous-structure lorsque sont appliqués successivement des déplacements unitaires sur chacun des degrés de liberté de frontière  $\mathbf{x}_b$ , le reste des degrés de liberté de frontière étant bloqués. Ainsi, en considérant le problème statique associé à l'équation (V.1) avec  $\omega = 0$  et  $\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$ , il est alors possible de définir  $\Psi^j$ , les modes statiques de la sous-structure  $j$ , à l'aide de la première ligne de cette équation comme étant

$$\Psi^j = - \left[ \mathbf{K}_{ii}^j \right]^{-1} \mathbf{K}_{ib}^j \quad (\text{V.3})$$

Ils permettent ainsi d'assurer la compatibilité cinématique entre les différentes sous-structures. Un schéma récapitulatif de ces deux types de modes est donné sur la figure V.2.

La réduction du système complet peut alors être réalisée au moyen de la matrice de passage  $\mathbf{T}_{CB}$  défini telle que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi^1 & & \Psi^1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \Phi^{N_{SS}} & \Psi^{N_{SS}} \\ & & & \mathbf{I}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}_{CB} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

qui mène aux matrices réduites suivantes

$$\mathbf{K}_{CB} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r,ii}^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{K}_{r,ii}^{N_{SS}} & \\ & & & \bar{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix} \quad (\text{V.5})$$

$$\mathbf{M}_{CB} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{r,ii}^1 & & & \mathbf{M}_{r,ib}^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mathbf{M}_{r,ii}^{N_{SS}} & \mathbf{M}_{r,ib}^{N_{SS}} \\ \mathbf{M}_{r,bi}^1 & \cdots & \mathbf{M}_{r,bi}^{N_{SS}} & \bar{\mathbf{M}}_{bb} \end{bmatrix} \quad (\text{V.6})$$

où  $N_{SS}$  désigne le nombre de sous-structures,  $\mathbf{M}_r^j$  et  $\mathbf{K}_r^j$  les matrices réduites associées aux coordonnées généralisées  $\mathbf{q}_r^j$ , et  $\bar{\mathbf{M}}_{bb}$  et  $\bar{\mathbf{K}}_{bb}$  les matrices associées aux degrés de liberté d'interfaces. La capacité de réduction de cette méthode sera liée d'une part au nombre de vecteurs conservés dans chaque base modale interne, dont le choix pourra être basé sur un critère fréquentiel [32]; et d'autre part au nombre de degrés de liberté constituant les interfaces, dont la minimisation pourra être réalisée à l'aide d'un découpage intelligent de la structure. Il est à noter que cette méthode est particulièrement adaptée à l'étude des systèmes comportant des non-linéarités localisées en considérant les degrés de liberté non-linéaires comme appartenant à la frontière [58, 68].

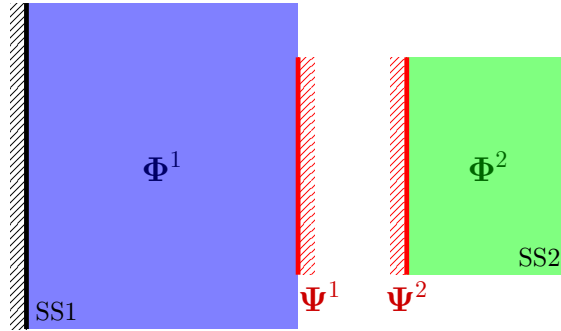


Figure V.2 – Schéma de principe de la synthèse modale à interfaces fixes

## 1.2 Synthèse modale à interfaces libres : Méthode de MacNeal

La méthode de MacNeal fait partie des méthodes de synthèses modales à interfaces libres [126] qui consistent à considérer les sous-structures chargées selon leurs interfaces.

La première étape consiste à déterminer les modes à interfaces libres de chaque sous-structure

$$(\mathbf{K}^j - \omega^2 \mathbf{M}^j) \bar{\Phi}^j = \mathbf{0} \quad (\text{V.7})$$

Il est alors nécessaire de tronquer cette base. Soient  $\bar{\Phi}_k^j$  ces modes, et  $\bar{\Phi}_d^j$  les modes non-retenus tels que

$$\bar{\Phi}^j = [\bar{\Phi}_k^j \quad \bar{\Phi}_d^j] \quad (\text{V.8})$$

La décomposition des déplacements selon ces deux bases peut alors s'écrire

$$\mathbf{x}^j = \bar{\Phi}_k^j \mathbf{q}_k^j + \bar{\Phi}_d^j \mathbf{q}_d^j \quad (\text{V.9})$$

et il est alors nécessaire d'exprimer les coordonnées associées aux modes non-retenus  $\mathbf{q}_d^j$  en fonction de celles des modes retenus  $\mathbf{q}_k^j$  afin de s'en affranchir. Pour cela on considère que les modes élevés ne contribuent que par les effets de raideurs, compte tenu du domaine de fréquence dans lequel nous travaillons, ce qui revient à considérer le problème statique

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^j \bar{\Psi}^j &= \mathbf{f}^j \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\text{ib}}^j \\ \mathbf{I}_{\text{bb}}^j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

où  $\bar{\Psi}^j$  désigne les modes d'attaches de la sous-structure déterminés en appliquant successivement des chargements unitaires sur les degrés de liberté de frontière. Il est alors nécessaire d'envisager deux cas selon l'inversibilité de la matrice de raideur de la sous-structure.

**La matrice de raideur est inversible** C'est la cas de la **sous-structure 1** sur la figure V.3. La détermination des termes associés aux modes non-retenus est assez simple. En pré-multipliant l'équation (V.10) par  $[\bar{\Phi}_k^j]^\top$ , on obtient

$$\mathbf{q}_k^j = [\Xi_k^j]^{-1} [\bar{\Phi}_k^j]^\top \mathbf{f}^j \quad (\text{V.11})$$

avec  $\Xi_k^j = [\bar{\Phi}_k^j]^\top \mathbf{K}^j \bar{\Phi}_k^j$ . En injectant cette expression dans l'équation (V.9) il vient

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_d^j \mathbf{q}_d^j &= \bar{\Psi}^j - \bar{\Phi}_k^j \mathbf{q}_k^j \\ &= \left( [\mathbf{K}^j]^{-1} - \bar{\Phi}_k^j [\Xi_k^j]^{-1} [\bar{\Phi}_k^j]^\top \right) \mathbf{f}^j \\ &= \mathbf{G}_d^j \mathbf{f}^j \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

et il est ainsi possible d'exprimer les modes d'attaches seulement en fonctions des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}_k^j$  des modes conservés

$$\bar{\Psi}^j = \bar{\Phi}_k^j \mathbf{q}_k^j + \mathbf{G}_d^j \mathbf{f}^j \quad (\text{V.13})$$

**La matrice de raideur n'est pas inversible** C'est la cas de la **sous-structure 2** sur la figure V.3. La non-inversibilité de la matrice de raideur va mener à une démarche plus complexe due à la présence de modes de corps rigides. Ce problème peut être résolu d'une part en contraignant la sous-structure, qui mène à la construction de la matrice  $\mathbf{K}_c^j$  inversible ; d'autre part, il est nécessaire de retirer à  $\mathbf{f}^j$  sa composante selon les modes de corps rigides, notés  $\bar{\Phi}_r^j$ , qui peut être réalisé au moyen de la transformation

$$\mathbf{P}^j = \mathbf{I} - \mathbf{M}^j \bar{\Phi}_r^j [\bar{\Phi}_r^j]^\top \quad (\text{V.14})$$

où on a supposé l'orthonormalité des modes vis-à-vis de la matrice de masse.

Le système étant maintenant inversible, il est possible de reprendre la démarche présentée précédemment avec la matrice de souplesse  $[\mathbf{P}^j]^\top [\mathbf{K}_c^j]^{-1} \mathbf{P}^j$  dans l'équation (V.12).

La méthode de MacNeal consiste alors, comme dans le cas de Craig-Bampton, à exprimer le problème selon les coordonnées généralisées associées aux modes internes ainsi que les degrés de liberté de frontière, soit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi^1 & & \Psi^1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \Phi^{N_{SS}} & \Psi^{N_{SS}} \\ & & & \mathbf{I}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}_{MN} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

avec

$$\Phi^j = \bar{\Phi}_{k,i}^j - \Psi^j \bar{\Phi}_{k,b}^j \quad (\text{V.16})$$

$$\Psi^j = \mathbf{G}_{d,ib}^j \left[ \mathbf{G}_{d,bb}^j \right]^{-1} \quad (\text{V.17})$$

Cette méthode, plus délicate à appliquer qu'une synthèse modale à interfaces fixes, présente cependant l'avantage de pouvoir être appliquée à l'aide de données expérimentales, les conditions aux limites libres étant facilement réalisable dans ce cadre. Du fait de cette complexité, nous considérerons dans la suite de ce mémoire une méthode de synthèse modale à interfaces fixes.

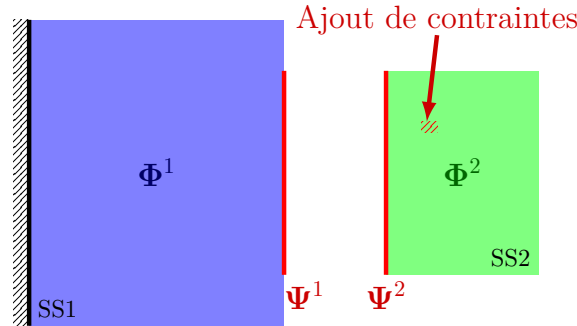


Figure V.3 – Schéma de principe de la synthèse modale à interfaces libres

Ce choix de la méthode de synthèse modale s'accompagne aussi de celui de la manière de gérer les dérivées modales retenues pour la réduction des parties non-linéaires. De la même manière que pour la procédure présentée pour la réduction d'une structure simple, les dérivées modales sont intégrées naturellement ici à la base de réduction des coordonnées internes de chaque sous-structure [124, 129, 130]. La base des modes internes est ainsi construite telle que

$$\Phi^j = \left[ \Phi_1^j \quad \partial \Phi^j \right] \quad (\text{V.18})$$

avec  $\Phi_1^j$  et  $\partial \Phi^j$  respectivement les modes linéaires et les dérivées modales encastées retenues afin de réduire les coordonnées internes de la sous-structure  $j$ .

### 1.3 Réduction des degrés de liberté d'interfaces

Dans certains cas, la taille des frontières peut présenter une difficulté par le nombre de degrés de liberté qui les compose. Il est alors intéressant de procéder à une réduction supplémentaire qui cette fois sera réalisée sur les degrés de liberté de frontière [92].

#### 1.3.1 Condensation statique de Guyan

Une première possibilité consiste à réaliser une condensation statique de Guyan sur les degrés de liberté de frontière  $\mathbf{x}_b$ . Cette méthode propose de négliger l'inertie de certains degrés de liberté, notés  $\mathbf{x}_{b,s}$ , vis-à-vis des degrés de liberté maîtres, notés  $\mathbf{x}_{b,m}$ . Cela mène à établir la relation suivante entre les degrés de liberté maîtres et esclaves

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{b,s} &= - \left[ \bar{\mathbf{K}}_{bb,ss} \right]^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{bb,sm} \mathbf{x}_{b,m} \\ &= \bar{\Psi} \mathbf{x}_{b,m}\end{aligned}\tag{V.19}$$

et ainsi pouvoir réduire le système à l'aide de la matrice de passage

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_{b,m} \\ \mathbf{x}_{b,s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{I}^{N_{SS}} & & \\ & & & \mathbf{I}_{b,m} & \\ & & & & \bar{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_{b,m} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}_G \mathbf{z}\end{aligned}\tag{V.20}$$

La transformation complète à partir des déplacements physiques est ainsi définie telle que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \mathbf{T}_r \mathbf{T}_G \mathbf{z}\tag{V.21}$$

où  $\mathbf{T}_r$  peut aussi bien désigner la matrice de passage associée à la méthode de Craig-Bampton ou de MacNeal.

On notera que le problème ainsi défini fait toujours apparaître des degrés de liberté d'interface, mais en nombre plus réduit désormais. A cela s'ajoute la difficulté du choix des degrés de liberté maîtres, qui doit être fait de manière judicieuse [13] afin de rendre la réduction la plus efficace possible.

#### 1.3.2 Double synthèse modale

Une autre manière de réduire les degrés de liberté d'interfaces est de les projeter sur la base des modes associés aux sous-matrices projetées, définis tels que

$$\left( \bar{\mathbf{K}}_{bb} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{bb} \right) \bar{\Phi} = \mathbf{0}\tag{V.22}$$



où  $\bar{\mathbf{K}}_{bb}$  et  $\bar{\mathbf{M}}_{bb}$  sont issues des matrices projetées (V.5) et (V.6). Les vecteurs à conserver seront alors choisis tels que leurs pulsations associées soient proches de celles des modes des sous-structures à interfaces fixes [92]. Les vecteurs ainsi choisis seront utilisés afin de construire la matrice de projection

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{I}^{N_{SS}} & \\ & & & \bar{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}_{DM} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

Cette base de modes, appelés parfois modes de branches [10], permet de s'affranchir définitivement des coordonnées physiques d'interfaces et de ne conserver que des coordonnées généralisées réduites. Utilisée en complément d'une méthode de sous-structuration telle que celle de Craig-Bampton, cette double réduction est généralement appelée double synthèse modale. De par sa simplicité d'application, cette méthode a été retenue pour la réduction des interfaces dans la suite de ce mémoire. La transformation complète à partir des déplacements physique est ainsi définie telle que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{CB} \mathbf{T}_{DM} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i^{N_{SS}} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \quad (\text{V.24})$$

## 2 Sous-structuration des systèmes non-linéaires géométriques

L'adaptation des méthodes de synthèse modale à un contexte non-linéaire est un sujet qui s'est fortement développé au travers du concept de mode non-linéaire introduit par Rosenberg [96-98] au début des années 60. On peut citer parmi les travaux faisant référence sur ce sujet ceux de Szemplinska avec la *single nonlinear mode method* [108] ou encore Apiwattalungarn [2] couplant lui une méthode de synthèse modale à la définition du mode non-linéaire de Shaw et Pierre [105, 106]. Plus récemment, la notion de mode complexe non-linéaire proposée par Laxalde et Thouverez [69] a pu être avantageusement utilisée en complément d'une méthode de synthèse modale par Krack [64] ou encore Joannin [58-60].

En ce qui concerne les non-linéarités géométriques, un certain nombre de travaux ont été réalisés sur des géométries et des modèles simples, de types poutre et plaque. On peut citer notamment les travaux de Tiso *et al.* [124, 129, 130] avec l'utilisation des dérivées modales dans un contexte temporel ; ou encore Kuether [67] sur la détermination des modes non-linéaires par méthode de tir [66] de plaques jointes.

L'approche présentée dans le cadre de ce mémoire diffère des différentes méthodes qui viennent d'être citées. Premièrement, l'approche par mode non-linéaire n'a pas été retenue car leur détermination dans le cadre des non-linéarités géométriques est difficilement envisageable pour la taille des systèmes que nous souhaitons traiter. On soulignera que cette difficulté aurait pu être contournée en calculant dans un premier temps le mode non-linéaire réduit pour ensuite passer à l'étape de sous-structuration. Cette procédure étant assez lourde, il a donc été choisi de ne pas considérer cette stratégie.

### 2.1 Traitement des termes non-linéaires : hypothèses

En se basant sur une démarche analogue à celle de Craig-Bampton, nous allons construire un modèle réduit non-linéaire. Ainsi, de la même manière que pour la méthode de synthèse modale, il est possible de séparer les termes non-linéaires selon les différentes composantes, internes et de frontières, des sous-structures tels que

$$\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{\text{nl},1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_i^{\text{nl},2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i^{\text{nl},N_{\text{SS}}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_b^{\text{nl}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{V.25})$$

où chacune des composantes est fonction des variables de la structure complète  $\mathbf{x}$ . En opérant le changement de variable associé à la synthèse modale à interfaces fixes (V.4) et en pré-multipliant par la matrice de passage associée à cette transformation, il vient pour les efforts non-linéaires projetés

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{CB}}^{\text{nl}}(\mathbf{y}) &= \mathbf{T}_{\text{CB}}^{\text{T}} \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{T}_{\text{CB}} \mathbf{y}) \\ &= \begin{bmatrix} [\Phi^1]^{\text{T}} \mathbf{f}_i^{\text{nl},1}(\mathbf{T}_{\text{CB}} \mathbf{y}) \\ [\Phi^2]^{\text{T}} \mathbf{f}_i^{\text{nl},2}(\mathbf{T}_{\text{CB}} \mathbf{y}) \\ \vdots \\ [\Phi^{N_{\text{SS}}}]^{\text{T}} \mathbf{f}_i^{\text{nl},N_{\text{SS}}}(\mathbf{T}_{\text{CB}} \mathbf{y}) \\ \sum_{k=1}^{N_{\text{SS}}} [\Psi^k]^{\text{T}} \mathbf{f}_i^{\text{nl},k}(\mathbf{T}_{\text{CB}} \mathbf{y}) + \mathbf{f}_b^{\text{nl}}(\mathbf{T}_{\text{CB}} \mathbf{y}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

L'hypothèse faite ici, similaire à celle d'Apiwattanalungarn [2], est que les modes statiques de liaisons, et donc les degrés de liberté de frontières, restent linéaires. Dans l'application qui nous intéresse, à savoir les roues aubagées, les structures non-linéaires que sont les pales sont couplées par le disque qui est supposé se comporter linéairement. Cette hypothèse permet d'éviter le calcul de modes statiques non-linéaires, comme le font Kuether [67] et Wu [129], qui pourrait devenir rapidement problématique vu le nombre de degrés de liberté de frontière que nous aurons à traiter dans la suite.

La linéarité des couplages entre sous-structures permet aussi de simplifier les termes retenus dans les efforts non-linéaires internes. En effet, il sera dorénavant supposé que les termes non-linéaires de chaque sous-structure ne dépendent que des coordonnées internes à la sous-structure.

En appliquant cette hypothèse à l'expression des termes non-linéaires réduits (V.26) il

vient

$$\mathbf{f}_{CB}^{nl}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} [\Phi^1]^\top \mathbf{f}_i^{nl,1}(\Phi^1 \mathbf{q}_i^1) \\ [\Phi^2]^\top \mathbf{f}_i^{nl,2}(\Phi^2 \mathbf{q}_i^2) \\ \vdots \\ [\Phi^{N_{SS}}]^\top \mathbf{f}_i^{nl,N_{SS}}(\Phi^{N_{SS}} \mathbf{q}_i^{N_{SS}}) \\ \mathbf{0}_b \end{bmatrix} \quad (\text{V.27})$$

où on retrouve des expressions pour les termes non-linéaires réduits pour chaque sous-structure admissibles pour l'application de la procédure STEP, et rend donc applicable tout ce qui a pu être dit à ce propos comme la prise en compte des effets centrifuges.

Afin d'illustrer la méthode, nous allons dans un premier temps nous intéresser à un cas simple construit à l'aide de poutres d'Euler-Bernoulli couplées. Nous ferons ensuite une application sur un cas plus proche d'une structure industrielle avec l'étude d'un fan simplifié.

## 2.2 Évaluation de la méthode : Structure cyclique modélisée avec des poutres d'Euler-Bernoulli

On propose une application de la méthode qui vient d'être présentée sur un système simple constitué de poutres d'Euler-Bernoulli. Ces résultats ont en partie été présentés lors de la conférence ASME TurboExpo 2018 et ont fait l'objet d'une publication dans le *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* [78].

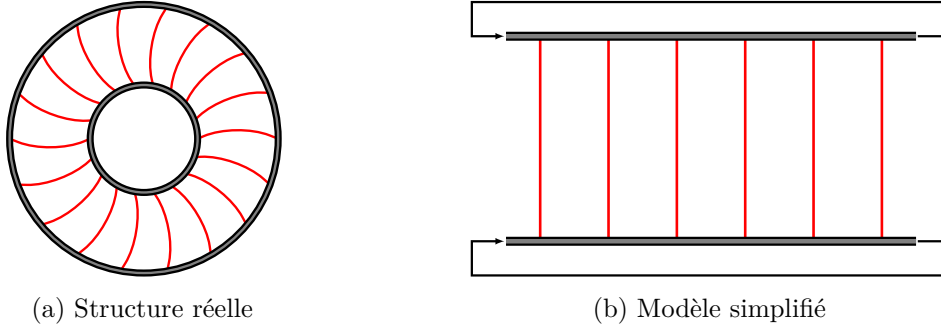


Figure V.4 – Structure cyclique modélisée avec des poutres d'Euler-Bernoulli

### 2.2.1 Présentation du modèle

Le premier exemple d'application de la méthode est une structure simple de type redresseur. Une illustration de cette structure est donnée sur la figure V.4a avec les pales, en rouge, couplées par 2 viroles, en gris/noir. Afin de réaliser l'étude de ce système à l'aide de poutres d'Euler-Bernoulli, un modèle simplifié à 6 secteurs, comme représenté sur la figure V.4b, a été considéré où les extrémités droites sont liées aux extrémités gauches.

La structure étant à symétrie cyclique, il est possible de définir un secteur générateur représenté sur la figure V.5a, où on retrouve aussi les différentes dimensions associées aux pales, dont les grandeurs sont notées  $\bullet_{bl}$ , et aux viroles, notés  $\bullet_c$ , rassemblées dans le tableau V.1. On fournit de même la discrétisation éléments finis de ce secteur sur la figure V.5b ce qui mène à un modèle constitué de 978 degrés de liberté. On peut voir sur

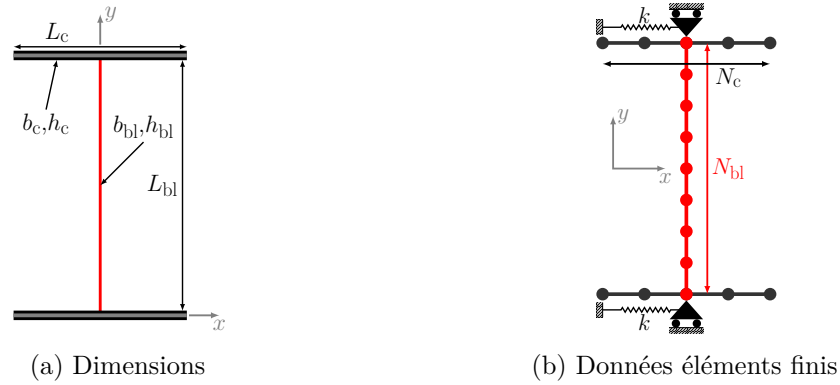


Figure V.5 – Secteur d'étude

cette figure la présence de conditions aux limites bloquant les déplacements aux extrémités des pales dans la direction  $y$  ainsi que la présence de ressorts dans la direction  $x$ . Cela peut se justifier technologiquement par la fixation du redresseur sur le carter par le biais de pions s'apparentant à ce type de conditions limites. Les caractéristiques des ressorts, ainsi que du matériau utilisé, sont données au tableau V.2. A noter que pour cet exemple la modélisation utilisée est celle d'Euler-Bernoulli classique avec interpolation linéaire des déplacements longitudinaux, contrairement à la poutre étudiée au chapitre III qui utilisait une interpolation d'Hermite des déplacements longitudinaux. Ce choix permet d'être cohérent avec l'emploi "classique" de l'approche de Craig-Bampton dans le cadre d'un modèle en déplacement pur.

Tableau V.1 – Dimensions et discrétisation éléments finis

	$L$ [m]	$b$ [m]	$h$ [m]	$N$
• <sub>bl</sub>	0,1	0,02	$2 \cdot 10^{-3}$	40
• <sub>c</sub>	0,1	0,02	$1 \cdot 10^{-2}$	8

Tableau V.2 – Données matériaux

$E$ [N.m <sup>-2</sup> ]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$k$ [N.m <sup>-1</sup> ]
$210 \cdot 10^9$	7800	$1 \cdot 10^5$

### 2.2.2 Étude du système complet linéaire

On considère ici le système linéaire complet. On s'intéresse dans un premier temps aux modes du système libre non-amorti. Ceux-ci sont donnés sur la figure V.6 où on représente l'amplitude traverse au milieu de chaque pale. On retrouve bien, comme prévu par la théorie des structures cycliques, des modes simples à 0 (fig. V.6f) et 3 (fig. V.6a) diamètres, la structure comportant 6 secteurs; ainsi que des modes doubles à 1 (figs. V.6d-V.6e) et 2 (figs. V.6b-V.6c) diamètres. Les pulsations sont aussi fournies dans le tableau V.3 et on peut remarquer leur arrangement par ordre décroissant du nombre de diamètre.

