UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Année : 2019 N°. d'ordre : 138

**THÈSE DE DOCTORAT**

**Spécialité : Informatique**

Présentée par

**Moustapha MBAYE**

---

# Multiplexage spatial dans le contexte des systèmes de communication MIMO large bande

---

Soutenue le 26 Octobre 2019 devant un jury composé de :

---

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Président** | Hamidou DATHE | Professeur Titulaire | UCAD, Sénégal |
| **Rapporteurs** | Maryline HELARD | Professeur | INSA, Rennes |
| | Maria D. MIRANDA | Professeur | Univ. São Paulo, Brésil |
| **Examinateurs** | Djiby SOW | Professeur Titulaire | UCAD, Sénégal |
| | Ibra DIOUM | Maître de Conférences (CAMES) | UCAD, Sénégal |
| | Ahmed Dooguy KORA | Maître de Conférences (CAMES) | ESMT, Sénégal |
| **Co-Directeurs de thèse** | Moussa DIALLO | Maître de Conférences (CAMES) | UCAD, Sénégal |
| | Mamadou MBOUP | Professeur | Univ. de Reims, France |
| **Directeur de thèse** | Cheikh Ahmadou Bamba GUEYE | Maître de Conférences (CAMES) | UCAD, Sénégal |

# Résumé

Dans un système de communication MIMO large bande, les signaux reçus sur les différentes antennes de réceptions constituent un mélange convolutif des signaux issus des différentes antennes d'émission. Dans ce cas, la fonction de transfert du canal MIMO peut être représentée par une matrice polynomiale. Le signal enregistré sur chaque antenne de réception est la superposition des signaux provenant des différentes antennes d'émission provoquant ainsi de l'interférence co-canal. Dans cette thèse nous avons proposé un schéma de multiplexage spatial dans le domaine temporel qui transforme le canal MIMO large bande en plusieurs canaux SISO équivalents totalement indépendants sur lesquels des flux de données distincts sont transmis. Cette approche est connue sous le nom de multiplexage spatial. Elle consiste à placer un pré et post-filtre respectivement en émission et en réception pour pré-compenser et éliminer les interférences entre canaux (co-canal). Les fonctions de transfert de ces filtres sont obtenues à partir de décomposition de la matrice polynomiale représentant la fonction de transfert du canal MIMO.

À cet effet, nous avons proposé une méthode de décomposition de matrice polynomiale, basée sur la méthode LU classique, nous l'avons appelé LU-PMD. Elle effectue une diagonalisation parfaite de la matrice du canal. Cependant les filtres issus de cette factorisation ne sont pas para-unitaires. Ils amplifient le bruit et donc dégradent les performances du système. L'analyse des performances du schéma proposé en termes de taux d'erreur binaire est faite dans une chaine de transmission MIMO-OFDM. Ces performances ont été comparées avec celles d'un schéma de multiplexage spatial basé sur la décomposition QR de matrice polynomiale. De bons résultants sont obtenus lorsque le rapport signal à bruit est élevé. Nous avons aussi montré que notre méthode convient aussi bien en multiporteuses qu'en mono-porteuse. Nous avons aussi proposé un schéma de multiplexage spatial en MIMO-OFDM sans préfixe cyclique dont l'une des antennes est redondante.

L'analyse de l'amplification du bruit montre qu'il est dû au mauvais conditionnement de la matrice de post-codage. Deux solutions simples et efficaces ont alors été proposées. La première est une normalisation du post-filtre, en utilisant un équilibrage des lignes pour améliorer le conditionnement. La deuxième méthode proposée est basée sur une permutation entre post-filtre et pré-filtre. Ce dernier étant mieux conditionné, son utilisation en post-filtrage permet d'améliorer encore mieux les performances du système.

**Mots-clé :**

MIMO, Multiplexage spatial, OFDM, Beamforming, Décomposition de matrice polynômiale, Système de communication large bande.

# Spatial multiplexing in Widebande MIMO communications

# Abstract

In wideband MIMO communication system, the received signal on the different antennas is a convolutive mixture of the signals coming from the different transmit antennas. In this case, the transfer function of the MIMO channel can be represented by a polynomial matrix. The signal recorded at each receive antenna is the superposition of the outputs of the subchannels originating from the different transmit antennas. This causes co-channel interference (CCI). In this thesis we propose a time-domain spatial multiplexing scheme which transforms the wideband MIMO channel into several independent SISO sub-channels, thereby cancelling the CCI, on which data streams are transmitted. This approach is known as spatial multiplexing. It consists in inserting a pre and post-filter into the transmission chain respectively at transmitter and receiver in order to precompensate and eliminate inter-channel interference. The transfer functions of these filters are obtained from the decomposition of the polynomial matrix representing the transfer function of the MIMO channel.

For this purpose, we have proposed a polynomial matrix decomposition method, based on the classical LU, called LU-PMD. Unlike other polynomial matrix decomposition algorithms, it performs a perfect diagonalization. However, the resulting filters from this factorization are not paraunitary. They amplify the output noise power and thus degrade the performance of the system. The performance analysis in terms of bit error rate of the proposed scheme, in MIMO-OFDM context, is compared with the other methods. Good results are obtained when the signal-to-noise ratio increases. We have also shown that our method is suitable for both multi-carrier and single carrier. We have also proposed a spatial multiplexing scheme in a MIMO-OFDM transmission chain without cyclic prefix of which one of the antennas is chosen as redundant.

Our investigations into the output noise enhancement show that it is due to the ill-conditioning of the post-coding matrix. Two efficient solutions were proposed. The first one is a normalization of the postcoding matrix, by using a row balancing, to improve the conditioning of the postfilter, and thereby the performance of the system. The second method proposed is based on a permutation of the post-filter and the pre-filter in order to benefit from well-conditioned precoding matrix. This is sufficient to improve even better the performance of the system.

**Keywords :**

MIMO, Spatial multiplexing, OFDM, Beamforming, Polynomial matrix decomposition, Wideband communication system.

# Dédicaces

***Loué soit ALLAH qui m'a noyé dans son immense océan de Miséricorde afin que ce travail puisse être accompli.***
***Prière et salut soient sur Le prophète Mouhamed par le biais de son Serviteur privilégié Cheikh Ahmadou Bamba dont je me réclame à tout jamais.***

Ceci dit je dédie ce travail

***À mes chers parents,***
***Ma maman, Anta dont aucune réalisation de ma part aussi grandiose qu'elle soit ne saurait compenser tous les sacrifices et tous les efforts consentis pour notre éducation et notre réussite.***
***Mon papa qui a œuvré toute sa courte vie pour que je ne manque de rien.***

***À ma femme, Maty,***
***qui a été toujours présente à mes cotés pour me soutenir et m'encourager.***

***À mes frères et sœurs,***
***votre affection et vos encouragements ont été pour moi des plus précieux.***

***À mes amis,***
***vos encouragement et soutient indéfectible m'ont été d'une grande aide.***

***À tous les membres de ma famille.***

# Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur **Moussa DIALLO**, Professeur à l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Qu'il soit remercié pour sa gentillesse et pour toute l'aide sociale sans laquelle cette thèse n'aboutirait pas.

Je remercie Monsieur **Mamadou MBOUP**, Professeur à l'Université de Reims, co-directeur de cette thèse. En effet cette thèse est le fruit d'une longue collaboration. Qu'il soit remercié de tout son apport scientifique. C'est à ses côtés que j'ai compris ce que rigueur et précision voulaient dire.

Je remercie Monsieur **Cheikh Ahmadou Bamba GUEYE**, Professeur à l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar, de sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements et conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de cette thèse.

J'adresse tous mes remerciements à Madame **Maryline HELARD**, Professeure à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Rennes, en France, ainsi qu'à Madame **Maria D. MIRANDA**, Professeure à l'Université de São Paulo, au Brésil. Elles m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs remarques précieuses m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle.

J'exprime ma gratitude et mes remerciements à Monsieur **Djiby SOW**, Professeur titulaire à l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar, monsieur **Ibra DIOUM**, Professeur à l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar et monsieur **Ahmed D. KORA**, Professeur à l'ESMT qui ont bien voulu être examinateurs de cette thèse.

J'exprime aussi ma gratitude et mes remerciements à Monsieur **Hamidou DATHE**, Professeur titulaire à l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar qui a bien voulu présider le jury de ma soutenance.

Je remercie l'ensemble des doctorants, le corps enseignant et administratif de la faculté des sciences et technique (FST/UCAD), de l'école supérieure polytechnique (ESP) et de l'école supérieure de technologie et management (ESTM).

# Table des matières

**Notations** **xxiii**

**Introduction** **1**

0.1 Motivation . . . . . 1

0.2 Objectifs de la thèse . . . . . 2

0.3 Structure de la thèse . . . . . 3

**1 Technologie MIMO** **7**

1.1 Introduction . . . . . 9

1.2 Canal de propagation . . . . . 10

1.2.1 Aspects physiques de la propagation . . . . . 10

1.2.2 Réponse impulsionnelle d'un canal SISO multi-trajets . . . . . 11

1.2.3 Réponse impulsionnelle d'un canal MIMO multi-trajets . . . . . 13

1.2.4 Caractérisation du canal de transmission . . . . . 13

1.2.5 Modèle probabiliste du canal de transmission . . . . . 15

1.3 La diversité . . . . . 17

1.3.1 Principe . . . . . 17

1.3.2 Types de diversité . . . . . 19

1.3.3 Technique de diversité Mixte (Combining) . . . . . 21

1.3.4 Gain d'antennes . . . . . 24

1.4 Modélisation du canal MIMO . . . . . 25

1.4.1 Modélisation pour canal MIMO non sélectif en fréquence . . . . 26

1.4.2 Modélisation pour canal MIMO sélectif en fréquence . . . . . 29

1.5 Techniques de transmission MIMO . . . . . 32
1.5.1 Codage spatio-temporel (CST) . . . . . 32
1.5.2 Multiplexage spatial (MS) . . . . . 34
1.5.3 “Eigen-beamforming” dans un sytème MIMO à bande étroite . . 38
1.6 Techniques de détection en MIMO avec multiplexage spatial . . . . . 41
1.6.1 Détecteur à maximum de vraisemblance . . . . . 42
1.6.2 Critère de forçage à zéro (ZF : Zero Forcing) . . . . . 42
1.6.3 Récepteur minimisant l’erreur quadratique moyenne . . . . . 43
1.6.4 Décodage par soustraction successive d’interférences . . . . . 43
1.7 Système MIMO à large bande . . . . . 44
1.7.1 Codage vectoriel spatio-temporel . . . . . 44
1.7.2 Association MIMO-OFDM . . . . . 46
1.7.3 Utilisation de la décomposition de matrice polynômiale . . . . . 47
1.8 Capacité des systèmes multi-antennes . . . . . 48
1.9 Conclusion . . . . . 50

**2 État de l’art de la Décomposition de Matrice Polynomiale 53**

2.1 Introduction . . . . . 55
2.2 Préliminaires . . . . . 56
2.3 Problématique et objectifs . . . . . 57
2.4 Décomposition EVD de Matrice Polynomiale (PMEVD) . . . . . 59
2.4.1 Décomposition EVD . . . . . 59
2.4.2 Extension aux matrices polynômiales (PMEVD) . . . . . 59
2.4.3 PEVD avec l’algorithme SBR2 (Sequential Best Rotation) . . . . . 60
2.4.4 Discussions . . . . . 63
2.5 Décomposition QR d’une matrice Polynomiale . . . . . 64
2.5.1 Factorisation QR d’une matrice de scalaires . . . . . 64
2.5.2 Décomposition QR polynomiale (PQRD) . . . . . 65
2.5.3 Rotation de Givens polynomiale élémentaire . . . . . 65

2.5.4 Rotation Givens polynomiale complète . . . 67
2.5.5 L'algorithme de Décomposition QR par colonne . . . 67
2.5.6 Troncation des matrices polynômiales . . . 68
2.5.7 Discussions . . . 69
2.6 Décomposition SVD de matrice polynômiale (PMSVD) . . . 70
2.6.1 Décomposition SVD scalaire . . . 70
2.6.2 PMSVD avec l'algorithme SBR2 . . . 70
2.6.3 PMSVD par l'utilisation de l'algorithme QR . . . 71
2.6.4 Discussion . . . 73
2.7 Résultats de simulation avec QR-PMSVD . . . 73
2.7.1 Qualité de décomposition . . . 74
2.7.2 Ordre de la matrice diagonale . . . 78
2.8 Conclusion . . . 79

**3 Décomposition LU de Matrice polynômiale 81**
3.1 Introduction . . . 82
3.2 Principes . . . 82
3.3 Présentation de la méthode : exemple de matrice $(4 \times 4)$ . . . 84
3.4 Cas général . . . 87
3.4.1 Étape de réduction . . . 88
3.4.2 Étape d'élimination Gaussienne LU . . . 92
3.4.3 Étape de factorisation . . . 93
3.5 Discussions . . . 96
3.6 Résultat Simulations . . . 97
3.7 Conclusion . . . 99

**4 Multiplexage Spatial (MS) avec LU-PMD 101**
4.1 Introduction . . . 102
4.2 Décomposition parallèle du canal MIMO large-bande . . . 103
4.3 Multiplexage Spatial (MS) avec LU-PMD . . . 104

4.3.1 Principe général du MS en MIMO large-bande . . . . . 104
4.3.2 Schéma de multiplexage avec LU-PMD . . . . . 107
4.3.3 Schéma de multiplexage avec QR-PMSVD . . . . . 108
4.4 Étude des capacités (Sum-rate capacity) . . . . . 109
4.4.1 Calcul de capacité avec la décomposition LU-PMD . . . . . 109
4.4.2 Calcul de capacité avec la décomposition QR-PMSVD . . . . . 110
4.5 Résultats de simulation . . . . . 111
4.5.1 Comparaisons des taux de capacité (“Sum-rate capacity”) . . . . . 111
4.5.2 Comparaison de complexité . . . . . 114
4.6 Conclusion . . . . . 114

**5 Analyse des performances dans un système MIMO-OFDM et MIMO-SC avec Multiplexage Spatial V-BLAST 117**

5.1 Introduction . . . . . 118
5.2 Multiplexage Spatial en MIMO-OFDM . . . . . 119
5.2.1 Principe de l’OFDM . . . . . 119
5.2.2 Multiplexage Spatial dans le domaine fréquentiel (FDSM) . . . . 119
5.2.3 Multiplexage Spatial dans le domaine temporel . . . . . 122
5.2.4 Comparaison des performances . . . . . 124
5.2.5 Nouveau schéma TDSM avec une antenne de redondance (ORA-SM) 128
5.3 Multiplexage Spatial en MIMO mono-porteuse (MIMO-SC) . . . . . 130
5.3.1 Principe de multiplexage spatial en MIMO-SC . . . . . 130
5.3.2 Analyse des performances . . . . . 132
5.4 Conclusion . . . . . 134

**6 Optimisation du filtre de post-codage en multiplexage spatial avec LU-PMD 137**

6.1 Introduction . . . . . 138
6.2 Description de la problématique du bruit . . . . . 138
6.2.1 Amplification de la puissance du bruit . . . . . 139
6.2.2 Problématique de conditionnement de la matrice de post-codage 140

6.3 Optimisation par équilibrage de vecteurs . . . . . 142
6.3.1 Principe . . . . . 142
6.3.2 Comparaison des performances . . . . . 143
6.4 Optimisation par permutation de filtres . . . . . 146
6.4.1 Principe . . . . . 146
6.4.2 Comparaison de performances . . . . . 148
6.5 Conclusion . . . . . 150

**Conclusions et perspectives** **151**
7.1 Conclusions . . . . . 151
7.2 Perspectives . . . . . 154

**A Liste des publications** **157**
A.1 Revue Internationale . . . . . 157
A.2 Conférences Internationales . . . . . 157

**Bibliographie** **172**

# Table des figures


1.1 Propagation multi-trajets en MIMO. . . . . 18
1.2 Combinaison de signaux dans un canal à évanouissement. . . . . 19
1.3 Illustration de la diversité temporelle. . . . . 20
1.4 Illustration de la diversité fréquentielle. . . . . 20
1.5 Illustration de la combinaison par commutation. . . . . 22
1.6 Illustration de la combinaison par sélection. . . . . 22
1.7 Illustration de la combinaison par gain égal. . . . . 23
1.8 Illustration de la Combinaison par Rapport Maximal. . . . . 24
1.9 Représentation du canal MIMO . . . . . 32
1.10 Structure d'un codeur spatio-temporel . . . . . 33
1.11 Structure d'un émetteur D-BLAST . . . . . 36
1.12 Structure d'un émetteur H-BLAST . . . . . 37
1.13 Architecture d'un émetteur V-BLAST . . . . . 37
1.14 Processus de codage V-BLAST . . . . . 38
1.15 Représentation d'un MIMO à bande étroite . . . . . 39
1.16 Illustration du "Eigenbeamforming" . . . . . 41
1.17 Chaine de transmission MIMO-OFDM . . . . . 46
1.18 Évolution de la capacité du canal avec le nombre d'antenne . . . . . 49

2.1 Représentation espace-temps des coefficients de la matrice d'entrée $A(z)$ $(3 \times 3)$ . . . . . 75
2.2 Représentation espace-temps des coefficients de la matrice diagonalisée $D(z)$ $(3 \times 3)$ avec QR-PMSVD . . . . . 75

2.3 Représentation espace-temps des coefficients de la matrice d'entrée $A(z)$ $(4 \times 4)$ . . . . . 76
2.4 Réponse impulsionnelle de la matrice diagonalisée $D(z)$ $(4 \times 4)$ avec QR-PMSVD . . . . . 76
2.5 Coefficients d'un élément hors diagonale de $D(z)$ avec QR-PMSVD . . . 77
2.6 Plus grande amplitude hors diagonale ***vs*** itérations avec QR-PMSVD . . 78
2.7 Ordre de la matrice polynomiale $D(z)$ avec QR-PMSVD . . . . . 79

3.1 Représentation espace-temps des coefficients de la matrice d'entrée $H(z)$ $(3 \times 3)$ . . . . . 97
3.2 Représentation espace-temps des coefficients de la matrice diagonalisée $D(z)$ $(3 \times 3)$ avec LU-PMD. . . . . 98
3.3 Représentation espace-temps des coefficients de la matrice d'entrée $H(z)$ $(4 \times 4)$ . . . . . 98
3.4 Représentation espace-temps des coefficients de la matrice $D(z)$ $(4 \times 4)$ obtenue par la décomposition LU-PMD. . . . . 99

4.1 Illustration du précodage et postcodage . . . . . 106
4.2 illustration des canaux SISO équivalent . . . . . 106
4.3 Comparaison de capacité en MIMO $2 \times 2$ . . . . . 112
4.4 Comparaison de capacité en MIMO $3 \times 3$ . . . . . 113

5.1 Chaine MIMO-OFDM avec FDSM . . . . . 121
5.2 Chaine MIMO-OFDM avec TDSM . . . . . 123
5.3 Comparaison de BER entre FDSM, TDSM avec LU-Polynomial Matrix Decomposition (LU-PMD), et TDSM avec QR-PMSVD . . . . . 126
5.4 Comparaison de BER entre FDSM, TDSM avec LU-PMD, et TDSM avec QR-PMSVD. CP étendu pour QR-PMSVD. . . . . 127
5.5 Diagramme de constellation pour la modulation $4$-QAM au niveau des $3$ antennes de réception. . . . . 128
5.6 Comparaison de BER entre FDSM, TDSM avec LU-PMD et ORA-SM en OFDM sans CP. . . . . 130
5.7 Chaine TDSM en MIMO-SC . . . . . 131

5.8 Comparaison de BER en MIMO-SC entre LU-PMD et QR-PMSVD. . . . . 133
5.9 Comparaison de BER en MIMO-SC entre LU-PMD, QR-PMSVD et ORA-SM de LU-PMD. . . . . 133

6.1 Comparaison de BER pour différentes valeurs de la puissance de la matrice de post-codage. . . . . 139
6.2 Comparaison de BER pour différentes valeurs de conditionnement de la matrice de post-codage. . . . . 141
6.3 Comparaison de BER entre les deux post-filtres : Modèle de canal ITU intérieur. . . . . 144
6.4 Comparaison de BER entre les deux post-filtres : Modèle de canal ITU extérieur. . . . . 144
6.5 Comparaison de BER entre les deux post-filtres : Modèle de canal ITU extérieur. . . . . 145
6.6 Comparaison de BER entre LU-PMD par permutation de filtre et la méthode classique. . . . . 149
6.7 Comparaison de BER entre LU-PMD par permutation de filtre et la méthode classique. . . . . 149
6.8 Comparaison de BER pour différentes valeurs de la puissance de la matrice de post-codage. . . . . 150

**A Appendix A** **157**

# Liste des tableaux

4.1 Longueur maximale (nombre de coefficients) des filtres RIF pré-codeur et post-codeur . . . . . 114

5.1 Paramètres de Simulation . . . . . 124

5.2 Paramètres de Simulation . . . . . 132

6.1 Comparaison de puissance et conditionnement . . . . . 143

6.2 Comparaison de puissance et conditionnement . . . . . 148

# Liste des Abréviations

| | |
|---|---|
| **AWGN** | Additive White Gaussian Noise |
| **BER** | Bit Error Rate |
| **BLAST** | “Bell-Labs LAyered Space-Time” |
| **CCI** | Co-Channel Interference |
| **CP** | Cyclic Prefix |
| **CSI** | Canal State Information |
| **CSIT** | CSI at the Transmitter |
| **CSTB** | Codes Spatio-Temporel en Bloc |
| **CSTT** | Codes Spatio-Temporel en Treillis |
| **CST** | Codage Spatio-Temporel |
| **D-BLAST** | Diagonal BLAST |
| **DFT** | Discret Fourier Transform |
| **DMMT** | Discrete Matrix Multitone |
| **DL** | Down Link |
| **DSP** | Digital Signal Processing |
| **EGC** | Equal Gain Combining |
| **EPGR** | Elementary Polynomail Givens Rotation |
| **EVD** | Eigen-Value Decomposition |
| **FDM** | Frequency Division Multiplexing |
| **FDSM** | Frequency Domaine Spatial Multiplexing |
| **FFT** | Fast Fourier Transform |
| **FIR** | Finite Impluse Response |
| **H-BLAST** | Horizontal BLAST |
| **ICC** | Interférence Co-Canal |
| **IFFT** | Inverse Fast Fourier Transform |
| **UIT** | Union Internationale des Télecommunications |

| | |
|---|---|
| **ISI** | Inter-Symbol Interference |
| **LOS** | “Line Of Sight” |
| **LU-PMD** | LU-Polynomial Matrix Decomposition |
| **LTE** | Long Term Evolution |
| **MF** | Matching Filter |
| **MIMO** | Multiple-Input Multiple-Output |
| **MISO** | Multiple-Input Single-Output |
| **ML** | Maximum-Likelihood |
| **MV** | Maximum de Vraissemblance |
| **MMSE** | Minimum Mean Square Error |
| **MRC** | Maximum Ratio Combining |
| **NOMA** | Non Orthogonal Multiple Access |
| **NLOS** | “Non Line of Sight” |
| **ORA-SM** | One Redundancy Antenna in Spatial Multiplexing |
| **OFDM** | Orthogonal Frequency Division Multiplexing |
| **OSIC** | Ordered Successive Interference Cancellation |
| **PAPR** | Peak-to-Average Power Ratio |
| **PMEVD** | Polynomial Matrix EVD |
| **PMSVD** | Polynomial Matrix SVD |
| **PQRD** | Polynomial QR Decomposition |
| **PQRD-BC** | PQRD By Column |
| **PQRD-BS** | PQRD By Step |
| **PSVD** | Polynomial SVD |
| **QAM** | Quadrature Amplitude Modulation |
| **QoS** | Quality of Service |
| **QR-PMSVD** | QR-Polynomial Matrix SVD |
| **RIF** | Réponse Impulsionnelle Finie |
| **SBR** | Sequential Best Rotation |
| **SC** | Single Carrier |
| **SDC** | Switched diversity Combining |

| | |
|---|---|
| **SNR** | Signal-to-Noise Ratio |
| **SIC** | Successive Interference Cancelling |
| **SIMO** | Single-Input Multiple-Output |
| **SISO** | Single-Input Single-Output |
| **SINR** | Signal Interference to Noise Ration |
| **SM** | Spatial Multiplexing |
| **MS** | Multiplexage Spatial |
| **STVC** | Space-Time Vector Coding |
| **SVD** | Singular Value Decomposition |
| **TDSM** | Time Domaine Spatial Multiplexing |
| **UL** | Up Link |
| **UIT** | Union Internationale des Télécommunications |
| **V-BLAST** | Vertical BLAST |
| **WLAN** | Wireless Local Area Network |
| **WiMax** | Worldwide Interoperability for Microwave Access |
| **ZF** | Zero Forcing |

# Notations

| | |
|---|---|
| $x$ | Scalaire |
| $\boldsymbol{x}$ | Vecteur |
| $x(z)$ | Polynôme |
| $\boldsymbol{x}(\mathsf{z})$ | Vecteur polynomial |
| $X$ | Matrice scalaire |
| $X(z)$ | Matrice polynomiale |
| $X^T$ | Matrice transposée |
| $\{\cdot\}^H$ | Hermitienne conjuguée |
| $\{\cdot\}^*$ | Complexe conjugué |
| $\widetilde{\{\cdot\}}$ | Para-conjuguée hermitienne |
| $I_p$ | Matrice identité $p \times p$ |
| $\|\cdot\|_F$ | Norme de Frobenius |
| $\mathbb{E}\{\cdot\}$ | Espérance mathématique |
| $\mathsf{Tr}(\cdot)$ | Opérateur Trace |
| $\|\cdot\|$ | Valeur absolue |
| $\det$ | Déterminant |
| $\log_2$ | Logarithme à base de 2 |
| $\log_{10}$ | Logarithme à base de 10 |
| $arg$ | Argument |
| $\Re\{\}$ | Partie réelle |
| $diag$ | Elements diagonaux |
| $\min$ | Valeur minimale |
| $\max$ | Valeur maximale |
| $H(z)$ | Matrice polynomiale du canal large bande |
| $D(z)$ | Matrice polynomiale diagonale |
| $L$ | Longueur du canal |
| $B_c$ | Bande de cohérence |
| $N_s$ | Nombre de sous-porteuses |

| | |
|---|---|
| $N_t$ | Nombre d'antenne d'émission |
| $N_r$ | Nombre d'antenne de réceptions |
| $\sigma_n^2$ | Variance du bruit blanc additif gaussien |
| $L_{cp}$ | Taille du préfixe cyclique |
| $z^{-1}$ | Opérateur de retard unitaire |
| $\varepsilon$ | Paramètre d'arrêt |
| $\mu$ | Paramètre de troncature |
| $\beta$ | Nombre d'itérations |

# Introduction

## 0.1 Motivation

La demande d'accès constant à l'Internet avec l'utilisation massive des services et supports multimédias (la voix, l'image et la vidéo) en haute définition, l'exigence aussi des usagers en termes de qualité de services (Quality of Service (QoS)) et l'utilisation accrue des réseaux sociaux font que le haut débit est devenu une nécessité. C'est pourquoi il est nécessaire d'étudier constamment les possibilités d'augmenter les débits montant (Up Link (UL)) et descendant (Down Link (DL)) des systèmes de communications.

Dans un système mono-antenne, (Single-Input Single-Output (SISO)), l'augmentation de la taille de modulation et/ou de la bande de fréquence utilisée sont les seules solutions pour augmenter le débit, avec tous les problèmes de complexité ou d'encombrement que cela entraine.

Dans ce contexte de recherche de hauts débits, Foschini du laboratoire des Bell Labs proposa une solution permettant d'accroître les débits de transmission par l'emploi de réseaux d'antennes à la fois à l'émission et à la réception. Ce système de communication à entrées et sorties multiples est appelé Multiple-Input Multiple-Output (MIMO). Les techniques MIMO établies par les chercheurs de Bell Labs en 1996 montrent que la capacité du canal peut augmenter linéairement en fonction du nombre d'antennes utilisées. Ces systèmes MIMO tirent profit de la multiplicité des trajets de propagation hertzienne pour augmenter la capacité du canal de transmission. La technologie MIMO est l'une des technologies récentes les plus innovatrices dans le monde des communications sans fil. Ce système à entrées multiples et à sorties multiples est une technologie de radiocommunication utilisée en Wi-Fi, Long Term Evolution (LTE), Worldwide Interoperability for Microwave Access (WiMax), la 5G et dans de nombreuses autres technologies radio, sans fil et radio-fréquence. Il permet de fournir une capacité de liaison accrue et une bonne efficacité spectrale combinée à une fiabilité de liaison améliorée en exploitant les interférences constructives dues aux multiples chemins du signal.

La technologie MIMO a été énoncée depuis de nombreuses années mais elle est toujours en pleine expansion. Même si ses concepts basiques ont été formulés, de nouvelles techniques ou niveaux de traitement complémentaires sont toujours en cours de développement. Ces nouvelles approches visent toujours à exploiter au mieux la multiplicité des trajets, apportée par l'augmentation du nombre d'antennes, afin d'augmenter plus encore le débit de transmission et ou d'améliorer la fiabilité de la liaison.

Ainsi diverses techniques ont été suggérées pour permettre aux systèmes de communication sans fil MIMO d'atteindre ces objectifs. Cela relève de trois approches principales : le schéma de multiplexage spatial, le schéma de diversité spatiale et la formation de faisceau. La technique de diversité spatiale vise principalement à améliorer la fiabilité du système car elle est utilisée pour lutter contre l'évanouissement des canaux, tandis que la formation de faisceaux fournit une augmentation significative des performances des systèmes de communication sans fil en concentrant l'énergie du signal dans une direction particulière. Parmi ces 3 approches, le multiplexage spatial est le plus efficace sur le plan spectral car il permet de créer des sous-canaux parallèles sur lesquels des flux de données distincts peuvent être transmis.

En outre la combinaison du MIMO et du multiplexage par répartition de fréquence (Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)) permet d'exploiter la robustesse de la liaison sur des canaux sélectifs en fréquence. Cette aptitude à résister aux évanouissements et aux interférences constitue pour ce système un avantage supplémentaire indéniable.

## 0.2 Objectifs de la thèse

L'étude des systèmes MIMO se décompose en trois domaines dépendant les uns des autres : l'environnement de propagation, les antennes ou capteurs et le traitement de signal. Ce denier domaine joue un rôle primordial. En effet, les trajets multiples dans les systèmes MIMO à large bande, appelé sous-canaux, interfèrent entre eux. On parle dans ce cas d'interférence co-canal (Co-Channel Interference (CCI) en anglais). L'un des objectifs du traitement de signal dans ces systèmes est l'élimination de ces interférences.

À cet effet, des pré-traitements en émission et post-traitements en réception sont effectués pour transformer le canal MIMO avec CCI en un ensemble de sous-canaux virtuellement indépendants et totalement dé-corrélés. Ces sous-canaux virtuels, non interférants, constituent autant de liens par lesquels on peut transmettre l'information. La capacité du canal est, dans ce cas, la somme des capacités obtenues sur chacun de ces sous-canaux

virtuels.

Dans le cas des systèmes MIMO à bande étroite où les signaux émis arrivent quasiment tous en même temps, la réalisation de cette technique s'avère assez simple. En effet, le canal de propagation de ce type de système MIMO peut être modélisé par une matrice de scalaires. Sa diagonalisation, assez simple, permet de déterminer un filtre pré-codeur et un filtre post-codeur dont leur mise en place respectif à l'émission et à la réception permet d'avoir un canal MIMO équivalent à un ensemble de canaux SISO totalement indépendants. Cette approche est connu sous le nom de "Eigen-beamforming". Sa simplicité explique son adoption dans la plupart des études sur les systèmes MIMO.

Cependant, l'augmentation du débit de données nécessite souvent l'utilisation de systèmes de communication sans fil à large bande ou ultra large bande. Or dans un tel système les signaux transmis empruntent des trajets différents et arrivent sur les antennes de réception avec des retards de propagation variables. Dans ce cas, le canal de propagation n'est plus modélisé par une matrice de scalaires simple, mais par des modèles plus complexes telle qu'une matrice polynomiale. La plupart des techniques utilisées transforment le canal large bande en un ensemble de canaux à bandes étroites leur permettant d'appliquer le "Eigen-beamforming". Par contre cette dernière décennies est marquée par le développement des algorithmes de décomposition de matrices polynomiale, devenus de plus en plus précis. Par conséquent, l'élimination ou la diminution des CCI dans un système MIMO large bande peut se faire directement dans le domaine temporel en utilisant la méthode précédemment décrite. Ce travail de thèse aborde dans le même sens.

Notre objectif est donc de présenter une nouvelle approche pour l'amélioration des techniques d'émission et de réception des systèmes MIMO large bande par l'utilisation des filtres de Pré-codage et Post-codage capable de transformer un canal sélectif en fréquence en plusieurs canaux SISO non sélectifs, sans CCI et avec une complexité moindre. Ce travail se fait dans un contexte MIMO mono-utilisateur avec une connaissance parfaite de l'état du canal par l'émetteur. Notre proposition doit présenter des performances capables de rivaliser avec les autres approches quelque soit l'environnement de propagation.

## 0.3 Structure de la thèse

Le travail effectué est présenté en 6 chapitres.

Le **chapitre 1** a pour objectif de faire une présentation des systèmes de communications sans fil multi-antennes. Nous y présentons une études sur le canal de propagation ainsi

que les modèles de canal MIMO suivant le type d'environnement. Il présente notamment les différentes techniques de pré-traitement à l'émission de même que les techniques de séparation et d'égalisation en réception des systèmes MIMO.

Le **chapitre 2** est consacré à l'état de l'art des techniques de décomposition de matrice polynomiale. Il fait une description des algorithmes de factorisation les plus utilisés pour le canal MIMO large bande souvent modélisé par une matrice polynomiale. Chaque méthode présentée dans ce chapitre est discutée en présentant ses points forts et ses faiblesses. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la présentation des résultats numériques de l'algorithme le plus apte à être utilisé dans un système MIMO.

Après ces deux premiers chapitres nous entamerons la partie contribution de cette thèse.

À cet effet, nous présentons dans le **chapitre 3** une méthode simple pour calculer les facteurs d'une décomposition d'une matrice polynomiale. La méthode repose sur la factorisation LU classique et nous la proposons comme une alternative aux imperfections des méthodes présentées en chapitres 2. Elle réalise une diagonalisation complète avec des éléments diagonaux qui sont très souvent des scalaires. Cette méthode de factorisation polynomiale jusqu'ici inexplorée dans un contexte MIMO constitue l'ossature de cette thèse.

Le **chapitre 4** a pour objectif de mettre en application dans un système MIMO, notre méthode de décomposition polynomiale dans un schéma de Multiplexage Spatial (MS) avec une configuration Vertical BLAST (V-BLAST) dans le domaine temporel. L'impact des points forts de notre proposition, ainsi que l'inconvénient de ses filtres qui ont tendance à amplifier le bruit, seront présentés à travers une étude sur la capacité atteignable en comparaison avec d'autres approches.

Le **chapitre 5** est consacré à l'étude des performances du schéma de multiplexage spatial dans le domaine temporel proposé dans les contextes MIMO-OFDM et MIMO monoporteuse (Single Carrier (SC)). Cette étude a pour objectif d'implémenter le schéma dans une chaine de transmission MIMO-OFDM et MIMO-SC complète afin d'analyser ses performances en terme de taux d'erreur binaire (Bit Error Rate (BER)). En outre nous allons exploiter des aspects particuliers de notre méthode pour présenter un nouveau schéma de multiplexage d'une complexité moindre aussi bien adapté en OFDM qu'en monoporteuse.

Dans le **chapitre 6**, qui sera le dernier, il sera question d'optimiser le schéma de multiplexage par une amélioration du post-filtre issu de l'algorithme proposé. Notre objectif est d'apporter des améliorations simples, mais efficaces, sur le post-filtre qui n'est pas de nature para-unitaire afin de rendre le schéma performant quelque soit le type d'en-

vironnement de propagation. Deux solutions seront proposées pour répondre à cette problématique.

Enfin, le document se termine par une conclusion générale qui dresse un bilan du travail effectué et propose quelques perspectives de recherche.

# Chapitre 1

# Technologie MIMO

## Sommaire


**1.1 Introduction . . . . . 9**

**1.2 Canal de propagation . . . . . 10**

1.2.1 Aspects physiques de la propagation . . . . . 10

1.2.2 Réponse impulsionnelle d'un canal SISO multi-trajets . . . . 11

1.2.3 Réponse impulsionnelle d'un canal MIMO multi-trajets . . . . 13

1.2.4 Caractérisation du canal de transmission . . . . . 13

1.2.5 Modèle probabiliste du canal de transmission . . . . . 15

**1.3 La diversité . . . . . 17**

1.3.1 Principe . . . . . 17

1.3.2 Types de diversité . . . . . 19

1.3.3 Technique de diversité Mixte (Combining) . . . . . 21

1.3.4 Gain d'antennes . . . . . 24

**1.4 Modélisation du canal MIMO . . . . . 25**

1.4.1 Modélisation pour canal MIMO non sélectif en fréquence . . 26

1.4.2 Modélisation pour canal MIMO sélectif en fréquence . . . . . 29

**1.5 Techniques de transmission MIMO . . . . . 32**

1.5.1 Codage spatio-temporel (CST) . . . . . 32

1.5.2 Multiplexage spatial (MS) . . . . . 34

1.5.3 "Eigen-beamforming" dans un sytème MIMO à bande étroite 38

**1.6 Techniques de détection en MIMO avec multiplexage spatial . . 41**

1.6.1 Détecteur à maximum de vraisemblance . . . . . 42

1.6.2 Critère de forçage à zéro (ZF : Zero Forcing) . . . . . 42

1.6.3 Récepteur minimisant l'erreur quadratique moyenne . . . . . 43
1.6.4 Décodage par soustraction successive d'interférences . . . . 43
**1.7 Système MIMO à large bande . . . . . 44**
1.7.1 Codage vectoriel spatio-temporel . . . . . 44
1.7.2 Association MIMO-OFDM . . . . . 46
1.7.3 Utilisation de la décomposition de matrice polynômiale . . . 47
**1.8 Capacité des systèmes multi-antennes . . . . . 48**
**1.9 Conclusion . . . . . 50**

## 1.1 Introduction

Dans un système mono antenne, l'augmentation de la taille de modulation et/ou de la bande de fréquence utilisée sont les seules solutions pour augmenter le débit de données, avec tous les problèmes de complexité ou d'encombrement qui vont avec [1]. Comme la bande passante devient de plus en plus précieuse pour les systèmes de radiocommunication, de nouvelles techniques sont nécessaires afin de l'utiliser le plus efficacement possible. Les systèmes MIMO ont apporté une solution à ce problème. En effet d'après la théorie de l'information [2], la capacité des systèmes multi-antennes croît linéairement avec le nombre d'antennes émettrices, dépassant de manière significative la limite SISO de la théorie de Shannon. Et en parallèle, l'aptitude de ces systèmes à résister aux évanouissements constitue un avantage supplémentaire indéniable.

L'idée de base des systèmes MIMO est de transmettre l'information en utilisant simultanément plusieurs antennes à l'émission et à la réception. En première approximation, le débit transmis dans cette bande de fréquence se trouve multiplié par le nombre d'antennes émettrices. Sa mise en œuvre concrète soulève par contre des problèmes complexes : en effet, tous les signaux transmis s'interfèrent et il faut être capable de les séparer à la réception. On doit alors faire appel, à l'émission comme à la réception, à des méthodes sophistiquées de traitement du signal.

Jusqu'aux années 1990, l'exploitation de la multiplicité des trajets était limitée aux systèmes qui commutaient entre deux antennes et qui combinaient les signaux pour fournir un signal moins atténué au récepteur. Ce travail initial sur les systèmes MIMO s'était donc concentré sur la diversité spatiale de base pour limiter la dégradation causée par le milieu de propagation. Cependant, ce n'est que récemment qu'on a commencé à exploiter la propagation multi-trajets afin de transporter des données supplémentaires ; cette technique est connue sous le nom de multiplexage spatiale.

Les deux chercheurs Arogyaswami Paulraj et Thomas Kailath ont été les premiers à proposer l'utilisation du multiplexage spatial à l'aide de système MIMO en 1993. L'année suivante, leur brevet américain a été accordé. Cependant, il appartient au laboratoire Bell d'être le premier à proposer un prototype de multiplexage spatial en 1998.

## 1.2 Canal de propagation

### 1.2.1 Aspects physiques de la propagation

Un canal de communication est un médium physique utilisé pour la transmission d'un signal à partir de l'émetteur jusqu'au récepteur. Quel que soit le mode de transmission, des perturbations aléatoires, non prévisibles, affectent le signal transmis avant sa réception. En ce qui concerne le canal de transmission radio, il est caractérisé par plusieurs phénomènes physiques [3, 4].

- La **réflexion** du signal sur un obstacle : elle se produit lorsque qu'une onde électromagnétique rencontre une surface lisse de très grande dimension par rapport à sa longueur d'onde, comme par exemple la surface de la terre et les bâtiments. L'angle d'incidence de l'onde est toujours égal à l'angle de réflexion.
- La **diffusion** ("scattering") : elle se produit lorsque l'onde électromagnétique rencontre sur son trajet un grand nombre d'objets dont leur taille est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, son énergie est alors dispersée dans toutes les directions.
- La **réfraction** du signal : elle se produit lorsque l'onde électromagnétique traverse un milieu d'indice différent de celui d'où il provient.
- La **diffraction** : c'est le repli apparent de vague d'ondes lorsque le signal frappe un obstacle avec une ouverture. C'est l'effet des ondes « tournant aux coins ».

Tous ces phénomènes physiques conduisent à une propagation par trajets multiples pouvant entrainer des évanouissements (fading) du signal. Ces évanouissements ou « trous de transmission » proviennent de l'annulation du signal à un instant et une fréquence donnée.

Lorsqu'on est en réception fixe ou mobile, la probabilité de recevoir uniquement une onde directe provenant de l'émetteur est très faible en raison des dispersions et des réflexions sur les obstacles du milieu de propagation. Le signal obtenu au niveau de l'antenne réceptrice correspond donc à une superposition de versions retardées, atténuées et déphasées du signal émis. Un trajet en visibilité directe, ou "Line Of Sight" (LOS), n'est cependant pas toujours disponible. Dans ce cas ce sont les trajets en non-visibilité, ou "Non Line of Sight" (NLOS), qui permettent la communication radio [5].

Pour les communications sans fils, le canal entre l'antenne d'émission et de réception est toujours de bande transposée (décalage de fréquence). On parle de transmission sur onde porteuse avec une fréquence porteuse qu'on peut noter $f_c$ [6]. La raison principale est qu'en fréquence basse la longueur d'onde du signal est très grande, par conséquent sa

réception nécessite une antenne démesurément longue. En plus de cela, le signal serait incapable de se propager sur de longues distances sans être fortement atténué. Le signal émis en bande transposée s'écrit donc sous la forme [1] :

$$s(t) = \Re\{x(t)e^{j2\pi f_c t}\}, \tag{1.1}$$

où $x(t)$ est le signal émis en bande de base (sans décalage de fréquence). Dans un environnement à trajets multiples, le signal reçu provient de plusieurs chemins avec des gains et des retards différents ; il s'écrit sous la forme [2] :

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) s(t - \tau_l(t)) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) \Re\{x(t - \tau_l(t)) e^{j2\pi f_c (t - \tau_l(t))}\} \\ &= \Re\left\{ \left[ \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) x(t - \tau_l(t)) e^{-j2\pi f_c \tau_l(t)} \right] e^{j2\pi f_c t} \right\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

- $L$ est le nombre de trajets.
- $\tau_l(t)$ est le retard de propagation associé au $l$-ème trajet.
- $\alpha_l(t)$ est l'amplitude ou gain complexe associé au $l$-ème trajet.

Cependant, en pratique, il est à la fois plus facile et plus judicieux de travailler avec l'équivalent en bande de base plutôt qu'avec le signal en bande transposée reçu. Le terme entre crochés dans l'équation (1.2) correspond à l'expression du signal reçu en bande de base, il est noté $y(t)$ et s'écrit sous la forme suivante :

$$y(t) \triangleq \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) x(t - \tau_l(t)) e^{-j2\pi f_c \tau_l(t)} \tag{1.3}$$

Le canal de propagation se comporte donc comme un filtre linéaire. Il est ainsi entièrement représenté par sa réponse impulsionnelle.

### 1.2.2 Réponse impulsionnelle d'un canal SISO multi-trajets

De façon générale, un système linéaire est décrit dans le domaine temporel par sa réponse impulsionnelle. Pour un canal variable au cours du temps, la réponse impulsionnelle

1. $\Re\{a\}$ désigne la partie réelle de $a$.
2. Pour simplifier le calcul le terme du bruit $n(t)$ additif n'est pas considéré

$h(t,\tau)$ dépend du temps $t$ et du retard $\tau$ [7]. Les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ du canal sont reliés par un produit de convolution. À un instant $t$ donné, les signaux en bande de base $y(t)$ et $x(t)$ sont liés par la relation suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t,\tau) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $*$ indique une convolution.

Pour les liaisons sans fil radio-électriques, la réponse impulsionnelle d'un canal multi-trajets s'exprime de la manière suivante :

$$h(t,\tau) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t)\delta(\tau - \tau_l(t))e^{-j\theta_l(t)}. \tag{1.5}$$

Cela traduit que chaque trajet ($l$) de l'onde est affecté d'un retard de propagation ($\tau_l(t)$) et d'une atténuation ($\alpha_l(t)$). Il faut aussi noter que les interactions électromagnétiques telles que les réflexions, les diffractions et les réfractions induisent une phase ($\theta_l(t)$) pour chaque trajet.

Dans le cas où le canal est invariant dans le temps, la réponse impulsionnelle ne dépend pas du temps $t$. Elle est donc caractérisée uniquement par $h(\tau)$,

$$h(\tau) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l\delta(\tau - \tau_l). \tag{1.6}$$

Si on tient compte des déphases entre les trajets, la réponse impulsionnelle du canal de propagation devient :

$$h(\tau) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{-j\theta_l}\delta(\tau - \tau_l). \tag{1.7}$$

La description d'un canal de propagation est également possible dans le domaine fréquentiel par l'intermédiaire d'une réponse fréquentielle. La réponse fréquentielle ou fonction de transfert $H(f,t)$ correspond à la réponse du canal en fréquence lorsqu'il est excité, à un instant $t$, par une sinusoïde pure de fréquence $f$. Les fonctions $h$ et $H$ sont reliées par la transformée de Fourier, selon la relation suivante,

$$H(f,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau. \tag{1.8}$$

### 1.2.3 Réponse impulsionnelle d'un canal MIMO multi-trajets

Considérons un système MIMO avec $N_t$ antennes d'émission et $N_r$ antennes de réception. En notant par $h_{i,j}(t,\tau)$ la réponse impulsionnelle entre la $j$-ème antenne émettrice ($j = 1, 2, \cdots N_t$) et la $i$-ème antenne de réception ($i = 1, 2, \cdots, N_r$), alors la réponse impulsionnelle du canal MIMO est donnée par la matrice $N_r \times N_t$ qui suit :

$$H(t,\tau) = \begin{bmatrix} h_{1,1}(t,\tau) & h_{1,2}(t,\tau) & \cdots & h_{1,N_t}(t,\tau) \\ h_{2,1}(t,\tau) & h_{2,2}(t,\tau) & \cdots & h_{2,N_t}(t,\tau) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{N_r,1}(t,\tau) & h_{N_r,2}(t,\tau) & \cdots & h_{N_r,N_t}(t,\tau) \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Pour un canal invariant au cours du temps, la réponse impulsionnelle $H(t,\tau)$ dépend uniquement du retard de propagation $\tau$, elle est notée $H(\tau)$.

### 1.2.4 Caractérisation du canal de transmission

La caractérisation du canal de propagation est faite en considérant l'hypothèse dite de stationnarité au sens large (WSS : Wide Sense Stationary) et lorsque les réflecteurs sont indépendants (US : Uncorellated Scatterers)[8]. La notion de stationnarité au sens large est utilisée lorsque les paramètres statistiques du canal sont indépendants des variations temporelles. Pour un modèle WSSUS, quatre paramètres clés sont utilisés pour caractériser les propriétés des canaux à trajets multiples. Ces paramètres sont inhérents au canal mais ne sont pas liés à la nature du signal qui y est transmis. Ils caractérisent la nature dispersive du canal en temps et en fréquence [8, 9].

#### 1.2.4.1 Dispersion temporelle

La dispersion temporelle fait référence à l'étalement d'un signal dans la dimension temps en raison des effets dûs aux trajets multiples. Les paramètres intrinsèques du canal liés à la dispersion temporelle sont : l'étalement temporel $T_d$ (time delay-spread) et la bande de cohérence $B_c$. Ces deux paramètres dépendent des variations de $\tau$.

**Étalement temporel (time delay-spread) :** elle correspond à la longueur de l'intervalle des valeurs de $\tau$ pour lesquelles la puissance moyenne ($P_h(\tau)$) de la composante du canal correspondante au retard $\tau$ (power delay profile) est non nulle. Pour un canal WSSUS nous avons $P_h(\tau) = \mathbb{E}\left[h(t,\tau)\right]$.

**Bande de Cohérence $B_C$ :** elle correspond à l'écart fréquentiel pour lequel deux composantes fréquentielles du canal deviennent dé-corrélées. Autrement dit c'est la plage de fréquences dans laquelle toutes les composantes spectrales d'un signal ont des gains et des retards égaux. Dans cette bande on considère le canal comme étant invariant.

#### 1.2.4.2 Dispersion fréquentielle

La dispersion de fréquence fait référence à l'étalement du signal dans la dimension fréquentielle. Les paramètres du canal qui caractérise la dispersion fréquentielle du canal sont le temps de cohérence $T_c$ et l'étalement de Doppler $B_D$. Ils caractérisent les variations de la dimension $t$ d'un canal multi-trajets.

**Étalement de Doppler :** c'est l'élargissement de la largeur de bande d'un signal transmis lorsqu'il se propage dans un canal à trajets multiples en raison des mouvements relatifs entre l'émetteur et le récepteur. C'est une conséquence de l'effet Doppler qui se traduit par une différence entre la fréquence du signal émis et celle du signal reçu.

En considérant une sinusoïde émise de fréquence porteuse $f_c$, la transformée de Fourier du signal reçu est un Dirac si la réponse impulsionnelle du canal est invariante. En revanche, si le canal varie, le spectre s'étendra sur une bande de fréquence autour de $f_c$ (de $f_c + f_D$ à $f_c - f_D$) où $f_D$ représente la fréquence de Doppler. Cette fréquence de Doppler, introduite par le mouvement du récepteur (et/ou de l'émetteur), est donnée par la relation suivante (en $Hz$)

$$f_D = \frac{v f_c}{c} \cos\theta, \tag{1.10}$$

où $v$ est la vitesse du mobile, $\theta$ est l'angle Doppler entre l'axe du faisceau et l'axe de déplacement, et $c$ représente la célérité de la lumière. La bande de Doppler est définie par

$$B_D = 2 f_{Dmax}, \tag{1.11}$$

où $f_{Dmax}$ est la fréquence Doppler maximale, c'est-à-dire $f_{Dmax} = \frac{v f_c}{c}$.

**Temps de cohérence $T_C$ :** Le temps de cohérence est la durée pendant laquelle la réponse impulsionnelle du canal est considérée comme non variable [10]. De toute évidence, si le canal varie lentement, le temps de cohérence sera important et inversement. Comme les canaux à variation lente ont des spectres Doppler étroits (c'est-à-dire de petites largeurs de bande de Doppler), le temps de cohérence et l'étalement Doppler sont inversement proportionnels. Le temps de cohérence peut être approximé par la relation

suivante :

$$T_C \simeq \frac{1}{f_{Dmax}} \tag{1.12}$$

#### 1.2.4.3 Sélectivité fréquentielle des canaux

Un canal est dit sélectif en fréquence vis-à-vis d'un signal occupant une bande $B_s$ si la bande de cohérence est inférieure à celle du signal ($B_C < B_s$). Dans ce cas, les composantes fréquentielles du signal subissent des atténuations différentes ; c'est le cas des canaux à large bande. La sélectivité en fréquence engendre une superposition des versions de signaux décalées. Ce phénomène est appelé interférences entre symboles (Inter-Symbol Interference (ISI)) ; il peut être à l'origine de la dégradation des performances du système de transmission.

Lorsque $B_C$ est supérieure à $B_s$, toutes les composantes fréquentielles du signal seront affectées par la même atténuation. Le canal est alors dit non sélectif en fréquence. C'est le cas des canaux à bande étroite où il n'y a pas d'étalement temporelle : les signaux arrivent quasiment en même temps.

### 1.2.5 Modèle probabiliste du canal de transmission

Les canaux de transmission peuvent être classés en deux groupes [11].

- Les canaux stationnaires dont les paramètres sont fixes au cours du temps : fibres optiques, câbles métallique ….
- Les canaux non stationnaires dont les paramètres évoluent au cours du temps : les communications mobiles, les communications sans fil (Wireless).

