



HAL
open science

La recherche en mathématiques : une ressource pour les didacticiens ?

Nicolas Grenier-Boley

► **To cite this version:**

Nicolas Grenier-Boley. La recherche en mathématiques : une ressource pour les didacticiens ?. Anneaux et algèbres [math.RA]. Université Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité, 2019. tel-02418563

HAL Id: tel-02418563

<https://hal.science/tel-02418563>

Submitted on 4 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOTE DE SYNTHÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

pour obtenir l'

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII-DENIS DIDEROT
UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS CITÉ

LA RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES : UNE RESSOURCE
POUR LES DIDACTIENS ?

par

Nicolas Grenier-Boley

soutenue le 12 décembre 2019 devant le jury suivant :

Président du jury	V. DURAND-GUERRIER	Professeur, Université Montpellier 2
Rapporteur interne	B. KELLER	Professeur, Université Paris Diderot
Rapporteurs externes	G. GUEUDET	Professeur, Université de Bretagne Occidentale
	D. LEEP	Professor, Université du Kentucky (USA)
Examineurs	N. POUYANNE	Maître de Conférences-HDR, Université Versailles-Saint-Quentin
	A. QUÉGUINER-MATHIEU	Maître de Conférences-HDR, Université Paris 13, Paris Nord
	A. ROBERT	Professeur Honoraire
	F. VANDEBROUCK	Professeur, Université Paris Diderot.

La recherche en mathématiques : une ressource pour
les didacticiens ?

NICOLAS GRENIER-BOLEY

18 décembre 2019

TABLE DES MATIÈRES

Introduction		6
1 Formes quadratiques, formes hermitiennes, algèbres à involutions : passages, analogies, spécificités		8
1.1 Un peu d'Histoire et quelques liens		11
1.1.1 Historique		11
1.1.1.1 Formes quadratiques		11
1.1.1.2 Algèbres simples centrales et involutions		12
1.1.1.3 Formes hermitiennes		12
1.1.2 Quelques liens et changements de point de vue		13
1.1.2.1 Aspects généraux		13
1.1.2.2 Formes quadratiques, bilinéaires, hermitiennes		13
1.1.2.3 Algèbres centrales simples et involutions		14
1.1.2.4 Formes hermitiennes et algèbres à involution		16
1.1.3 Rappels et notations		17
1.2 Formes quadratiques et hermitiennes : passages et généralisations		17
1.2.1 Formes de Pfister hermitiennes		17
1.2.1.1 Éléments de contexte		17
1.2.1.2 Isotropie et hyperbolicité		18
1.2.1.3 Une version faible du Hauptsatz d'Arason-Pfister		19
1.2.2 Invariants de corps		20
1.2.2.1 L'invariant u_α		21
1.2.2.2 Le q -niveau		21
1.3 Quelques résultats algébriques sur le groupe de Witt		25
1.3.1 Suites exactes de groupes de Witt		27
1.3.1.1 Conditions d'existence et définitions des applications		28
1.3.1.2 Résultats d'exactitude		28
1.3.1.3 Éléments de preuve		29
1.3.2 Ordres des anneaux ou groupes de Witt		30
1.3.3 Critères d'isomorphisme		30
1.3.3.1 Corps quelconques		31
1.3.3.2 Corps globaux		32
1.3.3.3 Corps réels		33
1.3.3.4 Corps SAP		34
1.4 Sous-algèbres étales symétriques		35
1.4.1 Hypothèses et notations		36
1.4.2 Outils		37
1.4.3 Étude générale des sous-algèbres nettes		38
1.4.3.1 Définition et caractérisations		39

1.4.3.2	Différentes propriétés des sous-algèbres nettes	39
1.4.3.3	Analogies	40
1.4.4	Étude des algèbres de capacité 4	40
1.5	Explicitation de résultats	41
1.5.1	Suites exactes de groupes de Witt	42
1.5.2	Groupes de Whitehead réduits	42
1.5.3	Un théorème de Albert et Draxl	43
1.6	Perspectives	44
1.7	Quelques éléments d'épistémologie personnelle	46
1.7.1	Quelques ressources pour notre travail mathématique	47
1.7.2	Réflexivité méthodologique : quelques invariants	48
1.7.2.1	Principes	48
1.7.2.2	Résultats	50
1.7.2.3	Changements de point de vue ou de cadre	50
2	Les textes de savoir en mathématiques : trois études didactiques de cas	58
2.1	Quelques éléments théoriques	59
2.1.1	Éléments de contexte	59
2.1.2	Cadre théorique	60
2.1.3	Relief d'une notion à enseigner	61
2.1.4	Différents types de notions mathématiques à enseigner	62
2.1.4.1	Les concepts FUG	63
2.1.4.2	Hypothèses	64
2.2	Introduction des premiers concepts d'algèbre linéaire	65
2.2.1	Quelques éléments de relief en algèbre linéaire	65
2.2.1.1	Un exemple	66
2.2.1.2	Études épistémologique et curriculaire	66
2.2.1.3	Étude didactique	66
2.2.1.4	Questionnements	67
2.2.2	Éléments de méthodologie	67
2.2.2.1	Analyses <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i>	68
2.2.2.2	Méthodologie	68
2.2.3	Quelques résultats de l'étude	70
2.2.3.1	Présentation des données	70
2.2.3.2	Résultats	70
2.2.4	Discussion	74
2.2.4.1	Enseigner l'algèbre linéaire	74
2.2.4.2	Perspectives	75
2.3	Moments de cours : exemple des limites de suites et fonctions en L1	75
2.3.1	Appuis théoriques	76
2.3.1.1	Rappels théoriques	76
2.3.1.2	Hypothèses	76
2.3.1.3	Outils méthodologiques	77
2.3.2	Description d'une étude	78
2.3.2.1	Relief sur les limites	79
2.3.2.2	Problématique et méthodologie	80
2.3.2.3	Études d'un manuel et d'une capsule	81
2.3.2.4	Étude d'un CM	82
2.3.2.5	Conclusion de l'étude	83
2.3.3	Discussion	84
2.3.3.1	Enseigner les limites	84
2.3.3.2	Perspectives	85

2.4	L'enseignement et l'apprentissage des fonctions en 3 ^e -2 ^{de} : une étude de manuels	86
2.4.1	Cadre de l'étude et problématique	86
2.4.1.1	Introduction	86
2.4.1.2	Cadre théorique	86
2.4.1.3	Problématique	87
2.4.2	Étude du relief	88
2.4.2.1	Étude épistémologique	88
2.4.2.2	Études curriculaires et didactiques	89
2.4.3	Outil d'analyse	90
2.4.4	Exemples d'analyse de manuels	91
2.4.4.1	Connaissances anciennes	91
2.4.4.2	Statut outil/objet	91
2.4.4.3	Aspects formels	92
2.4.4.4	Relation	92
2.4.4.5	Registres	93
2.4.4.6	Perspectives fonctionnelles	94
2.4.5	Conclusion et perspectives	94
3	Conclusion et perspectives scientifiques	105
3.1	Conclusion et éléments de discussion	105
3.1.1	Pratique experte des mathématiciens et enseignement	106
3.1.1.1	Qu'est-ce que la pratique experte des mathématiciens ?	106
3.1.1.2	Mathématiciens et enseignement des mathématiques	107
3.1.1.3	En didactique des mathématiques	108
3.1.2	Quelle transposition des pratiques des mathématiciens ?	110
3.1.2.1	Faire de la recherche	110
3.1.2.2	Chercher en classe	111
3.1.3	Vers une double posture de chercheur	114
3.1.3.1	Transpositions didactiques	115
3.1.3.2	Opérationnalisation de la Théorie de l'Activité	116
3.1.3.3	Conclusion	118
3.2	Perspectives scientifiques	119
3.2.1	Perspectives	120
3.2.1.1	Algèbre Linéaire	120
3.2.1.2	Pratiques des enseignants du supérieur	121
3.2.1.3	Étude de l'enseignement de notions particulières	124
3.2.1.4	Les « laboratoires de mathématiques »	128
3.2.2	Questions ouvertes	128
3.2.2.1	Épistémologie de la recherche	128
3.2.2.2	La recherche en (didactique des) mathématiques	130
3.3	Proposition d'un programme de recherche	131
3.3.1	Étude systématique de l'enseignement de notions FUG en Théorie de l'Activité	131
3.3.1.1	Relief des notions	132
3.3.1.2	Cours magistraux	132
3.3.1.3	Travaux dirigés	132
3.3.2	Programme de recherche : enseignement et apprentissage des débuts de l'algèbre linéaire à l'université	133
3.3.2.1	Relief des notions	134
3.3.2.2	Cours magistraux	135
3.3.2.3	Travaux dirigés	135
3.3.2.4	Études complémentaires	136
3.3.2.5	Quelques éléments de prévision des recherches	136

A	Énoncés des exercices d’algèbre linéaire	144
A.1	Feuille 2 : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	144
A.2	Feuille 3 : Familles de vecteurs	146
B	Déroulement du cours magistral sur la limite de fonction	147
C	L’enseignement et l’apprentissage des fonctions en 3^e-2^{de} : une étude de manuels	149
C.1	Introduction	149
C.2	Cadre théorique et problématique	150
C.2.1	Hypothèses sur les apprentissages mathématiques des élèves .	150
C.2.2	Opérationnalisation du cadre théorique	151
C.2.3	Objectifs et présentation de la recherche	151
C.3	Étude épistémologique de la notion de fonction	153
C.3.1	Quelques éléments d’histoire et d’épistémologie	153
C.3.1.1	Période 1 : tables de valeurs	153
C.3.1.2	Période 2 : premières représentations géométriques .	153
C.3.1.3	Période 3 : expressions analytiques	153
C.3.1.4	Période 4 : vers l’idée de correspondance	154
C.3.1.5	Période 5 : développements logiques et ensemblistes	154
C.3.2	Thématiques	154
C.3.2.1	Statut outil/objet	155
C.3.2.2	Aspects formels	155
C.3.2.3	Registres	155
C.3.2.4	Relations	155
C.4	Études curriculaires et didactiques de la notion de fonction	155
C.4.1	Connaissances anciennes	156
C.4.1.1	Aspects curriculaires	156
C.4.1.2	Enjeux d’apprentissage	156
C.4.2	Statut outil/objet	157
C.4.2.1	Aspects curriculaires	157
C.4.2.2	Enjeux d’apprentissage	157
C.4.3	Aspects formels	157
C.4.3.1	Caractères formalisateur, unificateur, généralisateur	157
C.4.3.2	Variable, variable dépendante ou indépendante . . .	158
C.4.3.3	Variables et paramètres, classes paramétrées	159
C.4.4	Relation	159
C.4.5	Registres	160
C.4.5.1	Aspects curriculaires	160
C.4.5.2	Enjeux d’apprentissage	161
C.4.6	Perspectives fonctionnelles	162
C.4.6.1	Définitions	162
C.4.6.2	Enjeux d’apprentissage	162
C.4.7	Besoins présumés des élèves	163
C.4.7.1	Connaissances anciennes	163
C.4.7.2	Statut outil/objet	163
C.4.7.3	Aspects formels	163
C.4.7.4	Relation	164
C.4.7.5	Registres	164
C.4.7.6	Perspectives fonctionnelles	164
C.5	Construction de l’outil d’analyse	164
C.5.1	Grille d’analyse	164
C.5.2	Points de vigilance	165
C.5.2.1	Occasions de proximité	165

	C.5.2.2	Image et antécédent	166
	C.5.2.3	Variations	167
C.6		Exemples d'analyse de manuels	167
	C.6.1	Présentation des manuels	167
	C.6.2	Quelques résultats	168
		C.6.2.1	Connaissances anciennes 168
		C.6.2.2	Statut outil/objet 169
		C.6.2.3	Aspects formels 169
		C.6.2.4	Relation 172
		C.6.2.5	Registres 174
		C.6.2.6	Perspectives fonctionnelles 177
C.7		Conclusion	178

INTRODUCTION

« Je vous crois quand vous m'assurez que quelque chose ne tourne pas rond dans la maison du docteur Jekyll. Mais de quoi s'agit-il exactement ? Essayez de me l'expliquer. »

- Robert Louis Stevenson, *L'Étrange Cas du Docteur Jekyll et de M. Hyde*

Nous présentons ici la synthèse de recherches menées en mathématiques et en didactique des mathématiques, élaborée dans une perspective de dialogue entre ces deux domaines de recherches. Pour mener à bien ce projet, nous avons choisi de scinder cette étude en trois chapitres que nous présentons brièvement, dans la mesure où chacun de ces chapitres possède sa propre introduction et où les liens qui les unissent sont explicités dans le développement.

Le premier chapitre a pour objet de faire la synthèse de recherches en algèbre commutative et non commutative. Les thèmes principaux de ces recherches sont les formes quadratiques sur un corps commutatif, les algèbres centrales simples munies d'involutions et les formes hermitiennes sur de telles algèbres. Pour organiser ce chapitre, nous avons revisité nos recherches pour en extraire des traits saillants basés sur les liens profonds qui unissent ces thèmes et sur des aspects essentiels de notre pratique mathématique. Nous y évoquons d'abord quelques liens historiques qui organisent ces thèmes avant de rendre compte de recherches qui questionnent la possibilité de transposer des résultats concernant les formes quadratiques aux formes hermitiennes. Ensuite, nous abordons différents moyens algébriques permettant de mieux connaître le groupe de Witt d'une algèbre à involution qui rend compte globalement des formes hermitiennes sur cette algèbre. Puis, nous consacrons une étude aux sous-algèbres étales symétriques d'une algèbre à involution en insistant sur la manière dont certains outils permettent d'avoir une approche unifiée du sujet. Enfin, nous présentons des exemples d'explicitation de résultats mathématiques et des perspectives principales pour nos travaux mathématiques. En guise de lien avec la suite de la note, nous discutons d'éléments liés à notre épistémologie de chercheur en mathématiques et aux heuristiques associées.

Le second chapitre entreprend de présenter trois recherches didactiques consacrées aux textes de savoir en mathématiques pour ce qu'elles ont de commun et de spécifique. Ces trois recherches s'inscrivent en Théorie de l'Activité appliquée à la didactique des mathématiques et à la situation scolaire, en s'appuyant sur ses hypothèses, sur l'opérationnalisation de ce cadre compte tenu de ces hypothèses et sur certains de ses outils. Un outil central dans cette note est le relief d'une notion à enseigner à un niveau donné qui résulte de l'articulation de trois études (épistémologique, curriculaire, didactique) et qui nous sert de référence pour l'apprentissage de cette notion. Dans chacune des trois recherches, nous nous sommes centrés sur une notion au début de son enseignement laquelle présente des difficultés liées au moins en partie au texte du savoir. En premier lieu, nous nous consacrons à

l'apprentissage de l'algèbre linéaire en début d'université en nous focalisant sur les pratiques de l'enseignant de travaux dirigés pour ce qu'elle peuvent révéler des activités possibles des étudiants. Ensuite, nous étudions différents types de moments de cours (manuel, capsule vidéo, cours magistral) consacrés aux limites formalisées de suites ou de fonctions en début d'université. Nous cherchons à voir dans quelle mesure le chercheur peut repérer et qualifier des liens explicites entre le texte du cours (manuel) ou le discours de l'enseignant (capsule, cours magistral) et les activités des élèves. Enfin, nous dégageons des enjeux d'apprentissage et des besoins présumés des élèves pour l'apprentissage de la notion de fonction en 3^e-2^{de}, basés sur une étude du relief de la notion, auxquels nous confrontons l'offre faite aux enseignants dans un certain nombre de manuels.

Le troisième chapitre conclut cette synthèse en proposant une discussion et des perspectives scientifiques. À l'issue de la présentation de nos travaux en mathématiques et en didactique des mathématiques, nous souhaitons d'abord initier une réflexion sur l'influence de la recherche en mathématiques sur différents aspects liés à l'enseignement des mathématiques et à la recherche en didactique des mathématiques. Nous envisageons ensuite des directions de recherche en didactique des mathématiques en termes de perspectives d'encadrement ou pour nous-même. Nous concluons en détaillant un programme de recherche plus précis.

CHAPITRE 1

FORMES QUADRATIQUES, FORMES HERMITIENNES, ALGÈBRES À INVOLUTIONS : PASSAGES, ANALOGIES, SPÉCIFICITÉS

« On laisse mûrir la noix sous le soleil et sous la pluie et peut-être aussi sous les gelées de l'hiver. Quand le temps est mûr c'est une pousse délicate sortie de la substantifique chair qui aura percé la coque, comme en se jouant - ou pour mieux dire, la coque se sera ouverte d'elle-même, pour lui laisser passage. »

- Alexander Grothendieck, *Récoltes et semailles*

Ce chapitre entreprend de faire la synthèse de travaux de recherche en algèbre commutative et non commutative qui relèvent principalement de trois domaines¹ : les formes quadratiques sur un corps commutatif, les algèbres centrales simples à involution, les formes hermitiennes sur une algèbre centrale simple à involution. Au-delà des liens évidents qui existent dans leurs fondements, le passage d'un de ces domaines à un autre ou les liens entre ces domaines ont souvent été à la base de progrès importants au sein de chacun d'entre eux. Ce passage ou ces liens peuvent revêtir différents aspects :

- utilisation des outils, des points de vue, des notions ou résultats d'un domaine dans un autre ;
- traduction ou transfert d'outils, de points de vue, de notions ou résultats d'un domaine dans un autre ;
- recherche d'analogies entre une situation d'un domaine et une situation d'un autre domaine, celles-ci pouvant être plus ou moins éloignées.

Les changements de points de vue sur certains objets de ces domaines nous paraissent être un moteur important de découverte, de même que les généralisations au sein d'un même domaine ou dans un sur-domaine. Pour chacun de ces passages, il est possible qu'il y ait un gain ou une perte d'information, voire une nouvelle complexité que le mathématicien s'attache alors à mesurer ou à qualifier. Donnons deux exemples.

Exemple 1.1. Le théorème de Milnor-Voevodsky donne des invariants cohomologiques e_n permettant de classer les formes quadratiques sur un corps à isométrie près (voir 1.2.1.3). Il paraît donc naturel de tenter de traduire ce résultat remarquable à d'autres objets algébriques, par exemple ceux des domaines voisins. Les définitions des invariants e_0 , e_1 et e_2 peuvent être étendues fonctoriellement du domaine des formes quadratiques à celui des algèbres centrales simples à involution

1. Dans la suite de ce chapitre, le terme "domaine" désignera toujours (au moins) un de ces trois domaines.

lorsque l'involution est orthogonale. En revanche, Quéguiner-Mathieu a démontré que c'était impossible pour e_3 (Quéguiner-Mathieu, 2006, §4). Il y a dès lors une perte d'information ou une complexité supplémentaire lorsque l'on passe du domaine des formes quadratiques à celui des algèbres centrales simples à involution. La mesure de cette perte d'information ou de cette complexité, voire la manière de la contourner fait encore l'objet de recherches (Quéguiner-Mathieu & Tignol, 2012, 2015; Tignol, 2010).

Exemple 1.2. Le Théorème du Double Centralisateur est un outil fondamental dans la théorie des algèbres centrales simples qui repose sur une certaine égalité de dimensions (voir 1.42). Dans l'une de nos recherches, nous avons eu besoin de généraliser ce résultat dans le sur-domaine des algèbres commutatives semi-simples : dans ce cadre plus général, une inégalité de dimensions est conservée, mais un critère permet de mesurer le défaut d'égalité en termes de diverses propriétés algébriques (voir 1.43). Dans ce cas, la généralisation de ce résultat s'accompagne donc d'une complexité supplémentaire mais que l'on parvient à maîtriser.

Si tous les aspects cités ci-dessus nous semblent être des dimensions significatives de notre propre pratique mathématique, elle ne se réduit toutefois pas à cela, dépendant d'aspects plus fins liés par exemple aux mathématiques précisément en jeu, à des façons de faire ou à des aspects personnels. Nous avons donc choisi d'organiser cette synthèse à la fois selon les grands types de questionnements qui ont guidé nos travaux mathématiques et selon les aspects essentiels de notre pratique mathématique, en insistant sur ce qui nous semble favoriser notre intuition et sur l'heuristique qui nous semble s'en dégager.

Un premier élément pour nourrir notre questionnement et nos travaux est la compréhension de l'histoire ou de l'épistémologie des notions ou résultats des sujets qui nous intéressent, aussi bien que l'explicitation de raisons d'être initiales à des notions centrales de ces domaines. La prise en compte de liens anciens ou la mise en valeur de nouveaux liens entre les différents domaines dont relèvent nos travaux de recherche nous semble de nature à favoriser notre intuition pour la découverte de nouveaux résultats. À cet égard, la section 1.1 rappelle différents éléments d'histoire de ces domaines, certains liens généraux qui les unissent ainsi que différents points de vue fondamentaux au sein de chacun d'entre eux. Nous nous basons sur ces éléments à la fois pour structurer ce chapitre, motiver les études que nous avons menées et partager quelques premiers éléments heuristiques de nos recherches (sur lesquels nous reviendrons en section 1.7).

Nous avons regroupé dans la section 1.2 des recherches portant sur les formes quadratiques ou hermitiennes et organisées autour du questionnement général suivant : dans quelle mesure les propriétés des formes quadratiques, les notions ou arguments classiques de la théorie algébrique des formes quadratiques peuvent-ils être généralisés, traduits ou transposés dans le domaine des formes hermitiennes ? Nous nous intéressons d'abord à la possibilité de généraliser les formes de Pfister quadratiques aux formes hermitiennes avant d'évoquer diverses recherches que nous avons menées sur les invariants de corps.

L'anneau de Witt $W(F)$ d'un corps F rend compte globalement des formes quadratiques sur ce corps. De même, étant donnée une algèbre à involution (A, σ) , le groupe de Witt $W(A, \sigma)$ rend compte globalement des formes hermitiennes sur (A, σ) . On peut donc estimer que la compréhension de ces objets permet une bonne connaissance des formes quadratiques ou hermitiennes impliquées. Si on sait explicitement calculer ces objets dans certains cas précis, il est en général difficile de les déterminer. Dans la section 1.3, nous nous intéressons à différents moyens de mieux connaître algébriquement $W(F)$ ou $W(A, \sigma)$ que ce soit au moyen de suites exactes, du calcul de l'ordre de ces objets ou de la classification de ces objets à isomorphisme

près. Dans ce dernier cas, nous insistons sur des classifications prenant en compte les attributs des différents types de corps considérés (arithmétiques, algébriques ou topologiques).

La section 1.4 est dédiée à l'étude des sous-algèbres étales symétriques des algèbres à involution en analogie avec les études classiques menées sur certains autres types de sous-algèbres. Cette étude est guidée par plusieurs principes : proposer une approche unifiée qui évite autant que possible les distinctions de cas liées à certains paramètres (caractéristique, caractère à division (ou pas), type de l'involution), éviter les aspects pathologiques liés aux algèbres étales quelconques, étendre les outils classiques de la théorie. Pour ce faire, nous définissons les notions de sous-algèbre nette et de capacité qui nous permettent de mener une étude systématique des sous-algèbres étales symétriques guidée par ces principes, puis d'appliquer nos résultats à l'étude des algèbres centrales simples d'exposant 2.

Dans la section 1.5, nous abordons une autre dimension de notre posture de chercheur : l'explicitation de résultats mathématiques. Pour cette note, nous retons trois manières différentes de comprendre cette posture spécifique : fournir une preuve alternative et explicite à un résultat sous des hypothèses plus restrictives, expliciter la preuve d'un résultat « connu » mais non disponible dans la littérature, montrer qu'un résultat connu peut se formuler et s'étendre dans un nouveau cadre afin d'en avoir une nouvelle interprétation. Nous illustrons chacune de ces dimensions sur un exemple tiré de nos travaux.

La section 1.6 fait le point sur les perspectives principales qui s'ouvrent à nous dans le cadre de nos travaux mathématiques. Celles-ci sont organisées dans deux directions principales : l'extension de certains de nos résultats en toute caractéristique et la recherche de critères de décomposabilité d'algèbres à involution.

Pour conclure ce chapitre et faire le lien avec les chapitres suivants, nous revenons en section 1.7 sur nos recherches en tentant d'isoler certains éléments de notre épistémologie personnelle de chercheur en mathématiques et quelques éléments heuristiques qui nous semblent émaner des recherches que nous avons menées.

Bien que certains des résultats cités dans ce chapitre soient vrais ou s'adaptent lorsque le corps de base est de caractéristique quelconque, nous supposons pour simplifier que le corps de base est de caractéristique différente de 2. Si F est un corps, toutes les F -algèbres considérées seront supposées de dimension finie sur leur centre et tous les modules sur ces algèbres seront des modules à droite finiment engendrés. Une algèbre centrale simple sur F est une F -algèbre simple (en tant qu'anneau) et de centre F : par le théorème de Wedderburn, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim_F(A) = n^2$ et l'entier n est appelé le degré de A . Une involution σ sur une algèbre centrale simple A sur F est un anti-automorphisme d'anneaux tel que $\sigma \circ \sigma = \text{id}_A$: dans ce cas, (A, σ) est appelée algèbre à involution et soit σ fixe F , auquel cas l'involution est dite de première espèce, soit la restriction de σ à F est un automorphisme d'ordre 2 auquel cas elle est dite de seconde espèce. Le sous-corps de F fixé par σ est noté k : ainsi $k = F$ si σ est de première espèce et F/k est une extension quadratique si σ est de seconde espèce. Une algèbre de quaternions sur un corps F est une algèbre centrale simple sur F de degré 2. En caractéristique différente de 2, une algèbre de quaternions sur un corps F possède une F -base $\{1, i, j, k\}$ où $i^2 = a \in F^\times$, $j^2 = b \in F^\times$ et $ij = k = -ji$: on la note alors $(a, b)_F$. Certaines de ces conventions seront modifiées dans la section 1.4 et en 1.5.3 où la caractéristique du corps sera quelconque et où nous aurons besoin de considérer des algèbres à involution plus générales.

Pour les notions ou résultats qui ne sont pas rappelés ou référencés dans le corps de ce texte, nous renvoyons aux ouvrages généraux sur les différents domaines : Elman, Karpenko & Merkurjev (2008), Knus (1991), Knus, Merkurjev, Rost & Tignol (1998), Lam (2005), Scharlau (1985).

1.1 Un peu d'Histoire et quelques liens

1.1.1 Historique

Pour mieux situer nos trois domaines de recherche, y compris les uns par rapport aux autres, nous en dressons un rapide historique général. Nous ne visons ici ni l'exhaustivité, ni l'originalité et nous nous sommes basés sur les articles ou ouvrages des mathématiciens suivants pour le concevoir : Bayer-Fluckiger (2008), la notice historique présente chez Bourbaki (2012), Knus (1991), Knus et al. (1998), Lam (2005) et Scharlau (1985). Plus particulièrement, nous souhaitons situer l'émergence de ces domaines au sein du développement général de l'algèbre depuis le dix-neuvième siècle en mettant si possible en valeur l'origine ou les raisons d'être de chacun d'entre eux. Des développements plus spécifiques seront présentés dans chacune des sections de ce chapitre, en lien avec nos propres travaux.

1.1.1.1 Formes quadratiques

La théorie des formes quadratiques existe depuis l'Antiquité où elle servait d'armature à la géométrie euclidienne et était déjà sujet d'étude implicite : ainsi, on trouve déjà des sommes de carrés d'entiers ou de rationnels dans les travaux de Diophante. Si elle trouve son aspect actuel avec les travaux de Fermat, Descartes, Euler, elle constitue une branche de la théorie des nombres jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle. La *théorie arithmétique des formes quadratiques* est née au début du vingtième siècle des travaux de Minkowski, Eichler, Hasse, Siegel : l'un de ses points culminants est sans doute la preuve par Hasse du théorème de Hasse-Minkowski en 1923 qui permet la classification des formes quadratiques sur \mathbb{Q} , ou plus généralement sur un corps global. Parallèlement, les progrès réalisés par Dedekind, Frobenius d'une part, Artin et Noether d'autre part permettent la création de l'*algèbre moderne*, qui conduit en particulier à abandonner toute restriction sur l'anneau ou le corps des scalaires et à se focaliser sur les résultats de classification et de structure.

La *théorie algébrique des formes quadratiques* naît d'un article fondateur de Witt (1937) sous la double influence de l'algèbre moderne et de la théorie arithmétique des formes quadratiques. Dans ce travail, Witt a plusieurs idées nouvelles qui vont s'avérer extrêmement fécondes dans les décennies suivantes, jusqu'à nos jours. Alors que les formes quadratiques étaient généralement étudiées individuellement sur un corps particulier — avant lui, les formes quadratiques avaient été considérées sur \mathbb{R} (Sylvester), sur \mathbb{Q} et les corps de nombres (Hasse, Minkowski) —, il a l'idée de les étudier collectivement sur un corps arbitraire. Pour cela, il construit deux objets algébriques : l'anneau de Grothendieck-Witt d'un corps à partir de l'ensemble des classes d'isométrie de formes quadratiques non dégénérées sur ce corps puis l'anneau de Witt qui en est le quotient pour lequel les formes quadratiques triviales sont les formes hyperboliques. Par ce travail, on considère que Witt a apporté trois contributions essentielles à la théorie (Scharlau, 1985, p. 28) : proposer un langage géométrique qui a depuis été universellement adopté, permettre par le biais de ce nouveau langage et de ces nouveaux objets de poser de nouvelles questions et proposer une approche qui unifie et étend les approches précédentes. L'anneau de Witt deviendra l'objet central de la théorie mais sa puissance n'est pas perçue avant les travaux de Pfister (1965a, 1965b, 1966) dont nous reparlerons plus loin.

Au début des années soixante-dix jusqu'à nos jours, le nombre de recherches en théorie algébrique des formes quadratiques a explosé. Elle est désormais liée à de nombreux domaines d'algèbre qui ont permis d'élargir sa portée initiale et de se nourrir d'influences diverses : algèbres centrales simples à involution, groupes algébriques, K-théorie algébrique, théorie de Galois, cohomologie galoisienne et

géométrie algébrique (notamment les groupes de Chow). L'anneau de Chow d'une quadrique, les motifs de Chow et leurs propriétés combinatoires jouent de nos jours un rôle crucial dans la théorie des formes quadratiques².

1.1.1.2 Algèbres simples centrales et involutions

Les premières algèbres (à division) non commutatives sont découvertes en 1843-1844 par Hamilton (les quaternions) et Grassmann de manière indépendante. En 1850-1870, l'étude systématique des algèbres de matrices est réalisée par Cayley et Peirce puis Frobenius, qui démontre que les quaternions de Hamilton sont le seul corps non commutatif de dimension finie sur \mathbb{R} en 1878.

Les algèbres simples sont ensuite définies sur \mathbb{C} par Molien avant que Cartan ne définisse et étudie systématiquement les algèbres semi-simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} . Au début du vingtième siècle, l'abandon de toute restriction sur les anneaux et corps devient la norme et la théorie des algèbres à division est développée par Dickson, Moore et Wedderburn. La conséquence la plus marquante de ces travaux est sans doute la preuve, apportée par Wedderburn, du fait que toute algèbre à division finie est nécessairement commutative. En 1907, Wedderburn reprend l'étude de Cartan et prouve des résultats de structure importants pour les algèbres simples sur un corps de base arbitraire.

En 1927, Brauer et Noether, avec Albert et Hasse en 1930, continuent l'étude systématique des algèbres à division et des algèbres simples sur la base des travaux de Wedderburn. La théorie des anneaux simples (et semi-simples) atteint son aspect définitif en 1934 (Bourbaki, 2012, p. 466). Le théorème de Skolem-Noether (dû indépendamment à Skolem et à Noether) qui caractérise les automorphismes des anneaux simples est un des résultats centraux de cette théorie.

En cherchant à caractériser certaines algèbres à division impliquant des matrices de Riemann (voir Knus et al., 1998, p. 67), Albert développe en 1934-1935 la théorie des algèbres centrales simples à involution à partir de celle des algèbres simples. Ce domaine connaîtra de nouveaux développements à partir de 1960, lorsque Weil mettra en valeur un lien étroit entre les groupes algébriques et les algèbres centrales simples à involution.

Cette théorie et ses sujets connexes sont toujours l'objet d'intenses recherches de nos jours, comme en témoigne la variété des sujets auxquels elle est reliée : voir Knus et al., 1998 ou Auel, Brussel, Garibaldi & Vishne, 2011 où on peut trouver un grand nombre de références, ainsi que des problèmes actuellement ouverts.

1.1.1.3 Formes hermitiennes

On doit la découverte des matrices et formes hermitiennes (sur \mathbb{C} muni de la conjugaison) à Hermite en 1853-1854 dans le cadre de travaux en théorie des nombres. La poursuite du développement de l'algèbre moderne à partir de 1960 conduit à considérer l'étude des formes quadratiques, sesquilineaires ou hermitiennes sur un anneau à involution quelconque.

De nos jours, l'attrait de la théorie des formes hermitiennes provient du fait qu'elle se situe au carrefour de plusieurs domaines des mathématiques : la K -théorie algébrique, la topologie algébrique, la théorie des représentations, la théorie des anneaux ordonnés, la théorie algébrique des nombres et la théorie des algèbres simples.

2. Par exemple, ils interviennent de façon cruciale dans l'étude de la suite de déploiement d'une forme quadratique (« splitting pattern » en anglais), voir Elman et al., 2008, §25.

1.1.2 Quelques liens et changements de point de vue

Dans la suite de ce chapitre, nous verrons qu'une partie importante de nos questionnements et résultats se nourrit de passages, de liens ou d'analogies entre nos différents domaines de recherche, de changements de points de vue sur certains de leurs objets, qu'ils soient explicites ou non. Nous donnons quelques exemples qui montrent que ces différents aspects existent déjà pour les notions fondamentales de ces domaines. Cela nous permet d'introduire des éléments heuristiques qui nous guideront lorsque nous évoquerons nos propres recherches.

1.1.2.1 Aspects généraux

Le bref historique que nous avons dressé ci-dessus met déjà en valeur des éléments communs qui ont favorisé ou caractérisé l'émergence des domaines considérés.

On a vu que ces trois domaines ont trouvé leur forme actuelle suite au développement de l'algèbre moderne, soit dans les années qui ont suivi (théorie algébrique des formes quadratiques, algèbres centrales simples), soit dans des développements ultérieurs (formes hermitiennes). Ces domaines portent ainsi la marque du changement de méthodologie qui a caractérisé ce mouvement : s'affranchir de toute restriction sur les corps ou anneaux des scalaires et mettre l'accent sur les résultats de structure et sur la classification des objets du domaine. Contrairement aux deux autres domaines, les algèbres centrales simples à involution ont initialement été introduites par Albert comme outil pour résoudre un problème portant sur des matrices de Riemann (voir ci-dessus pour des références à ce sujet) avant qu'il ne les englobe dans une théorie générale.

On a aussi mis en valeur le fait que chacun de ces domaines s'est construit en englobant une ou plusieurs théories précédentes, tout en les généralisant au moyen d'un nouveau langage formel. La théorie algébrique des formes quadratiques créée par Witt englobe la théorie arithmétique, mais s'en émancipe par le fait que les corps de base sont arbitraires et par la création d'objets qui permettent d'adopter un nouveau langage et un nouveau formalisme adapté à ce cadre plus général. La théorie des algèbres centrales simples procède d'un mouvement similaire à partir de celles des algèbres de matrices et des algèbres à division. L'invention des involutions a permis à la fois d'adopter de nouveaux points de vue sur ces objets et de fonder la théorie moderne des formes hermitiennes.

1.1.2.2 Formes quadratiques, bilinéaires, hermitiennes

Nous donnons trois exemples de liens à la fois évidents et importants entre formes quadratiques, formes bilinéaires symétriques et formes hermitiennes.

Exemple 1.3. Puisque nous avons supposé que la caractéristique est différente de 2, il y a une correspondance bijective entre les formes quadratiques sur F et les formes bilinéaires symétriques sur F : à une forme quadratique on associe sa forme polaire et inversement, à une forme bilinéaire symétrique b , on associe la forme quadratique q définie sur l'espace vectoriel sous-jacent par $q(x) = b(x, x)$.

Exemple 1.4. Soient (A, σ) une algèbre centrale simple munie d'une involution sur F , M un A -module et $\varepsilon \in F$ avec $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$. Une forme ε -hermitienne (M, h) sur (A, σ) est une application bi-additive de $M \times M$ dans A telle que pour tous $x, y \in M$, $\alpha, \beta \in A$, on ait $h(x\alpha, y\beta) = \sigma(\alpha)h(x, y)\beta$ et $h(y, x) = \varepsilon\sigma(h(x, y))$. Si $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$), on dit plus volontiers que la forme est hermitienne (resp. antihermitienne). Si $A = F$, $\sigma = \text{id}_F$ et $\varepsilon = 1$, une forme hermitienne n'est rien d'autre qu'une forme bilinéaire symétrique. Ainsi, les formes hermitiennes sur (A, σ) sont des généralisations des formes bilinéaires symétriques sur F pour lesquelles les

modules à droite sur (A, σ) remplacent les F -espaces vectoriels et une identité de σ -symétrie remplace la symétrie usuelle.

Exemple 1.5. On peut établir un lien entre formes hermitiennes et formes quadratiques (similaire à celui de l'exemple 1.3) dans deux cas particuliers. Ce lien a été découvert par Jacobson (1940) (voir aussi Scharlau, 1985, chapitre 10, §1).

On suppose que (D, σ) est soit une extension quadratique de corps F/k munie de son automorphisme non trivial, soit une algèbre de quaternions à division sur F munie de son involution canonique. Si M est un D -espace vectoriel et (M, h) est une forme hermitienne sur (D, σ) alors pour tout x dans M , $h(x, x) \in k$ et la forme $M \rightarrow k : x \mapsto h(x, x)$ est une forme quadratique sur k (appelée forme trace de h). Alors, on montre qu'une forme hermitienne sur (D, σ) est isotrope si et seulement si sa forme trace l'est sur k , que deux formes hermitiennes sur (D, σ) sont isométriques si et seulement si leurs formes traces le sont (Scharlau, 1985, chapitre 10, théorèmes 1.1, 1.7). En outre, l'application qui à h associe sa forme trace induit un morphisme injectif du groupe de Witt $W(D, \sigma)$ dans l'anneau de Witt $W(k)$ dont l'image s'identifie à l'idéal principal engendré par la forme norme de l'algèbre (Scharlau, 1985, chapitre 10, théorèmes 1.2 et 1.7). Dans ces deux cas, l'étude des formes hermitiennes peut donc se ramener à celle de certaines formes quadratiques.

L'exemple 1.3 montre que tous les concepts qui concernent les formes quadratiques peuvent être transportés aux formes bilinéaires symétriques et inversement. Dans la suite de ce chapitre, certains de nos résultats seront des généralisations internes à la théorie algébrique des formes quadratiques (1.2.2.2 ou 1.3.3). Selon l'exemple 1.4, il est naturel de se demander dans quelle mesure certaines notions ou propriétés des formes quadratiques peuvent être généralisées, même partiellement, à certaines formes hermitiennes : ce sera l'un de nos questionnements principaux dans les sections 1.2 et 1.3, par exemple en 1.2.1, en 1.2.2.1 ou en 1.3.3. À cet égard, les deux cas de l'exemple 1.5 permettent de tester la pertinence de notions ou de propriétés qui existent pour les formes quadratiques et que l'on envisage pour des formes hermitiennes plus générales. Nous retrouverons ces deux types d'algèbres à involution en section 1.3 comme origines de nos recherches sur les suites exactes de groupes de Witt (1.3.1) et comme objets d'étude pour les critères d'isomorphie des groupes de Witt correspondants (1.3.3).

1.1.2.3 Algèbres centrales simples et involutions

Le théorème suivant de Wedderburn détermine la structure des algèbres centrales simples : A est centrale simple sur F si et seulement si il existe un corps K contenant F tel que $A \otimes_F K \simeq M_n(K)$ si et seulement si il existe une algèbre à division D de centre F telle que $A \simeq M_n(D)$. Un corps K qui vérifie la seconde assertion est appelé corps déployant de A et dans la troisième assertion, on a aussi $A \simeq \text{End}_D(V)$ où V est un A -module simple (voir Scharlau, 1985, Chapitre 8) pouvant être muni d'une structure de D -espace vectoriel à droite. En conséquence, il existe un entier n tel que $\dim_F(A) = n^2$ et on dit que n est le degré de A , le degré de D étant l'indice de A . Selon ce résultat, la théorie des algèbres centrales simples généralise celle des matrices sur un corps et peut être considérée comme la théorie des algèbres de matrices sur des algèbres à division : en vertu de l'assertion 2, on dit aussi qu'une algèbre centrale simple sur F est une forme d'algèbre de matrices sur F . Nous mettons en valeur différents points de vue et outils sur les algèbres centrales simples et leurs involutions qui émanent de ce résultat.

Le théorème de Wedderburn introduit trois points de vue équivalents sur les algèbres centrales simples : algébrique, matriciel ou géométrique (au moyen d'une représentation par une algèbre d'endomorphismes). Illustrons le changement entre

ces trois points de vue sur le problème de la classification des involutions à isomorphisme près. Soit A une algèbre centrale simple sur F possédant au moins une involution.

1. D'un point de vue algébrique et par définition, les algèbres à involution (A, σ) et (A, τ) sont F -isomorphes si et seulement si il existe un automorphisme de l'algèbre A qui commute aux involutions si et seulement si il existe $a \in A^*$ tel que $\tau = \text{Int}(a) \circ \sigma \circ \text{Int}(a)^{-1}$ par le théorème de Skolem-Noether.
2. D'un point de vue matriciel, si on représente A par $M_n(D)$ pour une algèbre à division D , toute involution τ sur D s'étend à une involution σ sur A par $\sigma(a_{i,j}) = (\tau(a_{i,j}))^t$. Alors toute involution sur A est de la forme $\sigma_a = \text{Int}(a) \circ \sigma$ pour une matrice ε -hermitienne a pour σ et les involutions σ_a et σ_b sont isomorphes si et seulement si les matrices a et b sont congruentes à un facteur scalaire de F^* près (Knus et al., 1998, (2.20)).
3. Enfin, géométriquement, si on représente A par $\text{End}_D(V)$ pour une algèbre à division D et un A -module simple V , alors pour toute involution σ sur A , il existe une involution τ sur D et une forme hermitienne ou antihermitienne (V, h) sur (D, τ) telles que σ soit l'involution adjointe ad_h de h au sens où

$$\forall x, y \in V, \forall a \in A, h(x, a(y)) = h(\sigma(a)(x), y).$$

Plus précisément, si \widehat{h} est l'adjoint de h , et si a^t désigne l'application transposée de a , on a $\text{ad}_h(a) = \widehat{h}^{-1} \circ a^t \circ \widehat{h}$. Alors les involutions ad_h et $\text{ad}_{h'}$ sont isomorphes si et seulement si les formes hermitiennes h et h' sont isométriques à un scalaire de F^* près (voir Knus et al., 1998, (4.2)).

Le théorème de Wedderburn a aussi permis de définir différents objets ou techniques qui sont devenus centraux dans la théorie des algèbres centrales simples ou dans des théories connexes.

En premier lieu, ce théorème enrichit les méthodes pour définir des notions ou prouver des résultats au moyen de l'extension des scalaires. Dans une première méthode, les définitions ou propriétés sont énoncées sur un corps de base arbitraire mais prouvées après extension des scalaires à un corps déployant, ce qui permet de travailler avec des algèbres de matrices sur des corps. Cela contraste avec les méthodes de descente où les définitions ou propriétés sont montrées après extension sur un corps bien choisi et descendues au corps de base après qu'une certaine invariance ait été montrée : par exemple, toute algèbre centrale simple possède un corps déployant galoisien de degré fini, ce qui permet d'appliquer parfois la descente galoisienne aux constructions invariantes sous l'action d'un groupe de Galois.

Ensuite, ce théorème est à la base de la définition du groupe de Brauer $\text{Br}(F)$ qui est l'ensemble des classes d'équivalence des algèbres centrales simples sur F pour la relation suivante : A et B sont Brauer-équivalentes si et seulement si il existe $m, n \in \mathbb{N}$ avec $M_m(A) \simeq M_n(B)$ (voir Scharlau, 1985, chapitre 8, §3). Ce groupe classe les algèbres à division de dimension finie centrales sur F et sa compréhension voire son calcul sont des questions principales dans plusieurs théories algébriques, ce groupe pouvant aussi être exprimé par un groupe de cohomologie galoisienne (voir Gille & Szamuely, 2006, Chapter 2).

La notion d'équivalence de Morita pour les espaces hermitiens sur des algèbres à involution a été définie par Fröhlich et Mc Evett (1969) et Wall (1972) à partir de l'équivalence de Morita classique entre anneaux (voir aussi Knus, 1991, §1.9). Elle a l'avantage de préserver de nombreuses notions ou propriétés (dites Morita invariantes) et de permettre d'en transporter d'autres. Dans notre cadre, elle a une importance fondamentale : soient (A, σ) et (B, τ) deux algèbres à involution.

1. Si (A, σ) et (B, τ) sont Brauer-équivalentes et munies d'involutions de même espèce ayant même restriction à F alors elles sont Morita-équivalentes (voir

Dejaiffe, 1998 ou Grenier-Boley, 2004, proposition 2.3.1). L'équivalence de Morita généralise donc l'équivalence de Brauer dans une certaine mesure.

2. Si (M, h) est une forme hermitienne sur (A, σ) , (A, σ) et $(\text{End}_A(M), \text{ad}_h)$ sont Morita-équivalentes, ce qui permet de définir de nombreux invariants.
3. Si (A, σ) et (B, τ) sont Morita-équivalentes, les isométries, la somme orthogonale et l'hyperbolicité étant Morita-invariantes, cela induit un isomorphisme entre leurs groupes de Witt (voir Grenier-Boley, 2004, théorème 2.2.1).

Toute algèbre centrale simple est Brauer-équivalente à une algèbre à division par le théorème de Wedderburn et, si elle est de plus d'exposant 2 — par exemple si elle est munie d'une involution de première espèce (Knus et al., 1998, (2.8)) — à un produit tensoriel d'algèbres de quaternions par un théorème de Merkurjev (1981). L'équivalence de Morita confère donc à ces deux types d'algèbres une certaine généricité parmi les algèbres à involution et nous leur porterons donc une certaine attention (1.2.1 ou 1.5.1). Nos outils principaux de preuve incluront aussi l'équivalence de Morita (1.3.1 ou 1.3.2) ou l'extension des scalaires et la descente (dans la section 1.4 ou en 1.5.2).

1.1.2.4 Formes hermitiennes et algèbres à involution

Nous explicitons quelques-uns des nombreux liens qui existent entre formes hermitiennes et algèbres à involution.

D'abord, une forme hermitienne est définie sur une algèbre à involution. Il est donc naturel que les propriétés de l'algèbre ou de l'involution se reflètent dans la théorie des formes hermitiennes sur cette algèbre à involution.

Représentons une algèbre centrale simple A par $\text{End}_D(V)$, où D est une algèbre à division munie d'une involution τ et V un A -module simple. L'application $h \mapsto \text{ad}_h$ induit une correspondance bijective entre les formes hermitiennes ou antihermitiennes non dégénérées sur V par rapport à τ à un scalaire de F^* près et les involutions sur A (Knus et al., 1998, (4.2)) : il est donc équivalent d'étudier les involutions sur une algèbre centrale simple et les formes hermitiennes ou antihermitiennes sur une algèbre à division à similitude près. Cependant, chaque point de vue a ses avantages : la somme orthogonale permet une certaine flexibilité en conférant aux classes de Witt des formes hermitiennes une structure de groupe, quand les involutions se comportent mieux par extension des scalaires (Tignol, 1998).

Les involutions sur les algèbres centrales simples se partagent en deux espèces selon leur action sur le centre. Elles peuvent être également divisées en trois types, selon le type de formes auxquelles elles sont adjointes après extension des scalaires à une clôture algébrique du centre (voir Knus et al., 1998, §2) : si une involution γ est adjointe à une forme bilinéaire symétrique (resp. bilinéaire alternée, resp. hermitienne non bilinéaire), elle est dite de type orthogonal (resp. symplectique, resp. unitaire). On peut aussi distinguer ces différents types sans avoir recours à l'extension des scalaires : les involutions unitaires sont exactement les involutions de seconde espèce et si le degré de A est n , une involution est orthogonale (resp. symplectique) si et seulement si la dimension de l'espace des éléments symétriques est $\frac{n(n+1)}{2}$ (resp. $\frac{n(n-1)}{2}$), voir Knus et al., 1998, (2.6).

En analogie avec le fait que les algèbres centrale simples sont des formes d'algèbres de matrices, les involutions sur des algèbres centrales simples sont donc des "formes tordues" de formes bilinéaires symétriques, alternées ou hermitiennes (suivant le type) définies à un scalaire de F^* près. En ce sens, la théorie des algèbres centrales simples à involution généralise celles de ces différentes formes. Cette généralisation apparaît de manière plus étroite en considérant le passage entre algèbres centrales simples à involution et groupes linéaires algébriques de type classique découvert par Weil (1960). Cette découverte fondamentale est une grande source d'inspiration dans

les recherches actuelles pour continuer à développer la théorie des algèbres centrales simples à involution : voir Auel et al., 2011 ; Knus et al., 1998 ; Quéguiner-Mathieu, 2006 ; Tignol, 1998.

Les changements de points de vue sur les algèbres centrales simples ou sur les involutions seront au cœur de la section 1.4, par exemple en 1.4.3.2. Nous y expliquerons plus précisément comment notre approche conjugue les points de vue algébrique et géométrique et reviendrons aussi sur cet aspect en 1.7.

1.1.3 Rappels et notations

Pour le confort du lecteur, nous rappelons quelques notions et notations couramment utilisées pour les formes hermitiennes et le groupe de Witt. Pour plus de précisions, nous renvoyons à Scharlau, 1985, Chapter 7, 10.

Soient (A, σ) une algèbre à involution et (M, h) une forme ε -hermitienne sur (A, σ) . La forme h est isotrope s'il existe $x \in M \setminus \{0\}$ tel que $h(x, x) = 0$, anisotrope sinon. Lorsque deux formes ε -hermitiennes (M, h) et (M', h') sur (A, σ) sont isométriques, on écrit $h \simeq h'$. Si $A = D$ est une algèbre à division et si on exclut le cas où $D = F$, $\sigma = \text{id}_F$ et $\varepsilon = -1$, toute forme ε -hermitienne (V, h) sur (D, σ) est diagonalisable, c'est-à-dire possède une D -base de vecteurs orthogonaux deux à deux vis-à-vis de h : on écrit $h \simeq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ pour en désigner une diagonalisation.

La somme orthogonale induit une structure de monoïde commutatif sur l'ensemble des classes d'isométrie de formes ε -hermitiennes (non dégénérées) sur (A, σ) . Le groupe de Witt de (A, σ) est le groupe quotient du groupe de Grothendieck de ce monoïde commutatif par le sous-groupe engendré par les formes hyperboliques : il est noté $W^\varepsilon(A, \sigma)$. Dans le cas où $A = F$ et $\varepsilon = 1$, le produit tensoriel des formes permet de définir une structure d'anneau sur $W(F, \sigma)$. Si de plus, $\sigma = \text{id}_F$, cet anneau est l'anneau de Witt usuel de F , noté $W(F)$. Le produit tensoriel permet aussi de munir $W^\varepsilon(A, \sigma)$ d'une structure de $W(F, \sigma|_F)$ -module, et donc d'une structure de $W(k)$ -module via l'application de restriction usuelle $W(k) \rightarrow W(F, \sigma|_F)$.

1.2 Formes quadratiques et hermitiennes : passages et généralisations

Le but de cette section est d'illustrer pour quelques notions ou résultats importants de la théorie algébrique des formes quadratiques soit des généralisations possibles, soit le passage à celle des formes hermitiennes. Dans la sous-section 1.2.1, nous nous concentrons sur les formes de Pfister avant d'aborder les invariants de corps dans la sous-section 1.2.2.

1.2.1 Formes de Pfister hermitiennes

1.2.1.1 Éléments de contexte

Après l'introduction par Witt de l'anneau portant son nom, la théorie algébrique des formes quadratiques a connu son véritable essor suite à trois articles fondateurs de Pfister (1965a, 1965b, 1966) qui ont permis son développement. Parmi les notions qui y sont introduites, la notion de forme de Pfister³ (1965a) est sans doute l'une des notions les plus importantes de cette théorie pour la cohérence qu'elle lui donne, les propriétés qu'elle possède et la puissance des résultats associés. Puisqu'elle constitue un outil indispensable à la majorité des problèmes qu'on rencontre dans la théorie, il est naturel de lui chercher un analogue dans les théories voisines.

3. Ces formes ont été découvertes par Pfister et nommées en son honneur par ses pairs pour attester de l'importance de cette découverte.

Dans la théorie algébrique des formes quadratiques, une n -forme de Pfister sur F est une forme quadratique du type $\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$ où $a_1, \dots, a_n \in F^*$, notée $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$. Elles possèdent de nombreuses propriétés et caractérisations (voir Scharlau, 1985, Chapter 4, Theorem 4.4 ou Elman et al., 2008, §9 et §23).

Dans la théorie des algèbres centrales simples à involution, plusieurs choix sont possibles suivant la caractérisation que l'on choisit : certains sont équivalents en petit degré (voir Quéguiner-Mathieu, 2006, §4). En général, un résultat de Becher (2008) conduit à adopter la définition suivante : une algèbre à involution de Pfister (A, σ) est un produit tensoriel d'algèbres de quaternions à involution, où σ est orthogonale. En effet, si on étend les scalaires à un corps déployant de A , Becher a montré que σ est adjointe à une forme de Pfister (Becher, 2008, Theorem 1).

Pour les formes hermitiennes, une notion de forme de Pfister a été proposée par Lewis (1988) : une forme de Pfister hermitienne sur une algèbre à involution (A, σ) est une forme hermitienne isométrique à l'extension à (A, σ) d'une forme de Pfister quadratique définie sur le sous-corps fixe k de A par σ . Nous rendons compte de deux propriétés de ces formes, l'une liant isotropie et hyperbolicité faible, l'autre donnant un analogue faible d'un théorème d'Arason-Pfister : ces résultats sont issus de Grenier-Boley, Lequeu & Mahmoudi, 2008.

1.2.1.2 Isotropie et hyperbolicité

L'un des problèmes majeurs de la théorie algébrique des formes quadratiques est de déterminer si une forme donnée est isotrope, ou de trouver des conditions pour qu'elle le soit. En général, ce problème est difficile, mais pour les formes de Pfister, il équivaut au problème de l'hyperbolicité, plus facile à traiter. Plus précisément, une forme de Pfister est hyperbolique dès qu'elle est isotrope (Elman et al., 2008, Corollary 9.10) et cette propriété est même caractéristique des formes anisotropes semblables à une forme de Pfister⁴. Nous étudions maintenant cette propriété pour les formes de Pfister hermitiennes.

Soit (A, σ) une algèbre à involution sur F : on dit qu'une forme ϵ -hermitienne sur (A, σ) satisfait la propriété $(I \Rightarrow H)$ si elle est hyperbolique dès qu'elle est isotrope. Lorsque (A, σ) est une extension quadratique de corps F/k munie de son automorphisme non trivial ou une algèbre de quaternions à division sur F munie de son involution canonique, le théorème de Jacobson montre que les formes de Pfister hermitiennes satisfont $(I \Rightarrow H)$ (voir exemple 1.5). C'est aussi le cas pour les algèbres de quaternions à division à involutions orthogonales ou unitaires, par deux résultats de Serhir (Serhir, 1997, Proposition 3.1 ; Serhir, 2002, Théorème 1.4).

Plus généralement dans la suite de 1.2.1, on suppose que (A, σ) est une algèbre de multiquaternions à involution sur F : $(A, \sigma) = (Q_1, \sigma_1) \otimes_F \cdots \otimes_F (Q_m, \sigma_m)$ où les (Q_i, σ_i) sont des algèbres de quaternions à involution. À une telle décomposition, on associe un entier r de la manière suivante. On considère l'ensemble des algèbres de quaternions non déployées qui apparaissent dans cette décomposition et on partitionne cet ensemble en classes d'équivalence C_j où la relation d'équivalence est l'isomorphisme de F -algèbres. Alors r est le nombre de classes d'équivalences telles que $|C_j|$ est impair.

Remarque 1.6. Notons que r dépend de la décomposition choisie pour (A, σ) . Ainsi, si (Q_1, σ_1) et (Q_2, σ_2) sont deux algèbres de quaternions à division munies d'involutions de première espèce sur F et si $(A, \sigma) = (Q_1, \sigma_1) \otimes_F (Q_2, \sigma_2)$ est d'indice 2 alors on a $r = 2$ pour cette décomposition. On peut aussi écrire $(A, \sigma) \simeq (M_2(F), \tau_1) \otimes_F (Q, \tau_2)$ où Q est une algèbre de quaternions à division, τ_1 et τ_2 sont des involutions de première espèce : alors, $r = 1$ pour cette décomposition.

4. Soit q une forme quadratique anisotrope sur F . Alors q est semblable à une forme de Pfister si et seulement si pour toute extension K du corps de base F , si q_K est isotrope alors q_K est hyperbolique (Elman et al., 2008, Corollary 23.4)

Le théorème suivant généralise les résultats précédents et est un analogue faible de la propriété $(I \Rightarrow H)$ quadratique pour les formes de Pfister hermitiennes (Grenier-Boley et al., 2008, Theorem 3.3).

Théorème 1.7. *Soit (M, h) une forme de Pfister hermitienne sur (A, σ) .*

- (1) *Si $r = 0$, alors h satisfait la propriété $(I \Rightarrow H)$.*
- (2) *Si $r \geq 1$ et si h est isotrope alors h est faiblement hyperbolique : plus précisément, $2^{r-1} \times h$ est hyperbolique.*

La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur r et repose sur plusieurs ingrédients : groupement des algèbres de quaternions isomorphes de la décomposition de (A, σ) , usage de l'équivalence de Morita, distinction de cas selon le type de l'involution, usage d'applications de transfert entre le groupe de Witt d'une certaine algèbre et celui d'un de ses centralisateurs ⁵.

La forme du coefficient de faible hyperbolicité de h dans (2) n'est pas étonnante, puisque la torsion du groupe de Witt est 2-primaire (Scharlau, 1970). D'autre part, il est possible d'utiliser le principe local-global de Lewis et Unger (Lewis & Unger, 2003, Theorem 4.1) pour aboutir à une conclusion similaire à (2). En effet, la signature d'une forme de Pfister hermitienne pour un ordre donné est nulle ou vaut le degré de l'algèbre d'endomorphismes sous-jacente. Si cette forme est isotrope, sa signature en chaque ordre ne peut être que nulle et elle est donc faiblement hyperbolique. Ainsi, il existe un entier $s(h)$ dépendant de h tel que $2^{s(h)} \times h$ est hyperbolique. Cependant, le théorème 1.7 montre que $s(h)$ peut être choisi indépendamment de h et en donne un majorant qui ne dépend que de la décomposition de l'algèbre.

Pour finir, notons que les liens entre isotropie et hyperbolicité ont été récemment éclaircis par divers travaux ⁶ : nous nous basons sur Black & Quéguiner-Mathieu (2014) pour expliciter l'un de ces résultats (Black & Quéguiner-Mathieu, 2014, Corollary 3.2). Si (A, σ) est une algèbre de multi-quaternions qui est isotrope alors après extension des scalaires à un corps de déploiement générique (si σ est orthogonale ou unitaire) ou à un corps de réduction d'indice (si σ est symplectique), elle est adjointe à une forme de Pfister (Becher, 2008) donc est hyperbolique. D'après des travaux de Karpenko (2010, 2012), il s'en suit que (A, σ) est hyperbolique.

1.2.1.3 Une version faible du Hauptsatz d'Arason-Pfister

Un autre tournant dans la théorie algébrique des formes quadratiques est le Hauptsatz d'Arason et Pfister (Arason & Pfister, 1971, Korollar 3). Ce résultat a de nombreuses conséquences et a été le premier de la théorie à employer des techniques impliquant des corps de fonctions. Soit $I(F)$ l'idéal fondamental de l'anneau de Witt constitué des classes de formes de dimension paire dans $W(F)$. On note $I^0(F) = W(F)$ et pour $n \geq 1$, $I^n(F) = (I(F))^n$. Alors pour tout $n \geq 1$, $I^n(F)$ est engendré additivement par les n -formes de Pfister.

Théorème 1.8 (Arason-Pfister). *Si q est une forme anisotrope avec $q \in I^n(F)$, on a $\dim(q) \geq 2^n$.*

De ce théorème, il résulte immédiatement que $\bigcap_{n \geq 0} I^n(F) = \{0\}$. Ce résultat donne une condition nécessaire pour qu'une forme quadratique appartienne à $I^n(F)$ et peut être vu comme la première étape d'un processus visant à classer les formes quadratiques à isométrie près. On peut considérer que ce processus se termine avec le théorème de Milnor-Voevodsky qui prouve que chaque morphisme $e_n : I^n(F) \rightarrow H^n(F) : \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle \mapsto (a_1) \cup \dots \cup (a_n)$ est surjectif de noyau $I^{n+1}(F)$, où

5. Nous retrouverons ces applications de transfert dans la section 1.3 lorsque nous évoquerons les suites exactes de groupes de Witt.

6. Nous remercions Anne Quéguiner-Mathieu qui a porté ces résultats à notre connaissance.

$H^n(F)$ est le groupe de cohomologie galoisienne $H^n(\text{Gal}(F_{sep}/F), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En effet, une conséquence de ce résultat et du Hauptsatz est la suivante : deux formes quadratiques q_1 et q_2 sont isométriques si et seulement si elles ont même dimension et $e_d(q_1 - q_2) = 0$ pour tout d avec $2^d \leq \dim(q_1) + \dim(q_2)$ (voir Tignol, 2010).

Pour les algèbres centrales simples à involution, les invariants e_0 , e_1 et e_2 des formes quadratiques peuvent se généraliser au cas orthogonal, mais pas l'invariant e_3 (Quéguiner-Mathieu, 2006). On peut cependant obtenir des résultats plus fins selon le type de l'involution sous certaines hypothèses (Quéguiner, 1997; Tignol, 2010).

Pour les formes hermitiennes, le résultat du paragraphe précédent suggère un début de piste pour trouver un analogue du Hauptsatz d'Arason-Pfister. Pour $n = 0$, on note $I^0(A, \sigma) = W(A, \sigma)$ et pour $n \geq 1$, on désigne par $I^n(A, \sigma)$ le sous $W(k)$ -module de $W(A, \sigma)$ engendré par les n -formes de Pfister hermitiennes. Si (M, h) est une forme hermitienne sur (A, σ) , le rang du A -module M est noté $\text{rg}_A(h)$. Alors, on a le résultat suivant (Grenier-Boley et al., 2008, Theorem 3.7, Corollary 3.9).

Corollaire 1.9. (1) *Soit (M, h) une forme hermitienne anisotrope sur (A, σ) . Si $h \in I^n(A, \sigma)$ et si $2^r \times h$ n'est pas hyperbolique sur (A, σ) , alors $\text{rg}_A(h) \geq 2^{n+m-r}$. (2) *Le sous-module $\bigcap_{n \geq 0} I^n(A, \sigma)$ est de 2^r -torsion dans $W(A, \sigma)$.**

La preuve du résultat précédent repose sur le théorème 1.7 et sur l'usage du même type d'arguments. Si on suppose que $A = D$ est à division, alors $r = m$ et le résultat s'exprime de la façon suivante : si $h \in I^n(D, \sigma)$ est anisotrope et si $2^r \times h$ n'est pas hyperbolique alors $\dim_D(h) \geq 2^n$. De cette manière, le corollaire apparaît comme un analogue faible du théorème 1.8 dans ce cadre.

1.2.2 Invariants de corps

Certains invariants de corps en théorie des formes quadratiques sont définis comme suprema des dimensions de formes anisotropes d'un certain type : leur calcul renseigne donc sur l'(an)isotropie des formes quadratiques du corps considéré. Dans cette sous-section, nous présentons des généralisations de deux d'entre eux : le u -invariant et le niveau d'un corps F . Pour des renseignements généraux sur les invariants de corps, nous renvoyons à Hoffmann, 2000 ou à Lam, 2005, Chapter XI.

Suivant Hoffmann, 2000, si $\mathcal{C}(F)$ est un ensemble de formes quadratiques sur F , on pose

$$\text{supdim}(\mathcal{C}(F)) = \sup\{\dim q \mid q \text{ forme quadratique anisotrope sur } F, q \in \mathcal{C}(F)\}.$$

Si $\mathcal{C}(F)$ est vide ou ne contient que des formes isotropes, on pose $\text{supdim}(\mathcal{C}(F)) = 0$. On désigne par ΣF^\bullet l'ensemble des éléments de F^* qui peuvent être écrits comme une somme de carrés de F et on pose $\Sigma F = \Sigma F^\bullet \cup \{0\}$. On définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(F) &= \{\text{formes quadratiques sur } F\}, \quad \mathcal{C}_2(F) = \{\underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_n, n \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{C}_3(F) &= \{\underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_n \perp \langle -x \rangle, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x \in \Sigma F^\bullet\} \end{aligned}$$

Nous aurons besoin des trois invariants de F suivants : le u -invariant $u(F) = \text{supdim}(\mathcal{C}_1(F))$, le niveau $s(F) = \text{supdim}(\mathcal{C}_2(F))$ et le nombre de Pythagore $p(F) = \text{supdim}(\mathcal{C}_3(F))$. Un corps est formellement réel si $s(F) = +\infty$, non formellement réel sinon : dans la suite, on dira plus volontiers corps réel ou corps non réel.

Ces invariants peuvent être définis de différentes manières : ainsi $s(F)$, s'il est fini, est-il aussi le plus petit entier $n \geq 1$, tel que -1 s'écrive comme somme de n carrés de F . Si (A, σ) est un anneau à involution, un carré hermitien est un élément

de la forme $x\sigma(x)$ pour $x \in A$. Le niveau hermitien de (A, σ) noté $s(A, \sigma)$ est alors le plus petit entier $n \geq 1$, s'il existe, tel que -1 s'écrive comme somme de n carrés hermitiens de A , $+\infty$ sinon (Lewis, 1988).

1.2.2.1 L'invariant u_α

Si F est un corps non réel, Kneser a prouvé que $u(F) \leq |F^*/F^{*2}|$ (voir Lam, 2005, Chapter XI, §6). Lorsque le niveau du corps est petit, ce résultat a été précisé :

Théorème 1.10 (Elman & Lam, 1973). *Soit F un corps tel que $s(F) \leq 2$. Alors, on a soit $u(F) = |F^*/F^{*2}|$, soit $u(F) \leq \frac{1}{2}|F^*/F^{*2}|$.*

Il est possible de trouver un analogue de ces résultats dans un cadre hermitien pour des algèbres de quaternions à involution. Soient (Q, γ) une algèbre de quaternions à division sur F munie de son involution canonique et α un élément de Q^* antisymétrique pour γ . Soit G_α le groupe des facteurs de similitudes de la forme anti-hermitienne $\langle \alpha \rangle$, c'est-à-dire

$$G_\alpha = \{c \in F^* \mid \langle c\alpha \rangle \simeq \langle \alpha \rangle \text{ en tant que formes anti-hermitiennes sur } (Q, \gamma)\}.$$

Si $\mathcal{C}_4(F) = \{q \in \mathcal{C}_1(F) \mid \text{la forme antihermitienne } q.\langle \alpha \rangle \text{ est anisotrope sur } (Q, \gamma)\}$, on définit $u_\alpha(F) = \text{supdim}(\mathcal{C}_4(F))$. Alors $u_\alpha(F) \leq u(F)$ et plus précisément :

Théorème 1.11. (1) *Si $s(F(\alpha), \gamma|_{F(\alpha)}) < +\infty$ alors $u_\alpha(F) \leq |F^*/G_\alpha|$.*
(2) *Si $s(F(\alpha), \gamma|_{F(\alpha)}) \leq 2$ alors soit $u_\alpha(F) = |F^*/G_\alpha|$, soit $u_\alpha(F) \leq \frac{1}{2}|F^*/G_\alpha|$.*

Ce résultat est prouvé dans Grenier-Boley et al., 2008, Proposition 4.5, Theorem 1.3. La preuve se base sur une étude de certaines sous-formes, une discussion impliquant les entrées de certaines diagonalisations modulo G_α et sur l'usage de la propriété $(I \Rightarrow H)$ pour les formes de Pfister antihermitiennes sur (Q, γ) .

On peut donner une interprétation de $|F^*/G_\alpha|$ qui permet de davantage souligner l'analogie entre ce résultat et ceux de Kneser, Elman et Lam. Sous nos hypothèses, $K/F = F(\alpha)/F$ est une extension quadratique de corps et on note $\alpha^2 = a \in F^*$. Soient $\beta \in Q^*$ un quaternion pur qui anticommute à α , $\beta^2 = b$ et $N(K)$ le groupe des normes de K/F . Si $c \in F^*$, on sait que $c \in G_\alpha$ si et seulement si c est représenté par l'une des formes quadratiques $\langle 1, -a \rangle$, $\langle b, -ab \rangle$ (Scharlau, 1985, Chapter 10, 3.4). En d'autres termes, $G_\alpha = N(K^*) \cup bN(K^*)$ et $N(K^*)$ est un sous-groupe d'indice 2 de G_α , ce qui implique que $|F^*/G_\alpha| = \frac{1}{2}|F^*/N(K^*)|$. D'après une formule (Lewis, 1982, Corollary), on a donc :

$$|K^*/K^{*2}||F^*/G_\alpha| = \frac{1}{2}|K^*/K^{*2}||F^*/N(K^*)| = \frac{1}{4}|F^*/F^{*2}|^2.$$

On peut donc voir $|F^*/G_\alpha|$ comme une mesure du défaut entre $|K^*/K^{*2}|$ et $|F^*/F^{*2}|$.

1.2.2.2 Le q -niveau

La théorie algébrique des corps réels a été construite par Artin et Schreier à la fin des années 1920 pour répondre au dix-septième problème de Hilbert. L'un des résultats fondamentaux de cette théorie identifie les corps réels et les corps que l'on peut munir d'un ordre compatible avec l'arithmétique de ce corps (voir Lam, 2005, Chapitre VIII, Theorem 9.5 ou Scharlau, 1985, Chapter 3) :

Théorème 1.12 (Artin & Schreier, 1927). *Le corps F vérifie $s(F) = +\infty$ si et seulement si il existe au moins un ordre sur F si et seulement si ΣF est un préordre.*

Rappelons qu'un sous-ensemble P d'un anneau commutatif F est un préordre si P est stable par somme et produit, ne contient pas -1 et contient ΣF . Le préordre P est un ordre si de plus $P \cup -P = F$ et $P \cap -P = \{0\}$.

Dans le cas où le corps n'est pas réel, van der Waerden a été le premier à poser la question des valeurs possibles prises par le niveau au début des années 1930. Une réponse partielle à cette question a été obtenue par H. Kneser : s'il est fini, le niveau d'un corps vaut 1, 2, 4, 8 ou est multiple de 16 (Kneser, 1934). Jusqu'au début des années 1960, il n'existait cependant pas d'exemple de corps de niveau strictement supérieur à 4. La question de van der Waerden a été complètement résolue par Pfister par l'invention de la théorie des formes multiplicatives (Pfister, 1965a) : s'il est fini, le niveau d'un corps est une puissance de 2 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un corps F avec $s(F) = 2^n$. Par la suite, les notions de niveau $s(R)$ (voir Lam, 2005, Chapter XIII) et de sous-niveau $\underline{s}(R)$ d'un anneau R ont commencé à être étudiées :

$$\underline{s}(R) = \min\{n \mid \exists x_1, \dots, x_{n+1} \in R \setminus \{0\}, 0 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2\},$$

si 0 est somme de carrés de R et $\underline{s}(R) = +\infty$ sinon. On a bien entendu, $\underline{s}(R) \leq s(R)$ en général et $\underline{s}(R) = s(R)$ lorsque R est un corps commutatif, mais cela n'est pas vrai en général et la détermination des nombres qui peuvent être atteints comme (sous-)niveaux d'un anneau reste assez largement ouverte (voir Krüskemper & Wadsworth, 1991; Leep, 1990; Hoffmann, 2008; O'Shea, 2007). Signalons la construction d'algèbres de quaternions à division avec $s = \underline{s} = 2^k$ et $s = \underline{s} + 1 = 2^k + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (Lewis, 1987; Lewis 1989) et, lorsque R est une algèbre de quaternions ou d'octonions à division, les inégalités $\underline{s}(R) \leq s(R) \leq \underline{s}(R) + 1$ (Hoffmann, 2010).

Dans Berhuy, Grenier-Boley & Mahmoudi, 2012, nous avons défini et étudié les notions de niveau et sous-niveau par rapport à une forme quadratique, qui sont des généralisations naturelles des notions de niveau et sous-niveau classiques.

Définition 1.13. Soit (V, q) une forme quadratique sur F .

(1) Le niveau de F par rapport à q ou le q -niveau est défini par

$$s_q(F) = \min\{n \mid \exists v_1, \dots, v_n \in V, -1 = q(v_1) + \dots + q(v_n)\},$$

si un tel n existe et par $s_q(F) = +\infty$ sinon.

(2) Le sous-niveau de F par rapport à q est défini par

$$\underline{s}_q(F) = \min\{n \mid \exists v_1, \dots, v_{n+1} \in V \setminus \{0\}, 0 = q(v_1) + \dots + q(v_{n+1})\},$$

si un tel n existe et par $\underline{s}_q(F) = +\infty$ sinon.

Notons que dans ce cadre, le niveau (usuel) de F correspond au niveau de F par rapport à la forme quadratique X^2 sur F . Le sous-niveau de F par rapport à q peut être relié à l'indice d'isotropie faible (Becher, 2006) : $\underline{s}_q(F) = \text{wi}(q) - 1$. Bien que le q -niveau n'ait pas été défini auparavant en toute généralité, il peut être lié à d'autres types de niveaux dans certains cas.

Exemples 1.14. (1) Le q -niveau peut être relié à certains niveaux hermitiens. On suppose que (D, σ) est comme dans l'exemple 1.5. Alors on a $s(D, \sigma) = s_q(F)$ où q est la forme norme de (D, σ) . Notons que dans ces deux cas, s'il est fini, le niveau hermitien est une puissance de 2 (Lewis, 1988, Proposition 1.5).

