



HAL
open science

Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Christophe Hache

► **To cite this version:**

Christophe Hache. Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Paris Diderot, 2019. tel-02420979

HAL Id: tel-02420979

<https://hal.science/tel-02420979>

Submitted on 20 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris

Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Christophe Hache

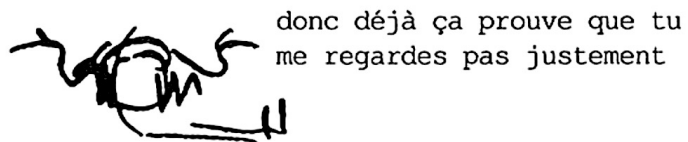
Note de synthèse du dossier de demande
d'habilitation à diriger des recherches.
Didactique des mathématiques.

Présentée et soutenue publiquement le lundi 16 décembre 2019

Devant le jury composé de :

- Pierre Arnoux, Université d'Aix-Marseille (examineur)
- Viviane Durand Guerrier, Université de Montpellier (rapporteure)
- Catherine Houdement, Université de Rouen Normandie (examinatrice)
- Luis Radford, Université Laurentienne (rapporteur)
- Valérie Spaëth, Université Sorbonne Nouvelle (examinatrice)
- Fabrice Vandebrouck, Université Paris Diderot (rapporteur)

Je suis désolée mais moi, quand je te regarde, je te vois avec des yeux, un regard, un visage... tout. Donc déjà...



Dossier d'habilitation à diriger des recherches

Christophe Hache

Décembre 2019

Note de synthèse

**Questions langagières dans
l'enseignement et l'apprentissage
des mathématiques**

Introduction

Ce document présente mes travaux de recherche. Il s'agit d'un rapport d'étape. Avant de proposer une description du contenu de ces travaux, j'aimerais évoquer les contextes de leur élaboration.

Je souligne tout d'abord un lien que je pense central avec ce que l'on appelle parfois « le terrain ». Après ma thèse j'ai tout d'abord enseigné pendant quatre ans au collège (Collège Jean Jaurès, à Pantin en Seine-Saint-Denis, puis Collège Hubert Robert, à Méréville dans l'Essonne). Depuis mon recrutement à l'Université Paris Diderot je participe aux activités de l'IREM de Paris dans le cadre de formations continue et au sein de plusieurs groupes de travail réunissant des collègues du secondaire et du supérieur : groupe « Logique », groupe « Léo, langage, écrit, oral », groupe « R2C2, raisonner, rechercher, communiquer ». Cette première expérience d'enseignement en collège et ces contacts permanents depuis avec les collègues enseignant dans le secondaire nourrissent, renouvellent, éclairent mes questionnements, mes réflexions, modifient souvent mes façons de percevoir les questions abordées, mes façons de penser et de décrire ce monde qu'est la classe de mathématique et ses acteurs.

Mon premier travail de recherche a été ma thèse, encadrée par Aline Robert et soutenue en 1999 au sein de l'équipe DIDIREM¹. Il se place, dans les années 90, au début de travaux sur les pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. Dans ma thèse, l'entrée dans les pratiques se faisait essentiellement par le « discours » de l'enseignant faisant cours (discours oral) : les paramètres de description du discours, l'évolution des caractéristiques du discours dans la séance étaient des outils pour décrire l'« univers mathématique » que l'enseignant faisait vivre à ses élèves.

Mes travaux actuels abordent les questions langagières sous un autre angle, nous le verrons, les pratiques langagières sont prises comme objet de recherche. Cet angle d'attaque a été initié également dès ma formation (DEA, 1994) par les cours de Daniel Lacombe. C'est en reprenant, bien plus tard, mes notes et ses travaux, puis d'autres bien sûr (notamment les travaux de René Cori, Viviane Durand Guerrier, Zoé Mesnil), que j'ai pu avancer dans l'utilisation d'outils de la logique mathématique pour décrire les pratiques langagières des mathématiciens.

Un des thèmes de la 16^e école d'été de didactique des mathématiques organisée par l'ARDM en 2011 était « Le langage dans les théories et recherches en didactique des mathématiques ». Les organisateurs avaient invité Marianna Bosch et Marie-Jeanne Perrin, Jean-Paul Bronckart, Viviane Durand-Guerrier, Maria Alessandra Mariotti, Maryse Rebière. De nombreuses pistes de réflexion se sont ouvertes à ce moment-là.

À la même époque, avec un groupe de collègues chercheurs et chercheuses en didactique des mathématiques (Thomas Barrier, Caroline Bulf, Aurélie Chesnais, Anne-Cécile Mathé, Joris Mithalal) s'intéressant dans leurs recherches aux questions langagières dans l'enseignement des mathématiques, nous avons créé un groupe de travail national (appelé « Lemme », Langage dans l'Enseignement et l'apprentissage des MathéMatiquEs). Il s'agissait de partager nos questionnements, y compris théoriques, nos approches de la question langagière lors de réunions régulières, de séminaires de travail, de journées d'études plus larges, etc. Ce cadre a été fondateur, notamment concernant les réflexions sur l'ancrage de mes recherches en didactique des mathématiques.

Enfin, les discussions avec des collègues enseignantes de français ou formatrices au sein du groupe Léo de l'IREM de Paris (et la lecture du travail de master de Marie Deffense), les échanges ponctuels, mais réguliers, avec Maryse Rebière, les prises de contacts et les travaux autour des journées d'études LDAR-DILTEC avec Christelle Cavalla, puis avec Catherine Mendonça Dias, ont été autant d'éléments qui m'ont fait me sentir autorisé à lire, citer, utiliser certaines recherches en didactique du français.

Dans ce document je vais préciser les questions que j'aborde concernant les dimensions langagières de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Je préciserai tout d'abord la façon d'appréhender le

1 DIDIREM s'est transformé après fusion avec le LDSP en 2010 pour donner naissance à mon laboratoire actuel, le LDAR

langage lui-même et le caractère inséparable des questions langagières et des questions de développement et d'apprentissage (parties 1 et 2).

Percevoir les usages de la langue comme une pratique sociale (partie 2), me permet de placer les analyses logiques des formulations mathématiques dans un cadre plus général d'analyse des pratiques langagières des mathématiciens. Les outils logiques permettent ainsi de caractériser ces pratiques, et de décrire la complexité, la densité des usages de la langue en mathématiques (partie 3).

Je sortirai ensuite de cette centration sur les pratiques des mathématiciens, pour constater (partie 4) que les élèves découvrent en même temps les objets mathématiques (en général par un travail explicite avec l'enseignant) et la façon dont on en parle, sans que soit généralement interrogée cette façon de dire les mathématiques (pourtant indissociable de la façon dont on les pense) : formulations dans les manuels, pratiques des enseignants. Nous verrons également que les complexités langagières constatées peuvent correspondre à des difficultés chez les élèves.

La question de l'accompagnement des élèves dans la découverte de ces pratiques langagières, de la prise en compte de la dimension langagière de certaines des difficultés des élèves, et donc de certaines difficultés d'enseignement, est une question ardue. Je proposerai (partie 5) un détour par des travaux de didactique du français sur la lecture, la compréhension de textes, ou sur l'écriture de textes pour permettre un pas de côté et tenter d'enrichir mon regard sur les possibilités de travail en classe de mathématique.

La dernière partie de ce texte présentera les perspectives de recherche (ou des travaux en cours) qui peuvent être des perspectives d'encadrement de recherches. Elles sont nombreuses et variées !

Sommaire :

Introduction.....	3
1 Pensée et langage, dimension individuelle et dimension sociale.....	5
2 « Langage » ? De quoi parle-t-on ?.....	7
<i>Le langage comme outil de recherches.....</i>	7
<i>Dire (et penser) le langage.....</i>	9
3 Pratiques langagières des mathématiciens.....	15
<i>Formalisme et formulation.....</i>	15
<i>Les pratiques langagières comme objet de recherche.....</i>	17
<i>Analyses de formulations des propositions, exemples.....</i>	18
<i>Analyses de formulations des démonstrations, exemples.....</i>	21
<i>Conclusion.....</i>	26
4 Pratiques langagières des mathématiciens en classe ? Premières entrées.....	29
<i>Usages de la langue et manuels scolaires de mathématiques.....</i>	29
<i>Pratiques des enseignants.....</i>	33
<i>Difficultés des élèves.....</i>	34
<i>Conclusion.....</i>	35
5 Texte, lecteur et auteur en didactique du français.....	37
<i>Lecture et écriture, deux activités indissociables.....</i>	38
<i>Lecture, lecteur.....</i>	39
<i>Écriture, auteur.....</i>	43
<i>Conclusion.....</i>	45
6 Perspectives.....	47
<i>Pratiques langagières des mathématiciens.....</i>	47
<i>Pratiques langagières en classe.....</i>	49
<i>Travail mathématique avec les élèves en lien avec des questions langagières.....</i>	51
<i>Formations des enseignants.....</i>	52
Bibliographie.....	55
Annexe.....	65
<i>Table des matières.....</i>	65
<i>Déduction naturelle.....</i>	66

1 Pensée et langage, dimension individuelle et dimension sociale

Mon approche se structure autour d'une hypothèse théorique fondamentale reprise de nombreux travaux avant les miens : la proximité, l'interdépendance, la différence dialectique, entre pensée et langage, entre penser et parler. Comme le dit Raymond Duval

« On ne peut pas faire comme si les représentations sémiotiques étaient simplement subordonnées aux représentations mentales, puisque le développement des secondes dépend d'une intériorisation des premières et que seules les représentations sémiotiques permettent de remplir certaines fonctions cognitives essentielles, comme celles de traitement » (Duval 1993, page 39)

Parler ou écrire ne sont pas de simples activités physiques, le langage n'est pas un média, qui transmettrait une pensée constituée par ailleurs.

Parler, écrire c'est aussi penser. Ou, pour citer Rita Carol :

« Il n'y a pas d'extériorité entre pensée et parole ou entre l'acte de penser, d'avoir des idées et l'acte de parler, de faire des phrases. L'idée ne préexiste pas au langage, elle se forme en lui et par lui. Le langage est le lieu d'exercice de la pensée de l'homme : la pensée raisonne dans le langage pour se trouver et se dire » (Carol 2015, page 4)

Je m'appuierai essentiellement pour étayer cette idée et insister sur sa dimension sociale sur les écrits de Jean-Paul Bronckart. Son travail est à la fois imposant dans le domaine, et fondateur pour mes propres travaux (conférence de Jean-Paul Bronckart à l'école d'été de didactique des mathématiques à Carcassonne en 2011, Bronckart 2013). Le langage relève intrinsèquement de deux niveaux complémentaires : un niveau social (expression, communication et régulation sociale) et un niveau individuel (expression, communication et traitement cognitif interne).

Jean-Paul Bronckart propose une conception générale du langagier comme « mouvement dynamique permanent entre activité communicative externalisée et traitement psycho-cognitif interne » (Bronckart 2007, page 58). Il s'appuie sur l'œuvre de Ferdinand de Saussure, et se place à la suite des travaux de Lev Semionovitch Vygotski et Valentin Nikolaïevitch Volochinov : dans le cadre de l'interactionnisme social (ou de l'approche historico – culturelle) selon lequel, « d'une part les modalités de base du fonctionnement humain s'inscrivent dans la continuité de celles du vivant (...), d'autre part le langage constitue le facteur déterminant de l'émergence des capacités sociales, culturelles et cognitives propres à l'espèce » (Bronckart 2007, page 58). À propos de cette continuité entre le fonctionnement humain et le fonctionnement du vivant, et de cette rupture de continuité liée au langage, Bronckart souligne que chaque espèce animale dispose, dans le cadre de ses activités collectives organisant les interactions des « organismes » avec le milieu, de comportements observables et de processus psychiques sous-jacents :

« Au plan technique, on peut soutenir que les interactions organisme-milieu mobilisent les processus d'assimilation, d'accommodation et d'équilibration (tels que décrits par Piaget 1947), ainsi que les processus d'association thématiques par le behaviorisme, et que la mise en œuvre de ces processus génère des reflets internes, c'est-à-dire donne naissance à des images mentales ou configurations de traces psychiques ancrées dans l'appareil bio-physiologique. [...] [Pour les animaux], ces images mentales sont néanmoins dépendantes des conditions de renforcement du milieu (elles s'éteignent en l'absence de nouveaux renforcements), sont idiosyncrasiques (ou ne font pas l'objet d'un partage-échange collectif) et restent inconscientes (ou ne s'organisent pas en opérations de pensée potentiellement accessibles à elles-mêmes). Et ces trois propriétés définissent ce que l'on peut qualifier de psychisme primaire » (Bronckart 2007, page 59)

Pour l'espèce humaine, le langage se présente comme une activité collective façonnant les représentations du monde :

« [sa] finalité majeure est de contribuer à l'entente (cf. Habermas 1987) requise pour la mise en œuvre des activités particulièrement complexes de l'espèce : l'activité langagière constitue l'instrument fondamental de planification, de régulation et d'évaluation de l'ensemble des (autres) activités collectives. Ce langage mobilise par ailleurs des signes relevant d'une langue naturelle, c'est-à-dire

des unités sonores, variables selon les communautés, ayant la capacité de faire référence à des aspects quelconques du milieu. La thèse majeure de l'interactionnisme est alors que ce sont ces signes mobilisés dans l'activité langagière qui donnent naissance aux représentations humaines, en tant qu'images mentales stabilisées et opératoires » (Bronckart 2007, page 60)

Ces représentations trouvent deux lieux « d'ancrage » : elles se stabilisent dans les instances et les œuvres d'une communauté, au titre de représentations collectives, mais elles s'intériorisent aussi en chaque organisme singulier au titre de représentations individuelles. Et c'est précisément cette intériorisation qui produit la différence entre un psychisme primaire, hérité de l'évolution, celle des animaux, en un psychisme « autonome (indépendant des conditions de renforcement), opératoire (dont les unités s'organisent en structures de raisonnement) et conscient (potentiellement accessible à lui-même) » (Bronckart 2007, page 60).

Les liens avec le développement et l'apprentissage sont alors évidents :

« Si, une fois la pensée consciente instaurée, la poursuite du développement psychologique est régie par de multiples facteurs, le langage y joue néanmoins un rôle déterminant, dans la mesure où les pratiques verbales sont impliquées dans la plupart des situations d'apprentissage, et qu'elles orientent et régulent l'ensemble des interactions formatives explicites » (Bronckart 2007, page 65)

Dans leur article de synthèse Luis Radford et Richard Barwell (Radford et Barwell 2016) rappellent ainsi que le langage est clairement plus qu'une « fenêtre » (permettant de comprendre indirectement ce que pense l'élève) ou un obstacle à la communication, à l'apprentissage. Ce n'est pas un tuyau permettant de faire circuler les pensées entre sujets. Le langage, la parole, le texte, la production et l'interprétation des symboles, des signes font partie intégrante du processus d'apprentissage (ils ajoutent « particulièrement en mathématiques », Radford et Barwell 2016, page 275).

Le langage comme outil de construction, de négociation, de transformation des représentations individuelles et sociales est ainsi au cœur des processus d'enseignement et d'apprentissage. C'est un point fondamental qui motive mon entrée dans les problématiques d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques par les questions langagières.

2 « Langage » ? De quoi parle-t-on ?

Aurélie Chesnais (Chesnais 2018, page 104) propose un découpage des problématiques liées aux questions langagières dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques en quatre grandes entrées (non indépendantes) « le rapport entre langage et mathématiques, entre langage et conceptualisation des mathématiques, et enfin entre langage et enseignement des mathématiques (chaque problématique incluant la précédente mais ne s'y réduisant pas) » et, d'autre part, le langage comme « outil pour le chercheur, comme trace de l'activité des élèves et des enseignants ».

Je vais présenter ci-dessous mon travail de thèse comme un exemple de recherche abordant le langage essentiellement comme un outil pour le chercheur (une telle recherche apporte, bien sûr, aussi des éléments permettant d'éclairer les trois premières entrées). Je préciserai ensuite la façon dont je croise les questions langagières, et les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

Le langage comme outil de recherches

Luis Radford et Richard Barwell, dans leur article de 2016 (Radford et Barwell 2016, page 275), parlent de certaines recherches analysant le langage comme « a kind of window to see indirectly what is happening in the student's mind ». Comme les recherches en didactique des mathématiques étudient l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, le langage, même en se limitant au langage verbal écrit ou oral, a évidemment une place centrale et essentielle comme entrée dans les phénomènes observés.

Ma thèse (Hache 1999) proposait ainsi, au cours des années 1990, une recherche sur les pratiques enseignantes en classe et peut constituer un cas d'étude sur la prise en compte de la dimension langagière dans ce type de recherches. Je propose ici une relecture de cette recherche en lui donnant une certaine dimension générique.

Les questions posées dans mon travail de thèse étaient relatives aux pratiques enseignantes : un enseignant enseigne-t-il de la même manière des notions différentes ? Je me suis essentiellement appuyé sur des travaux existant concernant la caractérisation des notions à enseigner. L'étude et la caractérisation des pratiques était une question nouvelle. L'entrée principale sur ces pratiques a été liée au discours oral de l'enseignant. Dans la partie méthodologique d'un article écrit en 2001 reprenant le travail de thèse, je précise ainsi que l'analyse des pratiques enseignantes se fera selon différentes modalités, dont une liée au « discours »² :

« Une troisième analyse concerne spécifiquement le discours du professeur [NdA : on le verra, le discours des élèves est quasiment inexistant] : de quoi parle-t-il, en quels termes ("qualité" mathématique mais aussi présence ou non de questions), dans quels buts ? Cette analyse permettra d'évaluer (par exemple en étudiant les questions du professeur) les échanges entre professeur et élèves, mais aussi de préciser la variabilité effective des approches – le potentiel d'ouverture didactique³ (le professeur parle-t-il toujours de la même façon des objets qu'il aborde ? Toujours avec les mêmes objectifs ?). Au total, chaque épisode est décrit par 89 paramètres (62 pour la description des tâches et activités, et 27 pour le discours), les huit séances étant scindées en 69 épisodes » (Hache 2001, page 86)

La façon de prendre en compte cette dimension langagière est précisée par exemple dans un article écrit en 1998 :

« Il ne s'agit pas de tomber dans l'illusion de la transmission directe des idées entre l'enseignant et les élèves, simplement par l'écoute, mais de tenir compte des modes de communication du savoir dans les phénomènes d'apprentissage. Dans ces conditions, nous avons fait l'hypothèse qu'il peut être utile pour interpréter les apprentissages de tenir compte de certaines caractéristiques locales des discours enseignants tenus en classe. [...] Il s'agit de tenir compte de la variabilité de ces formes de discours

2 Le terme est utilisé dans son sens courant, sans précision.

3 Terme définit dans la thèse, page 20.

avec l'hypothèse que les médiations correspondantes peuvent elles aussi, au sein des scénarios, contribuer à engendrer, à terme, des effets différents » (Hache et Robert 1998, page 112)

La thèse précise les analyses effectuées :

« Le discours a été analysé selon trois grandes caractéristiques. Deux mesurent la variabilité du discours du professeur (comme prenant part au potentiel d'ouverture didactique) : l'une sur le fond (*l'objet du discours*) permet de préciser la contextualisation du discours et les liens que le professeur fait entre la situation contextualisée étudiée et les mathématiques décontextualisées, et l'autre sur la forme (*la teneur du discours*) décrit la distance entre le discours du professeur et ce que pourrait être un discours strictement mathématique (c'est-à-dire comme on le trouverait par exemple dans un texte écrit de mathématiques) et prend en compte aussi le mode du discours (interrogatif, affirmatif). La troisième catégorie (*la fonction du discours*) retrace les intentions du professeur quant à l'organisation des mathématiques sous-jacentes à son discours, quant au plan sur lequel il place son intervention, quant à la médiatisation choisie (informations, réflexions) » (Hache 1999, page 40)

On voit qu'une petite partie des indicateurs choisis prend en compte les formulations elles-mêmes. La *teneur* semble la caractéristique la plus proche de préoccupations liées à la formulation. Elle pointe notamment le discours direct (Hache 1999, page 47 : « discours "mathématiquement correct" », « proche de celui d'un livre de mathématiques » ; Hache et Robert 1997, page 15 : « un contenu mathématique strict, quel que soit le langage dans lequel il est exprimé (formel, familier, ordinaire, mixte) »). Pour préciser, concrétiser les différentes catégories de « teneur » du discours, je reprends ici un extrait d'un exemple donné alors :

« Légende :
 texte rayé discours indirect
 texte souligné discours interrogatif
 texte discours direct
 texte italique interventions d'élèves

[...]

~~- Alors, vous voulez une droite, parallèle... Ha oui, alors là évidemment ça marche aussi bien sûr. Si j'ai une droite parallèle à l'axe des abscisses, effectivement tous les points vont avoir la même, heu, ordonnée. Donc, heu, c'est vrai. C'est un cas, c'est un cas très simple. Mais donc on peut dire la fonction constante. Une fonction constante est paire.~~

Bon mais un autre exemple un peu plus, compliqué quand même, parce que là c'est extrêmement, extrêmement simple comme fonction. Alors qu'est-ce que vous connaissez comme fonction. Hein, vous pouvez deviner. Comme calcul qui, quand on prend un nombre et quand on prend son opposé donne le même résultat » (Hache 1999, pages 48 et 49)

La plupart des indicateurs évoquent plus le contenu du discours que le discours lui-même ou sa forme, ce qui est prononcé est un outil pour entrer dans ce qui s'échange pendant la séance, un élément permettant de décrire, de caractériser l'« univers mathématique que l'enseignant fait vivre à ses élèves » ou le « potentiel d'ouverture didactique » d'un épisode, le langage n'est pas l'objet des analyses. Voici un extrait de présentation d'une analyse de séance (tous les épisodes sont pris en compte) issu de la thèse permettant de se rendre compte de la nature des analyses envisagées :

« Le premier axe de l'analyse [en composante principale] oppose deux tendances des échanges en langage mathématique : d'une part l'information sur des mathématiques contextualisées et d'autre part la réflexion et la structuration à propos du lien entre mathématiques contextualisées et décontextualisées (cette réflexion est ponctuée d'information sur les mathématiques décontextualisées).

Le second axe oppose deux tendances du discours en langue courante (opposition du même type que l'axe 1) : l'information sur les mathématiques contextualisées d'un côté et, de l'autre côté, des échanges (c'est-à-dire avec questions) sur la structuration, de réflexion ou sur les mathématiques décontextualisées » (Hache 1999, pages 81 et 82)

Le travail se termine en dégagant de grands types d'univers mathématiques que les enseignants font fréquenter aux élèves dans les séances analysées, je reprends ici ceux pour lesquels la teneur du discours a une place visible, ils sont décrits dans un écrit commun avec Aline Robert (Hache et Robert 1998). Je mets en gras ce qui correspond à la « teneur du discours » :

« On pourrait schématiser une première manière de faire fréquenter les mathématiques en parlant d'un univers de type “manuel animé”. Cela correspond à une séance où le “nouveau” n'est pas préparé précisément, même si des révisions amènent les élèves à se rappeler ce qu'ils savent sur les notions anciennes qui peuvent servir. Les discours sont peu différenciés selon les épisodes. **L'enseignant utilise toujours un vocabulaire très proche du vocabulaire mathématique** (discours direct). [...] Un autre univers qui semble s'esquisser, et qui est opposé au premier d'une certaine façon, serait celui des “mathématiques commentées”. Le “nouveau” est préparé avec précision, l'élève sait exactement ce qui est généralisé par le cours. Cependant les phrases faisant le lien entre le contextualisé et le décontextualisé, notamment pour ce “nouveau”, sont plutôt émises pendant les exercices que pendant le cours, assez “dépouillé”. La structuration est importante, voire très importante, ainsi que le discours indirect, majoritaire. **Autrement dit l'enseignant transforme le discours strictement mathématique, l'adapte** » (Hache et Robert 1998, page 138)

On voit donc que ce que dit l'enseignant est ici un indicateur de ce qui se joue dans les échanges, un des éléments permettant de décrire l'univers mathématique qu'il fait fréquenter à ses élèves.

La thèse ou les articles cités ici précisent peu ce qu'est le « discours strictement mathématique », la façon dont on caractérise sa transformation, la proximité de ce que dit l'enseignement avec ce que serait discours. C'est sur ce point, une fois reformulé, que porte la première partie du travail que je vais présenter dans la suite de ce texte : analyser les pratiques langagières des mathématiciens, la façon dont on les retrouve (ou non) dans le discours des enseignants, dans les textes des manuels, et la façon dont les élèves peuvent se l'approprier (ou non).

Notons enfin que ce travail de thèse est liée aux recherches sur les pratiques enseignantes développées postérieurement sur des bases proches (voir par exemple Robert 2008, page 13). Des traces de ce lien apparaissent dans les travaux récents de Stéphanie Bridoux, Nicolas Grenier Boley, Aline Robert et moi, menés autour de la notion de « proximité » (par exemple : Bridoux *et al.* 2016).

Je précise dans le paragraphe suivant la façon dont je passe du langage comme outil pour le chercheur au langage comme objet de recherche. Je commence par préciser les termes utilisés (jusqu'ici essentiellement « langage » et « discours ») afin d'en arriver à mes premières questions.

Dire (et penser) le langage

Prise en compte du langage dans les recherches, recherches sur le langage en didactique des mathématiques, ces thématiques ont été très développées dans les années 80 en France et depuis quelques années (notamment depuis l'école d'été de didactique des mathématiques en 2011 à Carcassonne). De quoi parle-t-on ? Un ensemble assez large et varié de mots est utilisé au fil des recherches : « langue », « langage », « discours », « codes », « registres », « symboles », etc. chacun de ces mots pouvant être composé, par exemple pour « langue » : « langue courante », « usage courant de la langue », « langue française », « langue mathématique », « langue naturelle », « langue symbolique », etc. Bien sûr chaque recherche développe une approche particulière qui justifie l'utilisation d'un mot ou d'un groupe nominal particulier. Je pense que cela va au-delà de cette variété d'approches : il y a souvent un flou sur l'objet ou les objets considérés.