#### 1.2.5.1 Canal stationnaire : le canal gaussien AWGN

Le bruit blanc gaussien est un modèle de bruit largement utilisé dans de nombreux domaines. Il correspond à un processus aléatoire dont la densité spectrale de puissance (DSP) est la même pour toutes les fréquences de la bande passante. Le bruit gaussien suit une loi normale de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma^2$. En effet, lorsqu'un phénomène correspond à la superposition d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes, il est possible de démontrer par le théorème de la limite centrale que la distribution statistique de ce phénomène suit une distribution gaussienne [12]. La densité de probabilité est donnée par l'équation

$$p(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1.13}$$

Le canal gaussien à bruit blanc additif (Additive White Gaussian Noise (AWGN)) est sans doute le plus simple des modèles de canal. Il modélise parfaitement une liaison radio en vue directe dont le bruit est principalement d'origine thermique. Le bruit est additif c'est-à-dire qu'en sortie de ce canal, le signal reçu résulte de l'addition du signal émis et d'un bruit blanc. Ce bruit additif est un processus aléatoire stationnaire gaussien de moyenne nulle ($\mu = 0$) et de variance $\sigma^2$. Il est dit blanc car il perturbe de façon identique tout le spectre avec une densité spectrale de puissance constante. C'est une hypothèse certes simplificatrice des calculs, cependant elle reste valide si on considère des bandes de fréquence étroites.

Une version plus évoluée du modèle tient compte des délais de transmission. Ce modèle de canal est rencontré dans les systèmes de transmissions pratiques de type faisceaux hertziens ou communications par satellite.

#### 1.2.5.2 Canaux non stationnaires : canaux de Rayleigh et de Rice

La loi de distribution la plus utilisée pour un canal radio-mobile est celle de Rayleigh [10]. Le modèle de Rayleigh est utilisé lorsque le canal ne présente pas de ligne de vue directe (NLOS), la transmission vers le récepteur se fait à l'aide des échos et réflexions. L'atténuation $\alpha(t)$ suit un processus complexe gaussien de moyenne nulle et dont les parties réelle et imaginaire ont la même variance. Le module de l'atténuation du canal $\beta = |\alpha(t)|$ est distribué selon la loi de Rayleigh, dont la densité de probabilité est donnée par

$$p(\beta) = \frac{\beta}{\sigma^2} exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1.14}$$

Lorsque qu'une ligne de vue existe (LOS), on utilise généralement une fonction de densité de probabilité de Rice pour modéliser l'évanouissement du canal. Le signal reçu comprend alors deux composantes : une composante issue des trajets réfléchis (NLOS) et une composante dominante issus d'un chemin direct (LOS). L'atténuation est centrée autour de la composante dominante, elle suit ainsi un processus complexe gaussien de moyenne non-nulle. Le module de l'atténuation, $\beta$, est donc distribué selon une loi de

Rice ; sa densité de probabilité est donnée par

$$p(\beta) = \frac{\beta}{\sigma^2} exp\left(-\frac{\beta^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\beta\nu}{\sigma^2}\right), \tag{1.15}$$

où $\nu^2$ est la puissance du trajet direct et $I_0$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro [13]. Le facteur de Rice est défini comme étant le rapport de puissances entre la composante LOS ( amplitude $\nu$) et la composante de diffusion ($\sigma^2$)

$$K = \frac{\nu^2}{\sigma^2}. \tag{1.16}$$

Notons que lorsque $K = 0$, la distribution de Rice devient une distribution de Rayleigh et traduit l'évanouissement de la ligne de vue directe. À l'inverse, si $K$ tend vers l'infini, le canal devient sans évanouissement et la transmission se fait juste avec un bruit blanc gaussien additif. On peut également citer les distributions de Nakagami proposées au départ de manière empirique à partir de mesures, ou encore celle de Weibull représentant une autre généralisation de la distribution de Rayleigh [14].

## 1.3 La diversité

### 1.3.1 Principe

Un signal transmis sur un canal radio mobile est fortement affecté par les interférences et les évanouissements liés aux obstacles et aux trajets multiples. Dans ces conditions, la transmission d'une seule réplique du signal peut être insuffisante pour décoder l'information [15, 16]. Pour pallier ce problème il faut s'assurer que plusieurs répliques du signal informatif arrivent au niveau du récepteur (figure 1.1) en passant par des canaux statistiquement différents : cette technique est appelé diversité.

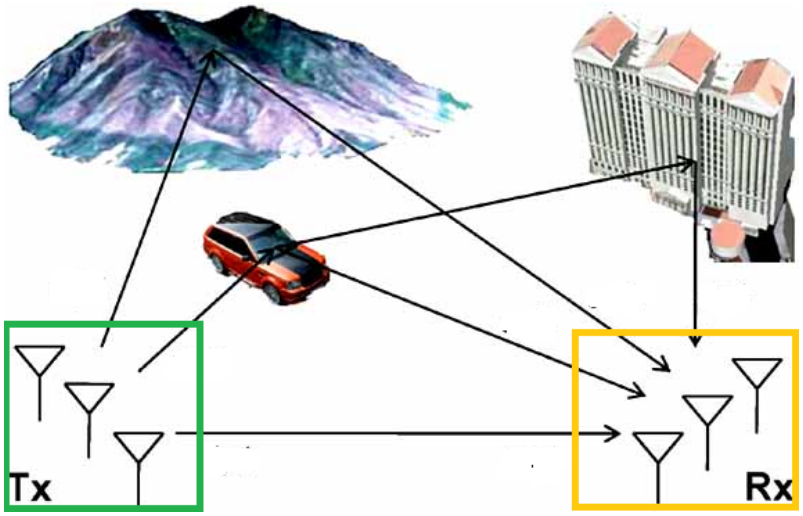



FIGURE 1.1 : Propagation multi-trajet en MIMO.

La diversité consiste donc à fournir au récepteur des versions multiples du même signal de façon à moyenner l'impact des évanouissements (figure 1.2). La probabilité que toutes les répliques du signal soient affectées au même moment est considérablement réduite. Cela procure donc une robustesse contre les évanouissements [17, 18]. L'ordre de diversité $n$ est dans ce cas égal au nombre de voies indépendantes (ou branches) menant au récepteur. Pour un canal de Rayleigh, par example, la probabilité d'erreur $P_e$ est asymptotiquement proportionnelle au rapport signal sur bruit $\gamma$ (Signal-to-Noise Ratio (SNR)) selon la relation,

$$P_e \propto \frac{1}{\gamma}. \tag{1.17}$$

Si le même signal est reçu sur $n$ canaux indépendants, la probabilité d'erreur diminue et devient :

$$P_e \propto \frac{1}{\gamma^n} \tag{1.18}$$

Pour un système MIMO avec $N_t$ antennes d'émission et $N_r$ antennes de réception l'ordre de diversité maximal qui peut être obtenu est $N_t.N_r$.

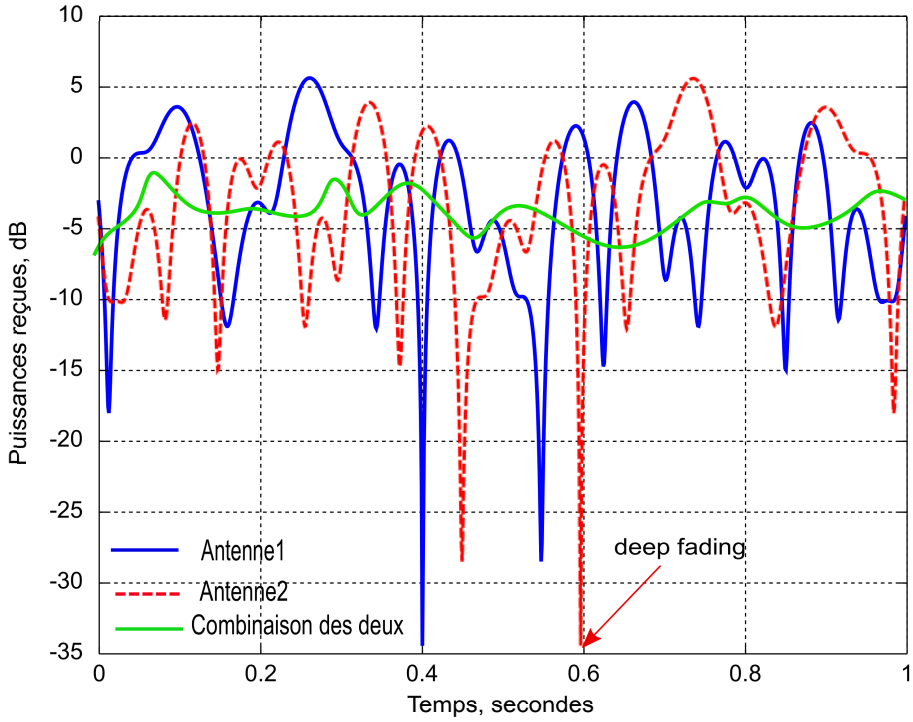



FIGURE 1.2 : Combinaison de signaux dans un canal à évanouissement

## 1.3.2 Types de diversité

### 1.3.2.1 Diversité temporelle

La diversité temporelle est utilisée pour combattre l'évanouissement sélectif en temps. Elle consiste à envoyer plusieurs fois le même signal ou des répliques du signal à des intervalles de temps supérieurs ou égaux au temps de cohérence $T_C$ du canal [9, 16, 19] (voir figure 1.3). Elle est utilisée conjointement avec un code correcteur d'erreur. Le principal inconvénient de ce procédé est le retard induit par la diversité.

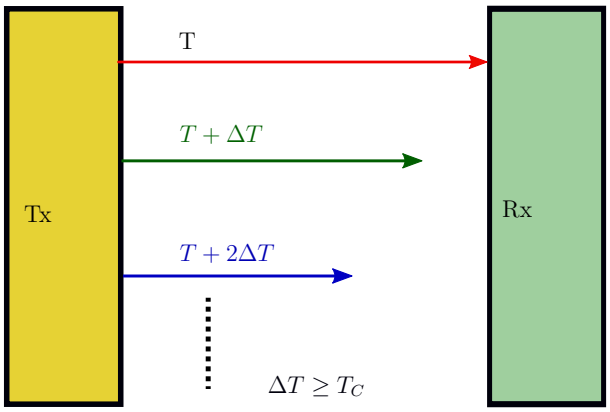



FIGURE 1.3 : Illustration de la diversité temporelle.

#### 1.3.2.2 Diversité fréquentielle

La diversité fréquentielle est surtout efficace pour un canal sélectif en fréquence. Elle consiste à transmettre le même signal (ou ses versions redondantes) sur plusieurs fréquences porteuses dont l'écartement fréquentiel est d'au moins égal à la bande de cohérence du canal $B_C$ (figure 1.4). La diversité fréquentielle peut être exploitée par l'utilisation d'une modulation multi-porteuses et conjointement avec un entrelacement et un codage correcteur d'erreur [9, 16].

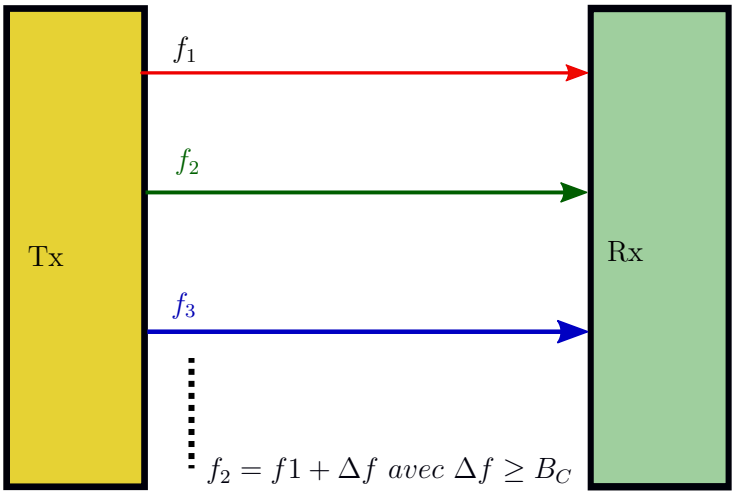



FIGURE 1.4 : Illustration de la diversité fréquentielle.

#### 1.3.2.3 Diversité de polarisation

La diversité de polarisation est la transmission du même signal simultanément sur des ondes polarisées orthogonalement et dont les caractéristiques de propagation sont indépendantes [16, 20, 21]. Il n'y a pas de contrainte sur l'écartement relatif des antennes [22].

#### 1.3.2.4 Diversité spatiale

la diversité spatiale, appelée aussi diversité d'antenne ou diversité matricielle, est l'une des techniques les plus simple à réaliser. Elle consiste à émettre ou recevoir l'information par plusieurs antennes séparées d'au moins de la distance de cohérence ($D_C = 0.5\lambda$)[3], qui correspond à la séparation minimale des antennes garantissant un evanouissement indépendant [16]. Cette contrainte sur la séparation physique pose problème dans le cas des petits objets communicants où l'espace d'emplacement des antennes est limité [23] et aussi dans l'utilisation massive d'antennes.

### 1.3.3 Technique de diversité Mixte (Combining)

La combinaison de plusieurs types de diversité indépendants permet d'obtenir des ordres de diversité élevés. L'ordre de diversité total est dans ce cas le produit des ordres de diversité particuliers [24]. En combinant des versions indépendantes du signal, il est possible de contrecarrer les évanouissements et augmenter éventuellement l'efficacité spectrale. La combinaison peut être effectuée de plusieurs façons qui se diffèrent en complexité et en performance globale. Ces méthodes de combinaison se basent souvent sur le SNR en sortie de chaque branche afin d'améliorer les performances de la diversité. Par conséquent elles sont majoritairement implémentées en réception.

#### 1.3.3.1 Combinaison par Commutation (Switched Diversity Combining : SDC)

Cette méthode saute de branche en branche jusqu'à ce que le SNR soit supérieur à un certain seuil [9, 25]. La branche ayant un SNR supérieur au seuil fixé est sélectionné et sera alimentée au circuit de détection (figure 1.5). Mais dès que le SNR est inférieur au seuil, alors il y'a commutation sur une autre branche. Le seuil de SNR dépend du domaine d'utilisation de la diversité et peut être fixé par les fabricants. Un récepteur multi-antennes qui utilise le SDC nécessite juste un Switch qui évalue le SNR sur les

3. $\lambda$ est la longueur d'onde de la fréquence de rayonnement.

$N_r$ antennes réceptrices et un seul détecteur d'intensité du signal. Cette simplicité fait qu'il est actuellement implémenté dans la plupart des terminaux utilisant la diversité d'antennes.

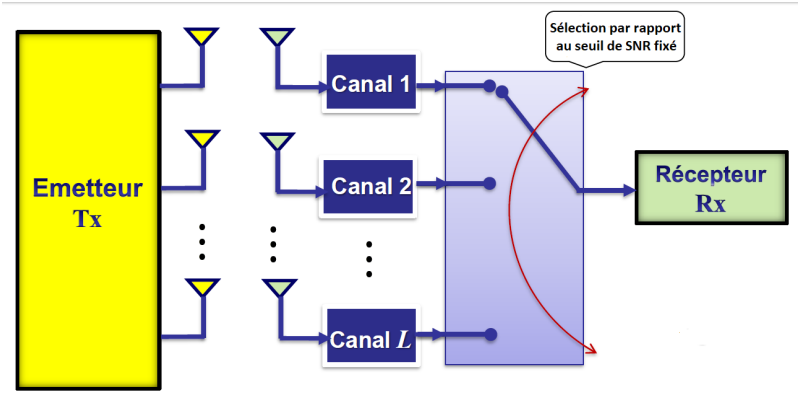



FIGURE 1.5 : Illustration de la combinaison par commutation.

#### 1.3.3.2 Combinaison par Sélection (Selection Combining)

Elle consiste à choisir le canal le moins perturbé, c'est-à-dire la branche qui présente le meilleur rapport signal sur bruit (SNR) [26, 27]. La combinaison par sélection est similaire à celle de la technique par commutation, excepté qu'ici, on sélectionne parmi toutes les branches celle ayant le meilleur rapport signal sur bruit (figure 1.6). Cette méthode nécessite donc d'avoir sur chaque branche un détecteur d'intensité du signal. Elle est moins rapide que SDC mais plus optimale.

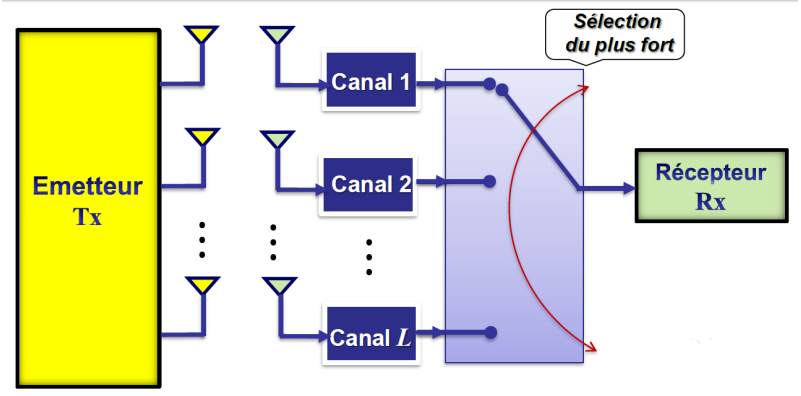



FIGURE 1.6 : Illustration de la combinaison par sélection.

#### 1.3.3.3 Combinaison par gain égal (Equal Gain Combining : EGC)

Les deux techniques précédentes utilisent uniquement le signal d'une seule branche. Pour améliorer la puissance moyenne du signal de sortie, les signaux de toutes les branches peuvent être combinés pour former le signal de sortie. Cependant, ces signaux sont très souvent en déphasage. Ces rotations de phase ($\Phi_i$) doivent être compensées tout en maintenant les amplitudes inchangées. Chaque signal doit donc être multiplié par un co-phaseur pour que les signaux ne soient plus déphasés (figure 1.7). Par conséquent, c'est une méthode qui exige une bonne connaissance des différentes phases des coefficients du canal [28].

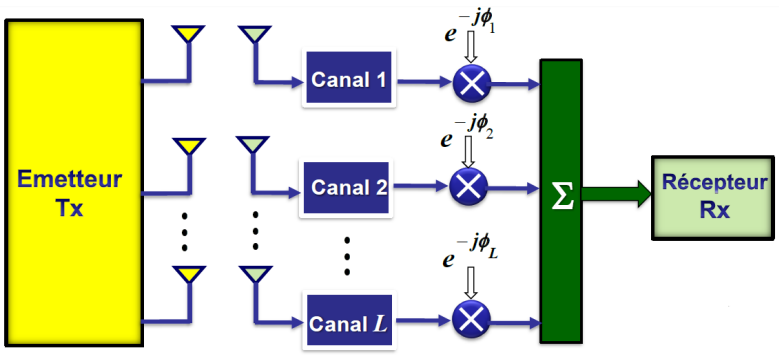



FIGURE 1.7 : Illustration de la combinaison par gain égal.

#### 1.3.3.4 Combinaison par Rapport Maximal (Maximum Ratio Combining : MRC)

L'inconvénient majeur de la technique EGC est que si l'une des branches a un signal très faible, cela peut entraîner une réduction de puissance du signal combiné à la sortie. Pour éviter cette situation, la technique MRC applique un coefficient de pondération $c_i$ sur chaque branche avant que tous les signaux ne soient combinés (figure 1.8). Ainsi pour maximiser le signal à la sortie du combinateur, les branches avec un SNR élevé auront les coefficients de pondération les plus grands. Cela permettra de choisir les signaux à combiner [29].

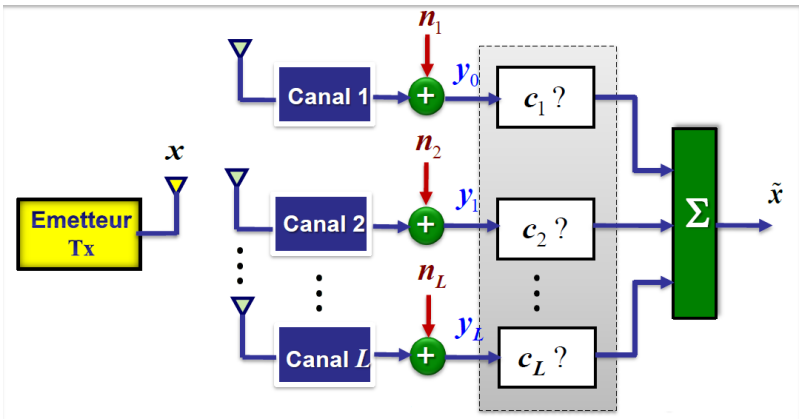



FIGURE 1.8 : Illustration de la combinaison par rapport Maximal.

### 1.3.4 Gain d'antennes

Supposons un système Multiple-Input Single-Output (MISO) avec $N_t$ antennes d'émission ($N_t > 1$) et une antenne de réception. Soit $\sigma_x^2$ la variance des symboles $x$ transmis, la puissance totale rayonnée par le système vaut $N_t.\sigma_x^2$. Le gain en SNR constaté sur l'antenne de réception est de $10\log(N_t)\ dB$ par rapport à un système SISO. On parle dans la littérature de gain de réseau d'antennes d'émission [30].

Si on suppose maintenant un système avec une antenne d'émission et $N_r \geq 1$ antennes de réception (Single-Input Multiple-Output (SIMO)), le symbole transmis $x$ va voir $N_r$ sous canaux différents. Supposons que le canal au niveau de chaque antenne de réception soit caractérisé par un gain complexe $h_i$ avec $i = l, 2, \ldots, N_r$, supposé être distribué comme une variable aléatoire gaussienne complexe de moyenne nulle avec une variance unitaire. Supposons aussi que ces gains soient indépendants le long du spectre. Le signal reçu sur chaque branche $i$ est donné par :

$$y_i = h_i x + n_i \tag{1.19}$$

où $n_i$ est le bruit à la $i$-ème branche.

En supposant que l'information sur l'état du canal soit parfaitement connue au récepteur, les coefficients de pondération sont alors choisis tels que $c_i = h_i^*$. Si on applique un filtre adapté (Matching Filter (MF)) sur le vecteur reçu $\boldsymbol{y}$, le signal combiné de sortie $\tilde{x}$ donne :

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{N_r} |h_i|^2 x + \sum_{i=1}^{N_r} h_i^* n_i. \tag{1.20}$$

Le SNR $\gamma$ obtenu en sortie de filtre vaut :

$$\gamma_{MF} = \sum_{i=1}^{N_r} |h_i|^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}. \tag{1.21}$$

En supposant $\mathbb{E}\left[|h_i^2|\right] = 1$, le SNR moyen s'exprime de la façon suivante

$$\gamma_{MF} = N_r \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}. \tag{1.22}$$

Cela fait apparaître un gain en puissance de $10\log(N_r)\ dB$ par rapport au cas SISO, appelé gain de réseau d'antennes de réception. Un système MIMO apporte un gain d'antennes qui se décompose en un gain d'antennes d'émission et un gain d'antennes de réception. D'un point de vue pratique, le gain d'antennes d'émission exprime le fait que la puissance rayonnée totale est $N_t$ fois supérieure au cas SISO. Cependant, il est usuel de faire une normalisation à l'émission par $1/\sqrt{N_t}$. Le gain d'antennes de réception aussi est bien réel et doit être pris en considération lors de la paramétrisation finale du système [31–33].

## 1.4 Modélisation du canal MIMO

L'évaluation des systèmes de transmission MIMO en simulation nécessite de disposer des modèles de canaux représentant le plus fidèlement le médium de transmission. Le modèle de canal MIMO doit être capable de traduire les principaux phénomènes physiques influençant les performances. Cet exercice de modélisation est un axe de recherche très actif pour les systèmes MIMO. De nombreux modèles existent ainsi que plusieurs classifications [34].

Certains modèles, souvent appelés modèles physiques, reposent sur une description géométrique très fine des environnements de propagation. Parmi eux, nous distinguons les modèles déterministes (tracé de rayon [35]), stochastiques géométriques (modèle à un ou deux anneaux, modèle électromagnétique... [36, 37]) et les modèles stochastiques non géométriques (modèle de Saleh-Valenzuela [38]). Ces modèles semblent mal adaptés à certains environnements qui changent rapidement.

D'autres modèles plus souples, appelés modèles analytiques, essayent de décrire de façon statistique les propriétés du canal. Ces modèles analytiques exploitent les propriétés statistiques du canal de propagation. Certains d'entre eux sont fondés sur la corrélation spatiale et d'autres sur des paramètres de propagation. La présence de corrélation à

l'émission et/ou à la réception dégrade la diversité que peut offrir un système MIMO et par là même, les performances du système. L'importance de l'influence de la corrélation sur la capacité des systèmes MIMO [39], nous a conduit à présenter ici quelques modèles faisant appel à ce paramètre.

### 1.4.1 Modélisation pour canal MIMO non sélectif en fréquence

Les coefficients du canal MIMO des modèles stochastiques à bande étroite sont généralement basés sur une distribution gaussienne complexe. La matrice du canal $H$ peut être décomposée en deux parties : une partie déterministe $\overline{H}$ et une autre partie aléatoire $\widehat{H}$ [40] [41].

$$H = \sqrt{\frac{K}{K+1}}\overline{H} + \sqrt{\frac{1}{K+1}}\widehat{H}, \tag{1.23}$$

où $K$ représente un facteur de Rice. La matrice $\overline{H}$ contient les coefficients du trajet direct. La matrice $\widehat{H}$ caractérise les coefficients des trajets multiples non-directs, qui suivent une distribution gaussienne complexe avec une moyenne nulle. $K = 0$ correspond à un canal multi-trajets pur sans composante LOS et $K = \infty$ correspond à un canal AWGN.

#### 1.4.1.1 Modèle à base de corrélation spatiale

Lors d'une propagation en milieu réaliste, les évanouissements constatés au niveau du spectre peuvent être corrélés d'un sous-canal à l'autre, en particulier lorsque les antennes d'émission et ou de réception ne sont pas suffisamment espacées [42]. La corrélation spatiale devient donc critique pour une transmission multi-antennes car elle peut affecter la capacité du canal MIMO et les performances du système. Par conséquent, il est primordial de prendre en compte la corrélation spatiale entre les éléments d'antenne dans les modèles de canaux MIMO.

À cet effet nous considérons un canal de Rayleigh multi-trajets pur ($K = 0$), $H$ est donc équivalente à $\widehat{H}$. La matrice de covariance $\Psi$ est alors donnée par

$$\Psi = cov(vec(H)) = \mathbb{E}\left[vec(H)vec(H)^H\right], \tag{1.24}$$

où $vec(\cdot)$ représente une transformation d'une matrice $N_r \times N_t$ à un vecteur colonne $N_r N_t \times 1$ et $(\cdot)^H$ est un opérateur transposé conjugué. La matrice $\Psi$ décrit les caractéristiques de corrélations de tous les éléments de la matrice du canal MIMO. Elle contient ainsi toutes les informations de corrélation inhérentes à un système MIMO. Des modèles

de canaux MIMO peuvent être obtenus par

$$vec(H) = \Psi^{1/2} vec(H_w) \tag{1.25}$$

où $\Psi^{1/2}$ est n'importe quelle matrice satisfaisant $\Psi^{1/2}\Psi^{H/2} = \Psi$. $H_w$ est une matrice de dimension $N_r \times N_t$ dont les éléments sont des variables gaussiennes avec une moyenne nulle et une variance unitaire.

Les inconvénients majeurs de cette représentation résident dans la taille des matrices à manipuler et le côté "abstrait" de la matrice de corrélation totale. D'autres modèles tentent de réduire la taille des matrices à manipuler et décomposent la matrice de corrélation afin de mieux traduire l'environnement de propagation [43], [8]. Parmi ces modèles, deux d'entre eux se détachent dans la littérature : le modèle de Kronecker et le modèle de Weichselberger.

**Le modèle de Kronecker** [39, 44, 45] suppose que la corrélation spatiale en émission soit indépendante de la corrélation spatiale en réception. Par conséquent, la matrice de corrélation $\psi$ peut être simplifiée par un produit de Kronecker entre la matrice de la corrélation en émission et la matrice de la corrélation en réception comme [46],[44]

$$\Psi = R_{T_X} \otimes R_{R_X} \tag{1.26}$$

où

$$R_{T_X} = \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{h}_i^H \boldsymbol{h}_i)^T\right], \ pour \ i = 1, \cdots, N_t \tag{1.27}$$

et

$$R_{R_X} = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{h}^j \boldsymbol{h}^{jH}\right], \ pour \ j = 1, \cdots, N_r \tag{1.28}$$

sont respectivement les matrices de corrélation en émission et en réception. $\boldsymbol{h}_i$ est la $i$-ème ligne de $H$, $\boldsymbol{h}^j$ est la $j$-ème colonne de $H$, $\otimes$ représente un produit de Kronecker, $(\cdot)^H$ est le transposé conjugué complexe et $(\cdot)^T$ est l'opérateur transposé.

En supposant que les coefficients des canaux soient gaussiens complexes, les moments du premier et du second ordre du canal MIMO suffisent pour caractériser le canal de propagation [47]. Il est possible de montrer à partir des équations (1.41) et (1.26), comme dans la référence [45], que

$$vec(H) = (R_{T_X} \otimes R_{R_X})^{1/2} vec(H_w), \tag{1.29}$$

et donc

$$H = R_{T_X}^{1/2} H_w R_{R_X}^{T/2} \tag{1.30}$$

Grâce à sa simplicité, le modèle Kronecker est utilisé dans toute la littérature MIMO et a été adopté en tant que modèle officiel de canal pour la caractérisation et la modélisation des performances dans les systèmes MIMO 3GPP (3rd Generation Partnership Project).

**Modèle de Weichselberger** Le modèle de Weichselberger est basé sur le modèle Kronecker sans l'hypothèse simplificatrice des corrélations séparables au niveau des extrémités des liens. Un tel modèle pourrait également être obtenu à partir d'estimations de canal pendant l'utilisation du système, ce qui favorise la conception et la mise en œuvre d'architectures adaptatives d'émetteur et de récepteur. La principale hypothèse du modèle de Weichselberger est que les deux extrémités de liaison du canal MIMO ne peuvent pas être considérées comme indépendantes. Cela est pris en compte dans l'hypothèse de modélisation selon laquelle, les vecteurs propres des matrices de corrélation sont les mêmes que dans le modèle de Kronecker, mais qu'ils sont liés entre eux par une matrice de couplage. Le modèle est spécifié dans [48] comme :

$$H = U_{R_X}(\breve{\Omega} \odot H_w)U_{T_X}^T \tag{1.31}$$

où $U_{R_X}$ et $U_{T_X}$ sont respectivement les vecteurs propres issus de la décomposition de $R_{R_X}$ et $R_{T_X}$, et $\Omega$ est une matrice de couplage de puissance qui permet la modélisation conjointe des corrélations d'émission et de réception. L'opérateur $\odot$ indique une multiplication par éléments et l'opérateur $(\breve{\cdot})$ indique une racine carrée par élément.

La matrice $\Omega$ représente le couplage de puissance moyen entre les vecteurs propres à l'émission et ceux à la réception. Ainsi, $\Omega$ dépend de l'environnement et reflète directement la configuration spatiale des diffuseurs dans le canal de propagation.

#### 1.4.1.2 Modèle i.i.d

Telatar [2] et Foschini [49] ont proposé un modèle stochastique, le plus simple, pour des canaux MIMO sous l'hypothèse que les coefficients de la matrice du canal sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.). Le modèle i.i.d est l'un des modèles de canaux MIMO analytiques les plus répandus. Dans ce modèle, la matrice de covariance $\Psi = I_{N_r N_t}$, à cet effet la matrice du canal $H$ est donc équivalente à $H_w$. Ce modèle correspond à un canal MIMO spatialement blanc, il peut être adopté pour des environnements de trajets multiples riches et uniformément répartis dans toutes les directions

[50]. Le modèle est attrayant en raison de sa simplicité, ce qui fait qu'il est beaucoup utilisé dans des études théoriques et simulations de systèmes MIMO.

### 1.4.2 Modélisation pour canal MIMO sélectif en fréquence

Lorsque l'étalement des retards dans le canal est important comparé à la durée du temps symbole du système de communication MIMO, les réponses impulsionnelles du canal sont représentées par quelques échantillons caractérisant les $L$ trajets ("taps") principaux de propagation. La matrice des réponses impulsionnelles $H(\tau)$ s'exprime alors comme la somme de $L$ matrices de coefficients $A_l$, décalées l'une de l'autre d'un retard $\tau_l$. Le canal radio MIMO à large bande qui décrit la connexion entre un émetteur et un récepteur peut être exprimée comme suit,

$$H(\tau) = \sum_{l=0}^{L-1} A_l \delta(\tau - \tau_l), \tag{1.32}$$

où $H(\tau) \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ et

$$A_l = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(l)} & \alpha_{1,2}^{(l)} & \cdots & \alpha_{1,N_t}^{(l)} \\ \alpha_{2,1}^{(l)} & \alpha_{2,2}^{(l)} & \cdots & \alpha_{2,N_t}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{N_r,1}^{(l)} & \alpha_{N_r,2}^{(l)} & \cdots & \alpha_{N_r,N_t}^{(l)} \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

est une matrice complexe qui décrit la transformation linéaire entre les deux réseaux d'antennes considérés correspondant au trajet $l$. $\alpha_{nm}^{(l)}$ est le coefficient d'atténuation complexe de l'antenne émettrice $m$ à l'antenne réceptrice $n$. Pour que le modèle de canal reste simple, on suppose que $\alpha_{nm}^{(l)}$ suit une distribution gaussienne complexe de moyenne nulle, c'est-à-dire que $|\alpha_{nm}^{(l)}|$ est distribué selon une loi de Rayleigh. On suppose en outre que la puissance moyenne des coefficients d'atténuation est identique pour un retard donné, donc

$$P_l = \mathbb{E}\left[|\alpha_{nm}^{(l)}|^2\right], \tag{1.34}$$

pour tout

$$n \in [1, 2, \ldots N_r] \wedge m \in [1, 2, \ldots N_t] \tag{1.35}$$

ces coefficients sont non corrélés d'un retard à un autre, alors

$$\langle |\alpha_{nm}^{(l_1)}|^2, |\alpha_{nm}^{(l_2)}|^2 \rangle = 0 \; pour \; l_1 \neq l_2, \tag{1.36}$$

où $\langle a, b\rangle$ calcule le coefficient de corrélation entre $a$ et $b$. Cela implique que le spectre de retard de puissance moyenne (PDS : Power Delay Spectrum) que le modèle reproduit est égal à $P(\tau) = \sum P_l \delta(\tau - \tau_l)$. Ainsi, en choisissant correctement l'ensemble de paramètres, on peut réaliser un profil PDS (Power Delay Profile : PDP) à décroissance exponentielle avec un étalement de retard [51]. Alternativement, la forme de PDP peut être choisie en fonction de certains profils spécifiés par l'Union Internationale des Télecommunications (Union Internationale des Télécommunications (UIT)), tels que véhiculaire (Vehicular A), intérieur (Indoor A), piéton (Perdestrian A ), etc...[52].

#### 1.4.2.1 Modèle à base de corrélation

Considérons un canal MIMO NLOS à large bande. Pour chaque trajet la matrice de covariance du canal MIMO normalisée peut être bien modélisée par le produit Kronecker des matrices de covariance aux deux extrémités, par la relation suivante

$$\Psi^l = R^l_{T_X} \otimes R^l_{R_X}, \tag{1.37}$$

où $\Psi^l$ est la matrice de covariance de canal du correspondant au $l$-ème décalage temporel, $R^l_{T_X}$ la matrice de covariance en émission correspondant au $l$-ème trajet et $R^l_{R_X}$ la matrice de covariance réception correspondant au $l$-ème trajet [53]. Elles sont définies comme suit

$$R^l_{T_X} = \mathbb{E}\left[((\boldsymbol{h}^l_i)^H \boldsymbol{h}^l_i)^T\right], \ pour\ i = 1, \cdots, N_t \tag{1.38}$$

$$R^l_{R_X} = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{h}^j_l (\boldsymbol{h}^j_l)^H\right], \ pour\ j = 1, \cdots, N_r \tag{1.39}$$

$$\Psi^l = \mathbb{E}\left[vec(H_l) vec(H_l)^H\right]. \tag{1.40}$$

$\boldsymbol{h}^l_i$ est la $i$-ème ligne de $H_l$, $\boldsymbol{h}^j_l$ est la $j$-ème colonne de $H_l$, $H_l$ étant la réponse impulsionnelle du canal MIMO large bande correspondante au $l$-ème "taps".

Supposons que les trajets soient indépendants, gaussiens complexes et à moyenne nulle. Dans ce cas, la réponse impulsionnelle $H_l$ du canal MIMO du $l$-ème trajet peut être modélisée comme suit :

$$H_l = {R^l_{T_X}}^{1/2} H^l_w {R^l_{R_X}}^{T/2} \tag{1.41}$$

où $H_w^l$ est une matrice correspondante au modèle i.i.d présenté à la section 1.4.1.2.

Toutes les matrices de covariance des canaux ont une structure de Toeplitz. En effet, pour les systèmes MIMO conventionnels, le canal sélectif en fréquence est très souvent modélisé par une structure de Toeplitz.

#### 1.4.2.2 Modèle de matrice polynomiale du canal MIMO

Considérons un canal MIMO sélectif en fréquence avec $N_t$ entrées et $N_r$ sorties. La réponse impulsionnelle de ce canal multi-trajets $H(\tau)$ décrit comment les signaux transmis à partir des différentes antennes d'émission seront mélangés dans le temps et dans l'espace au niveau du récepteur. Ce mélange convolutif peut être parfaitement décrit par une matrice polynomiale $H(z)$, sous la forme,

$$H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} H_l z^{-l} = \begin{bmatrix} h_{1,1}(z) & h_{1,2}(z) & \cdots & h_{1,N_t}(z) \\ h_{2,1}(z) & h_{2,2}(z) & \cdots & h_{2,N_t}(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{N_r,1}(z) & h_{N_r,2}(z) & \cdots & h_{N_r,N_t}(z) \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

où $H_l \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ désigne la matrice des coefficients du canal MIMO correspondant au décalage temporel (retard) $l$ et $z^{-1}$ représente l'opérateur de retard élémentaire (unité). L'entité $h_{i,j}(z)$ est la forme polynomiale de la réponse impulsionnelle du canal SISO entre la $j$-ème antenne émettrice et la $i$-ème antenne réceptrice (figure 1.9). Son expression est donnée par

$$h_{i,j}(z) = \sum_{l=0}^{L-1} [H_l]_{i,j} \, z^{-l}, \tag{1.43}$$

où $[H_l]_{i,j}$ désigne la réponse impulsionnelle du canal échantillonné au $l$-ième retard de propagation. Dans ce cas, il y a $L$ décalages temporels au total pour chaque canal SISO.

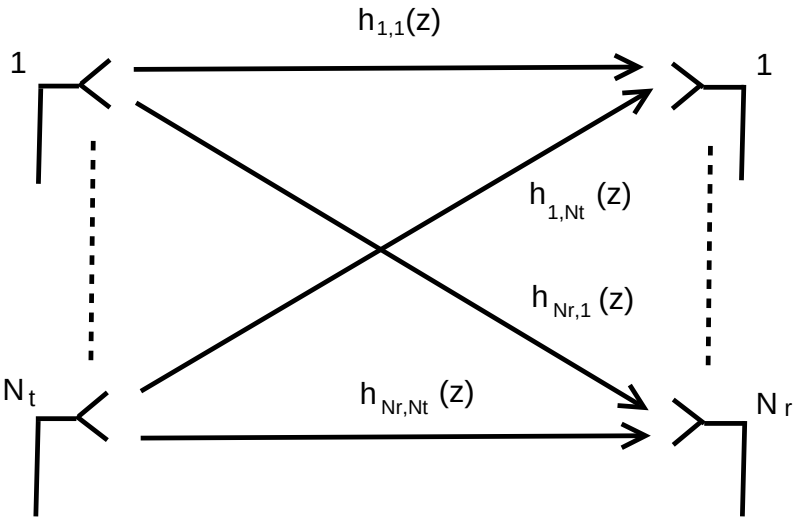



FIGURE 1.9 : Représentation du canal MIMO

Dans la suite nous nous appuierons beaucoup sur cette représentation sous forme de matrice polynomiale du canal MIMO large bande.

## 1.5 Techniques de transmission MIMO

### 1.5.1 Codage spatio-temporel (CST)

Pour améliorer la fiabilité de la transmission, les codes temps-espaces ont été mis en place. Ils utilisent des symboles complexes issus d'une constellation codés à la fois en espace (plusieurs antennes d'émission) et en temps (redondance) en se basant sur une matrice de codage, propre à chaque type de code. L'architecture générale du système de Codage Spatio-Temporel (CST) est présentée à la figure 1.10. La copie du signal est non seulement transmise avec une autre antenne, mais aussi à un autre instant. Dans ce cas les antennes multiples ne sont pas utilisées pour augmenter le débit, mais simplement pour créer une diversité spatiale nécessaire à l'acheminement d'information sur un canal particulièrement difficile.

La construction des codes spatio-temporels doit répondre à certains critères afin d'optimiser les performances de la liaison radio [54]. Ces critères de performances sont :

— **l'efficacité spectrale** : c'est le rapport entre le débit binaire et la bande passante ; elle s'exprime en bit par seconde par Hertz. L'objectif est d'avoir le débit le plus élevé possible, la limite ultime étant définie par la capacité du canal.

— **La robustesse** : la robustesse de la transmission est inversement proportionnelle à l'augmentation du débit. Elle peut être mesurée par le taux d'erreur binaire (BER). En effet, puisque l'objectif principal de tels codes est d'engendrer un maximum de diversité, le BER est souvent le critère de performance adopté.

— **La complexité** : dans les réseaux Wireless Local Area Network (WLAN), il est fort possible que l'une des deux extrémités de la liaison radio soit alimentée par une batterie. De ce fait, il est souhaitable que la complexité du mappeur/dé-mappeur spatio-temporel soit la plus faible possible. La complexité de conception des schémas d'émission et de réception doit donc être asymétrique, avec une complexité moindre du côté du terminal alimenté par batterie.

Il existe principalement deux catégories de codes spatio-temporels (CST) : les codes spatio-temporel en treillis CSTT), et les codes spatio-temporels par blocs (CSTB).

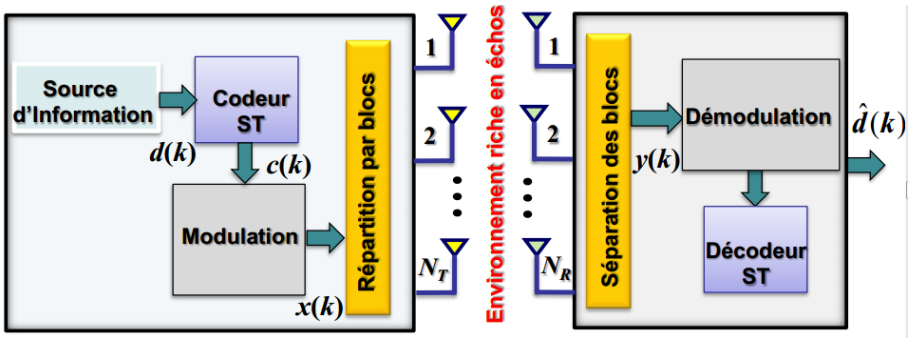



FIGURE 1.10 : Structure d'un codeur spatio-temporel

### 1.5.1.1 Codage Spatio-Temporel en Treillis (CSTT)

En 1998, Tarokh et al. ont proposé la première conception de codes en treillis en employant plusieurs antennes en émission et en réception [55, 56]. Plusieurs critères de construction de codes en treillis sont ensuite étudiés afin de minimiser la probabilité d'erreurs au niveau des canaux de transmission. Les Codes Spatio-Temporel en Treillis (CSTT) combinent le codage de canal avec la modulation numérique. Ils peuvent être considérés donc comme une extension des codes en treillis classiques. Par conséquent, en plus du gain de diversité évident, le codage spatio-temporel rajoutent un gain de codage non négligeable s'il est bien construit.

Le codage spatio-temporel en treillis est un moyen efficace d'obtenir de la diversité en plus d'un gain de codage. Cependant, la complexité de calcul pour le décodage augmente exponentiellement avec le nombre d'états de modulation et sa conception est très difficile

[54].

#### 1.5.1.2 Codage Spatio-Temporel en Bloc (CSTB)

La complexité de décodage des CSTT a jusqu'à présent freiné leur expansion. À cet effet pour réduire la complexité du décodeur dévolu aux CSTT, Alamouti a découvert une technique de transmission utilisant deux antennes à l'émission et permettant un décodage linéaire au sens du maximum de vraisemblance [57]. Elle sera étendue par la suite par Tarokh et al.[54, 58] pour former une nouvelle classe de codes spatio-temporels : les Codes Spatio-Temporel en Bloc (CSTB). Ils sont définis comme une opération de modulation d'un bloc de symboles à la fois dans l'espace et dans le temps, créant ainsi des séquences orthogonales transmises via des antennes émettrices différentes [59, 60]. Le codage spatio-temporel en bloc possède donc le même avantage de diversité que les techniques de combinaisons de répliques à gain maximal.

Dans la littérature, il existe de nombreuses méthodes de constructions de codes espace-temps en blocs : les codes orthogonaux, les codes à dispersion linéaire et les codes algébriques. Le code espace-temps d'Alamouti est un cas particulier des codes espace-temps orthogonaux réalisés par Tarokh. Or, les codes orthogonaux sont pénalisés par leur rendement inférieur à $1$ pour un nombre d'antennes émettrices supérieur à $2$. Par ailleurs, Damen et al. [61] ont construit un code algébrique diagonal afin d'obtenir un rendement égal à $1$ et une diversité maximale. La construction du code algébrique diagonal se base sur l'utilisation des rotations de constellations et la transformation de Hadamard. En effet, la constellation optimale garantit la diversité maximale et la transformation de Hadamard permet de répartir les symboles modulés en espace et en temps afin d'avoir un bon gain de codage.

### 1.5.2 Multiplexage spatial (MS)

Les techniques de transmission MIMO présentées en section 1.5.1 étaient utilisées pour augmenter le rapport signal sur bruit (SNR) et/ou pour exploiter la diversité afin d'améliorer la fiabilité de la liaison. Cependant, les multiples antennes aux extrémités de l'émetteur et du récepteur peuvent être directement utilisées pour augmenter significativement le débit de données grâce au multiplexage spatial [49]. En MIMO, le multiplexage spatial exploite la diversité spatiale pour transmettre des flux parallèles d'information, appelés couches, dans la même bande spectrale attribuée [62]. Il permet ainsi de maximiser le débit d'information sur un canal MIMO en transmettant au plus $m = \min(N_t, N_r)$ flux de

données différents et parallèles en cas de conditions favorables : SINR élevé, propagation multi-trajets riche et antennes suffisament dé-corrélées [63]. De ce fait, la capacité du système est simplement multipliée par le nombre de flux. Avec le "Eigen-Beamforming", le nombre de flux de multiplexage spatial correspond au rang de la matrice $H$ du canal MIMO, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres de la matrice.

Nous distinguons deux classes de multiplexage spatial selon que le canal est connu à l'émission ou pas : le multiplexage spatial à boucle-ouverte (Open-Loop MIMO) et le multiplexage spatial boucle-fermée (Close-Loop MIMO) [64]. Dans le multiplexage spatial à boucle-ouverte (OL-MIMO), l'émetteur ne dispose d'aucune information sur le canal. Chaque antenne transmet un flux de données indépendant ; la puissance totale est équitablement répartie sur les différentes antennes.

Dans le multiplexage spatial à boucle-fermée (CL-MIMO), qui sera adopté dans la suite de cette thèse, l'émetteur dispose de toutes les informations nécessaires sur le canal. L'allocation de puissance optimale peut être faite selon la technique de water-filling [65]. L'algorithme alloue plus de puissance à l'antenne d'émission du sous canal avec une valeur propre plus grande, dans le but de maximiser le débit de données. Les puissances d'émission sur les différentes antennes sont allouées en fonction des valeurs propres de la matrice du canal (voir section 1.7).

Le multiplexage spatial a été introduit sous le nom de "Bell-Labs LAyered Space-Time" (BLAST) dans [62]. L'architecture du premier schéma de multiplexage spatial, appelé Diagonal BLAST (D-BLAST), a été proposée par Foschini en 1996. Par la suite Foschini et Wolniansky ont proposé deux schémas de codage plus réalistes, appelé V-BLAST et Horizontal BLAST (H-BLAST) [62, 66]. Pour un bon fonctionnement du codage, ces schémas BLAST doivent utiliser au moins autant d'antennes en réception qu'en émission.

#### 1.5.2.1 D-BLAST (Diagonal Bell-Labs LAyered Space-Time)

L'idée originale de Foschini [67] repose sur une structuration diagonale des symboles. Les symboles codés de chaque couche sont transmis successivement par chacune des $N_t$ antennes. Par conséquent, le flux de données est dé-multiplexé en $N_f$ sous-flux ou couches, ayant le même débit. Chaque sous-flux est ensuite codé (de la redondance peut être introduite suivant le codeur canal utilisé), puis les sous-flux sont modulés. L'association flux/antenne est périodiquement cyclique : chaque sous-flux parcourt l'ensemble des antennes d'émission, comme illustré à la Figure 1.11.

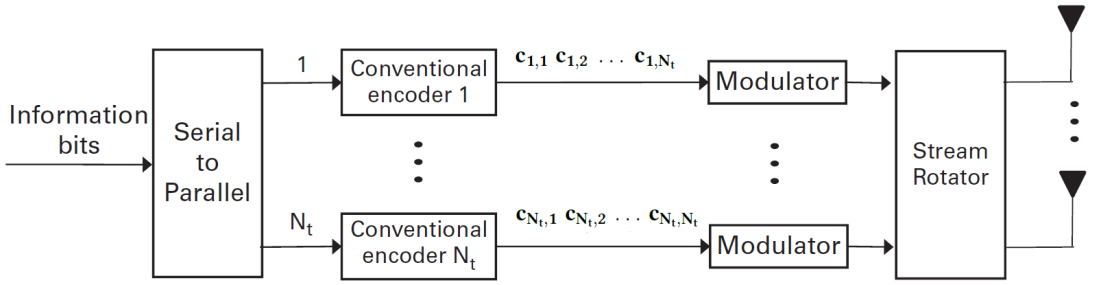



FIGURE 1.11 : Structure d'un émetteur D-BLAST [8]

Ce système résiste aux effets d'évanouissements du canal par le fait que la transmission d'un sous-flux utilise toutes les antennes possibles. Si on note par $c_{k,l}$ les symboles codés transmis par l'antenne $l$ et à l'instant $k$, on obtient la matrice de codage suivante :

$$\underrightarrow{\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \dots & c_{N_f,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{1,2} & c_{2,2} & \dots & c_{N_f,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{1,N_t} & c_{2,N_t} & \dots & c_{N_f,N_t} \end{bmatrix}}_{\text{temps}}. \tag{1.44}$$

Cette architecture permet d'obtenir un débit proche de la capacité mais elle possède une structure de codeur et décodeur très complexe. En effet pour un décodeur Maximum de Vraissemblance (MV) la complexité est au minimum exponentielle en $N_f N_t$, alors qu'avec le V-BLAST le même exposant est $N_f$ fois moins grand [68]. Cette complexité de son décodage la rend moins attrayante.

### 1.5.2.2 H-BLAST (Horizontal Bell-Labs LAyered Space-Time)

L'architecture BLAST initialement proposée comporte un système de codage à la suite du démultiplexeur. Dans l'architecture horizontale H-BLAST (figure 1.12), chaque couche ou sous-chaîne d'éléments binaires est codée individuellement, puis modulée et transmise par une des $N_t$ antennes. On obtient la matrice de codage suivante suivant :

$$\underrightarrow{\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \dots \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1,N_t} & c_{2,N_t} & \dots \end{bmatrix}}_{\text{temps}} \tag{1.45}$$

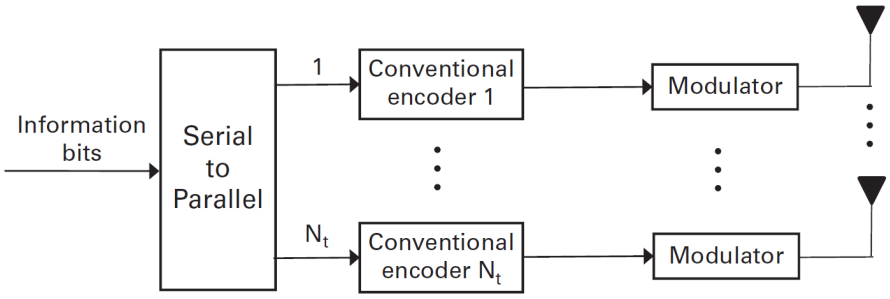



FIGURE 1.12 : Structure d'un émetteur H-BLAST

#### 1.5.2.3 V-BLAST (Vertical Bell-Labs LAyered Space-Time)

Le V-BLAST est une architecture verticale. Il procède tout simplement à un démultiplexage de la chaîne d'informations en $N_t$ sous-chaînes, chacune d'entre elles étant transmise par son antenne respective après avoir été modulée. C'est le système le plus simple, qui ne fait appel à aucune technique de codage [62, 66, 69]. Cette architecture vise principalement à augmenter la capacité du système. Une description simple est donnée sur la figure 1.13.

