



HAL
open science

Méthodes rigoureuses par décomposition de domaines pour la diffusion électromagnétique par une surface rugueuse 2D

Yunniel Arencibia Noa

► **To cite this version:**

Yunniel Arencibia Noa. Méthodes rigoureuses par décomposition de domaines pour la diffusion électromagnétique par une surface rugueuse 2D. Electronique. UNIVERSITE DE NANTES, 2019. Français. NNT: . tel-02443916

HAL Id: tel-02443916

<https://hal.science/tel-02443916>

Submitted on 17 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE NANTES

COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601

*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*

Spécialité : Electronique

Par

Yunniel ARENCIBIA NOA

Méthodes rigoureuses par décomposition de domaines pour la diffusion électromagnétique par une surface rugueuse 2D

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 30 octobre 2019

Unité de recherche : IETR UMR 6164

Rapporteurs avant soutenance :

Richard DUSSEAUX Professeur des universités, Université de Versailles
Hélène ROUSSEL Professeur des universités, Sorbonne Université

Composition du Jury :

Président : Alain REINEIX Directeur de recherche CNRS, XLIM Limoges
Examineurs : Richard DUSSEAUX Professeur des universités, Université de Versailles
 Hélène ROUSSEL Professeur des universités, Sorbonne Université

Dir. de thèse : Christophe BOURLIER Directeur de recherche CNRS, IETR Nantes
Co-encadrants : Gildas KUBICKE Ingénieur de recherche, DGA, Bruz
 Sami BELLEZ Ingénieur de recherche, CMN, Cherbourg

Table des matières

Table des Figures	14
Introduction	15
1 Base théorique et état de l'art	17
1.1 Introduction	17
1.2 Notion d'électromagnétisme	17
1.2.1 Équations de Maxwell	18
1.2.2 Équations d'onde et rayonnement électromagnétique	19
1.2.2.1 Fonction de Green	20
1.2.2.2 Potentiels vectoriels	21
1.2.2.3 Onde plane monochromatique	23
1.2.2.4 Zone de champ lointain (Fraunhofer)	25
1.2.2.5 Zone de champ proche	26
1.2.3 Conditions aux limites	27
1.2.4 Principe de Huygens	28
1.2.5 Principe d'équivalence	29
1.2.6 Équation Intégrale du Champ Électrique	31
1.2.7 Diffraction électromagnétique	32
1.2.7.1 Polarimétrie	32
1.2.7.2 Analyse énergétique	34
1.2.7.3 Coefficient de diffraction	36
1.2.7.4 Surface Équivalente Radar	38
1.2.7.5 Coefficient de diffraction complexe	40
1.3 Surfaces rugueuses	41

1.3.1	Description statistique des surfaces rugueuses	41
1.3.1.1	Densité de probabilité des hauteurs	42
1.3.1.2	Fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs	42
1.3.1.3	Spectre des hauteurs	43
1.3.2	Particularité de la surface de mer	44
1.3.2.1	Modèles de spectre	45
1.4	Méthodes de calcul en électromagnétisme	46
1.4.1	Méthodes analytiques	46
1.4.2	Méthodes asymptotiques	47
1.4.3	Méthodes numériques	47
1.5	La Méthode des Moments	48
1.6	État de l'art	49
1.7	Conclusion du chapitre	54
2	Mise en œuvre de la Méthode des Moments	57
2.1	Introduction	57
2.2	Traitement géométrique	58
2.3	Discretisation du problème	62
2.3.1	Évaluation de l'intégrale de la matrice impédance	62
2.3.2	Traitement de la singularité	64
2.3.3	Remplissage de $\bar{\mathbf{Z}}_{mn}$	68
2.3.4	Évaluation du vecteur d'excitation	72
2.3.5	Remplissage de \mathbf{b}_m	73
2.4	Calcul du courant de surface	74
2.5	Calcul du champ diffracté en champ proche	75
2.6	Calcul du champ diffracté en champ lointain	75
2.7	Comparaison des résultats	76
2.7.1	Comparaison avec l'Optique Physique : étude d'une surface carrée lisse	76
2.7.1.1	Courant surfacique	79
2.7.1.2	Champ diffracté en champ proche	83
2.7.1.3	Surface Équivalente Radar et champ diffracté en champ lointain	85
2.8	Étude paramétrique	89
2.8.1	Effet de la taille de la surface	89

2.8.1.1	Courant surfacique	89
2.8.1.2	Surface Équivalente Radar et champ diffracté en champ lointain	91
2.8.2	Effet du nombre de points de Gauss	93
2.8.3	Effet de la densité d'échantillonnage	93
2.8.3.1	Courant surfacique	94
2.9	Conclusion du chapitre	97
3	Méthode E-SDIM	99
3.1	Introduction	99
3.2	Principe de la méthode E-SDIM	100
3.2.1	Méthode SDIM	100
3.2.2	Limitations de la SDIM pour le problème électromagnétique 3D.	104
3.2.3	Extension de la SDIM	106
3.2.4	Complexité de la E-SDIM	109
3.3	Intégration de la méthode ACA	111
3.3.1	Formulation mathématique	111
3.3.2	Complexité de la E-SDIM + ACA	114
3.4	Étude de la compressibilité avec un schéma E-SDIM + ACA	115
3.5	Validation des résultats : cas d'une surface lisse	118
3.5.1	E-SDIM	118
3.5.1.1	Courant surfacique	119
3.5.1.2	Surface Équivalente Radar et champ diffracté en champ lointain	124
3.5.2	E-SDIM + ACA	128
3.5.2.1	Courant surfacique	128
3.5.2.2	Surface Équivalente Radar et champ diffracté en champ lointain	130
3.6	Analyse paramétrique sur la convergence et la précision	133
3.6.1	Sensibilité de la méthode à l'angle d'incidence et à la polarisation de l'onde incidente	133
3.6.2	Forme et nombre de sous-domaines	135
3.6.3	Taille de l'élargissement	136
3.7	Conclusion du chapitre	138
4	Méthode CBFM et comparaison avec E-SDIM	141
4.1	Introduction	141
4.2	Méthode CBFM	142

4.2.1	CBFM avec une seule onde incidente	143
4.2.1.1	Construction des fonctions primaires et secondaires	143
4.2.1.2	Troncature des fonctions caractéristiques	144
4.2.1.3	Orthonormalisation Gram-Schmidt Modifiée	144
4.2.1.4	Réécriture du problème	145
4.2.1.5	Construction de la matrice réduite	145
4.2.1.6	Construction du vecteur d'excitation réduit	146
4.2.1.7	Problème réduit	146
4.2.2	Une autre version de la CBFM	147
4.2.2.1	Construction des macro fonctions de base (MBF)	147
4.2.2.2	Décomposition SVD de la matrice MBF	148
4.2.2.3	Construction de la matrice des fonctions caractéristiques CBF	149
4.2.2.4	Troncature des fonctions caractéristiques	149
4.2.2.5	Réécriture du problème	150
4.2.2.6	Construction de la matrice réduite	150
4.2.2.7	Construction du vecteur d'excitation réduit	151
4.3	Complexité de la CBFM	152
4.3.1	Effet de la ACA sur la complexité	155
4.4	Comparaison CBFM et E-SDIM	156
4.4.1	Analyse sur la précision	157
4.4.1.1	Courant surfacique	158
4.4.1.2	Surface Équivalente Radar	160
4.4.2	Analyse sur la performance : intégration de la ACA	163
4.4.2.1	Courant surfacique	164
4.4.2.2	Surface Équivalente Radar et phase du champ diffracté en champ lointain	166
4.5	Conclusion du chapitre	169
	Conclusion générale et perspectives	171
	Annexe	173
	References	180

Table des figures

1.1	Onde plane en repères cartésien et sphérique	24
1.2	Représentation des champs en champ proche et lointain	25
1.3	Limite de séparation entre deux milieux	27
1.4	Limite de séparation entre deux milieux dont le milieu inférieur est parfaitement conducteur	28
1.5	Principe de Huygens. Problème d'origine	29
1.6	Principe de Huygens. Problème équivalent	29
1.7	Principe d'équivalence. Problème d'origine	30
1.8	Principe d'équivalence. Problème équivalent	30
1.9	Géométrie du problème de diffraction	32
2.1	Modèle MdM développé	58
2.2	Maillage de la surface supposée plane	59
2.3	Flux d'information à partir du fichier .UNV	59
2.4	Flux d'information à partir du fichier généré en Matlab	62
2.5	Illustration d'une fonction RWG	63
2.6	Projection des points d'observation	66
2.7	Algorithme pour le remplissage de $\bar{\mathbf{Z}}_{mn}$	69
2.8	Algorithme de remplissage de \mathbf{b}_m	73
2.9	Représentation géométrique du scénario utilisé dans les simulations.	79
2.10	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	80
2.11	Module et phase de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	80

2.12	Module et phase de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation horizontale, $\phi_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	81
2.13	Module et phase de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	82
2.14	Module et phase de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	82
2.15	Module des composantes du champ diffracté en champ proche par une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\theta_s = 0^\circ$, $\phi_s = 0^\circ$	83
2.16	Détail de la phase des composantes du champ diffracté en champ proche par une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\theta_s = 0^\circ$, $\phi_s = 0^\circ$	84
2.17	Module des composantes du champ diffracté par une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$ en champs proche et lointain. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\theta_s = 0^\circ$, $\phi_s = 0^\circ$	84
2.18	Phases des composantes du champ diffracté par une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$ en champs proche et lointain. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\theta_s = 0^\circ$, $\phi_s = 0^\circ$	85
2.19	SER et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.	86
2.20	SER et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation horizontale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.	86
2.21	SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.	87
2.22	SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation horizontale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.	87
2.23	SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.	88

2.24	SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.	88
2.25	SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.	88
2.26	SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.	89
2.27	Module et phase de $J_x \eta_0$ sur l'axe x de deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.	90
2.28	Module de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques de deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Onde incidente en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.	90
2.29	Phase de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques de deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Onde incidente en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.	91
2.30	Module et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.	92
2.31	Module et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.	92
2.32	Module et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.	93
2.33	Module de $J_x \eta_0$ sur l'axe \hat{x} , en fonction du nombre de points de Gauss, pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$ avec une densité de maillage moyenne de $\lambda/3.1$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.	94
2.34	Phase de $J_x \eta_0$ sur l'axe \hat{x} , en fonction du nombre de points de Gauss, pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$, avec une densité de maillage moyenne de $\lambda/3.1$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.	95

2.35	Module de $J_x \eta_0$ sur l'axe \hat{x} , en fonction du nombre de points de Gauss, pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$ avec une densité de maillage moyenne de $\lambda/6.2$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	96
2.36	Phase de $J_x \eta_0$ sur l'axe \hat{x} , en fonction du nombre de points de Gauss, pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$, avec une densité de maillage moyenne de $\lambda/3.1$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	96
3.1	Décomposition du domaine géométrique S en P sous-domaines, sous forme de m lignes et n colonnes	100
3.2	Division en 4 sous-domaines du domaine géométrique représenté avec des fonctions RWG	104
3.3	Division en 4 sous-domaines séparés, représenté avec des fonctions RWG	105
3.4	Effet de bord et asymétrie du courant	106
3.5	Rallongement de sous-domaines	106
3.6	Rallongement de sous-domaines avec des fonctions RWG	107
3.7	Relation entre sous-domaines	108
3.8	Compressibilité avec un schéma E-SDIM + ACA	118
3.9	Représentation géométrique du scénario utilisé dans les simulations.	119
3.10	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane avec une polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. $\epsilon_{SDIM} = 0.01$, $N_g = 1$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.21\lambda$	120
3.11	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.10 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$	121
3.12	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.10 mais avec une division en 3×3 sous-domaines.	121
3.13	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.12 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$	122
3.14	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.10 mais avec une incidence avec une polarisation horizontale.	122
3.15	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.14 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$	123

3.16	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_x \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 15^\circ$ (en haut), $\theta_i = 30^\circ$ (au centre), $\theta_i = 45^\circ$ (en bas), $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.21\lambda$	123
3.17	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.21\lambda$	125
3.18	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.17 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$	125
3.19	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.17 mais avec une division en 3×3 sous-domaines.	126
3.20	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.19 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$	126
3.21	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane en polarisation horizontale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\phi_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.92\lambda$	127
3.22	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane en polarisation verticale, $\theta_i = 30^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.92\lambda$	128
3.23	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.10 mais avec E-SDIM + ACA.	129
3.24	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.12 mais avec E-SDIM + ACA.	129
3.25	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.14 mais avec E-SDIM + ACA.	130
3.26	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_x \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.16 mais avec E-SDIM + ACA.	130
3.27	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.17 mais avec E-SDIM + ACA.	131
3.28	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.19 mais avec E-SDIM + ACA.	131
3.29	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.14 mais avec E-SDIM + ACA.	132

3.30	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.22 mais avec E-SDIM + ACA.	132
3.31	Représentation géométrique de l'un des scénarios utilisés dans les simulations.	133
3.32	Relation entre l'ordre de convergence et l'angle d'incidence en fonction de la polarisation de l'onde incidente, pour le problème d'une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane avec $\phi_i = 0^\circ$, $ E_i = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	134
3.33	Relation entre l'ordre de convergence et l'angle d'incidence en fonction de la polarisation de l'onde incidente, pour le problème d'une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane avec $\phi_i = 0^\circ$, $ E_i = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	135
3.34	Relation entre l'ordre de convergence et le nombre de sous-domaines en fonction de la polarisation de l'onde incidente, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $ E_i = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	135
3.35	Relation entre l'ordre de convergence et le nombre de sous-domaines en fonction de l'angle d'incidence, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $ E_i = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	136
3.36	Relation entre l'ordre de convergence et la taille du rallongement de sous-domaines en fonction de la polarisation de l'onde incidente et le nombre des sous-domaines, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $ E_i = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	136
3.37	Ordre moyen de convergence en fonction du nombre des sous-domaines et de la polarisation de l'onde incidente, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$ et $\Delta R = 0.07\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $ E_i = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	137
3.38	Relation entre l'ordre de convergence et la taille du rallongement de sous-domaines en fonction du nombre de sous-domaines, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $ E_i = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	137
3.39	Relation entre l'ordre de convergence et la taille du rallongement, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $ E_i = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	138
4.1	Décomposition du domaine géométrique en P sous-domaines, avec élargissement	142
4.2	Représentation géométrique du scénario utilisé dans les simulations.	157
4.3	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Onde incidente plane en polarisation verticale, $\theta_i = 30^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. $\epsilon_{SDIM} = 0.01$, $N_g = 1$, $N_{IPW} = 720$. Division en 25 sous-domaines et $\Delta R = 0.21\lambda$	158

4.4	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y\eta_0$ sur l'axe y d'une surface rugueuse. Même configuration que sur la figure 4.3, mais en polarisation horizontale.	158
4.5	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_x\eta_0$ sur l'axe x d'une surface rugueuse. Même configuration que sur la figure 4.3. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 15^\circ$ (en haut), $\theta_i = 45^\circ$ (au centre), $\theta_i = 60^\circ$ (en bas), $\phi_i = 0^\circ$, $ E_{\theta_i} = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$	159
4.6	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite). Même configuration que sur la figure 4.3.	160
4.7	Erreur sur la SER en fonction de l'angle d'observation, en co-polarisation (à gauche) et en polarisation croisée (à droite). Même configuration que sur la figure 4.6.	161
4.8	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite). Même configuration que sur la figure 4.4.	161
4.9	Erreur sur la SER en fonction de l'angle d'observation, en co-polarisation (à gauche) et en polarisation croisée (à droite). Même configuration que sur la figure 4.6.	162
4.10	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite). Même configuration que sur la figure 4.4.	162
4.11	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite). Même configuration que sur la figure 4.4.	163
4.12	Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x\eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.3 mais avec une hybridation avec la ACA.	164
4.13	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y\eta_0$ sur l'axe x d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.4 mais avec une hybridation avec la ACA.	165
4.14	Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_x\eta_0$ sur l'axe x d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.5 mais avec une hybridation avec la ACA.	165
4.15	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.3 mais avec une hybridation avec la ACA.	166
4.16	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.4 mais avec une hybridation avec la ACA.	167
4.17	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.10 mais avec une hybridation avec la ACA.	167
4.18	σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.11 mais avec une hybridation avec la ACA.	168
4.19	Erreur sur la SER en fonction de l'angle d'observation, en co-polarisation (à gauche) et en polarisation croisée (à droite). Même configuration que sur la figure 4.17.	168
4.20	Erreur sur la SER en fonction de l'angle d'observation, en co-polarisation (à gauche) et en polarisation croisée (à droite). Même configuration que sur la figure 4.18.	169

Introduction

La modélisation de la diffusion électromagnétique par une surface (aléatoirement) rugueuse est un sujet de recherche très actif. Elle est rencontrée dans de nombreuses applications liées à l'environnement comme les sols naturels ou la surface de mer ou, pour la caractérisation de défauts de surface à l'échelle nanométrique.

La modélisation rigoureuse de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des objets de grandes dimensions devant la longueur d'onde est difficile à mettre en œuvre, car elle implique la résolution d'un système linéaire de grande dimension pouvant atteindre plusieurs millions d'inconnues. Ainsi, le calcul de la réponse électromagnétique Radar d'une surface de mer bidimensionnelle multi-échelles, n'a jusqu'à présent jamais pu être résolu rigoureusement dans les bandes de fréquences microondes radar (typiquement bandes C et X), et la polarisation croisée n'a pas pu être évaluée de manière fiable. Par exemple, en considérant une longueur d'onde radar de 10 cm (fréquence de 3 GHz) et une surface de mer d'aire $50 \times 50 \text{ m}^2 = 500 \times 500 \lambda^2$ afin d'inclure toutes les échelles de rugosité, avec une résolution en $\lambda_0/10$, le nombre d'inconnues est de l'ordre de 3×5000^2 .

Cette thèse a pour but de résoudre en partie ce problème en considérant une surface (aléatoirement) rugueuse parfaitement conductrice et de dimensions modérées devant la longueur d'onde électromagnétique, et ce, de manière rigoureuse. Le laboratoire a acquis une forte expertise sur le développement de modèles asymptotiques, à la fois pour des problèmes 2D et 3D. Puis, son expertise s'est élargie au développement de modèles rigoureux, basés sur la Méthode des Moments (MmM), mais uniquement sur un problème 2D (surface 1D) de très grande dimension. L'objectif de cette thèse est donc de l'étendre à un problème 3D et ainsi disposer d'un code basé sur la MmM, la brique élémentaire dans le but de la faire évoluer dans le futur pour traiter le cas complexe d'une surface 2D de mer.

Ainsi, dans cette thèse, la surface rugueuse est considérée mono-échelle (une seule échelle de rugosité horizontale) et de distribution des hauteurs supposée gaussienne. De plus, la fonction d'autocorrélation des hauteurs de la surface est également gaussienne, qui est consistant avec l'hypothèse mono-échelle. De plus, l'angle d'incidence est compris entre zéro et soixante degrés par rapport au vecteur normal au plan moyen de la surface pour se placer dans un contexte de systèmes radars aéroportés.

Un candidat possible pour résoudre rigoureusement un tel problème est l'équation intégrale de frontière EFIE (Electric Field Integral Equation) discrétisée par la méthode des moments de Galerkin associée aux fonctions de base RWG (Rao-Wilton-Glisson). En effet, la surface de mer est un milieu homogène et aux fréquences microondes, elle peut être considérée comme parfaitement conductrice. Afin de résoudre effica-

ement le système linéaire résultant, nous avons choisi deux méthodes par décomposition de domaines, la SDIM (Subdomain Decomposition Iterative Method) et la CBFM (Characteristic Basic Function Method). La SDIM a été publiée par le laboratoire et a montré sa grande efficacité pour le calcul du champ diffracté par une surface 1D de mer de grande étendue. La CBFM a également montré sa grande efficacité sur de nombreux problèmes de diffraction (forêt, objets déterministes, surfaces rugueuses, ...) et de rayonnement (antennes, ...).

Comme nous le montrerons au travers ce manuscrit, le principal intérêt des méthodes SDIM et CBFM, hybridées à l'ACA (Adaptive Cross Approximation) pour accélérer les étapes de couplage, réside dans la possibilité de résoudre des systèmes linéaires par blocs, avec des complexités CPU et mémoire, très inférieures à celle de l'inversion directe LU de la matrice impédance du problème complet. Des simulations de la SER montreront que ces deux méthodes sont très performantes. Leur seule limitation résidera alors dans l'inversion des matrices impédances des blocs.

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres.

Le premier contient les bases théoriques permettant de résoudre le problème de la diffraction par une surface rugueuse ainsi qu'un état de l'art des différentes méthodes publiées de nos jours pour traiter ce problème.

Le deuxième chapitre présente en détail le principe de la Mm de Galerkin RWG, qui sera la méthode de référence dans ce manuscrit, et sa mise en œuvre numérique. Elle sera également comparée avec la méthode de l'optique physique.

Le troisième chapitre expose la E-SDIM (E comme Extended), la première méthode développée pour résoudre le problème de diffraction par des surfaces rugueuses de taille modérée. Cette méthode sera détaillée et sera également validée. De plus, une étude de sensibilité des différents paramétrés est menée ainsi que l'emploi de la technique de compression matricielle ACA.

Le dernier chapitre présente la CBFM. Son principe sera exposé et elle sera également comparée d'un point de vue algorithmique avec la E-SDIM. De plus, la CBFM et la E-SDIM seront comparées en termes de précision et d'efficacité.

Ce manuscrit se termine par une conclusion et des perspectives de ce travail de recherche seront dressées.

Chapitre 1

Base théorique et état de l'art

1.1 Introduction

Le présent travail de recherche se place dans le contexte de la modélisation de la diffraction des ondes électromagnétiques. Ceci nécessite d'une profonde connaissance de la théorie électromagnétique dans le but de bien comprendre les particularités de ce problème physique. Il est indispensable d'étudier les différentes méthodes numériques rigoureuses utilisées dans la modélisation des problèmes électromagnétiques pour justifier le choix de la méthode des moments comme la plus appropriée pour ce travail. La présentation de l'état de l'art constitue le point de départ.

Le premier chapitre de ce manuscrit a pour objectif l'établissement de la base théorique nécessaire à la compréhension de ce travail. La première partie montre les notions d'électromagnétisme ainsi que de propagation et diffraction des ondes électromagnétiques, nécessaires pour résoudre le problème de la modélisation de la diffraction électromagnétique. Ensuite sont montrés les outils statistiques utilisés pour la modélisation des surfaces rugueuses aléatoires. Puis sont présentées différentes méthodes de calcul employées dans la résolution du problème de diffraction électromagnétique. La méthode des moments, qui est la méthode numérique choisie, est soigneusement décrite. Le chapitre se termine avec la présentation de l'étude de l'état de l'art dans le contexte des méthodes numériques rigoureuses utilisées dans la résolution du problème de la diffraction électromagnétique.

1.2 Notion d'électromagnétisme

Alors que plus d'un siècle s'est écoulé depuis le début de cette spécialité scientifique, les principes de l'électromagnétisme restent la pierre angulaire d'une grande partie des avancées technologiques de nos jours. Les équations de Maxwell, les conditions aux limites, les phénomènes de rayonnement et diffraction d'ondes ainsi que les équations intégrales de surface sont parmi les éléments les plus importants pour le sujet traité.

1.2.1 Équations de Maxwell

En décembre 1864 James Clerk Maxwell formule les lois fondamentales de l'électromagnétisme en s'appuyant sur les travaux de Michael Faraday et d'André-Marie Ampère. Il les présenta dans son article "A Dynamical Theory of Electromagnetic Field" sous forme de 20 équations à 20 inconnues, qu'il condensa à posteriori en 8 équations et 8 inconnues dans son livre "Treatise on Electricity and Magnetism" de 1873. Ces équations scellent le lien entre les champs électrique et magnétique. Grâce aux travaux de Oliver Heaviside et Willard Gibbs, fondateurs de l'analyse vectorielle et le calcul opérationnel, les équations originalement écrites sous forme cartésienne, furent réduites à la forme de 4 équations vectorielles [1], [2]. Ces 4 équations et les relations qu'elles représentent, constituent la base de l'électromagnétisme moderne. En général, pour un milieu linéaire homogène, isotrope et en régime harmonique, avec des paramètres constitutants ϵ et μ , sa forme symétrisée se résume comme [2], [3], [4] :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_m \quad (1.4)$$

où les quantités \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{J} et \mathbf{M} sont des fonctions vectorielles complexes dépendantes uniquement de la position. Cette représentation des équations de Maxwell est connue par le nom de "Time-Harmonic" ou complexe. Elle est utilisée quand les variations des champs dans le temps est sinusoïdale et permet de séparer la dépendance du temps de celle de la position spatiale de la forme $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \Re e (\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{\pm j\omega t})$, indiquant que le vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, dépendant du temps et de la position, est la partie réelle de $\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{\pm j\omega t}$, où le vecteur complexe $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dépend uniquement du vecteur de position \mathbf{r} . La dépendance du temps pour les champs harmoniques est exprimée par le terme $e^{\pm j\omega t}$ [3]. La forme $e^{j\omega t}$ est retenue et sera sous entendue tout au long du document. De façon similaire, la dépendance de la position peut-être sous entendue et les notations $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ où \mathbf{A} seront utilisées indistinctement.

Dans les équations de Maxwell, \mathbf{E} et \mathbf{H} désignent les vecteurs des champs électrique et magnétique, exprimés en V/m et en A/m. \mathbf{D} et \mathbf{B} représentent respectivement les vecteurs induction électrique et induction magnétique, mesurés en C/m² et en Tesla. Le vecteur \mathbf{B} est aussi connu par le nom de vecteur de densité de flux magnétique. \mathbf{J} et \mathbf{M} sont les densités de courants électrique et magnétique respectivement et elles sont mesurées en A/m² et V/m². Finalement les densités de charges électrique et magnétique, q_e et q_m , sont mesurées en C/m³ et Wb/m³ respectivement. Les expressions de (1.1) à (1.4) sont également connues sous les noms de loi généralisée d'induction de Faraday, loi généralisée d'Ampère, loi de Coulomb ou de Gauss pour le champ électrique et loi de Gauss pour le champ magnétique respectivement. Les relations entre les intensités des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} et les vecteurs d'induction \mathbf{D} et \mathbf{B} sont conditionnées par le milieu physique. En particulier, pour un milieu linéaire homogène et isotrope ces relations constituantes sont déterminées par [3], [4] :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.7)$$

où ϵ représente la permittivité électrique, μ la perméabilité magnétique et σ la conductivité électrique du milieu. Le courant et la densité de charges magnétiques, \mathbf{M} et q_m respectivement, ne représentent pas des quantités physiques réelles, mais elles sont le résultat de manipulations mathématiques qui rendent les équations symétriques et qui facilitent leur application.

1.2.2 Équations d'onde et rayonnement électromagnétique

Le problème du rayonnement électromagnétique implique la caractérisation et le calcul des champs dans l'espace générés à partir des sources actives connues, en particulier les courants. [4]. Les équations de Maxwell révèlent le phénomène du rayonnement électromagnétique sous forme d'onde. Le caractère ondulatoire peut être formellement décrit par traitements mathématiques qui permettent d'obtenir les expressions pour les champs électrique et magnétique. En appliquant l'opérateur rotationnel sur les deux premières équations de Maxwell : (1.1) et (1.2), et en utilisant l'identité vectorielle :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla^2 \mathbf{U} \quad (1.8)$$

dans le terme à gauche, les expressions suivantes sont obtenues [3], [4] :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{M} - j\omega\mu(\nabla \times \mathbf{H}) \quad (1.9)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} + j\omega\epsilon(\nabla \times \mathbf{E}) \quad (1.10)$$

La substitution de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ et $\nabla \cdot \mathbf{H}$ par les équations de Maxwell (1.3) et (1.4) et de $\nabla \times \mathbf{E}$ et $\nabla \times \mathbf{H}$ par les équations (1.1) et (1.2), permet de réorganiser et réécrire (1.9) et (1.10) sous la forme suivante, où $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = j\omega\mu \mathbf{J} + \frac{\nabla q_e}{\epsilon} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{M} + \frac{\nabla q_m}{\mu} - \nabla \times \mathbf{J} \quad (1.12)$$

Afin de montrer la relation entre les densités de courants électrique (\mathbf{J}) et magnétique (\mathbf{M}) et les champs (\mathbf{E} et \mathbf{H}) il est nécessaire d'appliquer les équations de conservation de la charge :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega q_e \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -j\omega q_m \quad (1.14)$$

Cela permet de réécrire les expressions (1.11) et (1.12) comme :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = j\omega\mu \mathbf{J} - \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) + \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{M} - \frac{1}{j\omega\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \nabla \times \mathbf{J} \quad (1.16)$$

qui constituent les équations d'onde des champs électrique et magnétique respectivement, où k est le nombre d'onde, $k = 2\pi/\lambda$, ω est la fréquence angulaire et λ la longueur d'onde. Les équations (1.15) et (1.16) sont des équations non homogènes de Helmholtz. Elles ont un caractère ponctuel mais grâce à la linéarité des équations de Maxwell, la superposition des courants peut être considérée et il suffit de réaliser une intégration sur le volume contenant ces courants pour obtenir la réponse [4]. Quant aux solutions des équations d'onde (1.15) et (1.16), il faut préciser que chacune des composantes des champs (\mathbf{E} ou \mathbf{H}) vérifie l'équation de Helmholtz scalaire, en introduisant la *fonction de Green scalaire*, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, qui satisfait aussi l'équation de Helmholtz scalaire, elles peuvent être exprimées comme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' - \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\nabla' \times \mathbf{M}] d\mathbf{r}' \quad (1.17)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j\omega\epsilon \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' + \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\nabla' \times \mathbf{J}] d\mathbf{r}' \quad (1.18)$$

Ces deux expressions constituent les équations de rayonnement. Elles déterminent de façon précise le caractère de source du champ électromagnétique qu'ont les courants contenus à l'intérieur du volume V . La relation entre les courants et les champs est établie par la fonction de Green. Puisque les équations de Maxwell lient les champs électrique et magnétique de façon explicite, l'onde électromagnétique peut-être représentée par un seul des champs, en général le champ électrique. À ce propos, et si on considère que $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, alors le rayonnement peut être représenté par l'expression (1.17) dans sa forme simplifiée :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (1.19)$$

1.2.2.1 Fonction de Green

Le terme de fonction de Green est utilisé pour désigner une solution élémentaire ou fondamentale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Elle peut prendre différentes formes en fonction de l'opérateur intégro-différentiel et elle est déjà connue et définie pour un grand nombre de ces opérateurs. Dans le cas précis du rayonnement

électromagnétique il s'agit de l'équation de Helmholtz scalaire :

$$(\Delta + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.20)$$

D'une certaine manière, la fonction de Green scalaire est vue comme un propagateur, dépendant des vecteurs de position \mathbf{r} et \mathbf{r}' . Mathématiquement elle constitue la réponse impulsionnelle du problème décrit par l'équation (1.20). Physiquement elle correspond au rayonnement d'une source ponctuelle.

Quand il s'agit du rayonnement électromagnétique, les expressions de la fonction de Green pour les cas bidimensionnel et tridimensionnel sont bien déterminées depuis longtemps dans la littérature [2], [3]. Les définitions pour les cas 3D et 2D respectivement sont données par les équations suivantes :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \quad (1.21)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4}H_0^{(2)}(k\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) \quad (1.22)$$

où \mathbf{r} est le vecteur de position du point d'observation, \mathbf{r}' celui de la source et $H_0^{(2)}$ est la fonction de Hankel du deuxième type et d'ordre zéro [5].

1.2.2.2 Potentiels vectoriels

Les expressions (1.17) et (1.18) constituent un outil important du point de vue théorique, mais dans la pratique, il peut s'avérer très difficile ou impossible de calculer directement les champs à partir des courants. Une autre astuce mathématique, appelée potentiel vectoriel, est introduite pour surmonter cette difficulté. Dans un milieu linéaire homogène, les solutions pour les champs doivent respecter les équations de Maxwell et les équations d'ondes, même dans des régions qui ne contiennent pas des sources et donc $\mathbf{J} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$ et $q_e = q_m = 0$. Alors que \mathbf{J} peut représenter des sources physiques ou équivalentes \mathbf{M} ne peut représenter que des équivalentes [3].

Le champ magnétique est, par nature, solénoïdal et donc il peut être exprimé comme le rotationnel d'un autre vecteur. En partant de ce point, le potentiel vectoriel magnétique \mathbf{A} est défini d'une telle façon qu'il satisfait l'équation [3], [4] :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.23)$$

Pour le calcul et la définition de ce potentiel la région est considérée comme libre de source magnétique et alors $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ et $q_m = 0$. En substituant \mathbf{H} dans l'équation (1.1) par (1.23) et en appliquant l'identité :

$$\nabla \times (-\nabla\Phi_e) = \mathbf{0} \quad (1.24)$$

il est possible d'exprimer \mathbf{E} sous la forme :

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi_e \quad (1.25)$$

où Φ_e est le potentiel scalaire électrique obtenu à partir de la définition arbitraire de la divergence du potentiel vectoriel magnétique comme :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon\Phi_e \quad (1.26)$$

D'autres manipulations référencées dans [3] et [4] sont effectuées, ce qui permet d'exprimer l'équation précédente sous la forme :

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi_e = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.27)$$

Cette expression sert à obtenir le champ électrique dans une région sans source magnétique interne. À partir de l'équation de rayonnement du champ électrique (1.19) et de l'équivalence :

$$\iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \nabla \nabla \cdot \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.28)$$

montrée dans [4], le potentiel vectoriel magnétique est formellement défini par l'expression :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.29)$$

Par analogie, le potentiel vectoriel électrique dans une région sans source électrique est défini comme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \epsilon \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.30)$$

et la relation entre \mathbf{F} et \mathbf{H} est déterminée par :

$$\mathbf{H} = -j\omega\mathbf{F} - \nabla\Phi_m = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (1.31)$$

où Φ_m représente le potentiel scalaire magnétique.

1.2.2.3 Onde plane monochromatique

Comme il a été expliqué auparavant, le problème du rayonnement électromagnétique implique le calcul des champs dans l'espace à partir des courants connus. Le phénomène du rayonnement électromagnétique est décrit par les équations d'onde (1.15) et (1.16), dont la solution générale, en termes de la fonction de Green, est donnée par les équations (1.17) et (1.18) ou de forme simplifiée par l'équation (1.19), pour le champ électrique en absence de courant magnétique.

En considérant le champ incident comme étant créé par une source arbitraire externe au problème une solution particulière de l'équation d'onde est l'onde plane progressive monochromatique, représentée par l'expression (1.32) ci-dessous :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Re e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \Re e\left(\mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \Phi)}\right) = \Re e(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}) \quad (1.32)$$

où le terme $e^{j\omega t}$ est sous-entendu et l'expression est réduite à :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j(k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \Phi)} \quad (1.33)$$

Cette expression est formée par deux termes. Le premier, $e^{-j(k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \Phi)}$, constitue le propagateur, où Φ est la phase initiale, sans pertinence pour le calcul, alors il est choisi nul. Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{k}}$ est orienté dans le sens de propagation de l'onde. Le produit $k\hat{\mathbf{k}}$ est appelé vecteur d'onde. L'autre terme, \mathbf{E}_0 , est le vecteur complexe qui décrit l'état de polarisation dans une base donnée et dont chaque composante est un nombre complexe. De manière générale, les composantes de ce vecteur sont obtenues par la projection du champ électrique sur les vecteurs unitaires orthonormaux qui forment le système de coordonnées. Dans le repère cartésien, dont les vecteurs de base sont $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, il est exprimé par l'expression suivante :

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} E_0^x \\ E_0^y \\ E_0^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_0^x| e^{j\delta_x} \\ |E_0^y| e^{j\delta_y} \\ |E_0^z| e^{j\delta_z} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

\mathbf{E}_0 est appelé vecteur de Jones. L'amplitude de chaque composante et la différence entre les valeurs absolues de ces phases, déterminent l'état de polarisation de l'onde. Une caractéristique de l'onde plane est que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont orthogonaux à la direction de propagation de l'onde et orthogonaux entre eux. Ainsi, si le vecteur d'onde est colinéaire à $\hat{\mathbf{x}}$, les composantes du champ selon $\hat{\mathbf{x}}$ sont nulles, comme le montre la prochaine équation :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} E_0^x \\ E_0^y \\ E_0^z \end{bmatrix} e^{-j(k\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{r})} = \begin{bmatrix} 0 \\ |E_0^y| \\ |E_0^z| e^{i\delta} \end{bmatrix} e^{-jk\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.35)$$

Puisque la polarisation ne dépend pas des phases des composantes, mais de la différence entre elles, les termes de phase des composantes selon \hat{y} et \hat{z} sont remplacés par un terme de phase relative associé à la composante selon \hat{z} , noté $\delta = \delta_y - \delta_z$.

Une onde plane peut-être polarisée de façon linéaire, elliptique ou circulaire. Le premier cas a lieu quand la différence de phase entre les deux composantes du champ est nulle, ($\delta = 0$), ou d'une valeur multiple entier de π , ($\delta = \pm m\pi$). La polarisation circulaire est présente quand l'amplitude des deux composantes est égale et la différence de phase δ est un multiple impair de $\pi/2$, ($\delta = \pm(2m+1)\pi/2$). Pour les autres cas, une onde plane aura toujours une polarisation elliptique. La linéarité des équations de Maxwell permet d'exprimer les champs avec différents états de polarisation à partir de la superposition des champs de polarisation linéaire. Pour cette raison, il suffit de traiter seulement le cas $\delta = 0$.

La figure 1.1 illustre le cas d'une onde plane depuis un repère cartésien. Dans ce système, le vecteur unitaire d'onde $\hat{\mathbf{k}}$ prend la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \cos(\phi) \\ -\sin(\theta) \sin(\phi) \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

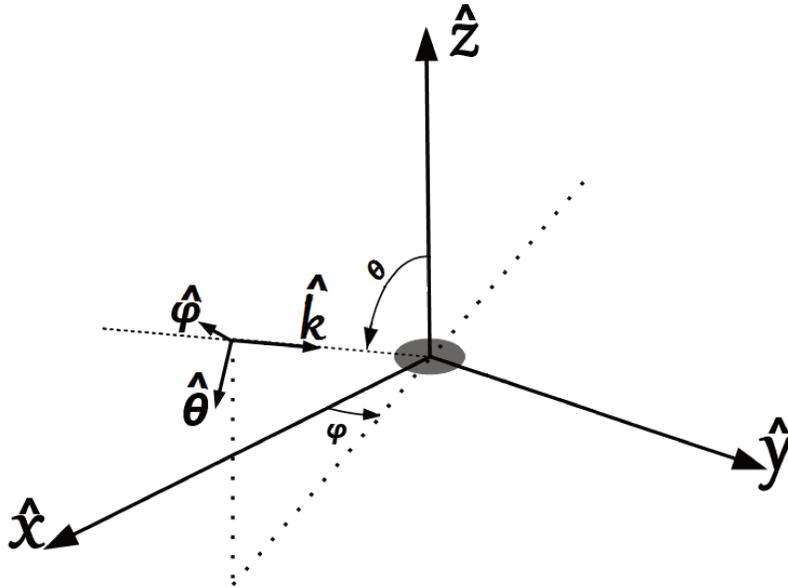


FIGURE 1.1 – Onde plane en repères cartésien et sphérique

Le vecteur de Jones utilisé pour décrire l'état de polarisation du champ électrique peut-être exprimé aussi dans une base sphérique ($\hat{\mathbf{k}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$) comme celle montrée aussi sur la figure 1.1. Ceci constitue un repère efficace pour exprimer une onde plane et analyser sa polarisation. Il est évident que dans ce nouveau repère, le champ électrique, pour le cas d'une onde plane monochromatique, possède seulement des composantes orientées selon $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, qui dans la littérature sont nommées également $\hat{\boldsymbol{v}}$ et $\hat{\boldsymbol{h}}$ respectivement. Ainsi une onde linéairement polarisée dont la composante du vecteur \mathbf{E}_0 est orientée selon $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et parallèle au plan d'incidence défini par

les vecteurs $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{k}}$, est appelée onde *TM* (*Transverse Magnétique*), polarisation *V* (*Verticale*) ou simplement onde *H*. Si la composante du vecteur \mathbf{E}_0 est orientée selon $\hat{\phi}$, perpendiculaire au plan d'incidence, elle reçoit le nom d'onde *TE* (*Transverse Électrique*), polarisation *H* (*Horizontale*) ou onde *E*. Quel que soit son état de polarisation, en s'appuyant sur le principe de linéarité des équations de Maxwell, une onde plane peut toujours être exprimée comme la superposition de deux ondes, une TE et une TM.

Le vecteur de Jones dans le repère sphérique prend la forme montrée par l'équation suivante :

$$\mathbf{E}_0^{sph} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0^\theta \\ E_0^\phi \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

La transformation du vecteur de Jones entre les différents repères est expliquée par la suite.

1.2.2.4 Zone de champ lointain (Fraunhofer)

Bien que les équations de Maxwell décrivent le champ électromagnétique dans un milieu infini, pour la plupart des situations, le problème réside dans la difficulté voire l'impossibilité de résoudre les équations (1.29) et (1.30). Cependant, il est possible de prévoir le comportement des champs en fonction de la distance d'observation. Cette classification permet de poser des hypothèses simplificatrices dans certains cas. Selon ce critère, trois zones de rayonnement liées à la nature des champs peuvent être distinguées : la zone de "champ proche réactif", celle de "champ proche rayonnant" ou zone de Fresnel et la zone de "champ lointain" ou zone de Fraunhofer. La zone de champ proche réactif est très importante pour les applications d'antennes ou de compatibilité électromagnétique, alors que le calcul du champ lointain est essentiel pour les problèmes de diffraction électromagnétique [4]. Comme le montre la figure 1.2 et selon [3], la détermination de chacune de ces zones est liée à la taille de la source ainsi qu'à la longueur d'onde.

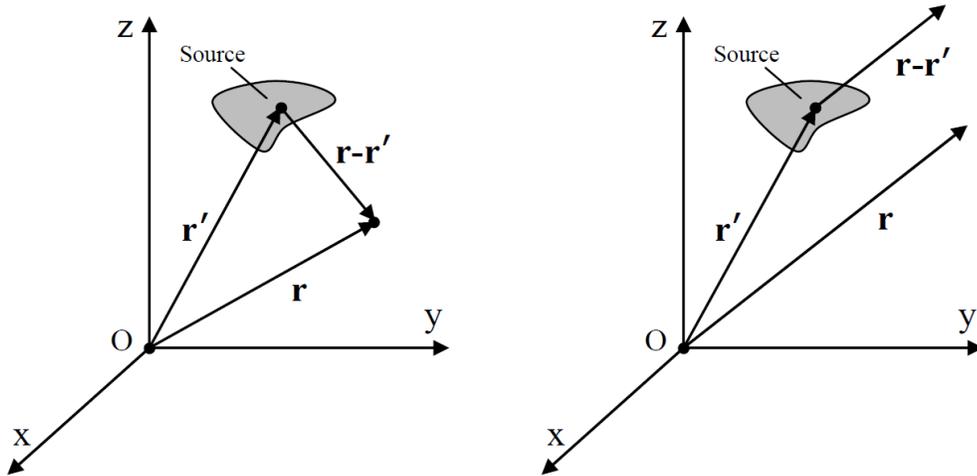


FIGURE 1.2 – Représentation des champs en champ proche et lointain

Quand le point d'observation est placé suffisamment loin de la source ($kr \gg 1$), il est possible d'appliquer

des approximations pour calculer les champs rayonnés. Dans ce cas les vecteurs \mathbf{r} et $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ peuvent être supposées parallèles et donc [3] :

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{r} - \mathbf{r}' \cos \psi & \text{pour les variations de phase} \\ \mathbf{r} & \text{pour les variations d'amplitude} \end{cases} \quad (1.38)$$

où ψ est l'angle entre \mathbf{r} et \mathbf{r}' . Ces approximations limitent l'erreur de phase à un maximum de $\pi/8$ si le point d'observation se trouve à une distance très grande telle que [3] :

$$R \geq \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.39)$$

où D est la plus grande dimension de la source du champ incident ou de l'objet illuminé. Pour les observations effectuées dans zone de champ lointain, les expressions (1.27) et (1.31) sont simplifiées comme :

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} \quad (1.40)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega\mathbf{F} = \frac{1}{\eta}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} \quad (1.41)$$

où $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ est l'impédance d'onde et $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde. Les équations (1.40) et (1.41) montrent que dans la zone de champ lointain, les vecteurs des champs électrique et magnétique sont en phase et orthogonaux entre eux et à la direction de propagation de l'onde. Bien que la question énergétique du champ soit traitée après dans ce document, il est important de mentionner que, en zone de champ lointain, l'énergie du champ est rayonnée dans sa quasi-totalité. Les notions de stockage et rayonnement d'énergie par le champ électromagnétiques sont traitées dans la section **1.2.7**

1.2.2.5 Zone de champ proche

En dessous de la limite établie par l'expression (1.39), l'approximation (1.38) faite pour le calcul des champs n'est plus valable car l'erreur de phase est trop élevé. La zone de champ proche est divisée en deux sous zones : de champ proche rayonné et de champ proche réactif [6]. La zone de champ proche rayonné ou intermédiaire est caractérisée par le fait qu'une partie plus importante de l'énergie est rayonnée mais l'énergie stockée n'est pas négligeable. Cette zone est aussi appelée zone de Fresnel car les expressions des champs peuvent être réduites à des intégrales de Fresnel. La principale caractéristique de la zone intermédiaire est que le diagramme de rayonnement est une fonction de la distance à la source du champ. Ses limites sont établies par l'équation suivante [6] :

$$\frac{2D^2}{\lambda} > R \geq 0.62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} \quad (1.42)$$

La limite entre la zone intermédiaire et la zone de champ proche réactif n'est pas rigoureusement définie,

mais l'expression (1.43) [6] est bien acceptée dans la communauté scientifique :

$$0.62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} > R > 0 \quad (1.43)$$

Cette zone est caractérisée par le fait que le champ électrique comporte deux composantes en phase, l'une dans la direction de rayonnement et l'autre orthogonale à cette direction. Le champ magnétique, quant à lui, est composé seulement d'une composante perpendiculaire à la direction de rayonnement. Par contre dans la limite inférieure de la zone, les champs magnétique et électrique sont en quadrature de phase et ce déphasage (du champ électrique) diminue avec l'augmentation de R [6]. Pour cette raison, comme il sera vu plus tard dans ce document, la plupart de l'énergie du champ est principalement réactive.

Une forme différente de l'équation du rayonnement (1.19) est possible afin de faciliter le calcul du champ diffracté en champ proche. Pour cela les opérateurs différentiels sont redistribués en s'appuyant sur l'équivalence de l'équation (1.28) développée en [4], donnant l'expression suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \left[\iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{1}{k^2} \iiint_V \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \quad (1.44)$$

avec :

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\frac{1 + jk\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) e^{-jk\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (1.45)$$

1.2.3 Conditions aux limites

L'onde électromagnétique correspond à la propagation d'un signal par la vibration des champs électrique et magnétique. Comme toute onde, elle implique un déplacement d'énergie. Tout milieu est fini par nature et, lorsqu'une onde électromagnétique se propage à travers l'espace, il est inévitable qu'elle le fasse en traversant des régions avec différents paramètres constitutifs ϵ et μ . L'interface qui sépare deux milieux définit une surface ou limite, comme le montre la figure 1.3. De chaque côté de cette surface les différentes composantes du champ électromagnétique vont se comporter comme l'indiquent les expressions (1.46), (1.47), (1.48) et (1.49) [3], [4] dérivées directement des équations de Maxwell.

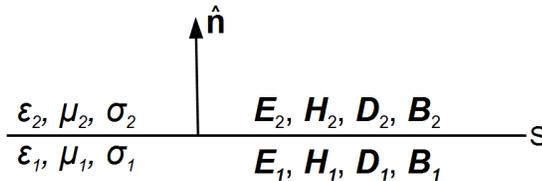


FIGURE 1.3 – Limite de séparation entre deux milieux

$$-\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{M}_s \quad (1.46)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (1.47)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = q_e \quad (1.48)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = q_m \quad (1.49)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire, normal à la surface, orienté vers le milieu 2. On peut remarquer aussi que les densités de charges et courants sont ici surfaciques et par conséquent existent uniquement à l'interface de séparation. Dans le cas particulier où l'un des milieux est un matériau parfaitement conducteur (PEC de l'anglais Perfect Electric Conductor), comme sur la figure 1.4, les expressions précédentes prennent la forme [3], [4] :

$$-\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0} \quad (1.50)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s \quad (1.51)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_2 = q_e \quad (1.52)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \quad (1.53)$$

dû au fait que le champ électromagnétique est nul à l'intérieur d'un milieu parfaitement conducteur. Sous certaines conditions, la surface de mer peut être assimilée à ce type de milieu.

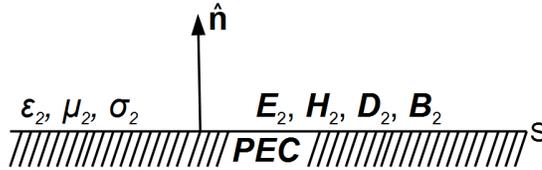


FIGURE 1.4 – Limite de séparation entre deux milieux dont le milieu inférieur est parfaitement conducteur

1.2.4 Principe de Huygens

Le principe de Huygens, ou théorème d'équivalence de surface, affirme qu'une source de rayonnement réelle peut être remplacée par un ensemble de sources fictives différentes, placées dans une région arbitraire fermée de l'espace qui contient la source réelle. À partir des bonnes conditions aux limites, les sources fictives génèrent le même champ que la source réelle. Ce théorème stipule aussi que chaque point d'un front d'onde peut être considéré lui-même comme une source de rayonnement [3]. Ce principe permet d'obtenir les champs à l'extérieur d'une surface fermée fictive et arbitraire en plaçant sur la surface des sources électriques et magnétiques équivalentes, en satisfaisant les conditions aux limites. Les figures 1.5 et 1.6 montrent le fonctionnement basique de ce théorème.

Les courants \mathbf{J}_1 et \mathbf{M}_1 sont des sources réelles qui rayonnent les champs \mathbf{E}_1 et \mathbf{H}_1 dans un milieu homogène de paramètres μ_1 et ϵ_1 . Ces sources sont enfermées dans une région de l'espace \mathbf{V}_1 délimitée par la surface S , sur laquelle les conditions aux limites doivent être respectées. Pour créer les sources fictives une nouvelle

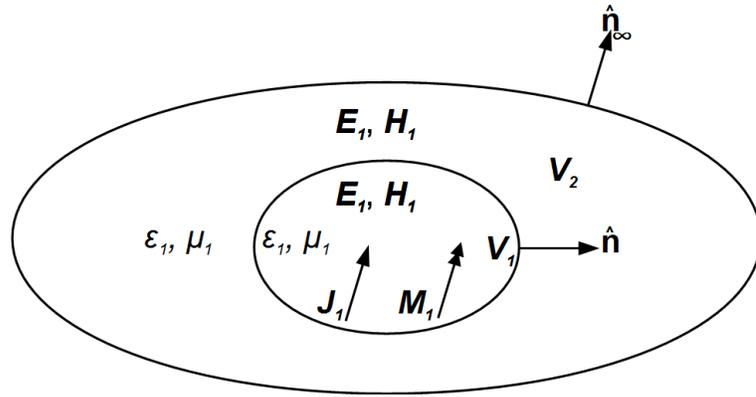


FIGURE 1.5 – Principe de Huygens. Problème d'origine

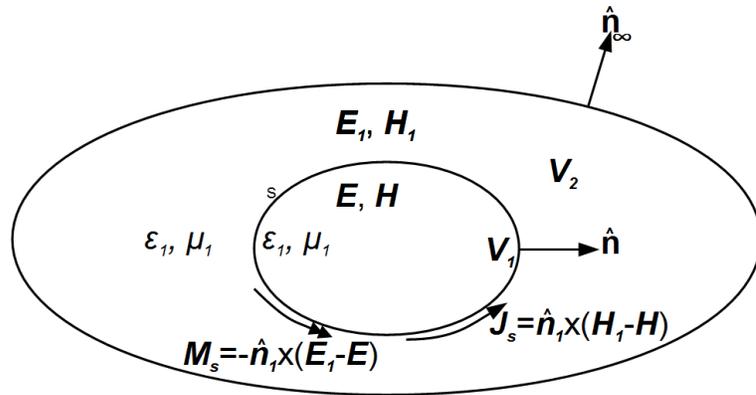


FIGURE 1.6 – Principe de Huygens. Problème équivalent

paire de courants superficiels est placée sur S . En supposant que les champs \mathbf{E}_1 et \mathbf{H}_1 sur S sont connus, les conditions aux limites peuvent être utilisées pour déterminer les sources fictives dû au fait que les champs à l'intérieur du volume \mathbf{V}_1 peuvent être sélectionnés de façon arbitraire [3]. La généralisation de ce théorème permet, de façon analogue, de substituer des sources à l'extérieur de \mathbf{V}_1 par des sources fictives sur S expliqué dans [4].

1.2.5 Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence est une conséquence directe du principe de Huygens et constitue un concept très important pour les problèmes de rayonnement et de diffraction électromagnétique. Comme précédemment, deux courants \mathbf{J}_1 et \mathbf{M}_1 sont supposés être les sources des champs \mathbf{E}_1 et \mathbf{H}_1 dans une région de l'espace homogène dans laquelle est introduit un objet parfaitement conducteur. En appliquant le principe d'équivalence, l'objet en question peut être substitué par des courants surfaciques équivalents. Il faut noter que l'introduction d'un objet conducteur a deux conséquences. D'abord le champ à l'intérieur de l'objet ($\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$) est nul et ensuite il existe un champ diffracté par l'objet ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) à l'extérieur. Les figures 1.7 et 1.8 décrivent la situation.

La transformation du problème d'origine se fait en partant du principe de Huygens et en s'appuyant sur

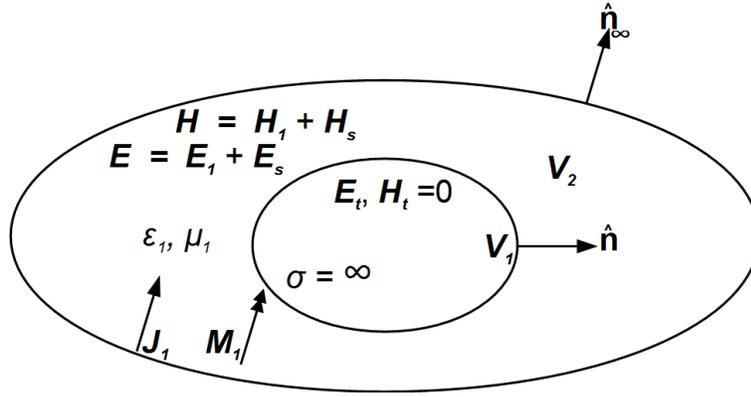


FIGURE 1.7 – Principe d'équivalence. Problème d'origine

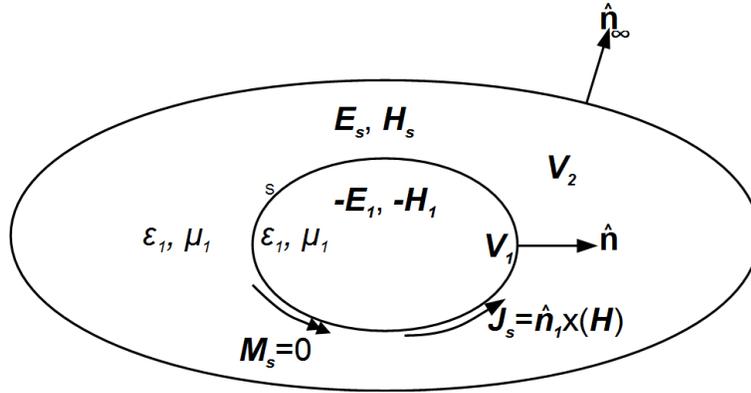


FIGURE 1.8 – Principe d'équivalence. Problème équivalent

les conditions aux limites déterminées pour ce problème en particulier. Sur l'interface entre les deux régions la composante tangentielle du champ électrique est nulle et celle du champ magnétique donne lieu au courant de surface \mathbf{J}_s . Les expressions suivantes montrent cela :

$$-\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_t) = \mathbf{M}_s = 0 \quad (1.54)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_t) = \mathbf{J}_s \quad (1.55)$$

Ces expressions montrent les conditions aux limites du problème de la figure 1.7. Les vecteurs du champ à l'intérieur de l'objet $\mathbf{E}_t = \mathbf{H}_t = \mathbf{0}$ et les vecteurs du champ à l'extérieur $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_s$ et $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_s$, où $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ représentent le champ incident sur l'objet, créé par les courants $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$ et $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ représentent le champ diffracté par l'objet. En substituant les expressions des champs internes et externes, les équations (1.54) et (1.55) deviennent :

$$-\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_s) = \mathbf{M}_s = 0 \quad (1.56)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_s) = \mathbf{J}_s \quad (1.57)$$

Les expressions (1.56) et (1.57) peuvent être interprétées comme les conditions aux limites du problème représenté sur la figure 1.8. L'objet conducteur a été substitué par un autre objet de paramètres constituants similaires à ceux du milieu extérieur. Les sources \mathbf{J}_1 et \mathbf{M}_1 , ainsi que le champ créé par elles, ont donné lieu aux courants superficiels équivalents et aux champs à l'intérieur de l'objet. Ceci est connu comme le principe d'équivalence, où maintenant existe un seul champ à l'extérieur de l'objet, qui pourrait être déterminé à partir de \mathbf{J}_s en utilisant les équations du rayonnement (1.18) et (1.19). Même si apparemment \mathbf{J}_s dépend de \mathbf{H}_1 et de \mathbf{H}_s simultanément, d'autres expressions sont dérivées des équations (1.56) et (1.57) qui permettent d'exprimer \mathbf{J}_s comme une fonction unique du champ incident.

1.2.6 Équation Intégrale du Champ Électrique

Les problèmes de diffraction peuvent être considérés comme des cas particuliers des problèmes de rayonnement où les courants, source du champ électromagnétique diffracté, sont créés par un champ qui illumine la surface. Ainsi, la méthodologie pour résoudre les problèmes de ce type est bien connue. D'abord il faut déterminer les courants surfaciques créés par le champ incident. Ensuite il faut utiliser ces courants pour déterminer le champ diffracté [4]. De ce point de vue, la caractérisation géométrique de l'objet et sa conductivité est essentielle pour l'application des conditions aux limites et le calcul du rayonnement.

L'équation intégrale du champ électrique, dont EFIE est son acronyme en anglais, permet d'établir la relation entre le champ électrique incident sur un objet et la distribution de courants créée sur sa surface, caractérisée par le vecteur densité de courant électrique \mathbf{J} . Pour déterminer cette relation, le point de départ est l'expression du rayonnement électromagnétique (1.19), qui établit que, à partir de la connaissance de la distribution de courant sur un objet parfaitement conducteur, le champ électrique diffracté par cet objet en régime harmonique prend la forme :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (1.58)$$

Si l'objet en question est considéré comme parfaitement conducteur, le champ à l'intérieur est nul et le courant peut exister uniquement sur la surface. Ceci conditionne la relation entre les composantes transverses du champ électrique à l'extérieur de l'objet. En appliquant le principe d'équivalence et en forçant les conditions aux limites entre l'intérieur et l'extérieur de l'objet, l'expression suivante est obtenue :

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad (1.59)$$

En appliquant l'expression (1.59) dans (1.58) l'expression résultante, (1.60), constitue la EFIE, qui est fréquemment utilisée dans la résolution des problèmes de diffraction :

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times j\omega\mu \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (1.60)$$

Cette équation est le résultat de l'application de l'ensemble des éléments et notions d'électromagnétisme considérés jusqu'à présent et constitue le point de départ de l'application de certaines méthodes de résolution qui seront présentées.

1.2.7 Diffraction électromagnétique

La diffraction électromagnétique est le phénomène qui a lieu quand une onde électromagnétique illumine un objet de taille finie et cette onde est diffractée par l'objet dans différentes directions. Alors, le problème de diffraction par un objet peut être considéré comme un problème de rayonnement, où les courants locaux qui servent de source au champ diffracté, sont générés par le champ incident sur l'objet.

L'équation intégrale du champ électrique (1.60) exprime la relation entre le champ électrique incident sur un objet parfaitement conducteur et le courant sur sa surface. Ensuite, l'expression de la solution générale de l'équation d'onde (1.19) permet de calculer la valeur du champ électrique diffracté à partir du courant sur la surface de l'objet. Ces deux expressions sont utilisées pour résoudre le problème de diffraction électromagnétique par un objet considéré comme parfaitement conducteur.

1.2.7.1 Polarimétrie

La figure 1.9 illustre la situation dans laquelle une onde plane, définie sur la base sphérique $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i)$, éclaire un objet conducteur. Comme résultat, il est créé un champ diffracté par l'objet, exprimé dans la base $(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\boldsymbol{\theta}}_s, \hat{\boldsymbol{\phi}}_s)$.

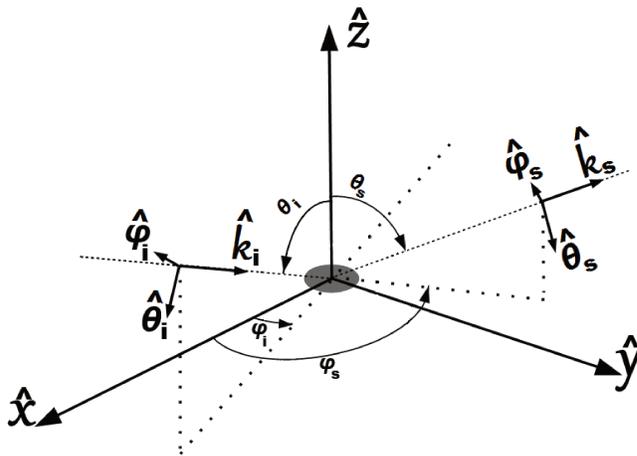


FIGURE 1.9 – Géométrie du problème de diffraction

Chaque fois qu'il y a des changements brusques ou graduels de l'indice de réfraction du milieu, conséquence du changement de la permittivité, de la perméabilité ou de la conductivité, comme le cas d'une onde qu'illumine un objet, l'état de polarisation de l'onde peut être transformé et le vecteur de Jones est re-polarisé. De ce point de vue, un objet peut être considéré comme un transformateur de polarisation.

Dans des conditions normales, la transformation du vecteur de Jones est linéaire et ce comportement sera décrit par une matrice appelée matrice de diffraction. Cette matrice caractérise la diffraction par l'objet pour une configuration émetteur/récepteur donnée.

La matrice de diffraction $\bar{\mathbf{S}}$, matrice de Sinclair, ou matrice de Jones, relie les composantes du champ électrique diffracté, en coordonnées sphériques, aux composantes du champ électrique incident. Si les vecteurs de Jones des champs incident et diffracté sont notés par \mathbf{E}_i et \mathbf{E}_s respectivement, l'expression (1.61) montre la forme générale de la matrice :

$$\begin{bmatrix} E_s^\theta \\ E_s^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta\theta} & S_{\theta\phi} \\ S_{\phi\theta} & S_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Cette matrice constitue un outil très important pour l'établissement de la signature polarimétrique d'un objet, car elle détermine la relation entre le champ électrique incident dans la direction de $\hat{\mathbf{k}}_i$ et le champ diffracté par l'objet, mesuré dans la direction de $\hat{\mathbf{k}}_s$. Ainsi, les champs incident et diffracté, sont définis par l'expression suivante :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}') = \mathbf{E}_{0i} e^{-jk\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix} e^{-jk\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}'} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0s} e^{-jk\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_s^\theta \\ E_s^\phi \end{bmatrix} e^{-jk\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}} \quad (1.62)$$

où

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \begin{bmatrix} k_{ix} \\ k_{iy} \\ k_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_i) \cos(\phi_i) \\ -\sin(\theta_i) \sin(\phi_i) \\ -\cos(\theta_i) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{k}}_s = \begin{bmatrix} k_{sx} \\ k_{sy} \\ k_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_s) \cos(\phi_s) \\ \sin(\theta_s) \sin(\phi_s) \\ \cos(\theta_s) \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

Alors, pour déterminer la matrice de diffraction d'un problème il est nécessaire de calculer le champ électrique diffracté, en coordonnées sphériques, dans la direction de $\hat{\mathbf{k}}_s$ tout en partant de l'hypothèse que l'objet est éclairé par un champ électrique, aussi exprimé en coordonnées sphériques, se propageant dans la direction de $\hat{\mathbf{k}}_i$.

Étant donné que le vecteur $\hat{\mathbf{k}}_i$ est défini en coordonnées cartésiennes, le vecteur de Jones du champ électrique incident doit être transformé dans le même système de coordonnées afin de calculer le courant \mathbf{J} par l'équation (1.64). Pour cela, la matrice de rotation $\bar{\mathbf{R}}^{car}(\theta_i, \phi_i)$ est introduite :

$$\begin{bmatrix} E_{0i}^x \\ E_{0i}^y \\ E_{0i}^z \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}^{car}(\theta_i, \phi_i) \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0i}^\theta \\ E_{0i}^\phi \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

où

$$\bar{\mathbf{R}}^{car}(\theta_i, \phi_i) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_i) \cos(\phi_i) & \cos(\theta_i) \cos(\phi_i) & \sin(\phi_i) \\ -\sin(\theta_i) \sin(\phi_i) & \cos(\theta_i) \sin(\phi_i) & -\cos(\phi_i) \\ -\cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

Une fois déterminés les courants de surface $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, le vecteur de Jones du champ électrique diffracté, calculé par l'expression (1.19), est exprimé en coordonnées cartésiennes. Il est donc nécessaire de l'exprimer en coordonnées sphériques pour déterminer la matrice de diffraction. Cette fois, la matrice de rotation $\bar{\mathbf{R}}^{sph}(\theta_s, \phi_s)$ est utilisée après d'avoir effectué l'intégration. Ceci permet de calculer le champ électrique diffracté en coordonnées sphériques. Ainsi :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ E_{0s}^\theta \\ E_{0s}^\phi \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}^{sph}(\theta_s, \phi_s) \begin{bmatrix} E_{0s}^x \\ E_{0s}^y \\ E_{0s}^z \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

où

$$\bar{\mathbf{R}}^{sph}(\theta_s, \phi_s) = \begin{bmatrix} \sin(\theta_s) \cos(\phi_s) & \sin(\theta_s) \sin(\phi_s) & \cos(\theta_s) \\ \cos(\theta_s) \cos(\phi_s) & \cos(\theta_s) \sin(\phi_s) & -\sin(\theta_s) \\ -\sin(\phi_s) & \cos(\phi_s) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

1.2.7.2 Analyse énergétique

Le phénomène de diffraction électromagnétique, a été analysé jusqu'à présent en utilisant les relations existantes entre les champs incident et diffracté, qui pour le cas de la diffraction sur un objet parfaitement conducteur, sont décrites par l'équation du rayonnement (1.19) et l'équation intégrale du champ électrique (1.60). Ces expressions demandent la résolution des équations intégrales pour calculer le courant sur la surface de l'objet. Une autre approche, basée sur les relations énergétiques des champs incident et diffracté, peut-être employée afin d'analyser ce phénomène. Pour cela il vaut mieux comprendre de quelle façon est générée, stockée, transmise et consommée l'énergie du champ électromagnétique. L'équation de conservation de l'énergie permet d'observer le comportement de l'énergie du champ électromagnétique à tout instant et à pour toute région de l'espace. Cette équation est obtenue à partir des opérations réalisées sur les équations de Maxwell (1.1) et (1.2) écrites dans leur forme intégrale [3]. L'équation instantanée de conservation de l'énergie, et alors :

$$\oint_S [\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{s} = - \iiint_V \left[\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right] dv - \iiint_V \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) dv \quad (1.68)$$

et qui pour un milieu linéaire homogène isotrope non magnétique peut-être réécrite sous la forme suivante :

$$\oint_S [\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{\epsilon \|\mathbf{E}(t, \mathbf{r})\|^2}{2} + \frac{\mu \|\mathbf{H}(t, \mathbf{r})\|^2}{2} \right) dv - \iiint_V \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) dv \quad (1.69)$$

représente les phénomènes énergétiques qui sont présents dans le champ électromagnétique dans un volume V défini par une surface fermée S . Il est évident que chaque intégrale qui fait partie de l'équation (1.68) représente une puissance. Alors l'analyse est divisée en trois éléments principaux. Le premier terme du membre droit de l'expression (1.69) représente la variation de l'énergie stockée par les champs. Le deuxième terme représente tous les processus de transformation d'énergie (absorption et génération) [3]. Pour les problèmes de diffraction électromagnétique c'est le membre gauche de l'équation de conservation de l'énergie qui a le plus d'importance car il caractérise la transmission d'énergie à travers la surface. Cette expression exprime le flux de puissance qui traverse la surface, alors que la quantité $[\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r})]$ constitue la densité surfacique de puissance, appelée Vecteur de Poynting et dénoté $\mathbf{\Pi}(t, \mathbf{r})$. Comme conséquence directe de l'équation de conservation de l'énergie, la puissance du champ électromagnétique traversant une surface \mathbf{S} quelconque peut-être calculée par l'expression suivante :

$$\iint_S [\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{\Pi}(t, \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (1.70)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal à la surface.

Quand les variations des champs sont de forme sinusoïdale, le vecteur de Poynting peut-être déterminé à partir des expressions complexes des champs sous la forme :

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \quad (1.71)$$

où, pour le cas d'une onde plane, il se trouve que ce vecteur, à présent complexe, est orthogonal aux vecteurs \mathbf{E} et \mathbf{H} , colinéaire au vecteur d'onde $\hat{\mathbf{k}}$ et sa norme équivaut à la densité de puissance véhiculée par l'onde [7].

Bien que (1.70) et (1.71) permettent de calculer le flux de puissance instantanée à travers \mathbf{S} , en régime harmonique le calcul de la moyenne temporelle s'avère plus utile d'un point de vue pratique. Cette valeur est déterminée par l'expression (1.72) :

$$P = \iint_S \langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (1.72)$$

où P constitue la puissance moyenne reçue par la surface \mathbf{S} et $\langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \rangle$ est la moyenne temporelle du vecteur de Poynting calculée par :

$$\langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \Re e [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] \quad (1.73)$$

D'un point de vue énergétique, la diffraction électromagnétique implique l'existence d'une puissance incidente P_i , une puissance diffractée P_s , et pour le cas où la surface n'est pas parfaitement conductrice, une puissance transmise dans l'objet P_t . En respectant le principe de conservation de l'énergie on a :

$$P_i = P_s + P_t \quad (1.74)$$

Elle peut être utilisée comme un outil de validation du modèle. La puissance incidente est déterminée à partir de l'expression (1.72), qui prend la forme (1.75). Dans le cas d'une surface rugueuse, cette puissance est définie comme celle reçue sur le plan moyen de la surface, correspondant à une surface lisse [8] :

$$P_i = \iint_S \langle \mathbf{II}_i(\mathbf{r}') \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iint_S \frac{1}{2} \Re e [\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \quad (1.75)$$

Pour déterminer la puissance diffractée il suffit de faire aussi appel à l'expression (1.72). L'onde diffractée étant sphérique, cette puissance de manière générale peut être considérée comme reçue par la surface fermée qui délimite un volume sphérique de rayon "r" qui contient la surface S dans son centre. Dans le repère sphérique (r, θ_s, ϕ_s) l'élément de surface $d\mathbf{s}$ présent dans (1.72) devient :

$$d\mathbf{s} = r^2 \sin(\theta_s) \, d\theta_s \, d\phi_s \, \hat{\mathbf{n}}' \quad (1.76)$$

où $\hat{\mathbf{n}}'$ est le vecteur unitaire normal à la surface considérée et θ_s et ϕ_s balayent tous les angles de diffraction possibles. Si l'hypothèse de champ en champ lointain est satisfaite, le vecteur d'onde du champ diffracté $\hat{\mathbf{k}}_s$ est colinéaire au vecteur $\hat{\mathbf{n}}'$. Alors, cette puissance s'écrit :

$$P_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \langle \mathbf{II}_s(\mathbf{r}) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, r^2 \sin(\theta_s) \, d\theta_s \, d\phi_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \|\langle \mathbf{II}_s(\mathbf{r}) \rangle\| \, r^2 \sin(\theta_s) \, d\theta_s \, d\phi_s \quad (1.77)$$

1.2.7.3 Coefficient de diffraction

Différentes grandeurs sont utilisées afin d'analyser les relations entre la puissance incidente et la puissance diffractée. Dans l'hypothèse où l'onde incidente et l'onde diffractée sont en champ lointain et sont des ondes se propageant dans un milieu assimilé au vide : à partir de l'expression (1.62) pour le champ incident, en prenant en compte la proportionnalité entre champ diffracté et champ incident, l'expression pour une onde localement plane du champ diffracté peut-être écrite sous la forme [7] :

$$\mathbf{E}_s(r) = f(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) \mathbf{E}_{0i} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (1.78)$$

où $f(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i)$ est la fonction d'amplitude de diffraction depuis la direction $\hat{\mathbf{k}}_i$ vers la direction $\hat{\mathbf{k}}_s$. Le champ magnétique associé à l'onde incidente est :

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}') = \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{k}}_i \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') \quad (1.79)$$

où η_0 est l'impédance d'onde du vide. Ceci permet d'exprimer le vecteur de Poynting de l'onde incidente comme :

$$\langle \mathbf{II}_i(\mathbf{r}') \rangle = \frac{1}{2} \Re e (\mathbf{E}_i(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_i^*(\mathbf{r}')) = \frac{\|\mathbf{E}_{0i}\|^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{k}}_i \quad (1.80)$$

où le terme $\|\mathbf{E}_{0i}\|^2/2\eta_0 = \|\langle \mathbf{II}_i(\mathbf{r}') \rangle\|$, et la puissance incidente prend la forme :

$$P_i = \iint_S \frac{\|\mathbf{E}_{0i}\|^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (1.81)$$

De façon similaire, le champ magnétique de l'onde diffractée prend la forme :

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{k}}_s \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \quad (1.82)$$

et le vecteur de Poynting :

$$\langle \mathbf{II}_s(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \Re e (\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_s^*(\mathbf{r})) = \frac{\|\mathbf{E}_{0s}\|^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{k}}_s \quad (1.83)$$

où le terme $\|\mathbf{E}_{0s}\|^2/2\eta_0 = \|\langle \mathbf{II}_s(\mathbf{r}) \rangle\|$. En utilisant l'équation (1.78) pour substituer $\|\mathbf{E}_s(\mathbf{r})\|$ dans (1.83), le vecteur de Poynting de l'onde diffractée devient :

$$\langle \mathbf{II}_s(\mathbf{r}) \rangle = \frac{|f(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i)|^2}{r^2} \frac{\|\mathbf{E}_{0i}\|^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{k}}_s = \frac{|f(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i)|^2}{r^2} \|\langle \mathbf{II}_i(\mathbf{r}') \rangle\| \hat{\mathbf{k}}_s \quad (1.84)$$

L'équation (1.84) permet de comprendre que, déterminer la relation entre le champ diffracté et le champ incident, d'un point de vue énergétique, peut s'avérer plus pertinent le calcul directe des champs.