On s'intéresse dans un second temps à la réponse forcée du système. Nous allons

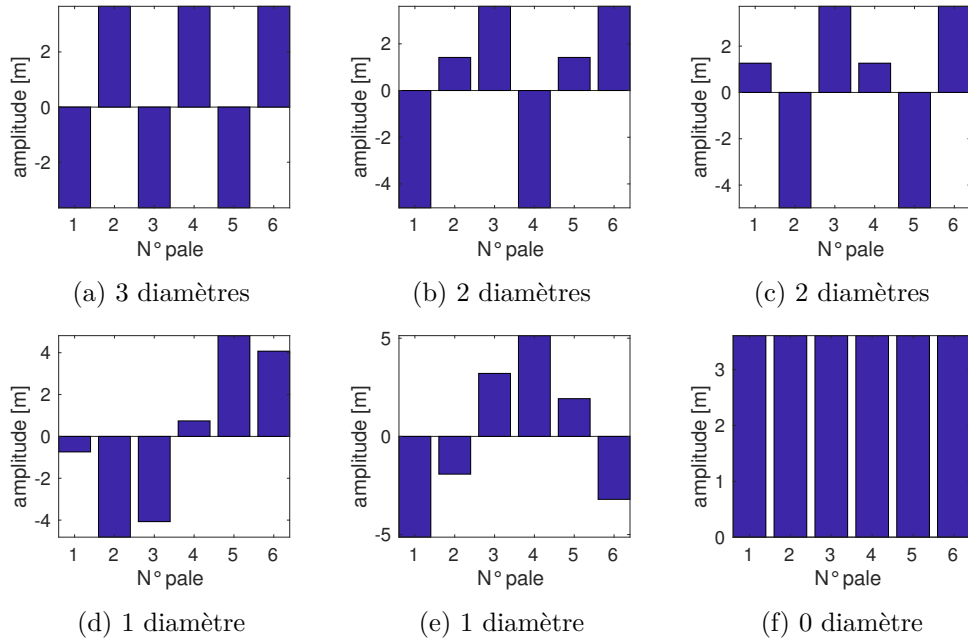


Figure V.6 – Modes à diamètres du 1<sup>er</sup> mode de flexion des pales (amplitude transverse au milieu de chaque pale)

Tableau V.3 – Pulsations des modes à diamètres du 1<sup>er</sup> mode de flexion des pales

Diamètres nodaux	3	2	1	0
$\omega$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	6638	6662,3	6676,7	6907,4

considérer pour cela un amortissement de 0,1 % sur le mode à 3 diamètres au travers de la matrice de masse ( $\alpha = 13,276$  (III.43)). L'effort sera lui appliqué transversalement au milieu d'une pale, celle-ci sera considérée comme la numéro 1, les 5 autres étant comptées consécutivement après. Le résultat obtenu pour une excitation de 1 N est donné sur la figure V.7. L'excitation étant localisée sur une seule pale, tous les diamètres vont répondre comme cela est visible sur les courbes. En revanche, on peut remarquer qu'hormis pour le 0 diamètre à 6907,4 rad.s<sup>-1</sup>, la forme des diamètres est assez peu respectée avec une prédominance de l'amplitude de la pale 1. Cela est dû à la proximité fréquentielle de tous ces modes.

### 2.2.3 Étude du système complet non-linéaire

Nous allons nous intéresser maintenant à l'étude du système non-linéaire. Dans cette optique, seule les pales, en rouge sur la figure V.4, seront considérées comme non-linéaires, les viroles étant supposées linéaires. D'une part, cela se justifie par les épaisseurs des différents composants de ce système. Les pales étant les plus fines, elles seront plus à même d'être sujettes à ce type de comportement. D'autre part, les viroles étant considérées linéaires, le système est parfaitement admissible aux hypothèses de la méthode de sous-structuration qui sera ensuite utilisée. L'étude sera menée à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique pour 3 harmoniques ( $N_h = 3$ ) et 63 pas des temps pour la méthode AFT ( $N_t = 63$ ).

Comme pour l'étude linéaire, on applique une excitation localisée sur une pale trans-

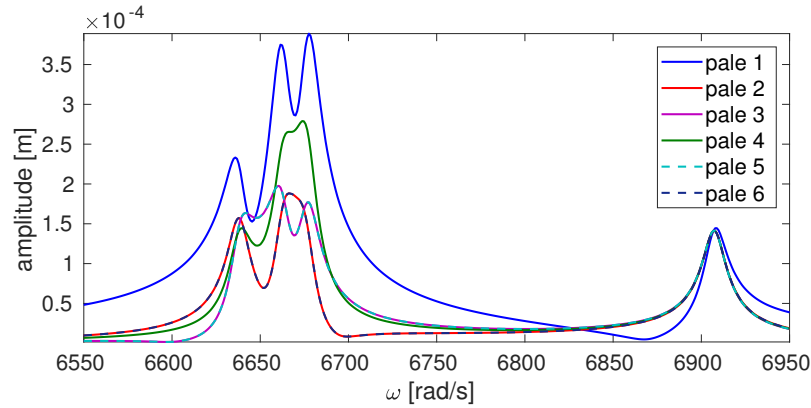


Figure V.7 – Fonction de réponse en fréquence linéaire pour une excitation de 1 N sur la pale 1

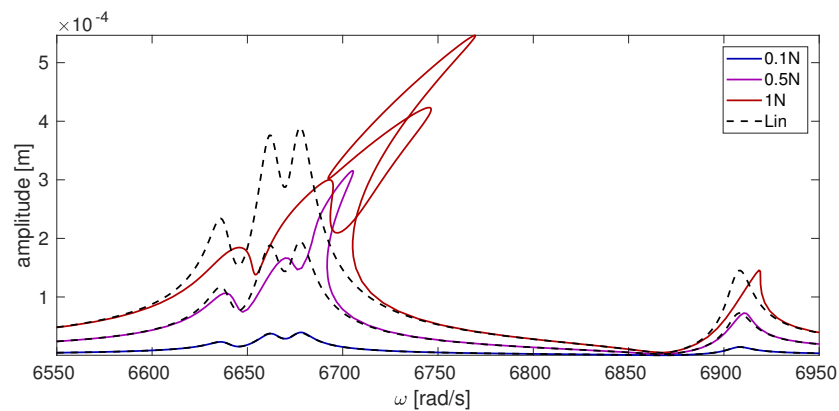


Figure V.8 – Fonctions de réponse en fréquence non-linéaires de la structure complète au niveau de la pale 1 pour des excitations de 0,1 N, 0,5 N et 1 N

versalement au milieu, les résultats sont donnés sur la figure V.8. Cette figure représente le degré de liberté excité sur la pale 1 pour différents niveaux d'excitation. On observe que pour un effort faible, 0,1 N en bleu, la réponse obtenue est identique à celle du système linéaire, en pointillés noirs. Lorsque l'effort augmente, les non-linéarités s'activent peu à peu avec une rigidification globale de la structure, comme cela était le cas pour la poutre bi-encastée seule. On peut aussi remarquer le comportement particulier du troisième mode, celui à 1 diamètre, dont l'amplitude augmente significativement à partir de l'excitation à 0,5 N. Une étude plus poussée avec les méthodes présentées au chapitre II pourrait permettre de statuer sur la présence ou non d'une bifurcation concernant ce mode.

#### 2.2.4 Application de la méthode de sous-structuration

Nous allons maintenant passer à l'application de la méthode de sous-structuration proposée précédemment. A la suite des résultats obtenus sur la poutre bi-encastée au chapitre III, chaque sous-structure, i.e. secteur, sera réduite au moyen du premier mode de flexion, représenté sur la figure V.9a, et de sa dérivée modale associée, donnée figure V.9b. Il est à noter aussi qu'aucune méthode de réduction des degrés de liberté de frontières ne sera utilisée ici vu le faible nombre de ceux-ci. Le modèle réduit obtenu comporte 48 degrés de liberté contre 978 pour le modèle complet, ce qui représente une diminution du nombre

(a) 1<sup>er</sup> mode de flexion du secteur encastré  
(déplacements transverses)(b) Dérivée modale  $\partial\phi_{11}$  du secteur encastré  
(déplacements longitudinaux)

Figure V.9 – Base de réduction des degrés de liberté internes

d'inconnues du problème de 95 %.

Tableau V.4 – Erreur de réduction sur les pulsations propres

Diamètres nodaux	3	2	1	0
$\omega_{\text{ref}}$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	6638	6662,3	6676,7	6907,4
$\omega_{\text{red}}$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	6638,1	6662,3	6676,7	6907,9
$\varepsilon$ [%]	$5,45 \cdot 10^{-4}$	$1,44 \cdot 10^{-4}$	$1,67 \cdot 10^{-5}$	$6,67 \cdot 10^{-3}$

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la réduction du système linéaire par la simple méthode de Craig-Bampton avec la base donnée sur la figure V.9 pour la réduction des degrés de liberté internes. Le résultat obtenu sur le système libre non amorti est donné dans le tableau V.4 en terme d'erreur sur les pulsations propres des modes à diamètres associés au premier mode de flexion des pales. Cette erreur est extrêmement faible, moins de  $7 \cdot 10^{-3}$  %, ce qui montre que le premier mode de flexion suffit dans ce cas à approcher les modes à diamètres associés, la dérivée modale ne jouant aucun rôle ici. La comparaison des fonctions de réponse en fréquence pour une excitation localisée est aussi donnée sur la figure V.10 et à nouveau les deux modèles, complet et réduit, coïncident très fidèlement, avec une différence très légère visible au niveau du mode à 0 diamètre, mode pour lequel la différence était la plus grande au niveau des pulsations.

La procédure de sous-structuration non-linéaire est ensuite appliquée. Toutes les sous-structures étant identiques, la détermination des raideurs réduites sera réalisée sur un seul secteur et celles-ci seront utilisées pour toutes les autres sous-structures. Les résultats obtenus pour une excitation localisée sont donnés sur la figure V.11 en comparaison des résultats de la structure complète. Que ce soit pour les déplacements transverses (fig. V.11a) ou longitudinaux (fig. V.11b), les modèles complet et réduit sont extrêmement proches. La méthode est donc très efficace pour capturer les effets non-linéaires, même ceux particuliers associés au mode à 1 diamètre, et les temps de résolution donnés au tableau V.5 montrent un gain de temps de près de 99,8 %, ramenant une résolution de 10 h à 1 minute. Cette précision associée à ce gain de temps nous permet d'envisager la réalisation d'études plus poussées à l'aide du modèle réduit.

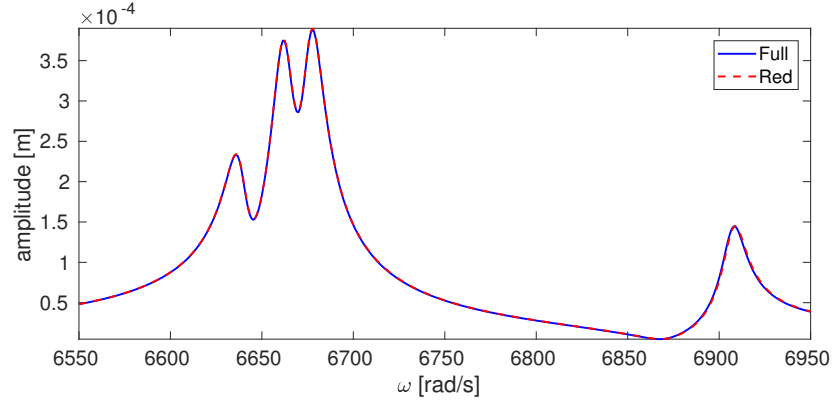


Figure V.10 – Comparaison des fonctions de réponse en fréquence linéaires des systèmes complet et réduit pour une excitation de 1 N sur la pale 1

Tableau V.5 – Gains de temps de la méthode de sous-structuration non-linéaire

Effort [N]	Modèle complet [s]	Modèle réduit [s]	$\varepsilon$ [%]
0,1	19 501	30,6	99,84
0,5	21 321	43,76	99,795
1	35 926	72,68	99,798

### 2.2.5 Réponse forcée du modèle réduit : excitations à diamètres

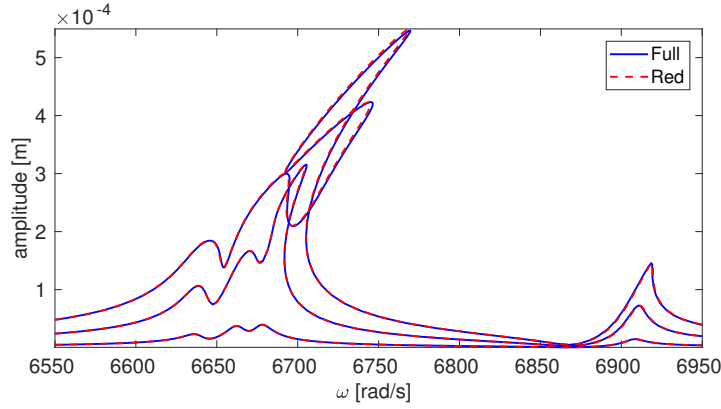
Comme cela a pu être dit aux chapitres I et II, les structures à symétrie cyclique sont sujettes à des excitations spécifiques telles que les ondes tournantes. L'étude de notre structure soumise à de telles excitations est donc envisagée ici afin de déterminer des comportements plus réalistes. Pour cela, les efforts appliqués sur les degrés de liberté internes de la  $k^{\text{ème}}$  sous-structure seront de la forme

$$\mathbf{f}_i^{\text{ext},k}(t) = A \cos\left(\omega t \pm \frac{2N_D \pi k}{N_{SS}}\right) \mathbf{g}_i^{\text{ext},k} \quad (\text{V.28})$$

$$= A \left[ \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2N_D \pi k}{N_{SS}}\right) \pm \sin(\omega t) \sin\left(\frac{2N_D \pi k}{N_{SS}}\right) \right] \mathbf{g}_i^{\text{ext},k} \quad (\text{V.29})$$

où  $A$  désigne un facteur d'amplitude d'application de l'effort,  $\omega$  la pulsation d'excitation,  $N_D$  le nombre de diamètre de l'excitation et  $\mathbf{g}_i^{\text{ext},k}$  la répartition spatiale de l'effort sur chaque sous-structure, dans notre cas cette dernière sera simplement au niveau du degré de liberté transverse au milieu de la pale. Le signe " $\pm$ " représente quand à lui le sens de propagation de l'onde appliquée, dans le cas où celle-ci est associée à un mode dégénéré, avec une onde directe dans le cas " $-$ ", et une onde rétrograde dans le cas " $+$ ". Enfin, la résolution étant faite à l'aide de l'équilibrage harmonique, il est intéressant de remarquer que l'expression (V.29) permet de faire apparaître les composantes  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{b}_1$  de l'effort





(a) Déplacements transverses au milieu de la pale 1

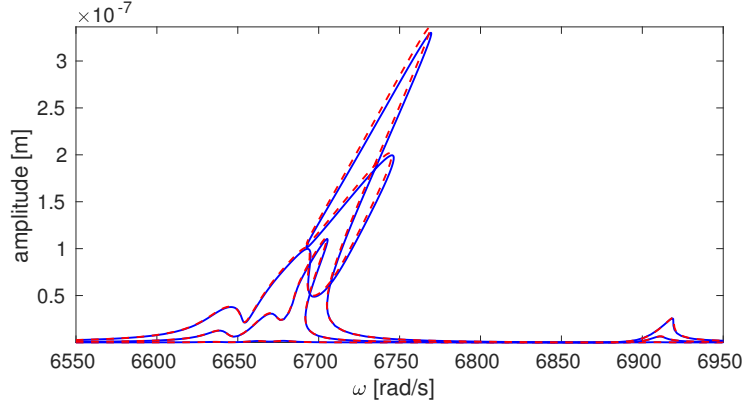
(b) Déplacements longitudinaux à l'abscisse  $y = 3,5$  cm de la pale 1

Figure V.11 – Comparaison des résultats obtenus pour les modèles complet et réduit pour des forçages de 0,1 N, 0,5 N et 1 N

harmonique extérieur sur chaque sous-structure qui s'exprime ainsi tel que

$$\hat{\mathbf{f}}_i^{\text{ext},k} = A \begin{bmatrix} \mathbf{0}_i \\ \cos\left(\frac{2N_D\pi k}{N_{SS}}\right) \mathbf{g}_i^{\text{ext},k} \\ \pm \sin\left(\frac{2N_D\pi k}{N_{SS}}\right) \mathbf{g}_i^{\text{ext},k} \\ \mathbf{0}_i \\ \vdots \\ \mathbf{0}_i \end{bmatrix} \quad (\text{V.30})$$

où  $\mathbf{0}_i$  représente un vecteur nul de la taille du nombre d'inconnues internes de la  $i^{\text{ème}}$  sous-structure .

Des simulations ont ainsi été effectuées sur le modèle réduit avec l'application de différentes excitations à diamètres. Deux sont illustrées sur la figure V.12 avec un cas de mode non-dégénéré à 3 diamètres (figs. V.12a-V.12b), et un cas de mode dégénéré avec une onde à 1 diamètre directe (figs. V.12c-V.12d). Les fonctions de réponse en fréquence V.12b

et V.12d n'ont été tracées que pour la pale 1, les 6 pales ayant dans le cadre de ce type d'excitation les mêmes réponses, et montrent une rigidification globale de la structure. Les séries temporelles V.12b et V.12d, construites à partir des coefficients harmoniques du point solution au niveau du pic de résonance non-linéaire, permettent bien de constater que les réponses obtenues sont en accord avec l'excitation à diamètre appliquée.

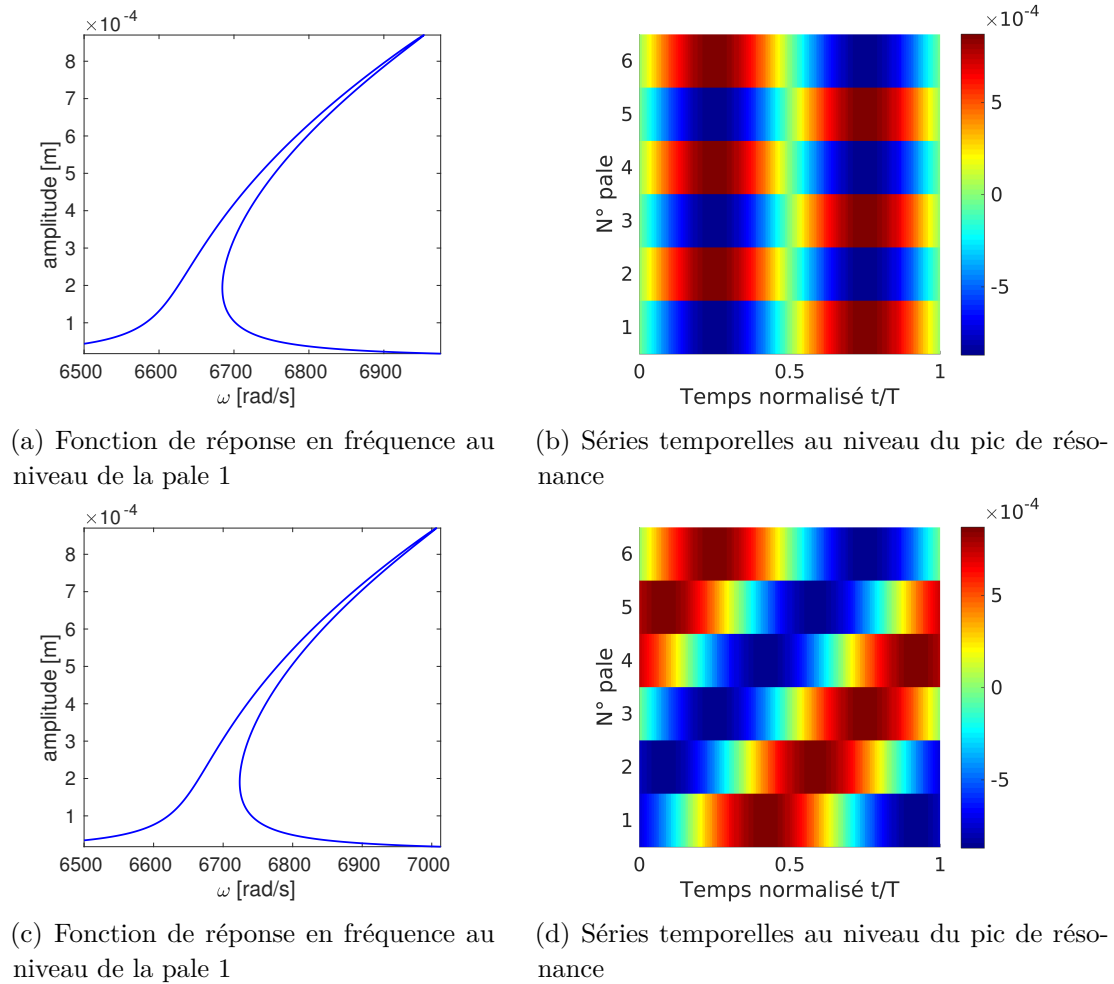


Figure V.12 – Exemples d'excitations à diamètres. Haut : 3 diamètres. Bas : 1 diamètre direct.

Afin de compléter l'étude des excitations à diamètres, un désaccordage de l'excitation est maintenant introduit. Pour cela, l'amplitude  $A$  associée à la pale 1 va être "désaccordée" de 0,01 % par rapport aux autres, l'amplitude devenant ainsi  $1,0001A$  pour cette pale, afin de retranscrire une excitation à diamètre imparfaite. Les résultats obtenus sont donnés sur la figure V.13 pour les 4 excitations à diamètres possibles. Les résultats sont assez similaires à ceux obtenus sur le système cyclique simple du chapitre II et montrent donc que ce système constitué de masses-ressorts est assez représentatif d'un système réel comme celui que nous étudions ici. Les résultats obtenus ici, tracés de paires avec les excitations accordées associées, montrent l'apparition de poches de solutions associées à des points de bifurcations.

Le cas de l'excitation à 0 diamètre est approfondi au moyen de la figure V.14. On y donne les évolutions des degrés de liberté transverses au milieu de chaque pale au niveau

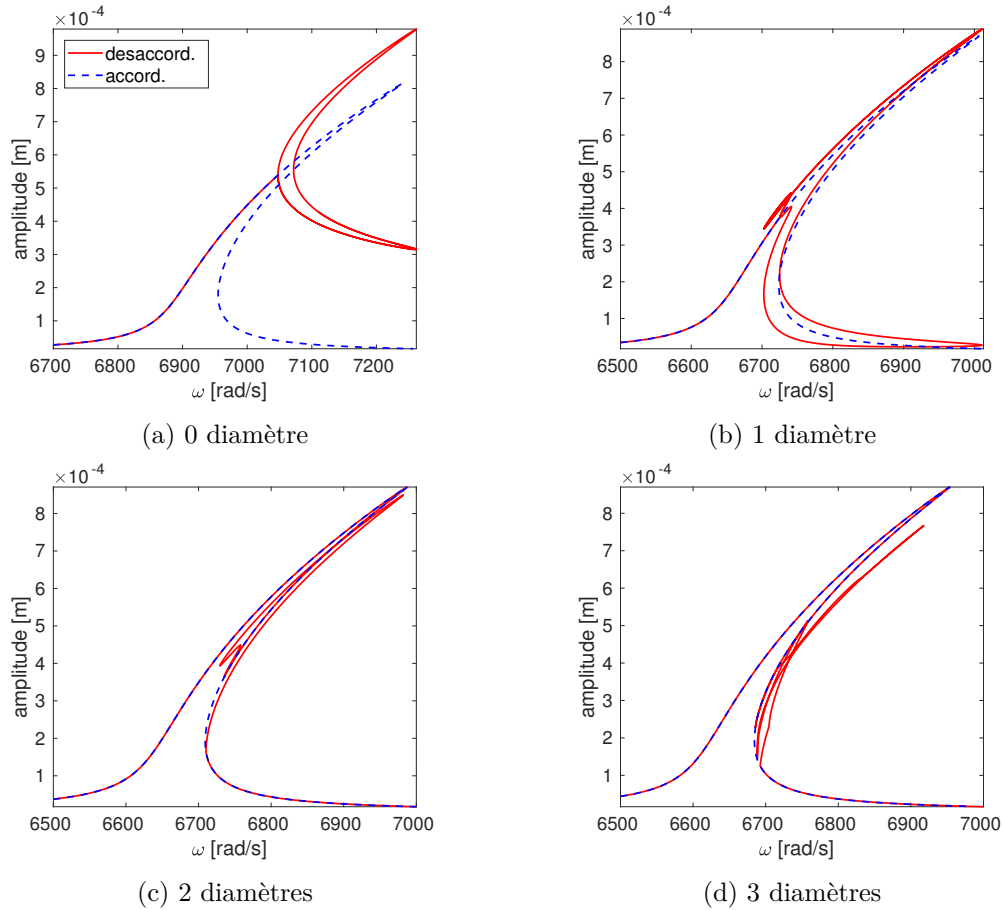
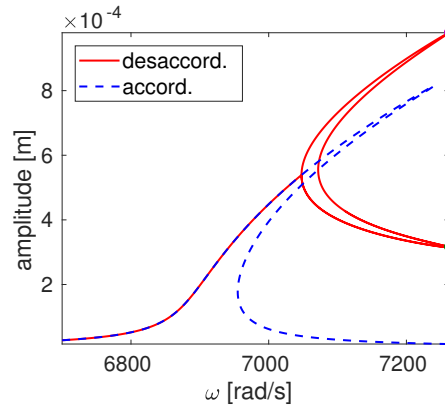


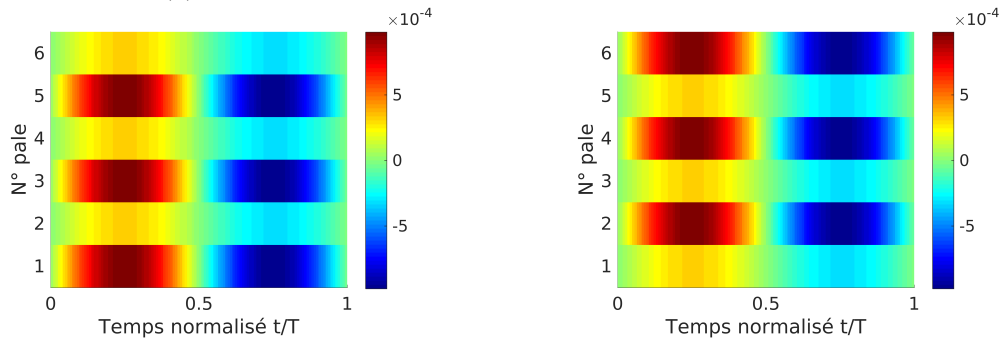
Figure V.13 – Effets d’un désaccordage de l’excitation de 0,01 % au niveau de la pale 1 sur les différentes excitations à diamètres. Déplacements transverses au milieu de la pale 1.

des 2 points extrêmes de la poche. De la même manière que pour le système cyclique du chapitre II, on peut voir sur les figures V.14b et V.14c que l’amplitude se concentre sur 2 groupes de pales, [1 3 5] et [2 4 6], tout en gardant les 6 pales toujours en phases, ce qui respecte bien cette propriété du mode à 0 diamètre.