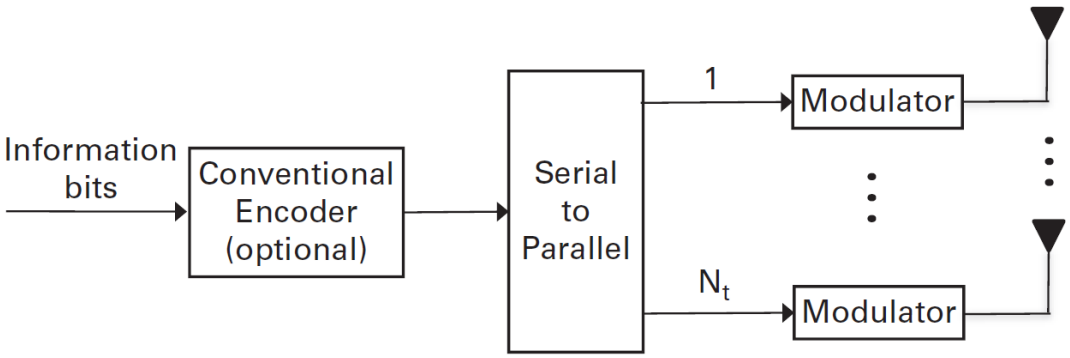



FIGURE 1.13 : Architecture d'un émetteur V-BLAST [8]

Si on note par $\{d_1, d_2, \ldots d_j, \ldots\}$, le flux de bits d'information provenant de la source binaire, le processus peut être représenté sous forme de diagramme (figure 1.14).

$$[d_1 d_2 \dots d_j \dots] \Rightarrow \begin{bmatrix} d_1 & d_{N_t+1} & \dots \\ d_2 & d_{N_t+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{N_t} & d_{2N_t} & \dots \end{bmatrix}$$

FIGURE 1.14 : Processus codage V-BLAST

Le récepteur reçoit la somme des différents flux d'information après passage dans le canal. Un égaliseur est chargé de découpler (de-multiplexer) les informations sur la base de l'observation du signal aux différentes antennes. Diverses techniques ont été développées à cette fin, reposant sur différents critères : inversion du canal (CSI-Zero-Forcing), minimisation de la variance de l'erreur d'estimation des symboles (MMSE- Minimum Mean Square Error) et le maximum de vraisemblance (Maximum-Likelihood (ML)).

Dans d'un système MIMO en boucle ouverte, le récepteur ML peut fournir une performance proche de la capacité [70]. Cependant la complexité élevée du récepteur, qui croît exponentiellement avec le nombre d'antennes, le rend inutilisable. Les récepteurs à complexité réduite, tels que le MMSE avec annulation d'interférences successives [71], peuvent atteindre pratiquement les mêmes performances [72].

### 1.5.3 "Eigen-beamforming" dans un sytème MIMO à bande étroite

Un système de communication point à point à bande étroite (à évanouissement plat) employant $N_t$ antennes d'émission et $N_r$ antennes de réception est illustré à la figure 1.15. Les modèles à bande étroite supposent que le canal a un évanouissement non sélectif en fréquence. Ce système peut être représenté par le modèle temporel discret suivant :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,N_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_r,1} & \dots & h_{N_r,N_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{N_r} \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

ou simplement par $\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$. Ici $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$ représente le vecteur symbole transmis, $\boldsymbol{n}$ de dimension $N_r \times 1$ est le vecteur de bruit gaussien additif (AWGN), et la matrice de canaux $H \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ est constituée de variables aléatoires gaussiennes complexes (Rayleigh Fading) $h_{i,j}$ représentant le gain de canal de l'antenne d'émission $j$ à l'antenne de réception $i$. Sans perte de généralité, le bruit peut être normalisé pour que sa matrice de covariance soit une matrice d'identitéLa matrice de canal $H \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ est constituée

de variables aléatoires gaussiennes complexes (Rayleigh Fading) $h_{ij}$ représentant le gain de canal de l'antenne d'émission $j$ à l'antenne de réception $i$. Nous supposons que le récepteur est capable d'estimer parfaitement l'état du canal $H$ [73, 74]. Donc à chaque instant $H$ est connu au récepteur.

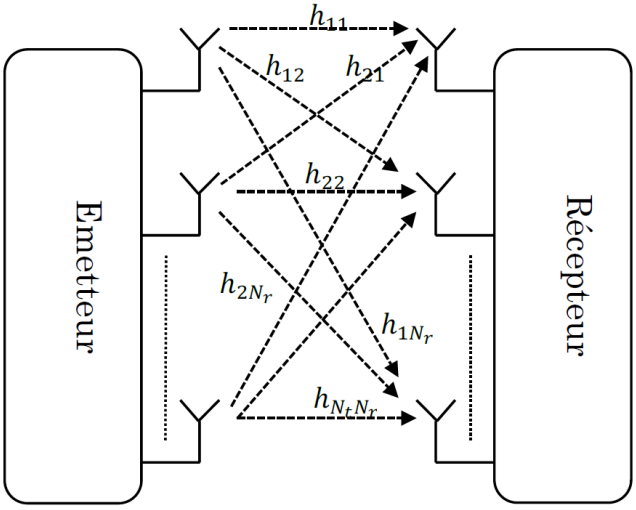



FIGURE 1.15 : Représentation d'un MIMO à bande étroite

Dans le cas où l'état du canal est inconnu de l'émetteur (Open-Loop MIMO), le décodage optimal du signal reçu nécessite une démodulation par le maximum de vraisemblance (MV). Si les symboles modulés sont choisis dans un alphabet d'une taille donnée, alors la démodulation par MV nécessite une recherche exhaustive sur un certain nombres de possibilités. En général, sans les informations d'état de canal à l'émission, la complexité de décodage est proportionnellement exponentielle avec le rang de la matrice de covariance d'entrée ; celui ci correspond au nombre de flux indépendants transmis simultanément. Cette complexité de décodage est généralement prohibitive même pour un petit nombre d'antennes. Cependant, la complexité du décodage serait considérablement réduite si le canal peut être mesuré au niveau du récepteur et renvoyé à l'émetteur par "feedback" [75](Close-Loop MIMO), comme nous le verrons dans la section suivante.

### Décomposition parallèle du canal MIMO

Considérons le cas où l'information de l'état de canal est parfaitement connu par l'émetteur (CSIT) via feedback [76–78]. En d'autres termes, l'émetteur et le récepteur connaissent $H$ à chaque instant (Close-Loop). En outre considérons une décomposition en valeur sin-

gulière (Singular Value Decomposition (SVD)) de la matrice du canal comme suit :

$$H = U\Sigma V^H \tag{1.47}$$

où $U$ et $V^H$ sont des matrices unitaires (c'est-à-dire $UU^H = I_{N_t}$ et $VV^H = I_{N_r}$). $\Sigma$ est une matrice diagonale, c'est-à-dire, $\Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, où $m = \min(N_t, N_r)$. Les éléments diagonaux de $\Sigma$ représentent les valeurs singulières de la matrice $H$ et satisfont $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_m$.
Supposons qu'à un certain moment, l'émetteur possède $r$ symboles à transmettre, que nous notons par

$$\boldsymbol{x} \stackrel{\triangle}{=} [x_1, \ldots, x_r]. \tag{1.48}$$

Puisque l'émetteur est supposé connaître $H$, il peut déterminer $V$ et effectuer l'opération de pré-codage suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = V\boldsymbol{x}, \tag{1.49}$$

ce qui résulte à un vecteur de transmission ayant la dimension $N_t \times 1$. L'opération de pré-codage peut être considérée comme une opération qui met en correspondance les $r \leq N_t$ symboles aux $N_t$ antennes d'émission. Notez que le pré-codage de transmission est largement utilisé dans les systèmes pratiques et offre des avantages significatifs en termes de performances. Le vecteur de signal reçu est donné par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \sqrt{\rho} H\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{n} \\ &= \sqrt{\rho} HV\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Où $\rho$ désigne la puissance totale reçue à chaque antenne de réception venant de toutes les antennes d'émission. Puisque le récepteur est supposé connaître $H$, il peut aussi effectuer une décomposition en valeur singulière de $H$ et déterminer $U^H$ [8]. L'expression du signal reçu post-filtré avec $U^H$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{y}} &\stackrel{\triangle}{=} U^H\boldsymbol{y} \\ &= \sqrt{\rho} U^H HV\boldsymbol{x} + U^H\boldsymbol{n} \\ &= \sqrt{\rho}\Sigma\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{n}}. \end{aligned} \tag{1.51}$$

où $\tilde{\boldsymbol{n}} = U^H\boldsymbol{n}$. Comme $U$ est unitaire alors $\tilde{\boldsymbol{n}}$ et $\boldsymbol{n}$ ont les même propriétés statistiques. En utilisant le fait que est $\Sigma$ diagonale, nous avons :

$$\tilde{y}_i = \rho\sigma_i x_i + \tilde{n}_i \;\; pour \; i = 1, \ldots, m. \tag{1.52}$$

Le canal MIMO est transformé en $m$ canaux SISO parallèles non interférants correspondant au nombre de valeurs singulières non nulles de matrice du canal. Par ailleurs, puisque les canaux parallèles sont de qualité différente, l'algorithme de "watter-filling" peut être utilisé pour allouer de manière optimale la puissance sur les différents canaux [2, 39, 65].

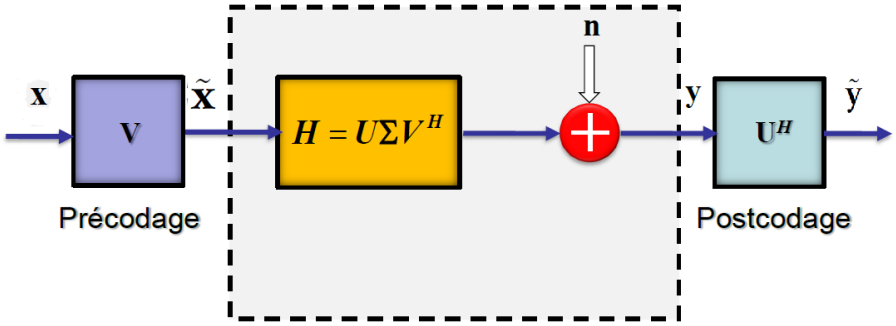



FIGURE 1.16 : Illustration du "Eigenbeamforming"

## 1.6 Techniques de détection en MIMO avec multiplexage spatial

À la réception, le signal est une superposition des symboles transmis, bruités et atténués issus des différentes antenne d'émission, compliquant ainsi la tâche des récepteurs traditionnels. L'expression du signal reçu est donnée en équation (1.46). Le détecteur MIMO nous permettra, une fois que les données sont reçues, de réaliser une estimation des bits transmis. L'algorithme de réception proposé pour le système de multiplexage spatial V-BLAST original dans [67] essaie d'éliminer successivement les interférences dues aux émetteurs autres que celui dont on estime les symboles. Ce détecteur optimal est basé sur le maximum de vraisemblance, il se sert donc de toute information dont il dispose pour récupérer les symboles.

Il existe de nombreux autres algorithmes permettant de récupérer les symboles lors d'une transmission multi-antennes [79]. Les moins complexes sont les récepteurs linéaires basés sur le critère de forçage à zéro (ZF) ou ceux basés sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) [80].

### 1.6.1 Détecteur à maximum de vraisemblance

La solution optimale en terme de taux d'erreurs est donnée par un détecteur sur le critère de maximum de vraisemblance. Le Maximum de Vraisemblance effectue une minimisation des distances Euclidiennes des vecteurs de symboles possiblement transmis, au prix d'une recherche exhaustive. Ce critère minimise la puissance du bruit sur le vecteur reçu et s'exprime de la façon suivante :

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{MV} = arg\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{y} - H\boldsymbol{x}\|^2 = arg\min_{x} \sum_{i=1}^{N_r} \|y_i - \sum_{j=1}^{N_t} h_{i,j}x_j\|^2 \tag{1.53}$$

où $h_{i,j}$ est la $(i,j)$-ème composante de la matrice $H$. La recherche du vecteur solution nécessite le calcul de la norme au carré pour toutes les combinaisons possibles de symboles. Ainsi la complexité de l'algorithme croît exponentiellement avec la taille du vecteur $x$ et l'ordre de la modulation. Le récepteur basé le critère de maximum de vraisemblance est le récepteur numérique le plus robuste pour les systèmes MIMO, mais requiert beaucoup de calculs.

Dans le but de préserver l'optimalité du critère MV, tout en réduisant la complexité, plusieurs solutions ont été proposées. En règle générale, elles consistent à limiter l'espace de recherche dans la détection. En d'autres termes, on ne considère que les vecteurs qui sont à l'intérieur d'une sphère construite autour du vecteur reçu, d'où le nom "Sphere Decoding" [81, 82].

### 1.6.2 Critère de forçage à zéro (ZF : Zero Forcing)

Le récepteur linéaire le plus simple est celui basé sur le critère de forçage à zéro (ZF). Il cherche à annuler les contributions des autres émetteurs sur chaque symbole. Il procède en inversant tout simplement la matrice du canal. En supposant que $H$ est inversible, le vecteur de symboles estimés de taille $N_t \times 1$ est alors donné par la relation :

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{ZF} = H^{-1}\boldsymbol{y}. \tag{1.54}$$

Le récepteur ZF sépare ainsi parfaitement les symboles $x_i$ $(i = 1, \ldots, N_t)$ de l'effet du canal. Lorsque $H$ est mal conditionnée, le récepteur ZF donne des résultats corrects que pour des valeurs de SNR élevées. Cependant pour de faibles valeurs de SNR, le bruit perturbe fortement les performances.

Si la matrice $H$ n'est pas carrée, c'est-à dire $N_t \neq N_r$, le récepteur multiplie $y$, à sa

gauche, par la matrice pseudo-inverse $H^+$ du canal afin de récupérer tous les symboles. Dans ce cas, le vecteur estimé s'écrit :

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{ZF} = H^+\boldsymbol{y} = (H^H H)^{-1} H^H \boldsymbol{y}. \tag{1.55}$$

Ce récepteur a la particularité d'être le plus simple mais a aussi le défaut d'être le moins performant. En effet l'annulation de l'interférence entre symboles sans prise en compte du bruit gaussien peut entraîner une augmentation du niveau de bruit après égalisation, et donc une dégradation des performances.

### 1.6.3 Récepteur minimisant l'erreur quadratique moyenne

La contrepartie de la séparation parfaite des signaux avec le ZF est l'augmentation du bruit. L'égaliseur linéaire MMSE qui se base sur minimisation l'erreur quadratique moyenne constitue une excellente alternative. Avec cette méthode le signal reçu $y$ est post-traité comme suit

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{MMSE} = (H^H H + \sigma_n^2 I_{N_t})^{-1} H^H \boldsymbol{y}. \tag{1.56}$$

Le récepteur Minimum Mean Square Error (MMSE) linéaire minimise l'erreur globale due au bruit et interférences mutuelles des signaux transitant par le même canal.

Il est moins sensible au bruit, mais sépare moins bien les signaux que Zero Forcing (ZF). Dans le cas d'une transmission avec un SNR élevé $\sigma_n^2 \approx 0$ le récepteur MMSE converge vers le ZF.

### 1.6.4 Décodage par soustraction successive d'interférences

Les méthodes linéaires précitées possèdent chacune un inconvénient majeur. Le ZF sépare parfaitement les symboles au prix d'un niveau de bruit élevé sur certaines voies. La méthode MMSE, même si elle est moins touchée par le phénomène du bruit, n'est en revanche pas capable d'enlever toute interférence inter-symboles (ISI).

Dans le système MIMO avec mutiplexage spatial V-BLAST [62], développé par les laboratoires Bell, Foschini et al. proposent une approche alternative très intéressante qui augmente les performances du récepteur au prix d'une complexité accrue.

Le principe de cet algorithme non linéaire est basé sur "l'annulation des symboles" en soustrayant la contribution des éléments de $\boldsymbol{x}$, déjà détectés, du vecteur reçu $\boldsymbol{y}$ : on parle de Successive Interference Cancelling (SIC). On obtient un vecteur reçu contenant moins

interférences. Cette méthode utilise une triangularisation QR de la matrice du canal [67].

Selon ce procédé, une erreur effectuée lors de l'estimation d'un symbole entraînera des erreurs sur les symboles estimés par la suite. Ainsi, les performances du système vont dépendre de l'ordre selon lequel les symboles vont être détectés. Il est alors préférable d'ordonner les symboles avant d'effectuer la détection, on parle de détecteur OSIC (Ordered Successive Interference Cancellation) [62, 83].

## 1.7 Système MIMO à large bande

Dans un environnement de propagation à trajets multiples, plusieurs versions retardées du signal transmis arrivent au récepteur. Les modèles à large bande traitent le canal de propagation comme étant sélectif en fréquence. Rappelons que l'intervalle des retards entre les différents trajets, appelé retard de propagation, est responsable de cette sélectivité fréquentielle : le canal agit comme un filtre retardataire [84] (voir equation 1.32),

$$H(\tau) = \sum_{l=0}^{L-1} H_l \delta(\tau - \tau_l).$$

où $H_l \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ désigne la matrice des coefficients du canal MIMO correspondant au $l$-ème décalage temporel.

En réception, il est nécessaire d'imposer une dé-corrélation, non plus seulement au même instant, mais aussi il faudra prendre en compte convenablement les retards relatifs aux différents échos pour tous les flux de signaux. On parle dans ce cas de dé-corrélation forte, qui requiert des filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) convenablement choisis. La décomposition SVD, pour exploiter la diversité spatial, ne peut pas être directement utilisée. Par conséquent, un certain nombre de solutions pour un canal sélectif va être maintenant présenté.

### 1.7.1 Codage vectoriel spatio-temporel

Considérant un ensemble de signaux sources de longueur $T$ à transmettre via un canal MIMO large bande tel que $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Le retard maximal pour toutes les séquences de fonctions d'impulsion échantillonnées du canal est noté $L$. Raleigh et Cioffi [85] ont montré que si on réécrit $\boldsymbol{x}$ comme un vecteur colonne de longueur $N_t T$, noté $\boldsymbol{x}_R$, la sortie du canal spatio-temporel non bruité peut alors être

exprimé sous la forme d'une équation vectorielle suivante :

$$\boldsymbol{y}_R = H_R \boldsymbol{x}_R, \tag{1.57}$$

où $H_R$ est une matrice $N_r(T+L-1) \times N_t T$ composée de $N_r N_t$ sous-blocs SISO :

$$H_R = \begin{bmatrix} H_R^{1,1} & \cdots & H_R^{1,N_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_R^{N_r,1} & \cdots & H_R^{N_r,N_t} \end{bmatrix}. \tag{1.58}$$

Chaque sous-bloc représente une matrice de convolution de canal pour une seule paire d'émission-réception et possède la forme bien connue de Toeplitz. La structure du sous-bloc pour la $i$-ème antenne émettrice et $j$-ème réceptrice est représentée en équation 1.59. La SVD peut alors être appliquée à $H_R$. Raleigh et Cioffi ont appelé cette approche, codage vectoriel spatio-temporel (Space-Time Vector Coding (STVC)). L'inconvénient majeur du STVC est la complexité de calcul qui lui est associée. En effet, le calcul de la SVD d'une matrice $N_r(T+L-1) \times N_t T$ est quasiment impossible pour des tailles de blocs même modeste.

$$H_R^{1,1} = \begin{bmatrix} h_{j,i}(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_{j,i}(1) & h_{j,i}(0) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_{j,i}(L-1) & \cdots & h_{j,i}(1) & h_{j,i}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{j,i}(L-1) & \cdots & h_{j,i}(1) & h_{j,i}(0) & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.59}$$

Bien que la structure STVC soit suggérée comme moyen théorique pour atteindre la capacité du canal [85], sa grande complexité a motivé ses auteurs à mettre en œuvre une technique de codage espace-fréquence de matrice discrète multi-couches (Discrete Matrix Multitone (DMMT)) à complexité réduite. C'est une technique qui utilise la transformée de Fourier discrète (Discret Fourier Transform (DFT)) pour effectuer un multiplexage par répartition en fréquence (Frequency Division Multiplexing (FDM)). Cette nouvelle structure, plus pratique, se traduit par une matrice de solutions vectorielles d'émission et de réception pour chaque indice de fréquence de la transformée de Fourier discrète. DMMT est essentiellement similaire à l'approche OFDM présentée ci-dessous, raison pour laquelle elle n'est pas détaillée ici.

### 1.7.2 Association MIMO-OFDM

Une approche typique pour dé-corréler les signaux à large bande consiste à utiliser la transformée de Fourier discrète (DFT), pour transformer le canal large bande en des bandes de fréquences plus étroites et appliquer une SVD pour chacune d'elles [86]. Pour ce faire, la technolgie MIMO est associé multiplexage par répartition en fréquence orthogonale (OFDM).

L'OFDM a le grand mérite de transformer un canal multi-trajet large bande en un ensemble de canaux non sélectifs (à évanouissement plat), très simples à égaliser. En plus, l'utilisation ingénieuse de redondance cyclique (Cyclic Prefix (CP)) à l'émission permet d'absorber l'ISI causé par le canal de propagation et de réduire la complexité des terminaux. C'est la raison pour laquelle, la taille du CP doit être choisie plus grande que l'étalement maximal des retards. Cependant, cela réduit l'efficacité spectrale du système de transmission.

Considérons une modulation OFDM pour un modèle de système MIMO avec $N_t$ antennes d'émission et $N_r$ antennes de réception. L'opération IFFT (Inverse Fast Fourier Transform) et l'ajout de CP sont effectués individuellement sur le flux de données à transmettre sur chaque antenne. Au récepteur, la suppression du CP et l'opération FFT (Fast Fourier Transform) sont effectués sur chaque flux reçu, comme illustré à la figure 1.17. On note par $s_i$ le $i$-ème flux émis, de longueur $N_s$ symboles, pour $i = 1, 2, \ldots, N_t$ et $y$ désignent le $j$-ème flux reçu, de longueur $N_s$ symboles, pour $j = 1, 2, \ldots, N_r$. Pour chaque sous-porteuse $k$, la réponse en fréquence du canal MIMO à bande étroite correspondant s'exprime comme suit,

$$H\left[k\right] = \sum_{l=0}^{L-1} H_l exp\left(\frac{j2\pi kl}{N_s}\right) \tag{1.60}$$

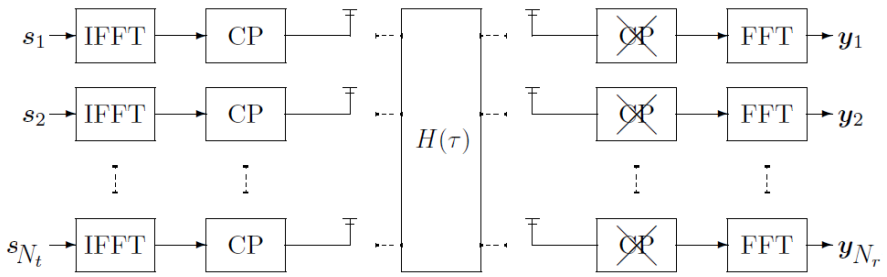



FIGURE 1.17 : Chaine de transmission MIMO-OFDM

Sur la $k$-ème sous-porteuse, l'émetteur répartit le vecteur de données de longueur $M$, $\boldsymbol{s}[k] = [s_1[k] \dots s_M[k]]^T$, sur les $N_t$ antennes d'émission. Cette répartition se fait de manière optimale en utilisant un pré-codeur linéaire $W[k]$. Les symboles $s[k]$ sont transmis avec contrainte de puissance $\mathbb{E}[\boldsymbol{s}[k]\boldsymbol{s}^H[k]] = \frac{P}{M} I_M$, $P$ étant la puissance totale transmise. Il faut noter que $M \leq min(N_t, N_r)$ correspond au rang de la matrice du canal représentant le nombre de flux de données multiplexés spatialement. Le signal reçu pour chaque sous-porteuse, $\boldsymbol{y}[k]$, peut être formulé comme suit :

$$\underbrace{\boldsymbol{y}[k]}_{N_r \times 1} = \underbrace{H[k]}_{N_r \times N_t} \underbrace{W[k]}_{N_t \times M} \underbrace{\boldsymbol{s}[k]}_{M \times 1} + \underbrace{\boldsymbol{n}[k]}_{N_r \times 1}, \tag{1.61}$$

où le vecteur $\boldsymbol{n}[k]$ contient le bruit blanc gaussien additif, supposé être de moyenne nulle et la covariance $\mathbb{E}[\boldsymbol{n}[k]\boldsymbol{n}[k]^H] = \sigma_n^2 I_M$.

Une décomposition SVD scalaire standard peut alors être appliquée à chaque matrice de canal à bande étroite, pour fournir plusieurs sous-canaux spatiaux. Pour une implémentation efficace de la FFT, $N_s$ est choisi pour être une puissance de 2 [87]. Il est important de noter aussi que MIMO-OFDM est un système de communication par blocs, chaque émetteur ou récepteur fonctionnant sur des blocs de données de longueur $N_s$. Il nécessite une capacité de stockage importante et ne convient pas pour le décodage de flux de données continus.

En outre, le fait de calculer une SVD indépendante pour chaque bande de fréquence ignore les corrélations relativement petites, mais importantes, qui peuvent exister entre différentes bandes. Cela peut conduire à un manque de cohérence temporelle (de phase) entre les bandes [88], puisque les SVD de chaque bande arrangent les canaux de sortie par ordre de puissance décroissante indépendamment de l'ordre dans les bandes voisines. Cela fait que la restauration de cohérence est requise, après le SVD, via des matrices de permutation [89].

### 1.7.3 Utilisation de la décomposition de matrice polynômiale

La représentation d'un canal MIMO multi-trajet peut être faite avec une matrice polynomiale $H(z)$ (voir équation 1.42). Avec le développement des techniques de décomposition de matrices polynomiale (voir chapitre 2) au cours de la dernière décennie, une méthode de pré-codage et d'égalisation basée sur la décomposition SVD de matrice polynomiale (Polynomial SVD (PSVD)) [88, 90–92] a été employée dans les systèmes MIMO à large bande. La décomposition de la matrice polynomiale permet d'effectuer approxi-

mativement un SVD à large bande sur $H(z)$, permettant une forte dé-corrélation et un compactage des données.

Cette approche se fait généralement en deux étapes. La première étape consiste à utiliser le PSVD pour découpler le canal MIMO sélectif en fréquence en un certain nombre de canaux SISO, sélectifs en fréquence et indépendants, de sorte que les interférences co-canal (CCI) soit éliminées ou fortement réduites. La deuxième étape consiste à supprimer l'interférence inter-symbole (ISI) restant pour chaque canal SISO, en utilisant les techniques d'égalisation standard, telles que l'égalisation (ZF) ou le (MMSE).

## 1.8 Capacité des systèmes multi-antennes

La capacité d'un canal est la quantité maximale d'information pouvant transiter à travers le canal par unité de temps. Dans son article fondateur "Une théorie mathématique de la communication" [93], Claude E. Shannon introduit le concept de capacité de canal pour un canal SISO gaussien à bruit blanc additif de Gauss (AWGN) avec une contrainte de puissance moyenne. Les résultats de Shannon fournissent une référence de comparaison pour n'importe quel schéma de transmission pratique.

Dans un système MIMO avec $N_t$ antennes émettrices et $N_r$ antennes réceptrices, la capacité du canal dépend de la disponibilité du CSI ou non au niveau l'émetteur et croît avec le nombre d'antennes (figure 1.18). Lorsque l'émetteur a des informations sur le canal, les symboles d'entrée $x$ peuvent alors être pré-traités pour obtenir un taux de transmission optimal.

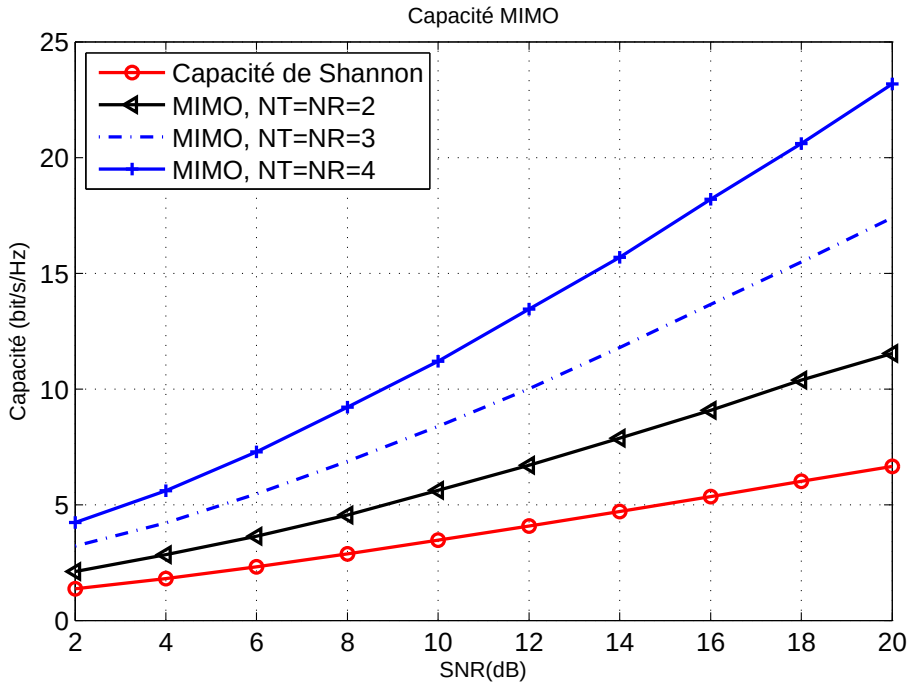



FIGURE 1.18 : Évolution de la capacité du canal avec le nombre d'antennes MIMO

Considérons un état de canal statique $H$, où le $(i,j)$-ième élément ($H_{i,j} = h_{i,j}$) est le coefficient de canal entre la $i$-ème antenne d'émission et la $j$-ième antenne de réception. Avec un CSI disponible à l'émission, la capacité du canal, avec un bruit blanc gaussien de variance $\sigma_n^2$, est donnée par [67] :

$$C = \max_{\mathsf{Tr}(R_x)=N_t} \log_2 \left( \det \left[ I_{(N_r)} + \frac{E_x}{N_t \sigma_n^2} H R_x H^H \right] \right) \tag{1.62}$$

où $R_x = \mathbb{E}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H]$ est la matrice de covariance d'entrée, $E_x$ désigne l'énergie moyenne totale disponible à l'émetteur pendant une période de symbole et $\mathsf{Tr}(R_x) = N_t$ indique la contrainte de puissance, afin de limiter l'énergie moyenne totale transmise sur une période de symbole.

Nous avons montré en section 1.5.3 que, dans le cadre d'un "eigen-beamforming" avec SVD, la matrice du canal MIMO peut être décomposée en un ensemble de $m$ canaux parallèles satisfaisant :

$$\tilde{y}_i = \rho \sigma_i \tilde{x}_i + \tilde{n}_i \quad pour\ i = 1, \ldots, m.$$

Ici $\rho = \frac{E_x}{N_t}$ et $m$ correspond au rang de la matrice $H$. On note par $\lambda_i = |\sigma_i|^2$, les valeurs

propres de $HH^H$. Dans ce cas, la capacité du canal MIMO est la somme des capacités des canaux SISO parallèles [2] et elle est donnée par :

$$C = \sum_{i=1}^{r} \log_2 \left( 1 + \frac{E_x \gamma_i}{N_t \sigma_n^2} \lambda_i \right) \tag{1.63}$$

où $\gamma_i$ désigne l'énergie d'émission dans le $i$-ème sous-canal.

L'allocation optimale d'énergie pour les sous-canaux est trouvée de manière itérative en utilisant l'algorithme de "water-filling" [65, 94]. Il consiste à dépenser beaucoup de puissance sur les bons canaux ( moins d'interférences ) et moins ou rien sur les mauvais canaux. On peut trouver une bonne description de ces techniques dans [95].

## 1.9 Conclusion

Ce chapitre présente l'état de l'art des systèmes de communications multi-antennes par une étude sur l'environnement de propagation, les modèles de canaux MIMO, les techniques de pré-codage à l'émission, les techniques de séparation à la réception et d'égalisation. De même, nous y avons abordé les systèmes MIMO à bande étroite et large bande avant de terminer avec la capacité des canaux MIMO. La plupart des études sur les modèles de canaux MIMO suppose un mélange instantané de signaux en réception. C'est la modélisation la plus simple, où chacun des signaux reçus consiste en une somme de signaux sources pondérés différemment et tous échantillonnés au même instant. Le canal MIMO est, dans ce cas, représenté par une matrice de scalaires.

Cependant, un modèle plus complexe considère les signaux reçus comme un mélange convolutif étant constitués des versions de signaux pondérées et retardées. Ces différents retards observés peuvent être dus à la vitesse de propagation finie des signaux dans le milieu parcouru ou éventuellement à des réflexions par des obstacles sur son trajet. Une représentation espace-temps de ce modèle, plus réaliste, peut être faite avec une matrice polynomiale. Les techniques de séparation traditionnelles des flux de signaux tentent d'éliminer la nature dispersive, dans le temps, du canal MIMO. Elles sont conçues essentiellement pour convertir le problème large bande en problèmes à bandes étroites avec l'utilisation de DFT. De cette manière, chaque lien du canal MIMO, vu d'une sous-porteuse peut être considéré comme un canal non sélectif en fréquence. Cependant, avec cette méthode une restauration de la cohérence est requise après le DFT, via des matrices de permutation. Ces dernières années, l'utilisation des techniques de factorisation de matrice polynomiale dans le domaine du traitement de signal des système MIMO permet

d'effectuer une séparation des flux des données directement dans le domaine temporel. Cette approche préservent la cohérence des signaux qui sont transmis. À cet effet, différentes méthodes de factorisation de matrices polynomiales ont été proposées. Dans le chapitre 2, nous ferons une étude détaillée sur quelques unes d'entre elles.

# Chapitre 2

# État de l'art de la Décomposition de Matrice Polynomiale

## Sommaire


**2.1 Introduction . . . . . 55**
**2.2 Préliminaires . . . . . 56**
**2.3 Problématique et objectifs . . . . . 57**
**2.4 Décomposition EVD de Matrice Polynomiale (PMEVD) . . . . . 59**
2.4.1 Décomposition EVD . . . . . 59
2.4.2 Extension aux matrices polynômiales (PMEVD) . . . . . 59
2.4.3 PEVD avec l'algorithme SBR2 (Sequential Best Rotation) . . . 60
2.4.4 Discussions . . . . . 63
**2.5 Décomposition QR d'une matrice Polynomiale . . . . . 64**
2.5.1 Factorisation QR d'une matrice de scalaires . . . . . 64
2.5.2 Décomposition QR polynomiale (PQRD) . . . . . 65
2.5.3 Rotation de Givens polynomiale élémentaire . . . . . 65
2.5.4 Rotation Givens polynomiale complète . . . . . 67
2.5.5 L'algorithme de Décomposition QR par colonne . . . . . 67
2.5.6 Troncation des matrices polynômiales . . . . . 68
2.5.7 Discussions . . . . . 69
**2.6 Décomposition SVD de matrice polynômiale (PMSVD) . . . . . 70**
2.6.1 Décomposition SVD scalaire . . . . . 70
2.6.2 PMSVD avec l'algorithme SBR2 . . . . . 70
2.6.3 PMSVD par l'utilisation de l'algorithme QR . . . . . 71

2.6.4 Discussion . . . . . 73
**2.7 Résultats de simulation avec QR-PMSVD . . . . . 73**
2.7.1 Qualité de décomposition . . . . . 74
2.7.2 Ordre de la matrice diagonale . . . . . 78
**2.8 Conclusion . . . . . 79**

## 2.1 Introduction

L'analyse d'un processus de signal est souvent simplifiée en considérant la représentation en fréquence des signaux et systèmes. Cependant une autre représentation alternative, couramment utilisée, est la transformée en $z$. Cette transformée code les données sous forme de polynômes de Laurent de $z^{-1}$. La fonction de transfert $H(z)$ d'un système linéaire n'est donc juste qu'une transformée en $z$ de sa réponse impulsionnelle $h(t)$. Pour un système à réponse impusionnelle finie (FIR), la fonction de transfert $H(z)$ prend la forme d'un polynôme. Une des caractéristiques de cette représentation est que les opérations de convolution ou le filtrage des données correspondent à un produit. Cette représentation polynomiale fournit un moyen facile de décrire et d'analyser le système. Pour les systèmes multidimensionnels à réponse impulsionnelle finie, avec plusieurs entrées et plusieurs sorties, cette représentation correspond à des matrices polynomiales. Elles sont utilisées depuis de nombreuses années dans le domaine des systèmes de contrôle [96] et plus récemment dans les communications MIMO [97, 98]. Ces matrices polynomiales jouent un rôle très important dans cette thèse : elles constituent notre choix de modèle de canal MIMO.

L'utilisation des techniques de décomposition matricielle telle que la décomposition en valeurs singulières (SVD) est fondamentale pour le "eigen beamforming" d'un système MIMO à bande étroite (voir section 1.5.3). Cependant, pour les systèmes à large bande, les signaux sont mélangés de manière convolutive. Dans ce cas, la représentation de la fonction de transfert du canal par une matrice polynomiale est un moyen efficace pour décrire le mélange convolutif de signaux. Cependant avec cette modélisation, les méthodes classiques de décomposition ne peuvent plus être appliquées pour séparer les flux de données. De ce fait, l'étude des techniques de factorisation de matrice polynomiale a occupé, ces dernières années, une place centrale dans le domaine du traitement de signal (Digital Signal Processing DSP) des systèmes MIMO.

En effet, plusieurs procédures numériques et algorithmes permettant de réaliser la factorisation de matrice polynômiale ont été développés. Parmi ces procédés, le plus connu est celui Smith-McMillan [99, 100]. À coté de celui-ci, il existe d'autres méthodes de décomposition telles que la décomposition QR, la décomposition en valeur propres EVD (EigenValue Decomposition), ou en valeur singulière SVD (Singular Value Decomposition) [101], jadis importantes pour les systèmes à bande étroite. Par la suite, des correspondances destinées aux matrices polynomiales para-unitaires ont été développées pour les systèmes à large bande.

Ce chapitre présente quelques unes des techniques de décomposition de matrice polynomiale. Dans un premier temps, nous allons rappeler la définition d'une matrice polynômiale en section 2.2. Ensuite nous allons faire un exposé de la problèmatique en section 2.3. En section 2.4, nous présenterons l'algorithme PMEVD (Polynomial Matrix Eigenvalue Decomposition) qui est une extension aux matrices polynomiales de la décomposition EVD classique utilisant la matrice de rotation de Jacobi [88]. La section 2.5 est consacrée aux algorithmes de factorisation de matrice polynomiale basés sur la méthode QR. La décomposition SVD polynomiale est développée en section 2.6. Enfin en section 2.7, les résultats numériques de l'une des techniques adoptées dans cette thèse seront présentés avec une justification de ce choix.

## 2.2 Préliminaires

Une matrice polynomiale est une matrice dont les éléments sont des polynômes, ou autrement dit un polynôme dont les coefficients sont matriciels. Une matrice polynomiale de Laurent $p \times q$, c'est-à dire pouvant inclure des puissances négatives de la variable indéterminée, est définie comme suit :

$$A(z) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2} A_\tau z^{-\tau} = \begin{bmatrix} a_{1,1}(z) & a_{1,2}(z) & \cdots & a_{1,q}(z) \\ a_{2,1}(z) & a_{2,2}(z) & \cdots & a_{2,q}(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p,1}(z) & a_{p,2}(z) & \cdots & a_{p,q}(z) \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

où $\tau \in \mathbb{Z}$, $t_1 \leq t_2$ et

$$a_{i,j}(z) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2} [A_\tau]_{i,j} \, z^{-\tau}. \tag{2.2}$$

$A_\tau \in \mathbb{C}^{q \times p}$ est la matrice de coefficients de $z^{-\tau}$, $t_1$ et $t_2$ sont des paramètres qui ne sont pas nécessairement positifs. $[A_\tau]_{i,j}$ est le coefficient, correspondant à un retard de $z^{-\tau}$, du $(i,j)$-ème élément polynomial de la matrice $A(z)$. L'ordre cette matrice polynomiale $A(z)$ est $(t_2 - t_1)$.

**Notations** :
$[\cdot]_{ij}$ désigne l'élément $(ij)$ de la matrice entre crochets. Les exposants $\{\}^*$, $\{\}^T$ et $\{\}^\dagger$ désignent respectivement le conjugué complexe, la transposée et la transposée conjuguée. $\{\}^H$ désigne le conjugué hermitien et $I_p$ est la matrice identité $p \times p$. L'utilisation du signe

$\widetilde{\{\}}$, au-dessus d'une matrice ou d'un vecteur polynomial, indique le para-conjugué.

**Propriétés** :
Le para-conjugué d'une matrice polynomiale $A(z)$ est défini comme [102, 103] :

$$\widetilde{A}(z) = [A(1/z^*)]^\dagger .$$

Une matrice polynomiale $A(z)$ est appelée para-hermitienne si elle est identique à son para-conjugué, c'est-à-dire si

$$\widetilde{A}(z) = A(z).$$

Une matrice polynomiale qui satisfait :

$$\widetilde{A}(z)A(z) = A(z)\widetilde{A}(z) = I, \tag{2.3}$$

est dite para-unitaire. Ce type de matrice jouera un rôle important dans les algorithmes de décomposition qui seront présentés dans ce chapitre, car leurs colonnes sont mutuellement orthogonales. Du fait de cette orthogonalité, la multiplication d'une matrice arbitraire avec une matrice para-unitaire préserve la norme de Frobenius de la matrice originale.
La norme de Frobenius [101, 104] d'une matrice (2.1) est définie comme :

$$\|A(z)\|_F = \sqrt{\sum_{\tau=t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left|[A_\tau]_{i,j}\right|^2}. \tag{2.4}$$

## 2.3 Problématique et objectifs

Pour les systèmes MIMO large bande à temps discret, à réponse impulsionnelle finie, les transformées en $z$ des signaux d'entrée et de sortie sont reliées par une matrice polynomiale. La fonction de transfert du canal MIMO, déjà définie en (1.42), est donc sous la forme

$$H(z) = \sum_{l=0}^{L} H_l z^{-l}.$$

En interprétant $z^{-1}$ comme l'opérateur retard unité, cette représentation décrit comment les signaux transmis à partir des différentes antennes d'émission sont mélangés dans le temps et dans l'espace au niveau du récepteur. Pour séparer les flux de données mélangés

(CCI) à la réception, nous cherchons à factoriser $H(z)$ sous la forme [90],

$$H(z) = U(z)D(z)V(z), \tag{2.5}$$

avec $D(z)$ diagonale afin d'éliminer ces CCI. En effet, les inverses des facteurs $U(z)$ et $V(z)$ utilisées respectivement comme post-codeur et pré-codeur permettent d'obtenir un canal MIMO équivalent à $D(z)$. Cela correspond à transformer le canal MIMO en plusieurs canaux SISO totalement indépendants, donc sans interférences co-canal. Idéalement, nous voudrons que :

- le pré-filtre $V(z)$ et surtout le post-filtre $U(z)$ n'amplifient pas les bruits.
- Les facteurs $U(z)$, $D(z)$ et $V(z)$ soient polynomiaux ; les raisons de cette contrainte sont multiples car cela permet de garantir la causalité, l'absence de pôles : donc pas de risque d'instabilité et une facilité d'implémentation avec des filtres FIR.
- $U(z)$ et $V(z)$ soient inversibles avec des inverses polynomiales (donc stables et causales).

Il existe actuellement plusieurs procédures numériques pour calculer la décomposition ou la factorisation d'une matrice polynomiale. Parmi celles-ci nous avons la décomposition très connue de Smith-McMillan pour transformer une matrice polynomiale en une matrice polynomiale diagonale [99]. D'autres recherches se sont concentrées sur l'extension aux matrices polynomiales des procédures standard de décompositions telles que la décomposition en valeurs propres (EVD), la décomposition en valeurs singulières (SVD) ou la décomposition QR. Nous pouvons en citer la méthode introduite par Vaidyanathan [105] pour factoriser une matrice polynomiale paraunitaire. Regalia et Huang [106] l'ont ensuite étendu pour calculer l'EVD d'une matrice polynomiale para-unitaire $2 \times 2$. De même, Lambert [107] a développé une technique pour calculer la decomposition EVD des matrices polynomiales à l'aide de la DFT. McWhirter et al. ont aussi proposé une extension de la décomposition EVD, basé sur la rotation de jacobi, aux matrices polynomiales para-hermitiennes. Cette méthode s'appuie sur l'algorithme SBR2 (Sequential Best Rotation) [88]. Dans la suite nous allons détailler quelques unes de ces approches afin d'étudier leur pertinence pour une application aux systèmes MIMO selon les objectifs précités.

## 2.4 Décomposition EVD de Matrice Polynomiale (PMEVD)

### 2.4.1 Décomposition EVD

La décomposition en valeurs propres (Eigen Value Decomposition) de la matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ peut être exprimée comme suit :

$$A = VDV^H, \tag{2.6}$$

où $V \in \mathbb{C}^{p\times p}$ est une matrice unitaire avec des colonnes égales aux vecteurs propres orthonormés de $A$. $D \in \mathbb{C}^{p\times p}$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de $A$. L'EVD ne peut être calculé que pour les matrices hermitiennes.

Cette méthode de diagonalisation peut être obtenue en utilisant l'algorithme de Jacobi, qui fonctionne en appliquant une série de rotations de Jacobi [101]. Cette méthode est très populaire, cependant, l'algorithme est lent pour les grandes matrices où $p > 10$. Les détails sur le fonctionnement de l'algorithme sont discutés en [101].

### 2.4.2 Extension aux matrices polynômiales (PMEVD)

Les méthodes de décomposition de matrices polynomiales sont inspirées des approches existantes pour les matrices constantes. L'extension au cas polynomial nécessite des adaptations, changements et compromis pour répondre aux objectifs prédéfinis. En ce qui concerne la décomposition EVD de matrice polynomiale, les divisions inéluctables conduisent à des facteurs rationnels, violant ainsi la contrainte sur la nature polynomiale des matrices facteur. La solution à ce problème est d'accepter un retard dans le système. Pour cela nous considérons donc un modèle polynômial de Laurent et donc une perte de la causalité.

La PEVD d'une matrice polynomiale para-hermitienne, $A(z) \in \mathbb{C}^{p\times p}$, est définie ici comme

$$A(z) = \widetilde{V}(z)D(z)V(z), \tag{2.7}$$

où la matrice $V(z)$ est para-unitaire. Elle est déterminée de telle sorte que la matrice polynomiale de Laurent $D(z)$ se rapproche autant que possible d'une matrice diagonale. En effet, en général, il ne sera pas possible de réaliser une diagonalisation parfaite avec $V(z)$ et $\widetilde{V}(z)$, des matrices polynomiales de Laurent et para-unitaires. Cependant, si l'ordre des éléments polynomiaux est suffisamment grand, la diagonalisation peut être obtenue avec

une très bonne approximation [108]. Une autre méthode consiste à réaliser des décompositions EVD de matrices constantes $A[k]$, $k = 1, 2, \cdots K$, estimées à partir $K$ fréquences discrètes, puis effectuer une interpolation en utilisant le DFT des différents facteurs pour obtenir $\widetilde{V}(z)$, $D(z)$ et $V(z)$ [109]. Cependant, quel que soit le nombre de fréquences discrètes sélectionnées, cela constitue toujours une approximation finie et conduit à une transformation qui n'est pas parfaitement para-unitaire [110]. Une autre approche est proposée par McWhriter et al. consiste à utiliser l'algorithme SBR2 pour calculer l'EVD d'une matrice polynomiale para-hermitienne [88]. Cette méthode est une généralisation de l'algorithme de Jacobi classique pour l'EVD des matrices hermitiennes. L'algorithme SBR2 calcule une matrice $V(z)$ approximativement para-unitaire par construction et est conçu spécifiquement pour fonctionner dans le domaine temporel ; raison pour laquelle c'est la seule méthode que nous allons présenter dans ce chapitre.

### 2.4.3 PEVD avec l'algorithme SBR2 (Sequential Best Rotation)

La décomposition PEVD avec l'algorithme SBR2 se fait sur plusieurs itérations. L'utilisation de matrice de retard à chaque itération conduit à des facteurs irrationnels. À cet effet, nous considérons une matrice polynomiale de Laurent $p \times p$ comme paramètre d'entrée. Elle doit aussi être para-hermitienne ; on peut l'écrire sous la forme

$$A(z) = \sum_{\tau=-\tau_{min}}^{\tau_{max}} z^{-\tau} A_\tau, \tag{2.8}$$

où $A_\tau \in \mathbb{C}^{p\times p}$ et $\tau$ représente l'indice des coefficients polynomiaux, avec

$$[A_\tau]_{kl} = [A_{-\tau}]^*_{lk}\,, \quad k, l \in \{1, 2, \ldots p\}\,. \tag{2.9}$$

L'algorithme fonctionne comme un processus itératif. À chaque itération, une transformation para-unitaire élémentaire est conçue pour amener à zéro les deux coefficients hors diagonaux qui ont la plus grande amplitude. Cette transformation est appliquée aux deux côtés de la matrice polynomiale de Laurent $A(z)$. La matrice de transformation polynomiale para-unitaire $V(z)$ est donc formulée sous la forme d'une série de matrices para-unitaires élémentaires, c'est-à-dire

$$V(z) = P_\beta(z) \ldots P_1(z) \tag{2.10}$$

où $\beta$ désigne le nombre d'itérations nécessaires pour diagonaliser la matrice $A(z)$ et

$P_i(z)$ est la matrice para-unitaire élémentaire calculée à l'itération $i$. Chacune de ces matrices est constituée d'une matrice complexe de rotation élémentaire, $Q^{(j,k)}(\theta, \phi)$, précédée d'une matrice de retard élémentaire, $B^{(k,t)}(z)$ et formulée comme suit :

$$P_i(z) = Q^{(j,k)}(\theta, \phi)B^{(k,t)}(z). \tag{2.11}$$

À chaque itération les paramètres $j$, $k$, $t$, $\theta$ et $\phi$ sont choisis, de manière appropriée, en fonction des coefficients de la matrice $A(z)$ dont on tente d'annuler ses éléments polynomiaux hors diagonale.

La **matrice de rotation élémentaire** $Q^{(j,k)}(\theta, \phi)$ prend la forme d'une matrice identité $p \times p$ à l'exception des quatre éléments positionnés aux intersections des lignes $j$ et $k$ avec les colonnes $j$ et $k$. Ces éléments forment la sous-matrice $2 \times 2$, $\widehat{Q}^{(j,k)}(\theta, \phi)$, qui est formulée comme suit :

$$\widehat{Q}^{(j,k)}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} c & se^{i\phi} \\ -se^{-i\phi} & c \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

où $c$ et $s$ représentent respectivement le cosinus et le sinus de l'angle $\theta$ en radians. Les angles $\theta$ et $\phi$ doivent être convenablement choisis, comme nous le verrons dans la suite, pour permettre d'annuler les coefficients ciblés.

La seconde composante de la transformation élémentaire para-unitaire, en (2.11), est une **matrice de retard élémentaire**, $B^{(k,t)}(z) \in \mathbb{C}^{p \times p}$. Cette matrice prend la forme d'une matrice identité $p \times p$, à l'exception du $k$-ème élément diagonal qui est $z^{-t}$, c'est-à-dire

$$B^{(k,t)}(z) = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-k} \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Son objectif est d'imposer un décalage de longueur $|t|$ à tous les éléments de la $k$-ème ligne de la matrice polynomiale de Laurent à laquelle elle est appliquée.

#### 2.4.3.1 L'algorithme SBR2

Chaque itération de l'algorithme SBR2 consiste en trois étapes. Dans la première étape, l'algorithme commence par localiser le coefficient hors diagonal dominant de la matrice polynomiale d'entrée $A(z)$, c'est-à-dire celui qui a la plus grande amplitude [88]. Supposons que ce soit le coefficient $[A_t]_{j,k}$, c'est-à-dire le coefficient de $z^{-t}$ dans le $(j,k)$-ème élément polynomial, où $j < k$ . On note par $\left|[A_t]_{j,k}\right|$ son amplitude. Grâce à la propriété

para-hermitienne de $A(z)$, cette recherche du coefficient dominant peut être restreinte juste dans la partie triangulaire inférieure ou supérieure de $A(z)$.

Ayant trouvé le coefficient hors diagonale dominant et ses indices associés $j$, $k$ et $t$, la deuxième étape de l'algorithme consiste à appliquer la matrice de retard appropriée à $A(z)$ pour obtenir la matrice transformée

$$A'(z) = B^{(k,t)}(z)A(z)\widetilde{B}^{(k,t)}(z). \tag{2.14}$$

L'effet de cette transformation est de décaler le coefficient dominant $[A_t]_{j,k}$ vers le plan de coefficients d'ordre zéro de telle sorte que, $[A'_0]_{j,k} = [A_t]_{j,k}$ et d'après l'équation (2.9), nous pouvons écrire

$$[A'_0]_{j,k} = [A_t]_{j,k} = [A_{-t}]^*_{k,j} = [A'_0]^*_{k,j}\,.$$

La troisième et dernière étape de chaque itération de l'algorithme SBR2 consiste à appliquer la matrice de rotation élémentaire appropriée à $A'(z)$ pour obtenir

$$A''(z) = Q^{(k,t)}(\theta,\phi)A(z)(Q^{(k,t)}(\theta,\phi))^H. \tag{2.15}$$

Les angles de rotation $\theta$ et $\phi$ nécessaires pour amener le coefficient dominant à zéro sont choisis de telle sorte que

$$\begin{bmatrix} c & se^{i\phi} \\ -se^{-i\phi} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A'_0]_{j,j} & [A'_0]_{j,k} \\ [A'_0]_{k,j} & [A'_0]_{k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -se^{i\phi} \\ se^{-i\phi} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A''_0]_{j,j} & 0 \\ 0 & [A''_0]_{k,k} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

Cette condition est satisfaite lorsque les angles sont calculés comme suit

$$\phi = \arg([A'_0]_{j,k}) \tag{2.17}$$

et

$$\tan(2\theta) = \frac{\left|[A'_0]_{j,k}\right|}{[A'_0]_{j,j} - [A'_0]_{k,k}}. \tag{2.18}$$

Ceci termine la première itération de l'algorithme SBR2, entraînant une transformation globale de la forme

$$P_1(z)A(z)\widetilde{P}_1(z) = D_1(z), \tag{2.19}$$

où $P_1(z) = Q^{(j,k)}(\theta,\phi)B^{(k,t)}(z)$ et $D_1(z)$ est la matrice polynomiale de Laurent résultante de la transformation avec les coefficients $[D_{1,0}]_{j,k} = [D_{1,0}]_{k,j} = 0$. Chaque élément

de la matrice $A(z)$ implique un certain nombre de coefficients polynomiaux et, en pratique, il ne sera pas possible de mettre à zéro tous les coefficients de chaque élément polynomial de Laurent hors diagonal. Au lieu de cela, l'algorithme tourne jusqu'à ce que tous les coefficients hors diagonale de $D(z)$ soient majorés par un paramètre d'arrêt $\varepsilon$ : c'est à dire,

$$\left|[D_t]_{j,k}\right| < \varepsilon, \tag{2.20}$$

pour $j, k = 1, 2, \ldots p$ avec $j \neq k$, $t \in \mathbb{Z}$ et où $\varepsilon > 0$ est une faible valeur pré-définie. La diagonalisation n'est pas parfaite, cependant une bonne approximation peut être obtenue [88].