(2) On peut aussi relier un q -niveau avec le niveau d'un anneau. Par exemple, si D est l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique non dégénérée q , on a $s(D) \leq s_q(F)$. En particulier, si D est l'algèbre de quaternions $(a, b)_F$, on a $s_\tau(F) \leq s(D) \leq s_q(F)$ où $\tau = \langle 1, a, b, -ab \rangle$ et $q = \langle a, b \rangle$.

Dans les paragraphes suivants, nous mettons en valeur les résultats principaux obtenus dans Berhuy et al., 2012 au sujet du q -niveau⁷. Lorsque q est une forme de

⁷. Dans le cadre de cette note, nous n'évoquerons pas d'autres généralisations qui y sont étudiées (q -nombre de Pythagore, q -longueur).

Pfister, nous verrons qu'il existe des analogies fortes entre le niveau usuel et le q -niveau : chacun des paragraphes insistera sur ces analogies en parallèle des résultats que l'on peut obtenir dans le cas où q est une forme quadratique générale. Ce travail a été poursuivi par O'Shea (2015).

Niveau et sous-niveau. Soit (V, q) une forme quadratique sur F . Un élément a de F^* est représenté par $q : V \rightarrow F$ si il existe $v \in V$ tel que $q(v) = a$ et nous désignons par $D_F(q)$ l'ensemble des valeurs représentées par q sur F .

Puisque $\underline{s}_q(F) = 0$ et $s_q(F) = 1$ lorsque q est isotrope, on peut supposer sans perte de généralité que q est anisotrope. Dans ce cas, on a $s_q(F) \leq \underline{s}_q(F) + 1$ et si de plus $1 \in D_F(q)$ alors $\underline{s}_q(F) \leq s_q(F) \leq \underline{s}_q(F) + 1$ (Berhuy et al., 2012, Lemma 3.1) et on ne peut pas améliorer ces inégalités en général (Berhuy et al., 2012, Remark 3.2). Lorsque q est une forme de Pfister anisotrope, les notions de niveau et sous-niveau coïncident⁸ : $s_q(F) = \underline{s}_q(F)$ (Berhuy et al., 2012, Proposition 4.1).

Remarquons l'analogie entre ces résultats et ceux cités plus haut obtenus par Lewis (1987) et Hoffmann (2010) pour les niveaux et sous-niveaux d'anneaux. Une étude générale et plus complète de $\underline{s}_q(F)$ a été menée par O'Shea (2015) : en particulier, il n'est pas possible de caractériser les formes q pour lesquelles $s_q(F) = \underline{s}_q(F)$ (O'Shea, 2015, §5).

Comparaison à des invariants classiques. Le calcul du q -niveau peut être facilité lorsque l'on connaît déjà certains invariants classiques du corps considéré (Berhuy et al., 2012, Lemma 3.1, Proposition 3.3)

Proposition 1.15. *Soit q une forme quadratique. Alors, on a $s_q(F) \leq \min(s(F) + 1, p(F), \left\lceil \frac{u(F)}{\dim(q)} \right\rceil) \leq \min(s(F) + 1, p(F), u(F))$.*

Pour chacun des invariants, les inégalités ne peuvent pas être améliorées en général (Berhuy et al., 2012, Remark 3.2, Remark 3.4 et Proposition 1.16 ci-dessous). L'énoncé de cette proposition prend en compte le fait qu'on ne sait pas forcément calculer tous les invariants d'un corps donné. Lorsque F est non réel, on pourrait simplifier l'énoncé de ce résultat dans la mesure où $p(F) \leq \min(s(F) + 1, u(F))$: en utilisant la construction de Merkurjev pour obtenir des corps dont le u -invariant est un nombre pair prescrit, on montre que cette inégalité est en général stricte (Berhuy et al., 2012, Appendix 3.4.1). Notons que cette construction a aussi été utilisée par Hoffmann (2000) pour produire des corps dont plusieurs invariants sont prescrits.

Niveaux possibles sur un corps fixé. On fixe le corps F et si n est un entier naturel non nul, on pose :

$$L(n, F) = \{s_q(F) \mid q \text{ est une forme quadratique de dimension } n \text{ sur } F\},$$

et $L(F) = \bigcup_{n \geq 1} L(n, F)$. On peut déterminer explicitement $L(1, F)$ et $L(F)$ en général (Berhuy et al., 2012, Proposition 3.10, Corollary 3.11).

Proposition 1.16. (1) *Si F est non réel alors $L(1, F) = L(F) = \{1, \dots, p(F)\}$.*
(2) *Si F est réel alors $L(1, F) = L(F) = \{1, \dots, p(F)\} \cup \{+\infty\}$.*
(3) *On a $\{1, \dots, \lfloor p(F)/n \rfloor\} \subseteq L(n, F)$.*

Ainsi, la connaissance des q -niveaux possibles sur un corps F fixé équivaut à celle du nombre de Pythagore. Cependant, ni le résultat précédent, ni sa preuve ne donnent de moyen de construire des formes quadratiques de q -niveau prescrit en général.

8. En fait, ce résultat est vrai plus généralement si q est une « group form ».

Si on choisit un corps K pour lequel $p(K) = +\infty$ (par exemple un corps avec un nombre infini d'indéterminées indépendantes sur un corps réel F), on a en outre $L(n, K) = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et chaque entier est atteint par un certain q -niveau (Berhuy et al., 2012, Corollary 3.11) : chaque entier peut même être atteint comme niveau d'une forme quadratique explicite, grâce à un analogue d'un théorème de Cassels (Berhuy et al., 2012, Theorem 3.7).

Extension des scalaires. Nous nous intéressons maintenant au comportement du q -niveau par extension des scalaires. Pour cela, nous introduisons et étudions l'ensemble suivant : $L_q(F) = \{s_{q_{F'}}(F') \mid F'/F \text{ extension de corps}\}$.

En toute généralité, on a évidemment $L_q(F) \subseteq \{1, \dots, s_q(F)\}$ mais on ne peut pas en dire beaucoup plus sans hypothèse supplémentaire. Cependant, $s_q(F)$ ne change pas si on passe à une extension transcendante pure de F ou à son corps des séries de Laurent (Berhuy et al., 2012, Proposition 3.6). On peut également exhiber des valeurs de $L_q(F)$ lorsque la dimension de q est petite (Berhuy et al., 2012, Corollary 3.14).

Proposition 1.17. *On suppose que $\dim(q) \leq 3$ et que $s_q(F) = \infty$.*

- (1) *Si la dimension de q est 1 ou 2, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \in L_q(F)$.*
- (2) *Si la dimension de q est 3 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2^{2n+2}}{3}, \frac{2^{2n+1}+1}{3} \in L_q(F)$.*

Si on applique le résultat précédent avec la forme $q = \langle 1 \rangle$, on retrouve le résultat de Pfister selon lequel toute puissance de 2 prescrite peut être atteinte comme niveau d'un certain corps. Ce résultat se prouve au moyen de corps de fonctions et du théorème de séparation de Hoffmann (voir Hoffmann, 2000, Theorem 1).

Lorsque q est une forme de Pfister, on peut déterminer explicitement $L_q(F)$ (Berhuy et al., 2012, Proposition 4.3, Theorem 4.4).

Théorème 1.18. *Si q est une forme de Pfister sur F , $s_q(F)$ est une puissance de 2 ou infini et $L_q(F) = \{1, 2, \dots, 2^i, \dots, s_q(F)\}$.*

Si q est plus généralement une forme ronde⁹, la première assertion est vraie mais ce n'est pas le cas de la seconde (Berhuy et al., 2012, Remark 4.5). Ce théorème généralise le théorème de Pfister sur le niveau d'un corps et celui de Lewis sur le niveau hermitien mentionné dans l'exemple 1.14(1)). Il se prouve en utilisant le théorème de la sous-forme de Cassels-Pfister ainsi que la notion de voisin de Pfister.

À propos de $F^*/D_F(q)$. Lors de ses travaux précurseurs sur le niveau d'un corps, Pfister a obtenu une borne inférieure pour $|F^*/F^{*2}|$ qui dépend du niveau de F : si $s(F) = 2^n$ alors $|F^*/F^{*2}| \geq 2^{n(n+1)/2}$ (Pfister, 1966, Satz 18(d)). Lorsque q est une forme de Pfister, $D_F(q)$ est un sous-groupe¹⁰ de F^* contenant F^{*2} et on a un analogue du résultat de Pfister pour le q -niveau (Berhuy et al., 2012, Theorem 4.14).

Théorème 1.19. *Soit q une forme de Pfister sur F avec $s_q(F) = 2^n$. Alors $|F^*/D_F(q)| \geq 2^{n(n+1)/2}$.*

En fait, la preuve originelle de Pfister s'adapte aisément à ce cas en utilisant les propriétés des formes de Pfister.

En général, le résultat ne peut pas être amélioré puisque la borne inférieure peut être atteinte (Berhuy et al., 2012, Remark 4.15(1)). Cependant, le résultat de

9. Une forme quadratique q sur F est dite ronde si $D_F(q)$ est égal au groupe $G_F(q)$ des facteurs de similitude de q , où $G_F(q) = \{a \in F^\times \mid a \cdot q \simeq q\}$. Toute forme de Pfister est une forme ronde mais la réciproque est fautive (Lam, 2005, Chapter X, §1).

10. Plus précisément : q est une forme de Pfister sur F si et seulement si pour toute extension de corps K/F , $D_K(q_K)$ est un sous-groupe de K^* (Scharlau, 1985, Chapter 4, Theorem 4.4).

Pfister n'est optimal que lorsque $n \leq 2$. Pour des entiers plus grands, un résultat dû à Djoković et raffiné par Leep montre que cette borne peut être améliorée : $|F^*/F^{*2}| \geq 2^{2^n+2-n}$ (voir Becher, 2001, Remark 5.2). Lorsque $n = 3$ ou $n = 4$, on peut prouver un résultat plus fort : si $s(F) = 8$ (resp. $s(F) = 16$), $|F^*/F^{*2}| \geq 512$ (resp. 2^{15}) (Becher, 2001, Theorem 5.3).

Conditions de finitude. Si F est un corps non réel, tout q -niveau est fini. Lorsque F est un corps réel, il est naturel de se demander si on peut caractériser la finitude ou l'infinitude du q -niveau en certains termes.

Lorsque q est une forme de Pfister, on peut trouver une caractérisation qui est à la fois analogue au théorème d'Artin-Schreier pour le q -niveau et mettant en jeu des notions classiques de la théorie des formes quadratiques. Si q est une forme quadratique sur F , on désigne par $\Sigma_q F^\bullet$ l'ensemble des éléments $x \in F^*$ pour lesquels il existe un entier n tel que $n \times q$ représente x . On pose $\Sigma_q F = \Sigma_q F^\bullet \cup \{0\}$.

Proposition 1.20 (Berhuy et al., 2012, Proposition 5.1). *Soit q une forme de Pfister sur un corps réel F . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $s_q(F) = +\infty$.
- (2) $\Sigma_q F$ est un préordre de F .
- (3) Il existe un ordre P de F contenant le préordre $\Sigma_q F$.
- (4) $\underline{s}_q(F) = +\infty$.
- (5) La forme q n'est pas de torsion.
- (6) Il existe un ordre P de F pour lequel $\text{sgn}_P(q) = \dim(q)$.

Les équivalences (1) \iff (2) \iff (3) étendent le théorème d'Artin-Schreier au q -niveau. L'équivalence (5) \iff (6) est une conséquence facile du principe local-global de Pfister (voir Scharlau, 1985, Chapter 3, Theorem 6.2) puisque la signature d'une forme de Pfister q en tout ordre de F vaut 0 ou $\dim(q)$.

En général, nous ne connaissons pas de caractérisation complète de la finitude du q -niveau mais il y a néanmoins quelques résultats qui vont dans ce sens. Si la dimension de q est supérieure ou égale à 2 sur le corps réel F , le fait que pour tout ordre P on ait $\text{sgn}_P(q) \leq 2 - \dim(q)$ est une condition suffisante à ce que $s_q(F) < +\infty$ (Berhuy et al., 2012, Proposition 5.10). Si on revient à 1.20, (6) \implies (1) est vraie en général (Berhuy et al., 2012, Lemma 5.3), (1) \iff (6) est vraie si $\dim(q)$ vaut 1 ou 2 (Proposition 5.5) et on peut caractériser les corps pour lesquels (1) \iff (6) est toujours vraie.

Théorème 1.21 (Berhuy et al., 2012, Theorem 5.8). *Soit F un corps réel. Les corps pour lesquels pour toute forme quadratique q sur F , l'implication (1) \implies (6) est vraie sont exactement les corps SAP.*

Rappelons qu'un corps F est SAP si pour tous sous-ensembles fermés disjoints A et B de l'espace des ordres¹¹ de F muni de sa topologie de Harrison, il existe $a \in F^*$ tel que a est positif (resp. négatif) par rapport à tout ordre de A (resp. B). Cette notion a été introduite par Knebusch, Rosenberg & Ware, 1972 et peut être caractérisée de diverses manières. Les corps suivants sont SAP : les extensions algébriques de \mathbb{Q} qui sont réelles, les extensions algébriques de $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{Q}((X))$ qui sont réelles.

1.3 Quelques résultats algébriques sur le groupe de Witt

Dans la mesure où l'anneau de Witt $W(F)$ rend compte globalement des formes quadratiques sur F , l'un des problèmes centraux de la théorie algébrique des formes

11. Nous renvoyons à 1.3.3 pour plus de détails sur cet espace.

quadratiques est de mieux le connaître, voire de le déterminer. Mais qu'est-ce que connaître $W(F)$, le déterminer ? On peut envisager deux types de réponses à cette question. D'une part, il peut s'agir de déterminer les éléments de $W(F)$, ce qui mène au problème de la classification des formes quadratiques sur F à Witt-équivalence près. D'autre part, il peut s'agir d'obtenir des renseignements d'ordre algébrique sur $W(F)$, ce qui peut avoir plusieurs significations. De même, ces considérations et pistes générales sont envisageables pour le groupe de Witt $W(A, \sigma)$ relativement aux formes hermitiennes sur (A, σ) .

Le problème de la classification des formes à Witt-équivalence près mène à la problématique des invariants de formes. Pour les formes quadratiques, les invariants principaux sont la dimension, le déterminant, l'invariant de Hasse¹² et les signatures : ainsi, si $I^3(F)$ est sans torsion ces invariants suffisent à classer les formes quadratiques sur F en vertu d'un théorème d'Elman & Lam (1974), voir aussi Scharlau, 1985, Chapter 2, Theorem 14.6. Le théorème de Milnor-Voevodsky évoqué en 1.2.1.3 donne une réponse théorique générale à cette question : si e_0 est lié à la dimension, e_1 au déterminant et e_2 à l'invariant de Hasse, les autres invariants e_n sont cependant « externes » et on ne sait pas à ce jour s'il existe un ensemble complet d'invariants définis sur $W(F)$. Pour les formes hermitiennes, des invariants similaires à ceux ci-dessus (et d'autres) peuvent être définis et permettent de prouver des résultats de classification dépendant du type de l'involution et d'hypothèses sur le corps de base (Bayer-Fluckiger & Parimala, 1995, 1998) : ils sont aussi à la base de résultats de classification pour les involutions à isomorphisme près au sens de 1.1.2.3 (Lewis & Tignol, 2001). Les algèbres à involution possèdent aussi des invariants similaires mais qui se comportent différemment de ceux des formes (Knus et al., 1998, Chapter II; Quéguiner-Mathieu, 2006).

Dans cette section, nous empruntons l'autre voie, celle qui consiste à trouver des renseignements d'ordre algébrique sur $W(F)$ ou $W(A, \sigma)$. Nous illustrons par nos travaux trois manières d'envisager cette problématique.

D'abord, mieux connaître les anneaux ou groupes de Witt peut vouloir dire savoir définir des applications entre certains d'entre eux. Cela mène à la problématique de la construction de suites exactes de groupes de Witt que nous abordons dans la sous-section 1.3.1. Au-delà des renseignements qu'elles fournissent sur les groupes eux-mêmes, ces suites exactes constituent aussi des outils efficaces de preuves. Ainsi, dans leur preuve de la conjecture II de Serre pour les groupes classiques (Bayer-Fluckiger & Parimala, 1995) ou du principe de Hasse pour les corps de dimension cohomologique virtuelle inférieure ou égale à 2 (Bayer-Fluckiger & Parimala, 1998), l'un des ingrédients de la technique que les auteurs ont mise au point est une suite exacte de groupes de Witt (Parimala, Sridharan & Suresh, 1995). Celle-ci permet de classer les formes hermitiennes au moyen d'invariants (voir ci-dessus).

Ensuite, même si cela semble être un renseignement algébrique assez faible, une manière de mieux connaître $W(F)$ et $W(A, \sigma)$ peut être de savoir calculer leur ordre, voire de relier ces ordres. Nous expliquons une manière d'y parvenir dans de nombreux cas en sous-section 1.3.2.

Enfin, le fait de savoir classer les formes quadratiques ou hermitiennes à Witt-équivalence près, renseigne sur les éléments de $W(F)$ ou $W(A, \sigma)$ mais pas sur leur structure algébrique. Pour cette raison, un problème complémentaire à celui de la classification des formes est celui de la classification des anneaux ou groupes de Witt à isomorphisme près : on peut estimer que la réponse à ces deux problèmes équivaut à la détermination de l'anneau ou du groupe de Witt. Nous abordons donc cette problématique dans la sous-section 1.3.3, en mettant en valeur différents points de vue sur les objets manipulés.

12. Si (V, q) est une forme quadratique sur F qui a pour diagonalisation $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, l'invariant de Hasse de (V, q) est $\bigotimes_{1 \leq i < j \leq n} (a_i, a_j)_F$ (Lam, 2005, Chapter V, §3).

1.3.1 Suites exactes de groupes de Witt

Le changement de corps des scalaires est un outil important en théorie algébrique des formes quadratiques qui permet de relier naturellement les anneaux de Witt correspondants. Si K/F est une extension de corps, on a ainsi un morphisme de restriction $r_{K/F}^* : W(F) \rightarrow W(K)$ et si de plus, K/F est de degré fini, on a un morphisme de transfert $s_* : W(K) \rightarrow W(F)$. Lorsque K/F est quadratique ou de degré impair, la situation créée par ces morphismes d'anneaux est bien comprise (Scharlau, 1985, Chapter 2, §5) et peut s'exprimer au moyen de suites exactes. Si par exemple K/F est quadratique avec $K = F(\sqrt{\delta})$, le noyau de $r_{K/F}^*$ est l'idéal engendré par la forme quadratique $\langle 1, -\delta \rangle$ (Pfister, 1966), ce qui s'exprime par l'exactitude de la suite de $W(F)$ -modules suivante :

$$W(F) \xrightarrow{t} W(F) \xrightarrow{r_{K/F}^*} W(K) \quad (1.22)$$

Ici, t est le morphisme provenant de la multiplication par $\langle 1, -\delta \rangle$. En y intégrant le transfert s_* , Elman et Lam ont précisé (1.22) en prouvant l'exactitude du triangle suivant (voir Scharlau, 1985, Chapter 2, Theorem 5.10) :

$$\begin{array}{ccc} W(F) & \xrightarrow{r_{K/F}^*} & W(K) \\ & \searrow t & \swarrow s_* \\ & & W(F) \end{array}$$

Dans le cas des formes hermitiennes, intéressons-nous d'abord aux deux cas de l'exemple 1.5 pour lesquels les injections de Jacobson (qui sont des applications de transfert) peuvent être incluses dans des suites exactes plus longues. Ainsi, si K/F est une extension quadratique munie de son involution canonique $-$, on a la suite exacte de $W(F)$ -modules suivante (Milnor & Husemoller, 1973, Appendix 2) :

$$0 \longrightarrow W(K, -) \longrightarrow W(F) \longrightarrow W(K) \quad (1.23)$$

Si $(D, -)$ est une algèbre de quaternions à division sur F munie de son involution canonique et si $K = F(\sqrt{a}) \subset Q$ est stable par $-$, la suite suivante est exacte (Lewis, 1979, 1982) :

$$0 \longrightarrow W(D, -) \longrightarrow W(K, -) \longrightarrow W^{-1}(D, -) \longrightarrow W(K) \quad (1.24)$$

Plus généralement, si (A, σ) est une algèbre à involution sur F et \tilde{A} est le centralisateur de A vis-à-vis d'un certain élément antisymétrique, on a la suite exacte suivante sous certaines conditions (Parimala et al., 1995) :

$$W^\varepsilon(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_1^\varepsilon} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \xrightarrow{\rho_1^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2). \quad (1.25)$$

Notons que cette suite intègre deux applications de transfert ($\pi_1^\varepsilon, \pi_2^\varepsilon$) et une application de restriction (ρ_1^ε) : nous rappelons ci-dessous les conditions d'existence de cette suite ainsi que les notations employées. Dans le cas d'une algèbre de quaternions à involution canonique $(D, -)$, la suite (1.24) est un cas particulier de la suite précédente en tenant compte de l'injection de Jacobson. La suite (1.24) peut également être prolongée et symétrisée (Lewis, 1982) :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow W(D, -) \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W^{-1}(D, -) \longrightarrow W(L) \longrightarrow W^{-1}(D, -) \longrightarrow \\ \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W(D, -) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Nous expliquons maintenant comment il est possible de prolonger la suite exacte (1.25) dans le même esprit que cette dernière suite pour l'intégrer dans un octogone exact qui généralise aussi les suites précédentes (Grenier-Boley & Mahmoudi, 2005).

1.3.1.1 Conditions d'existence et définitions des applications

Soient (A, σ) une algèbre à involution sur F d'espèce quelconque et $\varepsilon \in F$ vérifiant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$. On reprend les hypothèses de Parimala et al., 1995 en supposant l'existence de $\lambda, \mu \in A^*$ vérifiant :

$$\begin{cases} \sigma(\lambda) = -\lambda \text{ et } \sigma(\mu) = -\mu, \\ \mu\lambda = -\lambda\mu, \\ K = F(\lambda) \text{ est une extension quadratique de } F. \end{cases} \quad (1.27)$$

Nous notons \tilde{A} pour désigner le centralisateur de K dans A : alors, \tilde{A} est une algèbre centrale simple sur K par le théorème du double centralisateur (Scharlau, 1985, Chapter 8, Theorem 3.2). Notons que ces conditions sont facilement satisfaites par les extensions quadratiques ou les algèbres de quaternions munies de leurs involutions canoniques, ce qui permet d'englober les cas de l'exemple 1.5. Plus généralement, elles sont également satisfaites par les algèbres de multiquaternions ce qui, en vertu du théorème de Merkurjev (1981) et de l'équivalence de Morita, permet d'englober tous les cas où l'involution est de première espèce ou de seconde espèce et d'exposant 2 (en prenant toutefois certaines précautions) : nous verrons une illustration de cela dans la sous-section 1.3.2.

Sous les conditions (1.27), on a $\mu\tilde{A} = \tilde{A}\mu$, $\mu^2 \in \tilde{A}$, $\sigma(\tilde{A}) = \tilde{A}$ et $A = \tilde{A} \oplus \mu\tilde{A}$. D'une part, l'algèbre \tilde{A} est munie des involutions $\sigma_1 = \sigma|_{\tilde{A}}$ et $\sigma_2 = \text{Int}(\mu^{-1}) \circ \sigma_1$. D'autre part, on a également deux projections K -linéaires : $\pi_1 : A \rightarrow \tilde{A} : a_1 \oplus \mu a_2 \mapsto a_1$ et $\pi_2 : A \rightarrow \tilde{A} : a_1 \oplus \mu a_2 \mapsto a_2$. Ces propriétés permettent de définir diverses applications de transfert et de restriction.

Si (V, h) est une forme ε -hermitienne sur (A, σ) , on définit $\pi_i^\varepsilon(h) : V \times V \rightarrow \tilde{A}$ (pour $i = 1, 2$) en posant $\pi_i^\varepsilon(h)(x, y) = \pi_i(h(x, y))$ et $\pi_3^\varepsilon(h) = \lambda\pi_1^\varepsilon(h)$.

Si (V, f) est une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_1) , on définit $(V \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_1^\varepsilon(f))$ par

$$\rho_1^\varepsilon(f)(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \sigma(\alpha)\lambda f(x, y)\beta,$$

pour tous $x, y \in V$ et tous $\alpha, \beta \in A$ et on pose $\rho_3^\varepsilon(f) = \rho_1^{-\varepsilon}(\lambda^{-1}f)$. Enfin, si (V, f) est une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_2) , on définit $(V \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_2^\varepsilon(f))$ par

$$\rho_2^\varepsilon(f)(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \sigma(\alpha)\lambda\mu f(x, y)\beta,$$

pour tous $x, y \in V$ et tous $\alpha, \beta \in A$.

Toutes les applications définies respectent la régularité des formes, les classes d'isométrie, la somme orthogonale et l'hyperbolicité et induisent donc des applications entre les groupes de Witt adéquats.

1.3.1.2 Résultats d'exactitude

Sous les conditions (1.27), la suite exacte (1.25) existe. Plus généralement :

Théorème 1.28. *Sous les conditions (1.27), on a un octogone exacte de $W(F, \sigma|_F)$ -*

modules :

$$\begin{array}{ccccc}
& & W^\varepsilon(A, \sigma) & \xrightarrow{\pi_1^\varepsilon} & W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) & & \\
& \nearrow \rho_2^{-\varepsilon} & & & & \searrow \rho_1^\varepsilon & \\
W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_2) & & & & & & W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \\
\uparrow \pi_2^\varepsilon & & & & & & \downarrow \pi_2^{-\varepsilon} \\
W^\varepsilon(A, \sigma) & & & & & & W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2) \\
& \nwarrow \rho_3^\varepsilon & & & & \swarrow \rho_2^\varepsilon & \\
& & W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) & \xleftarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} & W^{-\varepsilon}(A, \sigma) & &
\end{array}$$

Comme annoncé, le résultat précédent prolonge la suite (1.25). Puisque la multiplication par λ induit un isomorphisme $W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1) \simeq W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1)$, l'octogone obtenu précédemment présente une asymétrie antipodale et l'exactitude de l'octogone équivaut à celle du carré obtenu en ajoutant les groupes de Witt qui y sont opposés

$$\begin{array}{ccc}
W^\varepsilon(A, \sigma) \oplus W^{-\varepsilon}(A, \sigma) & \longrightarrow & W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \oplus W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1) & (1.29) \\
\uparrow & & \downarrow & \\
W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2) \oplus W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_2) & \longleftarrow & W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \oplus W^\varepsilon(A, \sigma) &
\end{array}$$

Cet octogone généralise aussi les suites précédentes. Si (A, σ) est une algèbre de quaternion déployée à involution canonique, l'octogone exact symétrise (1.23) :

$$0 \longrightarrow W(K, -) \longrightarrow W(F) \longrightarrow W(K) \longrightarrow W(F) \longrightarrow W(K, -) \longrightarrow 0 \quad (1.30)$$

Si (A, σ) est une algèbre de quaternions à division munie de son involution canonique, l'octogone exact redonne la suite (1.26). Ces deux suites étaient déjà des cas particuliers d'octogones exacts (Lewis, 1983, 1985), voir aussi Lewis, 1982.

On peut généraliser le théorème 1.28 au cas des groupes de Witt équivariants, c'est-à-dire aux groupes de Witt des formes invariantes sous l'action d'un groupe fini G (Grenier-Boley & Mahmoudi, 2005, Theorem 1.2), ce dernier octogone étant à son tour un cas particulier de l'exactitude d'une tresse en L -théorie qui devient un octogone exact dans le cas quadratique semisimple (Ranicki, 1987).

1.3.1.3 Éléments de preuve

La preuve du théorème 1.28 repose sur différents ingrédients qui s'inspirent de la preuve de l'exactitude de (1.25).

Pour prouver que la suite est un complexe, on prouve l'existence d'un lagrangien pour l'image d'un espace hermitien par chaque composée de deux applications successives de l'octogone : cela repose sur le fait que les notions d'hyperbolicité et de métabolicité coïncident puisque $\text{car}(F) \neq 2$. Pour cela, on définit un module totalement isotrope qui s'avère être un lagrangien par un argument de dimension.

La preuve de l'exactitude diffère un peu selon que le noyau que l'on considère est celui d'une application de transfert ou de restriction. Dans tous les cas, partant d'une forme (V, h) dans un noyau, on construit une forme dans l'image de l'application précédente : la non dégénérescence de cette forme vient de ce que l'on peut supposer que la forme originelle est anisotrope par équivalence de Morita (voir Grenier-Boley,

2004 ou Grenier-Boley & Mahmoudi, 2005). Dans le cas du noyau d'une application de transfert, la forme (V, h) et son lagrangien permettent de construire une forme dans l'image de l'application de restriction précédente isométrique à (V, h) . Dans le cas du noyau d'une application de restriction, la forme (V, h) est définie sur un \tilde{A} -module et il faut en outre construire une forme sur un A -module, ce qui passe par la définition d'une structure de A -module adéquate.

1.3.2 Ordres des anneaux ou groupes de Witt

Le théorème 1.28 a des applications intéressantes pour déterminer l'ordre des groupes de Witt. Avant d'expliquer cela, repartons des mêmes cas qu'au début de la sous-section 1.3.1.

Si K/F est une extension de corps finie, il est naturel de se demander s'il y a une relation entre les ordres de $W(K)$ et de $W(F)$. Si K/F est de degré impair, un théorème de Springer implique qu'il y a une injection de $W(F)$ dans $W(K)$ (voir Scharlau, 1985, Chapter 2, Corollary 5.4), et donc la finitude de $W(K)$ entraîne celle de $W(F)$. En général, cette propriété n'est plus vraie si l'extension est de degré pair par un théorème de Scharlau (voir Lam, 2005, Chapter VII, Theorem 2.5). Cependant, dans le cas d'une extension quadratique K/F , on a $|W(K)| \leq |W(F)|^2$ par le triangle exact d'Elman-Lam et le défaut de cette inégalité peut être calculé par (1.30) : $|W(K)||W(K, -)|^2 = |W(F)|^2$ (Lewis, 1982). De même, dans le cas où $(D, -)$ est une algèbre de quaternions à division sur F munie de son involution canonique, on déduit de l'injection de Jacobson que la finitude de $W(F)$ implique celle de $W(D, -)$ et de (1.24) que $|W^\varepsilon(D, -)||W^{-\varepsilon}(D, -)| = |W(F)|$ (Lewis, 1982). Plus généralement, nous montrons :

Théorème 1.31 (Grenier-Boley & Mahmoudi, 2005, Corollary 1.3, Corollary 7.3).

- (1) Soit (A, σ) une algèbre à involution de première espèce sur F . Alors on a $|W^\varepsilon(A, \sigma)||W^{-\varepsilon}(A, \sigma)| = |W(F)|$.
- (2) Soit (A, σ) une algèbre à involution sur F de seconde espèce qui est une algèbre de multiquaternions. Alors $|W^\varepsilon(A, \sigma)| = |W(F, \sigma|_F)|$.

La preuve de ce résultat repose sur le fait que A est Brauer-équivalente à une algèbre de multiquaternions Q , ce qui vient du théorème de Merkurjev (1981) pour (1). Il existe une involution τ sur Q du même type que σ et $W^\varepsilon(A, \sigma) \simeq W^{\varepsilon'}(Q, \tau)$ par équivalence de Morita (voir sous-section 1.1.2.3) donc on peut supposer que $A = Q$ et $\sigma = \tau$. Dans ces conditions, l'octogone exact 1.28 existe et la conclusion suit par récurrence sur le nombre d'algèbres de quaternions et par équivalence de Morita.

Nous ne savons pas si la conclusion de (2) demeure pour les algèbres à involution de seconde espèce en général. Notons que les résultats de Lewis (1982) impliquent des résultats qui lient les cardinaux des groupes de classes de carrés et de normes que nous avons déjà évoqués dans la sous-section 1.2.2.1. En général, nous ne savons pas non plus si l'octogone 1.28 peut impliquer de tels résultats dans la mesure où on ne voit pas d'analogues évidents de ces groupes de classes en général.

1.3.3 Critères d'isomorphisme

L'objectif de cette sous-section est de rendre compte de différents critères d'isomorphisme pour deux types d'anneaux de Witt (classique, réduit) et deux types de groupes de Witt (ceux de l'exemple 1.5). Nous avons choisi de l'organiser selon les hypothèses faites sur le corps de base afin de mettre en valeur les attributs du corps sur lesquels portent ces critères : en particulier, cela permet d'insister sur les changements de cadres opérés entre un type de corps et un autre. Nous nous intéresserons aux corps quelconques (1.3.3.1), aux corps globaux (1.3.3.2), aux corps réels (1.3.3.3) et aux corps SAP (1.3.3.4). Selon le type de corps, les critères

pourront être arithmétiques, algébriques ou topologiques. L'organisation secondaire repose sur le type d'anneau ou de groupe de Witt. Pour éviter les redites, nous faisons quelques rappels et fixons des notations.

Si F est un corps réel, on note X_F l'ensemble des ordres de F . L'ensemble X_F est un espace topologique pour la prébase¹³ donnée par les ouverts-fermés $H(a) = \{P \in X_F \mid a \in P\}$. L'ensemble X_F est alors un espace booléen (compact, totalement discontinu, Hausdorff). Si T est un préordre de F , on désigne par $W_T(F)$ l'anneau de Witt réduit relativement à T . On peut définir $W_T(F)$ de façon interne comme dans la théorie classique mais on en a une bonne idée en rappelant qu'il est en fait isomorphe à l'anneau quotient de $W(F)$ par l'idéal engendré par les formes binaires $\langle 1, -t \rangle$ pour $t \in T^*$. On désigne par X_F/T l'ensemble des ordres de F contenant T : c'est un fermé de X_F et un espace topologique pour la topologie induite. Nous renvoyons à Lam, 1983, à Lam, 2005, Chapter VIII, §6, §9 ou à Scharlau, 1985, Chapter 3, §5 pour plus de détails.

Si F est un corps global, c'est-à-dire un corps de nombres ou un corps de fonctions algébrique en une variable, on note Ω_F l'ensemble des places non triviales de F , Ω_F^r celui des places réelles et si P est une place non triviale, F_P désigne la complétion de F en P . Si $P \in \Omega_F^r$, F_P peut être vu comme un corps réel clos, euclidien ayant F_P^2 comme unique ordre (Scharlau, 1985, Chapter 3, Theorem 1.1.4) : on dit que $a \in F^*$ est positif en P et on écrit $a >_P 0$ si $a \in F_P^{*2}$, négatif sinon.

Dans la suite de la sous-section, (D, σ) désignera une algèbre à involution sur F de l'un des deux types mentionnés dans l'exemple 1.5 : une extension quadratique $F(\sqrt{a})/F$ munie de son automorphisme non trivial (cas 1), une algèbre de quaternions à division $(a, b)_F$ munie de son involution canonique (cas 2). On désigne par N la forme norme de D , soit $N = \langle 1, -a \rangle$ (cas 1) ou $N = \langle\langle a, b \rangle\rangle$ (cas 2) : notons que $D_F(N) = N(F(\sqrt{a})^*)$ est le groupe de normes de $F(\sqrt{a})/F$ (cas 1), $D_F(N) = \text{Nrd}_{D/F}(D^*)$ où $\text{Nrd}_{D/F}$ est l'application de norme réduite (cas 2). Lorsque F est réel, on notera $X_D = H(-a)$ (cas 1), $X_D = H(-a) \cap H(-b)$ (cas 2). Si F est global, on note $\Omega_F^D = \{P \in \Omega_F^r \mid a <_P 0\} := \Omega_F^a$ (cas 1), $\Omega_F^D = \Omega_F^a \cap \Omega_F^b$ (cas 2). Lorsque l'on considèrera deux algèbres à involution (D_1, σ_1) et (D_2, σ_2) , elles seront implicitement toutes deux dans le même cas avec des notations adaptées.

1.3.3.1 Corps quelconques

Deux corps F_1 et F_2 ayant des anneaux de Witt isomorphes en tant qu'anneaux sont dits Witt-équivalents. Lorsque les corps sont quelconques, le critère de Harrison caractérise la Witt-équivalence en termes de propriétés algébriques des corps.

Théorème 1.32 (Harrison, 1970). *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Les corps F_1 et F_2 sont Witt-équivalents.*
- (2) *Il existe un isomorphisme de groupes $t : F_1^*/F_1^{*2} \rightarrow F_2^*/F_2^{*2}$ avec $t(-1) = -1$ et tel que pour tous $x, y \in F_1^*$, la forme quadratique $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur F_1 si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur F_2 .*

En vertu des propriétés des formes de Pfister, la condition sur les formes dans (2) peut s'exprimer de diverses manières : on peut la remplacer par l'existence d'un isomorphisme entre $I^2(F_1)/I^3(F_1)$ et $I^2(F_2)/I^3(F_2)$ faisant commuter un certain diagramme (voir Perlis, Szymiczek, Conner & Litherland, 1994). Puisque $I^2(F)/I^3(F)$ est isomorphe à la 2-torsion du groupe de Brauer (Merkurjev, 1981), elle peut aussi s'exprimer dans ce cadre avec des classes d'algèbres de quaternions adéquates.

Pour revenir à la problématique de la détermination de l'anneau de Witt, mentionnons que les invariants classiques de corps couplés à ce résultat permettent cette

13. Tout ouvert de X_F est donc union d'intersections finies d'ensembles de cette prébase.

détermination dans certains cas : corps réels clos, corps quadratiquement clos, corps finis, corps obtenus comme complétions d'un corps global (Szymiczek, 2009, 6.2).

D'après ce critère, la Witt-équivalence préserve l'ordre du groupe des classes de carrés. La classification à Witt-équivalence près se réduit donc aux corps ayant des groupes de classes de carrés de même cardinalité, à commencer par les cardinaux finis (voir Lam, 2005, Chapter VI, Chapter XII, §5) : elle est connue pour les corps dont le groupe de classes de carrés est inférieur ou égal à 32 (voir Szymiczek, 2009, 6.3). Notons toutefois une subtilité de la classification : il existe des corps qui ont le même nombre de classes de carrés, ont des groupes de Witt isomorphes mais qui ne sont pas Witt-équivalents (Szymiczek, 2009, 6.3). Ainsi, pour comprendre les formes quadratiques sur un corps, la structure de groupe de l'anneau de Witt ne suffit pas. Cela nous incite plutôt à préférer la structure d'anneau (cas 1) et la structure de $W(F, \sigma|_F)$ -module (cas 2) de $W(D, \sigma)$ plutôt que celle de groupe pour énoncer nos critères d'isomorphie.

Théorème 1.33 (Grenier-Boley, 2009, Theorem 1.3, Corollary 1.4). *Soient (D_1, σ_1) et (D_2, σ_2) deux algèbres à involution sur F_1 et F_2 respectivement et supposons que $F_1 = F_2$ dans le cas 2. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Il existe un isomorphisme $W(D_1, \sigma_1) \simeq W(D_2, \sigma_2)$.*
- (2) *Il existe un isomorphisme de groupes $t : F_1^*/D_{F_1}(N_1) \simeq F_2^*/D_{F_2}(N_2)$ avec $t(-1) = -1$ et tel que pour tous $x, y \in F_1^*$, la forme quadratique $N_1 \otimes \langle\langle x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur F_1 si et seulement si la forme quadratique $N_2 \otimes \langle\langle t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur F_2 .*

Dans le (1) ci-dessus, « isomorphisme » signifie tantôt « isomorphisme d'anneaux » (cas 1), tantôt « isomorphisme de $W(F_1, \sigma|_{F_1})$ -modules » (cas 2). Pour le cas 2, il existe un critère plus général lorsque F_1 et F_2 ne sont plus forcément égaux qui prend en compte le transport de la structure de module (Grenier-Boley, 2009, Theorem 3.7). Comme pour le critère de Harrison, on peut montrer que la condition $t(-1) = -1$ ne découle pas des autres (Grenier-Boley, 2009, Example 3.4). La condition (2) de ce critère est naturelle en prenant en compte les injections de Jacobson de l'exemple 1.5 : elle peut aussi s'exprimer en termes d'hyperbolicité voire d'isotropie de formes (de Pfister) hermitiennes (voir 1.2.1.2).

Dans le cas 1, la preuve de ce résultat est similaire à celle du critère de Harrison, dans la mesure où $W(D, \sigma)$ est un anneau et où les outils de $W(F)$ nécessaires à la preuve peuvent y être transposés. Dans le cas 2, celle-ci doit être plus largement adaptée. En fait, l'isomorphisme de (1) induit naturellement t au moyen du discriminant à signe, les autres propriétés découlant de celles des formes de Pfister. Pour la réciproque, l'application t permet de définir une application Φ envoyant une forme diagonale sur une forme diagonale, les autres conditions assurant que Φ ne dépend pas du choix de la diagonalisation (par équivalence en chaîne), préserve l'hyperbolicité et induit finalement l'isomorphisme souhaité. Il n'est pas étonnant que $F^*/D_F(N)$ soit l'analogue de F^*/F^{*2} du critère de Harrison pour au moins deux raisons *a priori* qui sont justifiées par la preuve *a posteriori* : dans chaque cas, on peut voir les entrées des diagonalisations des formes comme éléments de ce groupe et le discriminant à signe est à valeurs dans ce groupe.

1.3.3.2 Corps globaux

Sur les corps globaux, Perlis et al., 1994 ont montré que le critère de Harrison pouvait s'exprimer en termes de propriétés arithmétiques de ces corps.

Théorème 1.34 (Perlis, Szymiczek, Conner, Litherland). *Si F_1 et F_2 sont des corps globaux, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Les corps F_1 et F_2 sont Witt-équivalents.*

(2) Il existe un isomorphisme de groupes $t : F_1^*/F_1^{*2} \rightarrow F_2^*/F_2^{*2}$ et une bijection $T : \Omega_{F_1} \rightarrow \Omega_{F_2}$ tels que pour tous $x, y \in F_1^*/F_1^{*2}$ et tout $P \in \Omega_{F_1}$ on ait $(x, y)_P = (t(x), t(y))_{T(P)}$ en tant que symboles de Hilbert.

Ce résultat a de multiples conséquences importantes. D'abord, les corps de fonctions globaux se scindent en deux classes de Witt-équivalence et il existe un ensemble complet d'invariants pour la Witt-équivalence des corps de nombres (Szymiczek, 2009, 6.4). Il y a aussi une conséquence spectaculaire : la Witt-équivalence des corps de nombres préserve le degré des corps sur \mathbb{Q} et donc la classe de Witt-équivalence de \mathbb{Q} pour les corps de nombres est un singleton.

Dans le cas des corps globaux, le théorème 1.33 se reformule lui aussi en des termes arithmétiques.

Théorème 1.35 (Grenier-Boley, 2009, Theorem 1.5, 4.6). *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 1.33, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) Il existe un isomorphisme $W(D_1, \sigma_1) \simeq W(D_2, \sigma_2)$.
- (2) Il existe un isomorphisme de groupes $t : F_1^*/D_{F_1}(N_1) \simeq F_2^*/D_{F_2}(N_2)$ avec $t(-1) = -1$ et une bijection $T : \Omega_{F_1}^{D_1} \rightarrow \Omega_{F_2}^{D_2}$ tels que pour tous $x, y \in F_1^*/D_{F_1}(N_1)$ et tout $P \in \Omega_{F_1}^{D_1}$, la forme quadratique $N_1 \otimes \langle \langle x, y \rangle \rangle$ est hyperbolique sur $(F_1)_P$ si et seulement si la forme quadratique $N_2 \otimes \langle \langle t(x), t(y) \rangle \rangle$ est hyperbolique sur $(F_2)_{T(P)}$.

Les corps de fonctions globaux n'ayant pas de places réelles, le théorème 1.35 n'apporte rien au théorème 1.33. Pour les corps de nombres, les résultats 1.34 et 1.35 sont à la fois analogues et assez différents.

On repère mieux l'analogie en remarquant que $(x, y)_P = 1$ si et seulement si $\langle \langle x, y \rangle \rangle$ est hyperbolique. Dans les deux cas, la preuve de (2) \Rightarrow (1) est similaire, utilisant le principe de Hasse-Minkowski, le théorème de Grunwald-Wang¹⁴ et le critère de Harrison correspondant.

La première différence est que l'on suppose $t(-1) = -1$ dans 1.35 : dans 1.34, cette propriété est garantie par le théorème de Grunwald-Wang, ce qui n'est plus le cas en 1.35 puisque l'on ne considère plus toutes les places. La seconde différence vient de ce que pour un corps de nombres, il y a un nombre fini de places archimédiennes et donc $|\Omega_F^D|$ est fini. D'une part, la bijectivité de T est alors plus facile à prouver et à établir dans des cas précis. D'autre part, la preuve de (1) \Rightarrow (2) pour 1.35 est beaucoup plus élémentaire que celle de 1.34 : en fait, pour 1.35, la preuve reste dans le cadre arithmétique des places réelles pour les corps globaux alors que pour 1.34, il y a nécessité d'impliquer une description de la 2-torsion du groupe de Brauer pour construire la bijection T pour les places non archimédiennes.

1.3.3.3 Corps réels

Sur les corps réels, nous avons pu établir un résultat dont l'énoncé est également analogue à 1.34 en remplaçant Ω_F par X_F et les conditions locales sur les symboles de Hilbert par des conditions de positivité locale. Le critère de Witt-équivalence que nous obtenons mêle des conditions de natures algébriques et topologiques.

Théorème 1.36 (Grenier-Boley & Hoffmann, 2013, Theorem 1.3). *Soient F_1 et F_2 deux corps réels et considérons les trois énoncés suivants.*

- (1) Les corps F_1 et F_2 sont Witt-équivalents.
 - (2) Il existe un isomorphisme de groupes $t : F_1^*/F_1^{*2} \rightarrow F_2^*/F_2^{*2}$ et un homéomorphisme $T : X_{F_1} \rightarrow X_{F_2}$ tels que pour tout $x \in F_1^*/F_1^{*2}$ et tout $P \in X_{F_1}$, x est positif en P si et seulement si $t(x)$ est positif en $T(P)$.
 - (3) Identique à (2) en remplaçant « homéomorphisme » par « bijection ».
- Alors (1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3). Si de plus $u(F_1), u(F_2) \leq 2$ alors (2) \Rightarrow (1).

14. C'est le principe local-global pour les carrés des corps de nombres.

Mentionnons d'abord que le u -invariant utilisé ici est celui adapté aux corps réels, soit $u(F) = \text{supdim}(\mathcal{C}_5(F))$ avec $\mathcal{C}_5(F) = \{\text{formes quadratiques de torsion sur } F\}$.

Exemple 1.37. L'implication (2) \Rightarrow (1) n'est pas valable sous une hypothèse plus faible que celle faite dans l'énoncé. Choisissons $F_1 = \mathbb{Q}$ et $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ de sorte que F_1 et F_2 ont un unique ordre et sont de u -invariant 4. Alors les conditions de (2) sont satisfaites (Grenier-Boley & Hoffmann, 2013, Remark 2.3). Cependant F_1 et F_2 ne sont pas Witt-équivalents, comme on l'a mentionné en 1.3.3.2.

La preuve de 1.36 repose sur le critère de Harrison et sur un autre résultat dû à Harrison, qui établit une bijection entre X_F et $\{I \in \text{Spec}(W(F)) \mid \text{car}(I) = 0\}$ (voir Lam, 2005, Chapitre VIII, Proposition 7.4).

Dans le cas des algèbres à involutions, sous les mêmes hypothèses que le théorème 1.33, on démontre un analogue du théorème 1.36 pour les corps de u -invariant inférieur ou égal à 6 (cas 1), ou à 14 (cas 2) (voir Grenier-Boley & Hoffmann, 2013, Theorem 5.4). La preuve est analogue en utilisant une bijection adaptée à chaque cas¹⁵ : entre X_D et $\{I \in \text{Spec}(W(D, \sigma)) \mid \text{car}(I) = 0\}$ (cas 1), ou entre X_D et $\{I \in \text{Supp}(W(D, \sigma)) \mid \text{car}(I) = 0\}$ (cas 2).

Dans le cadre de la théorie réduite, le résultat qui adapte le critère de Harrison et le théorème 1.36 s'énonce sans restriction sur les corps.

Théorème 1.38 (Grenier-Boley & Hoffmann, 2013, Theorem 4.3). *Soient T un préordre sur F_1 et S un préordre sur F_2 . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Il existe un isomorphisme d'anneaux $W_T(F_1) \simeq W_S(F_2)$.*
- (2) *Il existe un isomorphisme de groupes $t : F_1^*/T^* \rightarrow F_2^*/S^*$ avec $t(-1) = -1$ tel que pour tous $x, y \in F_1^*$ la forme $\langle 1, -x, -y, xy \rangle_T$ est T -hyperbolique sur F_1 si et seulement si la forme $\langle 1, -t(x), -t(y), t(x)t(y) \rangle_S$ est S -hyperbolique sur F_2 .*
- (3) *Il existe un isomorphisme de groupes $t : F_1^*/T^* \rightarrow F_2^*/S^*$ et un homéomorphisme $\Phi : X_{F_1}/T \rightarrow X_{F_2}/S$ tel que pour tous $x \in F_1^*/T^*$ et tout $P \in X_{F_1}/T$, x est positif en P si et seulement si $t(x)$ est positif en $\Phi(P)$.*
- (4) *Identique à (3) en remplaçant « homéomorphisme » par « bijection ».*

1.3.3.4 Corps SAP

Dans le cas des corps SAP (on consultera 1.2.2.2 pour une définition et des exemples), les critères de Witt-équivalence s'énoncent plus simplement. Ainsi, dans la théorie absolue, le théorème 1.36 a la forme suivante.

Théorème 1.39 (Grenier-Boley & Hoffmann, 2013, Theorem 1.4). *Soient F_1 et F_2 deux corps SAP avec $u(F_1), u(F_2) \leq 2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Les corps F_1 et F_2 sont Witt-équivalents.*
- (2) *Il existe un homéomorphisme $X_{F_1} \simeq X_{F_2}$ et un isomorphisme de groupes $\Sigma F_1^\bullet / F_1^{*2} \simeq \Sigma F_2^\bullet / F_2^{*2}$.*

On notera que la Witt-équivalence s'y caractérise au moyen d'une propriété algébrique et d'une propriété topologique. La preuve utilise plusieurs passages entre ces deux cadres : nous y reviendrons en section 1.7.

Dans la théorie réduite, le théorème 1.38 caractérise la Witt-équivalence par une seule condition topologique.

Théorème 1.40 (Grenier-Boley & Hoffmann, 2013, Corollary 4.6). *Soient F_1 et F_2 deux corps SAP, T un préordre sur F_1 et S un préordre sur F_2 . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Il existe un isomorphisme d'anneaux $W_T(F_1) \simeq W_S(F_2)$.*
- (2) *Il existe un homéomorphisme $X_{F_1}/T \simeq X_{F_2}/S$.*

¹⁵. Le support $\text{Supp}(M)$ d'un R -module M est l'ensemble des idéaux I de R tels que le localisé de M en I est non nul.

En conséquence du théorème 1.39, on peut prouver un résultat de classification pour la Witt-équivalence des corps de fonctions sur un corps réel clos.

Théorème 1.41 (Grenier-Boley & Hoffmann, 2013, Corollary 3.3). *Soit $F(t)$ le corps des fonctions rationnelles en une variable sur un corps réel clos F et soit $L/F(t)$ une extension finie. Alors on a les cas mutuellement exclusifs suivants :*

$$\begin{aligned} W(L) &\cong W(F(t)) && \text{si } L \text{ est réel;} \\ W(L) &\cong W(F(t)(\sqrt{-1})) && \text{si } L \text{ est non réel et } \sqrt{-1} \in L; \\ W(L) &\cong W(F(t)(\sqrt{-(t^2+1)})) && \text{si } L \text{ est non réel et } \sqrt{-1} \notin L. \end{aligned}$$

Ce théorème est une légère généralisation d'un résultat dû à Koprowski (2002) qui l'obtient lorsque le corps des constantes de L est réel clos, ce qui correspond aux cas 1 et 3 de 1.41 (Koprowski, 2002, Proposition 2.2, Corollary 4.2). Les méthodes employées dans les preuves de ces résultats diffèrent : usage des places réelles et de la notion de « quaternion-symbol equivalence » modérée ou sauvage pour ceux de Koprowski, utilisation du théorème 1.36 et de ce que X_L et $X_{F(t)}$ sont homéomorphes¹⁶ dans notre cas. Le théorème 1.41 a été étendu aux anneaux d'holomorphie réels (Koprowski, 2012, Theorem 5.15).

1.4 Sous-algèbres étales symétriques

Une partie de la théorie des algèbres centrales simples est dédiée à l'étude de certaines de leurs sous-algèbres. Pour certains types, des résultats de structure peuvent être établis et en permettent une compréhension fine : les sous-algèbres simples (Bourbaki, 2012, §14.5), les sous-corps commutatifs maximaux (Pierce, 1982, §13.1) ou plus généralement les sous-algèbres commutatives maximales (Bourbaki, 2012, §14.6), les sous-algèbres étales maximales (Bourbaki, 2012, §14.7). Certains de ces résultats ont donné lieu à des outils fondamentaux de la théorie. Dans le cas des sous-algèbres simples, citons le théorème de Skolem-Noether (Pierce, 1982, §12.6) et le théorème du Double Centralisateur (Pierce, 1982, §12.7). Les sous-corps maximaux ont des liens avec les corps déployants et le groupe de Brauer (Draxl, 1983, §9 ; Scharlau, 1985, Chapter 8). Les sous-algèbres commutatives maximales peuvent être caractérisées de différentes manières (Bourbaki, 2012, §14, Proposition 3) et renseignent sur les sous-algèbres étales (Bourbaki, 2012, §14, Corollaire 1).

Dans la théorie des algèbres centrales simples à involution, l'étude correspondante porte sur les sous-algèbres qui sont stables sous l'involution. Dans cette section, nous la menons pour les sous-algèbres étales qui sont de plus incluses dans l'espace des éléments symétriques. Avant d'énoncer les résultats de cette étude, nous rappelons les principes qui l'ont guidée et les raisons qui l'ont motivée.

Un certain nombre de paramètres influe en général sur les résultats de la théorie des algèbres centrales simples à involution : si la caractéristique du corps est différente de 2 ou vaut 2, si l'algèbre est ou non à division, le type de l'involution. Nous avons pris comme premier principe d'énoncer des résultats qui soient autant que possible indépendants de ces paramètres pour éviter les distinctions de cas inutiles, en commençant par des notations uniformes (sous-section 1.4.1). Pour cela, nous introduisons la notion de capacité d'une algèbre (sous-section 1.4.2) qui est de plus adaptée à l'étude des sous-algèbres étales symétriques (théorème 1.45). Précisons toutefois que les preuves des résultats reposent souvent sur une distinction de cas parmi ces différents paramètres, les cas orthogonal de caractéristique 2 et unitaire de type intérieur (voir 1.4.1) demandant souvent plus d'attention.

Notre second principe est d'éviter les aspects pathologiques liés à l'étude des algèbres étales quelconques. Pour cela, nous introduisons la notion de sous-algèbre

16. Une preuve complète de ce résultat par Claus Scheiderer figure en appendice de notre article.

nette qui permet d'éviter ces aspects tout en capturant les spécificités des extensions séparables de corps par des éléments symétriques. Cette notion a été difficile à isoler et est spécifique pour le cas orthogonal de caractéristique 2, mais on peut en donner des caractérisations en termes d'assertions classiques de la théorie (voir 1.4.3.1).

Partant de ces principes, notre première motivation est de mener une étude systématique des sous-algèbres étales symétriques sous le prisme des algèbres de capacité fixée et des sous-algèbres nettes. À ce titre, une étude générale des sous-algèbres nettes est menée en sous-section 1.4.3. La définition de sous-algèbre nette est basée sur la possibilité d'utiliser un certain nombre d'outils que nous rappelons préalablement en sous-section 1.4.2. Nous mettons l'accent sur l'extension d'outils de la théorie des algèbres centrales simples, les analogies avec certains de ses résultats et sur différentes manières de caractériser les sous-algèbres nettes. Nous expliquons également comment notre approche conjugue les points de vue algébrique et géométrique des algèbres à involution.

Notre seconde motivation est de mettre en valeur l'utilité des résultats obtenus en tant qu'outils dans l'étude des algèbres centrales simples d'exposant 2. En conséquence d'une étude précise des sous-algèbres nettes quadratiques et des algèbres de capacité 4 (voir sous-section 1.4.4), nous obtenons une preuve conceptuelle d'un théorème de Rowen : toute algèbre à division d'exposant 2 et de degré 8 contient un sous-corps maximal qui est une extension triquadratique du centre (Rowen, 1984, Theorem 1). En fait, nous obtenons directement une version raffinée de ce résultat disant que toute involution symplectique sur une algèbre centrale simple de degré 8 stabilise une extension triquadratique étale du centre (théorème 1.52(2)). Ce résultat était déjà connu pour les algèbres à division en caractéristique différente de 2 en conséquence du théorème de Rowen (Garibaldi, Parimala & Tignol, 2009, Lemma 6.1). Notre approche est inverse : la version raffinée du résultat étant préalablement établie, nous obtenons le théorème de Rowen comme conséquence (corollaire 1.53).

Dans la suite de cette section, nous présentons quelques résultats des travaux que nous avons menés à ce sujet (Becher, Grenier-Boley & Tignol, 2018a).

1.4.1 Hypothèses et notations

Nous fixons des hypothèses et notations uniquement valables pour la section 1.4. Les définitions non mentionnées ne changent pas par rapport au reste du chapitre.

Nous désignons par F un corps arbitraire de caractéristique quelconque et si K est une F -algèbre commutative, nous notons $[K : F] = \dim_F K$. Une F -algèbre est dite étale si elle est isomorphe à un produit direct d'extensions séparables de corps de F (voir Knus et al., 1998, §18 pour d'autres définitions équivalentes). Une F -algèbre étale est déployée si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'elle soit F -isomorphe à F^n .

Si A est une F -algèbre munie d'une involution σ , on note

$$\begin{aligned} \text{Sym}(\sigma) &= \{x \in A \mid \sigma(x) = x\}, \\ \text{Symd}(\sigma) &= \{x + \sigma(x) \mid x \in A\}. \end{aligned}$$

On dit que (A, σ) est une F -algèbre à involution si A est une F -algèbre de dimension finie, σ est une involution sur A avec $F = Z(A) \cap \text{Sym}(\sigma)$ et telles que A n'a pas d'idéaux bilatères non triviaux I tels que $\sigma(I) = I$. On dit que σ est de première espèce (resp. de seconde espèce ou unitaire) si $[Z(A) : F] = 1$ (resp. $[Z(A) : F] = 2$).

Dans la suite de cette section, (A, σ) désigne une F -algèbre à involution. Alors, soit $Z(A) = F$, soit $Z(A)$ est une extension quadratique étale de F dont l'automorphisme non trivial est $\sigma|_{Z(A)}$. Si $Z(A)$ est un corps, A est une $Z(A)$ -algèbre centrale simple, sinon $Z(A) \simeq F \times F$ et σ est unitaire. Dans ce dernier cas, $(A, \sigma) \simeq (A_0 \times A_0^{\text{op}}, \text{sw})$ pour une algèbre centrale simple A_0 sur F et pour l'involution d'échange donnée par $\text{sw}(a_1, a_2^{\text{op}}) = (a_2, a_1^{\text{op}})$ (Knus et al., 1998, (2.14)) :

on dit que (A, σ) est *unitaire de type intérieur*. En caractéristique quelconque, les involutions de type symplectique ou orthogonal peuvent se définir par adjonction à une forme bilinéaire après déploiement du corps de base comme en 1.1.2.4 ; on peut dire aussi que σ est symplectique si $\dim_F \text{Symd}(\sigma) < \dim_F \text{Skew}(\sigma)$ et $1 \in \text{Symd}(\sigma)$, orthogonale sinon.

Si $Z(A)$ est un corps, nous désignons par $\deg A$, $\text{ind } A$ et $\text{coind } A = \deg A / \text{ind } A$ le degré, l'indice et le coindice de A en tant que $Z(A)$ -algèbre. Si $Z(A) \simeq F \times F$, nous définissons les mêmes termes en référence à l'une des deux composantes simples de A . Une algèbre à involution est dite déployée si elle est d'indice 1.

Enfin, on a $\text{Symd}(\sigma) \subseteq \text{Sym}(\sigma)$, et c'est une égalité sauf dans le cas où $\text{car } F = 2$ et (A, σ) est de première espèce. Pour éviter des distinctions de cas, on pose

$$\text{Sym}^*(\sigma) = \begin{cases} \text{Sym}(\sigma) & \text{si } \sigma \text{ est orthogonale ou unitaire,} \\ \text{Symd}(\sigma) & \text{si } \sigma \text{ est symplectique.} \end{cases}$$

Notons que $\text{Sym}^*(\sigma) = \text{Symd}(\sigma)$ sauf si $\text{car } F = 2$ et σ est orthogonale.

1.4.2 Outils

Nous présentons trois outils principaux de nos recherches. Ils permettent à la fois d'explicitier le choix de la définition des sous-algèbres nettes et de donner à voir les techniques qui peuvent être utilisées dans la preuve des résultats qui suivent.

Le théorème du Double Centralisateur est un outil important dans la théorie des algèbres centrales simples (voir Pierce, 1982, §12.7).

Théorème 1.42 (Théorème du Double Centralisateur). *Soient A une algèbre centrale simple sur F , L une sous-algèbre simple de A et notons $C_A(L)$ le centralisateur de L dans A . Alors :*

- (1) *L'algèbre $C_A(L)$ est simple, $C_A(C_A(L)) = L$ et $[L : F] \cdot \dim_F C_A(L) = \dim_F(A)$.*
- (2) *Si L est centrale simple sur F alors $C_A(L)$ l'est aussi et $A \simeq L \otimes_F C_A(L)$.*

Notre premier outil est une extension de l'assertion (1) de ce résultat pour les sous-algèbres commutatives semi-simples. Dans ce cadre plus général, une inégalité de dimensions est conservée (Becher et al., 2018a, Proposition 2.3).

Proposition 1.43. *Soit A une F -algèbre simple de dimension finie. On suppose que $Z(A)$ est séparable sur F . Soit L une F -sous-algèbre de A commutative semi-simple qui est linéairement disjointe de $Z(A)$ sur F . Alors $C_A(L)$ est une F -algèbre semi-simple de centre L et*

$$[L : F] \cdot \dim_F C_A(L) \geq \dim_F A.$$

De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) *On a $[L : F] \cdot \dim_F C_A(L) = \dim_F A$.*
- (b) *Toutes les composantes simples de $C_A(L)$ ont le même degré.*
- (c) *A est libre en tant que L -module à gauche.*
- (d) *A est libre en tant que L -module à droite.*

Ces conditions sont satisfaites si L est un corps ou si $[L : F] = \deg A$.

On voit l'importance de la condition de liberté de A en tant que L -module pour caractériser l'égalité des dimensions : cette condition sera vérifiée par les sous-algèbres nettes. Si L est un corps, ce résultat est une partie du théorème du Double Centralisateur et $[L : F] = \deg A$ équivaut à ce que L est une sous-algèbre commutative maximale ou à ce que A est libre en tant que L -module (voir proposition 1.50(1)).

Les preuves de la plupart de nos résultats (par exemple la preuve de la proposition 1.43) reposent sur l'utilisation d'idempotents (primitifs) d'une certaine algèbre

qui constituent notre second outil. Pour tout idempotent non nul $e \in A$, l'anneau eAe d'unité e est une F -algèbre si on identifie F avec eF . Si A est une algèbre centrale simple sur F , eAe est une algèbre centrale simple sur F qui est Brauer-équivalente à A . Si A est de plus munie d'une involution σ alors eAe est munie de l'involution $\sigma_e = \sigma|_{eAe}$. Dans la suite, il sera important de savoir si ces deux involutions sont de même type (Becher et al., 2018a, Proposition 3.1).

Proposition 1.44. *Soit e un idempotent non nul de $\text{Sym}(\sigma)$. Alors (eAe, σ_e) est une F -algèbre à involution de même espèce que (A, σ) . De plus, (eAe, σ_e) est de même type que (A, σ) sauf si $\text{car } F = 2$, σ est orthogonale et $e \in \text{Symd}(\sigma)$, auquel cas σ_e est symplectique.*

Ce résultat met en valeur la spécificité du cas où $\text{car } F = 2$ et σ est orthogonale (voir aussi Becher et al., 2018a, Exemple 3.2). Nous en tiendrons compte dans la définition des sous-algèbres nettes.

La définition de notre dernier outil part d'un constat général. Si la difficulté d'étude des algèbres à involution est en général proportionnelle au degré de l'algèbre, l'étude des involutions symplectiques en degré n (n est forcément pair, Knus et al., 1998, (2.8)) ressemble souvent à celle des involutions orthogonales en degré $n/2$ en termes d'outils et de difficulté. La capacité est donc une version corrigée du degré qui tient compte de cela, ce qui permet de considérer dans le même temps les algèbres de tous types en toute caractéristique :

$$\text{cap}(A, \sigma) = \begin{cases} \deg A & \text{si } \sigma \text{ est orthogonale ou unitaire,} \\ \frac{1}{2} \deg A & \text{si } \sigma \text{ est symplectique.} \end{cases}$$

Si $n \geq 1$, il existe des F -algèbres à involution de tous types et de capacité n . Le résultat suivant montre que la capacité est étroitement liée aux sous-algèbres étales symétriques (Becher et al., 2018a, Theorem 4.1).

Théorème 1.45. *Toute F -sous-algèbre étale de A contenue dans $\text{Sym}(\sigma)$ est contenue dans $\text{Sym}^*(\sigma)$. De plus*

$$\text{cap}(A, \sigma) = \max\{[L : F] \mid L \text{ est une } F\text{-algèbre étale avec } L \subseteq \text{Sym}(\sigma)\}.$$

La capacité est bien liée au caractère étale dans la mesure où il existe des algèbres commutatives $L \subset \text{Sym}^*(\sigma)$ avec $[L : F] > \text{cap}(A, \sigma)$ (Becher et al., 2018a, Exemple 4.2). La preuve de ce résultat repose sur des arguments qui sont fréquemment utilisés dans nos travaux : usage des idempotents, preuve dans le cas déployé avec le point de vue des involutions adjointes à des formes hermitiennes, extension des scalaires à un corps algébriquement clos et descente à F par un argument de densité pour la topologie de Zariski.

1.4.3 Étude générale des sous-algèbres nettes

Soulignons d'abord que notre étude conjugue finement deux points de vue classiques dans les recherches dédiées aux algèbres à involution : un point de vue géométrique et un point de vue algébrique (voir 1.1.2.3). Géométriquement, on peut faire agir l'algèbre à involution comme une algèbre d'endomorphisme et voir l'involution comme étant adjointe à une forme hermitienne : cette approche fonctionne souvent d'autant mieux que le coindice de l'algèbre n'est pas trop petit. Si le coindice est petit, voire si l'algèbre est à division, on préfère souvent une analyse basée sur un point de vue algébrique interne à l'algèbre centrale simple.

Notre étude et les preuves sous-jacentes font la synthèse de ces deux points de vue. D'une part, nous adoptons en général un point de vue algébrique qui consiste en la reprise d'outils et de techniques classiques, voire en l'extension de certains

d'entre eux (voir 1.4.2). D'autre part, nous avons aussi recours à un point de vue géométrique en traduisant les données d'une telle représentation en termes de sous-algèbres : nous verrons une illustration de ce principe en 1.4.3.2 pour construire explicitement des sous-algèbres nettes déployées.

1.4.3.1 Définition et caractérisations

Définition 1.46. Soit (A, σ) une F -algèbre à involution. Une F -sous-algèbre L de A est dite *nette dans* (A, σ) si L est étale, $L \subseteq \text{Sym}(\sigma)$, A est libre en tant que L -module à gauche et si pour tout idempotent non nul e de L , la F -algèbre à involution $(eAe, \sigma|_{eAe})$ a le même type que (A, σ) .

La définition de sous-algèbre nette intègre la possibilité d'utiliser les outils de la sous-section 1.4.2 : l'égalité de dimensions par passage au centralisateur (proposition 1.43), l'usage des idempotents avec préservation du type entre (A, σ) et $(eAe, \sigma|_{eAe})$ (proposition 1.44) et l'usage de la capacité et du théorème 1.45. Notons que toute extension séparable de F contenue dans $\text{Sym}(\sigma)$ est nette (Becher et al., 2018a, Proposition 3.3, Proposition 5.3) et il est donc légitime d'estimer que la notion de sous-algèbre nette généralise la notion d'extension de corps séparable symétrique en capturant ses spécificités.

Lorsque l'on n'est pas dans le cas où $\text{car } F = 2$ et σ est orthogonale, la condition sur les idempotents est automatique (proposition 1.44) et la netteté d'une sous-algèbre se caractérise de diverses manières par la proposition 1.43 (Becher et al., 2018a, Proposition 5.4).

Proposition 1.47. *Supposons que $\text{car } F \neq 2$ ou que σ est symplectique ou unitaire. Soit L une F -sous-algèbre étale de A avec $L \subseteq \text{Sym}(\sigma)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $[L : F] \cdot \dim_F C_A(L) = \dim_F A$.
- (b) *Toutes les composantes simples de $C_A(L)$ ont le même degré.*
- (c) *L est nette dans (A, σ) .*

Dans le cas complémentaire, la netteté peut néanmoins se caractériser en termes de diverses propriétés des idempotents (voir Becher et al., 2018a, Proposition 5.2).

1.4.3.2 Différentes propriétés des sous-algèbres nettes

Le résultat ci-dessous et le théorème 1.45 montrent que les sous-algèbres nettes existent et que leur dimension maximale est égale à la capacité (Becher et al., 2018a, Proposition 5.6).

Proposition 1.48. *Soit L une F -sous-algèbre étale de A avec $L \subseteq \text{Sym}(\sigma)$ et telle que $[L : F] = \text{cap}(A, \sigma)$. Alors L est nette dans (A, σ) .*

En analogie avec le fait que le degré des sous-corps maximaux divise le degré de l'algèbre (Pierce, 1982, 13.1, Corollary a), on peut établir que le degré d'une sous-algèbre nette divise la capacité (Becher et al., 2018a, Corollary 5.10). On peut affiner ce résultat en caractérisant l'existence de sous-algèbres nettes déployées au moyen de leur degré (Becher et al., 2018a, Corollary 5.12).

Corollaire 1.49. *Soit r un entier positif. Il existe une F -sous-algèbre nette déployée de (A, σ) de degré r si et seulement si r divise $\text{coind } A$ et $\text{cap}(A, \sigma)$.*

Comme annoncé en préambule de 1.4.3, nous montrons comment construire explicitement des sous-algèbres nettes déployées de (A, σ) en adoptant un point de vue géométrique vis-à-vis de (A, σ) (voir 1.1.2.3). Soient (D, τ) une algèbre à division à involution sur F , V un D -espace vectoriel à droite, $A = \text{End}_D(V)$, $h : V \times V \rightarrow D$

une forme hermitienne ou antihermitienne sur (D, τ) et $\sigma = \text{ad}_h$. Soient V_1, \dots, V_r des D -sous-espaces vectoriels de V tels que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, $e_1, \dots, e_r \in A$ les projections qui correspondent à cette décomposition et $L = Fe_1 \oplus \dots \oplus Fe_r$. Alors $L \subseteq \text{Sym}(\sigma)$ si et seulement si la décomposition $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ est orthogonale vis-à-vis de h . De plus, si $L \subseteq \text{Sym}(\sigma)$, L est nette dans (A, σ) si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, r$, on a $\dim_D V_i = \frac{1}{r} \dim_D V$ et h se restreint à une forme non alternée sur V_i au cas où h est non alternée (Becher et al., 2018a, Proposition 5.11).

1.4.3.3 Analogies

Il est possible d'exhiber des analogies entre les propriétés des sous-algèbres nettes et celles des sous-algèbres commutatives ou étales maximales que nous citons en introduction de cette section (Bourbaki, 2012, §14, Proposition 3, Corollaire 1) :

Proposition 1.50. *Soit A une algèbre centrale simple sur F .*

- (1) *Soit L une sous-algèbre commutative semi-simple. Alors L est une sous-algèbre commutative maximale de A si et seulement si le L -module à gauche A est libre de dimension $[L : F]$ si et seulement si $\deg A = [L : F]$.*
- (2) *Toute sous-algèbre étale de A est contenue dans une sous-algèbre commutative maximale de A qui est étale.*

En effet, on peut caractériser les sous-algèbres nettes comme sous-algèbres d'algèbres symétriques étales de dimension $\text{cap}(A, \sigma)$ (Becher et al., 2018a, Proposition 5.9).

Théorème 1.51. *Soit K une F -sous-algèbre de (A, σ) . Alors K est nette dans (A, σ) si et seulement si $K \subseteq L \subseteq \text{Sym}(\sigma)$ pour une F -sous-algèbre étale L de A avec $[L : F] = \text{cap}(A, \sigma)$ et telle que L est libre en tant que K -module.*

En conséquence de ce résultat et de la proposition 1.48, on peut établir des résultats analogues à 1.50(1) et 1.50(2), où la capacité joue le rôle du degré :

- si L est une F -sous-algèbre étale de A avec $L \subseteq \text{Sym}(\sigma)$ alors, L est nette maximale si et seulement si $\text{cap}(A, \sigma) = [L : F]$;
- toute sous-algèbre nette est incluse dans une sous-algèbre nette maximale.

En fait, sauf dans le cas où $\text{car } F = 2$ et σ est orthogonale, si L est une sous-algèbre étale avec $L \subseteq \text{Sym}(\sigma)$, L est maximale si et seulement si $\text{cap}(A, \sigma) = [L : F]$: si $\text{car } F = 2$ et σ est orthogonale, il existe des sous-algèbres étales L de A , maximales et telles que $[L : F] < \text{cap}(A, \sigma)$ (Becher et al., 2018a, Example 5.7). Cela illustre encore le fait que les sous-algèbres nettes préviennent de certaines pathologies des algèbres étales tout en unifiant les considérations sur le type de l'involution et la caractéristique du corps.

1.4.4 Étude des algèbres de capacité 4

Nous appliquons maintenant l'étude des sous-algèbres nettes pour obtenir des résultats de structure sur les algèbres centrales simples d'exposant 2. Rappelons qu'une F -algèbre étale est dite biquadratique (resp. triquadratique) si elle est isomorphe au produit tensoriel de deux (resp. trois) F -algèbres quadratiques étales.