Par définition le *coefficient de diffraction réel* ou *coefficient de diffraction* (dénnoté ici par σ_{cd}) est le rapport, en termes de puissance, entre le champ diffracté dans un angle solide autour de la direction d'observation $\hat{\mathbf{k}}_s$, défini par $d\Omega = \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s$, et le champ incident provenant de la direction $\hat{\mathbf{k}}_i$. Alors, à partir de (1.76) et (1.83), la puissance traversant l'élément de surface défini par l'angle solide $d\Omega$ à la distance r est :

$$dP_s = \|\langle \mathbf{II}_s(\mathbf{r}) \rangle\| r^2 \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s \quad (1.85)$$

où par simple inspection, le terme $\|\langle \mathbf{II}_s(\mathbf{r}) \rangle\| r^2$ est identifié comme la puissance diffractée dans l'angle

solide $d\Omega$. En suivant la définition de $\sigma_{cd}(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i)$:

$$\sigma_{cd}(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\|\langle \mathbf{II}_s(\mathbf{r}) \rangle\| r^2}{P_i}, \quad (1.86)$$

le rapport de l'expression (1.87) est obtenu :

$$\frac{P_s}{P_i} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_{cd}(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s \quad (1.87)$$

valable uniquement pour le cas d'une surface illuminée par un faisceau d'ondes planes traité ici.

1.2.7.4 Surface Équivalente Radar

Un autre paramètre très important, utilisé couramment pour l'analyse de la diffraction et la caractérisation de la réflectivité d'un objet, est la Surface Équivalente Radar (SER, dénotée ici par σ). Cette grandeur, qui repose sur des concepts énergétiques définis auparavant, conserve une relation très forte avec le coefficient de diffraction, mais à la différence de σ_{cd} qui est sans dimension, σ est homogène à des m^2 . Par définition, la SER établit le rapport entre les densités de puissances diffractée et incidente en champ lointain à partir de l'expression [7] :

$$\sigma(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{\|\langle \mathbf{II}_s \rangle\|}{\|\langle \mathbf{II}_i \rangle\|} \quad (1.88)$$

Comme il n'est pas nécessaire de réaliser le calcul de la puissance incidente sur l'objet, mais qu'il suffit de connaître la densité de puissance incidente, σ constitue un paramètre plus pertinent pour quantifier la diffraction par des objets de géométrie complexe, tandis que σ_{cd} trouve une application dans la diffusion par des surfaces rugueuses.

Une autre définition de σ établit que cette grandeur équivaut à la surface perpendiculaire à la direction d'incidence qui, étant illuminée par la même densité de puissance et en la diffractant de façon isotrope, produit au récepteur une densité de puissance égale à celle diffractée par l'objet d'origine. Cette définition peut être vérifiée à partir du principe de conservation de l'énergie. Si un objet parfaitement conducteur est considéré, la relation d'égalité $P_i = P_s$ donne que :

$$P_i = \iint_\sigma \|\langle \mathbf{II}_i \rangle\| \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \|\langle \mathbf{II}_s \rangle\| \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}' r^2 \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s = P_s \quad (1.89)$$

Il faut noter qu'à partir de la définition donnée, les vecteurs $\hat{\mathbf{k}}_i$ et $\hat{\mathbf{k}}_s$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs normaux aux surfaces de l'objet $\hat{\mathbf{n}}'$ et de mesure $\hat{\mathbf{n}}$. La condition d'isotropie impose une densité de puissance diffractée constante sur toute la surface de mesure et la densité de puissance incidente est considérée

comme identique sur toute la surface de l'objet illuminé. Ces considérations permettent d'exprimer (1.89) sous la forme :

$$\|\langle \mathbf{I}_i \rangle\| \iint_{\sigma} d\sigma = \|\langle \mathbf{I}_s \rangle\| \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s \quad (1.90)$$

et d'arriver à une expression de σ équivalente à celle de (1.88) :

$$\|\langle \mathbf{I}_i \rangle\| \sigma = \|\langle \mathbf{I}_s \rangle\| 4\pi r^2 \quad (1.91)$$

A partir des équations (1.80) et (1.83), l'expression (1.88) peut-être réécrite en fonction des amplitudes des champs comme :

$$\sigma(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{\|\mathbf{E}_{0s}\|^2}{\|\mathbf{E}_{0i}\|^2} \quad (1.92)$$

La SER est une grandeur homogène à des m^2 . Dans la littérature spécialisée sa valeur est souvent exprimée en décibels par rapport à $1m^2$ (dBm^2) déterminée par $\sigma_{dBm^2} = 10 \log \sigma_{m^2}$. D'autre part, l'expression (1.92) permet de calculer σ sous forme de valeur unique dépendant des densités de puissances, par contre, comme conséquence de la linéarité des équations de Maxwell les états de polarisation d'incidence et diffraction peuvent être prises en compte. Ceci permet d'obtenir une matrice de 2×2 valeurs de SER dépendantes de chaque combinaison possible de ces états de polarisations sous la forme :

$$\bar{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{VV} & \sigma_{VH} \\ \sigma_{HV} & \sigma_{HH} \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

Dans ce format, σ_{si} indique la valeur de la SER selon une polarisation i de l'onde incidente et une polarisation s de l'onde diffractée. A partir de (1.92), l'équation (1.93) peut-être écrite de la manière suivante :

$$\bar{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \begin{bmatrix} \frac{|E_s^\theta|^2}{|E_i^\theta|^2} & \frac{|E_s^\theta|^2}{|E_i^\phi|^2} \\ \frac{|E_s^\phi|^2}{|E_i^\theta|^2} & \frac{|E_s^\phi|^2}{|E_i^\phi|^2} \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

En regardant l'équation (1.61) il est évident qu'il existe une relation entre la matrice de diffraction et la matrice de SER. Cette relation est définie par l'expression (1.95) :

$$\bar{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \begin{bmatrix} |S_{\theta\theta}|^2 & |S_{\theta\phi}|^2 \\ |S_{\phi\theta}|^2 & |S_{\phi\phi}|^2 \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

Il existe aussi une relation entre σ_{cd} et σ . La similarité des expressions (1.86) et (1.92) permet de la

déterminer. Pour une surface rugueuse, dont la puissance incidente est équivalente à celle reçue par le plan moyen de la surface, qui correspond à une surface lisse de taille S , la relation entre la taille des éléments de surface de la surface d'origine et la surface projetée de taille σ est :

$$\cos(\theta_i) ds = d\sigma \quad (1.96)$$

En utilisant l'expression (1.81) pour calculer P_i dans l'équation (1.86) et en considérant une densité de puissance homogène sur les deux surfaces, la relation $P_i = \|\langle \mathbf{II}_i \rangle\| S \cos(\theta_i) = \|\langle \mathbf{II}_i \rangle\| \sigma$ est obtenue. Alors la relation entre le coefficient de diffraction et la SER est établie sous la forme :

$$\sigma_{cd}(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\|\langle \mathbf{II}_s \rangle\| r^2}{P_i} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\|\langle \mathbf{II}_s \rangle\| r^2}{\|\langle \mathbf{II}_i \rangle\| S \cos(\theta_i)} = \frac{\sigma}{4\pi \cos(\theta_i) S} \quad (1.97)$$

Cette expression montre que le coefficient de diffraction correspond à une normalisation près de la SER par rapport à la taille de l'objet illuminé, c'est pourquoi cette grandeur est aussi connue sous le nom de *Surface Équivalente Radar Normalisée* (SERN).

Concernant la SER, divers facteurs sont susceptibles d'affecter sa valeur, notamment : la forme de l'objet et son orientation par rapport aux vecteurs $\hat{\mathbf{k}}_s$ et $\hat{\mathbf{k}}_i$, la structure et la composition des matériaux constituant l'objet et la longueur d'onde. Par convenance, lors du calcul de la SER le champ électrique de l'onde incidente est souvent considéré d'amplitude unitaire.

1.2.7.5 Coefficient de diffraction complexe

Une autre grandeur est définie dans ce travail afin de faciliter la visualisation de la structure du champ électrique diffracté et sa relation avec la SER et le champ incident. Cette grandeur, appelée ici *Coefficient de Diffraction Complexe*, et notée par ρ_{cd} , est définie de telle façon que :

$$\bar{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = \begin{bmatrix} |\rho_{cd_{\theta\theta}}|^2 & |\rho_{cd_{\theta\phi}}|^2 \\ |\rho_{cd_{\phi\theta}}|^2 & |\rho_{cd_{\phi\phi}}|^2 \end{bmatrix} \quad (1.98)$$

Ainsi, à partir de l'équation (1.92), le coefficient de diffraction complexe prend la forme :

$$\bar{\rho}_{cd} = \begin{bmatrix} \rho_{cd_{\theta\theta}} & \rho_{cd_{\theta\phi}} \\ \rho_{cd_{\phi\theta}} & \rho_{cd_{\phi\phi}} \end{bmatrix} = 2r\sqrt{\pi} \begin{bmatrix} \frac{E_{0s}^\theta}{E_{0i}^\theta} & \frac{E_{0s}^\phi}{E_{0i}^\phi} \\ \frac{E_{0s}^\phi}{E_{0i}^\theta} & \frac{E_{0s}^\phi}{E_{0i}^\phi} \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

Ce coefficient permet de considérer l'information de phase du champ diffracté relative à la phase du champ incident. La même hypothèse d'amplitude unitaire du champ électrique incident peut être faite. Concernant la relation entre les coefficients de diffraction, réel et complexe, à partir des expressions (1.97) et (1.98), il est

très simple d'établir que, pour une surface rugueuse dont le plan moyen a une surface S , illuminée par une onde plane en champ lointain :

$$\sigma_{cd} 4\pi \cos(\theta_i) S = \|\rho_{cd}\|^2 \quad (1.100)$$

Cette grandeur est homogène à des m et sa valeur sera exprimée en décibels par rapport à $1m$, noté ici dB et calculé par la relation $\rho_{cd\text{dB}} = 10 \log \rho_{cd\text{m}}$. Comme pour la SER ou le coefficient de diffraction réel, le coefficient de diffraction complexe est exprimé sous forme matricielle afin de prendre en compte l'état de polarisation des ondes incidente et diffractée.

1.3 Surfaces rugueuses

L'étude de la diffusion des ondes électromagnétiques par une surface de mer nécessite la caractérisation précise de ce type de surface. Dans cette section sont présentés différents outils statistiques employés pour la caractérisation des surfaces rugueuses aléatoires et son utilisation dans le cas particulier de la surface de mer. Les plus importants étant la fonction de densité de probabilité des hauteurs, la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs et le spectre des hauteurs. Ensuite, on décrit le processus de formation des vagues sur la surface de mer à partir de l'action du vent, ainsi que la transmission de ces ondes mécaniques dans un milieu dispersif tel que l'eau dans le but de comprendre ses particularités. Différents modèles spectraux utilisés dans la caractérisation de la surface de mer sont mentionnés.

1.3.1 Description statistique des surfaces rugueuses

L'impossibilité de connaître de manière déterministe l'évolution d'une surface rugueuse aléatoire impose l'emploi d'outils statistiques afin de décrire son comportement. A cet effet, une surface rugueuse comme celle de la mer peut être assimilée à un processus aléatoire, du fait de l'existence de la rugosité, et stochastique car c'est un processus variable dans le temps. Alors, il est possible de décrire son comportement spatio-temporel à travers un processus aléatoire de type $z(\mathbf{r}, t)$, dont $\mathbf{r}(x, y)$ représente le vecteur de position sur le plan moyen de la surface dans un repère cartésien et t la composante temporelle. En particulier dans ce travail, on se limitera aux processus aléatoires, stationnaires et ergodiques. Alors, bien qu'une surface de ce type ne puisse pas être connue avec exactitude, différentes moyennes statistiques déterministes sont utilisées sous sa description [7], [9], [10], [11].

Le caractère stationnaire d'un processus aléatoire est déterminé par l'invariabilité dans le temps de ses moyennes statistiques. Dans un sens moins rigoureux on appelle stationnaire un processus aléatoire dont la valeur moyenne et sa fonction d'autocorrélation, qui sera introduite par la suite, sont indépendantes du temps. L'ergodicité impose que les moyennes statistiques spatiales sont égales aux moyennes temporelles. Ceci implique que la surface peut être décrite de façon univoque par un processus de type $z(x, y)$ [9].

Comme conséquence de son caractère stationnaire et ergodique la connaissance de la densité de probabilité

des hauteurs et de la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs, ou le spectre des hauteurs, suffisent pour la description des surfaces rugueuses de ce type.

1.3.1.1 Densité de probabilité des hauteurs

La fonction densité de probabilité (PDF) des hauteurs [7], [9], [10], [11], aussi nommée distribution des hauteurs et déterminée par l'équation suivante, représente la distribution statistique des hauteurs de la surface rugueuse et contient trois paramètres essentiels : z_0 , σ_h et le type de densité :

$$p_h(z) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{z-z_0}{2\sigma_h}\right)^2} \quad (1.101)$$

z_0 représente la valeur moyenne de la PDF des hauteurs qui représente également la hauteur du plan moyen de la surface, habituellement choisie $z_0 = 0$ par simplicité. σ_h est l'écart type des hauteurs par rapport à z_0 . Le type de densité peut être gaussienne, exponentielle, lorentzienne ou autre. Dans le cas traité ici, et du fait de l'exclusion des phénomènes non linéaires comme le déferlement des vagues ou le fetch [9], la PDF des hauteurs est considérée comme étant gaussienne. Ceci implique que 99.73% des hauteurs se trouvent entre $z_0 - 3\sigma_h$ et $z_0 + 3\sigma_h$. D'autres expressions sont utilisées pour les distributions exponentielle et lorentzienne. La PDF des hauteurs vérifie la condition :

$$\langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p_h(z) dz = 1 \quad (1.102)$$

Sa valeur moyenne, ou moyenne statistique d'ordre un, est déterminée par l'expression suivante :

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z p_h(z) dz = z_0 \quad (1.103)$$

La variance ou moyenne statistique d'ordre deux correspond à la moyenne des valeurs au carré des hauteurs notée sous la forme $\langle (z - z_0)^2 \rangle = \langle (z)^2 \rangle$, puisque $z_0 = 0$, et définie par l'équation :

$$\langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 p_h(z) dz = \sigma_h^2 \quad (1.104)$$

L'écart type des hauteurs σ_h , aussi nommé hauteur RMS (Root Mean Square), est lié à la variance par $\sigma_h = \sqrt{\langle z^2 \rangle}$.

1.3.1.2 Fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs

La fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs est définie par l'équation suivante [7], [9], [10], [11] :

$$W_h(\mathbf{r}_d) = \langle z(\mathbf{r}_1)z(\mathbf{r}_2) \rangle = \lim_{X_s, Y_s \rightarrow +\infty} \frac{1}{X_s Y_s} \int_{-X_s/2}^{+X_s/2} \int_{-Y_s/2}^{+Y_s/2} z(\mathbf{r}_1)z(\mathbf{r}_2) dx dy \quad (1.105)$$

Elle exprime la corrélation spatiale des hauteurs entre deux points sur la surface en fonction de la distance horizontale entre ces points. En définissant cette distance sous la forme $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, où \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_1 sont les vecteurs de positions des points sur le plan définie par les vecteurs $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$, la valeur maximale de la fonction d'autocorrélation (σ_h) a lieu pour $\mathbf{r}_d = 0$. Dans ce travail les surfaces rugueuses considérées seront supposées avoir une fonction d'autocorrélation des hauteurs gaussienne, mais, de même que la PDF des hauteurs, elle peut être exponentielle, lorentzienne ou d'autre type. Des paramètres très importants qui peuvent être extraits de cette fonction sont les longueurs d'autocorrélation selon les axes $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$.

Dans l'expression ci-dessus les variables X_s et Y_s représentent les dimensions de la surface considérée selon les axes $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ respectivement. L'hypothèse d'ergodicité retenue permet d'exprimer la fonction d'autocorrélation comme $W_h(\mathbf{r}_d) = \langle z(\mathbf{r}_1)z(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_d) \rangle$. Elle peut être normalisée par l'écart type des hauteurs afin d'obtenir un coefficient dont la valeur maximale est l'unité et s'exprime sous la forme :

$$C_h(\mathbf{r}_d) = \frac{\langle z(\mathbf{r}_1)z(\mathbf{r}_2) \rangle}{\sigma_h} \quad (1.106)$$

La distance de corrélation mentionnée dans le paragraphe précédent correspond à la distance selon $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ pour laquelle la fonction d'autocorrélation, prend une valeur égale à son maximum multipliée par $1/e$. Ce paramètre, aussi nommé échelle de rugosité horizontale de la surface, est défini indépendamment pour chaque direction ($\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$). L'expression suivante représente précisément la fonction d'autocorrélation des hauteurs en fonction des distances d'autocorrélation pour le cas d'une surface bidimensionnelle.

$$W_h(x, y) = \sigma_h^2 e^{\left(-\frac{x^2}{L_{cx}^2} - \frac{y^2}{L_{cy}^2}\right)}, \quad (1.107)$$

L_{cx} et L_{cy} étant les distances d'autocorrélation selon les directions $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$.

1.3.1.3 Spectre des hauteurs

Alors que la PDF des hauteurs et la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs suffisent pour la caractérisation complète d'une surface dite gaussienne, très fréquemment le concept de spectre des hauteurs est utilisé dans la littérature pour la description de ces surfaces. Calculée comme la transformée de Fourier spatiale de la fonction d'autocorrélation spatiale (théorème de Wiener-Khintchine) par l'expression ci-dessous, cette fonction peut être interprétée comme la densité de puissance spatiale de la surface [7], [9], [10], [11] :

$$S_h(\mathbf{k}_m) = \text{TF}[W_h(\mathbf{r}_d)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_h(\mathbf{r}_d) e^{-j\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}_d} d\mathbf{r}_d \quad (1.108)$$

où \mathbf{k}_m est le vecteur d'onde de la surface mentionné précédemment (à ne pas confondre avec le vecteur

d'onde électromagnétique), ou vecteur fréquence spatiale par cycle, homogène à des rad/m. Cette relation impose que la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs soit paire afin d'avoir un spectre des hauteurs réel. De plus, la valeur de $W_h(\mathbf{0}) = \langle z(\mathbf{r}_1)^2 \rangle = \sigma_h^2$, qui correspond à la variance des hauteurs de la surface, peut-être interprétée comme une puissance.

D'autres paramètres tels que l'écart type des pentes, le rayon de courbure moyen de la surface ou la distance moyenne entre deux pics consécutifs, sont utilisés aussi dans la caractérisation des surfaces rugueuses. Ainsi, il existe d'autres outils statistiques tels que la densité de probabilité des pentes ou la fonction caractéristique des hauteurs.

1.3.2 Particularité de la surface de mer

Dans le contexte des surfaces rugueuses, la surface de mer occupe une place particulière du fait qu'il s'agit d'un milieu avec des variations spatio-temporelles résultant fondamentalement de l'interaction du vent et la surface de l'eau. Ceci donne lieu à un échange d'énergie air-eau qui crée des ondes mécaniques dans l'eau (vagues). Ces ondes interagissent entre elles de forme complexe donnant lieu à des transferts d'énergie dont la modélisation déterministe est impossible. Il ne s'agit pas d'une surface rugueuse statique ou même périodique, mais d'une surface en changement permanent et aléatoire. On parle d'un processus aléatoire stochastique, contrôlé par des variables telles que la température, la pression atmosphérique, la salinité et surtout par la vitesse du vent .

Le vent constitue la source des vagues. En effet, lorsque le vent rentre en contact avec la surface de mer, des ondes mécaniques de courte longueur d'onde sont créées. Ces ondes se propagent à la surface sous forme de petites vagues ou vaguelettes (rugosité de courte échelle). Il est particulièrement facile d'apprécier ce phénomène quand une rafale de vent vient souffler sur une mer calme. Elles sont nommées vagues de capillarité et sont caractérisées par une amplitude très limitée, et par le fait qu'elles disparaissent vite après l'arrêt du vent qui les a créés. Leur disparition est due à la tension superficielle de l'eau. L'expression de dispersion suivante caractérise leur comportement [9] :

$$\omega_m^2 = \frac{\tau_m}{\rho_m} k_m^3 \tanh(k_m d) \quad (1.109)$$

ω_m étant la pulsation de l'onde en rad/s, $\tau_m = 74.10^3 \text{N/m}$ étant la tension superficielle de l'eau et $\rho_m = 10^3$ sa masse volumique. d est la profondeur de l'eau en mètres et k_m est la norme du vecteur d'onde de la surface (de l'onde mécanique) et répond à la relation $k_m = 2\pi/\lambda_m$, où λ_m représente la longueur d'onde aussi en mètres.

Sous condition que le vent continue de souffler, ces vagues primaires continueront de grandir en amplitude et leur longueur d'onde augmentera grâce au transfert non linéaire d'énergie entre vagues, donnant lieu à la naissance d'un deuxième type de vagues. Celles-ci prennent le nom de vagues de gravité. Elles sont caractérisées par une longueur d'onde et une amplitude plus grandes que les vagues de capillarité (rugosité à longue échelle). Elles sont caractérisées par l'expression suivante [9] :

$$\omega_m^2 = gk_m \tanh(k_m d) \quad (1.110)$$

où $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ représente l'accélération de la pesanteur.

Les vagues de gravité peuvent atteindre un régime stationnaire lorsque le vent qui les a créés souffle pendant un temps suffisamment long et elles ne disparaissent pas rapidement après qu'il s'arrête de souffler. Ces vagues peuvent voyager sur des longues distances et peuvent se propager très loin de leur endroit d'origine. On distingue alors deux régimes de vagues de gravité. La mer de vent, formée par les vagues levées par le vent à leur endroit de formation et la houle. Celle-ci est formée par les vagues d'une ancienne mer de vent et dont la période, très constante, est plus grande que celle de la mer de vent. L'amplitude de la houle est plus petite.

Des phénomènes non linéaires, tel que le déferlement, ont lieu à des vitesses de vent très élevés ou dans des zones peu profondes. On les négligera dans de ce travail car on considère ici uniquement des surfaces rugueuses pouvant être assimilées à une surface située en pleine mer sous des régimes de vents faibles à modérés.

1.3.2.1 Modèles de spectre

D'un point de vue statistique, la surface de mer constitue un cas complexe de surface rugueuse dont la description ne s'accorde pas exactement aux caractéristiques des surfaces gaussiennes qui viennent d'être décrites. En effet, l'existence des deux échelles de rugosité (vagues de gravité et vagues de capillarité) affecte principalement le spectre des hauteurs de la surface. Un modèle composite qui prend en compte ces deux échelles de rugosité s'avère nécessaire. Ainsi, la surface de mer est décrite par les paramètres $\sigma_h = \sigma_{h_g} + \sigma_{h_c}$ et $W_h(\mathbf{r}_d) = W_{h_g}(\mathbf{r}_d) + W_{h_c}(\mathbf{r}_d)$ où l'indice g ou c indique l'échelle de rugosité considérée (gravité ou capillarité respectivement) [7], [9], [10], [11].

Alors que les premiers modèles théoriques de surfaces de mer ont été développés dans les années 70, ils étaient complètement empiriques et mono-dimensionnels et ne considéraient pas le caractère multi-échelle de la rugosité de ce type de surface. Les premiers modèles de spectres dits globaux, sont apparus plus tard, dans les années 1980 et 1990 [9]. On y trouve des exemples des modèles encore incomplets comme celui de Pierson [9], [12], ou encore celui de John R. Apel [9], [13]. En 1997 un nouveau modèle de spectre a été établi par Elfouhaily, Chapron, Katsaros et Vandemark [9], [14]. Il constitue une synthèse des travaux effectués pendant les vingt années précédentes et prend en compte des critères empiriques et théoriques non inclus dans les modèles existants, comme la notion de fetch. Il est une référence encore aujourd'hui et a été validé par des mesures expérimentales. Ce modèle permet de réaliser la description spectrale bidimensionnelle ou monodimensionnelle d'une surface de mer à partir de la connaissance de la vitesse du vent (exprimée en m/s) mesurée à une distance déterminée au-dessus du niveau de la mer.

La description de la surface de mer présentée, montre qu'il s'agit d'une surface multi-échelle, c'est à dire, que la période spatiale des vagues peu s'étendre du centimètre au décimètre, soit 3 décades. Ainsi, pour inclure toutes les échelles de rugosité il est nécessaire de générer une surface de mer d'aire approximative

50 m \times 50 m. Si la longueur d'onde Radar est de $\lambda_0 = 10$ cm, et le pas d'échantillonnage de la surface est $\lambda_0/10 = 1$ cm, la matrice impédance (voir chapitre 2), résultant de la discrétisation du problème sera de l'ordre de $(3 \times 5000) \times (3 \times 5000)$.

Au cours de cette thèse nous n'avons pas réussi à atteindre cet objectif. En effet, nous avons considéré uniquement une surface dite "mono-échelle", avec une longueur de corrélation et fonction d'autocorrélation des hauteurs gaussiennes.

1.4 Méthodes de calcul en électromagnétisme

Quand il s'agit de résoudre le problème de la diffraction électromagnétique, un grand nombre de méthodes avec plusieurs variantes sont disponibles. Chaque méthode exhibe des avantages et des inconvénients. Différents éléments peuvent être pris en compte pour sélectionner la plus adéquate pour une application spécifique. La précision de calcul, le temps de convergence, l'utilisation de l'espace mémoire, l'applicabilité aux conditions physiques du problème, sont des aspects à analyser avant de sélectionner une méthode spécifique.

Trois familles de méthodes existent. D'abord, les méthodes analytiques, qui utilisent des expressions déterministes de la géométrie des objets et de la distribution de courants, sont les plus précises. Elles servent à déterminer les champs à partir de la solution analytique des équations de Maxwell et des équations intégrales. La deuxième famille est constituée par des méthodes rigoureuses. Ces méthodes sont généralement employées pour cerner le domaine de validité des méthodes approximatives mais aussi pour la résolution précise des problèmes à fréquences modérées. Dû au niveau de précision, elles sont généralement appliquées aux problèmes de petite taille électrique, comme la conception d'antennes, car ces méthodes demandent généralement beaucoup de ressources informatiques. Elles n'introduisent pas d'approximations implicites au-delà de la discrétisation du problème.

La dernière famille est formée par les méthodes approximatives, aussi appelées méthodes haute fréquence ou asymptotiques, car elles introduisent plusieurs approximations dans le problème de base afin de garantir sa résolution rapide. Bien entendu, ces méthodes sont limitées en précision mais leur point fort réside dans leur rapidité. De plus, elles doivent être appliquées dans leur domaine de validité.

1.4.1 Méthodes analytiques

Comme le nom l'indique, ces méthodes donnent la réponse exacte du problème de diffraction électromagnétique car les équations des champs sont résolues de façon analytique. Par contre elles sont très limitées quant à leur applicabilité. Il est nécessaire de connaître les expressions analytiques des distributions des courants sur la surface, ce qui est impossible pour la plupart des cas. Même si dans le contexte de la diffraction d'ondes par des surfaces rugueuses son applicabilité est nulle, son utilisation peut être envisagée afin de valider la précision d'autres méthodes numériques sur des géométries canoniques. Leur applicabilité est limitée à quelques problèmes canoniques comme le cylindre de longueur infinie et la sphère, qui constituent les modèles de référence canoniques en 2D et 3D respectivement.

1.4.2 Méthodes asymptotiques

La résolution de problèmes de diffraction électromagnétique sur des géométries complexes est difficile ou impossible par une méthode analytique. Des approximations sont alors introduites pour résoudre le problème. Cela donne lieu à différents types de méthodes qui peuvent être regroupées dans deux sous-familles : celles qui établissent un développement asymptotique du champ rayonné à grande distance et celles qui se basent sur un développement asymptotique du courant induit sur la surface de la cible.

Parmi les méthodes orientées “rayon” se trouvent la Théorie Géométrique de la Diffraction, l’Optique Géométrique et la Théorie Uniforme de la Diffraction. Ces techniques se basent sur une description optique du champ à partir de l’hypothèse que la taille de l’objet considéré est très grande par rapport à la longueur d’onde. Les techniques orientées courant comptent pour leur part l’Optique Physique, la Théorie Physique de la Diffraction et la Méthode des Courants Équivalents. Pour la nature de ce travail de recherche, dont la précision de la méthode est le principal besoin, les méthodes asymptotiques sont écartées.

1.4.3 Méthodes numériques

Aussi connues par le terme de méthodes rigoureuses ou exactes, dû au fait qu’elles n’introduisent pas de simplifications sur les équations, ces méthodes se basent sur une numérisation du problème. Ces types de méthodes ont été traditionnellement limités à la résolution de problèmes de petite taille électrique, normalement quelques longueurs d’onde pour de géométries ne nécessitant d’un maillage, mais avec le développement des capacités des calculateurs les limitations commencent à reculer. Ce constat est à l’origine de ce travail de thèse.

La première méthode analysée est celle des Différences Finies ou FDM. L’application de cette méthode est très simple. Elle consiste à discrétiser le domaine de solution avec des grilles rectangulaires, ou courbes dans le cas de certaines variations de la méthode, très uniformes. Dans chaque case de la grille, les opérateurs différentiels des équations de Maxwell sont approximés par une série de Taylor. Ses principaux avantages sont la prise en compte de milieux non linéaires et non homogènes et qu’aucune matrice impédance ne doit être sauvegardée, ce qui permet la résolution de systèmes assez larges. Par contre cette méthode a besoin d’un maillage volumique du problème ce qui est inutilement volumineux pour les problèmes de diffraction par des objets parfaitement conducteurs. La caractérisation du domaine de solution avec un maillage régulier a comme résultat un manque de précision de la méthode pour l’application à des géométries présentant de grandes courbures. Pour finir il faut mentionner qu’elle souffre des problèmes de dispersion numérique et du besoin de tronquer le domaine de calcul [85].

La deuxième méthode dans ce groupe des méthodes numériques est celle des Éléments Finies ou FEM. Elle est utilisée pour résoudre des problèmes électromagnétiques sous forme différentielle [3]. À la différence de la FDM, le maillage est mieux adapté pour des géométries complexes et en plus elle ne présente pas de problèmes de dispersion numérique. En revanche cette méthode demande beaucoup de temps de calcul et d’espace mémoire. Ses principales limitations, concernant l’utilisation dans des problèmes de diffraction, sont le besoin d’un maillage volumique comme la FDM et le besoin de tronquer également le domaine de calcul.

La Méthode des Moments ou MmM, quant à elle, compte dans ses avantages de pouvoir résoudre des problèmes volumiques ou surfaciques. La liberté de choix des fonctions de base et de test la rend très appropriée pour les géométries complexes. Parmi ses points faibles se trouve le besoin élevé d'espace mémoire et de possibles problèmes de convergence si les singularités présentes dans les équations intégrales ne sont pas bien traitées. Parmi les méthodes exactes, la MmM est la plus appropriée pour les problèmes de diffraction et de rayonnement en présence de milieux homogènes.

1.5 La Méthode des Moments

La Méthode des Moments (MmM) est une technique numérique permettant de convertir des équations intégrales-différentielles en un système matriciel linéaire. C'est le travail de Harrington [15] qui a rendu célèbre l'application de cette méthode en électromagnétisme.

La formalisation de la méthode commence par le problème général [4], [15] :

$$\mathcal{L}(f) = g \quad (1.111)$$

où \mathcal{L} est un opérateur linéaire, g est une fonction d'excitation connue et f est une fonction inconnue. Une projection de f est d'abord réalisée :

$$f = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (1.112)$$

où a_n sont des coefficients de pondération inconnus et f_n des fonctions connues. Comme \mathcal{L} est un opérateur linéaire l'équation (1.111) peut-être exprimée comme

$$\sum_{n=1}^N a_n \mathcal{L}(f_n) \approx g \quad (1.113)$$

dont l'erreur d'approximation est égale au résidu :

$$\xi = g - \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{L}(f_n) \quad (1.114)$$

Les fonctions f_n , appelées fonctions de base, sont choisies de façon à décrire au mieux le comportement de la fonction f dans le domaine de solution du problème. Le produit scalaire entre une fonction de test et une fonction de base est défini de la manière suivante :

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_{f_m} f_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{f_n} f_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (1.115)$$

En posant la condition que le produit scalaire entre les fonctions de test et le résidu ξ soit nul, l'expression (1.111) devient

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle f_m, L(f_n) \rangle = \langle f_m, g \rangle \quad (1.116)$$

résultant en une équation matricielle de taille $N \times N$ de type $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ [4], [15], où

$$Z_{mn} = \langle f_m, L(f_n) \rangle \quad (1.117)$$

$$b_m = \langle f_m, g \rangle \quad (1.118)$$

La MdM donne la liberté de choisir le type de fonction de test à utiliser et de ce choix dépend la possibilité d'obtenir des solutions correctes. La méthode de Galerkin est très souvent utilisée. Elle consiste à choisir comme fonctions de test les mêmes fonctions que les fonctions de base. Ceci permet d'accélérer le calcul de la matrice impédance qui devient ainsi une matrice symétrique. Quant au type de fonctions de base, vue la nature du problème, dont la surface en 3D est aléatoirement rugueuse et considérée parfaitement conductrice, les fonctions RWG sont utilisées [16]. Ces fonctions s'appuient sur un maillage triangulaire et donc elles se conforment bien à la surface. En plus les fonctions RWG sont des fonctions vectorielles donc bien adaptées pour modéliser des courants.

1.6 État de l'art

Le laboratoire IETR de Nantes compte une longue et forte expérience dans l'étude de la modélisation de la diffusion d'ondes électromagnétiques par des milieux aléatoires rugueux, en particulier le milieu maritime. De nombreux travaux de thèse et d'articles publiés [7], [8], [17], [18], [19], [20] permettent de prendre la mesure de l'importance du sujet pour le laboratoire. Le choix de réaliser la modélisation sur une surface 2D (problème 3D) est, en partie, la continuité logique des travaux du laboratoire portant sur la modélisation rigoureuse de la diffraction par des surfaces rugueuses monodimensionnelles [18], [20].

L'étude de l'état de l'art sur la modélisation rigoureuse de la diffusion électromagnétique vise l'identification et analyse des méthodes numériques rigoureuses utilisées dans ce contexte, étant les seules permettant de relever ce défi pour des géométries complexes avec précision. Ainsi, ces méthodes peuvent être séparées en deux groupes [21]. Le premier groupe permet de résoudre des équations aux dérivées partielles à l'aide de la méthode des Différences Finies (FDTD) et de la méthode des Éléments Finies (FEM). L'autre groupe

de méthodes s'appuie sur la résolution des équations intégrales et comprend toutes les méthodes basées sur la Méthode des Moments (MdM). Les caractéristiques du problème de la diffraction électromagnétique par une surface de mer de grande étendue, parfaitement conductrice et homogène, rendent plus pertinente une approche par des équations intégrales de frontière résolues par la MdM.

La MdM transforme l'équation intégrale de frontière par un système linéaire de type $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{a} = \mathbf{b}$, dans lequel la matrice d'impédance $\bar{\mathbf{Z}}$ doit être inversée pour déterminer la densité de courant, \mathbf{a} sur la surface. Cependant, la solution directe du système linéaire, à travers la décomposition LU de la matrice impédance, est classiquement limitée par une complexité $O(N^3)$ et $O(N^2)$ en temps CPU et en mémoire, respectivement, N étant le nombre d'inconnues du problème. En dépit des performances actuelles des ordinateurs, ces complexités rendent impossible la résolution des problèmes de grande taille électrique (quelques dizaines de longueur d'onde avec un échantillonnage à $\lambda_0/10$), où le nombre d'inconnues peut atteindre quelques millions.

Plusieurs techniques d'accélération et de compression ont été développées ces dernières années et une approche très utilisée est le recours à une résolution itérative. Ces techniques visent à résoudre le problème par un processus itératif où la matrice impédance n'est pas directement inversée mais le produit matrice vecteur $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{b}$ est calculé. Comme expliqué dans [22], la plus efficace, pour les problèmes de la diffraction par une surface de mer rugueuse très conductrice 1D, est la méthode itérative FB (Forward-Backward) de Holliday et al. [23] combinée avec la technique d'accélération spectrale (SA) de Chou et al. [24], qui peuvent donner théoriquement une complexité $O(N)$ [25].

La sous-division du domaine géométrique constitue une autre approche très employée. La CBFM (Characteristic Basis Functions Method) de 2003 de Mittra et al. [26] est très utilisée. Initialement développée pour l'analyse du rayonnement des réseaux d'antennes planaires, elle permet de construire des macro-fonctions de base appelées CBFs (Characteristic Basis Functions), pour représenter le comportement du courant dans les sous-domaines. La matrice résultante est plus petite que la matrice impédance obtenue par la MdM. Cette méthode sert de base à plusieurs techniques développées pour les problèmes de grande taille. Une autre méthode qui fonctionne sous le même principe est la FMM (Fast Multipole Method) ou plus précisément la FMM multi-niveaux ou MLFMM [27], [28], dont la complexité associée est $O(N \log N)$.

Des méthodes hybrides, combinant la division en sous-domaines géométriques et une résolution itérative ont aussi été publiées. La méthode PILE (Propagation-Inside-Layer Expansion) de Déchamps et al. [11], [29], la méthode EPILE (Extended Propagation-Inside-Layer Expansion), de Kubické et al. [30] et la SDIM (Sub-domain Decomposition Iterative Method) développée par Bourlier et al. [22], [31] constituent des pistes très intéressantes.

Un dernier groupe de méthodes est formé par différentes techniques qui exploitent le déficit de rang de la matrice du système. De même que pour les méthodes par sous-division du domaine géométrique, dans ces méthodes, la matrice impédance est réorganisée et divisée en sous-matrices impédances et sous matrices de couplage. De cette façon, les sous-matrices hors diagonales, qui représentent les interactions entre sous-domaines géométriquement éloignés, peuvent être considérées comme ayant des rangs plus petits que leur dimension. Alors elles peuvent être exprimées sous forme compacte par la multiplication de matrices plus petites [21]. La technique ACA [32] (Adaptive Cross Approximation) et à multiples niveaux (MLACA) utilisent ce principe, comme le montrent les travaux de Chen et al. [33], [34]. Elles permettent de réduire

la complexité informatique et le besoin d'espace mémoire à $O(N \log^2 N)$. Le principal avantage de cette technique est qu'elle ne nécessite pas le calcul de toute la matrice pour la compresser. D'autres méthodes de décomposition matricielle qui emploient le même principe sont la MLUV (Décomposition UV Multi-Niveaux) [35], [36], [37] et la Truncated SVD.

On peut noter, l'utilisation de wavelets afin de creuser la matrice impédance, qui est dense dans la MdM. Bien que l'utilisation de cette méthode a été généralement réservée aux problèmes "basse fréquence", les travaux de Zhang et al. [38], [39], [40] proposent l'utilisation de COIFLETS (Coifman Wavelets) en combinaison avec la MFIE (Magnetic Field Integral Equation) pour obtenir des complexités de l'ordre $O(N)$ - $O(N \log N)$. A noter également, la nouvelle voie de recherche adoptée par la communauté en CEM (Computational Electromagnetics) [21], [41] basée sur le HPC (High Performance Computing). La parallélisation simple ou massive, sur CPU ou GPU, sur ordinateurs multicœurs, super-ordinateurs et même via cloud-computing ont été utilisés pour résoudre des problèmes de tailles très importantes [42], [43], [44], [45], [46], [46], [47].

L'état de l'art présenté permet uniquement d'identifier les axes principaux sur lesquels portent les travaux publiés ces dernières années sur le problème de la modélisation rigoureuse de la diffraction électromagnétique par des objets de grande taille électrique. Par contre, elle ne permet pas de déterminer les contextes et les conditions sur lesquelles les méthodes ont été utilisées, ni les diverses améliorations introduites sur ces méthodes. Par ailleurs, il y a une absence presque totale de l'utilisation des méthodes exactes dans leur forme originelle (sans accélération) pour solutionner les problèmes de grande taille électrique. Alors, pour mieux cerner les méthodes d'intérêt, il est nécessaire de mener une analyse prenant en compte la dimensionnalité du problème (2D ou 3D), le type de surface (parfaitement conductrice, très conductrice, diélectrique avec ou sans pertes) et la présence ou non de rugosité.

Diverses méthodes ont été testées ces dernières années dans le contexte d'objets canoniques parfaitement conducteurs (PEC), basées sur la CBFM. Ainsi Laviada et al. [48] introduisent en 2009 les Nested-CBFs (CBFs imbriquées) aussi nommées MLCBFM (CBFM Multi-Niveaux), leur permettant de résoudre un problème de 260 000 inconnues. La même année, ils combinent la MLCBFM avec la ACA [49] afin d'accélérer la résolution. Le même objectif est poursuivi avec l'implémentation d'une version parallélisée (PMLCBFM) [50]. Plus récemment Tanaka et al. [51] ont appliqué leur concept de CBF primaire améliorée (Improved Primary), pour augmenter la précision de la MLCBFM. Ce concept, qui permet aussi de diminuer le nombre des CBFs primaires à calculer, fut introduit initialement dans [52] en combinaison avec la CBFM.

Les travaux de 2009 de Gu et al. [53] et Delgado et al. [54] combinent la MLFMA avec la CBFM pour accélérer le remplissage de la matrice réduite. Lu et al. [55] complètent ces travaux en combinant le schéma CBFM-MLFMA avec la ACA afin d'accélérer la génération des CBFs. La méthode est appliquée sur un problème de 87 000 inconnues. Garcia et al. [56] proposent en 2012 l'introduction de la BiCGMStab (Stabilized Biconjugated Gradient Method) pour inverser sous forme itérative la matrice réduite, diminuant le besoin d'espace mémoire. Ils montrent des résultats pour un problème de plus de 2 000 000 d'inconnues.

En 2016 Lupikov et al. [57] combinent la CBFM avec une autre technique itérative, la GMRES (Generalized Minimal Residual Method), qui améliore le taux de convergence en comparaison de la FBSA, au moins dans le contexte d'objets canoniques PECs. Parmi les améliorations faites sur la CBFM se trouve aussi le CS (Compressed Sensing) de Wang et al. [58], qui optimise l'étape de création des CBFs, en diminuant le

nombre d'ondes incidentes nécessaires pour les générer.

L'une des améliorations les plus récentes faites sur la CBFM est l'utilisation de la formule de Sherman-Morrison-Woodbury (SMW) [59] proposée par Chen et al. [60] et développée plus récemment par Fang et al. [61]. La SMW permet d'obtenir une solution directe de l'inversion de la matrice réduite, en diminuant considérablement la complexité, (temps CPU) et mémoire. Ces résultats prometteurs (plus de 450 000 inconnues dans la bande 20 GHz) ont fait que d'autres auteurs explorent les performances de la méthode sur des géométries plus complexes. Ainsi Fenni et al. [62] utilisent la SMW pour accélérer la génération des CBFs. Leur travail se place dans le contexte de la diffraction 3D par des particules de précipitations, avec une approche volumétrique et constitue une continuité de leur travail dans [63].

La technique ACA a prouvé son efficacité en la combinant avec la CBFM. En effet, la ACA a été utilisée pour accélérer le remplissage des éléments hors diagonale de la matrice réduite. En 2015, Chen et al. [64] ont proposée l'utilisation d'un modèle ACA/SVD pour la génération des CBFs et la compression de la matrice réduite sur un problème de 113 000 inconnues.

La MLFACA (Multi Level Fast ACA) est aussi présentée par Chen et al. [33] pour compresser les sous-matrices impédances entre des blocs bien séparés, construites à l'aide de l'algorithme FACS (Fast Adaptive Cross-Sampling). La CBFM est utilisée dans ce travail pour compresser les matrices de couplage de la MLFACA afin d'obtenir une diminution du temps de calcul et de l'espace mémoire. Cette méthode permet d'obtenir une complexité égale à $O(N \log^2 N)$. De façon similaire, dans [65] ils combinent la MLFACA avec la SPACA (Sparsified ACA) pour compresser les sous-matrices de couplage entre blocs relativement petits. Ceci permet d'accélérer la résolution et de diminuer l'espace mémoire occupé et d'élargir l'applicabilité aux problèmes dont les domaines sont trop petits, et pour lesquels la MLFACA n'est pas efficace.

Un autre contexte est le milieu forestier en 3D pour lequel plusieurs travaux sur la CBFM ont été réalisés entre les équipes de Mittra et Roussel et dans lesquels ils utilisent un formalisme volumétrique (VIE). Ainsi en 2013 Fenni et al. [45] appliquent une version parallélisée de la MLCBFM, en utilisant le concept de Buffer Region pour élargir les domaines dans l'étape de construction des CBFs primaires. Cette version est nommée CBFM-E [66], [67]. Ils présentent une analyse de la taille de la région élargie, ainsi que du nombre d'ondes incidentes. Un autre concept exploré est celui de grilles non uniformes (Non Uniform Mesh, NuM). Il consiste à utiliser un maillage de taille adaptée à chaque région du domaine géométrique du problème. Fenni et al. [68] utilisent leur modèle CBFM-E/NuM pour un problème de 590 000 inconnues, puis dans [69] ils ajoutent la ACA pour accélérer la génération de la matrice réduite. Plus récemment, la combinaison CBFM-E/ACA a été testée dans [70] et Hettak et al. [71] considèrent l'introduction d'un objet PEC dans le milieu. Tous ces travaux utilisent un modèle de forêt composé par un ou plusieurs arbres diélectriques en présence d'un sol diélectrique. Les fréquences considérées vont de 100 MHz à 400 MHz.

Dans le cadre de la diffraction par des surfaces rugueuses diélectriques avec pertes, l'éventail des travaux traitant des méthodes rigoureuses avec accélération et compression est vaste. Pour des problèmes 2D en 2007 la Méthode PILE est développée par Déchamps et al. [11], dédiée au problème des milieux multicouches. Ils combinent la technique avec la BMIA/CAG (Banded Matrix Iterative Approach/Canonical Grid) [72], [73], [74], [75], [76], obtenant une complexité $O(N \log N)$. Dans [29] PILE est combinée avec la FBSA (Forward-Backward Spectral Acceleration) [77] permettant de diminuer la complexité à $O(N)$.

En 2011, Trinh-Xuan et al. [78] combinent la méthode FB avec la BMIA/CAG pour améliorer sa convergence. D'autres travaux visent améliorer la convergence de la FBSA, comme c'est le cas du travail de 2012 de Yang et al. [79] où ils utilisent la GMRES-RP (GMRES avec Right Preconditioning) qui permet de gagner en vitesse et taux de convergence par rapport à la FBSA. Brennan et al. [80] en 2013 et Pham-Xuan et al. [81] en 2015 appellent leurs méthodes IFBM-SA (Improved FBSA). Les premiers introduisent une nouvelle technique de division matricielle pour réduire le nombre de multiplications matrice-vecteur requis pour l'étape de correction de la FB, tandis que les seconds proposent l'amélioration de la IFBM-SA en utilisant de multiples vecteurs de correction, au lieu d'un seul, dans l'étape finale de la FB. Un autre travail intéressant dans le même contexte est celui de Huang et al. [82], dans lequel ils comparent trois méthodes itératives combinées avec la CBFM et établissent que, pour les cas où les trois convergent, la BiCGMStab nécessite le moins d'itérations et que la GMRES-RP est la plus robuste et efficace en termes de temps de calcul. La méthode la moins performante est la CGS-RP (Conjugate Gradient Squared Method avec Right Preconditioning).

La modélisation de la diffraction dans le même contexte mais en trois dimensions (3D) compte moins de travaux. Pham-Xuan et al. [83] font l'extension de leur travail précédent [81] et appliquent la IFBM-SA pour un problème 3D. Ils présentent des résultats pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$ avec 98 000 inconnues. Yu et al. [37] proposent un nouvel algorithme d'échantillonnage pour la MLUV qui permet d'améliorer la précision de la méthode.

Il convient de noter le travail de Lai et al. [84], [85] utilisant la décomposition de domaines (DD) avec la FDTD pour calculer le champ diffracté par des surfaces rugueuses de grande taille. Ils présentent les résultats numériques pour une surface de taille $66\lambda \times 66\lambda$. Également, Zhang et al. [38] utilisent les COIFLET pour obtenir une complexité réduite de $O(N \log N)$ pour un problème de taille $8\lambda \times 8\lambda$. Les résultats de ces publications sont valables aussi pour les surfaces rugueuses PEC.

Notamment pour le problème 2D concernant de surfaces rugueuses PEC, Pang et al. [86] emploient le CS comme moyen de compresser la matrice impédance de la MdM, en se basant sur le fait que l'échantillonnage peut s'effectuer sous la limite de Nyquist. Ainsi, Wang et al. [87] proposent la AMCBFM (Adaptive Modified CBFM). Leur méthode consiste en la création des CBFs secondaires d'ordre variable en fonction d'un nouveau critère de précision, ce qui permet d'obtenir une matrice réduite plus compacte.

Pour les surfaces rugueuses 2D PEC (problème 3D), en plus des travaux [38], [84] et [85] cités auparavant, les principales publications concernent des améliorations introduites sur la CBFM, comme le travail de Li et Mittra [88]. Ils proposent la combinaison de la CBFM, la ACA et la technique UV (CBFM/ACA/UV). Pour une surface de taille $8\lambda \times 8\lambda$, leur méthode a une précision similaire à celle de la MLCBFM. La UV est utilisée pour optimiser la génération des CBFs. Également Li et Mittra [89] proposent la combinaison de la CBFM avec la Décomposition Aléatoire en Valeurs Singulières (rSVD, Randomized SVD) [90], utilisée pour accélérer la génération des CBFs et la RSPA (Randomized Pseudo-Skeleton Approximation Method) [91], pour générer les éléments hors diagonale de la matrice réduite. Leurs résultats montrent que la RSPA est plus efficace que la ACA. D'autres approches peuvent être notées, comme celui de Pan [92] qui utilise la méthode C pour la modélisation de la diffraction par des surfaces rugueuses fortement ou parfaitement conductrices.

La surface de mer constitue une particularité parmi l'ensemble des surfaces rugueuses. Le caractère aléatoire rugueux, ainsi que la large distribution des échelles de rugosité, exigent un traitement bien adapté

de la modélisation de la diffraction électromagnétique par une telle surface. Pour cette raison, bien que les méthodes exposées donnent des pistes claires sur les directions à suivre dans la résolution du problème, il s'avère nécessaire d'inclure dans cet état de l'art les travaux les plus importants qui ont traité spécifiquement la diffraction par la surface de mer.

Une partie de ces travaux considère la surface de mer comme une surface PEC aléatoirement rugueuse. En 3D, les travaux publiés utilisent la parallélisation pour accélérer la solution des problèmes de grande taille. Ainsi, en 2017 Wang et al. [28] et Hao et al. [47] présentent des implémentations de la PLMFMM (Parallèle MLFMM) pour analyser la diffraction par un grand objet (bateau) sur la mer, à une fréquence de 1 GHz. Après un changement d'échelle, ils considèrent des scénarios de taille $100\lambda \times 100\lambda$.

Une autre partie de ces travaux considère la surface de mer comme un milieu aléatoirement rugueux fortement conducteur. Tel est le cas de Bourlier et al. [22], [31]. Ils développent la méthode SDIM combinée avec la technique ACA et appliquée au problème 2D à une fréquence de 3 GHz. Liu et al. [93] ont présenté une nouvelle méthode pour diviser la matrice impédance qu'ils ont nommée " Z splitting " et qui combinée avec la SA, donne des résultats plus précis avec un meilleur taux de convergence que la FB et la FBSA. Ce travail a été l'un des travaux précurseurs des travaux de Brennan et al. [25], [80], déjà présentés. Dans la continuité des travaux de Déchamps et al. sur la méthode PILE, Kubické et al. [30], [18] développent la méthode EPILE, qui permet d'évaluer la diffraction par un objet placé au-dessus de la surface de mer. Ils combinent cette technique avec la FBSA et la ACA et montrent des résultats de calculs à 6 GHz. Bourlier [94], [95] applique sa méthode SDIM, en la combinant avec la FBSA et la ACA. Il obtient des taux de compression très importants lui permettant d'évaluer l'effet du conduit maritime pour un problème jusqu'à 800 000 inconnues à 5 GHz. A la vue de la taille des problèmes en 3D, les travaux les plus remarquables font à nouveau recours à la parallélisation. Tel est le cas de [96] où Hao et al. implémentent la PMLFMA, qui leur permet de résoudre un problème $200\lambda \times 200\lambda$. D'autres publications qui peuvent être mentionnées dans ce contexte sont celles de Chungang et al. [97], qui emploient aussi la parallélisation mais avec la FDTD et celle de Zhang et al. [40], montrant l'utilisation des COIFLETs dans la bande de 75 GHz à 100 GHz. On trouve aussi dans ce contexte les travaux de Miret et al. [98], [99], [100], ou encore celui de Soriano et al. [101], qui considèrent des incidences rasantes .

Après la présentation des principales publications de ces dernières années et les méthodes développées, que la modélisation rigoureuse de la diffraction par une surface de mer de grande taille est encore un problème et nécessite la recherche de nouvelles méthodes accélérées pour obtenir des taux de compression et d'accélération élevés, bien adaptées à ce contexte. En s'appuyant sur la forte expérience du laboratoire IETR sur le sujet, le choix de la problématique traité par le présent travail de recherche est complètement justifié.

1.7 Conclusion du chapitre

Dans ce premier chapitre la base théorique nécessaire à la compréhension de ce travail ainsi que l'état de l'art ont été présentés. La première partie a été dédiée à l'introduction des notions d'électromagnétisme ainsi que de la propagation et de la diffraction des ondes électromagnétiques, nécessaires pour résoudre le problème de la modélisation de la diffraction électromagnétique. Elle a permis de comprendre les éléments

nécessaires à l'évaluation des résultats présentés plus tard dans ce travail. Ensuite, les outils statistiques utilisés pour la modélisation des surfaces rugueuses aléatoires ont été décrits ainsi que les particularités de la surface de mer. Puis, une analyse sur les différentes méthodes rigoureuses de calcul, employées pour la résolution du problème de diffraction électromagnétique a été menée. La méthode des moments de Galerkin, qui est la méthode numérique choisie, a été décrite et le choix de son utilisation a été justifié. Le chapitre conclut par la présentation de l'état de l'art dans le contexte de méthodes numériques rigoureuses appliquées pour la résolution du problème de la diffraction électromagnétique.

Chapitre 2

Mise en œuvre de la Méthode des Moments

2.1 Introduction

Le deuxième chapitre est divisé en trois sections principales. La première est dédiée à la présentation du modèle développé afin d’implémenter la méthode des moments (MdM) pour résoudre le problème de la diffusion d’une onde électromagnétique par une surface parfaitement conductrice. La modélisation requière le passage par trois étapes principales. La première vise à traiter la géométrie du problème, c’est à dire, la représentation géométrique de la surface. Cette étape comporte la génération de la surface ainsi que toutes les manipulations nécessaires donnant accès aux informations de celle-ci. La deuxième étape intègre la formulation électromagnétique (EFIE) et sa résolution par la MdM de Galerkin associée aux fonctions de base de type RWG (Rao-Wilson-Glisson). Une attention particulière est prêtée à la construction et au remplissage de la matrice d’impédance $\bar{\mathbf{Z}}$ et du vecteur champ incident \mathbf{b} , résultants de la discrétisation, aussi bien qu’au traitement de la singularité. La troisième étape du modèle contient le calcul des grandeurs d’intérêt qui ont été présentées dans le chapitre précédent, obtenues à partir du vecteur de coefficients \mathbf{a}_n , calculé dans l’étape précédente. La figure 2.1 résume les trois étapes principales du modèle développé, décrites ci-dessus, qui sont appliquées pour résoudre le problème.

La deuxième section du chapitre présente les résultats numériques obtenus par deux modèles : (1) le modèle dit “exact” basé sur la MdM et (2) le modèle dit “approché” basé sur la méthode de la OP. Dans cette étape, une surface lisse carrée est considérée. Les résultats du calcul sont présentés et discutés pour les cas des zones de champs proche et lointain pour les différentes polarisations et angles d’incidence. On présente les courants surfaciques, les champs diffractés, les coefficients de diffraction.

La dernière section du chapitre est dédiée à la présentation d’une étude paramétrique réalisée afin de déterminer le comportement du modèle devant la variation des différentes variables de configuration de la méthode.

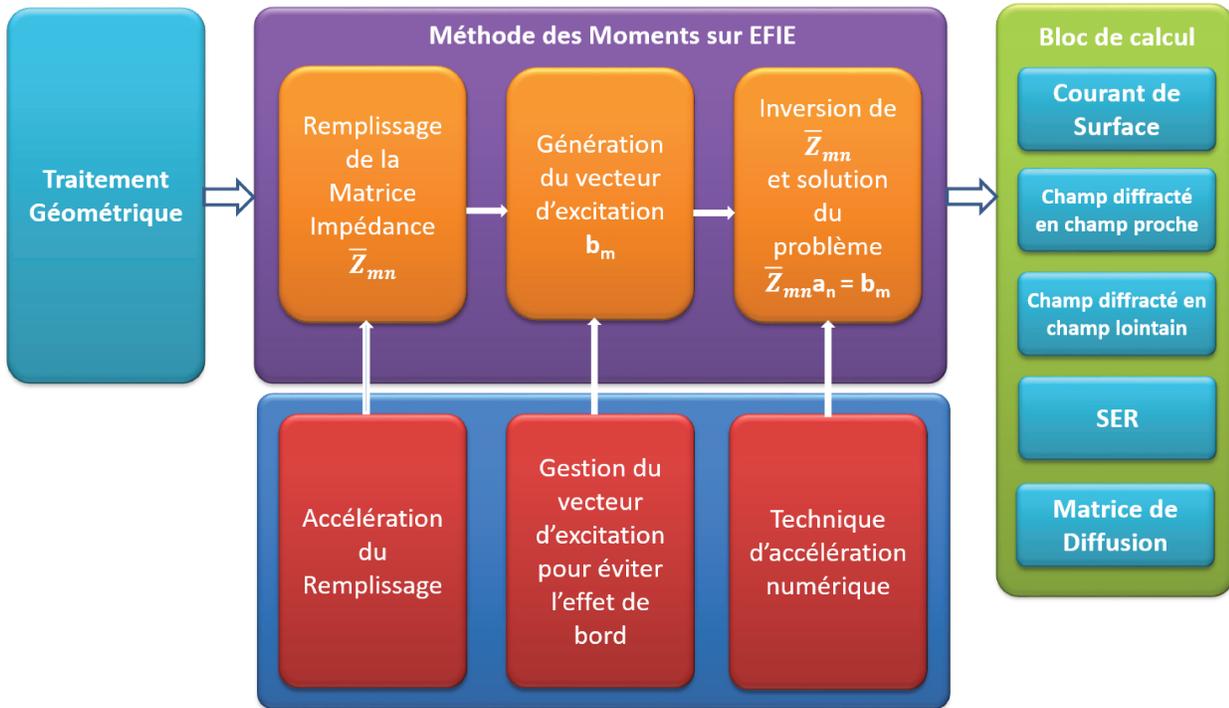


FIGURE 2.1 – Modèle MDM développé

2.2 Traitement géométrique

Il est clair que la représentation géométrique de la surface et le traitement des données après génération et maillage de la géométrie, comportant les manipulations nécessaires pour faciliter l'utilisation future des données, est une étape très importante.

Le principal intérêt de sauvegarder l'information géométrique en fichiers est de séparer le traitement géométrique de la surface de la résolution des équations intégrales. Cela représente un gain de temps lors des réglages successifs des différentes variables de la méthode. Pour mieux comprendre les enjeux de cette partie du modèle, une surface plane, comme celle présentée sur la figure 2.2 est considérée. Les sommets et triangles du maillage sont numérotés en noir et rouge respectivement. En bleu sont démarquées toutes les arêtes partagées par deux triangles adjacents, dénotant les fonctions RWG qui la composent. Ces fonctions, qui seront détaillées plus tard dans ce manuscrit, sont composées par deux triangles partageant une arête, dont l'un se voit associé un signe positif et l'autre un signe négatif. À l'issue de cette première étape trois fichiers sont constitués : *.sommets, *.triangles et *.rwg. Ces données du maillage sont suffisantes pour représenter n'importe quelle surface, aussi bien qu'à l'application de la MDM sur cette géométrie.

Concernant le traitement de la géométrie et la construction des données qui composent les fichiers sommets-triangles-RWG associés à la surface, deux points de départ possibles sont considérés. La première possibilité est d'exploiter les données de sortie d'un mailleur disponible fournissant en sortie un fichier de format *.UNV. A partir de ce dernier fichier, sont obtenus les différents fichiers qui contiennent, séparément,

les coordonnées de tous les sommets pour échantillonner la surface, l'information de chaque triangle conformé et l'ensemble de fonctions RWG construites, avec le reste des données complémentaires nécessaires à la description géométrique du problème.

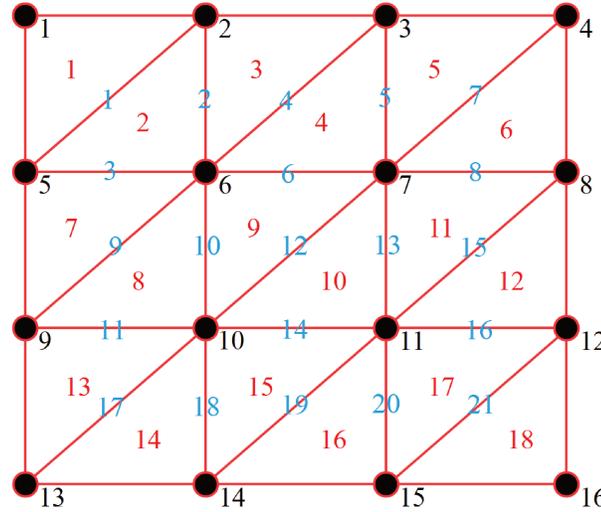


FIGURE 2.2 – Maillage de la surface supposée plane

La figure 2.3 montre le flux d'information à partir d'un fichier en format *.UNV. Il contient l'information de tous les sommets et triangles qui forment la surface. Alors, le fichier des sommets est le résultat d'une lecture directe de ce fichier d'origine. Chaque ligne décrit un sommet et inclut son indice et ses coordonnées dans un repère cartésien. Le tableau 2.1 montre le fichier ainsi obtenu, correspondant à la structure de la figure 2.2. S'agissant d'une surface lisse $z_i = 0$. Il faut noter que dans le cas d'une surface rugueuse, la valeur des éléments z_i change en fonction de l'hauteur de la surface dans les coordonnées x_i, y_i .

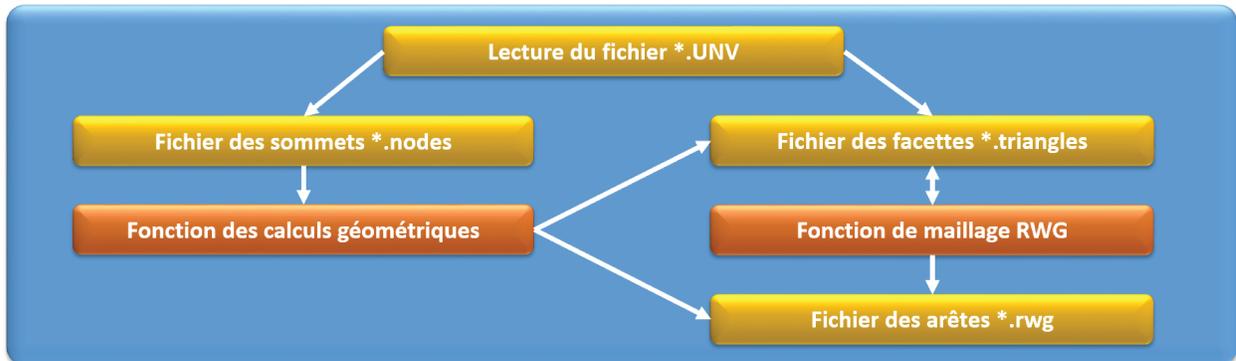


FIGURE 2.3 – Flux d'information à partir du fichier .UNV

Le fichier des triangles est composé par des lignes dont chacune décrit un triangle du modèle. Chaque ligne contient, en plus de l'indice du triangle et des sommets qui le forment, l'aire et les composants du vecteur normal au triangle dirigé vers l'extérieur de l'objet. Elle contient aussi le nombre des fonctions RWG associées au triangle décrit ainsi que leurs indices multipliés par le signe que se voit associé le triangle dans chacune de ces fonctions. La direction du vecteur normal au triangle est déterminée par l'ordre attribué à ses sommets, qui forment un système direct. Les quatre premières colonnes, comportant l'indice du triangle

et ceux des sommets qui le forment, sont lues directement du fichier *.UNV et les autres sont calculées à partir de ces données ou déterminées après la construction des fonctions RWG. L'information contenue dans le fichier *.triangles associé à la surface de la figure 2.2 est listée dans le tableau 2.2.

Tableau 2.1 – Structure du fichier des sommets

	X	Y	Z
1	x ₁	y ₁	z ₁
2	x ₂	y ₂	z ₂
3	x ₃	y ₃	z ₃
4	x ₄	y ₄	z ₄
5	x ₅	y ₅	z ₅
6	x ₆	y ₆	z ₆
7	x ₇	y ₇	z ₇
8	x ₈	y ₈	z ₈
9	x ₉	y ₉	z ₉
10	x ₁₀	y ₁₀	z ₁₀
11	x ₁₁	y ₁₁	z ₁₁
12	x ₁₂	y ₁₂	z ₁₂
13	x ₁₃	y ₁₃	z ₁₃
14	x ₁₄	y ₁₄	z ₁₄
15	x ₁₅	y ₁₅	z ₁₅
16	x ₁₆	y ₁₆	z ₁₆

Tableau 2.2 – Structure du fichier des triangles

	V₁	V₂	V₃	A	N	N	N	# RWG	RWG₁	RWG₂	RWG₃
1	1	5	2	A ₁	N _{x1}	N _{y1}	N _{z1}	1	+1	-	-
2	2	5	6	A ₂	N _{x2}	N _{y2}	N _{z2}	3	-1	+2	+3
3	2	6	3	A ₃	N _{x3}	N _{y3}	N _{z3}	2	-2	+4	-
4	3	6	7	A ₄	N _{x4}	N _{y4}	N _{z4}	3	-4	+5	+6
5	3	7	4	A ₅	N _{x5}	N _{y5}	N _{z5}	2	-5	+7	-
6	4	7	8	A ₆	N _{x6}	N _{y6}	N _{z6}	2	-7	+8	-
7	5	9	6	A ₇	N _{x7}	N _{y7}	N _{z7}	2	-3	+9	-
8	6	9	10	A ₈	N _{x8}	N _{y8}	N _{z8}	3	-9	+10	+11
9	6	10	7	A ₉	N _{x9}	N _{y9}	N _{z9}	3	-6	-10	+12
10	7	10	11	A ₁₀	N _{x10}	N _{y10}	N _{z10}	3	-12	+13	+14
11	7	11	8	A ₁₁	N _{x11}	N _{y11}	N _{z11}	3	-8	-13	+15
12	8	11	12	A ₁₂	N _{x12}	N _{y12}	N _{z12}	2	-15	+16	-
13	9	13	10	A ₁₃	N _{x13}	N _{y13}	N _{z13}	2	-11	+17	-
14	10	13	14	A ₁₄	N _{x14}	N _{y14}	N _{z14}	3	-17	+18	-
15	10	14	11	A ₁₅	N _{x15}	N _{y15}	N _{z15}	2	-14	-18	+19
16	11	14	15	A ₁₆	N _{x16}	N _{y16}	N _{z16}	3	-19	+20	-
17	11	15	12	A ₁₇	N _{x17}	N _{y17}	N _{z17}	2	-16	-20	+21
18	12	15	16	A ₁₈	N _{x18}	N _{y18}	N _{z18}	1	-21	-	-

Le fichier RWG contient l'information des fonctions du même nom utilisées pour la discrétisation du courant sur la surface. Chaque ligne représente une fonction et inclut, dans l'ordre, les indices du triangle positif et du triangle négatif qui forment cette fonction, décrite par la suite, et les indices des sommets, dans le

triangle positif et dans le triangle négatif respectivement, qui sont opposés à l'arête partagée. Par convention, dans chaque fonction RWG, le triangle positif est celui de plus petit indice. Le fichier contient également la taille de l'arête partagée par les deux triangles de la fonction. Le tableau 2.3 montre un exemple de la structure de ce fichier, correspondant à la géométrie de la figure 2.2.

Tableau 2.3 – Structure du fichier des fonctions RWG

	\mathbf{T}_+	\mathbf{T}_-	\mathbf{V}_+	\mathbf{V}_-	\mathbf{L}_m
1	1	2	1	6	L_1
2	2	3	5	3	L_2
3	2	7	2	9	L_3
4	3	4	2	7	L_4
5	4	5	6	4	L_5
6	4	9	3	3	L_6
7	5	6	3	3	L_7
8	6	11	4	4	L_8
9	7	8	5	5	L_9
10	8	9	9	9	L_{10}
11	8	13	6	6	L_{11}
12	9	10	6	6	L_{12}
13	10	11	10	10	L_{13}
14	10	15	7	7	L_{14}
15	11	12	7	7	L_{15}
16	12	17	8	8	L_{16}
17	13	14	9	9	L_{17}
18	14	15	13	13	L_{18}
19	15	16	10	10	L_{19}
20	16	17	14	14	L_{20}
21	17	18	11	16	L_{21}

Pour construire le fichier des fonctions RWG on réalise un balayage sur les triangles de la structure, en partant du triangle avec l'indice le plus petit. La figure 2.5 montre que chaque fonction RWG est formée par deux triangles T_n^+ et T_n^- qui partagent une arête commune. Sur chaque itération sont sélectionnés les triangles T_- adjacents au triangle principal T_+ , qui partagent une arête avec lui et qui ont un indice plus élevé. Les sommets V_+ et V_- appartiennent aux triangles T_+ et T_- respectivement et sont opposés à l'arête commune de longueur L_m . En général, pour une surface rectangulaire échantillonnée avec $N_x N_y$ sommets, le nombre total de triangles s'élève à $2(N_x - 1)(N_y - 1)$ et le nombre de fonctions RWG associées est $3N_x N_y - 4N_x - 4N_y + 5$, où N_x et N_y indiquent le nombre de sommets selon les directions \hat{x} et \hat{y} respectivement.

L'utilisation d'un deuxième type de fichier comme point de départ est aussi considérée pour la modélisation des surfaces rugueuses. Ce fichier contient uniquement les coordonnées cartésiennes des sommets du maillage. Les sommets sont placés régulièrement selon les directions des axes coordonnées \hat{x} et \hat{y} , de façon analogue à celle montrée par la figure 2.2, tandis que la coordonnée z_i , représentant la hauteur de la surface au point (x_i, y_i) , peut varier de façon aléatoire. En suivant la méthodologie proposée Bourlier [9] et Kubické [7], le caractère aléatoire de z est généré afin d'obtenir une surface avec une fonction de densité de probabilité des hauteurs et une fonction d'autocorrélation gaussiennes. Pour assurer la qualité du maillage et pouvoir reproduire le caractère rugueux de la surface, aucune arête ne doit dépasser la longueur de $\lambda/10$ exigée par

la méthode de moments pour être appliquée.

Dérivé du fait que le fichier mentionné contient uniquement l'information des sommets, le traitement géométrique de la surface doit inclure la construction du maillage triangulaire pour l'obtention de fichiers de triangles et de fonctions RWG. La numérotation des sommets, triangles et arêtes est montrée sur la figure 2.2. Pour réaliser le maillage triangulaire, la même règle concernant l'ordre des sommets et le vecteur normal au triangle est appliquée. Un flux d'information légèrement différent à celui à partir d'un fichier *.UNV est établi comme le témoigne la figure ci-dessous.

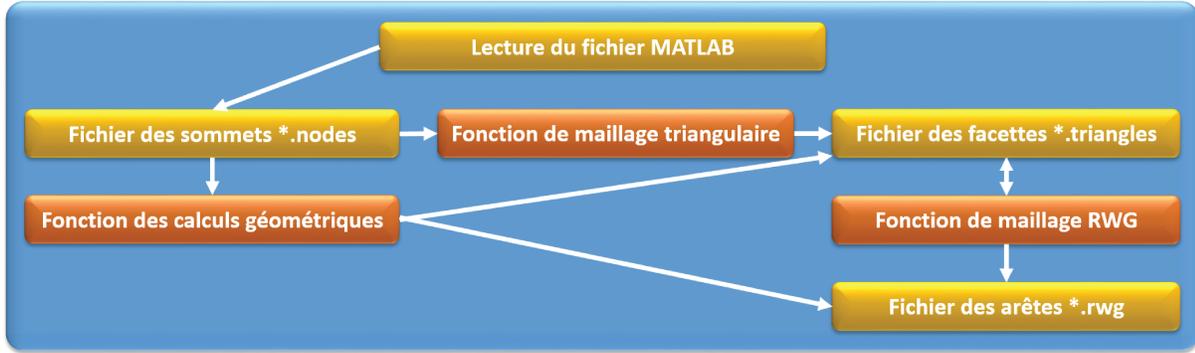


FIGURE 2.4 – Flux d'information à partir du fichier généré en Matlab

2.3 Discrétisation du problème

2.3.1 Évaluation de l'intégrale de la matrice impédance

La deuxième étape du modèle développé comporte les actions nécessaires à l'application de la MdM, rappelé par l'équation (2.1), pour résoudre l'EFIE montrée par l'équation (2.2), qui décrit la relation entre le champ incident et le courant sur la surface pour une surface parfaitement conductrice. Elle conduit aux expressions (2.3) et (2.4) pour calculer les éléments de la matrice impédance $\bar{\mathbf{Z}}$ et le vecteur d'excitation \mathbf{b} du système linéaire résultant $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ [4].

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle f_m, L(f_n) \rangle = \langle f_m, g \rangle \quad (2.1)$$

$$-\frac{j}{\omega\mu} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^i = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \iint_s G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (2.2)$$

$$Z_{mn} = \iint_{\mathbf{f}_m} \iint_{\mathbf{f}_n} \left(\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') - \frac{1}{k^2} [\nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})] [\nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')] \right) \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (2.3)$$

$$b_m = -\frac{j}{\omega\mu} \iint_{\mathbf{f}_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.4)$$

Ici $\mathbf{f}_m(\mathbf{r})$ et $\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$ sont les fonctions RWG test et source respectivement, dont la géométrie est illustrée sur la figure 2.5. La définition de cette fonction et celle de sa divergence et du vecteur $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r})$ sont données par l'expression (2.5) [4] :

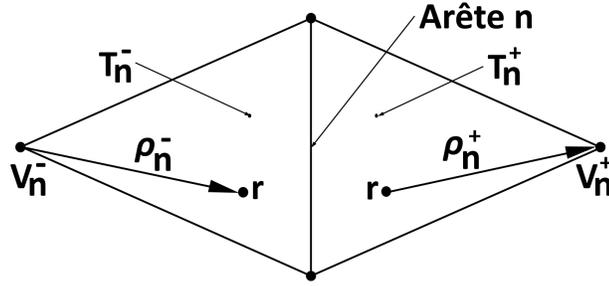


FIGURE 2.5 – Illustration d'une fonction RWG

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{L_n}{2A_n^+} \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}) & \text{sur } T_n^+ \\ \frac{L_n}{2A_n^-} \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}) & \text{sur } T_n^- \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \nabla_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{L_n}{A_n^+} & \text{sur } T_n^+ \\ \frac{L_n}{A_n^-} & \text{sur } T_n^- \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}) &= \mathbf{v} - \mathbf{r} \quad \text{sur } T_n^+ \\ \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}) &= \mathbf{r} - \mathbf{v} \quad \text{sur } T_n^- \end{aligned} \quad (2.5)$$

où L_n est la longueur de l'arête principale de la fonction et A_n^\pm dénote l'aire du triangle T_n^\pm . La condition $L_n \leq \lambda/10$ doit être respectée pour assurer la précision des résultats.