#### 2.4.3.2 Limitation des polynômes avec SBR2

Il est important de remarquer que l'ordre des matrices polynômiales, issues de la factorisation de $A(z)$, s'accroît en fonction de l'augmentation du nombre d'itérations de l'algorithme SBR2 [108]. Cette augmentation de l'ordre des matrices polynomiales a un impact négatif sur les performances à cause des exigences excessivement élevé en terme de mémoire de stockage. Par conséquent cela va impacter le processus de recherche du plus grand coefficient hors-diagonale à travers une matrice de plus en plus élargie. Nous pouvons cependant remarquer que ces nouvelles matrices formées à chaque itération sont constituées généralement de zéros sauf pour certaines lignes ou colonnes de la matrice.
En effet, les retards appliqués à la matrice pendant les itérations entraînent souvent au niveau des matrices résultantes l'apparition de coefficients très faibles par rapport la norme Frobenius totale de la matrice d'entrée $A(z)$. Par conséquent, pour réduire la complexité de calcul, Foster et al [108] ont proposé une condition sur la norme Frobenius de $A(z)$ autorisée à être perdue à chaque itération de l'algorithme sans trop de conséquence sur la décomposition (voir section 2.5.6). Avec cette troncation de $A(z)$, l'ordre de la matrice diagonalisée résultante $D(z)$ est significativement réduit.

### 2.4.4 Discussions

L'algorithme SBR2 transforme efficacement une matrice polynomiale para-hermitienne en une matrice polynomiale de Laurent approximativement diagonale au moyen d'une série de transformations para-unitaires. La factorisation en (2.5), pour éliminer les CCI d'un système MIMO peut alors se faire en utilisant cette méthode de décomposition EVD d'une matrice polynomiale. En effet la propriété de para-unitairité de ses matrices fac-

teur $V(z)$ et $\widetilde{V}(z)$ est très importante, car les filtres correspondants n'amplifient pas du bruit. Cependant, l'application de la matrice de retard à chaque itération conduit à des facteurs irrationnels qui violent la contrainte sur la nature polynomiale des matrices facteur. La solution à ce problème consiste à accepter un retard dans le système en question. Raisons pour laquelle nous considérons des polynômes de Laurent donc la non-causalité du système.

En outre on voit que les ordres des matrices polynomiales de Laurent $D(z)$ et $\widetilde{P}_i(z)$ augmentent rapidement. En effet, à chaque itération, de nouvelles matrices de coefficients sont créées aux deux extrémités de la matrice pour accommoder les coefficients décalés. Par conséquent l'ordre du polynôme $D_{i+1}(z)$ est largement plus elevé que celui de $D_i(z)$, pour $i = 1, 2, \ldots, \beta-1$. Cela cause des lenteurs dans le processus de factorisation. Dans la version originale de l'algorithme SBR2, des conditions d'arrêt supplémentaires, tels qu'une limitation sur le nombre maximum d'itérations et un seuil de convergence $\varepsilon$ [88], sont implémentés. La matrice résultante est considérée suffisamment diagonale si tous les éléments hors diagonale sont inférieurs à une valeur seuil non nulle prédéfinie. Ainsi la complexité de l'algorithme et son exécution informatique seront sensiblement améliorées avec quand même un certain coût sur la qualité de la décomposition. Par conséquent toutes les CCI du système MIMO ne seront pas complètement éliminées.

## 2.5 Décomposition QR d'une matrice Polynomiale

### 2.5.1 Factorisation QR d'une matrice de scalaires

La factorisation QR d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ est donnée comme suit :

$$A = QR, \tag{2.21}$$

où $Q \in \mathbb{C}^{p\times p}$ est une matrice unitaire et $R \in \mathbb{C}^{p\times q}$ une matrice triangulaire supérieure. Une des méthodes de calcul de la matrice unitaire $Q$ consiste à utiliser une série de rotations planes, dont chacune conduit à une mise à zéro de l'un des éléments situé sous la diagonale $A$ [101]. Les éléments de la matrice en dessous de la diagonale sont mis à zéro dans un ordre particulier pour s'assurer que chaque élément n'aie besoin d'être éliminé qu'une seule fois.

Cette technique d'annulation des éléments sous la diagonale peut être étendue aux matrices polynomiales, même si chaque élément est maintenant constitué d'une série de coefficients polynomiaux. Tous les coefficients de la série doivent donc être éliminés

pour s'assurer que l'élément polynomial soit nul. Ceci ne peut plus être réalisé avec une matrice de rotation de Givens [1], donc à la place, une rotation de Givens polynomiale sera utilisée.

### 2.5.2 Décomposition QR polynomiale (PQRD)

L'algorithme de décomposition QR polynomiale (Polynomial QR Decomposition (PQRD)) est une technique de factorisation de matrice polynomiale en une matrice triangulaire supérieure et une matrice para-unitaire. Soit $A(z) \in \mathbb{C}^{p\times q}$, l'objectif de l'algorithme est de calculer une matrice para-unitaire $Q(z) \in \mathbb{C}^{p\times p}$ telle que

$$Q(z)A(z) \cong R(z) \tag{2.22}$$

où $R(z)$ est une matrice polynomiale de Laurent triangulaire supérieure. Car une décomposition QR avec des facteurs polynomiaux n'existe pas en général.

En effet, pour mettre à zéro tous les coefficients en dessous de la diagonale, une approche similaire à l'algorithme SBR2 peut être appliquée. Dans ce cas, la matrice para-unitaire $Q(z)$ est formulée avec une série de matrices de rotation élémentaires entrecoupées de matrices de retard [105]. Ces dernières conduisent à des facteurs irrationnels. Pour cela, nous considérons des matrices polynômiales de Laurent.

Les techniques PQRD existantes sont approximatives. Cependant, il sera montré qu'une bonne approximation est réalisable en utilisant l'algorithme PQRD par colonnes (PQRD-BC) [111]. La rotation de Givens polynomiale, qui est fondamentale à l'algorithme PQRD-BC, est présentée en première.

### 2.5.3 Rotation de Givens polynomiale élémentaire

La rotation de Givens polynomiale élémentaire (Elementary Polynomail Givens Rotation (EPGR)) est une matrice polynomiale qui peut être appliquée à un vecteur polynomial ou une matrice pour sélectivement mettre à zéro un coefficient d'un élément polynomial [112]. L'EPGR est une rotation de Givens suivie d'une matrice de décalage temporel

1. Il est important de noter que les rotations de Givens ne sont pas différentes des rotations de Jacobi. Pour un problème de valeurs propres symétriques, les rotations de Jacobi constituent l'opération principale. Par conséquent, il est courant de se référer aux rotations de Jacobi dans le contexte de la décomposition EVD et aux rotations de Givens dans le contexte de la décomposition QR.

élémentaire comme suit :

$$\begin{aligned} G^{(t,\alpha,\theta,\phi)}(z) &= \begin{bmatrix} ce^{i\alpha} & se^{i\phi} \\ -se^{-i\phi} & ce^{-i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ce^{i\alpha} & se^{i\phi}z^t \\ -se^{-i\phi} & ce^{-i\alpha}z^t \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$\alpha$ et $\phi$ sont des angles de rotation définis en (2.26) ; $c$ et $s$ désignent respectivement le cosinus et le sinus de l'angle $\theta$, défini en (2.25). Le rôle de cette matrice, lorsqu'elle est appliquée à un vecteur polynomial, défini par $\boldsymbol{a}(z) = [a_1(z), a_2(z)]^T \in \mathbb{C}^{2\times 1}$, est de mettre à zéro un coefficient spécifié de l'élément polynomial $a_2(z)$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} ce^{i\alpha} & se^{i\phi}z^t \\ -se^{-i\phi} & ce^{-i\alpha}z^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1(z) \\ a'_2(z) \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Par exemple, pour mettre à zéro le coefficient de $z^{-\tau}$, c'est-à-dire $a_2^{(\tau)}$, le paramètre de retard dans la matrice EPGR est défini comme $t = \tau$ et les angles de rotation $\theta$, $\alpha$ et $\phi$ sont choisis de telle sorte que :

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{\left|a_2^{(\tau)}\right|}{\left|a_1^{(0)}\right|}\right), & si\ a_1^{(0)} \neq 0 \\ \pi/2, & si\ a_1^{(0)} = 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\alpha = -arg(a_1^{(0)}) \quad et \quad \phi = -arg(a_2^{(\tau)}) \tag{2.26}$$

résultant ainsi en $a'^{(0)}_2 = 0$. De plus, suite à l'application de l'EPGR, le coefficient $a'^{(0)}_1$ est augmenté en amplitude au carré tel que :
$|a'^{(0)}_1|^2 = |a_1^{(0)}|^2 + |a_2^{(\tau)}|^2$.
Notons que les angles de rotation dans (2.26) auraient pu être alternativement choisis de telle sorte que :
$\alpha = -arg(a_2^{(\tau)})$ et $\phi = -arg(a_1^{(0)})$
car cela mettra aussi à zéro le coefficient dominant. Un EPGR est para-unitaire par construction car les composantes de la matrice, c'est-à-dire la rotation de Givens et la matrice de décalage temporel élémentaire, sont toutes les deux para-unitaires.

### 2.5.4 Rotation Givens polynomiale complète

Des rotations de Givens polynomiales élémentaires (EPGR) successives peuvent être appliquées de manière itérative au vecteur $\boldsymbol{a}(z)$, polynomial $(2 \times 1)$, pour que tous les coefficients de l'élément polynomial de Laurent $a_2(z)$ soient aussi proches de zéro que possible. Ces coefficients de $a_2(z)$ sont mis à zéro suivant l'ordre de grandeur maximale. À chaque itération, le coefficient d'amplitude maximale est mis à zéro et la série complète d'EPGR requise constitue une rotation de Given polynomiale complète (CPGR) [113], désignée par la matrice $G^{(2,1)}(z)$. Les exposants indiquent la position de l'élément polynomial que la matrice tente de mettre à zéro. Une matrice de cette forme appliquée à un $\boldsymbol{a}(z)$ donne :

$$G^{(2,1)}(z) \begin{bmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} a_1'(z) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

En pratique, il n'est pas possible de mettre à zéro tous les coefficients d'un élément polynomial, mais juste de les réduire jusqu'à ce que les coefficients dominants dans $a_2(z)$ soient suffisamment petits, c'est-à-dire

$$\left|a_2^{(\tau)}\right| < \varepsilon \tag{2.28}$$

pour $\tau \in \mathbb{Z}$ où $\varepsilon > 0$ est un paramètre d'arrêt pré-spécifié.

### 2.5.5 L'algorithme de Décomposition QR par colonne

Une rotation de Givens polynomiale complète, CPGR, peut être appliquée à la matrice polynomiale $A(z)$ pour mettre l'un de ses éléments polynomiaux à zéro, par exemple :

$$A'(z) = G^{(j,k)}(z)A(z), \tag{2.29}$$

où $G^{(j,k)}(z)$ est la matrice rotation de Givens polynomiale complète, équation (2.27), conçue pour rendre tous les coefficients de $a_{j,k}(z)$ suffisamment petits, ce qui conduit à une nouvelle matrice polynomiale de Laurent $A'(z)$. Le CPGR appliqué est une séquence itérative d'EPGR. Chaque EPGR est formulé comme une matrice d'identité $p \times p$, à l'exception des quatre éléments situés aux intersections des lignes $j$ et $k$ avec les colonnes $j$ et $k$. Ces éléments sont donnés par la sous-matrice $2 \times 2$, $G^{(t,\alpha,\theta,\phi)}(z)$ définie comme dans (2.23). Par exemple si le coefficient dominant est $[A_\tau]_{j,k}$, alors le paramètre de décalage est défini comme $t = \tau$ et les coefficients requis pour calculer les angles de rotation en

(2.25) et (2.26) sont $a_2^{(t)} = [A_\tau]_{j,k}$ et $a_1^{(0)} = [A_0]_{k,k}$ [114].
La rotation polynomiale de Givens est une transformation para-unitaire, et donc conserve l'énergie. Cette conservation se fait par un transfert de l'énergie du coefficient annulée au coefficient non décalé de l'élément diagonal de la colonne courante. Après une étape, la plus grande partie de l'énergie des coefficients situés en dessous de la diagonale principale aura été transférée à un élément de la diagonale.

Contrairement au nombre d'étapes, le nombre d'itérations n'est pas fixe. En effet, dans chaque étape de la décomposition, les itérations s'exécutent jusqu'à ce que tous les coefficients de l'élément polynomial soient suffisamment petits et que la condition d'arrêt démontrée par l'équation (2.28) soit satisfaite. Une fois que tous les coefficients de l'élément polynomial particulier sont suffisamment petits, l'algorithme se déplace sur l'élément polynomial suivant de la colonne en remplaçant $A(z)$ par $A'(z)$. Par contre les rotations futures peuvent augmenter les amplitudes de ces petits coefficients jusqu'à dépasser éventuellement $\varepsilon$. Par conséquent, l'algorithme pourrait nécessiter plusieurs balayages, la preuve de sa convergence est démontré en [112].

### 2.5.6 Troncation des matrices polynômiales

À chaque itération de l'algorithme, l'ordre des matrices polynomiales de Laurent $Q(z)$ et $R(z)$ augmente et souvent après une série d'itérations il devient inutilement grand. Par conséquent, tout au long de l'algorithme, les matrices polynomiales de Laurent devront être tronquées, pour empêcher leur ordre de devenir démesuré. Cette troncature améliore la vitesse d'exécution l'algorithme et réduit les exigences de stockage. Une méthode de troncation appropriée pour une matrice polynomiale $A(z) \in \mathbb{C}^{p\times q}$, qui n'est pas nécessairement para-hermitienne et dont les matrices de coefficients sont $A_t$ pour $t = t_1, ..., t_2$, peut être implémentée comme suit.
Trouver une valeur maximale $T_1$ et une valeur minimale $T_2$ telle que :

$$\frac{\sum_{\tau=t_1}^{T_1}\sum_{l=1}^{p}\sum_{m=1}^{q}\left|[A_\tau]_{l,m}\right|^2}{\|A(z)\|_F^2} \leq \frac{\mu}{2} \tag{2.30}$$

et

$$\frac{\sum_{\tau=T_2}^{t_2}\sum_{l=1}^{p}\sum_{m=1}^{q}\left|[A_\tau]_{l,m}\right|^2}{\|A(z)\|_F^2} \leq \frac{\mu}{2} \tag{2.31}$$

où $\mu$ définit la part de $\|A(z)\|_F^2$ autorisée à être tronquée de la matrice polynômiale $A(z)$. Malheureusement, l'obtention d'une valeur appropriée de $\mu$ implique un processus

d'essais jusqu'à ce qu'on en trouve une qui conduit à une décomposition suffisamment précise produisant des matrices d'ordre pas trop excessifs. L'expression de la matrice tronquée est donnée par

$$A_{tr}(z) = \sum_{\tau=T_1}^{T_2} A_\tau z^{-\tau} \tag{2.32}$$

L'application de la troncation permet d'avoir un ordre de matrice ne s'agrandit pas inutilement ; en même temps une bonne précision de décomposition matricielle peut être obtenue atteinte. L'erreur relative, causée par cette troncature est définie comme suit :

$$\frac{\|A(z) - Q(z)R(z)\|_F}{\|A(z)\|_F} \tag{2.33}$$

La troncation est nécessaire à chaque étape de décomposition. Sans cela les degrés maximum des polynômes croîtraient trop rapidement, ce qui peut rendre l'algorithme très exigent en mémoire.

### 2.5.7 Discussions

Il existe plusieurs approches différentes de décomposition QR de matrice polynomiale qui ont déjà été présentées dans [112]. Chacune d'entre elles adopte une technique légèrement différente pour formuler la matrice de transformation para-unitaire $Q(z)$. On peut en citer principalement deux : le PQRD par Colonnes (PQRD-BC) qui a été présenté ci-dessus et PQRD-BS par étapes qui fonctionne en mettant à zéro le coefficient dominant à chaque itération suivant un ordre bien spécifié. Il a été démontré que l'algorithme PQRD-BC est clairement le meilleur puisqu'il nécessite moins de temps pour converger et que les ordres des matrices polynomiales de Laurent résultantes $Q(z)$ et $R(z)$ sont tous deux inférieurs à ceux obtenus à partir des autres algorithmes [112]. L'erreur relative de cette décomposition était légèrement plus grande que celle observée des autres algorithmes, mais pas d'une quantité significative. Cependant deux paramètres peuvent affecter la performance de l'algorithme : il s'agit du paramètre d'arrêt $\varepsilon$ et du paramètre de troncature $\mu$, qui doivent être choisis de manière appropriée, pour optimiser la vitesse et la précision de la décomposition [111, 112].

Il faut noter que pour une application potentielle de la PQRD aux système de communications MIMO, toutes ces approximations faites affecteront d'une façon ou d'une autre les performances du système de transmission. En effet les interférences co-canal ne sont pas totalement éliminées, car le PQRD ne réalise pas une diagonalisation exacte. De

même, la propriétés de para-unitarité, si importante pour les filtres, pourrait être perdue à cause de la troncature.

## 2.6 Décomposition SVD de matrice polynômiale (PMSVD)

### 2.6.1 Décomposition SVD scalaire

La décomposition en valeur singulière (SVD), contrairement à l'EVD, peut être appliquée aux matrices carrées et rectangulaires afin de transformer une matrice d'entrée donnée en une matrice diagonale [101]. La matrice à factoriser n'a pas besoin obligatoirement d'être hermitienne [115]. La SVD de la matrice $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$, dont les éléments peuvent être des réels ou complexes, est donnée par

$$A = U\Sigma V^H \tag{2.34}$$

où les matrices $U \in \mathbb{C}^{p\times p}$ et $V \in \mathbb{C}^{q\times q}$ sont toutes les deux unitaires, et $\Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Les éléments diagonaux de $\Sigma$ sont appelés valeurs singulières de la matrice $A$ et satisfont $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_N \geq 0$ où $N = min(p, q)$. Comme avec les deux précédentes décompositions, cette décomposition préserve la norme et ainsi donc $\|A\|_F^2 = \|\Sigma\|_F^2$.

### 2.6.2 PMSVD avec l'algorithme SBR2

La décomposition en valeur singulière (SVD) d'une matrice polynômiale (PMSVD) est aussi basée sur la philosophie de SBR [116]. Cependant il en existe d'autres approches telles que celle basé sur l'utilisation de la décomposition QR par colonne [111] ou celle basée sur la généralisation des transformations de Kogbetliantz [117]. La décomposition SVD d'une matrice polynômiale $A(z)$, avec SBR2 s'écrit comme suit :

$$A(z) = U(z)\Lambda(z)\widetilde{V}(z) \tag{2.35}$$

avec $\widetilde{U}(z)U(z) = I$, $\widetilde{V}(z)V(z) = I$ et $\Lambda(z)$ étant une matrice polynomiale de Laurent diagonale.
Les matrices $U(z)$ et $\widetilde{V}(z)$ sont déterminées respectivement à partir des décompositions polynômiales de $A(z)\widetilde{A}(z)$ et $\widetilde{A}(z)A(z)$ par l'utilisation de la méthode itérative SBR2 [88] qui a été développé pour la décomposition EVD d'une matrice polynômiale para-

hermitienne.
En multipliant, séparément en amont et en avale, la matrice avec sa forme para-conjuguée et en faisant une ré-organisation avec $\Lambda(z)$, on obtient la paire d'équations

$$\begin{aligned}\Lambda(z)\widetilde{\Lambda}(z) &= \widetilde{U}(z)A(z)\widetilde{A}(z)U(z)\\ \widetilde{\Lambda}(z)\Lambda(z) &= \widetilde{V}(z)\widetilde{A}(z)A(z)V(z).\end{aligned} \tag{2.36}$$

En considérant la matrice para-hermitienne $A(z)\widetilde{A}(z)$ comme paramètre d'entrée de l'algorithme SBR2, nous pouvons calculer la matrice para-unitaire $U(z)$.

Cette opération est répétée en considérant une matrice para-hermitienne d'entrée, $\widetilde{A}(z)A(z)$. On obtient, dans ce cas, la matrice para-unitaire $V(z)$ .

Enfin, la matrice diagonalisée $\Lambda(z)$ est calculée à partir de (2.35) en faisant $\widetilde{U}(z)A(z)V(z)$. Ainsi, un vrai SVD polynomial est effectué sur $A(z)$ par une double application de l'algorithme SBR2.

Cette méthode utilise deux PEVD pour reduire une matrice polynomiale, l'ordre de la matrice diagonale résultante est donc plus grand comparé à l'approche PEVD [112]. Elle est lent à mettre en œuvre en raison de la charge de calcul excessive. Cela pose un vrai problème pour des objectifs plus réalistes, comme par exemple dans une application potentielle aux communications MIMO où l'ordre de la matrice polynomiale de Laurent diagonale calculée est d'une importance critique. En effet la complexité de calcul de l'égaliseur sera proportionnellement liée à la longueur du canal. L'algorithme SBR2 n'est donc pas pratique pour cette application à moins d'utiliser une technique pour réduire les ordres des matrices polynomiales de Laurent.

### 2.6.3 PMSVD par l'utilisation de l'algorithme QR

L'approche SBR du PMSVD est souvent inadaptée, car la connaissance parfaite du canal estimé est impossible à obtenir dans le monde réel. Par conséquent, la présence d'erreurs d'estimation de canal dans $A(z)$ (s'il s'agit d'un canal MIMO) est exacerbée lors de la formation de l'entrée para-hermitienne à SBR2. McWhirter a proposé une méthode pour calculer le PMSVD en opérant directement sur $A(z)$. Golub [101] a montré que la décomposition SVD d'une matrice de scalaires peut être calculée directement en utilisant les rotations de Givens et la solution de McWhirter en est une généralisation aux matrices polynomiales. En raison de la propriété para-hermitienne de la matrice polynomiale de Laurent d'entrée à l'algorithme SBR2, l'effet de la composante de retard $G(z)$

doit être contre-carré par celui de $\widetilde{G}(z)$. Cependant, ceci ne sera pas nécessaire si l'on opère directement sur $A(z)$ ainsi des rotations appliquées à gauche et à droite de la matrice sont indépendantes.

Cet algorithme est dénommé PSVD avec PQRD [111], fonctionne comme un processus itératif où à chaque itération deux matrices para-unitaires sont formulées à l'aide de l'algorithme PQRD (voir section 2.5). N'importe quel algorithme PQRD peut être utilisé pour mettre en place la décomposition. Ici nous présentons uniquement celui avec le PQRD par colonne.

À travers une série d'itérations, l'utilisation de matrices para-unitaires va transformer la matrice d'entrée en une matrice approximativement diagonale. L'algorithme commence la première itération en calculant le PQRD de la matrice $A(z) \in \mathbb{C}^{p\times q}$ telle que :

$$U_1(z)A(z) = R_1(z) \tag{2.37}$$

où $R_1(z) \in \mathbb{C}^{p\times q}$ est une matrice polynomiale de Laurent approximativement triangulaire supérieure et $U_1(z) \in \mathbb{C}^{p\times p}$ est para-unitaire. Les coefficients des éléments polynomiaux en dessous de la diagonale de la matrice triangulaire supérieure seront inférieurs, en module, à un paramètre $\varepsilon$ prédéfini.

Dans l'étape suivante, la décomposition de $A'(z) = \widetilde{R}_1(z) \in \mathbb{C}^{q\times p}$ est effectuée sous la forme,

$$V_1(z)A'(z) = R_2(z) \tag{2.38}$$

où $V_1(z) \in \mathbb{C}^{q\times q}$ est para-unitaire. Ceci constitue la première itération de l'algorithme PSVD par PQRD et la décomposition globale de dans cette itération est de la forme :

$$U_1(z)A(z)\widetilde{V}_1(z) = A_1(z), \tag{2.39}$$

avec $A_1(z) = R_2(z)$. Ce processus itératif est ensuite répété en remplaçant $A(z)$ par $\widetilde{A}_1(z)$ ainsi de suite jusqu'à ce que tous les coefficients des éléments polynomiaux hors-diagonaux soient jugés suffisamment petits, c'est à dire inférieurs au seuil $\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Ce dernier est le même seuil de convergence défini dans l'algorithme PQRD-BC. Après $\beta$ itérations on obtient :

$$U(z)A(z)\widetilde{V}(z) = \Lambda(z) \tag{2.40}$$

avec $U(z) = U_1(z)\dots U_\beta(z)$ et $\widetilde{V}(z) = \widetilde{V}_1(z)\dots\widetilde{V}_\beta(z)$. Toutes ces deux matrices sont para-unitaires par construction et $\Lambda(z)$ est une matrice approximativement diagonale.

### 2.6.4 Discussion

La décomposition PSVD peut s'opérer donc de deux manières : la première est basée sur le SBR2 et la seconde se fait avec l'utilisation de la décomposition QR. Cette dernière a des avantages significatifs par rapport à l'approche basée sur SBR2. Car en plus de fonctionner directement sur la matrice, il est plus rapide en termes de calculs. En outre, l'ordre des matrices para-unitaire obtenues à partir de cette approche sont significativement plus petits que ceux via SBR2.

Parmi tous ces exemples d'algorithme de décomposition de matrice polynômiale présentés, le PSVD utilisant la décomposition QR par colonne est le plus rapide à converger [112]. La preuve complète de cette convergence est donnée dans [111]. De même les ordres des matrices polynomiales de Laurent résultantes sont plus petits que ceux obtenus avec l'approche PSVD via avec SBR2 et avec moins d'erreurs relatives [112]. Ces derniers points peuvent être un avantage significatif dans une application aux systèmes de communications MIMO. En effet, sa complexité d'égalisation serait moindre par rapport aux autres méthodes et on aura aussi moins d'interférences co-canal. Tous ces avantages font que c'est la seule méthode que nous allons implémenter, pour servir éventuellement de référence de comparaison dans la suite de cette thèse. Elle sera dénommée QR-Polynomial Matrix SVD (QR-PMSVD).

## 2.7 Résultats de simulation avec QR-PMSVD

La décomposition QR-PMSVD semble être la meilleure parmi les différentes méthodes de diagonalisation étudiées. L'algorithme permet également à l'utilisateur de contrôler l'amplitude des coefficients hors diagonaux de la matrice avant que la convergence ne soit atteinte ; ce qui n'est pas possible avec l'approche SBR2 sans une grande quantité d'essais et d'erreurs. Nous l'avons implémenté dans le cadre de cette thèse.

Dans cette section, quelques résultats numériques concernant les performances de l'algorithme opérant sur des matrice polynômiales $3 \times 3$ et $4 \times 4$ sont présentés. Tout d'abord la qualité de la décomposition sera étudiée. Ensuite le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence sera présenté. Enfin une observation sur l'allongement de l'ordre des polynômes de la matrice diagonale sera faite. La matrice polynomiale $A(z)$ sur laquelle la factorisation a été appliquée est modélisée comme suit :

$$A(z) = \sum_{l=0}^{L-1} A_l e^{-\alpha l} z^{-l} \tag{2.41}$$

où les éléments des $A_l$ sont obtenus à partir d'une distribution gaussienne normalisée à symétrie circulaire de moyenne nulle et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a été ajouté afin d'obtenir un profil de retard de puissance décroissant exponentiellement.

### 2.7.1 Qualité de décomposition

Pour étudier la qualité de décomposition, nous considérons un canal MIMO avec $5$ échos, donc $L = 6$. Nous avons implémenté l'algorithme QR-PMSVD sur le logiciel de calcul numérique "Scilab". Les matrices diagonales obtenues pour des matrices polynomiales d'entrée $3 \times 3$ (figure 2.1) et $4 \times 4$ (figure 2.3) sont présentées respectivement à la figure 2.2 et 2.4. C'est des représentations graphiques espace-temps où des diagrammes à bâtons sont utilisés pour illustrer les amplitudes des coefficients de chacun des éléments polynomiaux de la matrice. La position de chaque bloc de diagramme sur la figure correspond à la position, dans la matrice, de l'élément polynomial de Laurent représenté. Nous pouvons constater à première vue que l'algorithme fournit une matrice diagonale. Cependant les éléments hors diagonale ne sont pas complètement annulés. Un changement d'échelle au niveau de l'un des éléments polynomiaux hors diagonale de $D(z)$ (figure 2.5) permet de constater que la diganolisation n'est pas parfaite. En effet, le module de chaque coefficient hors diagonale est juste inférieur à $\varepsilon$ qui est fixé à $0.01$ dans cette simulation. Il apparait clairement que cette présence de coefficients hors diagonaux non nuls, traduisant une erreur dite de décomposition, est réduite avec une diminution de $\varepsilon$. Mais cela aura un impact sur le nombre d'itérations.

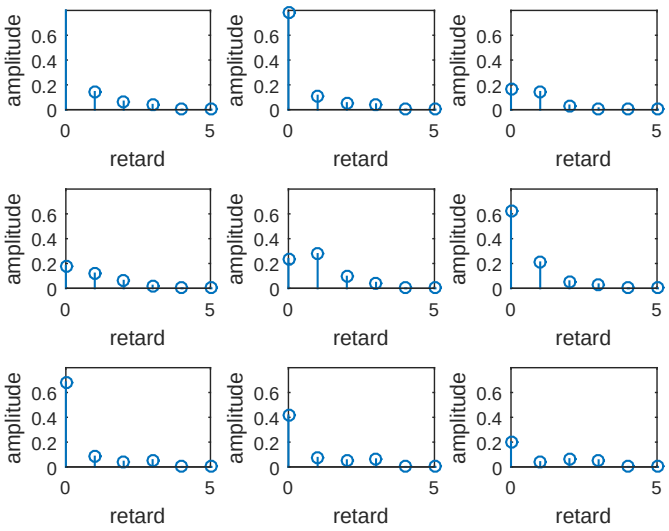



FIGURE 2.1 : Représentation espace-temps des coefficients de la matrice d'entrée $A(z)$ $(3 \times 3)$

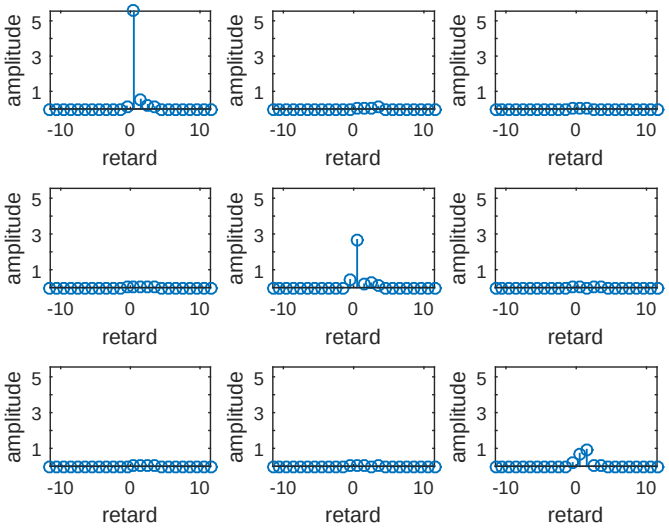



FIGURE 2.2 : Représentation espace-temps des coefficients de la matrice diagonalisée $D(z)$ $(3 \times 3)$ obtenue par la décomposition QR-PMSVD pour $\varepsilon = 0.01$ et $\mu = 10^{-6}$

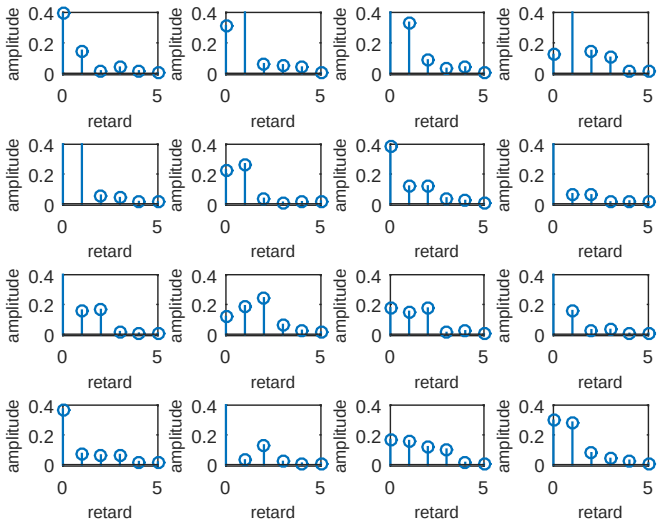



FIGURE 2.3 : Représentation espace-temps des coefficients de la matrice d'entrée $A(z)$ $(4 \times 4)$

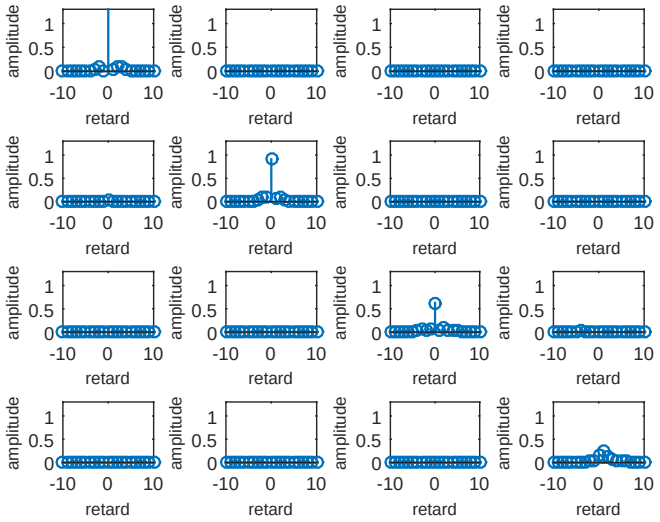



FIGURE 2.4 : Réponse impulsionnelle de la matrice diagonalisée $D(z)$ $(4 \times 4)$ obtenue par la décomposition QR-PMSVD avec $\varepsilon = 0.01$ et $\mu = 10^{-6}$

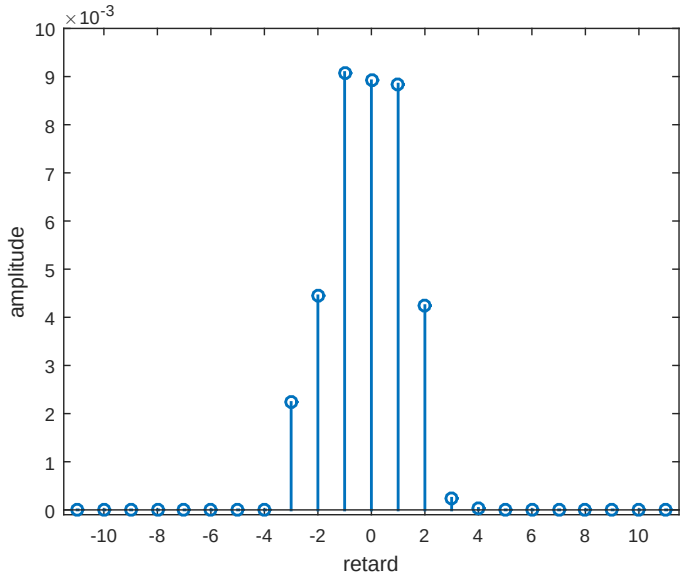



FIGURE 2.5 : Réponse impulsionnelle d'un d'élément hors diagonale de $D(z)$ obtenue par la décomposition QR-PMSVD avec $\varepsilon = 0.01$ et $\mu = 10^{-6}$

Le nombre d'itérations de l'algorithme dépend de la qualité de décomposition voulue et cette dernière est dictée $\varepsilon$. Cela est observable sur la figure 2.6, qui montre l'amplitude du plus grand coefficient hors-diagonale $\nu$ de la matrice $D(z)$ sur la série d'itérations de l'algorithme QR-PMSVD. Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la condition d'arrêt est très important. Près de $140$ itérations sont nécessaires pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

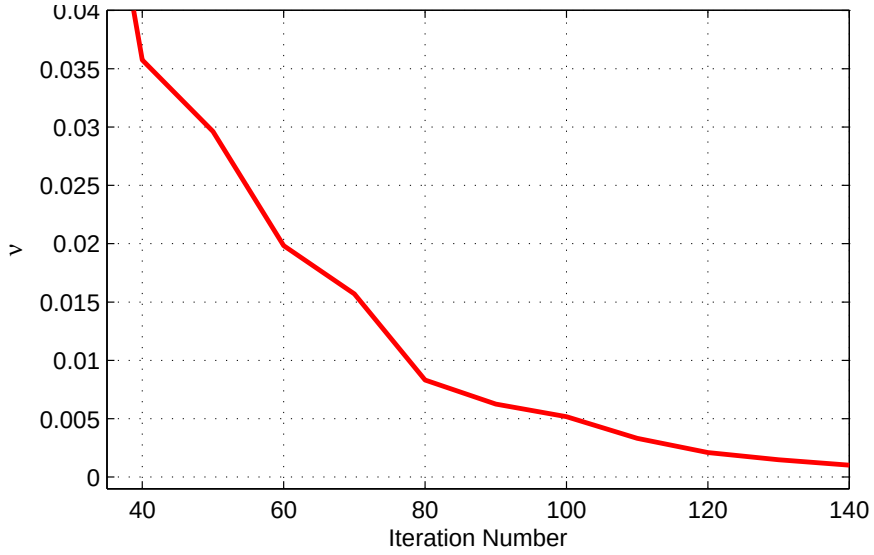



FIGURE 2.6 : Amplitude du plus grand coefficient hors diagonale $D(z)$, notée $\nu$ ***vs*** itérations, pour QR-PMSVD avec $\varepsilon = 10^{-3}$.

### 2.7.2 Ordre de la matrice diagonale

Dans le même esprit, la figure 2.7 montre le comportement de l'ordre de la matrice polynomiale de Laurent $D(z)$ sur la série d'itérations de l'algorithme QR-PMSVD. En combinant les analyses des figures 2.6 et 2.7, on remarque que l'ordre de la matrice $D(z)$ est très élevé pour $\varepsilon = 10^{-3}$. Rappelons que l'objectif est de transformer le canal MIMO en canaux SISO séparés et indépendants. Chaque réponse impulsionnelle du canal SISO est modélisée par l'un des polynômes de la diagonale de $D(z)$. Par conséquent, puisque l'ordre de la matrice $D(z)$ est très élevé, la durée des réponses impulsionnelles des différents canaux SISO devient très importante. Par conséquent, l'égalisation des différents canaux SISO sera très complexe.

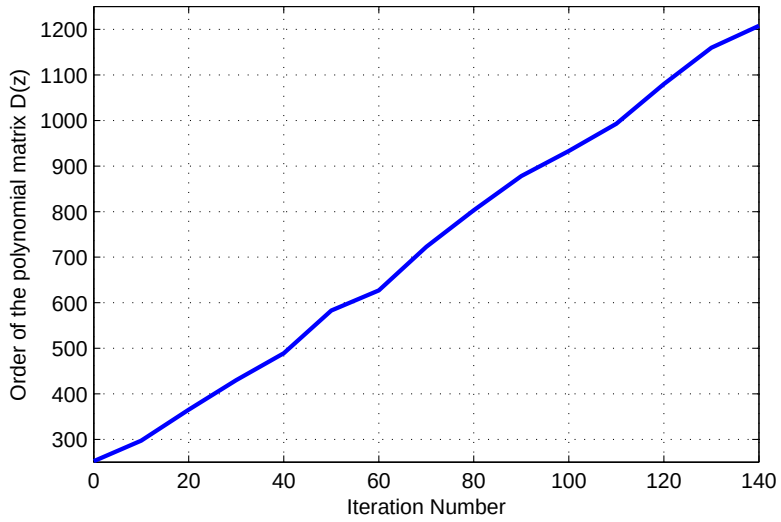



FIGURE 2.7 : Ordre de la matrice polynomiale $D(z)$, QR-PMSVD avec $\varepsilon = 10^{-3}$.

## 2.8 Conclusion

Les algorithmes de décomposition de matrice polynomiale étudiés ici sont approximatifs et très couteux en calcul. En plus, il est difficile de déterminer à l'avance l'ordre des matrices polynomiales qui augmente en fonction des itérations. Foster dans sa thèse [112] a montré que, dans un contexte MIMO, l'algorithme PSVD par PQRD appelé ici QR-PMSVD offre les meilleures performances : pour un même niveau de décomposition, il converge beaucoup plus rapidement que les autres techniques dans la littérature. En plus son erreur de décomposition est contrôlable avec le paramètre d'arrêt $\varepsilon$.

La méthode QR-PMSVD fonctionne par une application successive de rotations polynomiales élémentaires de Givens pour mettre à zéros de manière itérative le plus grand coefficient sous la diagonale. Elle produit des filtres $U(z)$ et $V(z)$ à réponse impulsionnelle finie (RIF) para-unitaires dont les filtres correspondant n'amplifient pas de bruit. Cependant le facteur $D(z)$ est une matrice polynômiale de Laurent approximativement diagonale car tous les coefficients hors diagonaux ne sont pas annulés. En effet l'algorithme tourne jusqu'à ce que l'amplitude du plus grand coéfficient hors diagonale soit juste inférerieur à un paramètre de tolérance $\varepsilon$. Dans une application aux systèmes MIMO, la présence d'éléments hors diagonale non nuls produit des interférences co-canal (ICC) qui affectent les performances du système [118]. En plus, les degrés des polynômes augmentent rapidement en général, c'est la raison pour laquelle une étape de troncature par un paramètre $\mu$ est introduite afin de limiter l'ordre des polynômes. Cependant, la

propriété para-unitaire risque de ne plus être garantie avec cette troncature.

Nous allons dans le chapitre suivant (3) présenter une autre méthode de décomposition de matrice polynomial qui n'aurait pas les mêmes inconvénients précités et qui serait adaptée aux systèmes de communication MIMO large bande.

# Chapitre 3

# Décomposition LU de Matrice polynômiale

## Sommaire


**3.1 Introduction** . . . . . **82**
**3.2 Principes** . . . . . **82**
**3.3 Présentation de la méthode : exemple de matrice** $(4 \times 4)$ . . . . . **84**
**3.4 Cas général** . . . . . **87**
3.4.1 Étape de réduction . . . . . 88
3.4.2 Étape d'élimination Gaussienne LU . . . . . 92
3.4.3 Étape de factorisation . . . . . 93
**3.5 Discussions** . . . . . **96**
**3.6 Résultat Simulations** . . . . . **97**
**3.7 Conclusion** . . . . . **99**

## 3.1 Introduction

La transformation du canal MIMO large-bande multi-trajets en plusieurs canaux SISO indépendants nécessite une diagonalisation parfaite de la matrice polynomiale du canal. Les algorithmes présentés jusque là proposent des décompositions approximatives parce qu'ils dépendent souvent d'un paramètre d'arrêt $\varepsilon$, non nul, préalablement fixé. Ces imperfections de diagonalisation introduisent dans un système MIMO des interférences co-canaux (CCI) et dégradent les performances du système.

Pour parfaire la diagonalisation une diminution de la valeur du paramètre d'arrêt s'impose, mais cela augmente le nombre d'itérations nécessaire à l'algorithme pour converger. En même temps l'ordre des matrices résultantes s'allonge considérablement. Des méthodes de limitation de l'ordre des polynômes ont été proposée [108, 112] mais cette troncature peut impacter la propriétés de para-unitarité des matrices résultantes. Nous considérons ici une autre méthode de décomposition de matrice polynomiale qui est basée sur la factorisation LU classique. Elle est dénommée décomposition LU de matrice polynomiale (LU-Polynomial Matrix Decomposition (LU-PMD)) et permet d'apporter quelques solutions aux inconvénients précités. Elle est en partie basé sur exploitation l'identité de Bezout dont les applications pour le problème de l'égalisation ont été initiées par Mboup et al. [119] [120].

Cette décomposition qui constitue l'ossature de cette thèse sera présentée dans un premier temps avec un cas particulier d'une matrice $4 \times 4$ en section 3.3. Puis dans un cadre plus général, une présentation plus détaillée de l'algorithme est faite en section 3.4. Enfin, une étude sur la qualité de la décomposition en comparaison avec le QR-PMSVD sera présentée en section 3.6.

## 3.2 Principes

Étant donnée une matrice $\mathbb{C}^{p\times p}$ polynomiale $H(z)$, la décomposition proposée consiste à l'écrire sous la forme :

$$H(z) = V(z)L(z)R(z) \tag{3.1}$$

où les trois facteurs sont des matrices polynomiales telles que $V(z)$ est un produit de matrices $J$-orthogonales élémentaires, $L(z)$ est triangulaire inférieure et $R(z)$ est triangulaire supérieure. Le produit $U(z) = V(z)L(z)$ est une matrice polynomiale unimodulaire. Par conséquent, la décomposition peut également être considérée comme une décomposition en matrice polynomiale unimodulaire-supérieure. Cette méthode combine

la factorisation classique de la forme de Smith et de l'élimination gaussienne LU ; raison pour laquelle nous l'avons nommé LU-Polynomial Matrix Decomposition (LU-PMD). Elle se présente sous la forme qui suit,

$$H(z) = U(z)R(z), \tag{3.2}$$

où $R(z)$ est une matrice polynomiale triangulaire supérieure. La plupart de ses éléments diagonaux peuvent être réduit à $1$ (constante choisi arbitrairement) sauf pour le dernier. Appliquer la même décomposition à gauche et à droite de $H(z)$ fournira une matrice parfaitement diagonale.

Comme cela est bien connu, une telle décomposition existe toujours dans n'importe quel anneau de Bezout [121, 122], par opposition à la décomposition de la matrice polynomiale à base de QR. Notons également qu'il n'est pas nécessaire de considérer un modèle polynomial de Laurent pour le canal MIMO.

Cette décomposition LU-PMD suit presque les mêmes étapes que la factorisation LU classique (ou élimination de Gauss). Cependant dans chaque étape, un pré-traitement tiré de la première étape de décomposition en forme canonique de Smith est considéré. Ce pré-traitement réduit l'élément pivot résultant à une constante. La suite de la procédure revient à trouver un ensemble de transformations élémentaires pour successivement mettre à zéro les éléments des colonnes sous la diagonale. Nous allons expliquer la méthode dans un cas particulier d'une matrice $4 \times 4$ avant de la présenter pour un cas général.

## Préliminaires

Fixons d'abord quelques notations. Soit $p_1(z), \ldots, p_m(z)$ avec $m > 1$, des polynômes à coefficients complexes mutuellement premiers : c'est-à-dire leur plus grand diviseur commun (PGDC) est l'unité. Le vecteur colonne polynomial correspondant

$$\boldsymbol{p}(z) = \begin{bmatrix} p_1(z) \\ \vdots \\ p_m(z) \end{bmatrix}$$

est dit irréductible. Dans ce cas, on peut trouver un vecteur ligne polynomial $\boldsymbol{p}^\sharp(z) \in \mathbb{C}^{1\times m}$, avec $\deg \boldsymbol{p}^\sharp(z) < \deg \boldsymbol{p}(z)$ qui résout l'identité de Bezout suivante :

$$\boldsymbol{p}^\sharp(z)\boldsymbol{p}(z) = 1. \tag{3.3}$$

## 3.3 Présentation de la méthode : exemple de matrice $(4 \times 4)$

La procédure revient à trouver un ensemble de transformations élémentaires pour successivement mettre à zéro les éléments des colonnes sous la diagonale. Pour commencer, prenons un exemple simple de matrice polynomiale $4 \times 4$ :

$$H(z) = \begin{bmatrix} h_{1,1}(z) & h_{1,2}(z) & h_{1,3}(z) & h_{1,4}(z) \\ h_{2,1}(z) & h_{2,2}(z) & h_{2,3}(z) & h_{2,4}(z) \\ h_{3,1}(z) & h_{3,2}(z) & h_{3,3}(z) & h_{3,4}(z) \\ h_{4,1}(z) & h_{4,2}(z) & h_{4,3}(z) & h_{4,4}(z) \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Supposons que les polynômes $h_{1,1}(z)$ et $h_{2,1}(z)$ soient premiers entre eux. Notons par $\left[h^{\sharp}_{1,1}(z), h^{\sharp}_{2,1}(z)\right]$ la paire de polynômes résolvant l'équation de Bezout suivante :

$$h^{\sharp}_{1,1}(z)h_{1,1}(z) + h^{\sharp}_{2,1}(z)h_{2,1}(z) = 1, \tag{3.5}$$

avec $\deg h^{\sharp}_{1,1}(z) < \deg h_{1,1}(z)$ et $\deg h^{\sharp}_{2,1}(z) < \deg h_{2,1}(z)$

Maintenant, construisons une matrice $\overline{B}_1(z)$ avec les éléments de l'identité de Bezout pour former la matrice bloc diagonale suivante :

$$\overline{A}_1(z) = \left[\begin{array}{cc:cc} h^{\sharp}_{1,1}(z) & h^{\sharp}_{2,1}(z) & & \\ -h_{2,1}(z) & h_{1,1}(z) & & \\ \hdashline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \overline{B}_1(z) & 0 \\ \hdashline 0 & I_2 \end{array}\right], \tag{3.6}$$

où $I_2$ est une matrice identité de dimension 2. Un calcul simple montre que la matrice définie par $\widetilde{H}_1(z) = \overline{A}_1(z)H(z)$ est sous la forme :

$$\widetilde{H}_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & \widetilde{h}_{1,2}(z) & \widetilde{h}_{1,3}(z) & \widetilde{h}_{1,4}(z) \\ 0 & \widetilde{h}_{2,2}(z) & \widetilde{h}_{2,3}(z) & \widetilde{h}_{2,4}(z) \\ h_{3,1}(z) & h_{3,2}(z) & h_{3,3}(z) & h_{3,4}(z) \\ h_{4,1}(z) & h_{4,2}(z) & h_{4,3}(z) & h_{4,4}(z) \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Appliquons maintenant la première étape de l'élimination de Gauss en mettant à zéro les éléments hors diagonaux de la première colonne. Cela revient à multiplier la matrice

$\widetilde{H}_1(z)$ par la matrice polynômiale triangulaire inférieure suivante :

$$\overline{L}_1(z) = \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & & & \\ \hdashline 0 & 1 & & \\ -h_{3,1}(z) & & 1 & \\ -h_{4,1}(z) & & & 1 \end{array}\right]. \tag{3.8}$$

Le résultat obtenu noté $H_1(z) = \overline{L}_1(z)\overline{A}_1(z)H(z)$ est :

$$H_1(z) = \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & \widetilde{h}_{1,2}(z) & \widetilde{h}_{1,3}(z) & \widetilde{h}_{1,4}(z) \\ \hdashline 0 & \widetilde{h}_{2,2}(z) & \widetilde{h}_{2,3}(z) & \widetilde{h}_{2,4}(z) \\ 0 & \widetilde{h}_{3,2}(z) & \widetilde{h}_{3,3}(z) & \widetilde{h}_{3,4}(z) \\ 0 & \widetilde{h}_{4,2}(z) & \widetilde{h}_{4,3}(z) & \widetilde{h}_{4,4}(z) \end{array}\right]. \tag{3.9}$$

Les mêmes étapes sont répétées sur toutes les colonnes de $H_1(z)$ en considérant le bloc inférieur droite de la matrice $H_1(z)$ en equation (3.9). Ainsi, supposons que la paire $\left[\widetilde{h}_{2,2}(z)), \widetilde{h}_{3,2}(z)\right]$ est irréductible et que la paire $\left[\widetilde{h}^{\sharp}_{2,2}(z), \widetilde{h}^{\sharp}_{3,2}(z)\right]$, est une solution de l'équation de Bezout suivante :

$$\widetilde{h}^{\sharp}_{2,2}(z)\widetilde{h}_{2,2}(z) + \widetilde{h}^{\sharp}_{3,2}(z)\widetilde{h}_{3,2}(z) = 1. \tag{3.10}$$

Soit la matrice,

$$\overline{B}_2(z) = \begin{bmatrix} \widetilde{h}^{\sharp}_{2,2}(z) & \widetilde{h}^{\sharp}_{3,2}(z) \\ -\widetilde{h}_{3,2}(z) & \widetilde{h}_{2,2}(z) \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

à partir de laquelle nous construisons la matrice bloc diagonale suivante :

$$\overline{A}_2(z) = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & & \\ \hdashline & \overline{B}_2(z) & \\ \hdashline & & 1 \end{array}\right]. \tag{3.12}$$

La multiplication de $\overline{A}_2(z)$ à gauche de la matrice $H_1(z)$, de l'équation (3.9), donne la matrice suivante :

$$\widetilde{H}_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & \widetilde{h}_{1,2}(z) & \widetilde{h}_{1,3}(z) & \widetilde{h}_{1,4}(z) \\ 0 & 1 & \breve{h}_{2,3}(z) & \breve{h}_{2,4}(z) \\ 0 & 0 & \breve{h}_{3,3}(z) & \breve{h}_{3,4}(z) \\ 0 & \widetilde{h}_{4,2}(z) & \widetilde{h}_{4,3}(z) & \widetilde{h}_{4,4}(z) \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Puis encore, une application de l'étape de LU classique sur cette matrice donne,

$$H_2(z) = \overline{L}_2(z)\widetilde{H}_2(z) = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \widetilde{h}_{1,2}(z) & \widetilde{h}_{1,3}(z) & \widetilde{h}_{1,4}(z) \\ 0 & 1 & \breve{h}_{2,3}(z) & \breve{h}_{2,4}(z) \\ \hdashline 0 & 0 & \breve{h}_{3,3}(z) & \breve{h}_{3,4}(z) \\ 0 & 0 & \breve{h}_{4,3}(z) & \breve{h}_{4,4}(z) \end{array}\right], \tag{3.14}$$

avec

$$\overline{L}_2(z) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & -\widetilde{h}_{2,4}(z) & & 1 \end{array}\right]. \tag{3.15}$$

Enfin en dernière étape, construisons la matrice

$$\overline{A}_3(z) = \left[\begin{array}{c:c} I_2 & 0 \\ \hdashline 0 & B_3(z) \end{array}\right] \tag{3.16}$$

avec $B_3(z)$, définie en (3.17), étant une matrice construite avec les polynômes de Bezout et la paire de polynômes $\left[\breve{h}_{3,3}(z), \breve{h}_{4,3}(z)\right]$ du bloc inférieur de droite de la matrice $H_2(z)$ (équation (3.14)).

$$\overline{B}_3(z) = \begin{bmatrix} \breve{h}^{\sharp}_{3,3}(z) & \breve{h}^{\sharp}_{4,3}(z) \\ -\breve{h}_{4,3}(z) & \breve{h}_{3,3}(z) \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

La multiplication de $H_2(z)$ par $\overline{A}_3(z)$ permet d'obtenir matrice polynomiale triangulaire sous la forme :

$$R(z) = \overline{A}_3(z)H_2(z) \begin{bmatrix} 1 & \widetilde{h}_{1,2}(z) & \widetilde{h}_{1,3}(z) & \widetilde{h}_{1,4}(z) \\ 0 & 1 & \breve{h}_{2,3}(z) & \breve{h}_{2,4}(z) \\ 0 & 0 & 1 & \hat{h}_{3,4}(z) \\ 0 & 0 & 0 & \hat{h}_{4,4}(z) \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

En résumé, notons que cette dernière matrice se présente comme suit :

$$R(z) = \overline{A}_3(z)\overline{L}_2(z)\overline{A}_2(z)\overline{L}_1(z)\overline{A}_1(z)H(z). \tag{3.19}$$

Nous pouvons ainsi vérifier ces quatre points suivants :

1. Chaque $B_i(z)$ , $i = 1, 2, 3$ est unimodulaire par construction, donc $\det(B_i(z)) = 1$. Cela est aussi donc valable pour la matrice polynomiale correspondante $\overline{A}_i(z)$.