Cette méthode semble donc tout à fait adéquate pour mener à bien l’étude de structures cycliques comportant des non-linéarités géométriques afin d’en déterminer les comportements lorsqu’elles sont soumises à des excitations variées. Il ne faut cependant pas perdre de vue que les résultats obtenus sont dépendants de la base de réduction utilisée. En effet, il n’est pas question ici de faire une recherche exhaustive des solutions du système, la base de réduction opérant un filtrage des solutions accessibles, cela est ici in-envisageable. Il semble en revanche tout à fait concevable d’appliquer cette méthode de sous-structuration afin de réaliser une détermination des modes non-linéaires et des bifurcations associées. Cela permettrait de déterminer les points de bifurcation, et donc de fonctionnement, problématiques en amont d’une étude forcée. Nous proposons maintenant d’appliquer cette méthode à un modèle simplifié de fan en passant cette fois par l’utilisation du code éléments finis industriel SAMCEF.



(a) Fonction de réponse en fréquence au niveau de la pale 1



(b) Séries temporelles au point ●

(c) Séries temporelles au point ●

Figure V.14 – Phénomènes de localisation sur la bifurcation de l'excitation désaccordée à 0 diamètre.

### 3 Application à un modèle éléments finis de Fan simplifié

Nous entamons ici l'application de notre méthode de sous-structuration à un modèle qui peut s'apparenter à une structure industrielle. En effet, la géométrie utilisée est extrêmement simplifiée par rapport à celle d'un fan réel, il s'agit de pales modélisées par des plaques droites couplées par un disque cylindrique. L'étude sera alors menée en deux temps. Dans un premier temps nous nous intéresserons à un fan composé de 4 secteurs afin de présenter la démarche de notre méthode et les résultats obtenus. Ensuite, nous passerons à une application sur un cas à 18 secteurs, plus représentatif des fans actuels.

#### 3.1 Modèle à 4 secteurs : Présentation, démarche et résultats

##### 3.1.1 Caractéristiques mécaniques du modèle

Le fan dont il sera question ici est représenté sur la figure V.15a, ainsi que diverses vues du secteur (figs. V.15b-V.15c-V.15d). Ce modèle étant composé de 4 secteurs, l'ouverture angulaire d'un secteur est donc de  $90^\circ$ . Les dimensions de celui-ci ont été choisies afin d'être représentatives d'un fan. Ainsi, le rayon externe du disque est de 0,3m et la hauteur des pales est de 0,7m, ce qui mène à un fan de 2m de diamètre. Les caractéristiques matériaux sont elles rappelées dans le tableau V.6. Enfin, la discrétisation utilisée conduit à un secteur comprenant 25 872 degrés de liberté et un modèle complet de taille 101 232.

Concernant les conditions d'encastrement, celles-ci seront appliquées au niveau des

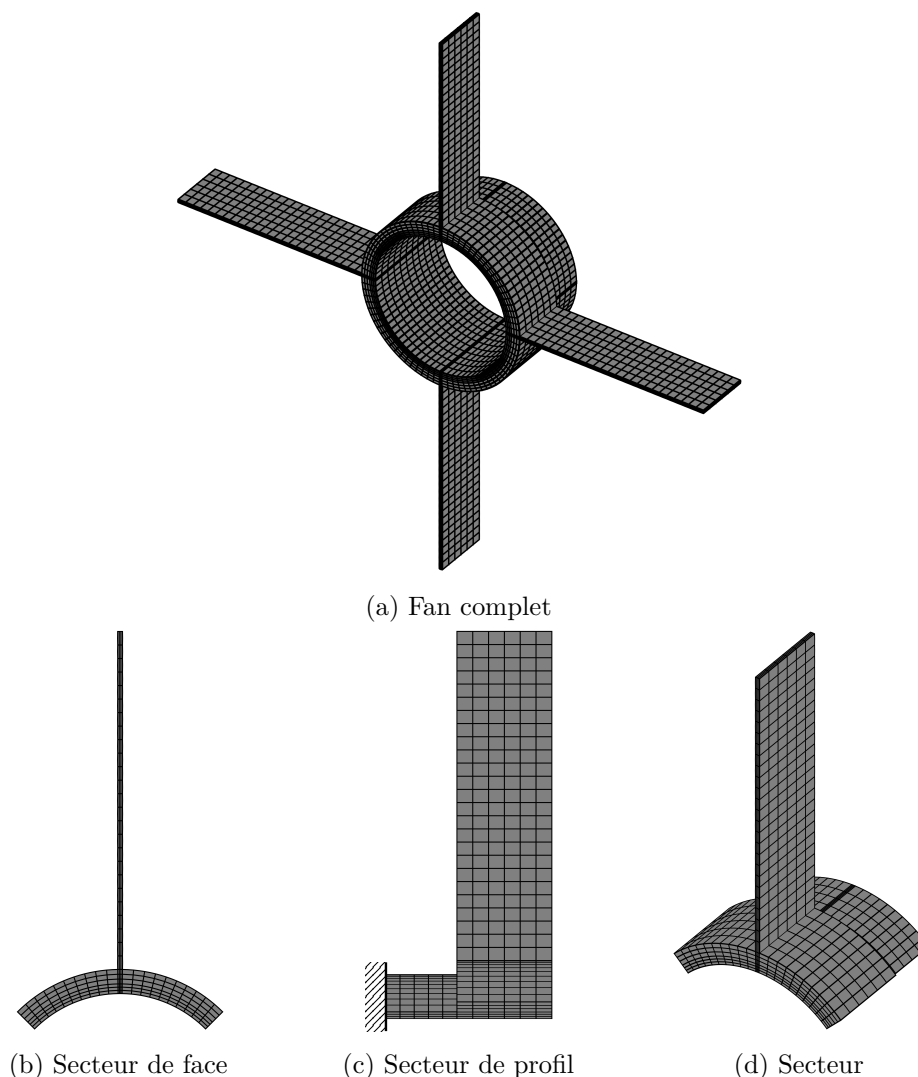


Figure V.15 – Aperçu du modèle de fan à 4 secteurs

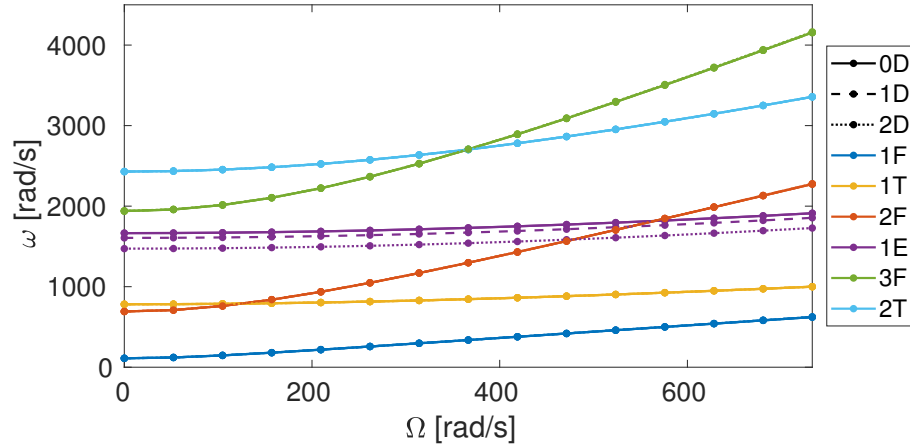
nœuds situés à l'extrême aval du fan, soit les nœuds sur la gauche de la figure de profil [V.15c](#) du secteur.

### 3.1.2 Propriétés modales

Une première information importante à déterminer est l'évolution des différentes familles de modes, et de leurs diamètres, en fonction de la vitesse de rotation. Cette étude a été réalisée au moyen du logiciel SAMCEF pour des vitesses de rotation comprises entre 0 et 7000 rpm. Le résultat est donné sur la figure [V.16](#) où l'on trace l'évolution de tous les diamètres modaux des 6 premières familles modales. Il est intéressant de remarquer deux choses. La première est que l'influence de la vitesse de rotation va différer selon la famille de mode. Ainsi, les modes de flexion (F) sont beaucoup plus impactés que les autres familles ce qui amène le deuxième mode de flexion (2F) à "traverser" les familles des premiers modes de torsion (1T) et de flexion hors plan (1E). Ensuite, On peut remarquer qu'hormis la famille modale de flexion hors plan, toutes les autres familles modales voient leurs diamètres extrêmement proches (les courbes associées à ces différents diamètres sont

Tableau V.6 – Données matériau du fan

$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [N.m <sup>-2</sup> ]	$\nu$ [-]
7800	$210 \cdot 10^9$	0,3

Figure V.16 – Évolution des pulsations des différents diamètres des familles de modes en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ 

quasiment confondues sur la figure V.16). Cela est dû au couplage, ou non, du disque avec les modes. Ainsi, comme cela est visible sur la figure V.17, les modes de flexion et torsion représentés sur les figures V.17a-V.17b-V.17c ne se couplent pas avec le disque, quand le mode de flexion hors plan représenté figure V.17d se couple en créant une ovalisation légère du disque.

Après les résultats obtenus au chapitre IV, l'étude menée ici portera sur la famille du deuxième mode de flexion. La vitesse de rotation d'étude sera choisie à 7000 rpm, soit la valeur maximale représentée en abscisse sur la figure V.16. Les pulsations pour cette vitesse de rotation sont données dans le tableau V.7.

Tableau V.7 – Pulsations des différents modes à diamètres du deuxième mode de flexion pour  $\Omega = 7000$  rpm

	0D	1D	2D
$\omega$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	2273,9	2275,1	2277,7

### 3.1.3 Réduction par double synthèse modale

On s'intéresse dans un premier temps à la réduction linéaire du système à l'aide de la double synthèse modale. En effet, contrairement à l'exemple précédent, celui-ci comporte un nombre non-négligeable de degrés de liberté d'interfaces, 2172 précisément, qu'il n'est pas envisageable de conserver pour la résolution non-linéaire. On présente ici les différentes étapes réalisées à l'aide de SAMCEF et MATLAB afin de mener à bien cette réduction.

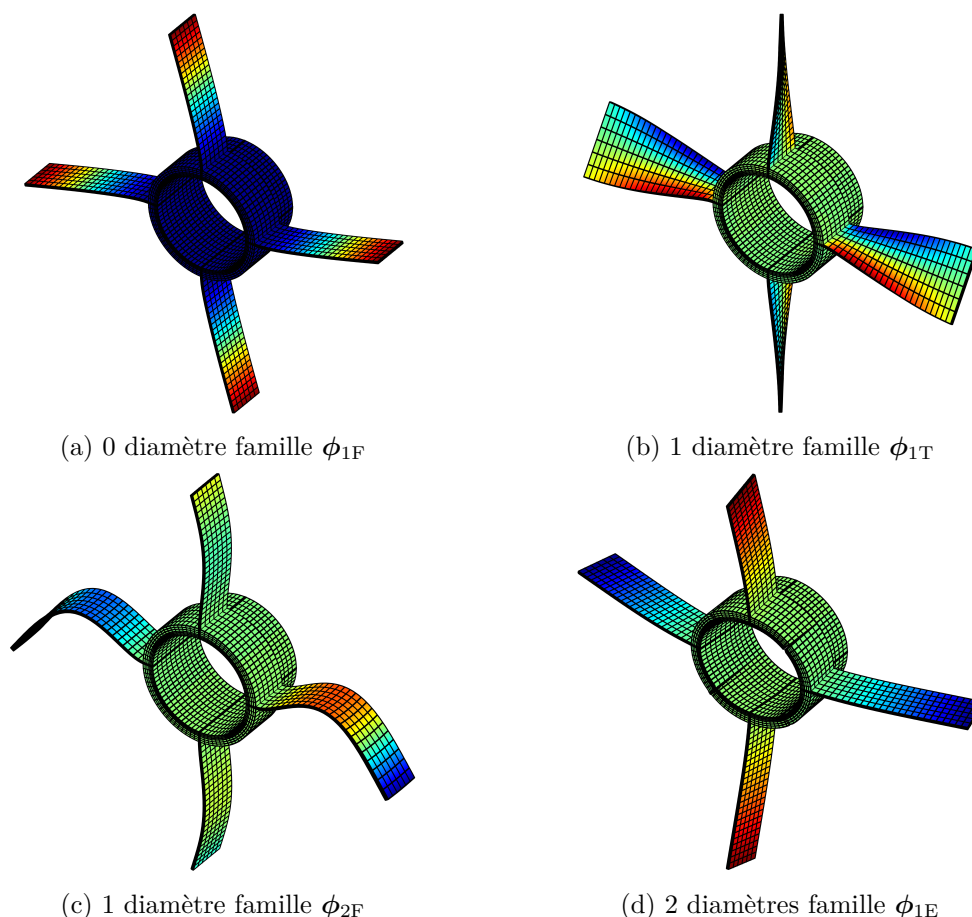


Figure V.17 – Différents modes à diamètres des différentes familles de modes de la pale pour le modèle de fan à 4 secteurs en rotation à 4000 rpm ( $418,88 \text{ rad.s}^{-1}$ ).

**Détermination des modes encastés** La détermination des modes encastés, nécessaires à l'application de la synthèse modale à interfaces fixes, est réalisée à l'aide de SAMCEF en 2 temps :

1. Analyse statique non-linéaire (module **MECANO** de SAMCEF) : détermination de l'état d'équilibre sous chargement centrifuge du secteur encasté selon les nœuds décrits précédemment. A cela s'ajoute, afin de retranscrire l'effet centrifuge de la structure complète sur le secteur, la nécessité de spécifier une condition d'égalité des déplacements des 2 frontières cycliques du secteur dans le repère cylindrique, le chargement centrifuge pouvant être caractérisé au niveau des frontières cycliques par une condition de type 0 diamètre. Enfin, on profite aussi de cette étape afin de déterminer les déplacements et réactions statiques dus à la précharge qui seront nécessaires lors de la phase de réduction non-linéaire ;
2. Analyse modale (module **DYNAM** de SAMCEF) : on résout le problème aux valeurs propres associé à l'état déterminé à l'étape précédente, en spécifiant en plus l'encastement des frontières cycliques, pour ainsi déterminer les modes encastés du secteur préchargé. A la suite de ce calcul, il est de même possible d'extraire les matrices du secteur préchargé nécessaires à l'application de la synthèse modale.

**Synthèse modale à interfaces fixes** La méthode de Craig-Bampton (V.1.1) est ensuite appliquée à l'aide des matrices et vecteurs propres ainsi extraits. Celle-ci mène, en ne conservant que le deuxième mode de flexion pour la réduction des degrés de liberté internes de chaque secteur, à un modèle réduit de taille 2176 ce qui représente déjà une réduction de plus de 97% du nombre d'inconnues du problème. La précision des pulsations associées à ce modèle réduit, données dans le tableau V.8, est tout à fait satisfaisante avec une erreur inférieure à  $3 \cdot 10^{-2}$  %.

Tableau V.8 – Erreur sur les pulsations de la méthode de Craig-Bampton

	Système complet [rad.s <sup>-1</sup> ]	Craig-Bampton [rad.s <sup>-1</sup> ]	Erreur $\varepsilon$ [%]
$\omega_{0D}$	2273,9	2273,3	$2,6 \cdot 10^{-2}$
$\omega_{1D}$	2275,1	2274,4	$2,8 \cdot 10^{-2}$
$\omega_{2D}$	2277,7	2277,7	$6,4 \cdot 10^{-4}$

**Double synthèse modale** Comme nous l'avons dit, nous ne pouvons nous satisfaire de cette réduction et il est nécessaire d'envisager une étape de double synthèse modale (1.3.2). On donne pour cela à la figure V.18 l'évolution de l'erreur sur les différentes pulsations issues de la double synthèse modale en fonction du nombre de modes de branche retenus. Il apparaît sur cette figure que même pour un seul mode de branche conservé l'erreur sur les 4 pulsations reste modérée, moins de 0,2%. Cependant, on peut aussi observer une chute drastique de l'erreur pour 5 modes de branches, notamment en ce qui concerne le mode à 2 diamètres. Dans la suite de l'étude nous conserverons donc 5 modes de branche, ce qui mène à un système réduit par double synthèse modale de taille 9.

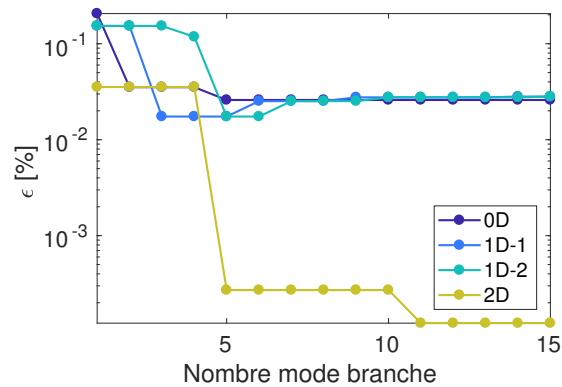


Figure V.18 – Évolution de l'erreur relative des pulsations du système réduit par double synthèse modale en fonction du nombre de modes de branche retenus

Afin de conclure sur cette réduction linéaire du système, nous fournissons d'une part les durées de ces différentes étapes dans le tableau V.9, qui restent extrêmement raisonnables avec une durée totale à peine supérieure à 2 minutes. D'autre part, on donne dans le tableau V.10 les erreurs commises sur les pulsations du système au cours des différentes étapes de la double synthèse modale.



Tableau V.9 – Durées des différentes étapes de la double synthèse modale

	Durée [s]
Détermination et extraction des matrices et vecteurs propres (SAMCEF)	85,8
Craig-Bampton et double synthèse modale (MATLAB)	49,3
Totale	135,1

Tableau V.10 – Précision des différentes phases de réduction

	Système complet	Craig-Bampton		Double synthèse modale	
			$\varepsilon$ [%]		$\varepsilon$ [%]
$\omega_{0D}$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	2273,9	2273,3	$2,6 \cdot 10^{-2}$	2273,3	$2,6 \cdot 10^{-2}$
$\omega_{1D}$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	2275,1	2274,4	$2,8 \cdot 10^{-2}$	2274,7	$1,7 \cdot 10^{-2}$
$\omega_{2D}$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	2277,7	2277,7	$6,4 \cdot 10^{-4}$	2277,8	$2,7 \cdot 10^{-4}$

### 3.1.4 Réduction non-linéaire

La deuxième phase de la méthode consiste dans un premier temps à déterminer les vecteurs complémentaires utiles à la prise en compte des effets non-linéaires, ici les dérivées modales, et ensuite à calculer les raideurs réduites non-linéaires associées à la base de réduction mise en place.

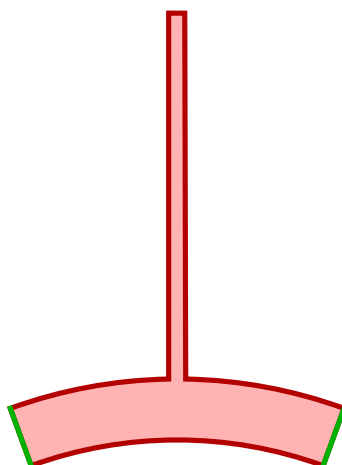


Figure V.19 – Découpage des degrés de liberté du secteur : internes en **rouges** : non-linéaires ; frontière en **verts** : linéaires.

Comme précédemment, il semble naturel de considérer que, dans le cadre de l'étude des modes de flexion, les non-linéarités vont être principalement dues aux grands déplacements de la pale. Nous avons choisis de traiter chaque secteur comme une unique sous-structure, et ainsi ne faire aucune hypothèse quand à la jonction pale/disque afin de conserver les couplages non-linéaires qui pourraient y prendre part. De cette manière, tous les degrés de liberté internes du secteur seront considérés non-linéaires, comme représenté sur la figure V.19. Les degrés de liberté de frontières entre les secteurs seront quand à eux considérés comme linéaires. Cette hypothèse est motivée par la faible participation du disque à ces modes et justifie donc que ces degrés de liberté puissent être considérés comme

linéaires.

**Détermination des dérivées modales** Comme pour la détermination des modes encastrés, celle des dérivées modales se fait en 2 temps :

1. Analyse statique non-linéaire (module **MECANO** de SAMCEF) : détermination de l'état d'équilibre associé à l'application des déplacements statiques dus à la précharge, déterminés lors de l'étude linéaire, auxquels on ajoute les déplacements d'un des modes encastrés. Cette association est tout à fait licite étant donné que les modes sont calculés autour de la position d'équilibre statique due à la force centrifuge ;
2. Analyse modale (module **DYNAM** de SAMCEF) : le problème aux valeurs propres associé aux matrices déterminées à l'étape précédente est résolu en rajoutant un encastrement au niveau des frontières cycliques. De cette manière, les modes de la structure déformée sont calculés à interfaces fixes et sont donc cohérents vis-à-vis de la méthode de Craig-Bampton.

En s'appuyant sur les modes encastrés ainsi calculés, on peut déterminer les dérivées modales selon la procédure décrite à la section (III.2.3). A noter que, ces dernières étant calculées à l'aide de modes encastrés, elles sont elles aussi admissibles pour l'application de la méthode de Craig-Bampton.

**Calcul des raideurs réduites** Une fois la base de réduction du secteur formée, la démarche de détermination des raideurs réduites par STEP est la même que celle présentée pour la poutre encastrée-libre (2.6.1).

### 3.1.5 Résultats

L'étude numérique qui va être présentée sera réalisée en appliquant une excitation à diamètres (V.29) dont l'intensité sur chaque pale sera fixée à 170 N. L'amortissement sera lui choisi de 0,05 % sur le mode à 0 diamètre de la famille modale du deuxième mode de flexion appliqué au travers de la matrice de masse ( $\alpha = 2,274$  (III.43)).