Pour illustrer cette hétérogénéité du vocabulaire (et des concepts sous-jacents, même si de courts extraits ne suffisent pas), je vais lister plusieurs recherches en didactique des mathématiques qui citent ou s'appuient sur un (seul) travail fondateur et souvent utilisé en France, le travail de thèse de Colette Laborde (Laborde 1982). Je présenterai ensuite les expressions que j'utiliserai (et ceux qu'utilisaient Colette Laborde) : de façon centrale « pratiques langagières », mais aussi « langue » et « langage », « formulation », etc. Je liste par ordre chronologique, des recherches citant la thèse de Colette Laborde. C'est moi qui souligne (en gras) :

« Dans la pratique mathématique, pour des raisons d'économie, la formalisation recourt à une association, dans des proportions variées, de la **langue naturelle** et de la **langue symbolique** — **le formalisme naïf au sens de Bourbaki**. Cette association correspond à une construction et à un fonctionnement linguistique spécifique (Laborde 1982) » (Balacheff 1987, page 159)

« Le **langage mathématique** est complexe, car il utilise **deux codes** étroitement imbriqués : la **langue naturelle** et la **langue symbolique**. Cette imbrication est nécessaire. On ne peut tout écrire en langue naturelle (on est au moins obligé de coder les nombres) ni tout écrire en langue symbolique (c'est théoriquement possible, mais ce serait rapidement illisible sauf peut-être pour quelques logiciens entraînés). De nombreux auteurs ont souligné les difficultés de cette imbrication (Freudenthal 1973, Laborde 1982) » (Boschet 1987, page 19)

« Tout au plus il faut remarquer que pour les élèves jeunes (10-12 ans) l'aide textuelle est parfois un peu complexe dans la mesure où les phrases ont une construction proche du **langage utilisé en mathématiques**, souvent très condensé (Laborde 1982) » (Assude *et al.* 1996, page 57)

« D'une façon minimale et statique, on peut dire qu'un **texte mathématique** est un « tissu » de relations entre des objets mathématiques, tissu qui se manifeste assez souvent par l'**usage de symboles mathématiques, de formules, de graphiques** entrelacés avec le **langage naturel** (Laborde 1982) » (Assude 1999, page 3)

« Pour faire des mathématiques aussi bien que pour les enseigner, **le discours** est omniprésent et, dans le discours, il y a imbrication du **langage naturel** et du **langage mathématique**, comme l'a précisé Colette Laborde (1982). Le langage naturel intervient donc doublement dans l'activité mathématique » (Bosch et Perrin 2013, page 267)

« Mais C. Laborde montre très bien qu'il y a un **usage** particulier **de la langue en mathématiques**, dû à l'interaction des **deux codes** de l'**écriture symbolique** et de la **langue naturelle** » (Mesnil 2014, page 88)

« Rappelons à ce sujet la thèse de C. Laborde (1982) avec la définition du **langage mixte** qui est celui de la classe de mathématique » (Chappet-Pariès et Robert 2014, page 6)

« Nous partons du travail pionnier de description du **langage mathématique** de Colette Laborde qui a montré que le langage mathématique est formé d'**une langue naturelle** (ici, le français) et d'**écritures symboliques** (Laborde 1982, page 18) » (Drouhard 2014, page 4)

« Le plus souvent, les énoncés du **langage mathématique** empruntent aux **deux registres**, celui de la **langue naturelle** et celui du **symbolisme logico-mathématique**. Sa complexité dépasse néanmoins celle de la seule juxtaposition de celle de ces deux registres : le travail inaugural de Laborde (1982) en didactique sur le langage mathématique montre que le langage mathématique résulte d'une interaction entre le **langage naturel** et un **langage plus symbolique**, ceci lui conférant une complexité propre » (Barrier et Durand Guerrier 2015, page 7)

« Nous avons considéré différentes catégories de langage. Le langage géométrique est relatif aux objets, relations ou propriétés géométriques, il relève de la **langue mathématique** (Laborde 1982) constituée d'éléments d'**écriture symbolique**, de termes lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques et de tournures syntaxiques privilégiées. Le **langage courant** est le **langage usuel**, il est constitué de termes de la **langue naturelle**. Nous appelons langage technique un langage qui permet de décrire les actions techniques et qui évoque donc les relations entre les artefacts et les objets graphiques ou géométriques » (Petitfour 2015, page 91)

« On voit ici aussi un **usage de la langue** en interaction avec l'**usage de symboles**, ces interactions sont étudiées dans la thèse de Colette Laborde (Laborde 1982) » (Hache 2016b, page 607)

Je reviendrai ci-dessous sur le travail de Colette Laborde.

Il me semble important de commencer ici par une mise au point lexicale, concernant au moins mon travail. Les mots « langue », « langage », « discours », etc. sont en effet utilisés de façon souvent proches et parfois interchangeables, ce qui rend parfois flous les concepts dont il est question. Plusieurs notions semblent cependant importantes à différencier et à mettre en avant. Les choses seront précisées au fil du texte, mais je distingue pour l'instant :

- **Langage.** Un des sens donné par le dictionnaire pour « langage »⁴ est « capacité générale des êtres humains à s'exprimer et à communiquer à l'aide de signes ». Un autre sens correspond à « système de signes ou de symboles », on trouve souvent la précision « accompagné de règles d'usage ». *Je garderai un sens proche du premier évoqué, très général pour le mot « langage », et utiliserai le mot « langue » pour le second sens.*

C'est un choix : le mot « langage » est effectivement parfois utilisé dans un sens qui est plus proche du sens proposé pour « langue » ci-dessous, y compris dans des champs disciplinaires proches. On peut penser par exemple à l'usage qui en est fait en informatique (« langage de programmation ») ou en logique mathématique (« langage des prédicats »), je ne m'interdis bien sûr pas de reprendre ces expressions ponctuellement le cas échéant.

Mon choix raréfie de fait l'usage du mot « langage », ce qui me semble positif compte tenu de sa polysémie en français. Par ailleurs, ce choix évitera certaines ambiguïtés quand il sera question de référents en logique mathématique pour analyser les pratiques langagières des mathématiciens.

- **Langue.** Extrait de la définition du CNRTL⁵ : « système de signes vocaux et / ou graphiques, conventionnels, utilisé par des individus pour l'expression, la communication » (c'est assez large, on inclut par exemple la « langue des signes »). De façon plus restrictive, on peut entendre « langue » comme un ensemble de mots et de règles d'usages partagés très largement (exemple : la langue française, la langue anglaise, etc.). Une langue est décrite dans des dictionnaires, des livres de grammaire, etc. On parle des usages de la langue : usage par un individu (« un usage riche de la langue » par exemple, ou « un usage imagé »), usages par un groupe social (voir « pratiques langagières » ci-dessous), usages courants ou usuels, etc. Notons que la langue est une institution fondamentalement sociale comme le dit Ferdinand de Saussure (De Mauro 1972, page 33). Elle évolue, est porteuse d'une culture, etc. Nous nous limiterons cependant au sens de « matériau, [de] réservoir intériorisé par chacun » (Rebière 2013, page 221).

- **Discours, textes.** *Production langagière ponctuelle d'un individu* (orale pour le discours, écrite pour le texte). Je parlerai aussi de formulation pour parler de la production d'un discours ou d'un texte court (je souligne ici que ce mot inclut une dimension de processus, contrairement aux deux premiers plus centré sur le produit).

- **Pratiques langagières d'un groupe social.** *Usages de la langue communs à un groupe social déterminé*, la notion peut être reliée à l'idée de « communauté discursive ». On retrouve la notion de « pratiques langagières » dans de nombreux travaux : en didactique du français, ceux proches de l'équipe E3D à Bordeaux (Bernié 2002, Rebière 2013 par exemple) et en didactique des mathématiques (Bulf, Mathé, Mithalal 2015 par exemple).

« Le mot, dans le dictionnaire n'a pas de sens en soi (penser aux échecs de la traduction automatique). (...) En effet, le sens n'existe pas en soi, mais il se réalise dans l'interaction. La signification

4 Exemple de la définition proposée par le CNRTL (Centre national de ressources textuelles et lexicales) : <https://www.cnrtl.fr/definition/langage>

5 <https://www.cnrtl.fr/definition/langue>

n'appartient pas au mot en propre. Elle appartient au mot en tant que trait d'union entre les interlocuteurs » (Rebière 2013, page 223)

Chaque groupe social développe ainsi des pratiques langagières (chaque groupe social développe des pratiques qui lui sont propres, y compris des pratiques langagières). Elles sont, dans une certaine mesure, spécifiques au groupe et montrent ce qui est acceptable en son sein, elles valident la pertinence des pratiques collectives aussi bien qu'individuelles et elles prennent part à la construction du lien social, à la cohérence du groupe, de ses activités et de sa façon de penser le monde (Rebière 2013). Élisabeth Bautier défend ainsi l'importance de l'entrée dans le langagier par les pratiques langagières :

« Penser la langue et le langage en termes de pratiques langagières, que celles-ci soient scolaires ou non scolaires, signifie ne pas réduire l'activité langagière, de production comme de compréhension, à une maîtrise de la langue et des formes textuelles, ni à une compétence de communication et d'expression réalisée par des « actes de langage », sauf à ôter la spécificité de cette notion de pratiques et à identifier la production langagière à certains de ses aspects, les plus formels, les plus linguistiquement descriptibles.

La notion de pratique langagière conduit à penser le langage non seulement en tant qu'activité toujours simultanément cognitive, sociale, subjective, et bien sûr linguistique (puisqu'elle s'accompagne de la mobilisation et de l'élaboration de formes lexicales, syntaxiques, textuelles) et langagière, mais aussi en tant que production hétérogène dans laquelle se trouvent obligatoirement présentes les dimensions culturelles, sociales, langagières, tout à la fois singulières (propres au sujet qui les produit) et partagées (propres au groupe qui les reconnaît et en a élaboré les formes) et, de ce fait, normées » (Bautier 2001, page 127)

• Enfin, concernant les mathématiques, j'utilise aussi le mot **symbole** (écrit) et les mots **formalisme, formel**, ce sera précisé plus loin.

Il me semble intéressant ici de rappeler les définitions proposées par Colette Laborde. On peut trouver un certain parallélisme entre les définitions ci-dessus et celles qu'elle propose en introduction de sa thèse :

« Nous parlerons de code⁶ en tant que système structuré de signes permettant à un émetteur de transmettre un message à un récepteur. Un code est caractérisé par un répertoire de signes et par des règles d'agencement entre signes. Un exemple de code est fourni par l'écriture symbolique en mathématiques, que certains qualifient de langage symbolique (« langage » ayant alors le sens que nous donnons à code).

Le terme langage renverra plutôt dans la suite à la faculté qu'ont les hommes de parler, d'échanger leurs idées au moyen de séquences sonores. Celles-ci sont organisées elles-mêmes en systèmes qui varient d'une communauté à une autre et qui forment les différentes langues naturelles. Les langues naturelles sont donc aussi des codes. C'est pourquoi, nous dirons que dans un texte mathématique écrit sont utilisés deux codes, la langue naturelle concernée (le français par exemple) et l'écriture symbolique » (Laborde 1982, page 1)

Je n'ai pas introduit la distinction entre code (les signes, mots, mais aussi symboliques) et langue (mots). Colette Laborde semble parfois restreindre ici « langage » à une dimension orale, mais elle ne garde pas cette restriction par la suite. Ceci est peut-être lié au fait que certains codes (et notamment le « langage symbolique » évoqué en premier lieu et qui est au centre de son travail) n'existent, eux, que dans une forme écrite (comment rendre compte oralement de l'écriture « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » ?).

6 C'est elle qui souligne.

J'utilise (avec d'autres) par contre ici la notion de « pratiques langagières ». Dans la citation de Colette Laborde ci-dessus, l'expression « la langue naturelle des textes mathématiques » pourrait laisser penser qu'il y a une langue spécifique aux mathématiques, une « langue mathématique » (comme il y a une langue française), ce qui est une façon de voir les choses qui me semble contre-productive.

« Une langue naturelle connaît cependant de nombreuses variations à l'intérieur d'une même communauté suivant le thème abordé, la situation, les habitudes d'un groupe, etc. La langue naturelle des textes mathématiques présente ainsi des spécificités qui apparaissent peu dans les usages plus répandus de la langue » (Laborde 1982, page 1)

Pour exprimer les mathématiques, quand on le fait en français, on utilise la langue française, on en a, certes, un usage particulier (selon les pratiques langagières des mathématiciens, pourrait-on dire), mais c'est bien la langue française qui est utilisée. À l'oral la chose est flagrante, à l'écrit l'utilisation de symboles (ou graphiques, ou figures) est fréquente, mais c'est bien la langue française qui structure le propos. C'est justement l'objectif de Colette Laborde d'analyser l'interaction de ces deux « codes » à l'écrit.

Colette Laborde poursuit d'ailleurs en utilisant des expressions proches de « pratiques langagières » : « pratique de la langue », « usage de la langue ».

« Nous emploierons l'expression "langue courante", pour renvoyer à la pratique courante de la langue en opposition aux usages plus particuliers de la langue naturelle en mathématiques » (Laborde 1982 page 1)

Et, plus loin :

« Notre travail est fondé sur l'idée que ces deux codes [la langue naturelle et l'écriture symbolique] ne sont pas simplement juxtaposés mais en véritable interaction.

Leur emploi donne lieu à :

- des expressions symboliques ;
- des formulations relevant de la langue courante ;
- des formulations relevant d'une langue distincte de la langue courante par la présence dans ses énoncés d'éléments d'écriture symbolique, de termes lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques ou de tournures syntaxiques privilégiées. Un énoncé relève de [cette langue] s'il possède au moins l'une des trois propriétés citées » (Laborde 1982, page 19)

On voit bien ici toute la difficulté de l'usage du mot « langue » dans les expressions « langue courante » et « langue mathématique » : le mot « langue » n'y fait plus appel à un système structuré de signes (« langue » comme cas particulier de « code » dans l'introduction de Colette Laborde), mais à des usages de cette langue (pratiques courantes de la langue, ou usages plus particuliers, plus spécifiques). C'est un peu gênant d'avoir un même mot pour désigner deux objets distincts qui sont au cœur du travail, mais je soulignerai surtout le point suivant. Certaines expressions laissent entendre qu'il y aurait deux langues distinctes quand l'idée est seulement de distinguer deux usages, deux pratiques de la (même) langue. Je parlerai donc dans ce cas de « pratiques langagières des mathématiciens » d'une part et « d'usages courant de la langue [française] » d'autre part (sans me limiter mot à mot à ces deux expressions bien sûr). Ce choix donne une moindre visibilité, dans un premier temps, à l'usage des symboles dans les pratiques langagières (écrites) des mathématiciens. Mais cette idée d'une « langue mathématique » différente de la langue française (au sens donné page 11) que l'on considérerait pour elle-même est relativement répandue et suffisamment « réductrice » (en m'inspirant de la citation d'Elisabeth Bautier page précédente), voire contre-productive, pour que je souligne l'importance de porter une attention particulière à ces distinctions. Comme le dit Gérard Vergnaud « les mathématiques sont une connaissance et non pas un langage (...) » (Vergnaud 1991, page 79-80). Il précise « Pourtant il est indispensable de s'intéresser (...) aux rapports qu'entretiennent signifiants et signifiés » (page 80).

Mes premières questions portent donc sur la nature, et les descriptions possibles, des pratiques langagières des mathématiciens. Je présenterai les outils issus de la logique mathématique que j'utilise et le type de résultats obtenus. Ces premiers résultats permettront ensuite me permettront d'« entrer dans la classe » avec cet éclairage.

3 Pratiques langagières des mathématiciens

Comme on vient de le voir (« Langage » ? De quoi parle-t-on ?, page 11), on peut tout d'abord considérer que chaque communauté scientifique développe des pratiques langagières spécifiques. Chaque champ scientifique a ainsi des usages particuliers de la langue, les choses se disent, les questions se posent, les réponses ou les argumentations s'expriment selon certains usages, elles peuvent ne pas être entendues ou être jugées hors champ si elles sont formulées de façons inappropriées. Les sociologues, les philosophes, les géographes, les physiciens, les historiens, les psychologues, les biologistes, les linguistes, etc. développent des théories, des concepts, et prouvent dans des paradigmes explicites des propriétés de ces concepts. Pour ce faire ils ont développé, développent des pratiques langagières propres.

Je souligne ici que les pratiques langagières disciplinaires scolaires ont en commun une certaine complexité.

« Les discours disciplinaires se différencient des discours ordinaires (...) par des énoncés à forte densité informative. Ils ont aussi la particularité d'éviter la redondance qui caractérise par ailleurs le français parlé. Ils opèrent dans un mouvement croissant d'objectivation et d'abstraction, proportionnel à la pyramide scolaire. Par ailleurs l'absence d'énonciation leur confère une forme « désincarnée » qui semble ne renvoyer qu'à un univers scolaire, ne référant qu'à lui-même, détaché des « pratiques sociales de références » » (Spaëth 2008, page 90)

Comme le soulignent Martine Jaubert et Maryse Rebière les « concepts scientifiques » (définis par Vygotski, par opposition aux concepts quotidiens, comme étant en lien avec l'apprentissage scolaire) ont un rapport spécifique au langage, et notamment à la reformulation :

« Pour [Vygotski], l'appropriation des concepts "scientifiques" en contexte scolaire s'oppose à l'acquisition naturelle, dans l'expérience immédiate, des concepts "spontanés". En effet, pour lui, ces deux types de savoirs se différencient nettement (...) par les rapports qu'ils entretiennent avec le langage : alors qu'on peut constater l'imbrication étroite des concepts spontanés et des formes qui permettent de les dire, les concepts scientifiques sont reformulés différemment à chaque mise en œuvre, en fonction du point de vue énonciatif adopté » (Jaubert et Rebière 2001)

Cette centration sur les pratiques langagières a une importance particulière en mathématiques de par la nature des objets considérés, existant principalement à travers les caractérisations qu'on en donne, parfois graphiquement, parfois à l'aide de symboles, mais, de façon centrale et incontournable, en utilisant la langue.

Je vais préciser ici comment les pratiques langagières des mathématiciens mélangent formalisme et langue naturelle et, par écrit, formalisme, langue naturelle et symboles de divers ordres. Elles sont, par là même, indissociables de la nature même des contenus évoqués. Je préciserai ensuite la façon dont on peut analyser ces pratiques langagières à l'aide des outils de la logique mathématique.

Formalisme et formulation

Les pratiques langagières des mathématiciens sont donc spécifiques à double titre : tout d'abord comme pratiques d'un groupe social, comme précisé ci-dessus, mais aussi en lien avec la nature des objets dont il est question.

La « crise des fondements » à la fin du 19^e siècle, peut être analysée, entre autres, comme une remise en cause, une mise en doute de la langue courante pour dire les mathématiques. On peut par exemple citer Gottlob Frege (Frege 1882) : « [Les erreurs d'interprétation et les fautes de raisonnement] ont leur cause dans les imperfections du langage » (page 63), « le langage se révèle défectueux lorsqu'il s'agit de prévenir les fautes de pensées. Il ne satisfait pas à la condition ici primordiale, celle d'univocité » (page 64), « la langue n'est pas régie par des lois logiques telles que l'observance de la grammaire puisse suffire à garantir la rigueur formelle du cours de la pensée » (page 64), etc.

Fin 19^e et début 20^e, les mathématiciens, et notamment les logiciens, ont développé des outils formels pour décrire les objets mathématiques, leurs propriétés et la preuve de ces propriétés.

Je précise ici le sens que je donne au mot « formel » :

« Par formalisme j'entends une mise en forme codifiée permettant de décrire les objets mathématiques, leurs propriétés et les preuves de leurs propriétés, et de contrôler la validité de ce qui est exprimé. La codification permet par ailleurs une manipulation relativement indépendante du sens (règles de transformation, de combinaisons, etc.) » (Hache 2013, page 4)

D'une part on ne peut pas exprimer sans ambiguïté les mathématiques avec la langue naturelle. On a besoin d'outils formels pour exprimer les mathématiques, Gottlob Frege se propose ainsi de créer un formalisme de référence avec son *Idéographie* et de supprimer tout usage de la langue naturelle (voir par exemple Frege 1882). On peut dire que le fait d'arriver à un usage formel de la langue est un des objectifs que se fixe David Hilbert quelques années plus tard (début 20^e), c'est l'analyse que propose Alain Herreman (Herreman 2010) : il décrit l'objectif de David Hilbert comme étant de rendre la langue « transparente », elle joue un rôle, tout en étant ignorée, voir niée, elle est utilisée, mais il est essentiel au propos qu'elle n'intervienne pas, elle a un rôle formel au sens précisé ci-dessus. Alain Herreman s'appuie sur la notion de transparence développée par François Recanati (Recanati 1989, page 85) : « on peut qualifier de transparentes, en un sens beaucoup plus fort, des expressions qui, comme les noms propres de Russel, n'expriment pas un sens distinct de leurs références (...) l'expression est prononcée, c'est l'objet qu'on a directement sous les yeux ». Fabio Acerbi arrive à ce type de proposition quant à l'usage du grec ancien dans les éléments d'Euclide : vocabulaire très restreint sur l'ensemble de l'œuvre, structures de phrases spécifiques. Il précise ainsi comment, chez Euclide, « The rigidity of formulation in a natural language replaces the formalism » (Acerbi 2011, page 149).

D'autre part on ne peut pas communiquer ou penser complètement formellement (les mathématiciens ne sont pas des ordinateurs). Lire et manipuler une preuve dans le formalisme de Gottlob Frege, dans celui de Giuseppe Peano ou celui de Gerhard Gentzen (voir plus loin) est ardu, lire et manipuler des définitions ou des propriétés écrites dans le langage du calcul des prédicats n'est pas simple non plus. J'emprunte rapidement à René Cori l'exemple de la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R} \exists h \in \mathbb{R}_+^* (|x| < h \Rightarrow x = 0)$. Cette propriété est exprimée formellement, elle est assez simple et pourtant son sens ne va pas de soi. Elle est vraie, mais un mathématicien devra travailler un peu pour décider si elle est vraie ou fautive par exemple, et les erreurs sont fréquentes.

Les pratiques langagières des mathématiciens s'appuient ainsi sur un mélange variable de symboles, d'usages formels de la langue et d'usages plus courants de la langue. Reconstituer et reconnaître les éléments de ce mélange est malaisé, car les frontières sont floues, non explicites, non stables (elles dépendent du locuteur, mais aussi de l'auditoire, du contexte, etc.), ce d'autant plus que l'expression formalisée peut se faire en langue naturelle, notamment à l'oral (je développerai des exemples par la suite, voir par exemple « n s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier » page 18). Il y a co-existence.

Cette co-existence est une dialectique fructueuse (à maintenir, à entretenir) entre pensée, échanges, intuition, conjecture, exploration d'une part, et rigueur et formalisme d'autre part.

On retrouve certains éléments de cette dialectique dans le propos suivant de Gérard Vergnaud : « C'est bien entendu des situations, des phénomènes et du langage naturel que les symbolismes mathématiques tirent leur sens. Mais ils apportent, du fait de leur laconisme notamment, une efficacité que n'a pas le langage naturel » (Vergnaud 2001, page 14).

Je vais détailler ici une analyse de l'expression « Un nombre et son carré ont toujours même parité » qui sera reprise plusieurs fois dans la suite de cette note. Outre le mot « nombre », on y décèle facilement deux mots du lexique mathématique, « carré » et « parité », les autres mots semblent utilisés dans un usage courant. Notons que le mot « toujours » n'est pas nécessaire à la compréhension mathématique de la phrase, il est là pour renforcer le fait que le « un » débutant la phrase marque la présence d'un quantificateur universel (« Tous les »).

Le mot « parité » peut être lue comme la propriété mathématique, pour un nombre, d'être pair (multiple de 2) ou impair (non multiple de 2). Le fait d'avoir même parité pour deux nombres serait la propriété d'être tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Comment comprendre alors la phrase « Un nombre et son carré ont toujours même parité » ? Elle est équivalente à la conjonction des quatre phrases suivantes :

- (a) si un nombre est pair, son carré est pair,
- (b) si un nombre est impair son carré est impair,
- (c) si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est pair,
- (d) si le carré d'un nombre est impair, alors ce nombre est impair.

Un nombre est pair ou impair (et il n'est pas pair et impair) certaines des quatre phrases sont donc redondantes. On peut affirmer que la phrase de départ est, en fait, équivalente à la conjonction des propositions (a) et (b), la phrase pourrait alors être reformulée en utilisant les symboles du calcul des prédicats⁷ :

$$\forall n [((\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists k n^2 = 2k)) \wedge ((\exists k n = 2k + 1) \Rightarrow (\exists k n^2 = 2k + 1))]$$

On peut aussi lire la phrase de départ comme la conjonction des propositions (a) et (c), et donc comme une équivalence. En prenant cette dernière équivalence, et avec le même formalisme, la phrase pourrait être formulée :

$$\forall n [(\exists k n = 2k) \Leftrightarrow (\exists k n^2 = 2k)]$$

On peut aussi aborder la phrase d'une façon toute autre. Le mot « parité » peut être vu comme faisant partie de l'expression « avoir même parité » qui peut être définie⁸ sans définir ce qu'est la parité : deux nombres ont même parité si leur différence est un multiple de 2.

La phrase pourrait alors être reformulée ainsi : $\forall n \exists k (n^2 - n = 2k)$.

En quelques lignes on arrive ainsi à trois reformulations dans un même formalisme (et trois interprétations mathématiques) d'une phrase relativement simple. Chacune embarque avec elle des présupposés, des définitions d'objets, des choix. Énoncer une des trois c'est entrer dans un paradigme (extrêmement local), on perd une certaine richesse de la première formulation (qui était « en mots ») qui laisse ouverte toutes ces nuances de sens et d'interprétations, on perd aussi peut-être une certaine accessibilité plus immédiate. À l'inverse, utiliser une expression plus formelle permet d'éviter un certain travail d'interprétation au lecteur, voire des risques d'ambiguïté ou de quiproquo.

Les pratiques langagières comme objet de recherche

Les outils de la logique mathématique évoqués ci-dessus constituent une référence formelle pour analyser les pratiques langagières des mathématiciens décrivant les objets mathématiques, leurs propriétés et la preuve de ces propriétés.

Le travail se fait localement : on l'a souligné, il n'est pas possible de communiquer uniquement formellement, c'est cependant le cas pour une partie simple de proposition, ou de preuve, il est aussi fréquent de faire l'effort de formaliser une partie du discours pour s'assurer (ou pour convaincre) de la validité de ce qui est avancé. Ce sont ces jeux possibles entre usages de la langue courante et formalisme qui vont permettre de prendre du recul sur les pratiques langagières des mathématiciens, cette distance et cette proximité qu'il s'agira de décortiquer. Je parlerai ici d'analyse logique.

Nous verrons par la suite la façon dont ces analyses permettent un éclairage de certains moments d'enseignement ou d'apprentissage, de certaines difficultés ou opportunités.

Le travail de Zoé Mesnil (Mesnil 2014) montre bien la filiation du positionnement énoncé ci-dessus dans le champ de recherche en didactique des mathématiques en France. Daniel Lacombe et les travaux de

7 J'ajoute ici sans le dire un élément : les nombres impairs (que j'ai défini comme non pair) sont les multiples de 2 augmentés de 1. Cet élément ainsi que celui souligné dans la note 8 sont directement liés à la propriété de la division euclidienne (par 2).

8 On a ainsi deux sens possibles à « avoir même parité », ces deux sens sont équivalents. Ils coexistent dans la phrase « Un nombre et son carré ont toujours même parité ».

certaines de ses doctorants et doctorantes abordent cette question des pratiques langagières et utilisent des outils logiques pour les analyser : par exemple Josette Adda (Adda 1975), Farasololalao Rakotovoavy (Rakotovoavy 1983), Jean-Philippe Drouhard (Drouhard 1993). La thèse de Zoé Mesnil initie un travail de construction d'une référence pour l'enseignement de la logique, intégrant une problématique langagière. Elle conforte cette approche.

On peut reconnaître une proximité de ces travaux avec ceux de John Selden et Annie Selden (Selden et Selden 1995). Le travail de Colette Laborde (Laborde 1982) analyse la coexistence de deux « codes » dans les textes mathématiques. Les travaux des didacticiens ne s'attachent pas nécessairement directement de façon centrale à caractériser les pratiques langagières des mathématiciens, les travaux de Viviane Durand Guerrier (synthèse proposée dans Durand-Guerrier 2013) et de certains des doctorants qu'elle a encadrés (Faiza Chellougui, 2004, Imed Ben Kilani 2005, Rahim Kouki 2008, Thomas Barrier 2009, Judith Njomgang Ngansop 2013) abordent à partir de problématiques d'enseignement ou d'analyse de difficultés d'élèves les implicites des formulations usuelles en mathématiques. On perçoit aussi cette dimension dans le travail de Virginie Deloustal-Jorrand (Deloustal-Jorrand 2004), Ed Dubinsky et Olga Yiparaki (Dubinsky et Yiparaki 2000) ou de Susanna Epp (Epp 1999). Le travail de Thomas Barrier propose des analyses logiques pragmatiques permettant d'avoir accès à l'heuristique de la démonstration par exemple (Barrier 2016).