Un développement plus détaillé de l'expression (2.3) qui prend en compte la définition des fonctions RWG sur deux domaines triangulaires est donné par l'équation (2.6) :

$$Z_{mn} = \sum_{p_1=\pm} \sum_{p_2=\pm} \iint_{T_m^{p_1}} \iint_{T_n^{p_2}} \left(\frac{L_m}{2A_m^{p_1}} \boldsymbol{\rho}_m^{p_1}(\mathbf{r}) \cdot \frac{L_n}{2A_n^{p_2}} \boldsymbol{\rho}_n^{p_2}(\mathbf{r}') - \frac{1}{k^2} \left[-p_1 \frac{L_m}{A_m^{p_1}} \right] \left[-p_2 \frac{L_n}{A_n^{p_2}} \right] \right) \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (2.6)$$

L'application de la Mm sur la EFIE est faite en suivant la méthode de Galerkin et en choisissant comme fonctions de base et test les mêmes fonctions RWG. Ceci permet d'utiliser la propriété de symétrie de la matrice impédance ($Z_{ij} = Z_{ji}$) pour évaluer seulement la moitié triangulaire inférieure de $\bar{\mathbf{Z}}_{mn}$ et ensuite la remplir complètement. Pour remplir la matrice impédance le plus rapidement possible, la meilleure approche est celle de parcourir la structure par domaines triangulaires au lieu de le faire directement par les fonctions RWG [4]. Ce raisonnement est justifié par la définition de la fonction RWG sur deux triangles. En effet, l'expression (2.6) est séparée en quatre intégrales en fonction de domaines triangulaires ($T_m^+ T_n^+$,

$T_m^+T_n^-$, $T_m^-T_n^+$ et $T_m^-T_n^-$) où les seuls éléments qui changent sont $\boldsymbol{\rho}_m$ et L_m . Chaque triangle peut-être lié jusqu'à trois fonctions RWG, ce qui implique que la même intégration sur deux domaines triangulaires est réalisée pour le calcul de jusqu'à 9 termes de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}_{mn}$. Pour éviter de recalculer la même expression plusieurs fois, l'astuce consiste à évaluer l'intégrale de l'équation (2.3) en faisant un balayage du maillage par couples de triangles. Ensuite le résultat de chaque évaluation est ajouté aux bons termes de la matrice impédance pour remplir progressivement chaque case. Cette façon de résoudre le problème fait que, pour un couple quelconque de triangles test (T) et source (S), l'équation pour déterminer la partie de l'élément Z_{mn} associée à ces triangles prend la forme de l'expression (2.7). Les paramètres $a, b = 1, 2, 3$ sont des indices locaux indiquant les trois fonctions RWG qui peuvent être liées aux triangles T et S respectivement.

$$I_{a,b} = c \frac{L_{ma}L_{nb}}{A_{mt}A_{ns}} \iint_T \iint_S \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}') - \frac{1}{k^2} \right] \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (2.7)$$

Pour évaluer cette intégrale un schéma de quadrature numérique de Gauss-Legendre sur N_g points, comme celui donné par l'équation (2.8), est utilisé. Ce type d'intégration numérique est valide uniquement quand les domaines T et S sont suffisamment séparés et que la possible singularité, causée par le dénominateur de la fonction de Green n'as pas lieu. On considère ici des triangles partageant jusqu'à deux sommets.

$$I_{a,b} \approx c \frac{L_{ma}L_{nb}}{4\pi} \sum_{p=1}^{N_g} \sum_{q=1}^{N_g} \omega_p \omega_q \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}'_q) - \frac{1}{k^2} \right] \frac{e^{-jk r_{pq}}}{r_{pq}} \quad (2.8)$$

Ici $r_{pq} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$, ω_p et ω_q sont normalisés par rapport à l'aire A_{mt} et A_{ns} respectivement, $c = 1$ quand T et S sont $T_m^+T_n^+$ ou $T_m^-T_n^-$ et $c = -1$ quand T et S sont $T_m^-T_n^+$ ou $T_m^+T_n^-$.

Le nombre de points de Gauss détermine en général la précision de l'intégration numérique. Pour cette raison il constitue un paramètre configurable, afin de pouvoir évaluer son effet sur le résultat des calculs. Le modèle développé donne la possibilité de sélectionner le nombre des points de Gauss entre 1 et 16. Les valeurs des coordonnées et poids de Gauss pour chaque ordre sont stockées en mémoire au préalable.

2.3.2 Traitement de la singularité

Il y a un élément très important à prendre en compte qui est la possible existence d'une singularité de premier ordre de type $1/r$ dans la fonction de Green. Cette singularité a lieu quand les domaines triangulaires de la fonction de test et celle de base sont assez proches entre eux. Cela provoque que $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ soit prêt de zéro, ce qui rend la matrice $\bar{\mathbf{Z}}_{mn}$ singulière et non inversible. Dans le cas particulier d'une surface représentée par un maillage triangulaire, trois situations sont identifiées. D'abord le cas où les triangles test et source ne partagent pas d'arête est nommé cas non singulier car la valeur de r est assez grande pour éviter l'apparition de la singularité. Ensuite, le cas dont les triangles test et source partagent un sommet ou une arête, vu comme un cas quasi singulier car $r \approx 0$. Basé sur les travaux de S. Bellez [19], [102], [103], ce cas est aussi traité comme le cas non singulier. Des résultats des simulations ont permis de vérifier la validité de cette approche. Le cas où les fonctions T et S partagent au moins un triangle, est appelé cas singulier et il est traité par la

méthode décrite dans [104] et [105], et détaillée par la suite.

Pour isoler la singularité, l'expression (2.7) est réécrite sous la forme :

$$I = c \frac{L_{ma} L_{nb}}{4\pi A_{mt} A_{ns}} \iint_{T_m} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}) \cdot \iint_{T_n} \boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' - \frac{1}{k^2} \iint_{T_n} \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \right] d\mathbf{r} \quad (2.9)$$

Pour l'évaluation de l'intégrale en \mathbf{r} , la méthode de quadrature numérique Gauss-Legendre sur N_g points est appliquée comme le montre l'équation (2.10).

$$I = c \frac{L_{ma} L_{nb}}{4\pi A_{ns}} \sum_{p=1}^{N_g} \omega_p \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}_p) \cdot \iint_{T_n} \boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' - \frac{1}{k^2} \iint_{T_n} \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \right] \quad (2.10)$$

Ainsi la singularité est présente dans les intégrales intérieures (2.11) et (2.12) qui représentent le potentiel scalaire et vectoriel respectivement.

$$I_1 = \iint_{T_n} \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \quad (2.11)$$

$$\mathbf{I}_2 = \iint_{T_n} \boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \quad (2.12)$$

Le traitement de la singularité commence par la définition du plan du triangle source à partir de ses trois sommets p_1 , p_2 et p_3 . Ensuite, sur ce plan on réalise la projection du point d'observation placé dans le triangle de test et dont le vecteur de position est \mathbf{r}_p . Cette opération est représenté sur la figure 2.6 [105]. Deux nouveaux systèmes de coordonnées cartésiennes (u, v, w) et polaires (ρ, θ) sont créés, avec leurs origines centrés sur la projection du point de test. Cela est fait de telle façon que les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{v}}$ sont colinéaires au plan du triangle source. Comme on peut observer sur la figure 2.6, deux cas sont possibles. Celui à gauche représente le cas où la projection du point d'observation sur le plan source est à l'extérieur du triangle source. Celui à droite représente le cas où l'origine des nouveaux systèmes de coordonnées est à l'intérieur.

Les nouveaux systèmes locaux de coordonnées cartésiennes et polaires sont utilisés pour représenter les points sur les triangles test et source respectivement. Ainsi, le point d'observation est placé aux coordonnées $(0, 0, \omega_0)$ et les points à l'intérieur du triangle source ont pour coordonnées $(u, v, 0)$ ou (ρ, θ) , ce qui donne $r = \sqrt{\rho^2 + \omega_0^2}$ [105]. Pour le cas singulier identifié dans ce travail, du fait que le point d'observation se trouve à l'intérieur du triangle source, le cas de la figure à droite s'applique, avec $\omega_0 = 0$. La sélection de la direction des axes du système de coordonnées (u, v, w) est arbitraire et elle est choisie en suivant comme critère que l'un des sommets du triangle source soit placé sur l'axe $\hat{\mathbf{u}}$.

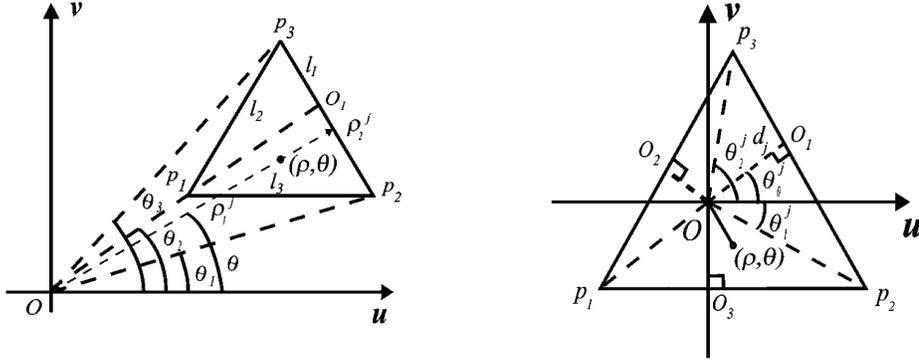


FIGURE 2.6 – Projection des points d'observation

L'équation (2.10) peut être réécrite en fonction des expressions de potentiels vectoriel et scalaire sous la forme :

$$I = c \frac{L_{ma} L_{nb}}{4\pi A_{ns}} \sum_{p=1}^{N_g} \omega_p \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}')_{xyz} - \frac{1}{k^2} I_1(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}') \right] \quad (2.13)$$

où le caractère vectoriel du potentiel \mathbf{I}_2 oblige à noter dans quelle base il est exprimé. Pour réaliser la rotation du vecteur \mathbf{I}_2 entre la base $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ et la nouvelle $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ l'équation (2.14) est utilisée. Cette action est nécessaire dans la finalité de pouvoir effectuer le produit scalaire $\boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}')_{xyz}$, dont le vecteur $\boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}_p)$ est exprimé selon (x, y, z) .

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}')_{xyz} = \begin{bmatrix} I_{2x} \\ I_{2y} \\ I_{2z} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}^{uvw} \mathbf{I}_2(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}')_{uvw} = \bar{\mathbf{R}}^{uvw} \begin{bmatrix} I_{2u} \\ I_{2v} \\ I_{2w} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Ici $\bar{\mathbf{R}}^{uvw}$ est la matrice formée par les vecteurs unitaires $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$, constituant les bases du système local de coordonnées cartésiennes, aussi appelée matrice de rotation et elle prend la forme :

$$\bar{\mathbf{R}}^{uvw}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Pour le cas singulier l'expression (2.11) du potentiel scalaire prend la forme de l'équation (2.16). Ceci est le résultat de la division du domaine d'intégration initial T_n , en trois sous domaines triangulaires obtenus, par la connexion de l'origine du nouveau système de coordonnées avec les trois sommets du triangle source.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{j=1}^3 \int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} d\theta \int_0^{d_j^\theta(\theta)} \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2+\omega_0^2}}}{\sqrt{\rho^2+\omega_0^2}} \rho d\rho \\
&= \sum_{j=1}^3 \int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} d\theta \int_{r_0}^{r_j(\theta)} \frac{e^{-ikr}}{r} \sqrt{r^2-\omega_0^2} d\sqrt{r^2-\omega_0^2} \\
&= \sum_{j=1}^3 \int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} d\theta \int_{r_0}^{r_j(\theta)} e^{-ikr} dr \\
&= \sum_{j=1}^3 -\frac{1}{ik} \int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} \left[e^{-ikr_j(\theta)} - e^{-ikr_0} \right] d\theta \\
&= \sum_{j=1}^3 -\frac{1}{ik} \int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} \left[e^{-ikr_j(\theta)} - 1 \right] d\theta
\end{aligned} \tag{2.16}$$

où $r_0 = \omega_0 = 0$, $r_j(\theta) = \sqrt{d_j^\theta(\theta)^2 + \omega_0^2} = \sqrt{d_j^\theta(\theta)^2} = d_j^\theta(\theta)$ et $d_j^\theta(\theta) = d_j / \cos(\theta - \theta_0^j)$. L'expression (2.16) est résolue à travers d'un schéma Gauss-Legendre avec un seul point placé au barycentre du sous triangle correspondant.

Chaque nouveau triangle est caractérisé par les paramètres d_j , θ_1^j et θ_2^j comme le montre la figure 2.6 [105]. d_j est la distance entre l'origine du système de coordonnées et l'arête du triangle source associée au sous triangle j . Les angles θ_1^j et θ_2^j sont mesurés entre l'axe $\hat{\mathbf{u}}$ et les sommets définissant la même arête, et θ_0^j est l'angle auquel est mesuré la distance d_j .

Pour développer l'expression du potentiel vectoriel (2.12) chaque composante du vecteur $\boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}')$ est réécrite sous forme d'un vecteur polynomial de premier ordre dans le système de coordonnées local. Ceci permet d'exprimer le vecteur $\boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}')$ comme l'indique l'équation (2.17), dont chaque composante prend la forme $a_0 + a_1u + a_2v = a_0 + a_1\rho \cos\theta + a_2\rho \sin\theta$ et où a_0, a_1, a_2 sont des constantes connues [105]. La composante selon $\hat{\mathbf{w}}$ est nulle car le vecteur $\boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}')$ est colinéaire au plan défini par les vecteurs $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{v}}$.

$$\boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}')_{uvw} = \begin{bmatrix} \rho_{nb}^+(\mathbf{r}')_u \\ \rho_{nb}^+(\mathbf{r}')_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1\rho \cos\theta + a_2\rho \sin\theta \\ b_0 + b_1\rho \cos\theta + b_2\rho \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Ainsi à partir de l'équation (2.12), en appliquant la même division du domaine d'intégration que pour le cas du potentiel scalaire et en utilisant l'équation (2.17), le calcul du potentiel vectoriel en coordonnées (u, v, w) est donné par cette nouvelle expression :

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}')_{uvw} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ 0 \end{bmatrix} I_1 + \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^3 \int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} \cos\theta d\theta I_3 + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^3 \int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} \sin\theta d\theta I_3 \tag{2.18}$$

où I_1 est le potentiel scalaire, qui a été résolu en (2.16) et I_3 est développée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{d_j^\theta(\theta)} \rho \frac{e^{-ik_0\sqrt{\rho^2+\omega_0^2}}}{\sqrt{\rho^2+\omega_0^2}} \rho d\rho \\
&= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \int_0^{d_j^\theta(\theta)} \sqrt{R^2 - \omega_0^2} e^{-ik_0 R} dR \\
&= \left[\frac{e^{-ik_0 d_j}}{-ik_0} \left(d_j^\theta(\theta) + \frac{1}{ik_0} \right) - \frac{1}{k_0^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Pour déterminer la valeur des coefficients a et b il faut commencer par la définition du vecteur $\boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}')_{uvw}$ en coordonnées locales.

$$\boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}')_{uvw} = \mathbf{p}_{nb}(\mathbf{r}')_{uvw} - \boldsymbol{\rho}_{uvw} = \begin{bmatrix} p_{nb}(\mathbf{r}')_u - \rho_u \\ p_{nb}(\mathbf{r}')_v - \rho_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{nb}(\mathbf{r}')_u - \rho \cos(\theta) \\ p_{nb}(\mathbf{r}')_v - \rho \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

où $\mathbf{p}_{nb}(\mathbf{r}')_{uvw}$ est le vecteur de position du b -ième sommet du triangle source, associé à la n -ième fonction RWG et $\boldsymbol{\rho}_{uvw}$ est le vecteur de position du point source, les deux exprimés dans le système de coordonnées local. Les valeurs des coefficients sont déterminées par simple substitution, ce qui donne $a_0 = p_{nb}(\mathbf{r}')_u$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $b_0 = p_{nb}(\mathbf{r}')_v$, $b_1 = 0$ et $b_2 = -1$.

De même, comme il a été fait pour l'expression du potentiel scalaire donné par l'équation (2.13), l'expression du potentiel vectoriel (2.18) est résolue en utilisant un schéma de quadrature de Gauss avec un seul point. Dans cette équation, l'intégrale I_3 , définie par l'expression (2.19), est résolue de manière analytique et réduite à une expression simple.

Différents notions d'algèbre linéaire peuvent être utilisées pour calculer d_j , θ_0^j , θ_1^j et θ_2^j . Les axes sont choisis de telle sorte que $\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{n}}$ où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal au triangle, calculé dans l'étape de traitement géométrique et $\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{p}_{nb}(\mathbf{r}') - \mathbf{r}_p) / \|\mathbf{p}_{nb}(\mathbf{r}') - \mathbf{r}_p\|$, étant $\mathbf{p}_{nb}(\mathbf{r}')$ le vecteur de position de l'un des sommets du triangles source, choisi de façon arbitraire, et \mathbf{r}_p celui du point d'observation, les deux en coordonnées cartésiennes $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. Les vecteurs $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}})$ forment un système direct orthogonal.

2.3.3 Remplissage de $\bar{\mathbf{Z}}_{mn}$

Pour créer l'algorithme de remplissage de la matrice impédance, le besoin de modularité est l'un des principaux éléments pris en compte. Elle permet de sélectionner le niveau de précision de la solution en fonction de variables de configuration de la MdM (nombre de points utilisés pour l'intégration numérique de Gauss et densité de maillage) et donne la possibilité de choisir la méthode de traitement de la singularité. Cette dernière caractéristique facilite la possible mise en œuvre et l'utilisation de nouvelles méthodes qui pourraient être développées dans l'avenir. En plus, le code modulaire facilitera la possible implémentation

des techniques d'accélération du remplissage de la matrice impédance, du fait que c'est une opération qui demande un temps d'exécution élevé par rapport au temps de résolution du problème linéaire.

La figure 2.7 montre un schéma qui résume l'algorithme de remplissage de la matrice \bar{Z}_{mn} . Dans un premier temps, lors de l'étape 1, sont sélectionnés les paramètres de la quadrature numérique de Gauss dont le nombre de points de Gauss constitue une valeur d'entrée. Ces paramètres incluent les poids et les coordonnées des points de Gauss pour des domaines triangulaires, utilisés pour l'intégration numérique des expressions (2.16) et (2.18). D'autres paramètres d'entrée concernent la caractérisation de l'onde incidente et incluent sa fréquence et sa polarisation, ainsi que l'angle d'incidence. Ensuite dans l'étape 2, l'information issue du traitement géométrique (sommets, triangles et fonctions RWG du maillage) est stockée en mémoire.



FIGURE 2.7 – Algorithme pour le remplissage de \bar{Z}_{mn}

À partir de la troisième étape commence le balayage du maillage triangulaire, sous forme de boucles imbriquées, afin de parcourir toutes les paires de triangles non coïncidents. Ceci permet de calculer tous les apports non singuliers des intégrales de la matrice impédance. C'est à l'intérieur de cette boucle qui se déroulent le reste des opérations. Elles incluent la sélection des fonctions RWG associées aux triangles T et S , le calcul de l'intégrale correspondante et le placement du résultat dans la matrice impédance. D'une manière très générale, la boucle de balayage des triangles peut être décrite comme :

```

for  $T = 2, T_{\max}$  {
  for  $S = 1, T - 1$  {
    Code de selection, calcul et placement.
  }
}

```

où T et S sont des compteurs des triangles test et source respectivement et T_{\max} est le nombre total de triangles. Cette boucle imbriquée garantit que seulement la partie triangulaire inférieure de \bar{Z}_{mn} est calculée.

La première étape à l'intérieur de la boucle consiste à identifier et ensuite sélectionner les fonctions RWG liées aux triangles T et S en sachant que chaque triangle peut être lié à un maximum de trois fonctions. L'identification peut être faite sur la matrice des fonctions RWG, mais au détriment de l'espace mémoire, l'information des fonctions RWG associées aux triangles a été incluse aussi dans la matrice des triangles afin d'accélérer l'étape d'identification. Pour la sélection, une routine d'habilitation des fonctions RWG permet de choisir de manière sélective parmi les fonctions identifiées comme étant liées à T ou S . Cela a comme objectif le remplissage sélectif de la matrice impédance, ce qui constitue une des caractéristiques nécessaires pour l'application des techniques de compression matricielles. Ensuite les données correspondantes à ces fonctions sont extraites des matrices de données géométriques et sont stockées dans quatre variables. Deux vecteurs contiennent les indices des fonctions RWG de test et de base, multipliés par les signes des triangle T et S dans les fonctions RWG correspondantes. Deux autres vecteurs contiennent les indices des sommets non partagés de ces fonctions et une dernière paire de vecteurs contient les longueurs des arêtes communes leur étant associées.

Le point suivant est l'évaluation de l'intégrale correspondante à chaque paire test-source des fonctions RWG sélectionnées dans l'étape précédente. Pour ceci l'équation (2.8) est résolue par un schéma d'intégration numérique de Gauss. Le nombre total de fonctions RWG ainsi que le nombre de points de Gauss déterminent l'espace mémoire nécessaire à cette étape et le temps passé à l'intérieur, deux éléments très importants car c'est l'étape qui demande le plus de temps CPU.

Dans l'étape 6 les résultats rendus par l'étape précédente sont ajoutés aux valeurs déjà existantes dans la matrice \bar{Z}_{mn} , dans les positions correspondantes aux paires des fonctions RWG test et source traitées. Le placement de résultats dans les cases correctes de la matrice impédance demande un traitement différent pour les trois cas possibles : $m > n$, $m < n$ et $m = n$, où m et n sont les indices globaux des fonctions RWG test et source respectivement qui au même temps sont les indices des cases de \bar{Z}_{mn} . Le cas $m > n$ est le plus simple et le résultat est ajouté directement à la position mn de la matrice. Dans le deuxième cas une inversion des indices est nécessaire avant de réaliser le placement. Pour finir, le résultat doit être multiplié par deux avant d'être placé pour le cas où $m = n$. Ces opérations permettent de bien remplir la moitié inférieure gauche de

la matrice impédance. Pour remplir l'autre moitié il suffit d'effectuer l'opération $Z_{nm} = Z_{mn}$ après chaque placement.

Une fois que la boucle imbriquée de la troisième étape est finie c'est le moment de calculer les éléments singuliers. Pour cela un nouveau balayage du maillage triangulaire est nécessaire. Cette fois, la boucle prend la forme :

```

for T = 1, Tmax {
    S = T
    Code de selection, calcul et placement.
}

```

Les étapes qui composent cette nouvelle boucle sont les mêmes que pour celles du calcul des éléments non singuliers et alors la 8-ième étape est identique à la 4-ième. L'évaluation de l'intégrale quand il existe la singularité est faite en utilisant un schéma d'intégration numérique de Gauss en combinaison avec la méthode décrite en [105] et expliquée auparavant. Les expressions utilisées pour ceci sont (2.13), (2.16), (2.18) et (2.19). Le placement des valeurs calculées est fait en suivant la même procédure de l'étape 6, à l'exception du cas $m = n$ qui à présent est traité de forme identique au cas $m > n$.

L'existence ou non de la singularité dépend de la séparation entre les deux triangles test et source et sur certaines conditions géométriques il pourrait être nécessaire un traitement particulier du cas quasi-singulier.

Pour cela il serait prévu l'utilisation d'une fonction additionnelle capable de compter le nombre des sommets partagés par deux triangles. La valeur "0" indiquerait que les triangles ne partagent pas de sommets et donc qu'il y a absence de singularité car ils sont suffisamment séparés entre eux. Les valeurs "1" et "2" indiqueraient que les deux triangles partagent un sommet ou une arête respectivement. Cela serait considéré comme une situation de quasi singularité. Ces valeurs suffisent à déterminer quelle méthode choisir pour évaluer l'intégrale sur les domaines triangulaires. Cette fonction pourrait être placée entre les étapes 3 et 4, à condition d'ajouter une nouvelle routine capable d'implémenter la méthode de solution de l'intégrale quasi singulière.

L'étape finale consiste à enregistrer la matrice impédance dans un fichier, ce qui évite de devoir la recalculer à chaque occasion qu'un nouveau vecteur d'excitation est utilisé. Comme il a déjà été mentionné, le remplissage de $\bar{\mathbf{Z}}_{mn}$ est un processus qui demande un temps considérable par rapport au temps de résolution du problème linéaire, résultat des boucles imbriquées sur les triangles tests et sources. À mode d'illustration, pour représenter une surface carrée de $4\lambda \times 4\lambda$ avec un maillage triangulaire, 6 272 triangles (9 296 fonctions RWG) sont nécessaires pour respecter la contrainte d'échantillonnage à $\lambda/10$. Ainsi, pour balayer toutes les mailles, 19 672 128 itérations sont nécessaires pour remplir les 86 415 616 cases de la matrice impédance. En augmentant la taille de la surface à $8\lambda \times 8\lambda$, les chiffres augmentent exponentiellement à 25 538 triangles (38 081 fonctions RWG), 326 107 491 itérations et 1 450 162 561 cases.

2.3.4 Évaluation du vecteur d'excitation

La continuation de l'application de la Mdm, pour résoudre l'EFIE conduit à l'expression ci-dessous pour calculer les éléments du vecteur d'excitation \mathbf{b} .

$$b_m = -\frac{j}{\omega\mu} \iint_{\mathbf{f}_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.21)$$

L'expression (2.21) peut être interprétée comme la projection, sur les fonctions de test, du champ électrique incident afin d'obtenir le vecteur d'excitation \mathbf{b} . Cette expression donne le moyen de calculer chacun des éléments du vecteur. En supposant que l'objet conducteur est éclairé par une onde plane comme celle décrite par l'équation (1.35), le développement plus détaillé de cette expression, qui tient en compte la définition des fonctions RWG, prend la forme suivante :

$$b_m = -\frac{i}{\omega\mu} \sum_{p_1=\pm} \iint_{T_m^{p_1}} \left(\frac{L_m}{2A_m^{p_1}} \boldsymbol{\rho}_m^{p_1}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{0}_i} e^{-ik\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}} \right) d\mathbf{r} \quad (2.22)$$

où le vecteur de Jones $\mathbf{E}_{\mathbf{0}_i}$ est exprimé en coordonnées cartésiennes.

En partant des mêmes fichiers géométriques que pour le calcul de la matrice impédance, l'expression (2.22) est résolue en parcourant la structure géométrique par domaines triangulaires. Pour éviter de recalculer la même expression plusieurs fois, l'astuce d'évaluer l'intégrale de l'équation en faisant un balayage du maillage par triangles est réutilisée. Ensuite, le résultat de chaque évaluation est ajouté aux bons termes du vecteur d'excitation, pour remplir progressivement chaque case du vecteur. Cette façon de résoudre le problème fait que, pour un triangle test T quelconque, l'équation pour déterminer les éléments de \mathbf{b} prend la forme de l'expression (2.23). Le paramètre $a = 1, 2, 3$ indique les trois fonctions RWG liées au triangle T .

$$I_a = -c \frac{i}{\omega\mu} \frac{L_{ma}}{2A_{mt}} \iint_T \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{0}_i} e^{-ik\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.23)$$

L'évaluation de (2.23) par un schéma de quadrature numérique de Gauss-Legendre sur N_g points, donne comme résultat l'équation (2.24) :

$$I_a = -c \frac{i}{\omega\mu} \frac{L_{ma}}{2} \sum_{p=1}^{N_g} \omega_p \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{0}_i} e^{-ik\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}_p} \quad (2.24)$$

où ω_p est normalisé par rapport à l'aire A_{mt} , $c = 1$ quand T est T_m^+ et $c = -1$ quand T est T_m^- .

2.3.5 Remplissage de \mathbf{b}_m

Lors de l'application de la MdM, le remplissage du vecteur d'excitation constitue la dernière étape avant de s'appliquer à la résolution du système $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Hormis le fait qu'il s'agit d'un vecteur colonne et que dans l'expression pour calculer b_m il n'existe pas de singularité, l'algorithme pour remplir le vecteur d'excitation est très similaire à celui utilisé pour le remplissage de la matrice impédance. La figure 2.8 montre un schéma qui le résume.

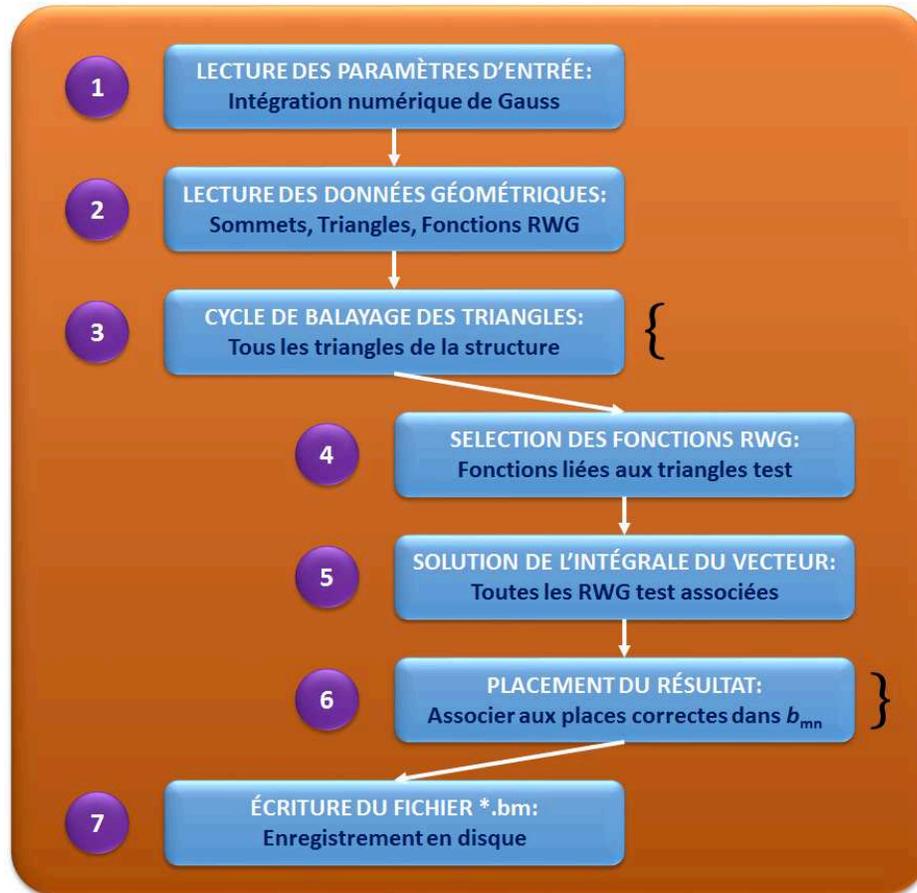


FIGURE 2.8 – Algorithme de remplissage de \mathbf{b}_m

Lors de la première étape, sont sélectionnés les paramètres pour la quadrature numérique de Gauss exactement comme il a été fait pour la matrice impédance. L'étape 2 reste aussi identique. Ce n'est qu'à partir de la troisième étape que les deux algorithmes commencent à se différencier. À ce stade, commence un balayage du maillage afin de parcourir tous les triangles. La forme dont le maillage triangulaire est parcouru, montrée ci-dessous, diffère de celle employée précédemment.

```

for  $\mathbf{T} = 1, \mathbf{Tmax}$  {
    Code de selection, calcul et placement.
}
  
```

C'est à l'intérieur de cette boucle que les opérations sélection, calcul et placement sont réalisées.

La quatrième étape de la procédure reste sans changement et les fonctions RWG liées au triangle T sont identifiées et sélectionnées. L'ensemble de données associées à ces fonctions est extrait de la structure du modèle géométrique.

Le point suivant consiste à évaluer l'intégrale correspondante à chaque fonction RWG sélectionnés dans l'étape précédente. C'est ici que l'expression (2.24) est évaluée. Pour ceci, les données des angles d'incidence (θ_i) et (ϕ_i), par rapport à la normale du plan moyen de la surface et au plan d'incidence respectivement, ainsi que le type de polarisation, qui détermine l'amplitude des composantes $E_{0_i}^\theta$ et $E_{0_i}^\phi$, sont utilisées. Une transformation du vecteur de Jones dans un repère cartésien est nécessaire. Cette opération est expliquée dans la section 1.2.7. Les résultats de l'évaluation de l'intégrale sont placés de façon directe en suivant l'indice de la fonction RWG en question.

En fonction du peu du temps nécessaire pour le remplissage du vecteur d'excitation, la dernière étape peut être considérée comme facultative.

Une fois la deuxième étape de l'application de la MdM pour résoudre la EFIE est terminée, l'étape suivante consiste à réaliser l'inversion de la matrice impédance est solutionner le problème linéaire $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ qui permet de déterminer les coefficients a_n et ensuite réaliser les différents calculs. Le système $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ est résolu par décomposition LU dans ce chapitre.

2.4 Calcul du courant de surface

Après avoir calculé l'ensemble des coefficients a_n , le calcul du courant sur la surface se fait de façon directe par la substitution de ces valeurs dans l'expression (2.25) :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \quad (2.25)$$

Comme la structure est formée par un maillage triangulaire et que jusqu'à trois fonctions $\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$ peuvent être liées à chaque triangle, le courant à l'intérieur de chaque triangle est constitué par la somme de chaque composante venant de chacune des fonctions RWG associées. Le calcul est réalisé au barycentre et le courant est considéré comme étant constant à l'intérieur de chaque domaine triangulaire. A titre d'exemple, pour déterminer le courant à l'intérieur du triangle numéro 6 de la figure 2.2, le premier pas consiste à déterminer le barycentre du triangle et ensuite identifier les fonctions RWG lui étant associées (6, 10 et 12). Ainsi, les vecteurs $\boldsymbol{\rho}_6^-$, $\boldsymbol{\rho}_{10}^-$ et $\boldsymbol{\rho}_{12}^+$ sont calculés. Avec ceci et en connaissant les valeurs de a_6 , a_{10} et a_{12} les trois composantes du courant à l'intérieur du triangle 9 sont calculées et leur somme constitue le courant total dans ce point de la surface.

2.5 Calcul du champ diffracté en champ proche

Le calcul du champ diffracté en champ proche par un objet parfaitement conducteur fait emploi des expressions (1.44) et (1.45) donnant l'équation (2.26) ci-dessous :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \left[\iint_S \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \frac{1}{k^2} \iint_S (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \left(\frac{1+jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3} \right) e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \quad (2.26)$$

Après avoir introduit le courant \mathbf{J}_s calculé cette équation devient :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \sum_{n=1}^N a_n \iint_{\mathbf{f}_n} \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \left[\mathbf{f}_n(\mathbf{r}') - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{k^2} \left(\frac{1+jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^2} \right) \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (2.27)$$

Pour un triangle source S et une fonction RWG n donnés, cette expression prend la forme :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -c \frac{j\omega\mu a_n L_n}{4\pi A_{ns}} \iint_{T_s^c} \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}_{ns}^+(\mathbf{r}')}{2} + \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{k^2} \left(\frac{1+jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^2} \right) \right] d\mathbf{r}' \quad (2.28)$$

où c indique le signe du triangle S dans la fonction RWG n . Cette équation intégrale est ensuite évaluée en utilisant l'intégration numérique de Gauss par l'expression suivante :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -c \frac{j\omega\mu a_n L_n}{4\pi} \sum_{p=1}^{N_g} \omega_q \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_q\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_q\|} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}_{ns}^+(\mathbf{r}'_q)}{2} + \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_q)}{k^2} \left(\frac{1+jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_q\|}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_q\|^2} \right) \right] \quad (2.29)$$

2.6 Calcul du champ diffracté en champ lointain

Les approximations données par (1.38) faites dans l'équation (1.19) afin de calculer le champ diffracté en champ lointain donnent comme résultat l'expression suivante :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \quad (2.30)$$

Dans la même démarche que pour le champ diffracté en champ proche, le courant \mathbf{J}_s calculé est introduit dans l'expression, résultant en :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r}}{r} \sum_{n=1}^N a_n \iint_{\mathbf{f}_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') e^{-jk\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \quad (2.31)$$

que pour un triangle S et une fonction RWG n donnés prend la forme :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -c \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r}}{r} \frac{a_n L_n}{2A_{ns}} \iint_{T_s^c} \boldsymbol{\rho}_{ns}^+(\mathbf{r}') e^{-jk\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \quad (2.32)$$

r étant la distance au point d'observation. En appliquant la technique de Gauss pour évaluer l'intégrale, l'équation (2.33) est obtenue.

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -c \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r}}{r} \frac{a_n L_n}{2} \sum_{p=1}^{N_g} \omega_q \boldsymbol{\rho}_{ns}^+(\mathbf{r}'_q) e^{-jk\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}'_q} \quad (2.33)$$

2.7 Comparaison des résultats

Devant la difficulté pour valider directement le calcul des coefficients a_n , la précision du modèle implémentant la MdM est évaluée de façon indirecte à partir de la comparaison des résultats du calcul du courant surfacique et du champ diffracté. Pour cela, les valeurs obtenues après avoir appliqué la MdM sur la EFIE sont comparées avec les valeurs prédites par l'Optique Physique (OP). Prenant en compte que la OP est une méthode asymptotique, cette comparaison est faite sur des conditions dont la OP donne de résultats similaires à une méthode analytique exacte, c'est à dire, pour un objet d'une géométrie simple (surface carrée lisse) avec une incidence normale ou pour les directions spéculaires. Sous ces conditions, et si la taille de la surface est assez grande, les valeurs du courant au centre de la surface, obtenues par les deux méthodes, doivent être très proches. De plus, les valeurs du champ diffracté, calculées à partir des courants, doivent avoir aussi un comportement similaire.

2.7.1 Comparaison avec l'Optique Physique : étude d'une surface carrée lisse

L'OP part de la simplification des équations intégrales de Stratton-Chu [106] pour lesquelles les densités des courants surfaciques peuvent être approximées à partir des valeurs induites par les champs sur la surface, de telle sorte que $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{M}_s(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ [17]. Deux hypothèses simplificatrices sont introduites. La première est l'hypothèse de haute fréquence qui considère que les dimensions de l'obstacle sont très supérieures devant la longueur d'onde, alors cette méthode exclut les effets de la discontinuité et des ondes rampantes. La deuxième hypothèse suppose que les rayons de courbure de la surface de l'objet sont très supérieurs aussi à la longueur d'onde ce qui permet d'approximer chaque point de la surface au plan tangent et de la considérer comme localement plane. Ces approximations limitent le domaine de validité de la OP au régions proches des directions spéculaires mais elles simplifient le calcul du champ réfléchi car il peut être déterminé à partir du champ incident connu en utilisant les lois de Snell-Decartes pour calculer sa

direction et les coefficients de Fresnel pour déterminer son amplitude.

Pour un objet parfaitement conducteur, on applique la condition au limite décrite par l'équation (1.47). Sachant que le champ total sur la surface est égal à la somme des champs incident et réfléchi et qu'ils sont liés de la manière : $\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_r(\mathbf{r})$ et $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_r(\mathbf{r})$, le courant surfacique peut s'exprimer en fonction du champ incident à travers l'équation suivante.

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_r(\mathbf{r})] = 2 [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})] \quad (2.34)$$

Étant donné que tant le courant surfacique comme le champ diffracté sont des grandeurs vectorielles complexes et que les valeurs obtenues par le schéma MmM-EFIE sont calculées en faisant la projection du champ incident sur le maillage de fonctions RWG qui décrit la surface, deux considérations sont faites pour réaliser la validation. La première, la comparaison doit prendre en compte les valeurs d'amplitude et de phase de chaque composante individuelle de chacune des grandeurs (courant surfacique, champ diffracté en champ proche et lointain et SER). La deuxième, l'expression (2.34) doit être projetée sur le même ensemble des fonctions RWG.

La projection commence par la substitution du courant par la somme des fonctions RWG sources tel qu'il a été fait pour la MmM.

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (2.35)$$

Ensuite, l'expression précédente doit être projetée sur les fonctions RWG test. Ceci permet d'arriver à l'équation (2.36) :

$$\iint_{\mathbf{f}_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n \iint_{\mathbf{f}_m \cap \mathbf{f}_n} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r} \quad (2.36)$$

à partir de laquelle sont dérivées les expressions suivantes, permettant de calculer la nouvelle matrice impédance et le vecteur d'excitation correspondant :

$$Z_{mn} = \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{f}_m \cap \mathbf{f}_n} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r} \quad (2.37)$$

$$b_m = \iint_{\mathbf{f}_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})] d\mathbf{r} \quad (2.38)$$

Le produit scalaire de l'équation (2.36), étant donné qu'elle ne contient pas de fonction de Green pour connecter les points source et observation, impose comme condition $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ afin de pouvoir réaliser l'intégration.

Le produit scalaire est nul pour tout autre cas. La matrice impédance obtenue par cette méthode est une matrice creuse. Pour une paire de triangles test et source T et S et des fonctions RWG test et source d'indices m et n respectivement, les équations (2.37) et (2.38) prennent la forme :

$$Z_{mn} = c \frac{L_{ma} L_{nb}}{8A_{mt} A_{ns}} \iint_{T=S} \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.39)$$

$$b_m = c \frac{L_{ma}}{2A_{mt}} \iint_T \boldsymbol{\rho}_{ma}^+(\mathbf{r}) \cdot [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})] d\mathbf{r} \quad (2.40)$$

Dans l'équation (2.39), c est le produit des signes des triangles T et S dans les fonctions d'indices m et n respectivement. Dans (2.40), c est directement le signe du triangle T dans la fonction d'indice m . Ces intégrales sont évaluées aussi par des schémas d'intégration numérique de Gauss.

$$Z_{mn} = c \frac{L_{ma} L_{nb}}{8A_{ns}} \sum_{p=1}^{N_g} \omega_p \boldsymbol{\rho}_{ns}^+(\mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\rho}_{nb}^+(\mathbf{r}_p) d\mathbf{r} \quad (2.41)$$

$$b_m = c \frac{L_{ma}}{2} \sum_{p=1}^{N_g} \omega_p \boldsymbol{\rho}_{ns}^+(\mathbf{r}_p) \cdot [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_p) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}_p)] d\mathbf{r} \quad (2.42)$$

Un dernier élément à mentionner est le calcul du champ magnétique incident qui est obtenu à partir du champ électrique incident déterminé à travers l'expression ci-dessous :

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}}_i \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

où $\hat{\mathbf{k}}_i$ est le vecteur unitaire d'onde du champ incident est $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

La MdM a été testée pour le problème de diffraction d'une onde plane par une surface carrée lisse parfaitement conductrice. Les résultats du calcul du courant de surface, SER, du champ diffracté en champ proche et champ lointain sont comparés à ceux obtenus par la OP. Le cas d'une surface d'aire $16\lambda^2$ illuminée par une onde plane de fréquence égale à 3 GHz est analysé. Le maillage est réalisé de manière similaire à celui montré sur la figure 2.2, avec une taille maximale des arêtes de $\lambda/10$. L'angle ϕ_i est fixé à 0° et des angles d'incidence θ_i de 0° , 15° , 30° , 45° et 60° ont été considérés. Les deux polarisations, horizontale et verticale sont considérées. Certains de ces résultats sont inclus dans ce manuscrit.

La surface utilisée dans les simulations se trouve centrée sur l'origine du système de coordonnées, orientée de façon perpendiculaire au vecteur unitaire $\hat{\mathbf{z}}$ et ayant pour domaine $-2\lambda \leq x \leq 2\lambda$, $-2\lambda \leq y \leq 2\lambda$ et $z = 0$. Ceci peut-être observé sur la figure suivante :

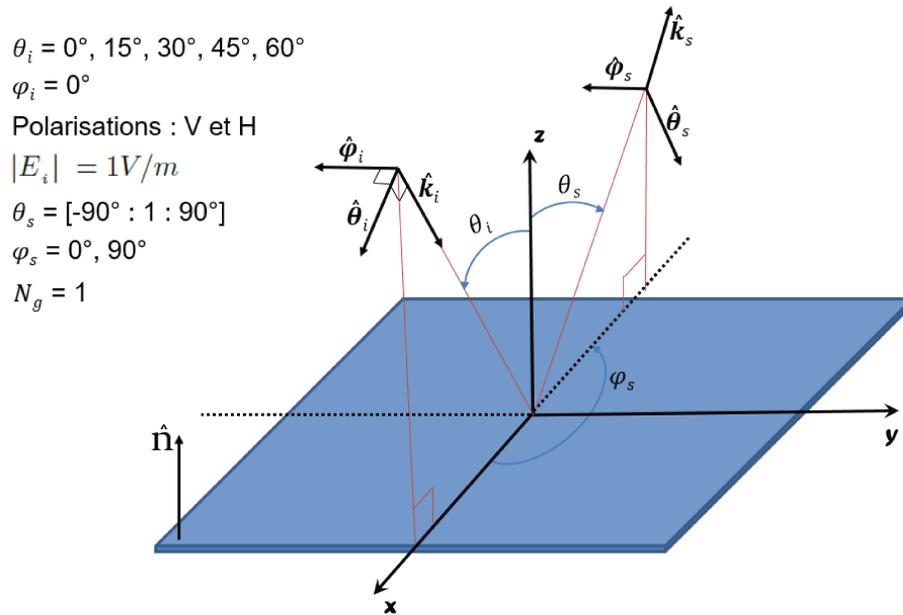


FIGURE 2.9 – Représentation géométrique du scénario utilisé dans les simulations.

2.7.1.1 Courant surfacique

Étant donné l'orientation de la surface sur laquelle le champ incident est appliqué, il est clair que même avant de réaliser les simulations et indépendamment de l'orientation et de l'état de polarisation de l'onde incidente, la composante du courant surfacique selon z est nulle. Cela a été bien vérifié et les résultats associés ne seront pas présentés dans ce manuscrit. Dans les figures, $|J|$ indique le module ou amplitude de la composante du courant donnée tandis que $\Phi(J)$ est utilisé pour indiquer sa phase.

Afin de faciliter la visualisation des courants sur la surface, les graphiques à gauche des figures montrent leur distribution sur l'axe x de la surface ($-2\lambda < x < 2\lambda$, $y = 0$) et ceux à droite montrent celle sur l'axe y , ($-2\lambda < y < 2\lambda$, $x = 0$). Par la suite, lorsque l'information du module des composantes du courant est affichée, sa valeur est multipliée par $\eta_0 = 120\pi\Omega$.

En haut de la figure 2.10 on peut observer le module de la composante selon x du courant surfacique $|J_x\eta_0|$, pour une onde plane en incidence normale ($\theta_i = 0^\circ$) et en polarisation verticale. En bas de cette figure, la variation de la phase est présentée. Concernant l'amplitude, une valeur de 2 est obtenue par la OP et autour de laquelle oscille celle prédite par la MdM. Cette valeur de 2 est la valeur correcte attendue dans le cas d'une onde incidente dont le champ électrique est d'amplitude unitaire pour une surface de dimensions uniformes. En effet, la composante du courant montrée est parallèle au champ électrique. Les oscillations dans $|J_x\eta_0|$ sont expliquées par l'effet de bord présent dans la MdM et ceci diminue avec l'augmentation de la taille de la surface considérée. La même oscillation est observée sur la phase de cette composante du courant, dont la différence maximale, par rapport à celle prédite par la OP est de $\pi/8$.

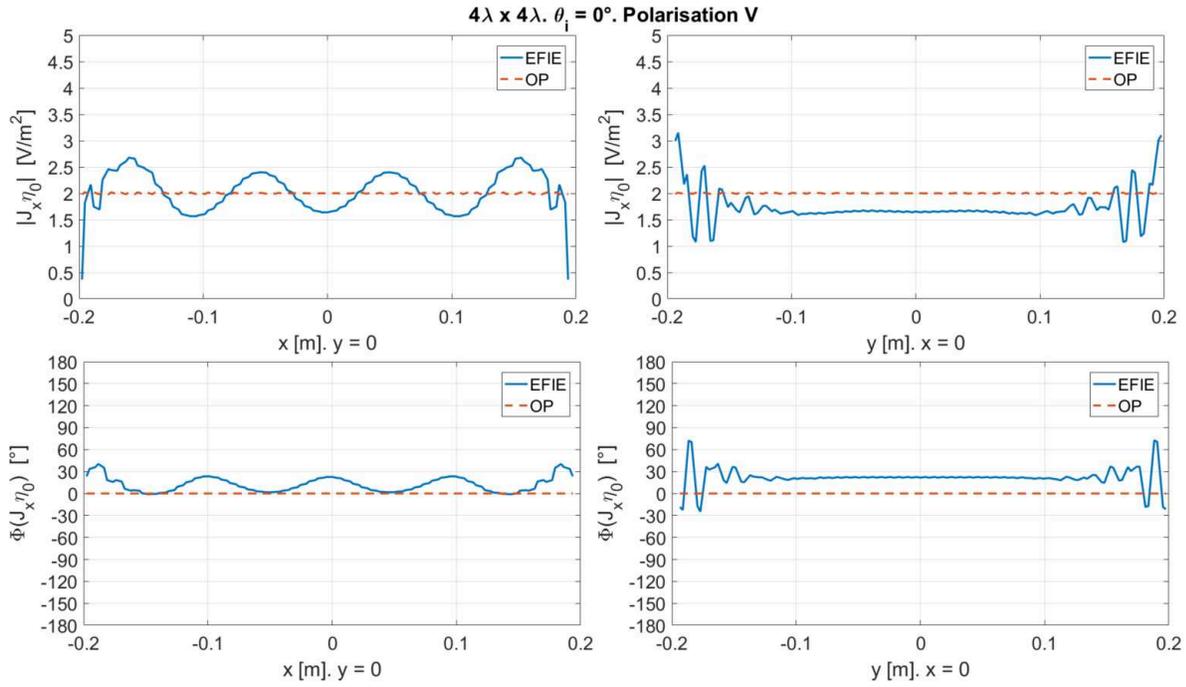


FIGURE 2.10 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d’une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$

La figure 2.11 montre les mêmes informations du module et de la phase pour la composante J_y , transversale à la direction du vecteur électrique de l’onde incidente.

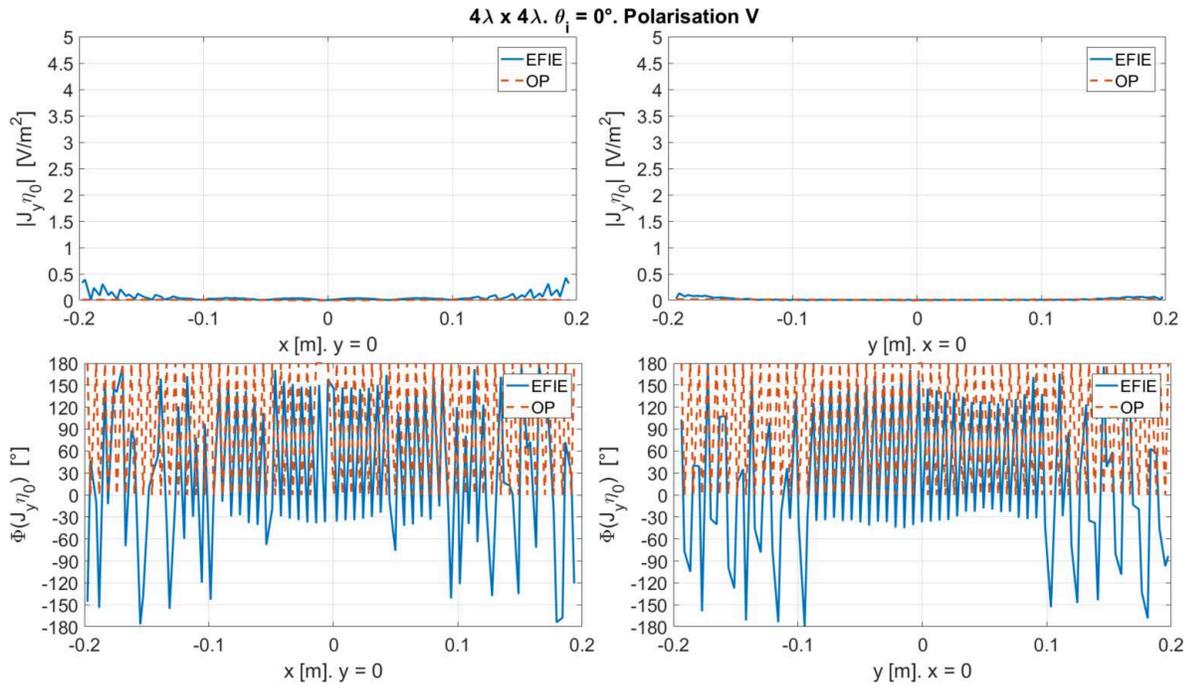


FIGURE 2.11 – Module et phase de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques d’une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$

Dans ce cas, l'amplitude nulle du courant obtenue par les deux méthodes correspond bien aux valeurs théoriques. L'analyse de la phase de cette composante du courant, permet d'arriver à la conclusion que les valeurs du module, qui à certains endroits sur la surface sont différentes de zéro (près des bords), sont du bruit numérique et sont le résultat des effets de bords. Ces valeurs sont vérifiées systématiquement indépendamment des caractéristiques du champ incident pour le cas d'une surface lisse. Son analyse n'apporte pas d'information utile et en conséquence elles ne seront plus montrées.

Sur la figure 2.12, une onde incidente de polarisation horizontale est considérée. Cela correspond à une rotation de 90° de la base de l'onde incidente. Comme prévu, la composante selon \hat{x} du courant surfacique est nulle tandis que celle selon \hat{y} , présentée ci-dessous, est d'amplitude égale à 2 pour le cas de la OP.

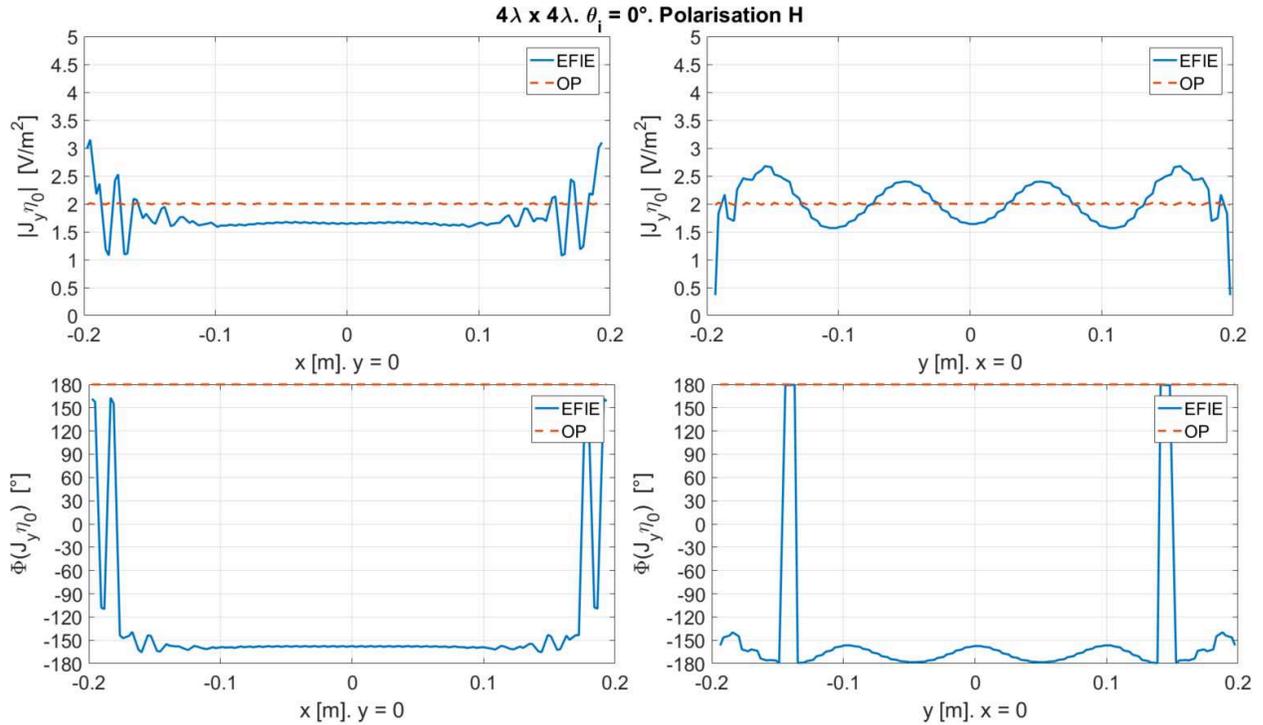


FIGURE 2.12 – Module et phase de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation horizontale, $\phi_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$

Le même comportement est vérifié avec un angle d'incidence de 45° , dont les composantes non nulles, selon le type de polarisation de l'onde incidente, sont montrées sur les figures 2.13 et 2.14.

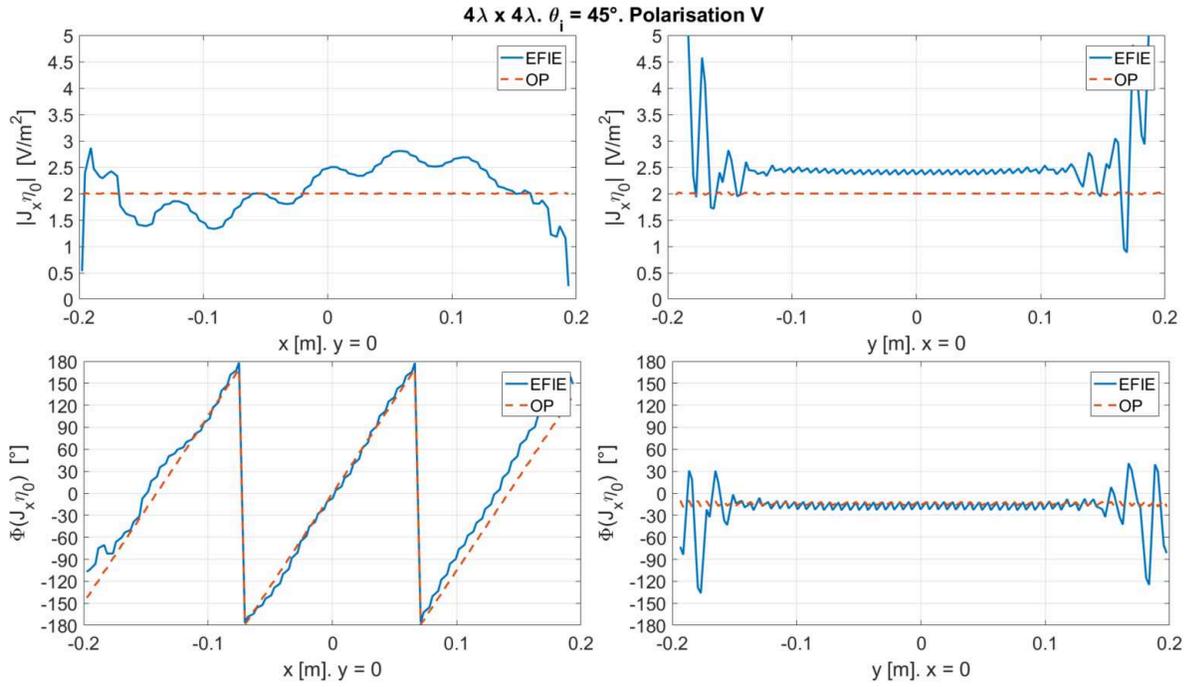


FIGURE 2.13 – Module et phase de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$

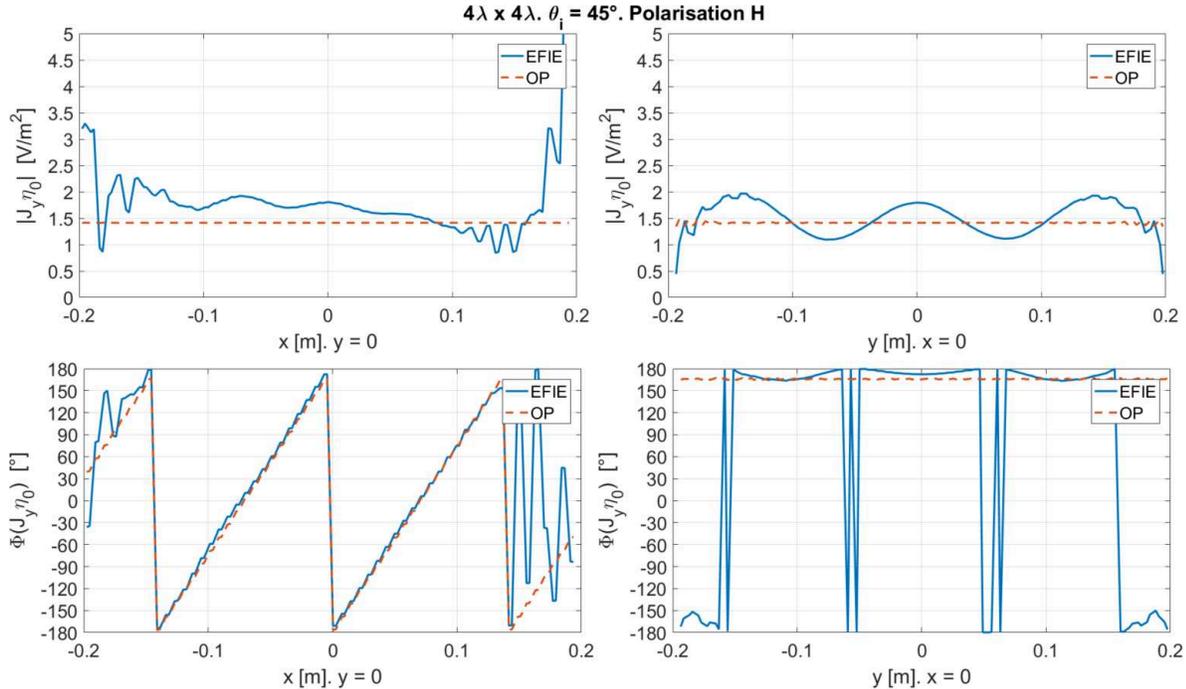


FIGURE 2.14 – Module et phase de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$

En dépit de l'effet de bord, observé sous forme d'oscillations des valeurs du courant obtenues par le modèle MdM, la précision de ces résultats reste acceptable compte tenu de la taille de la surface et de l'angle

d'incidence considérés.

2.7.1.2 Champ diffracté en champ proche

Pour l'analyse du comportement du champ diffracté en champ proche, le champ incident considéré est polarisé de façon verticale et l'angle d'incidence $\theta_i = 0^\circ$. Les vecteurs du système des coordonnées du champ diffracté sont définis à partir des angles $\theta_s = 0^\circ$ et $\phi_s = 0^\circ$. Alors le point d'observation se trouve placé directement au-dessus de la surface, dans les coordonnées $(0, 0, z)$, qui sont aussi les composantes du vecteur de position \mathbf{r} . L'analyse est composée de deux parties. La première sert à comparer les valeurs de module et phase de chaque composante calculée par le schéma Mdm et par la OP. La deuxième partie montre la convergence avec l'augmentation de la distance, des valeurs de champ proche et champ lointain déterminés par la Mdm sur la EFIE. Étant donné que la fréquence du travail est de 3 GHz ($\lambda_0 = 10$ cm), afin de pouvoir évaluer le comportement du champ par rapport à la distance de la surface, la valeur de z est échantillonnée à $\lambda_0/10$. Les valeurs de z considérées sont entre 0.1 et 10 mètres. Dans ces conditions $k = 2\pi/\lambda_0 = 62.8$ rad/m, alors le critère $kr \gg 1$ pour utiliser l'expression approximée de champ lointain est respectée. D'après les critères de zones de champ proche et lointain, présentés dans le chapitre précédent, pour la surface analysée la distance maximale en champ proche est de $8.34\lambda_0 = 83.4$ cm et l'expression en champ lointain est valide à partir de $\|\mathbf{r}\| = 32\lambda_0 = 3.2$ m. Ces limites sont visibles sur les figures.

Il est observé sur la figure 2.15 que les amplitudes des composantes selon k_s et ϕ_s , sont beaucoup plus faibles que celle selon θ_s , et elles ne sont pas nulles à proximité de la surface. Un comportement tout à fait normal et attendu. La ressemblance entre les valeurs calculées par la EFIE et celles obtenues à partir de la OP est évidente.

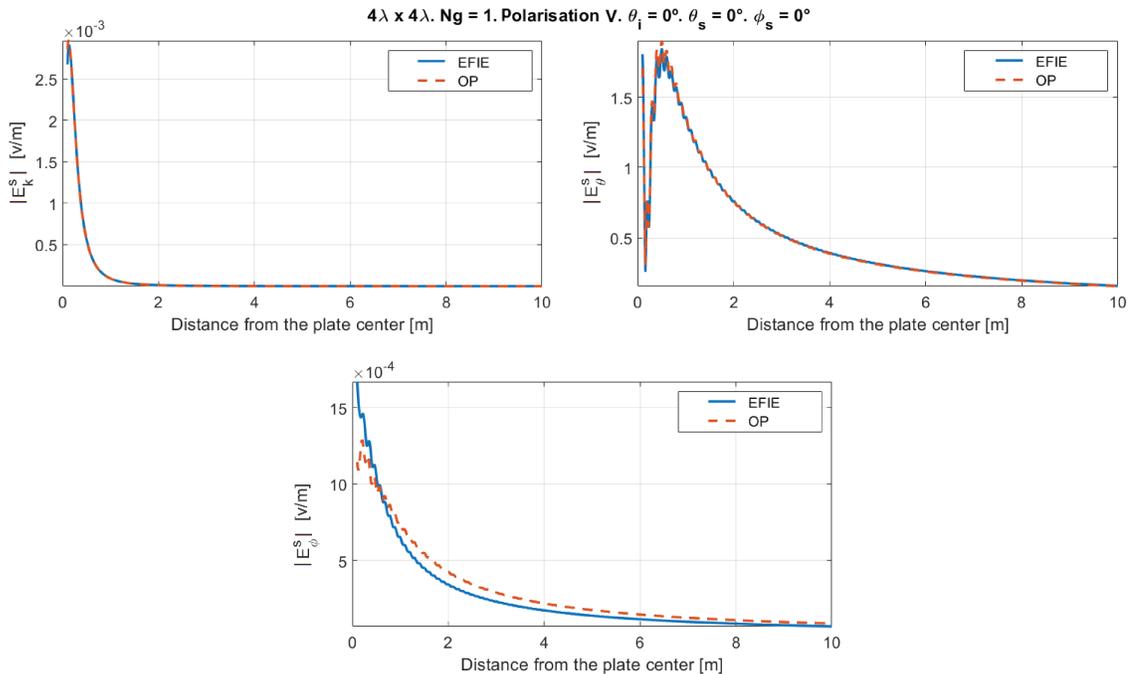


FIGURE 2.15 – Module des composantes du champ diffracté en champ proche par une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1$ V/m, $\theta_s = 0^\circ$, $\phi_s = 0^\circ$

Sur la figure 2.16, une comparaison sur la phase est présentée. Cette figure montre que pour la composante principale (selon θ_s), la similitude est totale et qu'il y a un déphasage de la composante selon ϕ_s qui au même temps à une amplitude 10^3 fois plus faible que la composante principale. Il est clair que les valeurs du champ électrique dépendent des courants surfaciques mais l'erreur est moins important sur le champ diffracté et surtout en champ lointain.

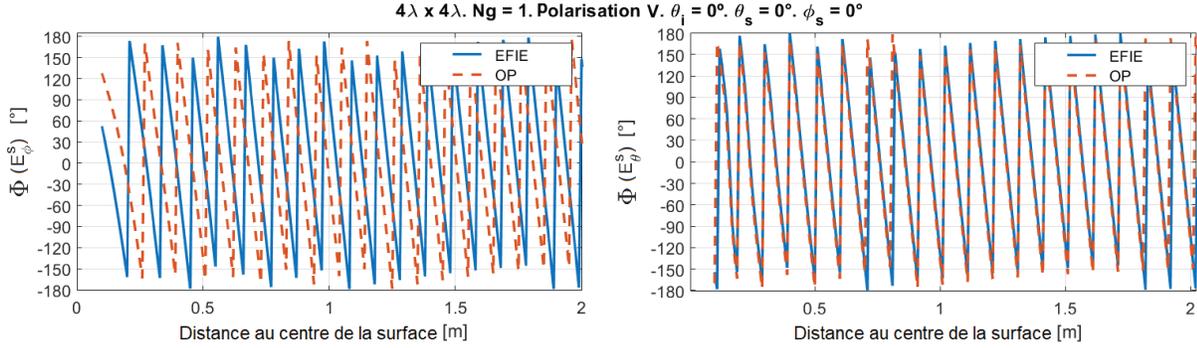


FIGURE 2.16 – Détail de la phase des composantes du champ diffracté en champ proche par une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\theta_s = 0^\circ$, $\phi_s = 0^\circ$

Sur la figure 2.17, les modules des composantes du champ diffracté sont calculés par les équations de champ en zone de champ proche et du champ lointain. Cette figure montre qu'à partir de 3 mètres les deux solutions donnent des résultats identiques en module.

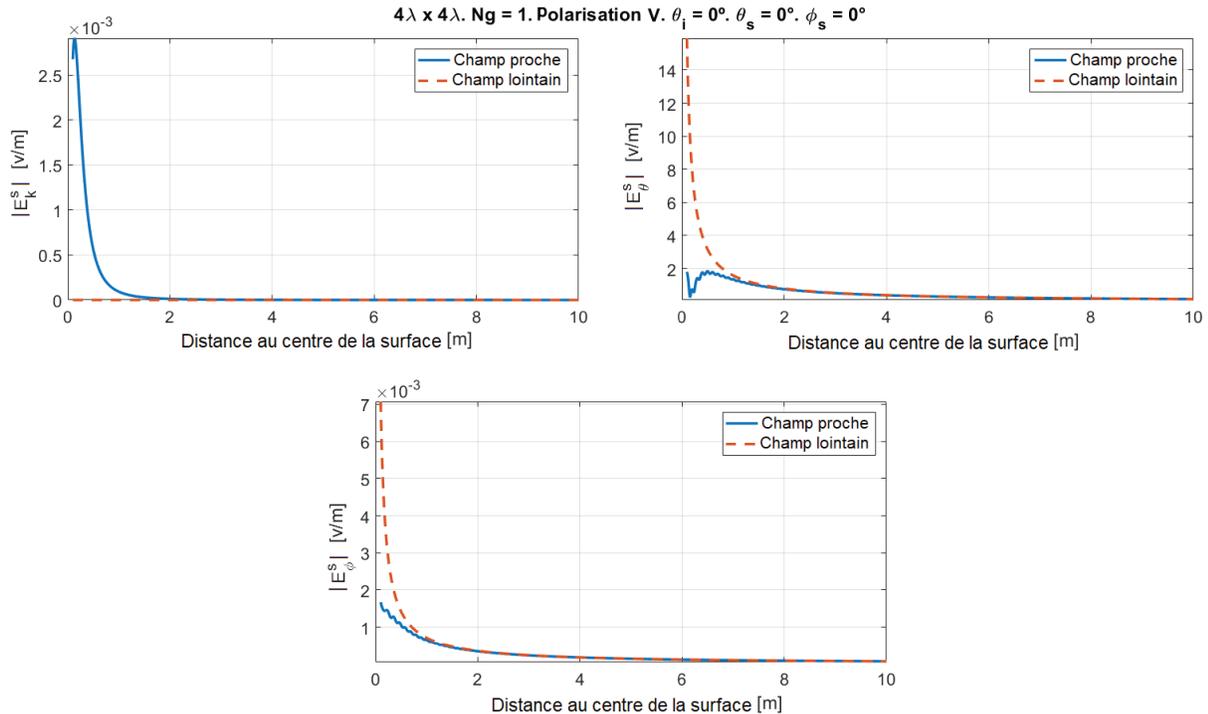


FIGURE 2.17 – Module des composantes du champ diffracté par une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$ en champs proche et lointain. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\theta_s = 0^\circ$, $\phi_s = 0^\circ$

La figure 2.18 montre les résultats sur la phase des composantes du champ électrique diffracté, calculé via les deux équations : champ proche et champ lointain. Les résultats amènent à des conclusions similaires que pour le module, malgré que pour E_ϕ la correspondance est obtenue à une distance plus importante (6.5 m). Ceci a lieu à une distance de la surface inférieure à la limite de la zone de champ lointain pour la composante en θ .

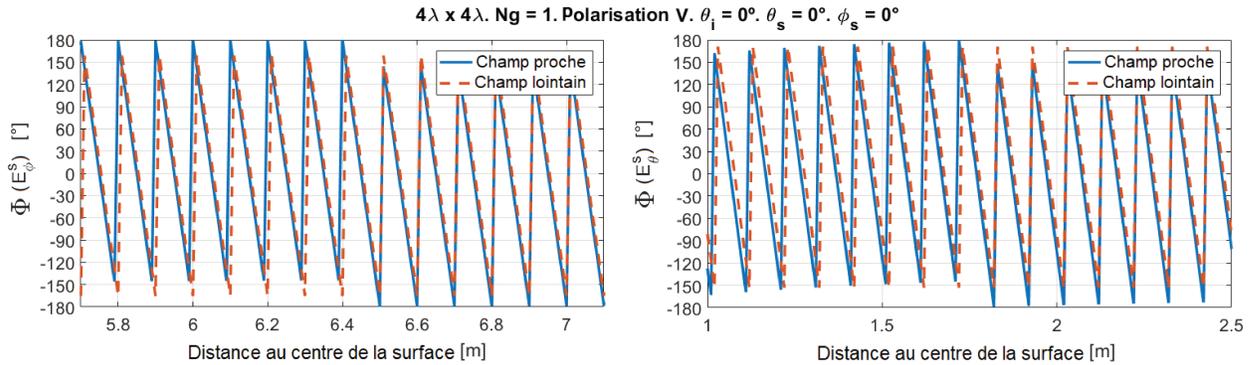


FIGURE 2.18 – Phases des composantes du champ diffracté par une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$ en champs proche et lointain. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\theta_s = 0^\circ$, $\phi_s = 0^\circ$

2.7.1.3 Surface Équivalente Radar et champ diffracté en champ lointain

Une configuration bistatique est considérée pour montrer les résultats de simulations du calcul du champ diffracté en champ lointain. Pour évaluer leur pertinence, 4 cas de champ incident sont pris en compte en combinant les polarisations horizontale et verticale avec deux angles d'incidence, $\theta_i = 0^\circ$ et $\theta_i = 45^\circ$. Pour le champ diffracté, comme il a été mentionné auparavant, les calculs ont été faits pour des valeurs de θ_s entre -90° et 90° avec une résolution de 1° , en prenant $\phi_s = 0^\circ$ et $\phi_s = 90^\circ$, ce qui permet de déterminer le comportement du champ diffracté dans les plans parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence. Une distance $r = 1000 \text{ m}$ est considérée. Les composantes de la SER et la phase de chaque composante du coefficient de diffraction pour chacun des scénarios.

La première conclusion tirée des figures 2.19 et 2.20 concerne la SER. Il est évident que la composante en polarisation croisée, étant 65 dB plus faible que la composante en co-polarisation, peut être considérée comme nulle, ce qui est un résultat complètement attendu pour le cas d'une surface lisse et se vérifie pour tous les cas simulés. On observe aussi un désaccord entre la MdM et la OP pour les angles près de l'horizon ($\theta_s = 90^\circ$ et $\theta_s = -90^\circ$). Ceci s'explique par l'effet de bord qui est pris en compte par la MdM (la méthode introduit la diffraction par les arêtes de la surface) et pas par la OP. La deuxième conclusion tirée concerne cette fois l'analyse de la phase du coefficient de diffraction. Il a été constaté que le comportement de la phase est similaire pour les deux méthodes. Il faut noter que l'observation est faite sur un plan coplanaire au plan d'incidence ($\phi_s = 0^\circ$) et que la phase du coefficient de diffraction complexe correspond à celle du champ diffracté en champ lointain.