Une étude précise permet de démontrer qu'étant données une F -algèbre à involution (A, σ) et une F -sous algèbre nette quadratique K de L , il existe une sous-algèbre nette L incluse dans $C_A(K)$, linéairement disjointe de K sur F et telle que KL soit une sous-algèbre nette de (A, σ) avec $[KL : F] = \text{cap}(A, \sigma)$ (Becher et al., 2018a, Theorem 6.10). Lorsque l'algèbre est de capacité 4, on obtient (Becher et al., 2018a, Theorem 7.4, Theorem 7.6) :

Théorème 1.52. *Soit (A, σ) une F algèbre à involution de capacité 4.*

(1) *Alors (A, σ) contient une F -sous-algèbre biquadratique nette.*

(2) *Si on suppose que σ est symplectique, A contient une F -sous-algèbre étale triquadratique σ -stable. De plus toute F -sous-algèbre biquadratique nette de (A, σ) est contenue dans une telle sous-algèbre.*

Ce théorème étend les résultats suivants : Garibaldi et al., 2009, Lemma 6.1, Corollary 6.2, Theorem 9.1(1).

On sait que toute algèbre à division d'exposant 2 et de degré au plus 8 contient un sous-corps maximal qui est une extension multiquadratique séparable du centre. Ce résultat est dû à Albert en degré 4 (Albert, 1961, Chapter XI, Theorem 9) et à Rowen en degré 8 (Rowen, 1984, Theorem 1). Le théorème 1.52 permet d'obtenir une nouvelle preuve de ces résultats.

Corollaire 1.53 (Albert, Rowen). *Soit A une F -algèbre centrale simple telle que $\deg A$ divise 8 et $A \otimes_F A$ est déployée. Alors A contient une sous-algèbre commutative maximale qui est une F -algèbre multiquadratique étale.*

Alors que les résultats de Garibaldi et al., 2009 cités ci-dessus s'obtiennent comme conséquence du théorème de Rowen, notre approche nous permet d'obtenir une extension de ces résultats (théorème 1.52) qui entraîne le théorème de Rowen.

Donnons quelques éléments sur la stratégie de la preuve du théorème 1.52. Il s'agit en premier lieu d'établir le résultat cité ci-dessus permettant d'obtenir une sous-algèbre nette à partir d'une sous-algèbre quadratique nette (Becher et al., 2018a, Theorem 6.10). Pour cela, le point principal est de trouver un élément de carré central qui soit symétrique sous l'involution, d'abord lorsque le corps est algébriquement clos, puis dans le cas général en étendant les scalaires à un tel corps en utilisant un argument de densité. Pour prouver le (1) du théorème, il suffit donc de trouver une sous-algèbre quadratique nette, le corollaire 1.49 appliqué avec $r = 2$ permettant de supposer que l'algèbre est à division. Dans ce cas, la preuve provient d'un théorème de Springer — qui permet de trouver un zéro non trivial d'une forme cubique partant d'un zéro de cette forme sur une extension quadratique, voir Becher et al., 2018a, Proposition 7.2 — et sur des calculs impliquant l'usage de centralisateurs. Enfin, en vertu de (1), il suffit de prouver la seconde assertion de (2) qui provient notamment de l'usage d'un argument de corestriction pour des algèbres de quaternions que nous avons étendu en caractéristique arbitraire (voir 1.5.3).

1.5 Explicitation de résultats

Une partie de notre activité de recherche porte sur l'explicitation de résultats mathématiques, ce qui peut se comprendre de différentes manières. Dans le cadre de cette note, nous en retenons trois :

- fournir une preuve alternative à un résultat connu, possiblement sous des hypothèses plus fortes, de sorte à rendre explicites certains aspects du résultat ;
- expliciter la preuve d'un résultat connu mais dont la preuve n'est apparemment pas disponible dans la littérature ;
- montrer qu'un résultat connu peut se formuler et s'étendre dans un nouveau cadre, ce qui permet en retour de mieux comprendre le résultat d'origine.

Nous illustrons chacune de ces manières d'explicitation de résultats par un exemple tiré de nos propres recherches.

1.5.1 Suites exactes de groupes de Witt

Nous nous replaçons dans le cadre de la sous-section 1.3.1 et de ses hypothèses. La preuve du théorème 1.28 décrite en 1.3.1.3 est basée sur le même type d'arguments que celle de la suite (1.25). Si on suppose que A est une algèbre à division, il est possible de donner une preuve alternative de 1.28 qui offre deux avantages : mieux comprendre le comportement des applications de l'octogone les unes par rapport aux autres, favoriser les calculs explicites dans des situations particulières.

Puisque A est une algèbre à division, toute forme hermitienne sur (A, σ) ou sur (\tilde{A}, σ_i) ($i = 1, 2$) est diagonalisable : c'est l'élément principal de la preuve alternative. D'une part, on peut alors déterminer explicitement l'image de toutes les applications de l'octogone¹⁷ (Grenier-Boley & Mahmoudi, 2005, Table 2). D'autre part, on peut caractériser le comportement de chaque application de l'octogone vis-à-vis de l'isotropie (Grenier-Boley & Mahmoudi, 2005, Theorem 4.4), ce qui entraîne la détermination explicite du noyau de chacune de ces applications. Puisque le noyau de chaque application de l'octogone coïncide avec l'image de l'application qui la précède, le théorème 1.28 s'en suit.

1.5.2 Groupes de Whitehead réduits

Pour obtenir leurs théorèmes de classification des formes hermitiennes dans le cas unitaire, Bayer-Fluckiger & Parimala (1995, 1998) utilisent un résultat de Yanchevskii sur la surjectivité des normes réduites. L'argument qui permet d'invoquer ce résultat à partir des hypothèses des auteurs était, à notre connaissance, implicite dans la littérature. Cet argument peut s'exprimer comme un résultat de trivialité de certains groupes dans le cadre de la K -théorie réduite.

Si F est un corps de caractéristique quelconque et A est centrale simple sur F , le groupe de Whitehead $K_1(A)$ est $A^*/[A^*, A^*]$ où $[A^*, A^*]$ est le sous-groupe engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$. Le groupe de Whitehead réduit $SK_1(A)$ est par définition le noyau du morphisme de norme réduite $\text{Nrd} : K_1(A) \rightarrow F^*$. Lorsque A est munie d'une involution unitaire, on définit aussi un groupe de Whitehead réduit unitaire $USK_1(A)$, voir Knus et al., 1998, §17 ou Yanchevskii, 1995.

La problématique de la trivialité ou de la non-trivialité de ces groupes demeure une question cruciale dans la K -théorie réduite. L'origine de ce questionnement remonte à la conjecture de Tannaka-Artin de 1943 selon laquelle $SK_1(A) = 1$, dès lors que $A \neq \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_3)$. Si cette conjecture s'est avérée fautive¹⁸, il demeure intéressant de trouver des conditions suffisantes de trivialité de ces groupes. Ainsi, on a $SK_1(A) = 1$ si F est un corps p -adique (Nakayama & Matsushima, 1943), si F est un corps global ou si l'indice de A est sans facteurs carrés (Wang, 1950). Des résultats similaires existent pour $USK_1(A)$.

Un corps F est C_2^0 si pour toute extension de corps finie K/F , pour toute algèbre à division D de dimension finie et de centre K , $\text{Nrd} : D^* \rightarrow K^*$ est surjective. Alors, si F est un corps C_2^0 , on a $SK_1(A) = USK_1(A) = 1$ (Yanchevskii, 1974, 1975). Ces résultats permettent de prouver un résultat de trivialité sous des hypothèses cohomologiques (locales) :

Théorème 1.54. (1) Soient F un corps de caractéristique p (éventuellement nulle) et q un nombre premier distinct de p . Si $\text{cd}_q(K) \leq 2$ et si A est une algèbre centrale simple sur F dont l'indice est q -primaire, alors $SK_1(A) = USK_1(A) = 1$.
 (2) Si $\text{cd}(F) \leq 2$ et si A est une algèbre centrale simple sur F d'indice premier à la caractéristique, alors $SK_1(A) = USK_1(A) = 1$.

17. Ceci était déjà explicite chez Bayer-Fluckiger & Parimala, 1995, Section 3.

18. Platonov a été le premier à définir une algèbre de biquaternions A pour laquelle $SK_1(A) \neq 1$ (Platonov, 1975). En fait, pour tout groupe abélien fini G , il existe une algèbre à division D avec $SK_1(D) \simeq G$ (Draxl, 1975a).

Ce résultat était sans doute bien connu, nous en avons seulement explicité la preuve (Grenier-Boley, 2007, Theorem 1.1). Ainsi, le (1) pour USK_1 et $q = 2$ est le résultat utilisé par Bayer & Parimala en référence aux résultats de Yanchevskiï et le (2) est cité par Merkurjev (1995) pour SK_1 .

Si F est un corps parfait, il est C_2^0 si et seulement si $cd(F) \leq 2$ (Suslin, 1985, Corollary 24.9). Pour prouver (1), l'idée est donc d'étendre les scalaires à un corps parfait K ayant la propriété $cd(K) = cd_q(F)$: cette construction est possible pour $q = 2$ (Bayer-Fluckiger & Serre, 1994, Proposition 2.3.1) et s'adapte facilement à un nombre premier q quelconque (Grenier-Boley, 2007, Proposition 4.4). Sur K , les résultats de Suslin et Yanchevskiï impliquent la trivialité des groupes de Whitehead considérés. Ces résultats sont descendus au niveau de F en raison de propriétés supplémentaires de K et de calculs d'ordres pour des éléments de certains groupes.

Plus généralement, il a été conjecturé que si $cd(F) \leq 3$ alors $SK_1(A) = 1$ (Suslin, 1991). D'après un résultat de Rost, cette conjecture est vraie si A est une algèbre de biquaternions (voir Knus et al., 1998, §17). Cette conjecture est également vraie pour certaines algèbres à division q -primaires sur un corps hensélien où q est un nombre premier distinct de la caractéristique du corps résiduel (Soman, 2016, Theorem 1.1) : le théorème 1.54(1) est un ingrédient important dans la preuve de ce résultat.

1.5.3 Un théorème de Albert et Draxl

L'objectif principal de cette section est le suivant : caractériser certaines interactions entre deux algèbres de quaternions à division Q_1 et Q_2 sur un corps F . Si Q_1 et Q_2 contiennent un sous-corps quadratique commun, on voit facilement que $Q_1 \otimes_F Q_2$ n'est pas une algèbre à division. En caractéristique différente de 2, un théorème de Albert montre que la réciproque est vraie (Albert, 1972). En caractéristique 2, cette équivalence reste vraie mais le résultat peut être précisé en ajoutant que le sous-corps quadratique impliqué est séparable sur F (Draxl, 1975b).

Diverses preuves de ces résultats ont été proposées, chacune ayant ses vertus et ses techniques spécifiques que nous rappelons brièvement avant d'insister sur l'une d'entre elles. Les preuves originales de Albert (1972) et Draxl (1975b) sont directes et basées sur une étude explicite de certains diviseurs de zéro, celle de Albert pouvant être adaptée en caractéristique 2 (sans impliquer toutefois le résultat plus précis obtenu par Draxl) de même qu'une preuve proposée par Sah (1972). Certains auteurs ont obtenu des preuves valides en toute caractéristique qui impliquent à la fois le résultat de Albert et celui de Draxl (Elman et al., 2006, Theorem 98.19; Knus, 1993; Tits, 1993) : la technique de Elman et al. (2006), est basée sur une étude des variétés de Severi-Brauer associées à Q_1 et Q_2 , celle de Knus (1993) sur l'usage d'une forme de Albert associée à $Q_1 \otimes_F Q_2$ et d'algèbres de Clifford.

Le théorème de Albert peut aussi être vu comme conséquence d'un résultat traitant d'une algèbre de quaternions Q sur une extension quadratique étale de F (Knus et al., 1998, (16.28)). Ce résultat généralise le théorème de Albert qui offre en outre un nouveau point de vue sur son énoncé. Ceci donne accès à un certain nombre d'outils permettant d'en assurer la preuve : usage du transfert de formes quadratiques, de la corestriction de Q , lien avec une de ses formes de Albert.

Dans l'un de nos travaux (Becher, Grenier-Boley & Tignol, 2018b), nous avons souhaité étendre le résultat de Knus et al. (1998, (16.28)) en toute caractéristique de sorte à offrir un cadre qui permette d'en déduire à la fois le théorème de Albert et celui de Draxl.

Théorème 1.55 (Becher et al., 2018, Theorem 1.1). *Soient F un corps arbitraire et K/F une F -algèbre quadratique étale. Pour toute algèbre de quaternions Q sur K , les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Q contient une F -algèbre quadratique linéairement disjointe de K .*

- (2) Q contient une F -algèbre quadratique étale linéairement disjointe de K .
- (3) $\text{Cor}_{K/F}(Q)$ n'est pas une algèbre à division.

Précisons quelques éléments sur cet énoncé. Puisque K est une F -algèbre quadratique, K/F est une extension quadratique séparable de corps ou $K \simeq F \times F$. Dans le premier cas, la notion d'algèbre de quaternions se définit classiquement selon que $\text{car}(F) \neq 2$ ou $\text{car}(F) = 2$ (Knus et al., 1998, §2) et si ι est l'automorphisme non trivial de K/F , la corestriction $\text{Cor}_{K/F}(Q)$ est la F -sous-algèbre de ${}^t A \otimes_K A$ dont les éléments sont invariants sous l'involution d'échange (Knus et al., 1998, §3.B). Dans le second cas, cela signifie qu'il existe deux F -algèbres de quaternions Q_1 et Q_2 telles que $Q = Q_1 \times Q_2$ et on définit la corestriction par $\text{Cor}_{(F \times F)/F}(Q) = Q_1 \otimes_F Q_2$. Enfin, nous utilisons dans cet énoncé la notion de disjonction linéaire entre deux sous-algèbres d'une même algèbre (Bourbaki, 1970, Chapitre III, §4, Définition 4).

D'une part, lorsque la caractéristique est différente de 2, le théorème 1.55 correspond à celui démontré par Knus et al. (1998, (16.28)). D'autre part, supposons que $K = F \times F$, Q_1 et Q_2 sont des F -algèbres de quaternions à division et $Q = Q_1 \times Q_2$. L'assertion (3) signifie exactement que $Q_1 \otimes_F Q_2$ n'est pas une algèbre à division. L'assertion (2) signifie que Q contient une F -algèbre quadratique étale L linéairement disjointe de $K = F \times F$ ce qui implique que $L.K \simeq L \otimes_F K \simeq L \times L$. On en déduit que L s'injecte dans Q_1 et Q_2 donc que L/F est une extension de corps quadratique séparable. Ainsi, l'implication (3) \Rightarrow (2) du théorème 1.55 pour $K = F \times F$ correspond aux théorèmes de Albert et Draxl.

Nous avons fourni deux preuves du théorème 1.55, chacune d'entre elles étendant les arguments d'une preuve citée ci-dessus.

La première preuve est proche de celle de Knus et al. (1998, (16.28)) mais sans restriction sur la caractéristique du corps de base (Becher et al., 2018b, §3). Elle repose sur trois idées principales¹⁹. On utilise un transfert $s_*(n_Q)$ de la forme norme n_Q de Q pour obtenir une forme de Albert de $\text{Cor}_{K/F}(Q)$ puis on se sert du lien entre l'indice d'une algèbre de biquaternions et l'indice de Witt d'une de ses formes de Albert (Knus et al., 1998, (16.5)) pour en déduire que l'indice de Witt de $s_*(n_Q)$ est au moins 2. Pour compléter la preuve, on a besoin de relier les sous-espaces totalement isotropes de $s_*(n_Q)$ à des sous-formes de n_Q définies sur F : si ce lien est aisé lorsque $\text{car}(F) \neq 2$, il est plus délicat en caractéristique 2 (Becher et al., 2018b, Theorem 2.2). En conséquence de cette preuve, nous retrouvons un résultat bien connu : $\text{Cor}_{K/F}(Q)$ est déployée si et seulement si Q est l'extension à K d'une F -algèbre de quaternions.

La seconde preuve étend la preuve de Knus (1993) à ce cas plus général (Becher et al., 2018b, §4). Elle se base sur la construction explicite d'une forme de Albert pour $\text{Cor}_{K/F}(Q)$. Le fait que $\text{Cor}_{K/F}(Q)$ ne soit pas à division implique l'existence d'un vecteur isotrope pour cette forme, lequel permet de construire explicitement une F -algèbre quadratique étale linéairement disjointe de K .

1.6 Perspectives

Nous évoquons quelques perspectives qui émanent naturellement des travaux que nous avons menés. Elles peuvent être rassemblées dans deux directions principales.

Dans la théorie algébrique des formes quadratiques et celle des algèbres à involution, les cas des corps de caractéristique différente de 2 ou valant 2 ont historiquement fait l'objet d'études séparées, le cas de caractéristique différente de 2 étant en général étudié en premier. Si parfois les deux théories se différencient —

¹⁹. Nous évoquons ici la preuve de (3) \Rightarrow (2) qui est la partie délicate du théorème 1.55.

ce qui vrai dans l'une n'est pas forcément vrai dans l'autre (ou seulement partiellement) et ce qui est difficile dans l'une peut être simple pour l'autre —, elles se rejoignent aussi sur certains aspects essentiels. Depuis un certain temps, quand c'est possible, les recherches qui sont menées dans ces champs témoignent d'un souci pour développer les recherches en caractéristique 2, voire qui proposent une approche qui soit indépendante de la caractéristique (voir Elman et al., 2006 ou Knus et al., 1998). Hormis en 1.4, en 1.5.2 ou en 1.5.3 où nous avons adopté cette approche, nous avons travaillé sur des corps de base de caractéristique différente de 2 et il est naturel d'envisager des perspectives qui aillent dans cette direction.

Revenons d'abord à la problématique des suites exactes de groupes de Witt abordée en 1.3.1. Parmi les suites que nous avons citées, seule la suite (1.23) de Milnor et Husemoller (1973, Appendix 2) existe en toute caractéristique. En caractéristique 2, elle prend la forme suivante pour une extension quadratique séparable K/F d'automorphisme non trivial — :

$$0 \longrightarrow W(K, -) \longrightarrow W_q(F) \rightarrow W_q(K)$$

En caractéristique 2, les formes bilinéaires symétriques et quadratiques ne sont plus interchangeables et pour un corps F on étudie l'anneau de Witt des formes bilinéaires $W(F)$ et le groupe de Witt des formes quadratiques $W_q(F)$ qui est aussi un $W(F)$ -module. Par ailleurs, un groupe de Witt des formes hermitiennes sur une algèbre à involution (A, σ) peut être défini (Knus, 1991, Chapter I). Une première perspective est donc d'envisager l'extension ou la transposition du théorème 1.28 en caractéristique 2, voire d'en expliciter une formalisation indépendante de la caractéristique : cette perspective est crédible dans la mesure où les techniques que nous utilisons sont applicables²⁰. En 1968, Tits a généralisé la notion de forme quadratique sur un corps au cadre des algèbres centrale simples à involution (voir aussi Elomary & Tignol, 2001), elle-même se généralisant à la notion de « form parameter » sur un « unitary space » (Dolphin, 2015 ; Knus, 1991, Chapter I). Ces dernières formes sont liées à certaines formes hermitiennes et on peut en définir un groupe de Witt (Knus, 1991, Chapter I, §10) qui généralise $W_q(F)$. Une seconde perspective serait d'étudier le devenir de la suite de Milnor-Husemoller dans ce nouveau cadre.

Revenons ensuite à la problématique des critères d'isomorphisme de la section 1.3.3. En 1985, Baeza et Moresi ont étudié la possibilité d'étendre le critère de Harrison 1.32 en caractéristique 2. D'une part, ils ont montré que les anneaux de Witt bilinéaires $W(F_1)$ et $W(F_2)$ sont isomorphes si et seulement si F_1 et F_2 sont isomorphes au cas où $\dim_{F_1} F_1 = \dim_{F_2} F_2 > 2$ et ont traité les autres cas (Baeza & Moresi, 1985, Theorem 2.9, Proposition 2.10). D'autre part, ils ont caractérisé l'isomorphisme des modules de Witt quadratiques $W_q(F_1)$ et $W_q(F_2)$ de deux corps (Baeza & Moresi, 1985, Theorem 3.1) par un énoncé analogue à celui du critère général que nous avons obtenu pour les algèbres de quaternions et qui généralise le théorème 1.33 (Grenier-Boley, 2009, Theorem 3.7). Ils ont également montré que deux corps globaux de caractéristique 2 sont toujours Witt-équivalents. Dans ce cadre, on peut donc se demander si les critères d'isomorphisme obtenus pour les groupes de Witt des formes hermitiennes en caractéristique différente de 2 ont un analogue en caractéristique 2 (cf. 1.3.3.1, 1.3.3.2 et 1.3.3.3) et/ou si l'étude menée sur certains corps particuliers (globaux, réels, SAP ou autres) peut être adaptée ou étendue à la caractéristique 2 (cf. 1.3.3.2, 1.3.3.3 et 1.3.3.4).

Si (A, σ) est une algèbre à involution, elle est dite décomposable si elle contient une sous-algèbre centrale simple non triviale stable sous σ : en effet, dans ce cas, le

²⁰. Par exemple, même si les notions d'hyperbolicité et de métabolicité ne sont plus équivalentes en général, une forme est nulle dans le groupe de Witt si et seulement si elle est métabolique, ce qui autorise l'usage des lagrangiens dans la preuve de l'exactitude d'une telle suite.

théorème 1.42(2) implique que $(A, \sigma) = (A_1, \sigma|_{A_1}) \otimes (A_2, \sigma|_{A_2})$ où A_2 est le centralisateur de A_1 dans A . En degré 4 (resp. 8), de nombreux auteurs se sont intéressés à déterminer des critères ou des résultats de décomposabilité des algèbres à involution en produit tensoriel de deux (resp. trois) algèbres de quaternions (voir Quéguiner-Mathieu, 2006, §3 ou Tignol, 2010 pour plus de précisions) : en degré 4 pour le cas symplectique (Rowen, 1978, Theorem B), orthogonal (Knus, Parimala & Sridharan, 1991, Theorem 3.1) ou unitaire (Karpenko & Quéguiner, 2000), en degré 8 pour le cas orthogonal avec différentes variations (Knus et al., 1998, 42.11; Quéguiner-Mathieu, 2006, §3). Lorsque ces résultats sont des critères de décomposabilité, ceux-ci s'expriment en fonction d'invariants classiques des algèbres à involution (discriminant, algèbre discriminante, algèbre de Clifford). Les résultats que nous avons obtenus en section 1.4 permettent d'envisager une approche commune pour la problématique de la décomposabilité des algèbres à involution de capacité 4. Cette approche passerait dans ce cas par une définition unifiée du discriminant des involutions de tous types au moyen de formes de Pfister en caractéristique arbitraire. Elle pourrait fournir un cadre pour unifier certains des résultats précédents et pour en découvrir d'autres.

1.7 Quelques éléments d'épistémologie personnelle

Nous tentons dans cette section de mettre en valeur certains éléments qui nous semblent significatifs au sein de notre épistémologie personnelle de chercheur en mathématiques, qu'ils soient généraux et liés au travail du chercheur ou heuristiques et liés aux méthodes, aux règles et aux moyens utilisés pour comprendre ou découvrir des mathématiques. Cette lecture de notre activité de chercheur (en mathématiques) nous servira de référence ou de point de comparaison dans la suite de cette note. D'une part, nous y référerons en 3.1 lorsque nous questionnerons le rapport entre ce que font les mathématiciens et ce que font ou pourraient faire les élèves en classe de mathématiques. D'autre part, cela nous permettra d'éclairer des possibilités de perspectives générales de recherche prenant en compte notre double posture de chercheur en mathématiques et en didactique des mathématiques en 3.2.

Dans une entrevue sur le thème de la découverte en mathématiques, André Weil dit qu'« il n'est pas possible de donner une description générale [du mécanisme de la découverte]; on peut tout au plus chercher à décrire son expérience personnelle » (Weil, 1994, p. 48), cité par Gardes (2013, p. 135). Dans le même esprit, nous ne prétendons pas donner d'éléments généraux sur l'épistémologie du chercheur en mathématiques, ni même au sein de notre domaine de recherche restreint, pas plus que nous affirmons avoir caractérisé notre propre pratique. Il se peut cependant que certains de ces éléments aient déjà été mis en valeur dans des recherches antérieures et générales qu'elles soient plutôt orientées vers la sociologie des chercheurs en mathématiques (Burton, 2004; Zarca, 2012), vers la résolution de problèmes en référence à des aspects heuristiques du travail du mathématicien avec des visées pour l'enseignement (Pólya, 1957, 1981; Schoenfeld, 1985), vers les caractéristiques de l'activité de recherche du mathématicien pour mettre en œuvre des activités de recherche en classe (Gardes, 2013) ou qu'elles soient le fruit des réflexions de certains « grands » mathématiciens (Nimier, 1989; Tao, 2006, 2007; Thurston, 1995; Villani, 2012).

Nous scindons notre propos en deux parties non indépendantes selon chacun des deux questionnements suivants :

- qu'est-ce qui dans l'activité générale du chercheur en mathématiques nous semble être une ressource (ou pas) pour notre travail en mathématiques ou nos propres découvertes en mathématiques ?

- qu'est-ce que nous faisons exprès de faire lorsque nous établissons des résultats en mathématiques ?

Nous esquissons des réponses possibles à ces questions en insistant seulement sur les aspects qui nous semblent essentiels, sans prétendre à l'exhaustivité ou à l'originalité. Nous abordons la première problématique en 1.7.1, puis la seconde problématique en 1.7.2 en mettant en valeur ce qui nous semble être des invariants dans notre méthodologie de recherche de résultats mathématiques : autant que possible, nous illustrons ces invariants par des exemples tirés des sections précédentes.

1.7.1 Quelques ressources pour notre travail mathématique

Nous scindons notre propos en plusieurs paragraphes, qui sont bien entendu non indépendants.

Chercher. Puisque nous traitons de mathématiques déjà formalisées et non appliquées, certains aspects sont largement absents de notre activité mathématique : modélisation, lien avec d'autres domaines scientifiques... Hormis cela, notre activité mathématique de recherche nous semble liée à plusieurs aspects interdépendants.

Souvent, il s'agit d'abord d'apprendre ou de comprendre des mathématiques qui ont été élaborées par d'autres mathématiciens. D'une part, cela peut passer par l'écrit, c'est-à-dire par l'étude des textes de savoir établis par ces mathématiciens. Dans ce cas, nous ressentons le besoin d'y identifier résultats, raisons d'être, exemples ou contre-exemples, techniques ou points de vue qui pourraient être utiles pour nos propres recherches. Parfois, des questions ouvertes sont explicitement posées par des mathématiciens et il nous semble qu'on peut contribuer à les résoudre au moins en partie. D'autre part, cela peut passer aussi (surtout ?) par l'oral, au gré des relations entre pairs ou des rencontres, l'interlocuteur réussissant souvent mieux à faire passer l'essentiel, à identifier les points de vue saillants de son propre travail mathématique ou du travail d'autrui.

Il n'est pas possible de décrire ce que revêt l'activité de recherche sans l'appauvrir. Cependant, quelques éléments généraux se détachent, sans que nous les maîtrisions toujours en totalité. De notre point de vue, c'est une combinaison de diverses phases : intuition, observation, expérimentation, repérage d'analogies entre des situations proches ou parfois très éloignées. Nous reconnaissons aussi l'importance des erreurs et fausses pistes que l'on identifie et qui peuvent aider à modifier une approche initiale. Lorsque nous croyons qu'une succession de résultats est correcte, nous en écrivons les énoncés possibles dans un texte de savoir préliminaire qui nous sert d'outil de travail. Nous tentons alors au sein de ce texte d'écrire les preuves de ces énoncés, de les relier entre eux, d'en modifier éventuellement les hypothèses ou les conclusions, d'y ajouter des exemples, des résultats utiles cruciaux...

Rendre compte. Une fois qu'on a découvert suffisamment de résultats, il convient d'en rendre compte. Pour ce qui nous concerne, nous y voyons au moins trois dimensions complémentaires : écrit, oral, organisation ultérieure.

Lorsqu'il s'agit de rédiger une nouvelle recherche, nous prenons toujours garde à précisément situer le résultat par rapport aux recherches antérieures, qu'elles l'aient ou non motivée et à en partager les raisons d'être. Hors de cela, il y a plusieurs cas non mutuellement exclusifs. En premier lieu, surtout pour les recherches où nous avons utilisé le texte du savoir directement comme support (cf. ci-dessus), nous choisissons de conserver l'ordre logique auquel ce processus a abouti, ce qui permet au lecteur de suivre les pensées initiales de manière logique et d'y trouver des arguments aussi explicites que possible (cf. section 1.5). Cela peut être le cas de résultats ayant des preuves d'une assez grande technicité, mais c'est aussi utile pour

se remémorer ses propres recherches. En second lieu, à l’instar de ce que préconise Thurston (1995, p. 20), nous tentons parfois de communiquer certaines manières de penser auxquelles nous avons pu aboutir. Ceci demande une certaine réflexivité et est plutôt possible après plusieurs recherches proches ou *a posteriori* (cf. section 1.4) : le style d’écriture est alors plutôt tourné vers le lecteur qui souhaite comprendre les grandes idées de cette recherche plutôt que les arguments précis. Enfin, il s’agit parfois de rédiger un article qui rend compte de plusieurs recherches, en opère un survol (c’est le cas de ce chapitre) ou qui dresse un panorama d’un grand secteur d’un domaine mathématique à un moment donné (voir par exemple Auel et al., 2011) : dans ce cas, nous insistons plutôt sur les grandes questions du domaine, la diversité des arguments proposés et les problèmes encore ouverts.

Lors d’un exposé oral, plusieurs choix, qui dépendent de la recherche concernée et du public²¹, sont aussi possibles. Le plus souvent, nous essayons de débiter par des exemples ou contre-exemples qui révèlent d’une certaine façon l’utilité de ce qui va suivre avant d’en extraire des questionnements puis de donner les points principaux (sans tout préciser) : dans ce cas, nous souhaitons plutôt insister sur le message à faire passer, les raisons d’être, les arguments principaux en comptant sur l’intuition et les connaissances des auditeurs. Parfois, il peut être utile de détailler précisément la preuve du résultat important à certains égards, mais il nous semble que nous y avons de moins en moins recours : cela peut quand même être utile lorsque la preuve en question semble avoir une certaine généralité.

Enfin, on rend aussi compte de ses propres résultats pour soi-même. Revenir sur certains travaux antérieurs, les voir sous un nouveau point de vue, les lier entre eux, permet parfois d’en augmenter la portée, de les rendre plus facilement communicables à l’écrit ou à l’oral.

Autres aspects. Nous pensons aussi qu’il y a une certaine dialectique entre les pratiques de recherche et d’enseignement d’un enseignant-chercheur à l’université. Sans entrer tout de suite dans les détails, il nous semble que l’activité de recherche peut aider à concevoir un enseignement, à en isoler des aspects cruciaux, plutôt dans le cas d’enseignements de M1 ou M2 mais aussi au début de l’université dans une certaine mesure. En retour, le fait d’enseigner, d’aborder certaines tâches devant les étudiants, de répondre à leurs questions nous permet de développer nos connaissances sur des domaines supposés familiers, voire de s’en servir en recherche. Nous reviendrons sur cette problématique à la fin du chapitre 3.

1.7.2 Réflexivité méthodologique : quelques invariants

Si une part de notre activité de recherche réside dans la dextérité à poser et à résoudre des problèmes, nous souhaitons ici revenir sur d’autres éléments de notre méthodologie suffisamment récurrents pour qu’ils puissent être qualifiés d’invariants.

1.7.2.1 Principes

Épistémologie. Comme on l’a déjà dit plusieurs fois, il nous semble important de tenir compte d’éléments épistémologiques, anciens ou plus récents, pour à la fois situer nos domaines de recherche les uns par rapport aux autres, comprendre les liens qui les unissent ou ce qui les différencie, identifier des raisons d’être aux notions ou résultats centraux de chacun d’eux. Dans cette note de synthèse, la section 1.1 joue ce rôle fondamental mais une telle étude a systématiquement été à l’origine de chacune de nos recherches, voire a permis d’en organiser le compte-rendu : voir par exemple 1.2.2.2 ou 1.3.1.

21. Pour simplifier, nous n’évoquons ici que des exposés devant des spécialistes du domaine.

Questionnements. L'activité de questionnement nous semble fondamentale dans toute recherche qu'elle soit à l'origine des recherches (poser/résoudre des problèmes) ou *a posteriori* de celles-ci. Pour ce dernier cas, signalons par exemple que l'écriture de cette note a été organisée par la (re)découverte de grands questionnements transversaux à certaines recherches : comment généraliser certains phénomènes au sein de la théorie des formes quadratiques, passer de ceux-ci à des phénomènes pour les formes hermitiennes (1.2) ? quels moyens avons-nous pour mieux connaître l'anneau ou le groupe de Witt (1.3) ? peut-on avoir une approche unifiée des algèbres de capacité 4 (1.4) ? est-il possible de rendre tel ou tel aspect de tel résultat plus explicite (1.5) ? Bien sûr, ces questionnements ont à leur tour été raffinés au sein des diverses parties, ce qui permet parfois de donner tout leur sens à certaines notions ou démarches. Il en va ainsi par exemple de l'intérêt à déterminer des critères d'isomorphie d'anneaux ou groupes de Witt selon le type de corps considéré (1.3.3).

Premiers exemples. Pour commencer à voir dans quelle mesure telle ou telle notion a une chance d'être transposée dans un nouveau domaine ou de se généraliser, il peut être intéressant d'étudier les premiers exemples servant par exemple de « frontières » entre les deux domaines. Pour le passage entre formes quadratiques et hermitiennes, les deux exemples de l'exemples 1.5 ont joué plusieurs fois ce rôle, soit comme origine de nos recherches pour la détermination de l'octogone exact en 1.3.1, soit comme objets précis de recherche pour les critères d'isomorphie de groupes de Witt hermitiens en 1.3.3.

Du principe de continuité à l'analogie. Il nous semble que la plupart de nos recherches sont attachées à la découverte d'une ressemblance avec des résultats ou démarches antérieurs, cette ressemblance étant plus ou moins proche des savoirs d'origine. Nous parlons plutôt de principe de continuité lorsque l'objectif de la recherche est de chercher à « faire pareil » autant que possible : c'est par exemple ce principe qui nous a habités dans les deux recherches en 1.2.1. Lorsque la situation d'origine est plus éloignée, nous parlons plutôt d'analogie, auquel cas la ressemblance peut être plus dissimulée : par exemple, en 1.4.3.3, s'il y a une certaine ressemblance entre les résultats concernant les sous-algèbres étales maximales et les sous-algèbres nettes, les outils et techniques pour y aboutir sont assez différents.

Extension. Dans certaines de nos recherches, nous abordons aussi l'extension de résultats, ce qui peut signifier plusieurs choses : généralisation, adaptation à un nouveau cadre... Lorsqu'il y a extension, il y a souvent à juger de la pertinence de cette extension à l'aune des pertes éventuelles qu'elle engendre. Par exemple, c'est ce principe qui nous a guidés pour définir le q -niveau par rapport au niveau et déterminer dans quelle mesure les résultats classiques survivaient par cette extension (ou pas), voir 1.2.2.2. La découverte de l'octogone exact de groupes de Witt en 1.3.1 compte tenu des suites exactes qu'on souhaitait étendre relève aussi de ce principe. En 1.5.3, on a montré que l'extension est consécutive à un changement de point de vue sur les objets.

Outils à disposition ou à convoquer. La découverte de nouveaux résultats passe souvent par l'identification des outils performants du domaine dont on sait qu'ils permettent de résoudre des problèmes (techniques, méthodes), par l'invention de nouveaux outils ou par le transfert d'outils d'un autre domaine. Pour le premier aspect, citons l'équivalence de Morita (1.3.1 ou 1.3.2), l'extension des scalaires et la descente (1.4 ou 1.5.2). Pour le second aspect, une part des résultats établis dans la section 1.4 repose sur l'identification de nouveaux outils dans un nouveau cadre présentés en 1.4.2 : généralisation du théorème du Double Centralisateur,

usage des idempotents, définition de la capacité. Chacun de ces outils a des vertus différentes : les deux premiers sont outils de preuve quand le troisième est plutôt un outil d'unification du propos (involutions de tous types en toute caractéristique). Le troisième aspect est surtout lié à un changement de point de vue sur un résultat, comme en 1.5.3 : passage du produit tensoriel de deux algèbres de quaternions à la corestriction d'une algèbre de quaternions.

1.7.2.2 Résultats

Malgré le fait que nos recherches se situent dans des domaines proches et bien circonscrits, les résultats témoignent néanmoins d'une certaine variété. Il nous semble cependant que certains principes guident la majorité d'entre eux.

Type de résultats. Bien entendu, la majorité des résultats se présente sous forme d'une implication compte tenu de certaines hypothèses, auquel cas nous discutons parfois la minimalité des hypothèses ou la manière d'obtenir une équivalence : pour le premier cas, citons l'exemple 1.37 pour l'implication (2) \Rightarrow (1) du théorème 1.36 et pour le second cas les discussions qui suivent la proposition 1.20 ou le théorème 1.51. Certains résultats présentent toutefois un objectif de traduction ou de reformulation et se présentent alors sous la forme d'un critère, par exemple pour les résultats en 1.3.3.

Domaine des résultats. La proximité de nos trois domaines de recherche permet également d'obtenir des résultats qui donnent des éclairages différents sur les mêmes objets (invariants de corps, algèbres à involution, formes quadratiques ou hermitiennes), les résultats étant tantôt de nature ponctuelle (par exemple une forme quadratique ou une famille de formes quadratiques), tantôt de nature globale (toutes les formes quadratiques), tantôt vrais sur des corps quelconques (de caractéristique différente de 2 ou arbitraire), tantôt vrais sur certains types de corps.

Nature des résultats. Les résultats mettent parfois en évidence une procédure d'unification (voir 1.3.1 ou l'usage de la capacité en 1.4), de généralisation (théorème 1.41) ou d'extension de résultats antérieurs (cf. ci-dessus), ou servent à simplifier une approche dans certains cas (le théorème 1.39 pour les corps SAP, la proposition 1.47 par rapport à la notion de sous-algèbre nette).

Bruits. Enfin, outre tout ce qui a été dit dans cette section, il nous semble que la plupart de nos résultats trouvent leur origine dans l'identification soit d'une similitude, soit d'un « bruit » c'est-à-dire de quelque chose qui ne fonctionne pas très bien ou qu'on ne comprend pas. Ainsi, dans la section 1.4, la définition de capacité vient de ce que les calculs que nous effectuions dans les différents cas couverts étaient similaires. En revanche, la notion d'algèbre nette a été isolée pour à la fois évacuer des difficultés que nous rencontrions avec des algèbres un peu plus générales et à considérer dans le même temps différents cas : cela étant, bien que couvert par cette définition, le cas orthogonal de caractéristique 2 demande souvent plus d'attention lors des preuves.

1.7.2.3 Changements de point de vue ou de cadre

Dans nos travaux, le changement de point de vue ou de cadre nous semble être d'une importance significative, aussi avons-nous choisi de terminer par cet aspect et d'y développer un exemple in extenso.

Points de vue Les changements de points de vue sont omniprésents dans ce chapitre mais leur nature est différente.

Ils peuvent par exemple être rendus disponibles au moyen d'un résultat fondamental d'un domaine considéré (le théorème de Wedderburn qui offre trois points de vue équivalents sur les algèbres centrales simples, voir 1.1.2.3) : nous avons ainsi expliqué en 1.4.3.2 comment l'approche qui y est développée conjugue les points de vue algébrique et géométrique.

Un autre cas de figure est celui de l'usage conscient d'un changement de point de vue par le chercheur afin de se doter de nouveaux outils. Cela a par exemple été le cas dans la section 1.4 (se placer dans le cas le plus général permettant un usage des outils de 1.4.2 en évitant des aspects pathologiques) ou en 1.5.3 (où le passage du produit d'algèbres de quaternions à la corestriction nous a donné accès aux outils de transfert).

Cadres Le changement de cadres permet plus généralement de passer d'un vaste domaine des mathématiques à un autre, ce qui donne accès à de nouveaux pans de théories et à de nouveaux outils. Par exemple, en 1.3.3, les critères ont été organisés en fonction des attributs du corps de base (quelconque, global, réels, SAP) et se traduisent en fonction de ces attributs dans un ou plusieurs des cadres suivants : arithmétique, algèbre, topologie.

Prenons l'exemple de la preuve de l'implication (2) \Rightarrow (1) du théorème 1.39, L'assertion (2) met en jeu une propriété algébrique et une propriété topologique et la preuve utilise plusieurs passages entre ces deux cadres (mais aussi plusieurs autres idées essentielles). Nous avons donné en sous-section 1.2.2.2 une définition et des exemples de corps SAP : un tel corps est aussi caractérisé par le fait que tout ouvert-fermé de X_F est de la forme $H(a)$ pour un certain $a \in F^*$. L'un des ingrédients de la preuve est la dualité de Stone pour les espaces booléens (Stone, 1937) : pour un espace topologique booléen \mathcal{X} , l'ensemble $\text{Clop}(\mathcal{X})$ des ouverts-fermés de \mathcal{X} est un anneau booléen pour la différence symétrique et l'intersection et un homéomorphisme entre deux espaces topologiques booléens \mathcal{X} et \mathcal{X}' donne lieu à un isomorphisme entre les anneaux booléens $\text{Clop}(\mathcal{X})$ et $\text{Clop}(\mathcal{X}')$ ²². Ainsi, si les espaces topologiques booléens X_{F_1} et X_{F_2} sont homéomorphes, les anneaux $\text{Clop}(X_{F_1})$ et $\text{Clop}(X_{F_2})$ sont isomorphes. Un autre ingrédient est le fait que pour un corps réel, l'application $F^*/\Sigma F^\bullet \rightarrow \{H(a) \mid a \in F^*\} : a \mapsto H(-a)$ est un isomorphisme de groupes (Craven, 1974). Dans le cas d'un corps SAP, on a donc $F_i^*/\Sigma F_i^\bullet \simeq \text{Clop}(X_{F_i})$ ($i = 1, 2$) en tant que groupes, d'où il découle que $F_1^*/\Sigma F_1^\bullet \simeq F_2^*/\Sigma F_2^\bullet$. Cet isomorphisme et celui de l'hypothèse (2) peuvent être intégrés dans un diagramme commutatif, d'où il ressort que les groupes de classes de carrés sont isomorphes par le lemme des cinq. La conclusion provient du théorème 1.36 après un dernier travail sur la positivité.

²². Cette assertion n'est qu'une petite partie de la dualité de Stone. Pour tout anneau booléen B , $\text{Spec}(B)$ est un espace topologique booléen pour la topologie de Zariski et un isomorphisme entre deux anneaux booléens B et B' donne lieu à un homéomorphisme entre $\text{Spec}(B)$ et $\text{Spec}(B')$. En outre, tout espace topologique booléen \mathcal{X} est homéomorphe à $\text{Spec}(\text{Clop}(\mathcal{X}))$ (Stone, 1937).

BIBLIOGRAPHIE

- Albert, A. A. (1961). *Structure of Algebras*. AMS Coll. Pub. 24, Providence, RI.
- Albert, A. A. (1972). Tensor products of quaternion algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 35(1), 65–66.
- Arason, J. K. & Pfister, A. (1971). Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Witttring. *Invent. Math.*, 12, 173–176.
- Artin, E. & Schreier, O. (1927). Algebraische Konstruktion- reeller Körper. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5 no. 1, 85–99.
- Auel, A., Brussel, E., Garibaldi, S., & Vishne, U. (2011). Open problems on central simple algebras. *Transformation Groups*, 16(1), 219–264.
- Baeza, R. & Moresi, R. (1985). On the Witt-equivalence of fields of characteristic 2. *J. Algebra* 92, 446–453.
- Bayer-Fluckiger, E. (2008). *Introduction to quadratic forms over fields* by T.-Y. Lam. *Bull. Amer. Math. Soc*, 45 (3), 479–484.
- Bayer-Fluckiger, E. & Parimala, R. (1995). Galois cohomology of the Classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2 . *Invent. Math.*, 122, 195–229.
- Bayer-Fluckiger, E. & Parimala, R. (1998). Classical groups and Hasse principle. *Annals of Math.*, 147, 651–693.
- Bayer-Fluckiger, E. & Serre, J.-P. (1994). Torsions quadratiques et bases normales autoduales. *American Journal of Mathematics*, 116, 1–63.
- Becher, K. J. (2001). On the number of square classes of a field of finite level. *Proceedings of the Conference on Quadratic Forms and Related Topics* (Baton Rouge, LA, 2001). *Doc. Math.*, Extra Vol., 65–84.
- Becher, K. J. (2006). Minimal weakly isotropic forms. *Math. Z.*, 252 no. 1, 91–102.
- Becher, K. J. (2008). A proof of the Pfister Factor Conjecture. *Invent. Math.*, 173 no. 1, 1–6.
- Becher, K. J., Grenier-Boley, N. & Tignol, J.-P. (2018a). Involutions and stable subalgebras, *Journal of algebra*, 493, no. 1, 381–409.
- Becher, K. J., Grenier-Boley, N. & Tignol, J.-P. (2018b). Transfer of quadratic forms and of quaternion algebras over quadratic field extensions. *Archiv der Mathematik*, 111 (2), 135–143.
- Berhuy, G., Grenier-Boley, N., & Mahmoudi, M. G. (2013). Sums of values represented by a quadratic form. *Manuscripta mathematica*, 140 (3-4), 1–26.
- Black, J. & Quéguiner-Mathieu, A. (2014). Involutions, odd-degree extensions and generic splitting. *Enseign. Math.*, 60, 3-4, 377–395.
- Bourbaki, N. (1970). *Éléments de mathématiques. Algèbre. Chapitre 1 à 3*. Hermann.

- Bourbaki, N. (2012) *Éléments de mathématiques. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples*. Berlin : Springer.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers : Learning about learning mathematics* (Vol. 34). Springer Science & Business Media.
- Craven, T. (1974). The topological space of orderings of a rational function field. *Duke Math. J.*, *41*, 339–347.
- Dejaiffe, I. (1998). Somme orthogonale d’algèbres à involution et algèbre de Clifford. *Communications in Algebra*, *26* no. 5, 1589–1612.
- Dolphin, A. (2015). Singular and Totally Singular Unitary Spaces. *Communications in Algebra*, *43* (12), 5141–5158.
- Draxl, P. (1975a). Corps gauches dont le groupe des commutateurs n’est pas égal au noyau de la norme réduite. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, *17*(2), 1–5.
- Draxl, P. (1975b). Über gemeinsame separabel-quadratische Zerfällungskörper von Quaternionenalgebren. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, *16*, 251–259.
- Draxl, P. (1983). *Skew fields*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 81, Cambridge University Press, Cambridge.
- Elman, R., Karpenko, N. & Merkurjev, A. (2008). *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Elman, R. & Lam, T. Y. (1973). Quadratic forms and the u-invariant, I. *Math. Z.*, *131*(4) 283–304.
- Elman, R. & Lam, T. Y. (1974). Classification theorems for quadratic forms over fields. *Comment. Math. Helv.*, *49*, 373–381.
- Elomary, M. A. & Tignol, J.-P. (2001). Classification of quadratic forms over skew fields of characteristic 2. *Journal of Algebra* *240*, 366–392.
- Fröhlich, A. & McEvet, A.M. (1969). Forms over rings with involution. *Journal of Algebra*, *12*, 79–104.
- Garibaldi, S., Parimala, R. & Tignol, J.-P. (2009). Discriminant of symplectic involutions. *Pure Appl. Math. Q.*, *5*, 349–374.
- Gille, P. & Szamuely, T. (2006). *Central simple algebras and Galois cohomology*. Cambridge University Press, Vol. 101.
- Grenier-Boley, N. (2004). *Groupe de Witt d’une algèbre simple centrale à involution*. Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon.
- Grenier-Boley, N. (2007). On the triviality of certain Whitehead groups. *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, *107A*(2), 183–193.
- Grenier-Boley, N. (2009). Harrison’s criterion, Witt equivalence and reciprocity equivalence. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, *16*(3), 509–523.
- Grenier-Boley, N. & Hoffmann, D. W. (2013). Isomorphism criteria for Witt rings of real fields. With an appendix by C. Scheiderer. *Forum Mathematicum*, *25*(1), 1–18.
- Grenier-Boley, N., Lequeu, E., & Mahmoudi, M. G. (2008). On hermitian Pfister forms. *Journal of Algebra and Its Applications*, *7*(5), 629–645.
- Grenier-Boley, N., & Mahmoudi, M. G. (2005). Exact sequences of Witt groups. *Communications in Algebra*, *33*(4), 965–986.
- Harrison, D. K. (1970). *Witt rings*. University of Kentucky Notes, Lexington, Kentucky.

- Hoffmann, D. W. (2000). Isotropy of quadratic forms and field invariants. *Contemporary Mathematics*, 272, 73–102.
- Hoffmann, D. W. (2008). Levels of quaternion algebras. *Arch. Math. (Basel)*, 90 no. 5, 401–411.
- Hoffmann, D. W. (2010). Levels and sublevels of quaternion algebras. *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, 110A no. 1, 95–98.
- Jacobson, N. (1940). A note on hermitian forms. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(4), 264–268.
- Karpenko, N. (2010). Hyperbolicity of orthogonal involutions. *Doc. Math. no. Extra volume : Andrei A. Suslin sixtieth birthday*, 371–392, With an appendix by Jean-Pierre Tignol.
- Karpenko, N. (2012). Hyperbolicity of unitary involutions. *Sci. China Math.*, 55 no. 5, 937–945.
- Karpenko, N., & Quéguiner, A. (2000). A criterion of decomposability for degree 4 algebras with unitary involution. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 147(3), 303–309.
- Knebusch, M., Rosenberg, A. & Ware, R. (1972). Structure of Witt rings and quotients of abelian group rings. *American Journal of Mathematics* 94(1), 119–155.
- Kneser, H. (1934) Verschwindende Quadratsummen in Körpern. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 44, 143–146.
- Knus, M.-A. (1991). *Quadratic and hermitian forms over rings*. Grundlehren der Math. Wiss. 294 Springer-Verlag.
- Knus, M.-A. (1993). Sur la forme d’Albert et le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions. *Bulletin de la Société mathématique de Belgique. Série B*, 45(3), 333–337.
- Knus, M.-A., Merkurjev, A. S., Rost, M. & Tignol, J.-P. (1998). *The book of involutions*. American Mathematical Society Colloquium Publications 44. American Mathematical Society, Providence, RI.
- Knus, M. A., Parimala, R., & Sridharan, R. (1991). On the discriminant of an involution. *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A*, 43 (1-2), 89–98.
- Koprowski, P. (2002). Witt equivalence of algebraic function fields over real closed fields. *Math. Z.*, 242 no. 2, 323–345.
- Koprowski, P. (2012). *Witt morphisms*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.
- Krüskemper, M. & Wadsworth, A. (1991). A quaternion algebra of sublevel 3. *Bull. Soc. Math. Belg. Sér., B* 43 no. 2, 181–185.
- Lam, T. Y. (1983). *Orderings, Valuations, and Quadratic Forms*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics 52, American Mathematical Society, Providence, RI.
- Lam, T. Y. (2005). *Introduction to quadratic forms over fields* (Vol. 67). American Mathematical Society.
- Leep, D. B.. (1990). Levels of division algebras. *Glasgow Math. J.*, 32 no. 3, 365–370.
- Lewis, D. W. (1979). A note on Hermitian and quadratic forms. *Bull. London Math. Soc.*, 11 no. 3, 265–267.
- Lewis, D. W. (1982). New improved exact sequences of Witt groups. *J. Algebra*, 74 no. 1, 206–210.
- Lewis, D. W. (1983). Exact sequences of Witt groups of equivariant forms. *Enseign. Math.*, (2) 29 no. 1-2, 45–51.

- Lewis, D. W. (1985). Periodicity of Clifford algebras and exact octagons of Witt groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 98 no. 2, 263–269.
- Lewis, D. W. (1987). Levels and sublevels of division algebras. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* 87 no. 1, 103–106.
- Lewis, D. W. (1988). Sums of hermitian squares. *J. Algebra* 115(2), 466–480.
- Lewis, D. W. (1989). Levels of quaternion algebras. Quadratic forms and real algebraic geometry (Corvallis, OR, 1986). *Rocky Mountain J. Math.*, 19 no. 3, 787–792.
- Lewis D. W., & Tignol, J.-P. (1999). Classification theorems for central simple algebras with involution (with an appendix by R. Parimala). *Manuscripta Math.*, 100, 259–276.
- Lewis, D. W. & Unger, T. (2003). A local-global principle for algebras with involution and Hermitian forms. *Math. Z.*, 244(3), 469–477.
- Merkurjev, A. S. (1981). On the norm residue symbol of degree 2. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 261 no. 3, 542–547, english transl. : *Soviet Math. Dokl.*, 24 546–551.
- Merkurjev, A. S. (1995). *K*-theory of simple algebras. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 58.1, 65–83.
- Milnor, J. & Husemoller, D. (1973). *Symmetric bilinear forms*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73, New York-Heidelberg, Springer-Verlag.
- Nakayama, T. & Matsushima, Y. (1943). Über die multiplikative Gruppe einer p -adischen Divisionsalgebra. *Proceedings of the Imperial Academy of Tokyo*, 19, 622–628.
- Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens : l'heuristique mathématique*. IREM de Lyon.
- O'Shea, J. (2007). Levels and sublevels of composition algebras. *Indag. Math. (N.S.)*, 18 no. 147–159.
- O'Shea, J. (2014). The weak isotropy of quadratic forms over field extensions. *Manuscripta Mathematica*, 145(1-2), 143–161.
- Parimala, R., Sridharan, R. & Suresh, V. (1995). An exact sequence of Witt groups. Appendix 2 in Bayer-Fluckiger and Parimala (1995).
- Perlis, R., Szymiczek, K., Conner, P. E. & Litherland R. (1994). Matching Witts with global fields. *Contemp. Math.*, 155, 365–387.
- Pfister, A. (1965a). Zur Darstellung von -1 als Summe von Quadraten in einem Körper. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1), 159–165.
- Pfister, A. (1965b). Multiplikative quadratische Formen. *Archiv der Mathematik*, 16(1), 363–370.
- Pfister, A. (1966). Quadratische Formen in beliebigen Körpern. *Inventiones mathematicae*, 1(2), 116–132.
- Pfister, A. (1995). *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology* (Vol. 217). Cambridge University Press.
- Pierce, R. S. (1982). *Associative Algebras*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag.
- Platonov, V. P. (1975). On the Tannaka-Artin problem. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 221, 1038–1041. English translation : *Soviet Mathematics Doklady*, 16.
- Pólya, G. (1957). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*, 2nd ed. Princeton University, Princeton.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery : on understanding, learning and teaching problem solving*. Combined paperback edition, New York : Wiley.

- Quéguiner, A. (1997). Cohomological invariants of algebras with involution. *J. Algebra*, 194 no. 1, 299–330.
- Quéguiner-Mathieu, A. (2006). *Autour des algèbres de Tits* (Note de synthèse, Université Paris 13). Repéré à <http://www.math.univ-paris13.fr/queguin/fichiers/hdr2.pdf>.
- Quéguiner-Mathieu, A. & Tignol, J.-P. (2012). Cohomological invariants for orthogonal involutions on degree 8 algebras. *Journal of K-theory*, 9(2), 333–358.
- Quéguiner-Mathieu, A. & Tignol, J.-P. (2015). The Arason invariant of orthogonal involutions of degree 12 and 8, and quaternionic subgroups of the Brauer group. *Doc. Math. Extra Volume : Alexander S. Merkurjev’s sixtieth birthday*, 529–576.
- Ranicki, A. A. (1987). The L -theory of twisted quadratic extensions. *Canad. J. Math.*, 39 no. 2, 345–364.
- Rowen, L. H. (1978). Central simple algebras. *Israel Journal of Mathematics*, 29(2), 285–301.
- Rowen, L. H. (1984). Division algebras of exponent 2 and characteristic 2. *Journal of Algebra*, 90(1), 71–83.
- Sah, C. H. (1972). Symmetric bilinear forms and quadratic forms. *Journal of Algebra*, 20(1), 144–160.
- Scharlau, W. (1970). Induction theorems and the structure of the Witt group. *Invent. Math.*, 11, 37–44.
- Scharlau, W. (1985). *Quadratic and Hermitian Forms*, Grundlehren der Math. Wiss. 270 Springer-Verlag.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Elsevier.
- Serhir, A. (1997). Niveau hermitien de certaines algèbres de quaternions. *Communications in Algebra*, 25(8), 2531–2538.
- Serhir, A. (2002). Niveau hermitien d’une algèbre de quaternions à division munie d’une involution de seconde espèce. *Communications in Algebra*, 30(10), 4621–4627.
- Soman, A. (2016). On triviality of some reduced Whitehead groups over Henselian fields. *Preprint arXiv 1609.01403*, 14 pages.
- Stone, M. H. (1937). Applications of the* theory of Boolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 no. 3, 375–481.
- Suslin, A. A. (1985). Algebraic K -theory and the norm residue homomorphism. *Journal of Soviet Mathematics*, 30, 2556–2611.
- Suslin, A. A. (1991) SK_1 of division algebras and Galois cohomology. *Advances in Soviet Mathematics*, 4, 75–99.
- Szymiczek, K. (2009). Quadratic Forms. In : M. Hazewinkel, editor, *Handbook of Algebra*, Vol. 6., pp. 35–80, The Netherlands : North-Holland.
- Tao, T. (2006). *Solving mathematical problems : a personal perspective*. OUP Oxford.
- Tao, T. (2007). What is good mathematics? *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44(4), 623–634.
- Thurston, W. (1995). Preuve et progrès en mathématiques. *Repères IREM*, 21 , 7–26.
- Tignol, J.-P. (1998) Algebras with involution and classical groups. In Balog A., Katona G.O.H., Recski A., Sza’sz D. (Eds) European Congress of Mathematics. *Progress in Mathematics*, 169, Birkhäuser, Basel.

- Tignol, J.-P. (2010). Cohomological invariants of central simple algebras with involution, 137-171. Dans Colliot-Thélène, J.-L., Garibaldi, S., Sujatha, R. & Suresh, V. *Quadratic forms, Linear Algebraic Groups and Cohomology*. Springer Science & Business Media.
- Tits, J. (1968). Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford. *Invent. Math.* 5, 19–41.
- Tits, J. (1993). Sur les produits tensoriels de deux algèbres de quaternions. *Bulletin de la Société mathématique de Belgique. Série B*, 45(3), 329–331.
- Villani, C. (2012). *Théorème vivant*. Paris : Grasset.
- Wall, C.T.C. (1972). On the classification of Hermitian forms. II Semi-simple rings. *Invent. Math.*, 18 119–141.
- Wang, S. (1950). On the commutator group of a simple algebra. *American Journal of Mathematics*, 72, 323–334.
- Weil, A. (1960). Algebras with involutions and the classical groups. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 24, 589–623.
- Weil, A. (1994). Le point de vue d'André Weil. *Les mathématiciens, Dossier Hors-Série Pour la Science*, 48–49.
- Witt, E. (1937). Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 176, 31–44.
- Yanchevskii, V. (1974). Simple algebras with involution and unitary groups. *Matematicheskii Sbornik*, 93. English translation : *Mathematics of the USSR Sbornik*, 22, 372–384.
- Yanchevskii, V. (1975). The commutator subgroups of simple algebras with surjective reduced norms. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 221. English translation : *Soviet Mathematics Doklady*, 16, 492–495.
- Yanchevskii, V. (1995). Symmetric and skew-symmetric elements of involutions, associated groups and the problem of decomposability of involutions. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 58.2, 431–444.
- Zarca, B. (2012). *L'univers des mathématiciens. L'ethos professionnel des plus rigoureux des scientifiques*. Presses Universitaires de Rennes.

CHAPITRE 2

LES TEXTES DE SAVOIR EN MATHÉMATIQUES : TROIS ÉTUDES DIDACTIQUES DE CAS

« Tu ne vas pas me croire, mais tout ce qu'il y a dans ce monde sert à quelque chose. Tiens... prends ce caillou, par exemple... »

- « Le fou » dans *La Strada* de Federico Fellini

Dans ce chapitre, nous revisitons certaines recherches que nous avons menées en didactique des mathématiques en insistant à la fois sur les aspects qu'elles partagent et ceux qui les rendent spécifiques.

En tant que chercheur en mathématiques, nous avons été amenés à établir des « textes de savoir » pour rendre compte de nos différents travaux (voir chapitre 1) et à réfléchir à l'usage que nous faisons de ces textes dans notre activité de chercheur (voir 1.7.1). En tant que chercheur en didactique des mathématiques, nous avons naturellement souhaité nous intéresser à la différence fondamentale qu'il y a entre le fait d'établir ou de disposer d'un texte de savoir et d'avoir à l'enseigner ou à l'apprendre. À cet égard, la plupart de nos travaux en didactique abordent l'étude des textes de savoir dans l'enseignement des mathématiques en partant du principe que cette étude dépend fortement des notions considérées et du moment de leur enseignement. Dans la suite de ce chapitre, nous présentons trois études didactiques consacrées à des notions pour lesquelles il y a des difficultés d'enseignement liées au moins en partie à la difficulté du texte de savoir : les premières notions d'algèbre linéaire (2.2) ou les notions de limites formalisées de suites ou de fonctions (2.3) au début de l'université, la notion de fonction entre la troisième et la seconde (2.4). Dans chacun des trois cas, l'étude a été menée en France et nous nous intéressons aux moments d'introduction des notions qui correspondent aussi à des moments de transition entre deux institutions.

En 2.1, nous présentons les éléments théoriques communs qui nous ont permis de fonder chacune des trois études en allant des éléments plus globaux aux plus locaux. De même que nous avons tenté de mettre en valeur notre propre activité de chercheur à la fin du chapitre précédent (1.7), nous avons souhaité adopter un cadre théorique au sein duquel l'apprentissage des élèves est caractérisé par leurs activités. Après avoir rappelé quelques éléments de contexte sur le système scolaire français (2.1.1), nous précisons le cadre théorique adopté (la Double Approche au sein de la Théorie de l'Activité) en insistant sur les hypothèses qui y sont faites concernant les apprentissages des élèves et les pratiques des enseignants (2.1.2). Disons d'ores et déjà de manière très schématique qu'au sein de ce cadre, les savoirs ne sont pas étudiés de manière absolue mais relativisés aux activités des élèves en lien avec les pratiques des enseignants. En 2.1.3, nous définissons le relief d'une notion mathématique à enseigner qui constitue la référence que nous prenons pour étudier

l'apprentissage de cette notion. Il résulte du croisement de trois études de nature distincte : une étude épistémologique, une étude curriculaire et une étude cognitive. En 2.1.4, nous rappelons la définition de différents types de notions à enseigner, en particulier les « notions FUG ». Nous verrons que les notions principales de nos études pourront être interprétées comme des notions FUG, donc d'une difficulté particulière, car elles sont éloignées des connaissances antérieures¹ des élèves.

Dans chacune des sections consacrées aux trois études, nous insistons sur les outils théoriques ou méthodologiques spécifiques que nous avons développés ainsi que sur les résultats auxquels elles conduisent. Nous mettons aussi en valeur la place particulière du texte de savoir dans chacune de ces études : l'importance du déroulement en travaux dirigés et de la place que le cours y occupe (2.2), l'importance pour l'enseignant de réfléchir au cours en termes de certaines proximités avec les élèves (2.3), une manière d'étudier des manuels présentant un texte de savoir (2.4). L'étude menée en 2.4 est un travail de recherche commun avec Julie Horoks soumis à une revue et non publié à ce jour. En conséquence, nous présentons les traits saillants de cette étude en 2.4 mais elle figure en intégralité dans l'annexe C.

2.1 Quelques éléments théoriques

2.1.1 Éléments de contexte

Pour le confort du lecteur, nous rappelons l'organisation de l'enseignement secondaire et supérieur en France puis nous y situons nos trois études.

En France, l'enseignement secondaire est divisé en sept grades au sein de deux institutions : le *collège* pour les quatre premières années qui suivent l'enseignement primaire et le *lycée* pour les trois années suivantes. Au collège les élèves ont en principe entre 11 et 15 ans, et au lycée entre 15 et 17 ou 18 ans, l'âge obligatoire minimum de sortie du système scolaire étant de 16 ans. Au collège, le premier grade (sixième) fait partie du cycle 3 qui regroupe aussi les deux derniers niveaux de l'enseignement primaire, et les trois derniers grades (cinquième, quatrième, troisième) forment le cycle 4 (depuis la réforme de 2016). Au lycée², les différents grades sont la seconde, la première et la terminale. Si la seconde est une classe indifférenciée, les élèves en première puis en terminale choisissent la série au sein de laquelle ils prépareront le *baccalauréat* : économique et sociale, littéraire, scientifique. Le baccalauréat est un diplôme national qui récompense la fin des études secondaires et c'est aussi la norme pour accéder à l'enseignement supérieur.

Depuis la réforme LMD, l'université française compte trois grades qui sont aussi des diplômes nationaux : la *Licence* qui correspond à trois années d'étude après le baccalauréat (L1, L2, L3) et atteste de l'obtention de 180 ECTS³, le *Master* qui correspond à deux années d'étude après la Licence (M1, M2) et atteste de l'obtention de 120 ECTS supplémentaires et le *Doctorat* au cours duquel l'étudiant prépare puis soutient une thèse dont la durée de référence est de trois ans. La Licence et le Master sont organisés en semestres (6 pour la Licence, 4 pour le Master) qui sont eux-mêmes divisés en plusieurs cours consacrés à différents domaines.

1. Dans la suite de la note, les *connaissances antérieures* des élèves référeront à leurs connaissances supposées acquises, soit parce que ce sont des connaissances qui figurent dans les programmes des années précédentes, soit parce qu'elles ont déjà été étudiées plus tôt dans l'année. Bien entendu, les connaissances antérieures réelles et leur degré d'acquisition peuvent varier d'un élève à l'autre.

2. Nous évoquons seulement ici la voie générale du lycée et pas les voies technologique ou professionnelle.

3. Le système de crédits ECTS (European Credits Transfer System) fait référence à un système de points de l'Union Européenne supposé favoriser la comparaison et la lecture des programmes d'étude des différents pays européens.

Une différence fondamentale entre l’enseignement secondaire et l’enseignement universitaire pour les mathématiques est la manière dont celui-ci est organisé. Pour un grade donné dans le secondaire, le cours de mathématiques est assuré par un unique enseignant qui a la liberté d’organiser le cours, les activités et les exercices à sa guise en relation avec les programmes. À l’université, il y a plusieurs unités d’enseignement (UE) au sein d’un semestre, chacune étant en général consacrée à une partie d’un domaine mathématique et il n’existe pas de programme officiel, même si dans les faits la plupart des universités traite des mêmes savoirs. Une UE donnée est souvent séparée en deux modalités différentes⁴ : le *cours magistral* (CM) qui est assuré par l’enseignant responsable de l’UE au cours duquel les savoirs sont présentés aux étudiants en « grands groupes⁵ », les *travaux dirigés* (TD) pendant lesquels les étudiants utilisent les savoirs introduits dans le CM dans des situations particulières (exercices, problèmes...) sous la responsabilité d’un enseignant qui organise le déroulement à sa guise (interactions, rappels, aides, corrections, autonomie...).

En 2.2, nous étudierons l’introduction des premiers concepts d’algèbre linéaire en L1 lors des séances de TD, ces concepts ayant déjà été présentés aux étudiants en CM. En 2.3, nous nous intéresserons à l’émergence en cours de L1 des définitions formelles en (ε, N) de limite de suite ou en (ε, α) de limite de fonction. Ces notions sont introduites et approchées en première S et en terminale S sans que la définition formelle soit donnée. Nous mettons en regard les « occasions de se rapprocher des étudiants » offertes (ou pas) pour trois modalités de cours : au sein d’un manuel, dans une vidéo en ligne, lors d’un CM. En 2.4, nous développons l’analyse de différents manuels au sujet de l’enseignement des fonctions en troisième et en seconde. La notion de fonction est introduite en troisième en lien avec diverses connaissances antérieures des élèves et est approfondie en seconde.

2.1.2 Cadre théorique

Nous terminions le chapitre précédent en tentant de mettre en valeur certains invariants de notre propre activité de chercheur ou de notre pratique de recherche (1.7). De manière analogue, nous avons souhaité baser nos travaux en didactique sur un cadre théorique qui permette d’approcher les apprentissages des élèves au moyen de leurs activités en classe en lien avec les tâches mathématiques qu’ils effectuent sous la responsabilité de l’enseignant. Nous explicitons quelques éléments de ce cadre théorique et quelques-unes des hypothèses qui y sont associées et renvoyons aux deux ouvrages⁶ et aux travaux suivants pour de plus amples précisions : Vandebrouck, 2008, 2013 ; Vandebrouck & Robert, 2017a, 2017b.

Nos recherches sont situées au sein du cadre général de la Théorie de l’Activité (Leontiev, 1975 ; Leplat, 1997 ; Vygotski, 1934/1997) appliqué en particulier à la didactique des mathématiques et à la situation scolaire avec la Double Approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes (Robert, 2008 ; Robert et Hache, 2013 ; J. Rogalski, 2008, 2013 ; Vandebrouck & Robert, 2017a, 2017b). L’objectif principal de ce cadre est la compréhension de l’enseignement et de l’apprentissage des mathématiques en situation scolaire par l’analyse des activités des élèves et des enseignants en tant que sujets individuels. Le concept central au sein de ce cadre est le concept d’*activité* au sens d’activité⁷ « orientée par la tâche à accomplir, avec une organisation des actions de réalisation du but de la tâche, et des opérations au

4. Parfois, les étudiants sont d’emblée répartis en petits groupes dans une UE donnée et c’est un seul enseignant qui assure le cours et les exercices : nous n’étudierons pas ce cas de figure ici.

5. Dans les premières années de Licence, il y a en général plus de 150 étudiants qui assistent à un cours magistral donné : cela dépend bien sûr aussi de la taille de l’université considérée.

6. Pour le confort des lecteurs francophones et anglophones, nous référerons à chacun de ces deux ouvrages pour les divers éléments théoriques.

7. D’autres sens d’activité sont utilisés dans la littérature mais ils se situent à un grain d’analyse plus global, comme la notion de système d’activité (Engeström, Miettinen, & Punamäki, 1999).

moyen desquelles ces actions sont réalisées » (J. Rogalski, 2008, p. 24 ; J. Rogalski, 2013, p. 3). La distinction entre tâche et activité constitue un élément central de ce cadre : tandis que la *tâche* réfère au « but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions », l'*activité* est tout « ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche » (J. Rogalski, 2008, p. 24, J. Rogalski, 2013, p. 4) de manière interne ou externe. L'activité est donc liée au sujet alors que la tâche est liée à ses actions.

Ce cadre théorique s'appuie sur des hypothèses générales concernant les apprentissages des élèves en articulant la Théorie de l'Activité à deux théories constructivistes proposées par Piaget et Vygotski (Robert, 1998 ; J. Rogalski, 2008, 2013). D'une part, d'un point de vue piagétien, on considère que pour chaque sujet individuel « les connaissances sur les objets se construisent à partir des actions sur ces objets » (J. Rogalski, 2008, p. 432 ; J. Rogalski 2013, p. 9). D'autre part, d'un point de vue vygotkien (Robert, 1998), on considère que chaque sujet « est un sujet individuel et social, qui va construire les instruments de sa pensée dans l'interaction sociale » (J. Rogalski, 2008, p. 432 ; J. Rogalski 2013, p. 9). Si dans la littérature, ces points de vue sont parfois présentés comme étant en opposition ou complémentaires, nous supposons en suivant J. Rogalski (2008, 2013) qu'ils peuvent être articulés. Explicitement, cela suppose que l'apprentissage des élèves, en lien avec un contenu mathématique donné à un moment donné d'enseignement, peut résulter à la fois en partie d'un processus interne individuel (l'élève travaille en autonomie) ou d'un processus social (l'élève a la possibilité de prendre part à un travail collectif, possiblement après certaines médiations de l'enseignant). En résumé, on considère que

[...] ce sont les activités mathématiques des élèves, sur les tâches proposées par leurs professeurs, au sens large, associées aux déroulements des exercices en classe et à la maison, aux moments d'exposition des connaissances, aux évaluations qui contribuent en grande partie aux apprentissages des élèves sur une notion visée (Robert & Vandebrouck, 2014, p. 248).

Nous faisons aussi l'hypothèse que l'identification par l'enseignant des Zones Proximales de Développement (ZPD) des élèves⁸ (Vygotski, 1934/1997 ; voir aussi Robert, 1998 ; J. Rogalski, 2008, 2013) est fondamentale en situation de classe : elle est « située entre le niveau présent de développement, attesté par ce que l'enfant est capable de faire / de résoudre, de façon autonome, et ce que l'enfant peut faire / résoudre avec l'aide d'autrui » (J. Rogalski, 2008, p. 442 ; J. Rogalski, 2013, p. 17). Schématiquement, la ZPD d'un élève modélise donc des connaissances proches de celles qu'il a à un moment donné. Cette hypothèse est pertinente dans la mesure où nos études traitent de l'apprentissage de nouvelles notions (J. Rogalski, 2008, 2013). Nous retenons donc à la fois l'importance des ZPD des élèves et des médiations de l'enseignant pour l'acquisition des connaissances chez les élèves (Robert, 1998 ; Vandebrouck & Robert, 2017a, 2017b).

Dans chacune des études réalisées, nous précisons des éléments ou hypothèses théoriques spécifiques qui sont liés aux questionnements particuliers ou aux outils méthodologiques qui y sont développés.

2.1.3 Relief d'une notion à enseigner

Avant d'analyser des séances ou des scénarios dédiés à l'apprentissage d'une notion mathématique⁹, nous précisons la référence que nous prenons pour l'apprentissage de cette notion. Cette référence est ce que l'on appelle le *relief* de la notion mathématique (Chappet-Pariès, Pouyanne, Robert, Roditi & Rogalski, 2007 ;

8. Puisque chaque élève a sa propre ZPD, nous référerons aux « ZPD des élèves » pour signaler que les ZPD peuvent être très différentes selon les élèves.

9. Par abus de langage, une notion mathématique peut référer suivant les cas à un unique concept mathématique (définition, théorème,...) , un ensemble de concepts, un domaine...

Robert & Vandebrouck, 2014) qui est le croisement de trois analyses préalables qui mettent en jeu tout ce qui nous semble pouvoir influencer les apprentissages mathématiques des élèves.