Dans mes travaux, j'ai proposé certaines analyses logiques. Je vais en reprendre quelques exemples.

Analyses de formulations des propositions, exemples

Le calcul des prédicats est un outil classique pour analyser la formulation des propositions mathématiques. Je ne vais pas décrire précisément ici ce qu'est le calcul des prédicats. Je ne définis pas non plus les termes « variables muettes », « quantificateurs ». On pourra se reporter à la partie « Quelques notions de logique mathématique » de la thèse de Zoé Mesnil (Mesnil 2014, pages 447 à 452) et au livre de René Cori et Daniel Lascar (Cori et Lascar 2003).

Je reprendrai ici deux analyses issues de mes travaux. Celle de l'usage de « avec » dans des expressions du type « s'écrire sous la forme [une expression algébrique mettant en relation une variable déjà connue et une autre variable] avec [une contrainte sur la seconde variable] » (Hache 2015). Et celle de l'usage de l'expression « à partir d'un certain rang » dans le contexte des suites (Bridoux *et al.* 2016).

« n s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier »⁹

Considérons les trois phrases suivantes :

Si n est un entier impair, il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier.

Si n s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier, alors n est un entier impair.

Les entiers impairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2k + 1$ avec k entier.

Les quantifications universelles de la variable n dans les deux premières phrases sont implicites et liées à la présence d'une implication (phénomène bien identifié maintenant, voir par exemple Durand-Guerrier 1999 ou Lacombe 2011, mais aussi Deloustal-Jorrand 2004). Les trois quantifications de la variable k sont tout aussi implicites et toutes les trois signalées par « avec k entier ». Elles ne sont cependant pas nécessairement à interpréter de la même façon dans les trois phrases (quantification universelle ou existentielle).

Je considère tout d'abord la phrase « Si n est un entier impair, il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier ». On peut expliciter la quantification universelle implicite de la variable n liée à l'implication : « Quel que soit l'entier naturel n , si n est un entier impair alors il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier » (proposition notée * dans la suite). Si on souhaite préciser le sens de « avec k entier » dans cette phrase, ou plus globalement comprendre le rôle qu'y joue la variable k , la façon dont elle est quantifiée, on est amené à écrire « Quel que soit l'entier naturel n , si n est un entier impair alors il existe un entier k

9 Reprise d'une partie d'un travail publié, Hache 2015.

tel que $n = 2k + 1$ » ou, dans une formulation plus symbolique « $\forall n \in \mathbb{Z} (n \text{ impair} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k + 1)$ ». L'expression « ... s'écrit sous la forme ... avec ... » est une expression figée et très utilisée, « avec k entier » marque, signale ou souligne ici la présence d'une quantification existentielle¹⁰.

Je pointe au passage le fait que la présentation de la variable k est exprimée en fin de phrase, après l'usage de la variable concernée, cela rejoint les analyses de Farasololalao Rakotovoavy (Rakotovoavy 1983) sur les marqueurs de variances (« quelconque », « donné », « fixé », etc.). Je ne développerai pas ce point de l'analyse ici (voir Hache 2013 et Hache 2016a).

Je vais maintenant m'intéresser à la réciproque de la proposition *. En gardant explicite la quantification universelle de la variable n celle-ci s'écrit « Quel que soit l'entier naturel n , si n s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier alors n est un entier impair » (ou, sous forme plus symbolique, « $\forall n \in \mathbb{Z} ((\exists k \in \mathbb{Z} n = 2k + 1) \Rightarrow n \text{ impair})$ », phrase notée ** ci-dessous. On peut donc également voir ce « avec k entier » comme la marque de la présence d'une quantification existentielle.

Je tiens cependant à mettre en avant une nuance. On peut en effet prouver que la proposition $(\exists x P[x]) \Rightarrow Q$ est équivalente à la proposition $\forall x (P[x] \Rightarrow Q)$ ¹¹. La proposition ** est donc équivalente à $\forall n \in \mathbb{Z} \forall k \in \mathbb{Z} (n = 2k + 1 \Rightarrow n \text{ impair})$, proposition que l'on peut formuler « Quels que soient les entiers n et k , si $n = 2k + 1$ alors n est un entier impair ». Cette équivalence montre que, dans la phrase « Quel que soit l'entier naturel n , si n s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier alors n est un entier impair » le « avec k entier » pourrait donc être légitimement entendu comme marquant la présence d'une quantification universelle. Les formulations alternatives suivantes accentuent cette possibilité et la difficulté d'interprétation de « avec k entier » : « tout nombre entier s'écrivant sous la forme $2k + 1$ avec k entier est impair », « tout nombre de la forme $2k + 1$ (avec k entier) est impair », ou « tous les nombres de la forme $2k + 1$ avec k entier sont impairs ».

On retrouve une double interprétation possible dans une autre expression d'usage courant : « les ... sont les ... avec ... », expression utilisée par exemple dans la phrase « les entiers impairs sont les nombres qui s'écrivent $2k + 1$ avec k entier » (notée ***)¹². Cette expression affirme l'égalité de deux ensembles, ce que l'on pourrait écrire $I = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k + 1\}$ ¹³, ce qui signifie à la fois que $\forall k \in \mathbb{Z} 2k + 1 \in I$ et que $\forall n \in I \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k + 1$ (double inclusion). En prononçant la phrase ***, un mathématicien peut vouloir souligner ou utiliser l'une ou l'autre de ces propositions (ou les deux), en entendant cette phrase un mathématicien l'interprétera dans un sens ou dans l'autre de façon naturelle et, pour lui, transparente. On voit donc que « avec k entier » est alors à entendre ici alternativement (ou simultanément) comme une marque de la présence d'une quantification universelle ou d'une quantification existentielle.

Globalement, « avec » peut donc être lu ou entendu, dans des structures de phrases très proches, comme lié à une quantification existentielle, ou à une quantification universelle, ou aux deux¹⁴.

Je précise qu'il n'y a pas de jugement de valeur dans le type d'analyses faites ci-dessus. On le verra, le fait d'avoir pour référent un système formel a pour conséquence une lecture en termes d'ambiguïté ou de manque. Je ne critique pas le fait qu'il existe plusieurs lectures possibles d'une expression, elles permettent aux mathématiciens de s'exprimer simplement, de se comprendre, de penser. Et elles sont naturalisées au point que toute personne ayant une certaine culture mathématique saura reformuler au fil de son discours (ou du discours de son interlocuteur) les expressions évoquées ci-dessus dans un sens ou

10 On trouve des expressions très proches en remplaçant « avec » par « où », « pour », « , » ou « tel que », ou en remplaçant « s'écrit sous la forme » par « vérifie »

11 P et Q sont des propositions, x est une variable libre de P , mais pas de Q . L'équivalence citée est un résultat classique de logique (une preuve utilise l'équivalence entre $A \Rightarrow B$ et $\neg A \vee B$, où A et B sont des propositions).

12 Ici aussi « avec » est parfois remplacé par « où », « pour », « , » ou « tel que », de même « s'écrit sous la forme » est parfois remplacé par « vérifie »

13 Je note ici I l'ensemble des nombres impairs

14 Je souligne ici qu'il y a d'autres contextes mathématiques où le mot « avec » est utilisé (voir Hache 2015).

dans l'autre selon ses besoins, de manière naturelle, sans même s'en rendre compte. La question est bien sûr moins évidente pour un élève apprenant les mathématiques : il découvre en même temps les objets mathématiques (explicitement) et la façon dont on en parle (souvent de façon transparente).

Je ne prône pas non plus ici un usage plus systématique de tel ou tel formalisme : le symbolisme utilisé dans les paragraphes précédents sert de référent au cours de l'analyse pour exprimer les structures logiques des phrases mathématiques envisagées, pour en parler, en préciser le sens, les comparer, etc. ; il n'est pas pris comme modèle (au sens du modèle à suivre). Il ne s'agit pour l'instant que de réfléchir aux pratiques langagières des mathématiciens.

« À partir d'un certain rang »¹⁵

Le mot « rang » est très utilisé dans le contexte des suites mathématiques, il désigne ce qui s'appelle aussi l'« indice » d'un terme (le 17^e terme de la suite a pour rang 17, le mot indice est lié à la notation, le 17^e terme de la suite u se note en effet u_{17}). Cela correspond bien, parmi d'autres, à une certaine acception du mot dans la langue française (le CNRTL¹⁶ propose : « Place, niveau atteint dans une série, un ordre, dans une disposition généralement hiérarchique ou dans un classement »), le terme a un lien fort avec l'ensemble ordonné des nombres entiers.

De même l'expression « à partir d'un certain rang » peut s'entendre en donnant aux mots un sens courant : on voit une série d'objets ayant chacun un rang (classés), on comprend qu'on parle de tous les objets placés après un certain objet. En mathématiques l'expression renvoie à la double quantification « $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ »¹⁷... et la cache. On peut par exemple dire « La suite¹⁸ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang » pour « $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N u_n > 0$ ». Soulignons que dans cette situation il existe effectivement un entier N (un certain rang) tel que, quel que soit l'entier n , si n plus grand que N , alors u_n est positif. Les expressions « constante à partir d'un certain rang » ou « croissante à partir d'un certain rang » sont un peu plus compliquées, mais relèvent de la même analyse¹⁹. Notons que ces différentes formulations ne font pas apparaître les variables muettes présentes dans les formulations quantifiées (elles n'évoquent pas « N » et « n » qui apparaissent, muettes, dans la formulation symbolique). Il existe d'autres formulations usuelles proches utilisant la variable n (mais pas N) comme « pour n assez grand », ou utilisant la variable N (mais pas n) comme « il existe un rang N à partir duquel », ou utilisant deux variables.

Dans le contexte de l'étude des limites de suites, il est courant de formuler la définition ainsi « u_n est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang ». Ce qui correspond à une lecture de « $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |u_n - l| < \varepsilon$ ». L'usage de « à partir d'un certain » est plus complexe que dans les phrases précédentes. Il faut ainsi lire dans la formulation d'une part une quantification universelle d'un certain ε (en ajoutant une intention concernant le fait que l'on veut que ε soit petit, on a ainsi une dimension pragmatique²⁰) et d'autre part le fait que le rang évoqué par « à partir d'un certain rang » n'est pas déterminé, il dépend de ε .

Les expressions issues des usages courants de la langue permettent des combinaisons et des organisations de phrases plus variées (conjugaisons, nuances qualitatives, insertion d'adverbes, etc.) que ne le permet le formalisme. Elles cachent par contre la référence formelle, et elles ne permettent pas un usage directement « opérationnel » : comment montrer par exemple qu'une suite n'a pas pour limite zéro avec la

15 Reprise d'une partie d'un travail publié (Bridoux *et al.* 2015, Bridoux *et al.* 2016)

16 Centre national des ressources textuelles et lexicales, <http://www.cnrtl.fr/definition/rang>

17 que l'on peut verbaliser par « il existe un entier N , (tel que) quel que soit n plus grand que N »

18 Voir Bridoux *et al.* 2016 à propos de la prononciation de « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ».

19 Exemple de reformulation pour « constante à partir d'un certain rang » : « $\exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N u_n = u_m$ », et pour « croissante à partir d'un certain rang » : « $\exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N (n \geq m \Rightarrow u_n \geq u_m)$ »

20 C'est-à-dire ici faisant intervenir les acteurs : le locuteur formule une intention, il « veut » (ou il dit que l'« on veut »). Cette formulation est celle de quelqu'un qui se place dans la perspective d'une preuve du fait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite l . Voir Analyses de formulations des démonstrations, exemples, page 21.

définition « Une suite tend vers zéro si et seulement si elle est aussi proche que l'on veut de zéro à partir d'un certain rang » ? On retrouve ici le jeu subtil (et vraisemblablement non conscient) entre le confort et la puissance d'évocation des usages courants de la langue, et la rigueur du formalisme, plus austère et ardu, mais gage de rigueur et de validité.

Analyses de formulations des démonstrations, exemples

J'ai aussi développé, sur les mêmes principes, des analyses de formulations de preuves. Je ferai ici référence à des travaux faits en collaboration avec Zoé Mesnil (Hache et Mesnil 2017).

Thomas Barrier développe (Barrier 2009, Barrier et Hache 2014, Barrier 2016) des outils d'analyse de preuve à l'aide de la logique dialogique. L'approche, dans une perspective pragmatique (prenant en compte la stratégie des acteurs notamment, dans le contexte) et située, est complémentaire de celle qui est travaillée ici. Son travail permet d'inclure une dimension heuristique, par exemple en analysant finement le rôle des exemples dans l'élaboration et la formulation des preuves.

Les analyses que je vais développer ici sont sémantiques, il s'agit de décrire le lien entre les expressions, les formulations utilisées et le sens visé. Pour ce faire, comme on l'a vu, en mathématiques, nous pouvons utiliser certains référents formels de la logique mathématique qui nous servent, en quelque sorte, d'outil de description du sens (ou des différents sens possibles). Concernant la démonstration nous avons adapté les outils logiques élaborés par Gerhard Gentzen, la déduction naturelle (Gentzen 1935). Après un bref rappel des raisons pour lesquelles il nous a semblé préférable de ne pas avoir recours à un usage formel de la langue pour nos analyses (raisons que l'on peut relier à un manque de « transparence », au sens de François Recanati, voir ci-dessus page 16), je présenterai l'utilisation que nous avons faite de la déduction naturelle de Gerhard Gentzen à partir de quelques exemples.

Preuve et usage formel de la langue

Ce travail (Hache et Mesnil 2017) est mené à partir d'un corpus de vingt-cinq preuves de la propriété « un nombre et son carré ont toujours même parité » rédigées par des mathématiciens de l'UFR de mathématiques de l'Université Paris Diderot (sur la base du volontariat). Il s'agissait à la fois de tester les outils d'analyse envisagés et de décrire les pratiques langagières des mathématiciens.

Je reprends ici une première preuve :

Dans la suite des nombres entiers, les nombres sont alternativement pairs et impairs. Dire que les nombres entiers a et b ont même parité signifie que leur différence est paire. Avec $a = b^2$, la différence s'écrit $b(b - 1)$ produit de deux entiers consécutifs, l'un des deux est donc pair, et donc ce produit est pair.

L'analyse du texte et des inférences qui y sont faites aboutit progressivement (voir Hache et Mesnil 2017) à la reformulation suivante (l'objectif est d'obtenir un texte citant uniquement des propriétés mathématiques, en les liant à l'aide de connecteurs logiques²¹ et dans l'ordre de leur utilisation) :

Soit b un entier relatif,
 b et $b - 1$ sont deux entiers consécutifs,
 or de deux entiers consécutifs l'un des deux est pair,
 donc b est pair ou $b - 1$ est pair,
 or le produit de deux entiers dont l'un est pair est pair,
 donc $b(b - 1)$ est pair,
 or $b^2 - b = b(b - 1)$,
 donc $b^2 - b$ est pair,
 or dire que deux nombres entiers ont même parité signifie que leur différence est paire,
 donc b^2 et b ont même parité

21 Dans ce texte, les « or » n'ont pas réellement de sens logique, ils signalent au lecteur qu'on énonce une propriété que l'on sait vraie par ailleurs (le lecteur est sensé le savoir).

Nous avons donc montré que
 Pour tout x entier relatif, x^2 et x ont même parité,
 c'est-à-dire qu'un entier et son carré ont toujours même parité.

Cette formulation n'est pas jugée satisfaisante. Difficile à appréhender, elle demande des relectures, des retours en arrière réguliers. La linéarité du texte n'est pas celle de la compréhension (ni celle choisie initialement par l'auteur). La succession des « donc » (et des « or ») souligne le fait que les pas de déduction sont signalés, mais non caractérisés (il est de toute façon difficile de préciser avec la langue courante, pour chaque déduction, la règle de déduction logique qui l'autorise et les raisons pour lesquelles il est possible dans le contexte d'utiliser cette règle).

Je donne ici deux explicitations de déductions marquées par un « donc » :

(ligne 1) b et $b - 1$ sont deux entiers consécutifs,
 (ligne 2) or de deux entiers consécutifs l'un des deux est pair,
 (ligne 3) **donc** b est pair ou $b - 1$ est pair

Il ne s'agit pas tout à fait d'une déduction élémentaire. Elle se fait en deux étapes marquées par le « donc » final. Pour deux entiers x et y , si on appelle $C(x, y)$ la propriété « x et y sont consécutifs »²² et $P(x)$ la propriété « x est pair »²³, la proposition « de deux entiers consécutifs l'un des deux est pair » peut se formuler ainsi : $\forall x, y \in \mathbb{Z} [C(x, y) \Rightarrow (P(x) \vee P(y))]$. Le texte rappelle que cette proposition est vraie (c'est ce que dit la ligne 2). La première étape de la déduction consiste à instancier cette propriété à b et $b - 1$ pour obtenir : $C(b, b - 1) \Rightarrow (P(b) \vee P(b - 1))$. Il n'y a pas d'allusion à ce point. Le texte rappelle cependant que la proposition $C(b, b - 1)$ est vraie (c'est ce que dit la ligne 1). La deuxième étape de la déduction consiste, à l'aide des propositions $C(b, b - 1) \Rightarrow (P(b) \vee P(b - 1))$ et $C(b, b - 1)$, à déduire à l'aide du *modus ponens* $P(b) \vee P(b - 1)$ (c'est ce que résume la ligne 3).

Deuxième exemple :

(ligne 1) Soit b un entier relatif,
 (ligne 2) (...) donc b^2 et b ont même parité
 (ligne 3) Nous avons **donc** montré que
 (ligne 4) Pour tout x entier relatif, x^2 et x ont même parité

Notons tout d'abord que la ligne 3 peut être ici remplacée par un simple « donc » (« nous avons montré que » est de l'ordre du commentaire, cela annonce simplement la fin de la preuve, et signale sans doute aussi le fait que ce pas de déduction fait appel à des lignes citées très en amont, ici notamment la première ligne). Il s'agit d'un pas de déduction élémentaire : on introduit une variable *fraîche*²⁴ b (ligne 1), on prouve une proposition $P(b)$ (ligne 2 ici), on en déduit $\forall x P(x)$ (lignes 3 et 4).

On voit ici que le fait d'essayer d'avoir un usage formel de la langue n'est jamais complètement abouti (ici certaines déductions ou certaines quantifications ne sont pas exprimées, les règles de déduction ne sont pas précisées, certaines expressions courantes subsistent).

On peut rapprocher cette conclusion du travail d'Yves Gerbier dans sa thèse menée en commun avec Hélène Icart Seguy (Gerbier et Seguy 1987). Leur travail a pour but d'explicitier et de préciser les choix fait par le rédacteur d'une preuve dans l'organisation et l'énonciation d'une preuve. La méthode adoptée par Yves Gerbier consiste à décrire « le squelette » de la preuve (très proche de la notion de « graphe propositionnel orienté » utilisée par Raymond Duval, Duval 1991, page 244), c'est-à-dire un schéma explicitant les propositions mathématiques en jeu (y compris implicitement) et les liens de déduction les reliant dans ce contexte. Ce squelette est commun à plusieurs preuves d'un même théorème rédigées par plusieurs auteurs et permet d'explicitier des « sous-squelettes » correspondant, pour chaque preuve analysée, aux propositions et liens effectivement cités dans la preuve. Yves Gerbier montre ensuite la

22 On peut la formuler à l'aide de symboles : « $|x - y| = 1$ ».

23 Que l'on peut formuler par exemple « $\exists z \in \mathbb{Z} x = 2z$ »

24 Pour simplifier, nous pouvons considérer que c'est une variable non encore utilisée. On marque souvent ce point en utilisant le mot « quelconque » : « Soit b un entier relatif quelconque ».

façon dont chaque auteur de preuve fait des choix relatifs aux contenus, et des choix linguistiques (utilisation de tel ou tel marqueur d'inférence notamment). Il utilise les notions de *principe principal* et de *conclusion principale* : un auteur d'une démonstration ne peut citer toutes les propositions du contexte nécessaires à garantir la certitude de la validité d'une nouvelle proposition, il en met en général une (seule) en avant, celle qui lui semble permettre de structurer au mieux son discours, d'apporter le plus d'information au lecteur. Yves Gerbier montre alors que les choix des mots « car », « comme », « parce que » et « puisque » permettent aux auteurs de présenter en nuance ces liens entre propositions. J'ai présenté plus longuement ce travail dans un atelier de la CORFEM en juin 2014 (Hache 2016a).

Ces squelettes et sous-squelettes vont être remplacés dans mon travail par l'usage d'un référent formel issu de la logique mathématique : la déduction naturelle. Cet outil présente un premier avantage, celui d'explicitier et de lister les pas de déduction possibles.

Déduction naturelle

Nous avons donc utilisé un référent formel pour formuler les preuves en adaptant les règles de la déduction naturelle de Gerhard Gentzen (Hache et Mesnil 2017). Les pas de déductions sont présentés sous forme d'une sorte de fraction : au-dessus de la barre ce que l'on a prouvé, en dessous ce que l'on peut en déduire, les règles sont celles de Gerhard Gentzen²⁵. Ce sont les indications relatives à la règle utilisées qui sont adaptées ici, elles sont grisées (à droite de la barre notamment). Pour plus de précision se reporter en annexe, page 65.

Les trois pas de déduction évoqués dans le paragraphe précédent sont par exemple les suivants :

- $\frac{\forall x P(x)}{P(t) \quad [t/x]} \forall /$ pour l'instanciation en un terme t d'une propriété universellement quantifiée, on sait que la propriété est vraie pour toute valeur de x , on en déduit qu'elle est vraie pour t ,
- $\frac{P, \quad P \Rightarrow Q}{Q} \Rightarrow /$ pour le *modus ponens*, on sait prouver la propriété P , on sait prouver que « si la propriété P est vraie, alors la propriété Q est vraie », on en déduit Q ,
- $\frac{\begin{array}{c} \circledast b \\ \vdots \\ P(b) \end{array}}{\forall x P(x)} \forall /$ pour la preuve d'une proposition universellement quantifiée, on introduit une variable fraîche b , on prouve $P(b)$, on en déduit que la propriété $P(x)$ est vraie pour tout x .

Chaque trait horizontal représente une déduction simple dont la nature est précisée sur la droite : « $\forall /$ » pour l'« élimination du quantificateur universel », c'est-à-dire l'instanciation, « $/ \forall$ » pour l'« introduction du quantificateur universel » (ce pas de déduction nécessite l'introduction préalable d'une variable fraîche schématisée par le petit cercle suivi de la lettre représentant la variable et le pointillé reliant l'introduction de la variable et la déduction effective), « $\Rightarrow /$ » pour l'élimination du connecteur implication.

Pour chaque connecteur propositionnel (conjonction, disjonction, implication, etc.) ou chaque quantificateur (quantificateur existentiel et quantificateur universel) on a ainsi deux pas de déductions élémentaires : une introduction et une élimination.

Nous nous sommes permis d'introduire quelques pas de déductions non élémentaires (appelés « simples ») car extrêmement présents dans les preuves (voir également en annexe, page 68). Par exemple, les implications étant toujours implicitement quantifiées, on ne précise jamais (comme je l'ai fait ci-dessus, page 22) que l'on commence par instancier l'implication pour une certaine variable avant d'utiliser le *modus ponens*. On peut donc introduire ce pas de déduction :

25 Le système proposé est très proche de celui utilisé par Viviane Durand Guerrier et Gilbert Arsac (Durand Guerrier et Arsac 2003) basé sur les règles de déduction de Copi. Le statut et la gestion des variables sont différents.

$$\frac{P(a), \quad \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))}{Q(a)} \quad \forall \Rightarrow /$$

pour résumer l'enchaînement suivant :

$$\frac{P(a) \quad \frac{\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))}{P(a) \Rightarrow Q(a)} \quad \forall /}{Q(a)} \quad \Rightarrow /$$

Considérons la preuve ainsi rédigée par son auteur :

On va établir successivement les propriétés suivantes :

(1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.

(2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

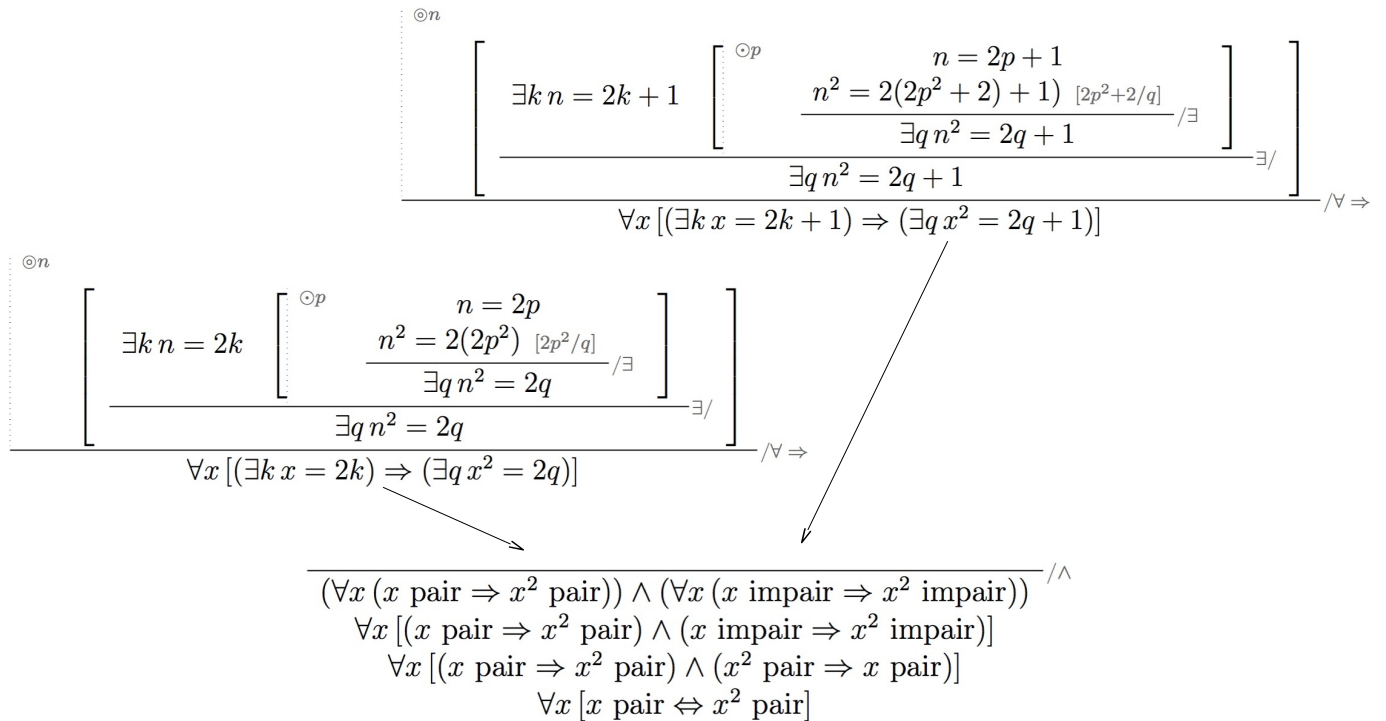
Preuve de (1). Soit n un entier pair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p$.

Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi n^2 est pair.

Preuve de (2). Soit n un entier impair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

Il vient alors $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi n^2 est impair.

On peut la représenter par le schéma suivant²⁶ :



On peut décrire ainsi la façon dont est exprimé l'enchaînement des déductions logique dans une preuve mathématique. Pour ce faire, nous avons interprété cette preuve de la façon suivante : l'auteur veut prouver une équivalence comme conjonction de deux implications. Nous utiliserons donc dans le référent formel la règle d'introduction du ET (conjonction, noté aussi \wedge).