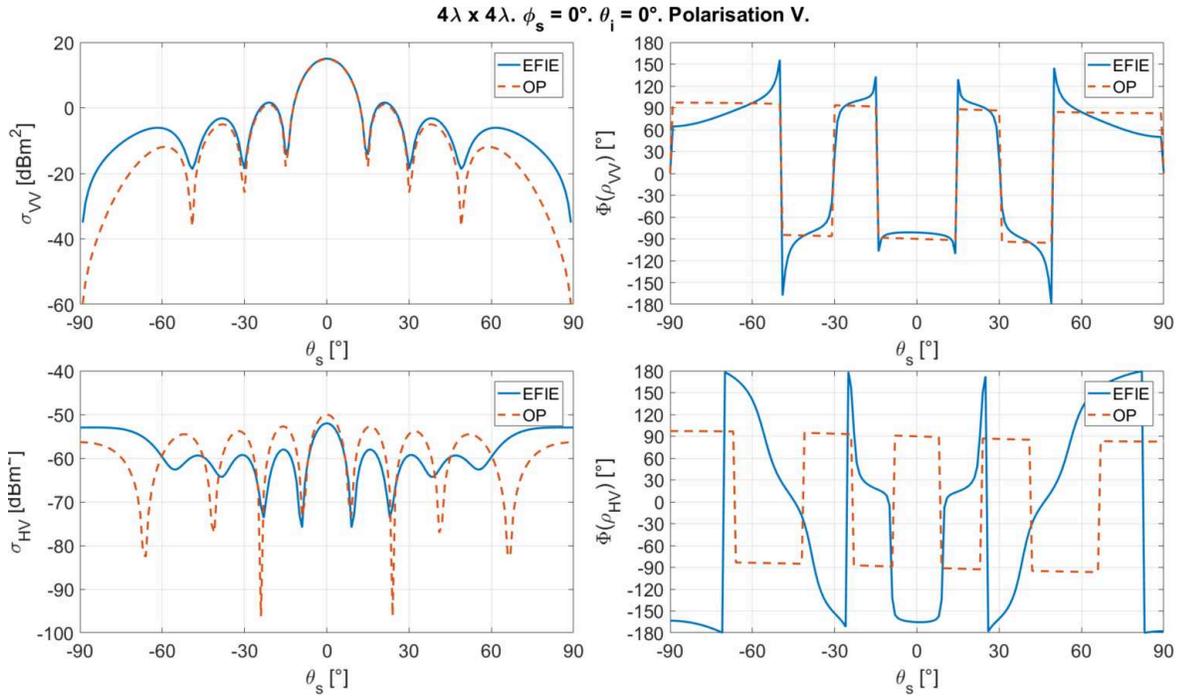


FIGURE 2.19 – SER et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1$ V/m, $\phi_s = 0^\circ$.

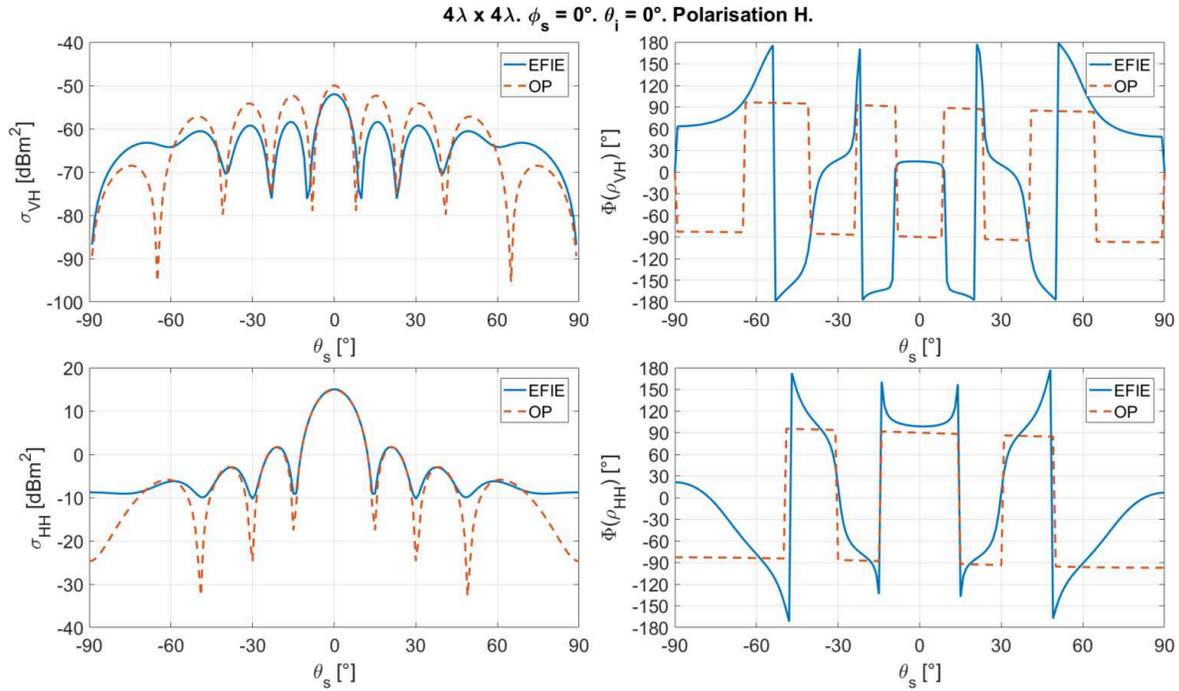


FIGURE 2.20 – SER et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation horizontale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1$ V/m, $\phi_s = 0^\circ$.

Les figures 2.21 et 2.22 montrent le comportement du module (observé sur la SER) et de la phase des

composantes principales du coefficient de diffraction complexe pour des directions d'observation situées dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence ($\phi_s = 90^\circ$).

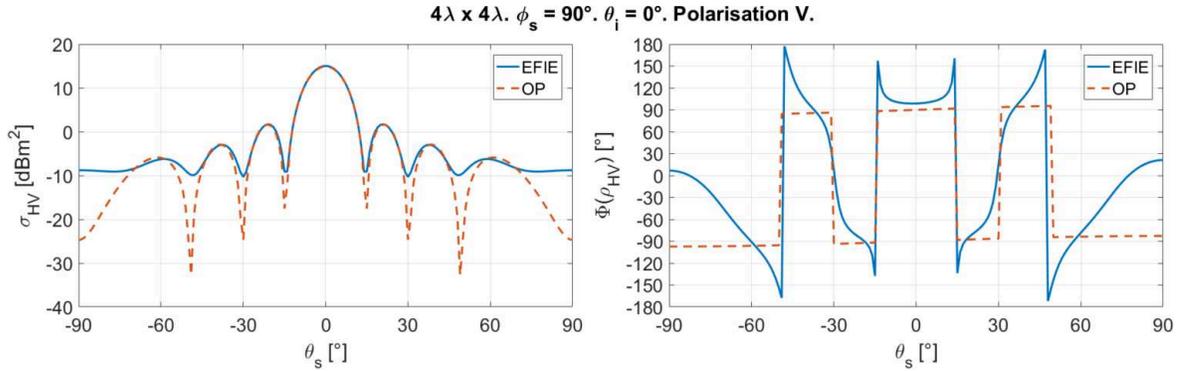


FIGURE 2.21 – SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.

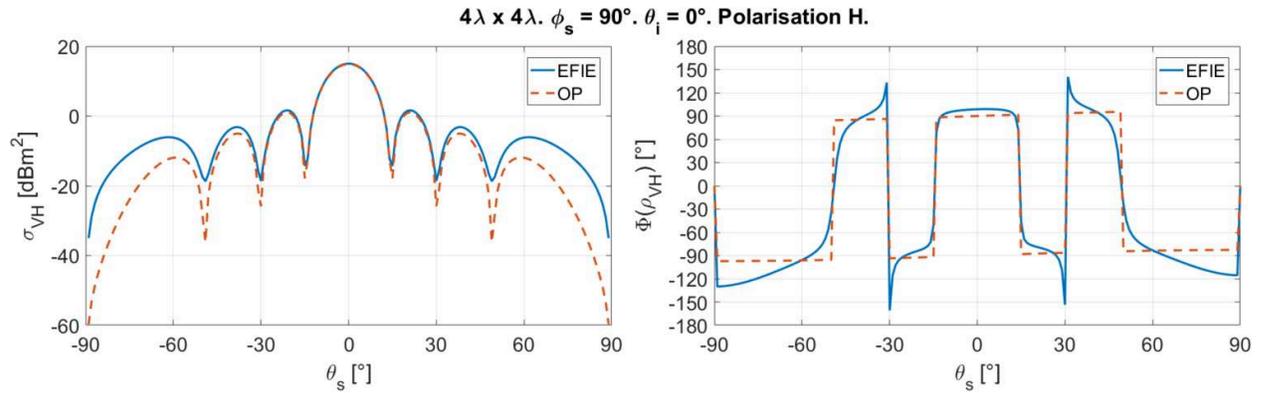


FIGURE 2.22 – SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation horizontale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.

Des résultats similaires sont obtenus pour un angle d'incidence $\theta_i = 45^\circ$. Le fait de considérer des angles d'incidences qui s'approchent de l'incidence rasante a pour conséquence une diminution de la similitude entre les résultats obtenus par chacune des méthodes. Cela est dû au fait que l'onde incidente "voit" de plus en plus les bords de la plaque. Sur les figures 2.23 et 2.24 il est évident de remarquer le déplacement du lobe principal du champ diffracté qui se trouve dans la direction spéculaire. Il faut noter que les résultats prédits par la OP sous cette configuration sont moins précis pour les directions éloignées de la direction spéculaire.

Les figures 2.25 et 2.26 montrent des différences en module et en phase qui sont plus marquées quand $\phi_s = 90^\circ$. Cette différence est due au fait que dans cette direction les correspondants à l'évaluation d'un lobe secondaire.

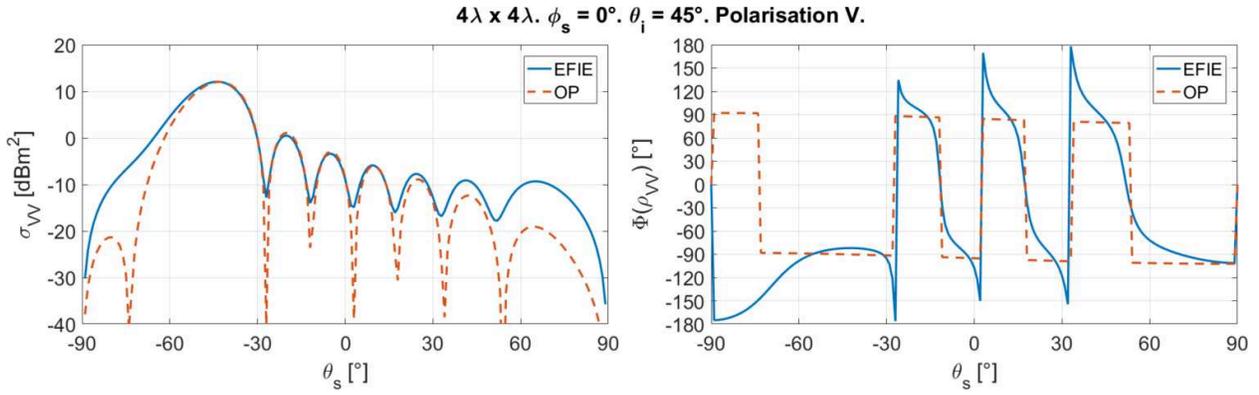


FIGURE 2.23 – SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.

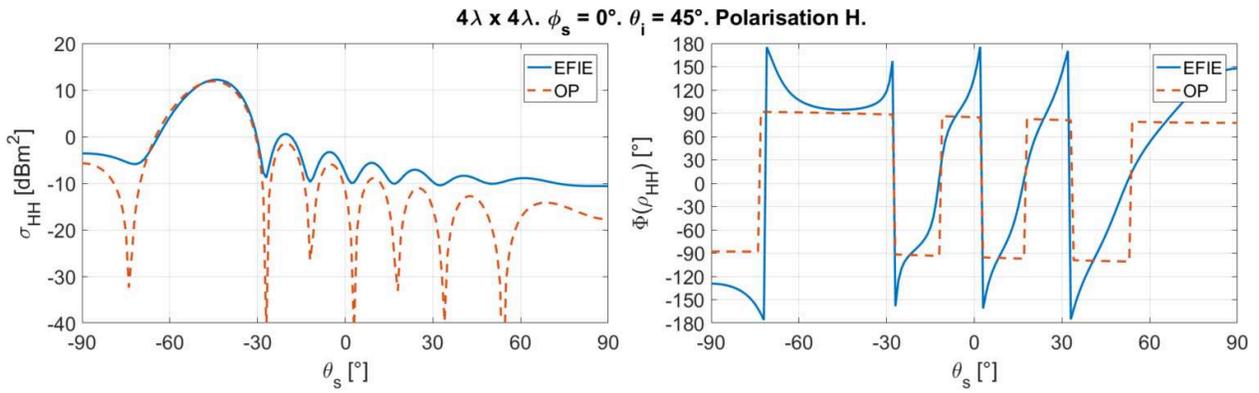


FIGURE 2.24 – SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.

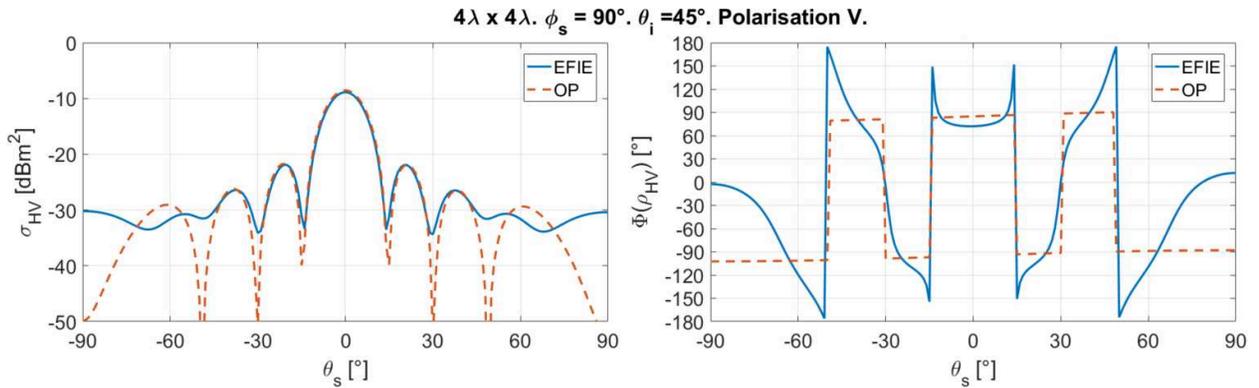


FIGURE 2.25 – SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.

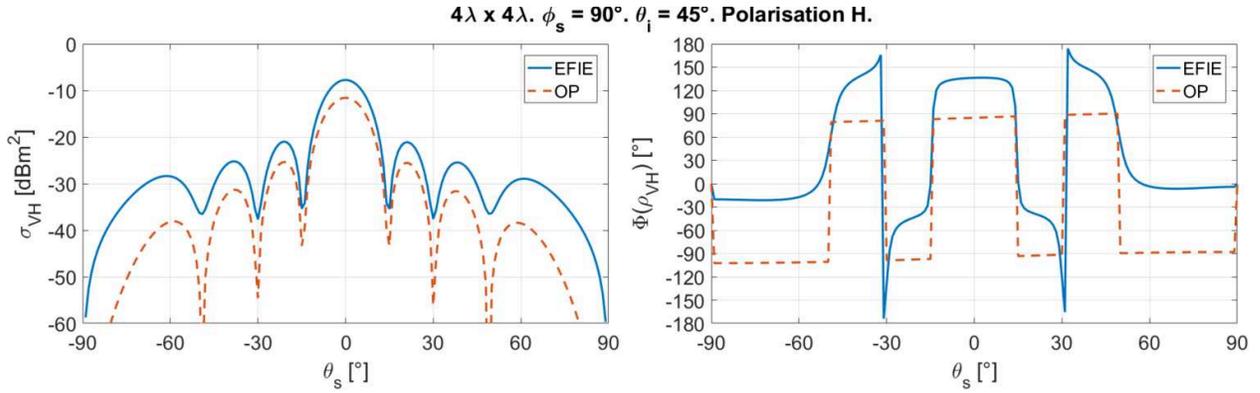


FIGURE 2.26 – SER et phase de la composante principale du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Champ incident en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.

2.8 Étude paramétrique

2.8.1 Effet de la taille de la surface

Les résultats de simulations pour une surface lisse de $8\lambda \times 8\lambda$ sont très similaires à ceux obtenus pour une surface de $4\lambda \times 4\lambda$. Le comportement des composantes du courant surfacique, du champ diffracté en champs proche et lointain, ainsi que celui de la SER, devant la variation des paramètres du champ incident (polarisation et angle d'incidence), est similaire, indépendamment de la taille de la surface. Alors, il suffit de montrer les valeurs les plus significatives afin de faire la comparaison entre les deux.

La différence principale entre les résultats obtenus pour cette nouvelle surface par rapport à la précédente se trouve dans la précision numérique des valeurs, du fait que l'effet de bord est moins accentué au centre de la surface plus grande. On observe un rapprochement entre les résultats obtenus par les deux méthodes du fait du rapprochement des conditions asymptotiques conditionnant la validité de la OP.

2.8.1.1 Courant surfacique

La figure 2.27 montre le module et la phase de la composante principale du courant surfacique pour les deux surfaces sous l'incidence d'une onde en polarisation verticale et $\theta_i = 0^\circ$.

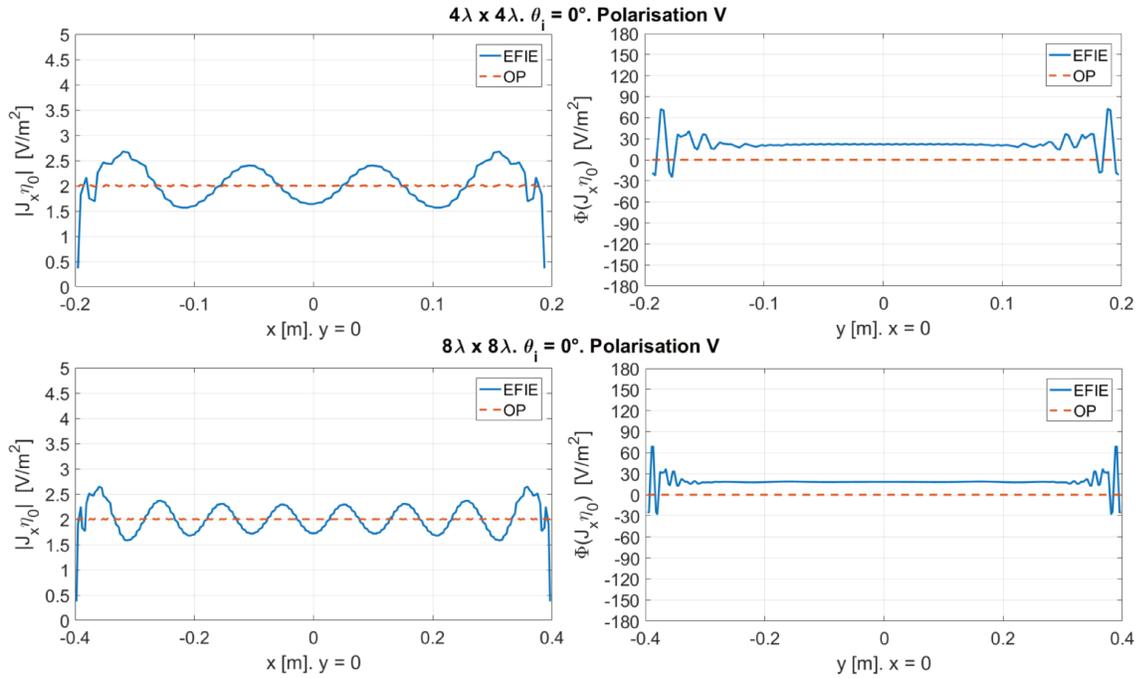


FIGURE 2.27 – Module et phase de $J_x \eta_0$ sur l'axe x de deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

Il est légèrement remarquable que, avec une taille plus importante, les résultats sont plus précis au centre de la surface de $8\lambda \times 8\lambda$. L'effet de bord est moins important et les valeurs déterminées par la MdM sont plus proches de ceux obtenues par la OP.

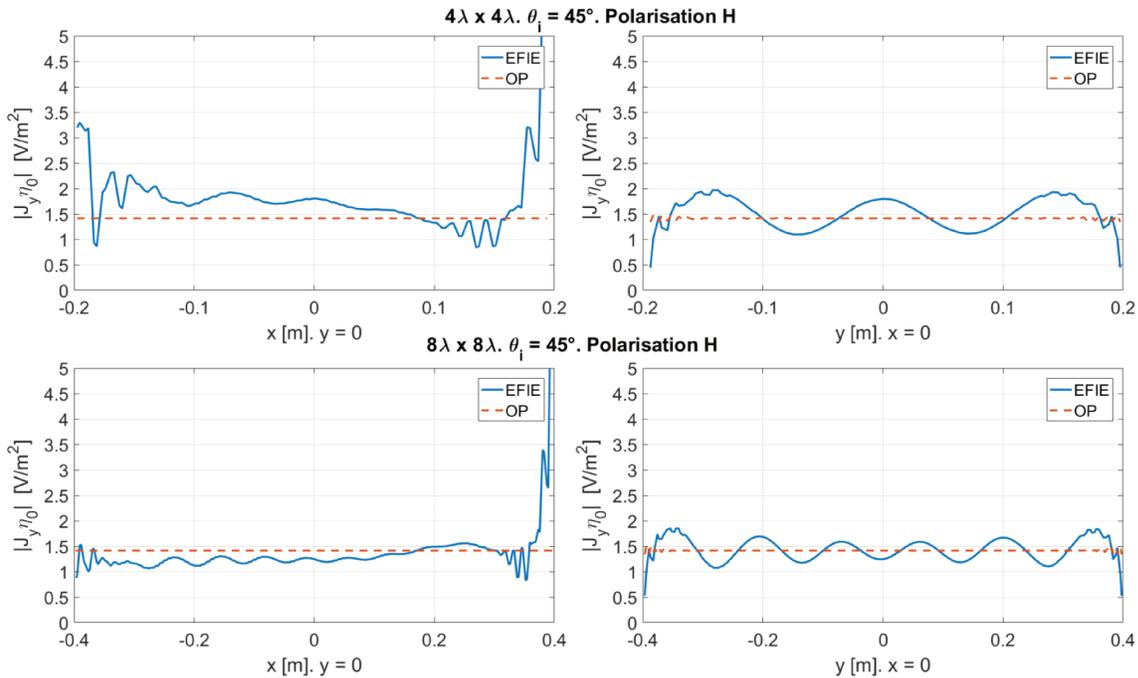


FIGURE 2.28 – Module de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques de deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Onde incidente en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

La même conclusion s'applique en changeant la polarisation et l'angle d'incidence de l'onde incidente, comme peut-être observé sur les figures 2.28 et 2.29.

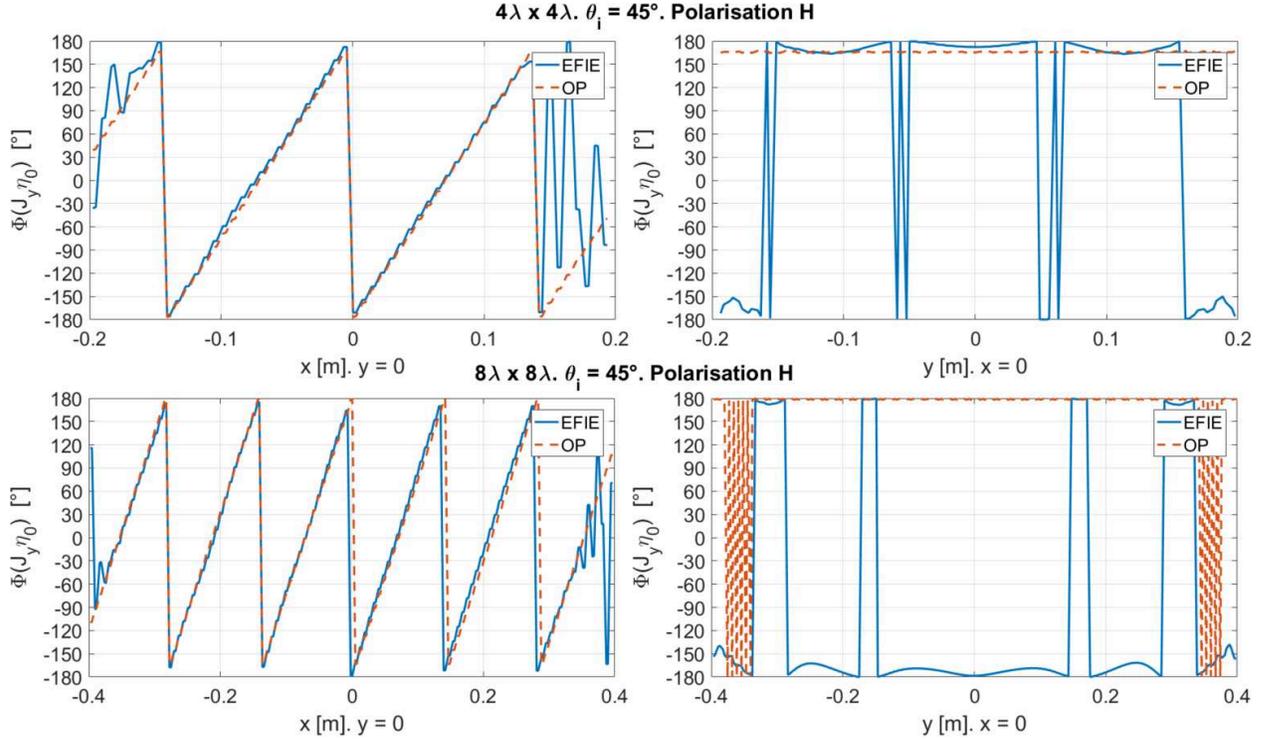


FIGURE 2.29 – Phase de $J_y \eta_0$ sur les axes géométriques de deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Onde incidente en polarisation horizontale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

2.8.1.2 Surface Équivalente Radar et champ diffracté en champ lointain

Pour comparer le comportement de la SER et du champ diffracté en zone de champ lointain, uniquement les résultats pour une onde incidente en polarisation verticale sont montrés. Les conclusions tirées sont valables pour le cas d'une onde en polarisation horizontale.

Le résultat du balayage sur θ_s de -90° à 90° , dans les cas de $\phi_s = 0^\circ$ et $\phi_s = 90^\circ$, est montré sur les figures 2.30 et 2.31 respectivement. Ici, la SER et la phase de la composante en co-polarisation du champ diffracté (coefficient de diffraction complexe) pour chacune des surfaces sont affichés. La figure 2.32 illustre le cas pour une incidence avec $\theta_i = 45^\circ$ et $\phi_s = 0^\circ$.

Comme pour le calcul du courant, la seule différence constatée porte sur la précision des résultats, obtenue ici autour des directions spéculaires. L'accord entre les résultats calculés par les deux méthodes est meilleur pour la surface la plus large. Le comportement du module (observé sur la SER) et de la phase du coefficient de diffraction, en fonction de l'angle de diffraction reste similaire pour les deux surfaces considérées. A noter que la SER s'obtient en prenant le module du carré du coefficient de diffraction.

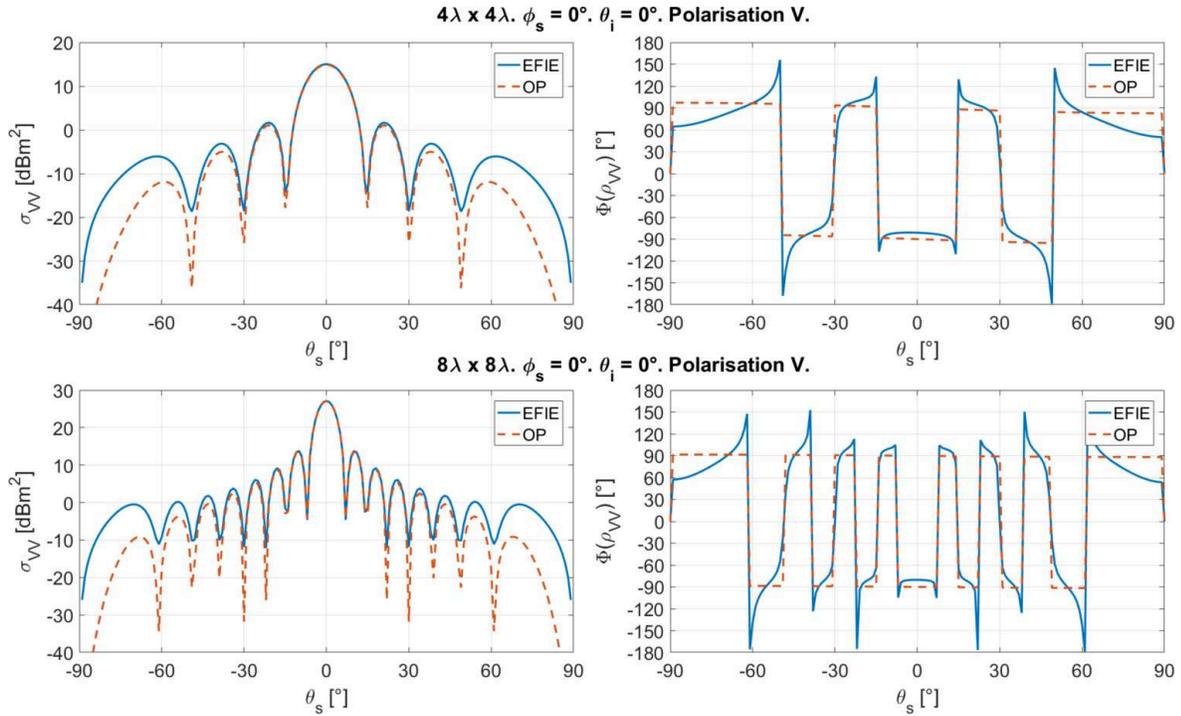


FIGURE 2.30 – Module et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.

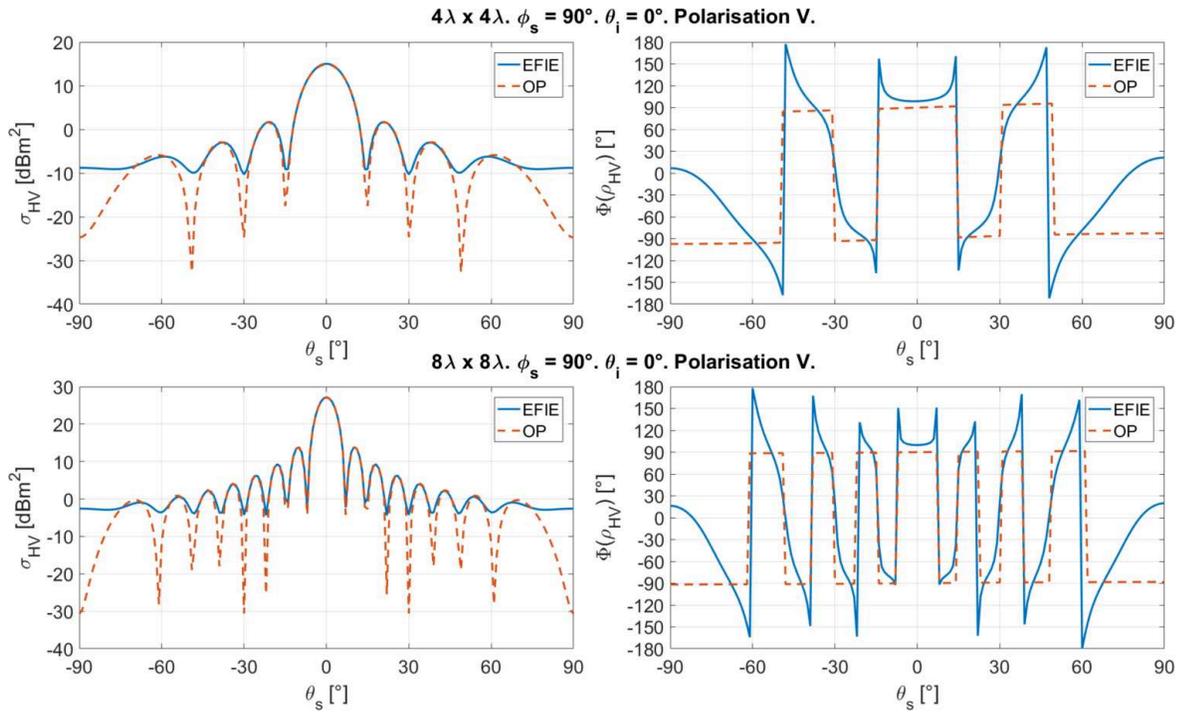


FIGURE 2.31 – Module et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 90^\circ$.

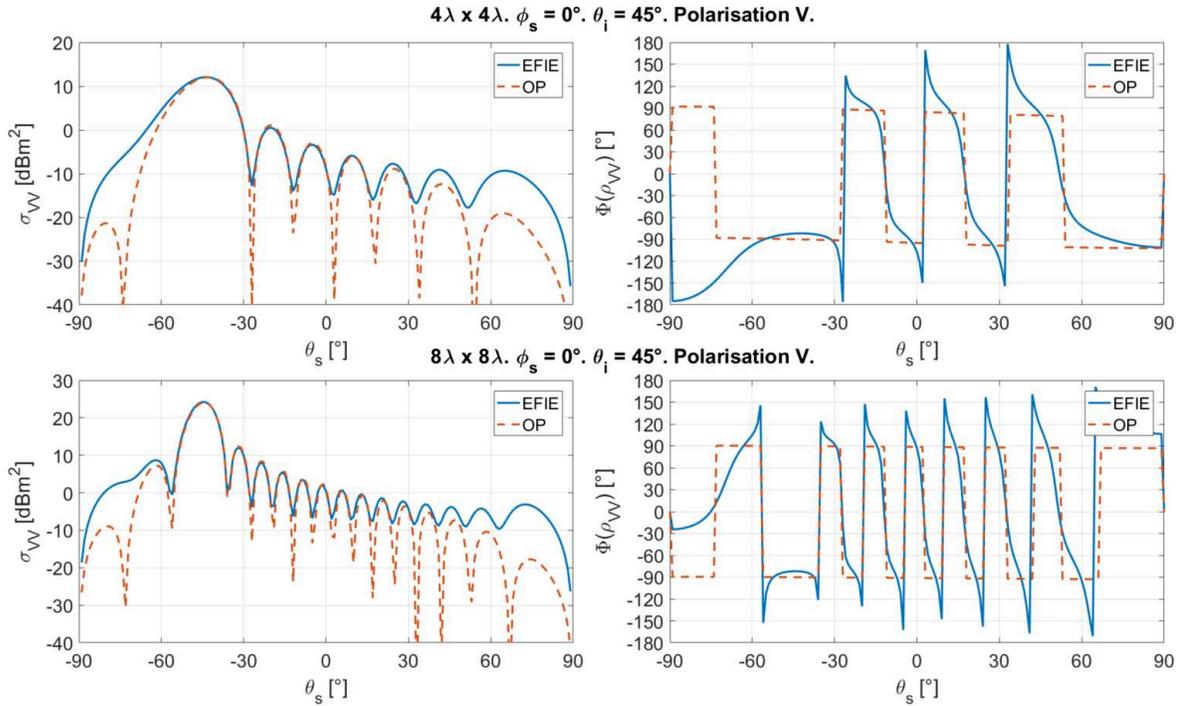


FIGURE 2.32 – Module et phase des composantes du coefficient de diffraction complexe en champ lointain en fonction de θ_s pour deux surfaces de tailles $4\lambda \times 4\lambda$ (en haut) et $8\lambda \times 8\lambda$ (en bas). Champ incident en polarisation verticale, $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$, $\phi_s = 0^\circ$.

2.8.2 Effet du nombre de points de Gauss

Des simulations pour les surfaces $4\lambda \times 4\lambda$ et $8\lambda \times 8\lambda$, dont les résultats ne sont pas présentés, ont été réalisées en considérant jusqu'à 16 points de Gauss pour l'intégration numérique et une densité de maillage moyenne de $\lambda/12$, afin de garantir qu'aucune arête ne dépasse la taille optimale pour la MdM de $\lambda/10$.

Ces simulations ont montré que les résultats du calcul du courant et du champ diffracté ne diffèrent pas en fonction du nombre de points de Gauss. On peut conclure, que pour un maillage fin, l'intégration numérique avec plus d'un 1 point de Gauss n'est donc pas nécessaire.

2.8.3 Effet de la densité d'échantillonnage

Dans le but de savoir si on peut relâcher le maillage en s'appuyant sur une intégration numérique avec un nombre différent de points de Gauss, deux autres densités de maillage ont été considérées pour quantifier l'effet de cette variable sur la précision des résultats. Les valeurs de densités moyennes choisies pour le test sont $\lambda/6.2$ et $\lambda/3.1$. Comme référence sont utilisés les graphiques du courant surfacique obtenus pour la surface de taille $8\lambda \times 8\lambda$ ayant une densité de maillage moyenne de $\lambda/12$ et $N_g = 1$. La comparaison est faite en module et phase, pour la composante principale du courant sur l'axe \hat{x} ($y = 0$) de la surface, en considérant une onde incidente en polarisation verticale et un angle d'incidence $\theta_i = 0$.

2.8.3.1 Courant surfacique

Dans le cas où le maillage est moins dense ($\lambda/3.1$), la figure 2.33 montre que le module est affecté et ceci ne s'améliore pas, même si un nombre élevé de points de Gauss (Ng) est utilisé. Il semblerait que pour $Ng = 1$ les valeurs obtenues sont correctes mais en analysant la phase, dont l'information est montrée sur la figure 2.34, le résultat montre que l'erreur est trop importante.

Le comportement de la phase du courant est très similaire à celui du module. Il n'y a pas de changement significatif au-delà de 4 points de Gauss. Il faut noter que pour ce maillage, aucun des résultats n'est satisfaisant. L'erreur minimale de phase étant de $\pi/6$.

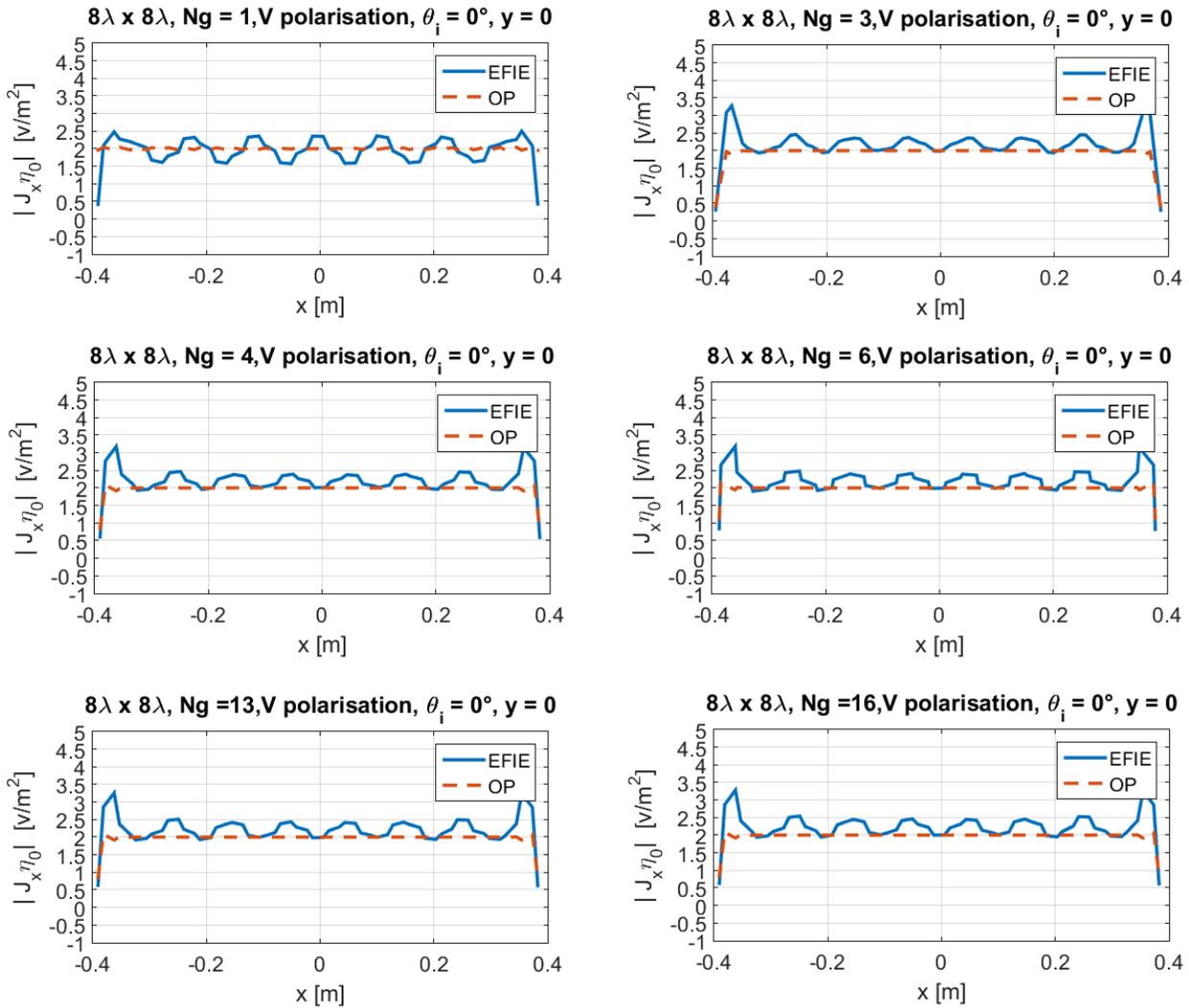


FIGURE 2.33 – Module de $J_x \eta_0$ sur l'axe \hat{x} , en fonction du nombre de points de Gauss, pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$ avec une densité de maillage moyenne de $\lambda/3.1$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

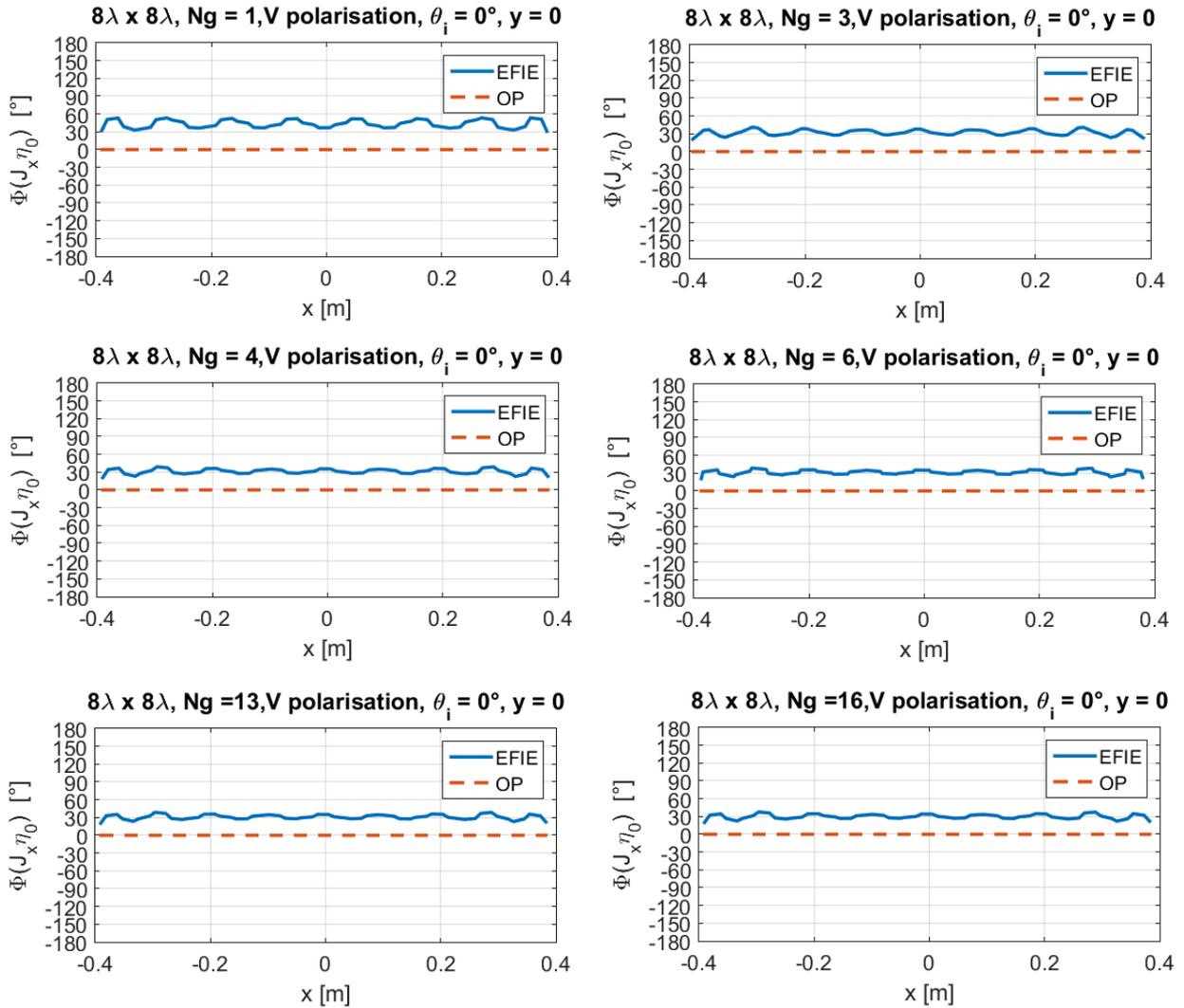


FIGURE 2.34 – Phase de $J_x \eta_0$ sur l'axe \hat{x} , en fonction du nombre de points de Gauss, pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$, avec une densité de maillage moyenne de $\lambda/3.1$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

Maintenant pour la surface de densité de maillage moyenne ($\lambda/6$), les résultats sont stables et acceptables en module et phase à partir de $N_g = 3$, comme le montrent les deux figures suivantes. On vérifie que à partir de $N_g = 3$ les résultats sont similaires à ceux obtenus pour une densité d'échantillonnage de $\lambda/10$.

On peut conclure que la densité du maillage peut être relâchée jusqu'à un certain point à condition d'augmenter le nombre de points de Gauss dans l'intégration numérique afin d'assurer sa précision. Il existe une limite à partir de laquelle le maillage n'est pas suffisant pour représenter le phénomène physique sous-jacent (courant de surface) et les résultats du calcul ne seront pas satisfaisants quelle que soit la précision de l'intégration numérique. Cette limite doit être définie pour chaque cas particulier à partir de l'erreur commise par rapport aux valeurs de référence, qu'on établit ici comme ceux obtenues pour un échantillonnage à $\lambda/10$.

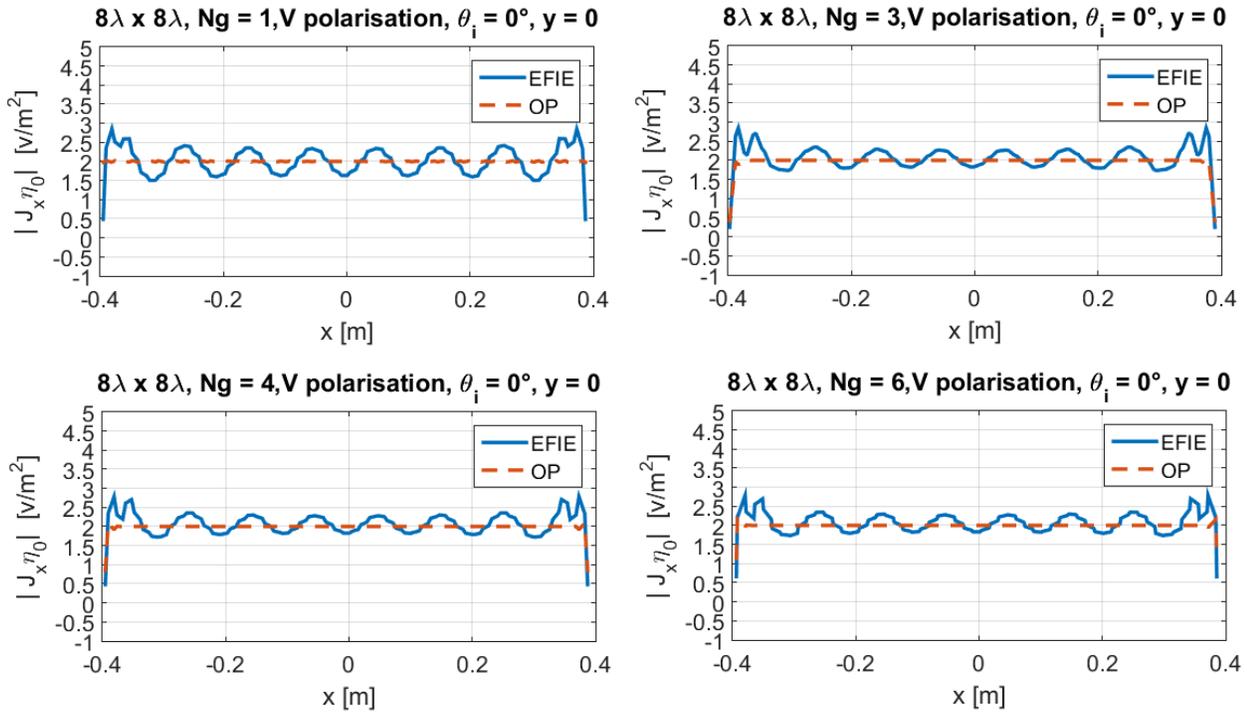


FIGURE 2.35 – Module de $J_x \eta_0$ sur l'axe \hat{x} , en fonction du nombre de points de Gauss, pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$ avec une densité de maillage moyenne de $\lambda/6.2$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1$ V/m et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

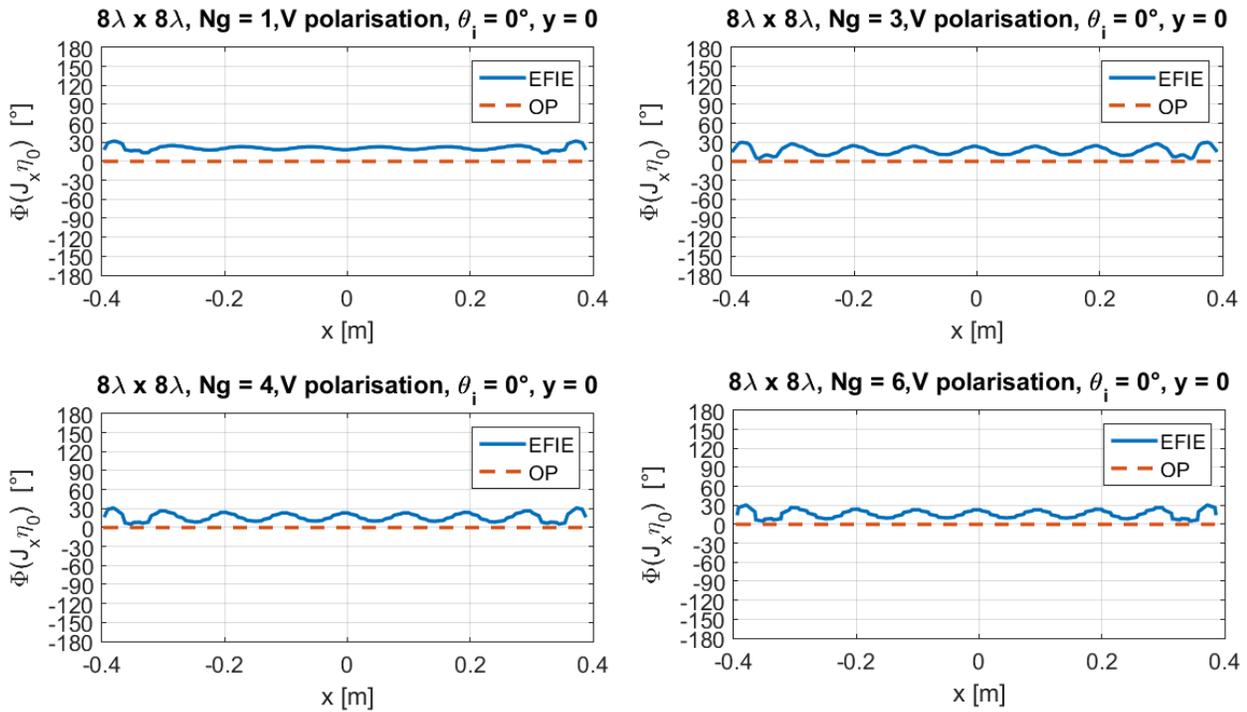


FIGURE 2.36 – Phase de $J_x \eta_0$ sur l'axe \hat{x} , en fonction du nombre de points de Gauss, pour une surface de taille $4\lambda \times 4\lambda$, avec une densité de maillage moyenne de $\lambda/3.1$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1$ V/m et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

2.9 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre l'implémentation du modèle développé se basant sur la méthode des moments (MmM) pour résoudre le problème de la diffraction par une surface parfaitement conductrice de géométrie quelconque a été présentée et discutée. Les étapes principales ont été décrites en détail, en portant une attention particulière sur la discrétisation du problème et sur le traitement de la singularité.

Des simulations numériques ont été réalisées pour le cas d'une surface carrée et lisse dans le but de comparer le modèle de référence basé sur la MmM avec un deuxième modèle asymptotique basé sur la OP, tout en tenant compte de son domaine de validité. Les résultats du calcul de courant surfacique, du champ diffracté en zone des champs proche et lointain et de la SER, ainsi que de la matrice de diffraction, ont été analysés. Par comparaison avec la OP, les résultats obtenus confirment la bonne implémentation du modèle MmM.

La dernière section du chapitre, dédiée à l'étude paramétrique et portant sur les différentes variables de configuration de la méthode a permis de déterminer les valeurs adéquates de ces variables et conduit aux conclusions suivantes :

La surface de la mer n'étant pas simplement une surface de dimension finie, il est important de s'affranchir de l'effet de bords. Cet effet peut être minimisé en considérant une surface de dimensions très grandes devant la longueur de l'onde incidente et aussi une incidence proche de l'incidence normale. Sachant qu'en augmentant la taille de la surface, le coût de calcul devient important, la solution de lâcher le maillage et de considérer une intégration avec un certain nombre de points de Gauss est peut être envisagée afin de réduire la taille du problème. De plus, pour pouvoir considérer des angles d'incidence s'approchant de l'incidence rasante, il est possible de modéliser une onde atténuée sur les bords de la surface.

Chapitre 3

Méthode E-SDIM

3.1 Introduction

Le but du troisième chapitre de ce manuscrit est de présenter les résultats obtenus à l'issue de l'implémentation de la E-SDIM (Extended Sub-Domain Decomposition Iterative Method), qui constitue une généralisation de la SDIM [22], [31], afin de traiter rigoureusement le problème de diffraction électromagnétique par une surface 2D, rugueuse et parfaitement conductrice. Elle permet de résoudre efficacement, par un schéma itératif, le système linéaire issu de la discrétisation par la Méthode des Moments de l'Equation Intégrale du Champ Electrique avec l'utilisation des fonctions de base de type RWG.

Elle est basée sur le même principe de décomposition en domaines de la surface que la CBFM, à partir de laquelle les interactions à l'intérieur et entre ces blocs sont représentées par des matrices impédance et des matrices de couplage respectivement. De plus, les matrices de couplage représentant des interactions entre des blocs bien séparés, sont considérées comme des matrices de rang faible. Ceci permet de les représenter par un ensemble de matrices compressées. Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer de telles matrices. Parmi elles, la technique de compression algébrique Adaptive Cross Approximation (ACA) a montré une bonne performance en termes de compression et précision.

La première partie de ce chapitre contient une description détaillée de la méthode de base (SDIM), retenue après l'analyse de l'état de l'art. Les principales limitations de la méthode sont exposées. En effet, pour le problème en trois dimensions, l'effet de bord artificiel trop important, introduit par le découpage de la surface, ainsi que l'irrégularité des bords résultant de l'utilisation des fonctions RWG, provoquent la non convergence de la SDIM.

La deuxième partie du chapitre explique alors comment chacun des blocs est ensuite élargi uniformément, créant un recouvrement entre blocs adjacents, dans le but de contrecarrer l'effet de bord artificiel introduit par le découpage de la surface. Ceci sert à obtenir la convergence de la méthode lorsqu'elle est utilisée pour la résolution du problème 3D. Cette technique est nommée E-SDIM. Ensuite la technique ACA est présentée pour compresser des matrices de couplage afin d'accélérer les produits matrice-vecteur présents

dans l'algorithme.

Le chapitre inclut aussi une analyse de la complexité de la E-SDIM, ainsi que l'effet de la ACA. Cette analyse permet de vérifier quelles sont les étapes les plus pénalisantes de l'algorithme et de justifier le choix d'utilisation d'une méthode de compression. Une analyse de la compressibilité du problème est présentée en complément.

La troisième partie présente des résultats numériques obtenus du courant surfacique et de la SER, pour une surface carrée rugueuse parfaitement conductrice. Ces résultats sont analysés afin de déterminer le comportement de la E-SDIM et de son intégration avec la ACA. Enfin, on réalise une étude paramétrique pour évaluer l'influence des différentes variables de configuration sur la convergence et la précision de la E-SDIM ainsi que sa sensibilité aux caractéristiques de l'onde incidente.

3.2 Principe de la méthode E-SDIM

Comme il a déjà été mentionné la E-SDIM constitue une généralisation de la SDIM, développée dans le but de réaliser le traitement rigoureux du problème de diffraction électromagnétique par une surface bidimensionnelle, rugueuse et parfaitement conductrice. A cet effet, le point de départ logique est la description de la SDIM.

3.2.1 Méthode SDIM

La méthode SDIM repose sur la division de la surface, S , en P blocs ou sous-domaines, de telle façon que $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_P$, comme le montre la figure suivante :

1	2	...	n
2*1	2*2	...	2*n
⋮	⋮	⋱	⋮
m*1	m*2	...	m*n = P

FIGURE 3.1 – Décomposition du domaine géométrique S en P sous-domaines, sous forme de m lignes et n colonnes

Alors, la matrice impédance du problème, de taille $N \times N$, obtenue par l'application de la MdM, peut-être

exprimée sous la forme :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1} & \bar{\mathbf{Z}}_{1,2} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{1,P} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,1} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,2} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{2,P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,1} & \bar{\mathbf{Z}}_{P,2} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,P} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où P^2 est le nombre de sous-matrices $\bar{\mathbf{Z}}_{i,j}$ de taille $N_i \times N_j$. Le nombre total d'inconnues après la décomposition reste identique : $N = \sum_{i=1}^P N_i$, N_i étant le nombre d'inconnues associées au bloc i [22], [31]. Cette représentation de la matrice impédance permet de la décomposer de sorte que $\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{C}}$ avec

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,2} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,P} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

et

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{Z}}_{1,2} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{1,P} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,1} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{2,P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,1} & \bar{\mathbf{Z}}_{P,2} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La matrice $\bar{\mathbf{A}}$ contient les sous-matrices impédances $\bar{\mathbf{Z}}_{i,i}$ associées à chacun des blocs et $\bar{\mathbf{C}}$ contient les sous-matrices de couplage entre sous-domaines, $\bar{\mathbf{Z}}_{i,j}$, où $i \neq j$. En partant de l'hypothèse que la matrice $\bar{\mathbf{C}}$ peut-être exprimée à travers le produit $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}}$, où $\bar{\mathbf{U}}$ est une matrice triangulaire inférieure, $\bar{\mathbf{B}}$ est une matrice diagonale et $\bar{\mathbf{V}}$ est une matrice triangulaire supérieure, toutes de taille $N \times N$, l'inverse de la matrice impédance peut-être exprimée sous la forme :

$$\bar{\mathbf{Z}}^{-1} = (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}})^{-1} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{U}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}^{-1} \quad (3.4)$$

où $\bar{\mathbf{A}}$ et $\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{U}}$ sont supposées être inversibles et $\bar{\mathbf{I}}$ représente la matrice identité.

Si le rayon spectral de $\bar{\mathbf{M}} = (\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{U}})$ est strictement inférieur à l'unité, on peut réaliser un développement en série de Taylor du terme $(\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{U}})^{-1}$, sous la forme :

$$\frac{\bar{\mathbf{I}}}{\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{M}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \bar{\mathbf{M}}^k, \quad (3.5)$$

peut-être appliqué [22], [31]. Alors, l'inverse de la matrice impédance devient :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{Z}}^{-1} &= \bar{\mathbf{A}}^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{U}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{U}})^k \right] \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}^{-1} \\
&= \bar{\mathbf{A}}^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_c\bar{\mathbf{A}}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_c^2\bar{\mathbf{A}}^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_c^3\bar{\mathbf{A}}^{-1} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \bar{\mathbf{M}}_c^k \bar{\mathbf{A}}^{-1}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\bar{\mathbf{M}}_c = \bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{C}}$ est la matrice caractéristique de la décomposition en sous-domaines. Grâce à ces manipulations, le produit matrice-vecteur $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{b}$ peut-être réécrit sous la forme :

$$\mathbf{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Y}^{(k)} \tag{3.7}$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{Y}^{(0)} = \bar{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{Y}^{(k)} = -\bar{\mathbf{M}}_c\mathbf{Y}^{(k-1)}, k > 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

et l'inverse de la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ peut-être obtenue à partir de l'expression suivante :

$$\bar{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1}^{-1} & \bar{\mathbf{0}} & \dots & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,2}^{-1} & \dots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \dots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,P}^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Les vecteurs $\mathbf{Y}^{(k)}$ dans l'équation (3.8), obtenus par un schéma itératif, sont appelés macro-fonctions caractéristiques d'ordre k et décrivent le comportement du courant surfacique à l'ordre mentionné. Ils contiennent les fonctions de base $\mathbf{Y}_i^{(k)}$, définies ci-après. Alors, chaque fonction de base, constituée par un vecteur, représente le courant à l'intérieur du bloc qui, lorsque le calcul converge, se voit corrigée à chaque itération. Ainsi, la SDIM permet d'obtenir $\mathbf{a} \approx \mathbf{a}_{k_{\text{SDIM}}}$, dont le nombre d'itérations k_{SDIM} à réaliser, dépend du critère de convergence choisi [22], [31]. L'un des critères utilisés, qui est celui retenu dans ce travail, est donné par l'expression :

$$\frac{\|\mathbf{a}^{(k)} - \mathbf{a}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{a}^{(k-1)}\|} < \epsilon_0, \tag{3.10}$$

ϵ_0 étant un seuil d'erreur donné. La norme utilisée fait référence à la norme euclidienne d'une matrice $\bar{\mathbf{x}}_{mn}$ définie par ses composantes (x_{ij}) . Elle est définie sous la forme :

$$\|\bar{\mathbf{x}}_{mn}\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |x_{ij}|^2} \quad (3.11)$$

A partir de l'équation (3.8), et en s'appuyant sur le principe de division en sous-domaines, les vecteurs représentant les macro-fonctions, ainsi que le vecteur d'excitation peuvent être réécrits sous la forme :

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^{(k)} \\ \mathbf{Y}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_P^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_P \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

où $\mathbf{Y}_i^{(k)}$ est la fonction de base à l'ordre k , associée au sous-domaine i et \mathbf{b}_i est le vecteur d'excitation associé au même sous-domaine. Cela permet d'exprimer les fonctions $\mathbf{Y}_i^{(k)}$ associées à chaque domaine comme :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_i^{(0)} = \bar{\mathbf{Z}}_{i,i}^{-1} \mathbf{b}_i \\ \mathbf{Y}_i^{(k)} = -\bar{\mathbf{Z}}_{i,i}^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^P \bar{\mathbf{Z}}_{i,j} \mathbf{Y}_j^{(k-1)}, \quad k > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Le principal intérêt de la SDIM réside dans la possibilité d'inverser la matrice d'impédance par blocs avec une complexité très inférieure à celle de l'inversion directe de $\bar{\mathbf{Z}}$ par une décomposition LU [22], [31]. En effet, avec la SDIM, seulement les matrices impédances associées aux blocs doivent être inversées, au lieu de toute la matrice $\bar{\mathbf{Z}}$. De plus, le déficit de rang des sous-matrices de couplage qui forment $\bar{\mathbf{C}}$ permet d'accélérer les produits matrice-vecteur présents dans la deuxième ligne de l'équation (3.13), en utilisant des techniques de compression matricielle comme la ACA.

Il est à noter que la CBFM est très similaire à la SDIM dans le calcul des macro-fonctions caractéristiques. En effet, comme nous le verrons en détail au chapitre suivant, les fonctions $\mathbf{Y}_i^{(0)}$ sont identiques aux Fonctions Caractéristiques Primaires (PBF) de la CBFM et les Fonctions Caractéristiques Secondaires (SBF) sont déterminées par le produit $-\bar{\mathbf{Z}}_{i,i}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{i,j} \mathbf{Y}_j^{(0)}$, qui fait partie du calcul des fonctions $\mathbf{Y}_i^{(1)}$ de la SDIM. L'une des versions de la CBFM utilise ensuite un processus d'ortho-normalisation Gram-Schmidt modifié et l'autre une décomposition SVD à partir des PBF, pour déterminer les fonctions caractéristiques, nécessaires au calcul de la matrice réduite. Cette matrice est utilisée dans le calcul du vecteur \mathbf{a} . A différence d'elles, la SDIM continue le processus itératif jusqu'à l'obtention du courant.

Différents facteurs peuvent influencer la convergence de la SDIM, notamment la taille et la forme des domaines, la polarisation et l'angle d'incidence ainsi que les caractéristiques géométriques de la surface elle-même. De plus, les effets de bords de la surface ainsi que ceux des bords artificiels, créés par la division en sous-domaines, conditionnent aussi la convergence de la méthode SDIM qui a montré une convergence très rapide pour le problème 2D.

3.2.2 Limitations de la SDIM pour le problème électromagnétique 3D.

La mise en œuvre de la SDIM commence par la division en sous-domaines du modèle géométrique de la surface considérée dans le problème électromagnétique, qui est discrétisée en triangles élémentaires pour l'utilisation de fonctions RWG. Afin d'assurer que le nombre d'inconnues reste identique après la division en sous-domaines, les fonctions RWG qui se trouvent sur les frontières entre les domaines doivent être associées à l'un des sous-domaines concernés. Ces fonctions sont celles dont l'arête principale fait partie d'une des frontières de séparation de domaines adjacents et chacun de ses triangles se trouvent d'un côté différent de la frontière. Elles sont marquées en rouge sur la figure 3.2. Alors, un critère doit être adopté afin d'effectuer cette association et par conséquent, certains triangles peuvent être partagés par plus d'un sous-domaine.

Une autre façon de voir cette problématique est de considérer le problème au niveau des arêtes. Ainsi, chaque sous-domaine est composé par toutes les arêtes qui se trouvent à l'intérieur de ses limites, ensuite, les arêtes qui se trouvent sur les lignes qui séparent les sous-domaines, sont associées à l'un d'entre eux, en suivant un critère. En supposant que les sous-domaines considérés sont rectangulaires, le critère retenu dans ce travail consiste à associer les arêtes horizontales d'un triangle, qui se trouvent sur une ligne de séparation horizontale, au sous-domaine au-dessus de cette ligne. Dans le cas des arêtes verticales, qui se trouvent sur une ligne de séparation verticale, l'arête est associée au sous-domaine à gauche de la ligne de séparation. Ces orientations spatiales font référence à une vue de dessus de l'objet, comme le montre la figure suivante :

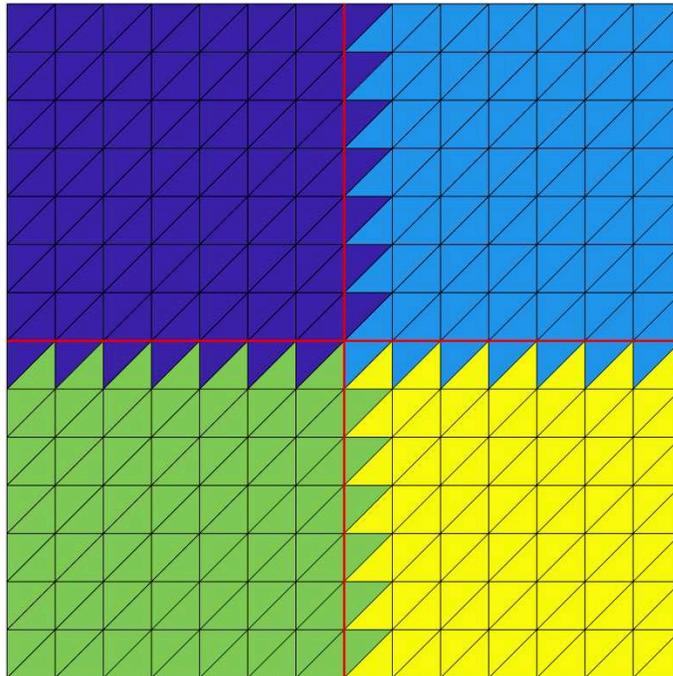


FIGURE 3.2 – Division en 4 sous-domaines du domaine géométrique représenté avec des fonctions RWG

La figure 3.2 montre une surface divisée en quatre (2×2) sous-domaines en respectant le critère décrit auparavant. Cette distribution des fonctions RWG pour former les différents sous-domaines, crée des bords irréguliers et une représentation géométrique asymétrique de deux sous-domaines adjacents quelconques, dans

la région proche à la ligne qui les sépare. Ceci peut être apprécié dans la figure 3.3, qui représente chacun des sous-domaines de la figure 3.2 de façon séparée. De chaque côté de la frontière entre sous-domaines l'un d'entre eux a un bord rectiligne et l'autre un bord irrégulier.

Cette asymétrie est identifiée comme étant la cause des valeurs de courant très différentes de chaque côté des lignes de séparation entre sous-domaines. L'effet est cumulatif et il est appréciable dès la première itération, pour le calcul du courant à l'ordre zéro ($\mathbf{Y}^{(0)}$), lors de l'application de la méthode pour un problème 3D, même pour des points très proches.

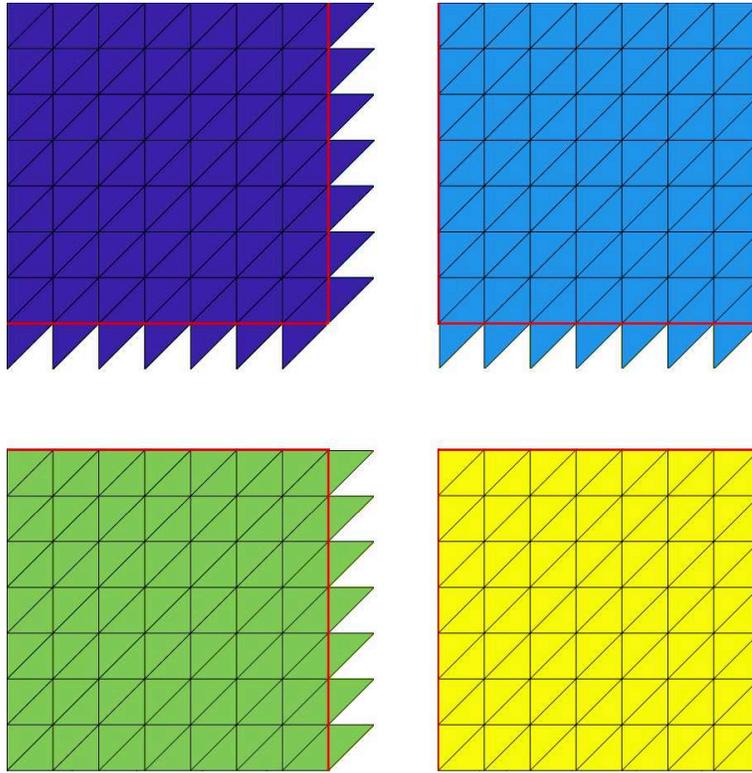


FIGURE 3.3 – Division en 4 sous-domaines séparés, représenté avec des fonctions RWG

La figure 3.4 montre le module de la composante principale du courant à différents ordres sur l'axe \hat{x} , pour une surface lisse parfaitement conductrice, de taille $1\lambda \times 2\lambda$. La surface, divisée en deux sous-domaines carrés et où la division entre sous-domaines se trouve autour de $x = 0$, est illuminée par une onde plane en polarisation verticale. Ici on peut apprécier le phénomène de non convergence lorsqu'aucun élargissement de sous-domaines n'est utilisé. Le numéro accompagnant SDIM indique l'ordre auquel correspond la courbe affichée et la valeur entre parenthèses ϵ_J , indique l'erreur relative commise, par rapport à l'inversion LU de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}$. Trois éléments sont à noter. D'abord, l'effet de bord artificiel introduit par la division en sous-domaines. De plus, l'asymétrie existante dans les valeurs de courant autour de la ligne de séparation de sous-domaines surtout lors des premières itérations. Pour finir, on observe le caractère cumulatif de ces deux phénomènes dans l'augmentation continue de l'erreur. En effet, l'addition de ces éléments provoque la non convergence de la méthode pour le problème électromagnétique 3D, dans les conditions d'échantillonnage à $\lambda/10$ pour la MdM.

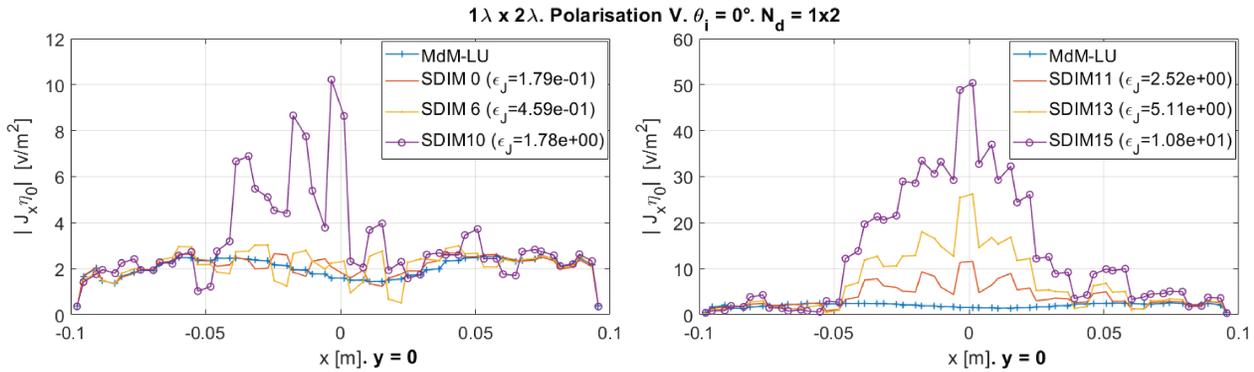


FIGURE 3.4 – Effet de bord et asymétrie du courant

3.2.3 Extension de la SDIM

L'élargissement de sous-domaines est la première technique appliquée dans le but de gérer l'effet de bord artificiel, en éliminant l'asymétrie introduite lors de la création des sous-domaines. Cette solution consiste à considérer pour le calcul des fonctions de base d'ordre k , des sous-domaines plus larges que ceux d'origine, créant un recouvrement entre sous-domaines adjacents. Ces nouveaux sous domaines sont construits avec des bords rectilignes. Sur eux, des fonctions élargies $\mathbf{Y}'_i^{(k)}$, sont calculées. Elles représentent les courants sur les blocs élargis. Ensuite afin d'obtenir les fonctions $\mathbf{Y}_i^{(k)}$, associées aux sous-domaines d'origine, une technique de troncature est appliquée, en considérant uniquement les valeurs liées aux arêtes contenues dans les blocs non élargis.

L'action combinée de ces deux techniques permet d'obtenir des fonctions de courants de sous-blocs dans lesquelles l'effet de bord a été éliminé. Les bords rectilignes et non irréguliers des blocs élargis, permettent d'obtenir des valeurs de courants similaires de chaque côté des frontières entre sous-domaines, améliorant la convergence de la méthode SDIM et permettant son application au problème électromagnétique 3D.