Pour être tout à fait précis et parce que cela sera utile à de nombreuses reprises dans la suite de cette note, nous explicitons le sens que nous donnons au terme d'épistémologie. Nous reprenons pour cela la définition donnée par Dorier (1997a), p. 16 : est qualifié d'épistémologique ce

[...] qui est relatif à l'évolution des savoirs ou des connaissances (pour nous ils seront toujours mathématiques). Le terme évolution est à prendre au sens le plus large : elle peut concerner aussi bien un système, qu'une institution ou un individu, etc., de plus, elle ne se réduit pas seulement à l'idée de progrès, mais peut aussi se révéler être une stagnation ou un recul.

D'une part, le niveau de conceptualisation des connaissances attendues pour l'apprentissage d'une notion mathématique (Robert, 1998, 2003, 2008, Robert & Vandebrouck, 2014) est défini à partir des spécificités de cette notion à partir des programmes éventuels, en précisant les cadres et registres impliqués (Duval, 1993, 2006), les dimensions outil ou objet (Douady, 1986) et le niveau de rigueur attendu (formalisme, modes de raisonnements, démonstrations...). La détermination du niveau de conceptualisation attendu pour cette notion¹⁰ relève donc majoritairement d'une étude épistémologique (dont la finalité est didactique) et d'une étude curriculaire.

D'autre part, le relief de cette notion (Chappet-Pariès et al., 2007 ; Robert & Vandebrouck, 2014) est alors défini par l'explicitation de son niveau de conceptualisation attendu, complétée par les difficultés connues des élèves concernant cette notion et par les résultats des études didactiques qui ont été menées à son sujet.

Le relief d'une notion mathématique à enseigner correspond donc à l'articulation de trois types d'études : une étude épistémologique, une étude curriculaire et une étude didactique des difficultés des élèves. Notons que la détermination du relief d'une notion peut être plus ou moins précise suivant les finalités didactiques que l'on poursuit : l'étude décrite en 2.4 se basera sur une description en détail du relief de la notion de fonction en classe de seconde (voir annexe C). Précisons aussi que si la détermination du relief constitue notre référence pour analyser des séances en classe ou des scénarios, il est aussi utile pour concevoir un scénario d'apprentissage qui soit adéquat vis-à-vis des possibilités d'apprentissage des élèves. Nous reviendrons sur cet usage particulier du relief lors de la conclusion de ce chapitre en 3.1.3.2.

2.1.4 Différents types de notions mathématiques à enseigner

Nous revenons sur la question de l'enseignement d'un texte de savoir dont on dispose en insistant sur le fait que cet enseignement dépend fortement de la nature des notions qui y sont considérées. Nous distinguons donc différents types de notions liés à des rapports différents entre les connaissances antérieures des élèves et le degré de nouveauté de cette notion.

Dans un texte de savoir, ce que l'on qualifie de « nouveau » peut prendre plusieurs sens (Robert, 2008 ; Robert & Hache, 2013) : une nouvelle notion, un nouveau cadre, des objets nouveaux, des nouveaux théorèmes ou propriétés, un nouveau point de vue sur des objets déjà connus... Des études antérieures ont déjà distingué différents types de notions (Robert, 2008 ; Robert & Hache, 2013) : les extensions de concepts avec ou sans accident, les notions qui répondent à un problème (notions RAP) et les concepts FUG qui conjuguent différentes caractéristiques.

10. Pour les lecteurs souhaitant un exemple précis, on renvoie à Robert, 2003 où la description de deux niveaux de conceptualisation est faite en détail : celui de la géométrie euclidienne du collège et celui de la géométrie affine euclidienne introduite au lycée et détaillée à l'université.

2.1.4.1 Les concepts FUG

Certains concepts mathématiques n'ont pas été inventés en réponse à un problème spécifique mais plutôt pour résoudre ou aborder différents problèmes avec les mêmes outils¹¹ ou pour unifier plusieurs définitions¹². En s'inspirant de la même idée, lorsqu'un nouveau concept est introduit à un niveau d'enseignement, une manière d'apprécier la distance qui le sépare des connaissances antérieures des élèves est de mesurer la présence de caractères que ce nouveau concept présente par rapport aux notions antérieures : caractère formalisateur, caractère unificateur, caractère généralisateur (Dorier, 1995 ; Robert 1987, 1998, 2008 ; Robert & Hache, 2013).

- Le *caractère formalisateur* d'un concept consiste en l'introduction d'un nouveau formalisme — un nouveau vocabulaire, de nouveaux symboles, l'unification de formalismes pré-existants — qui n'a pas encore été faite intégralement. Ainsi, la définition en (ε, N) de limite d'une suite en début de L1 présente un caractère formalisateur dans la mesure où le formalisme associé est nouveau même si les symboles qui y apparaissent sont déjà connus de certains étudiants.
- Le *caractère unificateur* d'un concept signifie que ce concept unifie plusieurs concepts déjà connus desquels il s'abstrait. Par exemple, la notion d'espace vectoriel vue en L1 présente un caractère unificateur puisqu'elle permet possiblement de travailler de manière similaire avec les polynômes à coefficients réels, avec les suites réelles ou avec les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène réelle.
- Le *caractère généralisateur* d'un concept réfère au fait que ce concept généralise ou étend un ou plusieurs éléments précédemment connus. Par exemple la notion d'espace topologique introduite en M1 présente un caractère généralisateur dans la mesure où elle étend la notion d'espace métrique vue en Licence.

Lorsqu'un nouveau concept à un moment donné d'enseignement possède les trois caractères à la fois par rapport aux connaissances antérieures des élèves, on dit que c'est un *concept FUG* (Robert, 1998, 2008 ; Robert & Hache, 2013). Des recherches ont été menées qui ont permis d'identifier un certain nombre de concepts FUG :

- le concept de fonction en 3^e-2^{de} (voir 2.4) ;
- les premiers concepts d'algèbre linéaire en L1, en particulier celui d'espace vectoriel (Dorier, 1997b, 1998, 2000), ceux qui sont en lien avec la dualité (De Vleeschouwer, 2010) ou aux applications linéaires (Lalaude-Labayle, 2016) ;
- la définition en (ε, N) de limite d'une suite réelle ou celle en (ε, η) de limite d'une fonction de la variable réelle en un point en L1 (Robert, 1998) ;
- les premiers concepts de topologie générale en L3 (Bridoux, 2011) ;
- les structures algébriques au sein de l'algèbre moderne, en particulier celle de groupe en L3 (Durand-Guerrier, Hausberger & Spitalas, 2017) ou l'algèbre abstraite (Hausberger, 2016) ;
- le concept d'idéal en L3 (Jovignot, 2017).

Sauf dans certains cas particuliers, le mathématicien ne manipule en général que des objets proprement définis sous un formalisme précis. Dans l'enseignement des mathématiques, il en va autrement : « avant même d'avoir été définies, des notions sont manipulées par le biais de leurs propriétés opératoires » (Pouyane dans Chappet-Pariès et al., 2007, p. 9). On parle alors de *notions non encore formalisées*

11. par exemple les concepts de base de la théorie moderne des groupes, des espaces vectoriels, des espaces topologiques.

12. par exemple la définition de catégorie qui unifie certaines caractéristiques communes de nombreuses structures mathématiques (Mac Lane, 1958) et qui peut être considérée comme l'un des fondements des mathématiques.

voire non formalisables (Pouyanne dans Chappet-Pariès et al., 2007, voir aussi Robert, Lattuati & Penninckx, 2012) : c'est par exemple le cas des aires et longueurs de certains objets dans le primaire ou le secondaire, des nombres réels au lycée... Parfois aussi plusieurs états formalisés d'une même notion se succèdent (vecteurs, distance...) ou co-existent (cosinus, puissances), sans que le lien entre ces états soit explicitement décrit (*ibid.*). Nous reviendrons sur ces types de notions en 3.2.1.3.

2.1.4.2 Hypothèses

Nous donnons quelques précisions sur le sens que nous accorderons à la notion de concept FUG dans cette note, sur la manière utilisée pour déterminer qu'un concept a une nature FUG et explicitons certaines hypothèses liées à leur enseignement.

La détermination de la nature FUG d'un concept peut s'envisager de deux manières suivant les références des recherches didactiques considérées. D'une part, celle-ci peut relever d'une étude sur un plan exclusivement épistémologique : dans ce cas, cette étude atteste que l'introduction par les mathématiciens des savoirs correspondants à un moment historique donné est de nature FUG. D'autre part, elle peut en plus prendre en compte le moment précis d'enseignement (programmes antérieurs et en cours, connaissances antérieures supposées des élèves) et est alors conséquence d'une étude du relief de ce concept articulée autour de trois plans (épistémologique, curriculaire, didactique) : dans ce cas, cette étude atteste à la fois de la complexité épistémologique de la notion et du fait que la notion présente les trois caractères F, U et G au moment choisi d'enseignement compte tenu des programmes¹³ et connaissances antérieurs. Nous pourrions dire en quelque sorte que la seconde manière de déterminer un concept FUG transpose la première aux diverses conditions d'enseignement.

Dans cette note, nous nous intéressons aux moments précis où les élèves sont supposés apprendre certains savoirs compte tenu des médiations de l'enseignant : nous choisissons donc d'attester de la nature FUG d'un concept selon l'étude de son relief au moment étudié. Selon cette acception, les caractères F, U et G d'un concept varient donc selon le moment où le concept est enseigné. Par exemple, pour revenir au chapitre 1, les éléments rappelés en 1.1.1.1 montre que l'anneau de Witt d'un corps est de nature FUG sur un plan épistémologique. Dans la situation hypothétique où des étudiants d'un M2 suivraient un cours sur la théorie algébrique des formes quadratiques en n'ayant étudié précédemment que les formes quadratiques réelles dans un registre essentiellement matriciel, nous ne dirions pas que cet enseignement présente *a priori* un caractère unificateur, ce qui n'enlève rien à sa complexité pour ces étudiants !

Un certain nombre de recherches didactiques (Durand-Guerrier, Hausberger & Spitalas, 2015 ; Hausberger, 2012 ; Jovignot, 2017, Lalaude-Labayle, 2016 pour les plus récentes) étudient plutôt des concepts FUGS pour signaler la prise en compte explicite d'un quatrième caractère : le *caractère simplificateur* d'un concept qui réfère au fait qu'il simplifie certaines considérations antérieures d'un certain point de vue. De même que les autres caractères, le caractère simplificateur est de fait un moteur de progrès mathématiques sur un plan épistémologique (et nous avons pu le constater dans nos propres recherches, voir 1.7). Ce caractère était présent à l'origine des recherches consacrées à ces concepts (Robert, 1987, 1998), mais la mise en œuvre de certaines ingénieries prenant explicitement en compte ce caractère (notamment en algèbre linéaire, en analyse réelle) a montré qu'il était beaucoup moins valorisable que les autres caractères pour les élèves ou étudiants (du moins

13. De ce point de vue, l'enseignement universitaire en France se distingue de l'enseignement secondaire par le fait qu'il n'y a pas de programme commun à toutes les universités. Cependant, on peut avoir accès aux programmes des différentes UE et on peut considérer que la plupart des universités enseignent les mêmes concepts au moins en L1 et en L2.

au début). En algèbre linéaire, par exemple, l'exemple de la formule de Grégory (Dorier, 1992, 1997b, 2000) montre que le caractère simplificateur qui consiste à mettre en valeur le fait que cette formule permet de résoudre d'un seul coup de nombreux problèmes d'interpolation polynomiale n'est apparemment pas un argument qui permet aux élèves ou étudiants de remplacer une notion antérieure par une nouvelle notion qui serait simplificatrice. Cela a conduit ces auteurs (Robert, 2008 ; Robert & Hache, 2013) à ne pas le mettre sur le même plan que les autres caractères et à se focaliser sur les caractères F, U et G, au moins pour l'introduction de ces concepts : cela ne signifie pas que le caractère simplificateur y est ignoré ou qu'il n'est pas important mais cela veut dire qu'ils font l'hypothèse soit que ce caractère est moins facile à expliciter aux élèves ou étudiants, soit que son explicitation les convainc moins que celle des autres caractères. Puisque pour nous la nature FUG d'un concept est étroitement associée à son enseignement et que nous nous intéressons aux tous débuts de l'enseignement de tels concepts en seconde ou en L1, nous ne prendrons pas en compte ce caractère dans les études de relief que nous mènerons. Bien entendu, suivant la nature des concepts considérés, cette hypothèse serait à relativiser, par exemple pour des concepts introduits en L3 ou après.

Selon la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1988, 1997), il est important de réussir à introduire un concept au moyen d'une situation fondamentale au sein de laquelle il apparaît comme outil de résolution approprié. Après avoir été institutionnalisé en tant qu'objet et donc consacré en tant que savoir, on peut poursuivre son étude au moyen de la dialectique outil-objet (Douady, 1986). Quel que soit le sens qu'on lui donne, un concept FUG (ou FUGS) est objet avant d'être outil. En outre, en situation d'enseignement, un tel concept signale une distance importante avec les connaissances antérieures des élèves. Même s'il existe de nombreux leviers (nous y reviendrons), nous faisons donc l'hypothèse « qu'il n'existe pas de problème [ou de suite de problèmes] adapté à les introduire avec tout leur sens, mais seulement partiellement, le travail de la technique restant là encore à introduire autrement » (Robert, 2008, p. 48 ; Robert & Hache, 2013, p. 40). On peut donc s'attendre à ce que l'enseignement d'un texte de savoir lié à des concepts FUG pose de nombreuses difficultés sur lesquelles nous reviendrons, globalement en 2.2.1.3 ainsi que spécifiquement au sein de chacune des études.

2.2 Introduction des premiers concepts d'algèbre linéaire

Dans cette section, nous proposons une relecture d'un de nos travaux de recherche (Grenier-Boley, 2009, 2014). Le texte de savoir sous-jacent est consacré à l'introduction des premiers concepts d'algèbre linéaire en travaux dirigés en L1. Après avoir rappelé des éléments de relief des concepts concernés (2.2.1) afin d'en extraire certaines de leurs spécificités, nous proposons une méthodologie d'étude de séances de TD dédiées à cette introduction (2.2.2) qui prend en compte ces spécificités. Quelques résultats sont présentés qui reviennent sur divers aspects repérés lors des déroulements, en particulier sur la place du cours dans celui-ci (2.2.3). Nous engageons ensuite une discussion qui porte sur les possibilités déjà explorées ou en termes de perspectives pour aborder cet enseignement (2.2.4).

2.2.1 Quelques éléments de relief en algèbre linéaire

Nous posons quelques éléments du relief des premiers concepts d'algèbre linéaire afin que cela puisse servir de référence à la construction de notre méthodologie. Au préalable, nous donnons un exemple qui met en lumière quelques difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'introduction de ces concepts.

2.2.1.1 Un exemple

Considérons l'exercice suivant en supposant qu'il a été donné en L1 lors du premier TD correspondant à un cours d'algèbre linéaire :

Dans \mathbb{R}^2 on définit les opérations $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, 0)$. L'ensemble \mathbb{R}^2 muni de ces opérations est-il un espace vectoriel ?

Bien que classique, cet exercice n'en contient pas moins de nombreuses difficultés pour des étudiants habitués aux activités mathématiques du secondaire. D'abord, la question est ouverte et aucune méthode n'est suggérée dans l'énoncé. Les étudiants doivent revenir à la définition d'espace vectoriel, séparer ensuite leur raisonnement en différentes étapes et décider si tel ou tel axiome est satisfait ou pas. Si la loi interne est la loi classique conférant à \mathbb{R}^2 sa structure de groupe abélien, il est probable que cela ne soit pas repéré par tous les étudiants à ce moment du TD et qu'ils vérifient un à un tous les axiomes de la loi interne. Pour la loi externe, seul l'axiome « pour tout v dans \mathbb{R}^2 , $1 \cdot v = v$ » n'est pas satisfait. Quoi qu'il en soit, prouver que chaque axiome est ou non satisfait requiert une combinaison de tâches complexes : conversion éventuelle entre certains registres de représentation (Duval, 1993, 2006), usage approprié du formalisme, de la logique et de la théorie des ensembles, production d'une preuve ou d'un contre-exemple.

2.2.1.2 Études épistémologique et curriculaire

Pour une étude épistémologique exhaustive de la genèse de l'algèbre linéaire, nous renvoyons aux travaux de Dorier (1997b, 1998, 2000). Nous ne faisons que quelques remarques qui en sont issues.

La théorie des espaces vectoriels est récente dans la mesure où la première unification de certains de ses concepts importants (base, dimension) dans une perspective géométrique remonte aux travaux de Grassmann (1844, 1862). Ces travaux n'ont pas eu d'écho immédiat et la première définition axiomatique d'espace vectoriel a été donnée par Peano en 1888. La présentation axiomatique systématique de la théorie s'est développée parallèlement à la création de l'algèbre moderne grâce à la publication d'ouvrages fondamentaux dans les années 1930-1940, comme la *Moderne Algebra* de van der Waerden ou ceux de Banach et Bourbaki. L'approche axiomatique n'a pas été introduite initialement pour résoudre de nouveaux problèmes, mais elle « va pouvoir enfin s'imposer parce qu'elle permet d'unifier divers problèmes aux origines variées dont les ressemblances commencent à apparaître et parce qu'elle permet aussi de combler les manques dans le processus de généralisation » (Dorier, 1998, p. 215).

Même s'il n'existe pas de programme à l'université en France, on choisit en général de présenter la théorie axiomatique formelle des espaces vectoriels¹⁴ aux étudiants en L1 en tentant de faire des liens avec leurs connaissances antérieures.

2.2.1.3 Étude didactique

Nous ne revenons pas ici sur l'intégralité des études didactiques qui ont été menées sur les concepts d'algèbre linéaire mais insistons sur celles qui nous semblent avoir un lien avec notre étude, en particulier tous les travaux qui ont été menés par Dorier, Robert, Robinet et M. Rogalski (voir Dorier, 1997b, 1998, 2000). Nous renvoyons à Dorier (1997b, 2000) ou à Lalaude-Labayle (2016) pour une revue détaillée de nombreux travaux et pour d'autres types de résultats.

14. Celle-ci est soit présentée en général, soit restreinte (en apparence) à certains espaces vectoriels canoniques comme les espaces vectoriels réels \mathbb{R}^n ou $\mathbb{R}_n[X]$ (polynômes de degré inférieur ou égal à n). Suivant les cas, elle précède ou pas l'introduction des matrices.

Divers travaux ont mis en avant le formalisme inhérent à l'algèbre linéaire comme obstacle épistémologique pour les étudiants (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000) et leurs difficultés avec certains pré-requis indispensables en logique, en théorie des ensembles et en géométrie (Dorier, 1997b, 1998, 2000). L'approche axiomatique a été décrite comme étant « hors d'atteinte » par un certain nombre d'étudiants dans une étude récente (Stewart, 2017). Ils éprouvent aussi des difficultés à utiliser les premières notions d'algèbre linéaire, à voir le lien avec des situations familières que ces notions unifient ou généralisent et à opérer de manière flexible des conversions entre registres (Dorier, 1997b, 1998, 2000). Ainsi, ils ne développent pas une compréhension claire de la notion de vecteur dans le secondaire (Mai, Feudel & Biehler, 2017) et, dans le cas des sous-espaces vectoriels, le passage d'un registre algébrique à un registre géométrique où le formalisme serait moindre est problématique (Fleischmann & Biehler, 2018). Les possibilités offertes par la géométrie pour enseigner l'algèbre linéaire ont d'ailleurs été approfondies par Gueudet dans divers travaux (Gueudet, 2004, 2008c). Nous reviendrons sur certaines stratégies d'enseignement de ces concepts en 2.2.4.

De ce rapide panorama du relief des premiers concepts d'algèbre linéaire, il ressort que les concepts centraux de la théorie des espaces vectoriels sont de nature FUG lorsqu'on les présente en L1, avec une articulation particulière des caractères : « Le formalisme est, quant à lui, intrinsèque à la théorie même et apparaît comme une condition nécessaire des aspects unificateur et généralisateur » (Dorier, 1998, p. 216). Le caractère simplificateur de ces concepts est en outre différé puisque cela suppose une bonne connaissance de la théorie générale (Dorier, 1998) : on trouve ici une raison possible de la difficulté des étudiants de L1 à percevoir l'intérêt de ce caractère (voir 2.1.4.2). Pour les concepts d'algèbre linéaire, l'hypothèse que nous avons faite sur la difficulté à les introduire par le biais de divers problèmes avec tout leurs sens est réaliste : de tels problèmes demanderaient en effet un grand effort de formalisation et d'abstraction, mais également la prise en compte de différents types de difficultés qui transparaissent déjà dans l'exemple donné ci-dessus (voir 2.2.1.1).

2.2.1.4 Questionnements

L'étude du relief des premiers concepts d'algèbre linéaire permet de les identifier comme concepts FUG où des difficultés de divers ordres sont entremêlées. Cela pose naturellement la question de l'introduction de ces concepts en L1 et notamment en travaux dirigés. Puisque nous avons fait l'hypothèse qu'il n'existe pas de problème permettant de les introduire en toute généralité, l'apprentissage correspondant des étudiants ne peut résulter de leurs activités en lien avec les tâches mathématiques indépendamment des interventions de l'enseignant. Le rôle de l'enseignant de TD à ce moment précis d'enseignement est donc crucial sous bien des aspects :

- comment l'enseignant introduit-il les concepts centraux d'algèbre linéaire ?
- quels types d'aide fournit-il aux étudiants ? Quelles activités mathématiques peuvent-ils conduire de manière autonome ?
- quelle référence l'enseignant fait-il au texte du savoir donné en CM ?

Nous en venons maintenant à la mise au point d'une méthodologie adaptée à l'étude de ces questions.

2.2.2 Éléments de méthodologie

L'étude du relief a mis en valeur de nombreuses spécificités des concepts d'algèbre linéaire et a porté notre attention sur la manière dont l'enseignant de TD organise les déroulements compte tenu du CM préalable. De notre point de vue, le cadre

théorique de la Double Approche au sein de la Théorie de l'Activité est donc particulièrement adapté. Cela nous permet en effet de prendre en compte les activités des étudiants durant ces TD aussi bien que les activités de l'enseignant : la manière dont il organise les déroulements, le type d'aide qu'il apporte au sein ou en-dehors de leurs ZPD. Nous décrivons d'abord la manière d'analyser les tâches mathématiques et les activités des étudiants au sein de ce cadre avant de décrire la méthodologie, notamment dans sa prise en compte des activités de l'enseignant.

2.2.2.1 Analyses *a priori* et *a posteriori*

Lorsqu'un énoncé mathématique est donné aux élèves lors d'une phase d'enseignement en classe, l'étude des activités des élèves lors de cette phase suppose d'étudier leurs actions (ce qu'ils font ou pas, disent ou pas...) pour chacune des tâches mathématiques associée à l'énoncé. Nous décrivons deux phases d'analyse d'une telle situation (Robert, 2008 ; Robert & Hache, 2013) : une analyse *a priori* des tâches mathématiques, une analyse *a posteriori* de la phase d'enseignement.

L'analyse *a priori* des tâches mathématiques d'un énoncé consiste à déterminer les activités dont on peut penser qu'elles seront potentiellement mobilisées par les étudiants dans la résolution de cet énoncé, partant de leur cours et de leurs connaissances antérieures : d'un point de vue théorique, ces tâches ont en effet une influence sur leurs activités et donc sur leurs apprentissages. Pour conduire cette analyse, on suppose que les diverses reconnaissances de modalités d'applications, les mélanges, combinaisons et mises en relation de connaissances sont l'un des facteurs centraux pour l'apprentissage des étudiants (Robert, 2008 ; Robert & Hache, 2013). Pour l'énoncé considéré, nous déterminons donc s'il s'agit d'appliquer directement une connaissance (tâche simple et isolée) ou de recourir à diverses *adaptations de connaissances* (Robert, 2008 ; Robert & Hache, 2013), parmi lesquelles l'introduction d'intermédiaires ou d'étapes, le changement de cadre ou de registre. Le résultat de cette analyse est la détermination des *activités attendues* des étudiants pour l'énoncé considéré, c'est-à-dire celles que l'on peut prédire partant de leurs connaissances antérieures.

Cette analyse *a priori* de l'énoncé est suivie par une analyse *a posteriori* du moment d'enseignement consacré à cet énoncé. Pour cela, on repère tous les éléments du déroulement, que ce soit des interventions didactiques collectives au sein ou en-dehors des ZPD des étudiants (questions, rappels, indications, aides directes ou non, explications, corrections partielles...) ou tout ce qui est lié au travail des étudiants. Nous sommes donc bien ici dans les hypothèses vygotskiennes de la théorie. Le but est de reconstituer les activités des étudiants par l'analyse de ce moment d'enseignement. Pour cela, nous faisons une hypothèse théorique supplémentaire (Robert, 2008 ; Robert & Hache, 2013) : dans la mesure où les activités réelles des étudiants sont en partie internes donc inaccessibles, nous avons seulement accès aux *activités possibles* des étudiants, qui sont supposées proches de leurs activités réelles et pour lesquelles nous supposons qu'elles donnent un accès pertinent à leurs apprentissages. Par définition, les activités possibles sont celles dont on peut penser qu'elles ont été faites (au moins en partie) par une majorité d'étudiants à partir de l'analyse du moment d'enseignement.

2.2.2.2 Méthodologie

Nous décrivons une méthodologie d'étude des déroulements de séances consacrées aux premiers concepts d'algèbre linéaire en TD. Elle est basée sur une méthodologie générale d'étude des moments d'enseignement au sein du cadre théorique choisi (Robert, 2008 ; Pariès, Robert & Rogalski, 2009 ; Robert & Hache, 2013). Notre méthodologie est fondée sur plusieurs degrés d'analyse appelés *actes* : les trois pre-

miers sont issus de la méthodologie générale et nous avons créé le quatrième acte en lien avec notre étude. Dans la suite, nous nous plaçons dans la situation où une vidéo de la séance a été faite et les interventions des divers acteurs ont été transcrites. On suppose aussi avoir accès aux contenus enseignés en CM, voire au projet des enseignants.

Le premier acte consiste en l'analyse *a priori* des tâches mathématiques impliquées dans les énoncés vus pendant la séance, ce qui donne accès aux activités attendues des étudiants. Le deuxième et le troisième acte consistent en l'analyse *a posteriori* du déroulement de la séance compte tenu des interventions de l'enseignant au sujet de ces énoncés. Dans le deuxième acte, l'analyse *a priori* et les interventions de l'enseignant nous permettent de découper le déroulement en phases chronologiques. Pour donner un compte-rendu lisible et complet de ce qui a eu lieu lors de ces différentes phases, nous les organisons au sein d'un tableau à 3 colonnes mettant face à face les interventions de l'enseignant, la nature du travail des étudiants, le type de tâches concerné. Le troisième acte est l'analyse du tableau produit lors du second acte en vue de déterminer les activités possibles des étudiants (voir Grenier-Boley, 2014 pour plus de précisions) avant de les comparer aux activités attendues.

L'objet du quatrième acte est de définir un indicateur permettant de mesurer et d'apprécier l'organisation globale de la séance par l'enseignant. Cet acte a été construit pour tenter de caractériser les choix de l'enseignant de TD lors de l'introduction des concepts d'algèbre linéaire. Dans une première étape, nous étiquetons chacune des phases du second acte en utilisant quatre types d'étiquettes (définis ci-dessous) qui dépendent de la présence ou pas d'interactions entre l'enseignant et les étudiants : prologue, recherche individuelle, correction, postlogue. A chaque énoncé mathématique, nous associons le 4-uplet ordonné (x, y, z, t) où x (resp. y, z, t) est la partie entière de la proportion de temps consacrée au prologue (resp. à la recherche individuelle, à la correction, au postlogue) lors de l'intervention. Nous nommons ce 4-uplet « indicateur global de gestion » du déroulement associé à l'énoncé. La deuxième étape de l'acte consiste à tenter de regrouper les énoncés pour lesquels cet indicateur est similaire au sein d'un *type* et d'interpréter ces types en lien avec les tâches mathématiques.

La définition de chacune des étiquettes en lien avec le moment d'enseignement choisi et nos hypothèses théoriques est la suivante :

- Le *prologue* est une phase ayant lieu avant toute recherche individuelle (ou après une brève phase de recherche individuelle) durant laquelle l'enseignant rappelle certains éléments (définitions, résultats, méthodes...) et/ou pose des questions aux étudiants, fournit des aides, suggère une stratégie, prend en charge *a priori* certains éléments de correction. Pour nous, le prologue est une façon de mesurer le lien entre le TD et le CM et de voir dans quelle mesure l'enseignant laisse les étudiants en autonomie (ou pas).
- La *recherche individuelle* est une phase au cours de laquelle l'enseignant laisse les étudiants chercher une solution de l'énoncé considéré (ou d'une partie de l'énoncé) en autonomie. D'après nos hypothèses théoriques, cette phase mesure la proportion du déroulement où les étudiants peuvent possiblement acquérir des connaissances durant le TD. Cette phase permet aussi de voir quelles tâches mathématiques sont sous leur responsabilité.
- La *correction* est une phase au cours de laquelle l'enseignant corrige tout ou partie de l'énoncé ou demande à un étudiant de le faire. Elle peut advenir après une phase de recherche individuelle, auquel cas l'enseignant a alors l'opportunité de prendre en compte les activités des étudiants qu'il a détectées.
- Le *postlogue* est une phase au cours de laquelle l'enseignant contextualise la correction de l'exercice en donnant des remarques complémentaires, différentes

méthodes de résolution ou des exemples qui illustrent ce qui vient d'être vu. Cette phase est une manière de voir comment l'enseignant gère l'hétérogénéité des étudiants après la correction en restant ou en revenant au sein de leurs ZPD. Nous considérons aussi le postlogue comme un moyen pour l'enseignant de prendre en charge certaines difficultés des étudiants *a posteriori*.

Nous justifions rapidement la pertinence de l'indicateur global de gestion de déroulement qui peut paraître discutable à première vue. D'une part, il y a une perte d'information par rapport au second acte de la méthodologie : il peut y avoir nécessité à grouper diverses phases sous une même étiquette et on perd la chronologie. D'autre part, sa définition repose sur un double pari assumé : être capable de classer les énoncés par types d'indicateurs similaires et être capable d'interpréter ces types à l'aune des tâches mathématiques impliquées.

Pour nous, la perte d'information sur laquelle nous nous basons pour définir l'indicateur est délibérée et basée sur la spécificité du moment d'enseignement et des notions choisis. En effet, puisque l'enseignement des premiers concepts d'algèbre linéaire est problématique à bien des égards (voir 2.2.1), les choix de l'enseignant sont d'emblée restreints : on fait donc l'hypothèse que cet indicateur, bien que d'apparence simpliste, donne un accès simple et pertinent à la manière dont l'enseignant organise globalement le déroulement consacré à l'énoncé correspondant. De plus, cet indicateur décrit la proportion de temps consacrée à chaque phase : cela indique donc l'importance que l'enseignant accorde à telle phase dans un énoncé et donc, suivant les fondements théoriques de chacune des phases, donne accès à sa vision de l'autonomie et des apprentissages des étudiants pour cet énoncé. Enfin, l'interprétation des différents types à l'aune des tâches mathématiques se fonde sur les trois premiers actes d'analyse, et donc la perte d'information est relative.

2.2.3 Quelques résultats de l'étude

La méthodologie précédente a été mise en œuvre pour l'étude de travaux dirigés consacrés aux débuts de l'algèbre linéaire. Nous commençons par présenter les données correspondantes avant d'en décrire les principaux résultats.

2.2.3.1 Présentation des données

Les données analysées proviennent d'une UE d'algèbre linéaire donnée au second semestre de l'année de L1 dans une université française. Elles consistent en trois CM et dix TD qui correspondent au début de l'UE. L'enseignant de TD (que nous appellerons Gilles) est différent du responsable de l'UE qui assure le CM, la question de la référence au texte du savoir en TD étant donc pertinente. Durant le premier semestre, les étudiants ont étudié la résolution de systèmes d'équations linéaires et les opérations matricielles avec le même enseignant. Les séances enregistrées couvrent la théorie axiomatique générale depuis la notion d'espace vectoriel jusqu'à celle de base. Le lecteur trouvera les énoncés des exercices dans l'annexe A.

2.2.3.2 Résultats

Nous insistons ici seulement sur les résultats principaux de l'étude en utilisant la notation $E_n S_m(p)$ pour désigner l'exercice n de la feuille m , question (p) . Nous renvoyons à nos recherches (Grenier-Boley, 2009, 2014) pour une analyse détaillée de plusieurs exercices, pour des compléments concernant le déroulement de certains exercices et pour l'analyse qui a conduit à classer les différents exercices en cinq types selon l'indicateur global de gestion (voir figure page suivante).

Les résultats que nous exposons sont de trois natures. D'abord, nous montrons en quoi la classification des exercices par types correspond à une seconde

Types et exercices	Indicateur
Type 1	
E_1S_2	(47, 22, 30, 0)
E_2S_2	(50, 30, 18, 0)
Nouvel exercice	(44, 19, 30, 6)
Type 2	
E_4S_2	(30, 42, 23, 0)
E_6S_2	(31, 31, 26, 10)
$E_{11}S_2$	(13, 51, 35, 0)
$E_1S_3(1)$	(23, 33, 32, 10)
E_8S_3	(18, 43, 22, 16)
Type 3	
$E_5S_2(1)(2)$	(2, 49, 18, 28)
E_7S_2	(2, 42, 36, 18)
E_8S_2	(4, 47, 33, 13)
$E_1S_3(2)$	(0, 54, 25, 20)
E_5S_3	(0, 54, 17, 28)
Type 4	
$E_5S_2(3)(4)$	(9, 76, 14, 0)
E_9S_2	(0, 77, 6, 16)
$E_{12}S_2$	(0, 87, 12, 0)
Type 5	
$E_5S_2(5)$	(0, 24, 55, 20)
$E_1S_3(3)(4)$	(0, 29, 49, 22)

FIGURE 2.1 – Indicateurs globaux de déroulements des exercices

classification en termes de tâches mathématiques qu'ils convoquent. Ensuite, nous nous intéressons aux moments et contenus des institutionnalisations proposées par l'enseignant aux étudiants. Enfin, nous décrivons la part d'autonomie offerte aux étudiants dans ces TD, notamment en lien avec la manière dont l'enseignant gère les déroulements.

Explicitation des différents types vis-à-vis des tâches mathématiques Si la classification des énoncés en cinq types par rapport aux régularités de distribution de l'indicateur global de gestion est quantitative, on peut aussi en fournir une interprétation qualitative liée aux tâches mathématiques impliquées.

Type 1 Les exercices de ce type concernent des concepts FUG vus pour la première fois en TD : la notion d'espace vectoriel en E_1S_2 , de sous-espace vectoriel en E_2S_2 , d'espace vectoriel engendré par une partie dans le nouvel exercice. En conséquence, le prologue occupe plus de 50 pour cent du temps, la recherche individuelle est courte et il n'y a pas de postlogue¹⁵. Dans les prologues, Gilles fait des rappels de cours à propos de ces concepts, propose directement des stratégies ou des aides à tous les étudiants, ce qui réduit d'emblée la portée des tâches proposées.

Type 2 Pour ces exercices, l'enseignant débute avec un prologue de proportion moindre que pour le type 1 dans la mesure où la nouveauté y est moindre, même si ces exercices traitent encore de concepts FUG qui n'ont encore été que peu travaillés en TD. Ainsi, dans E_4S_2 , le résultat à utiliser sur les sous-espaces vectoriels a déjà été vu en E_2S_2 mais l'espace vectoriel où il faut l'appliquer est vu en TD pour la première fois. Par rapport au type 1, la proportion de la recherche individuelle

15. Ou alors il est très court et non lié à des considérations mathématiques.

augmente et il y a parfois un postlogue où l'enseignant illustre un concept, introduit un nouveau concept ou pose des questions supplémentaires.

Type 3 Pour les cinq exercices qui composent ce type, il n'y a pas de prologue¹⁶, la phase de recherche individuelle est longue et la correction est de proportion similaire à celle du type 2. Les étudiants sont donc directement en autonomie pour des exercices où il reste des difficultés, même si leur degré de nouveauté par rapport à des exercices traités précédemment est moindre que dans les types 1 et 2. Ainsi, dans $E_1S_3(2)$, la notion de famille de vecteurs linéairement indépendants a été vue lors de la question précédente : cependant, la famille est composée de trois vecteurs ce qui ne permet pas d'utiliser un argument de non colinéarité. Les exercices de ce type ont des postlogues qui traitent de questions plus essentielles pour la suite de cours que dans le type 2 : ainsi, pour E_5S_3 , la notion de rang d'une famille de vecteurs est introduite en postlogue et utilisée pour donner une solution alternative à l'exercice.

Type 4 Pour les exercices de ce type, il n'y a pas de prologue, la recherche individuelle est longue (plus de 75 pour cent du temps) et la correction est rapide. Ces exercices traitent de tâches simples et isolées sur lesquelles les étudiants peuvent travailler de façon autonome.

Type 5 Pour les deux exercices de ce type, la recherche individuelle est proposée dès le début, courte et l'enseignant donne une correction longue (plus de 50 pour cent du temps) avec un postlogue qui met en valeur certaines conséquences importantes. Dans ces exercices, les étudiants ont à appliquer leur connaissances à une situation où un paramètre est nouveau. Ainsi, dans $E_5S_2(5)$, le résultat à utiliser n'est pas nouveau mais la présence du connecteur « ou » dans la description ensembliste du sous-espace vectoriel considéré complique la tâche. En postlogue, une discussion à propos du sens des connecteurs « ou » et « et » est organisée et la question de savoir si une union ou intersection de sous-espaces vectoriels est (ou pas) un espace vectoriel est résolue.

Conclusion Ces résultats répondent en partie aux questions que l'on se posait sur la manière dont l'enseignant introduit les concepts centraux d'algèbre linéaire (types 1 et 2). En appliquant notre méthodologie à ce corpus, nous avons pu produire une première classification des exercices traités en TD par types au moyen de l'indicateur global de gestion. Après analyse des tâches mathématiques et des déroulements des exercices de chacun de ces types, cette première classification correspond à une seconde classification des exercices en termes de tâches mathématiques impliquées et de l'ordre dans lequel ils sont proposés. Pour nous, cette correspondance entre ces deux classifications montre que la manière dont l'enseignant organise globalement ses interventions est fortement liée à la perception qu'il a des tâches mathématiques impliquées dans les exercices et de l'ordre chronologique dans lequel il les aborde. Quand les énoncés traitent de concepts FUG (types 1 et 2), l'enseignant organise un prologue au sein duquel il rappelle les notions principales, résultats et méthodes du CM. Quand il autorise les étudiants à chercher dès le début, le degré de nouveauté de l'exercice est moindre (type 3), inexistant (type 4) ou ne concerne qu'un seul paramètre (type 5). Quand les étudiants sont les plus autonomes dans des tâches où il y a encore une part de nouveauté (types 3 et 5), l'enseignant organise un postlogue pour fixer certaines connaissances dans le contexte de l'exercice.

16. Ou alors il est très court et peu significatif à l'égard de la durée totale de l'exercice.

Institutionnalisations Nous en venons à la question du lien entre le texte du savoir donné en CM et celui donné en TD, ainsi que sur la manière dont l’enseignant organise les institutionnalisations au sein de ces travaux dirigés.

D’abord, les institutionnalisations ont lieu exclusivement lors des phases de prologue ou de postlogue. Celles qui ont lieu en prologue sont en général clarifiées ou illustrées dans le postlogue suivant. Celles qui ont lieu en postlogue anticipent parfois le prologue suivant : ainsi la notion de somme directe introduite dans le postlogue du nouvel exercice l’est en vue de l’exercice E_6S_2 .

Ensuite, la nature de l’institutionnalisation varie en lien avec le type (1 à 5) et le moment (prologue ou postlogue) où elle a lieu¹⁷. En référence à la dialectique outil-objet (Douady, 1986), nous dirons qu’une institutionnalisation concerne le caractère *objet* si elle vise à rappeler un concept, un résultat théorique ou à produire une preuve théorique, le caractère *outil*¹⁸ si elle vise plutôt l’usage d’un concept, d’un résultat ou d’une méthode pour résoudre un problème¹⁹. Dans les prologues des exercices de type 1, l’institutionnalisation est objet et très similaire à celle donnée lors du CM correspondant. Pour les exercices de type 2, l’institutionnalisation est plutôt outil, que ce soit des méthodes générales pour faciliter la recherche individuelle (durant les prologues) ou le rappel de notions dans le cadre de l’exercice (durant les postlogues). Dans les postlogues des exercices de type 3, l’institutionnalisation est outil : l’enseignant donne des preuves explicites, rappelle un concept pour montrer son aspect simplificateur ou tente de donner aux étudiants des idées intuitives de certaines notions ou de certains résultats.

Les résultats précédents peuvent aussi s’interpréter en termes d’autonomie des étudiants dans les différents types d’exercices. Dans les exercices où l’autonomie des étudiants est absente ou faible (types 1 et 2), la plus grande part de l’institutionnalisation a lieu avant la recherche individuelle et elle est objet (type 1) ou outil (type 2). Dans le type 1, la nouveauté est maximale et l’enseignant débute avec un prologue qui ne donne aucune autonomie aux étudiants. Dans le type 2, il y a encore une grande part de nouveauté et l’enseignant prend en charge en prologue des aspects techniques cruciaux de l’exercice donc l’autonomie est faible. Dans les exercices où l’autonomie est plus importante (types 3, 4 et 5), l’institutionnalisation a lieu soit après la correction (type 3), soit il n’y en a pas (types 4 et 5). On peut donc faire l’hypothèse que les exercices de types 2 et 3 sont cruciaux du point de vue du transfert d’autonomie aux étudiants et qu’il y a un lien potentiel entre la nature et le moment des institutionnalisations d’une part et l’autonomie des étudiants d’autre part.

Gestion des déroulements *a priori* et autonomie des étudiants Un autre résultat de notre travail est la correspondance entre les activités attendues des étudiants (premier acte d’analyse) avec leurs activités possibles (troisième acte d’analyse) pour la plupart des exercices. Pour nous, c’est la marque d’un phénomène de gestion *a priori* des déroulements par l’enseignant, possiblement implicite : il décide *a priori* ce qui est nouveau ou pas en termes de connaissances et tout se passe comme si cette gestion dictait l’inscription d’un exercice au sein d’un type donné. En outre, on a vu ci-dessus que les tâches mathématiques pour lesquelles les étudiants sont en autonomie dépendent de ces types : par exemple, les tâches des exercices de type 1 sont réduites à des tâches simples et isolées avant toute recherche individuelle ce qui ne leur laisse que peu d’autonomie, alors que celles des exercices de type 4 où les étudiants sont autonomes sont déjà simples et isolées. Par cette gestion *a priori* des déroulements d’une part et la réduction éventuelle des tâches

17. Nous excluons donc du propos les phases de correction.

18. Dans ces cas, nous dirons dans la suite que telle institutionnalisation est *objet* ou *outil*.

19. Avec cette terminologie, une preuve peut donc plutôt avoir une fonction objet ou outil.

mathématiques d'autre part, on peut faire l'hypothèse que l'enseignant ne donne pas (toujours) aux étudiants l'opportunité de questionner la nouveauté d'une tâche mathématique donnée par rapport à leurs connaissances et ne leur permet pas de travailler de manière autonome avec certaines tâches ou certaines adaptations de connaissances (pour ce dernier aspect, voir Grenier-Boley (2009, 2014)).

2.2.4 Discussion

2.2.4.1 Enseigner l'algèbre linéaire

Notre étude particulière de travaux dirigés d'algèbre linéaire montre que le travail sur les exercices qui traitent de concepts FUG qui y sont vus pour la première fois (types 1 et 2) sont organisés par l'enseignant au moyen d'un long prologue où il réduit les tâches mathématiques initiales, soit en rappelant l'institutionnalisation des concepts ou méthodes, soit en prenant en charge certaines adaptations de connaissances. Pour ces exercices où le degré de nouveauté est maximal, on peut supposer que cela empêche les étudiants d'être confrontés aux principales difficultés de ces concepts et que les étudiants pour lesquels ce type d'organisation est en-dehors de leurs ZPD ne peuvent qu'au mieux produire une imitation immédiate de l'enseignant.

Cela pose naturellement la question des possibilités offertes à un enseignant souhaitant introduire ces concepts. À cet égard, de nombreuses séquences d'enseignement ou ingénieries longues ont été élaborées (Dorier, 1990, 1995, 2000 part 2 ; Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 1994 ; Harel, 1989 ; M. Rogalski, 1994) pour proposer un enseignement adapté aux spécificités de ces concepts. Plusieurs de ces recherches partagent des hypothèses qui émanent d'observation de séances et d'analyses des difficultés des étudiants et complètent donc notre étude du relief entamée en 2.2.1 (Dorier, 1997b, 1998, 2000 part 1 ; Dorier et al., 1994) :

- prendre réellement en compte la spécificité des concepts d'algèbre linéaire, en particulier les difficultés repérées dans l'étude épistémologique et l'importance du caractère unificateur (voir 2.2.1) ;
- intégrer un certain nombre de pré-requis, en particulier en logique et théorie des ensembles ;
- utiliser le *levier méta* (Robert & Robinet, 1996), c'est-à-dire l'usage pendant un enseignement d'éléments de discours portant sur les connaissances des élèves, l'enseignement des mathématiques ou sur les mathématiques ;
- utiliser les changements de cadres (Douady, 1986) ou de registres (Duval, 2006), la dialectique outil-objet (Douady, 1986).

Des chercheurs proposent une stratégie possible pour enseigner l'algèbre linéaire en partant de ces hypothèses (M. Rogalski dans Dorier et al., 1994). Il s'agit d'organiser une phase préparatoire qui mette les étudiants « en condition d'apprécier le caractère unificateur de ces concepts » (M. Rogalski dans Dorier et al., 1994, p. 331) grâce au levier méta, de compléter leurs pré-requis, puis de présenter les concepts d'algèbre linéaire, d'interpréter ce qui a été vu en phase préparatoire au sein de ce nouveau formalisme avant de proposer la résolution de problèmes jusqu'alors inaccessibles avec ces nouveaux outils.

Le choix des problèmes pour introduire ces concepts FUG est également important. Puisque par hypothèse ces problèmes ne peuvent donner lieu qu'à des introductions partielles, il s'agirait de confronter de manière autonome les étudiants à des tâches mathématiques et à des adaptations de connaissances variées. On peut citer par exemple le problème de la détermination des carrés magiques de taille 3×3 proposé par Aline Robert pour approcher la notion d'espace vectoriel engendré par une partie (Dorier, 1997b ; Robert, 2000).

2.2.4.2 Perspectives

Partant d'hypothèses didactiques liées au cadre de la Théorie de l'Activité, nous avons pu adapter une méthodologie pour étudier l'introduction par un enseignant des concepts FUG en TD d'algèbre linéaire. De par la spécificité de ces concepts, notre étude particulière montre que l'étude des déroulements organisés par l'enseignant est essentielle et inévitable. Notre étude mériterait d'être reproduite pour en tirer des nuances ou des invariants, voire réussir à identifier différents styles d'enseignement ou pour mettre en valeur un spectre de possibilités. Nous pensons également que cette méthodologie pourrait être adaptée et généralisée à l'enseignement d'autres concepts qui n'ont que peu de proximités avec les connaissances des élèves : il nous semble qu'elle offre un accès facile (en première approche) à la comparaison de différents styles d'enseignement dédiés à l'introduction de tels concepts.

Nous avons pu repérer certaines particularités du discours de l'enseignant sans pouvoir toutefois les étudier précisément : une expertise dans la conversion de registres, la présence d'éléments de logique. Des études montrent que les conversions entre registres ne sont pas expliquées ou enseignées aux étudiants (Dorier, 1998, Duval, 2006), que la logique peut être absente du discours et remplacée par des règles de raisonnement qui ne sont pas non plus enseignées et entremêlées avec d'autres difficultés mathématiques (Durand-Guerrier & Arsac, 2003). Il pourrait être intéressant d'étudier la manière dont l'enseignant partage ou pas ces éléments avec les étudiants et en quoi ils contribuent ou pas aux difficultés des étudiants.

Enfin, si nous revenons à la problématique de l'apprentissage d'un texte de savoir, notre étude pointe l'importance des déroulements de TD dans ce processus, de la façon dont l'enseignant les organise et de la place que le cours y occupe. Nous avons mis en valeur un phénomène de *double institutionnalisation*, l'une classique pendant les CM, l'autre plus diffuse pendant les TD et liée aux tâches mathématiques en jeu et à la manière dont l'enseignant les perçoit. Il nous semble que ce phénomène mérite d'être questionné à plusieurs égards à l'université. Quel est le rôle des institutionnalisations données pendant les CM en lien avec les apprentissages des étudiants ? Quels liens les étudiants font-ils ou pas entre les deux types d'institutionnalisation ? Peut-on expliquer le rôle de l'institutionnalisation faite en TD en termes de transfert d'autonomie aux étudiants (voir ci-dessus) ? Il serait intéressant de construire une méthodologie pour comparer de manière systématique les deux contextes d'institutionnalisation. En élargissant le propos aux moments de cours en général pour des élèves ou étudiants, un premier pas serait de construire une méthodologie ou des outils pour étudier les cours en termes de rapprochements avec les élèves ou étudiants. C'est ce que nous nous proposons de faire dans la section suivante.

2.3 Moments de cours : exemple des limites de suites et fonctions en L1

Dans cette section, nous revenons sur un de nos travaux de recherche qui a fait l'objet de diverses publications lesquelles en éclairent différentes facettes : Bridoux, Chappet-Pariès, Grenier-Boley, Hache & Robert, 2015 ; Bridoux, Grenier-Boley & Hache, 2016 ; Bridoux, Grenier-Boley, Hache & Robert, 2016a, 2016b. Nous nous intéressons ici au moment où l'enseignant présente un texte de savoir aux élèves, ce que l'on appelle le « cours », en cherchant à apprécier ce qu'il est susceptible d'apporter aux élèves. Nous précisons d'abord des éléments théoriques supplémentaires dont on postule qu'ils sont adaptés à ces moments précis d'enseignement ou à des outils méthodologiques qui en émanent (2.3.1). Au sein de la Théorie de l'Acti-

vité, cela passe en particulier par le repérage dans le discours de l'enseignant de tentatives de rapprochement avec les élèves appelées proximités-en-acte (Robert & Vandebrouck, 2014), que nous affinons en lien avec notre problématique précise. Nous présentons ensuite une mise en œuvre de ces outils pour comparer trois modalités de cours consacrées à l'introduction des notions de limite en L1 (2.3.2) : un manuel, une capsule vidéo, un CM. Après avoir rappelé des éléments de relief sur ces notions (2.3.2.1), précisé notre problématique (2.3.2.2) et les résultats des études du manuel et de la capsule (2.3.2.3), nous détaillons l'étude du CM (2.3.2.4) et un bilan de l'étude (2.3.2.5). Nous terminons par quelques perspectives de ce travail (2.3.3).

2.3.1 Appuis théoriques

Nous souhaitons nous intéresser au questionnement général suivant : dans quelle mesure, les moments où l'enseignant expose des connaissances peuvent-ils ou non contribuer à ce que les élèves s'approprient des connaissances ? Pour cela, au-delà des éléments théoriques déjà vus précédemment (2.3.1.1), nous précisons des hypothèses supplémentaires (2.3.1.2) sur lesquelles nous nous appuyons pour construire des outils méthodologiques adaptés à l'étude des moments de cours (2.3.1.3).

2.3.1.1 Rappels théoriques

Afin de mieux mettre en valeur les hypothèses que nous allons faire sur les moments de cours, nous rappelons des éléments théoriques qui ont déjà été présentés en 2.1.2 et en 2.2.2.1.

Nous avons inscrit nos travaux dans le cadre de la Double Approche au sein de la Théorie de l'Activité en postulant une articulation possible des théories piagétienne et vygotskienne de l'apprentissage. Ainsi, on suppose en particulier que les apprentissages des élèves sont favorisés par deux conditions : que les élèves soient en autonomie face aux activités que l'enseignant leur propose (Piaget), mais aussi que soient pris en compte le caractère collectif du déroulement de la séance organisé par l'enseignant et la possibilité de travailler au sein des ZPD des élèves (Vygotski).

Partant de ces hypothèses, les analyses présentes en 2.2.2.1 sont consacrées à des séances d'exercices. Elles consistent en l'analyse des tâches mathématiques proposées aux élèves et la détermination de leurs activités attendues puis possibles compte tenu des interventions de l'enseignant pendant le déroulement. Mais comment faire dans les moments de cours où les activités des élèves sont peu observables voire absentes ? Cela nous amène à préciser des hypothèses supplémentaires.

2.3.1.2 Hypothèses

En premier lieu, le *cours* réfère pour nous à la mise en forme cohérente d'un texte de savoir par l'enseignant souvent présenté aux élèves ou étudiants en partie à l'oral, en partie à l'écrit sur un domaine précis. Il est basé sur les éventuels programmes, sur les conceptions de l'enseignant et sur différents supports et participe à la mise en relation des connaissances antérieures des étudiants et des nouvelles connaissances, y compris entre différentes parties du cours, entre cours et exercices. Le cours est pour les élèves une référence dont ils doivent emprunter les mots, les formulations, les notions (objet ou outil suivant Douady, 1986). Par hypothèse, nous prenons en compte sous cette terminologie les concepts d'*institutionnalisation* et de *décontextualisation* de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1988).

En partant de ces aspects, nous postulons lors du déroulement d'un cours²⁰

20. Voir aussi Bridoux, Grenier-Boley, Hache & Robert, 2016a pour une précision de ces hypothèses en termes de pseudo-concepts (Vygotski).

[...] l'importance des liens explicites, des mises en relation entre ce que l'enseignant expose, les définitions, théorèmes, propriétés, formules, démonstrations, méthodes, exemples, vocabulaire général... et les activités (passées, actuelles, à venir) des étudiants. Cela prend essentiellement la forme de reprises, de commentaires, d'explications, prévus ou improvisés, notamment à l'occasion de réponses aux étudiants (Bridoux et al., 2016b, p. 274–275).

Ainsi, on suppose que l'efficacité d'un cours dépend

[...] notamment des occasions et de la qualité de l'activation de ces connexions, de ces liens entre des connaissances contextualisées (exercices, activités) et du savoir décontextualisé – et serait donc liée aux discours des enseignants, pendant la présentation des contenus de cours, aux choix des tâches associées et des discours accompagnant le travail correspondant des élèves (cf. activités des élèves), en particulier des [tentatives de] rapprochements entre activités, connaissances déjà-là et connaissances nouvelles des élèves (Bridoux et al., 2016a, p. 193).

Précisons que ces hypothèses sont basées sur l'importance de la prise en compte des ZPD des élèves et que l'efficacité de ces liens s'apprécie dans une temporalité longue, en particulier en prenant aussi en compte les exercices ou problèmes liés aux savoirs concernés, les évaluations, les reprises faites par l'enseignant.

2.3.1.3 Outils méthodologiques

D'après les hypothèses ci-dessus, l'étude d'un cours passe à la fois par l'étude du texte du savoir mis en forme et des connexions que l'enseignant organise entre ce texte et les élèves. Nous détaillons ici la manière d'analyser un cours réel, filmé et éventuellement transcrit.

Dans un premier temps d'étude, l'analyse *a priori* des tâches que nous faisons en 2.2.2.1 est remplacée par une étude *a priori* du relief des notions concernées telle que précisée en 2.1.3. Cela constitue la référence sur laquelle nous basons notre étude du cours réel proposé par l'enseignant.

Pour repérer les connexions organisées par l'enseignant, nous partons de la notion de *proximité-en-acte* (Robert & Vandebrouck, 2014) « pour qualifier ce qui, dans les discours ou dans les décisions des enseignants pendant les déroulements des séances, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves » (Bridoux et al., 2016a, p. 196). Compte tenu de notre étude et de nos hypothèses, nous nous limitons aux proximités-en-acte présentes dans le discours de l'enseignant (dites *proximités discursives*) que nous voyons comme un moyen d'accéder à une petite partie des activités des élèves.

Dans un second temps d'étude, une analyse des proximités potentielles est faite. Le chercheur dégage *a priori* des *occasions de proximités* en référence à l'étude du relief. L'analyse du déroulement permet ensuite au chercheur de repérer *a posteriori* des *proximités possibles* dans le discours tenu par l'enseignant²¹.

Nous avons suggéré qu'il y a trois grands types de proximités liées aux contenus du cours potentiellement présentes dans le discours de l'enseignant (Bridoux et al., 2016a). Nous définissons ces trois types et les illustrons en lien avec un cours fictif sur la notion formelle de limite de suite en L1 qui sera le savoir sur lequel nos analyses porteront en 2.3.2.

- les *proximités ascendantes* sont inductives et se placent entre ce que les élèves connaissent déjà, savent déjà faire et une connaissance nouvelle. Il y a un procédé de généralisation ou de décontextualisation partant d'un aspect outil

21. La détermination des occasions de proximités et des proximités possibles est à rapprocher respectivement de celle des activités attendues des élèves et de leurs activités possibles lors des analyses de déroulements consacrés à des exercices (2.2.2.1)

et aboutissant à un nouvel objet/outil ou aboutissant directement à un nouvel objet à partir d'exemples.

- les *proximités descendantes* sont déductives, se placent entre ce qui a été étudié et le particulier (exercices, exemples, démonstrations...), l'enjeu pour l'enseignant étant d'explicitier la manière d'inscrire le particulier dans le général.
- les *proximités horizontales* ne font pas changer de niveau de discours et peuvent porter sur le cours en train de se faire, sa structuration, sur des discours méta ou non mettant en évidence des relations, des analogies, des traductions (d'un registre à un autre).

Par exemple, plaçons-nous dans le cas de l'introduction de la notion formelle (quantifiée) de limite de suite en L1. Un enseignant revenant aux définitions données dans le secondaire et traitant quelques exemples mettant en valeur les « bandes » mettrait en œuvre une proximité ascendante. Lorsque la définition formelle a été introduite, le traitement de l'exemple $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ correspondrait à une proximité descendante. Enfin, on qualifierait d'horizontale la proximité qui correspond à l'explication (orale ou pas) des traductions suivantes :

$$|U_n - l| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon \iff U_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon].$$

Notons que les outils didactiques que nous proposons ici sont locaux et que « l'apprentissage du cours ne peut être qu'un processus long : il y a une hypothèse de cumul que nous nous autorisons, compte tenu de la stabilité des pratiques d'un enseignant donné, déjà soulignée dans nos travaux (Robert, 2007) » (Bridoux et al., 2016b, p. 275).

2.3.2 Description d'une étude

En 2.2, nous avons identifié un phénomène de double institutionnalisation traquant la présence de moments de cours pouvant porter sur les mêmes savoirs en CM et en TD. En préambule à la comparaison de ces différents moments de cours, nous souhaitons produire une première analyse d'un cours donné en CM au moyen des outils introduits précédemment. Nous avons choisi de nous centrer sur la notion de limite en L1, qui est une notion de base de l'Analyse²². Dans la suite de cette section, la *notion de limite* fera implicitement référence à la notion mathématisée formelle quantifiée de limite de suite ou de fonction²³.

Plusieurs autres raisons motivent cette étude. Ainsi, à l'Université le CM n'est en général pas obligatoire, les étudiants ont accès à de nombreuses ressources qui donnent accès au texte du savoir et on peut penser qu'il s'y produit plutôt moins d'interactions que dans le secondaire en raison du grand nombre d'étudiants qui y sont en général présents. Le rôle de ce type de cours peut donc être questionné à plusieurs égards. Nous avons choisi de mettre en regard le cours d'un manuel, d'une capsule vidéo et d'un CM sur la notion de limite afin de dégager des caractéristiques de chaque support et mettre en évidence les spécificités du CM. Nous commençons par rappeler quelques éléments de relief sur ces notions (2.3.2.1) puis nous exhibons notre problématique (2.3.2.2) et dressons le bilan des études du manuel et de la capsule (2.3.2.3) avant de détailler les résultats principaux de l'étude menée en CM (2.3.2.4) et d'en fournir un bilan (2.3.2.5).

22. Dans Bridoux, Grenier-Boley, Hache & Robert, 2016a, deux exemples d'analyse de cours au moyen des outils précédents sont présentés, l'un consacré aux représentations graphiques de fonctions en troisième, l'autre consacré aux limites en L1.

23. Dans les publications que nous avons consacrées à cette étude, nous avons tantôt étudié les limites de suites ou de fonctions : même si il y aurait des raisons pour cela, nous choisissons en première approche de ne pas distinguer ces deux notions dans la première partie de notre propos.

2.3.2.1 Relief sur les limites

Nous brossons rapidement un panorama de l'étude du relief de la notion de limite. Nous insistons seulement sur certains points cruciaux pour notre étude et référons à certains travaux de recherche qui en ont éclairé d'autres aspects.

Étude épistémologique On trouvera des éléments d'épistémologie de cette notion dans les différents travaux que nous citons ci-dessous ou qui sont cités par ces travaux. Mentionnons en particulier, l'étude des obstacles épistémologiques relatifs à la notion (Cornu, 1983; Sierpiska, 1985) et le travail fondateur s'attachant à dégager différentes conceptions de la notion de limite de suite (Robert, 1982).

Étude curriculaire En France, c'est en première S²⁴ que la limite de suite est introduite et la limite de fonction apparaît dans le chapitre « Dérivation ». Dans les deux cas, les programmes stipulent qu'on doit se contenter d'une approche intuitive de ces notions et qu'on n'en donne pas de définition formelle.

En terminale S²⁵, il y a approfondissement de ces deux notions : limites finies ou infinies d'une suite, limites finies ou infinies d'une fonction en un point ou en l'infini. Les programmes autorisent de nouvelles formulations : par exemple, pour dire qu'une suite (U_n) tend vers un réel l quand n tend vers $+\infty$, il y est dit que « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs U_n à partir d'un certain rang ». Cependant, pour toutes ces notions, les tâches proposées aux élèves relèvent majoritairement de l'application de résultats ou techniques algébriques opératoires et les programmes incitent d'ailleurs à ne pas utiliser de « formalisation excessive », « l'objectif essentiel [étant] de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer les limites dans les exemples rencontrés en terminale ». Pour ces exercices, l'usage de définitions plus ou moins formelles n'est pas nécessaire.

Les définitions formelles en (ε, N) de limite de suite et en (ε, α) de limite de fonction apparaissent rapidement en L1 à l'université. Bien qu'il y ait plusieurs formulations ou caractérisations possibles, les définitions sont souvent exprimées par le biais d'inégalités. Une suite numérique (U_n) converge vers un réel l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

Une fonction f admet une limite finie l en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, (|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Étude didactique Un état de l'art des études didactiques menées en Analyse a été fait par Oktaç et Vivier (2016) : nous référons à la section « Limites » de leur travail pour une étude didactique poussée des notions de limite. Nous nous contentons de mentionner certains aspects pour dégager des occasions de proximités ou au contraire l'absence de telles occasions.

Lors de leur introduction en L1, les notions de limite sont FUG (Robert, 1998) parce qu'elles sont porteuses d'un nouveau formalisme qui concentre de nombreuses difficultés notamment logiques (nature et ordre des quantificateurs, usage des parenthèses, présence d'une implication et d'une inégalité avec valeurs absolue) et qui généralisent les exemples vus au lycée tout en unifiant la notion de limite dans un cadre général. De par les programmes, il paraît en effet difficile de les introduire en créant un besoin chez les étudiants ou en s'appuyant sur leurs connaissances antérieures.

24. Programmes de 2010, BO n° 9 du 30 septembre 2010.

25. Programmes de 2011, BO n° 8 du 13 octobre 2011, amendé au BO n° 30 du 23 août 2012.

La nature FUG de la notion de limite amène à penser qu'il y a peu d'espoir de mettre en place des proximités ascendantes naturelles à son égard, d'autant moins qu'elle est source de difficultés récurrentes chez les étudiants (Bridoux, 2016 ; Przenioslo, 2005 ; Robert, 1982). Une fois que la définition de limite a été introduite, le cours aborde en général quelques premiers exemples, la démonstration de résultats tels que l'unicité de la limite ou les règles de calcul algébriques que les étudiants connaissent depuis le lycée. Cependant, il y a nécessité pour cela d'effectuer un travail prenant en compte la complexité de ces définitions coordonnant de bonnes connaissances en logique et sur les réels et leurs ordres qui sont souvent peu disponibles en L1 (Dieudonné, Droniou, Durand-Guerrier, Ray & Theret, 2011). En outre, des difficultés de la part des étudiants avec les aspects formels ou avec la manipulation d'écriture quantifiées et leur contrôle sémantique sont pointées par les recherches sur la transition secondaire-supérieur (Durand-Guerrier, 2013 ; Gueudet, 2008a, 2008b). Ainsi même les premières tâches liées à ces définitions, loin d'être simples et isolées, sont complexes à plusieurs égards et les éventuelles proximités descendantes devront être accompagnées d'explicitations relatives à ces difficultés. Quant aux proximités horizontales, les occasions sont nombreuses mais qu'en sera-t-il ?

2.3.2.2 Problématique et méthodologie

Compte tenu de l'analyse du relief de la notion de limite, nous faisons l'hypothèse que le rôle de l'enseignant est crucial lors de son introduction en cours de L1. En effet, la nature FUG de la notion la rend éloignée des connaissances antérieures des étudiants en même temps que de nombreuses difficultés y sont entremêlées (formalisme, logique, ordre sur les réels). Nous nous demandons donc ce que l'enseignant explicite en CM en amont de la définition et lorsqu'il l'introduit en tant qu'objet. Utilise-t-il des reformulations de la définition ou de certaines de ses parties pour tenter de faire du lien avec les connaissances antérieures des étudiants ? Donne-t-il des commentaires méta sur son utilisation ? Essaie-t-il de prendre en compte les connaissances déjà-là des étudiants ou la structure logique, singulièrement compliquée à ce stade, de la définition ? Dans la mesure où l'étude du relief présente peu d'occasions de proximités, lesquelles l'enseignant utilise-t-il ?

Notre méthodologie repose sur des analyses de différentes modalités de cours consacrés à l'introduction de la notion de limite : l'analyse d'un manuel, d'une capsule vidéo, d'un CM. Suivant la méthodologie en 2.3.1.3 et la problématique, en prenant le relief de la notion comme référence, nous tentons de repérer, dans chaque média, les diverses reformulations de la définition, la prise en compte de la structure logique globale de la définition, les tentatives de rapprochements avec les connaissances déjà-là des étudiants et différents types de proximités. Le fait d'étudier un média où il n'y a pas d'enseignant (le manuel) et un média où il n'y a pas d'étudiants face à l'enseignant (la capsule) donne selon nous un éclairage sur d'éventuelles occasions de proximités qui pourraient être converties en proximités possibles lors du CM. Cela permet aussi de mettre en valeur les spécificités du discours de l'enseignant lorsqu'il enseigne en CM.

Nous nous restreignons ici à trois moments de cours dans les différents supports : l'introduction de la définition, les premiers exemples, le premier résultat et sa démonstration. Suivant le support et la publication concernée, nos analyses concernent la notion de limite de suite ou de fonction : pour simplifier, nous rendons compte des études pour les limites de fonction tirées de Bridoux et al., 2016a, 2016b. Nous ne donnerons pas tous les détails et référons à nos différents travaux pour des précisions ou pour les résultats concernant les limites de suites²⁶.

26. Dans ces publications, nous n'avons pas réellement fait de distinction entre limites de suite et de fonction. Par souci de cohérence, l'étude d'une capsule vidéo consacrée à la limite de fonction

2.3.2.3 Études d'un manuel et d'une capsule

Nous commençons par résumer les études d'un manuel²⁷ et d'une capsule²⁸.

Le manuel Dans le manuel, le chapitre sur les limites de fonctions vient après celui sur les limites de suites. Il débute par une définition de la notion de voisinage puis la définition suivante est introduite directement :

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et l un réel. On dit que f a pour limite l en x_0 si $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in D_f (|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$.

Cette définition est présentée dans un registre symbolique et aucune tentative de rapprochement avec des connaissances antérieures n'est envisagée. Il y a néanmoins une remarque à la suite de la définition : « La définition signifie qu'on peut obtenir $f(x)$ aussi proche que l'on veut de l pourvu que x soit assez proche de x_0 ». Cette reformulation pourrait être l'occasion de tenter une proximité horizontale sur la transformation de la formulation, mais elle est selon nous manquée. En effet, la compréhension des expressions « aussi proche que l'on veut » et « être assez proche de » est laissée à la charge du lecteur.

Pour le premier exemple, le manuel propose de montrer avec la définition que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ tandis que le premier résultat s'attache à prouver que si f est définie en x_0 et a une limite l en x_0 alors $l = f(x_0)$. Pour l'exemple, la démonstration ne tient pas compte de la structure logique de la définition, n'exhibe pas explicitement le réel η et il manque des justifications pour un lecteur peu habitué. Nous pensons que le traitement de cet exemple permet une occasion de proximité descendante avec la définition, voire des occasions de proximités horizontales pour certaines équivalences, mais elle sont là aussi manquées. Pour la preuve du résultat, si la définition y est utilisée (occasion de proximité descendante), le lecteur ne comprend pas forcément les raisons qui peuvent y mener, son usage n'est pas commenté et le fait que si pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x_0) - l| \leq \varepsilon$ alors on a forcément $f(x_0) = l$ n'est assorti d'aucun commentaire.

La capsule Dans la capsule, une définition quasiment semblable à celle du manuel est proposée. Elle est également donnée sans préambule. Contrairement au manuel, on note la présence de nombreuses reformulations de parties de la définition dans différents registres (en français à l'oral, sur un schéma, avec des gestes ou tout cela en même temps). On peut voir la multiplication de ces reformulations comme une tentative d'explicitation de la définition par l'enseignant. Cependant, la plupart de ces reformulations ne sont pas écrites et elles ne sont pas non plus commentées. Nous y voyons malgré tout des occasions de proximités horizontales portant sur certains blocs de la définition.

En revanche, pour le premier exemple où on doit montrer que pour $x_0 \geq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$, seule une rapide justification visuelle est donnée. Le premier résultat propose de montrer que si elle existe, la limite est unique. La preuve n'est pas rédigée car il est dit qu'elle est très similaire à celle des suites vue dans un cours précédent : or, dans ce cours, la preuve n'est pas donnée non plus ! Cependant, dans le cours sur les fonctions, le mode de raisonnement (par l'absurde) et des étapes de la démonstration sont rappelés oralement. Dans les deux cas, il y a donc des occasions de proximités descendantes mais elles sont manquées, sans doute parce que ce n'était pas un enjeu de cette capsule.

à été faite pour cette note et ne figure pas dans nos publications.

27. Gautier, C., Warusfel, A., Caminade, B., Fontaine, H. & Nicolas, S. (2007). *Mathématiques Tout-En-Un, ECS première année*, Éditions Dunod.

28. Celle-ci a été choisie sur le site Exo7, disponible sur la chaîne Youtube associée.

2.3.2.4 Étude d'un CM

Le CM étudié est une séance de 1h30 donnée au semestre 2 en L1 devant environ 200 étudiants se destinant à des études en informatique ou mathématiques. Elle porte sur l'introduction de la définition de la notion de limite de fonction (en un point, en l'infini) et constitue la première rencontre des étudiants avec cette définition. Pour analyser cette séance, nous avons procédé à la transcription des écrits de l'enseignant au tableau et de son discours puis nous les avons mis en regard avant de procéder à un découpage du déroulement en phases qui suit celui effectué par l'enseignant sur le plan de son cours. Le cours a été découpé en 15 phases mais nous n'analyserons que certaines d'entre elles : phase 1 (introduction intuitive), phases 3 et 6 (écriture et reformulation de la définition), phase 8 (premier résultat) et phase 12 (application de la définition). Nous renvoyons à la figure B.1 de l'annexe B pour une vision globale des différentes phases du cours et à nos publications pour une analyse plus fine de celles-ci.

Définition Le CM commence par une introduction intuitive (phase 1) au cours de laquelle l'enseignant obtient d'un étudiant visiblement avancé une première reformulation intuitive de la définition de limite : « OK, $f(x)$ doit se rapprocher autant que l'on veut de l mais quand x se rapproche de x_0 ». En se basant sur divers éléments (graphique, gestes, flèches), il la fait évoluer en une seconde reformulation : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l si x est suffisamment proche de x_0 ». L'enseignant tente donc de partir des représentations de certains étudiants pour aboutir à une formulation qui reste encore éloignée de la définition visée : elle est porteuse d'une inversion possible de l'ordre et de la nature des quantificateurs, les propositions « aussi proche » et « suffisamment proche » formulées de manière similaire seront quantifiées différemment.

Lors de la phase 3, l'enseignant fait émerger la définition chronologiquement, bloc par bloc, en partant de la seconde reformulation et en commentant chaque étape (voir figure B.2 de l'annexe B). Après quelques éléments de cours sur les voisinages (phase 5), il écrit la définition de limite en un point lors de la phase 6 : *Définition* : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$) si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

En même temps qu'il écrit cette définition, l'enseignant lit les valeurs absolues en termes de distances puis écrit au sein de la définition une troisième reformulation : « autrement dit, aussi petit que soit ε on peut trouver un intervalle suffisamment petit autour de x_0 sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε ». Ensuite il fait oralement un parallèle entre sa troisième reformulation et la définition formelle : « D'accord, le « quel que soit » c'est « aussi petit que soit ε », « $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha$ » ça c'est un intervalle en fait, donc il existe un intervalle suffisamment petit autour de x sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure ε ». Il demande finalement aux étudiants s'il est clair que $|x - x_0| < \alpha \iff x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ qu'il expliquera lors de la phase 7 suite à la question d'un étudiant.

Nous avons volontairement détaillé l'émergence de la définition pour mettre en valeur la volonté de l'enseignant à introduire en travaillant à la fois sur son formalisme et sa structure logique par le biais d'un réseau de proximités horizontales possibles basées sur de nombreuses reformulations de certaines parties de la définition : avec des mots (oral, écrit), en termes de distances (oral, écrit), d'inégalités impliquant des valeurs absolues (écrit) ou d'intervalles et de voisinages (oral, écrit). Cependant, il nous semble que cette tentative est à relativiser puisque certaines de ces reformulations sont orales et non écrites et qu'elles ne prennent pas encore en charge toute la structure logique de la définition.

Premier exemple et premier résultat Nous rendons compte plus rapidement du premier exemple d'application et du premier résultat (voir Bridoux et al., 2015 pour des détails supplémentaires).