Dans la partie « Preuve de (1) » il s'agit de prouver une implication quantifiée universellement (implicite associé à la formulation en « si ... alors ... »). La preuve commence naturellement par la présentation d'une variable fraîche dans le but de prouver une quantification universelle (« Soit n »).

L'auteur souhaite ensuite prouver « n pair $\Rightarrow n^2$ pair ». La preuve d'une implication $P \Rightarrow Q$ (introduction du connecteur \Rightarrow) se présente de la façon suivante : on suppose temporairement la proposition P , et, sous cette hypothèse, on prouve Q , on a alors prouvé $P \Rightarrow Q$ (sans que rien n'ait finalement été affirmé sur la véracité de P ou de Q). Dans le référent formel cette étape du raisonnement consiste à introduire une implication. On fait une déduction en prenant une hypothèse temporaire.

26 L'ensemble des pas de déduction utilisés et des notations est présenté en annexe, page Erreur : source de la référence non trouvée.

L'auteur utilise ici une même expression (« Soit n un entier pair ») à la fois pour la présentation de la variable n (en vue de la preuve d'une quantification universelle) et pour l'introduction d'une hypothèse temporaire (en vue de la preuve d'une implication). Nous avons souligné plus haut que l'élimination d'une implication est très souvent associée à l'élimination d'un quantificateur universel, de la même façon ici l'introduction d'une implication est associée à l'introduction d'un quantificateur universel, la chose étant si fréquente que ces deux introductions sont usuellement annoncées dans une même expression (par exemple comme ici : « Soit n tel que $P(n)$ »).

Dans sa preuve, l'auteur va ensuite utiliser le fait que n est pair. Cette propriété est existentielle (« $\exists k \ n = 2k$ »). L'utilisation d'une propriété « $\exists x \ P(x)$ » dans une preuve est décrite par le schéma suivant : on introduit une nouvelle variable fraîche (a par exemple), on suppose temporairement $P(a)$ vrai, et on prouve une propriété M (ne contenant pas d'occurrence de a) à partir de $P(a)$, on a alors prouvé que l'on peut déduire M de $\exists x \ P(x)$. Dans le référent formel cette étape du raisonnement consiste à éliminer une quantification existentielle.

L'auteur écrit « alors il existe p tel que $n = 2p$ ». On pourrait comprendre qu'il exprime ainsi le fait qu'il traduit « n pair » par « $\exists p \ n = 2p$ ». La suite du texte montre que ce n'est pas seulement ça, car la variable p continue à être utilisée alors que dans la simple proposition « il existe p tel que $n = 2p$ » c'est une variable muette. En affirmant « il existe p tel que $n = 2p$ » l'auteur affirme donc en même temps cette propriété existentielle, introduit une variable fraîche p et affirme qu'il suppose (temporairement) $n = 2p$. Cet usage amène bien sûr de la fluidité dans le discours, mais peut être source d'erreur : les mathématiciens aguerris savent qu'il faut « changer de variable » lors de deux éliminations de quantifications existentielles simultanées²⁷, malheureusement, de nombreux étudiants ne mettent pas en œuvre cette pratique, et produisent ainsi des raisonnements erronés (voir Chellougui 2004).

L'auteur poursuit avec « Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$ », c'est-à-dire avec deux calculs algébriques enchaînés. Le second a pour but d'écrire n^2 sous la forme $2t$ pour un certain terme t en vue de préparer la preuve d'une proposition quantifiée existentiellement. En effet, pour prouver une proposition quantifiée existentiellement, $\exists x \ P(x)$, il suffit de prouver que la proposition $P(t)$ est vraie pour un certain terme t (quelconque). Dans le référent formel cette étape du raisonnement correspond à une introduction du quantificateur universel.

Dans la preuve étudiée, c'est la mise sous la forme « $2 \times 2p^2$ » à la fin du calcul algébrique qui donne l'indice de la substitution qu'il faut faire pour déduire « $\exists k \ n^2 = 2k$ » de « $n^2 = 4p^2$ » (dans le référent formel on écrira « $[2p^2/k]$ » pour préciser la substitution effectuée). Soulignons que l'introduction de la quantification existentielle n'est pas explicite : l'auteur donne simplement la forme « n^2 est pair ».

Dernières remarques sur la formulation de la preuve analysée :

- Les marqueurs d'inférences utilisés sont « ainsi », « il vient alors » et « alors ». Soulignons que la proximité entre ce dernier mot et la notion d'implication, ne simplifie pas la distinction entre implications et inférences.
- L'inférence marquée par « ainsi » est justifiée par la forme de l'expression « $2 \times 2p^2$ », mais l'auteur ne fait pas d'allusion explicite au fait que « $2p^2$ » est un entier.
- La fin du raisonnement n'est classiquement pas exprimé : le lecteur doit terminer seul la « preuve de (1) » en déduisant que l'on a prouvé l'implication n pair $\Rightarrow n^2$ pair (conclusion de l'introduction de l'implication : on a prouvé qu'en supposant temporairement n pair on prouve n^2 pair), puis que $\forall n \in \mathbb{N} \ (n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair})$ (fin de l'introduction de la quantification universelle initiée par « Soit n »). Nous avons déjà vu par ailleurs que le lecteur doit faire le lien entre les propositions (1) et (2) et la proposition demandée.

27 Par exemple, dans le cas où on manipule deux nombres pairs a et b , on pourra écrire a sous la forme $2k$ (avec k entier), et b sous la forme $2k'$ (avec k' entier).

Le nombre d'omissions et d'implicites peut expliquer le fait qu'il est courant, lorsque cette analyse est présentée (en stage par exemple, ou lors d'ateliers ou de séminaires), que cette preuve soit interprétée par certains comme une disjonction des cas. Personne ne remet en cause le fait que le texte fait preuve, par contre il y a une marge d'interprétation sur la structure logique de la preuve elle-même.

On montre donc ainsi que la rédaction d'une preuve relève de choix personnels de l'auteur, celui-ci étant influencé par des pratiques classiques dans la communauté, tant dans les arguments choisis, la sélection des inférences mises en avant, que dans les formulations de ces arguments et de ces inférences. Les preuves rédigées par des mathématiciens sont donc bien loin d'être des objets strictement formels.

Conclusion

Cette partie de mes recherches cherche donc à décrire, caractériser les pratiques langagières des mathématiciens. J'ai, dans cette première étape, fait plusieurs choix :

- travailler en comparant les usages langagiers à un référent formel logique,
- travailler essentiellement sur des formulations de définitions mathématiques, propriétés mathématiques et preuves de ces propriétés.

Pour préciser l'approche décrite ci-dessus, je reprendrai tout d'abord cette citation d'Alain Berrendonner :

« User du modèle de la déduction logique pour représenter les discours quotidiens et leurs significations, c'est donc adopter comme norme la complétude qui est inhérente au concept de déduction. C'est faire l'hypothèse que les raisonnements tenus en langue naturelle vérifient, d'une façon générale, et quasi par définition, cette propriété d'être des totalités immanentes. C'est, par suite, se condamner à traiter comme "incomplet" ou "elliptique" tout discours qui manifeste de l'implicite, et dont la cohérence repose sur cet implicite » (Berrendonner 1983, page 211)

Il parle d'analyses de raisonnements, et non spécifiquement de démonstrations, c'est cependant pour moi un éclairage important sur les analyses logiques que j'ai décrites précédemment. Je m'appuie sur un référent formel (ici issue de la logique mathématique) et les analyses menées ici aboutissent à des résultats exprimés en termes de manques et d'implicites par opposition à ce référent. Je souligne ici que le fait de supprimer les implicites dans les discours n'est pas un but en soi, il s'agit plutôt de se donner les moyens d'appréhender, de comprendre, de caractériser la complexité des pratiques langagières des mathématiciens, de façon, au moins dans un premier temps, à élaborer des outils de prise de recul dans le cadre de l'enseignement des mathématiques (prise de recul notamment pour les enseignants). Il est bien sûr aussi possible que tâcher de supprimer un implicite dans certaines situations puisse faciliter la compréhension et l'apprentissage, et finalement l'appropriation des usages en matières langagières, mais ce point reste une hypothèse à creuser.

J'accentue ce point en faisant l'hypothèse, forte dans mon travail, que c'est cette possible distance au formalisme dans la formulation qui permet aux mathématiciens de travailler leurs objets, de communiquer, de penser les propositions mathématiques et leurs preuves. L'enseignement doit donc permettre de façon indissociable un apprentissage de la dimension formelle du travail mathématique, ainsi qu'une transmission et une entrée dans ces pratiques langagières qui permettent de l'appréhender.

Les analyses proposées peuvent être approfondies et systématisées.

Même si de premiers résultats émergent une analyse de corpus plus systématiques de textes permettrait d'affiner les résultats déjà avancés. On peut également imaginer des pas de côtés permettant des prises de recul (voir Approches « comparatistes », page 48) : comparaison des usages des mathématiciens francophones, anglophones, hispanophones, etc. ; comparaison des usages dans des communautés scientifiques proches utilisant les mathématiques (physiciens par exemple).

Les méthodologies d'analyses peuvent aussi être complétées. On peut penser à élargir la palette d'outils d'analyse. Deux pistes seront envisagées dans les perspectives à ce sujet (voir page 47) : analyses linguistiques, lexicométriques ; analyse en termes de *genre de textes*. Ce type d'analyse permettrait

d'affiner la description des pratiques langagières et pourraient accompagner le prolongement de mes questions dans les dimensions liées à l'enseignement et l'apprentissage.

Du point de vue de la recherche en didactique des mathématiques, je souligne que les analyses de pratiques langagières, telles que présentées, peuvent enrichir ce qu'il est classique d'appeler l'analyse épistémologique d'une notion, peuvent permettre d'affiner la description du « relief » de la notion enseignée (Pariès *et al.* 2007). Les outils évoqués dans cette partie permettent d'appréhender, de décrire certaines des spécificités des notions abordées.

Je poursuis le parcours de mes travaux en abordant une nouvelle série de questions : celles liées à l'entrée dans ces pratiques langagières. En quoi les complexités décrites ci-dessus *a priori* (hors de la classe) correspondent-elles à des difficultés pour l'enseignement ? Et pour l'apprentissage des mathématiques ? Les analyses permettent de cibler certains points pour lesquels il est légitime de se demander de quelle façon les enseignants de mathématiques s'y confrontent, ne serait-ce que dans leurs choix (souvent inconscients) de formulations, la façon dont ils les travaillent (ou non) en classe. Les mêmes questions se posent concernant les ressources qu'ils utilisent, les manuels par exemple (quels choix ? Quelles formulations ? Quel travail avec les élèves ?). On peut se demander également si la complexité décrite génère des difficultés pour les élèves, et quelle est la nature de ces difficultés, à quel point ils s'approprient naturellement ces pratiques langagières.

4 Pratiques langagières des mathématiciens en classe ? Premières entrées

Le travail décrit dans la partie précédente est centré sur les pratiques langagières des mathématiciens. Il s'agit de se donner les moyens de décrire, d'analyser, de caractériser les usages de la langue par les mathématiciens quand ils font des mathématiques. Qu'en est-il par exemple quand, lors de phases d'enseignement, l'enseignant n'est pas chercheur mathématicien ? C'est en effet le cas général dans l'enseignement primaire et secondaire. Dans quelle mesure retrouve-t-on dans les usages en classes les caractéristiques des pratiques langagières des mathématiciens ? Dans quelle mesure les complexités mises au jour correspondent-elles (se transforment-elles ?) en difficultés pour les élèves ? Comment les enseignants appréhendent-ils ces complexités ? Ces difficultés éventuelles ? Le champ des questions est vaste. Mon travail en est encore à ces débuts dans ces points.

Je distinguerais à ce sujet l'enseignement primaire de l'enseignement secondaire. Les enseignants du primaire n'ont, en France et en général, pas étudié les mathématiques à l'Université²⁸ (mis à part lors de leur formation professionnelle, très courte et, en général, très pauvre en enseignement mathématique), certains ont cessé de les fréquenter en seconde (15-16 ans). Au contraire, les enseignants de mathématiques du secondaire ont généralement une licence de mathématiques (et une première année de master pour les agrégés), ont préparé un concours au moins pendant un an dont les écrits sont, encore actuellement, essentiellement disciplinaires. Ils ont donc, *a minima*, étudié les mathématiques pendant quatre ou cinq années à l'Université. Je fais l'hypothèse que les enseignants du secondaire se sont acculturés aux pratiques langagières des mathématiciens pendant leurs études, notamment leurs études universitaires.

J'ai peu étudié l'enseignement des mathématiques dans le primaire (voir cependant Hache 2013, Barrier, Chesnais, Hache 2014, Barrier, Hache, Mathé 2014, Hache, Moulin 2019). Des questions à creuser apparaissent rapidement au vu de cette introduction : quels sont les usages langagiers des enseignants du primaire en classe quand il est question de mathématiques ? Quelle est la nature du changement, de ce point de vue, entre le primaire et le secondaire ?

Je me centrerai ici essentiellement sur l'enseignement en collège et lycée en abordant ces questions liées aux pratiques langagières en classe selon trois entrées : manuels scolaires, enseignants et élèves.

Ces problématiques sont très vastes et suscitent de nombreuses pistes de recherche pour la suite (voir Pratiques langagières en classe page 49).

Usages de la langue et manuels scolaires de mathématiques

Les manuels sont en général écrits par des enseignants. De ce point de vue ils donnent à voir certaines pratiques langagières des enseignants (dont on peut supposer qu'elles sont liées à celles existant en classe). Ce sont bien sûr aussi des ressources encore très utilisées, et à ce titre ils font partie de l'environnement, de ce qui façonne les pratiques d'enseignement, y compris les pratiques langagières. Enfin les élèves ont à leur disposition deux sources principales de textes mathématiques : leur manuel et les écrits de leur enseignant. Ceci fait de l'objet *manuel*, de cet ouvrage, de ce texte, un objet intéressant à analyser dans le contexte de mes travaux.

Pour des raisons de cohérence du propos une étude liée aux manuels sera également rapidement présentée dans le paragraphe suivant (Pratiques des enseignants, page 33).

28 Le rapport 2018 du Comité national de suivi de la réforme de la formation des enseignants précise ainsi que seuls 13,3 % des étudiants et étudiantes préparant le concours de professeur des écoles (en janvier 2017) ont validé une 3^e année de licence en « Sciences » (hors droit, économie, lettres, langues, arts, SHS, Staps). https://cache.media.education.gouv.fr/file/2018/89/9/Rapport-Filatre-2018_985899.pdf

Analyses de formulations de propositions dans les manuels du secondaire, exemples

J'ai présenté ci-dessus une analyse possible des usages en mathématiques de l'expression « ... peut s'écrire sous la forme ... avec ... » (voir le paragraphe « n s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier », page 18). Il n'est pas difficile de trouver des exemples de phrases dans les manuels du secondaire comportant (au moins) les implicites évoqués, y compris à des niveaux assez élémentaires. J'ai ainsi mené (Hache 2015, texte retravaillé ci-dessous) une étude systématique des usages de « avec » liés à une quantification dans les manuels de collège *Transmath* (classe de 6^e édition 2005, classe de 5^e édition 2006, classe de 4^e édition 2007 et classe de 3^e édition 2008) et *Sésamath* (classes de 6^e, 5^e, 4^e, 3^e édition numérique 2008). Je vais présenter ici quelques exemples d'utilisation de « avec » en lien avec la gestion des variables dans l'expression de propositions mathématiques dans ces manuels.

Dans les deux extraits E1 et E2, « avec » marque la présence d'une quantification existentielle. Dans les deux cas, l'ensemble auquel doit(doivent) appartenir le(s) nombre(s) considéré(s) est présenté de façon complexe : deux conditions pour la remarque E1, une condition sur le couple des deux nombres pour l'exercice E2.

Remarque : Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire aussi $2k+1$ et $2k+3$ avec k entier et $k \geq 0$.

E1 – *Transmath* 3^e, page 308 (corrigé des exercices)

112 $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec a et b nombres entiers premiers entre eux.

E2 – *Transmath* 3^e, page 43

On constate ici la complexité de l'imbrication de la langue naturelle et d'un usage de la langue plus formalisée : le « aussi » de la remarque E1 souligne (usage commun de la langue) un lien avec le contexte de la page et est inséré au milieu d'une formulation figée (« s'écrire ... avec ... »).

Les phrases dans lesquelles « avec » marque la présence d'une quantification existentielle peuvent avoir une structure moins simple.

- b.** Explique pourquoi tout nombre entier naturel peut s'écrire sous la forme $13k + p$ où k et p sont des entiers avec p compris entre 0 et 12.

E3 – *Sésamath* 3^e, page 14

Dans l'extrait E3, la phrase « tout nombre entier ... entre 0 et 12 » a une structure grammaticale et une structure logique plus complexes que les précédentes. Le « où » marque la présence d'une quantification existentielle, le « avec » précise une seconde condition sur p . Il est en effet classique, dans ce contexte où l'on souhaite donner deux contraintes successives de ne pas répéter deux fois « avec » (ou « où », ou « tel que », etc.) et de remplacer le 1^e ou le 2^e par un équivalent.

- a.** Expliquer pourquoi $a - b$ pourrait s'écrire $\frac{k}{209 \times 133}$, au signe près, avec k nombre entier supérieur ou égal à 1.

E4 – *Transmath* 4^e, page 57

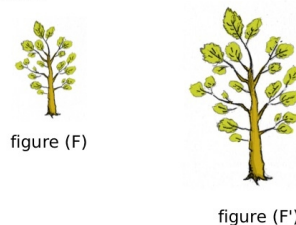
Les deux extraits E3 et E4 sont des injonctions, l'une exprimée par un impératif « explique pourquoi P » et l'autre par un infinitif « expliquer pourquoi Q » (P et Q sont des propositions mathématiques). Les deux phrases ont donc une structure proche, on peut noter cependant que dans E4 la phrase mathématique considérée est au conditionnel (« ... pourrait s'écrire ... »). L'usage du conditionnel n'est pas ici nécessaire, mais est possible. De la même façon que l'incise du « aussi » dans l'extrait E1, il montre que l'usage de la langue naturelle pour l'expression de propositions mathématiques n'est jamais complètement formel (on a là deux adaptations locales de l'expression figée « ... peut s'écrire ... avec ... »).

Dans l'extrait E4, l'expression est encore nettement compliquée par l'incise (entre virgules) de « au signe près », d'autant plus si l'on considère que la contrainte sur la variable k correspond finalement simplement au fait d'être un entier naturel non nul.

On retrouve aussi dans les manuels les quantifications existentielles dans la prémisse d'une implication, et les différentes interprétations du rôle du « avec » signalé dans l'analyse logique.

Ainsi dans l'exemple E5, pour analyser la structure logique de ce qui est dit, je propose de fermer une boîte noire sur « F et F' sont de même nature et les longueurs des côtés de F' sont proportionnelles à celles de F de rapport k », j'appelle cette proposition $B(F, F', k)$, et $A(F, F')$ la proposition « F' est un agrandissement de F ». Le texte du manuel dit « Si $B(F, F', k)$ avec $k > 1$, alors $A(F, F')$ », on peut proposer deux interprétations : « quelles que soient les figures F et F' , quel que soit $k > 1$, si $B(F, F', k)$ alors $A(F, F')$ », et « quelles que soient les figures F et F' , s'il existe un nombre $k > 1$ tel que $B(F, F', k)$, alors $A(F, F')$ ».

Si deux figures (F) et (F') sont de même nature et que les longueurs des côtés de (F') sont proportionnelles à celles de (F) de rapport k avec $k > 1$ alors (F') est un agrandissement de (F). Dans un agrandissement les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.



E5 – Sésamath 4e, page 239 (rappels en fin de manuel)

De façon annexe, je souligne que les phrases de l'extrait E5 sont particulièrement complexes, aussi bien grammaticalement que conceptuellement. On y voit bien en effet le manque de définition de la notion d'agrandissement et des notions connexes (même nature, conservation ou proportionnalité globale des mesures, etc.). Ici, par ailleurs, l'illustration par des arbres n'aide pas vraiment à comprendre le texte qui parle de figures ayant des côtés.

Avant d'aborder l'exemple E6, je rappelle un point non évoqué dans l'analyse logique à priori (pages 18 et suivantes) : la quantification relativisée « Quelque soit x tel que $P(x)$, $Q(x)$ » a deux usages (courants) à distinguer (voir aussi Lacombe 2011 par exemple).

– Condition de vérité : cette proposition peut signifier que $Q(x)$ est vrai pour les x vérifiant $P(x)$, x prenant ses valeurs dans un ensemble défini par ailleurs en général plus large que l'ensemble des x vérifiant $P(x)$. Ce premier sens fait de cette proposition un synonyme de « $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$ ».

Par exemple²⁹ : « $\forall x > 0 \sqrt{x^2} = x$ » est synonyme de « $\forall x (x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x)$ ».

– Condition de sens : cette proposition peut aussi être utilisée dans une situation où $Q(x)$ n'a de sens que pour des x qui vérifient $P(x)$ et est vrai pour les x vérifiant $P(x)$.

Exemple : dans la proposition « $\forall x > 0 (\sqrt{x})^2 = x$ » la condition « $x > 0$ » est une condition pour que la proposition « $(\sqrt{x})^2 = x$ » ait un sens (et soit vrai). On veut en fait signifier que si la variable x prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* la proposition « $\forall x (\sqrt{x})^2 = x$ » est vraie³⁰.

On retrouve facilement ce type d'usage (quantification relativisée pour donner une condition de sens) dans les manuels de collège étudiés.

Un quotient ne change pas quand on **multiplie** son numérateur et son dénominateur par un **même nombre** non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \text{ où } a, b \text{ et } k \text{ sont des nombres, avec } b \neq 0 \text{ et } k \neq 0.$$

E6 – Sésamath 6e, page 65 (cours)

Dans cet exemple (E6), à la troisième ligne, le « avec » précise les valeurs des variables b et k pour lesquelles l'expression écrite a un sens, on peut alors considérer que le « où » marque la présence d'une quantification universelle (moyennant cette condition de sens), ou qu'il exprime globalement la condition

29 Remarques : dans cet exemple x prend ses valeurs dans \mathbb{R} , $P(x)$ est la proposition $x > 0$, $Q(x)$ la proposition $\sqrt{x^2} = x$, la formulation « $\forall x$ tel que $x > 0$ » est classiquement abrégée en $\forall x > 0$.

30 Même si la reformulation en terme d'implication proposée pour la condition de vérité n'a pas lieu d'être ici (la proposition $\forall x (x > 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = x)$ n'a en effet pas de sens pour une variable prenant ses valeurs dans \mathbb{R}), l'utilisation d'une formulation en langue naturelle identique à celle d'une implication, du type « si x est un nombre réel positif, alors $\sqrt{x^2} = x$ », est fréquente.

de sens. À propos des quantifications, notons aussi, au passage, dans la formulation de la première phrase, l'usage (classique) de l'article « un » pour signifier une quantification universelle.

PROPRIÉTÉ

Le quotient des racines carrées de deux nombres positifs est égal à **la racine carrée de leur quotient**. Ainsi, quels que soient les nombres positifs a et b , avec $b \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Et donc aussi $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

E7 – Transmath 3^e, page 31 (cours)

La seconde phrase de l'extrait E7 énonce, en partie avec un « avec » ($b \neq 0$) et en partie avec une quantification universelle explicite (a et b positifs), que l'égalité écrite n'a de sens que si a et b vérifient les conditions, et est vraie dans ces conditions. On peut se demander quel critère a mené à écrire « $b \neq 0$ » en rouge en laissant en noir « positifs ».

Certaines utilisations, classiques, ne correspondent pas à des quantifications, mais à ce que l'on pourrait appeler des affectations de valeur à une variable. On retrouve notamment de nombreux usages de ce type dans le contexte algébrique, comme ceci :

Exemple 1 : développer $A = -5x(2x - 3)$.

$$A = -5x(2x - 3) = -5x \times 2x - (-5x) \times 3$$

$$A = -5 \times 2 \times x \times x + 5 \times 3 \times x \text{ donc } A = -10x^2 + 15x.$$

On applique $k(a - b) = ka - kb$
avec $k = -5x$, $a = 2x$, $b = 3$.

E8 – Transmath3^e, page 50 (exercices corrigés)

Mais aussi en géométrie, affectation d'une valeur à une mesure de grandeur en géométrie, comme cela :

32 Losanges

a. Construis un losange ABCD avec $AB = 4$ cm.

E9 – Sésamath 6^e, page 109

On constate donc une variété (sans doute ici non exhaustive) d'usages de « avec » en lien avec les variables : quantification universelle, quantification existentielle, quantification universelle existentielle, condition de sens d'une expression, affectation de valeur, etc. Il ne faut pas oublier que, par ailleurs, tous ces extraits de manuels sont situés dans des pages où le mot « avec » est aussi utilisé conformément aux différents usages et sens de la langue française.

Quoi qu'on en pense, les extraits ci-dessus et leurs commentaires ne sont pas à lire comme une condamnation de telle ou telle façon de dire (d'écrire dans un manuel en l'occurrence), mais plutôt comme le constat que les pratiques langagières des mathématiciens (ou des traces de ces pratiques) apparaissent très tôt et avec toute leur complexité dans les manuels de mathématiques. On peut aussi constater que cette complexité n'est pas prise en charge par les manuels eux-mêmes.

Les mots des consignes

Les usages de la langue en cours de mathématiques ne se limitent bien sûr pas à l'expression d'éléments de mathématiques (définitions, propositions ou preuves). Ce sont mes questions et mes outils qui apportent cette entrée. Tout en restant lié au contenu mathématique, on peut s'interroger par exemple sur les mots pour dire l'activité mathématique, dans les consignes par exemple, mais aussi dans la description de techniques.

J'ajoute ainsi ici une allusion au travail, mené avec Émilie Baron dans le cadre de son mémoire de Master didactique (Baron 2016), sur l'usage des mots « justifier », « prouver », « expliquer » (et autres mots liés à l'argumentation ou l'explication) dans les consignes : dans les programmes de collège, les manuels de 5^e, chez les enseignants de collège. Un travail a aussi été mené ensuite sur les formulations des élèves en réponse à une demande de justification, de preuve ou d'explication dans un énoncé. Une approche exploratoire interdisciplinaire de ces questions a aussi été menée sur les manuels et les programmes (atelier au colloque « Maths et autres : continuité et innovation. Inter et Pluridisciplinarité au collège et au lycée professionnel » organisé par les commissions inter-IREM Collèges et Lycées professionnels à Rouen les 19, 20, 21 mai 2016, voir aussi Baron et Hache 2019).

Ces premiers travaux de recherche mènent à un constat d'une très grande variété des interprétations des mots « justifier », « prouver », « expliquer » (mais aussi « montrer », « démontrer », « déduire », voire « calculer », « dire ») : dans l'enseignement des mathématiques d'un enseignant à l'autre, d'un manuel à l'autre, pour un même enseignant au fil de l'année ou selon la classe concernée, au sein d'un même manuel... et dans les programmes.

Je reprends ces points en perspective (voir Les mots des consignes, page 51).

Pratiques des enseignants

Nous avons vu que, sur certains points, il y a continuité entre les usages langagiers des mathématiciens et ceux dans les manuels scolaires pour exprimer les propriétés mathématiques. Une question d'une autre nature reste bien sûr entière. Celles des pratiques langagières des enseignants en classe : à quel point la façon dont sont écrits les manuels est-elle proche de la façon dont les enseignants écrivent et parlent en classe ? Ou, indépendamment des manuels, quels liens peut-on trouver entre complexité des pratiques langagières des mathématiciens et les pratiques langagières des enseignants de mathématiques en classe ? Il est notamment intéressant d'observer la façon dont les enseignants compensent (effectivement ou non, consciemment ou non) les complexités signalées dans leur discours et dans leurs écrits.