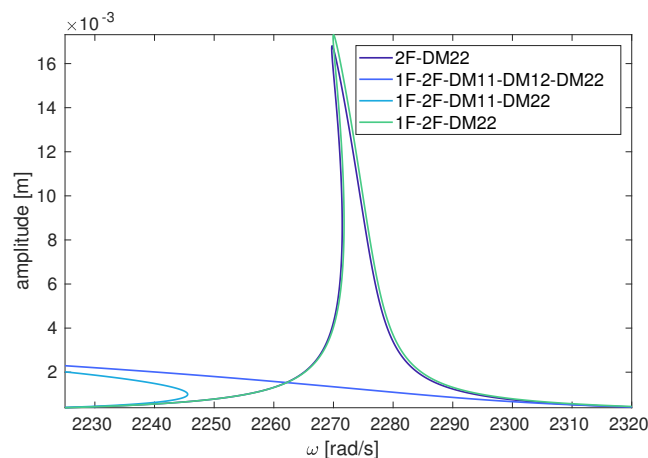


Figure V.20 – Fonctions de réponse en fréquence non-linéaires du fan à 4 secteurs réduits à l'aide de différentes bases

Il est nécessaire dans un premier temps de choisir une base de réduction adaptée à l'étude des modes à diamètres du deuxième mode de flexion du fan. Pour cela, nous utiliserons le deuxième mode de flexion et sa dérivée modale auxquels nous avons rajouté le premier mode de flexion et les dérivées modales associées (de la même manière que pour la poutre et la plaque étudiées au chapitre précédent). Les résultats obtenus sont illustrés figure V.20 pour une excitation à 1 diamètre rétrograde observé au niveau de la pale 1. On peut voir que pour une réduction réalisée à l'aide du deuxième mode de flexion et de sa dérivée modale (2F-DM22), la réponse montre un assouplissement global de la structure comme cela avait été le cas sur la plaque seule. En revanche, le rajout du premier mode de flexion et des dérivées modales associées (1F-2F-DM11-DM12-DM22) mène à un résultat extrêmement assouplissant avec un pic fortement penché. Le retrait progressif des dérivées modales associées au premier mode de flexion (1F-2F-DM11-DM22 et 1F-2F-DM22) permet de retrouver un comportement cohérent avec la base initialement utilisée (2F-DM22). On note que les dérivées modales du mode ne correspondant pas à l'excitation jouent un rôle néfaste dans la détermination de la dynamique du système. Ce phénomène a aussi été observé sur le cas de l'excitation des diamètres associés au premier mode de flexion. La réduction menée à l'aide du deuxième mode de flexion et de sa dérivée modale donnant un résultat cohérent avec ce qui a pu être obtenu sur la plaque seule, cette base a été retenue pour effectuer la suite de cette étude.

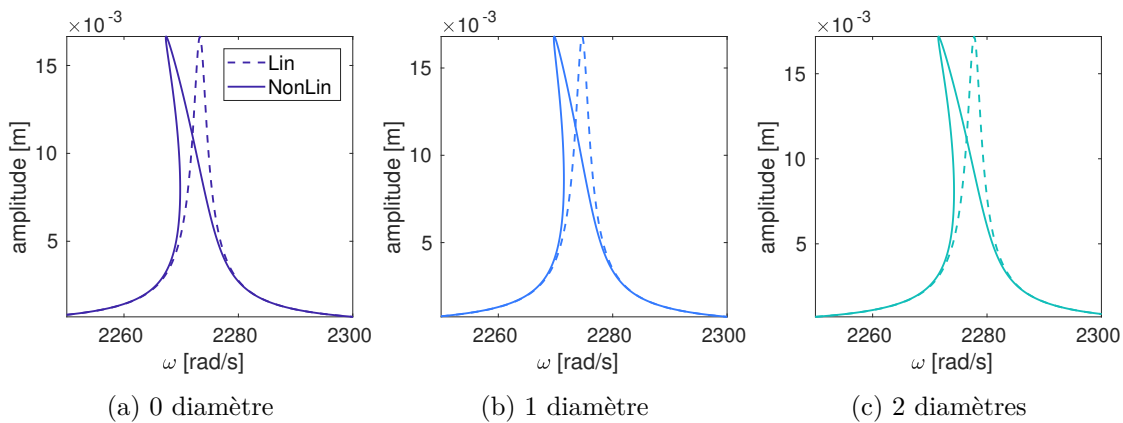


Figure V.21 – Réponse en fréquence des différentes excitations à diamètres ; observation au niveau de la pale 1

L'ajout de cette dérivée modale (calculée avec  $h = 1 \cdot 10^{-4}$  (III.62)), au deuxième mode de flexion ne change pas la précision de la double synthèse modale présentée précédemment. En revanche, leur prise en compte augmente le nombre total d'inconnues du problème pour atteindre 13. Les coefficients STEP seront eux calculés à l'aide des 2 coefficients  $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$  et  $\beta = 5 \cdot 10^{-2}$  (IV.18). Les résultats qui vont être présentés ici concerneront des excitations selon les 3 diamètres mis en jeu sur cette structure, soient 0, 1 et 2. Pour ce qui est de l'excitation à 1 diamètre, seul diamètre dégénéré, l'onde propagative appliquée sera rétrograde.

On s'intéresse dans un premier temps à l'application d'excitations à diamètres pures. Les résultats obtenus dans ce cas sont présentés sur la figure V.21. Dans les 3 cas considérés, les réponses sont très similaires avec un assouplissement global de la structure.

Des excitations à diamètres désaccordées sont ensuite envisagées. Le désaccordage de

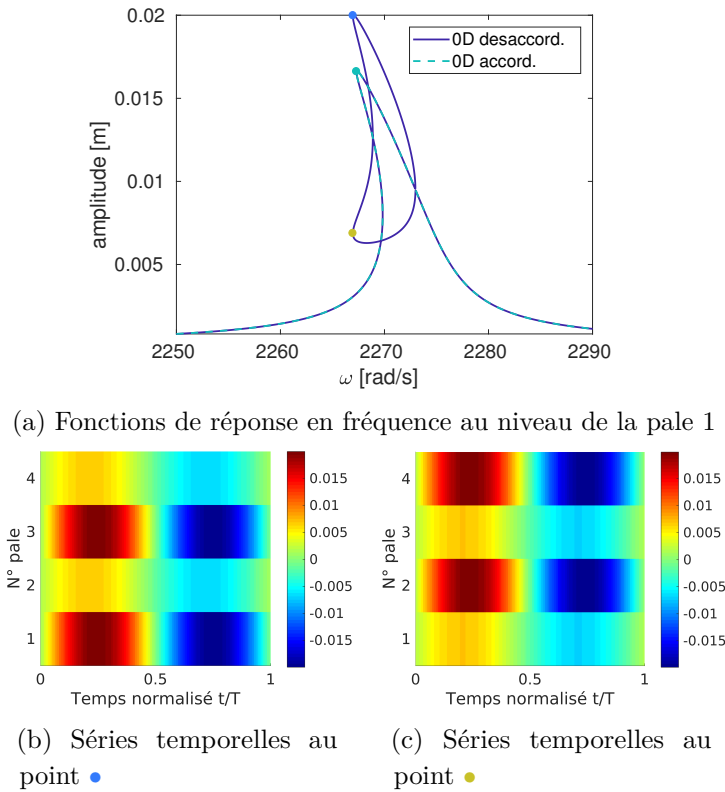


Figure V.22 – Résultats obtenus pour une excitation à 0 diamètre désaccordée

l'excitation appliquée porte sur la pale 1 et est fixé à 0,01 %. Les résultats obtenus dans le cadre d'une excitation à 0 diamètre sont donnés figure V.22a où on peut voir l'apparition d'une poche de solutions associées à un point bifurcation. Celle-ci apparait de manière très nette et l'évolution des déplacements transverses en bout de chaque pale tracés sur les figures V.22b, pour le pic haut de la poche, et V.22c, pour le pic bas, mettent parfaitement en lumière cette bifurcation avec une localisation des amplitudes sur 2 pales dans chaque cas. Un autre phénomène de bifurcation est révélé dans le cas d'une excitation désaccordée à 1 diamètre, comme illustré sur la figure V.23. Celui-ci est moins marqué que le précédent mais montre à nouveau une localisation des déplacements sur 2 pales comme le montre la figure V.23d. Enfin, à titre indicatif, les durées des continuations associées à ces différentes simulations sont fournies dans le tableau V.11. On peut remarquer une nette différence entre les cas avec et sans désaccordage qui provient des solutions bifurquées. Sachant que la durée de détermination de la dérivée modale et des raideurs réduites est de 430 s, cela amène à un temps de résolution total d'environ 20 minutes pour le cas d'une excitation à 0 diamètre désaccordée, ce qui reste raisonnable pour la résolution non-linéaire d'un système initial de taille 101 232.

L'application de la méthode de sous-structuration au cas du fan simplifié à 4 secteurs mène à des résultats cohérents avec les simulations précédentes (poutres d'Euler-Bernoulli ou encore le système cyclique simple du chapitre II). Ces similitudes laissent espérer que la réduction ainsi réalisée permet une approche assez fidèle du système initial et des phénomènes non-linéaires qui y prennent place. Nous proposons maintenant d'appliquer cette méthodologie à un fan composé d'un plus grand nombre de secteurs, 18, plus représentatif d'un composant réel.

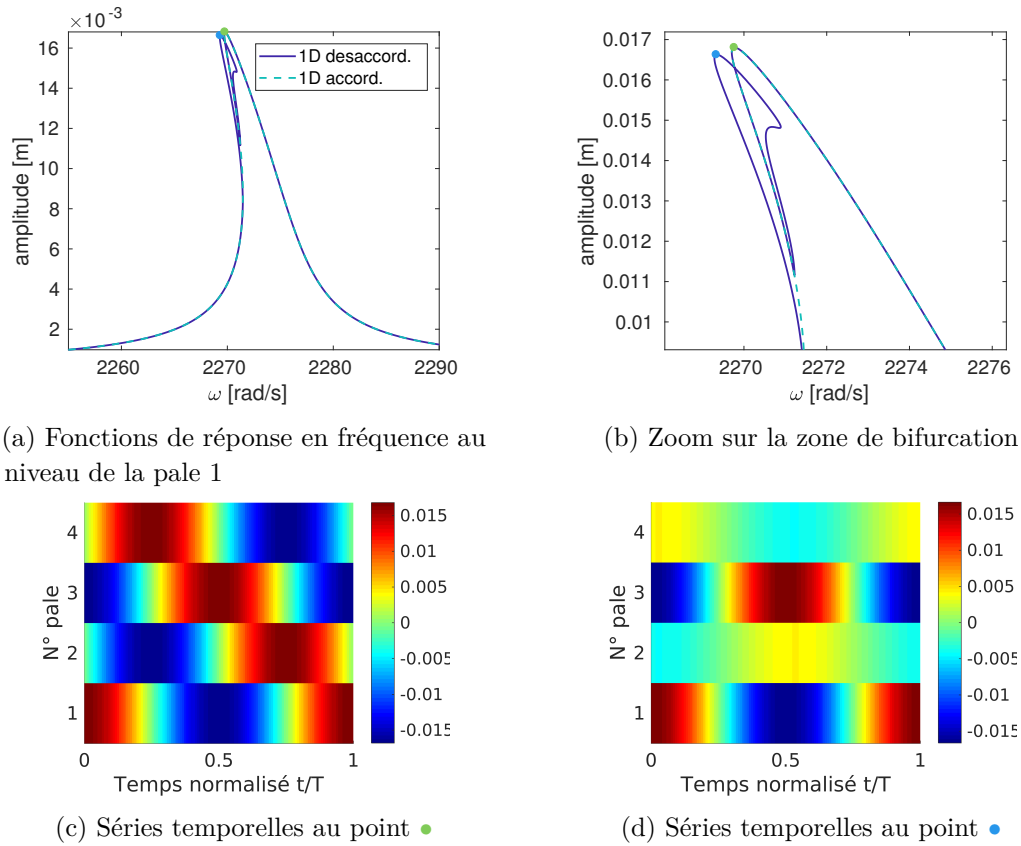


Figure V.23 – Résultats obtenus pour une excitation à 1 diamètre désaccordée

## 3.2 Modèle de fan à 18 secteurs

### 3.2.1 Présentation du modèle

Le modèle qui va désormais être étudié, visible sur la figure V.24a, reprend les dimensions et caractéristiques matériaux (voir tableau V.6) du modèle précédent à la différence que celui-ci comporte maintenant 18 secteurs, représenté sur la figure V.24b. Cela mène à un secteur comportant moins de degrés de liberté, 16 620, mais à une structure complète bien plus riche avec un total de 289 008 inconnues. Les conditions d'encastrement restent les mêmes et seront appliquées sur les nœuds avals du disque.

Le nombre plus important de secteurs amène la structure à présenter un plus grand nombre de modes à diamètres que précédemment, 10 en l'occurrence dont 2 sont non-dégénérés, les modes à 0 et 9 diamètres, les 8 autres étant doubles. L'étude portera à nouveau sur la famille de modes à diamètres du deuxième mode de flexion de la pale. De plus, celle-ci sera menée pour une vitesse de rotation du fan de 5000 rpm, dont le diagramme fréquence/diamètre des 5 premières familles modales est donné sur la figure V.25. De la même manière que pour le cas précédent, il est possible d'observer l'impact, ou non, du disque sur l'évolution des pulsations des modes à diamètres selon que le disque est couplé avec la dynamique de la pale ou non. Cela est notamment le cas pour la famille des modes de flexion hors plan (1E) qui varie particulièrement. Cette famille se trouve être assez proche fréquentiellement de la famille modale du deuxième mode de flexion, et va même

Tableau V.11 – Temps de continuation des différentes simulations

Type d'excitation	Durée [s]
0 diamètre	178,61
0 diamètre désaccordé	569,8
1 diamètre	174,95
1 diamètre désaccordé	392,18
2 diamètres	174,11
2 diamètres désaccordé	191,6

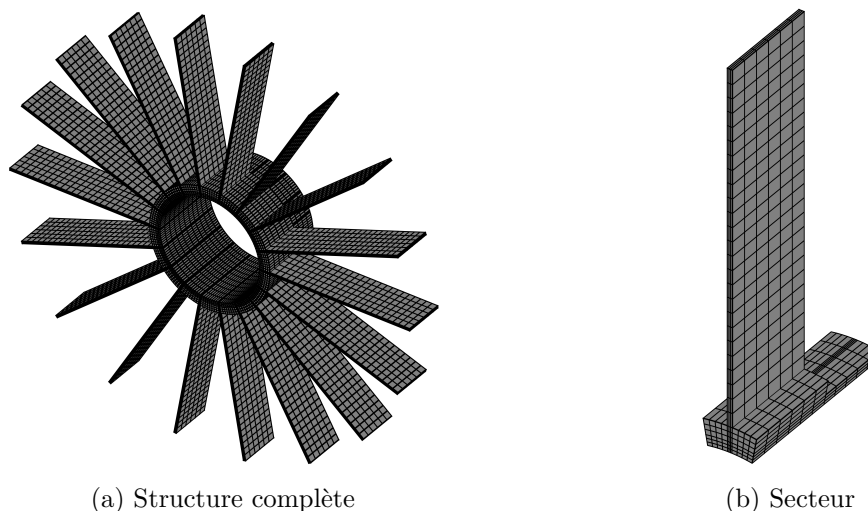


Figure V.24 – Modèle de fan à 18 secteurs

jusqu'à le croiser pour 4 diamètres nodaux.

### 3.2.2 Réduction linéaire

La procédure de réduction par double synthèse modale (3.1.3) est appliquée au cas du fan à 18 secteurs en ne retenant dans un premier temps que le deuxième mode de flexion dans la base de réduction des degrés de liberté internes. L'étape de double synthèse modale est à nouveau indispensable afin de réduire les 9774 degrés de liberté de frontière. L'évolution de l'erreur sur les pulsations des modes à diamètres en fonction du nombre de modes de branche est donné figure V.26. Celle-ci est assez faible même pour un petit nombre de modes de branche retenu. Ayant choisi de nous focaliser sur une excitation à 9 diamètres, et que la présence d'un seul mode de branche permet de garantir une erreur relative de 0,03 %, il a été décidé de retenir cette solution ce qui mène à un système réduit comportant 19 degrés de liberté. Les durées associées aux différentes étapes de cette réduction sont données dans le tableau V.12. Il est intéressant de mettre en parallèle ces durées avec celles obtenues pour le cas à 4 secteurs (tableau V.9) et de remarquer que le traitement du secteur seul est aussi rapide mais que la double synthèse modale est plus longue, le système étant composé de plus de sous-structures et de plus d'inconnues de frontière.

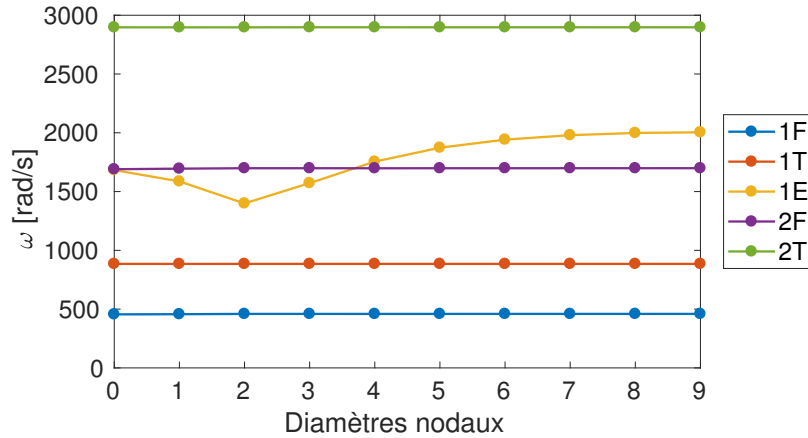


Figure V.25 – Diagramme fréquence/diamètre du fan à 18 secteurs pour une vitesse de rotation  $\Omega = 5000\text{rpm}$

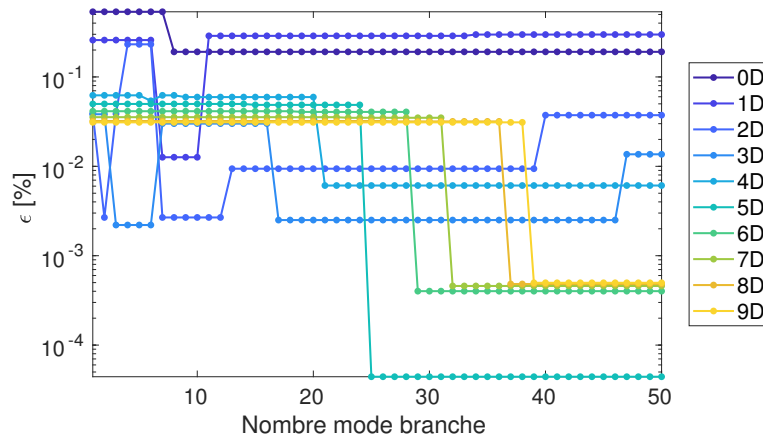


Figure V.26 – Évolution de l'erreur relative des pulsations du système réduit par double synthèse modale en fonction du nombre de modes de branche retenus

### 3.2.3 Résolution non-linéaire

On poursuit l'application de la méthode de réduction en déterminant les grandeurs non-linéaires du système (3.1.4). On détermine dans un premier temps la dérivée modale du deuxième mode de flexion ( $h = 1 \cdot 10^{-4}$  (III.62)). Cette dérivée modale est concaténée au deuxième modes de flexion dans la base de réduction des degrés de liberté internes, ce qui élève le nombre d'inconnues total du problème, après double synthèse modale, à 37 degrés de liberté. Les raideurs réduites de la base à frontières encastées ainsi formée sont ensuite déterminées par méthode STEP à l'aide des coefficients  $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$  et  $\beta = 5 \cdot 10^{-2}$  (IV.18). A noter que ces 2 étapes nécessitent 262 s afin d'être réalisées.

On s'intéresse maintenant à la réponse forcée de notre système réduit. Pour cela, un amortissement de 0,05 % est appliqué sur le mode à 0 diamètre de la famille du deuxième mode de flexion au travers de la matrice de masse ( $\alpha = 1,699$  (III.43)). L'effort sera appliqué selon un schéma à 9 diamètres avec une amplitude de 100 N. Le résultat obtenu est donné figure V.27. La fonction de réponse en fréquence, tracée sur la figure V.27a, est très similaire à celle obtenue sur le modèle à 4 secteurs avec un effet assouplissant global.

Tableau V.12 – Durées des différentes étapes de la double synthèse modale

	Durée [s]
Détermination et extraction des matrices et vecteurs propres (SAMCEF) Craig-Bampton et double synthèse modale (MATLAB)	88,44 155,89
Totale	244,33

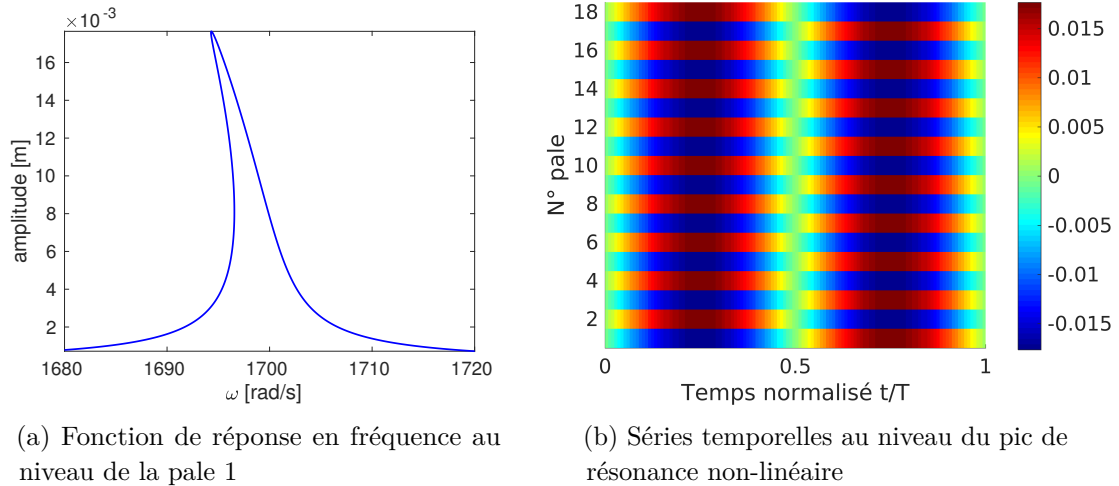


Figure V.27 – Résultats obtenus pour une excitation à 9 diamètres

La caractéristique de l'onde à 9 diamètres appliquée à la structure se retrouve bien dans le schéma de réponse des différentes pales comme cela est visible sur la figure V.27b.

### 3.2.4 Étude du cas désaccordé du fan

Le désaccordage des roues aubagées est une problématique qui a suscité de nombreuses recherches depuis l'avènement des turbomachines, parmi ces travaux fondateurs on peut citer ceux de Whitehead [125], Tobias [115], Ewins [26], ou encore une revue complète de la problématique par Castanier [16]. En effet, quand la théorie des structures cycliques suppose une perfection de la symétrie, les roues réelles sont imparfaites par nature du fait des in-homogénéités dans les matériaux ou des différences de géométrie dues à l'usage. Cela peut amener à l'apparition de localisations fortes de l'amplitude sur certaines pales, pouvant entraîner la ruine prématurée de ces dernières.

Le désaccordage envisagé ici est de type intentionnel et porte sur l'épaisseur de la pale. On va ainsi construire un fan à 18 secteurs à partir de 3 secteurs ayant des pales dont l'épaisseur varie de 1 % par rapport à la pale de référence :

- secteur A : pale d'épaisseur +1 % ;
- secteur B : pale d'épaisseur -1 % ;
- secteur C : pale de référence.

L'agencement de ces secteurs sur la structure est donné sur la figure V.28 avec un schéma de désaccordage de type ABC-ABC. La structure ainsi désaccordée perd ses propriétés de symétries et les caractéristiques qui y sont liées, comme les modes à diamètres. Si par



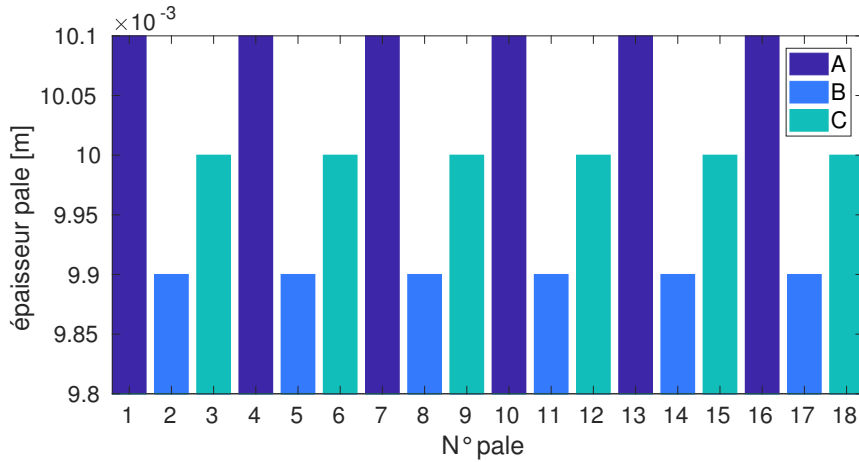
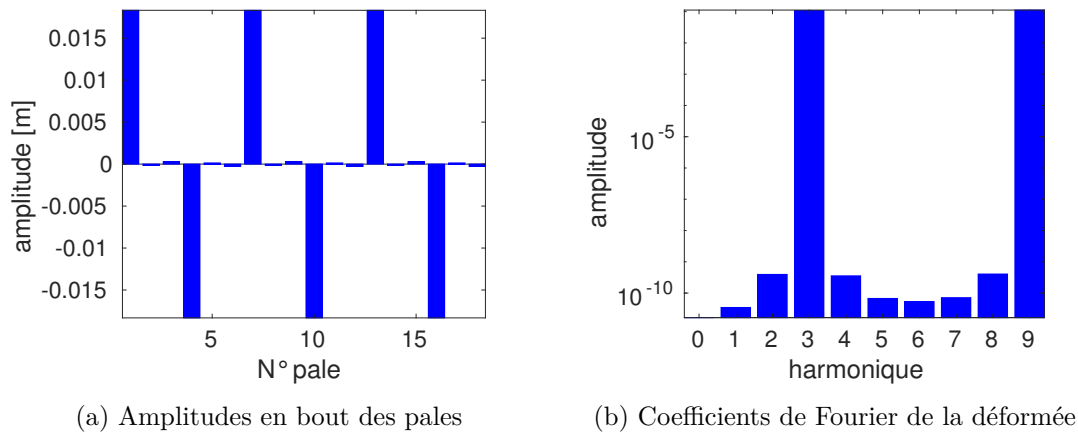


Figure V.28 – Schéma de désaccordage : épaisseurs des différentes pales

exemple nous regardons le mode représenté sur la figure V.29a, ce dernier est composé des harmoniques spatiaux 9 et 3, comme cela est visible sur la figure V.29b, et ne peut donc s'apparenter à aucun mode du système accordé.