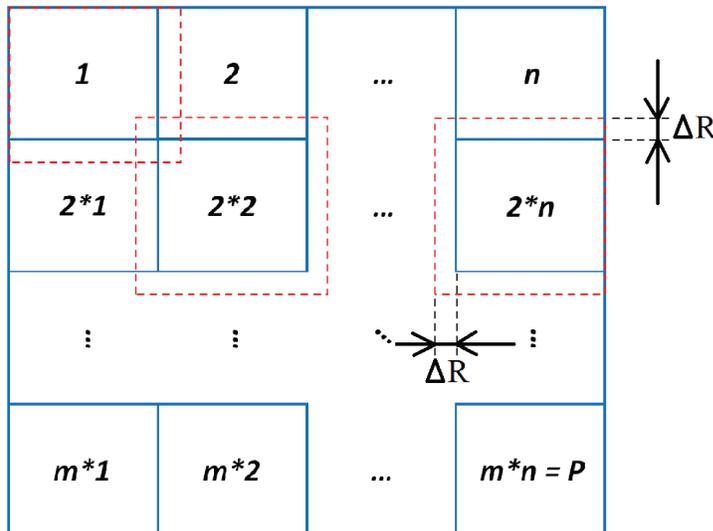


FIGURE 3.5 – Rallongement de sous-domaines

Le concept d'élargissement et de recouvrement de sous-domaines est illustré dans la figure 3.5. A cet effet, une bande de recouvrement de largeur ΔR est ajoutée à chaque sous-domaine. Cette bande existe uniquement à l'intérieur des limites de la surface considérée.

L'application du concept sur une surface discrétisée avec des triangles élémentaires, comme celle de la figure 3.2, est illustrée sur la figure 3.6. Les quatre sous-domaines dont la surface à été divisée, ainsi que l'élargissement réalisé pour chacun d'entre eux, sont représentés indépendamment. On peut apprécier ici que la valeur de ΔR est définie de forme discrète du fait de l'échantillonnage de la surface. Elle peut être déterminée en fonction du nombre des carrés, formés par une couple de triangles élémentaires, qui peuvent être placés de forme adjacente dans la dimension ΔR de la bande de recouvrement. Dans l'exemple montré, $\Delta R = 2d_e$, d_e étant le pas d'échantillonnage, mesuré comme la distance sur le plan xy entre deux points placés sur la même ligne ou sur la même colonne.

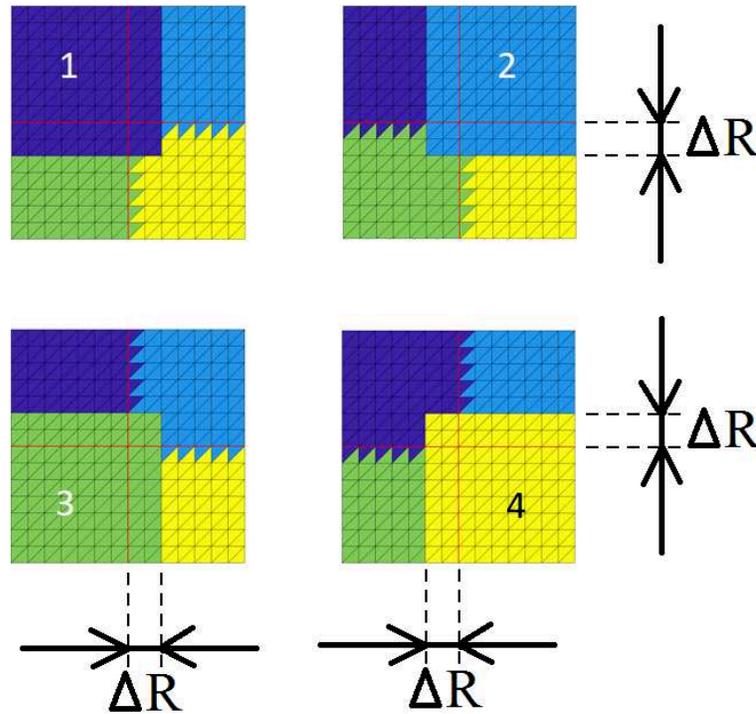


FIGURE 3.6 – Rallongement de sous-domaines avec des fonctions RWG

La première conséquence de l'élargissement des sous-domaines est la disparition des bords irréguliers, ce qui améliore le problème d'asymétrie des courants mentionné auparavant. De plus, si la taille du rallongement est assez large, les valeurs de courant à l'intérieur du sous-domaine d'origine seront plus précises lors de la première itération. En effet, la région proche du bord du sous-domaine élargi, dont l'effet de bord est plus fort, pourra être laissée en dehors du bloc d'origine après avoir tronqué les fonctions $\mathbf{Y}'_i^{(k)}$. Le point négatif de cette technique consiste en une augmentation de la complexité en espace mémoire et en temps de calcul avec ΔR , à cause du suréchantillonnage introduit. Alors, un compromis doit être trouvé afin de permettre la convergence avec le moins d'itérations et le plus rapidement possible, sans augmenter considérablement le besoin en espace mémoire. A ce propos, la taille du rallongement devient une autre variable à considérer lors de l'analyse de la convergence de la E-SDIM.

La figure 3.7 peut aider à comprendre la représentation mathématique de la procédure de rallongement et chevauchement de sous-domaines et ses conséquences sur les opérations à réaliser. Elle représente deux sous-domaines quelconques pour un problème 3D donné. Le symbole “prime” est utilisé pour dénoter les sous-domaines élargis. T représente le sous-domaine d’observation et S le sous-domaine source.

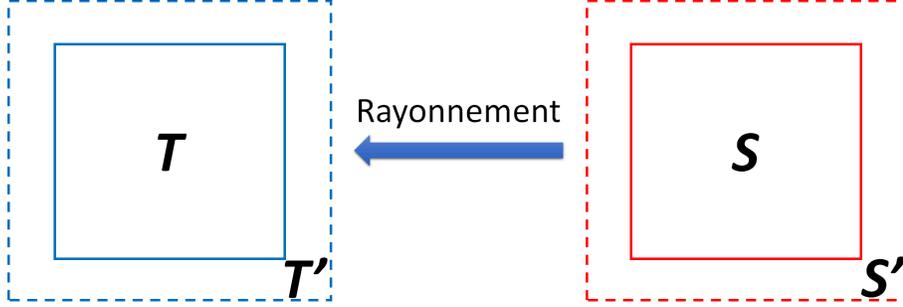


FIGURE 3.7 – Relation entre sous-domaines

Les sous-matrices impédances, utilisées pour le calcul des fonctions $\mathbf{Y}_i^{(0)}$, sont représentatives de chaque domaine. Ainsi, la matrice $\bar{\mathbf{Z}}_{T,T}$, de taille $N_T \times N_T$, correspond au sous-domaine T et $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}$, de taille $N_{T'} \times N_{T'}$ est associée au sous-domaine élargi T' , avec $N_{T'} > N_T$. Le calcul des fonctions d’ordre $k = 0$ est fait à partir de $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}$, comme le montre l’équation (3.14) :

$$\mathbf{Y}'_{T'}^{(0)} = \bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1} \mathbf{b}_{T'} \quad (3.14)$$

où $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1}$ est l’inverse de $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}$ et $\mathbf{b}_{T'}$ est le vecteur d’excitation associé au sous-domaine T' . $\mathbf{Y}'_{T'}^{(0)}$ représente la fonction d’ordre zéro du sous-domaine étendu T' . Ce vecteur, de taille $N_{T'} \times 1$, est tronqué pour obtenir la fonction $\mathbf{Y}_T^{(0)}$, utilisée dans la construction de $\mathbf{Y}^{(0)}$. Cette opération, représentée dans l’expression suivante par la lettre C , consiste à extraire de $\mathbf{Y}'_{T'}^{(0)}$ les N_T coefficients correspondants aux fonctions RWG du sous-domaine T .

$$\mathbf{Y}_T^{(0)} = C \left[\mathbf{Y}'_{T'}^{(0)} \right] \quad (3.15)$$

Pour déterminer les macro-fonctions d’ordre supérieur, l’analyse est plus complexe car elle implique aussi les sous-matrices de couplage, comme le montre l’expression (3.13). A partir de la figure 3.7, quatre relations de couplage sont envisageables : de S à T ou T' et de S' à T ou T' . Ces relations sont définies par les matrices de couplage : $\bar{\mathbf{Z}}_{T,S}$, $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S}$, $\bar{\mathbf{Z}}_{T,S'}$ et $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S'}$ respectivement. Les deux dernières ne sont pas considérées pour le calcul de $\mathbf{Y}^{(k)}$ car elles impliquent l’utilisation de $\mathbf{Y}'_{S'}^{(k-1)}$, qui, à cette étape, a déjà été tronquée pour obtenir $\mathbf{Y}_S^{(k-1)}$. Sa prise en compte serait une façon de transmettre vers les itérations d’ordre supérieur, l’effet de bord qu’on cherche précisément à minimiser. Alors, les sous-domaines sources sont toujours considérés comme des sous-domaines sans élargissement (S).

Le couplage entre S et T garde les mêmes limitations qui ont été analysées précédemment concernant l’asymétrie de valeurs de courant autour des limites entre sous-domaines et un effet de bord trop important.

Alors, cette relation de couplage n'est pas considérée, laissant comme seule possibilité $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S}$. Pour déterminer $\mathbf{Y}_T^{(k)}$ l'expression suivante, similaire à l'équation (3.15), est utilisée.

$$\mathbf{Y}_T^{(k)} = C \left[\mathbf{Y}'_{T'}^{(k)} \right] \quad (3.16)$$

où

$$\mathbf{Y}'_{T'}^{(k)} = -\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1} \sum_{S=1, S \neq T'}^P \bar{\mathbf{Z}}_{T',S} \mathbf{Y}_S^{(k-1)} \quad (3.17)$$

3.2.4 Complexité de la E-SDIM

Pour analyser la complexité de la méthode, on suppose que chaque bloc de la surface est décrit par un nombre identique d'inconnues N_0 , ou N_{0E} , si on fait référence au domaine élargi. La différence entre N_0 et N_{0E} est proportionnelle à ΔR . En supposant que la méthode converge après $k_{\text{E-SDIM}}$ itérations, la complexité CPU de la E-SDIM est décrite par l'expression suivante [22], [31] :

$$C_{\text{E-SDIM}} = P \{ [C_E + \mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{\text{E-SDIM}} [C_E + \mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{\text{E-SDIM}}(P-1)C_{E,0} \} \quad (3.18)$$

où P est le nombre total de sous-domaines. C_E est la complexité associée à l'inversion de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}$, égale à $\mathcal{O}(N_{0E}^3)$ si une inversion LU est utilisée. Le terme $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1}$, étant présent sur toutes les itérations, s'il peut être sauvegardé en mémoire lors du calcul de $\mathbf{Y}'_{T'}^{(0)}$ avec l'expression (3.14), la complexité de la méthode est réduite à :

$$C_{\text{E-SDIM}} = P \{ [C_E + \mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{\text{E-SDIM}} [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{\text{E-SDIM}}(P-1)C_{E,0} \} \quad (3.19)$$

Ici, la complexité C_E associée au calcul des fonctions $\mathbf{Y}'_{T'}^{(k)}$, a été éliminée. Le terme $C_{E,0}$ représente le coût en temps CPU du produit $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S} \mathbf{Y}_S^{(k-1)}$, $S \neq T$, qu'on trouve dans l'équation (3.17). Si aucune technique de compression matricielle n'est utilisée, la complexité de ce produit est égale à $\mathcal{O}(N_{0E}N_0)$. Reste à identifier le terme $\mathcal{O}(N_{0E}^2)$ qui représente la complexité des produits matrice-vecteur $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1} \mathbf{v}_{T'}$ dans les expressions (3.14) et (3.17). Le vecteur $\mathbf{v}_{T'}$ représente le vecteur d'excitation sur l'équation (3.14) où le résultat du produit $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S} \mathbf{Y}_S^{(k-1)}$, $S \neq T$ sur (3.17).

Une réécriture de l'expression (3.19) sous la forme :

$$C_{\text{E-SDIM}} = P \{ [\mathcal{O}(N_{0E}^3) + \mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{\text{E-SDIM}} [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{\text{E-SDIM}}(P-1)\mathcal{O}(N_{0E}N_0) \} \quad (3.20)$$

permet d'apprécier qu'en effet, les éléments les plus coûteux de l'algorithme correspondent à l'inversion des matrices impédance et les produits matrice-vecteur impliquant les matrices de couplage dans le calcul de macro-fonctions aux ordres supérieurs. Si on suppose que le nombre d'inconnues ajoutées par bloc est négligeable devant la valeur N_0 , alors $N_0 \approx N_{0E}$ et l'expression précédente peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{C}_{E\text{-SDIM}} \approx P \{ [\mathcal{O}(N_{0E}^3) + \mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{E\text{-SDIM}} [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{E\text{-SDIM}}(P-1)\mathcal{O}(N_{0E}^2) \} \quad (3.21)$$

qui, en termes de nombre total d'inconnues sur la surface N , et en considérant que $P \gg 1$ devient :

$$\mathbf{C}_{E\text{-SDIM}} \approx P \left\{ \left[\mathcal{O}\left(\frac{N^3}{P^3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P^2}\right) \right] + k_{E\text{-SDIM}} \left[\mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P^2}\right) \right] + k_{E\text{-SDIM}} P \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P^2}\right) \right\} \quad (3.22)$$

qui peut être réarrangée sous la forme :

$$\mathbf{C}_{E\text{-SDIM}} \approx \left[\mathcal{O}\left(\frac{N^3}{P^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P}\right) \right] + k_{E\text{-SDIM}} \left[\mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P}\right) \right] + k_{E\text{-SDIM}} \mathcal{O}(N^2) \quad (3.23)$$

Si on compare cette expression avec la complexité de l'inversion LU de la matrice impédance du problème ($\mathcal{O}(N^3)$), on comprend facilement l'intérêt de l'utilisation d'un nombre élevé de domaines, et d'une technique de compression matricielle comme la ACA, qui permet de diminuer la complexité en temps CPU associée au produit $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S} \mathbf{Y}_S^{(k-1)}$, $S \neq T$. Le critère d'efficacité de la E-SDIM par rapport à l'inversion LU de $\bar{\mathbf{Z}}$, ($1 + k_{E\text{-SDIM}} \ll P$), est applicable quand la condition $P \ll N_{0E}$ est vérifiée.

Une analyse similaire permet d'établir la complexité en espace mémoire de la méthode sous la forme [22], [31] :

$$\mathbf{M}_{E\text{-SDIM}} = P \{ \mathcal{O}(N_{0E}^2) + (P-1)M_{E,0} \} \quad (3.24)$$

avec $M_{E,0}$ étant la complexité en mémoire pour le stockage des matrices de couplage égale à $\mathcal{O}(N_{0E}N_0)$. $\mathcal{O}(N_{0E}^2)$ est celle associée aux matrices impédance. On observe que le besoin en mémoire est identique à celui de la Mdm.

Si les mêmes hypothèses que pour la complexité CPU sont faites, l'équation (3.24) peut être écrite comme :

$$\mathbf{M}_{E\text{-SDIM}} \approx P \{ \mathcal{O}(N_{0E}^2) + (P-1)\mathcal{O}(N_{0E}^2) \} \quad (3.25)$$

qui en fonction du nombre total d'inconnues devient :

$$\mathbf{M}_{E\text{-SDIM}} \approx P \left\{ \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P^2}\right) + (P-1)\mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P^2}\right) \right\} \quad (3.26)$$

et peut être reformulé comme :

$$\mathbf{M}_{\text{E-SDIM}} = \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P}\right) + (P - 1)\mathcal{O}\left(\frac{N^2}{P}\right) \quad (3.27)$$

On aperçoit à nouveau l'intérêt de l'utilisation d'un nombre élevé de sous-domaines afin de diminuer l'espace mémoire nécessaire au stockage des matrices impédance. Ceci implique que la partie la plus importante du stockage est dédiée aux matrices de couplage, ce qui prouve l'importance de la compression de ces matrices et justifie le choix d'appliquer la ACA pour diminuer aussi la complexité en mémoire de la E-SDIM.

3.3 Intégration de la méthode ACA

Comme il a déjà été mentionné, il est connu que la matrice impédance, résultant de l'application de la MdM dans la résolution de la EFIE en 3D, est une matrice dense, non singulière et sans déficience de rang du fait que la fonction de Green a un caractère non local. Ceci, accompagné d'une complexité en mémoire, temps de remplissage et du produit matrice-vecteur équivalant à $\mathcal{O}(N^2)$ et $\mathcal{O}(N^3)$ pour une inversion LU. Or, il peut s'avérer que sous certaines conditions les sous-matrices qui composent la matrice $\bar{\mathbf{Z}}$ sont des matrices de rang faible. Notamment les sous-matrices qui représentent des interactions entre éléments bien séparés. Ces matrices peuvent être représentées par le produit de matrices fortement compressées.

3.3.1 Formulation mathématique

La méthode ACA est une technique purement algébrique de compression de matrices de rangs faibles, dont le taux de compression est réputé être très important. Cette méthode a été introduite par Bebendorf en 2000 [32]. Elle a été utilisée à l'origine pour des applications statiques ou à basse fréquence avec des équations aux noyaux asymptotiquement lisses, avec une complexité $\mathcal{O}(N \log N)$. Plus récemment, la méthode a aussi été appliquée à des problèmes électromagnétiques de taille moyenne avec succès. Avec une complexité légèrement supérieure que pour les problèmes statiques ($\mathcal{O}(N^{4/3} \log N)$), la méthode est capable de produire des résultats très précis avec seulement une fraction de l'espace mémoire demandé par la MdM. Elle a aussi été combinée avec d'autres méthodes de résolution comme la CBFM. La méthode SDIM emploie également de la technique ACA pour le calcul des interactions faibles entre sous-blocs [22], [31], utilisée uniquement pour le problème 2D.

La nature purement algébrique de la ACA est l'un des principaux avantages de cette technique car son application ne demande aucune connaissance du problème physique, de l'équation utilisée ou de la fonction de Green, et à ce propos, la méthode peut être utilisée dans une grande variété d'applications. Il s'agit explicitement d'une décomposition LU pivotée révélatrice du rang ou, comme elle a été définie par d'autres auteurs, d'une élimination gaussienne tronquée et partiellement pivotée. Par conséquent, à la différence d'autres méthodes purement algébriques, comme la SVD (Singular Values Decomposition - Décomposition en Valeurs Singulières) tronquée, la décomposition QR ou la décomposition UV, il suffit d'une connaissance partielle de la matrice à compresser pour l'utilisation de la ACA.

Le principe de la méthode ACA repose sur le fait qu'une matrice $\bar{\mathbf{Z}}_{[m \times n]} \in \mathbb{C}_{[m \times n]}$ représentant l'interaction entre deux sous-blocs bien séparés, peut être de rang faible et alors peut-être approximée par une autre matrice $\tilde{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}$. Cette deuxième matrice, de rang r égal au rang effectif de $\bar{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}$, peut-être construite en utilisant la ACA, à partir du produit montré par l'équation suivante :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{[m \times n]} = \bar{\mathbf{U}}_{[m \times r]} \bar{\mathbf{V}}_{[r \times n]} = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_{i[m \times 1]} \mathbf{v}_{i[1 \times n]} \quad (3.28)$$

où $\bar{\mathbf{U}}_{[m \times r]}$ et $\bar{\mathbf{V}}_{[r \times n]}$ sont deux matrices rectangulaires denses, construites à partir des vecteurs colonne $\mathbf{u}_{i[m \times 1]}$ et ligne $\mathbf{v}_{i[1 \times n]}$. La méthode permet de calculer ces vecteurs par un schéma itératif, à partir des lignes et colonnes de $\bar{\mathbf{Z}}$. L'approximation de $\bar{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}$ par $\tilde{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}$ est faite en respectant un certain niveau de précision ϵ_{ACA} , défini à partir de la différence entre les deux matrice sous la forme :

$$\|\bar{\mathbf{R}}_{[m \times n]}\|_F = \|\bar{\mathbf{Z}}_{[m \times n]} - \tilde{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}\|_F \leq \epsilon_{ACA} \|\bar{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}\|_F \quad (3.29)$$

où $\bar{\mathbf{R}}$ est la matrice erreur et F fait référence à la norme de Frobenius ou euclidienne de la matrice, définie par l'équation (3.11). Il est évident que la construction de $\tilde{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}$ nécessite le calcul et le stockage de $r(m+n)$ éléments au lieu de $m \times n$ nécessaires pour $\bar{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}$. Alors, pour que la compression soit efficace, en termes d'espace mémoire, la condition $r \leq \min(m, n)$ doit être remplie.

Une paire de vecteurs $\mathbf{u}_{i[m \times 1]}$ et $\mathbf{v}_{i[1 \times n]}$ est calculée à chaque itération (i) de la méthode afin de construire $\bar{\mathbf{U}}_{[m \times r]}$ et $\bar{\mathbf{V}}_{[r \times n]}$. Pour cela, on sélectionne les lignes et colonnes de $\bar{\mathbf{Z}}_{[m \times n]}$ les plus impactants sur l'erreur, dans le but de la réduire continuellement. La procédure s'arrête une fois le critère de convergence atteint, représenté par l'expression (3.29). Il faut noter que ce critère demande la connaissance exacte de $\|\bar{\mathbf{R}}\|$ et de $\|\bar{\mathbf{Z}}\|$. Or, pour cela, il faudrait déterminer complètement la matrice impédance. Afin de faciliter l'implémentation efficace de la méthode, deux considérations sont faites. D'abord, la dernière paire de vecteurs $\mathbf{u}_{k[m \times 1]}$ et $\mathbf{v}_{k[1 \times n]}$ calculée lors de la k -ième itération, est considérée comme la plus impactante sur $\bar{\mathbf{R}}$ à ce stade, alors :

$$\|\bar{\mathbf{R}}^{(k)}\|_F = \|\bar{\mathbf{Z}} - \tilde{\mathbf{Z}}^{(k-1)}\|_F \approx \|\mathbf{u}_k\|_F \|\mathbf{v}_k\|_F \quad (3.30)$$

D'autre part, $\|\bar{\mathbf{Z}}\|_F$ peut-être approximée très précisément par $\|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k)}\| = \|\bar{\mathbf{U}}^{(k)} \bar{\mathbf{V}}^{(k)}\|_F$. Dans le but de réaliser un calcul efficace $\|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k)}\|_F$, l'expression suivante est appliquée :

$$\|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k)}\|_F^2 = \|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k-1)} + \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k\|_F^2 = \|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k-1)}\|_F^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} |\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_k| |\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T| + \|\mathbf{u}_k\|_F^2 \|\mathbf{v}_k\|_F^2 \quad (3.31)$$

Elle demande uniquement le calcul des deux derniers termes du membre de droite de l'expression à la fin de chaque itération. A l'aide des équations (3.30) et (3.31), la condition de convergence après chaque itération devient :

$$\|\mathbf{u}_k\|_F \|\mathbf{v}_k\|_F \leq \epsilon_{ACA} \|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k-1)}\|_F^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} |\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_k| \|\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T\| + \|\mathbf{u}_k\|_F^2 \|\mathbf{v}_k\|_F^2 \quad (3.32)$$

L'algorithme de la ACA est montré ci-après. Sa description est faite en utilisant le langage Matlab [107]. Deux vecteurs, $\mathbf{I} = [I_1, I_2, \dots, I_r]$ et $\mathbf{J} = [J_1, J_2, \dots, J_r]$, sont construits contenant respectivement, les indices de lignes et de colonnes de $\tilde{\mathbf{Z}}$, ordonnés selon le critère de sélection décrit dans l'algorithme. Ainsi, I_k note la I_k -ième colonne de $\tilde{\mathbf{Z}}$, utilisée dans la construction de la k -ième colonne de la matrice $\tilde{\mathbf{U}}^{(k)}$, égale au vecteur \mathbf{u}_k . De façon similaire sont liés les éléments J_k , la J_k -ième ligne de $\tilde{\mathbf{Z}}$ et \mathbf{v}_k , \mathbf{v}_k étant la k -ième ligne de la matrice $\tilde{\mathbf{U}}^{(k)}$.

Première itération, $k = 1$:

1 - Déterminer l'indice de la première ligne $\mathbf{I}(1) : I_1 = 1$ (optionnel) et initialiser $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{0}}$.

2 - Initialiser la I_1 -ième ligne de la matrice erreur approximée : $\tilde{\mathbf{R}}(I_1, :) = \tilde{\mathbf{Z}}(I_1, :)$.

3 - Déterminer l'indice de la première colonne $J_1 : |\tilde{\mathbf{R}}(I_1, J_1)| = \max_j (|\tilde{\mathbf{R}}(I_1, j)|)$.

4 - Déterminer la première ligne $\tilde{\mathbf{V}}(1, :) : \mathbf{v}_1 = \tilde{\mathbf{R}}(I_1, :)/\tilde{\mathbf{R}}(I_1, J_1)$.

5 - Initialiser la J_1 -ième colonne de la matrice erreur approximée : $\tilde{\mathbf{R}}(:, J_1) = \tilde{\mathbf{Z}}(:, J_1)$.

6 - Déterminer la première colonne $\tilde{\mathbf{U}}(:, 1) : \mathbf{u}_1 = \tilde{\mathbf{R}}(:, J_1)$

7 - Calculer $\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2$ pour l'itération actuelle : $\|\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}\|_F^2 = \|\mathbf{u}_1\|_F^2 \|\mathbf{v}_1\|_F^2$.

8 - Déterminer l'indice de la prochaine ligne $I_2 : |\tilde{\mathbf{R}}(I_2, J_1)| = \max_i (|\tilde{\mathbf{R}}(i, J_1)|), i \neq I_1$.

k -ième itération, $k > 1$:

9 - Actualiser la I_k -ième ligne de la matrice erreur approximée : $\tilde{\mathbf{R}}(I_k, :) = \tilde{\mathbf{Z}}(I_k, :) - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{u}_l(I_k) \times \mathbf{v}_l$.

10 - Déterminer l'indice de la k -ième colonne $J_k : |\tilde{\mathbf{R}}(I_k, J_k)| = \max_j (|\tilde{\mathbf{R}}(I_k, j)|), j \notin \mathbf{J}(1 : k-1)$.

11 - Déterminer la k -ième ligne $\tilde{\mathbf{V}}(k, :) : \mathbf{v}_k = \tilde{\mathbf{R}}(I_k, :)/\tilde{\mathbf{R}}(I_k, J_k)$.

12 - Actualiser la J_k -ième colonne de la matrice erreur approximée : $\tilde{\mathbf{R}}(:, J_k) = \tilde{\mathbf{Z}}(:, J_k) - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{u}_l \times \mathbf{v}_l(J_k)$.

13 - Déterminer la k -ième colonne $\tilde{\mathbf{U}}(:, k) : \mathbf{u}_k = \tilde{\mathbf{R}}(:, J_k)$.

14 - Calculer $\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2$ pour l'itération actuelle : $\|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k)}\|_F^2 = \|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k-1)}\|_F^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} |\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_k| \|\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T\| + \|\mathbf{u}_k\|_F^2 \|\mathbf{v}_k\|_F^2$.

15 - Vérifier le critère de convergence : $\|\mathbf{u}_k\|_F \|\mathbf{v}_k\|_F \leq \epsilon_{ACA} \|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k)}\|_F^2$.

16 - Déterminer l'indice de la prochaine ligne $I_{k+1} : |\tilde{\mathbf{R}}(I_{k+1}, J_1)| = \max_i (|\tilde{\mathbf{R}}(i, J_1)|), i \notin \mathbf{I}(1 : k)$.

On observe que seulement une partie de $\bar{\mathbf{Z}}$ doit être calculée pour construire la matrice approximée $\tilde{\mathbf{Z}}$. Ce qui peut potentiellement rendre la méthode très efficace en termes de compression. Le taux de compression τ , défini par l'expression suivante, est utilisé, pour évaluer sa performance en termes d'espace mémoire.

$$\tau = 1 - \frac{r(m+n)}{mn} \quad (3.33)$$

Si $r \ll (m, n)$, alors, le taux de compression peut-être très important. Par contre, un autre critère plus restrictif à considérer est le temps de calcul. La complexité CPU de la méthode pour le remplissage de la matrice est $\mathcal{O}(r^2(m+n))$, contre $\mathcal{O}(mn)$ pour la MdM. En termes du temps de calcul, une valeur maximale r_{max} peut-être définie, au-dessus de laquelle le remplissage de la matrice en utilisant la ACA serait plus lent que celui en utilisant la MdM.

$$r_{max} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \quad (3.34)$$

La substitution de l'expression précédente dans l'équation (3.33) permet de définir aussi le taux de compression minimal, τ_{min} , pour considérer la technique également comme une méthode d'accélération.

$$\tau_{min} = 1 - \sqrt{\frac{m+n}{mn}} \quad (3.35)$$

En prenant le cas où $m = n$, ($r = \sqrt{\frac{m}{2}}$), dont le taux de compression minimal est donné par l'expression suivante, il est facile de se rendre compte que le critère peut-être contraignant quand des grandes matrices sont traitées.

$$\tau_{min} = 1 - \sqrt{\frac{2}{m}} \quad (3.36)$$

3.3.2 Complexité de la E-SDIM + ACA

A partir de l'équation (3.21) il est possible de dériver une expression pour la complexité en temps CPU pour la E-SDIM qui prend en compte la compression des matrices de couplage par la ACA sous la forme [22], [31] :

$$\mathbf{C}_{\text{E-SDIM} + \text{ACA}} \approx P \{ [\mathcal{O}(N_{0E}^3) + \mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{\text{E-SDIM}} [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + k_{\text{E-SDIM}}(P-1)(1-\bar{\tau})\mathcal{O}(N_{0E}^2) \} \quad (3.37)$$

En effet, on trouve dans cette expression les coûts associés aux différents étapes de la méthode. La seule différence se trouve dans le terme additionnel $(1 - \bar{\tau})$, qui multiplie l'élément dénotant la complexité des

produits $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S} \mathbf{Y}_S^{(k-1)}$, $S \neq T$, $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S}$ étant les matrices de couplage. $\bar{\tau}$ représente le taux de compression moyen, calculé comme la moyenne des taux de compression de toutes les matrices de couplage, pouvant aller de zéro, pour les matrices de couplage entre blocs adjacents, à 0.999, pour celles entre blocs bien éloignés.

En supposant la condition $P \gg 1$, qui implique $(P - 1) \approx P$ la complexité peut être réécrite de façon similaire à l'expression (3.23), en fonction du nombre total d'inconnues, sous la forme :

$$\mathbf{C}_{\text{E-SDIM} + \text{ACA}} \approx \left[\mathcal{O} \left(\frac{N^3}{P^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{N^2}{P} \right) \right] + k_{\text{E-SDIM}} \left[\mathcal{O} \left(\frac{N^2}{P} \right) \right] + k_{\text{E-SDIM}} (1 - \bar{\tau}) \mathcal{O}(N^2) \quad (3.38)$$

Si on compare cette expression avec la complexité CPU de l'inversion LU de $\bar{\mathbf{Z}}$, on aperçoit comment le fait de décomposer la surface en un grand nombre de blocs, minimise la complexité dû à l'inversion de matrices par un facteur P^2 , et la transforme en des produits matrice-vecteur, qui sont accélérés grâce à la compression des matrices de couplage. Cette compression sera d'autant plus importante que le nombre de domaines sera grand, ce qui montre la validité de la méthode dans ce contexte.

Pour la complexité en mémoire, en partant de l'équation (3.25) et en introduisant à nouveau le taux de compression moyen des matrices de couplage, on arrive à l'expression suivante :

$$\mathbf{M}_{\text{E-SDIM} + \text{ACA}} \approx P \left\{ \mathcal{O}(N_{0E}^2) + (P - 1)(1 - \bar{\tau}) \mathcal{O}(N_{0E}^2) \right\} \quad (3.39)$$

où on trouve le même terme $(1 - \bar{\tau})$ qui affecte la complexité de stockages des matrices de couplage. Pour des problèmes de taille moyenne, si le nombre de blocs P est suffisamment grand, des taux de compression moyen de l'ordre de 85% – 90% sont observés. Ces valeurs peuvent être surpassées dans des problèmes de grande taille. Cette complexité peut être exprimée en fonction du nombre total d'inconnues sous la forme :

$$\mathbf{M}_{\text{E-SDIM} + \text{ACA}} = \mathcal{O} \left(\frac{N^2}{P} \right) + (P - 1)(1 - \bar{\tau}) \mathcal{O} \left(\frac{N^2}{P} \right) \quad (3.40)$$

3.4 Étude de la compressibilité avec un schéma E-SDIM + ACA

L'étude de la compressibilité permet de savoir dans quelle mesure le problème initial peut être compressé en utilisant la E-SDIM intégrée à la ACA et déterminer la taille maximale du problème à traiter en fonction des ressources disponibles. On commence cette analyse par la première étape affectant la taille initiale du problème qui est l'élargissement. En effet, toutes les relations de complexité obtenues auparavant font référence au nombre total d'inconnues N ou au nombre moyen d'inconnues par bloc $N_{0E} = \frac{N}{P}$. Ces quantités sont mesurées après élargissement. Alors, il est nécessaire de connaître comment les différentes variables de configuration affectent l'augmentation du nombre d'inconnues par rapport au problème d'origine. Il peut être affirmé que la relation entre le nombre initial d'inconnues et celui après l'élargissement est sous la forme :

$$N = N_{\text{MdM}} + N_{\text{E}} \quad (3.41)$$

où N_{MdM} est la quantité initiale et N_{E} représente le nombre total d'inconnues additionnelles. Dans le cas d'une surface carrée (les relations à venir peuvent être facilement déduites pour une surface rectangulaire quelconque), posée sur le plan xy d'un repère cartésien et échantillonnée avec un nombre de sommets identique selon les deux directions ($N_x = N_y$), le nombre total d'inconnues est :

$$N_{\text{MdM}} = 3N_x^2 - 8N_x + 5 \quad (3.42)$$

Le nombre d'inconnues ajoutées par l'élargissement peut être déterminé par l'expression :

$$N_{\text{E}} = (P - \sqrt{P})(12N_R(N_P - 1) - 4N_R - 2(N_P - 1)) + 12PN_R^2 - 24\sqrt{P}\Delta R^2 + 12N_R^2 \quad (3.43)$$

où N_P^2 est le nombre des sommets utilisés pour échantillonner un bloc supposé carré et N_R est le nombre de mailles considérées dans l'élargissement. Cette expression est obtenue en déterminant le nombre des bords élargis sur la surface. Ainsi, les sous-domaines aux coins de la surface ont deux bords élargis, le reste des blocs aux bord de la surface en ont trois et les sous-domaines à l'intérieur quatre. Reste à déterminer le nombre de fonctions ajoutées par bord élargi, qui est approximativement $3\Delta RN_P$.

La relation entre N_x et N_P est donnée par l'expression suivante :

$$N_P - 1 = \frac{N_x - 1}{\sqrt{P}} \quad (3.44)$$

$N_x - 1$ correspond alors au nombre des segments utilisés sur une ligne ou sur une colonne d'échantillonnage de la surface et $N_P - 1$ représente la même quantité sur un bloc. \sqrt{P} correspond au nombre de blocs sur une ligne ou sur une colonne. A cette étape, on peut définir le taux d'élargissement du problème sous la forme :

$$\tau_e = \frac{N}{N_{\text{MdM}}} = 1 + \frac{N_{\text{E}}}{N_{\text{MdM}}} \quad (3.45)$$

où on vérifie que le taux d'augmentation du nombre d'inconnues est inversement proportionnel à la taille initiale du problème et directement proportionnel au nombre des blocs et à la taille de l'élargissement. Ceci prouve l'intérêt d'utiliser la méthode pour des problèmes de grande taille et de maintenir la valeur de ΔR la plus petite possible. Par contre, d'un point de vue global, l'effet du nombre de sous-domaines ne peut être analysé qu'après la prise en compte du reste des étapes.

L'utilisation de la ACA dans la compression des matrices de couplage entre blocs suffisamment éloignés a permis l'introduction du concept du taux de compression moyen des matrices de couplage. On peut redéfinir une grandeur similaire de façon générale pour inclure l'effet des matrices impédance non compressées, sous

la forme :

$$\tau_g = \frac{1}{P^2} \sum_{i=1, j=1}^P \tau_{i,j} \quad (3.46)$$

où P^2 représente le nombre total de sous-matrices du problème. $\tau_{i,j}$ peut alors prendre deux valeurs différentes : $\tau_{nc} = 0$ pour les cas des matrices non compressées ou $\bar{\tau}_c \approx 0.98$ qui est le taux de compression moyen des matrices compressées pour un problème de taille moyenne, pouvant aller jusqu'à 0.99 pour ceux de grande taille. A cet effet, l'expression (3.46) peut être réécrite comme

$$\tau_g = \frac{N_{zc} \bar{\tau}_c}{P^2} \quad (3.47)$$

N_{zc} étant le nombre des matrices qui peuvent être compressées dans le problème. Pour déterminer cette quantité on suit la relation

$$N_{zc} = P^2 - N_{znc} \quad (3.48)$$

où N_{znc} indique le nombre de sous-matrices non compressibles du problème. Ce nombre est constitué par le nombre de matrices impédances égal à P et les matrices de couplage entre blocs adjacents, qui peut être exprimé sous la forme :

$$N_{znc} = 8P - 12\sqrt{P} + 4 \quad (3.49)$$

Il est simple de vérifier que la relation $\frac{N_{znc}}{P^2}$ diminue avec l'augmentation du nombre de domaines. Alors, la proportion de matrices compressibles dans un problème donné augmente avec l'augmentation du nombre de blocs utilisés et la valeur de N_{zc} tend de façon asymptotique vers P^2 .

A partir des expressions obtenues on peut définir une taille équivalente du problème sous la forme :

$$N_{eq} = \tau_e (1 - \tau_g) N_{Mdm} \quad (3.50)$$

Pour des valeurs fixées de ΔR et N_{Mdm} cette expression décrit une courbe comme celle affichée sur la figure 3.8, ce qui montre qu'il existe une valeur optimale de configuration afin de garantir une compression maximale.

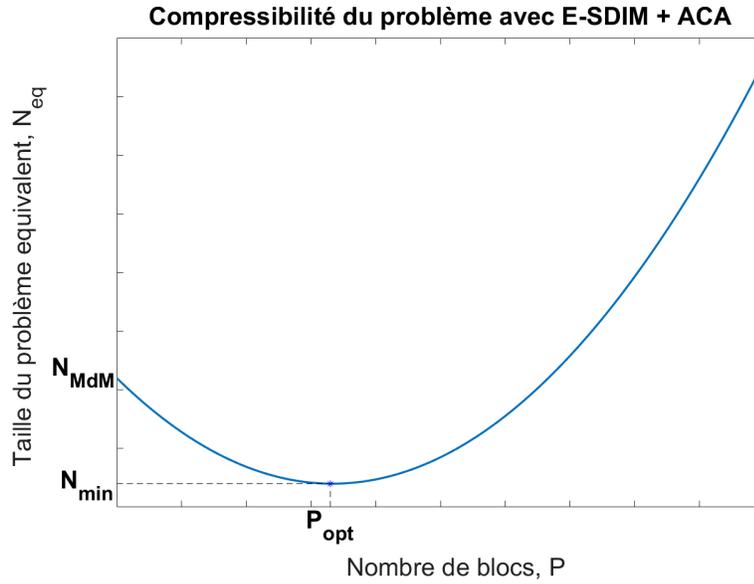


FIGURE 3.8 – Compressibilité avec un schéma E-SDIM + ACA

3.5 Validation des résultats : cas d'une surface lisse

3.5.1 E-SDIM

La E-SDIM a été testée pour le problème de la diffraction d'une onde plane par une surface carrée lisse parfaitement conductrice. Les résultats du calcul du courant de surface, de la SER et de la phase du champ diffracté sont comparés à ceux obtenus par une inversion LU de la matrice impédance, issue de l'application de la MdM. Une surface de $36\lambda^2$ ($6\lambda \times 6\lambda$) est considérée, illuminée par une onde plane à 3 GHz. L'échantillonnage est fait de manière similaire à celui montré sur la figure 3.9, avec une taille maximale des arêtes de $\lambda/10$. L'angle ϕ_i est fixé à 0° et l'angle d'incidence θ_i à été fixé pour les valeurs suivantes : 0° , 15° , 30° , 45° et 60° . Les deux polarisations, horizontale et verticale, sont considérées.

Concernant la division en sous-domaines de la surface, la forme des domaines est rectangulaire dans tous les cas. Lors des simulations, la surface a été divisée de la façon suivante : 1×2 , 1×3 , 1×4 , 2×2 , 2×3 , 2×4 , 3×3 , 3×4 et 4×4 sous-domaines. Ceci équivaut à 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 et 16 sous-domaines (P). Les simulations ont été faites avec une taille de rallongement uniforme ΔR . Cette variable, paramétrée en termes de nombre d'arêtes, horizontales ou verticales, est égale à 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 et 15, équivalant à une distance comprise entre 0.07λ et 1.06λ avec un pas de 0.14λ .

Pour les simulations, le critère de convergence $\|\mathbf{a}^{(k)} - \mathbf{a}^{(k-1)}\| / \|\mathbf{a}^{(k-1)}\| < \epsilon_{SDIM} = 0.01$, introduit par l'expression (3.10) est utilisé.

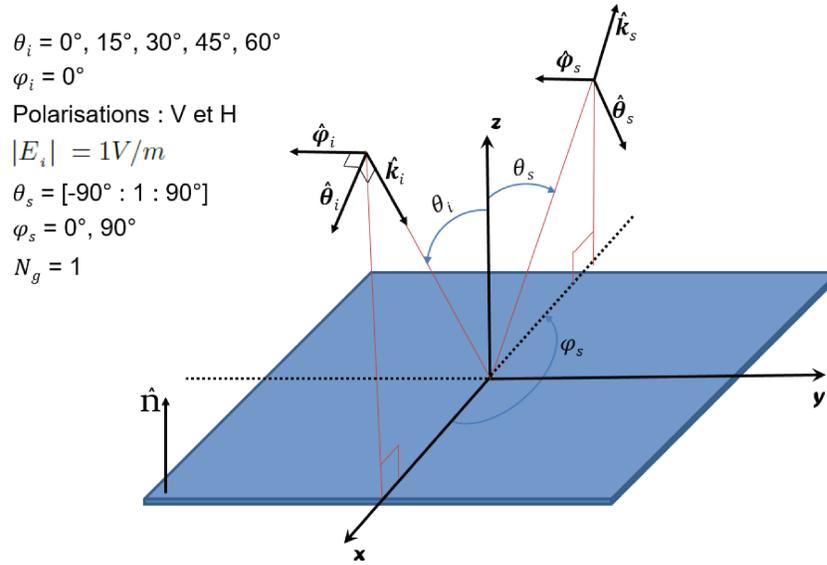


FIGURE 3.9 – Représentation géométrique du scénario utilisé dans les simulations.

Les valeurs du courant surfacique ont été obtenues pour chacune des combinaisons des paramètres mentionnés auparavant. Du fait de la similarité du comportement des résultats, seuls certains d'entre eux sont présentés dans ce rapport. La table 3.1 affiche les scénarios retenus. Pour les figures de la SER et la phase du champ diffracté, les composantes en co-polarisation et en polarisation croisée sont montrées.

Tableau 3.1 – Contextes montrés dans les figures de la section

Division	ΔR	Polarisation	θ_i	Figures
1×2	0.21λ	V	0°	3.10, 3.17, 3.23, 3.27
1×2	0.92λ	V	0°	3.11, 3.18
3×3	0.21λ	V	0°	3.12, 3.19, 3.24, 3.28
3×3	0.92λ	V	0°	3.13, 3.20
1×2	0.21λ	H	0°	3.14, 3.25, 3.29
1×2	0.92λ	H	0°	3.15, 3.21
1×2	0.21λ	V	$15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$	3.16, 3.22, 3.26, 3.30

3.5.1.1 Courant surfacique

Les graphiques montrent les valeurs d'amplitude et de phase de la composante principale du courant sur les axes centraux de la surface. La précision des valeurs du courant à chaque itération, qui est donnée dans la légende des graphiques, est évaluée par l'expression suivante :

$$\epsilon_J = \text{norm}(\mathbf{J}_{SDIM}^{(k)} - \mathbf{J}_{LU}) / \text{norm}(\mathbf{J}_{LU}) \quad (3.51)$$

où \mathbf{J} représente le vecteur du courant surfacique à trois composantes, sur chaque triangle dont la géométrie a été discrétisée et “norm” fait référence à la norme Euclidienne d’une matrice, donnée par l’équation 3.11. La valeur de ΔR , ainsi que le nombre et la forme des domaines, se sont avérés être les paramètres les plus influents sur la convergence de la méthode. La figure 3.10 montre le comportement du courant sur une surface divisée en deux sous-domaines avec $\Delta R = 0.21\lambda$. On observe la convergence après quatre itérations et la précision de chaque courbe par rapport aux valeurs données par la MdM avec une inversion LU. Le numéro qui accompagne le nom de la méthode indique l’itération. Le numéro le plus grand indique l’ordre de convergence.

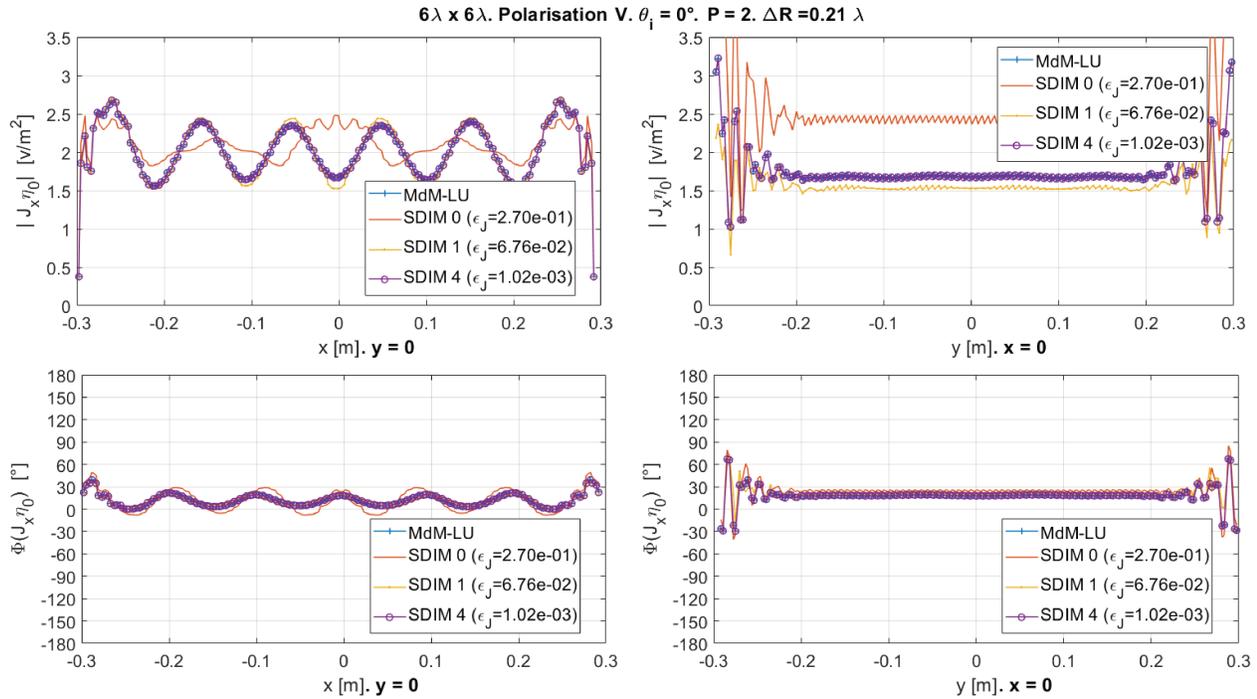


FIGURE 3.10 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d’une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane avec une polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. $\epsilon_{SDIM} = 0.01$, $N_g = 1$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.21\lambda$.

Sur la figure 3.11 on observe que dans les graphiques à gauche, la courbe E-SDIM0 permet d’apprécier le point de séparation des domaines. Elle montre que pour une valeur de $\Delta R = 0.92\lambda$ la convergence est plus rapide (2 itérations) et la précision est meilleure. Il n’est plus possible de voir sur la courbe $E - SDIM 0$ le point de séparation entre les sous-domaines. Ces deux figures permettent d’apprécier que la convergence s’améliore pour les valeurs de ΔR s’approchant de λ .

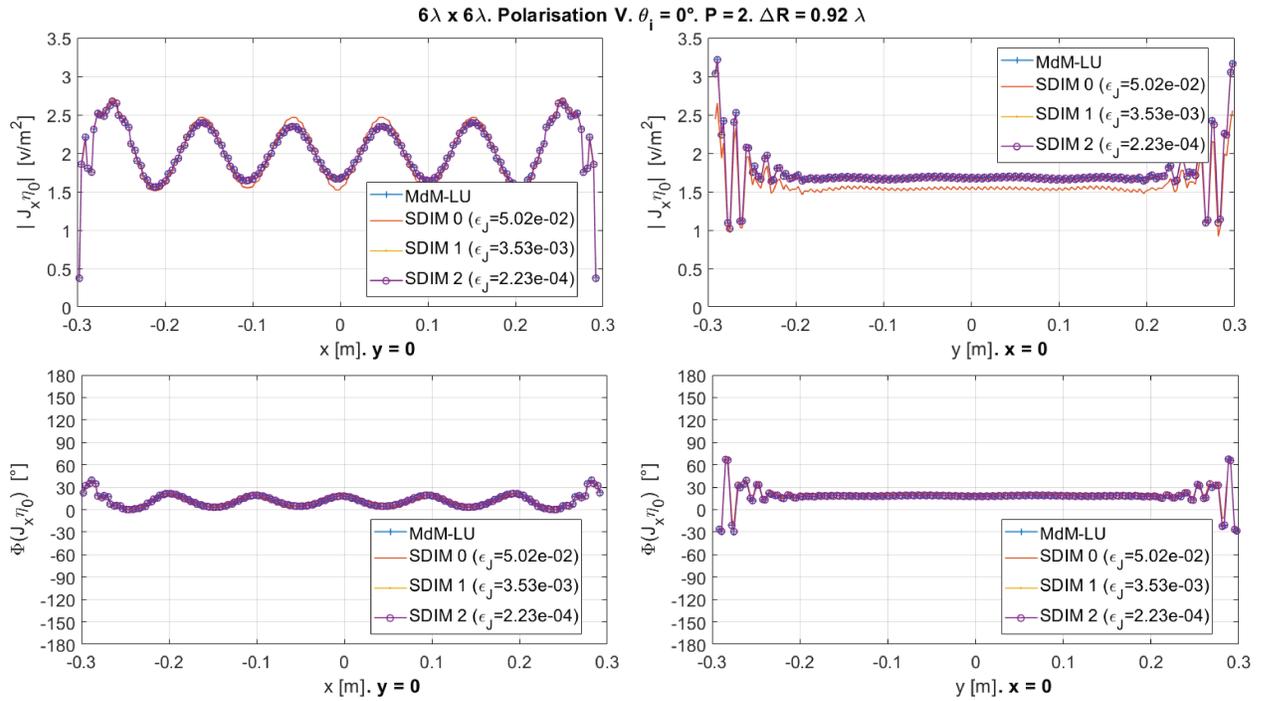


FIGURE 3.11 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.10 mais avec $\Delta R = 0.92 \lambda$.

Les figures 3.12 et 3.13 permettent de faire la même analyse pour le cas d'une surface divisé en 9 domaines en considérant aussi deux tailles d'élargissement différentes.

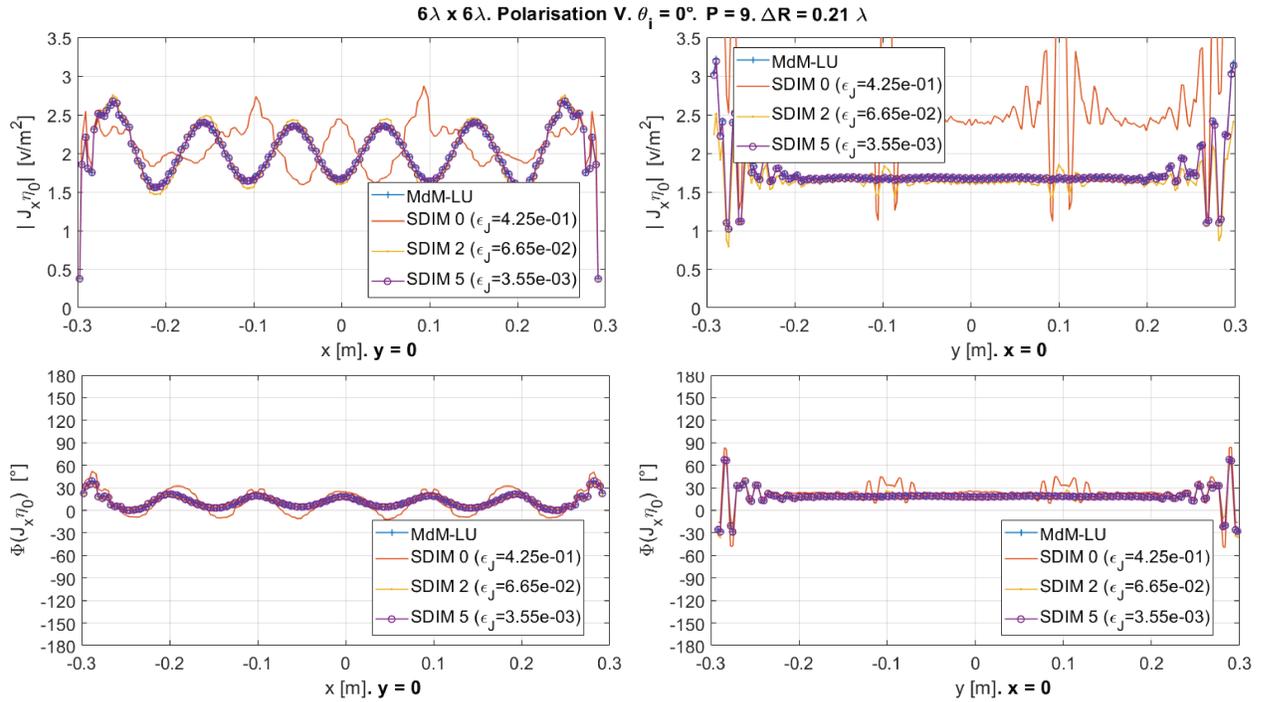


FIGURE 3.12 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.10 mais avec une division en 3×3 sous-domaines.

On constate une augmentation de l'ordre de convergence avec celle du nombre de sous-domaines. L'augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour la convergence est expliquée par l'augmentation aussi du nombre de discontinuités sur le courant surfacique qui doivent être corrigées.

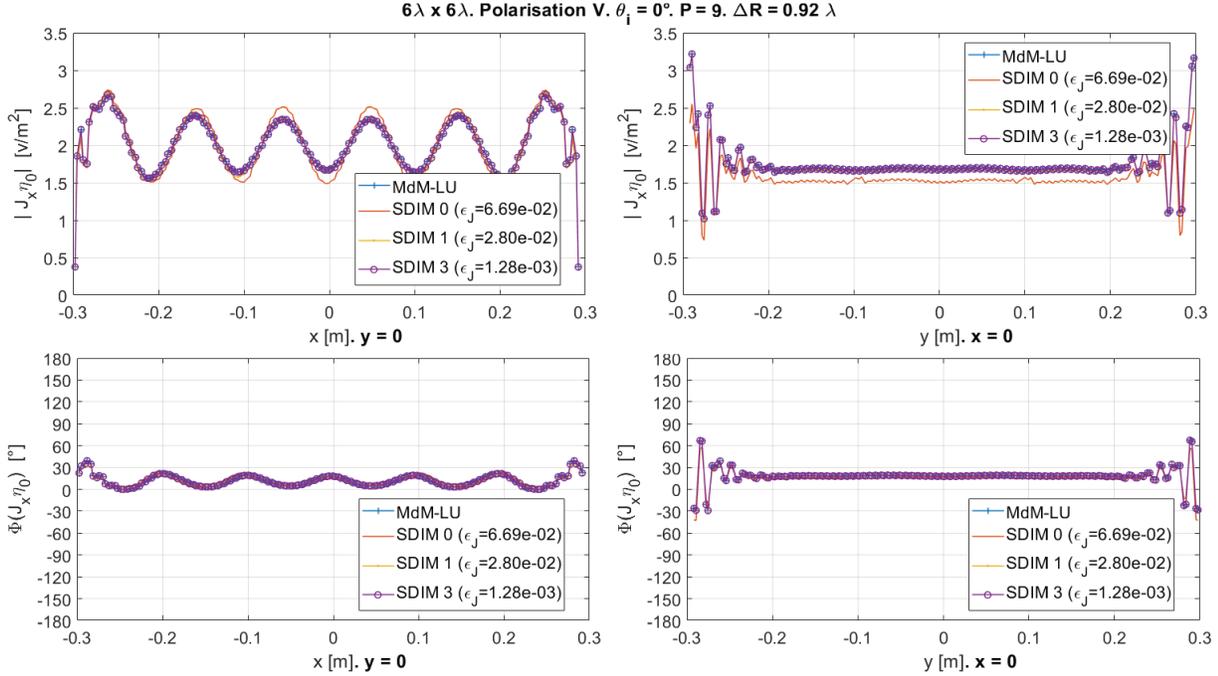


FIGURE 3.13 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.12 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$.

Un autre facteur important est la polarisation. Pour les mêmes conditions d'onde incidente et division en sous-domaines, la méthode montre une corrélation entre l'ordre de convergence et la polarisation de l'onde incidente. En considérant une surface divisée en deux sous-domaines, ceci est observable sur les figures 3.14, pour un élargissement $\Delta R = 0.21\lambda$, et 3.15 avec $\Delta R = 0.92\lambda$. Cette relation, qui est décrite plus tard dans ce rapport, détermine l'une des caractéristiques les plus importantes de la méthode : la forme des sous-domaines.

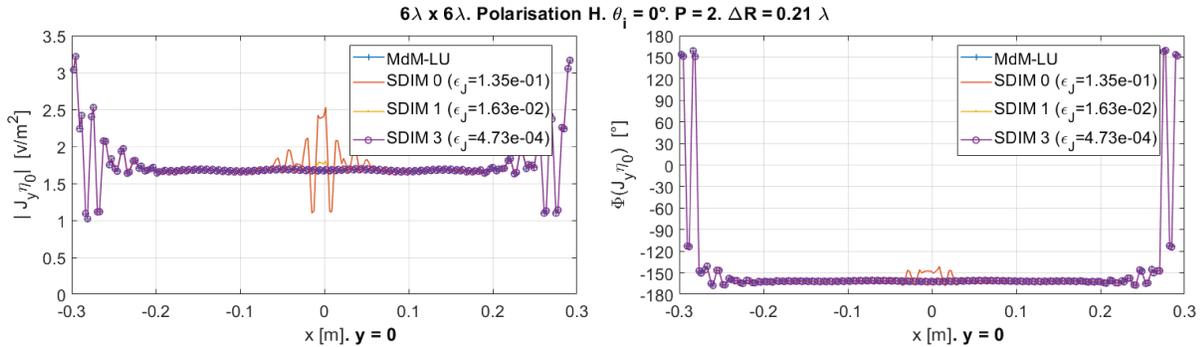


FIGURE 3.14 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.10 mais avec une incidence avec une polarisation horizontale.

Les figures 3.14 et 3.15 montrent que pour le cas d'une onde de polarisation horizontale la méthode

converge avec une itération de moins et avec une meilleure précision que pour les cas similaires avec une polarisation verticale, montrés sur les figures 3.10 et 3.11.

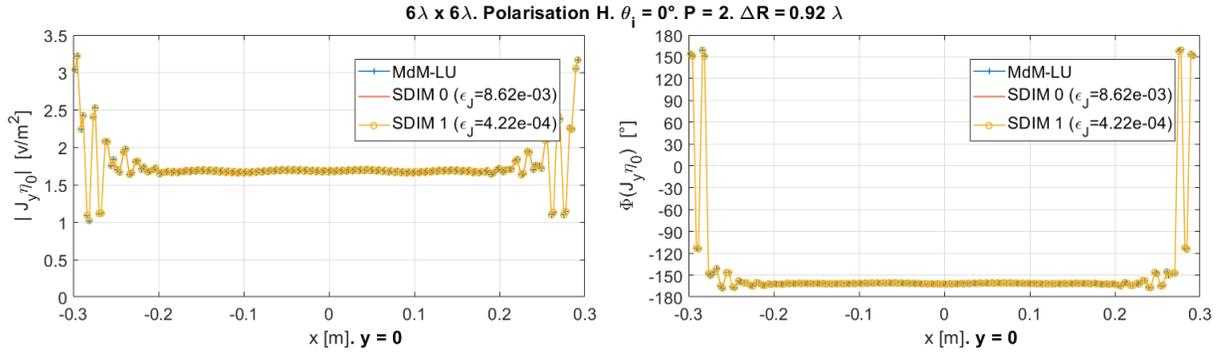


FIGURE 3.15 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.14 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$.

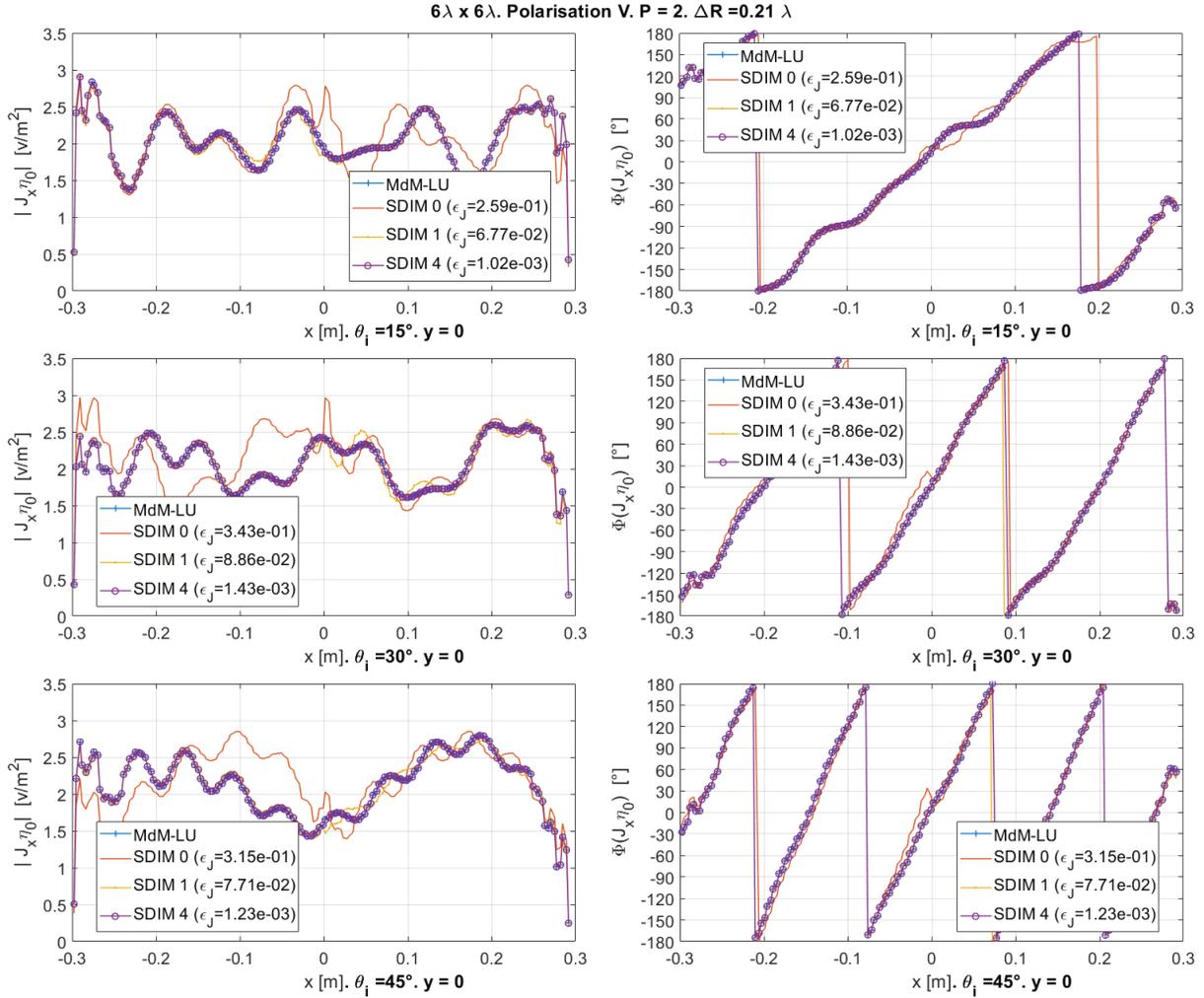


FIGURE 3.16 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_x \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 15^\circ$ (en haut), $\theta_i = 30^\circ$ (au centre), $\theta_i = 45^\circ$ (en bas), $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.21\lambda$.

L'angle d'incidence a un effet moins important sur l'ordre de convergence et la précision. La figure précédente, en complément de la figure 3.10, permet de valider cette conclusion. Elle montre le courant de surface sur l'axe x , pour trois angles d'incidence différents, en gardant inchangées les autres variables. Les trois cas illustrés convergent lors de la quatrième itération, en gardant des précisions très similaires par rapport au modèle MdM-LU. Le point de séparation des sous-domaines est encore appréciable à l'ordre zéro.

L'évaluation de la précision des résultats du calcul du courant surfacique permet d'affirmer qu'on se trouve en présence d'une méthode rigoureuse, bien adaptée aux caractéristiques du problème traité.

3.5.1.2 Surface Équivalente Radar et champ diffracté en champ lointain

L'analyse des résultats obtenus dans le calcul de la SER et du champ diffracté en zone de champ lointain constitue une étape importante dans la validation de la précision de la méthode. A ce propos, l'information de phase du champ diffracté, ainsi que la SER sont les deux éléments à retenir. Leur précision a été évaluée à chaque itération (k) par les deux expressions suivantes :

$$\text{norm}(\boldsymbol{\sigma}_{SDIM_{ij}}^{(k)} - \boldsymbol{\sigma}_{LU_{ij}}) / \text{norm}(\boldsymbol{\sigma}_{LU_{ij}}) \quad (3.52)$$

$$\text{norm}(\boldsymbol{\rho}_{cd_{SDIM_{ij}}}^{(k)} - \boldsymbol{\rho}_{cd_{LU_{ij}}}) / \text{norm}(\boldsymbol{\rho}_{cd_{LU_{ij}}}) \quad (3.53)$$

où, ij indiquent les composantes VV, VH, HV et HH de la matrice de SER $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$. $\bar{\boldsymbol{\rho}}_{cd}$ est matrice de diffraction, définie par l'expression suivante (1.99) :

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_{cd} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cd_{\theta\theta}} & \boldsymbol{\rho}_{cd_{\theta\phi}} \\ \boldsymbol{\rho}_{cd_{\phi\theta}} & \boldsymbol{\rho}_{cd_{\phi\phi}} \end{bmatrix} = 2r\sqrt{\pi} \begin{bmatrix} \frac{E_{0s}^\theta}{E_{0i}^\theta} & \frac{E_{0s}^\theta}{E_{0i}^\phi} \\ \frac{E_{0s}^\phi}{E_{0i}^\theta} & \frac{E_{0s}^\phi}{E_{0i}^\phi} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

de sorte que $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = ||\bar{\boldsymbol{\rho}}_{cd}||^2$. Alors, les vecteurs $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$ et $\boldsymbol{\rho}_{cd}^{(k)}$, sont formés par les valeurs prises en θ_s considéré. Il faut noter qu'à différence du courant, pour lequel l'analyse de la précision est réalisée sur la totalité du vecteur, l'erreur sur le coefficient de diffraction complexe est calculée sur chacune de ses composantes.

Les figures 3.17 et 3.18 montrent les valeurs de la SER et de la phase du champ diffracté pour une incidence normale, en considérant deux tailles d'élargissement de sous-domaines différentes, pour une surface divisée en 2 sous-domaines. Ces deux figures représentent les mêmes cas d'étude que sur les figures 3.10 et 3.11 respectivement. Comme il a été expliqué auparavant, la convergence est atteinte plus rapidement lorsque $\Delta R \approx \lambda$. Il est remarqué que l'erreur de précision de la SER par rapport à celle du coefficient de diffraction $\boldsymbol{\rho}_{cd}$ et du courant de surface est moins importante pour le cas de la co-polarisation et qu'elle est similaire pour la polarisation croisée. Alors, en fonction de l'application donnée (calcul de courant ou de la SER), un critère de convergence ϵ_{SDIM} moins exigeant peut être utilisé.

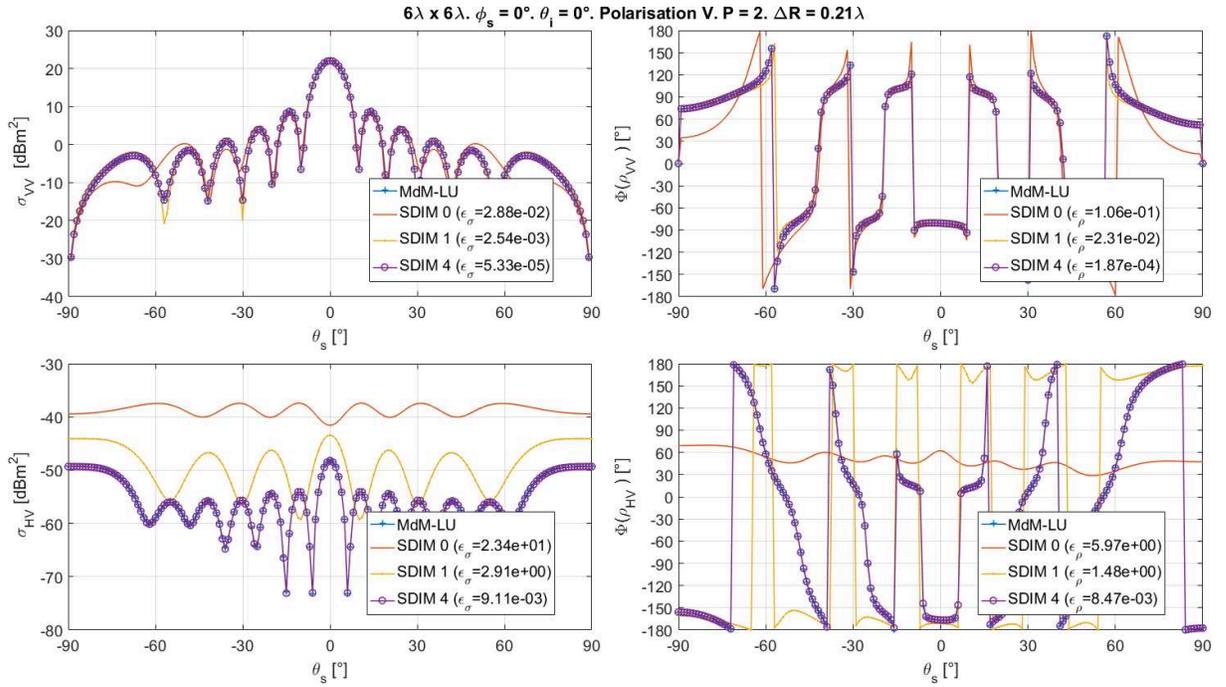


FIGURE 3.17 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1\text{V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi\ \Omega$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.21\lambda$.

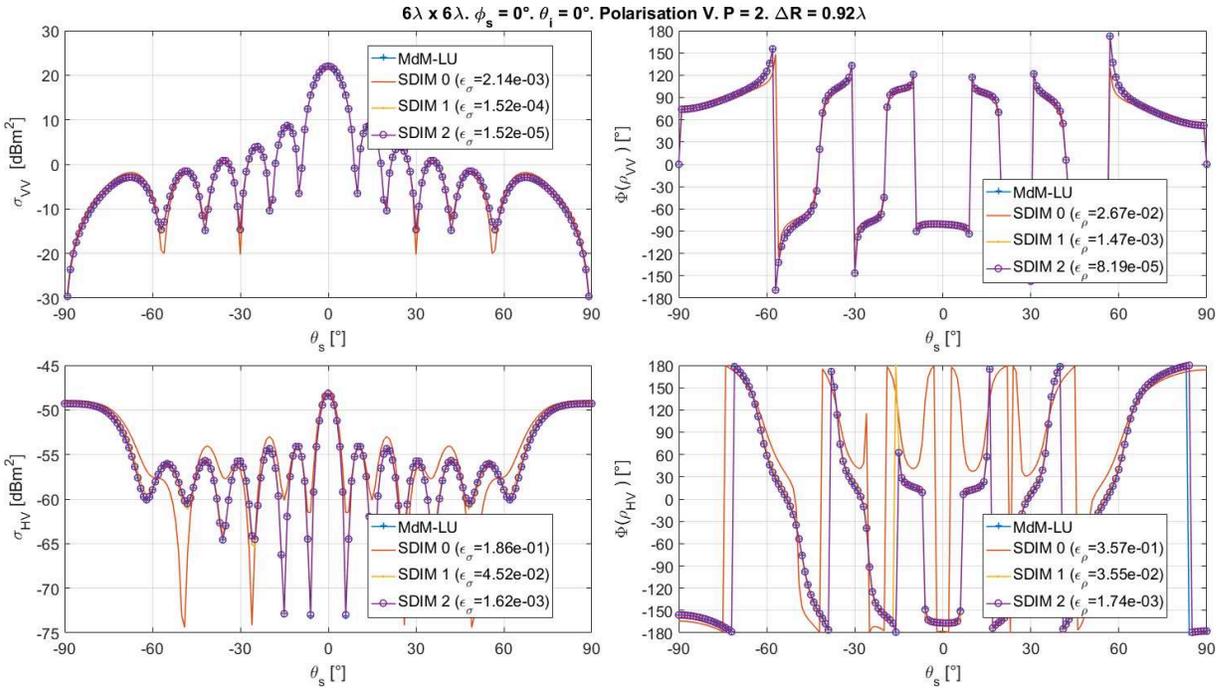


FIGURE 3.18 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.17 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$.

Les figures 3.19 et 3.20 contiennent des informations similaires mais pour le cas d'une surface divisée en

9 sous-domaines et des valeurs de ΔR égales à 0.21λ et 0.92λ respectivement, ce qui correspond aux mêmes conditions utilisées dans les cas représentés sur les figures 3.12 et 3.13.

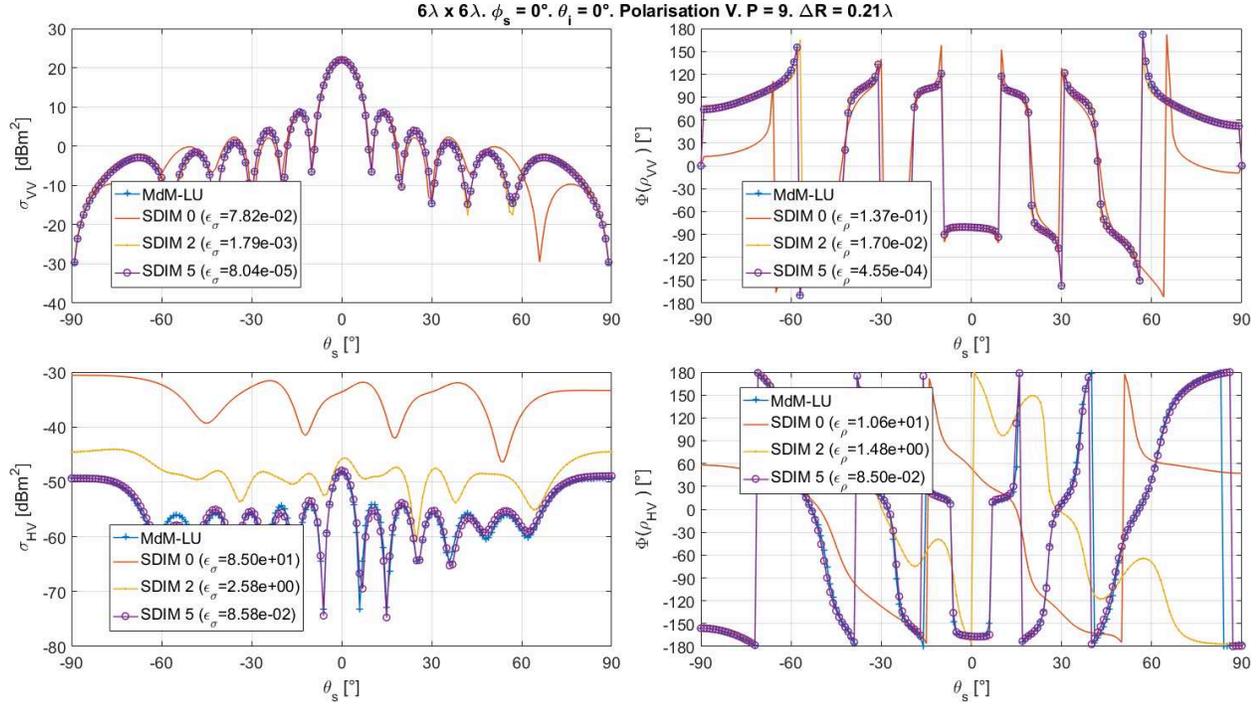


FIGURE 3.19 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.17 mais avec une division en 3×3 sous-domaines.