Je reprendrai ici un exemple extrait d'un travail mené avec Stéphanie Bridoux, Nicolas Grenier Boley et Aline Robert (Bridoux *et al.* 2016). Il s'agit de l'introduction du mot « rang » et de l'expression « à partir d'un certain rang » dans un cours vidéo en ligne sur la convergence des suites en première année de licence (voir l'analyse de ce point page 20).

Dans la série de cours étudiée (introduction des suites et première approche de la convergence) on trouve dix occurrences du mot « rang ». Le mot « rang » est utilisé pour « indice » (trois fois), dans une expression du type « à partir d'un certain rang » pour laquelle il existe effectivement un rang (cinq fois), ou dans le contexte plus complexe de l'usage de « à partir d'un certain rang » lié à la définition de limite (deux fois). Aucun commentaire n'est fait à propos de ces usages, l'étudiant peut faire des liens entre les formulations employées et ce qui est écrit (quand quelque chose est écrit et quand ce qui est écrit est différent de ce qui est prononcé, c'est-à-dire pour deux occurrences), mais c'est en général à lui de prendre l'initiative, et de faire le lien avec les questions de contenu.

Une autre complexité dans les formulations est analysée dans ce travail à propos de la prononciation de la notation de la suite « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » (que l'enseignant prononce souvent (et relativement classiquement) « $u n$ », et de la notation du terme de rang n de la suite « u_n » (prononcé également « $u n$ »). Tout ceci dans un chapitre qui travaille la convergence des suites, une propriété définie de façon non évidente à partir des propriétés quantifiées des termes de la suite.

On voit ici que l'analyse logique des pratiques langagières permet de repérer des *proximités potentielles* (Robert et Vandebrouck 2014). On constate dans ce travail que ces proximités ne sont pas exploitées explicitement. Sans travail explicite la prise de sens peut se faire par « approximations successives ». On peut penser que cette souplesse des usages aide les étudiants à saisir, petit à petit, la dimension formelle des expressions... On peut en tout cas penser que l'enseignant se comporte comme s'il le pensait.

On retrouve cette idée de l'utilisation dans un premier temps approximative dans deux autres recherches menées. Lors d'une expérience menée en cycle 3 en géométrie il est intéressant de voir les jeux d'utilisation des mots « ligne » et « diagonale », « croix » et « diagonales » entre élèves, expérimentateur et enseignante (Barrier, Hache, Mathé 2014). Lors d'une expérience menée dans le cadre du mémoire de Master Didactique de Paula Jouannet Ortiz (Jouannet Ortiz 2017) dans laquelle elle étudie les conceptions et les formulations d'élèves de 1^{er}S à propos de la convergence et de limites de suites avant le cours, elle essaye de formaliser les conceptions qu'ils expriment (catégorisés en « rapprochement régulier », « rapprochement monotone », « rapprochement périodique », « rapprochement boomerang », « rapprochement irrégulier ») pour les mettre en relation avec les usages des mots et des expressions tels qu'ils seront utilisés dans le cours par l'enseignante (en quoi les mots peuvent-ils faire obstacle ou au contraire soutenir l'introduction envisagée du concept de convergence).

On peut rapprocher ce point de l'idée de « vague language » de Thérèse Dooley (Dooley 2011), même si elle caractérise ce langage flou plus par l'usage de certains adverbes et pronoms. Elle affirme que « The use of vague language by children was a crucial element of construction activity in mathematics lessons » (page 1356) et conclut « The question of how it can best be exploited so that pupils do not develop incorrect mathematical ideas remains to be explored » (page 1359).

Nous le verrons dans la partie « Perspectives » (page 47), les linguistes ont des méthodologies d'analyse de la construction du sens d'un mot : insertion d'un mot dans le discours, proximité avec d'autres mots, co-occurrence, etc.

Difficultés des élèves

Les élèves sont confrontés et étudient très explicitement les contenus mathématiques, ils découvrent en acte la façon dont on en parle (en écoutant les professeurs, en lisant les manuels, plus indirectement en constatant les remarques et annotations que leurs professeurs font sur leurs productions, sur leurs interventions). Au-delà des constats évoqués sur les pratiques langagières des mathématiciens et sur celles des enseignants ou des auteurs de manuels, il est légitime de se poser les questions suivantes : comment les élèves s'approprient-ils les subtilités des usages de certains mots ou d'expressions courantes en mathématiques ? À quels moments ? Les complexités des pratiques langagières mises en évidence sont-elles des difficultés pour les élèves ? Dans quelle mesure le fait de ne pas avoir ce type de maîtrise des pratiques langagières en jeu est-il un obstacle à l'apprentissage des notions dont il est question ?

Gérard Vergnaud affirme ainsi :

« La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. Parmi les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques, on peut mettre presque à égalité d'une part la complexité des classes de problèmes à résoudre et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter, et d'autre part la complexité de certains énoncés et de certains symbolismes mathématiques » (Vergnaud 2001, page 293)

J'ai travaillé avec Emmanuelle Forgeoux (atelier aux journées APMEP 2012, Hache et Forgeoux 2018) sur un point particulier déjà évoqué ici (voir page 18) : celui de l'implicite de la quantification universelle d'une implication. Nous avons montré la façon dont les élèves (élèves de classe de première scientifique) exprimaient en phase de discussion la difficulté pour eux d'interpréter une implication non quantifiée explicitement³¹. Retenons les citations d'élèves suivantes (en fin de débat, après 30 minutes de discussion) :

« C'est un peu vrai. C'est pas complètement faux »
 « Est-ce que c'est vrai parce que c'est pas faux ? Ou est-ce que c'est faux parce que c'est pas vrai ? Ou est ce que c'est vrai parce que y'a rien où c'est faux ? »
 « Y'a quelque chose qu'est faux donc c'est pas toujours vrai » (Hache et Forgeoux 2018, page 53)

La question de la quantification des propositions émerge donc du débat, sans réellement être tranchée. La fin de la discussion montre qu'une lecture des implications explicitant les quantifications lève la plupart des ambiguïtés quant à leur vérité³². Il est important de souligner que les implicites ne sont pas perçus, ceci après trente minutes de discussion et pour des élèves ayant déjà une certaine culture mathématique (élève de première scientifique), et ayant croisé de nombreuses fois ces formulations d'implications dans leur scolarité. On montre dans la suite du texte de l'article un exemple de difficulté, d'incompréhension que peut amener ces complexités et la non-compréhension des implicites par les élèves.

31 Typiquement : « Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$ » Qu'il faut savoir lire « Quel que soit x , si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$ ».

32 La formulation quantifiée permet de trancher le débat qu'ont les élèves : « la » propriété (universellement quantifiée) est vraie si « la » propriété (non quantifiée) est vraie pour tout x . Elle (la propriété universellement quantifiée) est fautive dès que la propriété (non quantifiée) est fautive pour une valeur de x .

Conclusion

Dans cette partie, il s'agissait à nouveau de se donner les moyens de décrire, analyser, caractériser l'existant, mais en « entrant en classe ». Retrouve-t-on les complexités des pratiques langagières dans les manuels ou dans le discours des enseignants ? Ces complexités correspondent-elles à des difficultés chez les élèves ? Le chantier est immense. D'autant plus si on considère les analyses des usages langagiers (des ressources écrites, des discours enseignants) ou leur appréhension ou compréhension par les élèves comme un point d'entrée parmi d'autres, un outil pour analyser plus globalement les pratiques des enseignants en classe par exemple. Les perspectives concernant cette dimension de mon travail sont reprises à la fin de cette note (page 47).

Même si cela n'a pas encore fait l'objet de recherches, les points précédents sont abordés en formation continue (dans des stages à l'IREM de Paris par exemple). La plupart du temps un travail réflexif est mené, et aboutit à une explicitation de certains des outils ou des résultats. On le verra (page 52), ce type de formations, doit faire l'objet de recherches.

Une des directions récente de mon travail porte sur le travail en classe avec les élèves : compte tenu des analyses précédentes (concernant les pratiques langagières des mathématiciens, les éléments mis à jours à propos des pratiques enseignantes, certaines difficultés des élèves), la question de l'entrée des élèves dans ces pratiques langagières et de l'accompagnement de cette entrée dans le cadre de l'enseignement des mathématiques se pose de façon forte. Comment organiser le travail des élèves en prenant en compte ces questions langagières ? Comment les aider à s'approprier les pratiques langagières attendues en mathématiques ? On rejoint par exemple des questions sur l'apprentissage de la rédaction de démonstration, sur la compréhension des énoncés. Pour outiller l'approche de ces questions, j'ai fait un détour par des analyses de concepts issus de recherches en didactiques du français sur la lecture et l'écriture, sur l'apprentissage de la compréhension de texte et l'apprentissage de l'écriture de textes. C'est l'objet de la partie suivante.

5 Texte, lecteur et auteur en didactique du français

Les interactions au sein du collectif Lemme³³, du groupe Léo de l'IREM de Paris ou avec les collègues du laboratoire Diltec (Didactique des langues, des textes et des cultures, Université Sorbonne Nouvelle) m'ont fait prendre petit à petit en compte certains concepts de didactique du français pour appréhender le travail langagier des élèves (ou avec les élèves) en classe. Je reprends ici une synthèse à ce sujet proposée pour la 19^e école d'été de didactique des mathématiques organisée à Paris en 2017 par l'ARDM (Hache, à paraître).

Je présente une lecture de certains travaux de didactique du français, et souligne, en écho, certaines réflexions, certaines problématiques que cela peut initier à propos de l'enseignement des mathématiques. Je souligne qu'il ne s'agit pas *a priori* d'appliquer des résultats de didactique du français à l'enseignement des mathématiques, mais plus de chercher à faire un pas de côté, à avoir un éclairage autre sur les questions liées au langage et à l'enseignement des mathématiques.

La didactique du français est plurielle. Elle est, à la fois, au moins, la didactique d'une langue, et la didactique de la littérature. Quelle que soit l'entrée, on perçoit bien que l'« enseignement du français » n'a pas pour objectif de transmettre des savoirs d'une discipline universitaire (linguistique, science du langage, littérature, etc.). Pour parler en termes de transposition didactique, le savoir savant n'est pas, ici, simple à définir. Bernard Schneuwly, par exemple, décortique ce point en parlant d'« enchevêtrement de mouvements transpositionnels ascendants et descendants » : « La discipline « français » (...) tire partiellement sa légitimité des systèmes qu'elle a largement contribué à produire, propager et solidifier, des systèmes aussi bien de type « savoirs savants » que « savoirs d'experts » » (Schneuwly 1995, page 56).

Autre complexité de la discipline : le caractère indissociable de la langue, de la culture et de la société (dans des sens très larges). Martine Jaubert, à propos de littérature, pointe par exemple la complexité des liens entre œuvres, énoncés sur les œuvres, savoirs, etc. :

« Offertes à l'interprétation, [les œuvres] sont autant de « problèmes » de lecture (ou de production – expression), notamment pour des élèves qui apprennent à explorer les œuvres littéraires ou artistiques, dont aucun énoncé de savoir ne saurait rendre compte totalement. De ce fait, savoir les interpréter relève avant tout de pratiques, certes outillées par des savoirs de nature et d'horizons variés (littérature, histoire littéraire, histoire de l'art, linguistique, champ chorégraphique...), mais qui supposent la mise en tension avec l'expérience du sujet, sa culture, son idéologie, son corps, ses goûts, ses émotions, ses penchants esthétiques... et la conservation de cette dimension subjective » (Jaubert 2017, page 90)

On peut souligner, comme autre illustration de ce statut particulier du « français » comme discipline scolaire, le fait que la didactique du français se subdivise en plusieurs champs correspondant à une variété des situations d'enseignement : français langue maternelle (FLM) quand il s'agit d'enseignement et d'apprentissage du français à des personnes dont la langue première est le français ; français langue étrangère (FLE), cas de l'enseignement et de l'apprentissage du français à des personnes non francophones dans un pays non francophone ; français langue seconde (FLS), dans des pays francophones (ou un pays où le français est très utilisé, comme dans les anciennes colonies françaises), concerne des personnes dont la langue maternelle n'est pas le français ; français langue de scolarisation (FLSco), complète le domaine précédent, enfants non francophones arrivant dans un pays francophone où ils sont scolarisés, le français est la langue de l'école (ils travaillent notamment les différentes disciplines scolaires en français).

33 Projet initié fin 2012 par Thomas Barrier, Caroline Bulf, Aurélie Chesnais, Anne-Cécile Mathé, Joris Mithalal et moi. Depuis 2013, le collectif LEMME, Langage dans l'Enseignement et l'apprentissage des MathéMatiquEs, organise des journées d'étude au moins une fois par an. Il s'agit de développer une entrée particulière dans les problématiques liées au langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Liste des journées, liste des intervenants : <https://www.ldar.website/lemme>

J'ai abordé ce vaste domaine à l'aide de deux groupes de mots clefs : « lecture, lecteur » et « écriture, auteur³⁴ ».

Lecture et écriture, deux activités indissociables

Lecture et écriture sont des activités ayant une certaine proximité. Je vais commencer par citer deux auteurs caractérisant, dans leur propos, l'activité d'écriture d'une part (Maurice Niwese et Sandrine Bazile) :

« Il importe de rappeler que nous concevons la compétence scripturale au sens des didacticiens de l'écriture (Dabène 1991 ; Lafont-Terranova 2009) qui la définissent comme englobant le « savoir – graphier » dans ses aspects matériels (outils, supports, tracés de lettres, etc.) et graphiques (relation entre graphèmes et phonèmes), le « savoir – faire textuel » dans ses aspects linguistiques (lexique, morphologie, syntaxe phrastique et textuelle, etc.) et pragmatiques (questions de lisibilité, de mondes rapportés, de visées illocutoires, etc.) ainsi que le « rapport à l'écriture » (Barré-De Miniac 2000 ; Chartrand et Blaser 2008), incluant les représentations, dans ses dimensions affectives (investissement de l'écriture), axiologique (valeurs, opinions et attitudes vis-à-vis de l'écriture), conceptuelle (conception de l'écriture et de son apprentissage) et méta - scripturale (verbalisation de sa propre pratique d'écriture) » (Niwese et Bazile 2014, page 5).

et l'activité de lecture d'autre part (Sylvie Cèbe et Roland Goigoux) :

« En accord avec la synthèse réalisée par l'Observatoire national de la lecture (sous la direction de Fayol 2000), nous considérons que la compréhension de textes repose sur cinq ensembles de compétences qui sont simultanément requises au cours de l'activité de lecture : des compétences de décodage (identification des mots écrits) ; des compétences linguistiques (syntaxe et lexique) ; des compétences textuelles (genres, ponctuation, énonciation, cohésion : anaphores, connecteurs, etc.) ; des compétences référentielles (connaissances encyclopédiques sur le(s) sujet(s) traité(s) dans les textes) ; et des compétences stratégiques (régulation, contrôle et évaluation par le lecteur de son activité de lecture) » (Cèbe et Goigoux 2007, page 189)

Même s'il est caricatural d'extraire ainsi deux morceaux de textes pour les comparer hors contexte, on perçoit bien ici le parallélisme des différentes dimensions décrites. Assez naturellement une part de la proximité est liée au support lui-même, le texte : une dimension visuelle, presque physique (connaître et reconnaître les lettres, les mots, savoir les tracer), une dimension liée à la langue (vocabulaire, conjugaisons, syntaxe, grammaire, etc.), une dimension « textuelle » (structure du texte notamment). Au-delà de ces dimensions liées au support on repère aussi une dimension plus extralinguistique, plus sociale (inscription du texte, de l'auteur, du lecteur dans son contexte, intentions, etc.), et une dimension personnelle et réflexive, métalinguistique (rapport de l'acteur à son activité, regard sur sa pratique).

Deuxième facette de ce caractère indissociable des activités de lecture et d'écriture : l'auteur, en cours d'écriture, est par ailleurs son propre lecteur dans un jeu complexe d'interactions. Sylvie Plane (Plane 2017) décrit ces liens plus profonds entre écriture et lecture. Dans le processus d'écriture, le texte déjà écrit (et lu, intériorisé) prend part, par exemple, aux contraintes de l'écriture de la suite du texte. Mais l'auteur du texte manipule un « fantôme de [son] texte » : « [l'auteur] ne mémorise pas son texte tel quel, mais procède sur son texte à un ensemble d'opérations que [Sylvie Plane] propose d'appeler *resémantisation* ».

Pour décrire une troisième facette de cette proximité entre lecture et écriture, je vais faire appel à un article de Catherine Tauveron (Tauveron 2002) abordant les liens entre un auteur et son lecteur (ou ses lecteurs) : à la fois celui pour qui l'auteur écrit, un modèle construit notamment au fil de ses propres lectures, et celui qui lit effectivement le texte, lecteur bien réel (notamment dans les activités collectives en classe).

« L'expérience de la lecture littéraire mise à distance [...] doit en quelque sorte permettre aux élèves en situation de production de développer symétriquement une intention artistique, de penser l'écriture

34 Termes auxquels j'ai vite ajouté « sujet scripteur », « sujet écrivant ».

non plus seulement comme une activité de résolution de problèmes, ce qu'elle ne cesse d'être, mais aussi comme activité de conception délibérée de problèmes de compréhension et d'interprétation pour le lecteur. [...] En miroir, la même expérience de la lecture littéraire doit pouvoir permettre aux élèves mis en situation de lire les productions de leurs pairs d'y reconnaître une intention artistique et d'y répondre par une attention esthétique telle qu'elle les incite à mobiliser, au-delà des critères d'évaluation standard, des critères d'une autre nature, qui tous chercheraient à vérifier que le texte du pair se prête à une lecture littéraire » (Tauveron 2002, page 205)

Quel lien peut-on faire avec les mathématiques ?

On pourrait, *a priori*, penser les écrits mathématiques bien éloignés de toute « intention artistique », et leur lecture loin de nécessiter une « attention esthétique », ces deux dimensions existent pourtant. Les écrits de mathématiciens sont nombreux à ce sujet (voir Poincaré 1908, par exemple). On pourra aussi se reporter au travail de thèse de Yves Gerbier (Gerbier et Icart-Seguy 1987, page 5) déjà étudié (Hache 2016a) à propos de la preuve qui précise trois critères de mise en forme d'une preuve : l'élégance, l'économie et la compréhensibilité. Yves Gerbier décrit rapidement ces trois critères, mais on peut aller plus loin : Caroline Julien (Julien 2006) par exemple analyse, dans sa thèse, l'« importance du rôle de la dimension esthétique au sein du développement des mathématiques en tant qu'activité créatrice ». Une de ses conclusions partielles, à propos de formulation des preuves, est la suivante : « le lien entre simplicité et codage³⁵ est l'esthétique, plus exactement, ce lien se fonde sur la saturation³⁶ qui est à la fois un critère de simplicité et un symptôme de l'esthétique » (page 170). Elle conclut son travail épistémologique en questionnant l'opportunité et la possibilité de prendre en compte cette dimension esthétique dans l'enseignement des mathématiques.

Compte tenu de la proximité de ces deux activités, lecture et écriture, soulignée par les didacticiens du français, on peut s'interroger, à propos de l'enseignement des mathématiques, sur les liens entre les activités de lecture et d'écriture (je me limiterai ici aux formulations de définitions, propriétés et démonstrations). Je pense qu'on peut affirmer que dans un déroulement classique d'enseignement, à partir du cycle 4 notamment, les élèves lisent des définitions et des propriétés ou théorèmes, mais participent peu à leur écriture, aux choix de leur formulation. À l'inverse, l'entrée dans la démonstration se fait beaucoup par l'écriture. Les travaux de lecture avec les élèves, ou sur la lecture, de preuves sont rares. Par ailleurs, quand il y a lecture de preuve, c'est souvent sous la forme de la lecture d'un texte en train d'être écrit par l'enseignant (et accompagné d'un discours oral, ou d'un échange avec la classe).

Les notions de genre de texte et de dédoublement (Schneuwly et Dolz 1997) peuvent être intéressantes pour éclairer ces points : quelles sont les caractéristiques « génériques » d'un texte de démonstration ? Comment travaille-t-on ces textes dans le système scolaire ? Quelle distance entre les deux ? Je développerai ce point dans les perspectives (voir page 49).

Lecture, lecteur

Je vais souligner ici plusieurs points récurrents et qui me semblent saillants à propos de la lecture dans les travaux considérés.

« Droits » du texte, du lecteur et des lecteurs

Les liens entre texte et lecteur sont complexes. Je reprends les mots de Monique Lebrun (Lebrun 2004, page 330) « le sens du texte littéraire n'est pas réduit à l'intention de l'auteur, il le dépasse, car le sens n'est pas pré-donné : le lecteur participe activement à la finition du texte, plus exactement à son ouverture

35 Défini par l'auteure comme « règles tacites de l'écriture d'une démonstration mathématique » (Julien 2006, page 165), « la rédaction des démonstrations mathématiques telle qu'on peut la trouver dans les manuels, dans les revues ou dans les comptes rendus » (Julien 2006, page 165). On peut l'approcher de l'idée de pratiques langagières des mathématiciens (concernant les démonstrations).

36 La définition de « simplicité », de « saturation » et d'« esthétique » est un des enjeux de ce travail. Simplicité et esthétique peuvent ici être entendus dans leur sens commun. Quant à la saturation d'un système, on peut ici retenir qu'elle « se mesure au nombre, si l'on peut dire, des aspects non contingents de ses éléments » (Julien 2006, page 114).

sur d'autres lectures, jamais épuisées, car toujours différentes et singulières ». Je rapproche cette description du texte de Martine Jaubert déjà cité, elle y compare différentes approches didactiques de la notion de modélisation (du numéro spécial de la revue *Recherche en éducation*³⁷ dans lequel est publié son article) et rapproche les textes concernant la didactique de la danse (article de Monique Loquet) et la didactique de la littérature (article de Jean-Louis Dufays) : « En tant qu'activités d'interprétation, danse et littérature ont ainsi tendance à cultiver une forme de divergence dans un cadre cependant contraint. Si on ne peut pas faire tout dire au texte, l'orchestration des voix ne vise cependant pas une interprétation unique » (Jaubert 2017, page 90). Cette approche comparant la lecture à l'interprétation d'une œuvre d'art se retrouve aussi dans le texte de Catherine Tauveron (Tauveron 2002) cité ci-dessus : l'auteur a une intention artistique, le lecteur une attention esthétique.

Ce dialogue entre auteur et lecteur(s) est aussi décrit, du point de vue de la lecture, en termes de « droits du texte » et « droits du lecteur » (Éco 1985). Catherine Tauveron souligne ainsi que le travail de l'enseignant doit garantir simultanément des droits du texte et des lecteurs (par exemple, Tauveron 2004). D'une certaine façon Sylvie Cèbe et Roland Goigoux font expliciter cette tension avec les élèves dans le manuel *Lector-Lectrix* en leur faisant dire si ce qu'ils disent à propos du contenu du texte est précisément dans le texte, à différents endroits du texte, dans le texte et dans la tête (connaissances antérieures), ou uniquement dans la tête (par exemple Cèbe *et al.* 2004, page 12).

On retrouve aussi cette tension, d'un point de vue didactique, chez Jean-Louis Dufays (Dufays 2017). Il oppose aussi droits du texte et droits du lecteur, lecteur modèle et analyse de l'activité de lecture attendue d'une part, sujet lecteur et analyse des pratiques effectives d'autre part, pour finalement souligner leur complémentarité et évoquer une nécessaire dialectique.

« La lecture littéraire est ainsi conçue comme un va-et-vient dialectique entre le « sujet lecteur » et le « lecteur modèle », c'est-à-dire entre la « participation », fondée sur l'illusion référentielle et l'immersion fictionnelle, et la « distanciation », fondée sur la mobilisation de savoirs, sur l'analyse et sur la réflexion critique » (Dufays 2017).

Jean-Louis Dufays met aussi en avant, pour dépasser l'opposition entre ces deux pôles, la notion de « communauté interprétative³⁸ (Fish 2007) qui reconnaît et se donne les moyens de décrire à la fois la relativité et la singularité des lectures réelles et l'existence d'un objet de savoir commun susceptible d'être préanalysé (mais cet objet n'est plus le texte : c'est la somme des interprétations qu'il est possible de partager à l'intérieur d'un contexte donné, ou, si l'on préfère, la somme des stéréotypies communes à une communauté de lecteurs) » (Dufays 2017). J'évoquerai cette dimension collective plus loin.

J'oserai deux liens avec l'enseignement des mathématiques.

Un texte ne peut être qu'interprété. Mis à part d'éventuels énoncés strictement formels (pour l'auteur), qui ne laisseraient pas de marge de manœuvre d'interprétation au lecteur, tout texte donne des libertés au lecteur. Y compris une démonstration, un énoncé d'exercice, parfois une définition ou un théorème. Le lecteur peut (doit) inférer, compléter, faire des rapprochements, etc. On peut se reporter aux analyses d'énoncés utilisant « avec » (Hache 2015) ou aux analyses de preuves faites avec Zoé Mesnil (Hache et Mesnil 2017). Par ailleurs le lecteur ne pourra s'empêcher de lire les mots depuis sa position : les mots, la plupart des termes utilisés en mathématiques, au-delà de leur utilisation formelle, ont des sens variés, variables selon les personnes, qui ne peuvent pas ne pas colorer la lecture. Un travail est mené en cours de mathématiques qui s'apparente à l'apprentissage de la compréhension de texte. Parfois explicitement, à minima : apprendre à trouver les informations importantes dans un énoncé d'exercice, les organiser, faire des rapprochements avec des connaissances antérieures, etc. Parfois plus implicitement : utilisation de formulations ou d'implicites usuels, reformulations.

37 Numéro 29 de la revue *Recherche en éducation* : <http://www.recherches-en-education.net/spip.php?article359>

38 Il relie cette notion à celle de « communauté discursive » (Bernié 2002) plus connue en didactique des mathématiques (Rebière 2013)

Par ailleurs, la dialectique entre ce qui est dans le texte, ce que le texte interdit, ce que le texte autorise peut être une interprétation de certaines activités en mathématiques. Si on considère un texte qui décrirait les hypothèses qu'un mathématicien accepte, on pourrait dire qu'il cherche à énoncer des assertions autorisées (formellement) par le texte. Face à un énoncé dans lequel on décrit deux fois deux droites parallèles formant un quadrilatère, un élève qui parlerait d'un parallélogramme peut être vu comme un lecteur qui, à partir de ce que dit le texte et ce qu'il a dans la tête (un théorème), énonce quelque chose qui n'est pas dans le texte, mais que le texte « autorise ». Ce qu'on attend de cet élève est qu'il soit capable de repérer la distance qui sépare ce qu'il dit et le texte, et de justifier cette « lecture » qu'il fait du texte.