(a) Amplitudes en bout des pales

(b) Coefficients de Fourier de la déformée

Figure V.29 – Exemple de mode du fan désaccordé

La procédure de réduction présentée précédemment reste toujours valable mais va nécessiter d'être appliquée à chacun des 3 secteurs. Cela ne pose pas de problème en terme de temps de résolution, comme le montre le tableau V.13 avec des durées similaires à celles obtenues sur le cas accordé (voir tableau V.12), car les 3 secteurs peuvent être traités simultanément via une résolution parallèle. A nouveau, la base de réduction des degrés de liberté internes de chaque secteur sera composée du deuxième mode de flexion et de sa dérivée modale. Cette dernière, ainsi que les raideurs réduites, seront déterminées à l'aide des mêmes coefficients que le cas accordé. Enfin, le nombre de mode de branche retenu sera à nouveau de 1.

Les résultats obtenus sont donnés figure V.30. Une première remarque à propos de ces résultats peut être faite sur la réponse linéaire du système où on voit bien se dessiner les 3 pics de résonances associés aux 3 groupes de pales. Le décalage des pics induit des localisations d'amplitudes sur les différents groupes de pales, comme le montrent les figures V.30c-V.30e-V.30g pour les groupes A, B et C respectivement.

Tableau V.13 – Durées des différentes étapes de la réduction du fan désaccordé

	Durée [s]
Détermination et extraction des matrices et vecteurs propres (SAMCEF)	106,54
Détermination de $\partial\phi_{2F2F}$ et méthode STEP (SAMCEF+MATLAB)	413,82
Craig-Bampton et double synthèse modale (MATLAB)	140,99
Totale	661,35

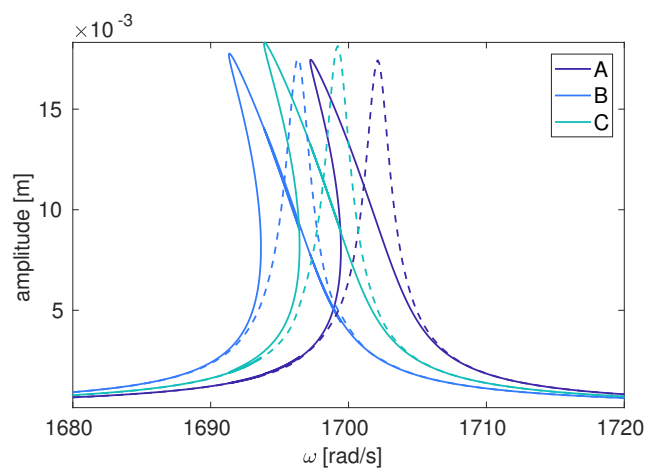
Concernant la réponse non-linéaire du système, en traits pleins sur la figure V.30a, celle-ci respecte aussi la répartition des pales selon les 3 groupes avec des pics distincts assouplissants de manière similaire. La caractéristique de localisation est en revanche moins nette comme le montrent les figures V.30b-V.30d-V.30f. En effet, en raison de la courbure des pics, ceux-ci se chevauchent fréquemment ce qui mène à des réponses assez différentes selon les pics. Concernant le pic de plus basse fréquence, le B, n'ayant aucun voisin de plus basse fréquence, celui-ci affiche une localisation similaire au cas linéaire sur les pale de ce groupe, comme cela est visible sur les figures V.30d et V.30e. Le pic intermédiaire, le C, recouvre quand à lui le B et mène à avoir des amplitudes marquées selon ces 2 groupes, comme illustré sur la figure V.30f. Le pic de plus haute fréquence, groupe A, recouvrant les 2 premiers ne représente en revanche pas de localisation marquée comme le montre la figure V.30b où tous les groupes de pales vibrent à des amplitudes différentes mais non-négligeables.

## Bilan du chapitre

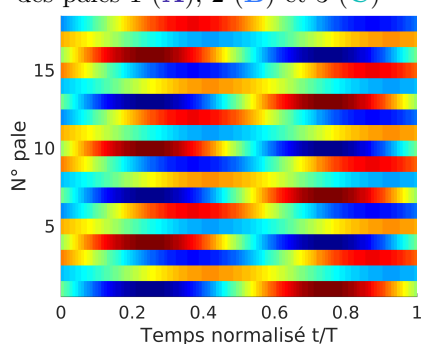
La réduction des structures comportant des non-linéarités géométriques a été abordée sous l'angle de la sous-structuration afin de l'étendre à un plus grand nombre de cas d'application. Les deux grandes familles de synthèses modales ont été présentées avec d'une part la méthode de Craig-Bampton à interfaces fixes, puis celle de MacNeal à interfaces libres. La méthode de Craig-Bampton a par la suite été retenue, combinée avec une méthode de double synthèse modale, permettant une réduction du nombre de degrés de liberté des d'interfaces.

La seconde partie du chapitre a été dédiée à la mise en place d'une méthode de Craig-Bampton adaptée à la prise en compte des non-linéarités géométriques. Cette méthodologie, basée sur une hypothèse forte de linéarité des frontières, a montré de très bons résultats sur un exemple simple de structure modélisée à l'aide de poutres d'Euler-Bernoulli. L'application sur un cas plus complexe d'une géométrie volumique a cependant montré les limites de la méthode. En effet, le traitement du secteur entier comme sous-structure mène à des comportements divergents. Cela peut s'expliquer par la différence de caractéristiques entre le disque et la pale, notamment en terme de comportement non-linéaire, pouvant mener à la détermination de raideurs réduites non-linéaires erronées. Néanmoins, les résultats obtenus avec des bases de réduction assez simples, que ce soit sur le modèle simple à 4 secteurs ou complexe à 18 secteurs et désaccordé, montrent des résultats en accord avec ce qui a pu être obtenu au chapitre précédent sur la plaque en terme d'intensité de la non-linéarité. De plus, des comportements similaires à ce qui peut être observé sur des systèmes cycliques simples, comme les phénomènes de localisations en fin du chapitre II, ont pu être mis en

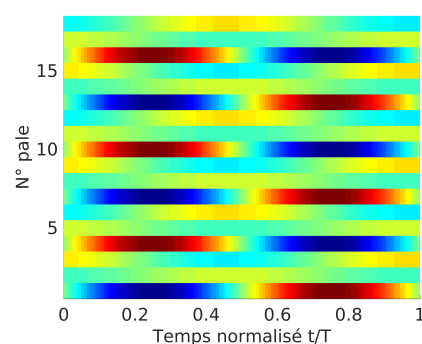
lumière ce qui montre la capacité de cette méthode à retranscrire certaines dynamiques spécifiques aux systèmes cycliques dans un temps extrêmement raisonnable par rapport à la taille initiale du système.



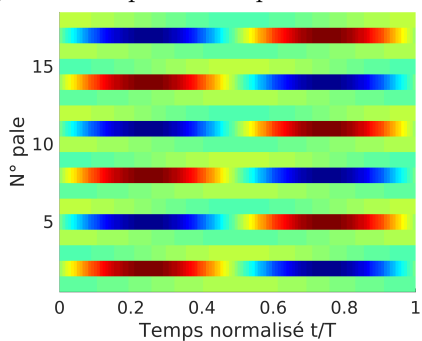
(a) Fonctions de réponse en fréquence non-linéaires (—) et linéaires (- -) au niveau des pales 1 (A), 2 (B) et 3 (C)



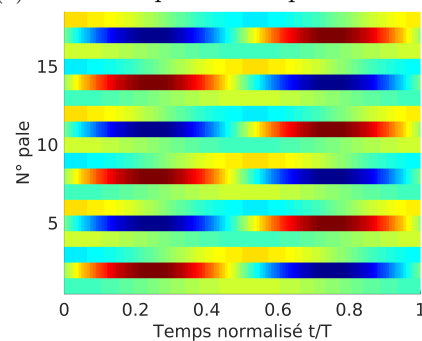
(b) Séries temporelles au pic A non-linéaire



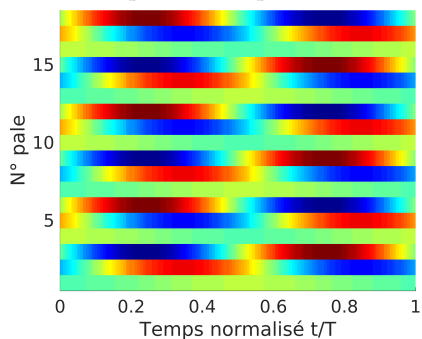
(c) Séries temporelles au pic A linéaire



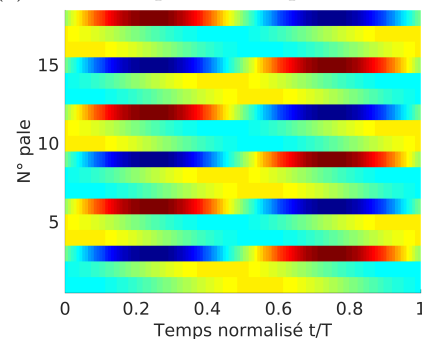
(d) Séries temporelles au pic B non-linéaire



(e) Séries temporelles au pic B linéaire



(f) Séries temporelles au pic C non-linéaire



(g) Séries temporelles au pic C linéaire

Figure V.30 – Résultats obtenus sur le fan à 18 secteurs désaccordé pour une excitation à 9 diamètres



# Conclusion

Nous présentons ici les conclusions générales des travaux réalisés dans ce mémoire concernant la réduction des structures comportant des non-linéarités géométriques. Différentes perspectives à ces travaux seront ensuite proposées.

## Résultats

Le premier axe d'étude de ces travaux a porté sur la réduction des systèmes comportant des non-linéarités géométriques. Dans cette optique, la mise en équation d'un solide élastique en rotation a été proposée au chapitre I prenant en compte les non-linéarités issues des grands déplacements au travers du tenseur de Green-Lagrange complet. Ceci a conduit à l'apparition de termes quadratiques et cubiques des déplacements. Ces termes non-linéaires sont impliqués dans le calcul de l'état préchargé de la structure en rotation, mais aussi dans la réponse dynamique. C'est principalement ce dernier aspect qui nous a intéressé dans ces travaux de thèse.

Afin de résoudre les équations non-linéaires associées à un tel système, nous avons choisi d'utiliser une approche fréquentielle, réputée efficace dans la recherche des solutions périodiques non-linéaires des structures. Cette méthode, connue sous le nom d'équilibrage harmonique, a été présentée au chapitre II et démontre des capacités extrêmement intéressantes notamment dans son aptitude à traiter indifféremment une grande variété de non-linéarités lorsqu'elle est utilisée de paire avec une méthode d'alternance temps/fréquence. Cependant, celle-ci montre certaines limitations notamment du fait de l'augmentation de la taille du système à résoudre en fonction du nombre d'harmoniques retenus dans la décomposition de la solution.

Afin de résoudre cette difficulté, nous avons choisi de développer une stratégie de réduction qui est abordée au chapitre III avec la présentation de la méthode de Galerkin. Celle-ci propose de résoudre le système en restreignant sa solution à un sous-espace de dimension bien inférieure à celle de l'espace initial des solutions. Des modifications ont été apportées à cette méthode afin de la rendre apte à la prise en compte des effets géométriques. D'une part, il a fallu envisager une détermination *a priori* des termes réduits non-linéaires au moyen de l'approche STEP afin d'éviter la reconstruction chronophage de ces derniers. Ensuite, des bases de réduction dédiées à la prise en compte des effets géométriques ont été présentées avec les dérivées modales et les modes compagnons. L'application de ces différents outils a été déployée sur un modèle simple de poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastrée non-linéaire. Les résultats obtenus sur les systèmes réduits ont montré une excellente précision et des temps de résolution très intéressants (de l'ordre de 95%).

L'application de ces méthodes au cas des structures volumiques a été envisagée au chapitre IV. Dans un premier temps, des éléments hexaédriques non-linéaires ont été proposés afin de pouvoir établir des résultats de références sur les modèles volumiques. Ceux-ci ont pu être validés d'un point de vue non-linéaire en statique avec le logiciel SAMCEF sur des exemples de poutre bi-encastree et encastree-libre sous chargement centrifuge. Des vérifications de la dynamique non-linéaire ont été faites en comparant les résultats obtenus sur une poutre bi-encastree volumique et une modélisation d'Euler-Bernoulli non-linéaire utilisée précédemment. Dans un second temps, les méthodes de réduction ont été appliquées aux modèles volumiques. Tout d'abord sur une poutre bi-encastree, ce qui a permis de vérifier à nouveau les excellents résultats obtenus. Ensuite, le cas de la poutre encastree-libre en rotation a été abordée. Une adaptation de la méthode STEP à la prise en compte des effets centrifuges a été proposée et donne, comme dans le cas bi-encastree, d'excellents résultats tant en terme de précision que de temps de résolution. En parallèle de cela, la réduction sur ces modèles a aussi été opérée à l'aide du logiciel SAMCEF, cela de manière totalement non-intrusive, qui conduit à des résultats de nouveau extrêmement satisfaisants. Le chapitre se clos sur l'application des méthodes à une plaque volumique encastree-libre en rotation discrétisée de manière fine à l'aide du logiciel SAMCEF, plus proche d'une géométrie de pale qu'une simple poutre. Les résultats obtenus sur ce modèle sont cohérents avec ceux de la poutre encastree-libre.

Le second axe d'étude de ces travaux a concerné l'application de ces méthodes au cas spécifique des structures cycliques. Ceux-ci sont présentés au chapitre V avec le choix d'une méthode de synthèse modale à interfaces fixes associée à une double synthèse modale afin de réduire les degrés de liberté de frontières. Une adaptation de cette méthode a été proposée afin de prendre en compte les effets non-linéaires à l'aide des différents outils et procédures utilisés au cours du mémoire.

L'application a d'abord été menée sur un modèle simple de poutres d'Euler-Bernoulli couplées. Cela a permis une confrontation des résultats de la méthode proposée à des résolutions sur le système complet traité par équilibrage harmonique. Les résultats obtenus sont excellents et permettent de valider la stratégie mise en place sur cet exemple. L'application de la méthode à une structure volumique de type fan simplifié conduit à des résultats cohérents au regard des comportements obtenus pour l'étude d'une plaque seule, et permettent de retrouver des phénoménologies propres aux structures cycliques non-linéaires avec l'apparition de poches de solution associées à des points de bifurcation.

Enfin, la problématique du désaccordage a pu être abordée à l'aide de cette méthode à la fin du chapitre V de façon très directe. Cela a permis de mettre en lumière la complexité des comportements mis en jeu par le couplage de cette spécificité des roues aubagées avec les effets des grands déplacements.

## Perspectives

Les travaux réalisés durant ce doctorat ouvrent la voie à des perspectives, que ce soit de manière à améliorer les méthodes mises en place ou à étendre leur champ d'application,

que nous présentons ici.

En ce qui concerne les améliorations à apporter aux travaux présentés, une première perspective concerne la résolution associée aux modèles volumiques complets. En effet, ceux-ci étant assez lourds à résoudre à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique, une piste envisageable serait de lui adjoindre une méthode de sélection d'harmonique comme celle proposée par Grolet [37, 41]. Cela permettrait de diminuer assez significativement le nombre d'inconnues du problème car l'on sait que toutes les variables ne participent pas de la même manière au comportement dynamique non-linéaire.

Dans la même optique, il serait intéressant de procéder à un tri des termes réduits non-linéaires. En effet, il existe des relations liants les coefficients réduits entre eux du fait de la symétrie de la jacobienne des efforts non-linéaires, comme le montre Muravyov [81] ainsi que l'annexe B de ce mémoire. L'utilisation de ces relations permettrait d'une part de vérifier la cohérence des coefficients déterminés, et d'en diminuer le nombre à conserver. Il serait aussi intéressant de réaliser, comme le font notamment Wang [123] et Kim [63] dans le cas des structures de type cantilever, un *nettoyage* de ces termes réduits afin d'éviter toute instabilité induite par ces derniers.

Une piste d'amélioration possible concernant la méthode de sous-structuration proposée serait de modifier le découpage du système cyclique afin de définir une délimitation optimale des zones linéaires/non-linéaires. Une stratégie pourrait être, à partir de chargements statiques des modes, de définir des critères en énergie de déformation afin de déterminer ces zones. De plus, afin de lever l'hypothèse de frontière linéaire, il serait possible d'adjoindre à la base des modes de branche leurs dérivées modales associées.

Une perspective intéressante serait de s'appuyer sur les modèles réduits développés afin de déterminer les modes non-linéaires associés. Ceux-ci permettraient, notamment dans le cas des structures cycliques, de déterminer les multiples bifurcations inhérentes à ce type de systèmes. De la même manière, dans le cas de systèmes réduits de taille raisonnable, il serait intéressant d'appliquer les méthodes de recherche exhaustive de solutions proposées par Grolet [38, 39] à de tels systèmes, notamment le fan à 4 secteurs.

Enfin, après avoir étudié une plaque plane, il serait intéressant d'aborder le cas de la plaque vrillée, plus proche d'une géométrie de pale réelle. Le vrillage couplant les deux directions transverses, la dynamique non-linéaire d'une telle structure doit être considérablement enrichie par rapport au simple cas plan, et sa réduction devrait nécessiter la prise en compte d'autres familles de modes tels que ceux de flexions hors plan voir de torsions.





# Références

- [1] A. C. ANTOULAS et D. C. SORENSSEN. “Approximation of large-scale dynamical systems : An overview”. In : *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 11.5 (2001), p. 1093-1121 (cf. p. 86).
- [2] P. APIWATTANALUNGGARN, S. W. SHAW et C. PIERRE. “Component Mode Synthesis Using Nonlinear Normal Modes”. In : *Nonlinear Dynamics* 41.1-3 (2005), p. 17-46. DOI : [10.1007/s11071-005-2791-2](https://doi.org/10.1007/s11071-005-2791-2) (cf. p. 2, 138, 139).
- [3] M. C. C. BAMPION et R. R. CRAIG Jr. “Coupling of substructures for dynamic analyses.” In : *AIAA Journal* 6.7 (1968), p. 1313-1319. DOI : [10.2514/3.4741](https://doi.org/10.2514/3.4741) (cf. p. 132, 133).
- [4] A. BATAILLY, M. LEGRAND, P. CARTRAUD et C. PIERRE. “Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts”. In : *Journal of Sound and Vibration* 329.26 (déc. 2010), p. 5546-5562. DOI : [10.1016/j.jsv.2010.07.018](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.07.018) (cf. p. 23).
- [5] K.-J. BATHE. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1995 (cf. p. 2, 62).
- [6] K.-J. BATHE, E. RAMM et E. L. WILSON. “Finite element formulations for large deformation dynamic analysis”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9.2 (1975), p. 353-386. DOI : [10.1002/nme.1620090207](https://doi.org/10.1002/nme.1620090207) (cf. p. 2).
- [7] J.-L. BATOZ et G. DHATT. *Modélisation des structures par éléments finis. Volume 2 : Poutres et plaques*. Sous la dir. d’HERMES. Hermes science, 1990 (cf. p. 68, 190).
- [8] J.-L. BATOZ et G. DHATT. *Modélisation des structures par éléments finis. Volume 3 : Coques*. Sous la dir. d’HERMES. Hermes science, 1992 (cf. p. 190).
- [9] M. BERGMANN. “Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d’un cylindre circulaire.” thèse de doctorat. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004 (cf. p. 86).
- [10] S. BESSET. “Modélisation du comportement vibro-acoustique des structures”. Habilitation à Diriger des Recherches. École Centrale de Lyon – Université Claude Bernard Lyon 1, juin 2015 (cf. p. 138).
- [11] S. BESSET. “Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l’aide d’une synthèse modale généralisée”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2006 (cf. p. 132).
- [12] N. N. BOGOLIOBOV et Y. A. MITROPOLSKIY. *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations*. Gordon et Breach Science Publishers, 1961 (cf. p. 36).

- [13] N. BOUHADDI et R. FILLOD. “A method for selecting master DOF in dynamic substructuring using the Guyan condensation method”. In : *Computers & Structures* 45.5 (1992), p. 941 -946. DOI : [10.1016/0045-7949\(92\)90052-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90052-2) (cf. p. 137).
- [14] F. BOURBITA. “Comportement en fatigue anisotherme des composites unidirectionnels à matrice titane renforcée par des fibres de carbure de silicium”. thèse de doctorat. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, déc. 2011 (cf. p. 27).
- [15] T. CAMERON et J. GRIFFIN. “An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems”. In : *Journal of Applied Mechanics* 56.1 (1989), p. 149. DOI : [10.1115/1.3176036](https://doi.org/10.1115/1.3176036) (cf. p. 38).
- [16] M. P. CASTANIER et C. PIERRE. “Modeling and Analysis of Mistuned Bladed Disk Vibration : Current Status and Emerging Directions”. In : *Journal of Propulsion and Power* 22.2 (2006), p. 384-396. DOI : [10.2514/1.16345](https://doi.org/10.2514/1.16345) (cf. p. 161).
- [17] Y.-W. CHANG, X. WANG, E. CAPIEZ-LERNOUT, M. P. MIGNOLET et C. SOIZE. “Reduced order modelling for the nonlinear geometric response of some curved structures”. In : *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, IFASD 2011*. Sous la dir. d’AAAF-AIAA. Paris, France : AAAF-AIAA, juin 2011, p. 1-19 (cf. p. 67, 82, 83).
- [18] D. CHARLEUX. “Etude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, mar. 2006 (cf. p. 19).
- [19] Y. K. CHEUNG, S. H. CHEN et S. L. LAU. “Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems”. In : *Journal of Sound and Vibration* 140.2 (1990), p. 273 -286. DOI : [10.1016/0022-460X\(90\)90528-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90528-8) (cf. p. 41).
- [20] M. CLAEYS, J.-J. SINOÛ, J.-P. LAMBELIN et B. ALCOVERRO. “Multi-harmonic measurements and numerical simulations of nonlinear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions”. In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19.12 (2014), p. 4196-4212. DOI : [10.1016/j.cnsns.2014.04.008](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.04.008) (cf. p. 68).
- [21] M. CONDON et R. IVANOV. “Krylov subspaces from bilinear representations of nonlinear systems”. In : *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 26.2 (2007). Sous la dir. de R. MARTONE, p. 399-406. DOI : [10.1108/03321640710727755](https://doi.org/10.1108/03321640710727755) (cf. p. 64).
- [22] N. COSME. “Modélisation d’un moteur complet en perte d’aube en dynamique rapide”. thèse de doctorat. École Centrale de Nantes – Université de Nantes, mai 2004 (cf. p. 22).
- [23] J.-P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble sciences, ISSN 0767-371X. Les Ulis - EDP Sciences, 2016 (cf. p. 33).
- [24] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS. *Méthode des éléments finis*. Sous la dir. de LAVOISIER. Hermes Science Publications, 2005 (cf. p. 62).
- [25] J. R. DORMAND et P. J. PRINCE. “A family of embedded Runge-Kutta formulae”. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (1980), p. 19 -26. DOI : [10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3) (cf. p. 34).