2. Pour inverser $\overline{B}_i(z)$, la relation ci dessous est valable pour tous les $i = 1, 2, 3$ :

$-J\overline{B}_i^t(z)J = \overline{B}_i^{-1}(z)$, où $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Chaque matrice $\overline{L}_i(z)$ est unimodulaire et son inverse $\overline{L}_i^{-1}(z)$ est obtenue simplement en changeant le signe de ses éléments hors-diagonaux.
4. De même nous avons aussi $\det(H(z)) = \hat{h}_{4,4}(z)$

Toutes ces matrices qui exécutent successivement la triangularisation sont facilement inversibles [123]. À cet effet, on note par $A_i(z) = \overline{A}_i(z)^{-1}$ et $L_i(z) = \overline{L}_i(z)^{-1}$.

L'ensemble des étapes décrites ci-dessus réalise une triangularisation complète de $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = U(z)R(z) \tag{3.20}$$

où $U(z) = A_1(z)L_1(z)A_2(z)L_2(z)A_3(z)$ est une matrice unimodulaire, donc son déterminant est unitaire et $R(z)$ est une matrice triangulaire supérieure obtenue à la dernière étape de l'algorithme.

## 3.4 Cas général

On considère maintenant un cas général d'une matrice polynomiale $p \times q$. Après avoir appliqué $k-1$ itérations, on obtient une matrice

$H_{k-1}(z) = \overline{L}_{k-1}(z)\overline{A}_{k-1}(z)\cdots\overline{L}_1(z)\overline{A}_1(z)H(z)$,

sous la forme :

$$H_{k-1}(z) = \left[\begin{array}{cccc:ccc} d_1(z) & h_{1,2}^{(k)}(z) & \cdots & h_{1,k-1}^{(k)}(z) & h_{1,k}^{(k)}(z) & \cdots & h_{1,N_t}^{(k)}(z) \\ 0 & d_2(z) & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & h_{k-2,k-1}^{(k)}(z) & \vdots & \cdots & \\ 0 & & \ddots & d_{k-1}(z) & \vdots & \cdots & \\ \hdashline 0 & & \ddots & 0 & h_{k,k}^{(k)}(z) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & h_{k+1,k}^{(k)}(z) & \cdots & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & & \cdots & 0 & h_{N_r,k}^{(k)}(z) & \cdots & h_{N_r,N_t}^{(k)}(z) \end{array}\right]. \tag{3.21}$$

À l'instar des autres itérations, la $k^{\text{ème}}$ itération se fait en deux étapes :

— Une étape de réduction, composée de plusieurs sous étapes dont l'objectif est de réduire l'élément pivot au plus grand diviseur commun de tous les $h_{k+l,k}(z)$.

— Une étape d'élimination Gaussienne LU qui annule les éléments de la colonne en dessous de la diagonale [101].

### 3.4.1 Étape de réduction

Nous commençons la procédure comme dans la décomposition de forme canonique de Smith [124]. Nous pouvons supposer que les éléments polynomiaux du vecteur $\boldsymbol{h}_k(z) = [h_{k,k}^{(k)}(z)\ h_{k+1,k}^{(k)}(z)]$ ne partagent aucun zéro commun. Si nécessaire, nous pouvons remplacer $h_{k+1,k}^{(k)}(z)$ par un autre polynôme : par exemple $h_{k+\ell,k}^{(k)}(z)$. Une telle opération revient simplement à appliquer une permutation des lignes $k+1$ et $k+\ell$ dans $H(z)$.

Toutefois cela pourrait ne pas suffire, par exemple, lorsque les polynômes $\{h_{j,k}^{(k)}(z), j = k, \ldots, p\}$ ne forment pas un ensemble irréductible. Et même si cet ensemble est irréductible, il peut arriver que n'importe quelle paire de polynômes choisie présente des zéros communs. Par conséquent, différents scénarios possibles doivent être pris en compte dans la procédure.

#### 3.4.1.1 Cas 1

Commençons avec la situation la plus simple où le vecteur polynomial suivant est irréductible

$$\begin{bmatrix} h_{k,k}^{(k)}(z) \\ h_{k+1,k}^{(k)}(z) \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Alors dans ce cas, l'équation de Bezout suivante

$$h_{k,k}^{\sharp}(z)h_{k,k}^{(k)}(z) + h_{k+1,k}^{\sharp}(z)h_{k+1,k}^{(k)}(z) = 1, \tag{3.23}$$

sera soluble par une paire de polynômes notée $\boldsymbol{h}_k^{\sharp}(z) = [h_{k,k}^{\sharp}(z),\ h_{k+1,k}^{\sharp}(z)]$ telle que $\deg \boldsymbol{h}_k^{\sharp}(z) < \deg \boldsymbol{h}_k(z)$. Posons ensuite,

$$\overline{B}_k(z) = \begin{bmatrix} h_{k,k}^{\sharp}(z) & h_{k+1,k}^{\sharp}(z) \\ -h_{k+1,k}^{(k)}(z) & h_{k,k}^{(k)}(z) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

ainsi nous pouvons alors définir la matrice bloc diagonale polynomiale

$$\overline{A}_k(z) = \begin{bmatrix} I_{k-1} & & \\ & \overline{B}_k(z) & \\ & & I_{p-k-1} \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Rappelons qu'une matrice carrée réelle $Q$ est appelée $J$-orthogonale si elle satisfait $Q^tJQ = J = QJQ^t$ où $J$ est une matrice de signature.

**Lemme 1.** ***Pour tout*** $z$***, la matrice*** $\overline{B}_k(z)$ ***définie dans*** (3.25) ***satisfait***

$$\overline{B}_k(z)^t J \overline{B}_k(z) = J = \overline{B}_k(z) J \overline{B}_k(z)^t, \text{ } \textbf{\textit{avec}} \ J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

***Preuve.*** L'inversion de la matrice unimodulaire $\overline{B}_k(z)$ s'obtient par

$$\overline{B}_k^{-1}(z) = -J\overline{B}_k(z)^t J. \tag{3.27}$$

En multipliant $J$ à gauche de l'équation (3.27), nous obtenons

$$J\overline{B}_k^{-1}(z) = -J^2\overline{B}_k(z)^t J = \overline{B}_k(z)^t J \quad \text{car} - J^2 = I_2,$$

$I_2$ étant une matrice identité de taille 2.
En multipliant ensuite $\overline{B}_k(z)$ à droite l'équation obtenue cela conduit à

$$J\overline{B}_k^{-1}(z)\overline{B}_k(z) = \overline{B}_k(z)^t J \overline{B}_k(z).$$

Nous pouvons donc écrire,

$$J = \overline{B}_k(z)^t J \overline{B}_k(z) \quad \text{car} \quad \overline{B}_k^{-1}(z)\overline{B}_k(z) = I_2.$$

En outre, la multiplication à droite de l'équation (3.27) par $J$ donne la relation suivante :

$$\overline{B}_k^{-1}(z)J = J\overline{B}_k(z)^t \quad \text{car} J^2 = -I_2.$$

Puis, en multipliant $\overline{B}_k^{-1}(z)$ à gauche de l'équation obtenue, cela donne

$$J = \overline{B}_k(z)^t J \overline{B}_k(z)^t.$$

□

Pour un $z$ réel, $\overline{B}_k(z)$ est ainsi $J$-orthogonal. Par conséquent, la matrice $\overline{A}_k(z)$ est $\widehat{J}$-orthogonal avec

$$\widehat{J} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J & \\ & & J_2 \end{bmatrix},$$

pour n'importe quel $J_1$ et $J_2$ tel que $J_1^2 = I_{k-1}$ et $J_2^2 = I_{Nr-k-1}$.

En multipliant la matrice unimodulaire $\overline{A}_k(z)$ à gauche de $H_{k-1}(z)$, l'équation (3.21) conduit à $\overline{H}_k(z) = \overline{A}_{k-1}(z)H_{k-1}(z)$ et est libellée comme suit,

$$\overline{H}_k(z) \quad = \quad \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} d_1(z) & \cdots & h^{(k)}_{1,k-1}(z) & h^{(k)}_{1,k}(z) & h^{(k)}_{1,k+1}(z) & \cdots & h^{(k)}_{1,N_t}(z) \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & d_{k-1}(z) & h^{(k)}_{k-1,k}(z) & h^{(k)}_{k-1,k+1}(z) & \cdots & h^{(k)}_{k-1,N_t}(z) \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 1 & \overline{h}^{(k)}_{k,k+1}(z) & \cdots & \overline{h}^{(k)}_{k,N_t}(z) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \overline{h}^{(k)}_{k+1,k+1}(z) & \cdots & \overline{h}^{(k)}_{k+1,N_t}(z) \\ \hdashline 0 & & 0 & h^{(k)}_{k+2,k}(z) & h^{(k)}_{k+2,k+1}(z) & \cdots & h^{(k)}_{k+2,N_t}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & h^{(k)}_{N_r,k}(z) & h^{(k)}_{N_t,k+1}(z) & \cdots & h^{(k)}_{N_t,N_t}(z) \end{array}\right]. \tag{3.28}$$

Nous constatons que $\overline{H}_k(z)$ a exactement la même forme que $H_{k-1}(z)$ donnée en (3.21). La configuration initiale de l'itération $k$ est alors retrouvé, si $h^{(k)}_{k,k}(z)$ est remplacé par $1$ et $h^{(k)}_{k+1,k}(z)$ par $0$.

#### 3.4.1.2 Cas 2

Si $\boldsymbol{h}_k(z) = [h^{(k)}_{k,k}(z)\ h^{(k)}_{k+1,k}(z)]$ n'est pas irréductible, on peut réessayer avec, cette fois, $h^{(k)}_{k+1,k}(z)$ remplacé par $h^{(k)}_{k+\ell,k}(z)$ pour $\ell > 1$. Cependant, cela n'est pas nécessaire, considérons plutôt la solution suivante qui est plus pragmatique.

Soit $d_{k,1}(z)$ le plus grand diviseur commun (***pgdc***) des deux polynômes, nous pouvons alors écrire,

$$\boldsymbol{h}_k(z) = d_{k,1}(z)[\widehat{h}^{(k)}_{k,k}(z)\ \widehat{h}^{(k)}_{k+1,k}(z)] \triangleq d_{k,1}(z)\widehat{\boldsymbol{h}}_k(z). \tag{3.29}$$

La solution de l'équation de Bezout en (3.23) où $\boldsymbol{h}_k(z)$, maintenant remplacé par $\widehat{\boldsymbol{h}}_k(z)$, est toujours noté $\boldsymbol{h}^\sharp_k(z)$. Soit la matrice $\overline{B}_k(z)$ dans (3.24), et $\overline{A}_k(z)$ dans (3.25), reformulées en conséquence. Il est simple ensuite de constater que $\overline{H}_{k,1}(z) = \overline{A}_{k-1}(z)H_{k-1}(z)$ est identique à l'expression dans (3.28), sauf que la valeur $1$ de l'entrée $(k,k)$ est maintenant remplacée par $\left(\overline{H}_k(z)\right)_{k,k} = d_{k,1}(z)$. L'itération se poursuit avec la paire de polynômes suivante,

$$\boldsymbol{h}_{k,1}(z) = [d_{k,1}(z)\ h^{(k)}_{k+2,k}(z)] \triangleq d_{k,2}(z)[\widehat{d}_{k,1}(z)\ \widehat{h}^{(k)}_{k+2,k}(z)],$$

où $\widehat{\boldsymbol{h}}_{k,1}(z) \triangleq [\widehat{d}_{k,1}(z)\ \widehat{h}^{(k)}_{k+2,k}(z)]$ est irréductible et $d_{k,2}(z)$ représente le ***pgdc*** de la paire $\widehat{d}_{k,1}(z)$ et $\widehat{h}^{(k)}_{k+2,k}(z)$.

Ce processus est répété, conduisant à des sous-itérations à l'intérieur de l'itération courante $k$, avec un positionnement initial $\overline{H}_{k,0}(z) \stackrel{\triangle}{=} \overline{H}_k(z)$. La boucle interne correspondante est établit comme suit.

Étant donné $\boldsymbol{h}_{k,n-1}(z) = d_{k,n}(z)[\widehat{d}_{k,n-1}(z)\ \widehat{h}^{(k)}_{k+n,k}(z)]$ à la sous-itération $n$, $1 \leqslant n \leqslant p-k$, on résout l'équation de Bezout

$$h^{\sharp}_{k,k}(z)\widehat{d}_{k,n-1}(z) + h^{\sharp}_{k,n}(z)\widehat{h}^{(k)}_{k+n,k}(z) = 1.$$

Ensuite, la matrice suivante est formée :

$$\overline{A}_{k,n}(z) = \begin{bmatrix} I_{k-1} & & & & \\ & h^{\sharp}_{k,k}(z) & & h^{\sharp}_{k+n,k}(z) & \\ & & I_n & & \\ & -\widehat{d}_{k,n-1}(z) & & \widehat{h}^{(k)}_{k+n,k}(z) & \\ & & & & I_{p-k-1} \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

D'après le lemme 1 et par construction, cette matrice polynomiale est $\widehat{J}$-orthogonale pour un $\widehat{J}$ approprié et pour tout $z$ réel. Nous calculons ensuite $\overline{H}_{k,n}(z) = \overline{A}_{k,n}(z)\overline{H}_{k,n-1}(z)$ comme suit

$$\overline{H}_{k,n}(z) = \left[\begin{array}{c|cc|c} & h^{(k)}_{1,k}(z) & h^{(k)}_{1,k+1}(z) \cdots h^{(k)}_{1,N_t}(z) \\ G(z) & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ & h^{(k)}_{k-1,k}(z) & h^{(k)}_{k-1,k+1}(z) \cdots h^{(k)}_{k-1,N_t}(z) \\ \hline & d_{k,n}(z) & h^{(k,n)}_{k,k+1}(z) \cdots h^{(k,n)}_{k,N_t}(z) \\ & \mathbf{0}_n & \vdots \qquad\quad \vdots \\ & & h^{(k,n)}_{k+n,k+1}(z) \cdots h^{(k,n)}_{k+n,N_t}(z) \\ \hline & h^{(k)}_{k+n+1,k}(z) & h^{(k)}_{k+n+1,k+1}(z) \cdots h^{(k)}_{k+n+1,N_t}(z) \\ & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ & h^{(k)}_{N_r,k}(z) & h^{(k)}_{N_t,k+1}(z) \cdots h^{(k)}_{N_t,N_t}(z) \end{array}\right] \tag{3.31}$$

où $G(z)$ est une matrice polynomiale triangulaire supérieure et correspond à la $(k-1)^{\text{ème}}$ sous-matrice principale de $\overline{H}_k(z)$ dans (3.28).

**Lemme 2.** ***Pour tout*** $k$ ***et*** $n$***, nous avons***

$$d_{k,n}(z) = \textbf{\textit{pgdc}}\left(h^{(k)}_{k,k}(z), h^{(k)}_{k+1,k}(z), \cdots, h^{(k)}_{k+n,k}(z)\right) \tag{3.32}$$

***Preuve.*** Nous avons $d_{k,1}(z) = \textbf{\textit{pgdc}}\left(h_{k,k}^{(k)}(z), h_{k+1,k}^{(k)}(z)\right)$ et nous pouvons donc écrire que :

$$\begin{aligned}\textbf{\textit{pgdc}}\left(h_{k,k}^{(k)}(z), h_{k+1,k}^{(k)}(z), h_{k+2,k}^{(k)}(z)\right) &= \textbf{\textit{pgdc}}\left(\textbf{\textit{pgdc}}\left(h_{k,k}^{(k)}(z), h_{k+1,k}^{(k)}(z)\right), h_{k+2,k}^{(k)}(z)\right) \\ &= \textbf{\textit{pgdc}}\left(d_{k,1}(z), h_{k+2,k}^{(k)}(z)\right) = d_{k,2}(z).\end{aligned} \tag{3.33}$$

À partir de l'expression (3.33), nous pouvons déduire par construction que

$$\begin{aligned}d_{k,3}(z) &= \textbf{\textit{pgdc}}\left(d_{k,2}(z), h_{k+3,k}^{(k)}(z)\right) \\ &= \textbf{\textit{pgdc}}\left(h_{k+1,k}^{(k)}(z), h_{k+2,k}^{(k)}(z), h_{k+3,k}^{(k)}(z)\right)\end{aligned} \tag{3.34}$$

et donc pour tout $j$ nous avons

$$\begin{aligned}d_{k,j}(z) &= \textbf{\textit{pgdc}}\left(d_{k,j-1}(z), h_{k+j,k}^{(k)}(z)\right) \\ &= \textbf{\textit{pgdc}}\left(h_{k,k}^{(k)}(z), h_{k+1,k}^{(k)}(z), \cdots, h_{k+j,k}^{(k)}(z)\right).\end{aligned} \tag{3.35}$$

□

La fin de cette boucle interne est atteinte après $n_k \leqslant p-k$ sous-itérations, quand soit :

***Case 2-1*** : $d_{k,n_k}(z) = 1, \forall z$. Le contexte du ***Case 1*** ci-dessus est ainsi retrouvé avec $n_k < p-k$.

***Case 2-2*** : $n_k = p-k$.

Pour conclure, observons que toutes les étapes de réduction pendant l'itération $k$ peuvent être résumées par

$$\begin{aligned}\overline{H}_k(z) \triangleq \overline{H}_{k,n_k}(z) &= \overline{A}_{k,n_k}(z)\overline{H}_{k,n_k-1}(z) \\ &= \overline{A}_k(z)H_{k-1}(z),\end{aligned} \tag{3.36}$$

avec

$$\overline{A}_k(z) = \overline{A}_{k,n_k}(z)\overline{A}_{k,n_k-1}(z)\cdots\overline{A}_{k,1}(z). \tag{3.37}$$

### 3.4.2 Étape d'élimination Gaussienne LU

Cette étape applique une transformation d'élimination gaussienne élémentaire à la matrice $\overline{H}_k(z)$ à partir de l'étape de réduction ci-dessus afin de mettre à zéro tous les éléments de la colonne $k$ sous la diagonale. Évidemment, l'étape est nulle pour l'itération

$k$, si l'étape de réduction aboutit au ***Case 2-2***, avec $n_k = p - k$. Sinon, nous considérons $\overline{H}_k(z) = \overline{H}_{k,n_k}(z)$, $1 \leqslant n_k < p - k$ dans l'équation (3.31) avec $d_{k,n_k}(z) = 1$. Puisque le pivot $d_{k,n_k}(z)$ est une constante, une étape de LU classique peut être appliquée. Cela revient à multiplier $\overline{H}_k(z)$, à sa gauche, par la matrice triangulaire inférieure,

$$\overline{L}_k(z) = \begin{bmatrix} I_{k-1} & & \\ & 1 & \\ & \boldsymbol{f}_k(z) & I_{N_r-k} \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

où $\boldsymbol{f}_k(z) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h^{(k)}_{k+n_k,k}(z) & \cdots & h^{(k)}_{p,k}(z) \end{bmatrix}^T$ est le vecteur polynomial formé par les dernières entrées $N_r - k$ de la $k^{\text{ème}}$ colonne de $\overline{H}_k(z)$.

Le résultat de cette multiplication est une matrice de la même structure que $H_{k-1}(z)$ de l'équation (3.21). Cela termine la $k^{\text{ième}}$ itération en définissant

$$H_k(z) = \overline{L}_k(z)\overline{H}_k(z).$$

La $k^{ieme}$ entrée diagonale de cette matrice polynomiale est donnée par

$$d_k(z) = \gcd\left(h^{(k)}_{\ell,k}(z),\ \ell = k, k+1, \cdots, p\right), \tag{3.39}$$

comme indiqué par le lemme 2. Les étapes de réduction et d'élimination gaussienne sont répétées pour tout $k$, allant de 1 à $N$ avec $N = \min(p-1, q)$. Lors de la dernière étape de réduction, la matrice finale obtenue est une matrice polynomiale triangulaire supérieure qui se lit comme suit :

$$H_N(z) = \overline{A}_N(z)\overline{L}_{N-1}(z)\overline{A}_{N-1}(z)\cdots\overline{L}_1(z)\overline{A}_1(z)\cdot H(z). \tag{3.40}$$

La triangularisation se termine ainsi après un certain nombre d'itérations données par $p - 1$.

### 3.4.3 Étape de factorisation

Pour compléter la décomposition, nous observons d'abord que la matrice polynomiale $\overline{A}_N(z)\overline{L}_{N-1}(z)\overline{A}_{N-1}(z)\cdots\overline{L}_1(z)\overline{A}_1(z)$ apparaissant ci-dessus est unimodulaire dont l'inverse est obtenue en changeant simplement les signes des éléments hors diagonaux.

Dans la suite, on définit

$$\boldsymbol{\ell}_k(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{f}_k(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k+n_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h^{(k)}_{k+n_k+1,k}(z) \\ \vdots \\ h^{(k)}_{p,k}(z) \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Ensuite, nous pouvons vérifier les faits suivants :

**Lemme 3.** ***Dans l'itération*** $k$***,***

1. $\overline{L}_k(z)$***, comme dans*** (3.38)***, est une matrice polynomiale triangulaire inférieure unimodulaire qui peut être exprimée comme***

$$\overline{L}_k(z) = I_{N_r} + \boldsymbol{\ell}_k(z)\boldsymbol{e}_k^t,$$

   ***où*** $\boldsymbol{e}_k^t$ ***est le*** $k^{\text{ème}}$ ***vecteur de la base canonique de*** $\mathbb{R}^p$***.***

2. ***L'inverse de*** $\overline{L}_k(z)^{-1}$***, en utilisant le lemme d'inversion matricielle, est*** $L_k(z) = I_{N_r} - \boldsymbol{\ell}_k(z)\boldsymbol{e}_k^t$***.***

3. ***En utilisant la relation*** (3.37)***, nous avons*** $A_k(z) = A_{k,1}(z)A_{k,2}(z)\cdots A_{k,n_k}(z)$ ***où*** $A_{k,m}(z) = J_m^t\overline{A}_{k,m}(z)^t J_m$***, pour une matrice signature appropriée*** $J_m$***.***

Enfin, en utilisant les propriétés ci-dessus et l'équation (3.40), les étapes précédentes conduisent à la factorisation

$$H(z) = U(z)H_N(z) \tag{3.42}$$

où

$$U(z) = A_1(z)L_1(z)\cdots A_{N-1}(z)L_{N-1}(z)A_N(z) \tag{3.43}$$

est une matrice polynomiale unimodulaire. Une triangularisation supérieure unimodulaire (unimodular-upper) de la matrice polynomiale d'origine $H(z)$ est donc obtenue. En plus, le facteur unimodulaire peut être encore décomposé. En effet, nous avons

**Lemme 4.** ***La matrice unimodulaire dans*** (3.43) ***peut être exprimée comme :***

$$U(z) = A(z)L(z) \tag{3.44}$$

***où*** $A(z)$ ***est une matrice polynômiale donnée par*** $A(z) = A_1(z)A_2(z)\cdots A_N(z)$ ***et***

*$L(z)$ est une matrice polynomiale triangulaire inférieure avec des $1$ sur la diagonale.*

***Preuve.*** Nous établissons d'abord la relation suivante,

$$U(z) = A_1(z)A_2(z)\cdots A_N(z) + \sum_{k=1}^{N-1} \boldsymbol{\ell}_k(z)\boldsymbol{e}_k^t \tag{3.45}$$

Pour voir cela, observons que pour tout $i \leqslant j$, $A_i(z)$ peut être écrit sous une forme de bloc diagonale $2 \times 2$ avec le second bloc donné par $I_{p-j-1}$. Par conséquent, la dimension du premier bloc (en haut à gauche) est $j+1$. Maintenant, les $j+1$ premiers composants de $\boldsymbol{\ell}_j(z)$ disparaissent comme indiqué dans (3.41). Nous avons donc,

$$A_i(z)\boldsymbol{\ell}_j(z) = \boldsymbol{\ell}_j(z). \tag{3.46}$$

Pour tout $i \leqslant j$, nous avons aussi $\boldsymbol{e}_i^t A_j(z) = \boldsymbol{e}_i^t$ et $\boldsymbol{\ell}_i(z)\boldsymbol{e}_i^t\boldsymbol{\ell}_j(z)\boldsymbol{e}_j^t = 0$. La relation (3.45) s'obtient à partir de la relation (3.43) en y remplaçant les matrices polynomiales $L_i(z)$ par l'expression donnée en Lemme 3. Pour le reste, écrivons (3.45) sous la forme suivante

$$U(z) = A(z)\left(I_p + \overline{A}_N(z)\cdots\overline{A}_1(z)\sum_{k=1}^{N-1}\boldsymbol{\ell}_k(z)\boldsymbol{e}_k^t\right). \tag{3.47}$$

D'après l'équation (3.46), on peut écrire $\overline{A}_N(z)\cdots\overline{A}_j(z)\boldsymbol{\ell}_i(z) = \boldsymbol{\ell}_i(z)$ pour $i \leqslant j$. Maintenant, observons à nouveau que pour tout $i > j$, $A_i(z)$ peut être écrite dans un bloc $2\times 2$ avec $I_j$ dans le premier bloc. Donc les $j$ premiers composants de $\boldsymbol{\ell}'_j(z) = A_i(z)\boldsymbol{\ell}_j(z)$ disparaissent. Ceci montre que $\boldsymbol{\ell}'_j(z)$ a la même structure que $\boldsymbol{\ell}_j(z)$. Par conséquent, les $j$ premiers composants du produit $\overline{A}_N(z)\cdots\overline{A}_1(z)\boldsymbol{\ell}_j(z)$ disparaissent. Posons $\boldsymbol{\ell}'_i(z) = \overline{A}_N(z)\cdots\overline{A}_1(z)\boldsymbol{\ell}_j(z)$, nous pouvons réécrire (3.47) sous la forme

$$U(z) = A(z)\left(I_{N_r} + \sum_{k=1}^{N-1}\widehat{\boldsymbol{\ell}}_k(z)\boldsymbol{e}_k^t\right). \tag{3.48}$$

Notons enfin que si nous définissons $\widehat{L}_k(z) = I_{N_r} + \widehat{\boldsymbol{\ell}}_k(z)\boldsymbol{e}_k^t$, alors la relation suivante est facile à vérifier

$$\sum_{k=1}^{N-1}\widehat{\boldsymbol{\ell}}_k(z)\boldsymbol{e}_k^t = \widehat{L}_1(z)\widehat{L}_2(z)\cdots\widehat{L}_{N-1}(z) = L(z) \tag{3.49}$$

et la matrice polynomiale résultante $L(z)$ est triangulaire supérieure avec des $1$ sur la diagonale. □

Ceci conclut la preuve.

En résumé, nous avons donné une construction explicite du théorème suivant.

**Théorème 1.** ***Toute matrice polynomiale*** $H(z)$ $p \times q$ ***admet une décomposition sous la forme***

$$H(z) = A(z)L(z)R(z) = U(z)R(z) \tag{3.50}$$

***où*** $A(z)$ ***est un produit de matrices polynomiales*** $J$***-orthogonales,*** $L(z)$ ***est une matrice polynomiale triangulaire inférieure avec des*** $1$ ***sur la diagonale et*** $R(z)$ ***est une matrice triangulaire supérieure. La matrice*** $U(z) = A(z)L(z)$ ***est unimodulaire. De plus, le*** $k^{ème}$ ***élément diagonal de*** $R(z)$ ***est égal au*** $pgdc$ ***des derniers*** $p - k + 1$ ***polynômes dans la colonne*** $k$.

L'application de la même décomposition à $R(z)^T$, à savoir $R(z)^T = V(z)D(z)$, fournit une factorisation de $H(z)$ sous la forme $H(z) = U(z)D(z)V(z)^T$ où $V(z)$ et $U(z)$ sont deux matrices unimodulaires et $D(z)$ est une matrice polynomiale diagonale.

## 3.5 Discussions

L'algorithme de décomposition en (3.50) réalise une décomposition exacte sans aucune approximation. Le nombre d'étapes est exactement $p-1$ et est connu de manière précise. La $k^{\text{ème}}$ étape est constitué en des résolutions successives de $n_k$ équations de Bezout et une multiplication par une matrice de la forme $L_k(z)$. Dans le meilleur des cas on aura $n_k = 1$ où $h_{k,k}(z)$ et $h_{k,k+1}(z)$ sont premiers entre eux. Alors que dans le pire cas, $n_k = p-k-1$, correspond à la configuration où tous les polynômes $h_{k,j}(z), j = k, \cdots, p$ partagent des zéros communs ; dans ce cas, $L_k(z) = I$. En plus, il n'est pas nécessaire de modéliser la matrice d'entrée avec des polynômes de Laurent [125].

Nous pouvons vérifier par un contrôle direct que, la première entrée de $D(z)$ correspond au $pgdc$ de tous les polynômes qui se trouvent dans la première ligne et la première colonne de $H(z)$. Ceci montre que la probabilité que les éléments diagonaux de $D(z)$ soient égaux à l'unité $(1)$ est élevée, sauf pour le dernier.

Comme $D(z)$ est parfaitement diagonale, contrairement à la décomposition QR-PMSVD, la méthode LU-PMD proposée permet d'annuler complètement les CCI, dans une application potentielle aux systèmes MIMO. Notons cependant que les matrices facteur $V(z)$ et $U(z)$ de cette méthode ne sont pas para-unitaires. Par conséquent, les filtres correspondants peuvent amplifier l'effet néfaste de la composante du bruit en cas de filtrage dans une chaine de transmission.

## 3.6 Résultat Simulations

Dans cette section quelques résultats numériques concernant les performances de l'algorithme LU-PMD, implémenté sur "Scilab", sont présentés. Pour ce faire, nous avons appliqué la décomposition sur des matrices d'entrée $3 \times 3$ (figure 3.1) et $4 \times 4$ (figure 3.1). Ces matrices sont générées de la même façon qu'en section 2.7. Nous analysons la structure de la matrice diagonale $D(z)$ obtenue avec cette méthode. Les représentations graphiques en espace-temps de la matrice $D(z)$ dans un cas $3 \times 3$ et $4 \times 4$ sont présentées respectivement sur les figures 3.2 et 3.4. Nous avons utilisé des diagrammes à bâtons pour illustrer les amplitudes des coefficients de chacun des éléments polynomiaux de la matrice. La position de chaque bloc de diagramme sur la figure correspond à la position de l'élément polynomial dans la matrice.

Comme prévu, les figures 3.2 et 3.4 montrent que tous les éléments diagonaux de $D(z)$ sont égaux à $1$, sauf le dernier. Les éléments hors diagonaux sont tous exactement égaux à zéro : donc $D(z)$ est parfaitement diagonale, contrairement aux autres méthodes [111], [126].

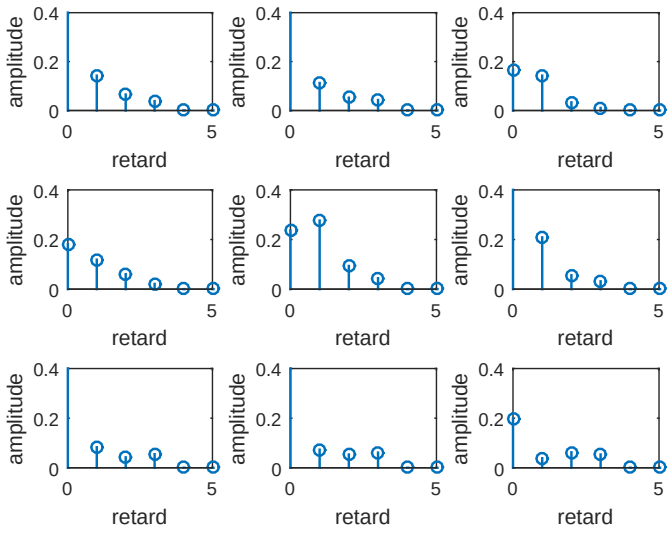



FIGURE 3.1 : Représentation espace-temps des coefficients de la matrice d'entrée $H(z)$ $(3 \times 3)$

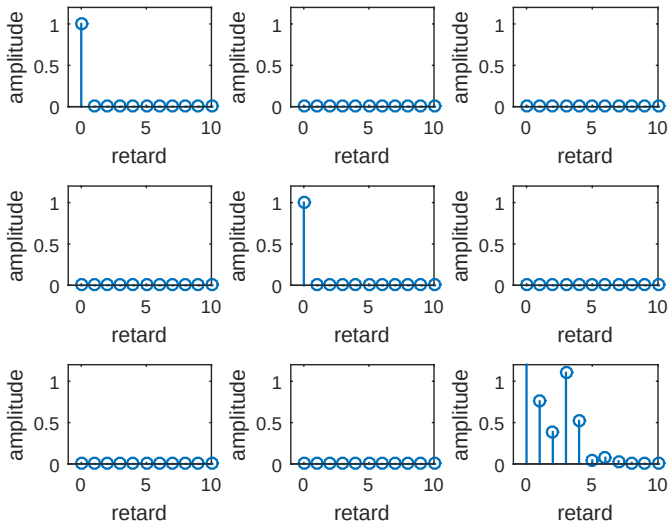



FIGURE 3.2 : Représentation espace-temps des coefficients de la matrice diagonalisée $D(z)$ $(3 \times 3)$ avec LU-PMD.

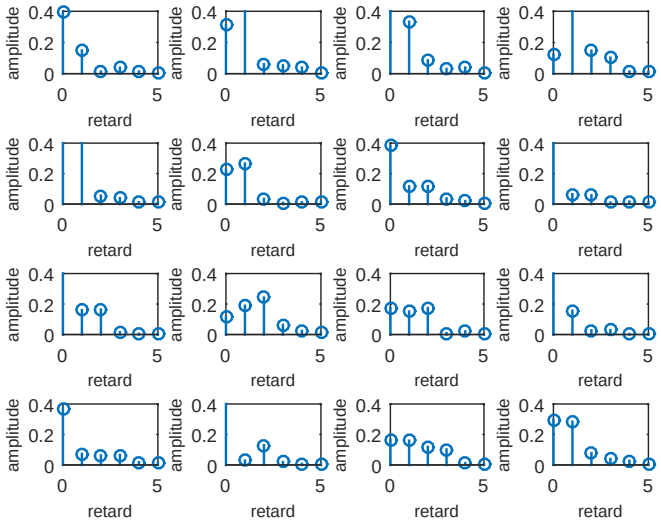



FIGURE 3.3 : Représentation espace-temps des coefficients de la matrice d'entrée $H(z)$ $(4 \times 4)$.

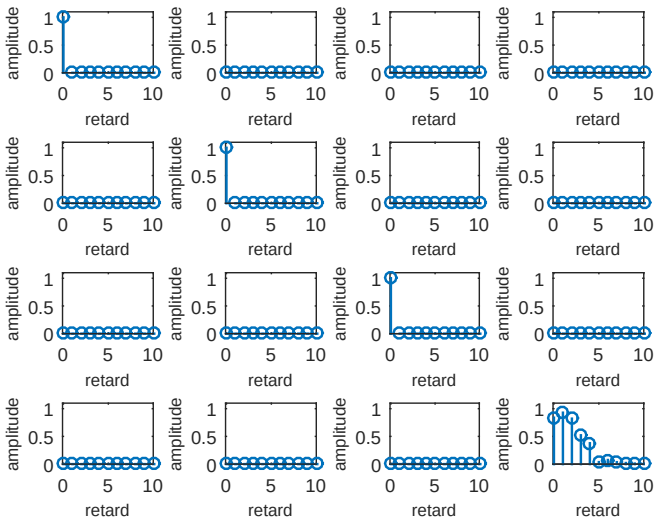



FIGURE 3.4 : Représentation espace-temps des coefficients de la matrice $D(z)$ $(4 \times 4)$ obtenue par la décomposition LU-PMD.

## 3.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une décomposition de matrice polynomiale unimodulaire comme alternative aux limites des autres méthodes présentées dans le chapitre 2. Le facteur unimodulaire résultant de cette méthode est le produit de matrices $J$-orthogonales élémentaires et d'une matrice triangulaire inférieure avec des $1$ sur sa diagonale. Ceci conduit à une décomposition de matrice polynomiale LU orthogonale, qui est une combinaison de deux méthodes classiques de factorisation matricielle : la forme canonique de Smith et l'élimination LU de Gauss. L'inversion du facteur unimodulaire est immédiate et peut être réalisée avec la complexité $\mathcal{O}(1)$. Cette décomposition existe dans n'importe quel anneau de Bezout [122] et fournit une matrice parfaitement diagonale .

Toutes ces caractéristiques sont très intéressantes dans une application aux communications MIMO, dans la mesure où la diagonalisation complète correspond à une transformation du canal MIMO en des sous canaux SISO sans interférence co-canal (CCI). En plus, il y'a une forte probabilité que chacun des canaux SISO résultants, sauf le dernier canal, puisse se réduire à un simple canal à bruit additif, sans interférence inter-symbole (ISI). Dans ce cas, la complexité des égaliseurs serait fortement réduite. En outre, il n'est

pas nécessaire de modéliser le canal MIMO comme une matrice de polynômes de Laurent comme cela se fait d'habitude, en introduisant des retards uniquement pour des raisons techniques.

Cependant, les facteurs $U(z)$ et $V(z)$ résultant de la décomposition ne sont pas para-unitaires contrairement à la méthode QR-PMSVD. En les utilisant comme pré et post-filtre dans un système MIMO, il pourrait en résulter une amplification du bruit. L'impact de cette amplification sera étudié dans le chapitre suivant.

# Chapitre 4

# Multiplexage Spatial (MS) avec LU-PMD

## Sommaire


**4.1 Introduction . . . . . 102**

**4.2 Décomposition parallèle du canal MIMO large-bande . . . . . 103**

**4.3 Multiplexage Spatial (MS) avec LU-PMD . . . . . 104**

4.3.1 Principe général du MS en MIMO large-bande . . . . . 104

4.3.2 Schéma de multiplexage avec LU-PMD . . . . . 107

4.3.3 Schéma de multiplexage avec QR-PMSVD . . . . . 108

**4.4 Étude des capacités (Sum-rate capacity) . . . . . 109**

4.4.1 Calcul de capacité avec la décomposition LU-PMD . . . . . 109

4.4.2 Calcul de capacité avec la décomposition QR-PMSVD . . . . . 110

**4.5 Résultats de simulation . . . . . 111**

4.5.1 Comparaisons des taux de capacité (“Sum-rate capacity”) . . . 111

4.5.2 Comparaison de complexité . . . . . 114

**4.6 Conclusion . . . . . 114**

## 4.1 Introduction

Les systèmes MIMO améliorent significativement le débit, la fiabilité et la robustesse [127] des systèmes de communications sans fil. Pour ce faire, diverses techniques ont été suggérées, telles que le schéma de multiplexage spatial, le schéma de diversité spatiale et la formation de faisceau [128]. Pour une amélioration significative du débit et une meilleure exploitation de la capacité du canal, le multiplexage spatial est très efficace.

Le multiplexage spatial (SM) exploite les trajets multiples du canal MIMO en transmettant plusieurs flux de données simultanément sur la même bande de fréquences. En d'autres termes il permet de transmettre une meilleure efficacité spectrale. Pour séparer les différents flux de données en réception, les schémas proposés créent des sous-canaux parallèles sur lesquels des flux de données distincts sont transmis indépendamment. Cette méthode est connue sous le nom de "eigenmode beamforming". Elle consiste à placer un filtre pré-codeur et post-codeur respectivement en émission et en réception pour transformer le canal MIMO en plusieurs sous-canaux totalement indépendants. Les fonctions de transferts de ces deux filtres qui réalisent cette tache sont obtenus avec la décomposition en valeurs singulières (SVD) du canal MIMO.

Cette diagonalisation par SVD suppose un modèle de canal MIMO à bande étroite dont le canal MIMO est représenté par une matrice. Cependant dans un environnement plus réaliste, les signaux subissent plusieurs échos à cause du caractère multi-trajets du milieu de transmission. Ils arrivent donc sur les différentes antennes avec des répliques retardées. Dans ce cas, le canal MIMO large bande est souvent représenté par une matrice polynomiale qui est une modélisation espace-temps.

La réalisation du multiplexage spatial dans ce modèle de système MIMO a connu plusieurs approches. Certaines techniques traditionnelles vont dans le sens d'éliminer la nature polynomiale du canal correspondant en raison de sa nature dispersive dans le temps. Elles sont toutes conçues pour convertir le problème de large bande en problèmes à bande étroite.

D'autres approches diagonalisent la matrice polynomiale directement avec des algorithmes de décomposition de matrices polynomiale souvent approximatifs. Ces stratégies exécutent la PSVD dans le domaine $z$ en utilisant les algorithmes de décomposition polynomiale dont l'avantage réside dans sa capacité naturelle à préserver et exploiter la cohérence des signaux. L'inconvénient de cette approche réside dans le fait que ces algorithmes sont souvent approximatifs et itératifs avec une complexité de calcul très élevé.

Nous avons présenté dans le chapitre 3 l'algorithme LU-PMD capable de réaliser une parfaite diagonalisation de matrice polynomiale avec une complexité réduite. Dans ce chapitre nous allons l'appliquer dans un schéma de multiplexage spatial d'un système MIMO large bande. Une étude sur la capacité du canal MIMO et la complexité de mise en place sont ensuite étudiées en comparaison avec la méthode basée sur l'algorithme QR-PMSVD.

L'hypothèse principale pour l'implémentation est que, la chaîne de transmission maintient son état lors de la transmission de chaque bloc de données [129]. Nous considérons un système de multiplexage spatial boucle-fermée (Closed-Loop MIMO). L'émetteur est supposé avoir une connaissance parfaite de l'état du canal (CSI). Le canal est parfaitement estimé par le récepteur, puis renvoyé à l'émetteur par voie de retour "feedback" [130].

## 4.2 Décomposition parallèle du canal MIMO large-bande

Considérons un canal MIMO large bande sélectif en fréquence avec $N_t$ antennes d'émission et $N_r$ antennes de réception. La fonction de transfert (transformée en $z$) de la réponse impulsionnelle du canal MIMO est une matrice polynômiale $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} H_k z^{-k}, \tag{4.1}$$

où chaque $H_k$ est une matrice complexe $N_R \times N_T$ qui représente le $k^{\text{ème}}$ coefficient de la réponse impulsionnelle du canal MIMO. $L$ est le degré formel de la matrice polynômiale qui correspond à la durée de la réponse impulsionnelle. $L-1$ représente le nombre d'échos maximal provoqué par le milieu de transmission multi-trajets. La matrice polynomiale du canal MIMO $H(z)$ peut être également exprimée comme suit :

$$H(z) = \begin{bmatrix} h_{1,1}(z) & h_{1,2}(z) & \cdots & h_{1,N_T}(z) \\ h_{2,1}(z) & h_{2,2}(z) & \cdots & h_{2,N_T}(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{N_R,1}(z) & h_{N_R,2}(z) & \cdots & h_{N_R,N_T}(z) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

où chaque $h_{i,j}(z)$ représente la transformée en $z$ de la réponse implusionnelle du sous-canal correspondant à l'antenne d'émission $i$ et l'antenne de réception $j$. C'est un élément polynômial dont le degré ne dépasse pas $L$.

Le signal enregistré sur chaque antenne de réception est la superposition des signaux provenant des différentes antennes d'émission provoquant ainsi de l'interférence co-canal (CCI).

Pour éliminer ces interférences, la parallélisation du canal MIMO en plusieurs canaux SISO totalement indépendants est l'une des techniques les plus efficaces. Cela se fait par une factorisation de la matrice polynomiale du canal sous forme :

$$H(z) = U(z)D(z)V(z), \tag{4.3}$$

où les facteurs $V(z)$, $D(z)$ et $U(z)$ sont aussi des matrices polynomiales. On suppose que les facteurs $U(z)$ et $V(z)$ sont inversibles. Notons par $U_{po}(z) = U(z)^{-1}$ et $V_{pr}(z) = V(z)^{-1}$. Les filtres correspondants sont être utilisés comme post-codeur et pré-codeur dans la chaine de transmission MIMO (voir figure 4.1). Dans ce cas le canal MIMO corrélé $H(z)$ devient équivalent à un ensemble de sous-canaux parallèles totalement dé-corrélés dont les réponse impulsionnelle sont les éléments de la matrice diagonale $D(z)$.
La diffculté réside dans le fait de trouver un algorithme de décomposition polynomiale capable de réaliser une diagonalisation complète de la matrice du canal. En effet, les algorithmes de décomposition de matrice polynomiale sont souvent approximatifs et ne permettent pas une digonalisation exacte d'où la présences d'éléments hors diagonaux qui causant des interférences co-canal entre les différents flux de données parallèles [131].

## 4.3 Multiplexage Spatial (MS) avec LU-PMD

### 4.3.1 Principe général du MS en MIMO large-bande

Considérons un système de communication MIMO avec $N_r \geq N_t$ [1]. Soit $H(z) \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ un canal MIMO large bande avec $U_{po}(z)$ et $V_{pr}(z)$ respectivement des filtres pré-codeur et post-codeur. Le processus de communication dans un contexte de multiplexage spatial se déroule comme suit.

- Notons par $x_i(z)$, $i \in \{1, \cdots, N_t\}$, le polynôme qui représente la transformée en $z$ du symbole temporel sur la $i^{\text{ième}}$ antenne d'émission comme illustré sur la figure 4.1.
- L'ensemble des symboles sur les $N_t$ antennes, $\boldsymbol{x}(z) = [x_1(z) \ \cdots \ x_{N_T}(z)]^T$, après pré-codage avec le filtre d'émission donne $\widehat{\boldsymbol{x}}(z) = [\widehat{x}_1(z) \ \cdots \ \widehat{x}_{N_T}(z)]^T = V_{pr}(z)\boldsymbol{x}(z)$.

1. En multiplexage spatial, le nombre d'antennes de réception doit être égal ou supérieur au nombre d'antennes d'émission [8].

— Du côté du récepteur, le signal reçu correspondant $\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = [\widehat{y}_1(z) \ \cdots \ \widehat{y}_{N_T}(z)]^T$, après post-codage avec le filtre de réception peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{y}}(z) &= U_{po}(z)H(z)\widehat{\boldsymbol{x}}(z) + U_{po}(z)\boldsymbol{n}(z) \\ &= U_{po}(z)U(z)D(z)V(z)V_{pr}(z)\boldsymbol{x}(z) + U_{po}(z)\boldsymbol{n}(z) \\ &= D(z)\boldsymbol{x}(z) + U_{po}(z)\boldsymbol{n}(z)\end{aligned} \tag{4.4}$$

où $\boldsymbol{n}(z)$ est la transformée en $z$ de l'échantillon du bruit additif que l'on suppose tel que $\mathbb{E}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^\dagger) = \sigma_n^2 I_{N_r}$. Aussi $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ est le signal reçu et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$ le vecteur du signal transmis.
Soit $\sigma_x^2$ la variance des symboles $\boldsymbol{x}$ transmis, la puissance totale rayonnée par le système vaut $N_t\sigma_x^2$. Nous considérons une transmission à gain égal sur toutes les antennes d'émission. Les symboles sont indépendants avec une covariance $\mathbb{E}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\dagger) = \sigma_x^2 I_{N_t}$.

Idéalement la matrice diagonale $D(z)$ a la forme suivante :

$$D(z) = \begin{bmatrix} d_{1,1}(z) & & \\ & \ddots & \\ & & d_{N_t,N_t}(z) \\ \hdashline & \mathbf{0}_{N_r-N_t,N_t} & \end{bmatrix}$$

et dans ce cas, l'équation (4.4) donne

$$\widehat{y}_i(z) = d_{i,i}(z)x_i(z) + \widehat{n}_i(z), \quad i = 1, \cdots, N_t \tag{4.5}$$

avec $\widehat{\boldsymbol{n}}(z) = [\widehat{n}_1(z) \ \cdots \ \widehat{n}_{N_r}(z)]^T = U_{po}(z)\boldsymbol{n}(z)$. Le canal MIMO est dans ce cas équivalent à $N_t$ canaux SISO parallèles, totalement indépendants (figure 4.2).
Si le nombre d'antennes de réception est strictement supérieur au nombre d'antennes d'émission ($N_r > N_t$), alors on aura que du bruit sur les $N_r - N_t$ canaux restants $\widehat{y}_i(z) = \widehat{n}_i(z)$ pour $i = N_t + 1, \cdots, N_r$.