Lecture et lectures antérieures

Dans la description du sujet lecteur, il est souvent mis en avant le fait qu'une lecture se construit aussi en fonction du déjà-lu. Il y a une mise en réseau des différentes lectures. Pierre Sève fait le bilan suivant :

« Les théoriciens de la réception pointent le rôle des réminiscences des lectures antérieures dans l'acte de lire une œuvre singulière. Jauss (1978) a ainsi dégagé le concept d'horizon d'attente, constitué des canons rhétoriques et esthétiques intériorisés par le lecteur ; Eco (1985) inclut dans l'encyclopédie du lecteur les scripts et les stratégies narratives déjà rencontrés, la faculté de les identifier et, sous le terme de compétence idéologique, les présupposés auxquels les œuvres déjà lues ont pu donner forme ; Iser (1985) montre que le lecteur, sur la base du répertoire de ses connaissances culturelles, identifie le répertoire que mobilise l'œuvre et effectue sa lecture à la lumière des modifications de l'un par l'autre... Le temps de la lecture paraît ainsi s'enraciner dans l'expérience accumulée, dans l'épaisseur d'une temporalité propre au lecteur » (Sève 2011, page 85)

Ces notions d'horizon d'attente³⁹, de mobilisation de scripts⁴⁰ sont reprises dans de nombreux écrits. Pierre Sève cite aussi des travaux de didacticiens qui analysent la mise en réseau de textes, l'utilisation de corpus de textes en classe (de façon plus contextualisée : pendant le cours). Cet appui sur les lectures antérieures est particulièrement fort dans la compréhension des implicites. Outre la notion de script déjà citée, Michèle Dipsy (Dipsy 2011), utilise l'idée de greffe de sens et de détournement de sens. Elle cite pour ce faire l'article « Implicite » du dictionnaire de Patrick Charaudeau et Dominique Maingueneau (Charaudeau et Maingueneau 2002) : le sens d'un texte peut être augmenté par les lectures précédentes du lecteur (greffe), ou même modifié (les lectures antérieures l'emportent sur le texte lu).

Là aussi j'ose le parallèle. Quelle attente est créée par la lecture d'un texte mathématique (typiquement une démonstration, ou un cours) pour un jeune lecteur d'écrits mathématiques ? Quelles sont les « lectures antérieures » sur lesquelles il peut s'appuyer⁴¹ ? On retrouve les questions posées ci-dessus sur la lecture en cours de mathématiques, sur les genres de textes.

Nécessité d'un travail explicite, conscient

On pourrait ainsi dire que plus on a lu, mieux on lit (avec des sens de « plus » et « mieux » que j'ai tenté d'éclairer ci-dessus). Mais travailler la compréhension de texte ne peut se résumer à faire lire. Sylvie

39 De fait, utilisée à la fois pour parler du texte (qui crée une attente, qui « prédispose » le lecteur dit Jauss), et du lecteur. « Une analyse de l'expérience esthétique du lecteur ou d'une collectivité de lecteurs, présente ou passée, doit considérer les deux éléments constitutifs de la création du sens – l'effet produit par l'œuvre, qui est fonction de l'œuvre elle-même, et la réception, qui est déterminée par le destinataire de l'œuvre – et comprendre la relation entre texte et lecteur comme un procès établissant un rapport entre deux horizons, ou opérant leur fusion » (Jauss 1978, page 259, cité par Sylvia Girel, Girel 2015)

40 « stéréotype d'action ou d'événement, un ensemble figé et insécable de connaissances relatives à un enchaînement de faits, mémorisé et éveillé un stimuli (textuel en l'occurrence). C'est souvent un script qui permet de résorber une ellipse » (Dipsy 2011)

41 En didactique du français cette question existe aussi bien sûr : comment appuie-t-on sa lecture sur ses lectures antérieures quand on commence à lire ? Des travaux existent sur les lectures des enfants (avec l'adulte) précédant l'apprentissage technique de la lecture, à la maternelle. Voir par exemple Boiron 2011, ou le numéro 50 de la revue *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle* (année 2014), dont le thème est « Lire en maternelle : la lecture avant que de savoir lire » (<https://journals.openedition.org/reperes/747>).

Cèbe et Roland Goigoux (Cèbe et Goigoux 2007) soulignent que c'est nécessaire (« il ne peut y avoir automatisé d'un savoir-faire sans pratique régulière », page 193), mais que cela ne suffit pas (cela éloigne les enseignants « d'une intervention explicite visant à aider les élèves à apprendre à comprendre », page 193). L'aide « en ligne » à la lecture a son efficacité, mais ne suffit pas non plus, « les professeurs n'indiquent pas à leurs élèves comment ils font pour les aider à comprendre. Ils postulent seulement que la répétition de ces aides devrait, à elle seule, générer des progrès. Il n'en va malheureusement pas ainsi pour tous » (page 195).

Sylvie Cèbe et Roland Goigoux prônent donc un travail explicite, conscient sur la lecture et la compréhension de texte.

« il nous semble raisonnable de penser que les enseignants qui savent parfaitement aider leurs élèves à comprendre les textes seront capables, avec le support d'un nouvel instrument⁴², de transformer en objet d'étude les opérations intellectuelles qu'ils savent déjà guider. Nous faisons l'hypothèse que l'instrumentation devrait les aider à prendre conscience des procédures qu'ils utilisent de manière routinière et leur donner les moyens de les rendre explicites aux yeux de leurs élèves » (Cèbe, Goigoux 2007, page 195)

Ils proposent ainsi des outils de travail permettant d'explicitier avec les élèves des stratégies de compréhension, de leur apprendre à raisonner « sur ce que le texte dit, ce que le lecteur a le droit – et sur ce qu'il n'a pas le droit – de lui faire dire » (page 196), de leur apprendre « à raisonner sur leur propre compréhension », de « faire prendre conscience aux élèves (et aux enseignants) que la compréhension nécessite un véritable travail intellectuel, que ce travail s'enseigne et qu'il s'apprend » (page 196).

Je vais souligner deux dimensions qui traversent la plupart des écrits sur la lecture : la dimension nécessairement collective de la lecture, la dimension réflexive de la lecture.

Travail collectif

Jean-Marie Privat développe une métaphore halieutique pour souligner la dimension non individuelle, la dimension sociale de la lecture :

« Dans la représentation dominante, le lecteur est comme un pêcheur à la ligne. [...] Il est solitaire, immobile, silencieux, attentif ou méditatif, plus ou moins habile ou inspiré. On considère comme évident que le lecteur est lecteur quand il lit comme le pêcheur est pêcheur quand il pêche, ni plus ni moins. [...] Cette vision est à la fois sommaire et idéalisée, commune et stéréotypée : elle est banalement réductrice. [...] Bref, pêche et lecture, loin d'être des actes de pure technique et / ou de pure intimité individualiste, sont en fait saturées de socialité (gestes appris, discours et objets échangés, rites appropriés, imaginaires partagés, valeurs incorporées, stratégies communiquées, etc.), structurées par des réseaux de socialisation institués ou plus informels. [...] Autrement dit, si l'on admet que le temps du lecteur déborde largement le temps de la lecture proprement dite et si « l'illusion de l'intimisme de la lecture privée » (Bahoult 1988) se dissipe, la didactique ne peut qu'être intéressée par [la sociologie et l'ethnologie culturelle] » (Privat 2008, page 125)

Plusieurs éléments relatifs à la dimension collective de la lecture et de son apprentissage ont déjà été avancés ci-dessus : le sens du texte est lié au travail de l'auteur, mais est aussi la somme des lectures qui en sont faites. On a vu aussi que Jean-Louis Dufays (Dufays 2017) met en avant les « communautés interprétatives » comme piste de résolution de la tension dialectique entre le lecteur modèle et le sujet lecteur.

Je cite aussi ici Marlène Lebrun sur la mise en place de comités de lecture en classe (avec pour modèle ceux des maisons d'édition ou des bibliothèques par exemple) : « Le comité de lecture permet aux lecteurs de verbaliser leurs rencontres textuelles, de confronter leurs interprétations, de donner leur avis et de le négocier avec les autres. Le débat et l'écriture sont au fondement d'une activité critique de lecture littéraire où il s'agit de dépasser l'expression de sa subjectivité pour construire du sens et développer des

42 Le texte décrit le travail de conception d'un manuel visant l'apprentissage de la compréhension de texte (Lector-lectrix).

compétences de lecteurs dans une expérience tour à tour singulière et collective » (Lebrun 2004, page 335).

Travail réflexif, méta, autorégulation

Nombreux sont les points évoqués ci-dessus qui montrent la nécessité d'un regard réflexif (stratégique, d'autorégulation, d'autocontrôle, d'autoévaluation de l'activité) dans l'activité du lecteur : lire c'est nécessairement réfléchir à son activité de lecture. J'y reviendrai à propos d'écriture et de littératie.

Écriture, auteur

Marie-Jeanne Perrin et Marianna Bosch écrivent dans les actes de la 16^e école d'été de didactique des mathématiques :

« La mise par écrit du discours mathématique n'est pas une activité qui va de soi. Elle demande de l'acteur le fait d'assumer la position de sujet du discours, donc sujet mathématicien si le discours produit est mathématique » (Bosch et Perrin 2013)

Je vais essayer de décrire ici la façon dont les didacticiens du français précisent les choses.

Écrire

Yves Reuter souligne que l'écriture relève d'un certain nombre d'opérations, mais est une pratique aux dimensions plus larges :

« [Cette pratique] est complexe, c'est-à-dire synchrétique, car elle articule indissociablement dans son exercice du cognitif, du psycho-affectif et du socioculturel ; des savoirs, des investissements, des représentations, des valeurs et des opérations ; de l'individuel et du collectif. Ce n'est que par abstraction théorico – méthodologique qu'on isole telle ou telle dimension. C'est, en revanche, impossible pratiquement » (Reuter 2002, page 59)

Il précise aussi l'importance des tensions inhérentes à l'écriture : une première tension « constitutive du système graphique » pourrait se résumer en évoquant l'économie du système phonographique et l'efficacité du système sémiographique (voir aussi Jaffré 2005). Mais il y a aussi tension entre inscription dans la culture, les pratiques, et action subjective d'un individu ; entre représentations de l'écriture ; entre l'inévitable distance entre le projet et sa réalisation.

Les opérations, les processus constitutifs de l'activité d'écriture sont de façon large décrites comme suit. Ce sont des opérations récursives et indissociables qui se succèdent et se mêlent au fil de l'activité. On repère ainsi :

- Les opérations de planification. Organisation macro et micro du contenu du texte, évaluation du contexte et adaptation (destinataire, situation de communication, etc.), lien à d'autres textes, avec des lectures antérieures, références internes, etc.
- Les opérations de mise en texte, de scription, plus matérielle, physique, relative au tracé par exemple lors de l'écriture « à la main », mais aussi liées au lexique, à la syntaxe, à la ponctuation, etc.
- Les opérations de révisions, confrontation du texte en train d'être écrit au projet initial, aux normes, identification des rectifications possibles, évaluation du coût d'une modification, d'une réécriture, etc.

Il faut relier le caractère synchrone et récursif de ces opérations à plusieurs éléments : tout d'abord le fait que le texte, et la pensée, s'élabore au cours de l'écriture. Écrire n'est pas retranscrire une pensée déjà présente, la planification est, par exemple, entrecoupée de phase de mises en texte et de révisions, qui la nourrissent, la remettent en cause, l'enrichissent.

Je mets en avant deux autres points liés. Écrire est un processus qui demande du temps (c'est relatif bien sûr à la situation, au contexte), des pauses, des retours. Il y a une dimension métalinguistique dans la gestion de ces opérations.

Posture d'auteur, réflexivité

Le personnage de « l'auteur » a déjà été croisé dans les lignes précédentes. Il fait référence à des descriptions (modélisation) de l'activité d'écriture centrée sur l'élève écrivant (et non sur le texte par exemple). Il s'agit pour les élèves d'acquérir des éléments d'une *posture d'auteur* (Bautier et Bucheton 1995, Rebière 2000, Tauveron et Sève 2005, Jaubert et Rebière 2011), un positionnement énonciatif, d'avancer vers un rapport à l'écriture plus conforme à ce qui est attendu dans la situation. On attend de l'élève-auteur qu'il ait une intention, notamment vis-à-vis du lecteur, qu'il soit conscient des effets produits (ou au moins du fait que son texte aura des effets sur le lecteur, doit avoir un effet), qu'il ait une stratégie d'écriture (importance de la relecture, de la révision), du recul sur son activité d'écriture et son écrit.

On retrouve cette idée chez Martine Jaubert, Maryse Rebière et Jean-Paul Bernié :

« Le rapport langage-pensée suppose la médiation du social : produire ou comprendre un texte écrit suppose toujours une projection, sous des formes diverses, dans un espace socio-discursif, une anticipation d'un lecteur, archi-lecteur ou lectorat, selon les références, caractérisés par leur altérité » (Jaubert, Rebière et Bernié 2003, page 56)

Notons que dans une perspective d'enseignement, cette distanciation nécessaire et, de façon liée, les rapports à l'écriture et à la langue qu'il est nécessaire de construire, ont une dimension culturelle et sociale forte. Elisabeth Bautier dans ses recherches apporte de nombreux éclairages sur ce point ainsi que sur les conséquences en termes de scolarisation :

« Les recherches sur les effets cognitifs et langagiers de la littératie mettent l'accent, de façon récurrente, sur le fait que l'écriture contribue très largement à construire un rapport réflexif à la langue, constitue la langue comme objet. Or nous l'avons déjà vu, c'est cette attitude qui est requise par l'école, requise plus qu'apprise grâce à elle. On peut alors expliquer ainsi les difficultés scolaires des élèves peu familiers de ce rapport à la langue et d'un tel usage du fait de la socialisation familiale » (Bautier 2001, page 145)

De même Marceline Laparra et Claire Margolinas :

« Certains élèves utilisent un lexique restreint, et ne produisent que des énoncés courts, peu complexes syntaxiquement et des discours mal organisés du point de vue de la cohérence. Ils ont plus de difficultés que d'autres à s'affranchir de l'immédiateté, ce qui les rend moins efficaces dans le langage dit « d'évocation » [Ministère 1992], quand on attend d'eux une attitude réflexive à l'égard du langage. Ils sont de ce fait en difficulté dès que les apprentissages – notamment ceux du code et de la langue écrite – exigent une analyse formelle de la langue » (Laparra et Margolinas 2012, page 55)

Rôle du travail collectif, ateliers d'écriture

En plus de souligner l'importance de la création matérielle du texte imprimé, Célestin Freinet (Freinet 1927) montre le rôle fondamental des échanges entre élèves (organisé et régulé par le maître) dans l'écriture des textes destinés à être « publiés » (imprimés sous formes d'affiche ou de journal pour la classe, ou pour une autre classe avec qui elle a des échanges épistolaires).

Les interventions de l'enseignant étant variables, le travail collectif (écriture à plusieurs mains, écrit individuel discuté à plusieurs, écriture planifiée collectivement, relecture entre pairs, etc.) est, de façon générale, vu comme facilitant l'explicitation des contraintes, la prise de recul, la compréhension et l'intériorisation des effets de l'écrit sur le lecteur (ce sujet lecteur n'étant pas nécessairement le seul enseignant), etc.

Travail collectif autour de l'écriture, l'atelier d'écriture prend des formes variées (voir Lafont-Terranova 2009, Bucheton 2014) ayant pour points communs la place centrale de la réécriture et la circulation des

textes entre pairs, permettant notamment à l'auteur d'éprouver les effets sur des lecteurs (et de s'éprouver comme lecteur) et permettant à l'enseignant (en contexte scolaire) de ne plus être le destinataire automatique du texte écrit par l'élève.

Brouillon, réécriture, reformulation

Une des activités centrale mise en avant de façon récurrente dans l'apprentissage de l'écriture est celle de « réécriture », avec comme objet symbolique le brouillon (et la réflexion sur le rôle du brouillon dans l'écriture). Le texte devient un objet dynamique, en évolution, et un objet de travail et de réflexion. Cette mise à distance du texte va de pair avec une mise à distance de l'activité d'écriture.

La réécriture peut être liée à une phase de révision dans le processus d'écriture, et peut aussi être provoquée. Le temps qui s'écoule entre l'écriture et le travail de réécriture est un paramètre important, le temps long de l'écriture est souligné par de nombreux auteurs. Dans le cadre scolaire, l'enseignant peut par exemple demander une nouvelle version du texte (avec ou sans le support de l'ancien texte) en ajoutant des contraintes : contraintes liées aux personnages, au déroulement, au destinataire, à la forme (pouvant aller jusqu'à des contraintes de type Oulipo⁴³), contraintes liées au mode de travail (collectif ou individuel par exemple), etc. Dominique Bucheton à propos de réécriture :

« La réécriture permet de saisir la lente maturation de [l'inscription du sujet dans son texte] et, avec elle, on voit la lente émergence des compétences enfouies, inaccessibles au premier jet, le lent développement ou l'intériorisation des capacités en cours de structuration » (Bucheton 1996, page 173).

« On est dans un processus d'épaississement conjoint du texte, des significations apportées par le texte, et du sujet qui les dit. Plus l'enfant verbalise, reverbalise dans des contextes différents, plus il modifie son rapport à lui-même, au langage, à son texte et à celui à qui il l'adresse » (Bucheton 2002, page 2)

Écriture et mathématiques ?

Ces considérations questionnent l'enseignement des mathématiques et la didactique des mathématiques. L'élève écrit en cours de mathématiques, comment apprend-il à entrer dans les pratiques spécifiques de l'écrit mathématique, pour la formulation des démonstrations par exemple ? Quel travail lui est proposé sur cette dimension de son activité ? Peut-on adapter certains objets et certaines modalités de travail développées en didactique du français : réflexivité, rapport à l'écriture (lien avec la lecture), posture d'auteur, lecteur modèle, travail de réécriture, travail collectif autour de la lecture et de l'écriture, ateliers d'écriture, « publication » de textes, etc. ?

Un travail utilisant les notions de posture d'auteur, d'élève-auteur en l'occurrence, et de lecteur modèle est mené dans le cadre du projet Sarabandes (de Hosson *et al.* 2018). Le but des analyses est de caractériser la façon dont le savoir circule et se transforme pendant les ateliers, l'impact en termes d'apprentissage est également étudié. La notion d'élève-auteur et de lecteur modèle sont centrales dans les analyses (voir par exemple de Hosson *et al.* 2019).

Conclusion

Je reprends ici le fil de l'exposé : après avoir constaté que les pratiques langagières des mathématiciens sont spécifiques et complexes, et que la compréhension et l'acquisition de ces usages fait partie intégrante de l'apprentissage des mathématiques, il s'agissait ici de faire un détour par un autre champ de recherche pour éclairer ce que peut être l'apprentissage de la compréhension de textes, de la rédaction de textes.

Je retiens de ce travail quatre idées structurantes.

43 Ouvroir de littérature potentielle : atelier, fondé par Raymond Queneau, de littérature sous contraintes. <https://www.ouliipo.net/fr/oulipiens/o>

Tout d'abord le fait qu'il est difficile de décrire, de caractériser séparément l'activité de lecture et celle d'écriture, et d'envisager séparément l'apprentissage de l'écriture de textes de celui de la lecture, de la compréhension de texte.

L'activité d'écriture comme celle de lecture comporte une dimension réflexive, de même les activités liées aux apprentissages correspondants. Une part de l'activité de lecture consiste à se penser en train de lire, à reprendre, corriger ses interprétations, à se regarder (ne pas) comprendre, à s'interroger sur ses réactions, sur ce que l'auteur a voulu dire, a voulu faire penser, etc. L'apprentissage de la lecture, de la compréhension de texte, peut intégrer naturellement cette dimension réflexive : il faut apprendre à se voir lire, à compléter ou interpréter ce que dit l'auteur, à relire, à réinterpréter, à faire des liens avec d'autres lectures, etc. De façon très proche, le travail d'écriture a une forte dimension réflexive. L'auteur lui aussi se pense (et se lit) en train d'écrire, il porte une intention d'effet sur le lecteur, a un regard sur cette activité d'écriture qui est le moyen qu'il se donne pour y parvenir, il régule sa propre activité.

La dimension réflexive de l'apprentissage de la lecture ou de l'écriture va de pair avec l'explicitation du fait de travailler sur ces points. Écrire et lire sont des activités qui se travaillent en tant que telles.

Les liens entre écriture et lecture portent en eux la dimension collective de ces activités : un auteur pense son lecteur, se confronte à ses lecteurs ; un lecteur est en relation avec l'auteur, il est aussi en relation avec d'autres lecteurs (imaginaires ou réels) du même texte. Un élève se construit comme lecteur, comme auteur, et il construit sa représentation de la lecture et de l'écriture notamment par ces confrontations.

Ces quatre idées structurantes restent à décliner pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, que l'on appelle parfois dans ce type de contexte la « discipline non linguistique » (ou « discipline dite non linguistique », Gajo 2007, page 3). Je reviendrai sur les pistes de travail liées dans la partie suivante concernant les perspectives (Travail mathématique avec les élèves en lien avec des questions langagières, page 51).

6 Perspectives

Dans cette partie je regroupe les perspectives de recherche et d'encadrement que permettent de poser les éléments de cadrage présentés ci-dessus et certaines autres recherches en cours.

Pratiques langagières des mathématiciens

Un premier objectif était de mettre en place des outils de description et de caractérisation des pratiques langagières des mathématiciens. Le travail a été mené essentiellement à l'aide d'outils appuyés sur la logique mathématique. Les outils sont fonctionnels et permettent de mettre en évidence certaines complexités des pratiques langagières (et, on l'a vu, d'avancer ainsi des hypothèses sur d'éventuelles difficultés d'enseignement ou d'apprentissage).

Plusieurs prolongements sont à mener :

- diversifications des outils et des méthodes d'analyse,
- mise en place de corpus de textes plus systématiques.

La notion de corpus est importante : pour augmenter le nombre de textes il est nécessaire de préciser la nature de ces textes, les critères d'homogénéité ou au contraire les distinctions qui sont faites. Même en se centrant sur des textes de preuve, on peut distinguer des preuves pour des pairs, des preuves pour des étudiants ou des élèves en vu d'un cours ou d'un TD, des preuves pour des manuels écrits (qui seront lu en l'absence de l'auteur). Le niveau (scolaire par exemple) des lecteurs auxquels se destinent les textes est aussi à prendre en compte. On pourrait ainsi mettre en œuvre ces outils de façon plus systématique tout en gardant une cohérence des objets analysés pour permettre des comparaisons en termes de similitudes et différences, en terme d'évolutions, etc.

Les analyses présentées ci-dessus s'appuient essentiellement sur des outils logiques (voir partie Pratiques langagières des mathématiciens, page 15). Je vais préciser ici d'autres pistes de travail, certaines sont déjà travaillées, d'autres restent à initier.

Approches lexicométriques

Les linguistes ont évidemment des outils d'analyse de texte et donc des usages langagiers, notamment quantitatifs, lexicométriques (par exemple : Venant 2004, Chiao *et al.* 2006, Cavalla et Loiseau 2013).

Un travail est actuellement mené avec Cristelle Cavalla (laboratoire Diltec). Deux dimensions ont été initiées de façon exploratoire : un questionnement technique sur les textes et la façon de traiter les symboles mathématiques dans les analyses lexicales, une première approche sur l'usage de certains mots.

Pour permettre une première approche, un ensemble de texte a été choisi : les textes des cours en ligne du site « [exo7](http://exo7.emath.fr) »⁴⁴ destinés aux étudiants de première année de licence. Le choix a été guidé par le niveau d'étude, le fait que le contenu est accessible dans des formats permettant *a priori* les analyses quantitatives automatisées (LaTeX) et par la quantité de textes (près de 570 pages), ainsi que par l'étendue du panel des sujets abordés (analyse, algèbre et géométrie).

Notre premier questionnement porte sur le traitement des formules. Comme l'a documenté Colette Laborde (Laborde 1982) et comme on le retrouve aussi dans mes analyses présentées ci-dessus, l'intrication entre l'usage des mots dans des phrases d'un texte mathématique et des symboles est complexe. Les symboles expriment parfois des propriétés ou des noms d'objets indépendamment du

44 <http://exo7.emath.fr/> Les cours et les vidéos sont produits par Arnaud Bodin (Université Lille 1), Léa Blanc-Centi (Université Lille 1), Niels Borne (Université Lille 1), Benjamin Boutin (Université Rennes 1), Laura Desideri (Université Lille 1) et Pascal Romon (Université Marne la Vallée) avec l'aide d'autres collègues. Les énoncés et corrections d'exercices proviennent de diverses universités ainsi que de classes de Math Sup et Math Spé. Le contenu est entièrement gratuit. Le site Exo7 et les vidéos sont soutenus financièrement par l'université Lille 1 et Unisciel ; le site est hébergé par la SMAI et la SMF.

texte, mais l'interaction est souvent plus profonde : utilisation de symboles comme proposition relative, l'insertion d'adverbes dans l'énoncé symbolique d'une proposition, etc.

Quand il y a interaction, une interprétation est souvent nécessaire, voire une reformulation. La façon de les faire prendre en compte par un logiciel d'analyse lexicométrique est donc complexe. Plusieurs pistes sont explorées actuellement pour lever cette difficulté. Une première piste est logicielle : recherche du logiciel le plus adapté, possibilité ou non de prendre en compte le codage des formules dans LaTeX, etc. Une seconde piste consiste à prendre en compte la façon dont l'équipe d'auteurs verbalise le texte. Une grande partie du cours est en effet présentée sous forme de petites vidéos mettant en scène un enseignant devant un diaporama, le discours de l'enseignant et le texte du diaporama sont très proches du texte des cours en ligne, le discours oral de l'enseignant filmé permet donc de préciser certaines interprétations.

Une fois ces obstacles levés, de telles analyses lexicométriques apporteraient un éclairage complémentaire sur les pratiques langagières des mathématiciens.

Une première présentation de résultats a été faite lors de la journée LDAR-DILTEC 2018 (Hache et Cavalla 2018). À titre prospectif, avec Cristelle Cavalla, nous avons ainsi analysé l'usage du mot « courbe » dans le chapitre « Courbes paramétrées » d'un manuel de première année de licence. Trois sens se superposent : celui correspondant à la définition mathématique donnée au début du chapitre, une courbe paramétrée est une fonction (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 , ayant certaines propriétés), celui du graphe de cette fonction (l'image de la fonction), celui, plus usuel, de ligne courbe, de dessin. Le mot est aussi utilisé quelquefois dans un sens qui est celui rencontré au lycée concernant les courbes représentant une fonction (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). Très peu de commentaires explicites sont faits sur ces différentes acceptions, et le mot peut souvent avoir plusieurs sens (notamment dans les rédactions proposées des « analyses de courbes »). On peut penser que ces superpositions maîtrisées entre des sens déjà connus du mot et des sens nouveaux et proches peuvent aider la conceptualisation. C'est ici une piste de travail : qu'est-ce qu'un usage « maîtrisé » ? Comment les étudiants (ou les élèves dans les exemples précédents) perçoivent-ils ces différents sens ? Ces jeux de sens ou de mots participent-ils à la conceptualisation ? De quelle façon ?

Approches « comparatistes »

La possibilité de comparer les pratiques en fonction du contexte est un levier en général très riche pour expliciter ces pratiques. Trois entrées « comparatistes » sont envisagées.

Une première entrée pourrait être qualifiée d'« interne ». J'ai déjà abordé plusieurs fois la possibilité de comparer le discours correspondant à la lecture d'un texte mathématique écrit et l'écrit lui-même. Notamment pour ce qui concerne les parties utilisant des symboles. Quand il y en a (mais c'est nécessaire pour les parties symboliques), les reformulations choisies sont souvent révélatrices des implicites des premières formulations.

Je travaille sur une autre piste actuellement avec Avenilde Romo Vásquez (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA, IPN Mexico), celle de la comparaison des formulations usuelles des mêmes propriétés, ou des mêmes pas de déduction dans différentes langues (français, espagnol, anglais en l'occurrence). On retrouve ces problématiques en didactique des mathématiques par exemple dans les travaux d'Imed Ben Kilani (Durand-Guerrier, Ben Kilani 2004, Ben Kilani 2005), de Mercy Kazima (Kazima 2006, Kazima 2009) ou de Judith Njomgang Ngansop (Njomgang Ngansop, Durand-Guerrier 2011, Njomgang Ngansop 2013). De telles comparaisons soulignent certaines des caractéristiques des pratiques langagières des mathématiciens (dans chaque langue). Un travail avec des enseignants travaillant dans plusieurs langues pourrait également être envisagé (par exemple dans des contextes de type DNL⁴⁵, mais cela peut être dans des contextes où l'enseignement se fait en présence de plusieurs langues, nombreux sont les pays où la langue d'enseignement n'est pas la langue usuelle pour les élèves, ou pour l'enseignant).