- [26] D. J. EWINS. “The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks”. In : *Journal of Sound and Vibration* 9.1 (1969), p. 65 -79. DOI : [10.1016/0022-460X\(69\)90264-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(69)90264-8) (cf. p. [161](#)).
- [27] C. FARHAT et D. AMSALLEM. *Projection-Based Model Order Reduction*. Stanford University (cf. p. [64](#)).
- [28] J.-P. FERTE. “Assemblage métallurgique dans la construction des turboréacteurs”. In : *Techniques de l'ingénieur Moteurs et matériaux pour structures aéronautiques* (2006) (cf. p. [27](#)).
- [29] R. FLETCHER. *Practical methods of optimization*. Wiley, 1987 (cf. p. [38](#)).
- [30] F. GEORGIADES, M. PEETERS, G. KERSCHEN, J.-C. GOLINVAL et M. RUZZENE. “Modal Analysis of a Nonlinear Periodic Structure with Cyclic Symmetry”. In : *AIAA Journal* 47.4 (2009), p. 1014-1025. DOI : [10.2514/1.40461](https://doi.org/10.2514/1.40461) (cf. p. [35](#), [36](#), [48](#), [50](#)).
- [31] F. GEORGIADES, M. PEETERS, G. KERSCHEN, J.-C. GOLINVAL et M. RUZZENE. “Nonlinear Modal Analysis and Energy Localization in a Bladed Disk Assembly”. In : *Volume 5 : Structures and Dynamics, Parts A and B*. ASME, 2008. DOI : [10.1115/gt2008-51388](https://doi.org/10.1115/gt2008-51388) (cf. p. [36](#), [50](#)).
- [32] M. GÉRADIN et D. RIXEN. *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures*. Sous la dir. de MASSON. Elsevier, 1993 (cf. p. [32](#), [34](#), [134](#)).
- [33] C. GIBERT. “Fitting Measured Frequency Response Using Non-Linear Modes”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 17.1 (2003), p. 211 -218. DOI : [10.1006/mssp.2002.1562](https://doi.org/10.1006/mssp.2002.1562) (cf. p. [50](#)).
- [34] R. J. GILMORE et M. B. STEER. “Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance – A review of the art. Part I. Introductory concepts”. In : *International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering* 1.1 (1991), p. 22-37. DOI : [10.1002/mmce.4570010104](https://doi.org/10.1002/mmce.4570010104) (cf. p. [36](#)).
- [35] T. GMÜR. *Dynamique des structures. Analyse modale numérique*. Sous la dir. de P. P. et UNIVERSITAIRES ROMANDES. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2012 (cf. p. [11](#), [14](#), [32](#)).
- [36] T. GMÜR. *Méthode des éléments finis en mécanique des structures*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2000 (cf. p. [62](#), [191](#), [195](#)).
- [37] A. GROLET. “Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, déc. 2013 (cf. p. [2](#), [36](#), [42](#), [58](#), [63](#), [68](#), [115](#), [169](#)).
- [38] A. GROLET, P. MALBOS et F. THOUVEREZ. “Eigenvalue Method with Symmetry and Vibration Analysis of Cyclic Structures”. In : *Computer Algebra in Scientific Computing*. Sous la dir. de V. P. GERDT, W. KOEPF, W. M. SEILER et E. V. VOROZHTSOV. Cham : Springer International Publishing, 2014, p. 121-137 (cf. p. [58](#), [169](#)).
- [39] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Computing multiple periodic solutions of nonlinear vibration problems using the harmonic balance method and Groebner bases”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 52-53 (2015), p. 529-547. DOI : [10.1016/j.ymsp.2014.07.015](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.07.015) (cf. p. [58](#), [169](#)).

- [40] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry : Application to a simplified model”. In : *Journal of Sound and Vibration* 331.12 (2012), p. 2911-2928. DOI : [10.1016/j.jsv.2012.02.008](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.02.008) (cf. p. [52](#), [58](#)).
- [41] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “On a new harmonic selection technique for harmonic balance method”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 30 (2012), p. 43-60. DOI : [10.1016/j.ymsp.2012.01.024](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2012.01.024) (cf. p. [38](#), [169](#)).
- [42] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Vibration of mechanical systems with geometric nonlinearities : Solving Harmonic Balance Equations with Groebner basis and continuations methods”. In : *11e colloque national en calcul des structures*. CSMA. Giens, France, mai 2013 (cf. p. [58](#)).
- [43] M. GRUIN. “Dynamique non-linéaire d’une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d’un turboréacteur”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, fév. 2012 (cf. p. [40-42](#)).
- [44] M. GUSKOV. “Dynamique non-linéaire des systèmes multirotors. Etudes numérique et expérimentale”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, juil. 2007 (cf. p. [46](#), [56](#)).
- [45] K. C. HALL, R. E. KIELB et J. P. THOMAS. *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines*. Sous la dir. de SPRINGER. Springer, 2006 (cf. p. [23](#)).
- [46] P. C. HAMMER, O. J. MARLOWE et A. H. STROUD. “Numerical Integration over Simplexes and Cones”. In : *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* 10 (1956), p. 130-137 (cf. p. [195](#)).
- [47] S. HERTZ-CLEMENS. “Etude d’un composite aéronautique à matrice métallique sous chargements de fatigue : sollicitation mécano-thermique et propagation de fissures”. thèse de doctorat. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, mai 2002 (cf. p. [27](#), [28](#)).
- [48] B. F. HILDEBRAND. *Introduction to Numerical Analysis : 2Nd Edition*. Dover Publications, Inc., 1987 (cf. p. [194](#)).
- [49] S. N. HOU. “Review of modal synthesis techniques and a new approach”. In : *The Shock and Vibration Bulletin* 40 (sept. 1969), p. 25-39 (cf. p. [132](#)).
- [50] L. HUMBERT. “Recalage des modèles éléments finis à partir de mesures vibratoires”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, oct. 1999 (cf. p. [79](#)).
- [51] W. C. HURTY. “Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes”. In : *AIAA Journal* 3 (avr. 1965), p. 678-685 (cf. p. [132](#)).
- [52] S. R. IDELSOHN et A. CARDONA. “A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49.3 (1985), p. 253-279. DOI : [10.1016/0045-7825\(85\)90125-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90125-2) (cf. p. [2](#), [77](#)).
- [53] S. R. IDELSOHN et A. CARDONA. “Recent advances in reduction methods in non linear structural dynamics”. In : *Proceedings of the Second International Conference on : Recent Advances in Structural dynamics*. T. 2. Jan. 1984, p. 475-482 (cf. p. [80](#)).

- [54] S. JAIN, P. TISO, J. B. RUTZMOSER et D. J. RIXEN. “A quadratic manifold for model order reduction of nonlinear structural dynamics”. In : *Computers & Structures* 188 (2017), p. 80-94. DOI : [10.1016/j.compstruc.2017.04.005](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.04.005) (cf. p. 78, 79, 81).
- [55] L. JÉZÉQUEL. “Synthèse modale : théorie et extensions”. thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1, 1985 (cf. p. 132).
- [56] L. JÉZÉQUEL et C.-H. LAMARQUE. “Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory”. In : *Journal of Sound and Vibration* 149.3 (1991), p. 429-459. DOI : [10.1016/0022-460X\(91\)90446-Q](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90446-Q) (cf. p. 50).
- [57] D. JIANG, C. PIERRE et S. W. SHAW. “The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance”. In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40.5 (2005), p. 729-746. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.010](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.010) (cf. p. 50).
- [58] C. JOANNIN. “Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires - Application à la dynamique des roues aubagées”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, avr. 2017 (cf. p. 2, 36, 47, 50, 51, 134, 138).
- [59] C. JOANNIN, F. THOUVEREZ et B. CHOUVION. “Reduced-order modelling using nonlinear modes and triple nonlinear modal synthesis”. In : *Computers & Structures* 203 (2018), p. 18-33. DOI : [10.1016/j.compstruc.2018.05.005](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.05.005) (cf. p. 2, 138).
- [60] C. JOANNIN, B. CHOUVION, F. THOUVEREZ, J.-P. OUSTY et M. Mbaye. “A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 83 (2017), p. 75-92. DOI : [10.1016/j.ymsp.2016.05.044](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.05.044) (cf. p. 138).
- [61] G. KERSCHEN, M. PEETERS, J.-C. GOLINVAL et A. F. VAKAKIS. “Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 23.1 (2009), p. 170-194. DOI : [10.1016/j.ymsp.2008.04.002](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.04.002) (cf. p. 50).
- [62] G. KERSCHEN, J.-C. GOLINVAL, A. F. VAKAKIS et L. A. BERGMAN. “The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems : An Overview”. In : *Nonlinear Dynamics* 41.1-3 (2005), p. 147-169. DOI : [10.1007/s11071-005-2803-2](https://doi.org/10.1007/s11071-005-2803-2) (cf. p. 2, 88).
- [63] K. KIM, V. KHANNA, X. WANG et M. P. MIGNOLET. “Nonlinear Reduced Order Modeling of Flat Cantilevered Structures”. In : *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Co-located Conferences*. Palm Springs, California, United States, mai 2009, p. 1-10 (cf. p. 82, 169).
- [64] M. KRACK, L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK. “A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems”. In : *Journal of Sound and Vibration* 332.25 (2013), p. 6798-6814. DOI : [10.1016/j.jsv.2013.08.009](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.08.009) (cf. p. 2, 138).
- [65] N. M. KRYLOV et N. N. BOGOLIOBOV. *Introduction To Non-Linear Mechanics*. Princeton University Press, 1943 (cf. p. 36).

- [66] R. J. KUETHER et M. S. ALLEN. “A numerical approach to directly compute nonlinear normal modes of geometrically nonlinear finite element models”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 46.1 (2014), p. 1-15. DOI : [10.1016/j.ymsp.2013.12.010](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.12.010) (cf. p. 138).
- [67] R. J. KUETHER, M. S. ALLEN et J. J. HOLLKAMP. “Modal Substructuring of Geometrically Nonlinear Finite Element Models with Interface Reduction”. In : *AIAA Journal* 55.5 (2017), p. 1695-1706. DOI : [10.2514/1.j055215](https://doi.org/10.2514/1.j055215) (cf. p. 138, 139).
- [68] D. LAXALDE. “Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, déc. 2007 (cf. p. 27, 36, 47, 50, 51, 134).
- [69] D. LAXALDE et F. THOUVEREZ. “Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces”. In : *Journal of Sound and Vibration* 322.4-5 (2009), p. 1009-1025. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.11.044](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.044) (cf. p. 2, 50, 51, 138).
- [70] A. LAZARUS et O. THOMAS. “A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems”. In : *Comptes Rendus Mécanique* 338.9 (2010), p. 510-517. DOI : [10.1016/j.crme.2010.07.020](https://doi.org/10.1016/j.crme.2010.07.020) (cf. p. 46).
- [71] A. LAZARUS, O. THOMAS et J.-F. DEÛ. “Finite element reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to NEMS”. In : *Finite Elements in Analysis and Design* 49.1 (2012), p. 35-51. DOI : [10.1016/j.finel.2011.08.019](https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.08.019) (cf. p. 49, 68, 74).
- [72] M. LEGRAND. “Modèles de prédiction de l’interaction rotor/stator dans un moteur d’avion”. thèse de doctorat. École Centrale de Nantes – Université de Nantes, mar. 2005 (cf. p. 23).
- [73] M. LEGRAND, A. BATAILLY et C. PIERRE. “Numerical investigation of abradable coating removal in aircraft engines through plastic constitutive law”. In : *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 7.1 (sept. 2011). DOI : [10.1115/1.4004951](https://doi.org/10.1115/1.4004951) (cf. p. 23).
- [74] A. LIAPOUNOV. *Problème général de la stabilité du mouvement*. Sous la dir. d’A. de la Faculté de TOULOUSE. CNRS, 1907 (cf. p. 42).
- [75] R. MACNEAL. “A hybrid method of component mode synthesis”. In : *Computers and Structures* 1.4 (1971), p. 581-601. DOI : [10.1016/0045-7949\(71\)90031-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(71)90031-9) (cf. p. 132).
- [76] J. MARSHALL et M. IMREGUN. “A Review Of Aeroelasticity Methods With Emphasis On Turbomachinery Applications”. In : *Journal of Fluids and Structures* 10.3 (1996), p. 237 -267. DOI : <https://doi.org/10.1006/jflls.1996.0015> (cf. p. 23).
- [77] A. MARTIN, B. CHOUVION et F. THOUVEREZ. “Harmonic study and reduction of 3D finite element structures subject to geometric nonlinearities”. In : *Congrès Français de Mécanique*. Lille, France, août 2017 (cf. p. 102).
- [78] A. MARTIN et F. THOUVEREZ. “Dynamic Analysis and Reduction of a Cyclic Symmetric System Subjected to Geometric Nonlinearities”. In : *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* (2018). DOI : [10.1115/1.4041001](https://doi.org/10.1115/1.4041001) (cf. p. 140).



- [79] M. P. MIGNOLET, A. PRZEKOP, S. A. RIZZI et S. M. SPOTTSWOOD. “A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures”. In : *Journal of Sound and Vibration* 332.10 (2013), p. 2437-2460. DOI : [10.1016/j.jsv.2012.10.017](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.017) (cf. p. 82).
- [80] G. MOORE. “Floquet Theory as a Computational Tool”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42.6 (2005), p. 2522-2568. DOI : [10.1137/S0036142903434175](https://doi.org/10.1137/S0036142903434175) (cf. p. 46).
- [81] A. A. MURAVYOV et S. A. RIZZI. “Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures”. In : *Computers & Structures* 81.15 (2003), p. 1513-1523. DOI : [10.1016/s0045-7949\(03\)00145-7](https://doi.org/10.1016/s0045-7949(03)00145-7) (cf. p. 2, 66, 169).
- [82] M. S. NAKHLA et J. VLACH. “A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems”. In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 23.2 (1976), p. 85-91. DOI : [10.1109/tcs.1976.1084181](https://doi.org/10.1109/tcs.1976.1084181) (cf. p. 36).
- [83] M. NAUDIN et J.-M. PUGNET. “Vibrations et contraintes alternées dans les turbomachines”. In : *Techniques de l'ingénieur* (10 juil. 1999) (cf. p. 25).
- [84] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley Series in Nonlinear Science. Weinheim : Wiley-VCH, 1995 (cf. p. 35, 36, 41-44, 46, 51, 52).
- [85] A. H. NAYFEH et D. T. MOOK. *Nonlinear Oscillations*. Pure and applied mathematics. John Wiley & Sons, 1979 (cf. p. 48).
- [86] A. K. NOOR. “Recent advances in reduction methods for nonlinear problems”. In : *Computers & Structures* 13.1 (1981), p. 31 -44. DOI : [10.1016/B978-0-08-027299-3.50007-8](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-027299-3.50007-8) (cf. p. 77).
- [87] B. J. OLSON, S. W. SHAW, C. SHI, C. PIERRE et R. G. PARKER. “Circulant Matrices and Their Application to Vibration Analysis”. In : *Applied Mechanics Reviews* 66.4 (2014), p. 040803. DOI : [10.1115/1.4027722](https://doi.org/10.1115/1.4027722) (cf. p. 53).
- [88] M. PEETERS, G. KERSCHEN et J.-C. GOLINVAL. “Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes”. In : *Journal of Sound and Vibration* 330.3 (2011), p. 486 -509. DOI : [10.1016/j.jsv.2010.08.028](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.08.028) (cf. p. 50).
- [89] M. PEETERS, G. KERSCHEN et J.-C. GOLINVAL. “Modal testing of nonlinear vibrating structures based on nonlinear normal modes : Experimental demonstration”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 25.4 (2011), p. 1227 -1247. DOI : [10.1016/j.ymsp.2010.11.006](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2010.11.006) (cf. p. 50).
- [90] M. PEETERS, R. VIGUIÉ, G. SÉRANDOUR, G. KERSCHEN et J.-C. GOLINVAL. “Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 23.1 (2009), p. 195-216. DOI : [10.1016/j.ymsp.2008.04.003](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.04.003) (cf. p. 36, 50).
- [91] F. PÉRIGNON. “Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires”. thèse de doctorat. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, juil. 2004 (cf. p. 36).



- [92] J. PHILIPPE. “Prédiction robuste du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, juin 2016 (cf. p. 137, 138).
- [93] Q. RENDU. “Modélisation des écoulements transsoniques décollés pour l’étude des interactions fluide-structure”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, déc. 2016 (cf. p. 24).
- [94] L. RENSON, G. KERSCHEN et B. COCHELIN. “Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering”. In : *Journal of Sound and Vibration* 364 (2016), p. 177-206. DOI : [10.1016/j.jsv.2015.09.033](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.033) (cf. p. 36, 50).
- [95] L. RENSON, J.-P. NOËL et G. KERSCHEN. “Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure : numerical continuation and normal modes”. In : *Nonlinear Dynamics* 79.2 (2014), p. 1293-1309. DOI : [10.1007/s11071-014-1743-0](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1743-0) (cf. p. 36, 50).
- [96] R. ROSENBERG. “Nonsimilar Normal Mode Vibrations of Nonlinear Systems Having Two Degrees of Freedom”. In : *Journal of Applied Mechanics* 31.2 (1964), p. 283-290. DOI : [10.1115/1.3629599](https://doi.org/10.1115/1.3629599) (cf. p. 2, 49, 138).
- [97] R. ROSENBERG. “On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom”. In : *Advances in Applied Mechanics* (1966). DOI : [10.1016/S0065-2156\(08\)70008-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70008-5) (cf. p. 2, 49, 138).
- [98] R. ROSENBERG. “The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems”. In : *Journal of Applied Mechanics* 29.1 (1962), p. 7-14. DOI : [10.1115/1.3636501](https://doi.org/10.1115/1.3636501) (cf. p. 2, 49, 138).
- [99] J. B. RUTZMOSER, D. J. RIXEN, P. TISO et S. JAIN. “Generalization of quadratic manifolds for reduced order modeling of nonlinear structural dynamics”. In : *Computers & Structures* 192 (2017), p. 196-209. DOI : [10.1016/j.compstruc.2017.06.003](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.06.003) (cf. p. 78).
- [100] L. SALLES. “Étude de l’usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : application aux pieds d’aubes de turbomachines”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon – Université Technique d’Etat Bauman de Moscou, déc. 2010 (cf. p. 26, 36, 51).
- [101] S. SAMARANAYAKE et A. BAJAJ. “Subharmonic Oscillations In Harmonically Excited Mechanical Systems With Cyclic Symmetry”. In : *Journal of Sound and Vibration* 206.1 (1997), p. 39-60. DOI : [10.1006/jsvi.1997.1075](https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1075) (cf. p. 2, 48, 53).
- [102] S. SAMARANAYAKE, A. BAJAJ et O. NWOKAH. “Amplitude modulated dynamics and bifurcations in the resonant response of a structure with cyclic symmetry”. In : *Acta Mechanica* 109.1-4 (1995), p. 101-125. DOI : [10.1007/bf01176819](https://doi.org/10.1007/bf01176819) (cf. p. 2, 48).
- [103] E. SARROUY. “Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires - Application à la dynamique des rotors”. thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, oct. 2008 (cf. p. 41, 42, 58).
- [104] A. SÉNÉCHAL. “Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : application aux turbomachines”. thèse de doctorat. Conservatoire National des Arts et Métiers - CNAM, sept. 2011 (cf. p. 65).

- [105] S. W. SHAW et C. PIERRE. “Non-linear normal modes and invariant manifolds”. In : *Journal of Sound and Vibration* 150.1 (1991), p. 170-173. DOI : [10.1016/0022-460X\(91\)90412-D](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90412-D) (cf. p. 2, 49, 138).
- [106] S. W. SHAW et C. PIERRE. “Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems”. In : *Journal of Sound and Vibration* 164.1 (1993), p. 85-124. DOI : [10.1006/jsvi.1993.1198](https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1198) (cf. p. 2, 49, 138).
- [107] P. SLAATS, J. de JONGH et A. SAUREN. “Model reduction tools for nonlinear structural dynamics”. In : *Computers & Structures* 54.6 (1995), p. 1155-1171. DOI : [10.1016/0045-7949\(94\)00389-k](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00389-k) (cf. p. 2, 77-79).
- [108] W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA. “The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems”. In : *Journal of Sound and Vibration* 63.4 (1979), p. 475-489. DOI : [10.1016/0022-460x\(79\)90823-x](https://doi.org/10.1016/0022-460x(79)90823-x) (cf. p. 2, 50, 138).
- [109] D. L. THOMAS. “Dynamics of rotationally periodic structures”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.1 (1979), p. 81-102. DOI : [10.1002/nme.1620140107](https://doi.org/10.1002/nme.1620140107) (cf. p. 16).
- [110] O. THOMAS. “Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. Instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration”. Habilitation à diriger des recherches. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, nov. 2011 (cf. p. 2, 68, 102).
- [111] O. THOMAS, A. LAZARUS et C. TOUZÉ. “A Harmonic-Based Method For Computing The Stability Of Periodic Oscillations Of Non-Linear Structural Systems”. In : *ASME IDETC 2010 International Design Engineering Technical Conferences*. Août 2010. DOI : [10.1115/DETC2010-28407](https://doi.org/10.1115/DETC2010-28407) (cf. p. 46).
- [112] O. THOMAS, A. SÉNÉCHAL et J.-F. DEÛ. “Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams”. In : *Nonlinear Dynamics* 86.2 (2016), p. 1293-1318. DOI : [10.1007/s11071-016-2965-0](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2965-0) (cf. p. 108, 118, 119).
- [113] O. THOMAS, C. TOUZÉ et A. CHAIGNE. “Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 :1 :2 internal resonance”. In : *International Journal of Solids and Structures* 42.11 (2005), p. 3339 -3373. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2004.10.028](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.10.028) (cf. p. 49).
- [114] P. TISO. “Optimal second order reduction basis selection for nonlinear transient analysis”. In : *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. Springer New York, 2011, p. 27-39. DOI : [10.1007/978-1-4419-9299-4\\_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9299-4_3) (cf. p. 81).
- [115] S. A. TOBIAS et R. N. ARNOLD. “The Influence of Dynamical Imperfection on the Vibration of Rotating Disks”. In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 171.1 (1957), p. 669-690. DOI : [10.1243/PIME\\_PROC\\_1957\\_171\\_056\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1957_171_056_02) (cf. p. 161).
- [116] C. TOUZÉ, M. VIDRASCU et D. CHAPELLE. “Direct finite element computation of non-linear modal coupling coefficients for reduced-order shell models”. In : *Computational Mechanics* 54.2 (2014), p. 567-580. DOI : [10.1007/s00466-014-1006-4](https://doi.org/10.1007/s00466-014-1006-4) (cf. p. 65).

- [117] D. M. TRAN. “Model reduction in dynamics of structures and aeroelastic coupled systems”. Habilitation à diriger des recherches. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon – Université Claude Bernard Lyon 1, nov. 2015 (cf. p. 132).
- [118] A. F. VAKAKIS. “Dynamics of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry”. In : *Acta Mechanica* 95.1 (1992), p. 197-226. DOI : [10.1007/BF01170813](https://doi.org/10.1007/BF01170813) (cf. p. 2, 53).
- [119] A. F. VAKAKIS. “Fundamental and subharmonic resonances in a system with a ‘1-1’ internal resonance”. In : *Nonlinear Dynamics* 3.2 (1992), p. 123-143. DOI : [10.1007/BF00118989](https://doi.org/10.1007/BF00118989) (cf. p. 48).
- [120] A. F. VAKAKIS. “Non-Linear Normal Modes (NNMs) And Their Applications In Vibration Theory : An Overview”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 11.1 (1997), p. 3-22. DOI : [10.1006/mssp.1996.9999](https://doi.org/10.1006/mssp.1996.9999) (cf. p. 50).
- [121] A. F. VAKAKIS, L. I. MANEVITCH, Y. V. MIKHLIN, V. N. PILIPCHUK et A. A. ZEVIN. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems (Wiley Series in Nonlinear Science)*. Wiley-VCH, 1996 (cf. p. 50).
- [122] R. VALID et R. OHAYON. “Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétrie cycliques”. In : *La recherche aérospatiale* 4 (1985), p. 251-263 (cf. p. 17).
- [123] X. WANG, R. A. PEREZ, M. P. MIGNOLET, R. CAPILLON et C. SOIZE. “Nonlinear reduced order modeling of complex wing models”. In : *54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Co-located Events (SDM 2013)*. Sous la dir. d’AIAA. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC. Boston, Massachusetts, United States, avr. 2013, p. 1-14 (cf. p. 2, 68, 82, 169).
- [124] F. WENNEKER et P. TISO. “A Substructuring Method for Geometrically Nonlinear Structures”. In : *Dynamics of Coupled Structures, Volume 1*. Springer International Publishing, 2014, p. 157-165. DOI : [10.1007/978-3-319-04501-6\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-319-04501-6_14) (cf. p. 136, 138).
- [125] D. S. WHITEHEAD. “Effect of Mistuning on the Vibration of Turbo-Machine Blades Induced by Wakes”. In : *Journal of Mechanical Engineering Science* 8.1 (1966), p. 15-21. DOI : [10.1243/JMES\\_JOUR\\_1966\\_008\\_004\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1966_008_004_02) (cf. p. 161).
- [126] J. J. WIJKER. *Mechanical Vibrations in Spacecraft Design*. Sous la dir. de SPRINGER. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004 (cf. p. 134).
- [127] J. WILDHEIM. “Excitation of rotating circumferentially periodic structures”. In : *Journal of Sound and Vibration* 75.3 (1981), p. 397-416. DOI : [10.1016/0022-460x\(81\)90386-2](https://doi.org/10.1016/0022-460x(81)90386-2) (cf. p. 16).
- [128] J. WILDHEIM. “Excitation of Rotationally Periodic Structures”. In : *Journal of Applied Mechanics* 46.4 (1979), p. 878. DOI : [10.1115/1.3424671](https://doi.org/10.1115/1.3424671) (cf. p. 16, 24).
- [129] L. WU et P. TISO. “Nonlinear model order reduction for flexible multibody dynamics : a modal derivatives approach”. In : *Multibody System Dynamics* 36.4 (2015), p. 405-425. DOI : [10.1007/s11044-015-9476-5](https://doi.org/10.1007/s11044-015-9476-5) (cf. p. 136, 138, 139).
- [130] L. WU, P. TISO et F. VAN KEULEN. “A modal derivatives enhanced Craig-Bampton method for geometrically nonlinear structural dynamics”. In : *27th International Conference on Noise and Vibration Engineering*. 2016, p. 3615-3624 (cf. p. 136, 138).