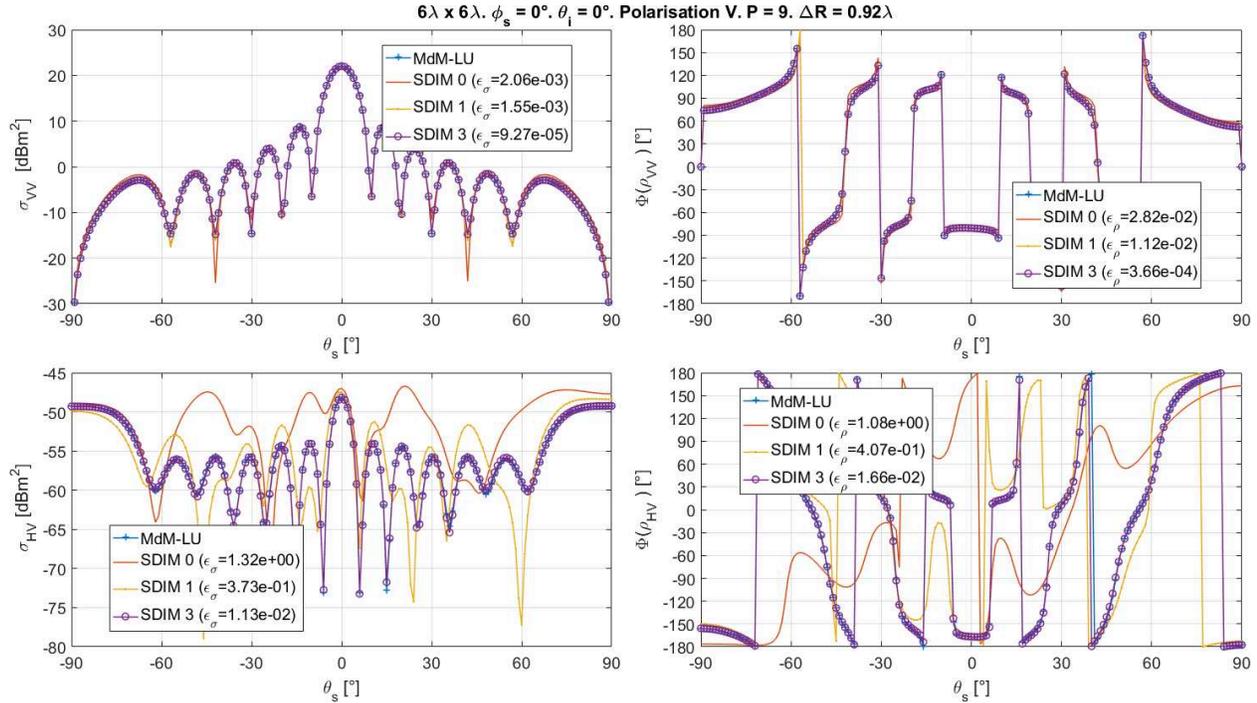


FIGURE 3.20 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même configuration que sur la figure 3.19 mais avec $\Delta R = 0.92\lambda$.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées. Comme il a été observé auparavant, les figures 3.19 et 3.20, montrent que la précision du calcul de la SER et la phase du champ en polarisation croisée est affectée par le nombre de sous-domaines mais surtout par ΔR . Ceci est montré par les graphiques en bas des deux figures. Le même comportement, mais moins important, est aussi observé pour une polarisation horizontale.

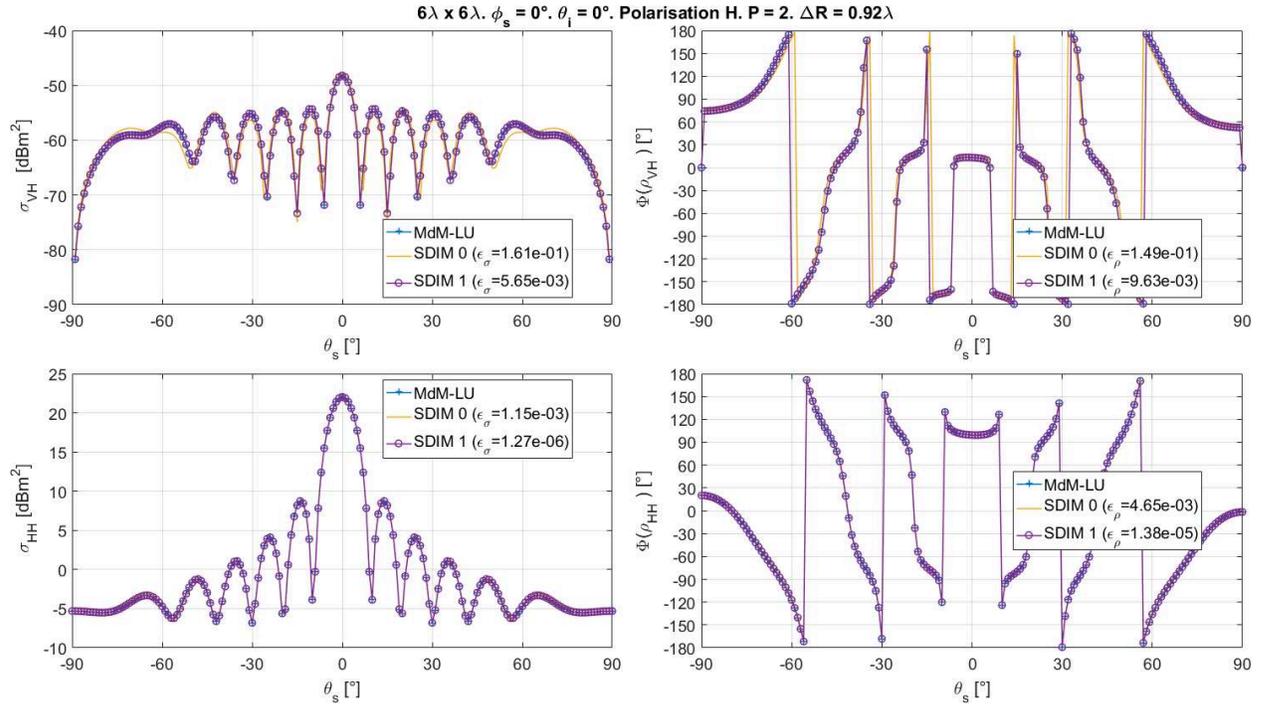


FIGURE 3.21 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane en polarisation horizontale, $\theta_i = 0^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\phi_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.92\lambda$.

La figure 3.21 montre la SER et le champ diffracté lorsqu'une polarisation d'incidence horizontale est considérée. Une convergence plus rapide, déjà mentionnée, mais surtout une meilleure précision sont observées. Une analyse plus approfondie, concernant la relation entre la polarisation de l'onde incidente et le taux de convergence de la méthode, est présentée plus en détail dans la prochaine section. Pour finir, la figure 3.22 permet d'observer le comportement de la méthode par rapport à l'angle d'incidence.

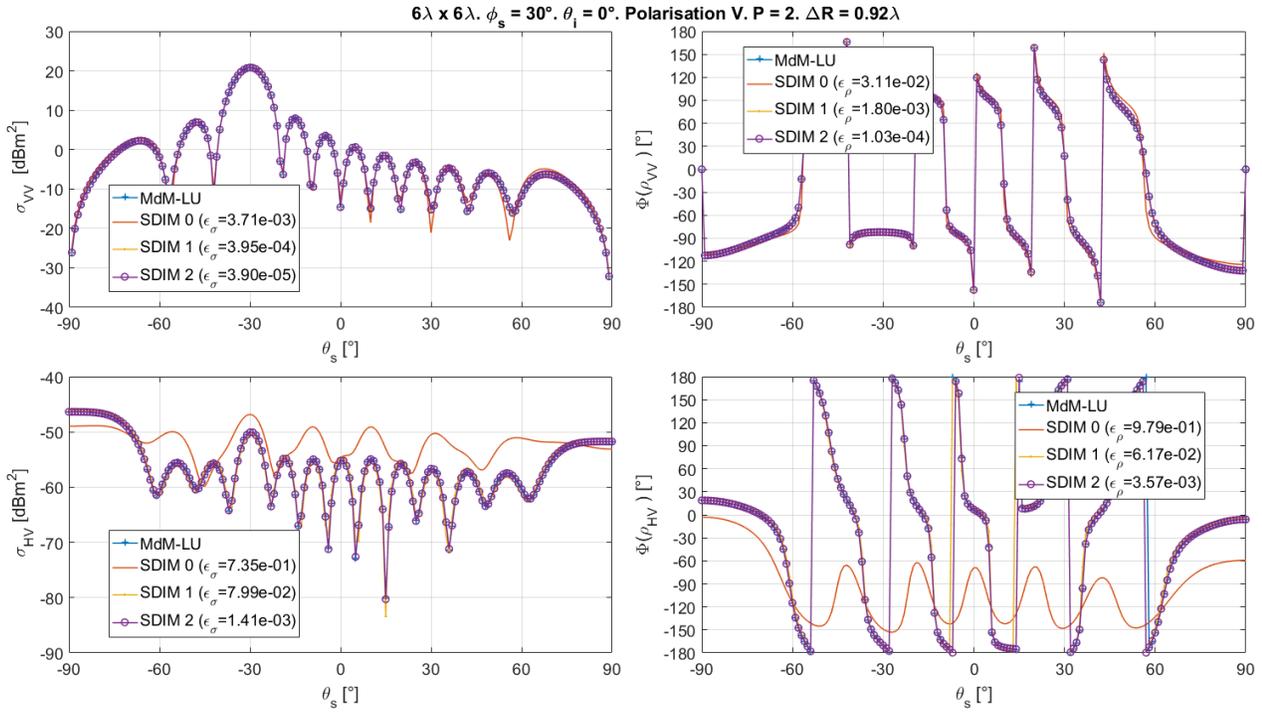


FIGURE 3.22 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane en polarisation verticale, $\theta_i = 30^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. Division en 2 sous-domaines et $\Delta R = 0.92\lambda$.

3.5.2 E-SDIM + ACA

Les résultats montrés jusqu'ici ont permis de vérifier le comportement de la E-SDIM lors des itérations. Leur analyse permet d'assurer la validité de l'utilisation de la méthode pour le problème de la diffraction par une surface rugueuse parfaitement conductrice. Les résultats présentés dans cette section permettront de corroborer que l'utilisation de la ACA comme technique de compression des matrices de couplage est aussi valide. Grâce à sa performance et à sa précision, ni l'ordre de convergence ni la précision de la E-SDIM se voient affectés.

Les mêmes cas d'étude de la section précédente sont considérés ici. Du fait que le modèle E-SDIM + ACA a un comportement identique à la E-SDIM, seulement quelques résultats sont inclus dans ce manuscrit. Ils permettent d'observer et comparer les valeurs finales données par la E-SDIM + ACA dans le calcul du courant surfacique, de la SER et de la phase du champ diffracté, avec celles de la E-SDIM et la Mm. Le seuil de précision de la ACA ϵ_{ACA} et fixé à 0.001.

3.5.2.1 Courant surfacique

Dans les figures 3.23 et 3.24 on observe le comportement des valeurs du courant pour une surface divisée en 2 et en 9 sous-domaines, en utilisant un recouvrement de domaines de 0.21λ . Devant la variation du nombre de blocs, la E-SDIM + ACA a un comportement identique à la E-SDIM. En effet les deux convergent

au même nombre d'itérations et leur erreur relative par rapport à la méthode de référence est similaire.

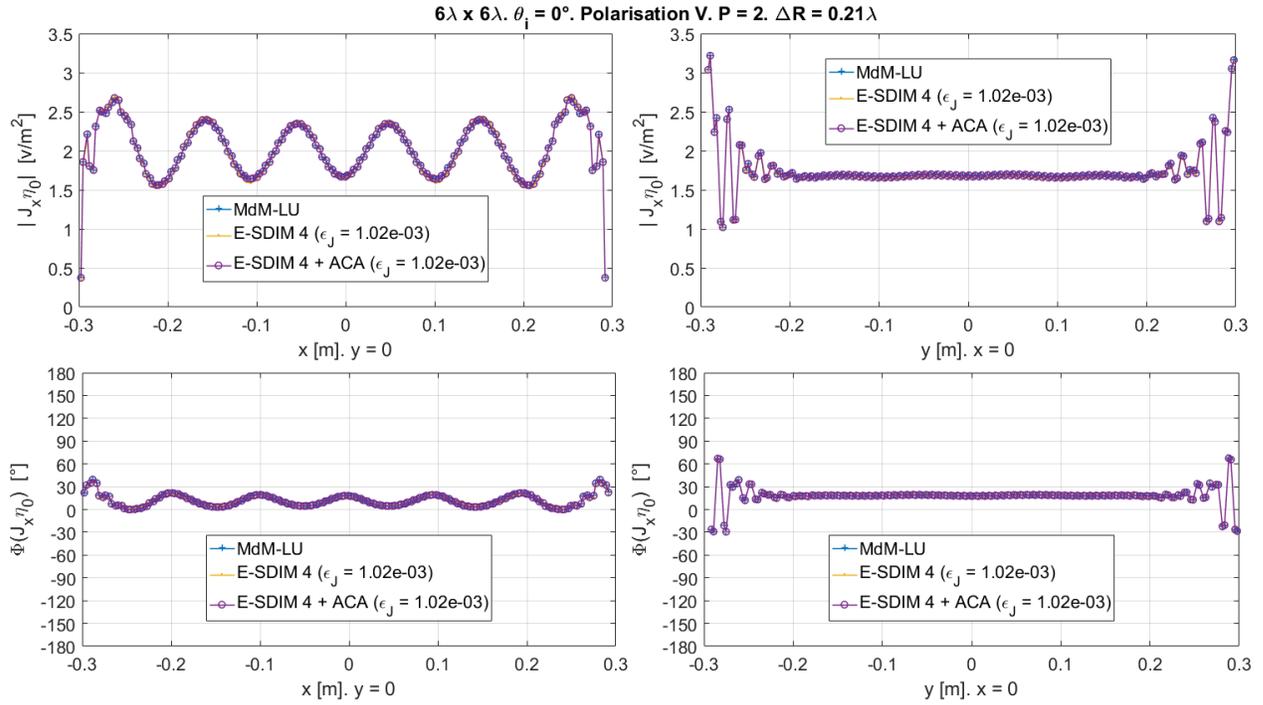


FIGURE 3.23 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x r_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.10 mais avec E-SDIM + ACA.

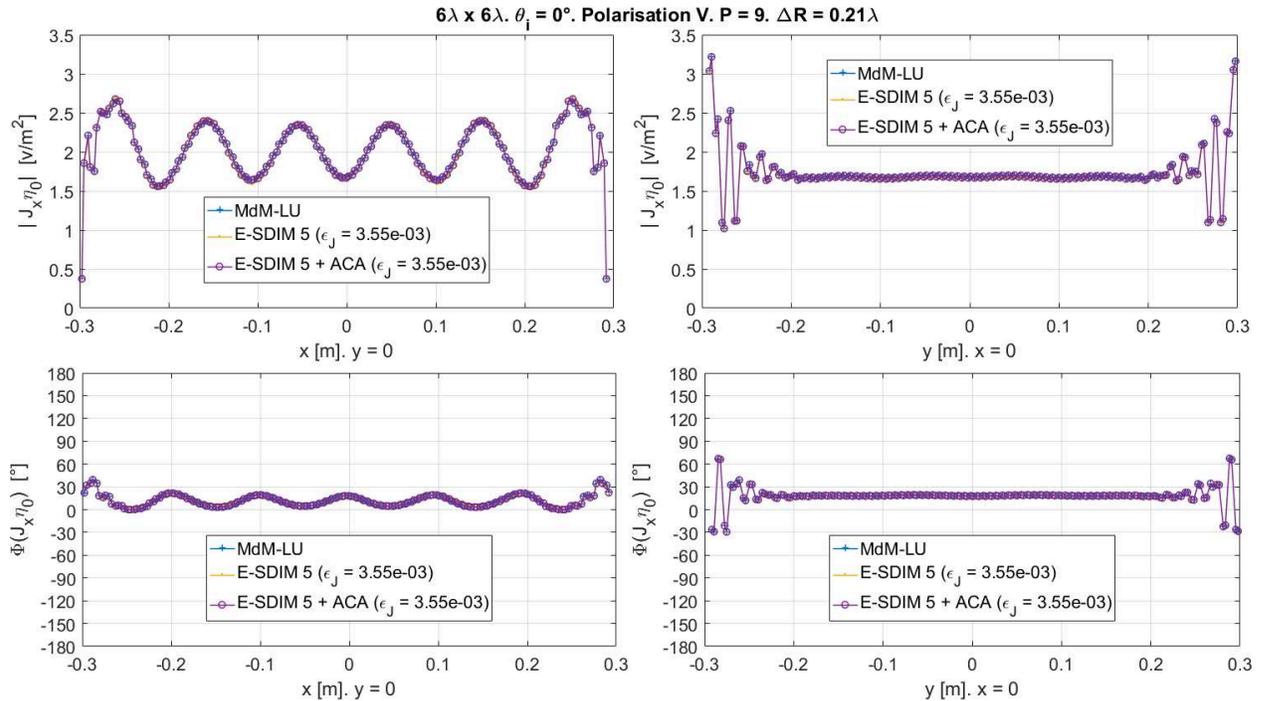


FIGURE 3.24 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x r_0$ sur les axes géométriques d'une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.12 mais avec E-SDIM + ACA.

Face au changement de la polarisation de l'onde incidente la conclusion tirée est la même. Les courbes sont indistinguables les unes des autres et l'ordre de convergence reste identique. Ceci peut être observé sur la figure 3.25.

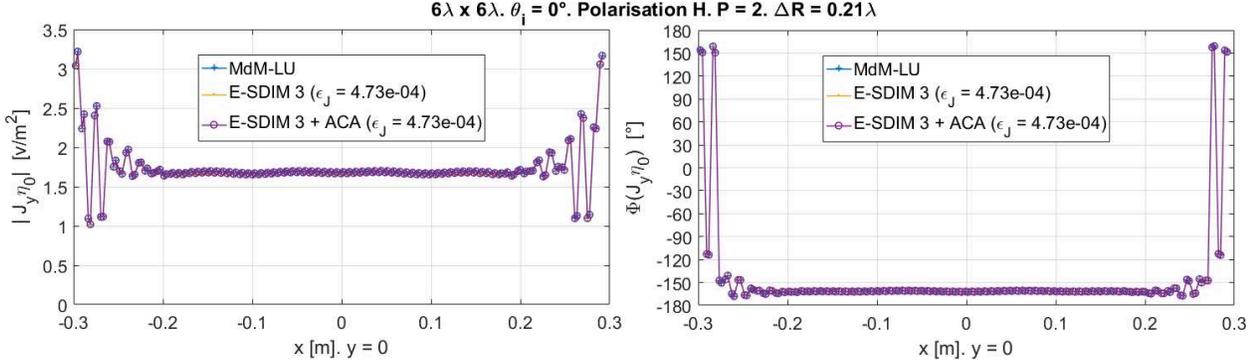


FIGURE 3.25 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.14 mais avec E-SDIM + ACA.

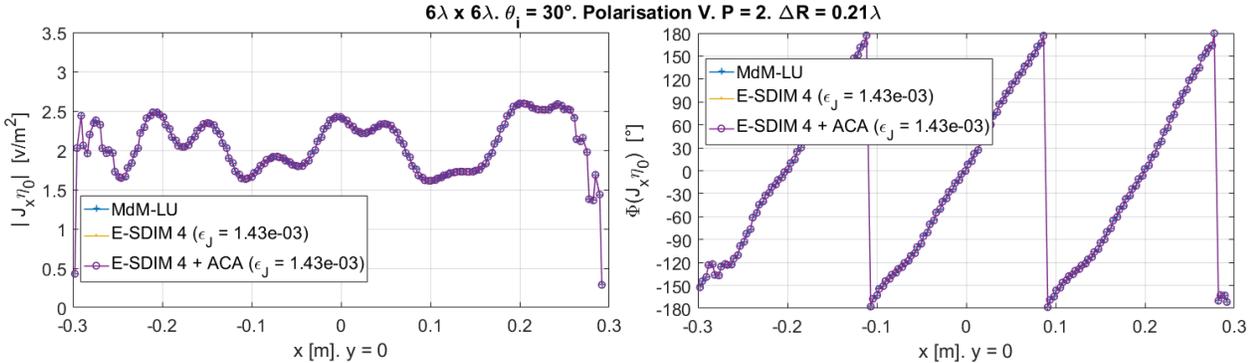


FIGURE 3.26 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_x \eta_0$ sur l'axe x d'une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.16 mais avec E-SDIM + ACA.

De même, par rapport à la méthode sans compression, l'intégration de la ACA n'affecte en aucune manière la sensibilité à l'angle d'incidence dans le calcul du courant de surface, ce qui est montré par la figure 3.26 pour le cas d'une onde incidente avec $\theta_i = 30^\circ$.

3.5.2.2 Surface Équivalente Radar et champ diffracté en champ lointain

En considérant les quatre scénarios analysés dans l'obtention du courant, on vérifie que le calcul de la SER et du champ diffracté n'est pas non plus affecté par la compression des matrices de couplage avec la ACA. En effet les deux méthodes se comportent de la même façon face à la variation du nombre de blocs, comme on observe sur les figures 3.27 et 3.28. Ceci est valide tant pour la composante en co-polarisation comme pour celle en polarisation croisée.

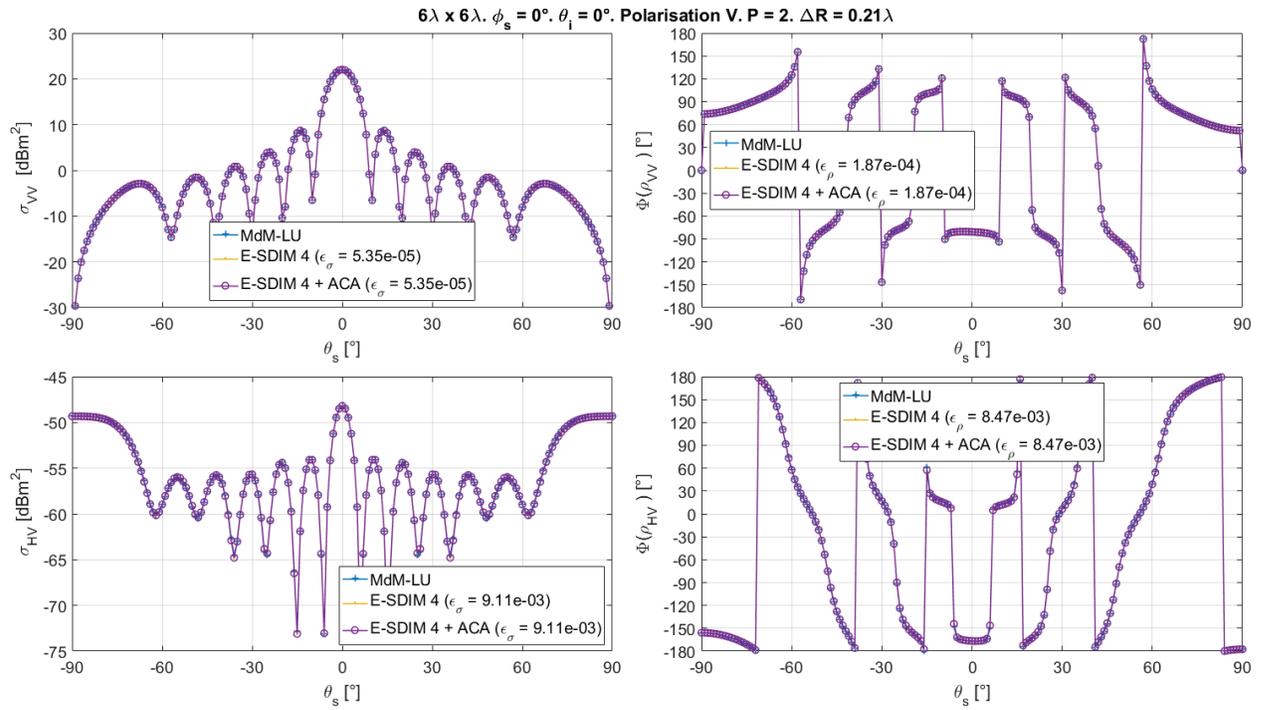


FIGURE 3.27 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.17 mais avec E-SDIM + ACA.

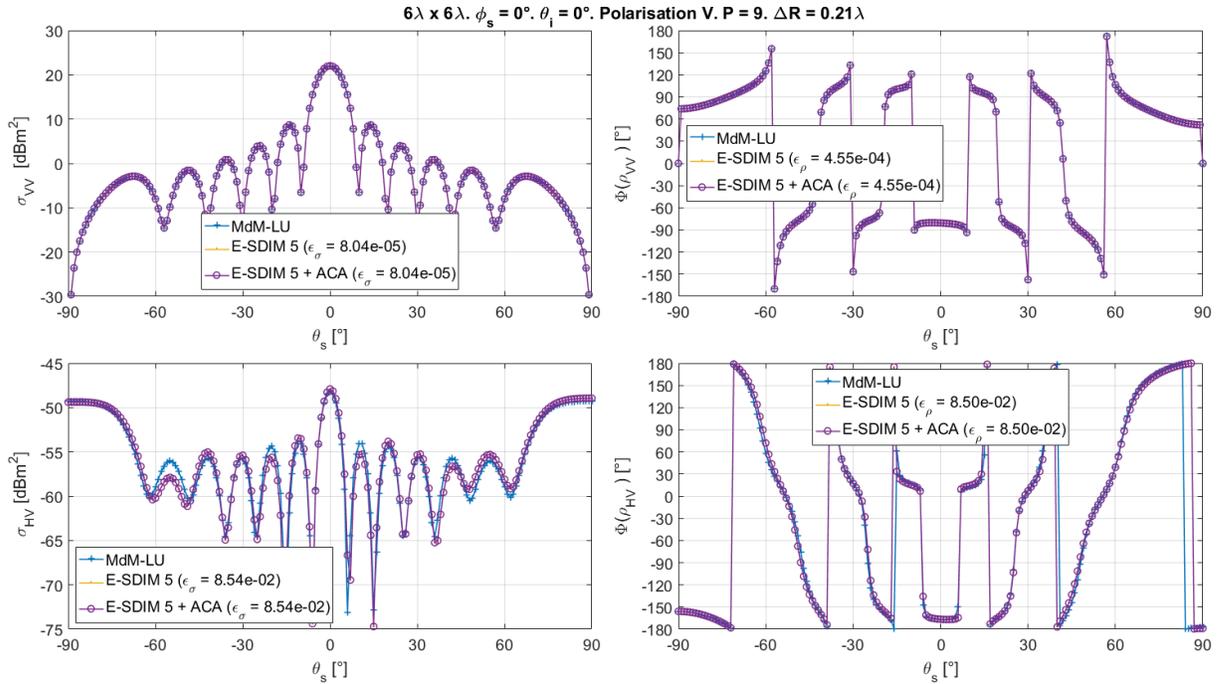


FIGURE 3.28 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.19 mais avec E-SDIM + ACA.

Le changement de la polarisation de l'onde incidente, observable sur la figure 3.29, et celui de l'angle

d'incidence (figure 3.30) servent à confirmer ce qui a déjà été observé.

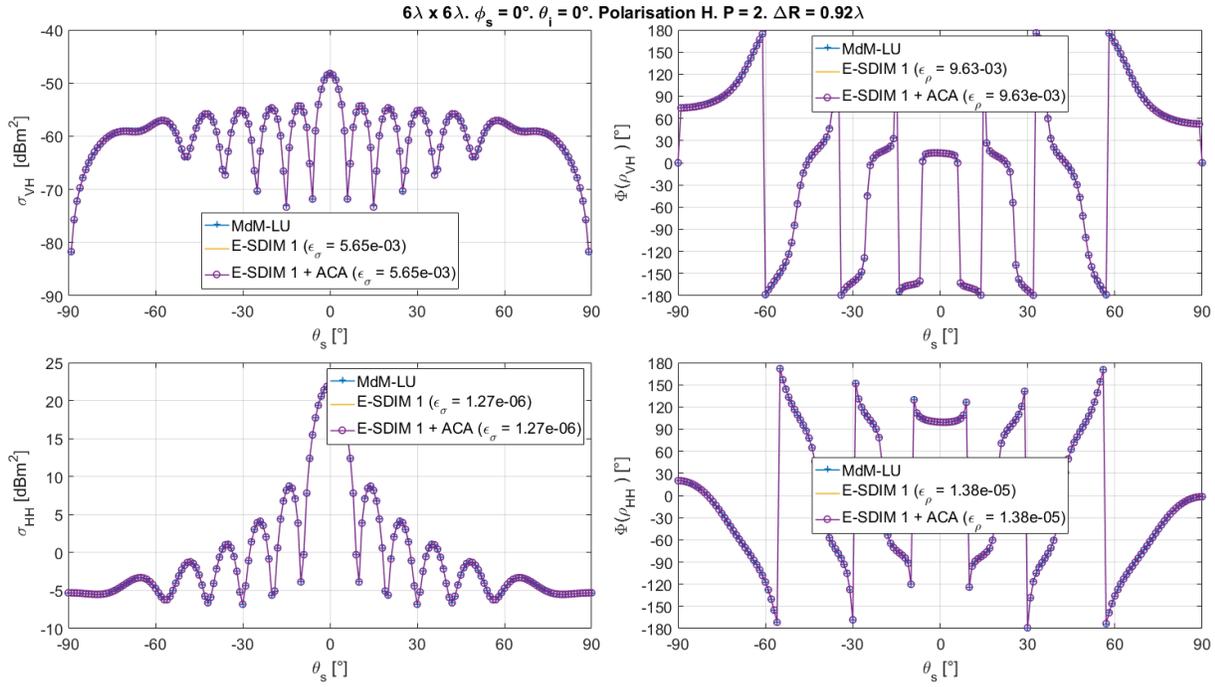


FIGURE 3.29 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.14 mais avec E-SDIM + ACA.

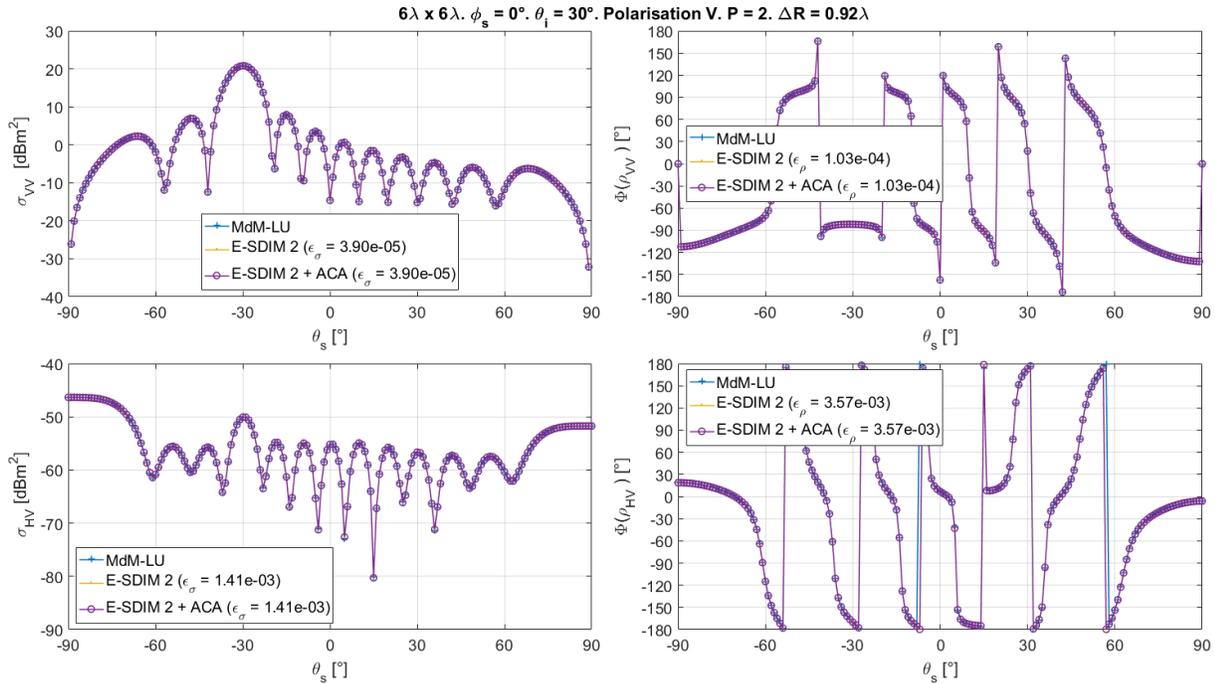


FIGURE 3.30 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface lisse. Même cas d'étude que sur la figure 3.22 mais avec E-SDIM + ACA.

On peut conclure que l'utilisation de la ACA, dans les conditions décrites ici, et dans le contexte considéré dans ce travail, n'affecte ni la précision ni la convergence de la E-SDIM tant pour le calcul du courant surfacique que pour celui du champ diffracté.

3.6 Analyse paramétrique sur la convergence et la précision

L'analyse paramétrique de la E-SDIM est faite afin d'évaluer l'effet de quatre variables sur l'ordre de convergence et la précision : l'angle d'incidence, la polarisation de l'onde incidente, la largeur du rallongement des sous-domaines (ΔR) et le nombre (N_d) et la forme des sous-domaines. Les deux dernières sont des variables de configuration de la méthode elle-même, qui avec le seuil de convergence, ϵ_{SDIM} , fixé auparavant à 10^{-2} , constituent ses seuls éléments configurables.

3.6.1 Sensibilité de la méthode à l'angle d'incidence et à la polarisation de l'onde incidente

La figure 3.31 représente une surface divisée en 1×4 sous-domaines. Elle permet de visualiser l'orientation des sous-domaines par rapport aux axes du plan de la surface et de mieux comprendre les conclusions tirées des résultats des simulations.

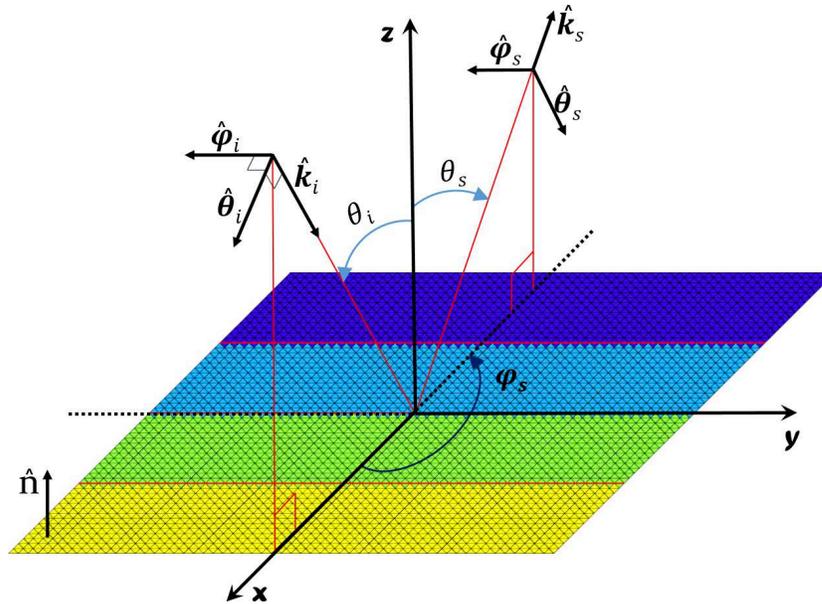


FIGURE 3.31 – Représentation géométrique de l'un des scénarios utilisés dans les simulations.

L'analyse des résultats pour déterminer la sensibilité de la méthode à la polarisation de l'onde incidente et à l'angle d'incidence permet d'affirmer que, en fonction de la disposition des sous-domaines, la méthode peut-être plus ou moins sensible à ces paramètres. Ainsi la figure 3.32 montre la relation existante entre l'ordre de convergence, l'angle d'incidence et la polarisation, pour trois cas où la surface est divisée en sous-domaines

carrés. Les graphiques montrent la valeur moyenne de l'ordre de convergence sur toutes les différentes longueurs du rallongement, ΔR , ainsi que l'écart type. Il est constaté que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode reste quasiment constant devant les variations de l'angle d'incidence. Ceci est valide aussi pour les deux polarisations de l'onde incidente, entre lesquelles, aucune différence considérable n'est appréciée.

Contrairement au cas lorsque des sous-domaines rectangulaires sont utilisés, l'augmentation de l'angle d'incidence implique aussi celle de l'ordre de convergence. De plus, l'utilisation de ce type de sous-domaines a pour conséquence l'augmentation de l'ordre de convergence pour les cas où sont considérées des ondes incidentes, dont la projection du vecteur d'onde \vec{k}_i sur la surface est perpendiculaire aux côtés les plus larges de chaque domaine. Avec l'appui de la figure 3.31, le graphique de la figure 3.33 montre comment, pour une surface divisée en 1×4 blocs, l'ordre de convergence augmente avec l'angle d'incidence. Elle montre aussi que dans ces conditions, la méthode converge plus lentement pour la polarisation verticale sans observer une amélioration de la convergence pour les cas en polarisation horizontale. Ces éléments permettent de conclure que la division en sous-domaines carrés constitue la solution optimale concernant la sélection de la forme des blocs, afin de garantir le comportement uniforme de la méthode par rapport aux variations de l'angle d'incidence et de la polarisation de l'onde incidente.

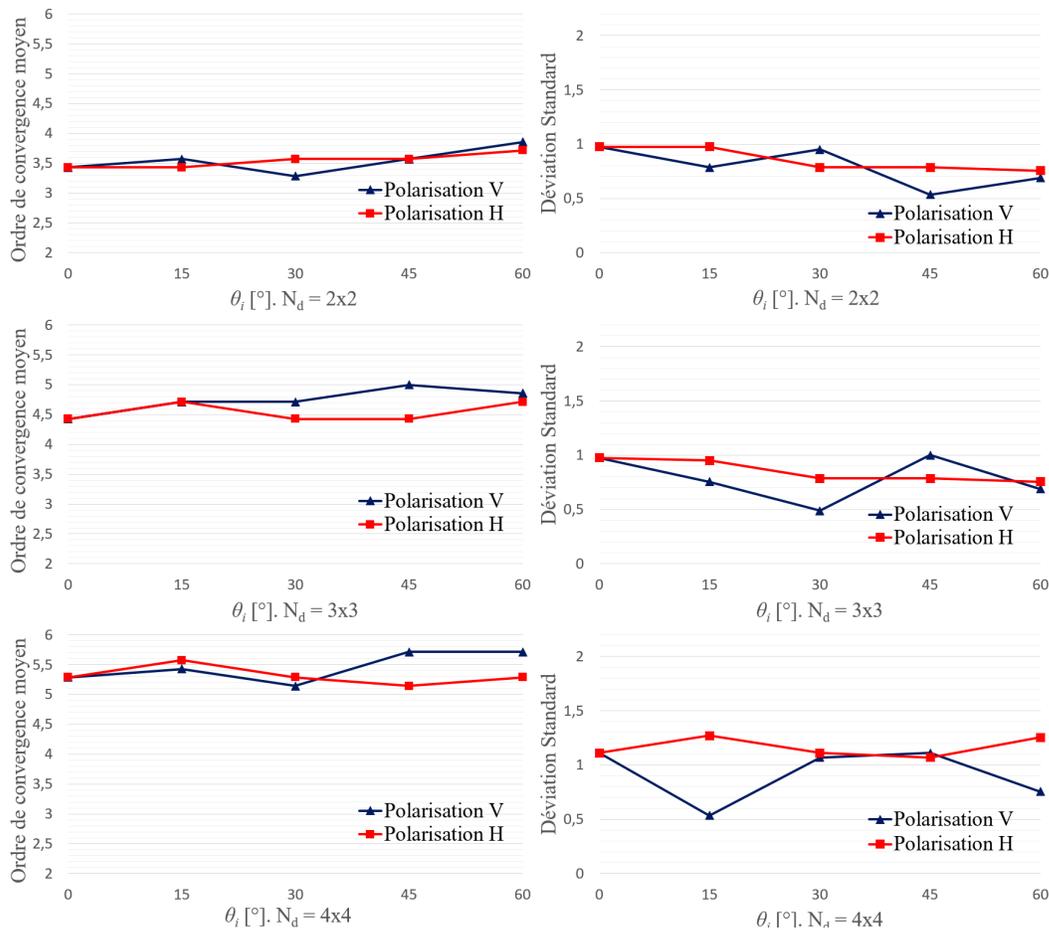


FIGURE 3.32 – Relation entre l'ordre de convergence et l'angle d'incidence en fonction de la polarisation de l'onde incidente, pour le problème d'une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane avec $\phi_i = 0^\circ$, $|E_i| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

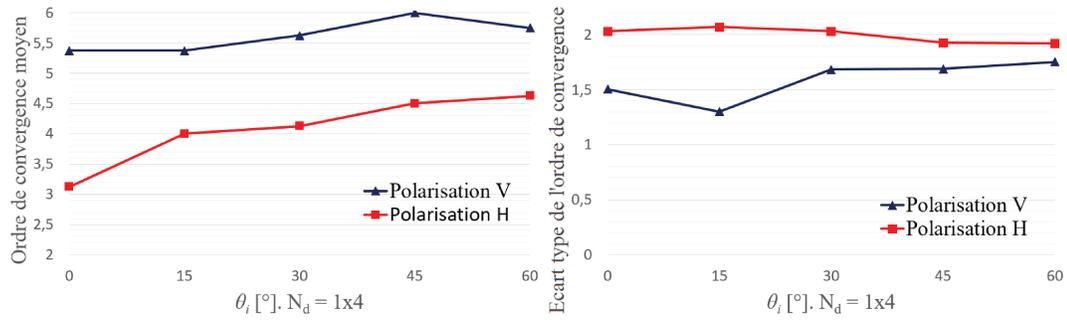


FIGURE 3.33 – Relation entre l'ordre de convergence et l'angle d'incidence en fonction de la polarisation de l'onde incidente, pour le problème d'une surface lisse de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente plane avec $\phi_i = 0^\circ$, $|E_i| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

3.6.2 Forme et nombre de sous-domaines

Le nombre de sous-domaines utilisés pour représenter l'objet, ainsi que leur forme, ont un effet très important sur la convergence de la méthode.

L'effet de la forme des sous-domaines sur la convergence de la méthode E-SDIM a déjà été analysé dans la section précédente, où il a été établi que l'utilisation de sous-domaines non carrés implique une augmentation de l'ordre de convergence et de la sensibilité de la méthode à la polarisation de l'onde incidente et à l'angle d'incidence. Des sous-domaines carrés sont donc considérés pour le reste de l'analyse.

La figure suivante représente la relation entre le nombre de sous-domaines et l'ordre de convergence moyen, exprimé par la moyenne, sur l'angle d'incidence et ΔR , de l'ordre de convergence de tous les cas convergents. La figure montre que la méthode converge aussi rapidement pour la polarisation horizontale que pour la polarisation verticale.

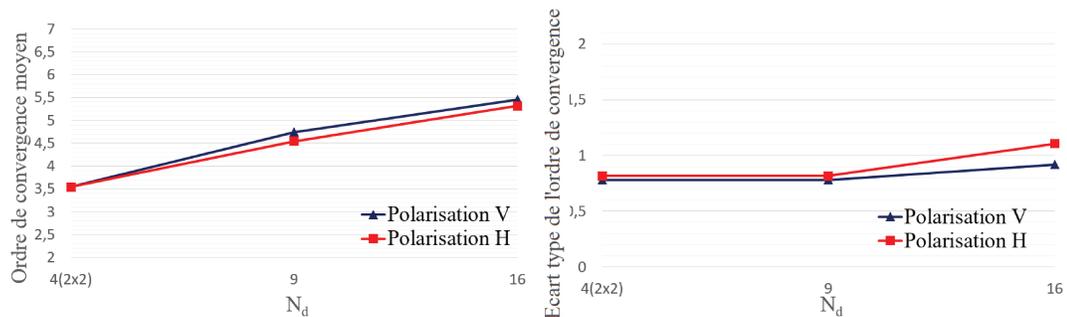


FIGURE 3.34 – Relation entre l'ordre de convergence et le nombre de sous-domaines en fonction de la polarisation de l'onde incidente, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $|E_i| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

De façon similaire, la relation entre le nombre de sous-domaines et l'ordre de convergence, prenant en compte l'angle d'incidence est affichée sur la figure 3.35. Cette fois-ci, l'ordre moyen est exprimé par la moyenne sur la polarisation et ΔR , de l'ordre de convergence de tous les cas convergents. Elle permet de réaffirmer que la convergence de la méthode n'est pas conditionnée par l'angle d'incidence.

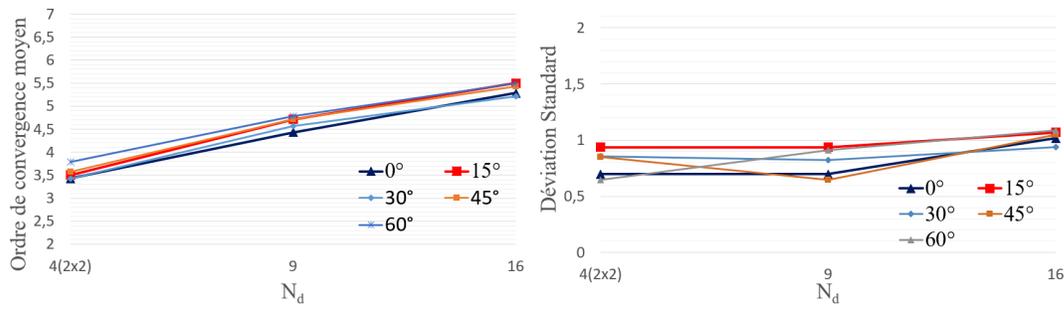


FIGURE 3.35 – Relation entre l'ordre de convergence et le nombre de sous-domaines en fonction de l'angle d'incidence, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $|E_i| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

L'analyse précédente permet de conclure que, lorsque le découpage de la surface est fait correctement, en utilisant des sous-domaines carrés, la convergence de la méthode est indépendante de la configuration de l'onde incidente choisie. De plus, une augmentation évidente de l'ordre de convergence avec le nombre de sous-domaines est constatée.

3.6.3 Taille de l'élargissement

Les concepts d'élargissement, de recouvrement des sous-domaines et de troncature de courant constituent les outils principaux qui ont permis d'obtenir la convergence de la méthode dès les plus petites valeurs de ΔR . On peut l'observer sur la figure 3.36, où l'ordre moyen de convergence est exprimé par la moyenne sur l'angle d'incidence. Les valeurs affichées dans cette figure correspondent à celles obtenues quand la surface est divisée en 2, 3 et 4 sous-domaines ($N_d = 1 \times 2, 1 \times 3$ et 1×4) et on observe que l'ordre de convergence diminue considérablement avec l'augmentation de ΔR . Un minimum est atteint quand $\Delta R \approx \lambda$.

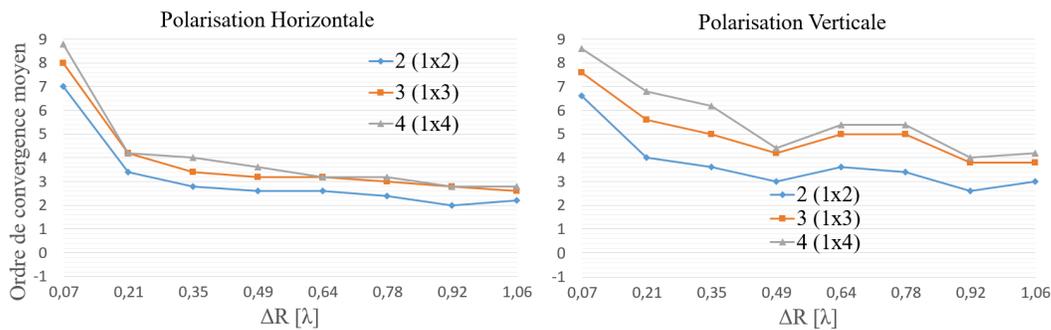


FIGURE 3.36 – Relation entre l'ordre de convergence et la taille du rallongement de sous-domaines en fonction de la polarisation de l'onde incidente et le nombre des sous-domaines, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $|E_i| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

L'intérêt de cette information consiste à montrer que sous certaines conditions, la convergence peut être atteinte dès la plus petite valeur de ΔR , par contre ce n'est pas toujours le cas, comme le montre la figure suivante. (La valeur -1 indique la non convergence).

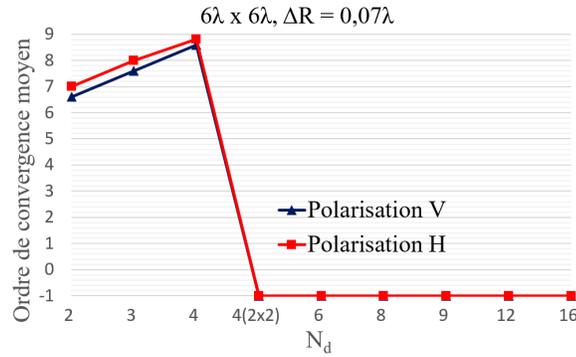


FIGURE 3.37 – Ordre moyen de convergence en fonction du nombre des sous-domaines et de la polarisation de l'onde incidente, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$ et $\Delta R = 0.07\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $|E_i| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

Elle montre l'existence d'une relation entre la capacité de la méthode à converger et la forme des sous-domaines. En effet, pour des valeurs trop petites de ΔR , la E-SDIM ne converge pas quand il existe au moins un triangle partagé par plus de deux sous-domaines.

L'utilisation de sous-domaines carrés ne change pas la relation existante entre l'ordre de convergence et ΔR . Les figures 3.38 et 3.39 montrent cette relation. La première permet de l'illustrer en faisant la distinction en fonction du nombre de sous-domaines, confirmant que, indépendamment du reste des variables, il existe une relation de proportionnalité directe entre le nombre de sous-domaines et l'ordre de convergence.

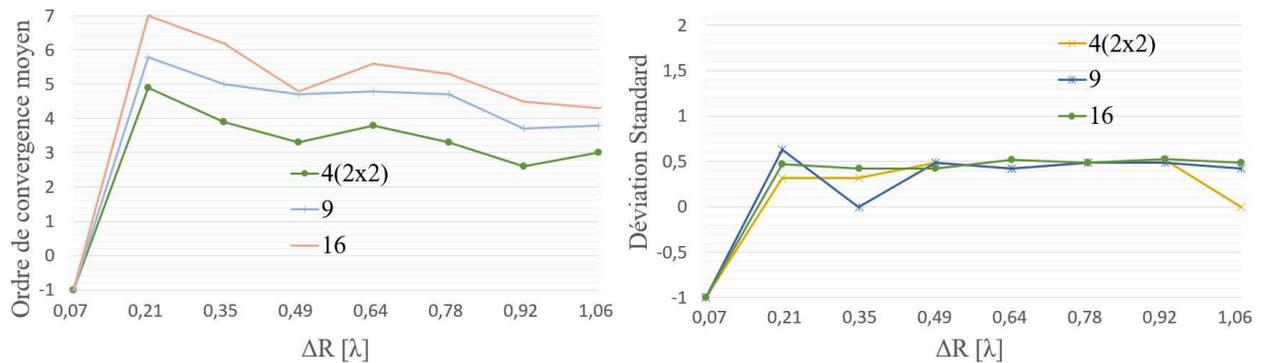


FIGURE 3.38 – Relation entre l'ordre de convergence et la taille du rallongement de sous-domaines en fonction du nombre de sous-domaines, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $|E_i| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

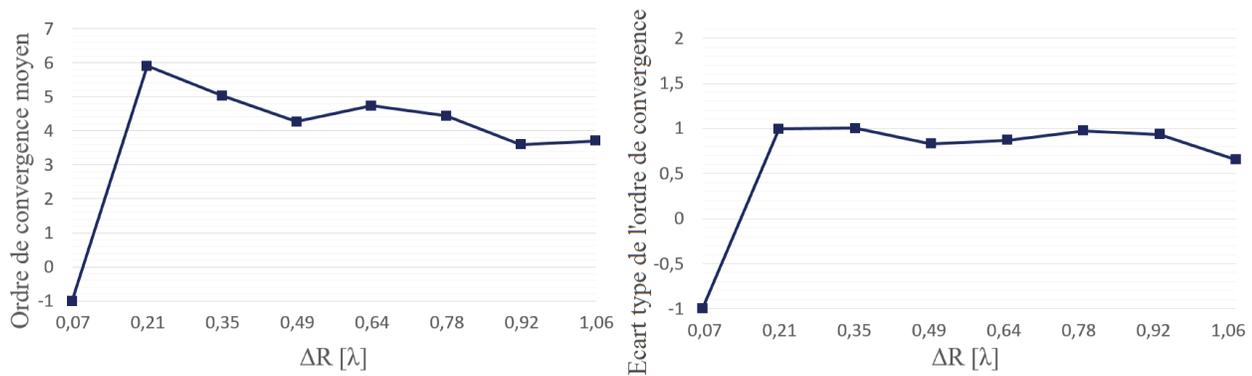


FIGURE 3.39 – Relation entre l'ordre de convergence et la taille du rallongement, pour le problème d'une surface de taille $6\lambda \times 6\lambda$. Onde incidente avec $\phi_i = 0^\circ$, $|E_i| = 1 \text{ V/m}$ et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

La figure 3.39 montre la diminution de l'ordre de convergence devant l'augmentation de ΔR . Un minimum est aussi atteint quand $\Delta R \approx \lambda$, mais la différence entre les valeurs maximales et minimales de l'ordre de convergence n'est pas très considérable. Il est nécessaire de prendre en compte que l'augmentation de ΔR est accompagnée d'une augmentation de la complexité en espace mémoire de la méthode. Alors il est nécessaire d'établir un compromis lors de la configuration de ce paramètre.

3.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre on a présenté les résultats obtenus à l'issue de l'implémentation de la E-SDIM, afin de traiter rigoureusement le problème de diffraction électromagnétique par une surface bidimensionnelle, lisse et parfaitement conductrice. Le principal intérêt de la E-SDIM réside dans la possibilité d'inverser la matrice impédance par blocs avec des complexités CPU et mémoire, très inférieures à celle de l'inversion directe LU de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}$.

Le chapitre a commencé par une description détaillée de la SDIM, qui a permis d'exposer les principales limitations de la méthode lorsqu'elle est utilisée dans la résolution du problème mentionné, du fait qu'elle a été développée et appliquée uniquement pour des problèmes 2D. Ces limitations étant causées par l'effet de bord artificiel, introduit par le découpage de la surface, ainsi que l'irrégularité des bords résultant de l'utilisation des fonctions RWG.

Alors, pour faire face à ces limitations la technique nommée E-SDIM a été développée. Cette technique propose l'utilisation des blocs élargis uniformément, créant un recouvrement entre blocs adjacents, dans le but de contrecarrer l'effet de bord artificiel et l'irrégularité des bords avec ces problèmes inhérents. La méthode ACA a été proposée pour la compression des matrices de couplage afin d'accélérer les produits matrice-vecteur présents dans l'algorithme.

L'analyse de la complexité du schéma E-SDIM + ACA, ainsi que de la compressibilité du problème sont deux éléments d'importance dans ce chapitre. Ceci a permis d'identifier les étapes les plus pénalisantes de l'algorithme et de justifier le choix d'utilisation d'une méthode de compression. Enfin, l'étude paramétrique

réalisée pour évaluer l'influence des différentes variables, a permis de conclure sur la bonne configuration de la méthode et son applicabilité.

Dans le but de valider la méthode, des résultats numériques du courant surfacique et de la SER, pour une surface carrée lisse parfaitement conductrice ont été présentés. Ces résultats ont été analysés afin de déterminer le comportement de la E-SDIM et de son hybridation avec la ACA.

Chapitre 4

Méthode CBFM et comparaison avec E-SDIM

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de comparer la E-SDIM et ces performances avec celles de la méthode CBFM (Characteristic Basis Functions Method), dans le contexte de la diffraction par une surface 2D rugueuse parfaitement conductrice. Deux raisons ont conditionné ce choix. La première est la popularité de la CBFM ces dernières années. Elle a été largement utilisée dans de multiples applications et il s'agit à présent d'une méthode robuste et l'une des plus employées pour des problèmes de grande taille électrique. La deuxième raison est la forte similarité entre certaines étapes de la E-SDIM et la CBFM, qui sont toutes deux des méthodes basées sur la décomposition de domaines.

Le chapitre commence par une description de la CBFM et les particularités de ses deux versions. Cela servira à montrer les similitudes existantes entre les deux méthodes, E-SDIM et CBFM, ainsi que leurs différences.

Le chapitre détaille également l'utilisation de la méthode ACA pour le calcul des sous-matrices de couplage, correspondant à des interactions entre éléments éloignés, afin d'accélérer le calcul des fonctions caractéristiques. Cette méthode est utilisée aussi dans la construction de la matrice réduite, qui est l'une des étapes de la CBFM.

On analyse la complexité des deux versions de la méthode afin d'établir une base de comparaison théorique de leur performance avec celle de la E-SDIM. Le chapitre est conclu par la présentation des résultats obtenus lors de l'utilisation de la CBFM et sa comparaison avec ceux obtenus avec la E-SDIM. La précision des résultats et la performance des méthodes sont évaluées.

4.2 Méthode CBFM

La CBFM [26] a été développée en 2003 par Mittra et al., dans le but de résoudre des problèmes électromagnétiques à grande échelle, même avec des ressources informatiques limitées, car elle permet de réaliser une réduction significative du nombre initial d'inconnues. De même que la E-SDIM, elle repose sur la décomposition de la surface de diffraction, comme le montre la figure 4.1. Bien qu'il ne s'agit pas d'une méthode itérative, les sous-domaines sont encore élargis uniformément, créant une bande de recouvrement entre sous-domaines adjacents, de largeur ΔR . Cela, vise à contrecarrer l'effet de bord introduit par le découpage de la surface et l'amélioration de la précision de la méthode.

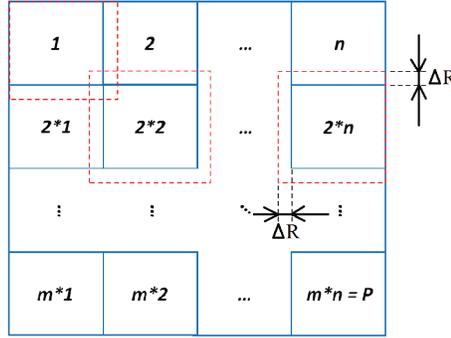


FIGURE 4.1 – Décomposition du domaine géométrique en P sous-domaines, avec élargissement

Comme l'indique son nom, l'objectif de la CBFM est de compresser le problème initial par l'utilisation des fonctions caractéristiques (CBFs) adaptées à chaque sous-domaine. Cette représentation implique une réduction significative dans le nombre d'inconnues. En effet, l'utilisation de ces fonctions conduit à la construction d'une matrice dite réduite, de taille $P^2 \times P^2$, qui est ensuite inversée pour déterminer la solution du problème.

Suite au découpage de la surface, la matrice impédance du problème peut être décomposée en sous-matrices impédances et sous-matrices de couplage sous la forme :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1} & \bar{\mathbf{Z}}_{1,2} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{1,P} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,1} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,2} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{2,P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,1} & \bar{\mathbf{Z}}_{P,2} & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,P} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ainsi que le vecteur d'excitation, qui peut-être réécrit comme :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_P \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Physiquement, les sous-matrices impédance, qui se trouvent sur la diagonale principale de $\bar{\mathbf{Z}}$, représentent les interactions entre les éléments à l'intérieur d'un sous-domaine et les matrices de couplage représentent les interactions entre blocs. Les sous-vecteurs d'excitation \mathbf{b}_i , représentent l'onde incidente sur chacun des domaines. A partir de ce point, deux versions de la CBFM existent.

4.2.1 CBFM avec une seule onde incidente

Celle que l'on nomme CBFM avec une seule onde incidente, constitue la première version développée de la méthode [26], utilisée initialement pour la caractérisation des antennes planaires [26]. La principale caractéristique de cette méthode est l'utilisation d'une unique onde plane pour illuminer la surface considérée et ainsi calculer les fonctions caractéristiques du problème.

4.2.1.1 Construction des fonctions primaires et secondaires

La première étape de la méthode consiste dans la construction des CBFs associées à chaque domaine. Ainsi, chacun des blocs est représenté par un ensemble de P fonctions. Cela est réalisé en utilisant l'expression suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}'_{T',T'} = \bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1} \mathbf{b}_{T'} \\ \mathbf{Y}'_{T',S''} = -\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{T',S''} \mathbf{Y}_{S'',S''} \text{ , } 1 > T, S > P, T \neq S \end{cases} \quad (4.3)$$

où $\mathbf{Y}'_{T',T'}$ est la fonction caractéristique primaire (PBF), associée au domaine élargi T' et $\mathbf{Y}'_{T',S''}$ représente les $P - 1$ fonctions caractéristiques secondaires (SBF) associées au même domaine. On note que les PBFs associées aux domaines S , sont utilisées pour le calcul des SBFs associées à T , S étant différent de T . L'expression (4.3) permet de déterminer les CBFs en considérant les domaines élargis. Alors, la troncature de ces fonctions est une étape nécessaire pour maintenir le nombre d'inconnues du problème. Un regard attentif permet d'identifier la grande similitude existante entre cette expression et les équations (3.15) et (3.17), dédiées au calcul des fonctions caractéristiques de la E-SDIM. Effectivement, la partie supérieure de l'expression (4.3) est identique à celle dédiée au calcul du courant à l'ordre zéro de la E-SDIM, $\mathbf{Y}'_{T'}^{(0)}$. L'expression pour déterminer les SBFs, en bas de l'équation (4.3), est très similaire aux composantes des courant à l'ordre k de la E-SDIM. Il faut noter que dans le cas de la CBFM, elles ne sont pas additionnées pour conformer une seule fonction et que le domaine source, noté ici par S'' , est légèrement différent que celui considéré dans la E-SDIM. La notation “ ” est adoptée pour indiquer que, dans le cas où il existe du chevauchement entre le domaine d'observation T' et le domaine source S , la partie commune sera éliminée de S , ainsi que les éléments lui étant associés en $\mathbf{Y}_{S,S}$.

D'un point de vue physique, la PBF peut être assimilée au courant à l'intérieur d'un bloc, causé par l'onde incidente. Les SBFs correspondent aux composantes du courant créés par le rayonnement des autres blocs. Par conséquent, on pourrait expliquer l'utilisation de S'' comme un moyen d'éliminer de l'information redondante qui a déjà été prise en compte par les PBFs. Cela a comme résultat l'obtention des fonctions caractéristiques linéairement indépendantes et peu corrélées, et induit une meilleure adaptation des fonctions

aux domaines qu'elles caractérisent. Ce principe n'est pas suivi dans la détermination des courants d'ordre supérieur dans la E-SDIM, mais son étude peut être envisagée afin de déterminer son effet sur la précision et l'ordre de convergence de la méthode.

4.2.1.2 Troncature des fonctions caractéristiques

En plus de la gestion du nombre d'inconnues du problème, la troncature des fonctions calculées dans l'étape précédente sert également à éliminer la partie des fonctions caractéristiques contenant les valeurs les plus affectées par l'effet de bord introduit par la décomposition de la surface. Cette opération est représentée par l'expression suivante :

$$\mathbf{Y}_{T,S} = C [\mathbf{Y}'_{T',[T',S'']}] \quad (4.4)$$

Comme pour la E-SDIM, la procédure consiste à garder uniquement les éléments faisant partie des domaines non élargis, en éliminant le reste. Il faut noter que, dans la construction des fonctions secondaires, les PBFs ont déjà été tronquées.

4.2.1.3 Orthonormalisation Gram-Schmidt Modifiée

A l'issue de l'étape de construction et troncature des fonctions caractéristiques, l'ensemble des P fonctions associées à chaque domaine est disposé de façon à former une matrice de taille $N_T \times P$, N_T étant le nombre d'inconnues RWG liées au domaine non élargi T . Chaque colonne représente une fonction caractéristique dont la PBF est placée en premier.

A partir de cette matrice, une procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est réalisée dans le but de représenter le domaine par des fonctions orthogonales par rapport à la PBF. Les fonctions orthonormalisées sont notées par $\mathbf{I}_{T,S}$. Le processus d'orthonormalisation est important car il permet aussi d'éliminer l'information redondante contenue dans les CBFs et ainsi améliorer le conditionnement de la matrice réduite. On peut représenter cette transformation par l'expression suivante :

$$\mathbf{Y}_{T,S} \Rightarrow \mathbf{I}_{T,S} \quad (4.5)$$

Cette étape constitue le commencement de la différenciation entre la E-SDIM et la CBFM. Dans la première, le processus itératif est poursuivi jusqu'à l'obtention du courant, tandis que dans la deuxième, des étapes supplémentaires sont nécessaires.

4.2.1.4 Réécriture du problème

A cette étape, la réécriture du problème linéaire $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ est nécessaire. Pour cela, on commence par exprimer le vecteur inconnu \mathbf{a} , à partir des fonctions caractéristiques orthonormalisées comme montré par l'équation (4.5) :

$$\mathbf{a} = \sum_{S=1}^P \alpha_{1S} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1,S} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{S=1}^P \alpha_{2S} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{2,S} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \cdots + \sum_{S=1}^P \alpha_{PS} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{P,S} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

où les éléments α_{TS} sont des coefficients de poids à déterminer. Cette expression représente une opération similaire à celle réalisée dans la MdM, dont la variable inconnue est représentée par une somme des fonctions connues multipliées par des poids. A ce propos, grâce à cet échantillonnage du vecteur inconnu \mathbf{a} , le membre gauche du problème linéaire peut être ré-exprimé sous la forme :

$$\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{a} = \sum_{S=1}^P \alpha_{1S} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,1} \end{bmatrix} [\mathbf{I}_{1,S}] + \sum_{S=1}^P \alpha_{2S} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,2} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,2} \end{bmatrix} [\mathbf{I}_{2,S}] + \cdots + \sum_{S=1}^P \alpha_{PS} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,P} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,P} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,P} \end{bmatrix} [\mathbf{I}_{P,S}] \quad (4.7)$$

Cette expression permet d'observer le changement des fonctions de base du problème, qui désormais, devient un problème à P^2 inconnues.

4.2.1.5 Construction de la matrice réduite

Dans le but de résoudre le nouveau problème, la méthode de Galerkin est utilisée et le problème est échantillonné avec les mêmes fonctions déjà obtenues. Ce faisant, une nouvelle matrice impédance, appelée matrice réduite, est construite comme :

$$\bar{\mathbf{Z}}_{[P^2 \times P^2]}^R = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1}^R & \bar{\mathbf{Z}}_{1,2}^R & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{1,P}^R \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,1}^R & \bar{\mathbf{Z}}_{2,2}^R & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{2,P}^R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,1}^R & \bar{\mathbf{Z}}_{P,2}^R & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,P}^R \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

où chaque élément $\bar{\mathbf{Z}}_{T,S}^R$ est une sous-matrice de taille $P \times P$, déterminée par l'équation suivante :

$$\bar{\mathbf{Z}}_{T,S}^R_{[P \times P]} = [\bar{\mathbf{I}}_T]^H \bar{\mathbf{Z}}_{T,S} [\bar{\mathbf{I}}_S] \quad (4.9)$$

Ici, $\bar{\mathbf{Z}}_{T,S}$ sont les sous-matrices impédances (si $T = S$), ou de couplage, associées aux domaines non élargis du problème initial. L'opérateur hermitien H indique la transposée de la conjuguée de la matrice contenant les fonctions caractéristiques $[\bar{\mathbf{I}}_T]$, construite sous la forme :

$$[\bar{\mathbf{I}}_T]_{[N_T \times P]} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{T,1} & \mathbf{I}_{T,2} & \cdots & \mathbf{I}_{T,P} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

La matrice réduite ainsi obtenue, est une représentation de taille $P^2 \times P^2$ du problème initial, ce qui implique une compression considérable du nombre d'inconnues et de la complexité associée à son inversion et à son stockage.

4.2.1.6 Construction du vecteur d'excitation réduit

Afin d'homogénéiser l'expression, la même opération est réalisée sur le membre droit du problème linéaire, pour obtenir un vecteur d'excitation dit réduit. La taille de ce vecteur, qu'on peut observer dans l'expression suivante :

$$\mathbf{b}_{[P^2 \times 1]}^R = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^R \\ \mathbf{b}_2^R \\ \vdots \\ \mathbf{b}_P^R \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

est de taille $P^2 \times 1$, dont chaque élément \mathbf{b}_T^R correspond au sous-vecteur d'excitation réduit, de taille $P \times 1$, associé au domaine non élargi T . Ces sous-vecteurs sont déterminés à partir de l'opération décrite par l'expression suivante :

$$\mathbf{b}_T^R = [\bar{\mathbf{I}}_T]^H \mathbf{b}_T \quad (4.12)$$

où \mathbf{b}_T est le sous-vecteur d'excitation initial, associé au même domaine.

4.2.1.7 Problème réduit

Le résultat des étapes précédentes est l'obtention d'un nouveau problème linéaire de taille P^2 qui prend la forme :

$$\bar{\mathbf{Z}}^R \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}^R \quad (4.13)$$

Ce système permet de déterminer les coefficients α comme :

$$\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{Z}}^{R^{-1}} \mathbf{b}^R \quad (4.14)$$

Ces coefficients sont ensuite utilisés pour la construction du vecteur inconnu \mathbf{a} , en employant l'expression (4.6).

La CBFM permet de résoudre des problèmes de taille importante grâce à sa capacité à réduire le nombre d'inconnues. De plus, la technique ACA peut être utilisée pour compresser les sous-matrices de couplage, ce qui diminue la complexité de la méthode. Cette diminution de la complexité est obtenue en utilisant les sous-matrices de couplage compressées pour le calcul des fonctions caractéristiques, ainsi que dans la construction de la matrice réduite. Cependant, dû au nombre réduit, et potentiellement insuffisant, de CBFs utilisées pour caractériser la surface, la méthode peut s'avérer peu précise dans certains cas. C'est le cas pour la modélisation de la diffraction par une surface 2D rugueuse, dont des résultats peu satisfaisants sur la SER ont été obtenus.

4.2.2 Une autre version de la CBFM

Afin de pallier le manque de précision de la version de la CBFM qui vient d'être décrite, une autre version de cette méthode a été proposée [108]. Celle-ci est caractérisée par le calcul d'un nombre plus élevé de fonctions caractéristiques. Ces fonctions, qui forment ce qu'on appelle macro fonctions de base, prennent la forme de PBFs et sont obtenues par l'illumination des blocs par une collection d'ondes planes.

4.2.2.1 Construction des macro fonctions de base (MBF)

Une macro fonction de base est une matrice construite à partir de l'expression suivante :

$$\bar{\mathbf{Y}}'_{T',T'} = \bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1} \bar{\mathbf{b}}_{T'}^{IPW} \quad (4.15)$$

où la matrice $\bar{\mathbf{Y}}'_{T',T'}$ représente la MBF associée au domaine élargi T' . Chacune de ses colonnes représente le courant surfacique créé par une onde plane qu'illumine la surface avec un angle d'incidence, un angle azimutal et une polarisation déterminée. Dans la même expression, $\bar{\mathbf{b}}_{T'}^{IPW}$ est une matrice contenant dans chaque colonne le vecteur d'excitation obtenue par la projection de l'une des ondes incidentes sur le même domaine. La taille de ces deux matrices est de $N_{T'} \times N_{IPW}$, $N_{T'}$ étant le nombre de fonctions RWG à l'intérieur du domaine et N_{IPW} le nombre d'ondes planes utilisées pour l'illuminer. À ce stade, il faut noter que chacune de ces ondes est différente, soit par sa polarisation, par son angle d'incidence θ_i , ou par son angle azimutal

ϕ_i . Alors, $\bar{\mathbf{b}}_{T'}^{IPW}$ peut être écrite sous la forme :

$$\bar{\mathbf{b}}_{[N_{T'} \times N_{IPW}]}^{IPW} = \left[\mathbf{b}_{T',1}^{\text{ref}} \quad \mathbf{b}_{T',2}^{\text{ref}} \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{T',N_{IPW}}^{\text{ref}} \right] \quad (4.16)$$

où l'indice ref indique que ce sont les vecteurs excitation utilisés comme référence pour la construction des fonctions caractéristiques, représentés par \mathbf{b} , pour lesquels le problème est résolu. Le nombre d'ondes incidentes est un élément très important car il détermine la précision et la complexité de la méthode. Pour chaque polarisation il est déterminé par le critère [107] :

$$N_{IPW} \geq 2(k_0 r_0 + 2\pi)^2 \quad (4.17)$$

Le terme r_0 fait référence au rayon de la plus petite sphère pouvant contenir un bloc à l'intérieur, ce qui équivaut à la moitié de la distance diagonale du bloc. N_{IPW} indique aussi le nombre de directions d'incidence. Elles sont déterminées en utilisant des intervalles $\Delta\theta_i$ et $\Delta\phi_i$ réguliers. Le fait de considérer uniquement le problème d'une surface illuminée par le dessus permet de sélectionner des valeurs de θ_i entre 0° et 90° et entre 0° et 360° pour ϕ_i .

4.2.2.2 Décomposition SVD de la matrice MBF

Le critère donné par l'expression (4.17) pour déterminer le nombre d'ondes planes, crée généralement une surestimation du nombre de fonctions caractéristiques nécessaires pour la description d'un bloc. C'est pourquoi, afin d'éliminer la redondance et améliorer le conditionnement de la matrice réduite, une décomposition SVD (Singular Values Decomposition) de la matrice MBF de chaque sous-domaine est appliquée [107], [108]. L'utilisation de cette technique poursuit un objectif identique à celui de l'emploi de l'orthogonalisation Gram-Schmidt dans la version de la CBFM à une seule onde incidente. L'application de la décomposition SVD permet de réécrire les matrices MBF sous la forme :

$$\bar{\mathbf{Y}}'_{T',T'} = \bar{\mathbf{U}}_{T'} \bar{\mathbf{\Sigma}}_{T'} \bar{\mathbf{V}}_{T'}^H \quad (4.18)$$

où $\bar{\mathbf{U}}_{T'}$ et $\bar{\mathbf{V}}_{T'}$ sont des matrices orthogonales rectangulaires complexes, de tailles $N_{T'} \times N_\sigma$ et $N_{IPW} \times N_\sigma$ respectivement. Cela implique que ses colonnes sont orthonormales. $\bar{\mathbf{\Sigma}}_{T'}$ est une matrice diagonale positive réelle, dont la taille est $N_\sigma \times N_\sigma$, contenant les valeurs singulières de $\bar{\mathbf{Y}}'_{T',T'}$. Les valeurs singulières sont organisées de telle façon que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \sigma_{N_\sigma} \quad (4.19)$$

dont l'indice indique la ligne et colonne où se trouve la valeur singulière dans $\bar{\mathbf{\Sigma}}_{T'}$ et N_σ est égal au minimum entre $N_{T'}$ et N_{IPW} . Chaque valeur singulière se voit associée à une colonne sur $\bar{\mathbf{U}}_{T'}$ et sur $\bar{\mathbf{V}}_{T'}$.