Le premier exemple d'application se situe en phase 12 après l'introduction de la limite d'une fonction en $\pm\infty$ (phase 11) qu'il a reformulée oralement en termes de distances. Dans cet exemple, il s'agit de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Pour la démonstration elle-même, il met en valeur le formalisme de la définition en reformulant certains éléments logiques (implication, équivalence, quantificateur) et se base sur certaines connaissances antérieures des étudiants (inégalités, valeur absolue, fonction inverse) pour la mener à bien. En fin de démonstration, il revient oralement sur une méthode générale et féconde (annoncée) pour prouver ce type de résultat à partir de la définition : partir de la « conclusion » pour un ε quelconque et chercher une condition suffisante sur x de la forme $x > r$.

Le premier résultat se situe en phase 8 et est le même que celui du manuel (voir figure B.1). Contrairement au manuel, il produit une démonstration par l'absurde en montrant que $l \neq f(x_0)$ est contradictoire avec le fait que f ait pour limite l en x_0 , ce qui l'amène à produire la négation de la définition et à rappeler celle d'une implication. Ce faisant, il travaille sur la structure logique de cette négation, utilise certaines des reformulations précédentes (distances) et termine en rédigeant la démonstration au propre basée sur ce travail.

Dans l'un et l'autre cas, il y a présence de proximités descendantes possibles avec la définition où l'enseignant tente à la fois de revenir sur son formalisme, certaines des reformulations qu'il a faites, sa structure logique et certaines connaissances antérieures des étudiants. Pour l'exemple, la méthode qu'il fournit à la fin peut s'interpréter comme suit : il a introduit l'activité de définition formelle par le biais de reformulations (proximités horizontales) et la preuve d'un tel résultat demande une démonstration formelle qu'il tente de rapprocher (proximité descendante) d'une utilisation procédurale de la définition au sens où les étudiants peuvent traduire ce qu'il faut réaliser en termes de procédures associées à des connaissances qu'ils sont supposés maîtriser. Pour le résultat et contrairement au manuel, il y a déjà tout un travail sur la preuve avant que celle-ci soit rédigée au propre : cela se rapproche ainsi du travail que les étudiants peuvent être amenés à faire au brouillon (ou pas) par exemple lors d'évaluations. Comme ci-dessus, certains commentaires ne sont qu'oraux et leur portée est sans doute à relativiser.

2.3.2.5 Conclusion de l'étude

Cette étude comparative d'un manuel, d'une capsule vidéo et d'un CM, bien que limitée, permet de mettre en valeur les (non-)occasions de proximités *a priori* dans le manuel et la capsule et de voir lesquelles sont tentées en termes de proximités possibles *a posteriori* par l'enseignant de CM. Précisons que ces proximités possibles ne restent que potentielles, le rapprochement effectif avec les étudiants ou le travail au sein de leurs ZPD n'étant pas attesté.

Un premier résultat commun aux trois supports est l'absence de proximités ascendantes. Pour nous, une explication possible (ce n'est sans doute pas la seule) est liée à l'analyse du relief de la notion de limite et son interprétation comme notion FUG. Sous ces hypothèses, il n'y a donc pas d'activité d'introduction qui permette de travailler sur toutes les difficultés de cette définition dans les trois cas.

L'analyse du manuel montre que les occasions de proximités (horizontales, descendantes) que nous avons repérées y sont selon nous manquées. Comme nous l'avons expliqué, la remarque et l'exemple qui suivent la définition ne contiennent aucun lien explicite avec la caractérisation choisie pour la définition, que ce soit par les reformulations données ou dans la structure du raisonnement développé dans

l'exemple. Si les occasions de proximités descendantes sont également manquées dans la capsule vidéo pour l'exemple et le résultat, on repère des occasions de proximités horizontales avec la définition basées sur plusieurs reformulations de la définition : selon nous, cette occasion est partiellement manquée car les reformulations sont uniquement orales et encore très proches de la définition. Dans le CM, des proximités horizontales possibles sont davantage présentes, majoritairement sous la forme de reformulations (mots, graphique, distance et valeurs absolues, voisinages), progressives et liées à certaines connaissances antérieures des étudiants. Nous avons aussi montré la présence de proximités descendantes possibles dans le passage de la définition au premier exemple ou au premier résultat. Toutefois, cela doit être relativisé par le fait que la plupart de ces proximités potentielles sont orales et pas écrites. Nous pouvons donc nous demander ce que les étudiants en retirent et quelle trace écrite ils gardent éventuellement de ces commentaires oraux.

Nos analyses nous permettent aussi d'obtenir des résultats plus indirects. Nous avons ainsi montré que le manuel et la capsule ne prennent pas en compte la structure logique de la définition dans le premier exemple et le premier résultat alors que le CM fait état de tentatives réelles en ce sens. Il en va de même pour la prise en compte de certaines connaissances antérieures des étudiants qui semblent davantage prises en compte en CM. Le fait que l'enseignant et les étudiants soient physiquement présents en même temps dans le CM semble être une différence essentielle pour ces diverses tentatives.

2.3.3 Discussion

2.3.3.1 Enseigner les limites

Nous revenons d'abord rapidement sur diverses tentatives qui ont été faites pour introduire aux élèves ou aux étudiants la définition de limite de suite ou de fonction en les classant selon leurs objectifs ou principales caractéristiques²⁹.

Certaines ingénieries prennent en compte la nature FUG de la notion de limite (Robert, 1983 ; Robinet, 1983) et introduisent la définition comme outil de preuve. L'ingénierie de Robert (1983) pour les limites de suites prend appui sur une intuition dynamique de la convergence (« se rapprocher de »), majoritaire chez les élèves et étudiants en L1, pour classer différentes représentations de suites en termes de bandes, cette intuition étant ensuite formulée numériquement : la définition formelle est alors introduite pour prouver des assertions qui semblent naturelles aux étudiants mais qu'ils n'arrivent pas à établir. De manière analogue, l'ingénierie de Robinet (1983) présente la définition formelle comme outil pour distinguer différents types de limites après classement de limites de différentes fonctions. Ces ingénieries ont prouvé leur robustesse, comme le confirment des reprises récentes (Grenier-Boley et al., 2015 ; Bridoux, 2016). L'ingénierie proposée par Lecorre en terminale S (2015) se base sur des débats scientifiques (Legrand, 2013) et la définition émerge aussi à la suite de ce débat comme moyen économique et sûr de prouver des assertions.

Parmi les autres propositions, certaines ciblent explicitement les difficultés logiques, comme celle de Mamona-Downs (2001). D'autres se basent plutôt sur l'idée de pouvoir approcher la limite à un certain ordre prescrit (Bloch, 2000 ; M. Rogalski, 2016). L'ingénierie proposée par Bloch (2000) est basée sur l'étude géométrique des aires et périmètres des figures obtenues à chaque étape du processus de construction du flocon de Von Koch. La proposition de M. Rogalski (2016) s'inscrit plus globalement dans une refonte des débuts de l'Analyse en lien avec ses raisons d'être et mobilise divers leviers (dont le levier méta) au sein de la thématique de l'approximation.

²⁹. Nous ne prétendons pas caractériser chacune de ces propositions qui reposent sur de nombreuses hypothèses qu'il serait trop long de détailler ici.

2.3.3.2 Perspectives

Notre objectif principal dans cette section était d'illustrer notre proposition de méthodologie pour étudier les moments de cours. Nos analyses théoriques se basent sur une analyse du relief des notions impliquées et fournissent des indicateurs qui permettent d'apprécier le déroulement de ces moments (en termes de rapprochements, interprétés en termes de ZPD). Sur un exemple, nous avons mis en regard et repéré des différences entre les occasions de proximités (déterminées par le chercheur dans le manuel et la capsule à partir du relief) et les proximités possibles (repérées par le chercheur dans le CM) en lien avec le déroulement organisé par l'enseignant. Dans le CM, les proximités possibles ont au moins trois origines et semblent plus ou moins improvisées : anticipations de l'enseignant, interactions visibles ou non entre l'enseignant et les étudiants (regards, attitudes...), questions des étudiants. Contrairement à ce que l'on peut croire, la présence des étudiants en CM semble avoir un effet sur le contenu du cours. En revanche, on ne sait pas si ces proximités possibles sont ou non conscientes, ni leur effet éventuel chez les étudiants. Enfin, parmi toutes ces proximités potentielles, lesquelles sont à retenir ? Ce travail est celui du didacticien des mathématiques qui doit mobiliser différents outils pour y répondre et c'est une première perspective de nos travaux.

L'étude présentée admet un certain nombre de limites qui permettent d'ouvrir certaines autres perspectives. D'abord, concernant la notion de limite, nous n'avons considéré que peu de cours pour les différents supports (manuel, capsule, CM) et il conviendrait de réaliser une étude à moyenne échelle qui permettrait de baliser une palette de possibles basée sur les régularités et variabilités observées pour chaque type de support compte tenu du relief. Ensuite, nous l'avons dit plus haut, les apprentissages des élèves lors des moments de cours sont encore hors de portée et les éléments théoriques actuels ne nous permettent pas encore de repérer des différences entre élèves. Des évolutions théoriques qui permettraient de fournir des approches possibles de ces questions sont donc souhaitables. Enfin, il serait intéressant de s'intéresser à l'évolution des modalités de cours et l'analyse de nouvelles ressources, voire aux spécificités de ces ressources. Dans cette direction, certains travaux tentent de prendre en compte la disponibilité de nouvelles ressources, comme les capsules en pédagogie inversée (Allard et al., 2016), ou les cours en ligne (e-textbooks) (Gueudet, Pepin, Restrepo, Sabra & Trouche, 2017) : dans ce deuxième cas, les auteurs définissent des outils théoriques pour analyser les interactions entre les utilisateurs de cette ressource en termes de « connectivité ». Enfin, il serait souhaitable de tenir compte de la multiplicité des ressources avec lesquelles l'enseignant interagit en classe et en-dehors de la classe, par exemple au sein du cadre théorique de l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2010) qui permet de caractériser les conséquences de ces interactions sur les pratiques des enseignants.

Il nous semble que nos outils méthodologiques permettent d'envisager des perspectives naturelles aux travaux exposés dans la section 2.2. D'une part, pour une notion donnée, ils peuvent nous permettre d'étudier le phénomène de double institutionnalisation que nous évoquons en CM et en TD et de les comparer, en particulier en termes de proximités et de déroulements organisés par les enseignants. D'autre part, on peut aussi se demander dans quelle mesure un cours dépend de la notion enseignée en lien avec son relief ? Y a-t-il des spécificités, des variables ?

Plus généralement, l'étude des cours pourrait aider à mieux comprendre les pratiques ordinaires d'enseignement dans le supérieur, ce qui est une question cruciale à l'heure où la formation des enseignants du supérieur est amenée à se développer. À ce titre, une recherche a débuté au sein d'un groupe du LDAR qui tente de préciser l'empreinte de la discipline de recherche sur les pratiques enseignantes avec l'enjeu de comparer les disciplines (chimie, géographie, mathématiques, physique) par exemple avec des éléments issues de leurs épistémologies respectives. Nous revien-

drons plus précisément sur cette recherche en 3.2.1.2.

Nous montrons maintenant comment une étude précise du relief de la notion de fonction en seconde permet de mener une étude comparative et systématique du texte de savoir qui y est consacré dans différents manuels.

2.4 L'enseignement et l'apprentissage des fonctions en 3^e-2^{de} : une étude de manuels

Dans cette section, nous décrivons quelques aspects d'une recherche menée avec Julie Horoks et non publiée à ce jour dont on trouvera le texte intégral en annexe C. Pour éviter les redites, les manuels étudiés sont référencés dans cette annexe, les autres références figurant à la fin de ce chapitre.

2.4.1 Cadre de l'étude et problématique

2.4.1.1 Introduction

L'importance du concept de fonction est attesté à la fois par son histoire jusqu'au début du 20^e siècle (Monna, 1972 ; Youschkevitch, 1976), mais également par le fait que tous les domaines mathématiques actuels font référence à ce concept directement ou indirectement : il peut apparaître explicitement (pour le mathématicien) sous une certaine forme comme objet d'étude ou outil (les fonctions d'une ou plusieurs variables en analyse, les applications linéaires en algèbre), mais il peut aussi être présent sous forme plus ou moins implicite (les opérations et relations en algèbre, les fonctions récursives en logique, les variables aléatoires en probabilités, les isométries ou similitudes en géométrie). L'enseignement de ce concept a donc naturellement donné lieu à de nombreuses recherches en didactique des mathématiques portant sur diverses problématiques, de son introduction en classe de 3^e jusque dans le supérieur.

Notre recherche se fait a priori, sans enseignants ni élèves observés, et vise à proposer des outils pour analyser des choix possibles pour l'enseignement des fonctions compte tenu d'enjeux d'apprentissage déterminés par le chercheur. Nous nous demandons en particulier quels choix de tâches et quel discours porté sur les contenus permettraient de transformer les enjeux d'apprentissages sur les fonctions en apprentissages effectifs pour les élèves.

Nous utilisons les outils construits dans cette étude pour analyser un certain nombre de cours de manuels scolaires, avec comme fil conducteur les liens entre ce qui est proposé aux élèves et leurs besoins supposés par le chercheur. Nous nous restreignons aux débuts de cet enseignement en France (actuellement en classes de 3^e et 2^{de}).

2.4.1.2 Cadre théorique

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'activité (Leplat, 1997 ; Vygotski, 1934/1997) adapté à la didactique des mathématiques et à la situation scolaire (Robert, 2008 ; J. Rogalski, 2008) pour formuler plusieurs hypothèses sur les apprentissages des élèves (voir 2.1.2). Dans notre cas, pour l'étude d'une notion, l'opérationnalisation de ce cadre théorique passe d'abord par la définition de la *conceptualisation*, puis du *niveau de conceptualisation* et du *relief de la notion*. Le relief d'une notion (à enseigner) constitue notre référence pour l'apprentissage de cette notion, compte tenu de nos hypothèses. On renvoie à 3.1.3.2 ou C.2.2 pour plus de précisions sur ces aspects.

Le relief d'une notion nous permet de caractériser des choix possibles d'enseignement, et de lister, à partir des programmes, des enjeux d'apprentissage de la

notion mathématique. Puisque nous avons pour objet d'analyser des cours, nous étudierons aussi les différents types de proximités discursives dont la qualité a par hypothèse une incidence sur leur efficacité (voir 2.3.1.2 et 2.3.1.3).

2.4.1.3 Problématique

Dans cette étude, nous poursuivons quatre objectifs principaux :

- Établir le relief de la notion de fonction en 3^e-2^{de} ;
- Déterminer les besoins présumés des élèves pour les apprentissages liés à la notion de fonction en 3^e-2^{de} ;
- Construire un outil permettant d'analyser l'offre faite aux enseignants à travers le « cours » d'un manuel consacré aux fonctions à ces niveaux, outil qui confronte ces besoins à l'offre de ce manuel ;
- Utiliser cet outil pour analyser l'offre de plusieurs manuels des deux niveaux.

Les hypothèses de notre cadre théorique et son opérationnalisation nous conduisent à adopter le relief de la notion de fonction en 3^e-2^{de} comme référence pour son apprentissage. Nous commençons par établir l'étude épistémologique de la notion de fonction selon 5 périodes historiques. De cette étude, nous isolons des thématiques qui manifestent des progrès présents dans l'histoire de la notion. Ces thématiques et d'autres thématiques qui seront justifiées *a posteriori* nous permettent d'organiser ensuite les études curriculaire et didactique. À l'issue de l'étude du relief, nous isolons des *enjeux d'apprentissage* selon une ou plusieurs thématiques, dont le chercheur extrait les *besoins présumés* des élèves qui sont des hypothèses qu'il fait sur les enjeux primordiaux de l'apprentissage de la notion.

L'outil d'analyse des cours des manuels, au sens où l'on analyse tout ce qui y est proposé en dehors des exercices³⁰, met face à face les thématiques, des critères d'analyse au sein de ces thématiques, les objets du manuel sur lesquels l'analyse porte et les besoins présumés des élèves. Il nous permet de confronter les choix du manuel avec les besoins présumés des élèves. Nous explicitons aussi des *points de vigilance* qui sont des enjeux transversaux.

Cet outil d'analyse permet d'interroger les propositions faites par les manuels comme des scénarii potentiels d'enseignement de la notion de fonction, sans prétendre que l'offre du manuel détermine entièrement ce qui serait effectivement proposé en classe : à la fois l'offre d'un manuel ne peut y être suivie intégralement, mais les pratiques et choix de l'enseignant ont aussi un impact primordial sur les apprentissages des élèves par hypothèse. Nous considérons toutefois que si certaines pistes d'enseignement ne figurent pas dans les manuels alors il semble moins probable de les voir apparaître en classe. Nous faisons donc tout de même l'hypothèse que l'absence de prise en compte, par les manuels, de certains des enjeux que nous aurons pointés, peut laisser supposer une difficulté, pour les enseignants, à prendre en charge ces enjeux dans leur enseignement. C'est à cette aune que nous analysons les manuels des deux niveaux d'enseignement.

Dans cette étude, nous nous limitons donc à l'amont de la classe. Nous détaillons d'abord en 2.4.2 l'étude du relief de la notion de fonction aux niveaux 3^e et 2^{de} à l'issue de laquelle nous précisons les besoins présumés des élèves pour l'apprentissage de la notion de fonction à ces niveaux. Cela nous permet ensuite de construire notre outil d'analyse des manuels en 2.4.3 avant de l'utiliser pour analyser l'offre de plusieurs manuels en 2.4.4 et de discuter certaines limites et perspectives de cette étude en 2.4.5

30. En premier lieu et même si cela aurait été intéressant vis-à-vis de nos objectifs, nous ne prenons pas en compte les exercices des manuels. Cela aurait nécessité un long temps de recherche supplémentaire et un espace plus important que celui de cet article.

2.4.2 Étude du relief

2.4.2.1 Étude épistémologique

L'étude épistémologique a été décrite selon 5 périodes historiques³¹ établies à partir de recherches dédiées à la notion de fonction. Nous renvoyons à C.3.1 pour plus de précisions.

Nous isolons maintenant les 6 thématiques (de natures différentes) qui organiseront la suite de la recherche : connaissances anciennes, statut outil/objet, aspects formels, registres, relations et perspectives fonctionnelles. Selon nos hypothèses théoriques, les thématiques 1 à 4 sont liées à la conceptualisation ou au niveau de conceptualisation de la notion de fonction, auxquels sont associés les apprentissages des élèves. Les deux dernières thématiques sont propres à la notion de fonction, émanant soit de l'étude précédente (thématique 5), soit de l'étude didactique à venir (thématique 6). Les thématiques 2 à 5 se démarquent de l'étude précédente comme des progrès majeurs liés au développement historique de la notion de fonction, que nous répétons pour le confort du lecteur.

Statut outil/objet Sous ses différentes formes, la notion de fonction a d'abord été outil implicite (périodes 1 et 2), puis outil de plus en plus explicite à partir des travaux de Viète et Descartes (période 3, début période 4) et enfin objet à partir des définitions de Bernoulli ou Euler. Son développement a été suscité par l'étude de grandeurs liées à des phénomènes physiques, par des problèmes géométriques ou par des progrès en physique (périodes 1 à 3) puis de plus en plus pour elle-même (périodes 4 et 5).

Aspects formels Les idées de variable dépendante ou indépendante apparaissent au cours de la période 2, puis la dialectique variable/paramètre est consacrée par l'algèbre de Viète (période 3). La géométrie analytique de Descartes permet de définir la notion de variable dépendante (période 3) et la dialectique entre variable dépendante et indépendante s'affirme au gré des définitions de la période 4, jusqu'à celle de correspondance. Il n'y a ni unification, ni formalisation jusqu'au début de la période 3. La formalisation de la notion est initiée par Viète et Descartes et des notions unifiées de fonction apparaissent lorsqu'elle devient objet (période 4) donnant lieu à diverses généralisations jusqu'à la période 5.

Registres L'idée de fonction apparaît sous forme de table numérique (période 1) puis de description verbale ou de représentations géométriques mêlant les aspects qualitatifs et quantitatifs (période 2). Au cours de la période 3, la « révolution symbolique » initiée par Viète et Descartes (Serfati, 2005) ouvre la voie à un registre algébrique d'une part et à un double registre formule-courbe (Descartes) d'autre part. Ces deux registres (algébrique, graphique) sont consacrés au cours de la période 4 en lien avec l'émergence d'un registre fonctionnel.

Relations L'idée de fonction débute par celle de relation entre ensembles finis de quantités constantes (période 1) puis par celle de covariation entre grandeurs mesurées (période 1). Les aspects quantitatifs et qualitatifs se conjuguent (période 2) puis l'idée de dépendance entre variables est créée par Descartes (période 3). À mesure que la notion devient objet d'étude, des définitions de plus en plus générales apparaissent : dépendance arbitraire entre variables, correspondance arbitraire (période 4)...

31. Entre l'Antiquité et le 14^e siècle, entre le 14^e siècle et la fin du 16^e siècle, au cours du 17^e siècle, au cours du 18^e siècle, à la fin du 19^e siècle.

2.4.2.2 Études curriculaires et didactiques

Nous avons réalisé ces études de manière détaillée en C.4. Pour le confort du lecteur, nous rappelons quelques éléments de l'analyse curriculaire de la notion de fonction en 3^e et de 2^{de} puis les besoins présumés des élèves qui sont issus de l'étude totale du relief. Les justifications de ces besoins figurent dans l'étude didactique (articulée avec les deux autres études).

Étude curriculaire L'étude curriculaire porte sur les programmes de 2016 du cycle 4³² et sur les programmes de 2010 de la classe de 2^{de} : lors de l'analyse des manuels, nous reviendrons sur certaines précisions liées aux réformes de l'enseignement. Les relations de dépendance entre grandeurs mesurables et leurs représentations graphiques sont étudiées au début du cycle 4, ce qui permet d'introduire la notion de fonction en 3^e ainsi que les notions suivantes : variable mathématique, image, antécédent, fonctions affines et linéaires. En 2^{de}, la notion de fonction³³ est définie comme une correspondance et les notions ci-dessus sont reprises et complétées par une étude des extrema et du sens de variation. En outre, l'herbier des fonctions connues s'enrichit (fonctions carrée, polynômes, inverses, homographiques).

Besoins présumés des élèves Nous extrayons de l'étude du relief de la notion de fonction les *besoins présumés* des élèves qui sont des hypothèses faites par le chercheur sur les enjeux primordiaux de l'apprentissage de la notion en 3^e-2^{de}. Nous les évoquons selon la thématique et leur attribuons un code « B-i » pour pouvoir y référer dans la suite.

Connaissances anciennes Nous postulons que les élèves ont besoin de liens forts avec certaines de leurs connaissances anciennes pour comprendre différents aspects de la notion de fonction. Ils ont besoin d'un lien explicite entre proportionnalité et fonctions linéaires mais également de comprendre que la notion de fonction ne se réduit pas à celle de fonction linéaire ou affine (B-1). Il apparaît crucial que les élèves puissent distinguer 2 modes de pensée (équation, fonction) (B-2).

Statut outil/objet Que permet l'outil fonction que les connaissances anciennes des élèves (qui sont aussi des prérequis) ne permettent pas de résoudre ? Selon nous, il y a un besoin à introduire autant que faire se peut la fonction comme outil nécessaire pour modéliser ou résoudre des problèmes, ce qui permet d'en révéler certains aspects. À l'instar de l'histoire de la notion de fonction, il est crucial que la fonction puisse par moment avoir le statut outil (explicite, implicite) ou être introduite au sein d'une dialectique outil-objet (B-3). L'étude de variations, de covariations ou d'extrema peut mettre en valeur les raisons d'être et la plus-value de cet outil (B-4), et permettre de démarquer cet outil des outils de calculs (numérique ou algébrique) qui sont par exemple souvent inefficaces dans une recherche d'extrema.

Aspects formels La nature FUG de la notion de fonction (voir C.4.3.1) nécessite pour les élèves une prise en compte de ses caractères formalisateur, unificateur et généralisateur (B-5). Des recherches identifient l'enjeu important pour les élèves à discriminer, ou à choisir, variable indépendante et variable dépendante dans le cadre de la dépendance entre grandeurs, de la variation, de la covariation ou de la correspondance (B-6). Il paraît nécessaire de prendre en compte le statut de paramètre dès le collège (Chevallard, 1989), et même la « double

32. Le cycle 4 (cycle des approfondissements) recouvre les classes de 5^e, 4^e et 3^e, pour des élèves âgés de 12 à 15 ans.

33. Fonction numérique réelle d'une variable réelle.

algébrisation » variable/paramètre dans la modélisation fonctionnelle (Krysinska & Schneider, 2010, Chapitre 2), en particulier via les possibilités offertes par les classes paramétrées (B-7). En effet, le statut de paramètre permet d'unifier des problèmes étrangers au sein d'une même *classe paramétrée*, par exemple celle du second degré ($f(x) = ax^2 + bx + c$) (Krysinska & Schneider, 2010, 2.2.3). Mais il permet également de rendre adaptable un modèle fonctionnel donné aux spécificités d'un problème (Krysinska & Schneider, 2010), ce qui assure la généralité de certains résultats.

Relation Les besoins principaux sont explicités en (B-4) et (B-6).

Registres Au cycle 4, les élèves sont supposés travailler les registres numérique, graphique, algébrique et le passage d'un registre à un autre. En 2^{de} les élèves découvrent les registres schématique (tableau de variation) et fonctionnel. Selon diverses recherches, les différents registres de la notion de fonction doivent à la fois être travaillés pour eux-mêmes et référer au même être mathématique (B-8). Il y a nécessité à permettre aux élèves des activités de conversion d'un registre à un autre, d'articuler, de confronter, de choisir des registres (B-9). Certains passages entre registres peu usuels sont importants dans une perspective globale (voir ci-dessous).

Perspectives fonctionnelles Selon de nombreux travaux (voir C.4.6), la conceptualisation de la notion de fonction en 3^e-2^{de} passe d'une part par la considération de propriétés ponctuelles ou globales, d'autre part par des « points de vue spécifiques dans le travail sur les fonctions associées aux trois types de propriétés sur les fonctions : ponctuelles, globales, locales » (Vandebrouck, 2011b, p. 6-7) nommées *perspectives fonctionnelles*. Rappelons qu'une propriété est *ponctuelle* si elle ne dépend que des valeurs de la fonction en un point et *globale* si elle est valable sur un intervalle. Il y a aussi des propriétés *ponctuelles universelles* vérifiées pour toute valeur de l'ensemble de définition (elles sont donc globales). Or, l'énoncé de certaines propriétés globales fait plus ou moins travailler la perspective globale (Vandebrouck, 2011a, 2011b) : c'est souvent le cas des propriétés ponctuelles universelles.

Les perspectives fonctionnelles (ponctuelle, globale) font adopter des points de vue cruciaux sur les propriétés ponctuelles, ponctuelles universelles, globales. Il est important de les travailler pour elles-mêmes, de les conjuguer, au travers aussi des registres qui n'ont pas une valence constante en termes de perspectives ponctuelle ou globale (B-10). Certains passages entre registres manifestent *a priori* aussi une richesse en termes de changements de perspectives (B-11), par exemple du registre numérique au registre algébrique ou du registre graphique au registre algébrique pour travailler l'adéquation d'un modèle fonctionnel (Krysinska & Schneider, 2010). Selon nous, la mise en valeur de la perspective globale est supposée jouer un rôle important dans la conceptualisation de la notion de fonction (B-12).

2.4.3 Outil d'analyse

Pour estimer l'offre faite aux enseignants par les cours des manuels de 3^e et 2^{de} pour l'apprentissage des fonctions par les élèves, nous construisons une grille basée sur l'étude du relief, en particulier sur les besoins présumés des élèves. Les cours des manuels sont analysés comme des scénarii potentiels d'enseignement de la notion de fonction, sans résumer de ce qui sera effectivement proposé en classe. À la fois, un enseignant ne peut pas suivre intégralement le scénario proposé par un manuel, mais de plus il y aurait également à tenir compte de ses pratiques qui, par le choix des tâches et l'organisation des déroulements, contribuent aux apprentissages des

élèves. Nous nous autorisons cependant à faire l'hypothèse que l'absence de prise en compte de certains enjeux ou besoins dans ces scénarii pourrait risquer d'entraîner aussi leur non prise en compte en classe.

Notre outil permet d'analyser le « cours » d'un manuel, c'est-à-dire tout ce qui y est proposé en dehors des exercices à la fin du chapitre : activités d'introduction, définitions, propriétés, exemples, méthodes, exercices corrigés... Notre grille d'analyse comporte 4 colonnes mettant face à face la thématique, les valeurs possibles (les éléments qui ont été décrits au sein de chaque thématique), l'endroit du cours où on cherche prioritairement (mais pas exclusivement) des traces de ces éléments (où ?) et les besoins présumés des élèves. On pourra trouver cette grille en figure C.1.

En plus de cette grille, nous avons été conduit à prendre en compte trois points de vigilance qui sont des enjeux transversaux (voir C.5.2) : occasions de proximité, images et antécédents, variations.

2.4.4 Exemples d'analyse de manuels

Les manuels analysés sont issus du cycle 4 (5 manuels), de 2^{de} (5 manuels) et des programmes de 3^e de 2008 à des fins de comparaison avec le cycle 4 : voir C.6.1 et la figure C.2. Nous résumons les résultats détaillés en C.6.2 selon les six thématiques.

2.4.4.1 Connaissances anciennes

Dans les manuels de 3^e, soit la fonction linéaire est définie comme modélisant une situation de proportionnalité, soit elle est définie d'abord dans un registre algébrique puis ce lien est mis en valeur (hormis dans 2 manuels de 2008). La notion générale de fonction est toujours définie avant celle de fonction linéaire, ce qui est supposé indiquer qu'elle ne s'y réduit pas. C'est aussi selon nous une occasion de proximité manquée pour montrer le caractère généralisateur de la notion de fonction compte tenu d'activités contextualisées liées à la proportionnalité. En revanche, les manuels de 2^{de} se privent d'une occasion de proximité, puisque tout lien clair entre la proportionnalité et les fonctions linéaires a disparu.

Les références à l'algèbre ou aux équations sont absentes des manuels de 3^e alors qu'une certaine part des manuels de 2^{de} (section ou chapitre) est liée aux besoins possibles des élèves à ce sujet : développement, factorisation, équations et inéquations de degré 1 à une inconnue, équations et inéquations « produit », démontrer une égalité « pour tout x », résoudre algébriquement ou graphiquement une équation. Toutefois, la distinction entre recherche d'image et recherche d'antécédent(s) n'est pas faite, ce qui aurait pu permettre de commencer à distinguer un mode de pensée fonctionnel d'un mode de pensée lié aux équations.

2.4.4.2 Statut outil/objet

Les fonctions et notions associées sont introduites par des activités où elles sont tantôt objets, tantôt outils, mais quasiment jamais outils non indiqués et à élaborer par les élèves. Les activités portant sur les (co)variations ou extrema de la fonction (problèmes d'optimisation par exemple) de manière consistante sont absentes dans les manuels de 3^e en 2008, mais quelquefois présentes dans ceux de 2016 ou en 2^{de}.

Globalement, les manuels ne montrent pas ce que la fonction permet en termes de nouveautés (outil implicite). Hormis dans quelques cas particuliers, ils ne présentent pas non plus de raison d'être ou de plus-value de la notion de fonction par rapport aux connaissances antérieures.

2.4.4.3 Aspects formels

Le nouveau formalisme associé à la notion de fonction est proposé en 3^e et en 2^{de}, mais n'est pas motivé et son instrumentalité n'est pas expliquée. Dans tous les manuels sauf un, la notion de variable est absente ou n'est qu'un point de vocabulaire. Dans ce manuel, le traitement de cette notion est plus poussé, ce qui témoigne d'une tentative de prise en compte du caractère formalisateur de la notion.

Les manuels contiennent parfois des occasions d'unifier la notion de fonction mais elles sont fréquemment manquées, mettant par exemple en parallèle des représentations de registres pour des fonctions différentes. La possibilité de référer aux dépendances entre grandeurs rend ces occasions plus manifestes pour les manuels de 3^e en 2016. Ainsi dans la figure C.3, l'unification est présente dans la définition de dépendance entre grandeurs mais n'est pas prolongée à la définition de fonction. L'occasion est selon nous partiellement manquée pour diverses raisons (voir C.6.2.3). Dans l'exemple de la figure C.6, il nous semble qu'un discours plus explicite aurait pu permettre de mettre en valeur le caractère unificateur de la notion de fonction.

Le caractère généralisateur de la notion de fonction n'est visible que par le fait qu'une fonction linéaire donnée est vue comme modélisant une situation de proportionnalité.

Selon les manuels, les paramètres sont qualifiés de nombres « fixés », « donnés », « connus » ou simplement « réels ». Cependant, la distinction entre variable et paramètre n'y est pas présente puisque cette dernière notion n'est déjà pas précisée. Les classes paramétrées ne sont pas présentées pour leur caractère unificateur de nombreux problèmes, à l'exception de la classe paramétrée de la proportionnalité directe mise en valeur dans une majorité de manuels de 3^e (voir ci-dessus). La classe paramétrée du second degré sert à énoncer les résultats vus à son sujet en 2^{de} mais aucune possibilité n'est offerte pour rendre ce modèle adaptable aux spécificités d'un problème.

2.4.4.4 Relation

Dans les manuels de 3^e, la fonction est présentée comme procédé ou processus (correspondance), conformément à ce qui est dit dans le programme, la dépendance entre grandeurs étant en général présente en amont de la définition de fonction pour les manuels de 2016. En 2^{de}, le correspondance est aussi le choix qui est fait dans la totalité des manuels, où la fonction est définie par le fait d'associer un nombre à un autre.

La covariation n'apparaît clairement dans aucune des définitions données, ce qui est conforme aux programmes, et n'est que très rarement présente dans les autres parties du manuel. Lorsqu'elle est présente, elle n'est pas signalée ou mise en valeur, comme dans la figure C.3 avec l'équation $A = c^2$: l'idée de covariation est présente mais elle est remplacée par l'ostensif $f(x)$ qui n'en conserve qu'une perspective ponctuelle. Les variables dépendantes et indépendantes, qui sont associées à l'idée de covariation, sont absentes des manuels.

Nous analysons aussi la manière dont les variables sont mises en jeu lors de la définition du sens de variation (au programme en 2^{de}). Pour cela nous prenons l'exemple de la notion de fonction croissante. En suivant Chappet-Pariès, Robert et Pilorge (2017), nous considérons qu'il y a 5 stades pour évoquer la (stricte) croissance d'une fonction sur un intervalle I :

- (stade 1) La courbe « monte » (de gauche à droite).
- (stade 2) Quand x augmente sur I , $f(x)$ augmente.
- (stade 3) Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- (stade 4) $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

— (stade 5) La fonction f conserve l'ordre sur I .

Chacun de ces stades peut bien entendu varier en termes de formulation et de représentation de registre. Selon nous, ces stades mettent plus ou moins en valeur un aspect statique ou dynamique, parfois une idée de dépendance ou de covariation. Ainsi, le stade 1 est plutôt dynamique et symétrique, le stade 2 dynamique, dissymétrique avec une idée de dépendance, les stades 3 et 4 sont statiques et expriment algébriquement une idée de covariation et le stade 5 n'est plus lié à ces aspects.

La figure C.5 résume les choix des manuels de 2^{de} par rapport à l'ordre chronologique des stades qui y apparaissent et l'élément de cours où ils se situent. Elle montre qu'il y a une grande variété de choix pour approcher la définition de fonction croissante au sens du stade 4, certains manuels proposant peu de formulations (Odyssée, Transmath), les autres en proposant davantage. En général, les liens entre les stades ne sont pas expliqués, en particulier le passage du stade 1 ou 2 au stade 4, le stade 3 étant absent de la partie cours.

À la suite de Chappet-Pariès, Robert et Pilorge (2017), nous supposons qu'il est important de prendre en compte les stades 1 à 3 pour que les élèves conceptualisent la notion de fonction croissante et que le saut entre les stades 3 et 4 suppose en classe une intervention de l'enseignant. Selon nous, le sens de variation manifeste au travers de ces stades de nombreux enjeux de la notion de fonction : lien entre registre graphique et algébrique, lien entre une description ponctuelle ou ponctuelle universelle et une perspective globale, covariation...

2.4.4.5 Registres

Pour les registres définis en 3^e ou en 2^{de}, les méthodes permettent en général de les travailler en partie pour eux-mêmes et davantage en 2^{de} où le nombre de méthodes est nettement plus important. Il y a cependant peu d'occasions de montrer que ces registres réfèrent au même être. La dépendance entre grandeurs fournit de telles occasions, mais elles ne sont plus visibles lorsque la notion de fonction est définie (voir figure C.3).

À la suite de la notion de fonction, les registres présentés sont fréquemment juxtaposés, mais il y a quand même quelques tentatives d'articulation, comme dans la figure C.6. Les passages entre registres sont travaillés, et plus notamment en 2^{de}, mais on trouve peu de mise en valeur des (non) congruences entre registres. Il y a donc des occasions de proximité dans le passage entre les registres, mais celles-ci restent implicites : par exemple le fait qu'il suffit de 2 points pour tracer une droite ou de deux couples de valeurs pour vérifier que deux fonctions affines sont égales.

De façon générale, des occasions sont manquées dans les manuels pour faire des liens entre les notions d'image ou d'antécédent et les différents registres où elles peuvent apparaître. C'est notamment le cas pour la résolution d'équations (algébrique ou graphique), où le vocabulaire (image ou antécédent) n'est pas repris par la moitié des manuels de 2^{de}. Le passage par un registre fonctionnel, dans lequel on emploie le vocabulaire (image, antécédent) et le formalisme propre aux fonctions et à leurs propriétés, est souvent nécessaire pour faire la conversion entre les registres algébrique et graphique : par exemple pour déterminer l'allure de la courbe à partir de la nature de son expression algébrique, et réciproquement. Cependant, il n'est pas signalé comme un registre particulier supplémentaire, alors que cela nous semble important pour aider à montrer que différents registres réfèrent au même être mathématique.

Nous trouvons dans les manuels de 3^e et 2^{de} quelques méthodes ou exercices corrigés où soit les étudiants doivent choisir la représentation adaptée, soit il y a plusieurs choix de registres possibles. Cependant, ces choix ne sont en général pas

commentés par les manuels et de nombreuses initiatives sont à la charge du lecteur, et en conséquence des difficultés implicites demeurent (voir C.6.2.5 et C.7).

Selon nous, la mise en valeur des limites et avantages des registres est un point crucial permettant de considérer la fonction comme un objet ne se limitant pas à chacune de ses représentations³⁴. Cependant, les limites et avantages sont très rarement explicités en 3^e et rarement en 2^{de}. Ainsi, dans la figure C.7, les limites du registre graphique ou des valeurs approchées liées au registre numérique ne sont pas commentées. Parmi les limites parfois citées en 2^{de} il y a l'accès à des valeurs approchées (graphique), l'incertitude à avoir trouvé toutes les solutions d'une (in)équation (graphique, numérique). Parmi les avantages, il y a la possibilité de pouvoir conjecturer des propriétés (graphique), d'affiner des résultats (numérique), de voir des intervalles de monotonie et valeurs remarquables (schématique).

2.4.4.6 Perspectives fonctionnelles

Il nous semble que la propriété qui explicite l'équivalence entre la forme des coordonnées et l'appartenance à la représentation graphique d'une fonction présente un enjeu en termes de perspectives fonctionnelles. Si les coordonnées ou l'appartenance d'un point à la courbe sont des définitions ponctuelles, celle qui consiste à voir la courbe comme l'ensemble de ces points est ponctuelle universelle. En termes de perspectives fonctionnelles, il y a aussi un lien entre la courbe (perspective globale) et l'ensemble de tous les points qui la composent. Cette propriété est également un passage crucial entre le registre algébrique et graphique qui pourrait être mal perçu s'il était réduit au calcul d'images dans le registre numérique. Du point de vue des manuels, cette propriété est proposée en 3^e en 2008 pour les fonctions affines, mais n'y est plus en 2016. Elle est également proposée dans 2 manuels de 2^{de} puis reprise dans les savoir-faire. Cependant, la portée de l'exercice est réduite pour de nombreuses raisons et il consiste finalement en des calculs d'images (voir C.6.2.6)

Enfin, la perspective globale est visible en 3^e mais pas travaillée et en 2^{de}, et même si des notions au programme sont liées à la perspective globale (domaine de définition, intervalles, monotonie, extrema), celle-ci n'est que peu mise en valeur. Bien que la plupart des occasions d'adopter une perspective globale est manquée, il y a toutefois des tentatives, pour passer d'un registre numérique ou graphique à un registre algébrique et entre les registres graphique et schématique.

2.4.5 Conclusion et perspectives

Nos conceptions et hypothèses sur les apprentissages des élèves issus de la Théorie de l'Activité nous ont conduit à prendre le relief de la notion de fonction en 3^e-2^{de} comme référence pour ces apprentissages. Nous avons établi ce relief comme produit de trois études (épistémologique, curriculaire, didactique) dont nous avons extrait des hypothèses sur les besoins présumés des élèves dans l'apprentissage de cette notion répartis dans plusieurs thématiques interdépendantes. Cela nous a permis de construire une grille d'analyse des cours des manuels, nous permettant de confronter leur offre à ces besoins présumés. Il nous paraît important d'anticiper et de prendre en compte ces besoins, mathématiques et didactiques, pour permettre aux élèves de comprendre (à travers des tâches adaptées et des cours suffisamment connectés à ces tâches), d'appliquer et de faire fonctionner plus largement (avec des tâches suffisamment variées), et de retenir (grâce à la cohérence de l'ensemble et aux liens effectués) différents aspects de la notion de fonction. Le relief de la notion de fonction pourrait d'ailleurs être un outil utile pour les enseignants, dans la

34. Nous faisons ici l'hypothèse que la nécessité de choisir de passer à un autre registre de représentation, pour résoudre un problème posé, peut en effet améliorer la qualité de la conceptualisation de l'objet fonction.

mesure où il liste de manière exhaustive les caractéristiques des notions étudiées en les intégrant dans les programmes anciens, actuels, futurs. Cela pourrait déboucher sur des expérimentations en classe réelle en lien avec les chercheurs.

L'analyse des cours des manuels de cette étude révèle une différence principalement quantitative entre les manuels de 3^e et 2^{de} : nombre de propriétés, de méthodes, de registres. Si certains manuels prennent en compte quelques besoins présumés des élèves, un manuel donné n'en retient que très peu. Pour les deux niveaux, on aboutit donc globalement à une même absence de prise en compte des aspects, pour nous importants, relatifs à la conceptualisation de la notion de fonction : fonction outil pour résoudre des problèmes (si tant est que cela soit possible à ces niveaux scolaires, dans la mesure où on n'aborde pas les problèmes d'extrema), plus-value de l'introduction de la notion de fonction par rapport aux connaissances anciennes, prise en compte des variations et covariations, articulation explicite et limites/avantages des registres de représentation, perspective globale sur la fonction. Ces résultats seront à vérifier dans les manuels qui seront publiés à la suite des futurs changements de programmes. La question du sens de variation nous semble un objet de recherche pertinent qui concentre différents enjeux en lien avec les 5 stades mentionnés ci-dessus : lien graphique-algébrique, lien entre ponctuel, ponctuel universel et global, covariation.

La quantité accrue d'objets du cours en 2^{de} pose la question de la possibilité d'organiser des proximités entre le cours et ses applications. Une perspective évidente de notre étude serait de la compléter par une analyse des exercices proposés par les manuels des deux niveaux compte tenu des thématiques et besoins isolés et de l'analyse du cours de ces manuels. Cela permettrait d'étudier dans quelle mesure les éléments du cours y sont mobilisés, et pour ceux qui le sont, s'ils sont mobilisés de manière suffisamment variée, avec des prises d'initiatives potentielles pour les élèves. Cette hypothèse devra être confirmée pour expliquer au moins en partie certaines difficultés possibles des élèves en 2^{de} par rapport à la 3^e. Les choix de tâches des enseignants des deux niveaux participent aussi à la possibilité de faire fonctionner tout ou partie de ces notions. Il faudrait ici encore aller le vérifier par des recherches *in situ* dans les classes en étudiant les contenus et les logiques de pratiques des enseignants des deux ordres considérés (fin du collège/début du lycée). En outre, les besoins que nous avons identifiés sont relatifs, en amont de la classe, et demanderaient aussi à être mis en perspective avec la complexité des pratiques en classe.

Il nous semble que les problématiques liées à l'enseignement et l'apprentissage des fonctions en 3^e-2^{de} mériteraient d'être articulées aux problématiques associées à la transition institutionnelle entre ces deux niveaux scolaires. Cela pourrait révéler des phénomènes spécifiques et expliquer certaines difficultés des élèves, qui pourraient être amplifiées à ces occasions. Nous souhaitons donc prolonger notre questionnement aux différences entre ces deux niveaux, voire aux ruptures lorsque ces différences sont importantes, comme des sources de perturbation probables pour les élèves, qui doivent s'adapter à ces changements. Il nous semble aussi qu'il faut prendre en compte le fait que l'enseignement et l'apprentissage des fonctions se font sur un temps long dans le secondaire, environ 3 ou 4 ans depuis l'introduction en fin de cycle 4 (classe de 3^e), en classe de 2^{de} au début du lycée après transition entre deux institutions³⁵, puis de 1^{re} Scientifique. Cet enseignement ne va pas concerner tous les élèves sur la même durée et avec les mêmes contenus et objectifs, selon leur orientation en classe de 2^{de} générale ou professionnelle. À cet égard, nous serions donc amenés à tenter de repérer des écarts possibles dans ce qui est enseigné entre les deux niveaux, pour des élèves qui poursuivent leurs études dans l'enseignement

35. Le collège et le lycée sont deux institutions différentes, qui peuvent être séparées physiquement en deux bâtiments distincts, et les enseignants de mathématiques, bien qu'ayant reçu la même formation initiale, n'interviennent généralement que dans une seule de ces deux institutions.

général, et à interroger ce qu'il semble nécessaire de proposer en particulier à des élèves qui continueront leur apprentissage des fonctions au-delà de la 3^e. Comment concilier des enjeux à long terme prenant en compte certains aspects de la notion, et des enjeux à court terme, intégrant les besoins des élèves chaque année ? Comment non seulement répartir mais surtout articuler les différents aspects tout au long de l'enseignement de ces notions, en tenant compte des programmes scolaires et du changement d'institution ? On pourrait par exemple émettre l'hypothèse suivante en rapport avec le long terme de l'apprentissage de la notion de fonction : le travail en 3^e au collège pourrait être plutôt axé sur la formulation dans différents registres (notamment pour l'expression algébrique), alors que le travail en 2^{de} pourrait être plutôt axé sur la formalisation (notamment algébrique et analytique) avant l'introduction de la perspective locale en 1^{re}.

Enfin, les programmes du lycée évoluent à plusieurs égards à la rentrée 2019 (pour la 2^{de} et la 1^{re}). Les contenus du programme de mathématiques changent : par exemple, introduction en 2^{de} des fonctions racine carrée et cube, report en 1^{re} de l'étude des fonctions polynômes du second degré et présence explicite en 1^{re} d'un « point de vue global » et d'un « point de vue local ». Il y a introduction en 2^{de} d'un enseignement commun « Sciences numériques et technologie » et en 1^{re} d'un enseignement de spécialité « Numérique et sciences informatiques ». L'usage des TICE en lien avec ces cours peut également être amené à évoluer. D'une part, il sera donc nécessaire de voir dans quelle mesure tous ces changements sont susceptibles d'impacter nos constats. D'autre part, le fait que les notions de « fonction » et de « variable » soient utilisées dans des sens *a priori* différents en mathématiques et informatique doit aussi nous questionner. Enfin, s'agissant des TICE, la possibilité d'introduire, de manière non artificielle, certaines propriétés globales des fonctions comme outils (indiqués par l'énoncé) pour résoudre des problèmes, est souvent investie sous la forme de problèmes de modélisation avec usage de logiciels. Dans quelle mesure la nécessité des fonctions est-elle encore présente après usage de ces intermédiaires, qui prennent peut-être aussi en charge de manière non transparente certaines difficultés des passages entre les registres ?

BIBLIOGRAPHIE

- Allard, C., Asius, L., Bridoux, S., Chappet-Pariès, M., Pilorge, F. & Robert, A. (2016). *Quand le prof de mathématiques est sur Youtube... Quelques réflexions sur les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour des classes inversées*. Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz 16, Université Paris Diderot.
- Amra, N. (2003). *La transposition didactique du concept de fonction : comparaison entre les systèmes d'enseignement français et palestiniens* (Thèse de doctorat, Université Paris 7).
- Bloch, I. (2000). Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de Von Koch. In I. Bloch *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1.
- Bloch, I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics* 52, 3–28.
- Bourbaki, N. (1939). *Théorie des ensembles : fascicule de résultats*. Hermann.
- Bridoux, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot.
- Bridoux, S. (2016). Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique pour l'enseignant ? In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.) *Proceedings of INDRUM 2016*, (pp. 53–62), University of Montpellier and INDRUM : Montpellier, France.
- Bridoux, S., Chappet-Pariès, M., Grenier-Boley, N., Hache, C. & Robert, A. (avec la collaboration de Lévi, M.-C. & Pilorge, F.) (2015). *Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université)*. Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz 14, Université Paris Diderot.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. & Robert, A. (2016a). Les moments d'exposition des connaissances, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187–234.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. & Robert, A. (2016b). Anciennes et nouvelles questions sur l'enseignement supérieur. Un exemple de recherches actuelles sur l'exposition de connaissances. In *Actes du Séminaire National de l'ARDM 2016* (pp. 268–286).
- Brousseau, G. (1988). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiate mathematics education*, 3, 114–162.
- Chappet-Pariès, M., Pilorge, F. & Robert, A. (2017). *Un scénario de formation de formateurs : les activités d'introduction, les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour la classe inversée, s'appuyant sur le thème « sens de variation des fonctions » en seconde*. Document pour la formation des enseignants 16, Publications de l'IREM de Paris.
- Chappet-Pariès, M., Pouyanne, N., Robert, A., Roditi, E. & Rogalski, M. (2007). *Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée – quelques exemples*. Cahier DIDIREM bleu 9, Université Paris Diderot.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. La pensée sauvage : Grenoble.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit X*, 19, 43–72.
- Chorlay, R. (2007). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. *Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements*. Lyon : INRP, 203–227.
- Chorlay, R. (2011). “Local–Global” : the first twenty years. *Archive for history of exact sciences*, 65(1), 1–66.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86.
- Coppé, S., Dorier, J.-L., & Yavuz, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(2), 151–186.
- Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier de Grenoble.
- Dahan-Dalmedico & Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques : routes et dédales*. Éditions du Seuil.
- De Vleschouwer, M. (2010). *Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire*. Thèse de Doctorat, FUNDP Namur.
- Dieudonné, M., Droniou, J., Durand-Guerrier, V., Ray, B. & Theret, D. (2011). Bilan de praticiens sur la transition lycée-université. *Repères IREM* 85, 5–30.
- Dorier, J.-L. (1990). *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approche historique et didactique*. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Dorier, J.-L. (1992). *Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire*. Cahier rouge 14, IREM Paris Diderot.
- Dorier, J.-L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 175–197.
- Dorier, J.-L. (1997a). *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire–Perspective théorique sur leurs interactions*. Note de synthèse, Université Joseph-Fourier-Grenoble I.
- Dorier J.-L. (Ed.) (1997b). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Dorier, J.-L. (1998). État de l'art de la recherche en Didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 191–230.

- Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavnogot, *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France - Hommage à Guy Brouseau et à Gérard Vergnaud*, (pp. 328–342), Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.) *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85–124), Dordrecht : Kluwer.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–32.
- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1984). Intuitions on functions. *The Journal of experimental education*, 52(2), 77–85.
- Durand-Guerrier, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In A. Bronner et al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, XVIe école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295–342.
- Durand-Guerrier, V., Haubserger, T. & Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 20, 101–148.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37–65.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131.
- Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamäki, R.-L. (Eds.) (1999). *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge University Press.
- Fleischmann, Y. & Biehler, R. (2018). Students' problems in the identification of subspaces in Linear Algebra. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, N. M. Hogstad (Eds.) *Proceedings of INDRUM*, (pp. 224–233), University of Agder and INDRUM : Kristiansand, Norway.
- Grau, S. (2017). *Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Thèse de Doctorat, Université de Nantes.
- Grenier-Boley, N. (2009). *Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université*, Cahier de DIDIREM 59, Université Paris Diderot.
- Grenier-Boley, N. (2014). Some issues about the introduction of first concepts in linear algebra during tutorial sessions at the beginning of university. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 439–461.
- Grenier-Boley, N., Bridoux, S., De Vleeschouwer, M., Durand-Guerrier, V., Grenier, D., Menini, C., Rogalski, M., Sénéchaud, P. & Vandebrouck, F. (2015). Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite en première année d'université : adaptation de deux ingénieries. In L. Theis (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage - Actes du colloque EMF2015 - GT7*, (pp. 666–676).

- Grenier-Boley, N., Bridoux, S. & Hache, C. (2016). Moments d'exposition des connaissances à l'université : le cas de la notion de limite. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.) *Proceedings of INDRUM 2016*, (pp. 380–389), University of Montpellier and INDRUM : Montpellier, France.
- Gueudet, G. (2004). Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(1), 81–114.
- Gueudet, G. (2008a). Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Actes de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 159–175), Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Gueudet, G. (2008b). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational studies in mathematics*, 67(3), 237–254.
- Gueudet, G. (2008c). Entrée à l'université / Ressources en ligne. Éclairages théoriques et actions didactiques dans deux champs de recherche en didactique des mathématiques. Note de synthèse, Université Paris-Diderot.
- Gueudet, G. & Trouche, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Presses universitaires de Rennes, coll. « Paideia ».
- Gueudet, G., Pepin, B., Restrepo, A., Sabra, H. & Trouche, L. (2017). E-textbooks and Connectivity : Proposing an Analytical Framework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(3), 539–558.
- Guzman-Retamal, I. (1989). Registres mis en jeu par la notion de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 2, 229–260.
- Harel, G. (1989). Learning and Teaching Linear Algebra : Difficulties and an Alternative Approach to Visualizing concepts and Processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11, 139–148.
- Hausberger, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In J.-L. Dorier, S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social, enjeux et défis pour le 21^e siècle, Actes du colloque EMF 2012*, (pp. 425–434), Université de Genève.
- Hausberger, T. (2016). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université et premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : études croisées en didactique et épistémologie des mathématiques*. Note de synthèse, Université de Montpellier.
- Hitt, F., & Morasse, C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3^e secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. In *Proceedings CIEAEM* (Vol. 61).
- Jovignot, J. (2017). L'analyse épistémologique du concept d'idéal et son apport à l'étude didactique. In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.), *Épistémologie et didactique : synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales* (pp. 61–73), Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept : A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282–300.
- Krysinska, M. & Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Belgique : Les Éditions de l'Université de Liège.
- Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique*. Thèse de Doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- Lecorre, T. (2015). Définir : une nécessité à construire. Le cas de la définition de la limite d'une fonction. *Repères IREL*, 100, 51–64.

- Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, 10, 123–158.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing : Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 60(1), 1–64.
- Leontiev, A.N. (1975). *Activité, conscience, personnalité*. Moscou : Édition du progrès.
- Leplat, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail*. Paris : PUF.
- Mac Lane, S. (1998). *Categories for the working mathematician. Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics, 5, New-York : Springer-Verlag.
- Mai, T., Feudel, F. & Biehler, R. (2017). A vector is a line segment between two points? Students' concept definitions of a vector during the transition from school to university. In T. Dooley, G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of CERME 10*, (pp. 2185–2192), Institute of Education, Dublin City University, Ireland, and ERME.
- Mamona-Downs J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal : a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 259–288.
- Maschietto, M. (2001). Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(1-2), 123–156.
- Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and Micro Straightness : Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, 13, 207–230.
- Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In E. Dubinsky, G. Harel (Eds.), *The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175–194), MAA notes, no. 25, Washington DC.
- Monna, A. F. (1972). The concept of function in the 19th and 20th century, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for history of exact sciences*, 9(1), 57–84.
- O'Shea, A., Breen, S., & Jaworski, B. (2016). The Development of a Function Concept Inventory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(3), 279–296.
- Oktaç, A. & Vivier, L. (2016). Conversion, Change, Transition... in Research About Analysis. In B. Hodgson, A. Kuzniak & J.-B. Lagrange (Eds.) *The Didactics of Mathematics : Approaches and Issues* (pp. 87–121), Springer, Cham.
- Pariès, M., Robert, A., & Rogalski J. (2009). Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques. *Travail et apprentissages*, 3, 95–123.
- Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* (Thèse de doctorat, Université de Montréal).
- Piaget, J., Grize, J. B., Bang, V., & Szeminska, A. (1968). *Épistémologie et psychologie de la fonction*. Presses Universitaires de France, Paris.
- Picard, É. (1906). *La science moderne et son état actuel*.
- Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3(2).
- Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, 60 1, 71–93.

- Raftopoulos, A. & Portides, D. (2010). Le concept de fonction et sa représentation spatiale, In *Actes de Deuxième Symposium Franco-Chypriote « Mathematical Work Space »*, Paris, (pp. 201–214).
- Raftopoulos, A. & Portides, D. (2012). Le concept de fonction et sa projection spatiale. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 169–194.
- René de Cotret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17, 5–27.
- Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergences des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 305–341.
- Robert, A. (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP* 340, 431–449.
- Robert, A. (1987). *De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire*. Cahier de Didactique des Mathématiques, 47, Université Paris Diderot.
- Robert, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139–190.
- Robert, A. (2000). Level of conceptualization and secondary school math education. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, (pp. 125–131), Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Robert, A. (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit X*, 63, 7–29.
- Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 271–312.
- Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques des enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45–68), Toulouse : Octarès Edition.
- Robert, A. & Hache, C. (2013). Why and how to understand what is at stake in a mathematics class. In F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics Classrooms : Students' Activities and Teacher's Practices* (pp. 23–73). Rotterdam : Sense Publishers.
- Robert, A., Lattuati, M. & Penninckx, J. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques : (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Robert, A., & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 145–176.
- Robert, A. & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34, 2-3, 239–285.
- Robinet, J. (1983) Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4/3, 232–292.
- Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement (pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves). In F. Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 23–30 & pp. 429–456). Toulouse : Octarès Editions.

- Rogalski, J. (2013). Theory of Activity and developmental frameworks for an analysis of teachers' practices and students' learning. In F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics Classrooms : Students' Activities and Teacher's Practices* (pp. 3–22). Rotterdam : Sense Publishers.
- Rogalski, M. (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG A. *La Gazette des Mathématiciens*, 60, 39–62.
- Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : Mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 61–87). Paris : PUF.
- Rogalski, M. (2015). Quelques points sur l'histoire et l'épistémologie des fonctions, pouvant éclairer certaines questions didactiques sur leur enseignement. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 6(1).
- Rogalski, M. (2016). Revenir au sens de la notion de limite par certaines de ses raisons d'être : un chantier pour le début de l'analyse à l'université. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.) *Proceedings of INDRUM 2016*, (pp. 133–142), University of Montpellier and INDRUM : Montpellier, France.
- Selden, A., & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function : Summary and overview. In E. Dubinsky, G. Harel (Eds.), *The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 1–16), MAA notes, no. 25, Washington DC.
- Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Éditions Petra, Paris.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification—the case of function. In E. Dubinsky, G. Harel (Eds.), *The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59–84), MAA notes, no. 25, Washington DC.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5–67.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky, G. Harel (Eds.), *The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 23–58), MAA notes, no. 25, Washington DC.
- Stewart, S. (2017). School Algebra to Linear Algebra : Advancing Through the Worlds of Mathematical Thinking. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 219–233). Springer.
- Vandebrouck, F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.
- Vandebrouck, F. (2011a). Points de vue et domaines de travail en analyse. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 149–185.
- Vandebrouck, F. (2011b). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Note de synthèse, Université Denis Diderot-Paris 7.
- Vandebrouck, F. (Ed.) (2013). *Mathematics Classrooms : Students' Activities and Teacher's Practices*. Rotterdam : Sense Publishers.
- Vandebrouck, F. & Robert, A. (2017a). *Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques : Vers une théorie didactique de l'activité (TDA)*. Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz 14, Université Paris Diderot.
- Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017b). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37, (2-3), 333–382.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133–169.

Verret, M. *Le temps des études*. Paris, Honoré Champion, 2 volumes.

Vygotski, L. (1934/1997). *Pensée et langage*. Paris : La dispute.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of exact Sciences*, 16(1), 37–85.

CHAPITRE 3

CONCLUSION ET PERSPECTIVES SCIENTIFIQUES

« *J'ai des questions à toutes vos réponses.* »

- Woody Allen

3.1 Conclusion et éléments de discussion

À l'issue de la synthèse de nos travaux en mathématiques et en didactique des mathématiques, et en guise de conclusion, nous souhaitons profiter de notre expérience de chercheur dans ces deux domaines pour poser la question de l'influence possible de la recherche en mathématiques sur différents aspects et enjeux liés à l'enseignement des mathématiques et à la recherche en didactique des mathématiques.

Dans un premier temps et en écho à la section 1.7, nous proposons en 3.1.1 des éléments qui nous semblent importants à prendre en compte pour étudier dans quelle mesure on peut (ou pas) s'inspirer des pratiques expertes des mathématiciens pour ce que font ou pourraient faire les élèves en classe, pour les déroulements que les enseignants pourraient organiser en classe. Nous tirons un bilan personnel et provisoire de cette question en 3.1.2 pour discuter la part des pratiques des mathématiciens transposables en classe, bilan dont nous partons en 3.1.3 pour évoquer ce qui manque pour pouvoir caractériser, étudier, organiser l'activité mathématique des élèves en classe. Nous avons fait le choix d'aborder cette dernière question en revenant aux hypothèses et à l'opérationnalisation de la Théorie de l'Activité (notamment de la notion de relief) pour montrer comment l'activité mathématique des élèves y est comprise et étudiée. Cela nous permet de justifier l'intérêt à prendre en compte notre double posture de chercheur en mathématiques et en didactique des mathématiques dans des recherches futures, que nous détaillerons en 3.2. Nous concluons ensuite cette note en 3.3 en proposant un bilan général du chapitre 2 et un programme de recherche plus précis en didactique des mathématiques.

Étant donnée la complexité des questions soulevées, notre discussion est volontairement (et forcément) très limitée. Nous ne prétendons pas apporter des éléments de réponse généraux à ces questions, multidimensionnelles, d'une complexité considérable à bien des égards (scientifiques, institutionnels, humains)¹ et qui nécessiteraient la collaboration d'une grande diversité de chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques. Nous nous limitons donc délibérément

1. Nous prenons donc le même genre de précautions qu'au début de 1.7. On peut ainsi supposer qu'une discussion au sujet de ces questions dépend de nombreux facteurs parmi lesquels : le type de recherche en mathématiques (mathématiques pures ou appliquées), le domaine de recherche en mathématiques, voire le chercheur considéré, ce que l'on entend par enseignement des mathématiques (quel niveau, quelles mathématiques enseignées, quel établissement, quels enseignants, quels élèves), le type de recherche en didactique, le ou les cadres théorique(s) concerné(s)...

à quelques exemples pour pointer des éléments qui nous semblent cruciaux compte tenu de notre propre pratique et du cadre théorique dans lequel on s'inscrit.

3.1.1 Pratique experte des mathématiciens et enseignement

Lorsqu'un élève cherche ou résout un exercice ou un problème en mathématiques, est-ce qu'il « fait de la recherche » ou pas ? Qu'est-ce que « faire de la recherche » ? « Chercher » et « faire de la recherche », est-ce vraiment comparable ? Y a-t-il des liens possibles entre ces deux types d'activités ? Toutes ces questions à la fois naïves et profondes sont liées à une problématique générale qui peut s'énoncer comme suit : en quoi les pratiques des mathématiciens² peuvent inspirer ou pas l'enseignement des mathématiques aux élèves, en termes de savoirs (programmes), de connaissances (contenus à enseigner, manuels), d'activités (modalités de l'enseignement) ?

Dans la suite, nous ne prétendons pas traiter cette question dans toute sa généralité, mais souhaitons mettre en valeur des axes qui nous semblent devoir être étudiés pour la documenter et en appréhender la complexité. En premier lieu, peut-on décrire ce qu'est la pratique experte des mathématiciens et si oui comment ? Ensuite, il nous semble important d'étudier la manière dont les mathématiciens se sont investis dans l'enseignement des mathématiques, que ce soit pour une réforme des programmes, pour énoncer des opinions ou agir directement sur l'enseignement des mathématiques en classe. Il apparaît également primordial de s'intéresser à la manière dont les didacticiens ont pris en compte les pratiques des mathématiciens dans leurs recherches. Pour chacun de ces trois axes, nous indiquons quelques exemples de recherches dont les hypothèses ou résultats nous semblent cohérents compte tenu de notre propre pratique de chercheur : bien entendu, ces éléments restent limités et sont donc à relativiser.

3.1.1.1 Qu'est-ce que la pratique experte des mathématiciens ?

D'emblée, cette question ne semble pas très raisonnable et on est tenté de dire que cela dépend de nombreux facteurs parmi lesquels le type de mathématiques (pures ou appliquées), le domaine de recherche, les objets et outils manipulés. Même si on restreint le domaine, les mathématiques ne sont pas figées, elles évoluent de manière considérable ne serait-ce que depuis 100 ans et les réponses à cette question dépendent aussi de la période³ à laquelle on s'intéresse. En transposant la citation de Weil au début de 1.7, on pourrait même se dire qu'on pourrait tout au plus réussir à décrire la pratique d'un mathématicien, voire seulement sa propre pratique, et encore !

En se restreignant à la période « actuelle », tous ces constats sont attestés par des études de grande ampleur qui analysent les pratiques des mathématiciens selon diverses dimensions (Burton, 2004 ; Zarca, 2012). Ainsi l'étude sociologique de Zarca révèle par exemple une opposition entre mathématiques pures et mathématiques appliquées sur de nombreuses dimensions. Selon ces études, il n'y aurait donc en effet pas *une* pratique mais *des* pratiques des mathématiciens.

Cependant, les pratiques des mathématiciens n'ont-elles pas des caractères communs, partagés, qu'on pourrait qualifier d'invariants ? Comparons (modestement) les éléments que nous avons évoqués sur notre propre pratique de mathématicien en 1.7 à une étude récente sur l'activité de recherche en mathématiques portant sur les écrits de divers mathématiciens (Gardes, 2013, Chapitre 5, 5.1) et à quelques autres articles de mathématiciens évoquant leur propre pratique (voir les références au

2. Selon les hypothèses du cadre théorique dans lequel on s'inscrit, la pratique d'un mathématicien inclut ses connaissances.

3. Nous évoquons ici les périodes historiques du domaine mathématique considéré.

début de 1.7). Tous les mathématiciens ont une activité qui relève de la mathématisation verticale⁴ (poser et tenter de résoudre des problèmes, inventer des concepts) articulée avec une activité de mathématisation horizontale⁴ pour ceux qui ont une activité de modélisation à partir d'un problème posé dans le « monde réel ». On repère aussi quelques caractéristiques communes, au sens où elles semblent partagées par un certain nombre de mathématiciens :

- une activité de recherche complexe, multidimensionnelle, composée de plusieurs phases ;
- un grand nombre de connaissances bien organisées, des connexions entre différents cadres, explicites ou reposant sur des analogies ;
- un rôle fondamental et productif de l'écriture (Audin, 1997 ; Pólya, 1957 ; Serfati, 2005 ; Steenrod, 1973), de la communication orale des « manières de faire » (Thurston, 1995), du lien entre travail personnel et travail collectif ;
- une confiance en soi et une motivation basées pour partie sur des réussites scientifiques, mais aussi liées à d'autres composantes (plaisir, esthétique).

3.1.1.2 Mathématiciens et enseignement des mathématiques

Réformes de l'enseignement Les mathématiciens ont souvent été associés aux réformes de l'enseignement.

En France, la plus célèbre des réformes récentes est sans doute celle dite des « mathématiques modernes » initiée dès le début des années 1950 et formalisée par la *Commission Lichnerowicz* en 1967 puis par la *Charte de Chambéry* (Charlot, 1986, voir aussi Revuz, 1968). Cette réforme avait pour principe central la démocratisation de l'école basée sur 3 piliers : enseigner une mathématique démocratique pour tous, par une pédagogie active, au moyen des IREM créés pour l'occasion pour former et accompagner les professeurs (Charlot, 1986). L'échec de cette réforme s'interprète de diverses manières, notamment par une contradiction entre une volonté pédagogique louable et l'épistémologie des mathématiques sous-jacente à la réforme, à savoir le fait de concevoir les mathématiques comme un langage (Barbin, 1997, voir aussi Revuz, 1980). Plus récemment, de nombreux mathématiciens ont participé à la *Commission Kahane* en 2003 pour réfléchir aux mathématiques du 21^e siècle et éventuellement pour réformer les programmes, et les « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques »⁵ ont été présentées en 2018 sous la forme d'un rapport par les mathématiciens Cédric Villani et Charles Torossian. Dans ce rapport, la mesure 16 appelle à la « mise en place de laboratoires de mathématiques en lien avec l'enseignement supérieur et conçus comme autant de lieux de formation et de réflexion (disciplinaire, didactique et pédagogique) des équipes ».

À l'étranger, citons parmi de nombreux exemples la réforme impulsée aux États-Unis par le NCTM⁶ autour du « Problem Solving » (voir Gardes, 2013, Chapitre 3, section 3.1).

Opinions de certains mathématiciens De nombreux mathématiciens ont aussi partagé leur vision des mathématiques ou de l'enseignement des mathématiques, que ce soit de manière directe ou indirecte. Parmi une multitude de publications, citons Freudenthal (2012), Hodgson (2001), Pólya (1981) et Schoenfeld (2014). Nous nous contentons de prendre deux autres exemples français, le premier tiré d'un article de Perrin (2007), le second tiré d'un ouvrage écrit par M. Rogalski (2001) en collaboration avec deux collègues (Pouyanne, Robert).

4. Voir Treffers (1978) ou Yvain-Prébiski (2018) : nous reviendrons sur ce terme ci-après.

5. education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html

6. National Council of Teachers in Mathematics

Dans son article, Perrin illustre avec des exemples tirés de différents domaines mathématiques l'importance de l'activité d'expérimentation en phase de recherche mathématique. Tout au long de l'article, il écrit en outre un certain nombre de maximes qui « n'ont aucune valeur prescriptive : elles ne sont là que pour préciser » sa vision de l'activité de recherche (Perrin, 2007, p. 7). Nous interprétons ces maximes comme autant d'indicateurs qui lui semblent importants dans l'activité de recherche (en tant que mathématicien ou pour les élèves en phase de recherche de problèmes). Entre autres choses, on peut citer le fait que faire des mathématiques c'est poser et — si possible — résoudre des problèmes (maxime 0.1), l'importance de regarder le premier exemple non trivial (maxime 2.2) et l'importance du rôle de l'erreur (maxime 2.19).

En introduction de son ouvrage, Rogalski précise les principes qui ont guidé sa rédaction, parmi lesquels 3 thèmes (interaction, unification, modélisation) et un certain nombre d'activités telles que mélanger, adapter, changer de point de vue (M. Rogalski, 2001, p. 10). D'autres principes centraux sont également cités : la présence d'un questionnement (y compris de nature épistémologique) donnant du sens aux notions, la mise en valeur des procédures d'unification, les changements de cadres, l'importance des méthodes (M. Rogalski, 2001, p. 12).

3.1.1.3 En didactique des mathématiques

Dans quelle mesure les chercheurs en didactique des mathématiques ont-ils été inspirés par la pratique des mathématiciens dans leurs recherches sur les apprentissages en mathématiques ? Dans de nombreux cas, on note dans leurs travaux des liens explicites, que ceux-ci soient tournés vers la construction d'outils d'analyse, de situations de recherche ou qu'ils se réfèrent directement à certaines dimensions des pratiques du mathématicien. Cependant, la légitimité de cette inspiration n'est souvent pas questionnée, nous y reviendrons. Nous donnons quelques exemples dans chacun de ces cas.

Outils d'analyse et de conception de situations En définissant le statut outil ou objet d'un concept ou les jeux de cadres, Douady (1986) se base explicitement sur la conception qu'elle a de l'activité du chercheur en mathématiques : pour résoudre des problèmes, il est amené à créer des outils (qui peuvent acquérir le statut d'objet une fois decontextualisés) ou à définir directement des objets. En outre, « une part importante du travail des mathématiciens est consacrée à interpréter les problèmes qu'ils se proposent de résoudre, à changer de point de vue, [...] à les formuler autrement, à les transporter d'un cadre dans un autre » (Douady, 1986, p. 10), ce qui se réfère aux réseaux de relations que les mathématiciens tissent entre des concepts au sein d'un même cadre ou dans plusieurs cadres distincts. Faisant l'hypothèse que « l'enseignement doit intégrer dans son organisation des moments où *la classe simule une société de chercheurs en activité* » (Douady, 1986, p. 12), elle propose des problèmes qui sont supposés favoriser ces moments, ceux-ci devant vérifier certaines conditions basées sur trois dimensions de l'activité du chercheur (dialectique outil-objet, dialectique ancien-nouveau, jeux de cadres).

En vue de construire des outils pour l'analyse des notions à enseigner, Robert (1998) prend pour référence explicite certaines caractéristiques des pratiques des mathématiciens qui sont « très diverses, dépendant des personnalités, des domaines de recherche, des époques aussi ; on retrouve toutefois quelques éléments communs » (Robert, 1998, p. 144). Parmi ces éléments communs, le caractère disponible d'un grand nombre de connaissances et de leur organisation, le fait de disposer de plusieurs types de questionnements parfois systématiques, l'existence de situations de référence, la capacité à mettre en relation, à « bouger » autour

d'un problème, à faire varier le cadre, le registre ou le point de vue et l'importance du rôle de l'écrit.

Situations de recherche en classe À l'instar de la maxime de Perrin rappelée ci-dessus, de nombreuses recherches en didactique partent de l'importance dans l'activité du mathématicien de poser et résoudre des problèmes. Ces recherches proposent diverses manières d'organiser des situations de recherche en classe (voir Gardes, 2013, Chapitre 3).

Pour Arsac et Mante (1983), la pratique du « problème ouvert » a pour objectif de « placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique, c'est-à-dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur » (Arsac & Mante, 1983, p. 7). En proposant ces situations, les objectifs d'apprentissage sont transversaux : « la pratique de la recherche de problèmes apprend d'abord ce que sont les mathématiques (même si elle apprend aussi des mathématiques) » (Arsac & Mante, 1983, p. 10).