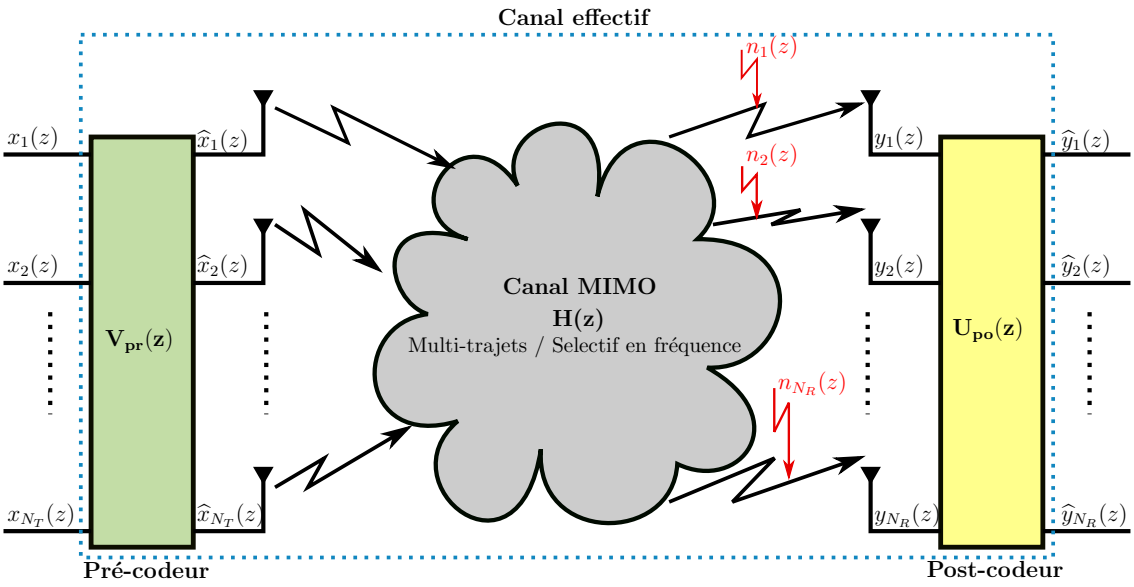



FIGURE 4.1 : Illustration du pré-codage et post-codage d'un système MIMO

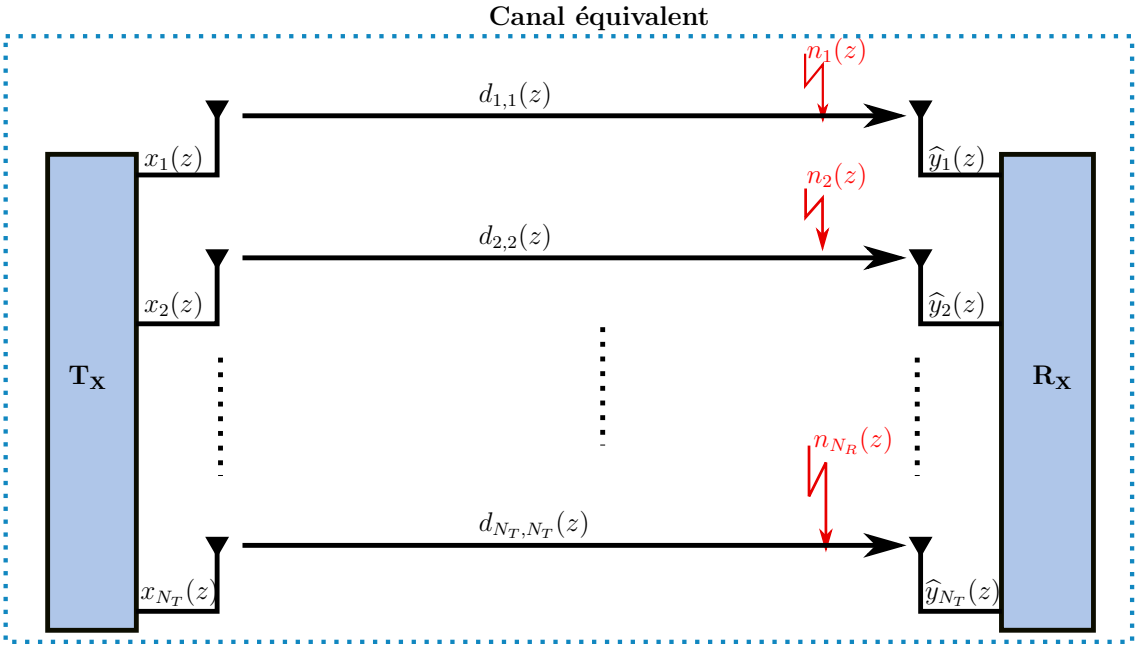



FIGURE 4.2 : Illustration du canal équivalent composé de $N_t$ canaux SISO parallèles

Cette transformation du canal MIMO $H(z)$ en plusieurs sous-canaux SISO permet de mettre en place un schéma de multiplexage spatial V-BLAST. Nous l'appelons "Time

Domaine Spatial Multiplexing (TDSM)" puisqu'il s'opère directement sur la représentation espace-temps du canal MIMO.

### 4.3.2 Schéma de multiplexage avec LU-PMD

Dans cette section nous mettons en place un schéma de multiplexage spatial en MIMO large bande. Nous utilisons l'algorithme LU-PMD, proposé en chapitre 3, pour décomposer matrice du canal $H(z)$ en (4.3). Dans ce cas les facteurs $V(z)$ et $U(z)$ sont unimodulaires. Les filtres de pré-codage $V_{pr}(z)$ et post-codage $U_{po}(z)$ du schéma de multiplexage sont obtenus respectivement par inversion des matrices facteurs $V(z)$ et $U(z)$. Puisque avec LU-PMD la diagonalisation est complète sans erreur de décomposition, alors le canal MIMO $H(z)$ se réduit en $N_t$ sous canaux SISO totalement indépendants sans CCI. En outre tous les éléments de la matrice diagonale $D(z)$ sont fort probablement égaux à $1$ sauf le dernier qui est polynomial. Nous pouvons affirmer cela grâce à la remarque ci dessous.

**Remarque 1.** ***À partir du dernier énoncé du théorème*** $1$ ***du chapitre 3,*** $(D(z))_{1,1}$ ***est formé par les zéros communs de :***

1. ***tous les sous-canaux***[2] ***issus de la première antenne d'émission***

   ***et de***

2. ***tous les sous-canaux aboutissant à la première antenne de réception.***

***Il en résulte que*** $(D(z))_{1,1} = 1$***, à moins d'avoir affaire à des canaux MIMO vraiment pathologiques. De même, pour*** $k = 2, \cdots, N_r - 1$, $(D(z))_{k,k} = 1$***, sauf si les réponses impulsionnelles des sous-canaux de l'antenne d'émission*** $k$ ***jusqu'aux dernières antennes de réception*** $N_r - k + 1$ ***et celles des sous-canaux des dernières antennes d'émission*** $N_t - k + 1$ ***à l'antenne de réception*** $k$ ***partagent tous des zéros communs. Il est donc réaliste de considérer que tous les canaux SISO équivalents se réduisent à des canaux à bruit additif, sauf le dernier qui, pour*** $N_r = N_t$***, correspond au déterminant de la matrice du canal MIMO*** $([D(z)]_{N_r,N_r} = \det H(z))$.

Cette méthode de décomposition LU-PMD, comme nous l'avions montré, effectue une diagonalisation parfaite et n'engendre aucune CCI. L'équation (4.4) peut dans ce cas s'écrire comme suit :

$$\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = D(z)\boldsymbol{x}(z) + U(z)^{-1}\boldsymbol{n}(z) \tag{4.6}$$

2. Ces sous-canaux correspondent à des polynômes obtenus par transformée en $z$ de leur fonction de transfert.

Cependant ses facteurs de décomposition ne sont pas para-unitaires mais plutôt unimodulaires. À cet effet nous pouvons émettre la remarque suivante.

**Remarque 2.** ***Les matrices*** $V(z)$ ***et*** $U(z)$ ***de la décomposition LU-PMD ne sont pas para-unitaires, donc la composante bruit dans (4.6) sera amplifiée. En effet, en supposant un bruit blanc unitaire spatio-temporel*** $n$***, la puissance du bruit à la sortie du filtre de post-codage donne***

$$\mathbb{E}(\|\widehat{\boldsymbol{n}}\|^2) = \|U(z)^{-1}\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Tr\left[U^{\dagger}(e^{j\omega})U(e^{-j\omega})\right]^{-1} d\omega.$$

***Le bruit est amplifié lorsque cette valeur est supérieure à*** $1$***. L'impact de cette amplification, dans un système MIMO, sera abordé ultérieurement.***

La présentation des performances en terme de taux de capacité ("sum-rate capacity") de notre schéma de multiplexage spatial est faite en comparaison avec celui basé sur l'algorithme QR-PMSVD. Le choix de QR-PMSVD est justifié par le fait que parmi les méthodes de décomposition présentées en chapitre 2, elle est la mieux adaptée pour un schéma de multiplexage spatial en MIMO. Les ordres des matrices polynomiales de Laurent résultantes sont plus petits que ceux obtenus avec l'approche via avec SBR2. De même l'amplitude des coefficients hors diagonaux est contrôlable [112]. Ce dernier point est très important dans la mise en place d'un schéma de multiplexage spatial puisqu'il permet de contrôler les CCI du système MIMO.

### 4.3.3 Schéma de multiplexage avec QR-PMSVD

La décomposition de la matrice du canal $H(z)$ avec QR-PMSVD en (4.3) se fait avec des facteurs $V(z)$ et $U(z)$ para-unitaires. Ainsi pour mettre en place le multiplexage spatial, on utilise un filtre pré-codeur $V_{pr}(z) = \widetilde{V}(z)$ et un filtre postcodeur $U_{po}(z) = \widetilde{U}(z)$ respectivement en émission et en réception. $\widetilde{U}(z)$ et $\widetilde{V}(z)$ sont des matrices para-unitaires telles que $\widetilde{U}(z)U(z) = U(z)\widetilde{U}(z) = I_{N_r}$.

Notez que $\widetilde{U}(z)$ et $\widetilde{V}(z)$ transforment le canal MIMO sélectif en fréquence en un certain nombre de canaux SISO sélectifs en fréquence tout en préservant l'énergie totale du signal [105]. Dans ce cas le signal reçu s'écrit

$$\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = D(z)\boldsymbol{x}(z) + \widetilde{U}(z)\boldsymbol{n}(z). \tag{4.7}$$

La décomposition QR-PMSVD s'opère par itération pour affaiblir les coefficients hors diagonaux, jusqu'à ce qu'il soit tous inférieurs à un paramètre de tolérance $\varepsilon$ prédéfini,

appelé erreur de décomposition. Cette présence d'éléments hors diagonaux, non nuls, engendre des interférences (CCI) entre les flux de données des différents sous-canaux. La réduction du paramètre de tolérance $\varepsilon$ permet de rendre ces CCI résiduelles insignifiantes. Cependant cela augmente aussi le nombre d'itérations et en même temps les ordres des matrices polynomiales $U(z)$, $V(z)$ et $D(z)$ vont croître de manière drastique. Les effets combinés de $\varepsilon$ et du nombre d'itérations sur l'ordre de $D(z)$ ont été étudié dans le chapitre 2 en section 2.7. Pour éviter cela une étape de troncature avec un paramètre $\mu$ a été introduite afin de limiter cette croissance.

Malgré cette étape de troncature, les ordres des trois facteurs polynomiaux de Laurent seront toujours élevés car le paramètre $\mu$ doit être choisi petit pour éviter de perdre la propriété de para-unitarité, primordiale, pour les matrices $U(z)$ et $V(z)$. Ainsi la matrice polynomiale $D(z)$ est donc approximativement diagonale et l'équation (4.4) devient,

$$\widehat{y}_i(z) = d_{i,i}(z)x_i(z) + \sum_{j=1,j\neq i}^{N_t} d_{i,j}(z)x_j(z) + \widehat{n}_i(z), \tag{4.8}$$

où les CCI, représentées par le terme $\sum_{j=1,i\neq j}^{N_t} d_{i,j}(z)x_j(z)$, ne sont pas complètement éliminées.

## 4.4 Étude des capacités (Sum-rate capacity)

Les premières contributions sur la capacité d'un canal MIMO remontent aux travaux de E. Telatar qui propose une formulation de la capacité ergodique d'un canal MIMO à évanouissements de Reyleigh plat en fréquence et variant rapidement dans le temps. Il a étudié également la capacité de coupure des canaux multi-antennes quasi-statiques. Ces travaux sont ensuite complétés par ceux de G. J. Foschini et al [37, 49]. Dans cette section nous allons étendre la formulation de la capacité du canal dans les deux schémas de multiplexage spatial large-bande (TDSM) précedement décrits. Pour cela nous considérons notre méthode de décomposition LU-PMD et celle de QR-PMD. La méthode d'allocation de ressource considérée ici est la transmision à gain égal (Equal-gain) [132] sur toutes les antennes d'émission.

### 4.4.1 Calcul de capacité avec la décomposition LU-PMD

La mise en place du schéma de multiplexage spatial avec la méthode LU-PMD proposée en section 4.3.2 permet d'annuler complètement les CCI ($D(z)$ est parfaitement diago-

nale). Cependant comme nous l'avons montrée dans la remarque 2, $U^{-1}(z)$ n'est pas para-unitaire et va certainement influencer les propriétés du bruit filtré. À cet effet, le calcul de la capacité à partir de l'équation (4.5), dans un contexte de transmission MIMO à gain égal sur les différentes antennes d'émission donne [133, 134]

$$C_{LU-PMD} = \sum_{k=1}^{N_t} \int_0^{2\pi} \log_2 \left| 1 + \frac{\sigma_x^2 D_{k,k}(e^{\jmath\omega}) D_{k,k}^*(e^{\jmath\omega})}{\sigma_n^2 [U^{-1}]_k(e^{\jmath\omega})[U^{-1}]_k^*(e^{\jmath\omega})} \right| d\omega, \tag{4.9}$$

où les $D_{k,k}(\cdot)$ sont les éléments diagonaux de la $k^{\text{ème}}$ entrée de $D(\cdot)$ et $[U]_k$ désigne la $k^{\text{ème}}$ ligne de $U$.

### 4.4.2 Calcul de capacité avec la décomposition QR-PMSVD

La matrice diagonalisée avec l'approche QR-PMSVD présente des éléments hors diagonaux pas complètement nuls. Ainsi les CCI représentées par le terme $\sum_{j=1,i\neq j}^{N_t} d_{i,j}(z)x_j(z)$ ne sont pas pas complètement éliminées. Dans le calcul de capacité, les erreurs de décomposition doivent être prises en compte [135, 136]. En d'autres termes nous devons tenir compte du rapport signal sur interférences plus bruit Signal Interference to Noise Ration (SINR) [137]. On peut dans ce cas considérer que la matrice diagonalisée $D(z)$, est formée d'une matrice parfaitement diagonale $\Delta(z)$ et d'une matrice d'erreur $D_e(z)$ et s'écrit,

$$D(z) = \Delta(z) + D_e(z). \tag{4.10}$$

En tronquant les matrices polynomiales, pour limiter leur ordre, la propriété de para-unitarité peut être perdue. Ce qui fait que nous pouvont écrire que :

$$\widetilde{U}(z)U(z) = I_{N_r} + U_e(z) \quad \widetilde{V}(z)V(z) = I_{N_t} + V_e(z) \tag{4.11}$$

Des relations (4.10) et (4.11), nous pouvons déduire la relation suivante :

$$\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = \underbrace{\widetilde{U}(z)U(z)}_{I_{N_r}+U_e} \underbrace{D(z)}_{\Delta+D_e} \underbrace{V(z)\widetilde{V}(z)}_{I_{N_t}+V_e} \boldsymbol{x}(z) + \underbrace{\widetilde{U}(z)\boldsymbol{n}(z)}_{\boldsymbol{w}(z)}. \tag{4.12}$$

Si nous notons par $C(z)$, la matrice qui symbolise l'ensemble des d'interférences (ICC), alors l'équation (4.12) peut être réécrite comme suit :

$$\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = \Delta(z)\boldsymbol{x}(z) + C(z)\boldsymbol{x}(z) + \boldsymbol{w}(z). \tag{4.13}$$

Puisque $\Delta(z)$ est parfaitement diagonale, la capacité peut être calculée par

$$C_{QR-PMSVD} = \sum_{k=1}^{N_t} \int_0^{2\pi} \log_2 \left| 1 + \frac{\sigma_x^2 \Delta_{k,k}(e^{\jmath\omega}) \Delta_{k,k}^*(e^{\jmath\omega})}{\sigma_x^2 \Phi(e^{\jmath\omega}) + \sigma_n^2 [U]_k^*(e^{\jmath\omega}) [U]_k(e^{\jmath\omega})} \right| d\omega. \tag{4.14}$$

où $\Phi(e^{\jmath\omega}) = [C]_k^*(e^{\jmath\omega})[C]_k(e^{\jmath\omega})$, et la notation $[A]_k$ représente la $k^{\text{ième}}$ ligne de $A$.

## 4.5 Résultats de simulation

Pour les simulations numériques, nous considérons un système MIMO avec $N_t$ antennes d'émission et $N_r$ antennes de réception. Le canal $H(z)$ est modélisé comme suit :

$$H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} H_l e^{-\alpha l} z^{-l}$$

comme en (2.41). Les matrices polynômiales des canaux du système MIMO ont été choisis pour avoir des polynômes de coefficients avec des enveloppes décroissantes exponentiellement [138, 139] comme utilisé dans [90].

### 4.5.1 Comparaisons des taux de capacité (“Sum-rate capacity”)

Dans cette section nous présentons les courbes de capacité de canal MIMO obtenues avec chacun des deux schéma de multiplexage, l'un basé sur la décomposition LU-PMD et l'autre basé sur décomposition QR-PMSVD. Une comparaison est donc faite pour plusieurs valeurs de rapport signal à bruit (SNR), en considérant une configuration MIMO $2 \times 2$ et MIMO $3 \times 3$. Le canal MIMO adopté ici a subi $6$ échos donc sa longueur $L = 7$. Puisque la qualité de décomposition de QR-PMSVD dépend de la valeur du paramètre d'arrêt, les simulations ont été faites pour différentes valeurs de $\varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$). L'objectif est d'observer, en même temps, l'impact de la présence d'éléments hors diagonaux non nuls sur la capacité du système MIMO. Un paramètre de troncature optimal a aussi été choisi ($\mu = 10^{-6}$) pour ne pas altérer la propriété de para-unitarité de ses filtres.

Le calcul de capacité a effectué avec les formules des équations (4.9) et (4.14) pour différentes valeur de SNR. Les résultats obtenus pour des système MIMO ($2 \times 2$) et MIMO ($3 \times 3$) sont présentés respectivement au niveau des figures 4.3 et 4.4.

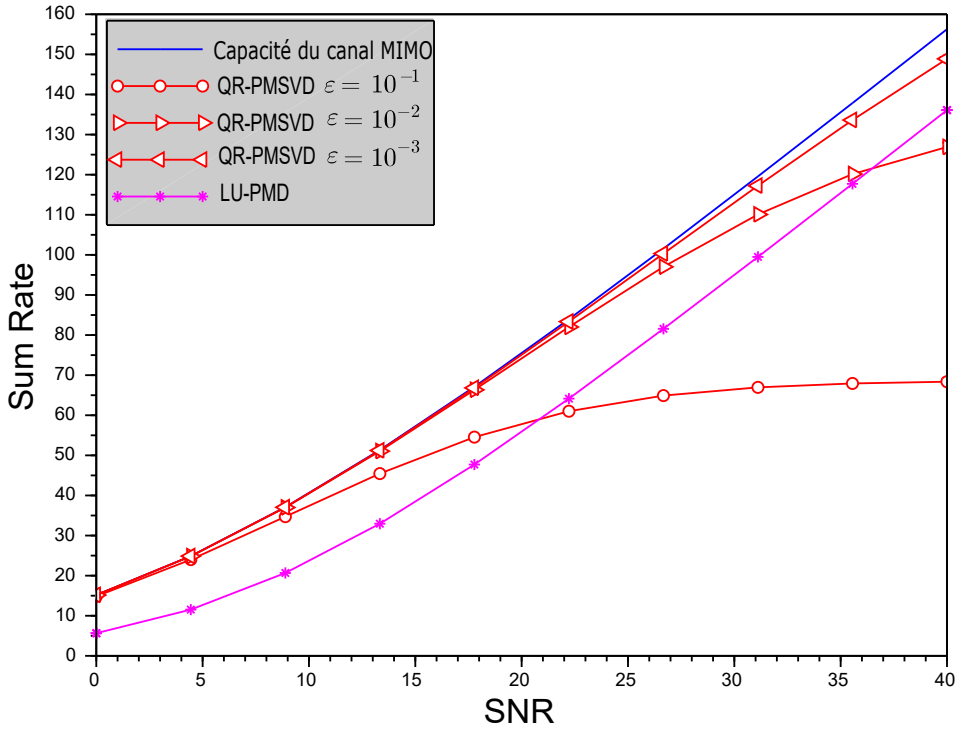



FIGURE 4.3 : Capacité moyennée sur plusieurs réalisations de canaux MIMO $2 \times 2$ pour la décomposition LU-PMD et QR-PMSVD. $L = 7$, $\mu = 10^{-6}$ pour différentes valeur de $\varepsilon$

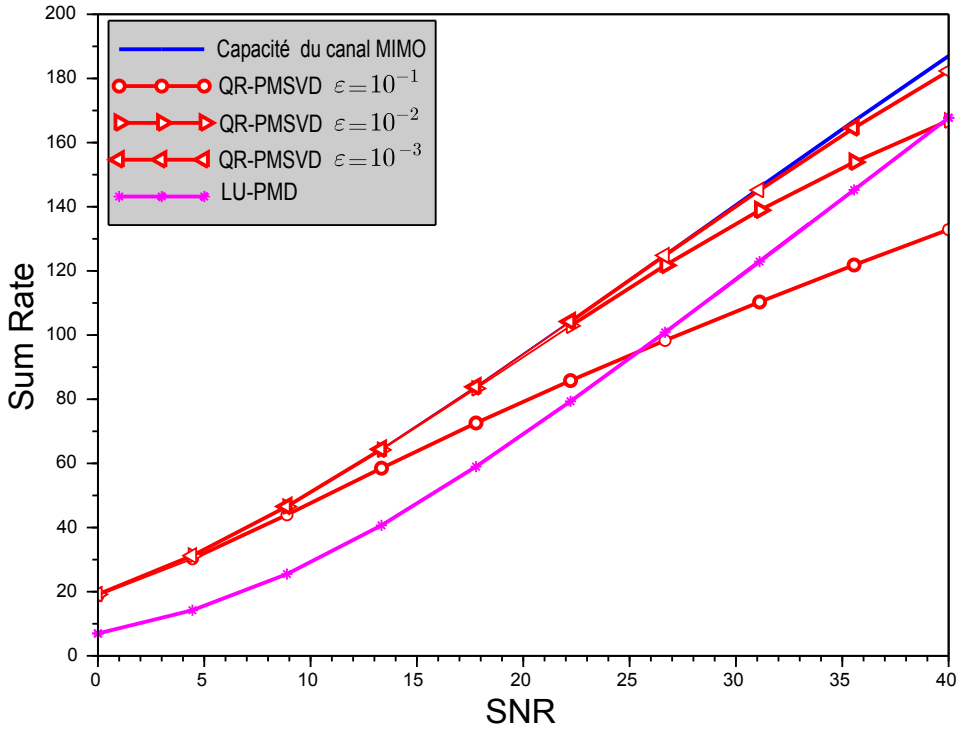



FIGURE 4.4 : Capacité moyennée sur plusieurs réalisations de canaux MIMO $3 \times 3$ avec la décomposition LU-PMD et QR-PMSVD. $L = 7$, $\mu = 10^{-6}$ pour différentes valeurs $\varepsilon$

L'observation des courbes montre que premièrement, la capacité obtenue par le TDSM avec LU-PMD ne peut pas atteindre la capacité réelle du canal MIMO. Cela est dû au fait que le filtre post-codeur ($U^{-1}(z)$) n'est pas para-unitaire. Il y a donc amplification la composante du bruit comme nous l'avions énoncé (voir remarque 2 du chapitre 3).

Deuxièmement, avec le TDSM à base de QR-PMSVD, le "sum rate" est presque égal à la capacité théorique du canal MIMO, lorsque $\varepsilon$ est sélectionné proche de zéro (ici $\varepsilon = 10^{-3}$). Pour des valeurs de $\varepsilon$ moins faibles ( $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\varepsilon = 10^{-1}$), correspondant à une diagonalisation moins parfaite, la capacité diminue et devient même inférieure à celle du TDSM avec LU-PMD. Or nous savons que si nous voulons des filtres à réponse implusionnelle finie (RIF) réalistes, alors $\varepsilon$ doit être choisi de manière raisonnable, c'est-à-dire pas trop faible. Car comme nous l'avons montrée précédemment, cela augmente le nombre d'itérations ainsi que l'ordre des polynômes. Or cette augmentation de l'ordre des polynômes complique la tache d'égalisation. Ceci nous amène à faire une analyse de

leur complexité en observant la longueur des filtres FIR résultants de chaque approche.

### 4.5.2 Comparaison de complexité

L'amélioration de la capacité avec QR-PMSVD nécessite un choix de $\varepsilon$ très faible. Cependant cet affaiblissement de $\varepsilon$ a tendance à rendre l'ordre des polynômes démesuré et donc des FIR pas réaliste du tout. Le constat peut être fait avec le tableau 4.1 qui présente la variation de la longueur des filtres pré-codeur et post-codeur lorsque nous faisons varier le paramètre d'arrêt $\varepsilon$ ainsi que le paramètre de troncature $\mu$. La comparaison est faite avec les filtres obtenus avec la décomposition LU-PMD que nous avons proposée.

TABLE 4.1 : Longueur maximale (nombre de coefficients) des filtres RIF pré-codeur et post-codeur

| Paramètres | MIMO 2x2 | | MIMO 3x3 | |
|---|---|---|---|---|
| | Pré-codeur | Post-codeur | Pré-codeur | Post-codeur |
| LU-PMD | 11 | 6 | 28 | 12 |
| QR-PMSVD $\varepsilon = 10^{-1}$ $\mu = 10^{-3}$ | 28 | 44 | 81 | 121 |
| QR-PMSVD $\varepsilon = 10^{-1}$ $\mu = 10^{-6}$ | 28 | 44 | 81 | 121 |
| QR-PMSVD $\varepsilon = 10^{-2}$ $\mu = 10^{-3}$ | 442 | 447 | 821 | 1056 |
| QR-PMSVD $\varepsilon = 10^{-2}$ $\mu = 10^{-6}$ | 622 | 628 | 954 | 1279 |
| QR-PMSVD $\varepsilon = 10^{-3}$ $\mu = 10^{-3}$ | 746 | 835 | 1589 | 1751 |
| QR-PMSVD $\varepsilon = 10^{-3}$ $\mu = 10^{-6}$ | 1127 | 1247 | 2041 | 2164 |

Nous voyons bien que lorsque nous atteignons une qualité de diagonalisation acceptable ($\varepsilon = 10^{-3}$) avec la méthode QR-PMSVD, les ordres des matrices facteur issues de la factorisation sont, à peu prés, $100$ fois plus grands que ceux avec LU-PMD. Cela correspond à des longueurs de filtre irréalistes. La longueur de filtre la plus acceptable obtenue avec cette méthode, c'est lorsque nous prenons un $\varepsilon$ de l'ordre de $10^{-1}$. Mais nous avions vu qu'avec cette valeur, la capacité du système devient largement inférieure à celle obtenue avec l'approche LU-PMD.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en place un schéma de multiplexage spatial TDSM, basé sur la décomposition de matrice polynomiale LU-PMD, dans un système MIMO large bande. Ce schéma de multiplexage spatial est comparé, en terme de capacité de canal, à celui basé sur la décomposition QR-PMSVD.

La courbe de capacité du TDSM basé sur le LU-PMD a montré que le “sum-rate” obtenu ne peut certes pas atteindre le capacité du canal à cause de la propriété de non unitarité de son filtre post-codeur. Celui-ci a tendance à amplifier le bruit. Néanmoins, à égale complexité (même longueur de filtres), la capacité obtenue est meilleure que celle avec la décomposition SVD de matrice polynomiale à base de QR.

Pour mieux appréhender la pertinence de l’adoption de notre schéma multiplexage spatial, il serait intéressent de l’implémenter dans une chaine de transmission complète d’une technologie de communication sans fil bien connue. Une analyse de ses performances en termes de taux d’erreur binaire (BER) permettra de dégager des conclusions beaucoup plus édifiantes.

# Chapitre 5

# Analyse des performances dans un système MIMO-OFDM et MIMO-SC avec Multiplexage Spatial V-BLAST

## Sommaire


**5.1 Introduction . . . . . 118**

**5.2 Multiplexage Spatial en MIMO-OFDM . . . . . 119**

5.2.1 Principe de l'OFDM . . . . . 119

5.2.2 Multiplexage Spatial dans le domaine fréquentiel (FDSM) . . 119

5.2.3 Multiplexage Spatial dans le domaine temporel . . . . . 122

5.2.4 Comparaison des performances . . . . . 124

5.2.5 Nouveau schéma TDSM avec une antenne de redondance (ORA-SM) 128

**5.3 Multiplexage Spatial en MIMO mono-porteuse (MIMO-SC) . . . 130**

5.3.1 Principe de multiplexage spatial en MIMO-SC . . . . . 130

5.3.2 Analyse des performances . . . . . 132

**5.4 Conclusion . . . . . 134**

## 5.1 Introduction

La combinaison des technologies MIMO et du multiplexage par répartition orthogonale de fréquence (OFDM) réduit considérablement la complexité des récepteurs des systèmes de communication sans fil à large bande [140]. Ce qui fait qu'elle est maintenant adoptée dans plusieurs normes de communication sans fil, telle que la norme IEEE WLAN 802.11ac [141], la norme IEEE 802.16$e$ WiMax [142] et y compris dans la 5-ième génération de réseau de communication mobile (5G) [143].

Cette combinaison (MIMO-OFDM) est aussi d'une importance capitale dans un schéma de multiplexage spatial dans le domaine temporelle (TDSM), puisque la transformation du canal MIMO large bande donne des canaux SISO qui sont souvent dispersifs en temps. C'est-à-dire qu'elle cause de l'ISI, à cause de la nature polynomiale des éléments de la matrice diagonale, surtout avec le QR-PMSVD. Dans ce cas, l'OFDM permettrait d'améliorer les performances du système MIMO en éliminant l'ISI et réduit la complexité des égaliseurs [118].

L'OFDM permet aussi de contourner cette dispersion temporelle du canal large bande d'un système MIMO. Cette approche classique consiste à réduire le problème de large bande en une forme à bandes étroites par une application de la transformée de Fourier discrète (DFT) sur toute la longueur des données et ainsi éliminer la nature polynomiale du canal. Elle est ainsi basée sur l'exécution de plusieurs SVD dans le domaine fréquentiel sur toutes les fréquences sous-porteuses [144]. La mise en place d'un schéma de multiplexage spatial V-BLAST avec cette approche est appelé, ici, "Frequency Domaine Spatial Multiplexing (FDSM)".

Dans ce qui suit nous allons présenter le principe de ces deux approches FDSM et TDSM (avec LU-PMD et QR-PMSVD) dans un système MIMO-OFDM. Ensuite nous pourrons comparer leur performance en termes de taux d'erreur binaire en simulant une chaine de transmission complète. En outre puisque certaines technologies de communication sans fil utilisent toujours des modulations mono-porteuse, nous allons montrer que l'approche avec LU-PMD peut s'opérer aussi en MIMO-SC (Single Carrier) sans une égalisation complexe.

## 5.2 Multiplexage Spatial en MIMO-OFDM

### 5.2.1 Principe de l'OFDM

L'OFDM est une technologie largement utilisée dans les systèmes de communication pour éliminer l'effet de propagation multi-trajets par une transformation des canaux sélectifs en fréquence en canaux à évanouissement plats [145]. Les flux de données individuels sont d'abord passés à travers des modulateurs OFDM qui effectuent une IFFT sur des blocs de longueur $N_s$ suivis d'une conversion parallèle-série. Ensuite un préfixe cyclique (CP) de longueur $L_{cp}$ contenant une copie des derniers échantillons de la sortie du bloc IFFT est alors rajoutée en début de symbole [146]. Les symboles OFDM résultants de longueur $N_s + L_{cp}$ sont ensuite lancés simultanément à partir des antennes d'émission par multiplexage spatial V-BLAST.

Dans le récepteur, les signaux vont passer à travers des démodulateurs OFDM qui éliminent d'abord le ISI et effectuent ensuite une FFT sur les $N_s$ points [144]. Les sorties des démodulateurs OFDM sont finalement séparées et décodées. Le CP est essentiellement un intervalle de garde qui sert à éliminer les interférences entre les symboles et à transformer la convolution linéaire en convolution circulaire. L'OFDM est donc un compromis intéressant entre la performance en taux d'erreur binaire (BER/ISI) et l'efficacité spectral. En effet même s'il consomme une partie de la bande passante du canal avec un CP redondant, l'OFDM garantit une robustesse à travers un environnement d'évanouissement sélectif en fréquence.

### 5.2.2 Multiplexage Spatial dans le domaine fréquentiel (FDSM)

Dans un contexte MIMO-OFDM (voir chapitre 1, section 1.7.2), considérons un système de transmission avec $N_t$ antennes d'émission et $N_r$ antennes de réception. En multiplexage spatial V-BLAST, on note par $x_k = [x_{1,k}, \cdots, x_{N_t,k}]^T$ est le signal $(N_t \times 1)$ émis correspondant à la sous-porteuse $k$. Le signal $(N_r \times 1)$ reçu, noté $y_k$, est donné par :

$$y_k = H_k x_k + n, \quad k \in \{1, \cdots, N_s\} \tag{5.1}$$

où $H_k$ représente les coefficients du canal à bande de fréquence étroite $(N_r \times N_t)$ sur la sous-porteuse $k$. Le nombre total de sous-porteuses est $N_s$ et $n$ représente le bruit gaussien $(N_r \times 1)$ avec une covariance $\mathbb{E}(nn^\dagger) = \sigma_n^2 I$ et le signe $\{\}^\dagger$ représente la transposée-conjuguée.

Considérons un SVD de la matrice $H_k$ :

$$H_k = U_k D_k V_k, \tag{5.2}$$

où $D_k \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ est diagonale, $U_k \in \mathbb{C}^{N_r \times N_r}$ et $V_k \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ sont des matrices unitaires. Les signaux d'émission et de réception sont pré- et post-codés respectivement avec $\widehat{x}_k = [\widehat{x}_{1,k}, \cdots, \widehat{x}_{N_t,k}]^T = V_k^\dagger x_k$ et $\widehat{y}_k = [\widehat{y}_{1,k}, \cdots, \widehat{y}_{N_t,k}]^T = U_k^\dagger y_k$. L'équation (5.1) devient alors :

$$\begin{aligned} \widehat{y}_k &= U_k^\dagger H_k \widehat{x}_k + U_k^\dagger n = U_k^\dagger U_k D_k V_k V_k^\dagger x_k + U_k^\dagger n \\ &= D_k x_k + U_k^\dagger n. \end{aligned} \tag{5.3}$$

où $V_k^\dagger$ et $U_k^\dagger$ sont utilisés respectivement comme matrice de pré-codage et matrice de post-codage. Ce schéma de transmission est illustré à la figure 5.1 [144, 147, 148]. La composante du bruit blanc additif n'est pas amplifiée par le post-codeur car $U_k$ est unitaire. Nous savons aussi que la décomposition SVD d'une matrice de scalaires se fait sans approximation, $D_k$ est exactement diagonale, il n'y a donc pas de CCI. La matrice du canal MIMO est transformée en $\min(N_r, N_t)$ canaux SISO séparés et indépendants sur chaque sous-porteuse $k$. Il faut noter que $N_r \geqslant N_t$ puisqu'il s'agit d'un multiplexage spatial.

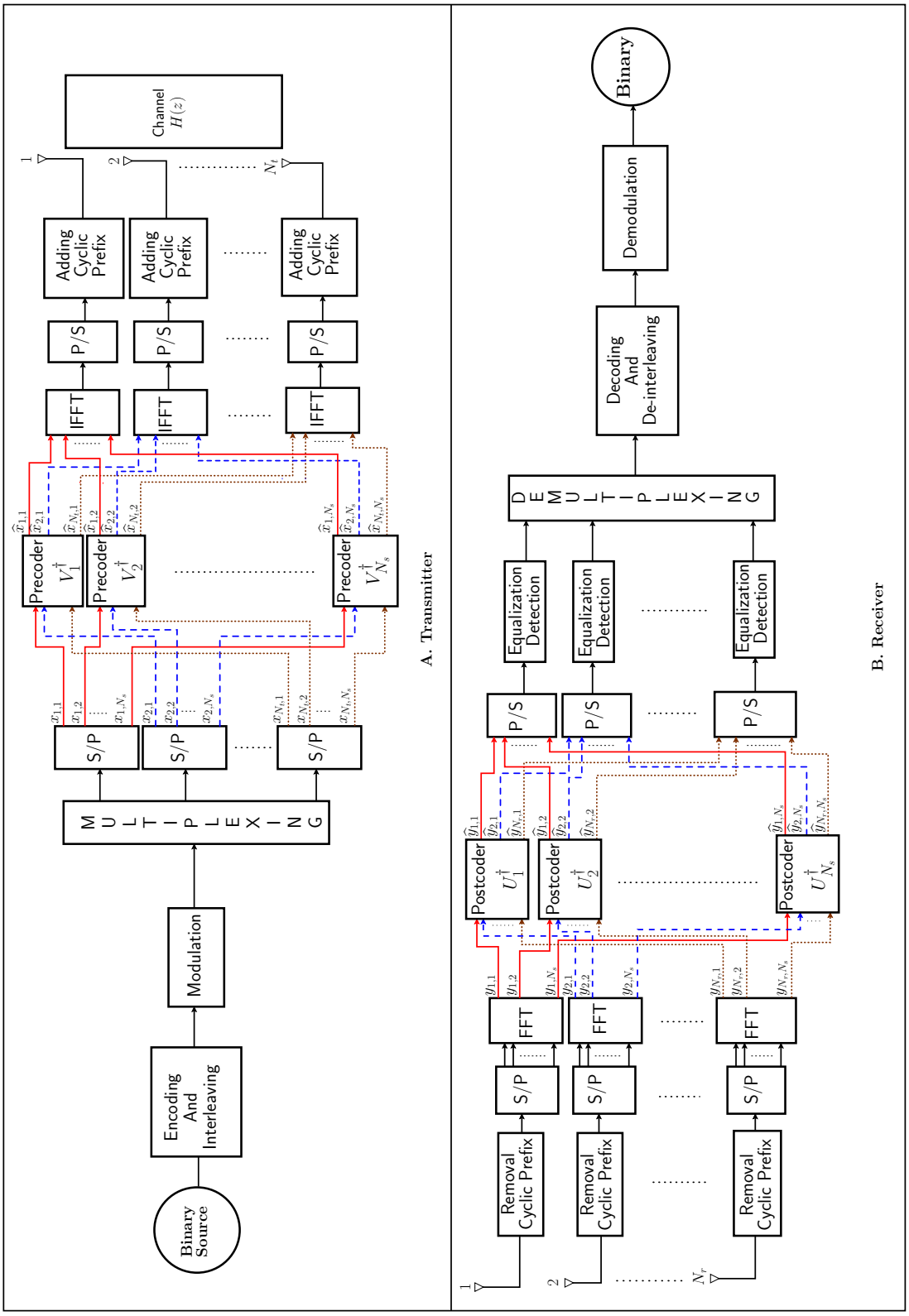



FIGURE 5.1 : Chaine de transmission MIMO-OFDM avec multiplexage spatial V-BLAST dans le domaine fréquentiel

### 5.2.3 Multiplexage Spatial dans le domaine temporel

Contrairement au FDSM, où le post-codage et le pré-codage sont effectués dans le domaine fréquentiel sur chaque sous-porteuse, le multiplexage spatial dans le domaine temporelle (TDSM) est effectué dans le domaine temporel avec un seul bloc pré-codeur en émission et un seul bloc post-codeur en réception [137]. Le principe a été déjà énoncé, dans le chapitre 4 en section 4.3.1, pour les deux approches QR-PMSVD et LU-PMD proposée. Sa mise en place dans une chaine de transmission MIMO-OFDM est illustrée à la figure 5.2 [118]. Nous avons noté $x_i(z)$, $1 \leqslant i \leqslant N_t$, le polynôme de degré $N_s + L_{cp} - 1$, représentant la transformée en $z$ du symbole temporel OFDM avec CP sur l'antenne d'émission $i$. Ces symboles OFDM sont représentés respectivement avant et après le pré-codeur avec les vecteurs $\boldsymbol{x}(z) = [x_1(z) \ \cdots \ x_{N_t}(z)]^T$ et $\widehat{\boldsymbol{x}}(z) = [\widehat{x}_1(z) \ \cdots \ \widehat{x}_{N_t}(z)]^T = V_{pr}(z)\boldsymbol{x}(z)$. Et du côté du récepteur, le signal reçu correspondant $\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = [\widehat{y}_1(z) \ \cdots \ \widehat{y}_{N_T}(z)]^T$, peut être exprimé après post-codage comme suit

$$\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = D(z)\boldsymbol{x}(z) + U_{po}(z)\boldsymbol{n}(z)$$

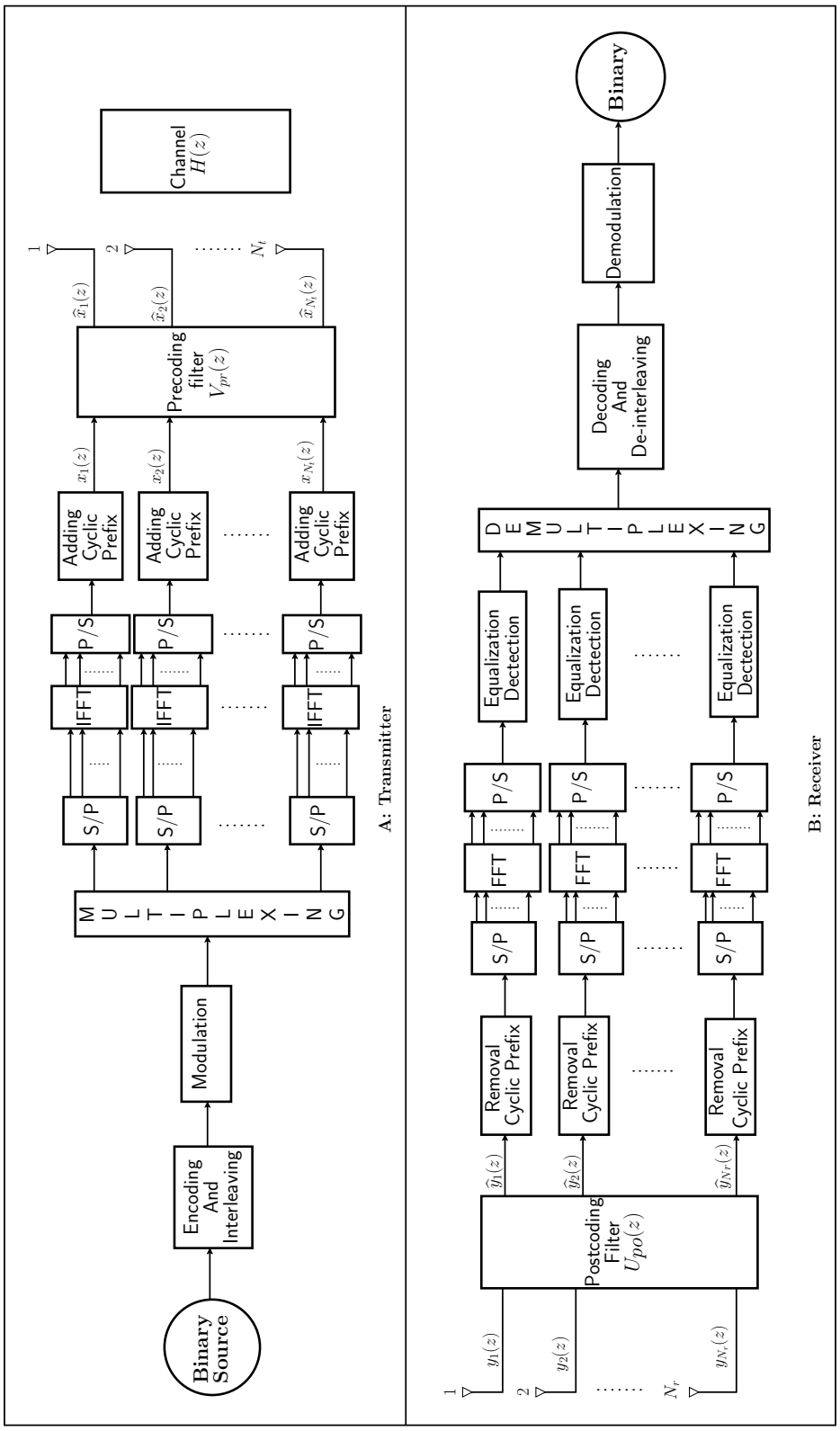



FIGURE 5.2 : Chaine de transmission MIMO-OFDM avec multiplexage spatial V-BLAST dans le domaine temporel

### 5.2.4 Comparaison des performances

Dans cette section, nous comparons les performances en termes de taux d'erreur binaire (BER) des trois techniques de multiplexage spatial décrites ci-dessus (FDSM, TDSM avec QR-PMSVD et TDSM avec LU-PMD). L'étude sera faite dans un contexte de communication sans fil d'un réseau métropolitain. À cet effet nous avons adopté la technologie WiMax (IEEE 802.16e) [142].

La norme IEEE 802.16e (Worldwide Interoperability for Microwave Access), est une alternative aux technologies de ligne d'abonné numérique (DSL) pour fournir l'Internet sans fil. Le WiMax Forum, l'organisation responsable du développement du WiMax mobile, a adopté trois types de configuration différentes en MIMO-OFDM afin d'améliorer les performances : les codes spatio-temporels (CST), le beamforming (BF) et le multiplexage (SM) [149, 150]. Le SM que nous avons adopté ici, est sans doute celui qui exploite mieux la capacité du canal MIMO [151].

#### 5.2.4.1 Implémentation des chaines de communication

Pour comparer les performances, nous avons implémenté sur MATLAB 3 chaines complètes de communication numérique en MIMO-OFDM. Notre objectif est de mettre en place les 3 approches de multiplexage spatial présentées précédemment. L'illustration de la chaine de communication TDSM avec LU-PMD et QR-PMSVD est présentée à la figure 5.1. La chaine avec le FDSM est illustrée par la figure 5.1. Le paramétrage et la configuration des différentes entités de ces chaines de communication sont faites sur la base des recommandations de la technologie Wimax [142].

À cet effet, nous considérons les paramètres listés ci-dessous (voir tableau 5.1) d'un système MIMO-OFDM. Le codage de canal utilisé ici est le codage convolutif avec une longueur de contrainte $L = 7$ et un rendement $R = 1/2$ [152]. Un modèle de canal multitrajets réaliste de l'IUT pour un environnement "Outdoor Pedestrian A" a été adopté. Ce modèle de canal est une recommandation du "WiMax Forum" [153].

TABLE 5.1 : Paramètres de Simulation

| | |
|---|---|
| Modèle de Canal | ITU Pedestrian A |
| Bande-Passante | 5MHz |
| Nombre de sous porteuses($N_S$) | 512 |
| Préfixe Cyclique (CP) $L_{cp} = N_S/8$ | 64 |
| Type de modulation | 4-QAM |

#### 5.2.4.2 Analyse des résultats

La figure 5.3 présente les différentes courbes de taux d'erreur binaire (BER) en fonction du SNR dans un système de communication MIMO $2 \times 2$. Le TDSM basé sur la décomposition du canal MIMO avec QR-PMSVD a été effectué pour 2 scénarios, l'un avec paramètre d'arrêt $\varepsilon = 10^{-1}$ et l'autre avec $\varepsilon = 10^{-3}$. Cela permettra d'avoir un aperçu de l'impact des CCI sur les performances en BER du système.

Nous voyons que le FDSM présente des performances meilleures que le TDSM avec LU-PMD lorsque qu'on a un faible rapport signal sur bruit (SNR). Cependant, l'écart entre ces deux performances diminue avec l'amélioration du SNR et finit par devenir nul. En effet, cela vient du fait que le filtre post-codeur TDSM avec LU-PMD n'est pas para-unitaire et par conséquent, la composante bruit est amplifiée, comme nous l'avions énoncé dans la remarque 2 du chapitre 4. Des améliorations devront donc être apportées avec ce filtre.

Nous voyons également que TDSM avec QR-PMSVD présente de mauvaises performances pour les deux valeurs de $\varepsilon$. En effet, pour le cas où $\varepsilon = 10^{-1}$, la transmission présente des interférences co-canal (CCI) trop importantes. Cela est dû au fait que la valeur du paramètre $\varepsilon$ n'est assez faible. Et nous avions vu dans ce cas que le QR-PMSVD présentait beaucoup d'erreurs de décomposition, c'est-à-dire des éléments hors diagonaux non nuls. Cependant pour $\varepsilon = 10^{-3}$, la dégradation des performances ne peut pas s'expliquer par la présence des CCI car l'erreur de décomposition est insignifiante.

Pour trouver la cause de cette dégradation des performances, cette fois ci, il nous faut nous concentrer sur la convergence de l'algorithme QR-PMSVD. Comme nous l'avions vu sur les figures 2.6 et 2.7, un choix de $\varepsilon$ faible améliore certes la diagonalisation mais augmente considérablement le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la condition d'arrêt. En même temps l'ordre des polynômes de la matrice diagonale $D(z)$ devient trop grand. Rappelons que l'objectif est de transformer le canal MIMO en canaux SISO séparés et indépendants. Ainsi, chaque réponse impulsionnelle d'un canal SISO est modélisée par l'un des polynômes de la diagonale de $D(z)$. Par conséquent, puisque l'ordre de la matrice $D(z)$ est très élevé, les durées de réponse impulsionnelle des canaux SISO sont donc trop longues. À cet effet, la longueur du CP qui est $L_{cp} = Ns/8 = 64$ ne permet pas d'éliminer complète l'ISI à cause de la dispersion temporelle au niveau de chaque canal SISO. Par conséquent, nous suggérons d'étendre la longueur de CP afin de réduire l'ISI.

Ce que nous avions énoncé est confirmé dans l'expérience suivante, où la longueur du

CP est étendue afin de réduire l'ISI. En effet, la figure 5.4 montre que l'extension du CP améliore les performances du système TDSM avec QR-PMSVD. Il est même possible d'atteindre la même performance que celle de FDSM si le CP est allongé jusqu'à $75\%$ du symbole OFDM. Notons que malheureusement, l'extension de la longueur CP a un impact direct sur le l'efficacité spectrale du système puisque c'est de la redondance.

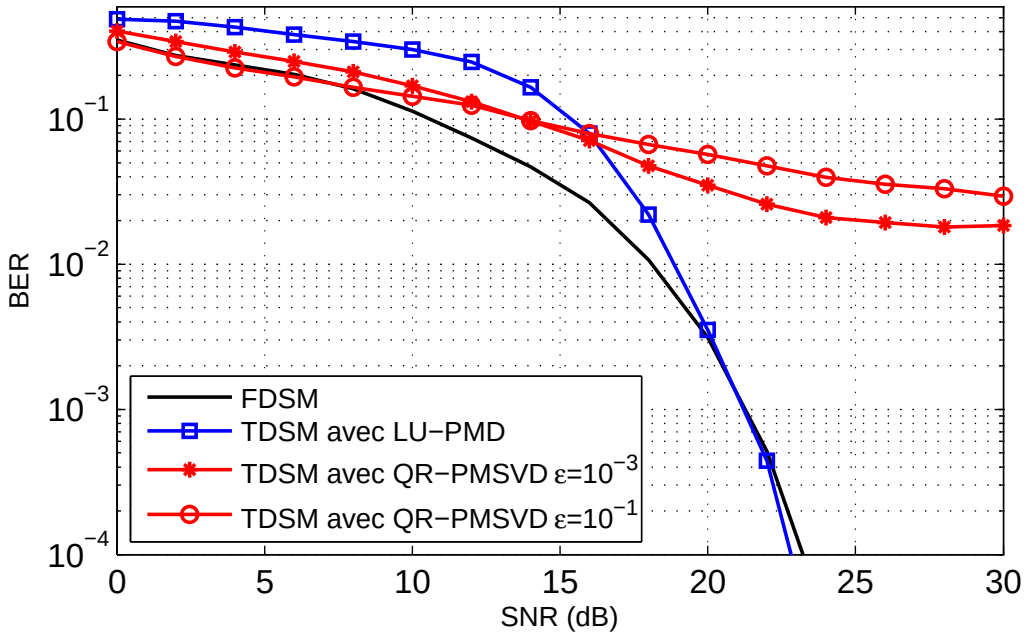



FIGURE 5.3 : Comparaison de BER entre FDSM, TDSM avec LU-PMD, et TDSM avec QR-PMSVD dans une configuration MIMO $2\times2$. Le paramètre de troncature pour QR-PMSVD $\mu = 10^{-6}$.

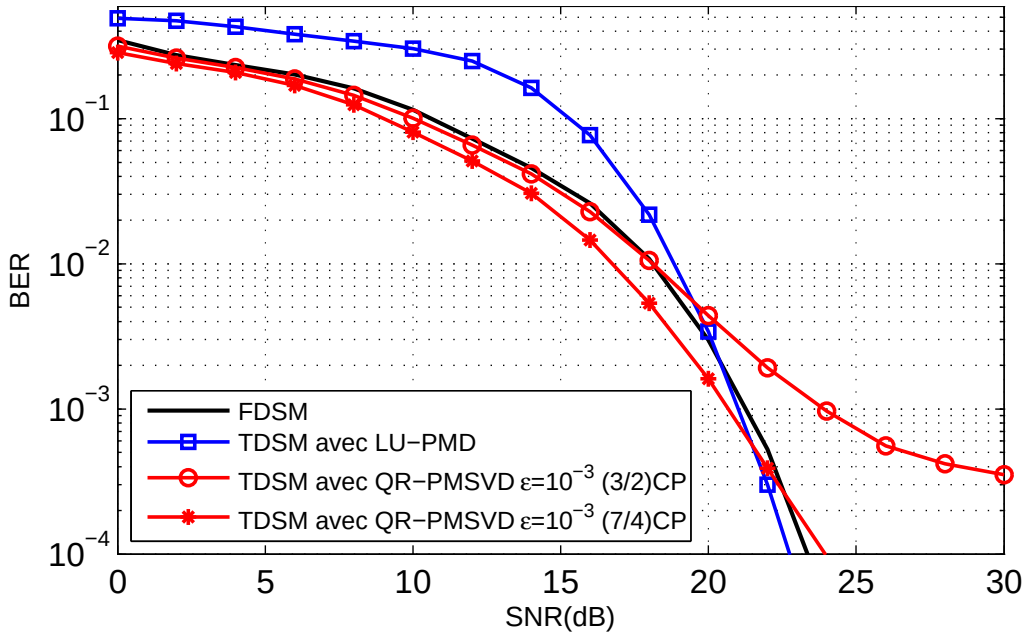



FIGURE 5.4 : Comparaison de BER entre FDSM, TDSM avec LU-PMD, et TDSM avec QR-PMSVD dans une configuration MIMO $2 \times 2$. Le CP est étendu à $3/2L_{cp}$ puis à $7/4L_{cp}$. Le paramètre de troncature pour QR-PMSVD $\mu = 10^{-6}$.