- 
- [131] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR. *Finite Element Method. Volume 1 : The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000 (cf. p. [62](#)).
- [132] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR. *Finite Element Method. Volume 2 : Solid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000 (cf. p. [12](#)).
- [133] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR et J. M. TOO. “Reduced integration technique in general analysis of plates and shells”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 3.2 (1971), p. 275-290. DOI : [10.1002/nme.1620030211](https://doi.org/10.1002/nme.1620030211) (cf. p. [195](#)).

# Table des figures

I.1	Principaux composants d'un turboréacteur et architecture à soufflante [Wikipedia] . . . . .	6
I.2	Architecture d'un compresseur axial . . . . .	8
I.3	Turbofans du constructeur CFM International [Safran] . . . . .	8
I.4	Architectures moteur à fort taux de dilution . . . . .	9
I.5	Différentes configurations du solide . . . . .	10
I.6	Exemple de structure à symétrie cyclique et secteur générateur associé [issu d'un exemple SAMCEF] . . . . .	17
I.7	Frontières cycliques du secteur . . . . .	17
I.8	Modes non-dégénérés : 0 et $N/2$ diamètres . . . . .	19
I.9	Exemples de modes dégénérés : 1 et 3 diamètres . . . . .	20
I.10	Exemples d'ondes directe et rétrograde . . . . .	20
I.11	Outils de dimensionnement modaux des roues aubagées (Exemple pour une roue à 24 secteurs) . . . . .	25
I.12	Outils de dimensionnement mécaniques des roues aubagées . . . . .	26
I.13	Différentes technologies de roues aubagées . . . . .	27
I.14	Technologie ANneau Aubagé Monobloc (ANAM) (issues de [47]) . . . . .	28
I.15	Différents matériaux utilisés pour la fabrication des soufflantes . . . . .	28
II.1	Schéma de principe de la méthode AFT . . . . .	39
II.2	Différents schémas de continuation . . . . .	40
II.3	Différents types de prédicteurs . . . . .	42
II.4	Schéma de bifurcation des solutions périodiques . . . . .	47
II.5	Schéma du système cyclique étudié . . . . .	53
II.6	Modes linéaires du système cyclique. Haut : modes non-dégénérés. Bas : modes dégénérés. . . . .	55
II.7	Réponses forcées du système cyclique non-linéaire pour différentes amplitudes de forçage . . . . .	56
II.8	Mise en évidence d'un phénomène de localisation forcée ( $A = 2N$ ) . . . . .	57
II.9	Stabilité au sens de Floquet ( $A = 2N$ ) . . . . .	57
II.10	Comparaison des stabilités prédites par les méthodes de Floquet et Hill ( $A = 2N$ ) . . . . .	58
II.11	Mise en évidence des bifurcations du mode à 2 diamètres . . . . .	59
II.12	Comportement du système au niveau des différentes branches de solution du mode non-linéaire associé au mode à 2 diamètres . . . . .	60
III.1	Erreur de projection induite par la procédure de Galerkin (adapté de [27]) . . . . .	64
III.2	Cinématique d'une poutre . . . . .	69

III.3	Erreur relative sur les pulsations propres des quatre premiers modes transverses et longitudinaux de la poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastree à 20 éléments . . .	72
III.4	Résultats de simulation pour la poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastree avec une excitation transverse de 30 N . . . . .	73
III.5	Base de réduction composée de modes linéaires . . . . .	74
III.6	Réduction de la poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastree à l'aide de modes linéaires	75
III.7	Comparaison des différentes méthodes d'évaluation des termes non-linéaires .	77
III.8	Dérivée modale $\partial\phi_{11}$ de la poutre d'Euler-Bernoulli. Haut : différence finie à droite. Bas : différence finie centrée. . . . .	81
III.9	Résultats de simulations du système réduit selon $\phi_{1F}$ et $\partial\phi_{11}$ . . . . .	82
III.10	Construction des modes compagnons . . . . .	84
III.11	Déformées des trois premiers modes compagnons . . . . .	85
III.12	Résultats de simulations du système réduit à l'aide des modes compagnons .	86
III.13	Construction des modes POD . . . . .	88
III.14	Déformées des trois premiers modes POD . . . . .	89
III.15	Résultats de simulations du système réduit à l'aide des modes POD . . . . .	89
IV.1	Poutre modélisée avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds . . . . .	92
IV.2	Comparaison des modes propres des modèles MATLAB et SAMCEF . . . . .	93
IV.3	Comparaison des résultats statiques non-linéaires des modèles MATLAB et SAMCEF . . . . .	95
IV.4	Convergence harmonique de la résolution de la poutre H20 MATLAB . . . . .	96
IV.5	Comparaison des résultats non-linéaires harmoniques des modèles MATLAB Euler-Bernoulli et hexaédrique 20 nœuds . . . . .	96
IV.6	Réduction de la poutre bi-encastree H20 à l'aide de modes linéaires . . . . .	97
IV.7	Réduction de la poutre bi-encastree H20 à l'aide des vecteurs $\phi_{1F}$ et $\partial\phi_{11}$ . .	98
IV.8	Réduction de la poutre bi-encastree H20 à l'aide de modes compagnons . . .	99
IV.9	Poutre modélisée sous SAMCEF avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds .	100
IV.10	Réduction de la poutre bi-encastree H20 à l'aide de SAMCEF . . . . .	101
IV.11	Modèle de poutre pour le cas encastree-libre . . . . .	103
IV.12	Influence du nombre de points d'intégration de Gauss considérés pour le calcul de la matrice de raideur linéaire sur la solution statique non-linéaire (amplitude transverse en bout de poutre) . . . . .	104
IV.13	Comparaison des éléments propres des modèles SAMCEF et MATLAB avec 2 et 3 points d'intégration pour le calcul de la matrice de raideur linéaire . . .	104
IV.14	Comparaison des résultats obtenus avec MATLAB et SAMCEF pour la détermination de l'état préchargé de la poutre encastree-libre . . . . .	106
IV.15	Comparaison des solutions obtenues avec la HBM pour 3 et 5 harmoniques .	107
IV.16	Résultats de simulation pour la poutre encastree-libre en rotation à 5000 rpm avec un forçage de 20 N . . . . .	109
IV.17	Composantes statique et dynamiques de la poutre encastree-libre résolue par HBM . . . . .	110
IV.18	Réduction de la poutre encastree-libre préchargée à l'aide du premier mode de flexion et de sa dérivée modale associée . . . . .	113
IV.19	Réduction de la poutre encastree-libre préchargée à l'aide du premier mode de flexion et du premier mode compagnon en critère énergétique . . . . .	114

IV.20	Comparaison des résultats obtenus avec des dérivées modales déterminées avec et sans rotation avec SAMCEF . . . . .	116
IV.21	Dérivée modale du premier mode de flexion obtenue avec SAMCEF . . . . .	117
IV.22	Premier mode compagnon avec critère en énergie obtenu avec SAMCEF . . . . .	117
IV.23	Résultats de réduction avec SAMCEF pour la poutre encastree-libre en rotation à 5000 rpm avec une excitation de 20 N pour le premier mode de flexion . . . . .	118
IV.24	Résultats de simulation pour la poutre encastree-libre en rotation à 5000 rpm avec un forçage de 20 N pour le deuxième mode de flexion . . . . .	120
IV.25	Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre obtenus avec les modes linéaires de flexion et leurs dérivées modales avec MATLAB . . . . .	121
IV.26	Optimisation de la base de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre : Coefficients harmoniques . . . . .	121
IV.27	Optimisation de la base de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre : Résultats . . . . .	122
IV.28	Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre obtenus avec les modes compagnons avec MATLAB . . . . .	123
IV.29	Maillage fin de la poutre encastree-libre . . . . .	124
IV.30	Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre obtenus avec les modes linéaires de flexion et leurs dérivées modales avec SAMCEF . . . . .	125
IV.31	Coefficients harmoniques de la réduction avec les quatre premiers modes de flexion et leurs dérivées modales . . . . .	126
IV.32	Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre obtenus avec des modes compagnons avec SAMCEF . . . . .	126
IV.33	Géométrie de la plaque droite . . . . .	128
IV.34	Résultats de réduction du deuxième mode de flexion de la plaque encastree-libre obtenus avec des dérivées modales avec SAMCEF . . . . .	128
IV.35	Coefficients harmoniques de la réduction avec les modes $\phi_{1F}$ - $\phi_{2F}$ - $\phi_{4F}$ et leurs dérivées modales . . . . .	129
V.1	Principe de la sous-structuration . . . . .	132
V.2	Schéma de principe de la synthèse modale à interfaces fixes . . . . .	134
V.3	Schéma de principe de la synthèse modale à interfaces libres . . . . .	136
V.4	Structure cyclique modélisée avec des poutres d'Euler-Bernoulli . . . . .	140
V.5	Secteur d'étude . . . . .	141
V.6	Modes à diamètres du 1 <sup>er</sup> mode de flexion des pales (amplitude transverse au milieu de chaque pale) . . . . .	142
V.7	Fonction de réponse en fréquence linéaire pour une excitation de 1 N sur la pale 1 . . . . .	143
V.8	Fonctions de réponse en fréquence non-linéaires de la structure complète au niveau de la pale 1 pour des excitations de 0,1 N, 0,5 N et 1 N . . . . .	143
V.9	Base de réduction des degrés de liberté internes . . . . .	144
V.10	Comparaison des fonctions de réponse en fréquence linéaires des systèmes complet et réduit pour une excitation de 1 N sur la pale 1 . . . . .	145



V.11	Comparaison des résultats obtenus pour les modèles complet et réduit pour des forçages de 0,1N, 0,5N et 1N . . . . .	146
V.12	Exemples d'excitations à diamètres. Haut : 3 diamètres. Bas : 1 diamètre direct.	147
V.13	Effets d'un désaccordage de l'excitation de 0,01 % au niveau de la pale 1 sur les différentes excitations à diamètres. Déplacements transverses au milieu de la pale 1. . . . .	148
V.14	Phénomènes de localisation sur la bifurcation de l'excitation désaccordée à 0 diamètre. . . . .	149
V.15	Aperçu du modèle de fan à 4 secteurs . . . . .	150
V.16	Évolution des pulsations des différents diamètres des familles de modes en fonction de la vitesse de rotation $\Omega$ . . . . .	151
V.17	Différents modes à diamètres des différentes familles de modes de la pale pour le modèle de fan à 4 secteurs en rotation à 4000 rpm ( $418,88 \text{ rad.s}^{-1}$ ). . . . .	152
V.18	Évolution de l'erreur relative des pulsations du système réduit par double synthèse modale en fonction du nombre de modes de branche retenus . . . . .	153
V.19	Découpage des degrés de liberté du secteur : internes en <b>rouges</b> : non-linéaires ; frontière en <b>verts</b> : linéaires. . . . .	154
V.20	Fonctions de réponse en fréquence non-linéaires du fan à 4 secteurs réduits à l'aide de différentes bases . . . . .	155
V.21	Réponse en fréquence des différentes excitations à diamètres ; observation au niveau de la pale 1 . . . . .	156
V.22	Résultats obtenus pour une excitation à 0 diamètre désaccordée . . . . .	157
V.23	Résultats obtenus pour une excitation à 1 diamètre désaccordée . . . . .	158
V.24	Modèle de fan à 18 secteurs . . . . .	159
V.25	Diagramme fréquence/diamètre du fan à 18 secteurs pour une vitesse de rotation $\Omega = 5000 \text{ rpm}$ . . . . .	160
V.26	Évolution de l'erreur relative des pulsations du système réduit par double synthèse modale en fonction du nombre de modes de branche retenus . . . . .	160
V.27	Résultats obtenus pour une excitation à 9 diamètres . . . . .	161
V.28	Schéma de désaccordage : épaisseurs des différentes pales . . . . .	162
V.29	Exemple de mode du fan désaccordé . . . . .	162
V.30	Résultats obtenus sur le fan à 18 secteurs désaccordé pour une excitation à 9 diamètres . . . . .	165
A.1	Discrétisation de la structure . . . . .	189
A.2	Différents types d'éléments . . . . .	190
A.3	Comparaison entre les éléments Lagrange et Serendip de degré 2 en dimension 2	192
A.4	Exemple de transformation d'un élément plan . . . . .	193
C.1	Maille hexaédrique . . . . .	205



# Liste des tableaux

II.1	Données du système cyclique . . . . .	53
II.2	Pulsations propres du système cyclique . . . . .	54
III.1	Dimensions et données matériau de la poutre . . . . .	71
III.2	Critère de MAC entre la déformée du système complet (figs. III.4c-III.4d) et la base réduction de modes linéaires (figs. III.5a-III.5b) . . . . .	75
III.3	Comparaison des différents temps de résolution et gains des méthodes d'évaluation des termes non-linéaires réduits . . . . .	76
III.4	Comparaison des différents temps de résolution et gains de réduction associés à la méthode des dérivées modales . . . . .	82
III.5	Caractéristiques des trois premiers modes compagnons obtenus . . . . .	84
III.6	Comparaison des différents temps de résolution et gains de réduction associés à la méthode des modes compagnons . . . . .	85
III.7	Caractéristiques des trois premiers modes POD obtenus . . . . .	88
IV.1	Dimensions et données matériau de la poutre . . . . .	92
IV.2	Pulsations propres des modes d'intérêts de la poutre bi-encastree H20 . . . . .	92
IV.3	Gains de temps sur la poutre bi-encastree H20 MATLAB . . . . .	98
IV.4	Pulsations propres des modes d'intérêts de la poutre bi-encastree H20 modélisée avec SAMCEF . . . . .	100
IV.5	Temps de calcul de la poutre bi-encastree H20 SAMCEF . . . . .	102
IV.6	Dimensions et données matériau de la poutre . . . . .	102
IV.7	Gains de temps sur la poutre encastree-libre H20 MATLAB . . . . .	115
IV.8	Caractéristiques des trois premiers modes compagnons obtenus . . . . .	123
IV.9	Gains de temps sur la poutre encastree-libre H20 MATLAB pour le deuxième mode de flexion . . . . .	124
IV.10	Temps de résolution de la poutre encastree-libre H20 SAMCEF pour le deuxième mode de flexion . . . . .	127
IV.11	Dimensions et discrétisation éléments finis de la plaque . . . . .	127
V.1	Dimensions et discrétisation éléments finis . . . . .	141
V.2	Données matériaux . . . . .	141
V.3	Pulsations des modes à diamètres du 1 <sup>er</sup> mode de flexion des pales . . . . .	142
V.4	Erreur de réduction sur les pulsations propres . . . . .	144
V.5	Gains de temps de la méthode de sous-structuration non-linéaire . . . . .	145
V.6	Données matériau du fan . . . . .	151
V.7	Pulsations des différents modes à diamètres du deuxième mode de flexion pour $\Omega = 7000$ rpm . . . . .	151

---

V.8	Erreur sur les pulsations de la méthode de Craig-Bampton . . . . .	153
V.9	Durées des différentes étapes de la double synthèse modale . . . . .	154
V.10	Précision des différentes phases de réduction . . . . .	154
V.11	Temps de continuation des différentes simulations . . . . .	159
V.12	Durées des différentes étapes de la double synthèse modale . . . . .	161
V.13	Durées des différentes étapes de la réduction du fan désaccordé . . . . .	163
A.1	Poids et points d'intégration de la quadrature de Gauss-Legendre . . . . .	195
C.1	Coordonnées des nœuds . . . . .	205
C.2	Points et poids . . . . .	208



## Quelques rappels de base sur la méthode des éléments finis

On présente dans cette annexe les grandes étapes de la méthode des éléments finis. On suppose ainsi que la mise en équation du chapitre I est réalisée dans ce sens et donc que la discrétisation spatiale I.17 est faite au moyen de fonctions d'interpolation que nous présentons dans cette annexe.

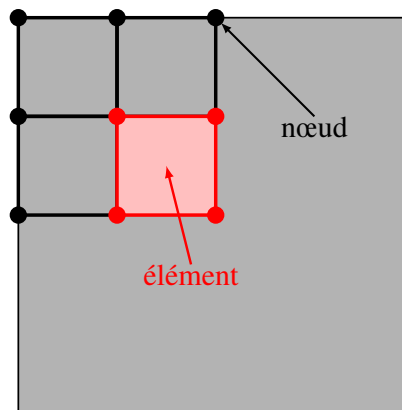


Figure A.1 – Discrétisation de la structure

### 1 Discrétisation

Le premier travail à effectuer lors d'une étude par la méthode des éléments finis est la discrétisation de la structure, dont une illustration est donnée sur la figure A.1. Cette étape est capitale, car de celle-ci va dépendre tout le déroulement de la méthode. On peut citer entre autres critères de choix :

- la nature de la structure : il est évident que la discrétisation de la structure sera différente selon qu'on considère une géométrie linéique, de type poutre, ou un solide massif en 3 dimensions. A chaque type de représentation correspond un panel d'éléments. On en donne un exemple pour chaque dimension figure A.2 ;
- les symétries : sous certaines conditions de symétrie de la structure et du chargement qui y est appliqué, il est possible de simplifier le problème. On peut alors ne considérer qu'une partie de la structure, voire passer d'un problème 3D à un problème plan, c'est le cas en contrainte ou déformation plane. Le domaine à mailler, ainsi que les éléments à utiliser, vont grandement dépendre de ces hypothèses ;
- les modèles "RDM" : dans certains cas, lorsque 1 voire 2 dimensions sont plus faibles que la troisième, il est possible de ramener l'étude à un modèle simplifié bidimensionnel

voir unidimensionnel. Le problème est alors résolu à l'aide de modèles barre ou poutre pour ce qui est des structures rectilignes, ou alors plaque pour un problème 2D plan. Une généralisation de ces concepts dans le cadre de géométries plus complexes est proposée à l'aide des éléments de poutres courbes, ou encore des éléments de coque. Des ouvrages spécialisés existent traitant de ce type de problèmes, notamment ceux de Batoz & Dhatt [7, 8].

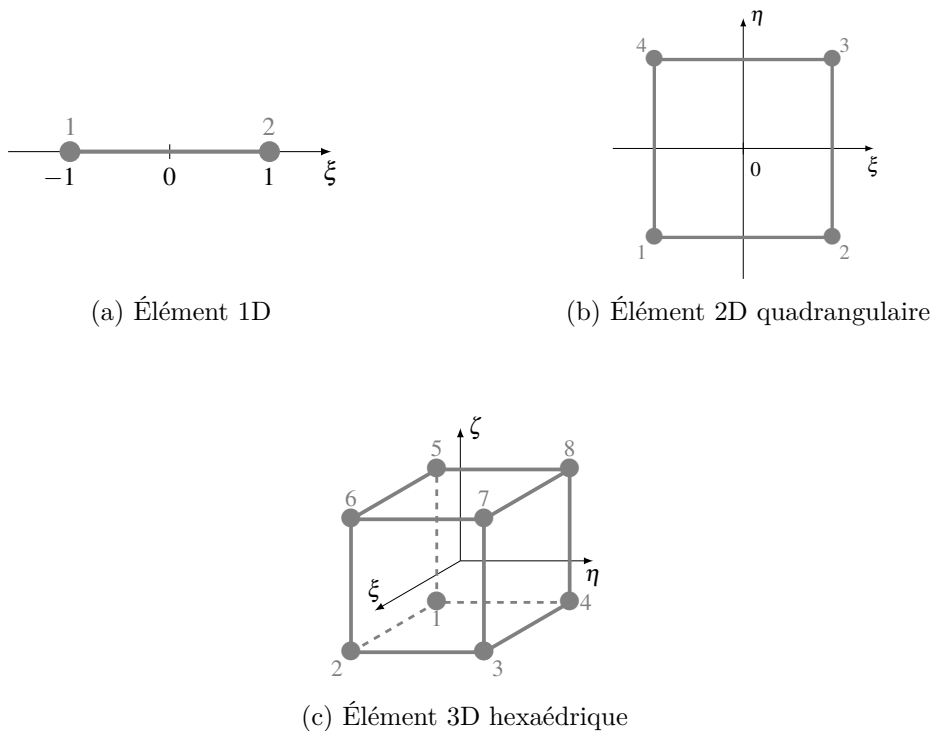


Figure A.2 – Différents types d'éléments

Il est envisageable de réaliser cette étape *à la main* dans le cas de structures très simples, comme des poutres ou des plaques rectangulaires. Pour des structures plus complexes, il est préférable de faire appel à un logiciel de maillage ([Gmsh](#) par exemple), ou à un logiciel éléments finis industriel ([ANSYS](#), [SAMCEF](#) ou [code\\_aster](#) par exemple).

## 2 Interpolation

Le maillage de notre structure obtenu, il faut maintenant définir l'approximation des déplacements sur chaque sous-domaine. On va pour cela interpoler le déplacement d'un point quelconque du sous-domaine à partir des déplacements des nœuds de l'éléments. Ce qui donne, en considérant un élément à  $N_n$  nœuds

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_n} H_k^e(\mathbf{x}) \mathbf{q}_k^e = \mathbf{H}^e(\mathbf{x}) \mathbf{q}^e \quad (\text{A.1})$$

avec  $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$  le déplacement d'un point de l'élément,  $\mathbf{H}^e(\mathbf{x})$  les fonctions d'interpolation à support compact, i.e. non-nulles sur les éléments attachés au nœud associé à la fonction, et  $\mathbf{q}^e$  les déplacements aux nœuds de l'élément. La compacité du support des fonctions

est extrêmement importante car c'est cette hypothèse qui permet la restriction sur un élément [36]. De plus, ces fonctions doivent satisfaire 3 conditions fondamentales afin de garantir une bonne approximation du problème, et une convergence lorsqu'est augmenté la discrétisation de la structure :

- **critère de complétude** : les fonctions doivent constituer une base complète à même de déterminer les états de déformation constante ainsi que les mouvements de corps rigide ;
- **critère de différentiabilité** : les fonctions doivent être suffisamment régulières et différentiables afin de pouvoir déterminer les termes de la formulation faible du problème ;
- **critère de continuité** : les fonctions doivent assurer la continuité des déplacements dans l'élément ainsi qu'à sa frontière avec les autres éléments.

La famille des fonctions polynomiales permet de construire facilement des fonctions d'interpolation qui respectent ces critères. Le premier critère, de complétude, est assuré par la présence de termes constants (mouvements de corps rigide) et linéaires (déformation constante). Le degré des polynômes choisis permet de respecter ou non le critère de différentiabilité. Enfin, la continuité à l'intérieur de l'élément ne pose pas de problème, et celle sur les bords est obtenue en imposant

$$H_i^e(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

où  $\mathbf{x}_j$  désigne les coordonnées du nœud  $j$  de l'élément.

Il existe 2 familles de polynômes particulièrement utilisées dans la méthode des éléments finis. La première, utilisée dans le cas des éléments unidimensionnels, rectangulaires et hexaédriques, est celle des polynômes de Lagrange. Ceux-ci s'expriment, pour ce qui est du cas unidimensionnel au nœud  $p$

$$L_p(x) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{N_n} (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{N_n} (x_p - x_k)} \quad (\text{A.3})$$

Les expressions en dimensions supérieures s'obtiennent par multiplication des polynômes selon les différentes directions. Ces polynômes vont nécessiter  $d + 1$  nœuds dans chaque directions,  $d$  étant le degré choisi du polynôme, afin d'être définis. Cela peut vite mener à un très grand nombre de coordonnées généralisées, surtout en dimension 3. Il est possible cependant de s'affranchir des nœuds intérieurs des éléments de Lagrange à l'aide de la famille d'éléments Serendip. Ceux-ci n'ont, en effet, des nœuds que sur les arêtes, comme le montre la figure A.3. Les fonctions d'interpolation au niveau de ces nœuds sont alors des combinaisons linéaires de celles de l'élément de Lagrange associé. Nous utilisons notamment ce type d'éléments dans ce manuscrit avec les éléments hexaédriques à 20 nœuds au chapitre III.