4.2.2.3 Construction de la matrice des fonctions caractéristiques CBF

De manière à obtenir les fonctions caractéristiques nécessaires à la construction de la matrice réduite, il faut noter que la décomposition en valeurs singulières donne un moyen de déterminer quels sont les éléments qui contiennent le plus d'information dans une matrice. A ce propos, on peut identifier la matrice orthogonale à gauche $\bar{\mathbf{U}}_{T'}$, comme celle contenant l'information des courants sur la MFB et $\bar{\mathbf{\Sigma}}_{T'}$ comme celle contenant l'indication sur leur importance. Ainsi, l'importance du vecteur singulier dans la i -ème colonne de $\bar{\mathbf{U}}_{T'}$ est donnée par σ_i , dont une plus grande valeur de σ_i indique une plus grande importance du vecteur.

Dans ces conditions, et si on prend en compte l'expression (4.19), les N_{SVD_T} premières colonnes de $\bar{\mathbf{U}}_{T'}$ peuvent être utilisées comme les fonctions caractéristiques associées au domaine élargi T' . N_{SVD_T} donne alors, le nombre de colonnes nécessaires pour la description précise de la MBF. Cela peut être écrit sous forme de code Matlab comme :

$$\bar{\mathbf{I}}'_{T'} = \bar{\mathbf{U}}_{T'}(:, 1 : N_{SVD_T}) \quad (4.20)$$

où $\bar{\mathbf{I}}'_{T'}$ est la matrice contenant les fonctions caractéristiques du domaine élargi. Afin de déterminer la valeur N_{SVD_T} pour un domaine quelconque, à partir de la normalisation des valeurs singulières un critère peut être établi sous la forme suivante :

$$N_{SVD} = \min(i), \frac{\sigma_i}{\sigma_1} \leq \epsilon_{SVD} \quad (4.21)$$

Cette opération est réalisée pour chacun des blocs, ce qui implique que chaque bloc peut potentiellement être représenté par un nombre différent de CBFs. La valeur ϵ_{SVD} est d'une importance capitale, car elle détermine, la précision et la complexité de la méthode. Alors un compromis doit être trouvé. En général, des valeurs de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} donnent des résultats satisfaisants dans le contexte traité.

Il faut mentionner, que par le principe même de la technique SVD, le nombre de valeurs singulières d'importance est déterminé non seulement par la pertinence des composantes du courant surfacique induit par les ondes planes, mais aussi par le nombre d'ondes planes retenues. Ainsi, le nombre final des fonctions caractéristiques est déterminé non seulement par le paramètre ϵ_{SVD} , mais aussi par N_{IPW} .

4.2.2.4 Troncature des fonctions caractéristiques

La troncature des fonctions caractéristiques est une étape identique à celle réalisée pour version de la CBFM à une seule onde incidente. Comme auparavant, son objectif est de restaurer le nombre initial d'inconnues RWG par l'élimination des éléments ajoutés par l'élargissement des blocs. Cette opération est représentée par l'expression suivante :

$$\bar{\mathbf{I}}_T = C [\bar{\mathbf{I}}'_{T'}] \quad (4.22)$$

Elle se différencie uniquement par l'étape où elle est réalisée. En effet, ici elle a lieu après l'orthonormalisation des fonctions caractéristiques, tandis que pour la CBFM à une seule onde incidente, elle a lieu avant. La matrice $\bar{\mathbf{I}}_T$ est formée par la concaténation des fonctions caractéristiques sous la forme :

$$[\bar{\mathbf{I}}_T]_{[N_T \times N_{SVD_T}]} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{T,1} & \mathbf{I}_{T,2} & \cdots & \mathbf{I}_{T,N_{SVD_T}} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

4.2.2.5 Réécriture du problème

La réécriture du problème linéaire en fonction des nouvelles fonctions caractéristiques est nécessaire afin de comprendre les différences entre les deux versions de la CBFM. On commence par exprimer le vecteur inconnu \mathbf{a} , à travers la somme des produits fonctions caractéristiques-coefficients alpha, par l'expression suivante :

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{N_{SVD_1}} \alpha_{1k} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1,k} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{N_{SVD_2}} \alpha_{2k} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{2,k} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \cdots + \sum_{k=1}^{N_{SVD_P}} \alpha_{Pk} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{P,k} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

où on observe que, hors le changement des indices et le fait que le nombre de fonctions caractéristiques par domaine n'est pas fixe, le principe suivi est identique. Cela permet d'écrire le membre droit du problème linéaire comme :

$$\bar{\mathbf{z}}\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{N_{SVD_1}} \alpha_{1k} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,1} \end{bmatrix} [\mathbf{I}_{1,k}] + \sum_{k=1}^{N_{SVD_2}} \alpha_{2k} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,2} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,2} \end{bmatrix} [\mathbf{I}_{2,k}] + \cdots + \sum_{k=1}^{N_{SVD_P}} \alpha_{Pk} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,P} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,P} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,P} \end{bmatrix} [\mathbf{I}_{P,k}] \quad (4.25)$$

4.2.2.6 Construction de la matrice réduite

La méthode de Galerkin [4] est à nouveau utilisée pour construire la matrice réduite. Cela donne une matrice sous la forme :

$$\bar{\mathbf{Z}}_{[K \times K]}^R = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1}^R & \bar{\mathbf{Z}}_{1,2}^R & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{1,P}^R \\ \bar{\mathbf{Z}}_{2,1}^R & \bar{\mathbf{Z}}_{2,2}^R & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{2,P}^R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{P,1}^R & \bar{\mathbf{Z}}_{P,2}^R & \cdots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,P}^R \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

où les sous matrices $\bar{\mathbf{Z}}_{T,S}^R$ sont déterminées par :

$$\bar{\mathbf{Z}}_{T,S}^R_{[N_{SVD_T} \times N_{SVD_S}]} = [\bar{\mathbf{I}}_T]^H \bar{\mathbf{Z}}_{T,S} [\bar{\mathbf{I}}_S] \quad (4.27)$$

En regardant la taille de ces éléments on peut calculer la taille de la matrice réduite comme :

$$K = \sum_{T=1}^P N_{SVD_T} \quad (4.28)$$

On vérifie alors, que la taille de la matrice réduite n'est plus une fonction unique du nombre de blocs. Le nombre de fonctions caractéristiques, déterminé par le nombre d'ondes incidentes de référence utilisées dans leur construction, ainsi que le seuil de précision introduit lors de la décomposition SVD, deviennent les paramètres les plus importants. Cela justifie l'attention spéciale qui doit être portée à leur paramétrage.

4.2.2.7 Construction du vecteur d'excitation réduit

La construction du vecteur d'excitation réduit est identique à celle réalisée pour l'autre version de la CBFM. Soit :

$$\mathbf{b}_{[K \times 1]}^R = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^R \\ \mathbf{b}_2^R \\ \vdots \\ \mathbf{b}_P^R \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

où

$$\mathbf{b}_T^R = [\bar{\mathbf{I}}_T]^H \mathbf{b}_T \quad (4.30)$$

Il faut noter que, pour le calcul des sous-vecteurs d'excitation \mathbf{b}_T^R , par l'expression (4.30), $\mathbf{b}_T \neq \bar{\mathbf{b}}_T^{\text{ref}}$. C'est à dire, on utilise le champ incident pour lequel on souhaite résoudre le problème et non la collection d'ondes incidentes employée dans la construction des MBF. Ceci apporte un avantage considérable à cette version de la CBFM, du fait qu'une fois le calcul de la matrice réduite est réalisé, elle peut être utilisée quel que soit le vecteur d'excitation considéré. Cela la rend très efficace pour le calcul de la réponse Radar dans le cas mono-statique.

Pour finir, le problème est réduit à l'expression :

$$\bar{\mathbf{Z}}^R \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}^R \quad (4.31)$$

qui est résolue pour α afin d'obtenir le courant surfacique par l'équation (4.24). Il est important de remarquer que K est en général plus grand que P^2 ce qui implique une plus grande complexité de cette version de la CBFM. Cependant, cette augmentation de la complexité permet d'améliorer la précision.

La similitude entre les deux versions de la CBFM, dont le principe est le même, permet d'utiliser la méthode ACA de la même manière. Dans le but d'accélérer les produits matrice-vecteur présents dans la construction de la matrice réduite, les matrices de couplage entre blocs non adjacents sont compressées.

4.3 Complexité de la CBFM

L'analyse de la complexité en temps CPU et en mémoire, constitue un moyen quantitatif d'établir une base comparative entre la E-SDIM et les deux versions de la CBFM. Par la suite, on notera CBFM-1 la version décrite dans le paragraphe 4.2.1 et CBFM-2 celle du paragraphe 4.2.2. On suppose que chaque bloc de la surface est décrit par un nombre identique d'inconnues N_0 , ou N_{0E} , si on fait référence au domaine élargi.

La première étape de la CBFM-1 est la construction des fonctions caractéristiques, qu'on sépare en primaires et secondaires, et qui sont déterminées par l'équation (4.3). Au vue des opérations, on détermine sa complexité comme :

$$\mathcal{C}_{\text{CBFM-1}} = P \{ [C_E + \mathcal{O}(N_{0E}^2)] + (P-1) [C_E + \mathcal{O}(N_{0E}^2) + C_{E,0}] \} \quad (4.32)$$

P étant le nombre total de sous-domaines. C_E , la complexité associée à l'inversion de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}$, est égale à $\mathcal{O}(N_{0E}^3)$ pour une inversion LU. Si le terme peut être sauvegardé en mémoire sa deuxième instance peut être éliminée, et la complexité de l'étape devient :

$$\mathcal{C}_{\text{CBFM-1}} = P \{ [C_E + \mathcal{O}(N_{0E}^2)] + (P-1) [\mathcal{O}(N_{0E}^2) + C_{E,0}] \} \quad (4.33)$$

Le terme $\mathcal{O}(N_{0E}^2)$, représente la complexité des produits matrice-vecteur $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1} \mathbf{v}_{T'}$, présents sur les deux parties de l'équation (4.3). Le terme $C_{E,0}$ représente le coût des produits $\bar{\mathbf{Z}}_{T',S''} \mathbf{Y}_{S'',S''}$, $S \neq T$, égale à $\mathcal{O}(N_{0E}N_0)$. Cette expression peut être réécrite comme :

$$\mathcal{C}_{\text{CBFM-1}} = P [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + P^2 [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + P(P-1) [\mathcal{O}(N_{0E}N_0)] \quad (4.34)$$

Cette complexité est très similaire, mais légèrement supérieure, à celle du calcul du courant par la E-SDIM à l'ordre zéro. La différence provient du fait qu'il n'existe pas de somme dans le calcul des SBFs. Cela oblige à réaliser le produit $\bar{\mathbf{Z}}_{T',T'}^{-1} \mathbf{v}_{T'}$, $P-1$ fois pour la CBFM-1 au lieu d'une fois pour la E-SDIM. Alors on retrouve le terme $P^2 [\mathcal{O}(N_{0E}^2)]$ à la place de $(P+1) [\mathcal{O}(N_{0E}^2)]$.

La deuxième étape de la CBFM-1 est l'orthonormalisation Gram-Schmidt, qui a lieu après la troncature des fonctions caractéristiques. Étant une technique de factorisation matricielle QR, elle se voit typiquement associée une complexité de $\mathcal{O}(n^3)$. Dans le contexte particulier du problème traité, la complexité de la deuxième étape devient alors :

$$\mathcal{C}_{\text{GS-1}} = P [\mathcal{O}(N_0^3)] \quad (4.35)$$

Concernant la CBFM-2, les première étape de la méthode permet de réaliser le calcul des MBFs, en utilisant l'expression (4.15). Celle-ci correspond au calcul des PBFs de la CBFM-1, mais dans un nombre plus important. Ainsi, la complexité de cette première étape peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{C}_{\text{MBF-2}} = P \{ [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + N_{IPW} [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] \} \quad (4.36)$$

La CBFM-2 continue par la décomposition SVD, à laquelle est associée aussi une complexité de $\mathcal{O}(n^3)$. A ce stade, comme les MBFs n'ont pas encore été tronquées, la complexité de l'étape est déterminée par :

$$\mathcal{C}_{\text{SVD-2}} = P [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] \quad (4.37)$$

La complexité de la troncature et de la construction des CBFs est négligeable devant celles des étapes précédentes.

A ce stade, les deux versions de la méthode continuent avec la construction et inversion de la matrice réduite, alors il est pertinent de les comparer. La complexité partielle de la CBFM-1 prend la forme :

$$\mathcal{C}_{\text{CBFM-1,part}} = P [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + P [\mathcal{O}(N_0^3)] + P^2 [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + P(P-1) [\mathcal{O}(N_{0E}N_0)] \quad (4.38)$$

et celle de la CBFM-2 peut s'exprimer comme :

$$\mathcal{C}_{\text{CBFM-2,part}} = 2P [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + PN_{IPW} [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] \quad (4.39)$$

Étant donné que, comme règle générale pour les problèmes de taille moyenne $N_{IPW} \gg 2P$, on vérifie que la complexité associée aux premières étapes de la CBFM-2 est plus importante. Cette conclusion pourrait ne pas être valide pour des surfaces de grande taille, quand un grand nombre de domaines est utilisé.

L'étape de construction de la matrice réduite est similaire pour les deux versions de la CBFM, étant le nombre des CBFs la seule différence. Ainsi, pour la CBFM-1, dont $\bar{\mathbf{Z}}^R$ a une dimension $P^2 \times P^2$, la complexité de cette étape est déterminée par :

$$\mathbf{C}_{\text{MR-1}} = P^2 \{ [\mathcal{O}(PN_0^2)] + [\mathcal{O}(P^2N_0)] \} \quad (4.40)$$

où la première apparition de P^2 indique le nombre de répétitions de l'opération décrite par l'équation (4.9). Le premier terme à l'intérieur des accolades représente la complexité du produit $\bar{\mathbf{Z}}_{T,S}\bar{\mathbf{I}}_S$ et le deuxième, celle du produit entre $\bar{\mathbf{I}}_T^H$ et le résultat du produit précédent. Ce résultat peut être extrapolé à la deuxième version de la CBFM pour laquelle on peut montrer que la complexité de cette étape s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{C}_{\text{MR-2}} = P^2 \{ [\mathcal{O}(N_{\text{SVD}_0}N_0^2)] + [\mathcal{O}(N_{\text{SVD}_0}^2N_0)] \} \quad (4.41)$$

où N_{SVD_0} est le nombre moyen de fonctions caractéristiques retenues après la décomposition SVD des MBFs. On vérifie encore que, lorsque $N_{\text{SVD}_0} \gg P$, la complexité de l'étape de construction de la matrice réduite pour la CBFM-2, dépasse largement celle de la CBFM-1.

La complexité de la construction du vecteur réduit, peut être négligée par rapport à celles du reste des étapes. En effet, avec $P[\mathcal{O}(PN_0)]$ et $P[\mathcal{O}(N_{\text{SVD}_0}N_0)]$ pour la CBFM-1 et CBFM-2 respectivement, sa valeur n'est pas pertinente dans l'analyse de la complexité.

Reste à considérer les complexités de l'inversion LU de la matrice réduite et du produit $\bar{\mathbf{Z}}^{R-1}\mathbf{b}^R$. Dans le cas de la CBFM-1 ces étapes peuvent être liées à des complexités de l'ordre de $\mathcal{O}(P^6)$ et $\mathcal{O}(P^4)$ respectivement. De même, pour la CBFM-2 ces complexités deviennent $\mathcal{O}(P^3N_{\text{SVD}_0}^3)$ et $\mathcal{O}(P^2N_{\text{SVD}_0}^2)$.

De toute évidence, la complexité de l'inversion de la matrice réduite, bien que moins importante que l'inversion LU de la matrice impédance du problème d'origine, peut devenir très grande si un nombre trop élevé de fonctions caractéristiques ou de domaines est considéré.

Après l'analyse présentée, la complexité totale de la CBFM-1 peut être exprimée sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{CBFM-1}} = P \{ & [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + [\mathcal{O}(N_0^3)] + P[\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + (P-1)[\mathcal{O}(N_{0E}N_0)] \} + \\ & + P^2 \{ [\mathcal{O}(PN_0^2)] + [\mathcal{O}(P^2N_0)] \} + \mathcal{O}(P^6) + \mathcal{O}(P^4) \end{aligned} \quad (4.42)$$

et pour la CBFM-2, comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{CBFM-2}} = 2P[\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + PN_{\text{IPW}}[\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + \\ + P^2 \{ [\mathcal{O}(N_{\text{SVD}_0}N_0^2)] + [\mathcal{O}(N_{\text{SVD}_0}^2N_0)] \} + \mathcal{O}(P^3N_{\text{SVD}_0}^3) + \mathcal{O}(P^2N_{\text{SVD}_0}^2) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Si on considère la condition $P \gg 1$ et que la différence entre N_0 et N_{0E} est négligeable devant N_{0E} , l'expression peut être réécrite comme :

$$\mathbf{C}_{\text{CBFM-1}} \approx P \{ 2[\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + 2P[\mathcal{O}(N_{0E}^2)] \} + P^2 \{ [\mathcal{O}(PN_0^2)] + [\mathcal{O}(P^2N_0)] \} + \mathcal{O}(P^6) + \mathcal{O}(P^4) \quad (4.44)$$

Si les expressions (4.43) et (4.44) sont réécrites en fonction du nombre total d'inconnues elles deviennent :

$$\mathcal{C}_{\text{CBFM-1}} \approx 2 \left[\mathcal{O} \left(\frac{N^3}{P^2} \right) \right] + 2 [\mathcal{O}(N^2)] + P \{ [\mathcal{O}(N^2)] + P [\mathcal{O}(PN)] \} + \mathcal{O}(P^6) + \mathcal{O}(P^4) \quad (4.45)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{CBFM-2}} \approx 2 \left[\mathcal{O} \left(\frac{N^3}{P^2} \right) \right] + N_{IPW} \left[\mathcal{O} \left(\frac{N^2}{P} \right) \right] + [\mathcal{O}(N_{SVD_0} N^2)] + P [\mathcal{O}(N_{SVD_0}^2 N)] + \\ + \mathcal{O}(P^3 N_{SVD_0}^3) + \mathcal{O}(P^2 N_{SVD_0}^2) \end{aligned} \quad (4.46)$$

N étant le nombre total d'inconnues après l'élargissement. Une comparaison par termes de ces deux expressions permet d'observer les effets du nombre de domaines. Il faut noter que, pour une valeur de N déterminée, l'augmentation de P implique une diminution de N_{SVD_0} . On peut conclure que, si aucune technique de compression matricielle n'est utilisée, la deuxième version de la CBFM, peut être améliorée davantage par rapport à la CBFM-1.

La complexité en espace mémoire de la CBFM est identique à celle de la E-SDIM, déterminée par l'expression suivante :

$$\mathcal{M}_{\text{CBFM}} \approx P \{ \mathcal{O}(N_{0E}^2) + (P-1) \mathcal{O}(N_{0E}^2) \} \quad (4.47)$$

qui en fonction du nombre total d'inconnues devient :

$$\mathcal{M}_{\text{CBFM}} \approx \mathcal{O} \left(\frac{N^2}{P} \right) + (P-1) \mathcal{O} \left(\frac{N^2}{P} \right) \quad (4.48)$$

4.3.1 Effet de la ACA sur la complexité

La technique ACA est utilisée avec la CBFM pour compresser les matrices de couplage entre blocs non adjacents [107], [63]. Il est clair que son effet sera d'accélérer les produits matrice-vecteur où de telles matrices sont impliquées. Alors, la complexité de chacune des étapes où l'on trouve ces produits, peut être multipliée par le facteur $(1 - \bar{\tau})$, $\bar{\tau}$ étant le taux moyen de compression des matrices de couplage. Sa définition a déjà été donnée.

Dans la CBFM-1, on peut identifier le calcul des CBFs comme la première des étapes où l'utilisation de la ACA augmente l'efficacité de la méthode. On trouve aussi la construction de la matrice réduite. En prenant

en compte l'effet de la ACA, la complexité totale de la CBFM-1 peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{CBFM-1}} = P \{ & [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + [\mathcal{O}(N_0^3)] + P [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + (P-1)(1-\bar{\tau}) [\mathcal{O}(N_{0E}N_0)] \} + \\ & + P [1 + (P-1)(1-\bar{\tau})] \{ [\mathcal{O}(PN_0^2)] + [\mathcal{O}(P^2N_0)] \} + \mathcal{O}(P^6) + \mathcal{O}(P^4) \end{aligned} \quad (4.49)$$

qui peut être réduite à :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{CBFM-1}} = P \{ & 2 [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + P(2-\bar{\tau}) [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] \} + \\ & + P [1 + (P-1)(1-\bar{\tau})] \{ [\mathcal{O}(PN_0^2)] + [\mathcal{O}(P^2N_0)] \} + \mathcal{O}(P^6) + \mathcal{O}(P^4) \end{aligned} \quad (4.50)$$

L'utilisation de la ACA pour la CBFM-2 est limitée à l'étape de construction de la matrice réduite. A partir de l'expression (4.43), la complexité de cette version de la méthode devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{CBFM-2}} = 2P [\mathcal{O}(N_{0E}^3)] + PN_{IPW} [\mathcal{O}(N_{0E}^2)] + \\ + P [1 + (P-1)(1-\bar{\tau})] \{ [\mathcal{O}(N_{SVD_0}N_0^2)] + [\mathcal{O}(N_{SVD_0}^2N_0)] \} + \mathcal{O}(P^3N_{SVD_0}^3) + \mathcal{O}(P^2N_{SVD_0}^2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.4 Comparaison CBFM et E-SDIM

Dans le but de montrer la pertinence de la E-SDIM pour le problème de diffraction par une surface rugueuse 2D, on réalise une comparaison entre les résultats numériques obtenues par la E-SDIM et ceux donnés par les deux versions de la CBFM. Le cas d'étude est une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$, illuminée par une onde plane non atténuée sur les bords, à 3 GHz. L'échantillonnage est réalisé avec une séparation entre points de $\lambda/(10\sqrt{2})$ sur les directions \hat{x} et \hat{y} . Cela garantit que les arêtes les plus larges ne dépassent pas $\lambda/10$. On obtient un problème à 58 520 inconnues.

L'angle ϕ_i étant fixé à 0° , on considère des angles d'incidence θ_i , allant de 0° à 60° par pas de 15° . Les deux polarisations, V et H, sont analysées.

Pour la configuration des méthodes, la surface a été divisée en 25 sous-domaines carrés de la même taille, et le paramètre de l'élargissement de blocs ΔR , est fixé à 0.21λ . Le seuil de convergence de la E-SDIM, ϵ_{SDIM} , est fixé à 0.01. Le nombre d'ondes incidentes nécessaires à la construction des MBFs de la CBFM-2, N_{IPW} est déterminé à 720. Le seuil de précision de la décomposition SVD est fixé à 0.001. La géométrie est illustrée sur la figure 4.2.

Il s'agit d'une surface rugueuse avec une densité de probabilité des hauteurs et une fonction d'auto-corrélation des hauteurs gaussiennes dont la longueur de corrélation selon les deux directions est de λ et l'écart des hauteurs égal à 0.2λ .

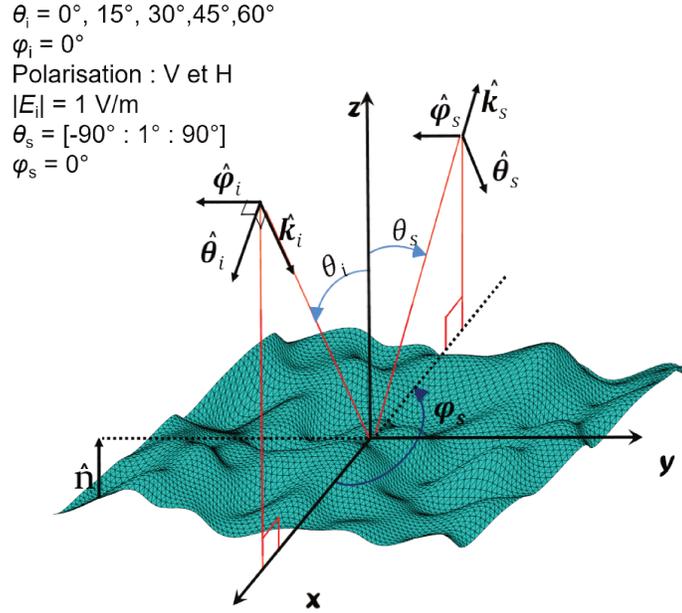


FIGURE 4.2 – Représentation géométrique du scénario utilisé dans les simulations.

Les valeurs du courant surfacique ont été obtenues pour chacune des combinaisons des paramètres mentionnés auparavant. Du fait de la similarité du comportement des résultats, seuls certains d'entre eux sont présentés. La table 4.1 affiche la relation de cas étudiés dans ce manuscrit. Pour les figures montrant l'information de la SER et de la phase du champ diffracté, les composantes en co-polarisation et en polarisation croisée sont incluses.

Tableau 4.1 – Cas considérés dans les figures de la section

Division	ΔR	Polarisation	θ_i	Figures
5×5	0.21λ	V	30°	4.3, 4.6, 4.12, 4.15
5×5	0.21λ	H	30°	4.4, 4.8, 4.13, 4.16
5×5	0.21λ	V	$15^\circ, 45^\circ, 60^\circ$	4.5, 4.10, 4.14, 4.17

4.4.1 Analyse sur la précision

L'analyse sur la précision est une étape nécessaire à la validation des modèles CBFM développés. Elle permettra de déterminer sous quelles conditions la comparaison entre cette méthode et la E-SDIM est pertinente. Comme il a été fait auparavant, la validation des résultats est faite en module et en phase, au niveau de courant de surface et du champ diffracté en champ lointain. La méthode de référence utilisée afin de déterminer l'erreur relative est la Mdm.

4.4.1.1 Courant surfacique

Sur les figures 4.3, on observe la composante principale du courant surfacique sur les axes de la surface, créé par une onde plane en polarisation verticale, avec $\theta_i = 30^\circ$. Pour la configuration sélectionnée, on peut apprécier un accord satisfaisant entre les courbes de la MdM, la E-SDIM et la CBFM-2. On vérifie que la précision de la première version de la CBFM n'est pas comparable à celle des autres méthodes.

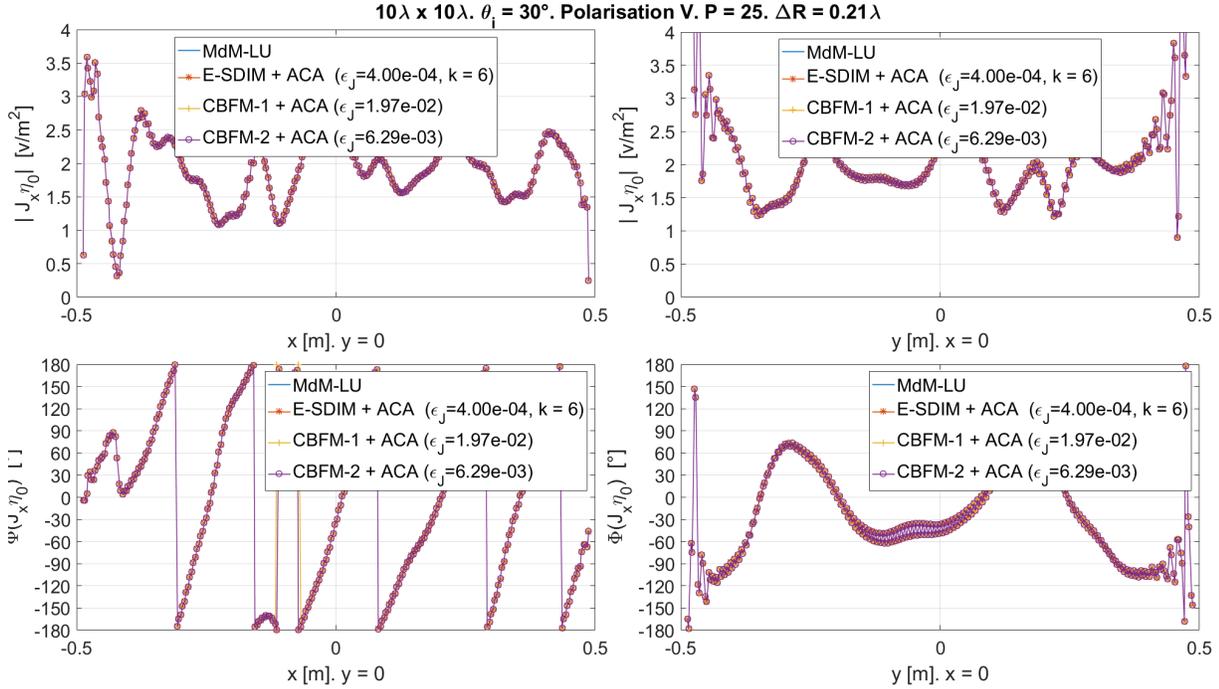


FIGURE 4.3 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Onde incidente plane en polarisation verticale, $\theta_i = 30^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1$ V/m et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$. $\epsilon_{SDIM} = 0.01, N_g = 1, N_{IPW} = 720$. Division en 25 sous-domaines et $\Delta R = 0.21\lambda$.

Le changement de la polarisation de l'onde incidente est accompagné de la même conclusion. Ceci est appréciable sur la figure 4.4, qui montre le courant surfacique sur l'axe \hat{y} de la surface pour le cas où elle est illuminée par une onde en polarisation horizontale.

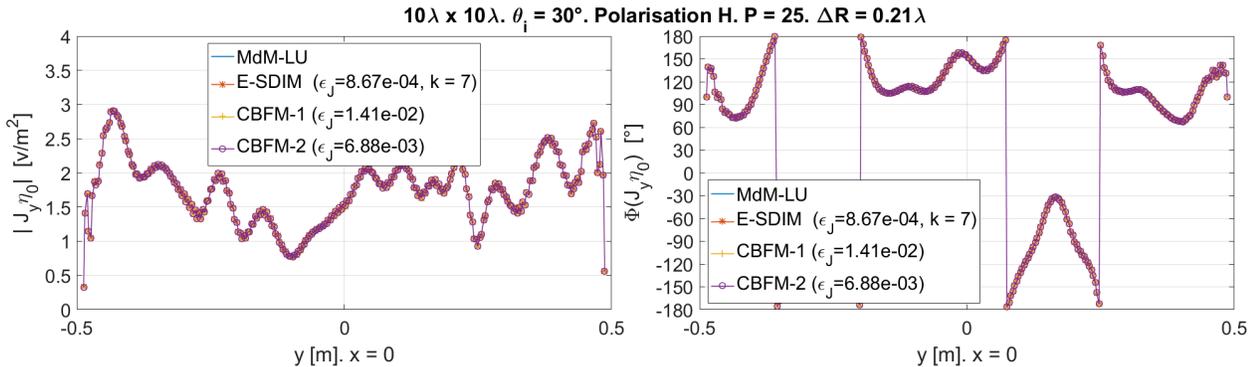


FIGURE 4.4 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y \eta_0$ sur l'axe y d'une surface rugueuse. Même configuration que sur la figure 4.3, mais en polarisation horizontale.

La figure 4.5 montre le comportement des trois méthodes par rapport au changement de l'angle d'incidence. D'abord, on peut affirmer que tant la E-SDIM comme la CBFM-2, donnent des résultats précis sur le calcul de courant surfacique dans le contexte de la surface rugueuse traitée. Cette conclusion est mitigée dans le cas de la CBFM-1. En effet, cette version montre une précision moins bonne que les autres méthodes. Cela est provoqué par la caractérisation de la surface avec un nombre insuffisant de fonctions caractéristiques. N'ayant d'autres paramètres de configuration, ceci peut être amélioré par l'augmentation du nombre de domaines et par une taille de chevauchement plus importante. Par contre, ces deux mesures sont accompagnées par l'augmentation de la complexité de certaines étapes de la méthode. Si on regarde l'équation (4.45), on vérifie que la construction des fonctions secondaires comme la construction et l'inversion de la matrice réduite sont affectées.

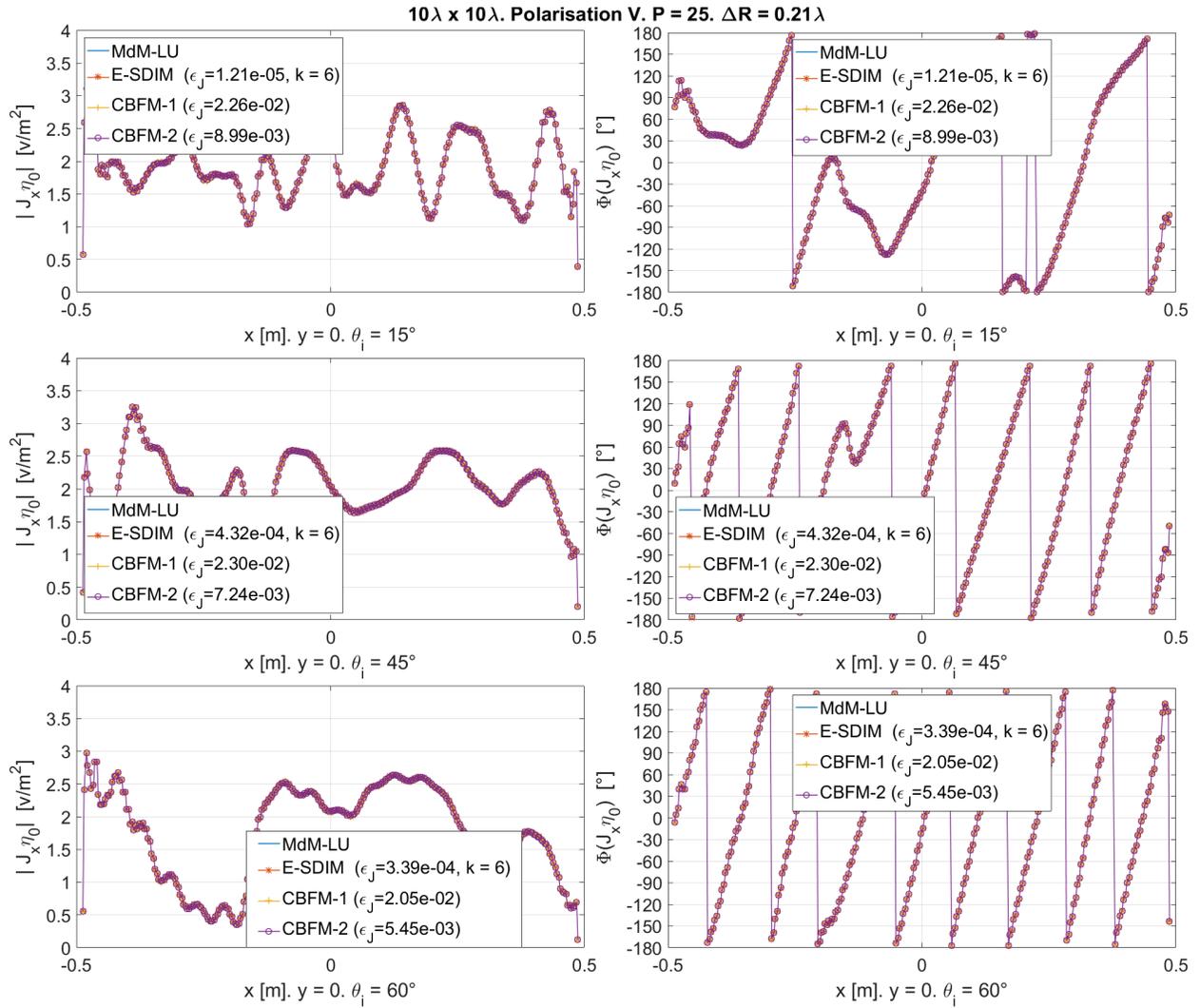


FIGURE 4.5 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_x \eta_0$ sur l'axe x d'une surface rugueuse. Même configuration que sur la figure 4.3. Onde incidente en polarisation verticale, $\theta_i = 15^\circ$ (en haut), $\theta_i = 45^\circ$ (au centre), $\theta_i = 60^\circ$ (en bas), $\phi_i = 0^\circ$, $|E_{\theta_i}| = 1$ V/m et $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 120\pi \Omega$.

4.4.1.2 Surface Équivalente Radar

L'analyse du comportement du champ diffracté constitue l'élément concluant sur la pertinence de ces méthodes pour la résolution du problème de la diffraction électromagnétique. C'est à ce propos que les figures 4.6 et 4.8 montrent l'information sur la SER et la phase du champ diffracté en zone de champ lointain.

D'abord, sur la figure 4.6 on observe, à gauche, la SER de la surface en dBm^2 et à droite, la phase du champ diffracté pour le cas où une onde en polarisation verticale illumine la surface. Ici, pour la composante en co-polarisation (en haut de la figure), l'accord des trois méthodes avec la MdM est très bon, en amplitude et en phase. Le même résultat est vérifié pour la E-SDIM et la CBFM-2 pour la composante en polarisation croisée. La CBFM-1 par contre, montre une précision moins bonne, surtout pour les directions éloignées de la direction spéculaire, où les niveaux du champ diffracté sont les plus faibles.

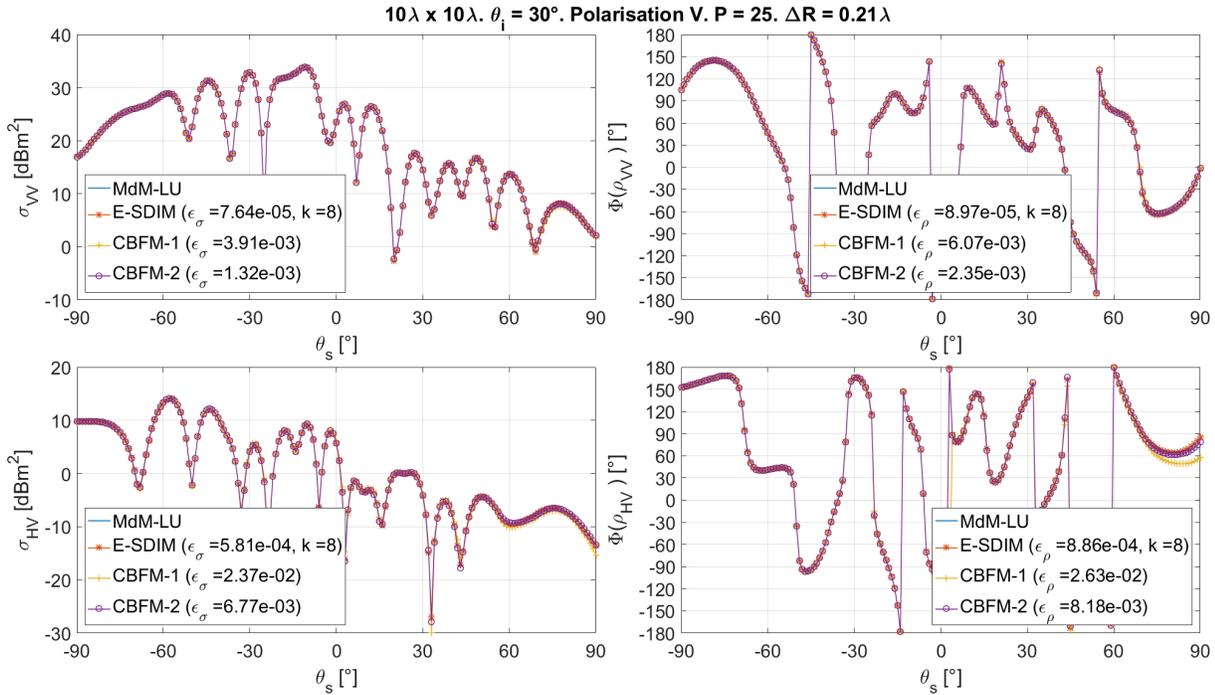


FIGURE 4.6 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite). Même configuration que sur la figure 4.3.

Ce résultat est d'une grande importance, car l'évaluation du comportement des méthodes dans l'analyse de la polarisation croisée, permet d'affirmer que la E-SDIM est bien adaptée au contexte et peut être considérée comme une méthode rigoureuse. Étant la plus précise des trois méthodes, elle pourra être utilisée comme méthode de référence pour des cas d'étude où l'utilisation de la MdM ne soit pas pertinente. Il est important de mentionner que la précision de la CBFM-2 peut être améliorée par l'augmentation du nombre d'ondes incidentes utilisées dans le calcul des MBFs ou par la diminution du seuil de précision de la décomposition SVD. Inévitablement, ces deux actions sont accompagnées par l'augmentation de la complexité des étapes de construction des MBFs, et de construction et d'inversion de la matrice réduite. Pour cette méthode, ceci peut constituer une limitation si la taille de la matrice réduite devient trop importante.

La figure 4.7 montre la différence en dB entre courbes de SER par rapport à la MdM. Cette information est plus pertinente afin de évaluer en détail la précision des méthodes. Elle permet de vérifier leurs précisions en fonction de la polarisation et de l'angle de observation. et de les comparer directement.

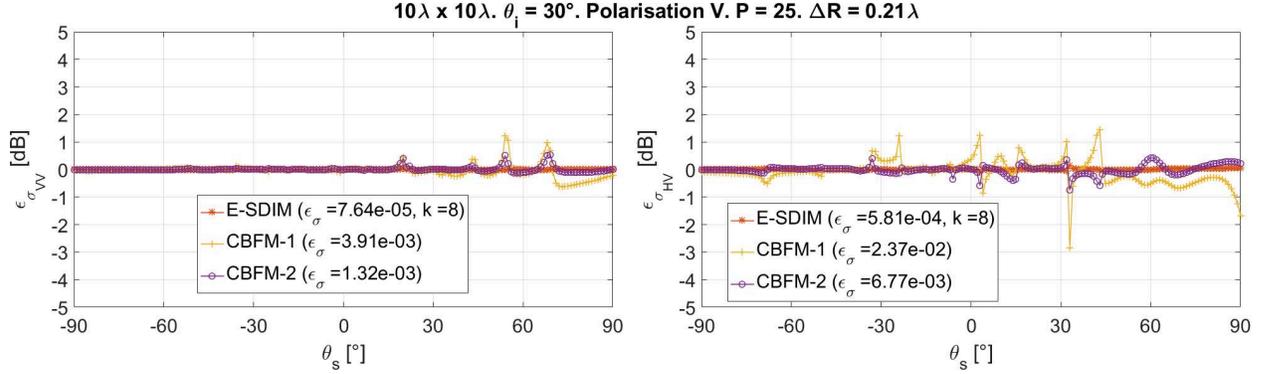


FIGURE 4.7 – Erreur sur la SER en fonction de l'angle d'observation, en co-polarisation (à gauche) et en polarisation croisée (à droite). Même configuration que sur la figure 4.6.

La figure 4.8 permet d'arriver aux mêmes conclusions. Elle montre le comportement des méthodes quand la surface est illuminée par une onde en polarisation horizontale, et avec le même angle d'incidence que celui de la figure 4.6.

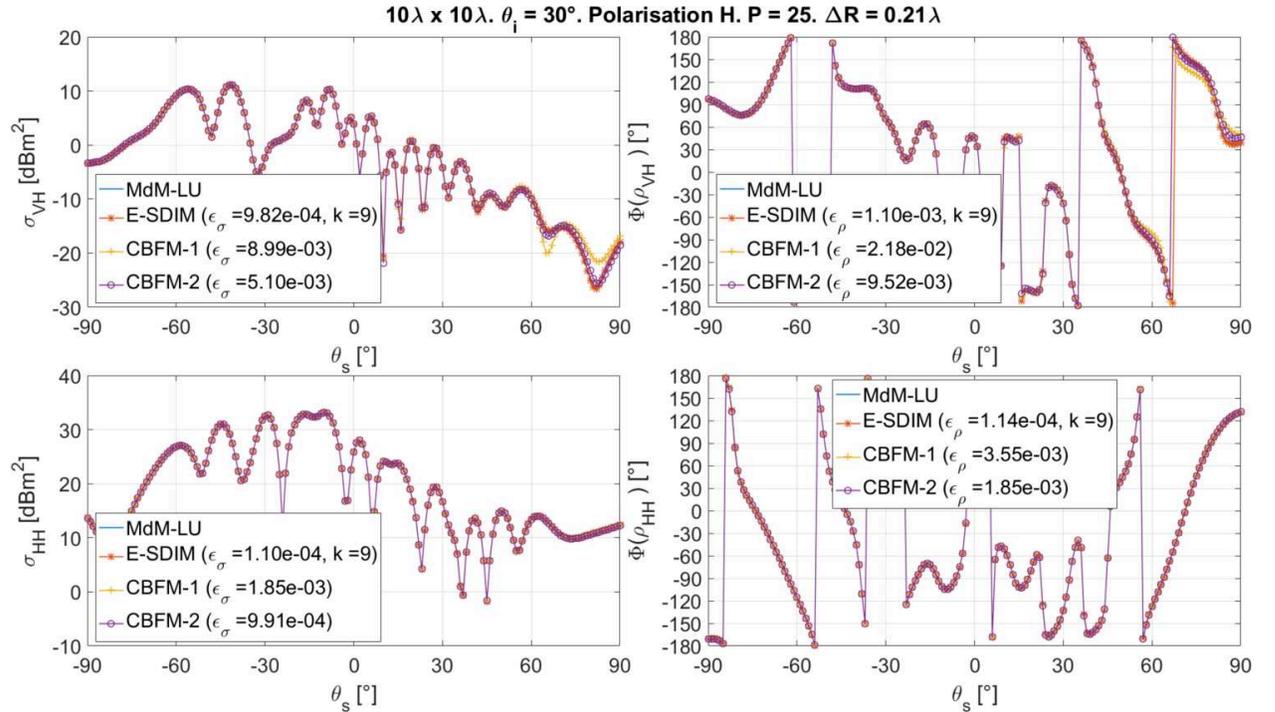


FIGURE 4.8 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite). Même configuration que sur la figure 4.4.

La figure 4.9 est similaire à la figure 4.7. elle confirme le bon accordement existant entre la MdM et la E-SDIM, ainsi que avec la CBFM-2. De plus elle montre que la CBFM-1 donne une erreur très importante

pour les niveaux faibles.

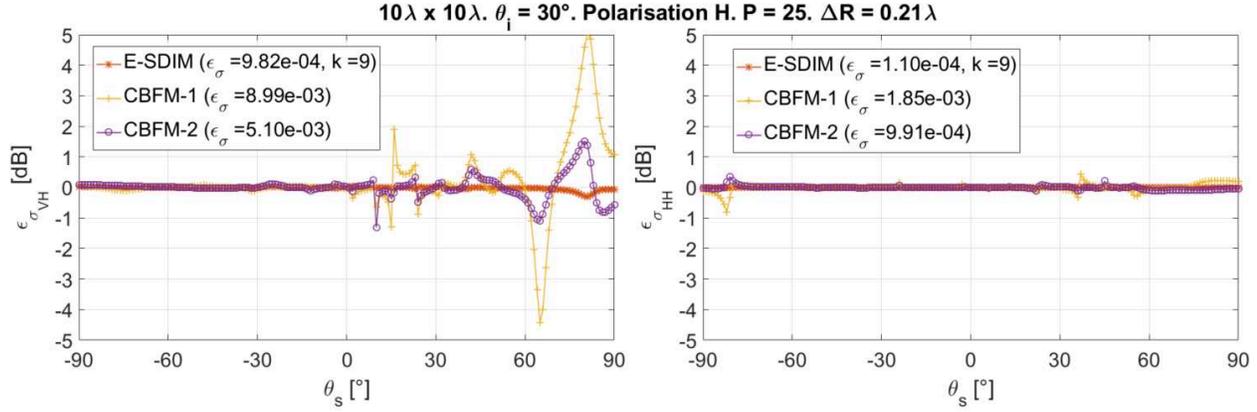


FIGURE 4.9 – Erreur sur la SER en fonction de l’angle d’observation, en co-polarisation (à gauche) et en polarisation croisée (à droite). Même configuration que sur la figure 4.6.

Les figures 4.10 et 4.11 confirment ce qui a été déterminé pour le cas de la figure 4.5. Elles montrent la SER et la phase du champ diffracté en co-polarisation et en polarisation croisée pour deux autres angles d’incidence.

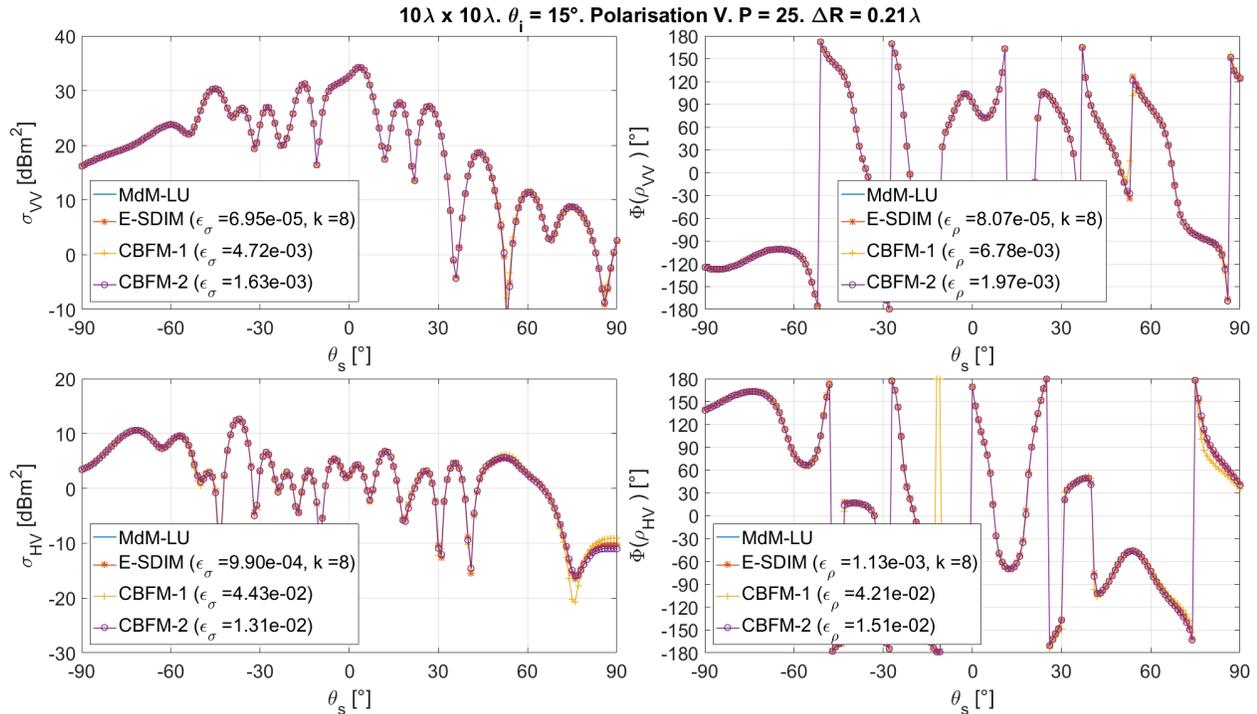


FIGURE 4.10 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite). Même configuration que sur la figure 4.4.

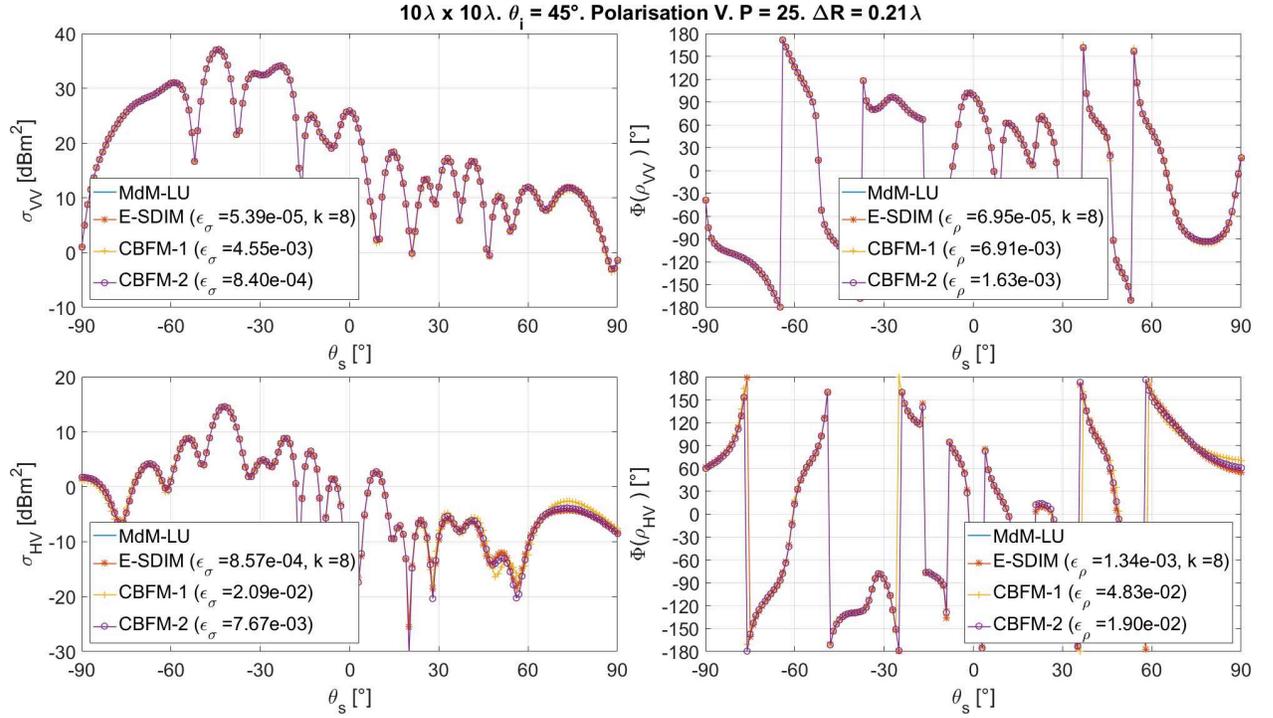


FIGURE 4.11 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite). Même configuration que sur la figure 4.4.

4.4.2 Analyse sur la performance : intégration de la ACA

L'objectif initial de ce travail de recherche est de réaliser l'évaluation rigoureuse de la diffraction électromagnétique par une surface 2D. A ce propos, on a développé la E-SDIM, et établi sa pertinence pour la résolution du problème considéré. Dans la présente section, on montre des résultats sur son hybridation avec la ACA dans le cas d'une surface rugueuse. On utilise cette technique aussi en combinaison avec les deux versions de la CBFM pour réaliser une mise en perspective et la comparaison de la performance des méthodes quand une surface de plus grande taille est étudiée.

En considérant le même ensemble des variables de configuration de la section précédente, on présente ici des résultats obtenus lors de l'évaluation d'une surface de taille $10\lambda \times 10\lambda$, décomposée en 64 sous-domaines de taille $2\lambda \times 2\lambda$.

Le seuil de convergence de la ACA ϵ_{ACA} est fixé à 0.001. Le taux de compression moyen des matrices compressibles $\bar{\tau}_c$ est de 98%. Ceci permet d'obtenir un taux de compression global $\tau_g = 74\%$.

La surface rugueuse est caractérisée par une densité de probabilité des hauteurs et une fonction d'auto-corrélation des hauteurs gaussiennes dont la longueur de corrélation selon les deux dimensions est de λ et l'écart des hauteurs égal à 0.2λ .

4.4.2.1 Courant surfacique

Au niveau de courant surfacique, on observe un accord très bon entre les courbes de la E-SDIM et la CBFM-2 et une légère manque de précision pour la prédiction des valeurs faibles avec la CBFM-1. Ceci est observable sur la figure 4.12, qui montre le courant sur les axes principaux de la surface quand elle est illuminée par une onde en polarisation verticale, avec $\theta_i = 30^\circ$. La figure 4.13 montre une information similaire, en considérant une onde incidente en polarisation horizontale.

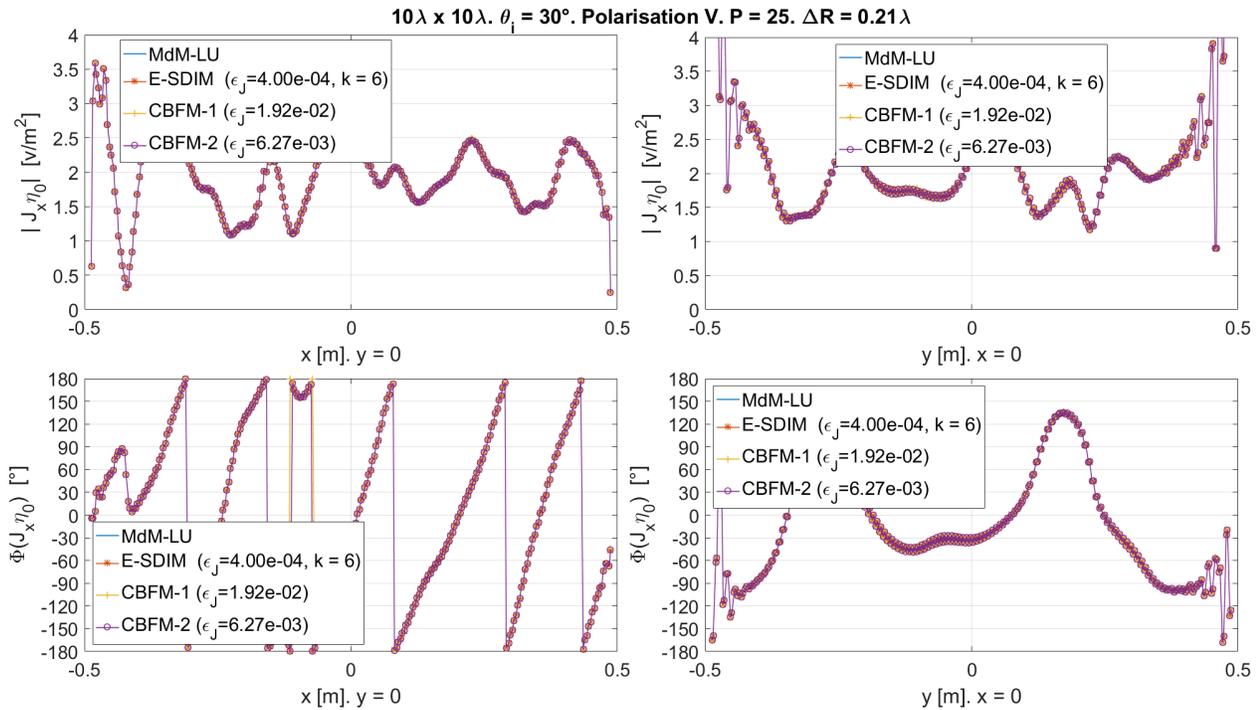


FIGURE 4.12 – Module (en haut) et phase (en bas) de $J_x \eta_0$ sur les axes géométriques d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.3 mais avec une hybridation avec la ACA.

On vérifie que l'utilisation de la ACA n'implique aucun changement dans le comportement des résultats par rapport à ceux obtenus sans elle. On observe aussi l'augmentation de l'ordre de convergence de la E-SDIM avec l'augmentation du nombre de sous-domaines. La cause de ce phénomène a déjà été expliquée. En effet, cette augmentation de l'ordre de convergence est provoqué par l'augmentation du nombre de discontinuités dans le courant surfacique, qui doivent être corrigées lors des itérations.

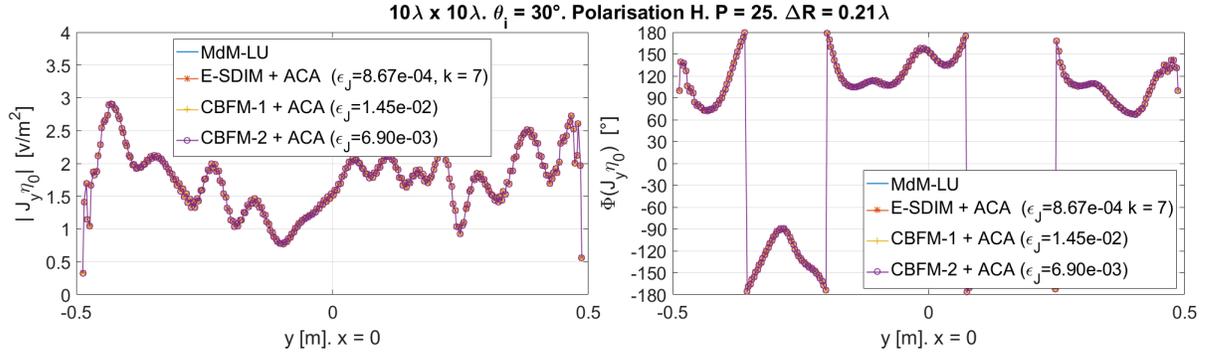


FIGURE 4.13 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_y \eta_0$ sur l'axe x d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.4 mais avec une hybridation avec la ACA.

La figure 4.14 montre les valeurs du courant sur la surface quand d'autres angles d'incidence sont considérés. Les courbes de la E-SDIM et de la CBFM-2 sont confondues pour des valeurs de θ_i allant jusqu'à 60° .

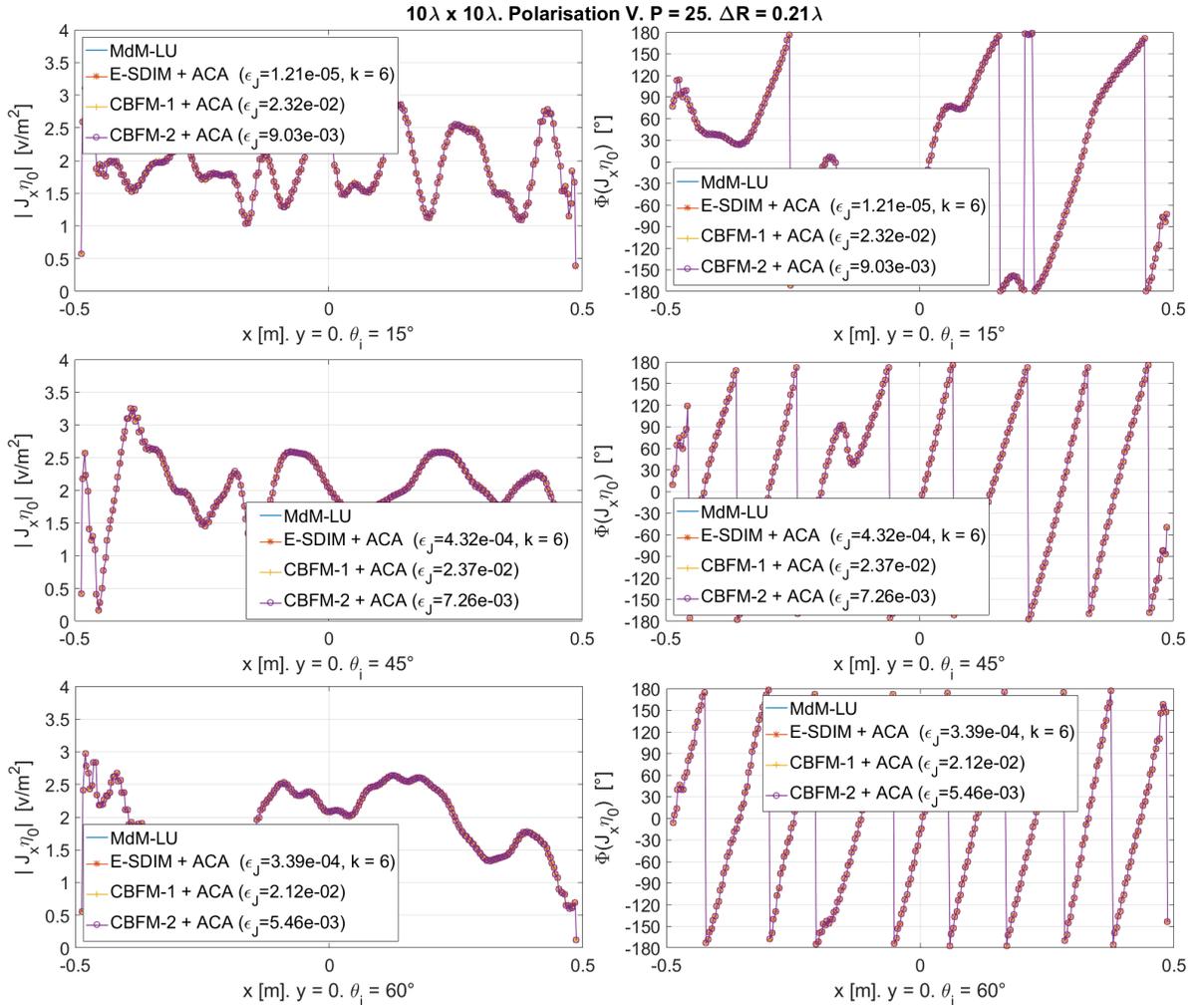


FIGURE 4.14 – Module (à gauche) et phase (à droite) de $J_x \eta_0$ sur l'axe x d'une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.5 mais avec une hybridation avec la ACA.

4.4.2.2 Surface Équivalente Radar et phase du champ diffracté en champ lointain

La figure 4.15 permet d'observer les composantes en co-polarisation et en polarisation croisée de la SER et la phase du champ diffracté en champ lointain quand la surface est illuminée par une onde en polarisation verticale avec $\theta_i = 30^\circ$. Comme espéré, les courbes s'accordent très bien à l'exception de la composante en polarisation croisée obtenue par la CBFM-1.

Cette conclusion est extensible à la figure 4.16 où on peut observer l'évaluation des mêmes grandeurs pour le cas d'une onde incidente en polarisation horizontale. Ceci est aussi applicable aux figures 4.17 et 4.18 où sont montrés les résultats pour d'autres angles d'incidence.

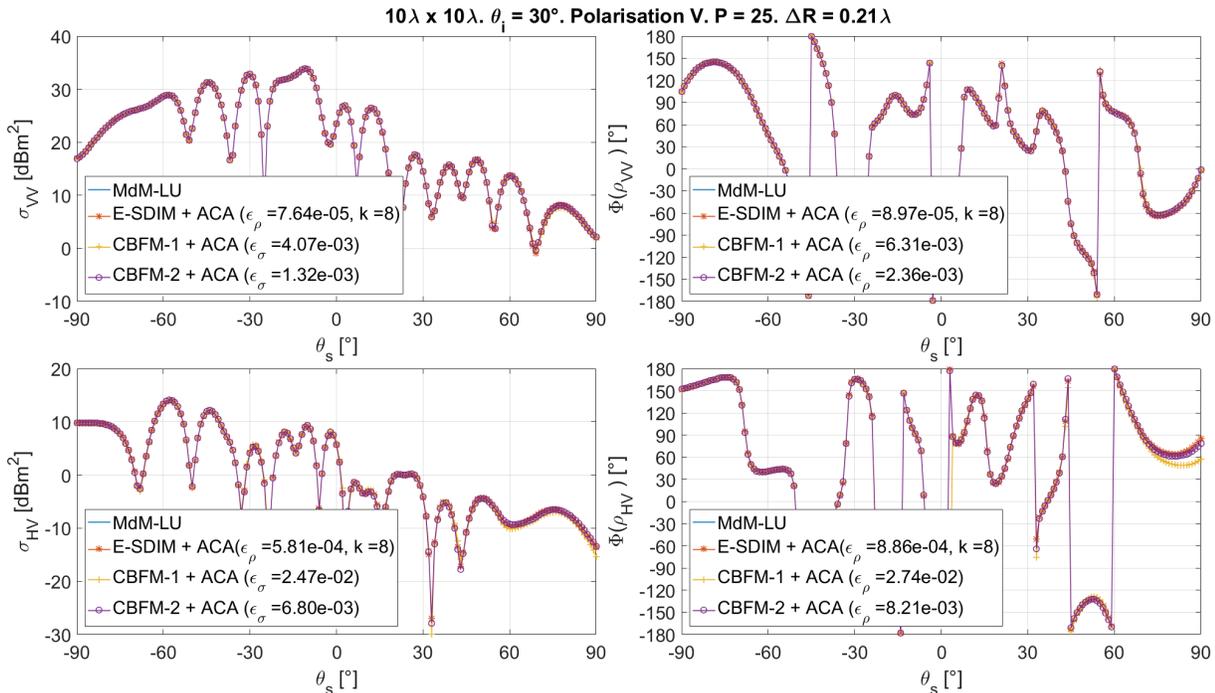


FIGURE 4.15 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.3 mais avec une hybridation avec la ACA.

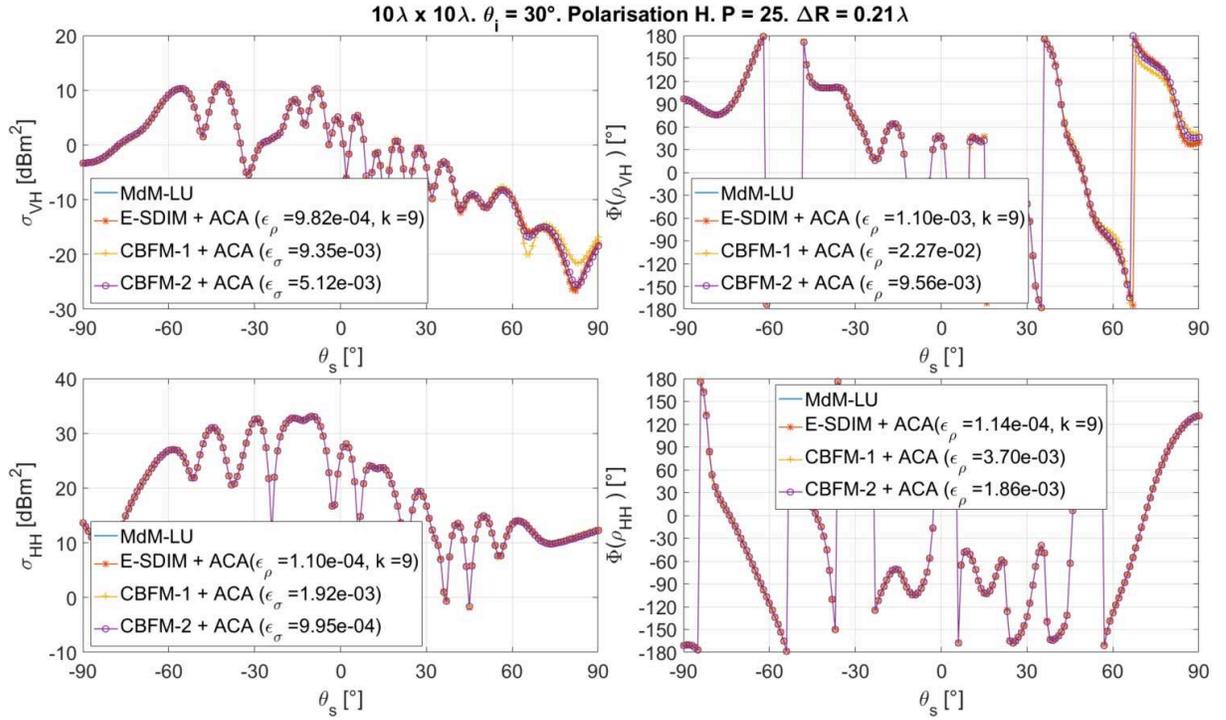


FIGURE 4.16 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour d’une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.4 mais avec une hybridation avec la ACA.

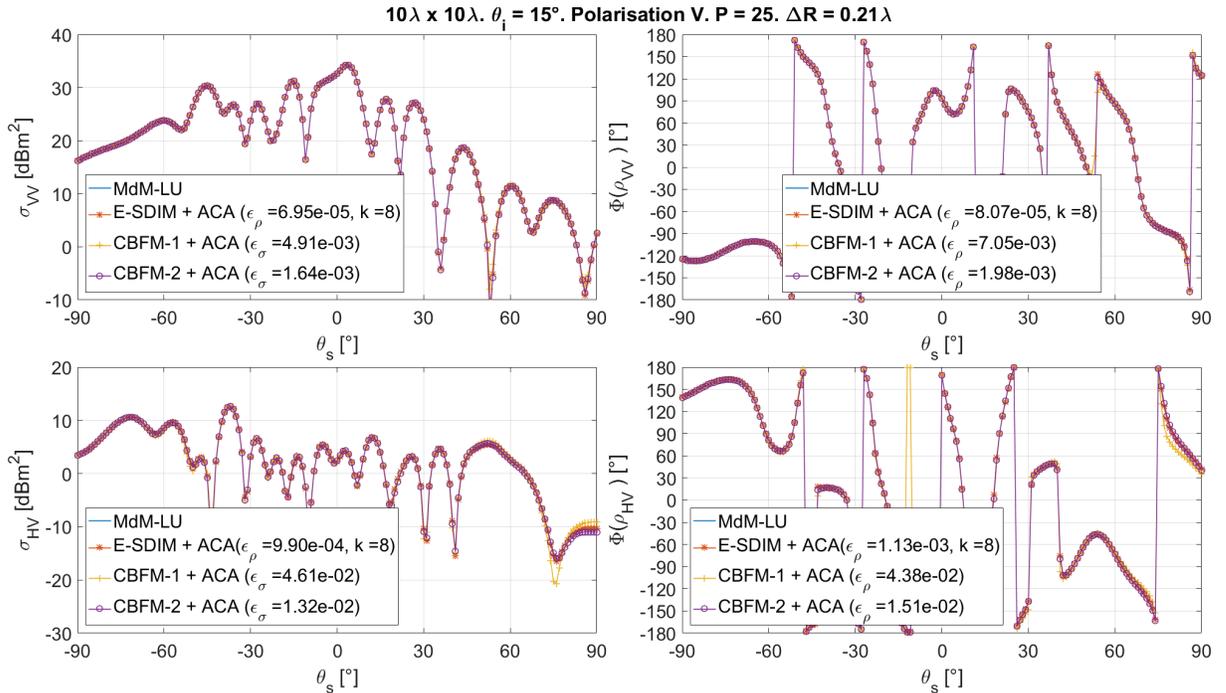


FIGURE 4.17 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour d’une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.10 mais avec une hybridation avec la ACA.

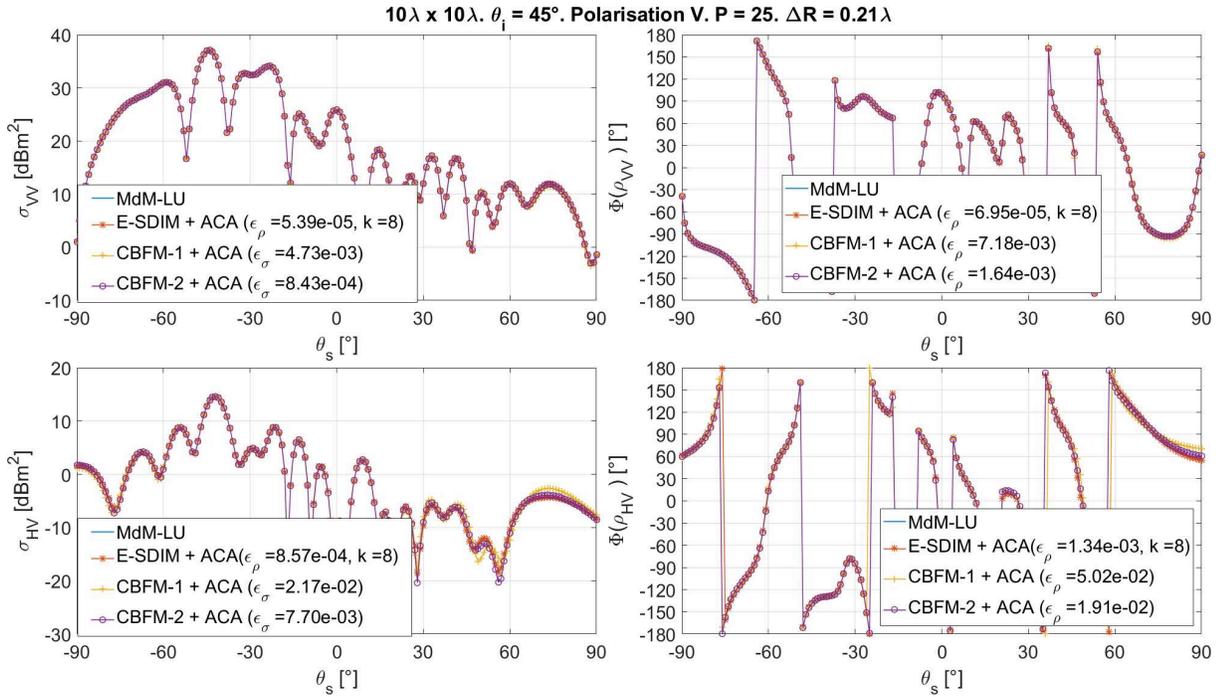


FIGURE 4.18 – σ (à gauche) et phase de ρ_{cd} (à droite) pour d’une surface rugueuse de taille $10\lambda \times 10\lambda$. Même configuration que sur la figure 4.11 mais avec une hybridation avec la ACA.