Les Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) initiées par Grenier et Payan (1998) ont aussi pour but de mettre les élèves dans une situation proche de celle du chercheur, compte tenu de certaines caractéristiques. À l'heure actuelle, de nombreuses SiRC ont été créées, proposées à divers niveaux, à différents publics⁷ et ont également fait l'objet de recherche soit pour en étudier les caractéristiques, soit pour analyser leur mise en œuvre (voir Grenier, 2009). Grenier relie les objectifs de ces situations à l'activité du chercheur :

L'activité d'un chercheur, c'est, pour une grande part, choisir une question, expérimenter, étudier des cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer des conjectures, prouver, définir, changer éventuellement la question initiale... Les savoir-faire associés, que nous qualifierons de transversaux (pour les distinguer des savoirs notionnels), sont constitutifs de la démarche scientifique, ils sont nécessaires pour faire des mathématiques et ne peuvent être réduits à des techniques ou à des méthodes. Ils ne peuvent non plus être contraints par le temps (aucun chercheur n'est capable de dire comment et quand il aura résolu le problème sur lequel il travaille) (Grenier, 2009, p. 1).

Cette citation montre les liens explicites entre ces situations et l'activité du chercheur. En outre, il n'y a pas prétention à enseigner les mathématiques exclusivement par ces problèmes, mais plutôt à aborder (et parfois à institutionnaliser) au moyen de ces problèmes des savoir-faire transversaux typiques de l'activité mathématique.

Mise en valeur de certaines dimensions Certaines recherches en didactique se basent enfin sur des dimensions précises de la pratique du chercheur, dont certaines transparaissent déjà dans la citation de Grenier ci-dessus. Nous citons quelques-unes de ces dimensions et quelques recherches qui y sont associées.

Des recherches postulent l'importance de faire vivre en classe la dimension expérimentale des recherches en mathématiques (Dias, 2008 ; Durand-Guerrier, 2010 ; Gardes, 2013 ; Giroud, 2011). Certaines défendent aussi le point de vue selon lequel la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1988) s'appuie sur cette dimension expérimentale des mathématiques, par exemple lors des situations d'action : ces chercheurs ont alors étudié dans quelle mesure le milieu pouvait être construit de sorte à permettre des rétroactions s'appuyant sur cette dimension expérimentale (Dias, 2008 ; Durand-Guerrier, 2010 ; Gardes, 2013, Chapitre 3).

Dans sa note de synthèse, notant que « la construction de définitions est l'une des composantes de l'activité du chercheur » (Ouvrier-Bufferet, 2013, p. 6), Ouvrier-Bufferet étudie l'activité de définition, les situations et concepts pour lesquels une telle

7. Voir <http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/>

activité est pertinente et souligne l'importance d'articuler processus de définition et processus de preuve (Ouvrier-Bufferet, 2013). Le processus de preuve est également central dans de nombreuses recherches, que ce soit pour pointer l'importance de prendre en compte conjointement ses aspects syntaxiques et sémantiques (Durand-Guerrier, 2008) ou pour étudier comment celui-ci se négocie dans la relation entre enseignants et étudiants (Durand-Guerrier & Arsac, 2003).

D'autres recherches s'intéressent à la transposition à la classe de pratiques de modélisation en mathématiques. Depuis Treffers (1978), on décompose le processus de modélisation en deux phases : « la mathématisation horizontale [qui] part du monde de la vie pour arriver au mode des symboles, la mathématisation verticale [qui] se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles. » (Treffers, 1978, cité par Yvain-Prébiski, 2018, p. 35). Dans sa thèse, Yvain-Prébiski établit un schéma du processus de modélisation (Yvain-Prébiski, 2018, figure 22) basé sur des recherches antérieures qui enrichit l'étude du processus de mathématisation horizontale et la dialectique entre les deux types de mathématisations. Elle propose ensuite des situations permettant de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale en classe, compte tenu d'entretiens menés avec des chercheurs en science du vivant (étude d'épistémologie contemporaine).

3.1.2 Quelle transposition des pratiques des mathématiciens ?

Partant de notre pratique de chercheur en mathématiques (1.7), nous proposons une discussion sur la part des pratiques des mathématiciens qui seraient transposables en classe. Nous dressons d'abord un bilan personnel des dimensions qui figurent en 3.1.1, avant de développer la discussion proprement dite.

3.1.2.1 Faire de la recherche

Nous avons explicité en 1.7 des éléments qui nous semblent bien décrire (à défaut de caractériser) notre propre pratique de mathématicien. Sans aller jusqu'à prétendre que cette description est indépendante de ce que donnent à voir certaines lectures sur les pratiques d'autres mathématiciens⁸, nous dégagons maintenant à l'aune de 3.1.1 des dimensions qui nous semblent revêtir une certaine importance parmi les pratiques des mathématiciens. Pour insister sur le fait que ce bilan n'a malgré tout pas prétention à la généralisation et reste personnel, nous le présentons de notre propre point de vue, en insistant d'abord sur les dimensions dans lesquelles nous nous retrouvons, puis sur celles que nous n'avons pas expérimentées en tant que mathématicien.

S'il n'y a pas *une* pratique mais *des* pratiques des mathématiciens, quelques caractéristiques de notre propre pratique semblent partagées par certaines des recherches en 3.1.1. Nous les formulons à notre manière :

- un grand nombre de connaissances organisées, à la fois dans ses domaines de recherche, mais aussi en-dehors, pour permettre des dialectiques entre « savoir » et « mise en fonctionnement du savoir », entre « sens » et « technique », entre définitions, preuves et résultats ;
- un accès à de grands types de questionnements, à des situations de référence, y compris de nature épistémologique, à tout moment de la recherche, avant, pendant et après (quitte à les reconstruire pour en rendre compte) ;
- le rôle important de l'écrit, de l'oral, pour soi-même, pour/avec les autres, de la dialectique entre les deux, du fait d'avoir à rendre compte de ses recherches ou des recherches d'autres mathématiciens ;

8. Ici, nous référons aux pratiques telles que décrites par les mathématiciens eux-mêmes ou telles que perçues par d'autres, en particulier dans les travaux des didacticiens des mathématiques.

- dans une situation nouvelle, l'importance des cas particuliers, des premiers exemples⁹ pour tenter des généralisations, des extensions, mais aussi la prise en compte de situations plus ou moins proches, permettant parfois de travailler en analogie, ou de tendre vers l'unification de certains savoirs ;
- de nombreuses connaissances heuristiques : interpréter les erreurs et savoir s'en servir, changer de cadre pour accéder à d'autres outils puis revenir dans le cadre initial, changer de point de vue sur un même objet pour en révéler différents aspects, connaître des méthodes générales du domaine ou des domaines connexes, utiliser le formalisme mathématique comme outil de création de concepts ou de preuves ;
- une confiance en soi, une motivation à faire de la recherche basées pour partie sur des réussites scientifiques, mais aussi liées à d'autres aspects que ce soit le plaisir, l'esthétique voire la beauté.

D'autres dimensions qui nous semblent moins liées à notre propre posture de chercheur en mathématiques sont mises en valeur par de nombreuses recherches : l'importance de la dimension expérimentale des mathématiques, l'importance de la modélisation, de la dialectique entre mathématisation horizontale et verticale. Personnellement ces aspects nous semblent en particulier liés à la pratique de certains chercheurs en mathématiques appliquées ou aux chercheurs des domaines où les mathématiques constituent un outil, tels les sciences de la matière ou de la nature.

Bien que limités, les éléments que nous avons listés ci-dessus mettent en valeur la complexité des pratiques des chercheurs en mathématiques. Faire des mathématiques c'est en effet poser et résoudre des problèmes mais cela ne saurait s'y réduire ! Ces pratiques apparaissent ainsi multidimensionnelles, mettant en jeu différentes phases, des aspects de natures diverses qui ne sont pas nécessairement partagés par tous les mathématiciens. D'ailleurs, il demeure méthodologiquement difficile de caractériser la pratique d'un mathématicien (y compris sa propre pratique), tant les dimensions qui la constituent sont étroitement articulées. En fait, malgré les dimensions qui ont pu être mises en valeur, nous défendons aussi le point de vue selon lequel la pratique d'un mathématicien en phase de recherche reste relativement « indécomposable ». En d'autres termes, même si des caractéristiques¹⁰ peuvent être mises en valeur, nous pensons aussi que la pratique de recherche d'un mathématicien est globale et que son expertise découle aussi de cette globalité et de la manière dont elle est organisée et réorganisée en permanence : faire de la recherche, c'est avant tout arriver à accroître les connaissances dans son domaine en général et ses connaissances en particulier.

3.1.2.2 Chercher en classe

Peut-on considérer qu'une part des pratiques des mathématiciens est transposable à la classe de mathématiques ? Est-ce que faire de la recherche et chercher (en classe), c'est comparable ? Nous envisageons des éléments de réponse à ces questions en proposant une discussion personnelle déclinée selon plusieurs axes.

Les pratiques des mathématiciens du point de vue de la didactique Les recherches en didactique des mathématiques citées en 3.1.1.3 ont explicitement pris les pratiques des mathématiciens comme source d'inspiration avec différents objectifs¹¹. D'une part, ces pratiques peuvent y jouer le rôle de référence : à cet égard, la

9. Notons d'ailleurs que le rôle des exemples chez les mathématiciens lors de la preuve de conjectures a été récemment exploré (Lockwood, Ellis & Lynch, 2016).

10. c'est-à-dire ayant une certaine étendue parmi la population des mathématiciens.

11. Ces objectifs ne sont pas mutuellement exclusifs.

plupart des cadres théoriques en didactique des mathématiques modélisent ce que signifie l'activité mathématique, donc en partie ce qu'elles retiennent et ne retiennent pas de la pratique des mathématiciens ; nous y reviendrons en 3.1.3. Ensuite, ces pratiques inspirent aussi la construction d'outils d'analyse didactique. Enfin, et c'est ce que nous avons repéré dans la majorité des cas, certains aspects de ces pratiques peuvent être pris en compte de manière implicite ou explicite, dans la mise en œuvre de dispositifs didactiques pour la classe ou dans la méthodologie de recherche.

Les quelques exemples de recherches que nous avons pris montrent ainsi une réelle prise en compte des pratiques des mathématiciens, mais également que cette prise en compte est variable et (forcément) partielle. Cependant, nous n'avons opéré ici qu'un survol de ces différentes recherches. Une analyse plus fine conduirait sans doute à identifier plus précisément le rôle précis joué par les pratiques des mathématiciens dans ces recherches.

Les élèves en posture de chercheur ? Un certain nombre de ces recherches exprime l'importance de mettre les élèves en posture de chercheur en classe, notamment au moyen de dispositifs didactiques apparentés à la pratique du problème ouvert. Suivant les recherches, ces dispositifs présentent différentes caractéristiques qui sont reliés à différents objectifs. L'objectif principal est en général de faire partager, vivre aux élèves des dimensions typiques de l'activité du chercheur en mathématiques, jusqu'à parfois les institutionnaliser. Il s'agit ainsi de changer le rapport des élèves au savoir mathématique, sans prétendre que toutes les mathématiques peuvent s'enseigner comme cela.

Des didacticiens, inspirés par des travaux menés en sociologie, sont aussi amenés à poser la question du rapport au savoir des élèves. Par exemple, on peut se demander si le fait d'adopter la posture d'un « petit chercheur » qui ne connaît pas la réponse à une question, qui doit passer du temps à la chercher n'est pas très difficile, voire hors-champ pour certains élèves peu habitués culturellement à ce type de démarche intellectuelle. Ils ont l'habitude de travailler pour effectuer des tâches, pas pour en tirer quelque chose qui dépasserait la simple effectuation. La place du langage (écrit/oral) est souvent aussi prépondérante dans ces dispositifs et il est possible que cela empêche certains élèves d'accéder aux activités attendues du dispositif : ceci fait d'ailleurs écho à l'objectif principal (et manqué) de la réforme des mathématiques modernes où les mathématiques étaient conçues comme un langage, ce qui était supposé aller contre un enseignement élitiste, et plutôt favoriser l'accès aux mathématiques pour tous les élèves.

Au-delà du choix de ces problèmes, ces quelques idées posent la question des conditions, contraintes et paramètres pour prévoir puis organiser le déroulement en classe d'un tel problème. Pour certaines classes ou certains élèves, la mise en place de ces problèmes demande une préparation spécifique prenant en compte des éléments cognitifs, institutionnels et sociologiques. Tous ces éléments sont liés à des aspects cruciaux de la recherche en didactique des mathématiques ou à des domaines de recherche voisins. Nous y revenons dans la conclusion ci-dessous.

Composantes spécifiques du métier de chercheur Certaines composantes de la pratique des chercheurs en mathématiques nous paraissent difficilement transposables en classe. Il en va ainsi par exemple de la dialectique entre confiance en soi, motivation et réussite chez les chercheurs, fondée sur une sûreté dans les calculs que n'ont pas les élèves.

D'une part, on a déjà dit que faire de la recherche c'est chercher à accroître ses connaissances, mais c'est avant tout faire progresser les connaissances dans son domaine, ce qui demeure hors d'atteinte de la grande majorité des élèves, sauf peut-être dans des dispositifs très spécifiques où les élèves sont confrontés à des

problèmes ouverts pour les chercheurs eux-mêmes, en théorie des nombres ou en mathématiques discrètes par exemple (voir par exemple Gardes, 2013 ; Grenier, 2009).

D'autre part, même s'il n'a pas connu la réussite pendant toute sa carrière, un chercheur travaille en général dans un domaine où il a une certaine capacité à découvrir des phénomènes, à prouver des résultats : en cas contraire, ce chercheur est forcément moins motivé et peut d'ailleurs être amené à changer de domaine.

En situation de recherche, les mathématiciens intègrent un grand nombre de techniques, de calculs qui leur servent d'appui, de contrôles, voire de moteur créatif, à certains moments au moins. Plus généralement, lorsqu'ils conduisent leurs recherches les mathématiciens se basent fréquemment sur une dialectique entre sens et technique qui nous semble une caractéristique primordiale de leurs pratiques. Ce n'est en général pas du tout le cas des élèves et il nous semble que c'est une différence fondamentale. On peut cependant se demander si certains outils numériques pourraient offrir des possibilités pour travailler ponctuellement certains aspects de cette dialectique.

Enfin, une part de la motivation ou de la réussite est liée à des caractères émotionnels plus subjectifs, tels que l'esthétique, la beauté, le plaisir. Certains mathématiciens lient même ces caractères au processus de découverte lui-même (Gardes, 2013, Chapitre 5).

On peut faire l'hypothèse que la motivation des élèves à faire progresser les connaissances ou leurs connaissances demeure relativement incommensurable avec celle des chercheurs, y compris dans des dispositifs adaptés. En revanche, les problématiques de la motivation, de la confiance en soi ou de la réussite des élèves sont primordiales dans les recherches en didactiques : pour ne citer qu'un exemple, réfléchir à la dévolution d'un problème ouvert dans une classe donnée relève de ce type de problématique. Il nous semble toutefois que c'est souvent la motivation des élèves en lien direct avec la tâche qui est prise en compte dans ces recherches : on pourrait se demander s'il n'y a pas lieu de davantage prendre en compte la motivation des élèves comme facteur psychologique général.

Conclusion Des éléments ci-dessus, nous retenons que la pratique des chercheurs en mathématiques est une source d'inspiration pour les didacticiens pour faire des mathématiques en classe avec les élèves ou pour outiller certaines recherches en didactique des mathématiques. Ce constat doit cependant être à la fois précisé et nuancé.

Même s'il est vrai que certaines caractéristiques des pratiques des chercheurs en mathématiques peuvent être transposées en classe, ces pratiques sont à la fois complexes, multidimensionnelles, bien organisées, composées d'aspects de natures diverses et dans le même temps, la pratique d'un chercheur fixé en situation de recherche est relativement « indécomposable ». Toutes choses égales par ailleurs, lorsque l'on place les élèves en posture de chercheur en classe, c'est sans commune mesure avec la pratique d'un chercheur qui « fait de la recherche ». D'ailleurs, lorsque l'on est chercheur, on exerce un métier, ce qui n'est pas le cas des élèves : c'est sans doute aussi une différence significative.

Certaines composantes de la pratique des chercheurs nous semblent difficilement transposables en classe (l'organisation des connaissances, le fait d'être globalement « bien équipé » de manière heuristique et sur le plan des calculs, la dialectique entre sens et technique, la motivation, la confiance en soi, la réussite) ou alors seulement localement pour certaines d'entre elles. La transposition de ces pratiques en classe demande aussi de tenir compte des élèves, de leurs spécificités, des enseignants et de leur formation, voire de l'établissement. De notre point de vue, « faire de la recherche » et « chercher (en classe) », ce n'est pas comparable, mais on peut loca-

lement créer des conditions qui permettent que cela soit en partie momentanément analogue. Par exemple, lorsqu'un mathématicien entame une nouvelle recherche, il y a toujours un moment où il ne sait pas ce à quoi il va aboutir : toutes proportions gardées, c'est localement un point commun avec les élèves, même si bien sûr il a infiniment plus de possibilités qu'eux dans une telle situation. Ce mathématicien est alors amené à mettre en œuvre un certain nombre d'activités qui sont autant de possibilités de développement¹² pour les élèves : se placer dans sa ZPD, expérimenter, bouger, changer de point de vue, échanger avec des collègues...

Les pratiques des mathématiciens ont été transposées dans de nombreuses recherches en didactique mais de manière variable. En disant cela, nous ne donnons pas à voir les conditions, contraintes, paramètres à prendre en compte pour prévoir cette transposition, l'étudier, l'adapter aux conditions d'enseignement, toutes choses qui nécessitent l'expertise du chercheur en didactique des mathématiques. Pour illustrer cela, prenons l'exemple de la transposition d'un problème ouvert. De manière « externe », le fait de chercher un tel problème peut participer à changer le rapport au savoir des élèves, à leur permettre d'apprendre à chercher, à avoir accès à diverses activités (prendre un exemple, observer, conjecturer, généraliser, prouver, rédiger...). Mais au-delà du choix du problème lui-même et de ces aspects, d'autres éléments vont entrer en jeu de manière dialectique et primordiale pour un chercheur en didactique des mathématiques. Entre autres choses :

- s'adapter à chaque classe, à ses spécificités, à l'enseignant, en tenant compte de ce qui a été fait avant, tout en veillant à ce que le problème ne soit pas dénaturé ;
- réfléchir à la manière d'organiser les déroulements, au temps imparti, au type de rendu, à son évaluation ;
- plus largement, tenir compte du contexte, de la place de ce problème dans la séquence, voire dans l'année ; en particulier, réfléchir aux éléments de savoir à institutionnaliser pour que les élèves puissent les reconnaître ou les utiliser dans de futures activités ;
- travailler efficacement avec les enseignants.

Nous ne citons là que les éléments liés à l'implémentation et à l'étude en classe d'un tel problème. Il va de soi que suivant la problématique qui guide le chercheur en didactique, il y a une grande variété d'éléments qui vont souvent aussi entrer en compte : choix d'un cadre théorique, de la manière de l'opérationnaliser, de la méthodologie, de certains outils didactiques, recours à d'autres travaux didactiques en lien avec le problème étudié...

En guise de transition avec la suite, nous terminons par une métaphore. De notre discussion, se confirme le fait que le mathématicien est « un explorateur intrépide, courageux, mais très bien outillé et dont le camp de base est très bien fourni » (Robert, 1998, p. 145). L'enseignant est plutôt un guide, qui ne tient pas seulement compte de ce qui a été exploré mais aussi de nombreux autres paramètres « en s'adaptant à chaque fois aux personnes qu'il doit accompagner » (Robert et al., 2012, p. 78). Les élèves sont accompagnés par ce guide, en général leur but n'est pas d'explorer, mais ils peuvent parfois être amenés à explorer à nouveau certains territoires lorsque certaines conditions sont réunies.

3.1.3 Vers une double posture de chercheur

Si on se fonde sur la part des pratiques des mathématiciens transposable en classe, on peut se demander ce qui manque pour caractériser, étudier, organiser l'activité mathématique des élèves en classe, voire leurs apprentissages. Pour clore

12. Certaines de ces possibilités ont été prises en compte par les chercheurs en didactique.

ce chapitre, nous discutons quelques éléments liés à ces questions complexes en relation avec les recherches que nous avons menées en didactique des mathématiques. Nous rappelons d'abord le mécanisme de la transposition didactique pour resituer nos travaux à l'aune de ces questions. Nous les abordons ensuite en revenant aux hypothèses puis à l'opérationnalisation de la Théorie de l'Activité pour expliciter comment l'activité mathématique y est comprise puis étudiée, notamment au moyen du relief. Nous mettons enfin en valeur l'intérêt à adopter une double posture de chercheur en mathématiques et en didactique des mathématiques pour nos recherches futures.

3.1.3.1 Transpositions didactiques

Dans cette note de synthèse, nous avons étudié ou questionné des relations entre différentes formes de savoirs mathématiques. Nous situons ces éléments au prisme de la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985, 1991 ; Verret, 1975).

Les *savoirs savants* en mathématiques, organisés en *textes de savoir* sont produits par l'institution regroupant les chercheurs en mathématiques. Les *savoirs à enseigner* sont définis par le système scolaire et correspondent au sein d'une institution scolaire donnée au texte qui définit au travers du curriculum le savoir qui doit être enseigné à chaque niveau de classe, par domaines ou thématiques. Les *savoirs enseignés* correspondent aux contenus effectifs d'enseignement proposés aux élèves par l'enseignant. Enfin, les *savoirs appris* correspondent aux apprentissages des élèves.

Entre ces différentes formes de savoirs, se manifestent plusieurs transpositions didactiques (Chevallard, 1985, 1991). La transposition didactique *externe* réfère à la transformation des savoirs savants et des pratiques des chercheurs en programmes scolaires. La transposition didactique *interne* réfère à la transformation des programmes en contenus effectifs d'enseignement pour les élèves : cette transposition « relève largement de la marge d'interprétation, voire de création des enseignants » (Perrenoud, 1998, p. 490, voir aussi Tavnignot, 1993). Enfin, la dernière transposition réfère au processus d'apprentissage lui-même pour chaque élève.

Dans le chapitre 1 de cette note, nous avons rendu compte de nos travaux de recherche en mathématiques en présentant différents textes de savoir organisés selon différents critères : domaines des savoirs savants concernés, questionnements de référence, épistémologie... Dans le chapitre 2, nous avons d'abord présenté 3 recherches didactiques consacrées à des notions qui concentrent un certain nombre de difficultés, certaines étant liées aux textes de savoir. Ces recherches se positionnent différemment l'une de l'autre par rapport au processus global de transposition didactique et sont toutes basées sur une étude du relief des notions impliquées. Ainsi, en 2.4, la mise en regard d'enjeux d'apprentissage de la notion de fonction et de l'analyse de l'offre faite par certains manuels pour son enseignement se situe dans la perspective de fournir aux enseignants des éléments pour la transposition didactique interne de cette notion, voire pour aller étudier les savoirs enseignés et les apprentissages correspondants. La problématique que nous abordons dans cette section 3.1 concerne la transposition didactique entre les savoirs savants et les pratiques des chercheurs en savoirs à enseigner (cas des réformes) ou en savoirs enseignés et en activités proposées aux élèves.

Les transpositions didactiques sont des phénomènes centraux en didactique des mathématiques et de nombreuses recherches s'attachent d'ailleurs à mesurer les écarts, voire les dérives, ou les transitions entre les différents types de savoirs. S'agissant de la manière d'organiser, comprendre et étudier les activités mathématiques, par exemple celle des élèves en classe, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires, souvent associées au choix d'un ou plusieurs cadres théoriques. Dans cette note, nous avons fait le choix de nous inscrire en Théorie de l'Activité : nous reve-

nous plus précisément sur certains éléments théoriques de ce cadre pour expliciter d'une part les hypothèses adoptées (voire adaptées) et d'autre part la manière dont il peut s'opérationnaliser afin de montrer comment l'activité mathématique y est modélisée et étudiée.

3.1.3.2 Opérationnalisation de la Théorie de l'Activité

Pour traiter la question de la modélisation et de l'étude de l'activité mathématique des élèves en classe, nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie de l'Activité. Nous commençons par reprendre les hypothèses et notions de ce cadre avant d'insister sur leur opérationnalisation que l'on illustre au moyen de nos travaux de recherche. Bien sûr, ces questions auraient également pu être abordées dans d'autres cadres théoriques où elles auraient été éclairées de manière différente. Ainsi :

« La TSD, la Théorie des Champs Conceptuels, la dialectique outil-objet, la TAD, doivent être regardées, de ce point de vue, comme des « théories épistémologiques » en ce sens qu'elles proposent des modèles de ce qu'est l'activité mathématique ou, en termes duaux, de ce que sont les connaissances mathématiques dont on a besoin et que l'on construit lorsque l'on fait des mathématiques » (Bosch & Gascón, 2002, p. 28)

Nous précisons ensuite le rôle du relief dans cette opérationnalisation. Là encore, d'autres choix sont possibles dans d'autres cadres : modèle épistémologique de référence en TAD (Bosch & Gascón, 2002, 2005), modèle de milieu épistémologique en TSD (Bloch, 2002)... On renvoie aussi à l'ouvrage de Bächtold, Durand-Guerrier & Munier (2017) qui regroupe des travaux éclairant de diverses manières le rôle de l'épistémologie en didactique, telles les études d'épistémologie contemporaine.

Hypothèses en Théorie de l'Activité Nous renvoyons à 2.1.2, 2.1.3, 2.2.2.1 et 2.3.1 pour une description du cadre de la Théorie de l'Activité et des notions que nous allons évoquer ci-dessous ainsi que pour des références plus complètes.

La première hypothèse générale de ce cadre est de supposer que ce sont les *activités* des élèves qui constituent la source principale de leurs apprentissages. On suppose aussi que pour accéder à ces activités, le chercheur en didactique doit étudier les *tâches* (hypothèse 1a) qui sont proposées aux élèves ainsi que les *déroulements* (hypothèse 1b) organisés par l'enseignant. Cette étude donne accès aux *activités possibles* des élèves qui fournit un accès partiel à leurs activités (et pas forcément à leurs activités effectives).

Puisque les activités des élèves définissent leurs apprentissages, la seconde hypothèse générale de ce cadre concerne la qualité des activités qui leur sont proposées. Il est supposé que les apprentissages des élèves sont favorisés par trois conditions :

- que chaque élève en tant que sujet individuel est par moment en autonomie dans certaines tâches organisées par l'enseignant (Piaget, hypothèse 2a) ;
- que chaque élève en tant que sujet individuel et social a la possibilité de prendre part à un travail collectif par la médiation de l'enseignant qui se situe au sein des ZPD des élèves de la classe (Vygotski, hypothèse 2b) ;
- permettre aux élèves d'accéder à la *conceptualisation* à laquelle on associe les apprentissages (Vergnaud, 1991, hypothèse 2c).

Rappelons que tous les élèves d'une même classe ne développent pas forcément les mêmes activités.

La troisième hypothèse générale concerne les enseignants dont les activités, pratiques et choix, en termes de tâches ou de déroulements induisent pour partie les activités des élèves, donc leurs apprentissages. Partant de la complexité des pratiques et leur cohérence (de Montmollin, 1984), le cadre de la Double Approche

Didactique et Ergonomie au sein de la Théorie de l'Activité (Robert, 2008) postule que la compréhension des pratiques des enseignants passe par la prise en compte de 5 composantes imbriquées : cognitive, médiative¹³, institutionnelle, sociale, personnelle.

Opérationnalisation du cadre Partant de ces hypothèses, nous illustrons maintenant, sur les recherches que nous avons menées en didactique, la manière dont ce cadre théorique peut s'opérationnaliser.

D'abord, puisque les apprentissages des élèves sont associés à la conceptualisation (hypothèse 2c), il convient d'opérationnaliser ce concept en définissant la conceptualisation d'une notion mathématique. Suivant Vergnaud, *conceptualiser* une notion sur un ensemble de tâches signifie que les caractères objets et outils de la notion sont disponibles (Douady, 1986) et que les mises en fonctionnement correspondantes (Robert, 2008) sont effectives, ce qui inclut l'organisation en réseau des connaissances impliquées (nouvelles/anciennes) en lien avec la notion de champ conceptuel (Vergnaud, 1991). Plus précisément, le *niveau de conceptualisation* spécifie la conceptualisation à un niveau scolaire donné en y adjoignant les programmes, les cadres et registres impliqués (Duval, 1993, 2006), le niveau de rigueur attendu et les spécificités épistémologiques de la notion. Enfin, le *relief d'une notion* complète la connaissance du niveau de conceptualisation repéré en y adjoignant les difficultés répertoriées des élèves et les résultats des recherches correspondantes : le relief est le résultat de l'articulation d'études épistémologiques, curriculaires et didactiques (voir 2.1.3). Une étude plus ou moins précise du relief des notions concernées a servi de référence aux 3 recherches présentées dans ce chapitre (voir 2.2.1, 2.3.2.1 et 2.4.2) : en 2.4.2, cette opérationnalisation nous a par exemple servi à déterminer les enjeux d'apprentissage et les besoins supposés des élèves pour la notion de fonction. C'est aussi grâce à ces études que le caractère FUG¹⁴ des notions considérées (compte tenu du moment où elles sont enseignées) a été déterminé. Nous revenons plus précisément sur le rôle du relief d'une notion dans la section suivante.

L'opérationnalisation de l'accès aux activités des élèves pour le chercheur peut se faire de plusieurs manières compte tenu des hypothèses ci-dessus (cela dépend des recherches) : on suppose toujours qu'une analyse de la conceptualisation des notions sous-jacentes a été menée au préalable (hypothèse 2c), que ce soit en termes de conceptualisation, de niveau de conceptualisation ou de relief.

D'une part, cet accès peut se faire en mettant en relation tâches et activités (hypothèses 1a, 2a) au moyen d'une analyse des tâches proposées aux élèves en travail autonome. Cette analyse *a priori*, qui se fait en tenant compte des connaissances supposées anciennes des élèves et de leur cours, conduit à apprécier le degré de mise en fonctionnement d'une connaissance au moyen de diverses *adaptations de connaissances* : cela donne accès aux *activités attendues* des élèves (voir 2.2.2.1). Ainsi, dans nos travaux sur l'algèbre linéaire, une telle analyse a été menée pour tous les exercices du corpus (voir 2.2.1.1 ou Grenier-Boley, 2009, 2014).

D'autre part, l'accès aux activités des élèves tient à la manière dont l'enseignant organise les déroulements, les moments collectifs, les aides qu'il apporte, les échanges qu'il a avec les élèves (hypothèses 1b, 2b). L'opérationnalisation du cadre conduit ici à différents outils. Ainsi, la détermination des *activités possibles (a minima, a maxima)* des élèves compte tenu du déroulement peut s'effectuer au moyen de la méthodologie à laquelle nous référons en 2.2.2.2 : en algèbre linéaire, nous avons

13. Ces deux premières composantes correspondent aux choix et pratiques de l'enseignant qui concernent les tâches et le déroulement en classe.

14. voir 2.1.4.1.

aussi proposé un découpage du déroulement qui caractérise l'organisation globale de chaque exercice par l'enseignant. Dans d'autres cas, il s'agit d'apprécier les types d'*aides* apportés par l'enseignant, son recours au *levier méta...* Dans les moments de cours où les activités des élèves sont très peu observables, l'opérationnalisation du cadre théorique conduit à étudier le discours de l'enseignant pour y repérer des *proximités discursives* supposées donner accès de manière indirecte à une partie des activités des élèves (voir 2.3.1.3). Plus précisément, le chercheur repère des *occasions de proximités* compte tenu du relief en amont de la classe, puis des *proximités possibles* compte tenu du déroulement après la séance.

Le relief sur une notion : une référence Nous terminons cette discussion, en mettant en valeur le rôle du relief comme référence pour le chercheur en didactique ou l'enseignant. Comme articulation d'études de natures diverses (épistémologique, curriculaire, didactique), le relief d'une notion à enseigner correspond selon nous à une *référence* à plusieurs titres.

C'est d'abord une référence pour le chercheur en didactique afin de comprendre et d'analyser les déroulements en classe, compte tenu des hypothèses du cadre. D'une part, il renseigne sur la conceptualisation en termes de caractère outil ou objet, cadre, registre, point de vue, mise en fonctionnement possible, statut des notions impliquées (RAP, FUG, FUGS¹⁵...). D'autre part, il informe sur les difficultés répertoriées d'élèves et les résultats des études didactiques correspondantes, compte tenu des programmes et des obstacles ou spécificités épistémologiques et permet donc de dégager des enjeux d'apprentissages, des besoins d'élèves pour faire des hypothèses sur des tâches pertinentes : c'est ce que nous avons mis en œuvre pour la notion de fonction en troisième-seconde en 2.4. C'est donc tout à la fois une référence pour ce qui est visé et pour la conceptualisation de ce qui est visé, donc des apprentissages des élèves.

C'est aussi une référence pour « faire faire des mathématiques », élaborer un scénario ou une séquence, c'est-à-dire pour les enseignants (Robert et al., 2012, deuxième partie, chapitre 1, section 2). Pour l'enseignant en phase de préparation qui aurait accès au relief sur une notion¹⁶, c'est un outil qui permet de lister de manière exhaustive les caractéristiques des notions étudiées, de les insérer dans les programmes anciens, actuels et futurs. De plus :

« la recherche des difficultés des élèves enrichit encore la préparation du travail à prévoir sur les notions et facilite notamment la dénaturalisation des connaissances de l'enseignant, amenant à une meilleure appréciation des cheminements à installer ou installés chez les élèves » (Robert et al., 2012, p. 79).

Ce travail préparatoire en appui sur le relief de la notion est ainsi multidimensionnel et relève plutôt d'une communauté d'enseignants engagés dans un même projet, que d'un seul enseignant.

3.1.3.3 Conclusion

À l'issue des deux premiers chapitres et de cette section 3.1, la pertinence à prendre en compte notre posture de chercheur en mathématiques dans des recherches en didactique nous semble manifeste. C'est notamment le cas lorsque celles-ci prennent en compte les pratiques des chercheurs en mathématiques ou sont consacrées à l'enseignement de certaines notions pour lesquelles le recul d'un mathématicien peut s'avérer pertinent :

15. Voir 2.1.4.2.

16. Nous supposons que la détermination du relief sur une notion relève du travail du chercheur (éventuellement en lien avec l'enseignant) et pas de celui de l'enseignant.

- étudier l’enseignement de notions non formalisées, notions non formalisables, notions formalisées plusieurs fois mais avec un sens différent, notions pour lesquelles plusieurs formalisation coexistent, notions qui ne sont pas facilement transformables ou abordables par des activités...
- faire échapper certaines notions à une forme d’obsolescence en raison des changements de programme ;
- avoir des garde-fous pour éviter des transpositions exagérées de certaines notions.

Le fait d’être mathématicien peut également être un atout pour l’étude du relief de certaines notions en inscrivant cette étude dans une certaine globalité. Pour les 3 recherches que nous avons présentées, notre posture de chercheur a indéniablement été un atout pour établir une partie du relief.

Toutefois, nous n’aurions bien sûr pas pu mener ces recherches à bien, ni même l’étude du relief dans chacune d’entre elles sans adopter une posture de didacticien des mathématiques. Ainsi, à l’instar des éléments qui sont listés en conclusion de 3.1.2.2, beaucoup d’aspects et de phénomènes sont en effet invisibles pour le mathématicien non didacticien (et qui dépendent des recherches) :

- tenir compte des curricula, d’éléments de savoirs liés à la discipline mais transposés dans l’enseignement primaire, secondaire ou supérieur tout en exerçant une vigilance épistémologique pour mesurer la distance qui sépare les savoirs savants des savoirs enseignés¹⁷ (Artigue, 1990) ;
- tenir compte d’éléments cognitifs chez les élèves, d’éléments sociologiques, des élèves à besoins éducatifs particuliers...
- en général, tenir compte de contraintes et complexités de divers ordres, liées à l’enseignement en classe ordinaire.

Plus généralement, l’épistémologie de la recherche en didactique est en général étrangère au mathématicien non didacticien : conception d’une problématique à partir d’un questionnement, choix d’un ou plusieurs cadres théoriques, découpage de la réalité compte tenu des hypothèses des cadres et de leur opérationnalisation (voir 3.1.3.2), choix d’une méthodologie, manière de valider les résultats, de les interpréter, de les discuter.

S’agissant de la place de l’épistémologie dans les études didactiques, Dorier évoque un principe qui lui semble primordial : « le questionnement épistémologique quand il s’insère dans une recherche en éducation doit avoir une origine et une finalité didactique » (Dorier, 2017, p.42). Par analogie, si pour certaines recherches en éducation, il y a nécessité à questionner des savoirs savants mathématiques, des pratiques de mathématiciens ou si les mathématiciens eux-mêmes interviennent sur l’enseignement (réformes ou recherches), nous aurions tendance à estimer que ces questionnements doivent aussi avoir une origine et une finalité didactique. Du coup, pour ce type de recherche, qui serait mieux placé pour cela qu’un mathématicien-didacticien exerçant sa vigilance dans ses deux domaines de compétence ?

À notre modeste niveau, tous ces éléments nous montrent l’intérêt à adopter une double posture de chercheur (en mathématiques, en didactique des mathématiques), au sens où chacun de nos domaines de recherche pourrait être une ressource pour l’autre et pour la communauté des didacticiens.

3.2 Perspectives scientifiques

Dans les deux chapitres précédents, nous avons présenté une synthèse de nos travaux de recherche en mathématiques (chapitre 1) et en didactique des mathématiques

17. Mentionnons à cet égard que les domaines de recherche des mathématiciens n’ont quasiment aucun rapport avec ce qui s’enseigne jusqu’à l’année de L3.

(chapitre 2) ainsi que des perspectives directement liées à ces différents travaux (voir 1.6, 2.2.4.2, 2.3.3.2 et 2.4.5). Dans cette dernière section, nous souhaitons dresser des perspectives de recherche plus générales en didactique des mathématiques, que ce soit en termes de perspectives d’encadrement, pour nous-même ou même plus largement. Pour ce faire, nous nous appuyerons en particulier sur différents aspects et éléments développés en 3.1, notamment la pertinence à envisager des recherches qui nous permettent de mettre à profit notre double posture de chercheur (en mathématiques, en didactique des mathématiques).

Nous commençons par les perspectives les plus explicites en 3.2.1 avant d’aborder des questionnements plus ouverts ou plus prospectifs en 3.2.2.

3.2.1 Perspectives

3.2.1.1 Algèbre Linéaire

Vingt années se sont écoulées depuis les travaux fondamentaux consacrés à l’enseignement et apprentissage de l’algèbre linéaire menés entre autres par Dorier, Robert, Robinet et M. Rogalski (voir 2.2 et plus précisément¹⁸ Dorier, 1997b, 1998, 2000 ; Dorier et al., 1994, 2000). Il nous semble qu’il y a lieu d’envisager un ensemble de recherches comparatives pour faire le point sur l’évolution de l’enseignement de l’algèbre linéaire (en France). Le recours à la notion de relief comme opérationnalisation du cadre de la Théorie de l’Activité (voir 2.1.3 et 3.1.3.2) devrait permettre de caractériser des stabilités, des variabilités, des changements. Nous évoquons rapidement plusieurs enjeux de telles recherches.

L’étude du relief des notions impliquées en algèbre linéaire était déjà sous-jacente aux travaux évoqués ci-dessus, qui se plaçaient résolument dans une interaction entre épistémologie et didactique. À cet égard, une étude épistémologique complète a déjà été réalisée par Dorier (1997b, 1998, 2000). Cette étude devrait être articulée à de nouvelles études curriculaires et didactiques qui devraient permettre d’identifier des enjeux d’enseignement et des besoins supposés des élèves ou étudiants, à l’instar de ce que nous avons fait en 2.4 pour les fonctions.

D’un point de vue curriculaire, les programmes de l’enseignement secondaire ont évolué de façon notable depuis 20 ans : certaines connaissances sont traitées différemment (vecteurs, systèmes linéaires, géométrie...), d’autres sont apparues (matrices¹⁹, marches aléatoires...). En outre, si les notions d’algèbre linéaire enseignées en L1 n’ont *a priori* pas changé, il convient néanmoins d’étudier la manière dont elles sont abordées. Il s’agit donc de mener une étude des savoirs mathématiques à enseigner au travers de différentes sources (programmes, manuels du secondaire et du supérieur, entretiens avec des enseignants...).

D’un point de vue didactique, un état de l’art des recherches menées en algèbre linéaire depuis 20 ans est à effectuer pour identifier les difficultés possibles des élèves ou étudiants, à comparer avec celles que ces études identifiaient. Des questionnaires (à concevoir) devraient permettre de confirmer ou relativiser ces difficultés, y compris à l’international.

Partant du relief de ces notions comme référence pour ce qui est visé ou la conceptualisation de ce qui est visé par l’enseignement de l’algèbre linéaire, des recherches consacrées aux pratiques des enseignants et aux activités des étudiants en cours et en TD sont à mener, dans la suite de notre étude des TD en 2.2. Le cadre de la Théorie de l’Activité permet d’envisager ces recherches par l’étude

18. Les références liées à l’algèbre linéaire citées dans cette section figurent dans la bibliographie du chapitre précédent.

19. D’après les projets de programme publiés récemment, les matrices, graphes et leurs applications seraient toujours au programme des « mathématiques expertes » en Terminale.

conjointe des tâches, des déroulements et des pratiques des enseignants dans toute leur complexité pour accéder aux activités possibles des élèves ou étudiants. Pour ce faire, des outils méthodologiques pour le chercheur peuvent s'avérer pertinents, quitte à les raffiner : la méthodologie en 2.2.2.2 pour l'étude des déroulements en TD, les proximités discursives (2.3.1.3) pour les études des moments de cours...

Pour finir, il nous semble que ces recherches doivent prendre en compte des enjeux complémentaires : réussir à conjuguer différentes échelles de temps²⁰ (sans négliger les difficultés pour le chercheur à accéder à ces différentes échelles), réussir à étudier l'enseignement de l'algèbre linéaire pour les spécialistes ou les non spécialistes.

Pour les échelles de temps, les études *in situ* doivent avoir la finesse suffisante pour permettre d'établir des régularités et des variabilités au travers de l'étude d'une ou plusieurs séances pour des enseignants différents. Mais il faut aussi réussir à intégrer du « long terme » dans ces recherches, tant ces apprentissages se font sur un temps long²¹. Ainsi, à l'instar de ce que nous avons pu mentionner dans Chesnais, Grenier-Boley, Horoks & Robert (2015) pour d'autres notions, il nous semble important d'intégrer ces recherches au sein d'une problématique de transition entre deux institutions (dans ce cas lycée/supérieur), qui permet de combiner différents types de ruptures et d'évolutions sur le long terme (Gueudet, 2008a, 2008b). En outre, la bonne maîtrise des notions d'algèbre linéaire chez les étudiants est basée à la fois sur de nombreuses connaissances issues du secondaire, sur leurs apprentissages en L1 ou L2, mais également sur leur usage dans de nombreux domaines dans la suite des études universitaires (en algèbre, en analyse, en géométrie, en probabilité...), ce qui ne peut s'apprécier que sur un temps long.

Dans ce que nous avons évoqué ci-dessus, nous nous intéressons implicitement à des étudiants se destinant à des études universitaires en mathématiques. Pour ceux-là, il ne faut pas oublier que c'est par l'algèbre linéaire que les étudiants commencent à découvrir l'algèbre abstraite et les structures algébriques : à ce titre, l'algèbre linéaire ferait office de « précurseur » pour l'étude de la pensée structuraliste ou du structuralisme algébrique (Hausberger, 2016). Mais l'algèbre linéaire est également un outil important pour des étudiants se destinant à d'autres études scientifiques (en physique, en science de la vie, en économie...) et il ne faut sans doute pas négliger de mener aussi des études dans ces filières.

3.2.1.2 Pratiques des enseignants du supérieur

Compte tenu des enjeux et éléments formulés en 3.1 vis-à-vis de notre double posture de chercheur (en mathématiques, en didactique des mathématiques), nous sommes particulièrement intéressé par le développement de recherches consacrées aux pratiques des enseignants du supérieur, déjà pointé comme enjeu majeur de recherche par une étude récente (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz & Rasmussen, 2016). Nous mentionnons trois directions où de telles recherches ont déjà débuté, qui sont à poursuivre.

Pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs En tant que responsable du groupe « Enseignement supérieur » (2009-2012) puis co-responsable de ce même groupe avec Stéphanie Bridoux (2012-maintenant) au sein de notre laboratoire²², nous avons impulsé avec les collègues de ce groupe une recherche sur les pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs (EC) (Mesnil, Bridoux, de

20. Voir Robert (1992) pour une discussion sur la pertinence de l'étude didactique de projets longs à l'université.

21. L'un des postulats des recherches de Dorier, Robert, Robinet et M. Rogalski était justement que l'enseignement de l'algèbre linéaire devait s'intégrer dans un projet à long terme.

22. Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), EA 4434

Hosson, Grenier-Boley, & Lebrun (2017), Bridoux et al. (in press)) avec une perspective comparatiste entre diverses disciplines académiques (chimie, géographie, mathématiques, physique). Nous en donnons quelques traits et perspectives.

Récemment des structures de développement professionnel ont été créées en France dans une optique de transformation pédagogique des pratiques enseignantes des EC (Endrizzzi, 2011). Jusqu'alors, les recherches consacrées à la « pédagogie universitaire » ont été nombreuses en sciences de l'éducation (Annoot et Fave-Bonnet, 2004), mais l'approche disciplinaire des pratiques enseignantes en lien avec les activités de recherche est peu abordée dans les travaux axés sur l'identité professionnelle des EC (Henkel, 2004). Cependant, des plaidoyers en faveur du développement de recherches sur les pratiques des EC qui soient disciplinairement situées sont régulièrement présents dans la littérature (Becher, 1994; Poteaux, 2013; Trede, Macklin et Bridges, 2012). C'est à ce titre que nous questionnons l'empreinte de la discipline de recherche sur les pratiques d'enseignement des EC.

Pour mener notre recherche avec les collègues du groupe, nous tentons de caractériser dans l'identité professionnelle (Cattonar, 2001) des EC, ce qui est spécifique de leur appartenance disciplinaire. Pour ce faire, nous avons pour le moment élaboré puis conduit des protocoles d'entretien avec des EC de ces disciplines. Cela conduit à des résultats sur l'influence du métier de chercheur sur celui d'enseignant, la formation des EC et les pratiques d'évaluation, dont certains mettent en lumière des différences qui semblent tenir aux épistémologies des différentes disciplines. Donnons un exemple.

Nous avons montré des différences dans la manière dont les enseignants de mathématiques, de physique et de chimie tentent de « montrer leur discipline de recherche » au tout début de l'université dans leurs cours, ce qui est selon nous un marqueur fort de la discipline dans le métier d'enseignant. D'une part les EC de mathématiques déclarent qu'il y a un écart important entre les mathématiques enseignées et la recherche, ce qui ne leur permet pas de montrer des aspects de leur recherche aux étudiants. Les difficultés des étudiants ou certaines pratiques dont ils ont eu l'habitude dans le secondaire semblent empêcher les EC de mathématiques de « faire des maths » avec eux. D'autre part les EC de physique ou de chimie estiment qu'il est possible de mettre en valeur certains aspects de leur recherche (évolution des concepts, méthodologie...) dès le L1 malgré les difficultés des étudiants. Une explication possible de ces différences pourrait tenir à l'épistémologie des trois disciplines. Si elles diffèrent sur des aspects cruciaux de leurs épistémologies, la physique et la chimie sont toutes deux au carrefour de plusieurs disciplines, théoriques et expérimentales (selon les domaines), souvent en lien avec des phénomènes observables y compris dans la vie quotidienne. Ces caractéristiques semblent permettre aux EC interrogés de « faire de la physique ou de la chimie » avec les étudiants. En mathématiques, l'acquisition des connaissances étant caractérisée par une progression hiérarchique et les résultats de recherche ne pouvant en général être « montrés » autrement que par leur énoncé ou leur preuve, la recherche est de fait très loin des mathématiques enseignées en début d'université. Aux yeux des EC de mathématiques, ces mathématiques de début d'université semblent déjà peu accessibles aux étudiants et ils ne parviennent pas à « faire des maths » avec eux.

L'objectif pour notre groupe serait maintenant d'atteindre une certaine représentativité parmi la population des EC de chaque discipline et de davantage prendre en compte l'épistémologie et la didactique de chaque discipline dans nos études. Nous envisageons à cet égard de nous consacrer à l'analyse de pratiques *in situ* pour des séances consacrées à des notions « importantes » d'une discipline donnée et d'aller vers une redéfinition didactique de l'objet « identité professionnelle », peut-être au moyen des composantes des pratiques des EC au sein de la Théorie de l'Activité. Une perspective de ces recherches est également la formation des futurs nouveaux

enseignants-chercheurs.

Les travaux ci-dessus sont également porteurs pour confronter les points de vue sur différents aspects des pratiques des EC entre différents domaines de recherche connexes : didactique des différentes disciplines, sciences de l'éducation, sociologie... En lien avec notre groupe, nous avons récemment co-organisé une journée d'étude²³ avec le laboratoire CIRNEF²⁴ qui s'est tenue le 1^{er} avril 2019 à l'ÉSPÉ de l'académie de Rouen et qui s'intitulait « La pédagogie universitaire : un terrain pour les recherches en didactique des disciplines ». Cette journée d'étude et les discussions qu'elle a engendrées devraient nous permettre de coordonner un ouvrage avec deux collègues du groupe, organisé en 3 parties : formation des EC, lien entre pédagogie universitaire et discipline d'enseignement, pratiques des EC.

Mathématiques pour non spécialistes Nous souhaitons d'abord évoquer plus largement le projet DEMIPS²⁵ qui est une demande de Groupement de Recherche (au sein du CNRS) coordonnée par Viviane Durand-Guerrier à l'initiative conjointe de l'équipe DEMa²⁶ de l'IMAG²⁷ à Montpellier et de notre laboratoire. Ce projet vise « à fédérer en France les recherches en didactique et épistémologie des mathématiques sur l'enseignement supérieur en liens avec les mathématiciens, en prenant en compte les interactions avec l'Informatique et la Physique »²⁸. Nous nous sommes donc naturellement inscrit dans ce projet, plus particulièrement au sein d'un des 5 thèmes consacré à l'étude des pratiques des enseignants du supérieur, dont nous sommes l'un des responsables. Signalons aussi la création future de la revue EpiDEMES²⁹ liée à la plateforme Épisciences pour publier dans une archive ouverte des articles en didactique et épistémologie des mathématiques librement accessibles à la communauté mathématique dans son ensemble. Nous devrions faire partie à la fois du comité de suivi et du comité éditorial de cette revue dont le coordinateur serait Thomas Hausberger.

Pour en revenir aux perspectives, l'objectif de ce thème, qui regroupe des chercheurs en didactique des mathématiques et de la physique, est en particulier d'analyser et de caractériser les pratiques des enseignants du supérieur en mathématiques à destination de non-spécialistes, notamment dans des formations professionnalisantes (techniciens, ingénieurs...) : signalons dans ce cadre la future thèse de Pierre-Vincent Quéré au sujet des mathématiques dans la formation des ingénieurs. D'une part, il s'agit d'étudier la manière dont ces enseignants prennent en compte les mathématiques impliquées dans les futures professions. D'autre part, en physique, il s'agit de voir comment le savoir mathématique participe (ou pas) à la construction des savoirs physiques.

Recherches internationales Nous évoquons maintenant le réseau INDRUM³⁰ qui est en quelque sorte le pendant international de DEMIPS. Ce réseau fédère en effet des recherches en didactique des mathématiques dans l'enseignement supérieur, en particulier les pratiques d'enseignants et d'étudiants, ainsi que l'enseignement et l'apprentissage de contenus spécifiques. En lien avec ce réseau, deux conférences ont

23. Le programme et les vidéos des interventions sont disponibles au lien suivant : espe.univ-rouen.fr/retour-sur-la-pedagogie-universitaire-625655.kjsp?RH=1421657382888

24. Centre Interdisciplinaire de Recherche Normand en Éducation et Formation, EA 7454

25. Didactique et Épistémologie des Mathématiques, liens Informatique et Physique, dans le Supérieur

26. Didactique et Épistémologie des Mathématiques

27. Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, UMR 5149

28. Nous citons ici l'argumentaire de ce projet.

29. Épijournal de Didactique et Épistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur

30. International Network for Didactic Research in University Mathematics

déjà eu lieu (Montpellier³¹, 2016 ; Kristiansand³¹ (Norvège), 2018) et une autre aura lieu l'année prochaine à Bizerte³¹ en Tunisie. Au sein de ce réseau, nous sommes membre du conseil d'une part, et avons été membre du comité scientifique de INDRUM 2016 en même temps que co-responsable de la thématique sur les pratiques des enseignants avec Simon Goodchild d'autre part.

Une perspective que nous pouvons envisager en lien avec ces activités est de faire le point sur les pratiques des enseignants du supérieur au niveau international. Avec 4 autres chercheurs, nous sommes en train de coordonner un chapitre d'ouvrage qui sera une revue et une mise en perspective des avancées les plus récentes concernant les pratiques des enseignants du supérieur basées sur les conférences INDRUM 2016 et INDRUM 2018. Entre autres choses, ce chapitre abordera la manière dont différents cadres théoriques sont utilisés à cet égard, ainsi que diverses caractéristiques des pratiques et les ingénieries pédagogiques ou didactiques.

3.2.1.3 Étude de l'enseignement de notions particulières

Nous évoquons maintenant des notions particulières, dans le secondaire ou le supérieur, pour lesquelles l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage nous semble revêtir un certain nombre d'enjeux importants. Suivant les cas, l'intérêt pourrait être d'en établir le relief, d'aider à concevoir des tâches d'introduction ou des scénarii d'enseignement, ou alors de réaliser une étude complète sur le long terme, à l'instar de ce que nous avons décrit en 3.2.1.1 pour l'algèbre linéaire.

Dans le secondaire, en lien avec 3.1.3.3, il s'agit soit de notions qui présentent des spécificités liées à leur relief (non formalisées ou plusieurs formalisations co-existant), soit de notions qui doivent s'intégrer selon nous dans un projet à long terme en prenant peut-être en compte le début de l'enseignement supérieur, soit de mathématiques abordées dans des filières où les élèves ne se destinent pas à des études mathématiques : nous ne citons que quelques exemples sans les détailler outre mesure. Nous évoquons également les dynamiques de recherche qui se créent par les changements de programmes.

Dans le supérieur, nous donnons trois exemples d'études consacrées à des mathématiques qui sont en lien avec celles que nous pratiquons en tant qu'enseignant-chercheur.

Enseignement secondaire Pour le chercheur en didactique et en lien avec ce que nous avons évoqué en 3.2.1.1, l'enseignement d'un ensemble de notions et les apprentissages correspondants des élèves s'apprécient souvent selon plusieurs temporalités³² : le temps de la séance de classe ou du TD, le temps de la séquence, le temps d'une année scolaire ou universitaire ou même à plus long terme. Dans ce dernier cas, nous pensons que le relief de ces notions est une référence particulièrement importante (3.1.3.2) qui permet au chercheur (ou à l'enseignant) d'avoir accès aux enjeux d'apprentissage et aux besoins supposés des élèves.

L'étude de la notion de fonction menée en 2.4 pourrait ainsi être étendue sur tout le lycée, voire jusqu'au début de l'université, ce qui permettrait d'y intégrer des facettes importantes du domaine, que ce soit en termes de nouvelles notions (continuité, dérivabilité, limites...), de spécificités épistémologiques et didactiques (perspective locale, articulations entre les perspectives compte tenu des registres...) ou de nouveaux formalismes qui concentrent de nombreuses difficultés (voir 2.3.2.1 pour celui lié aux limites). De manière isolée, ces notions ou aspects ont tous fait l'objet de nombreuses études, mais il nous semble qu'il y a lieu d'adopter une vue

31. indrum2016.sciencesconf.org, indrum2018.sciencesconf.org, indrum2020.sciencesconf.org

32. Nous ne nions pas ici que les pratiques des enseignants s'apprécient aussi selon plusieurs temporalités, pas forcément équivalentes à celles des élèves.

globale pour mesurer les évolutions du domaine, alors qu'en France les programmes du lycée s'apprêtent à changer.

Il nous semble également important d'étudier des notions pour lesquelles plusieurs formalisations coexistent dans plusieurs cadres différents (Pouyanne dans Chappet-Pariès et al., 2007, voir aussi Robert, Lattuati & Penninckx, 2012), ce qui ne peut s'envisager que sur le temps long. Le « cosinus » est un bon exemple d'une telle notion : on le « définit » dans le triangle rectangle, dans le cercle trigonométrique, pour les angles orientés de vecteurs, en lien avec le produit scalaire, en tant que fonction, en tant que série d'une variable réelle ou complexe... Plus largement, le domaine de la trigonométrie mérite aussi une étude globale, voir à ce sujet la future thèse de Ratha Loeng en ce qui concerne les fonctions trigonométriques. Un autre exemple est la notion d'orthogonalité qui traverse l'enseignement : en tant qu'angle droit, en lien avec les instruments de géométrie, dans le triangle, dans le plan euclidien, dans l'espace euclidien, en lien avec le produit scalaire, en lien avec les formes bilinéaires ou les formes quadratiques en dimension finie ou infinie, dans les espaces de Banach ou pour résoudre des équations aux dérivées partielles...

Les réformes et changements de programmes amènent en général des modifications. Cela a par exemple été le cas des changements de programmes du collège en 2016 qui ont introduit une logique de « cycle » (voir 2.1.1) et des nouveautés : enseignement transversal de l'algorithmique et la programmation, retour de certaines transformations géométriques globales, frises et pavages... Cela a aussi été le cas des changements de programme 2010 au lycée : renforcement du domaine des probabilités-statistiques, enseignements transversaux consacrés à l'algorithmique ou aux raisonnements mathématiques (logique)... Dans ce cas, ces modifications nécessitent un besoin accru et urgent de recherches consacrées à ces nouveautés et de dispositifs adossés à ces recherches pour former les enseignants. Pour ne citer que deux exemples, cela a été le cas de la logique en lien avec l'enseignement de la preuve (Mesnil, 2012) ou de l'algorithmique (Modeste, 2012). Nous avons déjà cité en 3.2.1.1 les futurs changements du lycée à partir de la rentrée 2019 pour ce qui concerne les liens avec l'algèbre linéaire. Nous citons deux exemples liés aux futurs programmes du lycée qui nécessitent selon nous des besoins de recherche.

Un événement notable dans les futurs programmes du lycée est l'introduction de l'enseignement commun intitulé « Sciences numériques et technologie » en seconde, de l'enseignement de spécialité intitulé « Numérique et sciences informatiques » en première et son équivalent en terminale en 2020. Ces changements questionnent les liens entre mathématiques, algorithmique ou plus largement informatique, déjà notables chez Modeste (2017). En restant dans le cadre des fonctions, les notions de fonction, de variable dépendante ou indépendante, de dépendance, de covariation ou de correspondance seraient selon nous à étudier sous l'angle de ces liens. En particulier, on peut s'interroger sur les possibilités offertes par une notion dans une discipline sur sa correspondante dans une autre discipline. Nous envisageons déjà ce projet avec plusieurs collègues.

Un autre événement important est l'introduction d'une section « Nombres et calculs » dans les programmes de seconde, supposés donner aux élèves la possibilité d'approfondir les relations et discriminations entre ensembles de nombres, y compris d'un point de vue historique. En particulier, les nombres réels y sont évoqués à la fois en tant que nombres et en relation avec la droite numérique³³. Ces éléments de programme correspondent à ce que Pouyanne appelle des « notions non formalisables » (ibid), celle de nombre, celle de nombre réel, qui sont malgré tout des enjeux importants d'apprentissage. Au moment où elles sont enseignées, de telles notions ne peuvent pas être définies rigoureusement (pour le mathématicien) et les

33. À tout nombre réel correspond un unique point de la droite numérique et à tout point de la droite correspond un unique réel.

élèves les abordent par le biais de leurs propriétés opératoires, en termes de manipulations ou d'utilisation. Nous pensons donc qu'il est important de profiter de ce changement de programme pour faire le point sur l'enseignement des nombres réels, du discret et du continu, compte tenu des nombreuses recherches dont ces concepts ont fait l'objet (voir Durand-Guerrier & Vivier, 2016 ; Durand-Guerrier & Vergnac, 2017 ; Rousse, 2018), en particulier pour prendre en compte des futurs besoins des enseignants³⁴. Du reste, l'ensemble des nombres réels n'est en général pas construit (ou pas intégralement) au début de l'université et on donne surtout à voir sa richesse analytique³⁵ : c'est donc aussi un enjeu de la transition et des mathématiques universitaires.

Enfin, il nous semble important de prendre en compte les mathématiques enseignées dans les filières (générales, technologiques, professionnelles) constituées d'élèves ne se destinant pas à des études en mathématiques. À notre connaissance, l'enseignement et l'apprentissage de ces mathématiques ne sont que très peu étudiés dans les recherches en didactique, alors qu'il y a sans doute des besoins spécifiques de la part des élèves, des enseignants. Certaines notions communes à ces filières et à la spécialité mathématique y sont abordées différemment, certaines autres ne sont enseignées que dans ces filières. Pour se restreindre aux anciennes filières du baccalauréat technologique (avant réforme), citons par exemple :

- l'étude de frises, de pavages, de compositions de transformations géométriques, les sections du cône, les ellipses en STD2A ;
- les équations différentielles du premier ordre (STL, STI2D), voire certaines du second ordre (STI2D) ;
- statistique à deux variables (STMG, STL) et ajustement affine (STL).

Enseignement supérieur Notre posture d'enseignant-chercheur en mathématiques nous permet aussi d'envisager de contribuer à l'étude de certaines notions enseignées dans le supérieur. Nous citons trois exemples parmi de nombreux autres.

Il y a nécessité à mener des recherches consacrées à des mathématiques avancées, en particulier l'algèbre abstraite. Depuis un certain temps, à la suite de Thomas Hausberger, des chercheurs s'y consacrent au sein d'une didactique du structuralisme algébrique (Hausberger, 2016) en lien avec des études épistémologiques sur la pensée structuraliste (Hausberger, 2012) ou avec la construction de praxéologies structuralistes (Hausberger, 2018). Ces recherches ont ainsi abordé les notions de groupe (Durand-Guerrier, Hausberger & Spitalas, 2015), de morphisme (Hausberger, 2017) ou d'idéal d'un anneau (Jovignot, 2017). En général, ces études ont en commun de partir d'une interprétation FUGS de ces concepts (voir 2.1.4.2) basée sur une analyse épistémologique et cognitive. Nous pensons qu'il y aurait matière à mener une recherche collaborative impliquant les chercheurs intéressés par l'algèbre abstraite, par exemple au sein de laquelle le relief pourrait apporter des éléments permettant d'étudier des déroulements en CM ou en TD. Il nous semble en particulier que les 4 aspects algébriques suivants peuvent permettre un accès général à l'étude de l'enseignement des structures : structure, sous-structure, morphisme de structure, sous-structure engendrée par une partie.

En tant qu'enseignant à la préparation à l'agrégation externe de Rouen, notamment dans les domaines des groupes, de l'algèbre linéaire et de la géométrie,

34. Voir à ce sujet la section 3.2.1.4

35. Dans la construction axiomatique des réels par Hilbert, cette richesse se manifeste notamment par le fait que l'axiome de complétude est équivalent à de nombreux autres : il y a complétude au sens de la convergence, au sens de l'ordre, au sens de Bolzano-Weierstrass, au sens des intervalles emboîtés, au sens de la connexité, au sens des suites adjacentes...

il nous semble que la majorité des étudiants méconnaît les raisons d'être de certaines notions, les outils d'un domaine utile dans un autre ou, plus généralement, les liens féconds qui unissent les différents domaines. Il en va ainsi par exemple de la pertinence à repérer et utiliser les groupes en géométrie, ou de la pertinence à envisager les actions de groupes et la topologie pour interpréter des théorèmes, des classifications ou définir des invariants en algèbre linéaire ou bilinéaire³⁶.

Nous sommes aussi responsable du Master MEEF mention 2 parcours mathématiques qui prépare aux concours de l'enseignement secondaire et au métier d'enseignant du secondaire. Depuis quelques années, la seconde épreuve d'admissibilité et les deux épreuves d'admission du concours sont basées sur les programmes du secondaire. Mais l'arrêté qui fixe les modalités du concours stipule que « les notions traitées dans ces programmes doivent pouvoir être abordées avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master »³⁷. Notre expérience nous montre que les étudiants ont des difficultés à acquérir ce recul, à organiser leurs connaissances de manière à avoir un point de vue global sur l'enseignement des diverses notions dans le secondaire. Ils sont notamment gênés par la manière d'introduire les notions, par les notions qui, de leur point de vue, ne peuvent pas être définies à un niveau donné (notions non formalisées), ou par les liens qui unissent celles qui sont définies plusieurs fois au cours de l'enseignement (notions qui ont plusieurs états formalisés).

Dans ces deux cas (agrégation, MEEF), les étudiants ont des difficultés à présenter puis à défendre des objectifs ou des points de vue lors des oraux consacrés à une thématique, à organiser leurs leçons de manière adéquate et logique au regard de ces objectifs. Au-delà des nombreuses différences entre ces formations, tous ces constats permettent d'envisager plusieurs actions didactiques qui pourraient s'appuyer sur les résultats ou les outils de la recherche en didactique, et aider à identifier les niveaux de conceptualisation en jeu :

- en amont de ces formations³⁸, construire des tâches d'introduction, des situations, des cours ou même des UE qui donnent à voir des présentations alternatives de certaines notions, des liens renforcés entre les domaines ; pour les étudiants qui se destinent au Master MEEF, cela pourrait constituer une part des UE de pré-professionnalisation ;
- en M1 MEEF, envisager un outillage didactique minimal des étudiants et des UE qui leur permettent d'organiser leurs connaissances, d'envisager des objectifs pertinents domaine par domaine et de se focaliser sur quelques notions non formalisées ou qui connaissent plusieurs états formalisés dans le secondaire ;
- à l'agrégation, envisager de donner à voir des objectifs importants lors des UE de préparation à l'écrit et les former en amont de la préparation aux oraux à diverses possibilités pour choisir et défendre ses objectifs.

Dans toutes ces propositions d'études didactiques de notions mathématiques particulières (secondaire ou supérieur), lorsque cela a un sens, il peut être intéressant d'envisager une comparaison entre deux pays, voire une comparaison internationale. Il est en effet fréquent qu'une telle étude soit conduite dans un pays donné et intègre donc de nombreuses spécificités liées au système d'enseignement en vigueur dans ce pays : si on peut penser que les savoirs savants correspondants sont les mêmes, ce n'est en général pas le cas des programmes, des pratiques enseignantes, des difficultés des élèves... En d'autres termes, le relief d'une notion a une part relative, qui dépend en partie du pays au sein duquel l'étude est conduite et du moment où elle l'est (programmes). Interroger cette part relative du relief dans des études internationales sur une base comparative nous paraît être une perspective

36. Pour ce dernier point, voir Caldero & Germoni, 2013, 2015.

37. Voir www4.ac-nancy-metz.fr/capesmath/data/uploads/joe_20151208_0284_0008-1.pdf

38. Entre le L1 et le L3 pour les MEEF, entre le L1 et le M1 pour l'agrégation.

susceptible d'enrichissement pour la compréhension de différents phénomènes liés à l'enseignement de cette notion.

3.2.1.4 Les « laboratoires de mathématiques »

En 3.1.1.2, nous évoquons la création cette année de laboratoires de mathématiques au sein des établissements d'enseignement secondaire, à la suite du rapport Villani-Torossian. Ces laboratoires sont des lieux où sont supposés se rencontrer des chercheurs (en mathématiques, en didactique des mathématiques) et des enseignants des établissements choisis, voire appartenant au même bassin d'enseignement. L'objectif de ce laboratoire est d'être un lieu de réflexion disciplinaire, didactique et pédagogique. Au sein des établissements retenus, les enseignants de mathématiques se concertent et font ensuite des propositions aux chercheurs associés au dispositif qui sont ensuite discutées et envisagées en termes d'interventions.

Nous sommes personnellement investis dans les laboratoires pour deux établissements de l'académie de Rouen avec un autre collègue mathématicien. Dans l'un d'entre eux, la demande concerne justement l'apparition de la thématique « Nombres et calculs » (voir section précédente) en ce qui concerne les enjeux épistémologiques et didactiques de la thématique des nombres en général et des nombres réels en particulier. Au-delà de cet objectif de formation, il y a celui de la conception d'activités adéquates aux enjeux décrits dans les programmes.

Ce dispositif mériterait d'être étudié d'un point de vue didactique à la fois sous l'angle des activités et de la motivation (voir 3.1.2.1) des différents acteurs impliqués (chercheur, enseignants, élèves lors de ces activités).

3.2.2 Questions ouvertes

Dans cette dernière section, nous évoquons des questions plus ouvertes que nous avons commencé à aborder dans cette note de synthèse.

3.2.2.1 Épistémologie de la recherche

Les éléments et discussions que nous avons développés dans cette note, notamment en 1.7 et en 3.1 amènent à se poser plusieurs questions. Quelles sont les qualités d'un didacticien pour « faire sa recherche » ? En reprenant le titre du livre de Zarca (2012), quel est l'ethos professionnel des didacticiens des mathématiques ? Quelle est l'épistémologie de la recherche en mathématiques, en didactique des mathématiques ? Peut-on les comparer ?

Tout comme les questions analogues que nous posions vis-à-vis des mathématiciens, ces questions sont d'une grande complexité et nécessitent des collaborations entre plusieurs chercheurs pour que des éléments de réponse ou des tendances puissent être énoncés. Nous donnons ci-dessous quelques éléments totalement subjectifs, basés sur notre propre expérience. Nous nous plaçons ici dans le cas des mathématiques pures.

Différences entre mathématiques et didactique des mathématiques

- des points de départ différents, que ce soit en termes de questionnements ou de problématiques : en didactique, ils nécessitent un certain découpage de la réalité et souvent le choix d'un cadre théorique ;
- des méthodologies différentes, inscrites en sciences humaines pour la didactique ;
- en didactique, des recueils de données adaptés aux cadres théoriques mais qui produisent quand même de l'inattendu, à savoir repérer, des traitements de données parfois fastidieux ; un autre usage de l'intuition ?

- la prise en compte de la réalité : en didactique, une dialectique nécessaire expérimental/théorique, avec observations des enseignants et élèves (conjecturelle, par essence) ;
- en didactique, des analyses souvent locales, des inférences difficiles à faire sur le global : n’y a-t-il pas le même type de généralisation en mathématiques et en didactique des mathématiques ?
- ce qu’est un résultat : en didactique, cela consiste souvent en la mise en valeur de certaines régularités, un théorème d’existence³⁹ ou la confirmation d’une certaine robustesse (d’une situation, d’un outil...) ; le domaine de validité des résultats est également différent ;

Analogies entre mathématiques et didactique des mathématiques

- le rôle de la communauté des chercheurs, les lectures, la bibliographie et l’exercice de la critique ;
- savoir transformer ce qui apparaît d’abord comme un « bruit » (voir 1.7.2.2) en une source productive de nouveauté.

Communautés de chercheurs Dans cette note, nous avons dit à plusieurs reprises que la communauté des chercheurs (en mathématiques, en didactique des mathématiques) joue un grand rôle dans l’avancée des connaissances du champ concerné, notamment dans leur évaluation. Si on se réfère aux problèmes ou problématiques que ces chercheurs tentent d’aborder, on peut distinguer schématiquement plusieurs cas de figure sur lesquels nous donnons quelques éclairages.

Il y a d’abord le cas où le problème est formulé dans un domaine particulier au sein duquel il est abordé (voire résolu), quitte à avoir recours à des domaines « proches ». Il en va ainsi des problèmes abordés dans nos recherches en mathématiques, où nous nous inscrivons en algèbre non commutative. La communauté de chercheurs impliquée en première approche est alors restreinte à ce domaine⁴⁰, voire à un très petit nombre de chercheurs. Il peut en aller ainsi en didactique des mathématiques dans des recherches dont le but est par exemple l’avancée théorique ou méthodologique au sein d’un cadre fixé. En mathématiques, ce cas se présente souvent, même si il se fait aussi beaucoup de travaux impliquant des chercheurs d’une autre discipline, qui sont soit seulement à l’origine du problème, soit se trouvent partager toute la recherche.

Il y a ensuite le cas où le problème peut impliquer un grand nombre de chercheurs de la communauté. En mathématiques, il nous semble que c’est assez rare à l’exception de certaines conjectures, telles l’hypothèse de Riemann pour laquelle ont été tentées des approches algébriques, analytiques, probabilistes, numériques... Dans le cas de tels problèmes, qui « résistent », des mathématiciens d’autres domaines que celui où il a été posé initialement inventent parfois des approches originales qui tendent à élargir la communauté initiale. De par la nature de ses questionnements « à la marge » d’une seule discipline, il nous semble que la didactique des mathématiques peut se situer dans ce cas de figure. Notamment, le questionnement initial peut se rapporter à une situation très générale liée à l’enseignement ou l’apprentissage des mathématiques et fréquemment, le choix d’un ou plusieurs cadres théoriques puis de leur opérationnalisation, aboutit dialectiquement à une problématique plus précise qui est traitée au sein de ce ou ces cadres. Bien entendu, d’autres choix sur le même questionnement initial conduisent à d’autres approches en partie complémentaires, qui en révèlent plusieurs facettes.

39. C’est-à-dire une description mettant en jeu les variables retenues dans la recherche.

40. Bien entendu, un problème résolu dans un domaine particulier peut ensuite avoir des conséquences dans d’autres domaines, voire dans d’autres champs de recherche.

Un chercheur individuel en didactique des mathématiques n’investit jamais tout ce qui concerne les questionnements qu’il aborde, mais seulement certains aspects. Dans de nombreuses recherches, telles celles liées à la détermination du relief sur une notion, le travail en collaboration permet de profiter de regards croisés, de notions ou d’outils complémentaires, à condition qu’il ait été précisément mis en cohérence au préalable.

3.2.2.2 La recherche en (didactique des) mathématiques

Dans cette note, des questions générales ont été abordées plus ou moins explicitement :

- Dans quelle mesure peut-on s’inspirer (ou pas) des pratiques expertes des mathématiciens pour ce que font ou pourraient faire les élèves en classe, pour les déroulements que les enseignants pourraient organiser en classe ?
- Qu’est-ce que le fait d’être chercheur en mathématiques apporte (ou pas) au fait d’être didacticien, aux didacticiens, à la didactique des mathématiques et à la communauté des chercheurs qui s’y investissent ?