45 Discipline non linguistique

Enfin, de tels décalages peuvent aussi être intéressants à observer en sortant de la communauté mathématique : les façons dont les communautés scientifiques utilisant (et enseignant) couramment les mathématiques disent les mathématiques peuvent elles aussi éclairer, par les écarts qui apparaissent, les caractéristiques des pratiques langagières des mathématiciens. Cette étude est simplement ébauchée. Un travail étayé et systématique permettrait également d'aborder les questions d'interdisciplinarité scientifique dans l'enseignement secondaire et supérieur.

Genre de texte, dédoublement, fictionnalisation

Bernard Schneuwly et Joachim Dolz (Schneuwly et Dolz 1997) s'appuient sur le concept de *genre de texte* de Mikhaïl Bakhtine (Bakhtine 1984) pour introduire la notion de *genre scolaire* (de texte) et de *dédoublement*. Le genre de texte a un ancrage social fort : « tout énoncé pris isolément est, bien entendu, individuel, mais chaque sphère d'utilisation de la langue élabore ses types relativement stables d'énoncés, et c'est ce que nous appelons les genres du discours » (Bakhtine 1984, page 265), c'est « une forme relativement stable que prennent les énoncés dans des situations habituelles » (Schneuwly et Dolz 1997, page 29), ces formes permettent la communication : « les locuteurs reconnaissent toujours un événement communicatif, une pratique langagière, comme une instance d'un genre » (Schneuwly et Dolz 1997, page 29) qui a donc le rôle d'un cadre partagé, un schéma générique d'échange.

Dans le cadre scolaire le genre n'est plus seulement un outil de communication, mais également un objet scolaire. On fait « comme si », il y a « fictionnalisation » (Vuillet *et al.* 2012) : le genre scolaire porte une pratique langagière en partie fictive puisque introduite à des fins d'apprentissage et non de communication (l'entretien radiophonique, la réponse au courrier des lecteurs, le récit fantastique, par exemple, ne sont pas les mêmes en dehors de l'école et quand ils sont évoqués, travaillés dans l'école). Travailler un genre dans un contexte scolaire le modifie nécessairement, « le genre travaillé à l'école est toujours une variante du genre de référence » (Schneuwly et Dolz 1997, page 4). En continuité, Sandrine Aeby Daghé (Aeby Daghé 2014), par exemple, précise les liens entre la notion de dédoublement et celle de transposition didactique.

Sans en faire un objet d'enseignement, Martine Jaubert, Maryse Rebière et Jean-Paul Bernié soulignent le caractère structurant des genres de discours :

« D'où la profonde intrication entre construction de connaissances et maîtrise de genres de discours dans l'apprentissage des concepts scientifiques propres à chaque discipline, puisque l'on ne peut plus négliger les relations étroites qui existent, aussi bien dans l'histoire de la pensée humaine sur le monde, que dans les apprentissages scientifiques, entre élaborations conceptuelles et langage » (Jaubert, Rebière et Bernié 2003, page 64)

Un texte de preuve en mathématique peut-il être vu comme appartenant à un genre de texte ? Sous cette hypothèse, il serait intéressant de l'étudier et de le caractériser. La notion de dédoublement interroge alors sur la façon dont existerait ce genre de texte en classe, la façon dont il est introduit et travaillé. On pourrait ainsi étudier et caractériser le genre scolaire « démonstration ». Une telle approche pourrait amener à un regard original sur les pratiques d'enseignement de la démonstration.

Pratiques langagières en classe

Une étude reste à faire sur les pratiques langagières des enseignants de mathématiques en classe de mathématiques. À quel point sont-elles proches de celles des mathématiciens ? Y a-t-il des différences des spécificités ? À quel propos ? Comment les enseignants abordent-ils les complexités langagières caractérisées dans les analyses ?

Ce travail a été initié, pour moi, avec Stéphanie Bridoux, Nicolas Grenier Boley et Aline Robert (Bridoux *et al.* 2015, Bridoux *et al.* 2016). Le travail d'analyse des formulations orales de propriétés écrites sous forme symbolique dans les cours d'exo7 initié dans le cadre évoqué ci-dessus (cf. Approches lexicométriques, page 47) peut aussi éclairer ce point.

Comme évoqué, la plupart de mes recherches portent sur le secondaire. L'entrée dans la classe avec ces problématiques langagières et les outils que j'utilise amènent naturellement à problématiser différemment mes questions concernant l'enseignement au primaire : la plupart des enseignants du primaire n'ont pas étudié les mathématiques (ou même les sciences) dans le supérieur. Autre caractéristique importante : les enseignants du primaire enseignent toutes les disciplines (mathématiques, français, sciences, etc.). Il serait alors intéressant de décrire leurs usages langagiers concernant les mathématiques.

Démonstrations en classe

En prolongement des travaux présentés dans la partie Pratiques langagières des mathématiciens et plus particulièrement Analyses de formulations des démonstrations, exemples (page 21) il serait intéressant de porter une analyse systématique des formulations de démonstration en classe. Que ce soit lors de la correction d'exercices ou lors de la preuve, sans doute davantage mise en scène, de propriétés du cours ; que ce soit en classe ou dans leur manuel (et sur internet ?) les élèves lisent des preuves. Que leur donne-t-on à lire ? La question se pose au moins à partir du cycle 4, elle est à la fois quantitative et qualitative ?

Une première étude non encore suffisamment formalisée montre, pour les manuels :

- une augmentation du nombre de preuves présentées de la 5^e à la terminale,
- une évolution de la nature des preuves : très centrées sur le *modus ponens* au collège, on voit apparaître la gestion des quantifications de variable au lycée, la preuve d'implication, puis des pas de déduction plus complexes (quelques disjonctions des cas), la récurrence ;
- une grande variété des choix de formulations proposés pour un même pas de déduction (ou enchaînement de pas de déduction), peu de considérations explicites sur ces questions liées aux formulations ;
- un jeu graphique souvent complexe, et en lien avec des choix éditoriaux de mise en page, entre un texte de preuve et des commentaires de la preuve (ou ce qui semble en être parce que dans une autre colonne, dans un petit nuage, etc.). La distinction entre les deux n'est d'ailleurs pas toujours simple : il ne reste souvent que très peu d'éléments de la preuve si on supprime ce qui est signalé comme étant des commentaires. On retrouve ce double discours (écrit et oral) lors de la présentation de preuve par l'enseignant.

L'analyse des formulations des enseignants en classe sur ce point avec ces outils est également à explorer. Elle est plus complexe : l'enseignant menant de front un discours oral et un discours écrit. Un champ de question s'ouvre concernant les pratiques des enseignants : comment formulent-ils ? Comment travaillent-ils leurs formulations ? Quelles formulations proposent-ils finalement à l'écrit ? Quel (trace de) texte de démonstration reste-t-il pour les élèves ? Quels éléments (commentaires ?) resteront oraux ? Quelle représentation les enseignants ont-ils des formulations qu'ils proposent ? Quels liens avec leurs exigences vis à vis des élèves ?

On croise bien sûr certains des éléments et des questions des recherches menées avec Stéphanie Bridoux, Nicolas Grenier Boley et Aline Robert (recherches menées sur ce point plutôt dans le supérieur).

Ces analyses, celles concernant les manuels et celles concernant les pratiques des enseignants, permettraient de décrire la variété de ce que les élèves ont à lire concernant les démonstrations dans leur cours de mathématiques, point dont je fais l'hypothèse qu'il est très important par son lien avec l'apprentissage de l'écriture de démonstrations (voir Lecture et écriture, deux activités indissociables page 38).

Les mots des consignes

J'évoque les pratiques langagières des mathématiciens essentiellement pour analyser les formulations de définitions mathématiques, de propositions mathématiques et de démonstration. Les enseignants (et les mathématiciens) parlent bien sûr de mathématiques en dehors de ces trois cadres spécifiques. Il serait intéressant d'élargir l'étude des pratiques langagières des enseignants de mathématiques en classe sans se limiter aux définitions, propriétés et preuves et sans nécessairement référer à des pratiques des mathématiciens (Baron et Hache 2019).

Le constat de la polysémie de certains mots des consignes concernant le raisonnement et la justification en mathématiques de différents points de vue (pour un même enseignant, dans un manuel, dans les programmes, ou entre enseignants, entre manuels) a été étudié dans le travail d'Émilie Baron (Baron 2016). Ce travail en mathématiques pourrait être étendu aux formulations des consignes sans se limiter au raisonnement et à la justification.

Travail mathématique avec les élèves en lien avec des questions langagières

Les élèves n'écrivent pas ou peu ou difficilement en mathématiques ? Comment les faire progresser ? Quels écrits intermédiaires ? Quel travail sur l'écriture en mathématiques ?

Comme je l'ai présenté ci-dessus (Texte, lecteur et auteur en didactique du français page 37) suite à mes lectures sur les recherches en didactique du français liées aux idées de texte, de lecture et d'écriture je retiens quatre lignes directrices : le fait que travail sur l'écriture et sur la lecture sont à penser ensemble, la nécessité d'une approche consciente, explicite, collective et réflexive. Plusieurs perspectives de recherches s'appuient sur ces idées en essayant de les décliner concernant l'enseignement des mathématiques, la compréhension de texte en mathématiques, l'apprentissage de la démonstration, etc.

Certaines pistes de travail et expérimentations ont été menées dans ce sens. Je peux notamment citer le travail du groupe de travail Léo de l'IREM de Paris, que je coordonne, sur la formulation et la reformulation collective par les élèves, en classe, de théorèmes ou de définitions du cours, ou de démonstrations (Hache 2017, Groupe Léo 2018a), sur l'écriture et la réécriture, la relecture entre pairs ; ou le travail de lecture de preuves (plusieurs preuves rédigées par des mathématiciens d'un même exercice lues puis discutées par les élèves en classe de TS) ; ou la notion de dictée (Groupe Léo 2018b) ; adaptation de modalités de travail de type Lector-Lectrix (Cebe *et al.* 2004) en cours de français-mathématiques en 6^e (séances d'aide personnalisée). Certaines expérimentations ont été menées dans d'autres contextes (commission inter IREM « Lycée », Hache et Forgeux 2018, Hache 2015). Certaines de ces expérimentations sont à approfondir (notamment sur la lecture de preuves). D'autres pistes peuvent être étudiées de ce point de vue : sur le rôle du brouillon par exemple, le travail en atelier et la publication d'écrits, les narrations de recherches, les figures téléphonées.

De premières recherches sont en cours sur une partie de ces expérimentations dans le cadre de mémoires du master de didactique des mathématiques de l'Université Paris Diderot. Dans un travail de recherche plus long, on pourrait imaginer une méthodologie de type ingénierie didactique sur ces modalités de travail en classe, il serait également central d'analyser les pratiques enseignantes : que prépare l'enseignant ? Qu'apporte-t-il ? Que dit-il ? Que prépare-t-il ?

La réflexivité nécessaire sur les usages langagiers peut aussi être provoquée à l'aide d'un travail plurilingue (quelle que soit sa forme : introduction ponctuelle dans une classe ordinaire, DNL⁴⁶ ou section européenne, accueil d'élèves allophones en classe). Je m'appuierai ici sur le travail de Laurent Gajo⁴⁷. Il

46 Discipline non linguistique

47 Raymond Duval n'aborde pas ces questions de plurilinguisme. Il considère la langue comme un registre de représentation sémiotique. On peut donc considérer deux langues différentes comme deux registres de représentations sémiotiques différents, chacun apportant un éclairage partiel du contenu. La non-congruence des registres et les conversions étant toujours centrales dans le développement de l'activité cognitive. Cette approche, est développée par exemple par Imed Ben Kilani (Ben Kilani 2003, Ben Kilani 2005).

affirme que « le travail monolingue gomme quelque peu la relation complexe entre discours et science » (Gajo 2013, page 100), « la reformulation en L1⁴⁸ et en L2 constitue une des bases du travail métalinguistique et peut aboutir à des processus méta-cognitifs visant le traitement de l'information disciplinaire » (Gajo 2007, page 4). Laurent Gajo voit ainsi le discours, le texte comme une interface entre savoirs linguistiques et savoirs disciplinaires, la présence de deux langues permet une « remédiation » : à la fois une seconde médiation⁴⁹, et la possibilité d'un remède à d'éventuelles difficultés langagières (s'il n'y a pas de problème le discours apparaît comme relativement transparent⁵⁰). Cette remédiation permettant un retour réflexif sur la première médiation, et, à terme, une centration plus grande sur les contenus. Il y a défamiliarisation des faits langagiers. « C'est à ce double niveau que le plurilinguisme peut servir à la fois de loupe et de ressource supplémentaire dans le processus de construction des savoirs » (Gajo 2013, page 99), « derrière la continuité entre médiation et remédiation se dessine le processus d'intégration entre savoirs linguistiques et non linguistiques, au cœur de l'enseignement bilingue » (Gajo 2015, page 161). Les recherches sont nombreuses en lien avec cette problématique, les recherches abordant ces questions avec une entrée disciplinaire sont plus rares.

Il serait intéressant, en prolongement des travaux « comparatistes » évoqués plus haut, page 48, et en s'appuyant sur des outils et des résultats de recherches de didactique du bi/plurilinguisme, d'expérimenter et d'analyser dans des recherches en didactique des mathématiques des séances de travail plurilingues. La troisième journée LDAR-DILTEC que j'ai organisée le 5 juin 2019 avec Catherine Mendonça Dias a souligné la richesse des croisements de regards disciplinaires et des terrains concernés (enseignement ordinaire, DNL, UPE2A⁵¹, élèves allophones en classe ordinaire, français langue de scolarisation, français à objectifs spécifiques, etc.).

Formations des enseignants

Au-delà de la nécessité d'échanges entre praticiens enseignants et chercheurs, entre problématiques d'enseignement et de recherche, les questions de diffusion de résultats de recherche (formations initiale ou continue, ressources, groupes de travail) est un prolongement naturel des travaux envisagés.

Les recherches décrites ici ont régulièrement donné lieu à des formations à l'IREM de Paris (stages « initiation à la logique », « la démonstration dans tous ses états », « raisonner, communiquer au collège », « lire, dire, écrire en mathématiques », « quand on a maths et français en même temps », etc.), à des communications à destination d'enseignants (journées APMEP, séminaires dans des IREM, colloques du réseau des IREM, séminaires académiques, etc.), elles ont également étayé la participation à la rédaction d'un document d'accompagnement des programmes de collège en 2016 : « Mathématiques et maîtrise de la langue » (Ministère 2016).

Il ne s'agit pas directement de changer les pratiques langagières des enseignants, mais plus largement et en amont d'ouvrir une réflexion sur ces pratiques, de donner des outils pour faciliter et développer cette réflexion. Tout en ayant conscience de la difficulté de l'exercice, il s'agit également de travailler sur les pratiques d'enseignement des collègues en introduisant des alternatives permettant de prendre en compte cette dimension langagière dans les séances avec les élèves.

Les modalités de formation et les contenus sont travaillées collectivement dans les groupes de travail de l'IREM. Zoé Mesnil propose dans sa thèse une analyse d'une de ces formations (Mesnil 2014). Un travail a été mené avec Avenilde Romo-Vásquez analysant la mise en œuvre commune d'une unité

48 « L1 » pour « langue première » et « L2 » pour « langue seconde ».

49 La première fait référence à la médiation symbolique de Lev Semionovitch Vygotski (Vygotsky 1934)

50 Par ailleurs, la transparence est souvent implicitement présumée dans l'enseignement (monolingue), mis à part dans l'enseignement d'une L2, où c'est l'opacité qui est la règle. C'est ce jeu entre transparence et opacité de la médiation qui est au cœur de l'enseignement plurilingue (d'une discipline non linguistique).

51 Unités pédagogiques pour les élèves allophones nouvellement arrivés

d'enseignement dans le master de didactique des mathématiques de l'IPN-CICATA à Mexico concernant les analyses de discours en mathématiques⁵² (Romo-Vásquez Hache 2019).

Il serait intéressant de reprendre et d'amplifier cette direction de recherche.

52 Enseignement : « Análisis del Discurso Matemático ». Master : « Ciencias en matemática educativa ». Institution : « Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada ». <https://www.cicata.ipn.mx/oferta-educativa/promo/oferta-educativa/maestria.html>

Bibliographie

ACERBI F. (2011). The language of the “Givens”: its forms and its use as a deductive tool in Greek mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, 65-2, pp 119-153. Springer.

ADDA J. (1975). L'incompréhension en mathématiques et les malentendus. *Educational Studies in Mathematics*, 6 (3), pp 311-326. Springer.

AEBY DAGHE S. (2014). *Candide, La fée carabine et les autres. Vers un modèle didactique de la lecture littéraire*. Peter Lang.

<http://www.open.org/search?identifiant=619090>

ASSUDE T. (1999). Éléments pour une analyse écologique des textes mathématiques. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 3-2, pp 1-22. Département de Mathématiques et Informatique, Université de Rennes.

http://www.numdam.org/article/PSMIR_1999-2000__3_A2_0.pdf

ASSUDE T., CAPPONI B., BERTOMEU P., BONNET JF. (1996). De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel Cabrigéomètre. *Petit x*, 44, pp 53-79. IREM de Grenoble.

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/>

BAHOULT J. (1988). *Lectures précaires, étude sociologique des faibles lecteurs*. Service des études et de la recherche, Centre Georges Pompidou.⁵³

<http://books.openedition.org/bibpompidou/pdf/1755>

BAKHTINE M. (1984). *Esthétique de la création verbale*. Gallimard.

BALACHEFF N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, pp 147-176. Springer.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01619264>

BARON E. (2016). *Une étude de la justification dans le cadre de l'apprentissage de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques au collège*. Mémoire de master (M2 Didactique des disciplines), Université Paris Diderot.

BARON E., HACHE C. (2019). Expliquer, justifier, prouver, démontrer ? *Repère IREM*, 115, pp 35-52. IREM de Grenoble.

<http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique24>

BARRIER T. (2009). *Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard - Lyon I.

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00653274>

BARRIER T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en Éducation*, 27, pp 94-117. Université de Nantes.

<http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-No27.pdf>

BARRIER T., CHESNAIS A., HACHE C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale. Revue de recherches en éducation*, 54 Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques, pp 175-193. Arred.

http://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1042

BARRIER T., DURAND-GUERRIER V. (2015). La quantification au cœur des relations entre langage, raisonnement et apprentissages mathématiques. In *Actes du 22e colloque de la CORFEM, juin 2015, Nîmes*. Adirem.

http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2015_02.pdf

53 Les références uniquement citées dans des citations sont grisées.

- BARRIER T., HACHE C. (2014). Usages et implicites de la quantification. Intervention aux *Journées « Lemme » à Paris, 15-16 décembre 2014.*
- BARRIER T., HACHE C., MATHÉ AC. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves. *Grand N*, 93, pp 13-37. IREM de Grenoble.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01408695>
- BAUTIER É. (2001). Pratiques langagières et scolarisation. *Revue Française de Pédagogie*, 137, pp 117-161. ENS Lyon.
http://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_2001_num_137_1_2853
- BAUTIER É., BUCHETON, D. (1995). Ce qui s'enseigne, ce qui s'apprend et ce qui est déjà là ? *Le français aujourd'hui*, n° 111, pp 26-37. Armand Colin.
- BEN KILANI I. (2003) La congruence des énoncés universels entre les registres sémiotiques de la langue arabe, la langue française et le langage logicomathématique. *Actes en ligne du colloque EMF, GT1*
http://emf.unige.ch/files/2014/5459/4337/EMF2003_GT1_Imed.pdf
- BEN KILANI I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- BERNIÉ JP. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : Un apport à la didactique comparée ? *Revue Française De Pédagogie*, 141, pp 77-88. ENS Lyon.
<http://www.jstor.org/stable/41201846>
- BERRENDONNER A. (1983). Note sur la déduction naturelle et le connecteur "donc". In BANGE P. et al. *Logique, argumentation, conversation, actes du colloque de pragmatique, Fribourg, 1981.* Peter Lang, Berne
- BOIRON V. (2011). Quelles compétences professionnelles pour favoriser la lecture d'albums de littérature de jeunesse en maternelle ? In GOIGOUX R., POLLET MC. (eds.) *Didactique de lecture : de la maternelle à l'université*, pp 23-52. Presses Universitaires de Namur, Airdf.
- BOSCH M., PERRIN MJ. (2013). Le langage dans les situations et les institutions. In BRONNER A. et al. *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, pp 267-302. La Pensée sauvage.
- BOSCHET F. (1987). Fonctions du code symbolique dans le discours mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, 18, pp 19-34. Springer.
- BRIDOUX S., CHAPPET-PARIÈS M., GRENIER-BOLEY N., HACHE C., ROBERT A. (2015). Les Moments d'exposition des Connaissances en mathématiques (secondaire et début de l'université). *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz*, 14. IREM de Paris.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02111575>
- BRIDOUX S., GRENIER BOLEY N., HACHE C., ROBERT A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, n°21, pp 187-233. IREM de Strasbourg.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01720671>
- BRONCKART JP. (2007). L'activité langagière, la langue et le signe, comme organisateurs du développement humain. *Langage et société*, 121-122, pp 57-68. Éditions de la Maison des sciences de l'homme.
<http://www.cairn.info/revue-langage-et-societe-2007-3-page-57.htm>

BRONCKART JP. (2013). Des interactions complexes entre langage verbal, opérations et raisonnements. In BRONNER A. et al. *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, pp 181-195. La Pensée sauvage.

<https://archive-ouverte.unige.ch/unige:81365>

BUCHETON D. (1996). L'épaississement du texte par la réécriture, in DAVID J., PLANE S. *L'apprentissage de l'écriture de l'école au collège*, pp 159-186. Presses universitaires de France.

BUCHETON D. (2002). *Devenir l'auteur de sa parole*. Ministère de l'éducation nationale, Eduscol
http://media.eduscol.education.fr/file/Formation_continue_enseignants/87/0/parole_bucheton_109870.pdf

BUCHETON D. (2014). *Refonder l'enseignement de l'écriture*. Retz

BULF C, MATHÉ AC., MITHALAL J. (2015). Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(1), pp 7-36. La Pensée Sauvage.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01147264v1>

CAROL R. (2015). La didactique de l'enseignement bilingue : enseignement disciplinaire et langage. *Recherches en didactique des langues et des cultures*, 12-3. Acedle.

<https://www.doi.org/10.4000/rdlc.973>

CAVALLA, C., LOISEAU M. (2013). Scientext comme corpus pour l'enseignement. In TUTIN A., GROSSMANN F. (eds.), *L'écrit scientifique : du lexique au discours. Autour de Scientext*. PUR, Rennes. pp 63-182

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01154754>

CÈBE S., GOIGOUX R. (2007). Concevoir un instrument didactique pour améliorer l'enseignement de la compréhension de textes. *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, 35, pp 185-208. ENS Lyon.

<http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/reperes/RS035.pdf#page=185>

CÈBE S., GOIGOUX R., THOMAZET S. (2004). Enseigner la compréhension. Principes didactiques, exemples de tâches et d'activités. *Lire écrire, un plaisir retrouvé*, Ministère de l'éducation nationale (DESCO), CD Rom.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00922482>

CHAPPET-PARIES M., ROBERT A. (2014). Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques ? Questions méthodologiques et premiers résultats. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz* 14. IREM de Paris

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02111575>

CHAREAUDEAU P., MANGUENEAU D. (2002). *Dictionnaire d'Analyse du Discours*. Seuil.

CHELLOUGUI F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.

CHESNAIS A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. Note de synthèse HDR. Université de Montpellier.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02046178>

CHIAO YC., KRAIF O., LAURENT D., NGUYEN TMH., SEMMAR N., STUCK F., VERONIS J., ZAGHOUBANI W. (2006). Evaluation of multilingual text alignment systems: the ARCADE II project. In *5th international Conference on Language Resources and Evaluation - LREC'06, May 2006, Genoa/Italy*.

<https://hal.inria.fr/inria-00115670>

CORI R., LASCAR D. (2003). *Logique mathématique 1 - Calcul propositionnel ; algèbre de Boole ; calcul des prédicats*. Dunod

de HOSSON C., BORDENAVE L., DAURES PL., DECAMP N., HACHE C. HOROKS J. (2019) Quand l'élève devient auteur.e : analyse didactique d'ateliers BD-sciences. *Tréma*, 51, en ligne. Faculté d'Éducation de l'Université de Montpellier
<https://dx.doi.org/10.4000/trema.4895>

de HOSSON C., BORDENAVE L., DAURES PL., DECAMP N., HACHE C. HOROKS J., GUEDIRI N., MATAILLIOTAKI-FOUCHAUX E. (2018). Communicating science through the Comics & Science Workshops: the Sarabandes research project. *JCOM : Journal of Science Communication*, 17-2, en ligne. Sissa Medialab.
<https://dx.doi.org/10.22323/2.17020203>

De MAURO T. (1972). *Ferdinand de Saussure. Cours de linguistique générale. Édition critique*. Éditions Payot.

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier.
http://virginie.jorrand.com/pdf/Deloustal_these.pdf

DIPSY M. (2011). De la compréhension de l'implicite dans le récit fictionnel. In GOICOUX R., POLLET MC. *Didactique de lecture : de la maternelle à l'université*, pp 117-139. Presses Universitaires de Namur, Airdf.

DOOLEY T. (2015). Vague language and politeness in whole-class mathematical conversation. In *Proceedings of CERME 9- Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic*, pp 1354-1360.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287662>

DROUHARD JP. (1993). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse, Université Paris VII
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00925358>

DROUHARD JP. (2014). Quand écrire c'est faire. Intervention au séminaire du Laboratoire de didactique André Revuz. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 14. IREM de Paris
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02111575>

DUBINSKY E., YIPARAKI O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in collegiate mathematics*, IV, pp 239-289. American mathematical society.
<http://www.math.kent.edu/~edd/OlgaPaper.pdf>

DUFAYS JL. (2017). Analyser les pratiques d'enseignement – apprentissage de la lecture des textes littéraires : quelle modélisation pour quels enjeux ? *Recherches en éducation*, 29, pp 11-21. Université de Nantes.
<http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no29.pdf>

DURAND-GUERRIER V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x*, 50, pp 57-79. IREM de Grenoble
<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/>

DURAND-GUERRIER V. (2013) Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In BRONNER A. *et al. Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. La Pensée sauvage
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00820446>

DURAND-GUERRIER V., ARSAC G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Sépécificités de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23, n° 3, pp 295-342. La pensée sauvage.

<https://revue-rdm.com/2003/methodes-de-raisonnement-et-leurs/>

DURAND-GUERRIER V., BEN KILANI I. (2004), Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien. *Les Cahiers du Français Contemporain*, 9, pp 29-55.

DUVAL R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics* 22, pp 233-261. Kluwer Academic Publishers.

DUVAL R. (1993) Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, pp 37-65. IREM de Strasbourg

https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

ÉCO U. (1985). *Lector in fabula*. Grasset

EPP SS. (1999). The language of quantification in mathematics instruction. In STIFF LV. and CURCIO FR. (eds.) *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12 (1999 Yearbook)*, pp 188-197, Chapter 16. Reston.

FISH S. (2007). *Quand lire c'est faire. L'autorité des communautés interprétatives*. Éditions Amsterdam.

FREGE G. (1882). *Que la science justifie le recours à une idéographie*. Traduit de l'allemand dans IMBERT C. (1994). *Gottlob Frege, écrits logiques et philosophiques*, pp 63-69. Seuil.