Les figures 4.19 et 4.20 sont complémentaires des figures 4.17 et 4.18 respectivement. Elles montrent l’erreur sur la SER par rapport l’angle d’observation. Leur analyse permet d’affirmer que la E-SDIM est une méthode précise, que ce soit pour le calcul de la SER en co-polarisation ou en polarisation croisée. On observe aussi, que la CBFM-1 n’est pas comparable en précision aux deux autres méthodes. Elle présente des problèmes surtout dans l’évaluation de la polarisation croisée, pour le niveaux très faibles.

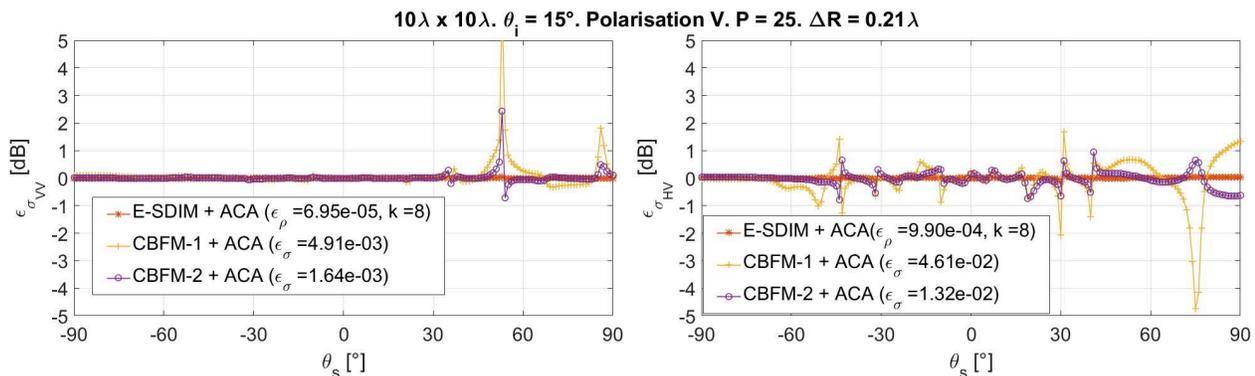


FIGURE 4.19 – Erreur sur la SER en fonction de l’angle d’observation, en co-polarisation (à gauche) et en polarisation croisée (à droite). Même configuration que sur la figure 4.17.

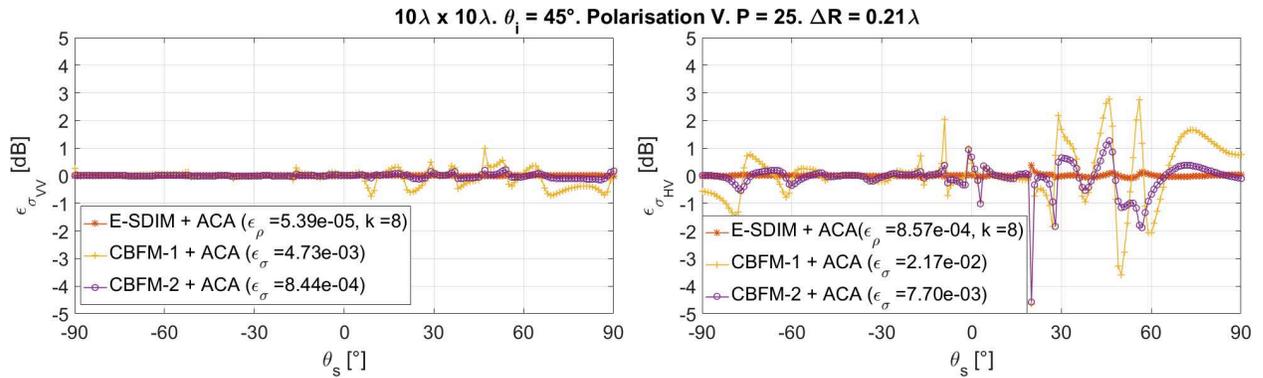


FIGURE 4.20 – Erreur sur la SER en fonction de l’angle d’observation, en co-polarisation (à gauche) et en polarisation croisée (à droite). Même configuration que sur la figure 4.18.

4.5 Conclusion du chapitre

L’objectif de ce chapitre a été de réaliser une mise en perspective de la E-SDIM, en la comparant avec la CBFM, dans le contexte de la diffraction par une surface 2D rugueuse parfaitement conductrice. Le choix a été conditionné par la popularité de la CBFM et son utilisation dans de multiples contextes, et par le fait de la forte similarité entre certaines étapes de la E-SDIM et la CBFM.

On a réalisé une description détaillée de la CBFM, afin de montrer les similitudes existantes entre les deux méthodes, ainsi que leurs différences.

L’analyse réalisée sur la complexité des deux versions de la méthode a permis d’établir une base de comparaison théorique de leur performance avec celle de la E-SDIM.

On a présenté des résultats obtenus lors de l’utilisation de la CBFM et réalisé la comparaison avec ceux obtenus avec la E-SDIM afin d’évaluer leur précision. La performance des méthodes a été évaluée à partir de l’utilisation de la méthode ACA afin d’accélérer le calcul des fonctions caractéristiques et la construction de la matrice réduite.

L’analyse des résultats numériques permet d’affirmer que la E-SDIM est une méthode rigoureuse, bien adaptée à l’évaluation de la diffraction par des surfaces rugueuses parfaitement conductrices. Son niveau de précision est plus qu’acceptable pour la détermination du champ diffracté en champ lointain et l’évaluation de la SER.

Conclusion générale et perspectives

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit portent sur la modélisation rigoureuse de la diffraction d'ondes électromagnétiques par une surface bidimensionnelle (aléatoirement) rugueuse, parfaitement conductrice et de dimensions modérées devant la longueur d'onde électromagnétique. De plus, une surface mono échelle de densité de probabilité et de fonction d'autocorrélation des hauteurs gaussiennes est considérée. Afin de négliger le phénomène de conduit dans le cas d'une application maritime, l'angle d'incidence par rapport à la normale du plan moyen de la surface n'excède pas soixante degrés.

Le premier chapitre de ce manuscrit établit les bases théoriques nécessaires au traitement du problème et présente un état de l'art des méthodes numériques rigoureuses dédiées à ce problème. Ceci a permis de justifier le choix de l'utilisation de l'équation intégrale de frontière EFIE, discrétisée par la M_dM de Galerkin associée aux fonctions de base RWG.

Les résultats obtenus à l'issue de l'implémentation de la méthode E-SDIM (Extended-Subdomain Decomposition Domain) ont été présentés dans le troisième chapitre, dans le contexte d'une surface lisse parfaitement conductrice. Cette technique est basée sur la décomposition de domaines de la surface. De plus, ils sont élargis sur quelques mailles, permettant la convergence de la méthode et dans le but de contrecarrer l'effet de bord artificiel dû à la finitude des domaines.

Le dernier chapitre présente l'implémentation numérique de la méthode CBFM (Characteristic Basic Function Method) et la compare avec la E-SDIM pour le calcul du champ diffracté par une surface 2D rugueuse parfaitement conductrice. La précision et la performance des deux méthodes sont alors analysées. Ainsi, la CBFM comme la E-SDIM, sont très efficaces pour le calcul du champ diffracté par une surface rugueuse et, la CBFM est plus performante que la E-SDIM. De plus, leur hybridation avec la méthode de compression ACA, qui permet d'accélérer le calcul des produits matrice-vecteur impliquant les matrices de couplage et de réduire significativement le stockage mémoire, augmente la performance de ces deux méthodes.

Ainsi, le principal intérêt de la E-SDIM et de la CBFM hybridées à l'ACA réside dans la possibilité de résoudre des systèmes linéaires par blocs, avec des complexités CPU et mémoire, très inférieures à celle de l'inversion directe LU de la matrice impédance du problème complet.

A l'issue des travaux réalisés, on peut établir les perspectives suivantes :

Les inversions LU des matrices impédances des sous-domaines nécessaires au calcul des fonctions ca-

ractéristiques primaires et du courant à l'ordre zéro, ont été identifiées comme les étapes les plus coûteuses pour les deux méthodes. Ainsi, un moyen d'accélérer cette étape est d'appliquer l'approximation de l'optique physique.

Dans le cas de la E-SDIM, le calcul des courants d'ordres supérieurs implique les matrices de couplage entre sous-domaines parfois très éloignés. Ces interactions peuvent être négligeables et donc contribuent peu au calcul du courant sur chaque domaine. Mathématiquement, ceci revient à tronquer la somme sur k dans l'expression du courant. Cette approximation a été testée sur une surface de mer 1D, donnant des résultats très satisfaisants. Un second critère possible pourrait être basé sur la distance entre les blocs. Un dernier critère serait associé à une convergence locale. Ainsi, lors du calcul du courant à l'ordre k , si des interactions sont négligeables, alors elles ne seront pas considérées pour le calcul du courant à l'ordre $k + 1$.

La taille de l'élargissement des blocs joue un rôle important sur l'efficacité des méthodes, notamment dans le contexte de grandes surfaces, pour lequel un grand nombre de domaines est défini où l'élargissement des blocs peut augmenter significativement le nombre d'inconnues. Pour pallier ce problème, une solution consisterait à supprimer dans le domaine source les fonctions RWG communes à celles du domaine d'observation. Cette solution, déjà proposée dans la CBFM, permettrait d'améliorer les taux de compression de l'ACA dans l'algorithme E-SDIM.

Les travaux de cette thèse ont déjà commencé à être exploités par le laboratoire IETR. Ainsi, la compression a été améliorée en re-compressant (RACA) les deux matrices résultantes de l'ACA à l'aide d'une décomposition QR suivie d'une décomposition SVD tronquée par l'introduction d'un seuil. De plus, cet algorithme a été également appliqué à l'E-SDIM sur la compression des blocs adjacents en ne considérant que les mailles non partagées entre les blocs source et observation. Ainsi, les méthodes E-SDIM et CBFM, hybridées à la RACA, ont été testées sur une surface rugueuse parfaitement conductrice de taille $24\lambda \times 24\lambda$ décomposée en 64 domaines avec un nombre total d'inconnues de 172 320. L'annexe détaille les résultats obtenus.

Annexe

Diffraction électromagnétique 3D par une surface rugueuse métallique par décomposition de domaines

1st Christophe Bourlier

IETR, UMR CNRS 6164, Université de Nantes

Rennes, France

christophe.bourlier@univ-nantes.fr

3rd Gildas Kubické

Maitrise de l'information

Bruz, France

gildas.kubicke@intradef.gouv.fr

2nd Yunniel Arencibia

IETR, UMR CNRS 6164, Université de Nantes

Rennes, France

yunniel.arencibia-noa@univ-nantes.fr

4th Sami Bellez

CMN

Cherbourg, France

sbellez@cmn-cherbourg.com

Abstract—Dans cette communication, des simulations numériques du champ diffracté par une surface rugueuse parfaitement conductrice sont présentées. Il est calculé rigoureusement à l'aide de l'équation intégrale de frontière EFIE (Electric Field Integral Equation) discrétisée par la méthode des moments de Galerkin associée aux fonctions de base RWG (Rao-Wilton-Glisson). Afin de résoudre efficacement le système linéaire résultant, deux méthodes par décomposition de domaines, la SDIM (Subdomain Decomposition Iterative Method) et la CBFM (Characteristic Basic Function Method), sont étudiées.

Index Terms—Diffraction électromagnétique, surface rugueuse, surface équivalente Radar normalisée, décomposition de domaines, méthodes des moments.

I. INTRODUCTION

La modélisation de la diffusion électromagnétique par une surface (aléatoirement) rugueuse est un sujet de recherche très actif. Elle est rencontrée dans de nombreuses applications liées à l'environnement comme les sols naturels ou la surface de mer ou, pour la caractérisation de défauts de surface à l'échelle de l'optique.

Pour résoudre ce problème, deux grandes familles de méthodes sont proposées (i) Les méthodes dites "asymptotiques", qui introduisent des hypothèses simplificatrices [1] dans le but d'obtenir le plus souvent une expression analytique du champ diffracté (ii) Les méthodes dites "rigoureuses" [2]–[4] dont la seule hypothèse introduite est la discrétisation du problème, donnant ainsi une solution considérée comme exacte ou de référence. Dans cette communication, nous proposons d'investiguer un candidat potentiel de cette famille : La résolution de l'équation intégrale de frontière EFIE (Electric Field Integral Equation) discrétisée par la méthode des moments de Galerkin dont les fonctions de base sont de type RWG (Rao-Wilton-Glisson) [5]. L'objet sous test est une surface rugueuse parfaitement conductrice dont le milieu supérieur est homogène. Le problème revient alors à résoudre un système linéaire (ou inversion d'une matrice) dont la taille est directement proportionnelle à l'envergure de l'objet normalisée par la longueur d'onde.

Pour les applications Radar microondes, les dimensions électriques de l'objet peuvent devenir grandes impliquant d'inverser une matrice de grande taille. A cette étape, on peut encore distinguer deux types de méthodes (i) Le système est résolu de manière itérative par une succession de produits matrice-vecteur dans lesquels des accélérations sont introduites comme la MLFMM (Multi-Level Fast Multiple Method) ou la SMCG (Sparse Matrix Canonical Grid) method [6] (ii) La surface est décomposée par blocs ou domaines. Les blocs diagonaux de la matrice représentent les interactions locales d'un domaine sur lui même tandis que les sous matrices non diagonales représentent les interactions entre ces domaines.

Dans ce contexte, la CBFM (Characteristic Basis Functions Method) a été largement employée depuis sa publication en 2003 [7]. Plus récemment, la Subdomain Decomposition Iterative Method (SDIM) a été publiée pour la résolution efficace du problème de diffraction par une surface de mer mono-dimensionnelle fortement conductrice et en présence d'un conduit et d'un objet [8].

Dans cette communication, la SDIM et la CBFM sont comparées en termes d'efficacité et de précision en calculant le champ diffracté par une surface rugueuse parfaitement conductrice. A noter que les deux versions suivantes de la CBFM seront testées :

- 1) CBFM version 1 (CBFM1) : Les fonctions caractéristiques sont calculées en illuminant avec une unique onde plane et en calculant des fonctions jusqu'à l'ordre deux.
- 2) CBFM version 2 (CBFM2) : Les fonctions caractéristiques sont calculées en illuminant par une collection d'ondes planes convenablement échantillonnées en ϕ et θ .

II. SDIM (SUB-DOMAIN DECOMPOSITION ITERATIVE METHOD)

A. Formulation

Tout d'abord la SDIM divise la surface S en P blocs, comme le montre la Figure 1. Chacun des domaines est

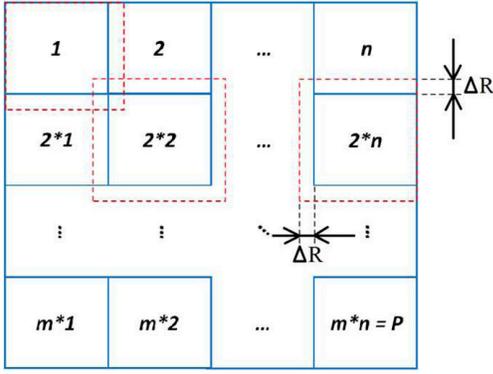


Fig. 1. Décomposition de la surface par blocs.

ensuite élargi uniformément d'une distance ΔR , impliquant un recouvrement entre domaines adjacents. Cet élargissement améliore la convergence mais a l'inconvénient d'augmenter légèrement le nombre d'inconnues. Typiquement, des résultats numériques montrent qu'une ou deux mailles sont suffisantes pour obtenir une convergence satisfaisante.

Le système linéaire obtenu en appliquant la MoM s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,1} & \dots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,1} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{1,2} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,2} & \dots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{1,P} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,P} & \dots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_P \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Les matrices $\bar{\mathbf{Z}}_{i,i}$ et \mathbf{b}_i représentent respectivement la matrice impédance associée au domaine non élargi i et le vecteur d'excitation associé au même domaine. $\bar{\mathbf{Z}}_{i,j}$ représente la matrice de couplage entre les blocs non élargis i et j . Le vecteur inconnu \mathbf{a}_i est relié au vecteur densité de courant surfacique \mathbf{J} du domaine i . En appliquant alors le principe de Huygens, le champ diffracté dans le demi-espace supérieur est déterminé.

Avec la SDIM, le vecteur \mathbf{a} est alors obtenu par

$$\mathbf{a}^{(K_{\text{SDIM}})} \approx \sum_{k=0}^{K_{\text{SDIM}}} \mathbf{Y}^{(k)}, \quad (2)$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{i'}^{(0)} = \bar{\mathbf{Z}}_{i',i'}^{-1} \mathbf{b}_{i'} \\ \mathbf{Y}_{i'}^{(k)} = -\bar{\mathbf{Z}}_{i',i'}^{-1} \sum_{p=1, p \neq i'}^P \bar{\mathbf{Z}}_{i',p} \mathbf{Y}_p^{(k-1)} \quad k > 0 \end{cases}, \quad (3)$$

et le vecteur $\mathbf{Y}^{(k)} = [\mathbf{Y}_1^{(k)} \mathbf{Y}_2^{(k)} \dots \mathbf{Y}_P^{(k)}]^T$ est formé par les fonctions caractéristiques associées aux blocs et déterminées à partir de l'équation (3). Elles sont reliées à la densité de courant surfacique des blocs à l'ordre k . L'ordre de convergence K_{SDIM} est obtenu lorsque $\|\mathbf{a}^{(k-1)} - \mathbf{a}^{(k)}\| / \|\mathbf{a}^{(k)}\| \leq \epsilon_{\text{SDIM}}$ (typiquement $\epsilon_{\text{SDIM}} = 0.01$).

La notation "prime" indique l'élargissement des sous-domaines. Le vecteur $\mathbf{Y}_{i'}^{(k)}$ est tronqué (suppression des éléments associés à l'élargissement du domaine) afin d'obtenir

$\mathbf{Y}_{i'}^{(k)}$. Dans l'Eq. (3), la matrice $\bar{\mathbf{Z}}_{i',i'}^{-1}$ est associée au bloc élargi i' et $\mathbf{b}_{i'}$ représente le champ incident sur le même domaine. De plus, $\bar{\mathbf{Z}}_{i',j}$ est la matrice de couplage entre le bloc source j et le bloc d'observation élargi i' . Il est important de noter que l'élargissement sur la source n'est pas appliqué afin d'éviter de propager l'erreur produite par les courants des arrêtes des domaines créés par leur finitude. L'élargissement des domaines permet à la SDIM de converger et de créer des bords réguliers aux domaines, atténuant ainsi l'effet de bord.

B. Complexités

Un moyen de quantifier le temps alloué à une méthode est de calculer sa complexité théorique (nombre de multiplications). D'après l'équation (3), elle est donnée par

$$C_{\text{SDIM}} = (K_{\text{SDIM}} + 1) \sum_{i=1}^{i=P} [\mathcal{O}(N_i^3) + \mathcal{O}(N_i^2)] + K_{\text{SDIM}} \sum_{i_1=1}^{i_1=P} \sum_{i_2=1, i_2 \neq i_1}^{i_2=P} \mathcal{O}(N_{i_1} N_{i_2}). \quad (4)$$

L'exposant trois correspond à la complexité de la décomposition LU réalisée sur chacun des blocs i . Si les décompositions LU peuvent être stockées en mémoire alors cette complexité devient $\sum_{i=1}^{i=P} \mathcal{O}(N_i^3) + (K_{\text{SDIM}} + 1) \sum_{i=1}^{i=P} \mathcal{O}(N_i^2)$. La complexité $\mathcal{O}(N_{i_1} N_{i_2})$ correspond aux calculs des produits matrice-vecteur (couplage entre les blocs). Comparativement à une inversion LU directe de toute la matrice impédance de complexité $\mathcal{O}((\sum_{i=1}^{i=P} N_i)^3)$, le temps de calcul est fortement réduit.

Néanmoins, il est important de noter que l'entier N_p est égal au nombre de mailles (edges en anglais) plus celles qui chevauchent les blocs sources. On supposera que cet ajout est le même dans les directions \hat{x} et \hat{y} de la surface et il sera noté n_{OL} (OL comme OverLapping). La même hypothèse est appliquée pour le nombre de blocs $N_{\text{Block}} = N_{\text{Block},x} N_{\text{Block},y} = P$. Ainsi, on peut montrer que l'excès de mailles est approximativement égal à

$$N_{\text{Edge,OL}} - N_{\text{Edge}} \approx (\sqrt{P} - 1) \left[12 (\sqrt{P} - 1) n_{\text{OL}}^2 + 2 \sqrt{\frac{N_{\text{Edge}}}{3}} (6n_{\text{OL}} - 1) \right], \quad (5)$$

où N_{Edge} est nombre total de mailles sans chevauchement. Ainsi, cet excès est proportionnel à $P n_{\text{OL}}^2$ et $\sqrt{P N_{\text{Edge}}} n_{\text{OL}}$.

La complexité en mémoire de la SDIM, M_{SDIM} , est similaire à celle de la MoM brute (sans accélération) et est égale à $N_{\text{Edge,OL}}^2$. Elle correspond au stockage de tous les éléments de la matrice impédance de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}$ (ou $\{\bar{\mathbf{Z}}_{i',i'}\}$ et $\{\bar{\mathbf{Z}}_{i_1,i_2}\}$ avec $i_1 \neq i_2$). A noter qu'avec l'application de l'ACA, elle sera réduite à $N_{\text{Edge,OL}}^2/P$ dû à la compression des $P(P-1)$ matrices de couplage.

III. CBFM (CHARACTERISTICS BASIS FUNCTION METHOD)

A. Première version

La CBFM1 est composée de trois étapes principales :

- 1) Tout d'abord les PBFs (Primary Basic Functions) sont calculées et sont égales à $\{\mathbf{Y}_i^{(0)}\}$ (ordre zéro de la SDIM). Puis, les SBFs (Secondary Basic Functions) $\{\mathbf{Y}_{i',p}^{(1)}\}$ (tronquées par la suite) sont déterminées par $-\bar{\mathbf{Z}}_{i',i'}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{i',p} \mathbf{Y}_p^{(0)}$ avec $i \neq p$. Ainsi, pour chaque bloc, une matrice de dimensions $N_i \times P$ est construite où N_i est le nombre d'inconnues sur chacun des blocs. La complexité de cette étape est donc

$$C_{\text{CBFM1},1} = \sum_{i=1}^{i=P} [\mathcal{O}(N_{i,\text{OL}}^3) + \mathcal{O}(N_i N_{i,\text{OL}})]. \quad (6)$$

- 2) La seconde étape consiste à ortho-normaliser (type Gram-Schmidt) ces P matrices des blocs $\{i\}$ dont les colonnes sont $[\mathbf{Y}_i^{(0)} \mathbf{Y}_{i,1}^{(1)} \dots \mathbf{Y}_{i,p}^{(1)} \dots \mathbf{Y}_{i,P}^{(1)}]$ avec $p \neq i$. Les matrices résultantes sont notées $\{\bar{\mathbf{J}}_i\}$ de dimensions $N_i \times P$. On peut montrer que la complexité de cette étape est

$$C_{\text{CBFM1},2} = [1 + P(P-1)] \sum_{i=1}^{i=P} \mathcal{O}(N_i) \approx P^2 \mathcal{O}(N_{\text{Edge}}). \quad (7)$$

- 3) La dernière étape construit la matrice réduite $\bar{\mathbf{Z}}^{\text{R}}$ de dimensions $P^2 \times P^2$ à partir des matrices ortho-normalisées et des matrices de couplage $\bar{\mathbf{Z}}_{i,j}$ du système linéaire de départ (équation (1)). De plus, à l'aide du vecteur excitation réduit \mathbf{b}^{R} , le vecteur inconnu \mathbf{a}^{R} est calculé en inversant la matrice réduite. On peut montrer que la complexité de cette étape est

$$C_{\text{CBFM1},3} = 2P \sum_{i_1=1}^{i_1=P} \sum_{i_2=1}^{i_2=P} \mathcal{O}(N_{i_1} N_{i_2}) + \mathcal{O}(P^6) + \mathcal{O}(P^3). \quad (8)$$

Ainsi l'étape finale consiste à résoudre le système linéaire $\bar{\mathbf{Z}}^{\text{R}} \mathbf{a}^{\text{R}} = \mathbf{b}^{\text{R}}$ suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{1,1}^{\text{R}} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,1}^{\text{R}} & \dots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,1}^{\text{R}} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{1,2}^{\text{R}} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,2}^{\text{R}} & \dots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,2}^{\text{R}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}_{1,P}^{\text{R}} & \bar{\mathbf{Z}}_{2,P}^{\text{R}} & \dots & \bar{\mathbf{Z}}_{P,P}^{\text{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\text{R}} \\ \mathbf{a}_2^{\text{R}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_P^{\text{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\text{R}} \\ \mathbf{b}_2^{\text{R}} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_P^{\text{R}} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

où $\bar{\mathbf{Z}}_{i,j}^{\text{R}}$ est une sous matrice réduite de dimensions $P \times P$ et \mathbf{b}_n^{R} un vecteur de dimensions $P \times 1$ définis par

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Z}}_{i,j}^{\text{R}} &= \bar{\mathbf{J}}_i^{\text{H}} \bar{\mathbf{Z}}_{i,j} \bar{\mathbf{J}}_j & [P \times P] \\ \mathbf{b}_j^{\text{R}} &= \bar{\mathbf{J}}_j^{\text{H}} \mathbf{b} & [P \times 1] \end{cases}. \quad (10)$$

De plus, H désigne l'opérateur transposé conjugué et les indices i et j vont de 1 à P . Le vecteur \mathbf{a}_i du système linéaire (1) est alors égal à $\mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{J}}_i \mathbf{a}_i^{\text{R}}$.

En considérant des blocs de même taille ou de taille moyenne N_0 et $N_{\text{OL},0}$, la complexité totale est de l'ordre de

$$C_{\text{CBFM1}} \approx P [\mathcal{O}(N_{0,\text{OL}}^3) + \mathcal{O}(N_0 N_{0,\text{OL}})] + 3P^3 \mathcal{O}(N_0) + \mathcal{O}(P^6) + \mathcal{O}(P^3). \quad (11)$$

Si $N_{\text{OL},0}^3 \gg P^5$, alors la première étape est plus coûteuse que la troisième étape.

La différence majeure est que la SDIM calcule le vecteur \mathbf{a} jusqu'à obtention de la convergence tandis que la CBFM stoppe le processus à l'ordre un et un autre algorithme est alors appliqué pour aboutir à la solution. Si les matrices de la décomposition LU sont stockées, alors la complexité de la SDIM est de l'ordre de $P\mathcal{O}(N_{0,\text{OL}}^3) + P^2(K_{\text{SDIM}} + 1)\mathcal{O}(N_0 N_{0,\text{OL}})$. En considérant que $N_{0,\text{OL}} \approx N_0$, la SDIM est rapide comparativement à la CBFM1 si $K_{\text{SDIM}} N_0^2 \ll P(3N_0 + P^3)$. Puisque $P/N_0 \ll 1$, cette condition devient $K_{\text{SDIM}} \ll (P^2/N_0)^2$.

Des simulations numériques montrent que la CBFM1 produit des résultats non satisfaisants sur la SER provenant du calcul des PBFs et SBFs. Une autre version de la CBFM a donc été proposée.

B. Deuxième version

Elle considère uniquement les PBFs qui sont calculées en illuminant le bloc i par une collection de $N_{i,\text{IPW}}$ ondes planes. Ainsi, chaque bloc est caractérisé par une matrice de dimensions $N_i \times N_{i,\text{IPW}}$. A noter que les blocs se chevauchent comme dans la SDIM. Afin de réduire la dimension, une décomposition SVD (Singular Value Decomposition) tronquée est appliquée. L'étape 2 n'est alors plus utile et l'étapes 3 est identique à la première version de la CBFM, pour laquelle la matrice réduite a pour dimensions $(\sum_{i=P} N_{i,\text{IPW,SVD}}) \times (\sum_{i=P} N_{i,\text{IPW,SVD}})$, où $N_{i,\text{IPW,SVD}} < N_{i,\text{IPW}}$ est le nombre d'ondes sélectionnées après la décomposition SVD sur le bloc i .

Le nombre total d'ondes planes est choisi comme la partie entière de

$$N_{\text{IPW}} = \lfloor 2(k_0 r_0 + 2\pi), \quad (12)$$

où r_0 est le rayon de la sphère englobant l'objet. Pour une sous surface rugueuse d'aire $L_x L_y$ (ou domaine), $r_0 = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}/2$. De plus, en coordonnées polaires, les ondes planes balayent les secteurs angulaires $\theta \in [0; \pi/2]$ et $\phi \in [0; 2\pi[$ avec un pas constant. A noter que l'entier $N_{i,\text{IPW}}$ doit être multiplié par deux car les deux polarisations linéaires V et H sont considérées pour générer les $N_{i,\text{IPW}}$ ondes planes illuminant chacun des blocs i .

La complexité de la CBFM2 est alors

$$C_{\text{CBFM2}} \approx P [2\mathcal{O}(N_{0,\text{OL}}^3) + N_{0,\text{IPW}} \mathcal{O}(N_{0,\text{OL}}^2)] + 2N_R P \mathcal{O}(N_0^2) + \mathcal{O}(N_R^3) + \mathcal{O}(N_R^2). \quad (13)$$

où $N_R = P \bar{N}_{\text{IPW,SVD}} = \sum_{i=1}^{i=P} N_{i,\text{IPW,SVD}}$ est le nombre total d'ondes conservées après la décomposition SVD (matrice réduite de dimensions $N_R \times N_R$).

Dans l'équation (13), la première ligne exprime la complexité de la première étape. Comparativement à celle de la SDIM, elle est plus coûteuse si $N_{0,\text{OL}} + K_{\text{SDIM}} P \ll 2N_{0,\text{OL}} + \bar{N}_{\text{IPW}}$, soit $K_{\text{SDIM}} \ll N_{0,\text{OL}}/P + \bar{N}_{\text{IPW}}/P$. L'étape 3 peut devenir très gourmande en temps de calcul si N_R est très grand à cause de la décomposition LU de la matrice réduite.

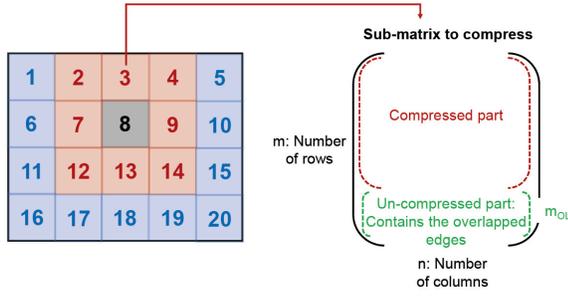


Fig. 2. Illustration de la compression ACA partielle. $P = N_{x,\text{Block}}N_{y,\text{Block}}$ où $N_{x,\text{Block}} = 4$, $N_{y,\text{Block}} = 5$.

L'introduction de l'ACA va permettre de réduire significativement la complexité des produits matrices de couplage avec un vecteur quelconque.

IV. ACA (ADAPTIVE CROSS APPROXIMATION)

La technique ACA [9] est utilisée comme moyen de réduction de la complexité et de la mémoire pour toutes les opérations impliquant les matrices de couplage des blocs. En effet, elle permet de compresser significativement ces matrices.

L'algorithme ACA est appliqué dans un premier temps sur des paires de blocs (i, j) non adjacents de dimensions $N_{OL,i}N_j$. En effet, la matrice de couplage $\bar{Z}_{i',j}$ est de rang faible. Ainsi, $\bar{Z}_{i',j} \approx \bar{U}\bar{V}$, où \bar{U} et \bar{V} sont de dimensions respectives $N_{OL,i} \times r$ et $r \times N_j$, où r est le rang effectif de la matrice. Afin de réduire r , une décomposition QR suivie d'une décomposition SVD tronquée sont également appliquées sur ces deux matrices. L'efficacité de la méthode est quantifiée en définissant les taux de compression moyens suivants :

$$\bar{\tau}_1 = 1 - \frac{1}{P(P-1)} \sum_{i=1}^{i=P} \sum_{j=1, j \neq i}^{j=P} \eta_{i,j} \quad (14)$$

où

$$\eta_{i,j} = \frac{r(n+m-m_{\text{Edge,OL}}) + nm_{\text{Edge,OL}}}{mn}, \quad (15)$$

et

$$\bar{\tau}_2 = 1 - \frac{N_{\text{Edge,OL}}}{N_{\text{Edge}}} \frac{1}{P^2} \left[P + \sum_{i=1}^{i=P} \sum_{j=1, j \neq i}^{j=P} \eta_{i,j} \right]. \quad (16)$$

De plus, $r = r_{i,j}$ est le rang des sous matrices compressées de dimensions $m = m_i$ et $n = n_j$ et $m_{\text{Edge,OL}} = m_{\text{Edge,OL},i}$ est le nombre de mailles qui chevauchent le bloc observation. Si l'ACA n'est pas appliquée, alors $\eta_{i,j} = 1$ et $\bar{\tau}_1 = 0$. $\bar{\tau}_1$ quantifie le taux de compression moyen des $P(P-1)$ matrices de couplage, alors que $\bar{\tau}_2$ quantifie le taux de compression par rapport à un problème résolu par une décomposition LU de toute la matrice impédance. L'ajout de P entre les crochets indique que les P matrices impédances $\{\bar{Z}_{i',i'}\}$ ne sont pas compressées et le rapport $N_{\text{Edge,OL}}/N_{\text{Edge}} > 1$ prend en compte l'augmentation du nombre de mailles causée par le chevauchement des blocs.

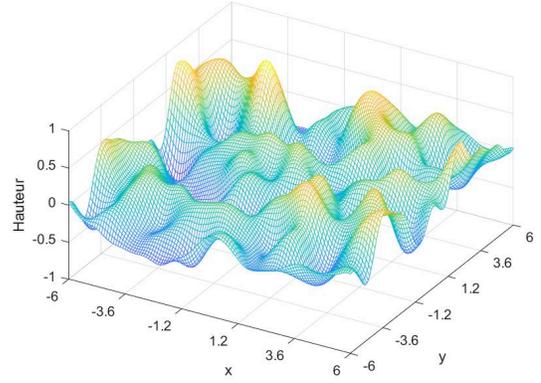


Fig. 3. Hauteur de la surface en fonction de x et y .

Il est bien connu que l'ACA est d'autant plus efficace que les blocs sont éloignés. Le corollaire est que pour des blocs ayant des mailles communes causées par le chevauchement, l'ACA n'est pas efficace. Néanmoins, afin d'optimiser la compression du problème, pour les blocs $\{i\}$ adjacent au bloc source j , l'ACA est appliquée uniquement sur les mailles non communes à la paire de blocs (i, j) . Ceci est illustré sur la figure 2. On peut montrer que les nombres de blocs $N_{\text{ACA,Full}}$ et $N_{\text{ACA,Partial}}$ dont les compressions sont respectivement totale et partielle s'expriment comme

$$\begin{cases} N_{\text{ACA,Partial}} = 4 - 6(N_{x,\text{Block}} + N_{y,\text{Block}}) + 8P \\ N_{\text{ACA,Full}} = P^2 - P - N_{\text{ACA,Partial}} \end{cases}, \quad (17)$$

où $P = N_{x,\text{Block}}N_{y,\text{Block}}$. Dans l'équation (15), si la compression est totale alors $m_{\text{Edge,OL}} = 0$ (pas de mailles communes).

Typiquement, la valeur du seuil de l'ACA ϵ_{ACA} est comprise entre 10^{-3} et 10^{-4} et celle de la décomposition QR, $\epsilon_{\text{QR,SVD}} = 10\epsilon_{\text{ACA}}$.

V. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

La surface rugueuse considérée est parfaitement conductrice de distribution des hauteurs Gaussienne et de fonction d'autocorrélation des hauteurs également gaussienne. L'écart type des hauteurs est de $0.3\lambda_0$ et la longueur de corrélation $L_c = L_{c,x} = L_{c,y} = 1\lambda_0$. La surface est échantillonnée avec dix points par longueur d'onde selon les directions \hat{x} et \hat{y} . Elle est représentée sur la figure 3.

L'onde incidente est plane. A noter que son module vaut l'unité (onde non atténuée sur les bords de la surface) qui implique que le phénomène de diffraction par les arrêtes, dû à la finitude de la surface, n'est pas négligeable. L'angle d'incidence $\theta_{\text{inc}} = \pi/6$, l'angle azimutale $\phi_{\text{inc}} = 0$ et l'angle azimutale d'observation $\phi_{\text{sca}} = 0$.

Les figures 4, 5, 6 et 7 présentent la SER en fonction de l'angle d'observation θ_{sca} . Le nombre de mailles chevauchant les blocs est $n_{\text{OL}} = 2$, $P = 6 \times 6 = 36$ sur les figures 4 et 5 et $P = 4 \times 4 = 16$ sur les figures 6 et 7.

En co-polarisation $\theta\theta$, un très bon accord est observé entre toutes les méthodes alors que pour la polarisation croisée

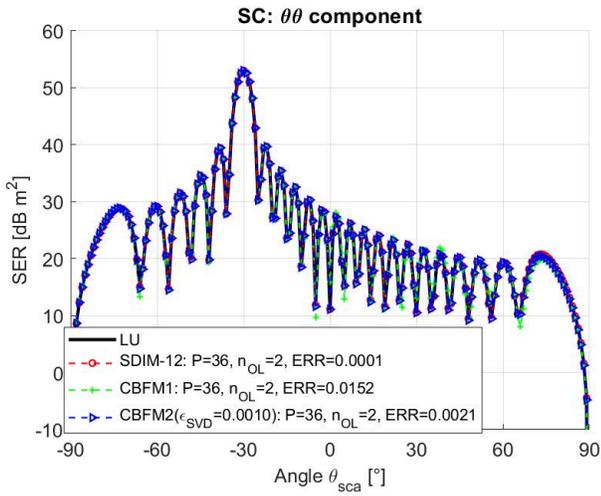


Fig. 4. SER en fonction de l'angle d'observation θ_{sca} . Polarisation $\theta\theta$.

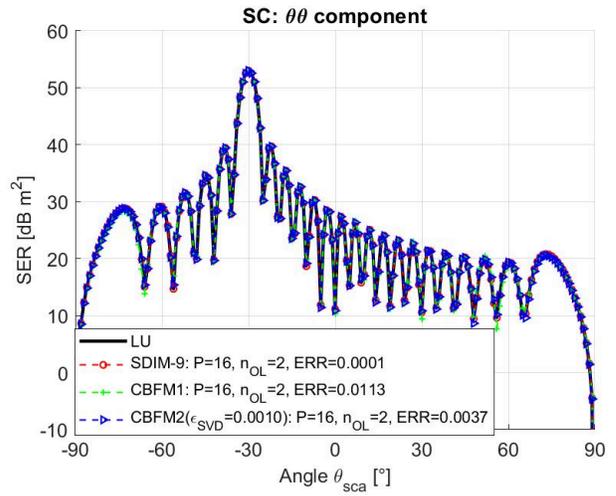


Fig. 6. Mêmes variations que sur la figure 4 mais le nombre de blocs est $P = 16$.

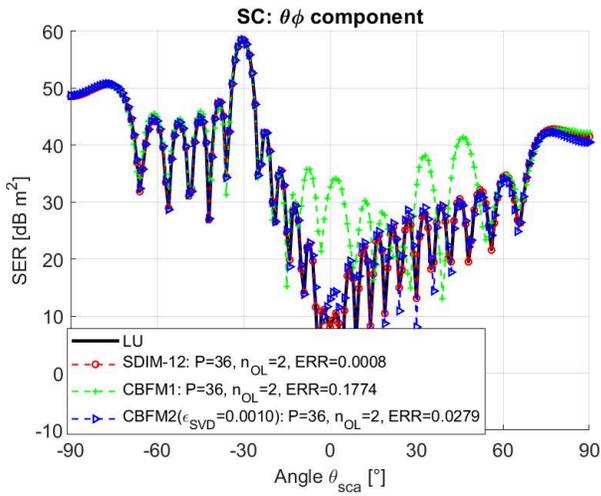


Fig. 5. SER + 30 dB en fonction de l'angle d'observation θ_{sca} . Polarisation $\theta\phi$.

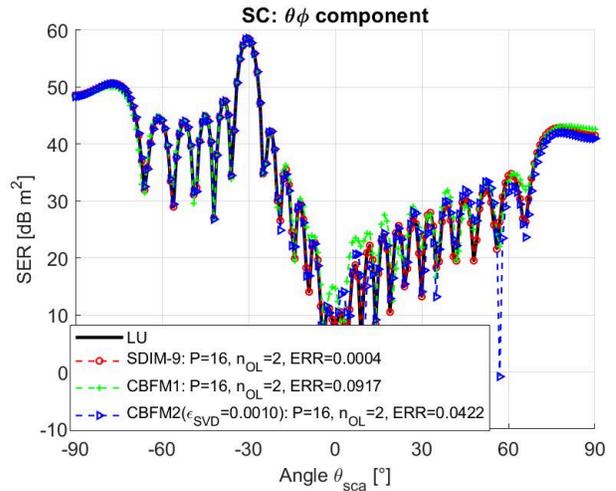


Fig. 7. Mêmes variations que sur la figure 5 mais le nombre de blocs est $P = 16$.

$\theta\phi$, la CBFM1 présente un désaccord avec la LU (MoM brute sans accélération) pour des niveaux faibles. A noter que le niveau moyen de la SER $\theta\phi$ est 30 dB plus faible que celle en $\theta\theta$.

Pour $P = 25$, la SDIM converge à l'ordre $K_{SDIM} = 12$ avec une erreur relative résiduelle $ERR = 0.0001$ (polarisation $\theta\theta$) tandis que pour $P = 16$, $K_{SDIM} = 9$ et $ERR = 0.0001$, qui montre qu'un seuil de $\epsilon_{SDIM} = 0.01$ est largement suffisant. De plus, si le nombre de blocs P diminue, moins d'interactions (ou couplage) sont nécessaires entre les blocs pour converger.

La CBFM2 offre également un très bon accord avec la LU, excepté pour des niveaux très faibles de la SER en $\theta\phi$. Cette différence peut être réduite en diminuant le seuil de la SVD, ϵ_{SVD} , pour la sélection du nombre d'ondes. Pour $P = 16$, $\bar{N}_{IPW} \approx 820$, $\bar{N}_{IPW,SVD} \approx 211 \Rightarrow N_R = 3380$ alors que pour $P = 36$, $\bar{N}_{IPW} \approx 501$, $\bar{N}_{IPW,SVD} \approx 136 \Rightarrow N_R = 4896$

(taille de la matrice réduite \bar{Z}_R). La taille du problème initiale est de $N_{Edge} = 42\,960$ (taille de la matrice \bar{Z}) et avec chevauchement, $N_{Edge,OL} = 51\,216$. Ainsi, la CBFM permet de réduire significativement la taille du problème. De plus, le calcul de \bar{Z}_R est indépendant du vecteur excitation \bar{b} , qui implique que pour d'autres excitations, uniquement le vecteur b doit être calculé. Cette opération étant très peu coûteuse en temps de calcul, la CBFM2 est très efficace pour le calcul de la SER monostatique.

Pour tester l'efficacité de l'hybridation de l'ACA, l'aire de la surface a été multipliée par quatre, soit $24\lambda_0 \times 24\lambda_0$. Le nombre de blocs est $P = 8 \times 8$ (blocs de dimensions $3\lambda_0 \times 3\lambda_0$) et $n_{OL} = 2$. Ainsi le nombre d'inconnues est $N_{Edge} = 172\,320$ et avec chevauchement des blocs $N_{Edge,OL} = 211\,184$. Par conséquent, la MoM brute ne pas être simulée et la solution

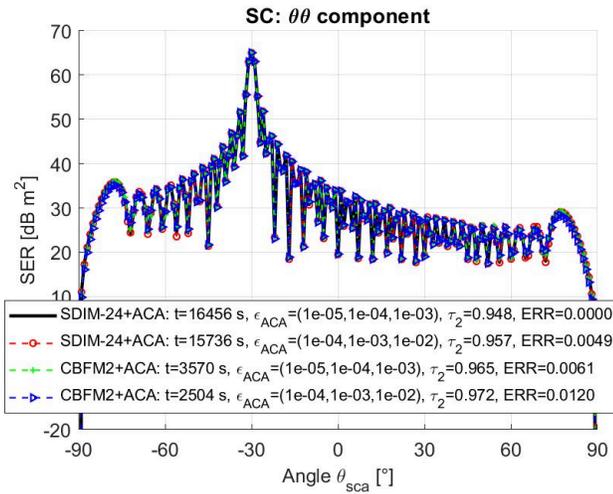


Fig. 8. SER en fonction de l'angle d'observation θ_{sca} . Polarisation $\theta\theta$.

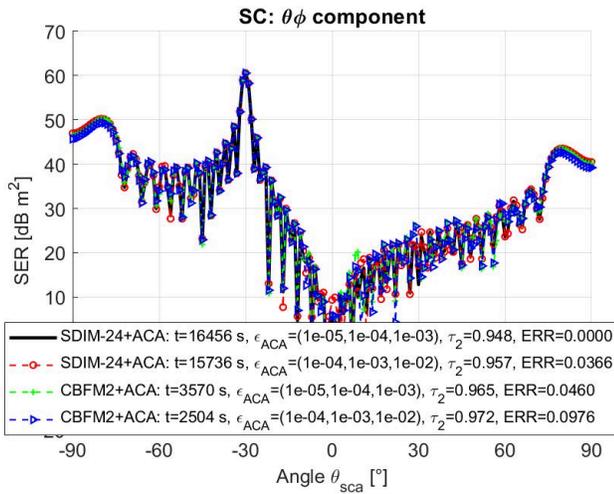


Fig. 9. SER + 30 dB en fonction de l'angle d'observation θ_{sca} . Polarisation $\theta\phi$.

de référence est la SDIM.

Les figures 8 et 9 représentent la SER en fonction de l'angle d'observation θ_{sca} en polarisations $\theta\theta$ et $\theta\phi$. Les trois valeurs entre parenthèses après ϵ_{ACA} sont respectivement des seuils égaux à $\epsilon_{ACA,Partial}$ (compression partielle des blocs adjacents), $\epsilon_{ACA,Full}$ (compression totale des blocs non adjacents) et $\epsilon_{QR,SVD}$ (compression QR après compression ACA). De plus, t est égal au temps de calcul total (calcul des sous-matrices plus celui de l'inconnu α). Les figures 8 et 9 montrent une très bonne concordance entre les 2 méthodes et que la multiplication des seuils de l'ACA par 10 ne dégrade pas la précision. Ainsi $\epsilon_{ACA,Partial} = \epsilon_{ACA,Full}/10$, $\epsilon_{ACA,Full} = 10^{-3}$ et $\epsilon_{QR,SVD} = 10\epsilon_{ACA,Full}$ semblent être un bon compromis.

En revanche, la CBFM2 est plus efficace que la SDIM avec un temps de calcul divisé approximativement par cinq comparativement à la SDIM. En effet, la CBFM2 offre un

taux de compression meilleur que la SDIM car les matrices de couplage à compresser ne possèdent pas de mailles communes. De plus, l'ordre de convergence de la SDIM est de 24 et pour chaque itération, le temps alloué est d'environ 500 secondes. Si le seuil de la SDIM augmente, alors le temps de calcul diminuera significativement. Ceci dépend évidemment de la précision souhaitée par l'utilisateur. A noter que les dimensions de la matrice réduite est de $13\,788 \times 13\,788$.

Les valeurs du taux de compression moyen du problème entier montre que l'ACA est très efficace. Si $\bar{\tau} = 0.97$, cela signifie que le problème a été réduit de 97% en terme de mémoire, ce qui nous a permis de résoudre un problème à 200 000 inconnues. On peut montrer que le taux de compression maximal est donné par

$$\bar{\tau}_{2,max} = 1 - N_{Edge,OL}/(N_{Edge}P). \quad (18)$$

Soit $\bar{\tau}_{2,max} = 0.981$, ce qui est très proche de $\bar{\tau}_2$ obtenu avec la CBFM2. La seule limitation réside dans le stockage des matrices impédances de chacun des blocs.

VI. CONCLUSION

Le principal intérêt de la SDIM et la CBFM2 réside dans la possibilité de résoudre des systèmes linéaires par blocs, avec des complexités CPU et mémoire, très inférieures à celle de l'inversion directe LU de la matrice impédance \bar{Z} . Des simulations de la SER sur une surface parfaitement conductrice ont montré que ces deux méthodes sont très performantes. A noter que la CBFM2 est plus efficace que la SDIM mais peut présenter des légères différences avec la SDIM. La seule limitation de ces deux méthodes réside dans l'inversion des matrices impédances des blocs.

REFERENCES

- [1] T. Elfouhaily and C.-A. Guérin, "Critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces (topical review)," *Waves in Random Complex Media*, vol. 14, no. 4, pp. R1–R40, 2004.
- [2] L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding, and C. O. Ao, *Scattering of Electromagnetic Waves, Numerical Simulations*. New York: John Wiley & Sons, INC., 2000.
- [3] K. F. Warnick and W. C. Chew, "Numerical simulation methods for rough surface (topical review)," *Waves in Random Complex Media*, vol. 11, pp. R1–R30, 2001.
- [4] C. Bourlier, *Radar Propagation and Scattering in a Complex Maritime Environment*. London, UK: Iste Press Ltd, Elsevier Ltd, 2018.
- [5] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*, Chapman and Hall/CRC, Eds., London, 2008.
- [6] T. Qiao, L. Tsang, D. Vandemark, S. H. Yueh, T. H. Liao, F. Nouguier, and B. Chapron, "Sea Surface Radar Scattering at L-Band Based on Numerical Solution of Maxwell's Equations in 3-D (NMM3D)," *IEEE Trans. Geo. Rem. Sensing*, vol. 56, no. 6, pp. 3137–47, 2018.
- [7] V. S. Prakash and R. Mitra, "Characteristic Basis Function Method: A new technique for efficient solution of Method of Moments matrix equations," *Micro. Opt. Tech. Letters*, vol. 26, no. 2, pp. 95–100, 2003.
- [8] C. Bourlier, "Low-grazing angle propagation and scattering by an object above a highly-conducting rough sea surface in a ducting environment from an accelerated MoM," *Waves in Random Complex Media*, vol. 28, no. 4, pp. 724–42, 2018.
- [9] K. Zhao, M. N. Vouvakis, and J.-F. Lee, "The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems," *IEEE Trans. Electromag. Compat.*, vol. 47, no. 4, pp. 763–773, 2005.

References

- [1] O. Garridol, *Les équations de Maxwell*, ser. UNIVERSITAIRE H. BELIN.
- [2] J. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*. EMW Publishing.
- [3] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd ed. John Wiley & Sons.
- [4] W. C. Gibson, *The method of moments in electromagnetics*. Chapman & Hall/CRC, vol. 1.
- [5] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, vol. 55.
- [6] C. A. Balanis, *Antenna Theory : Analysis and Design*, 3rd ed. John Wiley Sons.
- [7] G. Kubické, “Contribution au calcul de la diffusion d’une onde électromagnétique par des réflecteurs polyédriques au-dessus d’une surface rugueuse,” Thèse de Doctorat, 2008. [Online]. Available : <http://www.theses.fr/2008NANT2026>
- [8] N. Pinel, “Étude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles : application à une mer recouverte de pétrole,” Thèse de Doctorat. [Online]. Available : <http://www.theses.fr/2006NANT2079/document>
- [9] C. Bourlier, “Rayonnement infrarouge d’une surface stochastique - application au domaine océanique,” Thèse de Doctorat, 1999.
- [10] —, *Radar Propagation and Scattering in a Complex Maritime Environment : Modeling and Simulation from MatLab*. Elsevier Science, 2018. [Online]. Available : <https://books.google.fr/books?id=pVJmDwAAQBAJ>
- [11] N. Déchamps and C. Bourlier, “Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-inside-layer expansion method combined to an updated BMIA/CAG approach,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 10, pp. 2790–2802, 10-2007.
- [12] A. Fung and Khim Lee, “A semi-empirical sea-spectrum model for scattering coefficient estimation,” *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 7, no. 4, pp. 166–176, October 1982.
- [13] J. R. Apel, “An improved model of the ocean surface wave vector spectrum and its effects on radar backscatter,” 1994.
- [14] T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark, “A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves,” *Journal of Geophysical Research : Oceans*, vol. 102, no. C7, pp. 15 781–15 796. [Online]. Available : <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/97JC00467>
- [15] R. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, ser. IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory. Oxford University Press, USA.

- [16] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, no. 3, pp. 409–418, 05-1982.
- [17] M. Kouali, "Diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse : problème vectoriel," Thèse de Doctorat. [Online]. Available : <http://www.theses.fr/2012NANT2036>
- [18] G. Kubické, C. Bourlier, and S. Bellez, "Scattering from a target above a 1-d ocean-like surface from a fast rigorous method," in *2015 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation USNC/URSI National Radio Science Meeting*, pp. 570–571.
- [19] S. Bellez, C. Bourlier, and G. Kubické, "3-D scattering from a PEC target buried beneath a dielectric rough surface : An efficient PILE-ACA algorithm for solving a hybrid KA-EFIE formulation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 11, pp. 5003–5014, 11-2015.
- [20] N. Déchamps, "Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles," Thèse de Doctorat. [Online]. Available : <http://www.theses.fr/2004NANT2071>
- [21] W. C. Chew and L. J. Jiang, "Overview of large-scale computing : The past, the present, and the future," *Proceedings of the IEEE*, vol. 101, no. 2, pp. 227–241, 02-2013.
- [22] C. Bourlier, S. Bellez, and G. Kubické, "An efficient sub-domain decomposition iterative method for the scattering from a large highly-conducting rough sea surface," in *2015 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation USNC/URSI National Radio Science Meeting*, pp. 572–573.
- [23] D. Holliday, L. L. DeRaad, and G. J. St-Cyr, "Forward-backward : a new method for computing low-grazing angle scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 5, pp. 722–, 05-1996.
- [24] H. T. Chou and J. T. Johnson, "A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from rough surfaces with the forward-backward method," *Radio Science*, vol. 33, no. 5, pp. 1277–1287, 09-1998.
- [25] C. Brennan and D. Trinh-Xuan, "Improved forward backward method with spectral acceleration for scattering from exponentially correlated rough lossy surfaces," in *2012 Loughborough Antennas Propagation Conference (LAPC)*, pp. 1–4.
- [26] R. Mittra, V. V. S. Prakash, and J. Yeo, "Some novel techniques for efficient analysis of large arrays and frequency selective radomes," in *Twelfth International Conference on Antennas and Propagation, 2003 (ICAP 2003). (Conf. Publ. No. 491)*, vol. 2, pp. 462–465 vol.2.
- [27] F. Catedra, E. Garcia, C. Delgado, F. S. d. Adana, and R. Mittra, "Development of an efficient rigorous technique based on the combination of CBFM and MLFMA to solve very large electromagnetic problems," in *2007 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*, pp. 579–582.
- [28] J. Wang and F. Zhou, "Electromagnetic scattering from 2-D sea surface with 3-D electrically large ship by parallel MLFMA," in *2017 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pp. 4922–4925.
- [29] N. Déchamps and C. Bourlier, "Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-inside-layer expansion method combined to the forward-backward novel spectral acceleration," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 12, pp. 3576–3586, 12-2007.
- [30] G. Kubické and C. Bourlier, "Monostatic scattering from an object near an ocean-like surface from an efficient fast numerical method," in *The 7th European Radar Conference*, pp. 1–4.

- [31] C. Bourlier, S. Bellez, H. Li, and G. Kubické, “Sub-domain decomposition iterative method combined with ACA : An efficient technique for the scattering from a large highly conducting rough sea surface,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 2, pp. 659–666, 02-2015.
- [32] M. Bebendorf, “Approximation of boundary element matrices,” *Numerische Mathematik*, vol. 86, no. 4, pp. 565–589, 2000.
- [33] X. Chen, C. Gu, J. Ding, Z. Li, and Z. Niu, “Multilevel fast adaptive cross-approximation algorithm with characteristic basis functions,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 9, pp. 3994–4002, 09-2015.
- [34] X. Chen, C. Gu, A. Heldring, Z. Li, and Q. Cao, “Error bound of the multilevel adaptive cross approximation (MLACA),” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 1, pp. 374–378, 01-2016.
- [35] Z.-X. Li, “Bistatic scattering from three - dimensional conducting rough surface with UV multilevel partitioning method,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 76, pp. 381–395, 2007. [Online]. Available : <http://www.jpier.org/PIER/pier.php?paper=07072003>
- [36] F. S. Deng, S. Y. He, H. T. Chen, W. D. Hu, W. X. Yu, and G. Q. Zhu, “Numerical simulation of vector wave scattering from the target and rough surface composite model with 3-D multilevel UV method,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 5, pp. 1625–1634, 05-2010.
- [37] Z. Yu, H. Wang, J. Shi, and L. He, “A new sampling algorithm used in multilevel UV factorization method for scattering from random rough surface,” in *2015 IEEE International Conference on Computational Electromagnetics*, pp. 192–194.
- [38] L. Zhang, G. Pan, and J. Jones, “A general scattering algorithm for dielectric and PEC random rough surfaces,” in *2016 IEEE Conference on Antenna Measurements Applications (CAMA)*, pp. 1–4.
- [39] L. Zhang and G. G. Pan, “Fast coiflet magnetic field integral equation for scattering from open rough surfaces,” *Antennas Propagation IET Microwaves*, vol. 10, no. 8, pp. 836–842, 2016.
- [40] L. Zhang, G. G. Pan, and J. A. Jones, “On unified numerical algorithm for 3-D scattering from dielectric and PEC random rough surfaces,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 65, no. 5, pp. 2615–2623, 05-2017.
- [41] M. G. Araujo, J. M. Taboada, F. Obelleiro, J. M. Bertolo, L. Landesa, J. Rivero, and J. L. Rodriguez, “Supercomputer aware approach for the solution of challenging electromagnetic problems,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 101, pp. 241–256, 2010. [Online]. Available : <http://www.jpier.org/PIER/pier.php?paper=09121007>
- [42] L. Gurel and O. Ergul, “Fast and accurate solutions of extremely large integral-equation problems discretised with tens of millions of unknowns,” *Electronics Letters*, vol. 43, no. 9, pp. 499–500, 04-2007.
- [43] O. Ergul and L. Gurel, “Fast and accurate solutions of large-scale scattering problems with parallel multilevel fast multipole algorithm,” in *2007 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pp. 3436–3439.
- [44] —, “Fast and accurate solutions of extremely large scattering problems involving three-dimensional canonical and complicated objects,” in *2009 Computational Electromagnetics International Workshop*, pp. 19–23.
- [45] I. Fenni, H. Roussel, M. Darces, and R. Mittra, “Parallelized multilevel characteristic basis function method applied to scattering model for forest remote sensing,” in *2013 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)*, pp. 1032–1033.

- [46] M. Fall, H. Roussel, C. Dahon, M. Casaletti, I. Fenni, and R. Mittra, "A high performance MPI implementation of numerical modeling of electromagnetic scattering from forest environment," in *2016 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI)*, pp. 2011–2012.
- [47] J. W. Hao and X. Q. Sheng, "Accurate and efficient simulation model for the scattering from a ship on a sea-like surface," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 14, no. 12, pp. 2375–2379, 12-2017.
- [48] J. Laviada, R. Mittra, M. R. Pino, and F. Las-Heras, "Generation of nested characteristic basis functions," in *2009 3rd European Conference on Antennas and Propagation*, pp. 1790–1794.
- [49] J. Laviada, F. Las-Heras, M. R. Pino, and R. Mittra, "Solution of electrically large problems with multilevel characteristic basis functions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 10, pp. 3189–3198, 10-2009.
- [50] J. Laviada, R. Mittra, M. R. Pino, and F. Las-Heras, "A parallel implementation of the multilevel characteristic basis function method," in *2009 3rd European Conference on Antennas and Propagation*, pp. 50–54.
- [51] T. Tanaka, Y. Inasawa, N. Yoneda, and H. Miyashita, "A study on characteristic basis function method using combined IP-CBF," in *2017 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pp. 630–632.
- [52] T. Tanaka, Y. Inasawa, Y. Nishioka, and H. Miyashita, "Improved primary-characteristic basis function method for analyzing the radar cross section characteristics of specific coordinate plane," in *2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pp. 252–255.
- [53] X. Gu, J. Song, W. Sun, and M. Yang, "Fast computation of electromagnetic scattering based on optimized solution of matrix equations," in *2009 9th International Conference on Electronic Measurement Instruments*, pp. 4–938–4–940.
- [54] C. Delgado, E. Garcia, and F. Catedra, "Hybrid analysis technique for scattering and radiation problems using macro-basis functions," in *2009 3rd European Conference on Antennas and Propagation*, pp. 2097–2101.
- [55] W. Lu, J. Hu, and Z. Nie, "Accelerating the CBFM solution of 3D electromagnetic scattering by using MLFMA and ACA," in *2011 IEEE International Conference on Microwave Technology Computational Electromagnetics*, pp. 453–456.
- [56] E. García, C. Delgado, I. Gonzalez, J. Moreno, and F. Catedra, "Efficient iterative solution of problems using characteristic basis function method combined with multilevel fast multipole algorithm," in *2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, pp. 211–214.
- [57] O. A. Iupikov, C. Craeye, R. Maaskant, and M. V. Ivashina, "Domain-decomposition approach to krylov subspace iteration," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 15, pp. 1414–1417, 2016.
- [58] Q. Q. Wang, T. Jin, H. B. Zhu, and R. S. Chen, "Analyzing electromagnetic scattering using characteristic basis function method with compressed sensing," in *2013 6th International Congress on Image and Signal Processing (CISP)*, vol. 03, pp. 1633–1637.
- [59] G. H. Golub and C. F. Van Loan, "Matrix computations," *Johns Hopkins University, Press, Baltimore, MD, USA*, pp. 374–426, 1996.
- [60] X. Chen, C. Gu, Z. Li, and Z. Niu, "Accelerated direct solution of electromagnetic scattering via characteristic basis function method with sherman-morrison-woodbury formula-based algorithm," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 10, pp. 4482–4486, 10-2016.

- [61] X. Fang, Q. Cao, Y. Zhou, and Y. Wang, "Multiscale compressed and spliced sherman-morrison-woodbury algorithm with characteristic basis function method," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 60, no. 3, pp. 716–724, 06-2018.
- [62] I. Fenni, Z. S. Haddad, H. Roussel, and R. Mittra, "Efficient calculation of orientationally averaged scattering from complex-geometry ice particles," in *2017 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pp. 4471–4474.
- [63] —, "Application of 3D MoM/CBFM technique to the problem of electromagnetic scattering by complex-shaped precipitation particles," in *2016 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI)*, pp. 2107–2108.
- [64] X. Chen, C. Gu, Z. Li, and Z. Niu, "Efficient iterative solution of electromagnetic scattering using adaptive cross approximation enhanced characteristic basis function method," *Antennas Propagation IET Microwaves*, vol. 9, no. 3, pp. 217–223, 2015.
- [65] X. Chen, C. Fei, Y. Zhang, Z. Li, and C. Gu, "SPACA-MLFACA algorithm for fast solution of electromagnetic scattering problems," in *2016 International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP)*, pp. 164–165.
- [66] I. Fenni, H. Roussel, M. Darces, and R. Mittra, "Fast computing of large 3D dielectric forest scattering problems using the characteristic basis function method with the adaptative cross approximation algorithm," in *2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)*, pp. 2002–2003.
- [67] —, "Fast analysis of large 3-D dielectric scattering problems arising in remote sensing of forest areas using the CBFM," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 62, no. 8, pp. 4282–4291, 08-2014.
- [68] —, "Application of the characteristic basis function method (CBFM) on a non-uniform mesh to the solution of large-size dielectric scattering problems," in *The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014)*, pp. 2423–2426.
- [69] —, "Efficient domain decomposition method for electromagnetic modeling of scattering from forest environments," in *2015 9th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*, pp. 1–5.
- [70] —, "Efficiency enhancement of the characteristic basis function method for modeling forest scattering using the adaptive cross approximation algorithm," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 10, pp. 4539–4544, 10-2016.
- [71] L. Hettak, H. Roussel, M. Casaletti, and R. Mittra, "A numerically efficient method for predicting the scattering characteristics of a complex metallic target located inside a large forested area," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 56, no. 2, pp. 1177–1185, 02-2018.
- [72] C. H. Chan, L. Tsang, and Q. Li, "Monte carlo simulations of large-scale one-dimensional random rough-surface scattering at near-grazing incidence : Penetrable case," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 1, pp. 142–149, 01-1998.
- [73] D. J. Donohue, H. C. Ku, and D. R. Thompson, "Application of iterative moment-method solutions to ocean surface radar scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 1, pp. 121–132, 01-1998.
- [74] L. Tsang, C. H. Chan, K. Pak, and H. Sangani, "Monte-carlo simulations of large-scale problems of random rough surface scattering and applications to grazing incidence with the BMIA/canonical grid method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 8, pp. 851–859, 08-1995.

- [75] J. T. Johnson, "On the canonical grid method for two-dimensional scattering problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 3, pp. 297–302, 03-1998.
- [76] Q. Li, H. Chan, and L. Tsang, "Monte carlo simulations of wave scattering from lossy dielectric random rough surfaces using the physics-based two-grid method and the canonical-grid method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, no. 4, pp. 752–763, 04-1999.
- [77] C. D. Moss, T. M. Grzegorzczuk, H. C. Han, and J. A. Kong, "Forward-backward method with spectral acceleration for scattering from layered rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 3, pp. 1006–1016, 03-2006.
- [78] D. Trinh-Xuan, C. Brennan, M. Mullen, and P. Bradley, "Accelerated forward backward iterative solution for scattering from randomly rough lossy surfaces," in *2011 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*, pp. 1290–1293.
- [79] G. Yang and Y. Du, "A robust preconditioned GMRES method for electromagnetic scattering from dielectric rough surfaces," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 50, no. 9, pp. 3396–3408, 09-2012.
- [80] C. Brennan, D. Trinh-Xuan, M. Mullen, P. Bradley, and M. Condon, "Improved forward backward method with spectral acceleration for scattering from randomly rough lossy surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 7, pp. 3922–3926, 07-2013.
- [81] V. Pham-Xuan, D. Trinh-Xuan, M. Condon, and C. Brennan, "Fast iterative method for computing electromagnetic scattering from randomly rough surfaces," in *2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pp. 1333–1336.
- [82] H. Huang, G. Yang, and Y. Du, "Performance of preconditioned nonstationary methods for electromagnetic scattering from one dimensional dielectric rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 62, no. 10, pp. 5362–5365, 10-2014.
- [83] V. Pham-Xuan, D. Trinh-Xuan, M. Condon, and C. Brennan, "Rapid convergent iterative solver for computing two-dimensional random rough surface scattering," in *2015 International Conference on Advanced Technologies for Communications (ATC)*, pp. 63–67.
- [84] Z. H. Lai, J. F. Kiang, and R. Mittra, "A domain decomposition finite difference time domain (FDTD) method for scattering problem from very large rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 10, pp. 4468–4476, 10-2015.
- [85] —, "A domain decomposition FDTD method for scattering from very large rough surfaces," in *2015 USNC-URSI Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium)*, pp. 132–132.
- [86] Y. Y. Pang, A. Q. Wang, and T. Q. Liao, "Fast numerical method based on compressive sensing for electromagnetic back scattering from one-dimensional rough surface with wide incidence," in *2016 Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, pp. 4036–4040.
- [87] J. J. Wang, A. Q. Wang, and Z. X. Huang, "Fast simulations of electromagnetic scattering from 1-d rough surface through adaptively modified characteristic basis function method," in *2017 7th IEEE International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation, and EMC Technologies (MAPE)*, pp. 382–385.
- [88] C. Li and R. Mittra, "Accelerating solution of rough surface scattering problems by using the UV technique in conjunction with the characteristic basis function method and the adaptive cross approximation," in *2015 USNC-URSI Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium)*, pp. 201–201.

- [89] —, “Accelerated generation of characteristic basis functions using randomized singular value decomposition,” in *2016 Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, pp. 2653–2653.
- [90] J. Zhang, J. Erway, X. Hu, Q. Zhang, and R. Plemmons. Randomized SVD methods in hyperspectral imaging. [Online]. Available : <https://www.hindawi.com/journals/jece/2012/409357/>
- [91] X. Zhu and W. Lin, “Randomised pseudo-skeleton approximation and its application in electromagnetics,” *Electronics Letters*, vol. 47, no. 10, pp. 590–592, 05-2011.
- [92] C. Pan, “Diffraction électromagnétique par des réseaux et des surfaces rugueuses aléatoires : mise en œuvre de méthodes hautement efficaces pour la résolution de systèmes aux valeurs propres et de problèmes aux conditions initiales,” Thèse de Doctorat, Université Paris-Saclay, Dec. 2015. [Online]. Available : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01423711>
- [93] B. Liu, Z. Li, and Y. Du, “A fast numerical method for electromagnetic scattering from dielectric rough surfaces,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 1, pp. 180–188, 01-2011.
- [94] C. Bourlier, “Propagation and scattering in ducting maritime environments from an accelerated boundary integral equation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 11, pp. 4794–4803, 11-2016.
- [95] —, “Propagation and scattering in a ducting maritime environment from a fast method of moments,” in *2017 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pp. 368–371.
- [96] J. W. Hao, W. Song, and X. Q. Sheng, “Efficient algorithm for calculating backscattering from two-dimensional rough sea surface under low grazing angle,” in *2016 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pp. 3695–3698.
- [97] J. Chungang, G. Lixin, and L. Wei, “Parallel FDTD method for EM scattering from a rough surface with a target,” in *2016 11th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory (ISAPE)*, pp. 569–572.
- [98] D. Miret, G. Soriano, F. Nougier, P. Forget, M. Saillard, and C. A. Guérin, “Sea surface microwave scattering at extreme grazing angle : Numerical investigation of the doppler shift,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, no. 11, pp. 7120–7129, 11-2014.
- [99] D. Miret, G. Soriano, and M. Saillard, “Rigorous simulations of microwave scattering from finite conductivity two-dimensional sea surfaces at low grazing angles,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, no. 6, pp. 3150–3158, 06-2014.
- [100] D. Miret, “Electromagnetic scattering from rough surfaces at grazing incidence : application to the sea surface,” Thèse de Doctorat, Université de Toulon, Feb. 2014. [Online]. Available : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01019965>
- [101] G. Soriano, C. A. Guérin, and M. Saillard, “Microwave ocean scattering at low-grazing angles with the GMoM,” in *The 7th European Radar Conference*, pp. 5–8.
- [102] S. Bellez and C. Bourlier, “Application of the CBFM-ACA approach to the scattering from natural media consisting of randomly distributed discrete scatterers,” in *2015 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pp. 251–254.
- [103] S. Bellez, C. Bourlier, and G. Kubické, “3-D scattering from a PEC target buried beneath a dielectric rough surface using a hybrid formulation and a fast solver,” in *2015 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pp. 271–274.

- [104] W. T. Sheng, Z. Y. Zhu, and M. S. Tong, "A novel approach for evaluating singular integrals in electromagnetic integral equations," in *Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation*, pp. 1–2.
- [105] W. T. Sheng, Z. Y. Zhu, K. Yang, and M. S. Tong, "Efficient evaluation of weakly singular integrals arising from electromagnetic surface integral equations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 6, pp. 3377–3381, 06-2013.
- [106] A. Ishimaru, "Wave propagation and scattering in random media and rough surfaces," *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, no. 10, pp. 1359–1366, 10-1991.
- [107] I. Fenni, "Efficient domain decomposition methods for electromagnetic modeling of scattering from forest environments," Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Oct. 2014. [Online]. Available : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01145661>
- [108] R. Mittra, "A novel domain decomposition technique for solving very large problems in frequency and time domains," in *The Second European Conference on Antennas and Propagation, EuCAP 2007*, pp. 1–4.

Titre : Méthodes rigoureuses par décomposition de domaines pour la diffusion électromagnétique par une surface rugueuse 2D

Mots clés : Diffusion par des surfaces rugueuses, Méthode des moments, Surface équivalente radar, Décomposition de domaines, Equation intégrale de frontière.

Résumé : La modélisation de la diffusion électromagnétique par une surface (aléatoirement) rugueuse est un sujet de recherche très actif. Elle est rencontrée dans de nombreux contextes liés à l'environnement comme les sols naturels ou la surface de mer, ou pour la caractérisation de défauts de surface à l'échelle de l'optique.

La modélisation rigoureuse de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des objets de grandes dimensions devant la longueur d'onde est difficile à mettre en œuvre, car elle implique la résolution d'un système linéaire pouvant atteindre plusieurs millions d'inconnues. Ainsi, le calcul de la réponse électromagnétique Radar d'une surface de mer bidimensionnelle multi-échelles, n'a jusqu'à présent jamais pu être résolu rigoureusement dans les bandes de fréquences microondes, et la polarisation croisée n'a pas pu être évaluée de manière fiable.

Cette thèse a pour but de résoudre en partie ce problème en considérant une surface 2D (aléatoirement) rugueuse parfaitement conductrice et de dimensions modérées. Pour cela, on emploie l'équation intégrale de frontière EFIE (Electric Field Integral Equation) discrétisée par la méthode des moments associée aux fonctions de base RWG (Rao-Wilton-Glisson).

Afin de résoudre efficacement le système linéaire résultant, nous avons choisi deux méthodes par décomposition de domaines, la SDIM (Subdomain Decomposition Iterative Method) et la CBFM (Characteristic Basic Function Method).

Ces méthodes, hybridées à l'ACA (Adaptive Cross Approximation) pour accélérer les étapes de couplage, permettent de résoudre des systèmes linéaires par blocs, avec des faibles complexités CPU et mémoire.

Title: Electromagnetic scattering from a 2D rough surface based on rigorous methods by decomposition of domains.

Keywords: Rough surface scattering, Method of Moments, Radar cross section, Decomposition of domains, Boundary integral equations

Abstract: The modeling of electromagnetic scattering by a (random) rough surface is a very active research subject. It encounters many environmental applications such as natural soils or sea surface, or for the characterization of surface defects at the optical scale.

The rigorous modeling of electromagnetic waves scattering by large objects compared to the wavelength is a difficult task and can involve the resolution of a linear system of several millions of unknowns. Thus, the calculation of the electromagnetic field scattered by a two-dimensional sea surface, has so far never been rigorously solved in the microwave frequency bands, and the cross polarization has not been reliably evaluated. This thesis aims to solve in

part this problem by considering a randomly rough and perfectly conducting 2D surface with moderate dimensions. For this, we use the EFIE (Electric Field Integral Equation) discretized by the method of moments using RWG (Rao-Wilton-Glisson) basis functions.

In order to effectively solve the resulting linear system, we have chosen two domain decomposition methods, the SDIM (Subdomain Decomposition Iterative Method) and the CBFM (Characteristic Basic Function Method). These methods, hybridized to the ACA (Adaptive Cross Approximation) to accelerate the coupling steps, make it possible to solve linear systems by blocks, with reduced CPU and memory complexities.