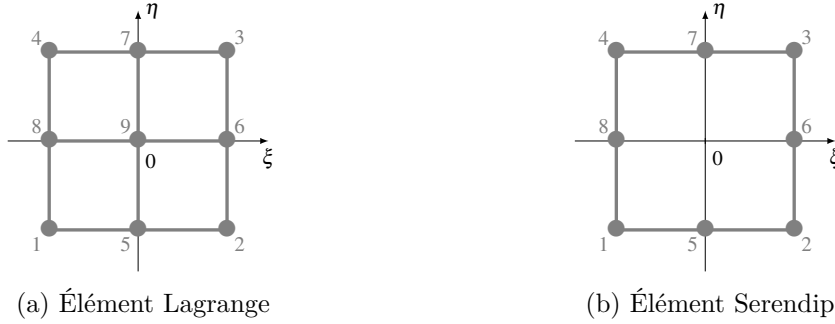


Figure A.3 – Comparaison entre les éléments Lagrange et Serendip de degré 2 en dimension 2

La deuxième famille de polynômes largement utilisée est celle des polynômes d’Hermite, principalement pour les problèmes de poutres et plaques fines. En effet, en plus des déplacements, ces polynômes permettent aussi l’interpolation des dérivées spatiales des coordonnées généralisées (pour cela, ces polynômes sont dits osculateurs) qui sont nécessaires pour la résolution de ce type de problème.

En nous plaçant dans le cadre des éléments poutre de dimension 1 à 2 nœuds, où le cisaillement transverse ainsi que l’inertie de rotation des sections droites sont négligés, les inconnues du problème sont alors les déplacements ainsi que leurs dérivées première en espace. Soit  $I = [-1, 1]$  l’intervalle associé à l’élément, et soit  $u \in \mathcal{C}^1(I)$  la fonction à interpolier. Il existe alors un unique polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$\begin{aligned}
 P(-1) &= u(-1) \\
 \frac{\partial P}{\partial x}(-1) &= \frac{\partial u}{\partial x}(-1) \\
 P(1) &= u(1) \\
 \frac{\partial P}{\partial x}(1) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Ce polynôme est alors donné par l’expression

$$P(x) = P_1^H(x) u(-1) + P_2^H(x) \frac{\partial u}{\partial x}(-1) + P_3^H(x) u(1) + P_4^H(x) \frac{\partial u}{\partial x}(1) \tag{A.5}$$

où les polynômes  $P_i^H$  sont donnés par

$$\begin{aligned}
 P_1^H(x) &= \frac{(2+x)(1-x)^2}{4} \\
 P_2^H(x) &= \frac{(1+x)(1-x)^2}{4} \\
 P_3^H(x) &= \frac{(2-x)(1+x)^2}{4} \\
 P_4^H(x) &= \frac{(x-1)(1+x)^2}{4}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Nous utilisons notamment ces éléments pour la discrétisation du problème de poutre d’Euler-Bernoulli au chapitre II.

### 3 Transformation de la maille

Les éléments qui viennent d'être présentés affichent des géométries extrêmement simples, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on les considère sur la structure maillée. En effet, ceux-ci vont présenter des géométries complexes afin d'épouser au mieux les formes du solide. Définir des fonctions d'interpolations sur de tels éléments déformés est assez complexe, encore plus si il faut réaliser cette opération pour chaque élément. Afin de palier à cette contrainte, on ramène chaque élément déformé à une maille de référence de forme simple sur laquelle les fonctions d'interpolations sont connues, par une transformation géométrique  $\tau$ , comme cela est illustré sur la figure A.4.

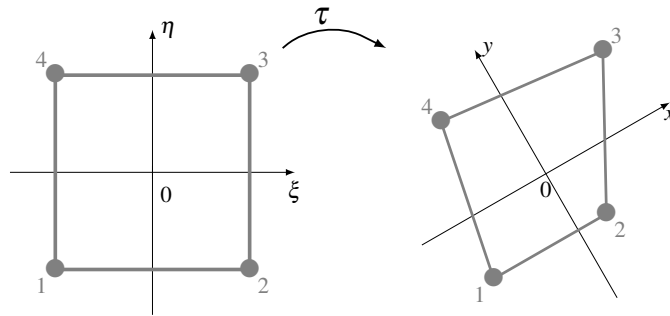


Figure A.4 – Exemple de transformation d'un élément plan

Dans notre cas, les fonctions d'interpolations de la géométrie seront les mêmes que celles des déplacements. C'est ce que l'on appelle des éléments isoparamétriques. La transformation géométrique  $\tau$  peut donc être définie, sur un élément à  $N_n$  nœuds en 2 dimensions par exemple, grâce aux fonctions d'interpolations telles que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{N_n} H_k^e(\xi, \eta) x_k \\ y &= \sum_{k=1}^{N_n} H_k^e(\xi, \eta) y_k \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Il est alors possible de définir la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  de la transformation

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N_n} \frac{\partial H_k^e}{\partial \xi} x_k & \sum_{k=1}^{N_n} \frac{\partial H_k^e}{\partial \xi} y_k \\ \sum_{k=1}^{N_n} \frac{\partial H_k^e}{\partial \eta} x_k & \sum_{k=1}^{N_n} \frac{\partial H_k^e}{\partial \eta} y_k \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

qui permet de réaliser le changement de variable dans les grandeurs à intégrer afin de passer du domaine sur la structure au domaine de la maille de référence. Dans le cas où apparaissent les dérivées des fonctions d'interpolations, comme c'est le cas pour la matrice de raideur, la matrice jacobienne de la transformation va aussi permettre de déterminer



ces dérivées sur l'élément déformé en fonction de celles de l'élément de référence tels que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial H_k^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_k^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H_k^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

La détermination de l'inverse de  $\mathbf{J}$  ne pose pas de problème grâce à la formule de la comatrice

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{comJ}^\top \quad (\text{A.10})$$

dans laquelle on retrouve le déterminant et la comatrice de  $\mathbf{J}$ , dont les expressions en dimension 2, voire 3, sont accessibles simplement au travers des formules

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \\ \mathbf{comJ} &= \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Il est beaucoup plus intéressant de passer par ces formules simples afin de déterminer l'inverse de  $\mathbf{J}$  plutôt que de faire appel à la fonction `det` de MATLAB qui peut représenter une perte de temps.

Il est alors possible de réaliser ce changement de variable pour chaque élément, et de réaliser l'intégration sur l'élément de référence par application du changement de variable dans l'intégrale

$$\iint_{\Omega_e} \mathbf{g}(x, y) \, dx dy = \iint_{[-1,1]} \mathbf{g}(\xi, \eta) \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta \quad (\text{A.12})$$

où  $\mathbf{g}$  représente la quantité à intégrer et  $\Omega_e$  le domaine de l'élément sur la structure.

## 4 Intégration numérique

Se ramener à une intégration sur un élément de référence simple ne constitue pas la fin de la démarche. Il reste ensuite à calculer la valeur de l'intégrale en question. Il existe pour cela des méthodes numériques de calcul d'intégrale parfaitement adaptées à ce genre de problème. Comme nous ramenons nos éléments à des mailles de références définies sur l'intervalle  $I = [-1, 1]$ , la méthode désignée est celle de la quadrature de Gauss-Legendre [48], qui permet de déterminer l'intégrale d'une fonction définie sur ce domaine par une somme pondérée de valeurs de cette fonction en certains points bien choisis. Cela donne, pour une fonction à 2 variables

$$\iint_{[-1,1]} \mathbf{g}(\xi, \eta) \, d\xi d\eta = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \omega_k \omega_l \mathbf{g}(\xi_k, \eta_l) \quad (\text{A.13})$$

où les  $\omega_i$  sont les coefficients de pondérations,  $(\xi_k, \eta_l)$  les points retenus, qui ne sont autres que les racines du  $r^{\text{ème}}$  polynôme de Legendre, et  $r$  le nombre de points retenus. Ces  $r$

Tableau A.1 – Poids et points d'intégration de la quadrature de Gauss-Legendre

$r$	$\omega$	Points	degré maximal exact	Polynôme de Legendre
1	2	0	1	$x$
2	1	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	3	$\frac{3x^2 - 1}{2}$
3	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}$	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$	5	$\frac{5x^3 - 3x}{2}$

points permettent d'intégrer exactement un polynôme de degré  $2r - 1$  [36]. Les poids et points associés aux valeurs de  $r$  de 1 à 3 sont donnés au tableau A.1.

Cette méthode, en plus d'une relative simplicité de mise en œuvre, permet une certaine souplesse vis-à-vis de l'intégration dans les différentes directions. Il est en effet possible de considérer un nombre de points différents pour chaque directions, si les degrés des polynômes dans ces directions varient. Cependant, l'utilisation du nombre de points requis pour une intégration exacte peut mener à une sur-estimation de la valeur de l'intégrale, c'est notamment le cas pour les matrices de raideurs pour les éléments plaques et coques [133]. Il est possible de contourner ce problème simplement en considérant moins de points d'intégrations, c'est ce que l'on appelle une intégration réduite. Enfin, il est à noter que cette méthode d'intégration n'est applicable, dans les cas en 2 et 3 dimensions, qu'aux éléments quadrangulaires et hexaédriques droits. Pour ce qui est des éléments triangulaires et tétraédriques, il faut faire appel à des formules adaptées établis par Hammer [46].

## 5 Assemblage

La dernière étape de la procédure de discrétisation consiste à assembler tous les éléments afin de construire les matrices et les vecteurs de la structure globale associés au problème. Il faut pour cela assurer la concordance entre la numérotation globale du maillage et la numérotation locale de l'élément, i.e. assurer la continuité entre les éléments. Une façon simple de procéder est d'utiliser une matrice de localisation de l'élément tel que

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{A}_e \mathbf{q} \quad (\text{A.14})$$

où  $\mathbf{A}_e$  est la matrice d'assemblage de l'élément  $e$ ,  $\mathbf{q}^e$  les coordonnées généralisées locales de l'élément et  $\mathbf{q}$  les coordonnées généralisées globales de la structure. De cette manière, la matrice complète du système se construit, en prenant par exemple celle de raideur, en sommant toutes les matrices élémentaires

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^\top \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \quad (\text{A.15})$$

ou encore, en utilisant une matrice d'assemblage globale  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{K}_e^{N_e} \end{bmatrix} \mathbf{A} \quad (\text{A.16})$$

# Détermination des matrices de raideurs pour les éléments 3D volumiques

On fournit dans cette annexe la démarche de calcul des matrices de raideurs non-linéaires des éléments 3D volumiques, ainsi que les matrices jacobiniennes associées à ces efforts.

## Notations

Dans cette annexe la notation de la dérivée sera telle que, soit  $a(x, y, z)$  une fonction scalaire des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ , sa dérivée partielle par rapport à  $x$  par exemple sera notée

$$a_x = \frac{\partial a}{\partial x} \quad (\text{B.1})$$

De plus, le formalisme adopté étant celui du Lagrangien total, les volumes d'intégrations  $\Omega$  sont relatifs à la géométrie initiale de la structure.

## 1 Déplacements

Les déplacements généraux 3D sont donnés par

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

## 2 Déformations et contraintes

Afin de prendre en compte les effets non-linéaires géométriques, le tenseur de Green-Lagrange non linéarisé est considéré. Appliqué aux déplacements (B.2) cela mène aux

déformations suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^\top \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla^\top \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \\
&= \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_{nl} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_x & u_y + v_x & u_z + w_x \\ u_y + v_x & 2v_y & v_z + w_y \\ u_z + w_x & v_z + w_y & 2w_z \end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 & u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y & u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z \\ u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y & u_y^2 + v_y^2 + w_y^2 & u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z \\ u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z & u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z & u_z^2 + v_z^2 + w_z^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Ce tenseur étant symétrique, il est judicieux dans ce cas d'utiliser la notation de Voigt pour l'exprimer

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{yz} \\ 2E_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ v_y \\ w_z \\ u_y + v_x \\ v_z + w_y \\ u_z + w_x \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 \\ u_y^2 + v_y^2 + w_y^2 \\ u_z^2 + v_z^2 + w_z^2 \\ 2(u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y) \\ 2(u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z) \\ 2(u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z) \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

ainsi que les contraintes

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{E} \tag{B.5}$$

avec  $\mathbf{D}$  le tenseur d'élasticité (I.11) donné au premier chapitre.

### 2.1 Déformations linéaires

La partie linéaire du tenseur de Green-Lagrange (B.4) peut s'exprimer en fonction des dérivées des différents déplacements à l'aide d'une matrice booléenne telle que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= \begin{bmatrix} u_x \\ v_y \\ w_z \\ u_y + v_x \\ v_z + w_y \\ u_z + w_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

### 2.2 Déformations non-linéaires

De même que pour les déformations linéaires, la partie non-linéaire du tenseur de Green-Lagrange (B.4) peut s'exprimer en fonction des dérivées des différents déplacements,

sauf que dans ce cas, la matrice utilisée dépend aussi de ces dérivées.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{nl}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 \\ u_y^2 + v_y^2 + w_y^2 \\ u_z^2 + v_z^2 + w_z^2 \\ 2(u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y) \\ 2(u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z) \\ 2(u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_x & 0 & 0 & v_x & 0 & 0 & w_x & 0 & 0 \\ 0 & u_y & 0 & 0 & v_y & 0 & 0 & w_y & 0 \\ 0 & 0 & u_z & 0 & 0 & v_z & 0 & 0 & w_z \\ u_y & u_x & 0 & v_y & v_x & 0 & w_y & w_x & 0 \\ 0 & u_z & u_y & 0 & v_z & v_y & 0 & w_z & w_y \\ u_z & 0 & u_x & v_z & 0 & v_x & w_z & 0 & w_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{H}_{\text{nl}}(\mathbf{u}) \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

### 3 Passage aux éléments finis

La première étape de la méthode des éléments finis consiste à discrétiser spatialement le problème. Les déplacements (B.2) peuvent alors s'exprimer

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, y, z, t) &= \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{q}(t) \\
&= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^u \\ q_1^v \\ q_1^w \\ \vdots \\ q_n^u \\ q_n^v \\ q_n^w \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

avec  $\mathbf{N}$  les fonctions d'interpolation spatiales et  $\mathbf{q}$  les déplacements aux nœuds des éléments.

Il est de même possible d'exprimer les dérivées spatiales des déplacements à l'aide des

dérivées des fonctions d'interpolation

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 & 0 \\ N_{1,y} & 0 & 0 & \cdots & N_{n,y} & 0 & 0 \\ N_{1,z} & 0 & 0 & \cdots & N_{n,z} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & \cdots & 0 & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \cdots & 0 & N_{n,y} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & 0 & \cdots & 0 & N_{n,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & 0 & N_{n,x} \\ 0 & 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & 0 & N_{n,y} \\ 0 & 0 & N_{1,z} & \cdots & 0 & 0 & N_{n,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^u \\ q_1^v \\ q_1^w \\ \vdots \\ q_n^u \\ q_n^v \\ q_n^w \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$= \mathbf{G}\mathbf{q}$$

et ainsi d'avoir une forme discrète des déformations linéaires

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l &= \mathbf{H}_l \mathbf{G}\mathbf{q} \\ &= \mathbf{B}_l \mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

et non-linéaires

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{nl} &= \frac{1}{2} \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{q}) \mathbf{G}\mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) \mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

## 4 Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels est ensuite appliqué

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V}_i &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\delta \mathbf{E}_l + \delta \mathbf{E}_{nl})^T \mathbf{D}(\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_{nl}) \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

En utilisant les expressions discrétisées déterminées précédemment (B.10) et (B.11)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E}_l + \delta \mathbf{E}_{nl} &= \mathbf{B}_l \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \\ &= (\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q})) \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\delta \mathcal{V}_i = \delta \mathbf{q}^T \left[ \int_{\Omega} (\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}))^T \mathbf{D} \left( \mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) \right) \, d\Omega \right] \mathbf{q} \quad (\text{B.14})$$

on peut déterminer les matrices de raideur linéaires et non-linéaires du système

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^T \mathbf{D} \mathbf{B}_l \, d\Omega \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{K}^q(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{q}) \mathbf{D} \mathbf{B}_l \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) \, d\Omega \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{K}^c(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{q}) \mathbf{D} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) \, d\Omega \quad (\text{B.17})$$



Il est à noter que ces expressions sont bien identiques à celles obtenues à l'aide des équations de Lagrange au premier chapitre 1.2.

## 5 Matrices jacobienne

La résolution d'un système non-linéaire nécessite le calcul de la matrice jacobienne de celui-ci. Afin d'éviter de devoir le calculer par différences finies, il est judicieux de fournir la matrice jacobienne du système directement au solveur. On donne dans la suite les matrices jacobienne des différents termes de raideur.

### 5.1 Efforts linéaires

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}^l &= d(\mathbf{K}\mathbf{q}) \\ &= \mathbf{K} d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{f}^l &= \frac{d\mathbf{f}^l}{d\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{K} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

### 5.2 Efforts quadratiques

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}^q &= d(\mathbf{K}^q(\mathbf{q})\mathbf{q}) \\ &= d\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_1^T(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}_1 d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mathbf{B}_1^T\mathbf{D}\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) d\Omega\right) \\ &= \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_1^T\mathbf{D}\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}_1 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} S_{xx}^l & S_{xy}^l & S_{xz}^l \\ S_{yy}^l & S_{yz}^l \\ \text{Sym} & S_{zz}^l \end{bmatrix}\right) \mathbf{G} d\Omega\right) d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{f}^q &= \frac{d\mathbf{f}^q}{d\mathbf{q}} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_1^T\mathbf{D}\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}_1 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} S_{xx}^l & S_{xy}^l & S_{xz}^l \\ S_{yy}^l & S_{yz}^l \\ \text{Sym} & S_{zz}^l \end{bmatrix}\right) \mathbf{G} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Il est intéressant de remarquer ici que, contrairement au efforts non-linéaires quadratiques, la jacobienne qui leurs est associée est symétrique.

## 5.3 Efforts cubiques

$$\begin{aligned}
d\mathbf{f}^c &= d(\mathbf{K}^c(\mathbf{q})\mathbf{q}) \\
&= d\left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) d\Omega\right) \\
&= \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \left( \mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} S_{xx}^{nl} & S_{xy}^{nl} & S_{xz}^{nl} \\ S_{yy}^{nl} & S_{yz}^{nl} & \\ \text{Sym} & & S_{zz}^{nl} \end{bmatrix} \right) \mathbf{G} d\Omega \right) d\mathbf{q}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\mathbf{f}^c &= \frac{d\mathbf{f}^c}{d\mathbf{q}} \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \left( \mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} S_{xx}^{nl} & S_{xy}^{nl} & S_{xz}^{nl} \\ S_{yy}^{nl} & S_{yz}^{nl} & \\ \text{Sym} & & S_{zz}^{nl} \end{bmatrix} \right) \mathbf{G} d\Omega
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Cette jacobienne étant aussi symétrique, cela implique que la jacobienne des efforts non-linéaires totaux est aussi symétrique, par symétrie de [B.21](#). Cela permet de plus d'affirmer que la matrice de raideur du système préchargé ([I.38](#)) est symétrique.



# Détails des éléments volumiques hexaédriques

On fournit dans cette annexe les données des éléments hexaédriques utilisés dans ce mémoire.

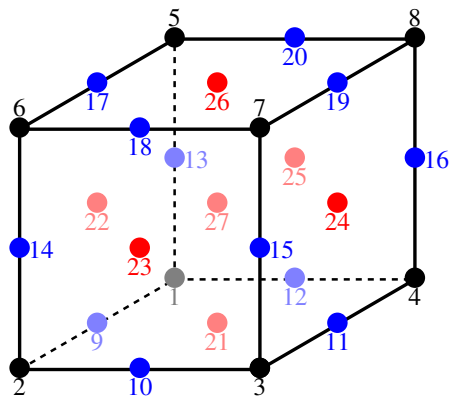


Figure C.1 – Maille hexaédrique

## 1 Coordonnées des nœuds

Tableau C.1 – Coordonnées des nœuds

N° nœud	$x_i$	$y_i$	$z_i$	N° nœud	$x_i$	$y_i$	$z_i$	N° nœud	$x_i$	$y_i$	$z_i$
1	-1	-1	-1	9	0	-1	-1	21	0	0	-1
2	1	-1	-1	10	1	0	-1	22	0	-1	0
3	1	1	-1	11	0	1	-1	23	1	0	0
4	-1	1	-1	12	-1	0	-1	24	0	1	0
5	-1	-1	1	13	-1	-1	0	25	-1	0	0
6	1	-1	1	14	1	-1	0	26	0	0	1
7	1	1	1	15	1	1	0	27	0	0	0
8	-1	1	1	16	-1	1	0	-	-	-	-
-	-	-	-	17	0	-1	1	-	-	-	-
-	-	-	-	18	1	0	1	-	-	-	-
-	-	-	-	19	0	1	1	-	-	-	-
-	-	-	-	20	-1	0	1	-	-	-	-

## 2 Fonctions d'interpolation

### 2.1 Élément hexaédrique à 8 nœuds H8

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{8}(1 + x_i x)(1 + y_i y)(1 + z_i z) \quad (\text{C.1})$$

### 2.2 Element hexaédrique à 20 nœuds H20

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{8}(1 + x_i x)(1 + y_i y)(1 + z_i z)(-2 + x_i x + y_i y + z_i z), \quad i \in \llbracket 1 \ 8 \rrbracket \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned}
N_9(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 - y)(1 - z) \\
N_{10}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)(1 + x)(1 - z) \\
N_{11}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 + y)(1 - z) \\
N_{12}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)(1 - x)(1 - z) \\
N_{13}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - z^2)(1 - x)(1 - y) \\
N_{14}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - z^2)(1 + x)(1 - y) \\
N_{15}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - z^2)(1 + x)(1 + y) \\
N_{16}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - z^2)(1 - x)(1 + y) \\
N_{17}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 - y)(1 + z) \\
N_{18}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)(1 + x)(1 + z) \\
N_{19}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 + y)(1 + z) \\
N_{20}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)(1 - x)(1 + z)
\end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

## 2.3 Élément hexaédrique à 27 nœuds H27

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{8} x(x + x_i) y(y + y_i) z(z + z_i), \quad i \in \llbracket 1 \ 8 \rrbracket \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned}
N_9(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)y(y - 1)z(z - 1) \\
N_{10}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)x(x + 1)z(z - 1) \\
N_{11}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)y(y + 1)z(z - 1) \\
N_{12}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)x(x - 1)z(z - 1) \\
N_{13}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - z^2)x(x - 1)y(y - 1) \\
N_{14}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - z^2)x(x + 1)y(y - 1) \\
N_{15}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - z^2)x(x + 1)y(y + 1) \\
N_{16}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - z^2)x(x - 1)y(y + 1) \\
N_{17}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)y(y - 1)z(z + 1) \\
N_{18}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)x(x + 1)z(z + 1) \\
N_{19}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)y(y + 1)z(z + 1) \\
N_{20}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)x(x - 1)z(z + 1) \\
N_{21}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 - y^2)z(z - 1) \\
N_{22}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 - z^2)y(y - 1) \\
N_{23}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)(1 - z^2)x(x + 1) \\
N_{24}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 - z^2)y(y + 1) \\
N_{25}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - y^2)(1 - z^2)x(x - 1) \\
N_{26}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 - y^2)z(z + 1) \\
N_{27}(x, y, z) &= (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)
\end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

## 3 Intégration numérique

Tableau C.2 – Points et poids

Nombre de points	Coordonnées	Poids
1	0	2
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{\frac{6}{5}}}$
	$\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{\frac{6}{5}}}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-4\sqrt{\frac{5}{14}}}$	$\frac{161}{450} + \frac{13}{180\sqrt{\frac{5}{14}}}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+4\sqrt{\frac{5}{14}}}$	$\frac{161}{450} - \frac{13}{180\sqrt{\frac{5}{14}}}$

# Publications personnelles

## Revue internationale avec comité de lecture

- A. Martin and F. Thouverez. Dynamic analysis and reduction of a cyclic symmetric system subjected to geometric nonlinearities. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 141(4), 041027–041027-8, 2018. [[hal-01863238](#)]

## Colloques internationaux avec actes publiés

- A. Martin and F. Thouverez. Dynamic analysis and reduction of a cyclic symmetric system subjected to geometric nonlinearities. *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2018*, Oslo (Norway), June 11-15, 2018.

## Colloques nationaux avec actes publiés

- A. Martin, B. Chouvion et F. Thouverez. Étude harmonique et réduction des systèmes non-linéaires géométriques : application au cas des éléments 3D volumiques. *Congrès Français de Mécanique 2017*, Lille, 28 Aout-1<sup>er</sup> Septembre 2017. [[hal-01714235](#)]





## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

Mme E. SADOULET-REBOUL

Maître de Conférences - ENSMM - Département Mécanique Appliquée Equipes V3MQI –  
D-SMART - UFC - UFR ST - 15B avenue des Montboucons - 25030 Besançon cedex

et de

M. P. ARGOUL

Maître de Conférences HDR - Ecole des Ponts ParisTech / IFSTTAR - Bâtiment Vicat –  
6-8 avenue Blaise Pascal - Cité Descartes - Champs-sur-Marne - 77455 Marne-la-Vallée cedex  
2

**Monsieur MARTIN Adrien**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 15 octobre 2019

P/Le directeur de l'E.C.L.  
Le directeur des Etudes