Pour résumer, nous pouvons noter les points suivants :

- Le TDSM avec QR-PMSVD nécessite une extension du CP au delà même des normes établies. Cela ne convient pas aux systèmes réalistes où la demande en termes de débit augmente régulièrement.
- En FDSM, le canal MIMO est parfaitement diagonalisé dans l'espace. Par conséquent, il n'y a pas de CCI et l'ISI peut être atténué par un CP conventionnel. Cependant, contrairement au TDSM, le post-codage et le pré-codage doivent être effectués dans le domaine fréquentiel sur chaque sous-porteuse. Cette dernière remarque peut poser problème lorsque le nombre de sous-porteuses est important. En outre cette approche ignore les corrélations entre les bandes de fréquence et la SVD ordonnera les canaux de sortie en fonction de la puissance conduisant à un manque de cohérence en phase.
- Comme dans la FDSM, la TDSM proposée avec LU-PMD permet d'éliminer complètement les CCI. Cependant, à cause de la non unitarité du post-filtre, la composante bruit est amplifiée. Il est important de noter aussi que le post-codage et le pré-codage sont effectués en même temps pour l'ensemble du système indépendamment du nombre de sous-porteuses. Cela constitue un avantage considérable, en terme de complexité, par rapport à la FDSM. En plus, en analysant les éléments

de $D(z)$ on peut noter que tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 en général, sauf le dernier. Les premiers $N_t - 1$ canaux SISO sont donc équivalents à des canaux à bruit additif, d'où la simplicité de son égaliseur.

### 5.2.5 Nouveau schéma TDSM avec une antenne de redondance (ORA-SM)

D'après la remarque 1 du chapitre 4, nous avons une forte probabilité que tous les éléments de $D(z)$ soient égaux à 1, sauf le dernier. Ainsi, les premiers $N_G = min(N_t, N_r) - 1$ SISO sont équivalents à des canaux gaussiens. Par conséquent, il n'y a pas d'interférence inter-symbole (ISI) sur ces canaux et on a pas non plus besoin d'égalisation. Ce qui n'est pas le cas avec la méthode QR-PMSVD.

Pour constater l'effet de l'ISI nous allons étudier les constellations des signaux reçus sur les différentes antennes, dans un système de transmission sans fil MIMO $3 \times 3$, utilisant une modulation $4-$QAM.

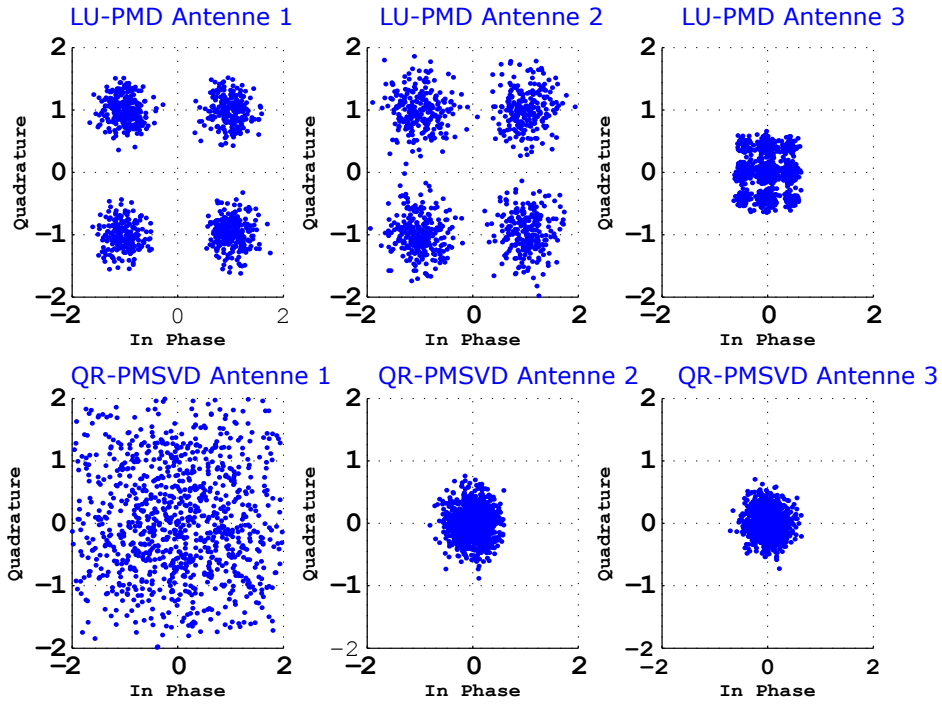



FIGURE 5.5 : Diagramme de constellation pour la modulation 4-QAM au niveau des 3 antennes de réception.

La figure 5.5 montre qu'avec la méthode LU-PMD, il n'y a pas d'ISI sur les $N_G = 2$

premiers canaux SISO (antennes de réception 1 et 2) : il n' y a que l'effet de la composante du bruit. Cependant avec l'approche QR-PMSVD, nous constatons la présence d'ISI sur l'ensemble des 3 antennes de réception.

Rappelons que l'un des principaux problèmes des communications à large bande est l'ISI, qui se produit lorsqu'on a un chevauchement entre les symboles consécutifs. À cet effet l'utilisation du préfixe cyclique (CP) dans la technologie OFDM permet d'annihiler les effets néfastes de cet ISI dans ces systèmes de communication sans fil. Malheureusement, le CP réduit l'efficacité spectrale en consommant un partie de la bande passante disponible [154, 155]. Étant donné qu'en TDSM avec LU-PMD, sur les $N_t - 1$ premiers canaux, le problème d'ISI ne se pose pas. Nous avons alors pensé à un nouveau schéma de multiplexage spatial MIMO-OFDM sans CP. Ce schéma, basé sur la décomposition LU-PMD, est constitué d'un post-filtre et d'un pré-filtre pour transformer le canal MIMO en $N_t$ canaux SISO équivalents dont les $N_t - 1$ sont purement gaussiens. Ainsi les flux de donnée "utiles" ne sont multiplexés que sur les $N_t - 1$ antennes d'émission correspondantes. La dernière antenne, dont le canal SISO correspondant est affecté par l'ISI, ne transmet que des données de redondance. Nous l'avons nommé "One Redundancy Antenna in Spatial Multiplexing (ORA-SM)" ou OAL-SM. Ce nouveau schéma, moins complexe en terme d'égalisation, serait bien adapté à technologie "Massive MIMO" [1] [156]. En effet, dans ce cas, l'utilisation d'une antenne de redondance n'impactera pas trop sur la capacité du système. En plus, le fait de n'avoir pas utiliser de CP, pourrait compenser les pertes en efficacité spectrale.

La figure 5.1 montre la comparaison de BER de ce nouveau schéma ORA-SM avec les méthodes TDSM avec LU-PMD et FDSM dans une configuration MIMO-OFDM $3 \times 3$. Comme prévu, ORA-SM présente de bien meilleures performances que les autres schémas de multiplexage. Cette amélioration s'explique par l'absence totale d'ISI avec ce schéma ORA-SM.

1. Aussi désigné par Large Scale Antenna Systems (LSAS), Hyper MIMO ou Very Large MIMO ou encore Dense MIMO

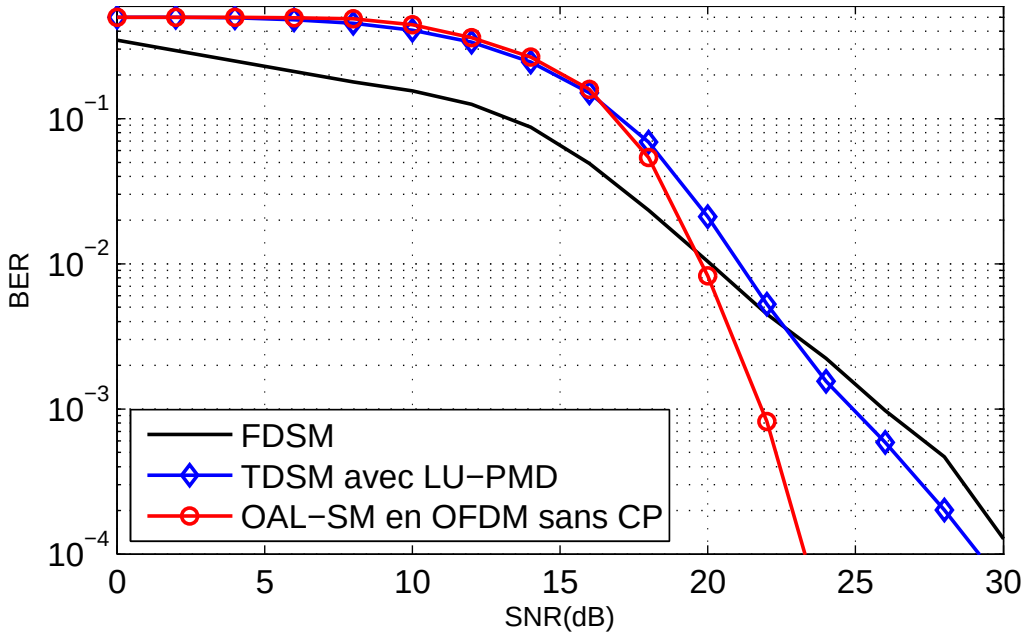



FIGURE 5.6 : Comparaison de BER entre FDSM, TDSM avec LU-PMD et ORA-SM en OFDM sans CP dans une configuration MIMO $3 \times 3$.

## 5.3 Multiplexage Spatial en MIMO mono-porteuse (MIMO-SC)

### 5.3.1 Principe de multiplexage spatial en MIMO-SC

Toutes ces études ont montré que la méthode LU-PMD, proposée, diminue le risque d'ISI. Dans ce cas l'utilisation de l'OFDM pourrait ne pas être une nécessité pour notre système. À cet effet, il serait intéressant d'analyser son application dans un système MIMO mono-porteuse (MIMO-SC). Dans ce contexte, les équations (4.5) et (4.8) peuvent être utilisées respectivement pour le schéma de multiplexage spatial basé sur LU-PDM et celui basé sur QR-PMSVD. Les polynômes $x_i(z)$ et $\hat{y}_i(z)$ représentent donc maintenant les transformées en $z$ des symboles à porteuse unique transmis et reçus respectivement avant le pré-codage et après le post-codage. La chaine de transmission numérique avec le schéma de multiplexage spatial est illustré à la figure 5.7.

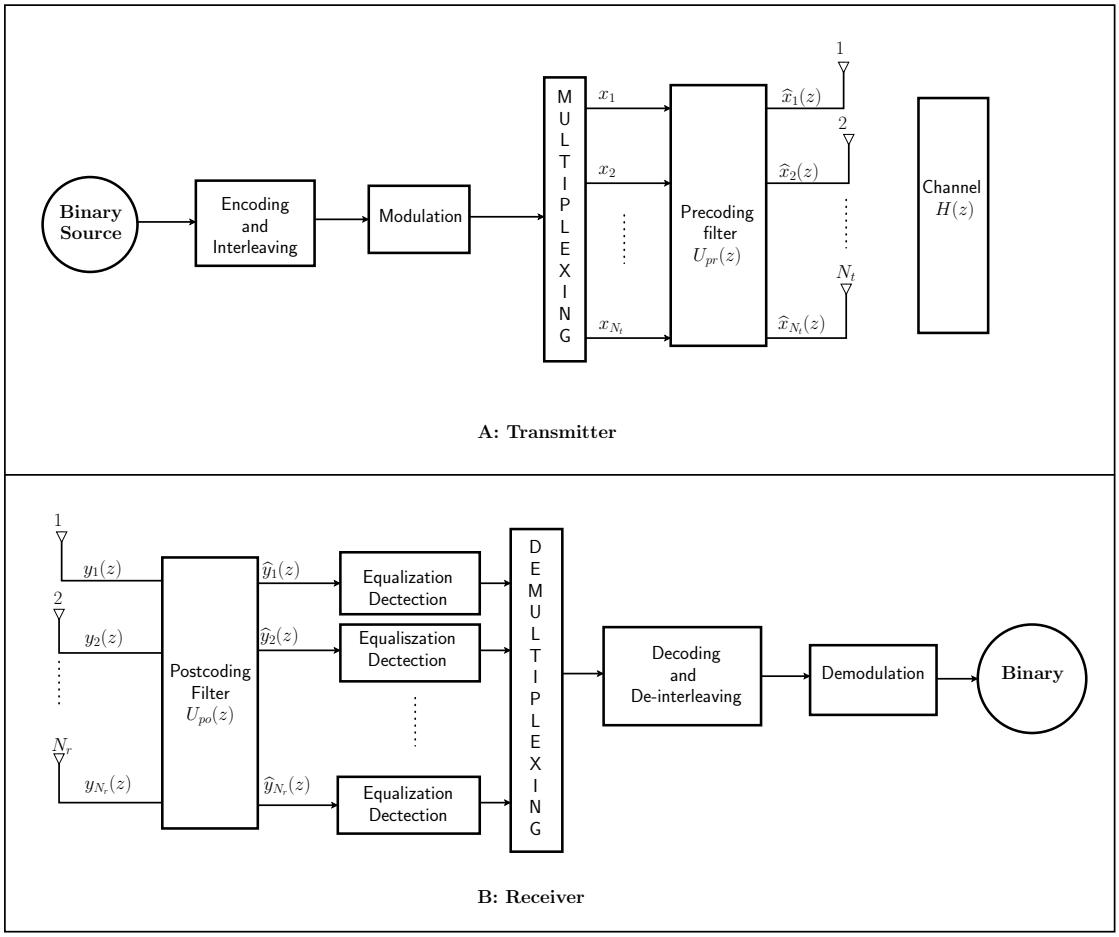



FIGURE 5.7 : Chaine de TDSM en MIMO-SC

### 5.3.2 Analyse des performances

Nous considérons, comme dans la section 5.2.4, un contexte de simulation WiMax avec les paramètres donnés dans le tableau 5.2 suivant.

TABLE 5.2 : Paramètres de Simulation

| | |
|---|---|
| Modèle de canal | ITU Pedestrian A |
| Bande Passante | 5MHz |
| Modulation | 4-QAM |

La figure 5.8 montre la comparaison du BER en MIMO-SC entre LU-PMD et QR-PMSVD. Le paramètre de tolérance $\varepsilon$ est fixé à $10^{-3}$ afin de minimiser les CCI résiduels qui se produisent avec la décomposition QR-PMSVD. Nous remarquons que :

- d'une part, malgré le fait que les CCI sont minimisées, les performances du MIMO-SC avec QR-PMSVD sont quand mêmes dégradées. Ceci, à cause de la longueur de l'étalement temporel des réponses impulsionnelles des canaux SISO séparés. En effet, l'égalisation est complexe et l'ISI ne peut donc pas être suffisamment réduite.
- D'autre part, le MIMO-SC avec LU-PMD présente de meilleures performances pour un SNR élevé et modéré. La raison est liée au fait qu'avec LU-PMD, tous les canaux SISO séparés sont des canaux de bruit additifs gaussien sans ISI sauf le dernier. Par conséquent, il n'y a pas besoin d'égalisation.

Les performances en multiplexage spatial avec le LU-PMD peuvent être encore améliorées en adoptant ORA-SM décrit dans la section 5.2.5, mais cette fois en SC. Car dans ce cas, l'ISI résiduel induit par le dernier canal SISO n'affecte pas les données transmises et multiplexées sur les $N_t - 1$ premières antennes d'émission. La figure 5.9 montre sa comparaison en terme de BER avec les autres méthodes (TDSM avec QR-PMSVD et TDSM avec LU-PMD) dans une configuration MIMO $3 \times 3$.

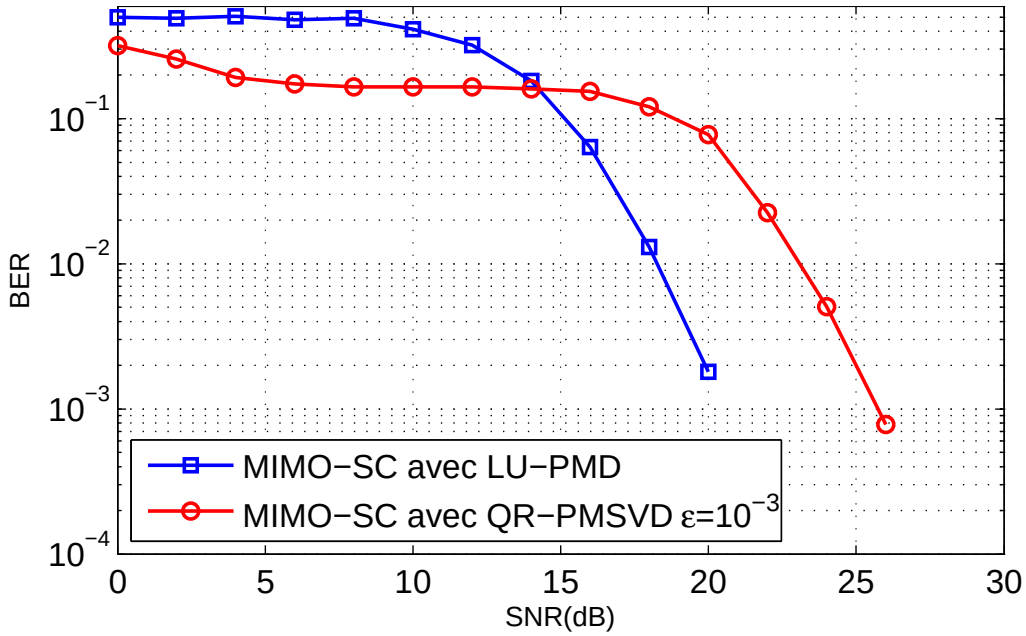



FIGURE 5.8 : Comparaison de BER en MIMO-SC entre LU-PMD et QR-PMSVD. Le paramètre de troncature pour QR-PMSVD $\mu = 10^{-6}$.

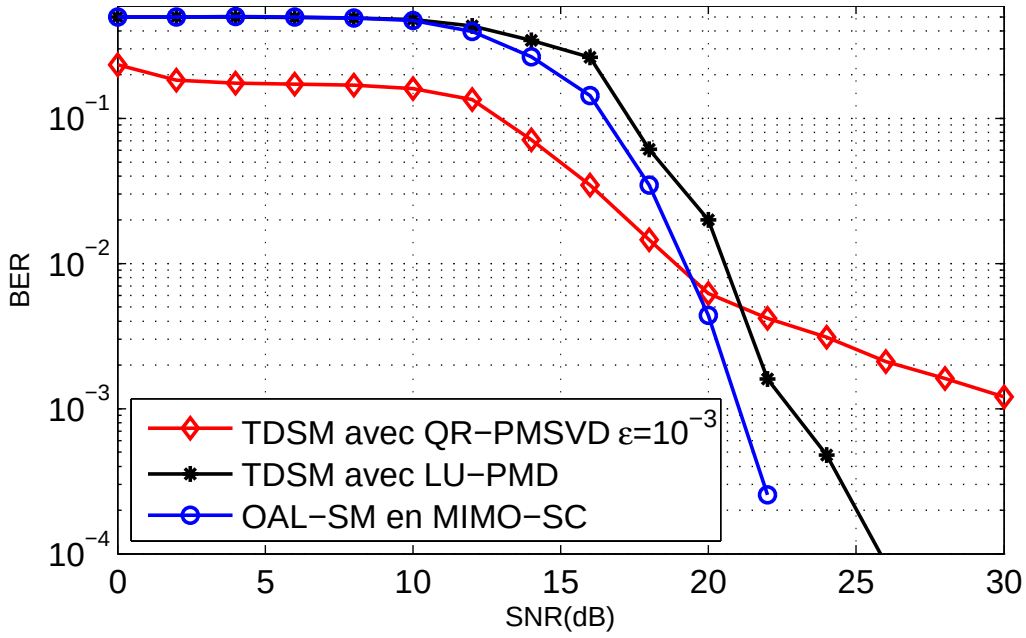



FIGURE 5.9 : Comparaison de BER en MIMO-SC entre LU-PMD, QR-PMSVD et ORA-SM SC de LU-PMD dans une configuration MIMO $3 \times 3$. Le paramètre de troncature pour QR-PMSVD $\mu = 10^{-6}$.

Comme prévu, l'ORA-SM présente de bien meilleures performances que le TDSM avec

LU-PMD classique. La dégradation des performances du TDSM avec QR-PMSVD s'explique par la présence d'ISI encore importante.

Un schéma de multiplexage spatial dans le domaine temporel (TDSM) pour les systèmes MIMO large bande, ayant des performances acceptables, sans la technologie OFDM, est d'une importance capitale. En effet, la contrainte de conception principale dans la réalisation de systèmes de communication sans fil est le facteur de crête ( Peak-to-Average Power Ratio (PAPR)). Pour un schéma basé sur OFDM, l'opération IFFT sur chaque antenne d'émission donne un PAPR relativement élevé. Par conséquent, les non-linéarités peuvent être surchargées par des pics de signal élevés, provoquant une distorsion d'intermodulation dans le signal transmis [157], et un rayonnement hors-bande indésirable [158]. Si les amplificateurs de puissance radiofréquence sont exploités sans grande coupure d'alimentation, il serait impossible de maintenir la puissance hors bande en dessous des limites spécifiées, ce qui conduit à une amplification très inefficace et à des émetteurs coûteux [159]. Cela fait que les systèmes mono-porteuses sont toujours d'actualité. Car contrairement à l'OFDM, le facteur de crête (PAPR) y est faible, d'où la pertinence de notre schéma ORA-SM, pour les systèmes MIMO large bande.

De même, comme dans la technolgie OFDM, nous avons la possibilté d'utiliser un préfixe cyclique (CP), afin d'améliorer sa robustesse face aux ISI [160] et dans ce cas, la dernière antenne redonnante pourrait même être utilisée pour transmettre des donnée utiles, afin d'améliorer l'éfficacité spectrale. L'utilisation du CP en SC (CP-SC) est par exemple adopté en WiMax pour les gammes de fréquences $10 - 66$ GHz en liaison montante et dans la 5G [142, 161]. En résumé, le schéma ORA-SM, proposé en SC, résout ce problème d'ISI sans utilisation de CP et peut être donc considéré comme une très bonne alternative au schéma CP-SC.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé les performances de notre schéma de multiplexage spatial dans le domaine temporel (TDSM) avec LU-PMD dans un contexte MIMO-OFDM. Cette analyse s'est faite en comparant les taux d'erreur binaire (BER) de notre méthode, de l'approche classique de multiplexage spatial dans le domaine fréquentiel (FDSM) et aussi du TDSM basé sur l'algorithme QR-PMSVD. Pour ce faire nous avons implémenté ces 3 schémas dans des chaines de communication MIMO-OFDM avec MATLAB.

Comme le FDSM classique, le schéma TDSM avec LU-PMD proposé élimine complètement toutes les CCI tout en minimisant l'ISI. En comparaison, l'approche TDSM avec le

QR-PMSVD ne peut pas annuler complètement les CCI. Elle n'élimine pas non plus l'ISI induite par la longue durée des réponses impulsionnelles de ses canaux SISO résultants, à moins qu'une extension du CP ne soit considérée.

Par ailleurs, contrairement au FDSM classique qui ne peut être utilisé que dans les systèmes MIMO-OFDM, le TDSM avec LU-PMD proposé convient aux systèmes multi-porteuse comme au systèmes mono-porteuse. Nous avons également montré qu'en MIMO-OFDM et MIMO-SC nous pouvons l'utiliser sans CP, avec un nouveau schéma qui rend la dernière antenne redondante (ORA-SM), et ceci pourrait être très utile dans une application en massive MIMO.

Cependant, l'inconvénient du TDSM avec le LU-PMD est son filtre post-codeur qui n'est pas para-unitaire. Ainsi la composante du bruit est toujours amplifiée par son post-filtre, ce qui fait que ses performances se dégradent lorsqu'on est dans un milieu perturbé. Une amélioration de ce filtre s'avère nécessaire pour une possibilité d'utilisation dans un environnement bruité.

# Chapitre 6

# Optimisation du filtre de post-codage en multiplexage spatial avec LU-PMD

## Sommaire


**6.1 Introduction . . . . . 138**

**6.2 Description de la problématique du bruit . . . . . 138**

6.2.1 Amplification de la puissance du bruit . . . . . 139

6.2.2 Problématique de conditionnement de la matrice de post-codage 140

**6.3 Optimisation par équilibrage de vecteurs . . . . . 142**

6.3.1 Principe . . . . . 142

6.3.2 Comparaison des performances . . . . . 143

**6.4 Optimisation par permutation de filtres . . . . . 146**

6.4.1 Principe . . . . . 146

6.4.2 Comparaison de performances . . . . . 148

**6.5 Conclusion . . . . . 150**

## 6.1 Introduction

La méthode de décomposition LU-PMD, que nous avons adoptée dans cette thèse fournit une matrice $D(z)$ (4.3) exactement diagonale. Son utilisation pour la mise en place d'un schéma de multiplexage spatial (TDSM) a permis de séparer totalement les flux de données issues des différentes antennes d'émission, donc il n'y a pas de CCI. En effet le canal MIMO est équivalent à $N_t$ canaux SISO totalement indépendant. En plus, à l'exception d'un canal MIMO très improbable, tous les sous-canaux SISO, sauf le dernier, se réduisent à de simples canaux à bruit additif. Donc en plus d'annuler complètement les CCI, cette décomposition évite également de manière naturelle le problème d'ISI. Ces caractéristiques rendent le schéma TDSM avec LU-PMD très intéressant comme technique de multiplexage spatial des systèmes MIMO large bande.

Cependant les facteurs $U(z)$ et $V(z)$ (4.3) résultants de la décomposition ne sont pas para-unitaires, mais unimodulaires. Cette absence de para-unitairité induit une limitation sérieuse pour son adoption. En effet, la composante bruit est amplifiée par le filtre post-codeur. Cela fait que pour des valeurs de SNR faibles, ses performances se dégradent. Donc pour faire du TDSM avec LU-PMD un bon candidat pour les système MIMO large bande, le problème de bruit doit être résolu. C'est précisément l'objectif des propositions qui vont être présentées dans de ce chapitre.

Nous allons d'abord faire une description du problème avant de proposer une première solution et présenter les résultats de simulation. Ensuite une deuxième solution sera étudiée et ses résultats seront présentés en comparaison avec la première.

## 6.2 Description de la problématique du bruit

Considérons un système de communication MIMO à travers un canal $H(z) \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$

$$\boldsymbol{y}(z) = H(z)\boldsymbol{x}(z) + \boldsymbol{n}(z) \tag{6.1}$$

où $\boldsymbol{n}(z)$ représente la transformée en $z$ du bruit. Dans un schéma de multiplexage spatial utilisant la relation (4.3), obtenue avec la décomposition LU-PMD, la version pré-filtrée $\widetilde{\boldsymbol{x}}(z) = V^{-1}(z)\boldsymbol{x}(z)$ est transmise à la place du signal d'entrée d'origine $\boldsymbol{x}(z)$. La sortie correspondante du canal MIMO, $\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = H(z)\widetilde{\boldsymbol{x}}(z) + \boldsymbol{n}(z)$, est ensuite post-filtrée par $\widetilde{\boldsymbol{y}}(z) = U(z)^{-1}\widehat{\boldsymbol{y}}(z)$, ce qui donne le système équivalent final

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}(z) = D(z)\boldsymbol{x}(z) + U(z)^{-1}\boldsymbol{n}(z) \triangleq D(z)\boldsymbol{x}(z) + \widetilde{\boldsymbol{n}}(z)$$

### 6.2.1 Amplification de la puissance du bruit

En supposant avoir affaire avec un bruit blanc unitaire spatio-temporel $\boldsymbol{n}$, sa puissance après le post-filtrage est donnée par

$$\mathbb{E}(\|\widehat{\boldsymbol{n}}\|^2) = \|U(z)^{-1}\|^2 \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{Tr}\left[U(e^{j\omega})^{\dagger}U(e^{j\omega})\right]^{-1} d\omega. \tag{6.2}$$

On rappelle que $\mathbb{E}(\cdot)$ désigne l'espérance mathématique, $\mathsf{Tr}(\cdot)$ l'opérateur de trace et l'exposant $^{\dagger}$, la transpose-conjugaison. La composante bruit est donc amplifiée à chaque fois que cette norme est supérieure à 1 (Remarque2).

La figure 6.1 affiche les performances (taux d'erreur binaire en fonction du SNR) d'un schéma de multiplexage spatial LU-PMD, observé sur quatre (4) canaux MIMO différents, chacun étant corrompu par un bruit blanc spatio-temporel à variance unitaire.

Comme nous pouvons le constater, les performances se dégradent considérablement au fur et à mesure que la puissance du bruit en sortie de filtre augmente. Bien entendu, cette perte de performance ne peut pas être expliquée uniquement par l'augmentation de la puissance du bruit puisque le signal de sortie $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ subit également le même post-filtrage.

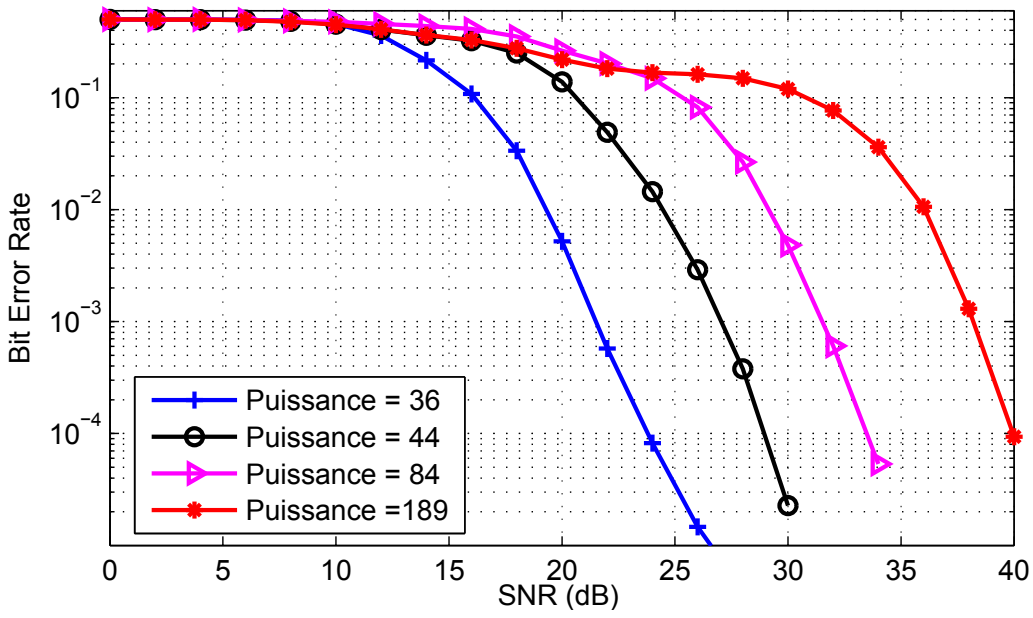



FIGURE 6.1 : Comparaison de BER pour différentes valeurs de la puissance de la matrice de post-codage.

### 6.2.2 Problématique de conditionnement de la matrice de post-codage

Nous observons que, l'opération de post-filtrage mentionnée ci-dessus peut être vue comme la résolution d'un système linéaire perturbé [102]. Le signal de sortie après post-filtrage est donné par :

$$\begin{aligned} U(z)^{-1}\widehat{\boldsymbol{y}}(z) &= U(z)^{-1}H(z)\widetilde{\boldsymbol{x}}(z) + U(z)^{-1}\boldsymbol{n}(z) \\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(z) &= D(z)\boldsymbol{x}(z) + U(z)^{-1}\boldsymbol{n}(z). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme suivante,

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}(z) - D(z)\boldsymbol{x}(z) = U(z)^{-1}\boldsymbol{n}(z), \tag{6.4}$$

où le terme $U(z)^{-1}\boldsymbol{n}(z)$ représente la perturbation. L'application de la norme $\mathsf{L}_2$ sur cette équation (6.4) donne,

$$\|\widetilde{\boldsymbol{y}}(z) - D(z)\boldsymbol{x}(z)\|_2 \leq \|U(z)^{-1}\|_2\|\boldsymbol{n}(z)\|_2. \tag{6.5}$$

Nous savons aussi que le signal de sortie idéal sans bruit correspond à $D(z)\boldsymbol{x}(z) = U(z)^{-1}H(z)\widetilde{\boldsymbol{x}}(z)$. Ainsi, l'erreur relative calculée entre la sortie $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ et la solution idéale sans bruit est bornée par

$$\begin{aligned} \frac{\|\widetilde{\boldsymbol{y}}(z) - D(z)\boldsymbol{x}(z)\|_2}{\|D(z)\boldsymbol{x}(z)\|_2} &\leq \frac{\|U(z)^{-1}\|_2\|\boldsymbol{n}(z)\|_2}{\|U(z)^{-1}H(z)\widetilde{\boldsymbol{x}}(z)\|_2} \\ &\leq \|U(z)^{-1}\|_2\|U(z)\|_2\frac{\|\boldsymbol{n}(z)\|_2}{\|H(z)\widetilde{\boldsymbol{x}}(z)\|_2} \end{aligned} \tag{6.6}$$

où on définit $\|\alpha(z)\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbb{E}\left[\alpha(e^{j\omega})^\dagger\alpha(e^{j\omega})\right]d\omega$ pour la norme $\mathsf{L}_2$ d'un signal aléatoire de valeur vectorielle $\alpha$. On note par $\kappa(U(z)) \triangleq \|U(z)\|_2\|U(z)^{-1}\|_2$ est le conditionnement associé à la matrice unimodulaire $U(z)$. L'équation (6.6) peut donc être réécrite comme suit,

$$\frac{\|\widetilde{\boldsymbol{y}}(z) - D(z)\boldsymbol{x}(z)\|_2}{\|D(z)\boldsymbol{x}(z)\|_2} \leq \kappa(U(z))\frac{\|\boldsymbol{n}(z)\|_2}{\|H(z)\widetilde{\boldsymbol{x}}(z)\|_2}. \tag{6.7}$$

Notons que $\kappa(U(z))$ ne dépend pas de $z$, dans la suite, nous écrirons $\kappa(U)$.

Si le filtre post-codeur $U(z)^{-1}$ est mal conditionné, c'est-à-dire $\kappa(U) \gg 1$, alors l'inégalité (6.7) montre que le rapport bruit sur signal après post-filtrage (côté gauche de

l'inégalité) peut devenir trop élevé comparé au signal avant post-filtrage ( de $\kappa(U)$ facteur près).

Pour confirmer cette conclusion, nous avons analysé l'impact du conditionnement de la matrice de postcodage sur un système de communication MIMO. Nous avons à cet effet générer quatre canaux MIMO, dont les valeurs de conditionnement de leur matrice de postcodage diffèrent. L'implémentation de la chaine de communication est toujours réalisée avec MATLAB. La figure 6.2 montre le comportement des courbes de taux d'erreur binaire en fonction du rapport signal sur bruit pour ces quatre systèmes différents. Nous remarquons que les performances du système MIMO sont significativement dégradées lorsque $\kappa(U)$ augmente.

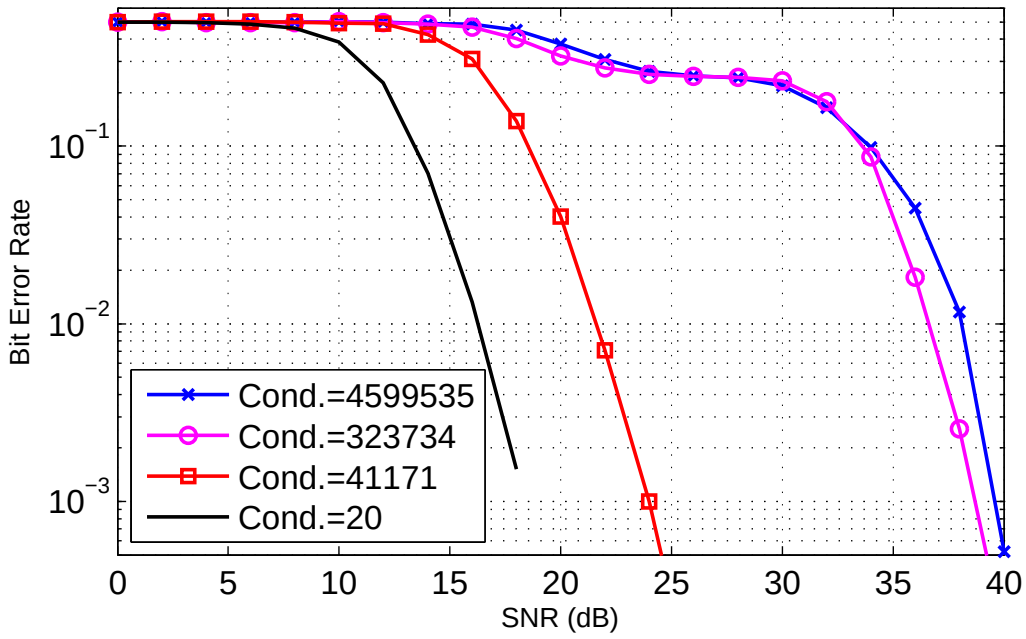



FIGURE 6.2 : Comparaison de BER pour différentes valeurs de conditionnement de la matrice de post-codage.

Nous pouvons donc affirmer que la dégradation des performances du TDSM avec LU-PMD est causée par l'amplification du bruit par le post-filtre. Et ceci est dû au mauvais conditionnement de la matrice de postcodage correspondante. Nos recherches de solutions vont donc être axées sur l'amélioration de conditionnement de cette matrice afin de rendre le schéma de multiplexage plus performant.

## 6.3 Optimisation par équilibrage de vecteurs

### 6.3.1 Principe

Étant donné un système de communication MIMO bruité (6.1). La décomposition en (4.3) du canal MIMO qui fournit les filtres (pré-codeur et post-codeur) para-unitaires est optimale dans le sens où l'erreur relative que nous aurons en sortie de filtre serait minimale. Ceci est une conséquence directe de la relation (6.7) et de la propriété bien connue qui établit que $\kappa(U) = 1$, pour $U(z)$ para-unitaire.

Notre objectif est donc d'obtenir un post-filtre avec des propriétés aussi proches, que possible, de celles mentionnées ci-dessus pour les filtres para-unitaires.

Pour commencer, supposons que le post-filtre précédent $U(z)^{-1}$ est maintenant remplacé par une matrice polynomiale $S(z)$ de taille appropriée. Pour la suite, nous définissons $W(z) = S(z)U(z)$. Le signal de sortie du canal, après le post-filtrage (toujours noté $\widehat{\boldsymbol{y}}(z)$) se lit donc comme

$$\widehat{\boldsymbol{y}}(z) = W(z)D(z)\widetilde{\boldsymbol{x}}(z) + S(z)\boldsymbol{n}(z)$$

Le choix de $S(z)$ doit se faire de telle sorte que $W(z)$ n'introduise ni de CCI ni d'ISI. Si par contrainte, ce choix introduit de l'ISI, celle-ci devra être contrôlée pour ne pas affecter les performances du système.

Rappelons que notre objectif est d'avoir une matrice de post-codage mieux conditionnée. Nous savons aussi que l'équilibrage de lignes (ou de colonnes) d'une matrice est une astuce simple qui peut être très efficace pour améliorer son conditionnement [162]. Par conséquent, nous proposons de sélectionner le post-filtre tel que :

1. $W(z)$ soit une matrice diagonale de scalaires, notée $W$. Dans ce il n'y a pas de CCI et pas d'ISI introduites par le post-filtrage.
2. Équilibrage des lignes : $\|S(z)\|_2 = N_r$.

   Et cet équilibrage du post-filtre est défini comme suit

$$S(z) = WU(z)^{-1} \tag{6.8}$$

   où $W$ est une matrice diagonale $N_r \times N_r$ dont les éléments sont obtenus par

$$W_{i,i} = \frac{1}{\| \left[U(z)^{-1}\right]_i \|_2}$$

où la notation $[A]_i$ représente la $i$-ème ligne de la matrice $A$.

### 6.3.2 Comparaison des performances

#### 6.3.2.1 Analyse des performances

La capacité de cette solution à atteindre les objectifs pour l'obtention d'une norme et valeur de conditionnement adéquates est illustrée ci-dessous. Nous simulons pour cela une chaine de transmission MIMO avec multiplexage spatial basé sur la décomposition LU-PMD. Le conditionnement du post-filtre $U(z)^{-1}$ et celui de sa version modifiée $S(z)$ sont calculés. De plus, la puissance de sortie du bruit après post-filtrage est estimée pour chaque filtre post-codeur. Le tableau 6.1 montre les résultats obtenus avec trois canaux MIMO $3 \times 3$ de Rayleigh [163] différents, générés aléatoirement.

TABLE 6.1 : Comparaison de puissance et conditionnement

| | Puissance du Post-filtre | | Valeur de conditionnement | |
|---|---|---|---|---|
| Canaux | $U(z)^{-1}$ | $S(z)$ | $U(z)^{-1}$ | $S(z)$ |
| Canal 1 | 568.57 | 1.47 | 4599535. | 37.02 |
| Canal 2 | 46.82 | 1.20 | 41171. | 11.41 |
| Canal 3 | 126.64 | 1.33 | 323734. | 20.57 |

Les résultats affichés dans le tableau 6.1 montrent des améliorations très significatives concernant le conditionnement et la puissance de sortie du post-filtre. On s'attend donc à ce que cela se traduise par une amélioration des performances dans un système MIMO-OFDM.

Nous étudions maintenant l'effet de cette modification en termes de performances en taux d'erreur binaire. Pour la simulation, nous considérons deux modèles de canaux UIT : intérieur (Indoor) et extérieur (Outdoor) en mode Piéton (Pedestrian) avec des paramètres de 40MHz de bande passante, $N_s = 512$ sous-porteuses et une modulation de type 4-QAM. Les figure 6.3 et 6.4 représentent les taux d'erreur binaire en fonction du rapport signal sur bruit, dans un schéma de multiplexage spatial (TDSM) pour les deux types de post-filtres $U(z)^{-1}$ et $S(z)$. Nous constatons des améliorations importantes apportées par le nouveau post-filtre $S(z)$ dans les deux contextes intérieur (figure 6.3) et extérieur (figure 6.4). Ce gain de performance est beaucoup plus accru dans le contexte extérieur plus sévère (figure 6.4).

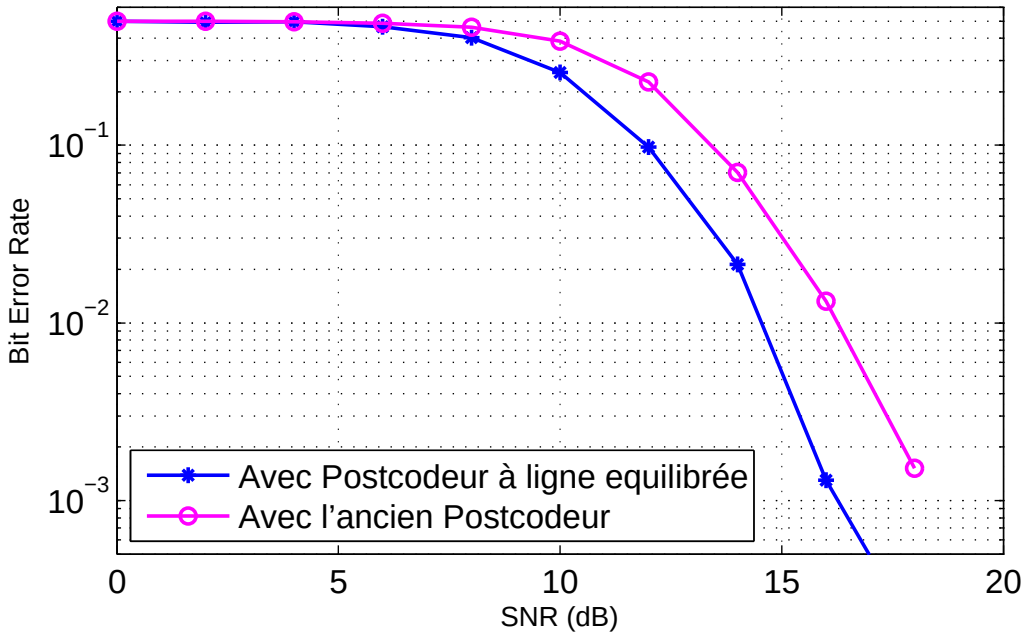



FIGURE 6.3 : Comparaison BER avec les deux post-filtres : Modèle de canal ITU intérieur.

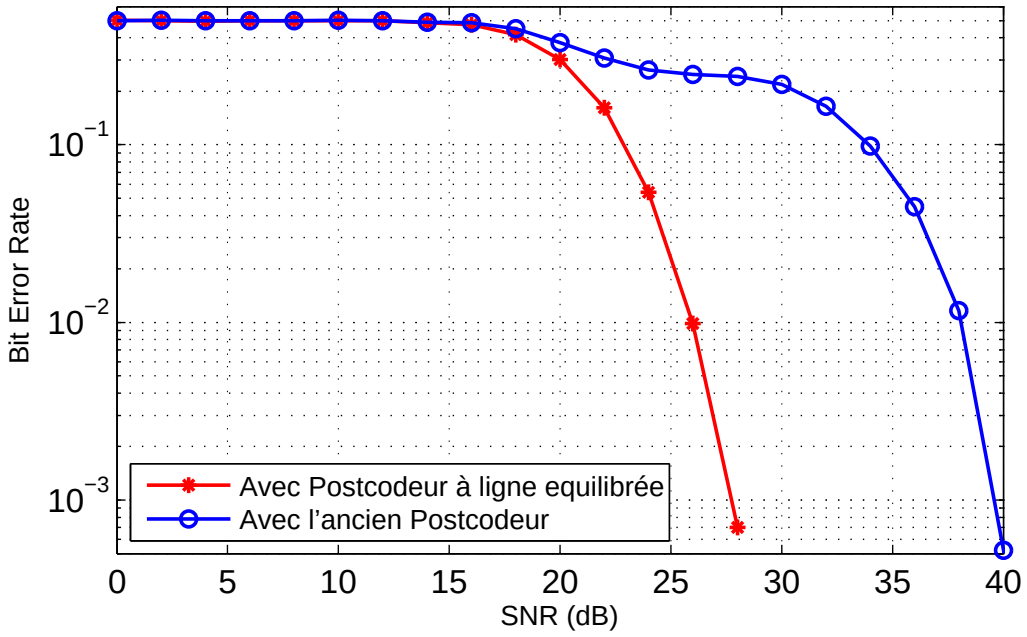



FIGURE 6.4 : Comparaison BER avec les deux post-filtres : Modèle de canal ITU extérieur.

#### 6.3.2.2 Comparaison avec le TDSM par QR-PMSVD

Afin de mieux observer l'impact de cette amélioration, nous comparons les résultats obtenus avec les performances d'un schéma de multiplexage avec QR-PMSVD d'un système MIMO-OFDM. Pour la décomposition QR-PMSVD, nous avons fixé le paramètre d'arrêt, pour les éléments hors diagonaux de $D(z)$, à $\varepsilon = 10^{-3}$. Avec cette configuration, les CCI sont insignifiantes. Le paramètre de troncature $\mu$, pour limiter l'ordre des matrices polynômiales de Laurent, fixé à $10^{-6}$. Les comparaisons sont faites sur un modèle de canal MIMO ($3 \times 3$), qui est de type UIT 'Outdoor Pesdestrian-A'.

La figure 6.5 présente une comparaison en terme de BER entre les trois approches : l'approche classique du TDSM avec LU-PMD, sa version améliorée et le TDSM avec QR-PMSVD. Avec le TDSM LU-PMD utilisant le post-filtre classique $U(z)^{-1}$, l'effet négatif l'amplification du bruit combiné à un mauvais conditionnement est si sévère que ce schéma de multiplexage spatial ne convient que pour un SNR élevé. Tandis que avec la modification proposée l'étape de post-codage est suffisamment efficace pour limiter les effets néfastes du bruit sur les performances du systèmes. Cependant, nous n'avons toujours pas atteint des performances similaires à celles avec un filtre para-unitaire (TDSM avec QR-PMSVD).

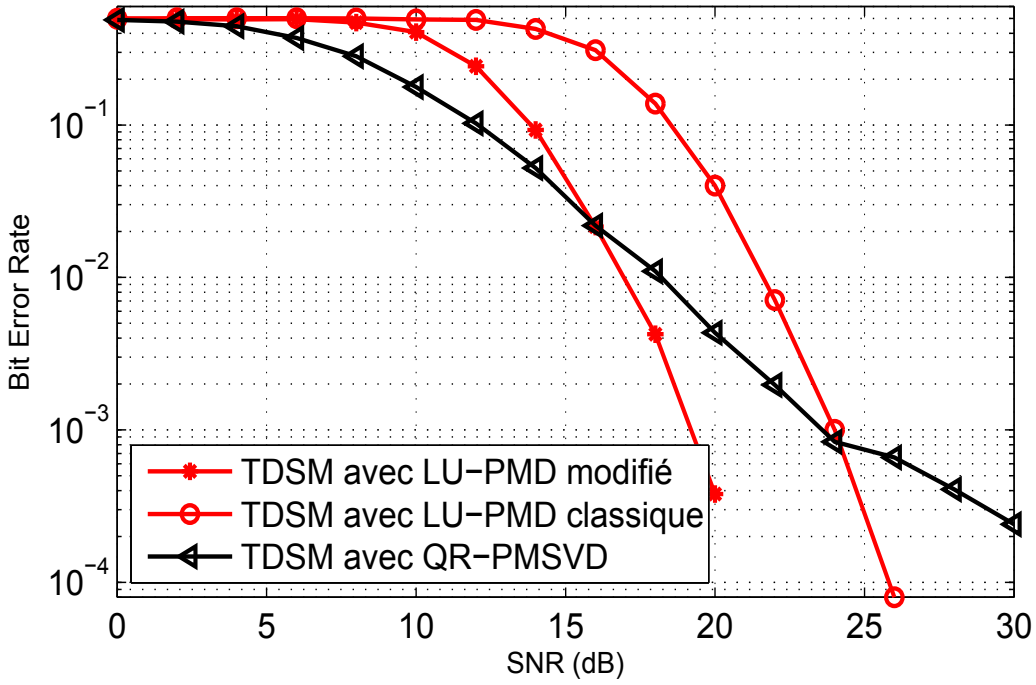



FIGURE 6.5 : Comparaison BER avec les deux post-filtres : Modèle de canal ITU extérieur.

## 6.4 Optimisation par permutation de filtres

### 6.4.1 Principe

Nous avons montré, dans le chapitre 3, que la première phase de la factorisation LU-PMD (triangularisation) permet d'écrire la matrice polynomiale du canal MIMO, $H(z) \in \mathbb{C}^{N_t \times N_r}$, sous la forme :

$$H(z) = U(z)R(z) \tag{6.9}$$

où $R(z)$ est une matrice triangulaire supérieure et $U(z)$ une matrice polynomiale unimodulaire facilement inversible. Ensuite, dans la deuxième phase, la même décomposition est appliquée pour obtenir

$$R^T(z) = V^T(z)D(z) \tag{6.10}$$

où l'exposant $^T$ est l'opérateur de transposition et où $V(z)$ est $N_t \times N_t$-unimodulaire. Ainsi nous pouvons écrire $H(z)$ comme dans 4.3,

$$H(z) = U(z)D(z)V(z).$$

Rappelons que cette méthode de décomposition suit deux étapes principales : un prétraitement de réduction du pivot à une constante et la mise à zéro des éléments de colonnes en dessous de la diagonale. Cette opération est répété $N_r - 1$ fois pour effectuer la triangularisation. Nous avions montré avec le théorème 1 que l'équation 6.9 peut se mettre sous la forme :

$$H(z) = U(z)R(z) = A(z)L(z)R(z)$$

où $A(z)$ est une matrice polynomiale $J$-orthogonale et $L(z)$ une matrice polynomiale triangulaire inférieure avec des éléments diagonaux égaux à 1.

Les polynômes utilisés, pour former l'identité de Bezout afin de forcer la réduction du pivot à 1, font que $A(z)$ (équation3.30) soit mal conditionnée. Par conséquent $U(z) = A(z)L(z)$ devient aussi mal conditionnée, avec une puissance en sortie de filtrage trop élevée. Nous pouvons donc affirmer que l'étape de réduction (section 3.4.1 est à l'origine de mauvais conditionnement de la matrice (post-filtre) $U(z)$. La preuve de cette assertion est que dans la seconde étape de factorisation, qui ne nécessite pas de l'étape de réduction de pivot, le pré-filtre $V(z)$ qui en découle n'est pas mal conditionné.

En effet, puisque la seconde étape de factorisation s'applique sur une matrice $R(z)$ tri-

angulaire dont les pivots sont déjà réduits à 1. Alors nous pouvons nous passer de cette pré-étape de réduction de pivot à une constante lors de la seconde phase. La décomposition se limite alors à uniquement mettre à zéro successivement les éléments en dessous de la diagonale de $R^T(z)$ avec la matrice $V(z) = L(z)$ qui ne présente pas de problème de mauvais conditionnement. L'équation 6.9 peut être réécrit comme suit

$$R^T(z) = V^T(z)D(z) \tag{6.11}$$

où $V(z)$ est une matrice polynomiale triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux égaux à 1. Elle est bien conditionnée avec une puissance raisonnable.