Puisque nous avons été mathématicien avant d’être didacticien, ces questions sont asymétriques et on peut tout à fait se poser des questions analogues en sens inverse :

- Dans quelle mesure peut-on s’inspirer (ou pas) des pratiques expertes des didacticiens des mathématiques pour faire de la recherche en mathématiques, pour permettre au mathématicien d’adopter une posture réflexive sur sa pratique de recherche ?
- Qu’est-ce que le fait d’être chercheur en didactique des mathématiques apporte (ou pas) au fait d’être mathématicien, aux mathématiciens, aux mathématiques ?

En général, on pourrait se demander dans quelle mesure le mathématicien peut cultiver une dimension « d’autodidaxie » : s’il avait un certain nombre de connaissances didactiques, pourrait-il adopter une posture réflexive sur sa pratique, enrichir sa pratique de chercheur, d’enseignant ? On constate parfois que le fait de devoir enseigner quelque chose, et pas seulement l’exposer, favorise des présentations complètes : à cet égard, on peut citer par exemple les cours de Cauchy à l’école polytechnique en lien avec lesquels il a publié plusieurs traités. On pourrait aussi se dire que les concepts didactiques permettent parfois d’y voir plus clair du strict point de vue épistémologique : ainsi, lorsqu’on établit le relief d’une notion, les avancées dans les dimensions épistémologiques, curriculaires et didactiques sont dialectiques, le tout valant mieux que les parties !

Du strict point de vue personnel, nous pensons en tous les cas que notre posture de didacticien nous outille en tant qu’enseignant-chercheur en mathématiques. Donnons un autre exemple. Artin et Noether ont créé l’*algèbre moderne* (voir 1.1.1.1) qui se caractérise par l’abandon de toute restriction sur l’anneau ou le corps des scalaires et par une focalisation sur les résultats de classification et de structure. Ce faisant, ils étaient en partie motivés par une volonté didactique : effectuer une réécriture de l’algèbre classique qui puisse y mettre de l’ordre en tenant compte du processus d’axiomatisation formelle initié par Hilbert. Dans ce cas, un aspect qui relève du didactique a permis de produire de nouvelles mathématiques qui ont été reprises par les mathématiciens avant de faire l’unanimité.

À l’instar de certaines réformes de l’enseignement (voir 3.1.1.2), la collaboration entre chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques apparaît donc primordiale à de nombreux égards et fait l’objet de recherches actuelles (Artigue, 2015 ; Fried & Dreyfus, 2014). Il nous semble aussi que la collaboration entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques peut s’avérer fructueuse

et c'était un peu l'objectif caché de cette note. Finalement, les questions générales rappelées ci-dessus restent largement ouvertes à tous points de vue et nécessitent à notre sens un effort accru de la part des deux communautés de chercheurs. Ce sera peut-être l'objet d'un ou plusieurs ouvrages... ou d'une future note de synthèse !

3.3 Proposition d'un programme de recherche

Dans cette dernière section, nous présentons des perspectives de recherche en didactique des mathématiques basées plus spécifiquement sur notre empreinte en tant que chercheur à la fois en mathématiques et en didactique des mathématiques.

En guise de conclusion au chapitre 2, nous revenons d'abord brièvement sur quelques apports des études que nous avons menées en didactique des mathématiques au sujet de l'enseignement de certaines notions FUG. Partant de ces apports, nous proposons une manière d'étudier de manière systématique l'enseignement et l'apprentissage des notions FUG en début d'université dans le cadre de la Théorie de l'Activité (3.3.1). Nous explicitons ensuite un programme de recherche consacré aux débuts de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université (3.3.2). Ce programme de recherche donne à voir précisément les travaux de recherche que nous nous proposons de développer pour nous-même et de futurs étudiants en thèse.

3.3.1 Étude systématique de l'enseignement de notions FUG en Théorie de l'Activité

Nos recherches en didactique sont situées au sein du cadre théorique de la Théorie de l'Activité, appliqué à la didactique des mathématiques et aux situations scolaires liées à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Au cours du chapitre 2, nous avons montré à travers nos travaux en didactique comment nous nous sommes appropriés différentes facettes de ce cadre et de son opérationnalisation pour l'enseignement de certaines notions FUG. Nous avons également élargi les domaines d'application à de nouveaux champs d'étude et défini des outils méthodologiques (pour le chercheur) :

- En 2.2, nous avons réalisé une première étude de déroulements en travaux dirigés à l'université sous le prisme du rôle de l'enseignant. Pour cela, nous avons enrichi une méthodologie générale adoptée dans ce type de recherches (Robert, 2008) en définissant un nouvel indicateur global de gestion permettant de mesurer et d'apprécier l'organisation, du déroulement du travail des étudiants sur chaque exercice mise en œuvre par l'enseignant tout au long du TD (cf. Grenier-Boley, 2014).
- En 2.3, nous avons conduit une première étude d'un cours magistral à l'université en nous focalisant sur la nature et la qualité des liens entre ce que l'enseignant explicite au travers de son discours et les activités – même réduites – des étudiants. Pour cela, nous avons déterminé et comparé les occasions de proximité issues de l'étude du relief aux proximités possibles repérées par le chercheur lors des déroulements (cf. Bridoux et al., 2016).
- En 2.4, nous avons montré comment l'étude fine du relief de la notion de fonction permettait de dégager les besoins présumés des élèves pour son apprentissage entre troisième et seconde. Cette étude et l'identification de ces besoins nous ont permis de construire un outil méthodologique pour analyser l'offre faite dans la partie « cours » des manuels pour l'apprentissage de cette notion, et pour apprécier potentiellement les choix faits par les enseignants en classe réelle.

Nous appuyant sur ces recherches et nous inscrivant dans le cadre de la Théorie de l'Activité, nous décrivons une manière d'envisager l'étude systématique de l'enseignement et de l'apprentissage de notions FUG au début de l'université. Cela met en jeu l'étude conjointe des pratiques des enseignants en CM, en TD et des activités des étudiants en TD lors de l'enseignement de la notion concernée. C'est une utilisation croisée des outils du cadre théorique et de leur opérationnalisation telle qu'elles ont été mises à l'épreuve dans nos différents travaux qui est visée.

3.3.1.1 Relief des notions

En premier lieu et à l'instar de ce que nous avons mis en œuvre en 2.4, le chercheur en didactique établit précisément le *relief* des notions mathématiques concernées, qui servira de référence à l'étude des déroulements en CM et en TD (voir 3.1.3.2). Cela permet notamment d'explicitier les caractères F, U et G spécifiques de ces notions sur un plan épistémologique et au moment précis d'enseignement choisi (voir 2.1.4.2), de déterminer les *besoins présumés* des étudiants pour leur apprentissage et de dégager des *occasions de proximité* (voir 2.3.1.3).

3.3.1.2 Cours magistraux

L'étude des CM est par essence délicate dans notre cadrage puisque les activités des étudiants n'y sont que très peu accessibles. Nous avons développé un détour permettant d'apprécier, sur un contenu à exposer précis, à la fois des caractéristiques générales des choix de l'enseignant pour ses cours et ce qu'on peut attendre de ces moments de cours pour les étudiants (voir Bridoux et al., 2016)).

Pour pallier partiellement à la difficulté d'accès aux activités des étudiants et aller un peu plus loin, nous proposons d'articuler des outils de la Théorie de l'Activité avec des avancées récentes visant à étudier l'efficacité des CM à l'université (Lew, Fukawa-Connelly, Mejia-Ramos & Weber, 2016). D'abord, les vidéos des CM sont analysées par le chercheur qui détermine en particulier les *proximités possibles* organisées par l'enseignant et les besoins présumés qu'il semble prendre en compte (cf. notre détour). Ces analyses lui permettent de construire le canevas d'un entretien d'explicitation avec l'enseignant de CM spécifiquement basé sur les contenus enseignés et sur les variables qui émergent de l'analyse des déroulements. Ensuite, un visionnage des vidéos en la présence de l'enseignant de CM peut permettre d'identifier dans un premier temps les *idées principales* (Lew et al., 2016) qu'il souhaitait faire passer aux étudiants pendant chaque cours. Dans un second temps, si nécessaire, le chercheur conduit tout ou partie de l'entretien d'explicitation qu'il a construit afin de rendre explicites les choix de l'enseignant vis-à-vis des variables repérées lors de l'analyse, valider ou invalider les proximités possibles repérées. Les notes prises par un certain nombre d'étudiants lors de ces CM sont analysées pour y chercher des traces des proximités et idées principales, puis des entretiens basés sur les vidéos avec un petit nombre d'entre eux permettent de raffiner ces analyses (voir Lew et al., 2016, Phase 4 p. 172).

3.3.1.3 Travaux dirigés

L'étude des tâches proposées en TD et des déroulements organisés par l'enseignant peut être réalisée en suivant la méthodologie générale déjà citée et en utilisant l'*indicateur global de gestion* (voir 2.2.2.2) quitte à le raffiner ou à l'enrichir. Cette étude, qui articule l'analyse des pratiques de l'enseignant et celle des activités des étudiants, permet notamment de déterminer les *activités possibles* (*a minima*, *a maxima*) des étudiants et d'apprécier la gestion globale des déroulements par l'enseignant qui donnent accès, selon les hypothèses du cadre théorique, aux sources

principales d'apprentissage des étudiants et tout particulièrement à leur degré d'autonomie. En outre, dans une perspective de comparaison des institutionnalisations en CM et en TD (voir 2.2.4.2), le chercheur peut aussi analyser les moments de cours proposés en TD⁴¹ selon la même méthodologie qu'en CM. Cela permet de comparer les proximités possibles, les idées principales rendues accessibles aux étudiants d'une part en CM, d'autre part en TD, et la qualité des liens existant entre les deux modalités d'enseignement, ce qui nous semble fondamental dans une perspective à moyen terme, rarement atteinte dans les recherches actuelles.

À l'issue de toutes ces analyses, le chercheur détermine dans quelle mesure les besoins présumés des étudiants dégagés *a priori* ont été pris en compte *a posteriori* par les CM et les TD.

3.3.2 Programme de recherche : enseignement et apprentissage des débuts de l'algèbre linéaire à l'université

Pour conclure cette note de synthèse, nous présentons un programme de recherche précis en didactique des mathématiques qui prend spécifiquement en compte nos travaux antérieurs en didactique et notre double posture de chercheur en mathématiques et en didactique des mathématiques. Les propositions et problématiques qui apparaissent dans ce programme se nourrissent de l'influence de nos pratiques de recherche en mathématiques ou de celles d'autres chercheurs en mathématiques sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (voir 3.1). En particulier, certaines avancées que nous concevons au sein de ce programme sont enrichies par des comparaisons entre activité des étudiants et activité des chercheurs d'une part, entre conceptions des enseignants et conceptions des chercheurs d'autre part. Ce programme paraît ambitieux en termes de moyens de recherche mais c'est volontaire puisqu'il décrit à la fois des perspectives pour nos propres travaux de recherche mais aussi (et surtout) des thématiques originales propres à être développées par de futurs étudiants en thèse.

Nous avons choisi d'axer ce programme sur l'étude didactique des débuts de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire à l'université en France, pour des étudiants pouvant se destiner à des études en mathématiques. Il y a plusieurs raisons à cela. D'abord, comme nous l'avons déjà dit, nous souhaitons poursuivre certains travaux que nous avons initiés (voir 2.2) avec l'objectif de faire globalement le point sur l'évolution de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire (voir 3.2.1.1). Ensuite, l'algèbre linéaire est le domaine enseigné au début de l'université qui entretient le plus de liens avec notre propre domaine de recherche en mathématiques. En fait, pour la plupart des domaines de recherche en algèbre⁴², l'algèbre linéaire⁴³ est tout à la fois et schématiquement :

- un réservoir de résultats et de techniques qui peuvent parfois être utilisés dans certaines situations du domaine de recherche ;
- un modèle de « simplicité » dont il faut parfois essayer de garder certaines vertus y compris en analogie ;
- un domaine où certains phénomènes plus complexes n'apparaissent pas⁴⁴.

Nous suggérons donc que ces liens qu'entretiennent notre domaine de recherche en mathématiques et l'algèbre linéaire nous permettront de réfléchir précisément aux

41. En référence à l'indicateur global de gestion, ces moments de cours se situeraient essentiellement lors des éventuelles phases de prologue ou de postlogue, voir 2.2.

42. Notamment l'algèbre non commutative.

43. Nous faisons référence ici à l'algèbre linéaire telle qu'elle est enseignée en général entre le L1 et le M1, depuis la théorie des espaces vectoriels jusqu'aux réductions générales d'endomorphismes.

44. En référence à 1.7.2, le modèle de l'algèbre linéaire peut permettre d'identifier des « bruits » dans des domaines de recherche plus généraux, c'est-à-dire des phénomènes qui s'en démarquent et que le chercheur en mathématiques va chercher à comprendre.

points communs et différences entre les activités de recherche d'un chercheur sur une nouvelle question et celles qu'on peut proposer à des étudiants. Cela conduit à transposer, en connaissance de cause, certaines de nos pratiques ou activités de chercheur en mathématiques en vue de l'enseignement de l'algèbre linéaire à des étudiants « débutants », enrichissant ainsi ce programme de recherche en didactique des mathématiques.

Notre proposition de programme de recherche se base en premier lieu sur l'étude systématique que nous avons développée en 3.3.1. Nous y adjoignons ci-dessous des propositions d'études didactiques liées soit à certains aspects de nos recherches antérieures, soit aux éléments que nous venons d'évoquer, en particulier s'agissant de notre double posture de recherche.

3.3.2.1 Relief des notions

D'abord, nous avons déjà évoqué en 3.2.1.1 l'idée que l'étude du relief des premières notions d'algèbre linéaire mérite d'être adaptée aux nouvelles conditions d'enseignement. Si l'étude épistémologique menée par Dorier (1997) constitue toujours une référence, il convient de vérifier dans quelle mesure les premières notions d'algèbre linéaire présentent toujours un caractère FUG lorsqu'elles sont introduites en L1, compte tenu des divers changements de programmes et des connaissances supposées des élèves à l'arrivée en L1, ce qui peut nécessiter un diagnostic en fin de lycée. D'un point de vue didactique, il est nécessaire de réaliser un état de l'art complet des résultats établis dans les recherches consacrées à l'algèbre linéaire, en particulier des difficultés des élèves. Ces études doivent permettre d'aboutir à l'actualisation des besoins présumés des élèves et des occasions de proximités en vue de l'apprentissage de l'algèbre linéaire. Nous donnons des exemples d'analyses plus précises qui doivent selon nous être menées dans cette perspective.

Durant leur scolarité dans l'enseignement primaire et secondaire, les élèves qui arrivent actuellement à l'entrée à l'université ont interagi avec des ressources de natures variées, en particulier les TICE, et ont construit des connaissances spécifiques à leur égard. Que ce soit par rapport aux élèves qui étaient concernés par les études menées entre autres par Dorier, Robert, Robinet et M. Rogalski (voir Dorier, 1997) ou que les études soient plus récentes, les TICE évoluent en permanence et il est nécessaire d'intégrer certains de leurs apports au sein du relief. Comment caractériser les connaissances des élèves liées à l'usage des TICE en situation mathématique à l'issue du lycée? Dans quelle mesure les TICE permettent d'envisager des situations renouvelant la construction des premières notions d'algèbre linéaire, y compris en termes de proximités? En analogie avec cette dernière question, on peut citer la construction récente d'un logiciel dont l'usage au sein d'une ingénierie semble permettre des occasions de proximités ascendantes avec des définitions de la continuité d'une fonction en un point (Sghaier, 2019).

Les travaux pionniers en didactique de l'algèbre linéaire ont étudié les liens profonds qui existent entre algèbre linéaire et géométrie, que ce soit d'un point de vue épistémologique ou dans l'enseignement de l'algèbre linéaire (Dorier, 1997; Gueudet, 2004, 2008). Ainsi, certaines tâches rencontrées en algèbre linéaire réfèrent à des situations rencontrées en géométrie au lycée mais au sein d'une organisation mathématique différente susceptible d'engendrer des ruptures (Gueudet, 2008). En général, la flexibilité du recours par les étudiants à la géométrie semble être une condition primordiale pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire que ce soit : le recours à des représentations géométriques, à des résultats de géométrie ou à des modes de raisonnements géométriques (Dorier, 1997; Gueudet 2008, chapitre 1, section 2). Signalons d'ailleurs que les représentations géométriques peuvent parfois être une source d'inspiration pour le chercheur en algèbre. Dans quelle mesure ces divers liens entre la géométrie et l'algèbre linéaire sont encore possibles avec les

élèves actuels compte tenu des (futurs) changements de programmes ? Quels sont les besoins présumés des étudiants en géométrie pour permettre ou concevoir un apprentissage de l’algèbre linéaire qui tienne compte de la nature des notions enseignées ?

Certains chercheurs en didactique postulent y compris implicitement que, contrairement à l’hypothèse que nous avons faite en 2.1.4.2, il est possible d’introduire certaines notions FUG avec tout leur sens ou avec une partie significative de leur sens, dans des activités d’introduction permettant une recherche « constructive » des étudiants. En analyse, c’est le cas par exemple pour la notion de limite dans la situation du flocon de Von Koch (Bloch, 2000 ; Commission Inter-IREM Université, 2017), en prenant en compte le caractère lakatosien de sa définition (Job, 2011) ou en substituant à la notion de situation fondamentale celle de métaphore fondamentale supposée lui donner un plus grand degré de liberté (Legrand, 1997 ; Margolinas, 1993) et en travaillant dans le cadre d’un débat scientifique (Lecorre, 2016). En algèbre, c’est le cas par exemple pour la théorie des groupes dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Bosch, Gascón, & Nicolás, 2016), ces mêmes auteurs postulant aussi que les praxéologies structuralistes (Hausberger, 2018) devraient permettre un plus grand degré de liberté à cet égard. L’usage des TICE pourrait aussi permettre de nouvelles possibilités, telle celle déjà évoquée plus haut pour la notion de continuité (Sghaier, 2019).

Dans la suite du programme de recherche, nous nous intéressons particulièrement à la problématique suivante, qui inclut ce qui précède : que peut-on retenir de l’activité du chercheur en mathématiques en algèbre qui alimente des propositions basées sur une recherche des étudiants pour l’enseignement et l’apprentissage des premières notions FUG d’algèbre linéaire, compte tenu de l’analyse du relief et des besoins présumés des étudiants ? Nous proposons des exemples d’études pour documenter ce questionnement selon que la modalité d’enseignement est le CM ou le TD.

3.3.2.2 Cours magistraux

En relation avec les recherches entreprises sur les pratiques d’enseignement des enseignants en début d’université (voir 3.2.1.2), il nous semble intéressant de mener une étude comparative des motivations et conceptions des chercheurs lorsqu’ils enseignent en CM d’algèbre linéaire et de celles qu’ils ont dans leur propre activité de recherche. Peut-on mettre en valeur des variabilités ou des régularités ? Y aurait-il différents « genres » de chercheurs qui investiraient leur enseignement d’une certaine manière qui dépendrait de certains paramètres liés à la nature de leurs recherches ? En lien avec ces questionnements, signalons la recherche de Manrique (2017) qui a permis la comparaison des pratiques pédagogiques d’EC de physique en CM. Les outils utilisés par Manrique ou dans les recherches mentionnées en 3.2.1.2 peuvent être croisés pour aborder notre problématique : identité professionnelle en termes de norme-qualité-valeurs (Cattonar, 2001), occasions de proximités... Il conviendra ainsi de construire de nouveaux outils méthodologiques par exemple pour accéder aux motivations et conceptions des EC dans leur activité de recherche et en permettre une comparaison, entre enseignants, en faisant intervenir ce que les étudiants retiennent des cours à court – ou moyen ? – terme (cf. Lew et al., 2016).

3.3.2.3 Travaux dirigés

En revenant à la recherche que nous avons menée en 2.2, nous proposons une étude liée à la qualité de la « recherche individuelle » de chaque étudiant dans l’indicateur global de gestion en TD d’algèbre linéaire. Plus précisément, dans quelle

mesure peut-on comparer l'activité de recherche individuelle des étudiants avec l'activité de recherche des mathématiciens (en algèbre)? Peut-on apprécier la qualité de la recherche individuelle des étudiants compte tenu des tâches qui leur sont proposées? Dans quelle mesure et à quelles conditions l'activité de recherche individuelle peut contribuer à l'introduction des notions FUG d'algèbre linéaire?

3.3.2.4 Études complémentaires

Au terme de ce programme de recherche, plusieurs études complémentaires sont envisageables :

- On peut analyser ou renouveler les évaluations des étudiants en algèbre linéaire en prenant en compte des caractéristiques dépendant des études que nous avons mentionnées ci-dessus et en se plaçant sur un temps plus long que dans beaucoup de travaux : des caractéristiques des contenus (qui émanent de l'étude du relief), des caractéristiques des CM (valeurs défendues par l'enseignant, proximités possibles repérées par le chercheur...), des caractéristiques des TD (nature et qualité des tâches proposées, de la recherche individuelle...), des caractéristiques de l'environnement de travail (acquis antérieurs, recours aux TICE, modalités générales de travail, projet de l'étudiant, étudiant exerçant une activité salariée ou non...).
- On peut envisager une comparaison des résultats de cette étude avec ceux obtenus pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire pour des non spécialistes (voir 3.2.1.1) ou en dehors de l'université, par exemple en classe préparatoire.
- On peut envisager une comparaison des résultats de cette étude avec une étude similaire menée à l'international. Il est ainsi manifeste que l'enseignement de l'algèbre linéaire par exemple dans les pays de langue anglaise diffère de ce qui est proposé en France, l'organisation générale des universités, des enseignements, les conditions d'exercice pour les chercheurs y étant aussi potentiellement différentes.
- À l'heure où les concours de recrutement des enseignants sont amenés à se professionnaliser davantage, on peut se demander quelle pourrait être la nature de l'initiation à la recherche proposée dans les futurs Master MEEF en relation avec l'algèbre et l'éventuel impact de cette modalité sur les pratiques effectives des enseignants débutants.
- Une piste complémentaire et originale : voir dans quelle mesure les connaissances en algèbre (linéaire) sont utiles pour un (futur) enseignant, construire des formations adaptées (formation initiale, formation continue). Exemple de la substitution (Constantin, 2014) : une notion "non formalisable" (Chappet-Pariès, Pouyanne, Robert, Roditi, & M. Rogalski, 2007) ou un enjeu caché d'apprentissage?

3.3.2.5 Quelques éléments de prévision des recherches

Un tel programme de recherche demande un travail d'équipe, avec des entrées simultanées sur plusieurs sujets. Une première étape en termes de thèses peut être un projet d'actualisation de ce qu'on peut attendre des connaissances des étudiants à l'entrée à l'université (en logique, théorie des ensembles et géométrie, voir Dorier (1997) ou Guedet (2008)) et un début de recueil de données sur l'enseignement effectif en CM et en TD dans deux lieux différents. Cela peut nourrir la réflexion à enrichir sur le relief et guider l'élaboration de situations adaptées éventuelles, à tester d'abord de manière isolée. La prise en compte de l'ensemble des entrées

évoquées ci-dessus pourra suivre selon un programme plus précis établi à partir des problématiques précises formulées dans les thèses et des premiers résultats obtenus.

Pour terminer, il nous semble que les divers éléments que nous venons de décrire dans cette dernière section sont des enjeux majeurs de recherche en didactique des mathématiques, auxquels nous pensons pouvoir contribuer utilement en engageant de futurs étudiants en thèse, compte tenu de notre empreinte de chercheur à la fois en mathématiques et en didactique des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

- Annoot, E., & Fave-Bonnet, M.-F. (2004). *Pratiques pédagogiques dans l'enseignement supérieur*. Paris : L'Harmattan.
- Arsac, G., Mante, M. (1983). Des problèmes ouverts dans nos classes de premier cycle. *Petit X*, 2, 5–33.
- Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2.3), 241–285.
- Artigue, M. (2015). Didactique des mathématiques et mathématiques : des relations à la fois cruciales et problématiques, culturellement situées. In L. Theis (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage - Actes du colloque EMF2015 - GT1*, (pp. 73–80).
- Audin, M. (1997). Conseils aux auteurs de textes mathématiques. Disponible sur le web : <http://irmasrv1.u-strasbg.fr/maudin/publications.html>.
- Bächtold, M., Durand-Guerrier, V. & Munier, V. (Eds.) (2017). *Épistémologie et didactique : synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales*. Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin AMQ*, 37(1), 20–25.
- Becher, T. (1994). The significance of disciplinary differences. *Studies in Higher Education*, 19(2), 151–161.
- Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). *Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level : State-of-the-art and looking ahead*. ICME-13 Topical Surveys. Cham : Switzerland : Springer.
- Bloch, I. (2000). *Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de von Koch*. Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux.
- Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11^e École d'Été de Didactique des Mathématiques - Corps - 21-30 août 2001* (p. 125–139). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bosch, M. & Gascón (2002). Organiser l'étude 2. Théories et empiries. In J.-L. Dorier, M. Artaud, P. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Eds.), *Actes de la 11^e École d'Été de Didactique des Mathématiques - Corps - 21-30 août 2001*, (pp. 23–40). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Actes de la 12^e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, (pp. 107–122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

- Bosch, M., Gascón, J. & Nicolás, P. (2016). From ‘monumentalism’ to ‘questioning the world’ : the case of Groupe Theory. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2016* (pp. 256-265). Montpellier, France : University of Montpellier and INDRUM.
- Bridoux, S., de Vleeschouwer, M., Grenier-Boley, N., Khanfour-Armalé, R., Lebrun, N., Mesnil, Z. & Nihoul C. (2019). L’identité professionnelle des enseignants-chercheurs en mathématiques, chimie et physique. In M. Abboud (Éd.), *Actes du colloque EMF 2018* (540–547). Paris : IREM de Paris.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. & Robert, A. (2016). Les moments d’exposition des connaissances, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-234.
- Brousseau, G. (1988). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers : Learning about learning mathematics* (Vol. 34). Springer Science & Business Media.
- Caldero, P., & Germoni, J. (2013). *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Calvage & Mounet.
- Caldero, P., & Germoni, J. (2015). *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Calvage & Mounet.
- Cattonar, B. (2001). Les identités professionnelles enseignantes. Ébauche d’un cadre d’analyse. *Cahiers de recherche du GIRSEF*, 10.
- Chappet-Pariès, M., Pouyanne, N., Robert, A., Roditi, E. & Rogalski, M. (2007). *Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée – quelques exemples*. Cahier DIDIREM bleu 9, Université Paris Diderot.
- Charlot, B. (1986). Histoire de la réforme des « maths modernes » ; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique. *Bulletin de l’APMEP*, 352, 15–31.
- Chesnais, A., Grenier-Boley, N., Horoks, J. & Robert, A. (2015). Caractérisation didactique de l’évolution des contenus à enseigner lors des transitions – deux exemples d’une même notion abordée avant et après une transition (symétrie et fonction). In L Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage - Actes du colloque EMF2015 - Spé3*, (pp. 970–981).
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage (2^e édition revue et augmentée, en coll. avec M.-A. Joshua).
- Commission Inter-IREM Université (2017). *Limites de suites réelles et de fonctions numériques d’une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner*. IREM de Paris, Paris.
- Constantin, C. (2014). *Quelles alternatives pour l’enseignement du calcul algébrique au collège ?*. Thèse De Doctorat, Aix-Marseille Université.
- Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l’enseignement et l’apprentissage*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Dorier J.-L. (Ed.) (1997). *L’enseignement de l’algèbre linéaire en question*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Dorier, J.-L. (2017). La didactique des mathématiques : un épistémologie expérimentale? In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.) (2017). *Épistémologie et didactique : synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–32.
- Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM*, 40(3), 373–384.
- Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques : enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP, Cédérom.
- Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295–342.
- Durand-Guerrier, V., Haubserger, T. & Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 20, 101–148.
- Durand-Guerrier, V. & Vergnac, M. (2017). Le continu entre intuition et formalisation. Regards croisés épistémologiques et didactiques. In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.), *Épistémologie et didactique : synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales* (pp. 113–128), Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Durand-Guerrier & Vivier, L. (2016). Densité de D, Complétude de R et analyse réelle. Première approche. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.) *Proceedings of INDRUM 2016*, (pp. 143–152), University of Montpellier and INDRUM : Montpellier, France.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37–65.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131.
- Endrizzi, L. (2011). Learning how to teach in higher education : a matter of excellence. *Dossier d'actualité Veille et Analyse*, 64.
- Freudenthal, H. (2012). *Mathematics as an educational task*. Springer Science & Business Media.
- Fried, M. N. & Dreyfus, T. (Eds.) (2014). *Mathematics & Mathematics Education : Searching for Common Ground*. Springer, Dordrecht.
- Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Giroud, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.
- Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 161–178.
- Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 59–100.
- Grenier-Boley, N. (2009). *Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université*, Cahier de DIDIREM 59, Université Paris Diderot.
- Grenier-Boley, N. (2014). Some issues about the introduction of first concepts in linear algebra during tutorial sessions at the beginning of university. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 439–461.

- Gueudet, G. (2004). Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(1), 81-114.
- Gueudet, G. (2008). *Entrée à l'université / Ressources en ligne. Éclairages théoriques et actions didactiques dans deux champs de recherche en didactique des mathématiques*. Note de synthèse, Université Paris-Diderot.
- Hausberger, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In J.-L. Dorier, S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social, enjeux et défis pour le 21^e siècle, Actes du colloque EMF 2012*, (pp. 425-434), Université de Genève.
- Hausberger, T. (2016). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université et premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : études croisées en didactique et épistémologie des mathématiques*. Note de synthèse, Université de Montpellier.
- Hausberger, T. (2017). The (homo)morphism concept : didactic transposition, meta-discourse and thematisation. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(3), 417-443.
- Hausberger, T. (2018). Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 74-93.
- Henkel, M. (2004). La relation enseignement-recherche. *Politiques et gestion de l'enseignement supérieur*, 16(2), 21-36.
- Hodgson, B. R. (2001). The mathematical education of xschool teachers : Role and responsibilities of university mathematicians. In D. Holton, D., & M. Artigue, M. (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level : An ICMI study* (Vol. 7) (pp. 501-518). Springer Science & Business Media.
- Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite pour la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. Thèse de Doctorat, Université de Liège.
- Jovignot, J. (2017). L'analyse épistémologique du concept d'idéal et son apport à l'étude didactique. In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.), *Épistémologie et didactique : synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales* (pp. 61-73), Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Lecorre, T. (2016). *Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite : élaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l'accès aux objets mathématiques complexes*. Thèse de Doctorat, Université de Grenoble.
- Légrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 221-280.
- Lew, K., Fukawa-Connelly, T. P., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics : Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(2), 162-198.
- Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165-196.
- Manrique, A. (2017). *Analyse des pratiques pédagogiques d'enseignant.e.s universitaires. Le cas de l'enseignement de la physique en premier cycle universitaire*. Thèse de Doctorat, Université Sorbonne Paris Cité.

- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Mesnil, Z. (2012). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot.
- Mesnil, Z., Bridoux, S., de Hosson, C., Grenier-Boley, N. & Lebrun, N., (2017). Enseigner les mathématiques, enseigner la physique : l'identité professionnelle des enseignant.e.s-chercheur.e.s au prisme de la discipline académique. *Colloque 50 ans de sciences de l'éducation : enjeux, débats et perspectives*, 18-20 octobre 2017. France : Caen.
- Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithmique pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?*. Thèse de Doctorat, Université de Grenoble.
- Modeste, S. (2017). Conception et application d'un modèle épistémologique en didactique : l'exemple du concept d'algorithme. In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.), *Épistémologie et didactique : synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales* (pp. 129–143), Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Montmollin, M. (de) (1984). *L'intelligence de la tâche*. Berne : Peter Lang.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Étude épistémologique et enjeux didactiques*. Note de synthèse, Université Paris-Diderot.
- Perrenoud, P. (1998). La transposition didactique à partir de pratiques : des savoirs aux compétences. *Revue des sciences de l'éducation*, 24(3), 487–514.
- Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit X*, 73, 6–34.
- Pólya, G. (1957). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*, 2nd ed. Princeton University, Princeton.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery : on understanding, learning and teaching problem solving*. Combined paperback edition, New York : Wiley.
- Poteaux, N. (2013). Pédagogie de l'enseignement supérieur en France : état de la question. Distances et médiations des savoirs. *Distance and Mediation of Knowledge*, 1(4).
- Revuz, A. (1968). *Mathématique moderne, mathématique vivante*. Office Central de Librairie.
- Revuz, A. (1980). *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?* Presses universitaires de France.
- Robert, A. (1992). Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 12 2.3, 181–220.
- Robert, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139–190.
- Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques des enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45–68), Toulouse : Octarès Edition.
- Robert, A., Lattuati, M. & Penninckx, J. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques : (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Presses universitaires de Franche-Comté.

- Rogalski, M. (avec la collaboration de Robert, A. & Pouyanne, N.)(2001). *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*. Ellipses.
- Rousse, S. (2018). *Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot.
- Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.
- Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Éditions Petra, Paris.
- Sghaier, B. (2019). *Ingénierie d'intégration des TIC dans l'enseignement du concept de continuité dans le cycle secondaire tunisien*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot.
- Steenrod, N. E. (Ed.). (1973). *How to write mathematics*. American Mathematical Society.
- Tavignot, P. (1993). Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonale en sixième lors de la réforme de 1985. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), 257–294.
- Thurston, W. (1995). Preuve et progrès en mathématiques. *Repères IREM*, 21 , 7–26.
- Trede, F., Macklin, R. & Bridges, D. (2012). Professional identity development : a review of the higher education literature. *Studies in Higher Education*, 37(3), 365–384.
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs.
- Vergnaud, G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, (2-3), 133–169.
- Verret, M. (1975). *Le temps des études*. Paris, Honoré Champion, 2 volumes.
- Yvain-Prébiski, S. (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves*. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier.
- Zarca, B. (2012). *L'univers des mathématiciens. L'ethos professionnel des plus rigoureux des scientifiques*. Presses Universitaires de Rennes.

ANNEXE A

ÉNONCÉS DES EXERCICES D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans cette annexe, nous présentons les exercices abordés par Gilles dans l'étude menée au cours du chapitre 2 en 2.2 de façon chronologique. Certaines erreurs initialement présentes dans les énoncés ont été corrigées par l'enseignant, nous les avons également modifiées. Ne figurent dans les énoncés que les questions dont on peut voir un traitement par l'enseignant sur une vidéo. En revanche nous n'avons pas fait figurer les questions annexes traitées en postlogue par Gilles.

A.1 Feuille 2 : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Dans \mathbb{R}^2 , on définit les opérations

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, 0).$$

L'ensemble \mathbb{R}^2 muni de ces opérations est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telles que $a + d = 0$ est un espace vectoriel.

Exercice 4

Soient a et b des nombres réels. Montrer que l'ensemble des solutions sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel.

Exercice 5

On note \mathcal{P} l'ensemble des fonctions C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Dire si les sous-ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- (1) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 5x_2\}$.
- (2) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 7\}$.
- (3) $\{f \in \mathcal{P} \mid f(0) = 1\}$.
- (4) $\{f \in \mathcal{P} \mid f(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.
- (5) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ ou } x_1 = x_3\}$.
- (6) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$.

Nouvel exercice

Soient dans \mathbb{R}^2 les droites F de vecteur directeur $(1, 1)$ et F_a de vecteur directeur

$(2, a)$, où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a , le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 engendré par $F \cup F_a$.

Exercice 6

Soit E l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , F l'ensemble de celles qui sont paires et G l'ensemble de celles qui sont impaires. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = F \oplus G$.

Exercice 7

Considérons les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 suivants :

$$D_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = 0\}; \quad D_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0\}; \quad D_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^2 = D_1 + D_2 + D_3$. La somme est-elle directe ?

Exercice 8

On considère dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $(-1, 1, 2)$ et l'ensemble

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}.$$

Démontrer que P est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 différent de \mathbb{R}^3 . Démontrer que tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$(x, y, z) = (x', y', z') + (x'', y'', z'')$$

où $(x', y', z') \in P$ et $(x'', y'', z'') \in D$.

Exercice 9

Soient les n -uplets (x_1, \dots, x_n) , (x'_1, \dots, x'_n) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. Exprimer chacun des n -uplets suivants comme combinaison linéaire de (x_1, \dots, x_n) et (x'_1, \dots, x'_n) : (1) $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ (2) $(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)$ (3) $(0, \dots, 0)$ (4) (x_1, \dots, x_n) , (5) $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Exercice 10

Peut-on déterminer x, y réels tels que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ soit combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $u_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 11

Donner une équation cartésienne des sous-espaces vectoriels suivants :

- (1) $F = \text{Vect}\{(1, 3)\}$, sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
- (2) $G = \text{Vect}\{(1, 2, 3); (1, 0, 1)\}$, sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- (3) $H = \text{Vect}\{(1, 0, 1, 0)\}$, sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

Exercice 12

Soit E l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a - b & b - c & 2c \\ 2a & a + b & -b \\ b & c & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il est engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.2 Feuille 3 : Familles de vecteurs

Exercice 1 [pour la question (4), seule la question de savoir si les vecteurs sont liés ou non figure sur la vidéo]

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , les familles suivantes sont-elles liées ? Sont-elles génératrices ?

(1) $u_1 = (-1, 2, 1)$, $u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(2) $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, -2)$, $u_3 = (1, 2, 1)$.

(3) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 2, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$.

(4) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (m, 1, m)$, $u_3 = (m, m, m^2)$, où m désigne un paramètre réel.

Exercice 8

Soient $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, -1, 1)$ et $w = (2, -3, -1)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

(1) Montrer que la famille (u, v, w) est liée et déterminer une base de $F = \text{Vect}\{u, v, w\}$.

(2) Donner une équation cartésienne de F .

Exercice 5

Dans \mathbb{R}^4 , on pose $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 1, -3, 0)$. Soit $E = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. Déterminer la dimension de E . En donner une base.

ANNEXE B

DÉROULEMENT DU COURS MAGISTRAL SUR LA LIMITE DE FONCTION

Dans ce premier tableau, nous présentons dans le tableau ci-dessous l'ordre chronologique, la durée et le contenu des différentes phases organisées par l'enseignant lors du CM.

Numéro de la phase	Durée de la phase	Nature de la phase
1	7'50''	introduction intuitive à la définition formelle de limite finie d'une fonction en un point de \mathbb{R}
2	2'50''	traitement d'un exemple pour montrer les limites de la définition intuitive
3	4'55''	écriture de la définition formelle de limite finie d'une fonction en un point de \mathbb{R}
4	1'	exemple graphique pour motiver l'introduction des voisinages
5	8'32''	définition de voisinage (à droite, à gauche) et de voisinage épointé (à droite, à gauche) en $x_0, \pm\infty$
6	6'33''	traductions de la définition en termes de voisinages et d'intervalles
7	3'08''	réponses à des questions d'étudiants au sujet de la définition
8	12'05''	« Propriété : si f admet pour limite l en x_0 et est définie en x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ » et démonstration
9	1'24''	« Remarque : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0$ »
10	1'34''	« Propriété : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ »
11	8'18''	définition de limite finie d'une fonction en $\pm\infty$
12	7'02''	« Application : démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ »
13	5'48''	définition de limite infinie d'une fonction en un point de \mathbb{R}
14	5'20''	définition de limite infinie d'une fonction en $\pm\infty$
15	4'48''	« Théorème : si f admet une limite (finie ou infinie) en a (fini ou infini) alors cette limite est unique »

FIGURE B.1 – Découpage du déroulement du CM

Dans ce second tableau, nous explicitons la phase 3 en mettant face à face ce que l'enseignant écrit au tableau et ce qu'il dit.

Ce qui est écrit au tableau				Ce qui est dit par l'enseignant (extraits)
$ f(x) - l < \varepsilon$				<i>Qu'est-ce que c'est que la distance de $f(x)$ à l? [réponse d'un étudiant] Oui c'est la valeur absolue de $f(x) - l$ d'accord. Alors on veut que $f(x) - l$ soit aussi petit qu'on veut, $f(x)$ va se rapprocher autant qu'on veut de l, qu'est-ce que ça veut dire? Ça veut dire que valeur absolue de $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, pour epsilon aussi petit qu'on veut, on est d'accord.</i>
$\forall \varepsilon > 0 \quad f(x) - l < \varepsilon$				<i>On veut que epsilon soit aussi petit qu'on veut, ça veut dire que ça va être vrai pour tout epsilon positif donc on va avoir :</i>
$\forall \varepsilon > 0 \quad x - x_0 < \alpha \quad f(x) - l < \varepsilon$				<i>Et on doit avoir ça si x est suffisamment proche de x_0, c'est-à-dire si la distance de x à x_0 est inférieure à une certaine valeur alpha.</i>
$\forall \varepsilon > 0 \quad x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$				<i>Donc le si alors c'est l'implication donc aussi petit que soit epsilon, si $x - x_0$ est inférieur à alpha, on doit avoir $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, ça commence à ressembler à la définition qu'a donnée votre camarade.</i>
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$				<i>Alors alpha, comment on l'introduit, parce que là on introduit une notation, ça veut dire qu'il faut que ça soit dans quel ensemble alpha? Il doit majorer une distance donc... [réponse étudiant] positif, voilà. Quel que soit epsilon, dès que x sera suffisamment proche de x_0 c'est-à-dire si la distance de x à x_0 est inférieure à alpha donc derrière c'est la notion « il existe alpha tel que ». Donc notre définition, si on veut l'écrire dans une manière rigoureuse, ça ressemble à quelque chose comme ça d'accord?</i>
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in Df, x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$				<i>Alors là, il manque encore quelque chose, c'est x appartient à quel ensemble, pour quelles valeurs de x on a cette implication. C'est pour les x appartenant à l'ensemble de définition donc je dois avoir...</i>
$\forall \varepsilon > 0$ que l'on veut	$\exists \alpha > 0 \forall x \in Df$ Suffisamment	$ x - x_0 < \alpha \Rightarrow$ Proche	$ f(x) - l < \varepsilon$ proche	<i>Donc ici c'est la notion aussi proche que l'on veut, ça ce serait que l'on veut. Ici, ça serait suffisamment, là on a la notion de proche et là on a à nouveau la notion de proche, d'accord?</i>

FIGURE B.2 – Explicitation de la phase 3

L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES FONCTIONS EN 3^e-2^{de} : UNE ÉTUDE DE MANUELS

C.1 Introduction

Le concept de fonction est souvent considéré comme l'un des plus importants et féconds en mathématiques. Voici ce que le mathématicien Émile Picard écrivait à son sujet en 1906 :

Il en est de même pour l'idée de fonction, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs grandeurs, sur laquelle repose toute la science mathématique. Il a fallu longtemps avant qu'on se rendît compte de l'étendue extraordinaire de cette notion (Picard, 1906, p.51).

Si ces constats sont attestés par l'histoire du concept de fonction jusqu'au début du 20^e siècle (Monna, 1972 ; Youschkevitch, 1976), ils n'ont rien perdu de leur pertinence aujourd'hui et ce, malgré les profonds bouleversements que les mathématiques ont connus. De fait, tous les domaines mathématiques actuels font référence à ce concept directement ou indirectement, soit parce qu'il y apparaît explicitement (pour le mathématicien) sous une certaine forme comme objet d'étude ou outil (les fonctions d'une ou plusieurs variables en analyse, les applications linéaires en algèbre), soit parce qu'il y est présent sous forme plus ou moins implicite (les opérations et relations en algèbre, les fonctions récursives en logique, les variables aléatoires en probabilités, les isométries ou similitudes en géométrie). De nombreuses recherches s'appuient sur l'importance et le caractère unificateur de la notion de fonction (Carlson, 1998 ; Dreyfus & Eisenberg, 1984 ; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990 ; Selden & Selden, 1992), son apport à toutes les branches des mathématiques (Kleiner, 1989) ou aux autres disciplines scientifiques (Selden & Selden, 1992). L'enseignement de ce concept a donc naturellement donné lieu à une grande quantité de recherches en didactique des mathématiques portant sur des problématiques variées, depuis l'introduction qui en est faite dans le secondaire, jusque dans le supérieur.

Notre étude, à l'instar de celles de la plupart des auteurs cités dans cet article, se fait a priori, sans enseignants ni élèves observés, et vise à proposer des outils pour analyser des choix possibles pour l'enseignement des fonctions compte tenu d'enjeux d'apprentissage déterminés par le chercheur. Nous y envisageons différentes formes de transpositions didactiques du concept de fonction (Chevallard, 1985 ; Verret, 1975), entre le savoir savant et le savoir à enseigner, ou entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné. Si la première transposition a lieu hors du système d'enseignement, la seconde est le fait des enseignants et de leurs pratiques. Comment alors rendre compte de ces transpositions pour le concept de fonction, à un niveau donné, en situation scolaire ? Nous proposons de les analyser en prenant comme référence le « relief » du concept de fonction à ce niveau. Il résulte du croisement d'une analyse

curriculaire, d'une analyse épistémologique des contenus et d'une analyse didactique au sujet des besoins supposés des élèves, afin qu'ils puissent comprendre et utiliser la notion de fonction, en surmontant des obstacles liés à son apprentissage. Nous nous demandons en particulier quels choix de tâches et quel discours porté sur les contenus permettraient de transformer les enjeux d'apprentissages sur les fonctions en apprentissages effectifs pour les élèves. Cela réfère à une autre transposition entre les savoirs enseignés et les apprentissages, propre à chaque élève. Nous soulevons aussi la question de ce qui peut être dévolu au chercheur en didactique dans l'étude de ces transpositions.

Nous utilisons les outils construits dans cette étude pour analyser un certain nombre de manuels scolaires, avec comme fil conducteur les liens entre ce qui est proposé aux élèves et leurs besoins supposés par le chercheur. Nous nous restreignons aux débuts de cet enseignement en France (actuellement en classes de 3^e et 2^{de}).

C.2 Cadre théorique et problématique

C.2.1 Hypothèses sur les apprentissages mathématiques des élèves

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'activité (Leplat, 1997 ; Vygotski, 1934/1997) adapté à la didactique des mathématiques et à la situation scolaire (Robert, 2008 ; J. Rogalski, 2008) pour formuler plusieurs hypothèses sur les apprentissages des élèves.

En premier lieu, nous supposons que ce sont les *activités* des élèves qui constituent la source principale de leurs apprentissages, c'est-à-dire tout ce qu'ils font, disent, écrivent, pensent... Nous supposons aussi que pour accéder à ces activités, le chercheur en didactique doit étudier les *tâches* qui sont proposées aux élèves ainsi que les *déroulements* organisés par l'enseignant. Cette étude donne accès aux *activités possibles* des élèves, qui diffèrent potentiellement de leurs activités effectives.

Ensuite, nous supposons que les apprentissages sont favorisés par plusieurs conditions qui ont trait à la qualité des activités proposées par l'enseignant. En articulation des théories de Piaget et de Vygotski (J. Rogalski, 2008), il s'agit à la fois que les élèves soient en autonomie dans certaines tâches et que chaque élève ait la possibilité de prendre part à un travail collectif qui se situe au sein des ZPD des élèves de la classe (Vygotski, 1934/1997, J. Rogalski, 2008). Une dernière condition est de permettre aux élèves d'accéder à la *conceptualisation* des notions concernées, au sens de Vergnaud (1991).

Ainsi, pour déterminer les activités mathématiques possibles des élèves (donc leurs apprentissages), nous devons prendre en considération tout ce que les enseignants leur proposent pour provoquer ces activités mathématiques, en particulier l'ensemble plus ou moins varié de toutes les tâches mathématiques, et pour chacune de ces tâches, le déroulement de sa résolution en classe, dressant ainsi le scénario de l'enseignant pour une notion donnée.

Cette reconstitution du scénario n'est pas complète sans la prise en compte, en plus de toutes les activités résultant des tâches proposées, des moments de cours et des éléments du discours des enseignants qui participent à cette exposition des connaissances, même si ce ne sont pas des moments où les élèves sont le plus en activité¹ (au sens actif du terme!). Nous faisons donc l'hypothèse que l'efficacité des cours sur les apprentissages des élèves dépend de la qualité des liens explicites entre ce que l'enseignant expose au travers de son discours et les activités des élèves (échanges, questions, appui sur leur travail effectif...) qu'elles soient passées,

1. Des activités mathématiques ont certainement lieu pendant les moments de cours mais elles sont particulièrement inaccessibles, inobservables.

présentes ou à venir. Ces liens sont caractérisés par Robert & Vandebrouck (2014) en termes de *proximités discursives*. Selon Bridoux et al., 2016, il y a différents types de proximités qui distinguent un passage du contextualisé au décontextualisé (inductif), du décontextualisé au contextualisé (déductif) ou sans changement de niveau de discours entre contextualisé et décontextualisé.

C.2.2 Opérationnalisation du cadre théorique

Nous explicitons ce qui va constituer notre référence pour l'apprentissage d'une notion donnée. Cela passe par une opérationnalisation du cadre théorique pour préciser d'abord le sens que nous donnons à la conceptualisation² et ensuite la manière de définir cette référence comme articulation de plusieurs types d'analyses.

Suivant Vergnaud, *conceptualiser* une notion sur un ensemble de tâches signifie qu'il y a disponibilité des caractères objets et outils de la notion (Douady, 1986) et que les mises en fonctionnement correspondantes (Robert, 2008) sont effectives : cela inclut aussi l'organisation en réseau des connaissances impliquées (nouvelles/anciennes) en référence à la notion de champ conceptuel (Vergnaud, 1991). Le *niveau de conceptualisation* (Robert, 1998) spécifie la conceptualisation à un niveau scolaire donné en y adjoignant les programmes, les cadres et registres impliqués (Duval, 1993), le niveau de rigueur attendu (types de raisonnements, formalisme, démonstrations) et les spécificités épistémologiques de la notion. Enfin le *relief* d'une notion (Robert & Vandebrouck, 2014) complète le niveau de conceptualisation en ajoutant les difficultés des élèves connues avec les résultats des études didactiques correspondantes.

Le relief d'une notion (à enseigner) constitue notre référence pour l'apprentissage de cette notion, compte tenu de nos hypothèses. Il est le produit de l'articulation de trois types d'études : une étude épistémologique, une étude curriculaire et une étude didactique. Le relief d'une notion peut s'établir au « sens large », dans une institution ou être spécifié à un ou des niveaux d'enseignement donnés, auquel cas les 3 études sont restreintes à tout ce qui est abordé en lien avec cette notion dans les programmes de ces niveaux³ : dans notre cas, nous établirons le relief de la notion de fonction aux niveaux 3^e et 2^{de}, qui constituent la première rencontre avec cette notion, ce qui exclut par exemple la notion de dérivée ou de limite de fonction.

Précisons que les 3 études qui constituent le relief sont étroitement articulées. Ainsi, l'étude didactique des difficultés possibles et avérées des élèves, qui est basée sur les recherches antérieures consacrées à l'apprentissage de cette notion, tient compte des programmes et des obstacles épistémologiques identifiés. Ce relief nous permet de caractériser des choix possibles d'enseignement, et de lister, à partir des programmes, des enjeux d'apprentissage de la notion mathématique.

L'opérationnalisation du cadre dans l'analyse d'un cours passe par l'étude des différents types de proximités discursives dont la qualité a par hypothèse une incidence sur son efficacité. En référence à l'étude du relief, le chercheur dégage *a priori* du cours des *occasions de proximités* qu'il compare aux *proximités possibles* repérées dans le discours de l'enseignant après analyse des déroulements (Bridoux et al., 2016). Puisque nous nous limiterons à l'analyse de manuels, seules les occasions de proximité seront ici utilisées.

C.2.3 Objectifs et présentation de la recherche

Dans cette étude, nous poursuivons quatre objectifs principaux :

2. Rappelons que par hypothèse les apprentissages des élèves sont associés à la conceptualisation de la notion.

3. Suivant les études, les programmes des niveaux ultérieurs peuvent également être pris en compte.

- Établir le relief de la notion de fonction en 3^e-2^{de} ;
- Déterminer les besoins présumés des élèves pour les apprentissages liés à la notion de fonction en 3^e-2^{de} ;
- Construire un outil permettant d’analyser l’offre faite aux enseignants à travers le « cours » d’un manuel consacré aux fonctions à ces niveaux, outil qui confronte ces besoins à l’offre de ce manuel ;
- Utiliser cet outil pour analyser l’offre de plusieurs manuels des deux niveaux.

Nous expliquons maintenant comment nous nous proposons de répondre à ces objectifs.

Les hypothèses de notre cadre théorique et son opérationnalisation nous conduisent à adopter le relief de la notion de fonction en 3^e-2^{de} comme référence pour son apprentissage. Comme nous l’avons précisé plus haut, les études qui constituent le relief d’une notion interagissent de façon dialectique. Pour le confort du lecteur, nous commencerons par établir l’étude épistémologique de la notion selon 5 périodes historiques. Nous présentons ensuite des grandes thématiques qui sont autant de réservoirs pour des enjeux d’apprentissage par les élèves de la notion de fonction. Certaines thématiques sont liées à des sources de progrès qui se manifestent dans l’histoire de la notion et/ou à notre vision de l’apprentissage. D’autres thématiques anticipent des catégories importantes qui seront justifiées *a posteriori* par les deux autres études du relief. Cela nous permet d’organiser conjointement les études curriculaire et didactique selon ces thématiques tout en les enrichissant. À l’issue de l’étude du relief, des *enjeux d’apprentissage* de la notion se trouvent ainsi caractérisés selon une ou plusieurs thématiques. Nous en extrayons les *besoins présumés* des élèves qui sont des hypothèses faites par le chercheur sur les enjeux primordiaux de l’apprentissage de la notion.

Nous détaillons ensuite la construction de l’outil d’analyse des manuels en lien avec ces études. Il consiste en une grille mettant face à face les thématiques, des critères d’analyse au sein de ces thématiques, les objets du manuel sur lesquels l’analyse porte et les besoins présumés des élèves. Cet outil permet d’analyser ce qui constitue le « cours » du manuel, compris comme tout ce qui y est proposé en dehors des exercices⁴ de fin de chapitre : activités d’introduction, définitions, propriétés, méthodes, exercices corrigés. Il nous permet de confronter les choix du manuel avec les besoins présumés des élèves. Nous explicitons aussi des *points de vigilance* qui sont des enjeux transversaux. Cet outil d’analyse permet d’interroger les propositions faites par les manuels comme des scénarii potentiels d’enseignement de la notion de fonction, sans prétendre que l’offre du manuel détermine entièrement ce qui serait effectivement proposé en classe : à la fois l’offre d’un manuel ne peut y être suivie intégralement, mais les pratiques et choix de l’enseignant ont aussi un impact primordial sur les apprentissages des élèves. Nous considérons toutefois que si certaines pistes d’enseignement ne figurent pas dans les manuels alors il semble moins probable de les voir apparaître en classe. Nous faisons donc tout de même l’hypothèse que l’absence de prise en compte, par les manuels, de certains des enjeux que nous aurons pointés, peut laisser supposer une difficulté, pour les enseignants, à prendre en charge ces enjeux dans leur enseignement. C’est à cette aune que nous analysons les manuels des deux niveaux d’enseignement.

Dans cette recherche, nous nous limitons donc à l’amont de la classe. Nous détaillons d’abord la partie épistémologique de l’étude du relief de la notion de fonction aux niveaux 3^e et 2^{de} ainsi que les thématiques qui organiseront la suite de l’article. Puis, nous présentons les études curriculaire et didactique selon ces thématiques et précisons les enjeux d’apprentissage et les besoins présumés des

4. En premier lieu et même si cela aurait été intéressant vis-à-vis de nos objectifs, nous ne prenons pas en compte les exercices des manuels. Cela aurait nécessité un long temps de recherche supplémentaire et un espace plus important que celui de cet article.

élèves pour l'apprentissage de la notion de fonction à ces niveaux. Cela nous permet ensuite de construire notre outil d'analyse des manuels avant de l'utiliser pour analyser l'offre de plusieurs manuels et de discuter certaines limites et perspectives de cette étude.

C.3 Étude épistémologique de la notion de fonction

C.3.1 Quelques éléments d'histoire et d'épistémologie

Dans cette étude, nous nous basons sur l'Histoire de la notion de fonction telle qu'établie par les historiens des mathématiques pour insister sur les différentes « idées » ou « définitions » de fonction au cours de son développement historique, ainsi que sur les progrès mathématiques et concepts associés à ces définitions. Pour que le lecteur puisse se faire une idée sur ces définitions et pour y référer ultérieurement, nous prenons une définition de travail de la notion de fonction issue d'un manuel de 2^{de} : « On définit une fonction f sur un ensemble de nombres D en associant à chaque nombre x appartenant à D , un seul nombre réel y » (Math'X, 2^{de}). Pour comprendre les raisons d'être de la notion de fonction, nous précisons aussi quelques types de problèmes qu'elle a permis de considérer ou résoudre.

Nous fondons notre étude sur des recherches historiques (Dahan-Dalmedico & Peiffer, 1986 ; Monna, 1972 ; Youschkevitch, 1976) ainsi que sur des recherches didactiques intégrant des éléments historiques ou épistémologiques (Amra, 2003 ; Krysinska & Schneider, 2010 ; Passaro, 2015 ; Ponte, 1992 ; René de Cotret, 1988 ; M. Rogalski 2015 ; Sierpiska, 1992). Nous donnons une brève lecture moderne du développement historique des fonctions selon 5 périodes.

C.3.1.1 Période 1 : tables de valeurs

Entre l'Antiquité et le 14^e siècle, les fonctions apparaissent d'abord sous forme de tables numériques chez les Babyloniens pour des problèmes liés à l'astronomie, donc d'une manière quantitative. À partir de l'Antiquité grecque, l'étude de lois liées à des phénomènes physiques, par exemple en acoustique ou en optique, conduit à des considérations qualitatives en termes de covariations entre les grandeurs physiques impliquées, mesurées par des nombres (sans formalisme). Il n'y a pas de conception générale des notions de quantité variable ou de fonction.

C.3.1.2 Période 2 : premières représentations géométriques

Entre le 14^e siècle et la fin du 16^e siècle, les premiers concepts de cinématique se développent (vitesse instantanée, accélération, mouvement uniformément accéléré) et leur étude conduit à des descriptions verbales et aux premières représentations géométriques qualitatives (Bacon, Oresme et la « latitude des formes »). Avec l'invention d'instruments de mesure, de nouvelles représentations géométriques sont inventées (Galilée), qui conjuguent les aspects qualitatif et quantitatif. Cette période se caractérise par « un usage conscient d'idées générales au sujet des quantités variables dépendantes et indépendantes » (Youschkevitch, 1976, p.46) sans que ces termes soient définis.

C.3.1.3 Période 3 : expressions analytiques

Au cours du 17^e siècle, plusieurs progrès majeurs interviennent. D'abord, Viète invente l'algèbre symbolique littérale, qui permet de désigner à la fois les quantités inconnues (variables) et celles qui sont supposées connues (paramètres). Puis,

Descartes crée la géométrie analytique et introduit le concept d'équation (formule) d'une courbe géométrique et par conséquent la dépendance entre variables. Au cours de ce siècle, les fonctions apparaissent surtout sous forme de courbes basées sur des études de mouvements.

C.3.1.4 Période 4 : vers l'idée de correspondance

A la fin du 17^e siècle, même si les méthodes sont encore géométriques, il apparaît une conception unitaire de fonction en tant que formule algébrique (Gregory, Newton, Leibniz) et le mot « fonction » est inventé en 1673 (Leibniz). Au cours du 18^e siècle, les fonctions deviennent objets d'étude pour elles-mêmes, ne dépendant plus des cadres géométriques ou physiques. Ainsi, Bernoulli définit en 1718 : « On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque nombre que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ». Euler introduit une première définition générale de fonction comme expression analytique obtenue à partir des opérations algébriques ou analytiques (séries, intégrales, exponentielle,...) connues à cette époque. Les résolutions du problème des « cordes vibrantes » donnant lieu à certaines solutions qui ne satisfont pas à cette première définition, Euler donne une seconde définition de fonction (qui peut inclure aussi des courbes, y compris tracées à la main) en termes de dépendance arbitraire entre variables portant en germe l'idée de correspondance :

Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x , sont appelées fonctions de x .

À partir de ce moment, la fonction devient objet central de l'analyse. Entre la fin du 18^e siècle et le milieu du 19^e siècle, les mathématiciens débattent des deux définitions données par Euler. Les progrès en analyse amènent peu à peu à dépasser ce débat (Cauchy, Dirichlet, Fourier, Riemann) et conduisent à « la notion la plus générale d'une fonction (univoque) y , d'une variable indépendante x , conçue comme une correspondance arbitraire » (Dahan-Dalmedico & Peiffer, 1986, p. 231).

C.3.1.5 Période 5 : développements logiques et ensemblistes

À la fin du 19^e siècle, les travaux de Dedekind et Cantor initient le développement de la théorie des ensembles, au sein de laquelle Cantor définit la fonction comme application entre ensembles. Les travaux de Frege, Peano et Russell sur la formalisation de la logique permettent de définir la notion de fonction en termes de graphe ou de triplet d'ensembles avec une certaine relation binaire : les liens explicites avec la notion de variable, de dépendance ou de correspondance disparaissent.

C.3.2 Thématiques

Nous extrayons maintenant les 6 thématiques (de natures différentes) qui organiseront la suite de l'article : connaissances anciennes, statut outil/objet, aspects formels, registres, relations et perspectives fonctionnelles.

Selon nos hypothèses théoriques, les thématiques 1 à 4 sont liées à la conceptualisation ou au niveau de conceptualisation de la notion de fonction, auxquels sont associés les apprentissages des élèves. Les deux dernières thématiques sont propres

à la notion de fonction, émanant soit de l'étude précédente (thématique 5), soit de l'étude didactique à venir (thématique 6).

Les thématiques 2 à 5 se démarquent de l'étude précédente comme des progrès majeurs liés au développement historique de la notion de fonction. Nous en résumons les aspects principaux.

C.3.2.1 Statut outil/objet

Sous ses différentes formes, la notion de fonction a d'abord été outil implicite (périodes 1 et 2), puis outil de plus en plus explicite à partir des travaux de Viète et Descartes (période 3, début période 4) et enfin objet à partir des définitions de Bernoulli ou Euler. Son développement a été suscité par l'étude de grandeurs liées à des phénomènes physiques, par des problèmes géométriques ou par des progrès en physique (périodes 1 à 3) puis de plus en plus pour elle-même (périodes 4 et 5).

C.3.2.2 Aspects formels

Les idées de variable dépendante ou indépendante apparaissent au cours de la période 2, puis la dialectique variable/paramètre est consacrée par l'algèbre de Viète (période 3). La géométrie analytique de Descartes permet de définir la notion de variable dépendante (période 3) et la dialectique entre variable dépendante et indépendante s'affirme au gré des définitions de la période 4, jusqu'à celle de correspondance. Il n'y a ni unification, ni formalisation jusqu'au début de la période 3. La formalisation de la notion est initiée par Viète et Descartes et des notions unifiées de fonction apparaissent lorsqu'elle devient objet (période 4) donnant lieu à diverses généralisations jusqu'à la période 5.

C.3.2.3 Registres

L'idée de fonction apparaît sous forme de table numérique (période 1) puis de description verbale ou de représentations géométriques mêlant les aspects qualitatifs et quantitatifs (période 2). Au cours de la période 3, la « révolution symbolique » initiée par Viète et Descartes (Serfati, 2005) ouvre la voie à un registre algébrique d'une part et à un double registre formule-courbe (Descartes) d'autre part. Ces deux registres (algébrique, graphique) sont consacrés au cours de la période 4 en lien avec l'émergence d'un registre fonctionnel.

C.3.2.4 Relations

L'idée de fonction débute par celle de relation entre ensembles finis de quantités constantes (période 1) puis par celle de covariation entre grandeurs mesurées (période 1). Les aspects quantitatifs et qualitatifs se conjuguent (période 2) puis l'idée de dépendance entre variables est créée par Descartes (période 3). À mesure que la notion devient objet d'étude, des définitions de plus en plus générales apparaissent : dépendance arbitraire entre variables, correspondance arbitraire (période 4)...

C.4 Études curriculaires et didactiques de la notion de fonction

Suite à l'étude épistémologique précédente, nous complétons l'étude du relief de la notion de fonction par une étude curriculaire et didactique, organisée selon les thématiques dégagées ci-dessus que nous enrichissons par divers aspects. Il va de

soi que ces thématiques cultivent de nombreux liens que nous évoquerons dans ces études.

L'étude curriculaire porte sur les programmes de 2016 du cycle 4⁵ et sur les programmes de 2010 de la classe de 2^{de} : lors de l'analyse des manuels, nous revenons sur certaines précisions liées aux réformes de l'enseignement. Les relations de dépendance entre grandeurs mesurables et leurs représentations graphiques sont étudiées au début du cycle 4, ce qui permet d'introduire la notion de fonction en 3^e ainsi que les notions suivantes : variable mathématique, image, antécédent, fonctions affines et linéaires. En 2^{de}, la notion de fonction⁶ est définie comme une correspondance⁷ et les notions ci-dessus sont reprises et complétées par une étude des extrema et du sens de variation. En outre, l'herbier des fonctions connues s'enrichit (fonctions carrée, polynômes, inverses, homographiques).

L'étude didactique prend en considération les difficultés des élèves dans les premiers apprentissages de la notion de fonction et tout ce qui, selon nous, participe à la variété de ses aspects, dans sa formalisation ou ses usages. Pour réaliser cette étude, nous avons pris en compte diverses recherches didactiques globales sur les difficultés des élèves dans l'apprentissage des fonctions (Carlson, 1998, 2010 ; O'Shea, Breen & Jaworski, 2016). Nous nous concentrerons cependant plus spécifiquement sur des recherches qui conjuguent épistémologie et didactique (Krysinska & Schneider, 2010 ; Sierpiska, 1992). Pour permettre au lecteur de se référer à la recherche de Sierpiska (1992), nous utiliserons dans la suite ses notations pour les obstacles épistémologiques (EO(f)-i) ou pour les conditions nécessaires à la compréhension de la notion de fonction (U(f)-j). Par ces notations, nous référerons implicitement à cette recherche, sans le signaler à chaque fois pour ne pas alourdir l'écriture.

Nous déclinons l'étude curriculaire et didactique selon les thématiques, en tenant compte de l'étude épistémologique. Malgré la classification en thématiques et les lectures que nous avons faites, ces analyses ont une part pragmatique.

C.4.1 Connaissances anciennes

C.4.1.1 Aspects curriculaires

L'introduction de la notion de fonction en 3^e s'appuie sur les relations de dépendance entre grandeurs et leurs représentations graphiques. Elle suppose aussi d'autres prérequis : programmes de calcul, tableaux, proportionnalité et résolution d'équations. Le lien entre fonction linéaire et proportionnalité est vu en 3^e.

C.4.1.2 Enjeux d'apprentissage

En tant que schéma inconscient de pensée, la proportionnalité est un type de relation privilégié (EO(f)-9). Il y a donc un enjeu double à tenir : montrer aux élèves que la notion de fonction ne se réduit pas aux fonctions linéaires (ou même affines), leur présenter les fonctions linéaires comme modélisation des situations de proportionnalité, et donc les fonctions comme généralisation de la proportionnalité.

Un enjeu de la compréhension de la notion de fonction consiste à faire la différence entre 2 modes de pensée (U(f)-4) : l'un en termes de quantités connues et inconnues (équations), l'autre en termes de quantités variables et paramètres (fonctions). Puisque les équations sont abordées en amont de l'introduction de la notion de fonction, le premier mode de pensée pourrait être un obstacle épistémologique pour le second (EO(f)-4). À l'instar de Krysinska & Schneider (2010,.) nous y voyons plutôt un obstacle didactique qui pourrait être dépassé : « En étudiant des fonctions

5. Le cycle 4 (cycle des approfondissements) recouvre les classes de 5^e, 4^e et 3^e, pour des élèves âgés de 12 à 15 ans.

6. Fonction numérique réelle d'une variable réelle.

7. Voir la définition de travail au début de la section précédente.

préalablement aux équations, on pourrait apprendre aux élèves à penser "variable" d'emblée, cette variable devenant inconnue lorsqu'elle est soumise à des contraintes particulières » (Krysinska & Schneider, 2010, p. 53).

C.4.2 Statut outil/objet

C.4.2.1 Aspects curriculaires

En 3^e, la notion de fonction⁸ est supposée être introduite à la suite des relations de dépendance entre grandeurs et en 2^{de}, partant du travail réalisé au collège, l'objectif est de « faire émerger progressivement et sur des exemples concrets "un processus faisant correspondre à un nombre un autre nombre" »⁹. Toutefois, les programmes ne précisent pas son mode d'introduction. En classe de 2^{de}, il pourrait y avoir des possibilités pour l'introduire en tant qu'outil au sein de problèmes, liés par exemple à la recherche des variations et extrema, qui ne figurent pas au programme du cycle 4. La question des raisons d'être à la notion de fonction ou des problèmes possibles pour en approcher certains aspects se pose donc en classe de 3^e.

C.4.2.2 Enjeux d'apprentissage

L'Histoire de la notion de fonction montre une gradation dans l'évolution de son statut outil ou objet (Douady, 1986). Elle a longtemps été outil, d'abord implicite puis explicite, au service de problèmes impliquant des grandeurs (notamment physiques) qui lui ont conféré des raisons d'être. Il apparaît donc important d'être conscient de son usage possible pour modéliser des relations entre grandeurs (U(f)-8). Son accès au statut d'objet d'étude est conséquence de nombreux autres progrès et d'une généralisation de son usage en tant qu'outil.

Selon nos hypothèses, l'importance accordée aux activités mathématiques des élèves pour à la fois provoquer et accéder à leurs apprentissages, nous amène à chercher quelles sont les tâches permettant des activités pertinentes pour donner du sens au concept de fonction, en particulier en tant qu'outil nécessaire pour modéliser et résoudre des problèmes. Nous pointons donc l'enjeu à mettre en valeur sa dimension outil (à quoi ça sert), qu'elle soit explicite ou implicite, voire à l'intégrer au sein d'une dialectique outil-objet (Douady, 1986).

C.4.3 Aspects formels

C.4.3.1 Caractères formalisateur, unificateur, généralisateur

S'agissant de ces caractères, l'Histoire de la notion de fonction montre qu'ils s'y manifestent de manière intriquée : un processus de formalisation « tardif » (période 3), divers processus d'unification lorsqu'elle devient objet (période 4), et de généralisation (périodes 4 et 5). Ces caractères ont contribué aux définitions successives de certaines idées importantes qui étaient déjà présentes sous une certaine forme (fonction, dépendance entre grandeurs, variables...).

Avec une épistémologie si complexe, la notion de fonction peut difficilement être introduite comme « réponse à un problème », ou notion RAP (Robert, 1998), que ce soit au cours du cycle 4 ou en 2^{de}. Pour caractériser la nature de cette notion, qui n'est pas non plus une simple extension de notions précédemment vues, et envisager son introduction, nous réitérons ici le postulat, déjà fait dans Bridoux et al. (2015, 2016), que la notion de fonction, est une notion Formalisatrice, Unificatrice

8. Les programmes ne précisent pas la définition à donner, mais leur lecture suggère fortement une définition comme « processus ». Nous y reviendrons dans la section « Relation ».

9. Ressources pour la classe de seconde : Fonctions (Juillet 2009).

et Généralisatrice, ou notion FUG (Robert, 1998) au moment où elle est introduite en 3^e-2^{de}. Il s'agit

[...] d'introduire un formalisme généralisateur (noté f ou $x \mapsto f(x)$), unifiant notamment les processus de calcul explicites déjà vus, mais en retenant à la fois la correspondance [...] et l'ensemble des valeurs concernées [...] ainsi que l'ensemble des valeurs obtenues. (Bridoux et al., 2015, p. 24).

Ajoutons que la notion de fonction généralise la proportionnalité et, dans le cadre des programmes¹⁰ du cycle 4, elle permet aussi d'unifier certaines relations de dépendance entre grandeurs. Ainsi, une seule formule algébrique rend compte de nombreuses dépendances entre grandeurs de natures distinctes, ce qui témoigne d'un phénomène d'économie de pensée en passant des grandeurs aux fonctions numériques.

Par leur nature, les notions FUG sont éloignées des connaissances anciennes des élèves et on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas (de suites) d'activités, de situations fondamentales qui permettent d'introduire cette notion avec tout son sens, ou alors seulement partiellement (Robert, 2008). En particulier, la notion de fonction ne peut totalement apparaître en tant qu'outil pour résoudre un problème, ce qui renouvelle la question de savoir quels aspects de la fonction peuvent être mis en valeur dans de tels problèmes.

Dans la mesure où la notion de fonction est porteuse d'une complexité spécifique (notion FUG), et où cette complexité est déjà présente dans l'épistémologie de la notion, il y a un enjeu fort à prendre en compte ces caractères, notamment dans son introduction en 3^e et 2^{de}.

C.4.3.2 Variable, variable dépendante ou indépendante

Historiquement l'idée de variable dépendante ou indépendante est présente assez tôt (période 2), est définie en conséquence des travaux de Viète et Descartes (période 3), s'affirme en tant que dialectique entre les deux types de variables (période 4), avant de disparaître (période 5). À partir de la période 4, la « variable » ou la « variation » sont centrales dans les définitions successives de la notion de fonction (voir les définitions de Bernoulli, Euler ou Picard en début d'article).

Les notions de variable dépendante ou indépendante ne figurent pas explicitement au programme en 3^e ou en 2^{de}, celle de variable est au programme des deux niveaux mais la manière de l'aborder n'est pas précisée. De fait, cette notion est porteuse d'ambiguïtés qui n'ont été résolues historiquement que dans le cadre de la refondation de la Logique (Krysinska & Schneider, 2010, 2.1.5) pour désigner ses rôles au sein des prédicats. En conséquence, la notion de variable ne se définit pas dans le cadre de l'Analyse et y apparaît souvent comme un point de vocabulaire, en lien implicite avec la Logique ou la Théorie des Ensembles. Par exemple, partant du fait qu'une lettre « peut désigner soit un élément *déterminé*, soit un élément *arbitraire* (dit aussi *variable* ou *argument*) d'un ensemble » (Bourbaki, 1939, E.R.2), lorsque la notion de fonction est définie d'un ensemble E dans un ensemble F , elle est dite « fonction d'une variable parcourant E » (Bourbaki, 1939, E.R.6). Pour notre part, même si cela ne résout pas tout, nous supposons que la variable désigne le statut d'une lettre qui doit prendre une valeur dans un certain ensemble, sans que cette valeur soit arrêtée.