FREINET C. (1927). *L'imprimerie à l'école*. Ferrary éditeur

<https://www.icem-freinet.fr/archives/livres/iae-ferrary/iae-1927.htm>

FREUDENTHAL H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company

GAJO L. (2007). Enseignement d'une DNL en langue étrangère : de la clarification à la conceptualisation, *Tréma*, 28, pp 37-48. Faculté d'Éducation de l'Université de Montpellier

<https://doi.org/10.4000/trema.448>

GAJO L. (2013). Le plurilinguisme dans et pour la science : enjeux d'une politique linguistique à l'université. *Synergies Europe*, 8, pp 97-109. Gerflint.

<https://gerflint.fr/Base/Europe8/Gajo.pdf>

GAJO L. (2015). Ruptures, bascules et tensions : travail métalinguistique et outils plurilingues. In GRADOUX X., JACQUIN J., MERMINOD G. *Agir dans la diversité des langues*, pp 157-170. De Boeck.

GENTZEN G. (1935) Untersuchungen über das logische schließen. Traduit de l'allemand : Feys et Ladrière (1955) *Recherches sur la déduction logique*, Presses Universitaires de France, Paris

GERBIER Y., ICART-SEGUY H. (1987). *Les marqueurs logico – discursifs car, comme, parce que, puisque*. Thèse, Université de Toulouse Le Mirail.

GIREL S. (2015). Horizon(s) d'attente. In GLINOER A., SAINT AMAND D. (dir.), *Le lexique socius*. Socius.

<http://ressources-socius.info/index.php/lexique/21-lexique/43-horizon-s-d-attente>

GROUPE LEO (2018a). Formulations et reformulations, un travail collectif en mathématiques. *Au fil des mathématiques*, 528, en ligne. APMEP.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292609>

- GROUPE LEO (2018b). Dictée en cours de mathématiques ? *Au fil des mathématiques*, 528, pp 25-28. APMEP.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292618>
- HABERMAS J. (1987). *Théorie de l'agir communicationnel*, tome I. Fayard
- HACHE C. (1999). *L'enseignant de mathématiques au quotidien : Études de pratiques en classe de seconde*. Doctorat de l'Université Paris Diderot - Paris 7.
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01253635>
- HACHE C. (2001). L'univers mathématique proposé par le professeur en classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(1.2), pp 81-98. La Pensée Sauvage Éditions.
<https://revue-rdm.com/ouvrage/rdm-vol-21-12/>
- HACHE C. (2013). Langage mathématique à la transition primaire / collège, in *Actes du 39^e colloque de la Copirelem à Quimper en juin 2012*, pp 452-463. Copirelem.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00870111v1>
- HACHE C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens. Une étude de cas avec « avec », *Petit x*, 97. IREM de Grenoble.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01397401>
- HACHE C. (2016a). Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques. In *Actes du 21^e colloque de la CORFEM en juin 2014 à Grenoble*. Adirem.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285113v1>
- HACHE C. (2016b). Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. In MATHERON Y., GUEUDET G. (ed.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la 18^e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, août 2015*, pp 603-612. La Pensée Sauvage édition.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292633>
- HACHE C. (à paraître). Lecture et écriture en didactique du Français, questions pour la didactique des mathématiques. In RODITI E., COPPE S. et al., *Actes de la 19^e école d'été de didactique des mathématiques, Paris, 20-26 août 2017*.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01646998>
- HACHE C. (coord.) (2017) *Formuler, reformuler, groupe Léo*. Document en ligne de l'IREM de Paris.
<http://numerisation.univ-irem.fr/PS/IPS17005/IPS17005.pdf>
- HACHE C., CAVALLA C. (2018). Courbes. *Intervention 2^e journée LDAR-DILTEC, 21 juin 2018*.
- HACHE C., FORGEOUX (2018). Vrai ou faux ? Parlons-en ! *Au fil des mathématiques*, 528, 49-54. APMEP.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292639>
- HACHE C., MESNIL Z. (2017). Pratiques langagières et preuves. In *Actes du 22^e colloque de la CORFEM, en juin 2015 à Nîmes*. Adirem.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285116>
- HACHE C., MOULIN M. (2019). Codage d'album et activité mathématique ? *Intervention au colloque international Telling Science, drawing Science TSDS#2, les 15, 16, 17 mai 2019 à Angoulême*.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292644>
- HACHE C., ROBERT A. (1997). Comment, en didactique des mathématiques prendre en compte les pratiques, en classe, des enseignants de mathématiques au lycée ? Une approche à travers des analyses de pratiques de quelques enseignants de mathématiques dans des séances d'introduction aux vecteurs en classe de seconde. *Cahier de DIDIREM*, 28. IREM de Paris.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02141778/>

HACHE C., ROBERT A. (1998). Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait fréquenter les mathématiques à ses élèves pendant la classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), pp 103-150. La Pensée Sauvage Éditions.

<https://revue-rdm.com/ouvrage/rdm-vol-17-3/>

HERREMAN A. (2010). *Énoncés et textes inauguraux. Sur un type d'énoncé et de texte mathématiques*. Document en ligne.

<https://arxiv.org/pdf/1111.2145.pdf>

ISER W. (1985). *L'Acte de lecture. Théorie de l'effet esthétique*. Madarga.

JAFFRÉ J. (2005). L'orthographe du français, une exception ? *Le français aujourd'hui*, 148(1), pp 23-31. Armand Colin.

<https://doi.org/10.3917/lfa.148.0023>

JAUBERT M. (2017). Un point de vue comparatiste sur la modélisation des savoirs dans les analyses didactiques des situations d'enseignement apprentissage. *Recherche en éducation*, 29, pp 88-100. Université de Nantes.

<http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no29.pdf>

JAUBERT M., REBIÈRE M. (2001) Pratiques de reformulation et construction de savoirs, *ASTER*, 33, pp 81-110. INRP.

http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/aster/ASTER_2001_33_81.pdf

JAUBERT M., REBIÈRE M. (2011) Positions énonciatives pour apprendre dans les différentes disciplines scolaires : une question pour la didactique du français ? *Pratiques*, 149-150, pp 112-128.

<http://journals.openedition.org/pratiques/1718>

JAUBERT M., REBIÈRE M., BERNIÉ JP. (2003) L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? où va-t-elle ? *Les cahiers Théodile*, 4, pp 51-80.

http://theodile.recherche.univ-lille3.fr/IMG/pdf/Cahiers_Theodile_04.pdf

JAUSS HR. (1978). *Pour une esthétique de la réception*. Gallimard

JOUANNET ORTIZ P. (2017). *Idées intuitives des élèves sur la convergence de suites avant l'enseignement*, mémoire de M2 didactique, Université Paris Diderot.

JULIEN C. (2006). *Esthétique et modes opératoires en mathématiques, une exploration goodmanienne*. Thèse. Université de Lorraine.

<http://docnum.univ-lorraine.fr/public/NANCY2/doc272/2006NAN21021.pdf>

KAZIMA M. (2006). Malawian students' meanings for probability vocabulary. *Educational Studies in Mathematics*, 64(2), pp. 169-189

KAZIMA M. (2009). Teaching mathematics in local languages: Lessons from some African countries. *Proceedings of the seventh annual meeting of Southern African Association for research in mathematics, science and technology education 19-22 January 2009*, pp. 193-199

KOUKI R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00346287>

LABORDE C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse, Université de Grenoble.

LACOMBE D. (2011). Grandeur et misère de l'implication. Vidéo en ligne du séminaire « Enseignement des mathématiques » de l'IREM de Paris.

<https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/adfa20fa-0028-4782-a864-99a7003e1280>

- LAFONT-TERRANOVA J. (2009). *Se construire, à l'école, comme sujet - écrivain. L'apport des ateliers d'écriture*. Presses Universitaires de Namur.
- LAPARRA M., MARGOLINAS C. (2012). Oralité, littératie et production des inégalités scolaires. *Le français aujourd'hui*, 177-2, pp 55-64. Armand Colin.
<https://www.cairn.info/revue-le-francais-aujourd-hui-2012-2-page-55.htm>
- LEBRUN M. (2004). L'émergence et le choc des subjectivités de lecteurs de la maternelle au lycée grâce à l'espace interprétatif ouvert par les comités de lecture. In ROUXEL A., LANGLADE G. *Le sujet lecteur, lecture subjective et enseignement de la littérature*, pp 329-341. Presses universitaires de Rennes.
- MESNIL Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse. Université Paris Diderot.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01114281>
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE (2016). *Mathématiques et maîtrise de la langue*. Éduscol.
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ressources_transversales/99/6/RA16_C3C4_MATH_math_maitr_lang_N.D_600996.pdf
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DIRECTION DES ÉCOLES (1992). *La maîtrise de la langue à l'école*. Hachette et CNDP.
- NIWESE M., BAZILE S. (2014). L'atelier d'écriture comme dispositif de diagnostic et de développement de la compétence scripturale : du centre de formations d'adultes à la classe. *Pratiques*, 161/162. CREM, Université de Lorraine.
<http://pratiques.revues.org/2063>
- NJOMGANG NGANSOP J. (2013). *Enseigner les concepts logiques en début d'université dans l'espace mathématique francophone : aspects didactiques épistémologiques et langagiers. Une étude de cas au Cameroun*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard – Lyon I
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01127648>
- NJOMGANG NGANSOP J. et DURAND-GUERRIER V. (2011) Negation of mathematical statements in French in multilingual contexts – an example in Cameroon, *ICMI Study 21 conference – Mathematics and Language Diversity, Sao Paulo : Brésil*, p.268-275
- PARIES M., POUYANNE N., ROBERT A., ROGALSKI M., RODITI E. (2007). Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée, quelques exemples. *Document pour la formation d'enseignants de mathématiques*, 9. IREM Paris.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01720671>
- PETITFOUR E. (2015). Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques visuospatiaux inclus en classe ordinaire. *Recherches en éducation*, 23, pp 82-94. Université de Nantes.
<http://www.recherches-en-education.net/spip.php?article322>
- PIAGET J. (1947). *La psychologie de l'intelligence*. Armand Colin.
- PLANE S. (2017). Dynamique de l'écriture et processus de resémantisation. *Pratiques*, 173/174, en ligne. CREM, Université de Lorraine.
<http://pratiques.revues.org/3307>
- POINCARÉ H. (1908). *Science et méthode*. Flammarion.
- PRIVAT JM. (2008). Socio-logiques des didactiques de la lecture, in CHIS JL., DAVID J., REUTER Y., *Didactique du français, fondements d'une discipline*, pp 119-134. De Boeck.

RADFORD L., BARWELL R. (2016). Language in mathematics education research. In GUTIERREZ G. LEDER C., BOERO P. (eds.) *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, pp 275-313. Sense Publishers.

<http://www.luisradford.ca/pub/2016> – Radford and Barwell – Language in Mathematics Education Research - web.pdf

RAKATOVOAVY F. (1983). *Les difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi dans les textes mathématiques de certains adjectifs marqueurs de variance (exemples principalement empruntés dans des manuels du second degré)*, Thèse Université Paris 7, IREM de Paris, Paris.

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02193780>

REBIÈRE M. (2000). *Langage, posture et cognition*. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 2.

REBIÈRE M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In BRONNER A. et al. *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, pp 119-232. La Pensée Sauvage éditions.

RÉCANATI F. (1989). *La transparence et l'énonciation pour introduire à la pragmatique*. Seuil.

REUTER Y. (2002). *Enseigner et apprendre à écrire*. ESF éditeur.

ROBERT A. (2008). Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In Vandebrouck F. *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, pp 13-23. Octarès

ROBERT A., VANDEBROUCK F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 34(2-3), pp 239-283. La Pensée Sauvage éditions.

<https://revue-rdm.com/2014/proximites-en-acte-mises-en-jeu-en/>

ROMO-VÁSQUEZ A., HACHE C. (2019). Prácticas lingüísticas en la clase de matemáticas. Una experiencia de profesionalización online para profesoras de matemáticas. *REDIMAT – JRME*, 8(2), 112-138.

<http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2019.2503>

SCHNEUWLY B. (1995). De l'utilité de la "transposition didactique". In CHISS JL., DAVID J., REUTER. Y. *Didactique du français : état d'une discipline*, pp 47-62 . Nathan.

<https://archive-ouverte.unige.ch/unige:35525>

SCHNEUWLY B., DOLZ J. (1997). Les genres scolaires, des pratiques langagières aux objets d'enseignement. *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, 15, pp 27-40. ENS Lyon.

<https://doi.org/10.3406/reper.1997.2209>

SELDEN J., SELDEN A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), pp 123-151. Springer.

<https://doi.org/10.1007/BF01274210>

SÈVE P. (2011). Savoir lire et savoir lu : sur quels horizons temporels et culturels se déploient les séquences de lecture ? In GOIGOUX R., POLLET MC. *Didactique de lecture : de la maternelle à l'université*, pp 85-115. Presses Universitaires de Namur, Airdf.

SPAËTH V. (2008). Le français « langue de scolarisation » et les disciplines scolaires. In CHISS JL. *Immigration, école et didactique du français*, pp 64-101. Didier.

TAUVERON C. (2002). L'écriture littéraire : une relation dialectique entre intention artistique et attention esthétique. *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, 26/27, pp 203-215. ENS Lyon.

http://www.persee.fr/doc/reper_1157-1330_2002_num_26_1_2402

TAUVERON C. (2004). Droits du texte et droits des jeunes lecteurs : un équilibre instable. In ROUXEL A., LANGKADE G. *Le sujet lecteur, lecture subjective et enseignement de la littérature*. Presses Universitaires de Rennes.

TAUVERON C., SÈVE, P. (2005). *Vers une écriture littéraire ou comment construire une posture d'auteur à l'école : de la GS au CM2*. Hatier.

VENANT F. (2004). Polysémie et calcul du sens. Le poids des mots. *Actes des 7es Journées internationales d'Analyse statistique des Données Textuelles*.
<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00067871/>

VERGNAUD G. (1991) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de pédagogie*. Volume 96, pp 79-86.
<http://dx.doi.org/10.3406/rfp.1991.1350>

VERGNAUD G. (2001) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, in PORTUGAIS J. (Ed) *Actes du Colloque GDM-2001. La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*.
<https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/download/187/127>

VUILLET Y., MABILLARD JP., TOBOLA COUCHEPIN C., DOLZ J. (2012). Dédoublage du genre et opérations de fictionnalisation : faire « comme si c'était vrai », ou divers visages de l'altération didactique. *Éducation et didactique*, 6-2, pp 89-102. Presses Universitaires de Rennes, ARCD.
<https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1482>

VYGOTSKY LS. (1934), *Pensée et langage*. La Dispute [édition de la traduction 1997]

Annexe

Table des matières

Introduction.....	3
1 Pensée et langage, dimension individuelle et dimension sociale.....	5
2 « Langage » ? De quoi parle-t-on ?.....	7
<i>Le langage comme outil de recherches.....</i>	7
<i>Dire (et penser) le langage.....</i>	9
3 Pratiques langagières des mathématiciens.....	15
<i>Formalisme et formulation.....</i>	15
<i>Les pratiques langagières comme objet de recherche.....</i>	17
<i>Analyses de formulations des propositions, exemples.....</i>	18
« n s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier ».....	18
« À partir d'un certain rang ».....	20
<i>Analyses de formulations des démonstrations, exemples.....</i>	21
Preuve et usage formel de la langue.....	21
Dédution naturelle.....	23
<i>Conclusion.....</i>	26
4 Pratiques langagières des mathématiciens en classe ? Premières entrées.....	29
<i>Usages de la langue et manuels scolaires de mathématiques.....</i>	29
Analyses de formulations de propositions dans les manuels du secondaire, exemples.....	30
Les mots des consignes.....	32
<i>Pratiques des enseignants.....</i>	33
<i>Difficultés des élèves.....</i>	34
<i>Conclusion.....</i>	35
5 Texte, lecteur et auteur en didactique du français.....	37
<i>Lecture et écriture, deux activités indissociables.....</i>	38
<i>Lecture, lecteur.....</i>	39
« Droits » du texte, du lecteur et des lecteurs.....	39
Lecture et lectures antérieures.....	41
Nécessité d'un travail explicite, conscient.....	41
Travail collectif.....	42
Travail réflexif, méta, autorégulation.....	43
<i>Écriture, auteur.....</i>	43
Écrire.....	43
Posture d'auteur, réflexivité.....	44
Rôle du travail collectif, ateliers d'écriture.....	44
Brouillon, réécriture, reformulation.....	45
Écriture et mathématiques ?.....	45
<i>Conclusion.....</i>	45
6 Perspectives.....	47
<i>Pratiques langagières des mathématiciens.....</i>	47
Approches lexicométriques.....	47
Approches « comparatistes ».....	48
Genre de texte, dédoublement, fictionnalisation.....	49
<i>Pratiques langagières en classe.....</i>	49
Démonstrations en classe.....	50
Les mots des consignes.....	51
<i>Travail mathématique avec les élèves en lien avec des questions langagières.....</i>	51
<i>Formations des enseignants.....</i>	52
Bibliographie.....	55
Annexe.....	65
<i>Table des matières.....</i>	65
<i>Dédution naturelle.....</i>	66

Dédution naturelle

L'essentiel des notations et des principes est repris de Gerhard Gentzen (1935). Nous (Hache et Mesnil 2017) ajoutons et présentons quelques notations rendant plus explicites la gestion des variables (pointillés, \odot , \ominus , substitutions) et des preuves intermédiaires (grands crochets).

Une règle de déduction se présente par exemple sous la forme ci-contre qui se lit « si j'ai une $\frac{P}{Q}$ démonstration de P et une démonstration de Q , alors j'ai une démonstration de R ».

Les petites notations grisées à droite des barres horizontales se lisent de la façon suivante : « $/\#$ », pour « Introduction du connecteur (ou du quantificateur) $\#$ », et « $\#/\wedge$ », pour « Élimination du connecteur (ou du quantificateur) $\#$ ». De façon générale ce qui est indiqué en gris est une information permettant de mieux comprendre les différents pas décrits.

Introduction du connecteur \wedge

$$\frac{P, Q}{P \wedge Q} / \wedge$$

Si j'ai une démonstration de P et une démonstration de Q , alors j'ai une démonstration de $P \wedge Q$.

Élimination du connecteur \wedge

$$\frac{P \wedge Q}{P} \wedge / \quad \text{et} \quad \frac{P \wedge Q}{Q} \wedge /$$

Si j'ai une démonstration de $P \wedge Q$, alors j'ai une démonstration de P . De même j'ai une démonstration de Q .

Introduction du connecteur \vee

$$\frac{Q}{P \vee Q} / \vee \quad \text{et} \quad \frac{P}{P \vee Q} / \vee$$

Si j'ai une démonstration de P , alors j'ai une démonstration de $P \vee Q$. De même si j'ai une démonstration de Q .

Élimination du connecteur \vee

$$\frac{P \vee Q \quad \left[\begin{array}{c} P \\ \vdots \\ R \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} Q \\ \vdots \\ R \end{array} \right]}{R} \vee /$$

L'intérieur du crochet gauche signifie que « je sais démontrer R à partir de P » : si j'ai une démonstration de P alors j'ai une démonstration de R . L'intérieur du crochet droit s'interprète de façon semblable.

Cette règle contient un double niveau de condition symbolisé par les crochets : elle signifie que si l'on a une démonstration de $P \vee Q$ et si [si j'ai une démonstration de P alors j'ai une démonstration de R] et [si j'ai une démonstration de Q , alors j'ai une démonstration de R], alors j'ai effectivement une démonstration de R .

NB : je n'ai pas nécessairement effectivement une démonstration de P ou de Q .

Introduction du connecteur \Rightarrow

$$\frac{\left[\begin{array}{c} P \\ \vdots \\ Q \end{array} \right]}{P \Rightarrow Q} / \Rightarrow$$

Les crochets symbolisent le même type de double niveau de condition : si [si j'ai une démonstration de P alors j'ai une démonstration de Q], alors j'ai une démonstration de $P \Rightarrow Q$.

NB : je n'ai pas nécessairement de démonstration de P , ni de Q .

Élimination du connecteur \Rightarrow

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q} \Rightarrow /$$

Introduction du quantificateur \exists

$$\frac{P(t) [t/x]}{\exists x P(x)} / \exists$$

t est un terme ou une variable libre quelconque dans le contexte (la variable x est ici muette).

La notation $[t/x]$ explicite la substitution en jeu. Il n'est en effet pas toujours évident de « voir » le terme t . Un exemple simple :

$$\frac{n = 2 \cdot (2h^2) [2h^2/x]}{\exists x n = 2x} / \exists .$$

Élimination du quantificateur \exists

$$\frac{\exists x P(x) \left[\begin{array}{c} \odot^a P(a) \\ \vdots \\ M \end{array} \right]}{M} \exists /$$

\odot symbolise l'introduction d'une variable « propre », « fraîche », (ici a) en vue d'éliminer un quantificateur existentiel. Dans une preuve rédigée cela correspond à une présentation de variable. Pendant toute la durée du pointillé la variable a est libre.

Les crochets ont la même signification que ci-dessus (à l'intérieur du crochet les déductions peuvent utiliser le fait que la proposition $P(a)$ est vraie).

Introduction du quantificateur \forall

$$\frac{\begin{array}{c} \odot^b \\ \vdots \\ P(b) \end{array}}{\forall x P(x)} / \forall$$

\odot symbolise l'introduction d'une variable « propre » (ici b) en vue de l'introduction d'un quantificateur universel. Dans une preuve rédigée cela correspond à une présentation de variable. Pendant toute la durée du pointillé la variable b est libre.

Élimination du quantificateur \forall

$$\frac{\forall x P(x)}{P(t) \quad [t/x]} \forall /$$

t est une variable libre quelconque dans le contexte, ou un terme.

La notation $[t/x]$ explicite la substitution en jeu.

Exemple

Preuve du fait que pour tout entier n , si n pair, alors n^2 pair :

$$\begin{array}{c} \textcircled{n} \\ \left[\begin{array}{c} \exists k n = 2k \quad \left[\begin{array}{c} \textcircled{p} \\ n = 2p \\ \frac{n^2 = 2(2p^2) \quad [2p^2/q]}{\exists q n^2 = 2q} \quad / \exists \end{array} \right] \end{array} \right] \quad / \exists \\ \hline \exists q n^2 = 2q \end{array} \right] \quad / \Rightarrow \\ \hline (\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q) \\ \hline \forall x [(\exists k x = 2k) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q)] \quad / \forall \end{array}$$

Notations supplémentaires

- Succession classique de pas de déduction : élimination d'une implication quantifiée universellement

Pour résumer :

$$\frac{P(a) \quad \frac{\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))}{P(a) \Rightarrow Q(a)} \quad [a/x] \quad \forall /}{Q(a)} \Rightarrow /$$

On pourra noter :

$$\frac{P(a), \quad \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))}{Q(a)} \forall \Rightarrow /$$

- Succession classique de pas de déduction : introduction d'une implication quantifiée universellement

Pour résumer :

$$\begin{array}{c} \textcircled{a} \\ \left[\begin{array}{c} P(a) \\ \vdots \\ Q(a) \end{array} \right] \\ \hline P(a) \Rightarrow Q(a) \quad / \Rightarrow \\ \hline \forall x P(x) \Rightarrow Q(x) \quad / \forall \end{array}$$

On pourra noter :

$$\begin{array}{c} \textcircled{a} \\ \left[\begin{array}{c} P(a) \\ \vdots \\ Q(a) \end{array} \right] \\ \hline \forall x P(x) \Rightarrow Q(x) \quad / \forall \Rightarrow \end{array}$$

- Notations liées à la négation

La négation de P (notée $\neg P$) est introduite comme étant $P \Rightarrow \perp$. On peut noter :

$$\frac{\left[\begin{array}{c} P \\ \vdots \\ \perp \end{array} \right]}{\neg P} \neg/ \qquad \frac{P, \neg P}{\perp} \neg/$$

- Notations liées aux quantifications avec appartenance

Les notations suivantes sont usuelles : « $\forall x \in E P(x)$ » pour « $\forall x (x \in E \Rightarrow P(x))$ » et « $\exists x \in E P(x)$ » pour « $\exists x (x \in E \wedge P(x))$ ».

$$\frac{\begin{array}{c} \textcircled{c} \\ \left[\begin{array}{c} c \in E \\ \vdots \\ P(c) \end{array} \right] \\ \forall x \in E P(x) \end{array} \forall \in/}{\forall x (x \in E \Rightarrow P(x))} \forall/ \qquad \text{pour résumer ceci} \qquad \frac{\begin{array}{c} \textcircled{c} \\ \left[\begin{array}{c} c \in E \\ \vdots \\ P(c) \end{array} \right] \\ c \in E \Rightarrow P(c) \end{array} \Rightarrow/}{\forall x (x \in E \Rightarrow P(x))} \forall/$$

On peut introduire

pour résumer ceci

\textcircled{c} , le pointillé et les crochets ont les mêmes rôle que précédemment.

$$\text{Et} \frac{\forall x \in E P(x), \quad t \in E}{P(t)} \forall \in/ \qquad \text{pour résumer ceci} \qquad \frac{t \in E \quad \frac{\forall x (x \in E \Rightarrow P(x))}{t \in E \Rightarrow P(t)} \forall/}{P(t)} \Rightarrow/$$

- L'écriture des règles concernant le quantificateur existentiel vont de soi :

$$\frac{P(t) \quad t \in E}{\exists x \in E P(x)} \exists \in/ \qquad \text{et} \qquad \frac{\exists x \in E P(x) \quad \left[\begin{array}{c} \textcircled{d} \quad d \in E \wedge P(d) \\ \vdots \\ M \end{array} \right]}{M} \exists \in/$$

Titre : Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Auteur : Christophe Hache

Résumé : Mon travail se centre sur les questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Il s'agit tout d'abord de préciser les caractères fondamentaux de l'activité langagière et notamment ses dimensions indissociables individuelles et sociales : le langage est un outil de construction, de négociation, de transformation des représentations individuelles et sociales. Il est ainsi au cœur des processus d'enseignement et d'apprentissage.

J'analyse les pratiques langagières des mathématiciens à l'aide d'outils de la logique mathématique. Il s'agit ainsi de caractériser les usages langagiers lors de la formulation de définitions, de propriétés d'objets, ou de démonstrations de ces propriétés. On constate une grande complexité de ces pratiques langagières.

Il s'agit ensuite d'« entrer dans la classe » : quelles sont les traces de ces usages dans les pratiques langagières des enseignants (ou des manuels) en classe ? Comment les élèves s'imprègnent-ils de ces usages alors que, en général, aucun enseignement explicite n'est fait les concernant ? Les outils logiques proposés permettent d'aborder ces questions et d'apporter de premières réponses.

Une autre problématique se pose concernant la possibilité de travailler cette dimension langagière de l'activité mathématique avec les élèves. J'illustre en quoi un éclairage des travaux de didactique du français sur l'écriture de textes et la lecture (compréhension) de textes peut être enrichissante et permet d'envisager des modalités de travail réflexives, collectives et explicites en classe.

Enfin, je propose des perspectives de recherche qui permettraient d'approfondir les connaissances des pratiques langagières des mathématiciens (élargissement des outils utilisés à ceux propres à la linguistique, élargissement des corpus de textes, y compris, de manière comparatiste, à des textes de mathématiques écrits par des physiciens, ou des non-francophones), d'expérimenter de nouvelles modalités de travail mathématique à partir d'une entrée langagière avec les enseignants (formations) et les élèves (en classe).

Mots clefs : Mathématiques, Didactique des mathématiques, Langage.



Except where otherwise noted, this is work licensed under <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/fr/>