Avec notre schéma de multiplexage (TDSM avec LU-PMD), le post-filtre est est déterminé à partir de la première étape de factorisation (6.9). Tandis que le pré-filtre est obtenu dans seconde étape de factorisation (6.11). Cela a conduit à une matrice de post-codage mal conditionnée qui amplifie la puissance de bruit de sortie alors que le pré-filtre est bien conditionné. Par conséquent, l'amplification du bruit peut être évitée par une simple modification de la décomposition en inversant l'ordre dans lequel les pré-filtres et les post-filtres sont calculés. En d'autre termes, une **permutation de filtre** permet d'éviter cette amplification du bruit.

Pour réaliser cette permutation, considérons que la décomposition en (4.3) soit appliquée à $G(z) = H^T(z)$ au lieu de $H(z)$, c'est-à-dire

$$G(z) = H^T(z) = U(z)D(z)V(z). \tag{6.12}$$

Ensuite si nous appliquons à nouveau de la transposition, on obtient :

$$H(z) = V^T(z)D(z)U^T(z). \tag{6.13}$$

Maintenant, le post-filtre est donc déterminé en inversant $V^T(z)$. Il se retrouve ainsi avec des propriétés améliorées. En effet, puisque la conception de $V(z)$ est exempte de l'étape de réduction, l'amplification du bruit de sortie est donc évitée. Comme le pré-filtre n'a pas d'effet sur la composante bruit, même s'il est mal conditionné, cela n'affectera pas les performances du système.

### 6.4.2 Comparaison de performances

#### 6.4.2.1 Analyse des performances

Cette méthode de permutation des filtres, comparée à l'approche de normalisation par équilibrage des lignes (row balancing) présentée en section 6.3, fournit de meilleurs résultats en termes de conditionnement tout en ayant une puissance de sortie de filtre normale. Le tableau 6.2 présente la comparaison des puissances et conditionnements des post-codeurs issus de ces deux méthodes sur 4 modèles de canaux MIMO (Rayleigh fading) générés aléatoirement. Nous pouvons remarquer que cette approche avec permutation permet d'avoir une matrice de postcodage mieux conditionnée (valeur plus proche de 1). À cet effet on s'attend à ce qu'elle donne de meilleures performances comparée à la méthode d'équilibrage de ligne (Row balancing).

TABLE 6.2 : Comparaison de puissance et conditionnement

| | Puissance | | Conditionnement | |
|---|---|---|---|---|
| Canaux | Row Balancing | Permutation de filtres | Row Balancing | Permutation de filtres |
| Canal 1 | 1.47 | 5.15 | 37.02 | 2.92 |
| Canal 2 | 1.39 | 5.23 | 5.44 | 2.20 |
| Canal 3 | 1.29 | 3.73 | 6.28 | 1.20 |
| Canal 4 | 1.38 | 3.19 | 6.28 | 1.19 |

#### 6.4.2.2 Comparaison avec le TDSM à base de QR

La mise en place de cette nouvelle méthode dans un schéma de multiplexage spatial V-BLAST d'un système MIMO-OFDM permet d'observer son impact sur les performances. On compare à cet effet son taux d'erreur binaire en fonction du SNR avec les 3 autres méthodes que sont : la méthode classique avec LU-PMD, le "row balancing" et le TDSM avec QR-PMSVD. On génère pour ce faire, des canaux MIMO IUT ("Outdoor" et"Indoor") comme en section 6.3.2. Les figures 6.6 et 6.7 montrent que la permutation des filtres améliore considérable les performances mieux que le "row balancing". D'après le tableau 6.2 cette méthode améliore uniquement le conditionnement du post-filtre comparé à l'approche par "row balancing". Nous pouvons donc conclure que la dégradation des performances était plutôt due plus à un problème de mauvais conditionnement du post-filtre que d'amplification du bruit en sortie de filtre.

La comparaison avec l'approche QR, en figure 6.8, montre que le TDSM avec LU-PMD utilisant une permutation des filtres a des résultats meilleurs même lorsque le SNR est

faible. Les propriétés intéressantes de la décomposition LU-PMD (en termes de CCI et ISI), que nous avions soulignées, deviennent maintenant beaucoup plus apparentes.

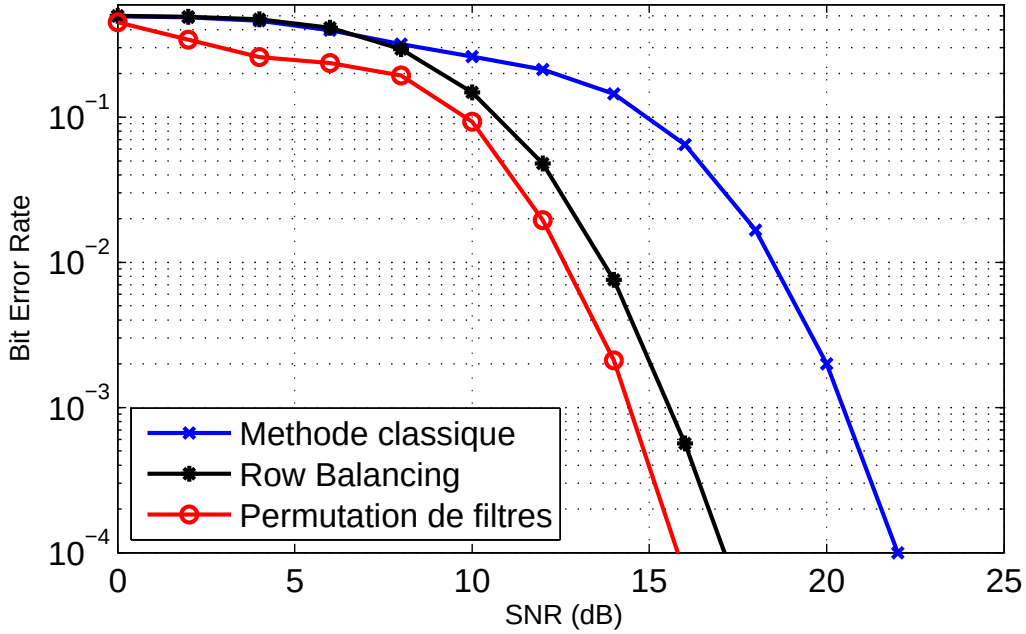



FIGURE 6.6 : Comparaison de BER entre LU-PMD par permutation de filtre et la méthode classique en multiplexage spatial.

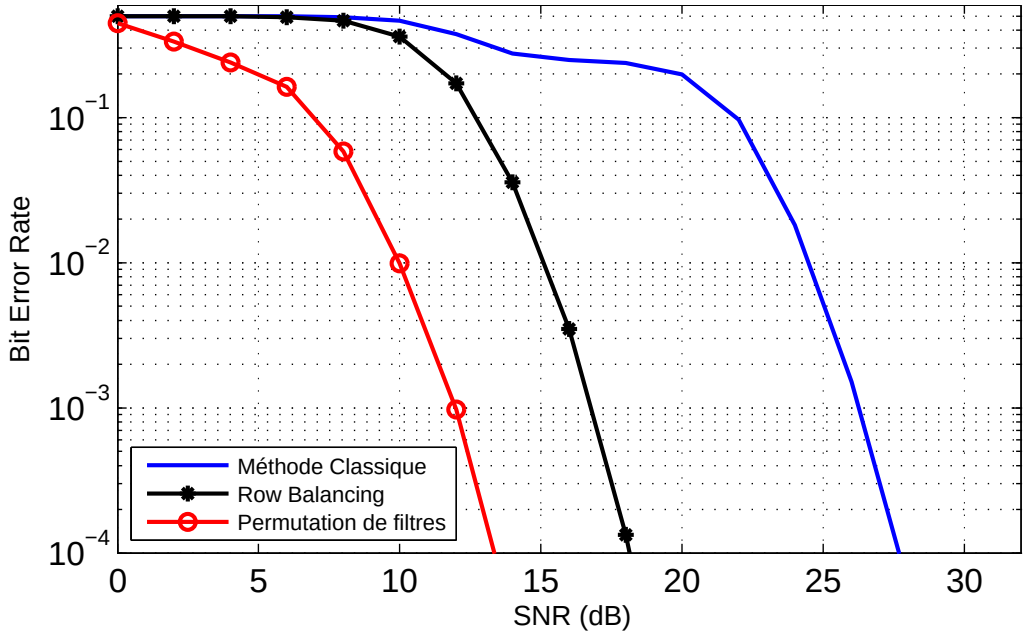



FIGURE 6.7 : Comparaison de BER entre LU-PMD par permutation de filtre et la méthode classique en multiplexage spatial.

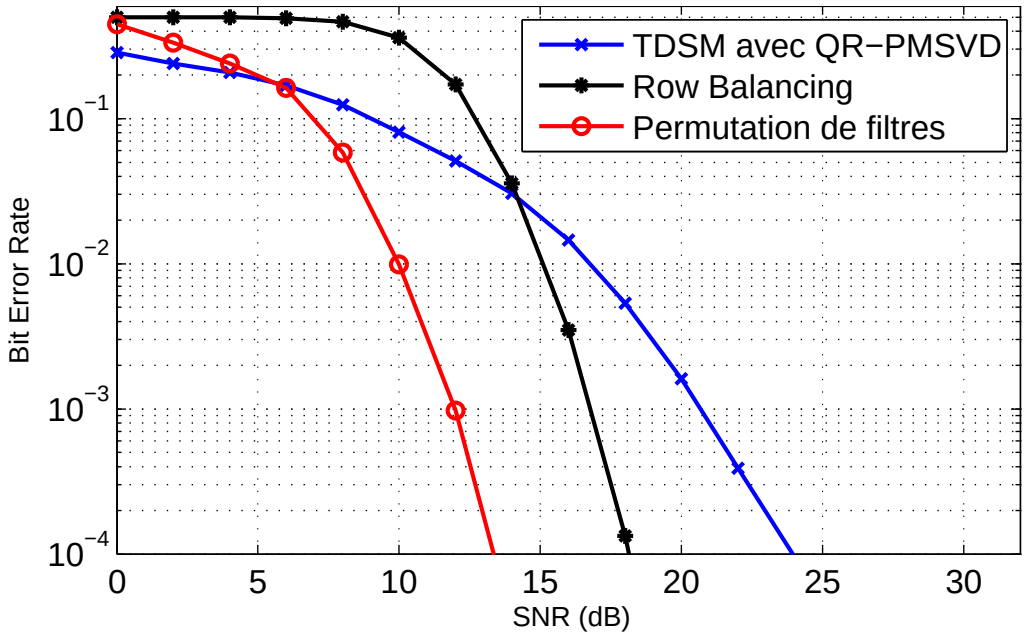



FIGURE 6.8 : Comparaison de BER entre le LU-PMD par permutation de filtre et le TDSM avec QR-PMSVD dans un schéma de multiplexage spatial.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le rôle du post-filtre sur l'amplification du bruit puis nous avons proposé deux solutions simples et efficaces. Nous avons montré dans un premier temps qu'une simple normalisation du post-filtre, en utilisant l'équilibrage des lignes, est suffisante pour améliorer de manière significative le conditionnement de la matrice de post-codage ainsi que la performance du système MIMO-OFDM. Cela a été confirmé par les performances en termes de taux d'erreur binaire, en comparaison avec l'approche TDSM de LU-PMD classique et celle avec QR-PMSVD.

Dans un second temps, nous avons constaté que la seconde étape de diagonalisation de $H(z)$ donne un filtre mieux conditionné que la première étape de triangularisation. Partant de ce fait nous avons proposé un nouveau schéma de multiplexage spatial, basé sur une permutation des filtres pré-codeur et post-codeur, meilleur que le précédent puisqu'il améliore encore le post-filtrage. Nous pouvons nous permettre de réaliser cette permutation puisque le pré-filtre n'a aucun impact sur le bruit. Les performances obtenues avec cette approche ont rendu le TDSM avec LU-PMD encore plus compétitif et meilleur que le TDSM avec PMSVD même en faible rapport signal à bruit.

# Conclusions et perspectives

## 7.1 Conclusions

Dans un système MIMO large bande, les signaux reçus sur les différentes antennes de réceptions constituent un mélange convolutif des versions de signaux pondérées et retardées issus des différentes antennes d'émission. Ces différents retards observés peuvent être causés par la variation des vitesses de propagation des signaux dans le milieu parcouru. L'un des modèles les plus réalistes, qui tient compte de ces faits, représente le canal MIMO par une matrice polynomiale. Des techniques de séparation traditionnelles en réception, tentent d'éliminer la nature polynomiale du canal correspondant en raison de sa nature dispersive dans le temps. Elles sont conçues essentiellement pour convertir le problème large bande en problèmes à bandes étroites. Mais récemment il y' a des propositions d'algorithmes de décomposition de matrice polynomiale permettant de réaliser directement la séparation des flux dans le domaine temporel. Malheureusement ils sont souvent approximatifs et complexes en coût de calcul.

Dans cette thèse nous avons proposé un schéma de multiplexage spatial dans le domaine temporel qui transforme le canal MIMO large bande en plusieurs canaux SISO à bruit additif. Cela se fait par la mise en place d'un pré-filtre et d'un post-filtre respectivement en émission et en réception dont les fonctions de transfert sont déduites de la factorisation de la matrice du canal MIMO. Ce schéma est basé sur un algorithme de décomposition de matrice polynomial à base de LU nommé LU-PMD. Cet algorithme, contrairement aux autres méthodes de décomposition, fournit une diagonalisation complète de la matrice polynomiale du canal MIMO, sans approximation, avec des facteurs polynômiaux d'ordre raisonnable. Dans un système MIMO, ces caractéristiques permettent d'éliminer complètement les CCI. La matrice diagonale avec des éléments souvent égaux à 1 fait que le système ne nécessite pas d'égalisation dans tous ces canaux SISO correspondants, donc un récepteur moins complexe. Cependant les filtres issus de notre proposition ne présentent pas des caractéristiques de para-unitarité, primordiales en post-codage à cause

du bruit qui risque d'être amplifiée. À cet effet, la deuxième partie de cette thèse a été consacrée à des propositions pour une améliorations de ces filtres afin que notre proposition puisse concurrencer les autres approches même dans un environnement perturbé. Les résultats obtenus sont très satisfaisants.

Le **chapitre 1** nous a permis de faire l'état de l'art des systèmes communications multi-antennes. Il présente, dans un premier temps, une étude sur le canal de propagation ainsi que les modèles de canal MIMO présent dans la littérature. Ensuite les types de diversité exploités par la technologie MIMO ont été présentés. Nous y avons étudié, particulièrement, les différentes techniques d'émission ainsi que les techniques de séparation et d'égalisation en réception des systèmes MIMO à bande étroite et large bande.

Le **chapitre 2** a été consacré à l'étude des techniques de décomposition de matrice polynomiale. Nous avons montré d'abord que leur utilisation dans un contexte MIMO large bande permet d'éliminer les interférences co-canal (CCI). Cependant, il ressort de cette étude que ces algorithmes sont approximatifs car un paramètre d'arrêt est souvent utilisé pour permettre à l'algorithme de converger. Cela fait que les éléments hors diagonale ne sont pas complètement annulés. Par conséquent les CCI ne sont pas complètement éliminées. Nous avons aussi montré que ces algorithmes sont très couteux en calcul à cause de leur exécution itérative. De même, l'application des matrices de retard impose des modèles de polynômes de Laurent et donc une perte de la causalité du système. Cette étude a aussi montré qu'il est difficile de déterminer à l'avance l'ordre des matrices polynomiales car à chaque itération il augmente. Les techniques de troncature proposées pour limiter l'ordre des polynômes peuvent impacter la para-unitarité. Nous avons aussi constaté que pour une application aux systèmes MIMO, parmi toutes ces méthodes, l'algorithme PSVD par PQRD appelé ici QR-PMSVD présentait les meilleures caractéristiques, car pour un même niveau décomposition, il converge beaucoup plus rapidement. En plus son erreur de décomposition est contrôlable. Cela a justifié son adoption dans cette thèse pour comme référence de comparaisons de performances.

Dans le **chapitre 3**, nous avons présenté une autre méthode de décomposition de matrice polynomiale pour un canal MIMO large bande. Cette méthode est une alternative aux imperfections des algorithmes présentés en chapitre 2. Elle est à base de la décomposition LU classique ; nous l'avons appelé LU-PMD. Cette méthode est une combinaison de deux méthodes classiques de factorisation matricielle : la forme canonique de Smith et l'élimination LU de Gauss. L'inversion du facteur unimodulaire est immédiate et peut être réalisée avec la complexité $O(1)$. Nous avons montré qu'avec cet algorithme, la factorisation de n'importe quelle matrice polynomiale fournit une matrice parfaitement

diagonale sans approximation. Dans un contexte MIMO, il n'est pas nécessaire de modéliser le canal par une matrice de polynômes de Laurent, donc le système MIMO en question conserve la causalité.

Le **chapitre 4** a été consacré à l'utilisation de notre décomposition LU-PMD pour la mise en place de schéma d'un multiplexage spatial V-BLAST dans le domaine temporel en MIMO large bande (TDSM). Une étude des capacités et de la complexité a été réalisé en comparaison avec un multiplexage spatial à base de QR-PMD. Il en est ressorti que la capacité de canal obtenue avec la décomposition LU-PMD proposée ne peut certes pas atteindre le capacité réelle du canal MIMO à cause de la propriété de non unitarité de son filtre post-codeur qui a tendance à amplifier le bruit. Néanmoins, à égale complexité, la capacité obtenue est meilleure que celle avec la décomposition SVD de matrice polynomiale à base de QR (QR-PMSVD).

Dans le **chapitre 5**, nous avons intégré le schéma de multiplexge spatial dans le domaine temporel (TDSM) du chapitre 4 dans une chaine de transmission MIMO-OFDM complète avec les paramètres de la technologie de communication sans fil WiMax, pour faire l'analyse de ses performances en termes de taux d'erreur binaire (BER). Les performances obtenues avec ce nouveau schéma de TDSM avec LU-PMD ont fait l'objet de comparaison avec le TDSM via QR-PMSVD et aussi avec l'approche classique qui réalise le multiplexge spatial dans le domaine fréquentiel dénommé FDSM. L'étude a montré que, comme dans le FDSM classique, le schéma TDSM avec LU-PMD proposé élimine complètement toutes les ICC tout en minimisant l'ISI. Alors que, l'approche TDSM avec le QR-PMSVD ne peut pas annuler complètement les CCI. Elle n'élimine pas non plus l'ISI induite par la longue durée des réponses impulsionnelles de ses canaux SISO résultants, à moins qu'une extension du CP ne soit considérée. En outre contrairement au FDSM classique qui ne peut être utilisé que dans les systèmes MIMO-OFDM, le TDSM proposé convient aussi bien à la configuration multi-porteuses que mono-porteuse. Nous avons également montré qu'en MIMO-OFDM nous pouvons l'utiliser sans CP avec un nouveau schéma qui rend la dernière antenne redondante. Cette approché a été dénommé ORA-SM. Cependant le filtre post-codeur de notre proposition à tendance à amplifier le bruit en sortie de filtre.

Le **chapitre 6** a donc été consacré à l'optimisation du post-filtre. Nous avons, à cet effet, étudié d'abord l'origine de cette amplification de bruit en sortie filtre. Les études ont montré que le problème vient d'une valeur puissance de filtre trop grande et surtout d'une mauvaise conditionnement de la matrice de post-codage. Nous avons ensuite émis deux propositions très efficace pour améliorer le conditionnement de la matrice en

question et du coup les performances du système. La première méthode proposée réalise une normalisation du post-filtre, en utilisant un équilibrage des lignes. Elle a amélioré de manière significative le conditionnement de la matrice de post-codage et donc des performances du système MIMO-OFDM. La deuxième méthode proposée, qui améliore encore mieux le conditionnement du post-filtre et les performances en BER, est basée sur une permutation entre post-filtre et pré-filtre. Elle a été inspiré par le fait que ce dernier est toujours mieux conditionné grâce au fait que sa détermination ne nécessite pas l'étape réduction de pivot à 1. Nous avons aussi montré que les performances obtenues avec cette nouvelle approche ont rendu le TDSM avec LU-PMD encore plus compétitif et meilleur que le TDSM via QR-PMSVD même dans un environnement perturbé avec un faible rapport signal à bruit.

## 7.2 Perspectives

Pour la continuité de nos recherches, plusieurs pistes se sont dégagées à la suite de ces travaux.

1. Nous savons que la remontée de l'information du canal de l'émetteur vers le récepteur par "feedback" est un vrai problème en transmission sans fil. L'amélioration du post-filtre, pour qu'il n'amplifie plus la puissance du bruit de sortie, a élargi le champs d'application de la méthode de factorisation LU-PMD. En effet, il est possible de l'utiliser désormais dans les systèmes de transmission où l'état du canal (CSI) n'est disponible qu'au niveau du récepteur. Dans ce cas, on utilise uniquement un post-filtre du coté du récepteur ainsi le canal MIMO équivalent devient triangulaire. La mise en place d'un schéma de décodage SIC (Successive Interference Cancellation) en MIMO large bande dans le domaine temporel devient ainsi possible avec moins de complexité grâce aux avantages sus-mentionnés de l'algorithme proposé par rapport aux autres méthodes.
2. Nous avons aussi montré que le schéma de multiplexage spatial en V-BLAST avec LU-PMD présente de bonnes performances même sans l'utilisation de l'OFDM. Or nous savons que la formulation de la 5G est basée sur la technologie MIMO en NOMA (Non Orthogonal Multiple Access) combinée avec le SIC, donc il apparait clairement que l'utilisation de notre proposition dans cette technologie de dernière génération est plus que pertinente.
3. Au cours de cette thèse nous avons aussi présenté un nouveau schéma multiplexage spatial MIMO-OFDM qui ne nécessite de pas l'utilisation d'un prefixe cy-

clique (CP), nous l'avons nommé ORA-SM. Le principe de cette technique est basé sur le fait que avec LU-PMD transforme le canal MIMO en plusieurs canaux SISO à bruit additif simple sauf le dernier. À cet effet si nous considérons la dernière antenne du système MIMO comme étant redondante, en n'y transmettant aucune donnée utile, dans ce cas l'utilisation du CP ne serait plus une nécessité. L'idée donc est d'appliquer le ORA-SM en Massive MIMO (ou Dense MIMO) qui est une technologie qui utilise un nombre très élevé d'antennes. L'étude consisterait donc à déterminer entre le fait d'utiliser une antenne en redondance, sans utiliser de CP et le fait d'utiliser du CP (méthode classique) en Massive MIMO-OFDM, quelle serait la configuration qui présenterait une meilleure efficacité spectrale.

# Annexe A

# Liste des publications

## A.1 Revue Internationale

- ***"LU-Based Beamforming Schemes for MIMO Systems"***. Moustapha MBAYE, Moussa DIALLO et Mamadou MBOUP. IEEE Transactions on Vehicular Technology 66(3) : 2214-2222, (2017)
- ***"Improved post-filter for an efficiency LU-based spatial multiplexing scheme"***. Moustapha MBAYE, Moussa DIALLO et Mamadou MBOUP. En phase de rédaction

## A.2 Conférences Internationales

- ***"'Unimodular-Upper polynomial matrix decomposition for MIMO spatial multiplexing"***. Moustapha MBAYE, Moussa DIALLO et Mamadou MBOUP. IEEE Signal Processing Advances in Wireless Communications(SPAWC), 2014.
- ***"'Efficient postcoding filter in LU-based beamforming scheme"***. Mamadou MBOUP, Moussa DIALLO et Moustapha MBAYE. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2017.
- ***"UU polynomial matrix decomposition applying in 802.11ac beamforming"***. Moustapha MBAYE, Moussa DIALLO et C. A. Bamba GUEYE, Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées (ARIMA) Vol. 25, 2016.
- ***"Feedback overhead comparison between frequency SVD and time domain beamforming in WLAN context"***, Papis NDIAYE, Moussa DIALLO, Moustapha MBAYE et Idy DIOP, CommNet (2018).

- ***"Efficient Lossless Feedback Compression for FDD Massive MIMO"***, Papis NDIAYE, Moussa DIALLO, Moustapha MBAYE et Idy DIOP. International Wireless Communications and Mobile Computing Conference (IWCMC) 2019
- ***"Feedback of the Channel Information for Transmit Beamforming in WLAN"***, C. ILOKI, Moustapha MBAYE et Moussa DIALLO. IEEE EuCAP 2015, page 1-6, Avril 2015

# Bibliographie


[1] V. Kühn : ***"Wireless Communication Over MIMO Channels"***. J. Wiley & sons Ltd 2006, 2006.

[2] I. E. Telatar : "Capacity of multi-antenna Gaussian channels". ***ATT Bell Labs tech. memo***, 1995.

[3] L. Boithias : ***"Propagation des ondes radio électriques dans l'environnement terrestre"***. Dunod, Paris, 1984.

[4] L. Boithias : ***"Radio wave propagation"***. McGraw-Hill, 1987.

[5] A. F. Molisch : ***"Wireless Communications"***. 2nd edition. Wiley, 2010.

[6] W. C. Y. Lee : ***"Mobile Communications Engineering : Theory and Applications "***. McGraw-Hill Professional, 1997.

[7] J. Parsons : ***"The Mobile Radio Propagation Channel"***. J. Wiley & Sons, 2001.

[8] J. R. Hampton : ***" Introduction to MIMO Communications"***. Cambridge University Press, 2013.

[9] A. Goldsmith : ***"Wireless Communications"***. New York, NY : Cambridge University Press, 2005.

[10] B. Sklar : "Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems". ***IEEE Communications Magazine***, 35 :90–100, 1997.

[11] S. M. Lopez : ***"Contributions au sondage de canal à l'intérieur des bâtiments : direction de départ, étalement Doppler, polarisation des ondes reçues et modélisation de canaux UWB "*** . Thèse de doctorat, Paris, ENST, 2008.

[12] J. M. Wozencraft : ***"Principles of Communication Engineering"***. John Wiley & Sons inc., 1965.

[13] H. Hashemi : "The Indoor Radio Propagation Channel". ***Proceedings of the IEEE***, 81 :943–968, 1993.

[14] F. Babich et G. Lombardi : "Statistical analysis and characterization of the indoor propagation channel". ***IEEE Transactions on Communications***, 48 :455–464, 2000.

[15] A. Chebihi : ***"Conception de systèmes multi-antennaires pour la diversité et le MIMO en téléphonie mobile"***. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, Nice, France, 2011.

[16] I. Ouachani : ***"Performance analysis of communication systems wireless operator Micro and Macro Diversity"***. Thèse de doctorat, University of Paris XI Rosary, Paris, France, 2005.

[17] J. B. Anderson : "Antenna arrays in mobile communications : gain, diversity, and channel capacity". ***IEEE Antennas and Propagation Magazine***, 42 :12–16, 2000.

[18] M. K. Simon et M. S. Alouini : ***"Digital Communications over Fading Channels"***. John Wiley & Sons, New York, 2000.

[19] T. M. Duman et A. Ghrayeb : "Coding for MIMO Communication Systems". ***Wiley-Blackwell (an imprint of John Wiley & Sons Ltd)***, 2007.

[20] L. J. Chu : "Physical Limitations of Omnidirectional Antennas". ***Journal of Applied Physics***, 19 :1163-–1175, 1948.

[21] Y. Gao : ***"Characterisation of Multiple Antennas and Channel for Small Mobile Terminals"***. Thèse de doctorat, University of London, London, UK, 2007.

[22] R. G. Vaughan : "Polarization diversity in mobile communications". ***IEEE Transactions on Vehicular Technology***, 39 :177–186, 1990.

[23] A. Diallo : ***"Systèmes multi-antennes pour diversité et mimo"*** . Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, Nice, France, 2007.

[24] D. G. Brennan : " Linear Diversity Combining Techniques". ***Proceedings of the IRE***, 47 :1075 – 1102, 1959.

[25] H. C. Yang et M. S. Alouini : "Improving the performance of switched diversity with post-examining selection". ***IEEE Transactions on Wireless Communications***, 5 :67–71, 2006.

[26] T. Lee et Z. Lee : "A Beamspace Diversity Combiner for Sector Division Multiple Access Communications". ***IEEE Antennas and Propagations Society Symposium Digest, Atlanta***, pages 372–375, 1998.

[27] X. Cai et G. B. Giannakis : "Performance Analysis of Combined Transmit Selection Diversity and Receive Generalized Selection Combining in Rayleigh Fading channels". ***IEEE Transactions on Wireless Communications***, 2004.

[28] S. H. Tsai : "Equal gain precoder in Rayleigh Fading Channels". ***IEEE Trans. Signal Process***, 57 :3717–3721, 2009.

[29] N. Kong et L. B. Milstein : "Average SNR of a generalized diversity selection combing scheme". ***IEEE Commun. Lett.***, 3 :57–59, 2000.

[30] L. G. Ordóñez, D. P. Palomar et J. R. Fonollosa : "On the diversity, multiplexing, and array gain tradeoff in MIMO channels". ***Information Theory Proceedings , IEEE Int. Symposium on***, 2010.

[31] R. B. Ertel, P. Cardieri, K. W. Sowerby, T. S. Rappaport et J. H. Reed : "Overview of spatial channel models for antenna array communication systems". ***Wireless Personal Communications***, 2 :311–335, 1998.

[32] L. Zheng et D. N. C. Tse : "Diversity and multiplexing : a fundamental tradeoff in multiple-antenna channels". ***IEEE Trans. Inform. Theory***, 49 :1073–1096, 2003.

[33] O. BERDER : ***"Optimisation and stratégies d'allocation de puissance des systèmes de transmission multi-antennes."***. Thèse de doctorat, université de Bretagne occidentale, France, 2002.

[34] H. Ozcelik : ***"Indoor MIMO channel models"***. Thèse de doctorat, Technische Universitt Wien, Vienna, Austria, 2004.

[35] C. N. Chuah, D. N. C. Tse, J. M. Kahn et R. A. Valenzuela : "Capacity scaling in mimo wireless systems under correlated fading". ***IEEE Trans. on Information Theory***, 48, 2002.

[36] D. S. Shiu : ***"Wireless communication using dual antenna arrays"***. Kluwer Academic Publisher, 2000.

[37] D. Shiu, G. Foschini, M. J. Gans et J. M. Kahn : "Fading correlation and its effect on the capacity of multi-element antenna systems". ***IEEE Transactions on Communications***, 48 :502–513, 2000.

[38] J. W. Wallace et M. A. Jensen : "Statistical characteristics of measured MIMO wireless channel data and comparison to conventionnal models". ***IEEE Vehicular Technology Conference***, 2 :1078–1082, 2001.

[39] C.N. Chuah, J.M. Kahn et D. Tse : "Capacity of multi-antenna array systems in indoor wireless environment ". ***IEEE Global Communications Conference***, 4 :1894–1899, 1998.

[40] A. Chockalingam et B. S. Rajan : ***"Large MIMO Systems"***. U.K. Cambridge Univ. Press, 2014.

[41] N. Prayongpun : ***" Modélisation et étude de la capacité du canal pour un système multi-antennes avancé exploitant la diversité de polarisation."***. Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier Grenoble I, France, 2009.

[42] D. Gesbert, H. Bolcskei, D. A. Gore et A.J. Paulrajs : "Outdoor MIMO wireless channels : models and performance prediction". ***IEEE Transactions on Communications***, 50 :1926 – 1934, 2002.

[43] K. Yu et B. Ottersten : "Models for MIMO propagation channels : a review". ***Wireless Communications & Mobile Computing***, 2002.

[44] K. Yu, M. Bengtsson, B. Ottersten, D. McNamara, P. Karlsson et M. Beach : "Second order statistics of nlos indoor mimo channels based on 5.2 ghz measurements". ***IEEE Transactions on Wireless Communications***, 1 :156–160, 2001.

[45] J. P. Kermoal, L. Schumacher, K. I. Pedersen, P. E. Mogensen et F. Frederiksen : "A stochastic MIMO radio channel model with experimental validation". ***IEEE J. Sel. Areas Commun.***, 20 :1211–1226, 2002.

[46] K. Yu, M. Bengtsson, B. Ottersten, D. McNamara, P. Karlsson et M. Beach : "Measurement analysis of NLOS indoor MIMO channels". ***in Proceedings IST Mobile Communications Summit***, pages 277–282, 2001.

[47] W. Weichselberger, M. Herdin, H. Ozcelik et E. Bonek : ***"Spatial structure of multiple antenna radio channels – a signal processing viewpoint"***. Thèse de doctorat, Technische Universitt Wien, Vienna, 2003.

[48] W. Weichselberger, M. Herdin, H. Ozcelik et E. Bonek : "A stochastic MIMO channel model with joint correlation of both link ends". ***IEEE Trans. Wireless Commun.***, 5 :90–100, 2006.

[49] G. J. Foschini et M. J. Gans : "On Limits of Wireless Communications in a Fading Environments When Using Multiple Antennas.". ***Wireless Personal Communications***, 6 :311–335, 1998.

[50] D. Tse et P. Viswanath : ***"Fundamentals of Wireless Communication"***. Cambridge University, UK, 2005.

[51] Cost207 : ***"Information Technologies and Sciences - Digital Land Mobile Radio Communications"***. Commission of the European Communities, 1988.

[52] Universal Mobile Telecommunications System (UMTS) : "Selection procedure for the choice of radio transmission technologies of UMTS". ***UMTS 30.03 version 3.2.0 ETSI***, 1998.

[53] K. Yu, M. Bengtsson, B. Ottersten, D. McNamara et P. Karlsson : "Modeling of wideband MIMO radio channels based on NLoS indoor measurements". ***IEEE Trans. Veh. Technol.***, 53 :655–665, 2004.

[54] V. Tarokh, N. Seshardi et A. R. Calderbank : "Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communications : Performance Criterion and Code Construction". ***IEEE Trans. Inform. Theory***, 44 :744–765, 1998.

[55] V. Tarokh, A. Naguib, N. Seshadri et A. R. Calderbank : "Space-time codes : performance criteria in the presence of channel estimation errors, mobility and multiple paths". ***IEEE Transaction on Communications***, page 199–207, 1999.

[56] V. Tarokh, H. Jafarkhani et A. R. Calderbank : "Space-Time Block Coding for Wireless Communications : Performance Results". ***IEEE J. Select. Areas Commun***, 17 :451–460, 1999.

[57] S. M. Alamouti : "A simple diversity technique for wireless communications". ***IEEE Journal on Selected Areas in Communications***, page 1451–1458, 1998.

[58] V. Tarokh, H. Jafarkhani et A. R. Calderbank : "Space-time block codes from orthogonal designs". ***IEEE Transaction on Communications***, page 1456–1467, 1999.

[59] D. Gesbert, M. Shafi, D. Shiu, P.J. Smith et A. Naguib : "From theory to practice : An overview of MIMO space-time coded wireless systems". ***IEEE Journal on Selected Areas in Communications***, 21 :281–302, 2003.

[60] A. Hjorungnes, J. Aktar et D. Gesbert : "Precoding for space time block codes in (non-) kronecker correlated mimo channels". ***In Proc. of the 12th European Signal Processing Conference***, 2004.

[61] and K. Abed-Meraim M. O. Damen et J. C. Belfiore : "Diagonal algebraic space-time block codes". ***IEEE Trans. Info. Theory***, 48 :628–636, 2002.

[62] G. D. Golden, C. J. Foschini, R. A. Valenzuela et P. W. Wolniansky : "Detection algorithm and initial laboratory results using the VBLAST spacetime communication architecture". ***Electronic Letters***, 35, 1999.

[63] J. Winters : "On the Capacity of Radio Communication Systems with Diversity in a Rayleigh Fading environment". ***IEEE Journal on Selected Areas in Communications***, 5 :871–878, 1987.

[64] M. F. Demirkol : ***"Resource allocation for interfering MIMO links"*** . Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology, 2003.

[65] T. Cover et J. Thomas : ***"Elements of Information Theory"***. New York : Wiley, 1991.

[66] P. W. Wolniansky : "V-BLAST : An architecture for realizing very high data rates over the rich- scattering wireless channel". ***International Symposium on Signal, Systems and Electronics (ISSSE)***, page 295–300, 1998.

[67] G. J. Foschini : "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multiple antennas". ***Bell Labs Technical Journal***, page 41–59, 1996.

[68] G. B. Giannakis, Z. Liu, X. Ma et S. Zhou : ***"Space Time Coding for Broadband Wireless Communications"***. Wiley-Interscience, 2003.

[69] X. Li, H. Huang, G. J. Foschini et R. A. Valenzuela : "Effects of iterative detection and decoding on the performance of BLAST". ***IEEE Global Telecommunications Conference (Globecom)***, 2 :1061–1066, 2000.

[70] and S. Parkvall E. Dahlman, J. Skold et P. Beming : "3G Evolution : HSPA and LTE for Mobile Broadband ". ***Elsevier, Oxford, CA USA, 2nd edition***, page 648, 2008.

[71] M. K. Varanasi et T. Guess : "Optimum Decision Feedback Multi-User Equalization with Successive Decoding Achieves the Total Capacity of the Gaussian Multiple-Access Channel". ***In Proceedings of the 31th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers***, 2 :1405–1409, 1997.

[72] K. J. Kim et J. Yue : "Joint Channel Estimation and Data Detection Algorithms for MIMO–OFDM Systems". ***In Proceedings of the 36th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers***, 2 :1857–1861, 2002.

[73] S. Shahbazpanahi, A. B. Gershman et J. H. Manton : "Closed-form blind MIMO channel estimation for orthogonal space-time block codes". ***IEEE Transactions on Signal Processing***, 53 :4506 – 4517, 2005.

[74] M. Biguesh et A. B. Gershman : "MIMO channel estimation : optimal training and tradeoffs between estimation techniques". ***Communications,IEEE International Conference on***, 2004.

[75] J. C. Roh et B. D. Rao : "Multiple antenna channels with partial channel state information at the transmitter". ***IEEE Transactions on Wireless Communications***, page 677–688, 2004.

[76] S. Zhou et G. Giannakis : "Optimal transmitter eigen-beamforming and space-time block coding based on channel mean feedback.". ***IEEE Transactions on Signal Processing***, 2002.

[77] C. Iloki, M. Mbaye et M. Diallo : "Feedback of the channel information for transmit beamforming in WLAN". ***Antennas and Propagation (EuCAP), 2015 9th European Conference on***, 2015.

[78] J. Kim et C. Aldana : "Efficient feedback of the channel information for closedloop beamforming in WLAN". ***Vehicular Technology Conference. VTC-Spring. IEEE 63rd***, 2006.

[79] T. M. Duman et A. Ghrayeb : ***"Coding for MIMO Communication Systems"***. Wiley, 2005.

[80] S. Verdu : ***"Multiuser Detection"***. UK : Cambridge University Press, 1998.

[81] M. O. Damen, A. Chkeif et J. C. Belfiore : "A Generalized Sphere Decoder for Asymmetrical Space-Time Communication Architecture". ***In IEEE Electronic Letters***, 36, 2000.

[82] M. O. Damen, A. Chkeif et J. C. Belfiore : "Lattice Code Decoder for Space-Time Codes". ***IEEE Communications Letters***, 4 :166–169, 2000.

[83] G. J. Foschini, G. D. Golden, R. A. Valenzuela et P. W. Wolniansky : "Simplified processing for high spectral efficiency wireless commun ication employing multi-element arrays". ***IEEE JSAC***, 17, 1999.

[84] A. Paulraj, R. Nabar et D. Gore : "Introduction to Space-Time Wireless Communications". ***Cambridge University Press***, 2003.

[85] G. Raleigh et J. Cioffi : "Spatio-temporal coding for wireless communication". ***IEEE Transactions on Communications***, 46 :357–366, 1998.

[86] R. Lambert : ***" Multichannel Blind Deconvolution : FIR Matrix Algebra and Separation of Multipath Mixtures"*** . Thèse de doctorat, University of Southern California Department of Electrical Engineering, Los Angeles, 1996.

[87] J. Cooley et J. Tukey : "An algorithm for the machine calculation of the complex fourier series". ***Mathematics of Computation***, 19 :297–301, 1965.

[88] J. G. McWhirter, P. D. Baxter, T. Cooper, S. Redif et J. Foster : "An EVD Algorithm for Para-Hermitian Polynomial Matrices". ***IEEE Trans. Signal Process***, 55 :2158–2168, 2007.

[89] P. Smaragdis : "Blind separation of convolved mixtures in the frequency domain". ***Neurocomputing***, 22 :21–34, 1998.

[90] C. Ta et S. Weiss : "A design of precoding and equalisation for broadband MIMO systems". ***in 41st Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers***, page 1616–1620, 2007.

[91] S. Weiss, S. Redif, T. Cooper, D. Baxter C. LiuPaul et J. G. McWhirter : "Paraunitary oversampled filter bank design for channel coding". ***EURASIP Journal on Advances in Signal Processing***, page 1–10, 2006.

[92] A. Scaglione, P. Stoica, S. Barbarossa, G. B. Giannakis et H. Sampath : "Optimal designs for space-time linear precoders and decoders". ***IEEE Transactions on Signal Processing***, 50 :1051–1064, 2002.

[93] C. E. Shannon : "A Mathematical Theory of Communication". ***The Bell System Technical Journal***, 27 :379–423, 623–656, 1948.

[94] D. N. Tse : "Optimal power allocation over parallel Gaussian broadcast channels". ***Information Theory. Proceedings. IEEE International Symposium on***, 1997.

[95] G. Scutari et D. P. Palomar : "The MIMO Iterative Waterfilling Algorithm". ***IEEE Transactions on Signal Processing***, 57 :1917 – 1935, 2009.

[96] T. Kailath : ***"Linear Systems"***. Prentice-Hall International Inc., 1980.

[97] A. Medles et D.T.M. Slock : "Linear precoding for spatial multiplexing MIMO systems : blind channel estimation aspects". ***IEEE International Conference on Communications***, page 401–404, 2002.

[98] L. Rota, P. Comon et S. Icart : "Blind MIMO paraunitary equalizer". ***IEEE Int Conf. on Acoustics Speech and Signal Processing***, 2003.

[99] P. V. Dooren, P. Dewilde et J. Vandewalle : "On the determination of the Smith-Macmillan form of a rational matrix from its Laurent expansion". ***IEEE Transactions on Circuits and Systems***, 26 :180 –189, 1979.

[100] P. Van Dooren : "Rational and polynomial matrix factorizations via recursive pole-zero cancellation". ***Linear Algebra and its Applications - Elsevier***, 1990.

[101] G. H. Golub et C. F. Van Loan : ***"Matrix Computation"***. The John Hopkins University Press, 1966.

[102] R. A. Horn et C. R. Johnson : ***" Matrix analysis"***. Cambridge University Press, 1990.

[103] J. O. Smith : ***"Introduction to Digital Filters : with Audio Applications"***. W3K Publishing, 35(4) :551-566, 2007.

[104] N. J. Higham : "Estimating the matrix p-norm". ***Springer***, 1992.

[105] P. P. Vaidyanathan : "Multirate system and filter Banks". ***Prentice Hall***, 1993.

[106] P. Regalia et D. Huang : "Attainable error bounds in multirate adaptive lossless fir filters". ***IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP)***, page 1460–1463, 1995.

[107] R. Lambert, M. Joho et H. Mathis : "Polynomial singular values for number of wideband sources estimation and principal components analysis". ***International Conference on Independent Component Analysis***, page 379–383, 2001.

[108] J. A. Foster, J. G. McWhirter et J. A. Chambers : "Limiting the order of polynomial matrices within the SBR2 algorithm". ***in Conference Digest : IMA Mathematics in Signal Processing, Cirencester, England***, 59 :93–97, 2006.

[109] M. Tohidian, H. Amindavar et A. M. Reza : "A DFT-based approximate eigenvalue and singular value decomposition of polynomial matrices.". ***EURASIP J. Adv. Signal Process.***, 2013.

[110] F. K. Coutts, K. Thompson, I. K. Proudler et S. Weiss : "A comparison of iterative and DFT-Based polynomial matrix eigenvalue decompositions". ***IEEE 7th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)***, 2017.

[111] J. A. Foster, J. G. McWhirter, M. R. Davies et J. A. Chambers : "An algorithm for calculating the QR and singular value decompositions of polynomial matrices". ***IEEE Transactions on signal processing***, 58 :1263–1274, 2010.

[112] J. A. Foster : ***"Algorithms and Techniques for Polynomial Matrix Decompositions"***. Thèse de doctorat, Cardiff University, United Kingdom, 2008.

[113] J. A. Foster, J. G. McWhirter et J. A. Chambers : " A polynomial matrix QR decomposition with application to MIMO channel equalisation". ***41st Asilomar Conference on Circuits, Signals Systems and Computers***, 2007.

[114] M. R. Davies : ***"Polynomial matrix decomposition techniques for frequency selective MIMO channels"***. Thèse de doctorat, Loughborough University, United Kingdom, 2010.

[115] G. W. Stewart. : ***"On the Early History of the Singular Value Decomposition"***. SIAM Review, 35(4) :551-566, 1992.

[116] J. G. McWhirter et P. D. Baxter : "A novel technique for broadband SVD". ***Workshop Adaptive Sensor Array Process***, 2004.

[117] J. G. McWhirter : "An algorithm for polynomial matrix SVD based on generalised Kogbetliantz transformations". ***Eupsico***, 18 :457–461, 2010.

[118] H. Zamiri et M. Rajabzadeh : "A Polynomial Matrix SVD Approach for Time Domain Broadband Beamforming in MIMO OFDM Systems". ***Vehicular Technology Conference, VTC Spring IEEE***, 2008.

[119] M. Mboup : "Sur la résolution de l'identité de Bezout pour l'égalisation autodidacte de systèmes mono-entrée– multi-sorties". ***GRETSI'99***, 4 :1113–1116, 1999.

[120] M. Mboup et M. Miranda : "A polynomial approach to the blind multichannel deconvolution problem". ***International Telecommunications Symposium (ITS2002)***, 2002.

[121] B. Zabavsky : "Diagonalizability theorems for matrices over rings with finite stable range". ***Algebra Discrete Math.***, 1 :151–165, 2005.

[122] B. Zabavsky et M. Zarichnyi : ***"Diagonal reduction of matrices over rings"***. VNTL Publishers, 2012.

[123] P. Lancaster et M. Tismenetsky : ***"The Theory of Matrices, Second Edition : With Applications"***. Academic Press, 1985.

[124] G. Villard : "Computation of Smith normal forms of polynomial mltrices". ***Internat. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation***, pages 209–217, 1993.

[125] S. Icart et P. Comon : "Some Properties of Laurent Polynomial Matrices". ***9th IMA Intern. Conf. on Math. in Sig. Proc.***, page 57–59, 2012.

[126] D. Cescato et H. Bolcskei : "QR Decomposition of Laurent Polynomial Matrices Sampled on the Unit Circle". ***Information Theory, IEEE Transactions on***, 56 : 4754–4761, 2010.

[127] A. Narula, M. J. Lopez, M. D. Trott et G. W. Wornell : "Efficient use of side information in multiple-antenna data transmission over fading channels". ***Eupsico***, 16 :423–1436, 1998.

[128] R. W. Heath et A. J. Paulraj : "Switching between diversity and multiplexing in MIMO systems". ***IEEE Transactions on Communications***, 53 :962 – 968, 2005.

[129] D. Chizhik : "Slowing the time-fluctuating MIMO channel by beamforming". ***IEEE Transactions on Wireless Communications***, 3 :1554–1565, 2004.

[130] C. R. Murthy, J. Zheng et B. D. Rao : "Multiple antenna systems with finite rate feedback". ***Military Communications Conference. MILCOM. IEEE***, 2005.

[131] D. A. Basnayaka et H. Haas : "MIMO Interference Channel Between Spatial Multiplexing and Spatial Modulation". ***IEEE Transactions on Communications***, 64 :3369–3381, 2016.

[132] S. Tsai : "An Equal Gain Transmission in MIMO Wireless Com-munications". ***Global Telecommunications Conference (GLOBECOM), IEEE***, pages 1–5, 2010.

[133] A. Goldsmith, and N. Jindal S. A. Jafar et S. Vishwanath : "Capacity Limits of MIMO Channels". ***IEEE Journal on Selected Areas in Communications***, 21 :684 – 702, 2003.

[134] E. Björnson, P. Zetterberg, M. Bengtsson et B. Ottersten : "Capacity limits and multiplexing gains of MIMO channels with transceiver impairments". ***IEEE Communications Letters***, 17 :91–94, 2012.

[135] R. S. Blum, J. H. Winters et N. R. Sollenberger : "On the capacity of cellular systems with MIMO". ***IEEE Communications Letters***, 2 :242–244, 2002.

[136] S. Catreux, L. J. Greenstein et P. F. Dressen : "Simulation results for an interference-limited multiple-input multiple-output cellular system". ***IEEE Communications Letters***, 4 :334–336, 2000.

[137] C. Ta et S. Weiss : "A Design of Precoding and Equalisation for Broadband MIMO Transmission". ***DSPenabledRadio, 2005. The 2nd IEEE/EURASIP Conference on (Ref. No. 2005/11086)***, 2005.

[138] J. Hansen : "Analytic calculation of the power delay profile for single room WLAN environments". ***Globecom***, 1 :98–102, 2000.

[139] J. Hansen : "An analytical calculation of power delay profile and delay spread with experimental verification". ***IEEE Communications Letters***, 7 :257–259, 2003.

[140] H. Bolcskei, D. Gesbert et A. Paulraj : " On the capacity of OFDM-based spatial multiplexing systems". ***IEEE Transactions on Communications***, 50 :225–234, 2002.

[141] "IEEE P802.11ac/D0.2". ***IEEE Std. Draft***, 2013.

[142] wimaxforum : "Mobile WiMAX – Part II : A Comparative Analysis". ***IWiMAX Forum***, 2006.

[143] E. Başar : "Index modulation techniques for 5G wireless networks". ***IEEE Wireless Communications Letters***, 4 :381–384, 2015.

[144] Z. Wang et G. B. Giannakis : "Wireless multicarrier communications : where Fourier meets Shannon". ***IEEE Signal Processing Magazine***, 17 :29–48, 2000.

[145] S. B. Weinstein : "The history of orthogonal frequency-division multiplexing [History of Communications]". ***IEEE Communications Magazine***, 47 :26–35, 2009.

[146] A. Peled et A. Ruiz : "Frequency domain data transmission using reduced computational complexity algorithms". ***IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing***, 5 :964–967, 1980.

[147] D. P. Palomar, J. M. Cioffi et M. A. Lagunas : "Joint Tx-Rx beamforming design for multicarrier MIMO channels : a unified framework for convex optimization". ***IEEE Transactions on Signal Processing***, 51 :2381–2401, 2003.

[148] M. Vu et A. Paulraj : "MIMO Wireless Linear Precoding". ***IEEE Signal Processing Magazine***, 24 :86–105, 2007.

[149] J. G. Andrews, A. Ghosh et R. Muhamed : ***"Fundamentals of WiMAX : Understanding Broadband Wireless Networking"***. Prentice-Hall International Inc., 2007.

[150] S. P. Alex et L.M. Jalloul : "Performance Evaluation of MIMO in IEEE802.16e/WiMAX". ***IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing***, 2 :181–190, 2008.

[151] M. S. Fernandez, S. Zazo et R. Valenzuela : "Performance comparison between beamforming and spatial multiplexing for the downlink in wireless cellular systems". ***IEEE Transactions on Wireless Communications***, 6, 2007.

[152] L. Hanzo, Y. Akhtman, L. Wang et M. Jiang : ***"MIMO-OFDM for LTE, WiFi and WiMAX : Coherent versus Non-coherent and Cooperative Turbo Transceivers"***. Wiley, 2010.

[153] R. Jain : "Channel models : A tutorial ". ***WiMAX forum AATG***, 2007.

[154] Z. M. Elkwash, N. M. Shebani, M. A. Mjahed, A. M. Masoud et R. M. Elmareymi : "Effect of cyclic prefix on data rates in WiMAX system with variation in delay vector, gain vector, signal to noise ratio and coding rates for different modulation techniques". ***Technological Advances in Electrical, Electronics and Computer Engineering***, 2013.

[155] P. Payaswini et D. H. Manjaiah : "Analysis of effect of cyclic prefix on data rates in OFDM modulation techniques". ***International Journal of Adv. Computer and mathematical Sciences***, 3 :465–470, 2012.

[156] J. Vieira, S. Malkowsky, K. Nieman et Z. Miers : "A flexible 100-antenna testbed for Massive MIMO". ***In IEEE GLOBECOM***, 2014.

[157] J. Proakis : ***"Digital Communications"***. 4th Edition, McGraw-Hill, New York, 2001.

[158] Y. Wang, L.h. Wang, J. Ge et B. Ai : "Nonlinear companding transform technique for reducing PAPR of ODFM signals". ***IEEE Transactions on Consumer Electronics***, 58, 2012.

[159] S. Muller et J. Huber : "A comparison of peak power reduction schemes for OFDM". ***in Proceedings of IEEE GLOBECOM***, pages 1–5, 1997.

[160] Y. U. Itankar et A. Chockalingam : "Frequency Domain Turbo Equalization for MIMO-CPSC Systems with Large Delay Spreads". ***IEEE VTC Spring***, page 1–5, 2012.

[161] and H. Wang Q. Cui, P. Hu, P. Zhang X. Tao, J. Hamalainen et L. Xia : "Evolution of limited feedback CoMP systems from 4G to 5G". ***IEEE vehicular technologie magazine***, pages 94–103, 2014.

[162] E. Osborne : "On pre-conditioning of matrices". ***J. Assoc. Comput. Mach.***, 7 :338–345, 1960.

[163] F. Perez-Fontan et P. M. Espineira : ***"Modelling the Wireless Propagation Channel : A Simulation Approach With MATLAB"***. J. Wiley, 2008.