Des recherches identifient l'enjeu important pour les élèves à discriminer, ou à choisir, variable indépendante et variable dépendante (EO(f)-5, U(f)-5) dans le cadre de la dépendance entre grandeurs, de la variation, de la covariation ou de la correspondance (Grau, 2017; Krysinska & Schneider, 2010, 2.1.4; Passaro, 2015; René de Cotret, 1988). Nous y reviendrons dans la thématique « relation ».

10. Ceci n'était pas pris en compte dans la citation ci-dessus car les programmes du cycle 4 datent de 2016.

C.4.3.3 Variables et paramètres, classes paramétrées

L'invention de la dialectique entre variables et paramètres au sein du symbolisme algébrique (Viète, Descartes) est une étape décisive dans l'Histoire de la notion de fonction. Certains auteurs proposent de la prendre en compte dès le collège en donnant une vraie place aux paramètres dans l'apprentissage de l'algèbre (Chevallard, 1989) ou en prenant en compte une « double algébrisation » variable/paramètre pour la modélisation fonctionnelle (Krysinska & Schneider, 2010, Chapitre 2) en cohérence avec la distinction équation/fonction (U(f)-4, EO(f)-4) abordée ci-dessus dans la section « connaissances antérieures ».

D'une part, les paramètres permettent d'unifier des problèmes étrangers au sein d'une même *classe paramétrée*, par exemple celles de la proportionnalité directe ($f(x) = ax$) ou du second degré ($f(x) = ax^2 + bx + c$) (Krysinska & Schneider, 2010, 2.2.3). D'autre part, les paramètres confèrent « à un modèle fonctionnel donné des "degrés de liberté" qui le rendent adaptable aux spécificités du problème » (Krysinska & Schneider, 2010, p. 127), ce qui assure la généralité de certains résultats. Dans ce cadre, les variables jouent alors un rôle opératoire, permettant par exemple des substitutions (Serfati, 2005). Les classes paramétrées enrichissent aussi l'herbier des fonctions connues. Les fonctions linéaire ou affines (3^e), et en plus celles du second degré ou homographiques (2^{de}) offrent la possibilité d'évoquer les classes paramétrées.

Ces constats sur les paramètres renforcent selon nous l'enjeu de l'interprétation FUG de la notion de fonction pour les caractères d'unification et de généralisation. Cela nous invite à prendre en compte ce double rôle variable/paramètre et les possibilités des classes paramétrées pour unifier ou généraliser.

C.4.4 Relation

Nous avons rappelé ci-dessus les différentes relations qui ont donné lieu à des idées de fonction au cours de l'Histoire : covariation de grandeurs, dépendance entre grandeurs, correspondance. Au cycle 4, les relations de dépendance entre grandeurs et leurs représentations graphiques doivent aboutir à la notion de fonction (en tant que processus), et en 2^{de}, la fonction est présentée comme correspondance. La notion de variation est approchée au cycle 4 et étudiée en 2^{de}.

De nombreuses recherches pointent l'importance de ces diverses relations dans la compréhension de la notion de fonction ou ses raisons d'être. À l'instar de ce qui est suggéré en cycle 4, certains auteurs pensent que l'idée de dépendance entre grandeurs permet d'accéder à un premier stade de la compréhension de la notion de fonction, mais que cette idée requiert la prise en compte de la notion de variation (Comin, 2005 ; René de Cotret, 1988). Selon Piaget, Grize, Bang, et Szeminska (1968), l'idée de covariation apparaît centrale dans la compréhension de la notion de fonction par les élèves (7 à 13 ans) d'où l'importance de la considérer comme « double variation concomitante » (Krysinska & Schneider, 2010, p. 35-36), ou de distinguer un regard lié à la correspondance et un regard lié à la covariation (Monk, 1992 ; Confrey & Smith, 1995, Passaro, 2015).

Un enjeu dans l'apprentissage de la notion de fonction est l'identification des changements et des régularités dans les relations entre ces changements (U(f)-1 et 2). Ces travaux indiquent la pertinence à aborder la variation assez tôt, y compris dans son lien avec la dépendance entre grandeurs, et à adopter à la fois une approche du concept de fonction en termes de covariation et de correspondance, en y discriminant les variables dépendante et indépendante (voir ci-dessus).

Selon nous, cela suppose aussi de proposer aux élèves des problèmes pour montrer des raisons d'être et une plus-value de la notion de fonction, au travers de l'étude de variations, de covariations, d'extrema (voir section « statut outil/objet »). Ce

type de problème permet aussi de se focaliser non plus sur quelques valeurs ou couples de coordonnées, mais de considérer ces valeurs, et leur lien, dans leur ensemble, afin de porter un regard *global* sur la fonction, ses variations et ses extrema. Nous y reviendrons dans la section « perspectives fonctionnelles ».

C.4.5 Registres

Selon Duval (1993), la compréhension d'un concept mathématique dépend de l'usage et de la coordination de ses différents registres de représentations, dans des tâches où cet usage et cette coordination pourraient avoir lieu. L'analyse historique et épistémologique ci-dessus montre qu'une première approche de ce qui deviendra les fonctions s'est faite sous forme de tables numériques, puis sous forme graphique et verbale, avant de pouvoir l'être algébriquement après les travaux de Viète et Descartes et en fin de compte sous forme fonctionnelle. La notion de fonction présente ainsi une grande richesse en termes de registres dont certains sont présents en 3^e et 2^{de}.

C.4.5.1 Aspects curriculaires

Les programmes du cycle 4 préconisent un travail sur les registres numérique, graphique, algébrique et sur le passage d'un registre à un autre. Les définitions et propriétés associées aux fonctions y sont introduites et travaillées dans différents registres, et on fait l'hypothèse que leur articulation est un enjeu important pour la compréhension de la notion de fonction selon les programmes.

Dans le registre numérique, les élèves ont rencontré avant la 3^e des tableaux de valeurs numériques, en particulier dans des situations de proportionnalité. Le lien avec les programmes de calcul peut être fait pour introduire la notion de fonction au collège, comme un processus permettant de calculer des valeurs-images, et que l'on peut remonter pour trouver des valeurs-antécédents. Par rapport aux fonctions, les programmes de calcul ne s'intéressent généralement pas à l'ensemble des valeurs de départ et d'arrivée ni à leurs covariations, pas plus qu'aux valeurs maximales ou minimales de sortie.

Dans le registre algébrique, les élèves ont déjà été amenés à utiliser la lettre pour modéliser des situations, généraliser et prouver, dans des cas où cette lettre a un statut de nombre généralisé ou d'inconnue, et sans rencontrer généralement de quantification explicite. Les transformations d'expressions ont aussi été travaillées, avec un statut du signe égal qui change pour ne plus être seulement l'annonce du résultat d'un calcul, mais devenir la marque d'une équivalence. Deux expressions sont équivalentes, soit parce qu'on peut transformer l'une pour obtenir l'autre (équivalence de nature procédurale, avec la lettre comme nombre généralisé), ou parce qu'on obtient le même nombre en substituant dans chacun des membres la lettre par des valeurs numériques (équivalence de nature numérique, avec la lettre comme une variable). Le statut de la lettre dans une même écriture littérale peut donc changer plusieurs fois au cours d'une même tâche, ou prendre des sens différents suivant le traitement qu'on fait de ces écritures. La description de l'objet mathématique fonction dans le registre algébrique est attachée à trois composants : la correspondance, les éléments de départ (souvent un intervalle en 2^{de}) et ceux d'arrivée. L'objet fonction sous cette forme présente trois différences principales avec le programme de calcul : on s'intéresse à la correspondance éventuellement sans explicitation des valeurs prises, on s'intéresse à l'ensemble des valeurs concernées et il y a une clause d'unicité de l'image. De plus la traduction algébrique de la monotonie en 2^{de} met en jeu la relation d'ordre sur l'ensemble des réels et des éléments de logique propositionnelle.

Dans le registre graphique, l'interprétation de l'allure d'une courbe a déjà été travaillée dans la scolarité antérieure, en lien avec le phénomène qu'elle modélise, sans recours à une quelconque formalisation. Les élèves doivent aussi déjà savoir lire des coordonnées d'un point et placer des points de coordonnées données dans un repère orthogonal, mais sans encore questionner les liens existants entre ces coordonnées ou couples de coordonnées. L'apprentissage des graphiques lors de l'introduction du concept de fonction concentre plusieurs enjeux pointés dans Bridoux et al. (2016). En premier lieu, la représentation graphique d'une fonction est non congruente à son expression algébrique, celle-ci n'étant en général pas lisible directement sur le graphique. Ensuite, il y a un enjeu fort lié à la compréhension de l'équivalence suivante à la frontière des registres algébrique et graphique : un point de coordonnées (x, y) appartient à la courbe représentative de f si et seulement si ce point a pour coordonnées $(x, f(x))$. En effet, cette équivalence permet de transférer des informations de la courbe sur la fonction ou inversement des informations de la fonction sur sa courbe : lecture de valeurs de coordonnées, d'intervalles sur les axes, résolution d'équations ou d'inéquations, extrema, et covariation de x et $f(x)$. Or,

[...] pour travailler sur cet aspect, on doit réaliser en actes une substitution liée à une transitivité — remplacer y par $f(x)$ et (x, y) par $(x, f(x))$ — très difficile, très éloignée de ce que les élèves savent faire. (Bridoux et al., 2016, p. 203).

Hormis dans le cas de courbes « simples » (droites), où deux points distincts suffisent à renseigner sur la courbe, c'est grâce à l'équivalence ci-dessus qu'on peut amener les élèves à justifier le fait de relier, et pas toujours par des segments de droites, des points isolés et « proches » appartenant à la courbe de f . Mais pour que cela ait du sens, il semble nécessaire que les deux sens de cette équivalence soient traités explicitement, et que l'on signale aux élèves l'intérêt qu'on porte à l'ensemble des points de la courbe, dans une perspective globale, et non seulement ponctuelle. Nous y reviendrons dans la section suivante.

C.4.5.2 Enjeux d'apprentissage

De nombreux auteurs se sont intéressés aux registres de représentation des fonctions (Amra, 2003 ; Coppé, Dorier & Yavuz, 2007 ; Derouet & Panero, 2014 ; Guzman-Retamal, 1989 ; Vandebrouck, 2011a). Dans la suite, nous avons fait le choix de considérer, compte tenu du niveau scolaire étudié, les registres principaux nommés de la façon suivante : algébrique, graphique, numérique (dont tableaux de valeurs), fonctionnel (dont notations formelles), schématique (tableau de variation) et langue naturelle. Certains auteurs font plutôt le choix de parler d'ostensifs et d'instrumentalité entre ces ostensifs (Krysinska & Schneider, 2010).

S'agissant des registres, nous citons quelques-uns des nombreux enjeux d'apprentissage de la notion de fonction. D'abord, il est important de travailler tous les registres, de les faire varier (U(f)-16 ; Hitt & Morasse, 2009), mais il faut aussi que ces différents registres réfèrent au même être mathématique (U(f)-15 ; Raftopoulos & Portides, 2012). La compréhension d'un contenu passant par la coordination d'au moins deux registres (Duval, 1993), il convient aussi de les articuler, voire de les confronter pour mettre en valeur limites et avantages de chacun. Dans l'enseignement, les conversions d'un registre à un autre sont souvent mésestimées ou absentes (Duval, 1993) alors que des registres différents donnent à voir des aspects différents d'une même notion. En outre, une même propriété ne s'exprime pas de la même façon dans des registres différents¹¹ : si cela n'est pas signalé par l'enseignant, c'est une reconnaissance à la charge de l'élève. Enfin, l'apprentissage d'une notion

11. Ainsi, la parité d'une fonction f peut se caractériser sur l'intervalle I en termes de symétrie de la courbe, par « $\forall x \in I, f(x) = f(-x)$ » ou par « l'image par f d'un élément de I et de son opposé est la même ».

résulte en partie des initiatives laissées aux élèves dans les choix de registres, selon nos hypothèses théoriques (Robert, 2008).

Certains registres ou passages entre registres présentent des enjeux particuliers pour les élèves. Il s'agit de dépasser l'obstacle qui consiste à croire que la fonction se réduit à son expression dans le registre algébrique (EO(f)-11) ou dans le registre graphique (EO(f)-15) et, selon Sfard (1992), le lien entre les registres algébrique et graphique fonctionne seulement « en association globale ». Krysinska et Schneider (2010, 2.2.8) pointent l'importance du lien entre les registres algébrique et fonctionnel (en termes d'ostensifs f et $f(x)$). Enfin, des passages moins usuels sont jugés cruciaux : entre registre numérique et registre algébrique (Krysinska & Schneider, 2010, 3.2), entre registre graphique et registre algébrique (Krysinska & Schneider, 2010, 3.3). Nous y revenons ci-dessous.

C.4.6 Perspectives fonctionnelles

C.4.6.1 Définitions

Des travaux pointent l'importance pour conceptualiser la notion de fonction de considérer les types de propriétés ponctuelle, globale, locale (Chorlay, 2007, 2011 ; Maschietto, 2001, 2008 ; M. Rogalski, 2008 ; Vandebrouck, 2011a, 2011b) et d'adopter des *perspectives fonctionnelles* à leur sujet (M. Rogalski, 2008). Pour la conceptualisation, les perspectives sont des « points de vue spécifiques dans le travail sur les fonctions associées aux trois types de propriétés sur les fonctions : ponctuelles, globales, locales » (Vandebrouck, 2011b, p. 6-7). Ainsi, une propriété fonctionnelle est dite *ponctuelle* si elle ne dépend que des valeurs de la fonction en un point, *globale* si elle est valable sur un intervalle, *locale*¹² si elle ne dépend que des valeurs de la fonction au voisinage d'un point aussi petit soit-il¹³. Il y a aussi des propriétés *ponctuelles universelles* vérifiées pour toute valeur de l'ensemble de définition (elles sont donc globales).

L'énoncé de certaines propriétés globales fait plus ou moins travailler la perspective globale (Vandebrouck, 2011a, 2011b) : c'est souvent le cas des propriétés ponctuelles universelles. Par exemple, si on dit qu'une fonction f est paire sur I , la propriété est globale tout comme la perspective. En revanche, si on dit que pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$, la propriété est ponctuelle universelle (donc globale) mais la perspective est davantage ponctuelle que globale. On remarquera que ces propriétés sont équivalentes mais pas énoncées dans le même registre. Certaines propriétés globales ne peuvent pas se traduire au moyen d'une propriété ponctuelle universelle portant sur une seule variable. C'est le cas de la monotonie qui, sans hypothèse de dérivabilité, nécessite la prise en compte de deux valeurs de la variable.

C.4.6.2 Enjeux d'apprentissage

Il y a un enjeu fort à faire travailler et conjuguer les différentes perspectives fonctionnelles en lien avec différentes définitions ou propriétés. Mais, selon le travail demandé, tous les registres pris pour eux-mêmes n'ont pas la même *valence* en termes de perspectives fonctionnelles (Vandebrouck, 2011a, 2011b), certains étant producteurs ou réducteurs pour certaines perspectives (Bloch, 2003). Souvent, le registre numérique ne fait travailler que la perspective ponctuelle, le registre graphique ne permet d'adopter qu'une perspective ponctuelle ou globale, et le registre

12. Puisqu'on est situé en 3^e-2^{de}, les aspects locaux ne sont pas abordés.

13. Ainsi, la positivité d'une fonction en un point est ponctuelle, la monotonie ou la parité d'une fonction sur un intervalle sont globales et la continuité ou la dérivabilité d'une fonction en un point sont locales.

algébrique ne soutient une perspective globale que pour les « experts »¹⁴ (Raftopoulos & Portides, 2010).

Il est aussi important de prendre en compte la richesse des changements de perspectives fonctionnelles lors de certains passages entre registres. On a déjà cité le passage du registre numérique au registre algébrique (Krysinska & Schneider, 2010, 3.2) qui peut faire travailler une perspective globale par un travail sur la régularité du tableau. Il y a également le passage du registre graphique au registre algébrique (Krysinska & Schneider, 2010, 3.3), qui peut aussi faire travailler une perspective globale en passant à une formule paramétrée que l'on ajuste ensuite à d'autres contraintes (ponctuelles ou globales), ce qui peut par exemple être le cas d'un graphique qui « ressemble » à une droite ou une parabole.

Nous faisons l'hypothèse que la perspective globale joue un rôle important dans la conceptualisation de la notion de fonction, permettant de détacher la notion d'autres outils déjà rencontrés par les élèves qui sont attachés à une perspective ponctuelle.

C.4.7 Besoins présumés des élèves

Nous extrayons de l'étude du relief de la notion de fonction les *besoins présumés* des élèves qui sont des hypothèses faites par le chercheur sur les enjeux primordiaux de l'apprentissage de la notion en 3^e-2^{de}. Nous les évoquons selon la thématique et leur attribuons un code « B-i » pour pouvoir y référer dans la suite.

C.4.7.1 Connaissances anciennes

Les élèves ont à la fois besoin de lien entre proportionnalité et fonctions linéaires et de comprendre que la notion de fonction ne se réduit pas à celle de fonction linéaire ou affine (B-1). La distinction entre 2 modes de pensée (équation, fonction) apparaît nécessaire (B-2).

C.4.7.2 Statut outil/objet

Que permet l'outil fonction que les connaissances anciennes des élèves (qui sont aussi des prérequis) ne permettent pas de résoudre? Selon nous, il y a un besoin à introduire autant que faire se peut la fonction comme outil nécessaire pour modéliser ou résoudre des problèmes, ce qui permet d'en révéler certains aspects. Nous considérons qu'il est crucial que la fonction soit par moments outil (explicite, implicite) ou être introduite au sein d'une dialectique outil-objet (B-3). L'étude de variations, de covariations ou d'extrema peut mettre en valeur les raisons d'être et la plus-value de cet outil (B-4), et permettre de démarquer cet outil des outils de calculs (numérique ou algébrique) qui sont par exemple souvent inefficaces dans une recherche d'extrema.

C.4.7.3 Aspects formels

La nature FUG de la notion de fonction nécessite pour les élèves une prise en compte de ses caractères formalisateur, unificateur et généralisateur (B-5). La notion de variable mérite d'être explicitée et il est important de permettre aux élèves de savoir choisir ou discriminer la variable indépendante et dépendante dans une diversité de relations fonctionnelles (dépendance, variation, covariation, correspondance) (B-6). Il paraît nécessaire de prendre en compte la double algébrisation

14. Pour les élèves, on peut considérer qu'il est « difficile » de déterminer la monotonie d'une fonction sur un intervalle à partir de sa formule.

variable/paramètre dans la modélisation fonctionnelle, en particulier via les possibilités offertes par les classes paramétrées (B-7). En lien avec (B-1), le fait de proposer aux élèves des fonctions autres qu'affines serait un enjeu fort pour marquer une rupture entre l'objet fonction et d'autres objets, de même que de proposer un herbier de fonctions de référence (y compris en termes de classes paramétrées) pour lesquelles ils développeraient des capacités de reconnaissance, liées à certaines caractéristiques des fonctions.

C.4.7.4 Relation

Les besoins principaux sont explicités en (B-4) et (B-6).

C.4.7.5 Registres

Les différents registres de la notion de fonction doivent à la fois être travaillés pour eux-mêmes et référer au même être mathématique (B-8). Il y a nécessité à permettre aux élèves des activités de conversion d'un registre à un autre, d'articuler, de confronter, de choisir des registres (B-9). Certains passages entre registres peu usuels pourraient être importants dans une perspective globale (voir ci-dessous).

C.4.7.6 Perspectives fonctionnelles

Les perspectives fonctionnelles (ponctuelle, globale) font adopter des points de vue cruciaux sur les propriétés ponctuelles, ponctuelles universelles, globales. Il est important de les travailler pour elles-mêmes, de les conjuguer, au travers aussi des registres qui n'ont pas une valence constante en termes de perspectives ponctuelle ou globale (B-10). Certains passages entre registres manifestent *a priori* aussi une richesse en termes de changements de perspectives (B-11), par exemple du registre numérique au registre algébrique ou du registre graphique au registre algébrique. La mise en valeur de la perspective globale est supposée jouer un rôle important dans la conceptualisation de la notion de fonction (B-12).

C.5 Construction de l'outil d'analyse

À l'issue de l'étude du relief de la notion de fonction en 3^e-2^{de}, nous détaillons maintenant la construction de notre outil d'analyse de l'offre d'enseignement consacrée à cette notion dans la partie « cours » des manuels. Nous détaillons d'abord la construction d'une grille d'analyse selon les thématiques et besoins présumés des élèves, et évoquons ensuite trois *points de vigilance* transversaux pour cette analyse.

C.5.1 Grille d'analyse

Pour estimer l'offre faite aux enseignants par les cours des manuels de 3^e et 2^{de} pour l'apprentissage des fonctions par les élèves, nous construisons une grille qui est notre outil principal pour analyser la palette de choix possibles dans chaque manuel à des fins de les comparer. Nous interrogeons les propositions faites par les manuels comme des scénarii potentiels d'enseignement de la notion de fonction. La grille nous permet de voir de quelle façon le cours d'un manuel prend en compte, explicitement ou non, les enjeux d'apprentissage au sein de chacune des thématiques précédemment définies, en particulier les besoins présumés des élèves (voir ci-dessus). Nous ne questionnons pas ici a posteriori la mise en œuvre de ces scénarii, mais uniquement l'offre d'enseignement qu'ils proposent a priori, et ne présumons pas de ce qui va se passer en classe. Bien entendu, l'offre proposée par les cours des manuels ne détermine pas entièrement ce qui sera effectivement proposé

en classe, comme le montrent les différentes études portant sur l'usage des manuels par les enseignants. Nous savons que l'usage effectif du manuel par les enseignants ne peut suivre ce scénario intégralement (il ne semble pas envisageable, par exemple, de proposer toutes les activités d'introduction ou toutes les méthodes d'un manuel sur un chapitre donné). Mais nous considérons au moins que si certaines pistes d'enseignement ne figurent pas dans cours des manuels (absence de certaines tâches dans les méthodes ou exercices corrigés, de certaines formulations) alors il semble moins probable de les voir apparaître en classe. Nous nous autorisons donc à faire l'hypothèse que l'absence de prise en compte de certains enjeux ou besoins dans ces scénarii pourrait risquer d'entraîner aussi leur non prise en compte en classe.

Notre outil permet d'analyser le « cours » d'un manuel, c'est-à-dire tout ce qui y est proposé en dehors des exercices à la fin du chapitre : activités d'introduction, définitions, propriétés, exemples, méthodes, exercices corrigés... C'est parce que le nombre d'exercices proposés dans les manuels est très important (une centaine par chapitre pour 2 à 4 chapitres par ouvrage), que nous n'avons pas choisi de réaliser leur analyse exhaustive ici. Si cette analyse des tâches aurait pu nous permettre de mieux cerner les usages et aspects des fonctions données à travailler aux élèves à partir des manuels, nous supposons néanmoins qu'il n'est pas possible pour un enseignant de les proposer tous. Cette analyse des pages d'exercices, qui reste à faire, nous aurait permis de pointer éventuellement l'absence ou la présence de certaines tâches, ou de comparer la proportion de tâches mettant en lumière chacun des enjeux d'apprentissage ou besoins présumés listés.

Notre grille d'analyse comporte 4 colonnes mettant face à face la thématique, les valeurs possibles (les éléments qui ont été décrits au sein de chaque thématique), l'endroit du cours où on cherche prioritairement (mais pas exclusivement) des traces de ces éléments (où ?) et les besoins présumés des élèves. Pour alléger le contenu du tableau, nous fixons des notations pour les endroits où nous cherchons prioritairement les valeurs :

- connaissances anciennes : rappels (*1) ;
- statut outil/objet : rappels, activités de découverte (*2) ;
- aspects formels, registres, perspectives fonctionnelles : tout (*3) ;
- relation : activités de découverte, définitions de fonction (*4).

C.5.2 Points de vigilance

En plus de la grille précédente, notre analyse prend aussi en compte trois points de vigilance dans les manuels, qui sont des enjeux transversaux. Nous expliquons en quoi ils nous semblent importants.

C.5.2.1 Occasions de proximité

Compte tenu de nos hypothèses théoriques, nous soulignons l'enjeu à proposer aux élèves des liens explicites entre les contenus contextualisés et décontextualisés. Il s'agit en particulier d'apprécier les occasions de proximité entre les activités de découverte et le cours d'une part (contextualisé vers décontextualisé), entre le cours et les exercices corrigés ou les méthodes¹⁵ d'autre part (décontextualisé vers contextualisé). Pour nous, le passage entre les savoirs décontextualisés et leur mise en fonctionnement dans les tâches (méthodes ou exercices corrigés) mettent en lumière les occasions de relier explicitement les objets du cours et les activités mathématiques potentielles, où ces objets, devenus outils contextualisés, permettent de résoudre ou de justifier la résolution.

15. En général, les liens entre les cours et les exercices sont aussi analysés. Rappelons que nous ne considérerons pas les exercices dans notre étude.

Thématique	Valeurs	Où ?	Besoins présumés
Connaissances anciennes	programme de calcul équation tableau proportionnalité dépendance	(*1)	(B-1) (B-2)
Statut outil/objet	outil implicite outil explicite objet	(*2)	(B-3) (B-4)
Aspects formels	formalisateur unificateur généralisateur variable/paramètre classe paramétrée	(*3)	(B-1) (B-5) (B-6) (B-7)
Relation	dépendance variable indépendante variable dépendante variation covariation correspondance	(*4)	(B-4) (B-6)
Registres	algébrique numérique graphique fonctionnel schématique langage courant	(*3)	(B-8) (B-9)
Perspectives fonctionnelles	ponctuelle ponctuelle universelle globale	(*3)	(B-10) (B-11) (B-12)

FIGURE C.1 – Grille d’analyse

C.5.2.2 Image et antécédent

Nous souhaitons explorer la manière dont les notions d’image et d’antécédent (toutes deux au programme en 3^e et en 2^{de}) sont traitées dans les manuels pour voir dans quelle mesure elles pourraient être en décalage avec certains des besoins que nous avons énoncés.

D’abord, il nous semble que le seul travail de recherche d’image ou d’antécédent ne permet pas d’appréhender la nécessité et la plus-value de l’outil fonction, par rapport aux programmes de calcul et aux équations, mais uniquement d’en travailler la dimension objet, en exploitant les registres dans lesquels est donnée la fonction (numérique, algébrique, graphique) pour traiter des données.

De plus, les types de tâche liés à ces notions pourraient porter essentiellement sur le registre dans lequel on travaille, ne permettant pas selon nous de déployer le concept de fonction dans ses différentes représentations, pas plus qu’il ne met en lumière la façon dont le concept permet d’unifier ces différentes représentations, déjà connues des élèves, sans pour autant être rattachées à la notion de fonction. Nous faisons l’hypothèse qu’un travail limité à un seul registre, algébrique ou graphique, qui ne donnerait pas accès à ce que peut apporter le fait de travailler les deux registres conjointement ou de les confronter, dans des cas où ces passages entre registres sont pertinents, ne permet pas de commencer à appréhender le concept de fonction.

Enfin, la recherche d'images ou d'antécédents concerne généralement une valeur ou un ensemble fini de valeurs. Or nous supposons que le travail répété dans la perspective ponctuelle, sans prendre en compte ce qu'ajoute la connaissance de la nature (globale) de la fonction, ne facilite pas la conceptualisation de la notion de fonction dans sa perspective globale, et ne permet pas d'apprécier ce qu'ajoute cette notion au travail algébrique ou graphique déjà abordé au collège (mais peut-être pas encore maîtrisé par tous les élèves).

C.5.2.3 Variations

Les variations des fonctions sont au cœur de différents enjeux que nous resituons.

L'étude de l'histoire de la notion montre que l'idée de variation, voire de covariation, a accompagné l'émergence puis le développement de l'idée de fonction. Nous avons donc fait l'hypothèse que c'est au travers des problèmes portant sur les variations et extrema d'une fonction que le concept peut prendre sens pour les élèves lors de son introduction, et se démarquer des outils de calcul numérique ou de recherche algébrique d'inconnue présents dans d'autres cadres, outils qui sont relativement inefficaces dans une recherche d'extrema. En effet, le registre algébrique ne donne pas immédiatement accès aux variations de la fonction, ou alors seulement pour les « experts » en mobilisant des connaissances liées à sa nature, dans une perspective globale. Le registre graphique en revanche permet d'approcher cette perspective globale de façon plus immédiate, mais approximative.

La question des variations amène aussi à réfléchir à la relation entre les deux variables en jeu dans la fonction, qu'elle soit exprimée comme une relation de correspondance et/ou de covariation plus ou moins explicite. Il nous semble important de caractériser la manière dont les manuels approchent et formulent l'idée de sens de variation au programme de 2^{de}, en lien avec l'idée de covariation ou pas, dans tel ou tel registre, de manière plus ou moins dynamique...

L'expression de la relation entre les deux variables n'est probablement pas visible de la même façon selon les registres. Le registre graphique, par exemple, nous semble permettre de « comparer » des couples de valeurs, de façon plus systématique que ne le permet le tableau de valeurs, et en tout état de cause plus facilement que le registre algébrique, qui nécessite alors des connaissances complémentaires (sur la nature des fonctions, des techniques sur le sens de variation).

C.6 Exemples d'analyse de manuels

C.6.1 Présentation des manuels

Pour notre recherche, nous avons choisi des manuels scolaires de mathématiques d'éditeurs différents. Nous avons analysé 5 manuels de cycle 4 (rassemblant les classes de 5^e, 4^e et 3^e dans un même ouvrage) basés sur le programme de 2016 et 5 manuels de 2^{de} de 2014 basés sur le programme de 2010¹⁶ (Hyperbole, Math'X, Odyssee, Sésamath, Transmath). À des fins de comparaison, nous avons également analysé 4 manuels de 3^e des programmes de 2008¹⁷ : les notions au programme sont les mêmes qu'en 2016 (notion de fonction, image, antécédent, fonction linéaire, fonction affine) mais les programmes ne proposent pas d'introduire la notion de fonction

16. Ces programmes ont été légèrement amendés en 2016 mais pas en ce qui concerne les fonctions en-dehors de l'ajout de la fonction racine carrée. Aucun des manuels choisis n'a été réédité depuis, à l'exception d'Hyperbole : par cohérence, on ne compare donc ici que les manuels de 2014, excluant Hyperbole 2017.

17. Pour pouvoir regarder l'impact du passage à l'enseignement par cycles au collège, nous avons analysé des manuels des programmes précédents et actuels, les réformes n'intervenant par ailleurs pas les mêmes années pour le collège et le lycée.

à partir des dépendances entre grandeurs et n'insistent pas sur les changements de registre. La liste de ces manuels est récapitulée dans le tableau 2. Dans les manuels de 3^e, nous avons analysé tous les chapitres qui concernent les fonctions et, de même en 2^{de} en insistant plus particulièrement sur le chapitre « généralités ».

	2008	2010	2016
Cycle 4			5 manuels Delta Mathématiques Delta Maths Maths Dimensions Maths Monde Sésamath
3 ^e	4 manuels Dimathème Phare Transmath Triangle		
2 ^{de}		5 manuels Hyperbole Math'X Odysée Sésamath Transmath	

FIGURE C.2 – Manuels analysés

C.6.2 Quelques résultats

Nous dégageons quelques résultats de notre analyse selon les thématiques et les besoins présumés des élèves et en prenant en compte les points de vigilance explicités ci-dessus. Pour chaque aspect de cette analyse, nous donnons une vision de son traitement par l'ensemble des manuels, avant d'illustrer plus précisément certaines idées par des exemples.

C.6.2.1 Connaissances anciennes

En 3^e, quelques activités introductives ont trait à la proportionnalité et à la façon de la représenter dans les registres numérique ou graphique. Dans le cours, deux manuels de 2008 ne réfèrent à la proportionnalité dans le cadre des fonctions linéaires que dans un registre numérique (tableau de proportionnalité) ou algébrique (images proportionnelles aux antécédents), ce qui témoigne selon nous d'un lien tenu entre proportionnalité et fonction linéaire. Dans les autres manuels de 2008 et en 2016, soit la fonction linéaire est définie comme modélisant une situation de proportionnalité, soit elle est définie d'abord dans un registre algébrique puis ce lien est mis en valeur. Même si le terme de « modélisation » y est peu explicité, ce lien est manifeste. La notion générale de fonction est toujours définie avant celle de fonction linéaire, ce qui est supposé indiquer qu'elle ne se réduit pas à celle de fonction linéaire. C'est aussi selon nous une occasion de proximité manquée pour montrer le caractère généralisateur de la notion de fonction compte tenu d'activités contextualisées liées à la proportionnalité. En 2^{de}, tout lien clair entre la proportionnalité et les fonctions linéaires a disparu. Selon nous, ces manuels se privent d'un lien entre des connaissances anciennes et nouvelles, qui aurait pu permettre de souligner une plus-value de la fonction ou souligner son caractère généralisateur.

Dans les manuels de 3^e, toute référence explicite aux équations ou à l'algèbre est absente (ou presque), les termes « inconnue » et « équation » n'étant jamais cités (ou alors très peu). Il semble que ces manuels ne prennent pas en compte les difficultés liées à l'algèbre et n'identifient pas le mode de pensée lié aux équations dans des activités où il aurait pu l'être (recherche d'antécédent). En 2^{de} l'algèbre est très présente dans les chapitres consacrés aux fonctions, jusque dans les savoir-faire. Ces manuels y consacrent une section et souvent un chapitre, cohérent et organisé en lien avec des besoins possibles des élèves (développement, factorisation, équations et inéquations de degré 1 à une inconnue, équations et inéquations « produit ») ou des savoir-faire avec une ou plusieurs techniques associées (démontrer une égalité « pour tout x », résoudre algébriquement ou graphiquement une équation). Mais, sauf exception, l'occasion est manquée de distinguer la recherche d'image de la recherche d'antécédent(s), ce qui aurait pu permettre de commencer à distinguer un mode de pensée fonctionnel d'un mode de pensée lié aux équations. Du reste, certains manuels précisent que lorsque $f(a) = b$, b est l'image de a par f et a est un antécédent de b , ce qui pourrait entretenir une illusion de symétrie entre l'activité liée à la recherche d'image et celle liée à la recherche d'antécédent.

C.6.2.2 Statut outil/objet

Est-ce que la fonction émerge des problèmes qu'elle permet de résoudre, là où la seule lecture graphique ou résolution algébrique ne permettrait pas de le faire ? Dans les manuels, les fonctions et notions associées sont introduites par des activités où elles sont tantôt objets, tantôt outils, mais quasiment jamais outils non indiqués et à élaborer par les élèves. Ce dernier cas ne se produit réellement qu'une fois : il s'agit du problème de maximisation d'une aire de baignade rectangulaire délimitée par une ligne de longueur fixée (Delta Mathématiques, 2016, AD4). En outre, signalons que dans les activités introductives de 2^{de}, la notion de fonction est supposée déjà connue.

Les activités portant sur les (co)variations ou extrema de la fonction (problèmes d'optimisation par exemple) de manière consistante¹⁸ sont absentes dans les programmes de 3^e en 2008, mais quelquefois présentes dans ceux de 2016 ou en 2^{de} : outre le problème ci-dessus, nous avons repéré la rédaction d'un bulletin météo à partir de graphiques donnant la pluviométrie (Maths Monde, 2016, p. 101), le cas d'une figure géométrique dont périmètre et aire covarient (Sésamaths, 2016, p. 83) ou l'interprétation qualitative de deux courbes liées à des projections sur l'évolution du climat (Odyssee, 2014, p.22).

Globalement, les manuels ne montrent pas ce que la fonction permet en termes de nouveautés (outil implicite). Hormis dans quelques cas particuliers, ils ne présentent pas de raison d'être ou de plus-value de la notion de fonction par rapport aux connaissances antérieures. Les études de (co)variations étant rares, les occasions de proximité entre activités contextualisées et éléments de cours décontextualisés sont également rares. On peut cependant noter des possibilités offertes en ce sens par les changements de programme du cycle 4 (dépendance entre grandeurs).

C.6.2.3 Aspects formels

En ce qui concerne le caractère formalisateur de la notion de fonction, nous pouvons nous interroger en premier lieu sur ce que le concept de fonction, tel qu'il est présenté dans les manuels, permet de formaliser. Le nouveau formalisme associé à la fonction est proposé en 3^e et en 2^{de}, mais pas motivé — si tant est que cela soit possible — par une nécessité pour l'élève, par analogie par exemple avec la

18. Par exemple, nous excluons la recherche d'un maximum sur un graphique où l'activité se réduit à une lecture graphique ponctuelle.

nécessité de l'introduction de la lettre pour généraliser et prouver lors de l'entrée dans l'algèbre. Nous reviendrons cependant sur ce caractère ci-dessous lorsque nous évoquerons le traitement de la notion de variable.

Dans les manuels, les occasions de mettre en valeur le caractère unificateur de la notion de fonction sont diverses. Dans les trois quarts des manuels de 3^e pour 2008 ou de 2^{de}, ce lien est soit absent, soit manqué. Dans ce dernier cas, des représentations dans les registres algébrique, numérique et graphique sont mises en parallèle après la définition de fonction mais elles réfèrent à trois fonctions différentes et sont donc sans lien. La possibilité de référer aux dépendances entre grandeurs rend ces occasions plus manifestes pour les manuels de 3^e en 2016 mais elles sont manquées pour la même raison, même si lesdites représentations précèdent la définition de fonction. Dans les autres cas, les occasions sont encore plus nettes et explicitement basées sur les dépendances entre grandeurs : nous en donnons deux exemples.

Dans la figure C.3, la définition de dépendance entre grandeurs et des 3 registres qui y figurent présentent un caractère unificateur qui aurait été de nature à prolonger ce caractère à la définition de fonction qui suit. Toutefois, plusieurs éléments montrent que cette occasion est selon nous partiellement manquée. D'abord, ces 3 registres représentent deux fonctions distinctes dans deux exemples. Dans chaque exemple, la formulation initiale est en termes de grandeurs puis en termes de nombres au sein des registres au travers desquels la notion de variable ou l'aspect processus qui se manifestent dans la définition de fonction ne sont pas explicités. Ces exemples sont repris à la suite de la définition de fonction mais la modélisation n'y est selon nous pas totalement explicite et se concentre sur l'aspect image/antécédent. Enfin, dans l'exemple 1, la définition de la fonction f ou de l'équation $y = x^2$ en termes de nombres, revêtait un autre enjeu d'unification qui est omis, celui où elle rend compte des dépendances entre grandeurs qui ont la même formule algébrique.

L'exemple de la figure C.6 est donné après la définition de fonction en tant que processus (correspondance) à la suite de laquelle il est dit qu'« une fonction modélise mathématiquement une dépendance entre deux grandeurs afin de mieux connaître le comportement de la grandeur dépendante ». Même si la situation et la dépendance entre grandeurs n'y sont pas tout à fait précises, le manuel met en valeur l'étape de modélisation puis des représentations en registres algébrique, numérique, graphique. Utilisé de la même manière que dans la figure C.3 et accompagné d'un discours plus explicite, cet exemple aurait témoigné au moins d'une réelle occasion de mise en valeur du caractère unificateur de la notion de fonction.

Hormis le lien exprimé avec la proportionnalité par certains manuels de 3^e (voir ci-dessus), on ne trouve pas de trace dans les manuels analysés de ce que la fonction généralise¹⁹ : qu'ajoute par exemple le fait de percevoir le programme de calcul comme une fonction ? On s'intéresse à l'ensemble des valeurs (variations, extremum, nombre d'antécédents) et on se donne le moyen de caractériser différents programmes (familles de fonctions et leurs propriétés), mais cela n'est pas dit explicitement dans les manuels. En effet on ne montre pas les limites du programme de calcul pour résoudre certains problèmes (d'extrema par exemple) puisqu'on ne sait pas le faire algébriquement à ce niveau scolaire. Quel est alors le statut de cet objet « fonction » dans les manuels ?

Le caractère formalisateur de la notion de fonction se manifeste également par le traitement de la notion de variable dans les manuels. Dans la grande majorité des manuels (3^e ou 2^{de}), la notion de variable n'est pas présentée ou n'est qu'un point de

19. Par exemple, en travaillant de manière globale sur un programme de calcul il pourrait être demandé aux élèves de déterminer certaines propriétés du programme (monotonie, extremum, valeurs positives, parité...). Dans ce cas, la fonction permet de considérer le programme de façon globale, en prenant en compte non seulement le processus mais aussi l'ensemble des valeurs qu'il génère.

1 Dépendance entre deux grandeurs

DÉFINITION Quand deux grandeurs mesurables dépendent l'une de l'autre, on dit que l'une est **fonction** de l'autre. Dans ce cas, on peut :

- trouver une **relation algébrique** qui permet de passer d'une grandeur à l'autre ;
- tracer une **courbe** qui relie ces deux grandeurs ;
- construire un **tableau de valeurs** qui associe les nombres des deux grandeurs.

EXEMPLE 1 : L'aire \mathcal{A} d'un carré est fonction de la longueur c de son côté selon la relation algébrique $\mathcal{A} = c^2$.



EXEMPLE 2 : Le tableau de valeurs suivant donne la température moyenne à Bordeaux pour chaque mois du 1^{er} semestre de l'année 2015.

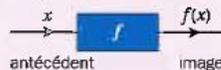
Mois	1	2	3	4	5	6
T (en °C)	10,1	11,7	15,1	17,3	21,2	24,5

La température dépend du mois considéré, mais on ne connaît pas la relation algébrique qui relie ces deux grandeurs.

2 Notion de fonction

DÉFINITIONS Une **fonction** f est un processus qui, à chaque valeur d'un nombre x , appelé **variable**, associe un unique nombre $f(x)$.

Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f .
Le nombre x est un **antécédent** de $f(x)$.



$f(x)$ se lit « f de x ».



Remarque : Un nombre peut avoir plusieurs antécédents. Il peut aussi ne pas en avoir.

EXEMPLE 1 : La fonction f associe à x son carré. On note $f : x \mapsto x^2$ ou $f(x) = x^2$.
 $f(5) = 25$. L'image de 5 par f est 25.
 $f(-5) = 25$. L'image de -5 par f est 25.
25 a donc deux antécédents par f qui sont 5 et -5.
-3 n'a pas d'antécédent par f , car un carré est toujours positif !

EXEMPLE 2 : La fonction g associe à chaque mois du 1^{er} semestre 2015 la température moyenne à Bordeaux. D'après le tableau de l'**EXEMPLE 2** ci-dessus :

- 5 a pour image 21,2 par la fonction g :
 $g(5) = 21,2$;
- 17,3 a pour antécédent 4 par la fonction g : $g(4) = 17,3$.

FIGURE C.3 – Manuel Dimensions, 2016, p. 268

vocabulaire (voir figure C.3) qui n'est jamais réutilisé ensuite. Le manuel Math'X (2014) traite de cette notion de manière plus poussée : identification de la variable sur un graphique dans les activités d'introduction puis dans les registres numérique, graphique et algébrique dans 3 exemples suivant la définition de fonction. Ensuite il est dit que « pour dire que x prend toutes les valeurs possibles dans D , on dit que x décrit D », ce qui est proche de la définition de variable que nous avons prise, même si ce commentaire est qualifié de vocabulaire, ce qui en réduit la portée. Dans la suite, dans un exemple de passage d'une représentation numérique à une représentation graphique, la question de la variable entière (points) ou réelle (points reliés) est posée. Tout cela témoigne d'une tentative de prise en compte du caractère formalisateur de la notion dans ce manuel.

Nous en venons enfin au traitement des paramètres et classes paramétrées dans les manuels. Les notions de fonction linéaire, fonction affine étant au programme en 3^e, auxquelles s'ajoutent les fonctions polynômes du second degré et homographique en 2^{de}, des paramètres et classes paramétrées sont effectivement présents dans tous les manuels. Le statut de paramètre et la distinction avec celui de variable sont peu

clairs, les paramètres étant qualifiés de nombres « fixés », « donnés », « connus » ou simplement « réels ». Si certains de ces qualificatifs réfèrent bien au paramètre, la distinction avec la notion de variable n'est pas possible puisque cette dernière notion n'est déjà pas précisée. Du reste, dans les exercices corrigés ou méthodes exemplifiées, les statuts des lettres changent sans mention explicite, par exemple lorsqu'il s'agit d'identifier une fonction affine précise selon certains renseignements, où les lettres auront le statut de variable, de paramètre, d'inconnue et où une même lettre changera de statut (paramètre vers inconnue par exemple).

Hormis pour la classe paramétrée de la proportionnalité directe dans une majorité de manuels de 3^e (voir ci-dessus), les autres classes paramétrées ne sont pas présentées pour leur caractère unificateur de nombreux problèmes. Conformément aux programmes, elles permettent de donner des résultats généraux en fonction des valeurs des paramètres. Pour la classe du second degré, cela permet de décrire le sens de variation, les coordonnées du sommet, « l'orientation » de la parabole. Les méthodes ou exercices corrigés où figurent ces classes paramétrées ne mettent pas en valeur les degrés de liberté permis par les paramètres en lien avec un problème. Les valeurs des paramètres sont souvent substituées en vue d'utiliser directement un résultat du cours sans qu'aucune autre initiative soit prise.

Globalement, le caractère FUG de la notion de fonction est très peu pris en compte par les manuels et les quelques tentatives en ce sens ne figurent pas au sein des mêmes manuels. Les statuts de variable et de paramètre ne sont ni clairement présentés, ni discriminés et leurs potentialités ne sont pas mises en valeur. Les changements de statut de la lettre posent aussi question et se conjuguent à d'autres aspects de la fonction. Par exemple lors de la recherche d'un antécédent à partir de la formule algébrique d'une fonction, la lettre change aussi de statut (de variable à inconnue), la propriété change de perspective (ponctuelle universelle à ponctuelle) et le registre reste le même : ces types de changements, invisibles et intriqués, pourraient-ils être à l'origine de difficultés pour les élèves ?

C.6.2.4 Relation

Nous interrogeons d'abord la façon dont les manuels expriment la dépendance entre grandeurs, la covariation ou la correspondance, en particulier en lien avec les définitions de fonction. En 3^e, la fonction est présentée comme procédé ou processus (correspondance), conformément à ce qui est dit dans le programme, la dépendance entre grandeurs étant en général présente en amont de la définition de fonction pour les manuels de 2016. Pour ces manuels, on a déjà noté quelques occasions d'unification de ces dépendances en lien avec la définition de fonction (voir ci-dessus) qui sont selon nous manquées ou partiellement manquées. En 2^{de}, on trouve dans les manuels, non pas une définition de l'objet fonction, mais une définition de ce que signifie définir une fonction²⁰ ! La correspondance est le choix qui est fait dans la totalité des manuels, où la fonction est définie par le fait d'associer un nombre à un autre, souvent avec l'utilisation d'une flèche, plutôt qu'en faisant apparaître la covariation (voire la variation). Un manuel de troisième intègre le vocabulaire de la variation, de la dépendance, de la correspondance dès les activités introductives. Ce vocabulaire n'étant pas repris par la suite, nous considérons que cette occasion

1. Quelles sont les grandeurs qui **varient** ici ? Laquelle **dépend** de l'autre ?
*Remarque : A chaque valeur t du temps **correspond** une valeur v de la vitesse. t est appelée une variable.*

FIGURE C.4 – Manuel Sésamath cycle 4, 2016, p. 175

20. Voir la définition de travail prise au début de l'étude du relief.

de proximité est cependant manquée.

La covariation n'apparaît clairement dans aucune des définitions données, ce qui est conforme aux programmes, et n'est que très rarement présente dans les autres parties du manuel. Lorsqu'elle est présente, elle n'est pas signalée ou mise en valeur. Dans la figure C.3 par exemple, l'équation $A = c^2$ de l'exemple 1 exprime bien une idée de covariation, mais dans la suite de l'exemple elle est remplacée par l'ostensif $f(x)$ qui n'en conserve qu'une perspective ponctuelle. La définition formelle donnée par le manuel perd toute idée de covariation. Que ce soit en 3^e ou en 2^{de}, un seul manuel cite la notion de variable dépendante sans l'utiliser ensuite. La mise en valeur de la variable, son choix ou le choix d'une variable dépendante ou indépendante ne sont pas présents dans les manuels, sauf en quelques rares endroits (voir ci-dessus, Math'X, 2014). La mise en valeur des variables dépendantes ou indépendantes aurait pu permettre d'établir des liens avec une idée de covariation.

Conformément à l'un de nos points de vigilance, nous analysons aussi la manière dont les variables sont mises en jeu lors de la définition du sens de variation (au programme en 2^{de}). Nous prenons l'exemple de la définition de fonction croissante. En nous basant sur Chappet-Pariès, Robert et Pilorge (2017), nous considérons qu'il y a 5 stades pour évoquer la (stricte) croissance d'une fonction sur un intervalle I :

- (stade 1) La courbe « monte » (de gauche à droite).
- (stade 2) Quand x augmente sur I , $f(x)$ augmente.
- (stade 3) Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- (stade 4) $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- (stade 5) La fonction f conserve l'ordre sur I .

Chacun de ces stades peut bien entendu varier en termes de formulation et de représentation de registre. Selon nous, ces stades mettent plus ou moins en valeur un aspect statique ou dynamique, parfois une idée de dépendance ou de covariation. Ainsi, le stade 1 est plutôt dynamique et symétrique, le stade 2 dynamique, dissymétrique avec une idée de dépendance, les stades 3 et 4 sont statiques et expriment algébriquement une idée de covariation et le stade 5 n'est plus lié à ces aspects.

Est-ce que les manuels rendent compte de ces différents stades? Même si le sens de variation n'est pas au programme de la classe de 3^e, un manuel évoque l'influence du signe du coefficient directeur sur l'allure de la courbe d'une fonction affine dans le stade 1. En 2^{de}, nous résumons les choix à ce sujet au moyen d'un tableau qui présente manuel par manuel, l'ordre chronologique des stades qui y apparaissent et l'élément de cours où ils se situent : Notons que dans Hyperbole, les stades 1 et 3 sont mentionnés pour les fonctions affines en amont de la définition de fonction monotone. Dans les activités de ces manuels le stade 1 est en général évoqué et parfois aussi le stade 2. Le tableau montre qu'il y a donc une grande variété de choix pour approcher la définition de fonction croissante au sens du stade 4, certains manuels proposant peu de formulations (Odyssee, Transmath), les autres en proposant davantage. En général, les liens entre les stades ne sont pas expliqués, en particulier le passage du stade 1 ou 2 au stade 4, le stade 3 étant absent de la partie cours. Le stade 5 est présent dans 4 manuels sur 5 alors qu'on peut faire l'hypothèse qu'il est étranger aux conceptions des élèves.

À la suite de Chappet-Pariès, Robert et Pilorge (2017), nous supposons qu'il est important de prendre en compte les stades 1 à 3 pour que les élèves conceptualisent la notion de fonction croissante²¹ (par exemple) et que le saut entre les stades 3 et 4 suppose en classe une intervention de l'enseignant. Selon nous, le sens de variation manifeste au travers de ces stades de nombreux enjeux de la notion de fonction :

21. Elles ont proposé des activités introductives pour ces 3 stades.

Manuel	Éléments de cours	Stade
Hyperbole	Idée intuitive	Stade 1
	Définition	Stade 4
	Conséquences	Stade 5
Math'X	Définition	Stade 2
		Stade 1
		Stade 5
		Stade 4
Odyssée	Définition	Stade 4
	Remarque	Stade 5
Sésamath	Définition intuitive	Stade 2
	Remarque	Stade 1
	Définition	Stade 4
	Remarque	Stade 5
Transmath	Définition	Stade 4
	Remarque	Stade 1

FIGURE C.5 – Repérage des différents stades dans les manuels

lien entre registre graphique et algébrique, lien entre une description ponctuelle ou ponctuelle universelle et une perspective globale, covariation...

C.6.2.5 Registres

Pour rendre compte des résultats sur les registres, nous les organisons de la façon suivante : définitions des différents registres, passages entre registres, image et antécédent, choix de registres, limites et avantages des registres.

En 3^e, les registres algébrique et graphique sont définis, ce qui n'est pas souvent le cas du registre numérique, supposé relever d'une connaissance ancienne. En 2^{de}, les registres numérique et algébrique ne sont pas redéfinis, alors que le registre graphique l'est. Le registre schématique est défini sur un exemple comme moyen de rendre compte des variations tandis que les registres fonctionnel et de la langue naturelle ne sont pas consacrés comme des registres. Pour les registres définis, les méthodes permettent en général de les travailler en partie pour eux-mêmes et davantage en 2^{de} où le nombre de méthodes est nettement plus important. Il y a peu d'occasions de montrer que ces registres réfèrent au même être. La dépendance entre grandeurs fournit de telles occasions, mais elles ne sont plus visibles dans la définition de fonction (voir figure 1).

À la suite de la notion de fonction, les registres présentés sont fréquemment juxtaposés, mais il y a quand même quelques tentatives d'articulation, comme dans la figure C.6. Le code couleur (qui n'est pas expliqué) et les éléments de texte y manifestent des articulations entre les registres, sans que ces passages soient explicites, ni que les possibilités ou limites n'y soient précisées. Dans les méthodes où les exercices corrigés, des passages entre registres sont travaillés et des tentatives d'articulation y sont présentes, notamment en 2^{de}, mais sauf exception, on ne trouve pas de mise en valeur des (non) congruences entre registres. Il y a donc des occasions de proximité dans le passage entre les registres, mais celles-ci restent implicites : par exemple le fait qu'il suffit de 2 points pour tracer une droite ou de deux couples de valeurs pour vérifier que deux fonctions affines sont égales.

On peut noter de façon générale que des occasions sont manquées dans les manuels pour faire des liens entre les notions d'image ou d'antécédent et les différents registres où elles peuvent apparaître. C'est notamment le cas pour la résolution

Exemple Pour son anniversaire, Bob débouche une bouteille de boisson pétillante. Le bouchon saute et sa trajectoire, en fonction du temps, est donnée par la formule $H = 10t - 5t^2$.

On peut **modéliser cette situation** par une fonction, notée par la lettre f , qui, à un instant x (exprimé en secondes) associe la hauteur atteinte par le bouchon (exprimée en mètres).

a. Forme algébrique

L'expression algébrique de la fonction f est $f(x) = 10x - 5x^2$.

b. Forme numérique

Si $x = 0,4$ alors $f(0,4) = 10 \times 0,4 - 5 \times 0,4^2$

donc $f(0,4) = 3,2$.

3,2 est l'image de **0,4** par la fonction f .

0,4 est un antécédent de **3,2** par la fonction f .

On rassemble les valeurs des images dans un tableau de valeurs.

x	0	0,4	1	1,5	2
$f(x)$	0	3,2	5	3,75	0

c. Forme graphique

Le point A a pour abscisse **0,4** et pour ordonnée **3,2** qui est l'image de **0,4**.

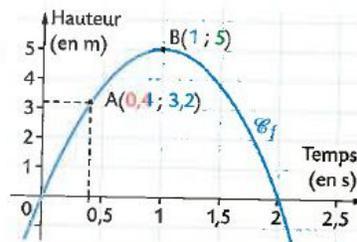


FIGURE C.6 – Manuel Maths Monde cycle 4, 2016, p. 103

d'équations (algébrique ou graphique), où le vocabulaire (image ou antécédent) n'est pas repris par la moitié des manuels de 2^{de}. On aurait cependant pu y articuler plusieurs lexiques liés aux différents registres : algébrique (résoudre, inconnue, solution), graphique (coordonnées, intersection, courbe, abscisse, ordonnée) et fonctionnel (image, antécédent). Mais la référence aux équations est quasi absente des manuels de 3^e analysés et en 2^{de} l'utilisation du mot antécédent disparaît dans la résolution graphique d'équations ou inéquations. Le passage par un registre fonctionnel, dans lequel on emploie le vocabulaire (image, antécédent) et le formalisme propre aux fonctions et à leurs propriétés, est souvent nécessaire pour faire la conversion entre les registres algébrique et graphique : par exemple pour déterminer l'allure de la courbe à partir de la nature de son expression algébrique, et réciproquement. Cependant, il n'est pas signalé comme un registre particulier supplémentaire, alors qu'il nous semble pourtant que c'est ce qui pourrait donner à voir la valeur ajoutée de la notion de fonction ou aider à montrer que différents registres réfèrent au même être mathématique.

Nous trouvons dans les manuels de 3^e et 2^{de} quelques méthodes ou exercices corrigés où soit les étudiants doivent choisir la représentation adaptée, soit il y a plusieurs choix de registres possibles. Cependant, ces choix ne sont en général pas commentés par les manuels et de nombreuses initiatives sont à la charge du lecteur, et en conséquence des difficultés implicites demeurent. Nous donnons un exemple de chaque situation. Pour le premier exemple, dans Maths dimensions cycle 4 (2016, p. 271), la distance d'arrêt d (en m) d'un véhicule est fonction de sa vitesse v (en km/h) est donnée par la formule suivante : $d = \frac{5}{18} \times v + 0,006 \times v^2$. La deuxième question demande de commenter l'affirmation selon laquelle lorsqu'on va deux fois plus vite, la distance d'arrêt est deux fois plus grande. Le manuel propose deux « solutions d'élèves », l'une dans un registre numérique, l'autre dans un registre

algébrique. Aucun de ces choix n'est justifié ou comparé. En outre, la solution dans le registre numérique demande un choix de valeurs puis la production d'un contre-exemple et celle dans le registre algébrique demande de penser à calculer $d(2v)$ et à le comparer à $2 \times d(v)$. Ce deuxième cas concentre de nombreuses difficultés à la charge du lecteur : ajout de la variable dans l'expression de d , interpréter ce que signifie « deux fois plus grande » en lien avec l'instrumentalité de l'ostensif $d(v)$, production du calcul, idée de comparer ce résultat. Cet exercice présente le choix (très rare) de

3) Choisir la représentation adaptée

↳ Entraîne-toi à Choisir la représentation adaptée

■ Énoncé

En cours de sciences physiques, Inés et Diogu ont réalisé un circuit électrique avec un générateur de courant variable. Ils veulent trouver la valeur de la résistance R (en Ω) de ce circuit.

intensité en A	0,0029	0,0117	0,0234
Tension en V	1,5	6	12

Voici les mesures obtenues.
Interprète ce tableau de valeurs.

Correction

On considère ce tableau comme le tableau de valeurs d'une fonction f qui à I associe U . Un tableur-grapheur donne le graphique suivant.



On reconnaît la représentation graphique d'une fonction linéaire. On détermine son coefficient :
 $1,5 \div 0,0029 \approx 517$.
 À partir de la formule $U=RI$ on déduit que le circuit est donc composé d'une résistance de 517 Ω .

FIGURE C.7 – Manuel Sésamath cycle 4, 2016, p. 180

passer d'un registre numérique à un registre algébrique, via un registre graphique. Différents éléments de la correction ne sont toutefois pas justifiés : définition de la fonction, alignement des points, reconnaissance d'une fonction linéaire, usage implicite de la proportionnalité, vérification des autres valeurs. D'autres éléments limitent l'intérêt du choix. Ainsi si on connaît *a priori* la loi $U = RI$ (ce qui est supposé dans la correction de l'exercice), le coefficient de la fonction linéaire peut être testé dans le tableau sans passer par les deux autres registres. Ce type d'exercice d'adéquation d'un modèle fonctionnel est porteur de nombreux enjeux (Krysinska & Schneider, 2010) mais ici le lecteur n'a pas accès à la plupart de ces enjeux

Nous percevons la mise en valeur des limites et avantages des registres comme un point crucial permettant de considérer la fonction comme un objet ne se limitant pas à chacune de ses représentations²². En général, les limites et avantages sont assez rarement précisés en 2^{de} et très rarement en 3^e. Ainsi, dans la figure C.7, les limites du registre graphique ou des valeurs approchées liées au registre numérique ne sont pas commentées. Parmi les limites parfois citées en 2^{de} il y a l'accès à des valeurs approchées (graphique), l'incertitude à avoir trouvé toutes les solutions d'une (in)équation (graphique, numérique). Parmi les avantages, il y a la possibilité de pouvoir conjecturer des propriétés (graphique), d'affiner des résultats (numérique), de voir des intervalles de monotonie et valeurs remarquables (schématique). Chaque registre permet aussi de « contrôler » certains résultats d'un autre registre, par exemple la vérification de la valeur d'un extremum obtenu algébriquement (fonction du second degré) en revenant au registre graphique.

22. Nous faisons ici l'hypothèse que la nécessité de choisir de passer à un autre registre de représentation, pour résoudre un problème posé, peut en effet améliorer la qualité de la conceptualisation de l'objet fonction.

C.6.2.6 Perspectives fonctionnelles

Nous évoquons les résultats sur les perspectives fonctionnelles d'une part à partir de la tâche d'appartenance d'un point à la courbe d'une fonction et d'autre part de certains liens entre registres et perspectives fonctionnelles.

Il nous semble que la propriété qui explicite l'équivalence entre la forme des coordonnées et l'appartenance à la représentation graphique d'une fonction présente un enjeu en termes de perspectives fonctionnelles. Si les coordonnées ou l'appartenance d'un point à la courbe sont des définitions ponctuelles, celle qui consiste à voir la courbe comme l'ensemble de ces points est ponctuelle universelle. En termes de perspectives fonctionnelles, il y a aussi un lien entre la courbe (perspective globale) et l'ensemble de tous les points qui la composent. Cette propriété est également un passage crucial entre le registre algébrique et graphique qui pourrait être mal perçu s'il était réduit au calcul d'images dans le registre numérique. Du point de vue des manuels, cette propriété est proposée en 3^e en 2008 pour les fonctions affines, mais n'y est plus en 2016. Elle est également proposée dans 2 manuels de 2^{de} puis reprise dans les savoir-faire. Pour un manuel de 2^{de}, la méthode pour déterminer si un point appartient à une courbe est proposée, avec des liens explicites aux savoirs mathématiques sous-jacents (Figure C.8). Cependant, si l'équivalence est explicite

f est une fonction, D est son ensemble de définition, \mathcal{C} est sa courbe représentative.
Étant donné un point M de coordonnées $(a; b)$ avec a dans D :

- si M appartient à \mathcal{C} , alors $b = f(a)$;
- réciproquement, si $b = f(a)$, alors M appartient à \mathcal{C} ;
- si $b \neq f(a)$, alors M n'appartient pas à \mathcal{C} .

EXERCICE RÉSOLU **F**

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5}{2x+1}$. \mathcal{C} est sa courbe représentative.
Les points $A(2; 9)$ et $B(0; 5)$ appartiennent-ils à \mathcal{C} ?

Méthode

Pour savoir si un point $M(a; b)$ appartient à \mathcal{C} , on calcule $f(a)$ et on le compare à b .

- Pour A , on calcule $f(2)$.

On conclut selon la valeur de $f(2)$.

• Pour B , on calcule $f(0)$.

On conclut.

Solution

- $f(2) = \frac{5}{2 \times 2 + 1} = \frac{5}{5} = 1$.
- Or $f(2) \neq 9$, donc $A \notin \mathcal{C}$.

NOTATION
 \notin signifie « n'appartient pas à ».

- $f(0) = \frac{5}{2 \times 0 + 1} = \frac{5}{1} = 5$.
- L'ordonnée de B est égale à $f(0)$, donc $B \in \mathcal{C}$.

NOTATION
 \in signifie « appartient à ».

FIGURE C.8 – Manuel Transmath seconde, 2014, p. 33

dans le préambule à l'exercice, un certain nombre d'éléments en réduisent la portée. En premier lieu, il y a 3 énoncés alors que le premier et le troisième sont logiquement équivalents : cet écueil est toutefois corrigé dans une fiche d'accompagnement personnalisé plus loin dans le manuel. Ensuite, la courbe représentative est introduite, mais elle n'est pas visible et ne joue que le rôle de notation. Enfin, la tâche se réduit au calcul d'images et à la comparaison de valeurs. C'est finalement un exercice qui n'a plus beaucoup de lien avec la propriété du cours : le passage du décontextualisé au contextualisé sous-jacent ne donne pas lieu à une occasion de proximité.

Dans les manuels de 3^e, les propriétés sont souvent ponctuelles ou ponctuelles universelles (formule algébrique). La perspective ponctuelle y est omniprésente et la perspective globale est visible (graphique) mais très rarement travaillée. En 2^{de}, des notions au programme sont liées à la perspective globale (domaine de définition, intervalles, monotonie, extrema) sans que celle-ci soit réellement mise en valeur. Un manuel met en valeur les propriétés ponctuelles universelles en insistant sur les propriétés « pour tout x » (Math'X, 2014). De façon générale, les occasions de mettre en avant la perspective globale sont assez rares et manquées par les manuels des deux niveaux. Il y a toutefois des tentatives pour certains registres. Ainsi, le passage du numérique (1 ou 2 valeurs) à l'algébrique pour les fonctions linéaires ou affines est proposé quelquefois en 3^e et en 2^{de}, mais ne s'appuie en général pas sur le graphique, évitant ainsi une perspective plus globale. Pour ces mêmes fonctions, quelques passages du graphique à l'algébrique sont proposés, mais là encore ils se concentrent sur une perspective ponctuelle du graphique. Les passages du registre graphique au registre schématique (ou l'inverse) sont parfois proposés en seconde et permettent un travail lié à une perspective globale. Dans le passage du registre schématique au registre graphique, la non unicité du graphique est mise en valeur. Enfin, il y a quelques occasions de passer du registre numérique ou graphique au registre algébrique au moyen de l'observation de leur régularité, voire en invoquant certaines classes paramétrées. À l'instar de l'exemple de la figure C.7, ces occasions nous semblent manquées.

C.7 Conclusion

Nos conceptions et hypothèses sur les apprentissages des élèves issus de la Théorie de l'Activité nous ont conduit à prendre le relief de la notion de fonction en 3^e-2^{de} comme référence pour ces apprentissages. Nous avons établi ce relief comme produit de trois études (épistémologique, curriculaire, didactique) dont nous avons extrait des hypothèses sur les besoins présumés des élèves dans l'apprentissage de cette notion répartis dans plusieurs thématiques interdépendantes. Cela nous a permis de construire une grille d'analyse des cours des manuels, nous permettant de confronter leur offre à ces besoins présumés. Il nous paraît important d'anticiper et de prendre en compte ces besoins, mathématiques et didactiques, pour permettre aux élèves de comprendre (à travers des tâches adaptées et des cours suffisamment connectés à ces tâches), d'appliquer et de faire fonctionner plus largement (avec des tâches suffisamment variées), et de retenir (grâce à la cohérence de l'ensemble et aux liens effectués) différents aspects de la notion de fonction. Le relief de la notion de fonction pourrait d'ailleurs être un outil utile pour les enseignants, dans la mesure où il liste de manière exhaustive les caractéristiques des notions étudiées en les intégrant dans les programmes anciens, actuels, futurs. Cela pourrait déboucher sur des expérimentations en classe réelle en lien avec les chercheurs.

L'analyse des cours des manuels de cette étude révèle une différence principalement quantitative entre les manuels de 3^e et 2^{de} : nombre de propriétés, de méthodes, de registres. Si certains manuels prennent en compte quelques besoins présumés des élèves, un manuel donné n'en retient que très peu. Pour les deux niveaux, on aboutit donc globalement à une même absence de prise en compte des aspects, pour nous importants, relatifs à la conceptualisation de la notion de fonction : fonction outil pour résoudre des problèmes (si tant est que cela soit possible à ces niveaux scolaires, dans la mesure où on n'aborde pas les problèmes d'extrema), plus-value de l'introduction de la notion de fonction par rapport aux connaissances anciennes, prise en compte des variations et covariations, articulation explicite et limites/avantages des registres de représentation, perspective globale sur la fonction. Ces résultats seront à vérifier dans les manuels qui seront publiés à la suite des futurs changements de

programmes. La question du sens de variation nous semble un objet de recherche pertinent qui concentre différents enjeux en lien avec les 5 stades mentionnés ci-dessus : lien graphique-algébrique, lien entre ponctuel, ponctuel universel et global, covariation.

La quantité accrue d'objets du cours en 2^{de} pose la question de la possibilité d'organiser des proximités entre le cours et ses applications. Une perspective évidente de notre étude serait de la compléter par une analyse des exercices proposés par les manuels des deux niveaux compte tenu des thématiques et besoins isolés et de l'analyse du cours de ces manuels. Cela permettrait d'étudier dans quelle mesure les éléments du cours y sont mobilisés, et pour ceux qui le sont, s'ils sont mobilisés de manière suffisamment variée, avec des prises d'initiatives potentielles pour les élèves. Cette hypothèse devra être confirmée pour expliquer au moins en partie certaines difficultés possibles des élèves en 2^{de} par rapport à la 3^e. Les choix de tâches des enseignants des deux niveaux participent aussi à la possibilité de faire fonctionner tout ou partie de ces notions. Il faudrait ici encore aller le vérifier par des recherches *in situ* dans les classes en étudiant les contenus et les logiques de pratiques des enseignants des deux ordres considérés (fin du collège/début du lycée). En outre, les besoins que nous avons identifiés sont relatifs, en amont de la classe, et demanderaient aussi à être mis en perspective avec la complexité des pratiques en classe.

Il nous semble que les problématiques liées à l'enseignement et l'apprentissage des fonctions en 3^e-2^{de} mériteraient d'être articulées aux problématiques associées à la transition institutionnelle entre ces deux niveaux scolaires. Cela pourrait révéler des phénomènes spécifiques et expliquer certaines difficultés des élèves, qui pourraient être amplifiées à ces occasions. Nous souhaitons donc prolonger notre questionnement aux différences entre ces deux niveaux, voire aux ruptures lorsque ces différences sont importantes, comme des sources de perturbation probables pour les élèves, qui doivent s'adapter à ces changements. Il nous semble aussi qu'il faut prendre en compte le fait que l'enseignement et l'apprentissage des fonctions se font sur un temps long dans le secondaire, environ 3 ou 4 ans depuis l'introduction en fin de cycle 4 (classe de 3^e), en classe de 2^{de} au début du lycée après transition entre deux institutions²³, puis de 1^{re} Scientifique. Cet enseignement ne va pas concerner tous les élèves sur la même durée et avec les mêmes contenus et objectifs, selon leur orientation en classe de 2^{de} générale ou professionnelle. À cet égard, nous serions donc amenés à tenter de repérer des écarts possibles dans ce qui est enseigné entre les deux niveaux, pour des élèves qui poursuivent leurs études dans l'enseignement général, et à interroger ce qu'il semble nécessaire de proposer en particulier à des élèves qui continueront leur apprentissage des fonctions au-delà de la 3^e. Comment concilier des enjeux à long terme prenant en compte certains aspects de la notion, et des enjeux à court terme, intégrant les besoins des élèves chaque année ? Comment non seulement répartir mais surtout articuler les différents aspects tout au long de l'enseignement de ces notions, en tenant compte des programmes scolaires et du changement d'institution ? On pourrait par exemple émettre l'hypothèse suivante en rapport avec le long terme de l'apprentissage de la notion de fonction : le travail en 3^e au collège pourrait être plutôt axé sur la formulation dans différents registres (notamment pour l'expression algébrique), alors que le travail en 2^{de} pourrait être plutôt axé sur la formalisation (notamment algébrique et analytique) avant l'introduction de la perspective locale en 1^{re}.

Enfin, les programmes du lycée évoluent à plusieurs égards à la rentrée 2019 (pour la 2^{de} et la 1^{re}). Les contenus du programme de mathématiques changent : par exemple, introduction en 2^{de} des fonctions racine carrée et cube, report en 1^{re}

23. Le collège et le lycée sont deux institutions différentes, qui peuvent être séparées physiquement en deux bâtiments distincts, et les enseignants de mathématiques, bien qu'ayant reçu la même formation initiale, n'interviennent généralement que dans une seule de ces deux institutions.

de l'étude des fonctions polynômes du second degré et présence explicite en 1^{re} d'un « point de vue global » et d'un « point de vue local ». Il y a introduction en 2^{de} d'un enseignement commun « Sciences numériques et technologie » et en 1^{re} d'un enseignement de spécialité « Numérique et sciences informatiques ». L'usage des TICE en lien avec ces cours peut également être amené à évoluer. D'une part, il sera donc nécessaire de voir dans quelle mesure tous ces changements sont susceptibles d'impacter nos constats. D'autre part, le fait que les notions de « fonction » et de « variable » soient utilisées dans des sens *a priori* différents en mathématiques et informatique doit aussi nous questionner. Enfin, s'agissant des TICE, la possibilité d'introduire, de manière non artificielle, certaines propriétés globales des fonctions comme outils (indiqués par l'énoncé) pour résoudre des problèmes, est souvent investie sous la forme de problèmes de modélisation avec usage de logiciels. Dans quelle mesure la nécessité des fonctions est-elle encore présente après usage de ces intermédiaires, qui prennent peut-être aussi en charge de manière non transparente certaines difficultés des passages entre les registres ?

BIBLIOGRAPHIE

- Andrieu, X, Bonnet, J., Fourton, J.-L., Flavier, I., Iyer, T. & Perrinaud, J.-C. (2016). Delta Maths troisième. Magnard.
- Andrieu, X, Fourton, J.-L., Lanoëlle & Perrinaud, J.-C. (2008). Dimathème troisième. Didier.
- Baglieri, S. & Gringoz, H. (Dir.) (2014). Sésamath seconde. Magnard.
- Baglieri, S., Gringoz, H. & Kahn, M. (Dir.) (2014). Sésamath cycle 4. Magnard.
- Barra, R., Barros, J.-M., Bénizeau, P, Liorit, K., Morin, J., Nivaud, D. & Ricomet, V. (2014). Transmath seconde. Nathan.
- Carlod, V., Fundarowski, M, Maze, M., Plantiveau, A., Puigredo, F. & Seres, P. (2008). Transmath troisième. Nathan.
- Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2008). Triangle troisième. Hatier.
- Dos Santos, R. & Lassalle, O. (Dir.) (2016). Maths dimensions cycle 4. Hatier.
- Ferrero, C., Daro, I., Telmon, C., Perbos, D. & Brault, R. (2008). Phare troisième. Hachette.
- Lambotte, L. (Dir.) (2016). Delta mathématiques cycle 4. Belin.
- Lanata, F. (Dir.) (2016). Maths Monde cycle 4. Didier.
- Le Yaouanq, M.-H. (Dir.) (2014). Math'X seconde. Didier.
- Malaval, J. (Dir.) (2014). Hyperbole seconde. Nathan.
- Sigward, E. (Dir.) (2014). Odyssée seconde. Hatier.