



HAL
open science

Groupe de Witt d'une algèbre simple centrale à involution

Nicolas Grenier-Boley

► **To cite this version:**

Nicolas Grenier-Boley. Groupe de Witt d'une algèbre simple centrale à involution. Anneaux et algèbres [math.RA]. Université de Franche Comté, 2004. Français. NNT : . tel-02415761

HAL Id: tel-02415761

<https://hal.science/tel-02415761>

Submitted on 4 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N d'ordre : 1058

Année 2004

THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
DE FRANCHE-COMTÉ
Spécialité : Mathématiques et Applications

GROUPE DE WITT D'UNE ALGÈBRE SIMPLE CENTRALE À INVOLUTION

par

Nicolas Grenier-Boley

soutenue le 17 décembre 2004 devant la commission d'Examen :

Président du jury	M. KNUS	Professeur, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (Suisse)
Directeur de thèse	D. HOFFMANN	Professeur, University of Nottingham (Royaume-Uni)
Rapporteurs	D. LEWIS	Professeur, University College Dublin (Irlande)
	J.-P TIGNOL	Professeur, Université Catholique de Louvain (Belgique)
Examineurs	D. BENOIS	Professeur, Université de Franche-Comté
	A. CORTELLA	Maître de Conférences, Université de Franche-Comté
	M. OJANGUREN	Professeur, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse)
	A. QUÉGUINER-MATHIEU	Maître de Conférences, Université Paris XIII

Groupe de Witt d'une algèbre simple centrale à
involution

NICOLAS GRENIER-BOLEY

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités	9
1.1 Algèbres simples centrales à involution	9
1.2 Formes	15
1.3 Groupe et anneau de Witt	23
2 Equivalence de Morita et isomorphismes de groupes de Witt équivariants	26
2.1 Préliminaires	26
2.2 Le résultat principal	30
2.3 Quelques conséquences	37
3 Equivalence de Morita et formes ε-hermitiennes	41
3.1 Isotropie et décomposition de Witt	41
3.2 Rang et discriminant à signe	44
3.3 Quelques autres invariants	55
4 Suites exactes de groupes de Witt	58
4.1 Introduction	58
4.2 Définitions des applications	61
4.3 La preuve du théorème 4.1.1	64
4.4 Comportement des applications pour les algèbres à division	68
4.5 Suites exactes de groupes de Witt équivariants	74
5 Sous-modules du groupe de Witt	79
5.1 Restrictions de suites exactes de groupes de Witt	79
5.2 Formes de Pfister hermitiennes	91
6 Critères de Harrison, équivalences de Witt et équivalences de réciprocity	101
6.1 Introduction	101
6.2 Résultats de base	103
6.3 Analogues du critère de Harrison	106

6.4	Equivalences de réciprocity	116
7	Groupes de Whitehead réduits	123
7.1	Introduction	123
7.2	Groupes de Whitehead réduits d'une algèbre simple centrale. Résultats principaux	126
7.3	Résultats préliminaires à la section 7.5	132
7.4	Autour d'un résultat de Merkurjev et Suslin	136
7.5	Preuves des résultats	138

Introduction

Le travail de recherche présenté dans cette thèse est axé sur deux thèmes centraux reliés entre eux.

Le premier de ces thèmes est la théorie des formes hermitiennes (équivariantes pour un groupe fini G) sur une algèbre simple centrale à involution. Si les théories des formes quadratiques et des formes hermitiennes présentent beaucoup de caractères similaires, on ne leur connaît effectivement que peu de points communs. Dans ce travail, nous avons tout d'abord souhaité illustrer le passage de la théorie des formes quadratiques à celle des formes hermitiennes en nous appuyant sur diverses notions telles que la décomposition de Witt, l'isotropie, le discriminant à signe ou les n -formes de Pfister (dans les chapitres 3 et 5).

Le groupe de Witt (équivariant) d'une algèbre simple centrale est un outil essentiel à la compréhension des formes hermitiennes (équivariantes) sur cette algèbre mais il est rare que l'on puisse le déterminer de façon explicite. Le second objectif de ce travail est la collecte d'informations sur ce groupe soit par des critères d'isomorphie (dans les chapitres 2 et 6), soit par construction de suites exactes permettant de comparer plusieurs de ces groupes (dans les chapitres 4 et 5).

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à deux types de groupes de Whitehead réduits d'une algèbre simple centrale ; ce chapitre est indépendant des précédents. Nous allons maintenant présenter brièvement le contenu de chacun de ces chapitres.

Le chapitre 1 est essentiellement consacré à l'exposé de définitions, résultats et notations nécessaires à la suite de ce travail. Ces rappels sont en grande partie basés sur les deux ouvrages suivants : [33] et [71].

En premier lieu, nous rappelons quelques propriétés de base concernant les algèbres simples centrales, les involutions et le groupe de Brauer.

Ensuite, si A est une K -algèbre simple centrale munie d'une involution σ , nous exposons des rappels concernant les formes sesquilineaires, les formes et les G -formes ε -hermitiennes sur (A, σ) où G est un groupe fini et $\varepsilon \in K^*$ vérifie $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$. Nous nous intéressons particulièrement à la possibilité de généraliser au niveau des (G) -formes ε -hermitiennes quelques propriétés classiques pour les formes quadratiques comme la diagonalisation, la simplification de Witt et le rapport entre forme hyperbolique et forme métabolique.

Enfin, nous rappelons la définition du groupe de Witt équivariant $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ d'une algèbre simple centrale à involution.

Dans le chapitre 2, nous étudions la notion d'équivalence de Morita entre deux algèbres simples centrales munies d'involutions. Soient (A, σ) et (B, τ) deux K -algèbres simples centrales munies des involutions σ et τ que l'on suppose de même espèce. Une η -équivalence de Morita entre (A, σ) et (B, τ) est, par définition, la donnée de $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$

où M, N, f, g, ν sont des objets vérifiant certaines propriétés dépendant de (A, σ) et (B, τ) et où $\eta = \pm 1$ ne dépend que de σ et τ (voir la définition 2.1.1). Nous avons opté pour une définition interne de l'équivalence de Morita basée sur [17] et [32].

Tout d'abord, nous rappelons qu'une η -équivalence de Morita au sens précédent possède certaines propriétés habituelles de l'équivalence de Morita entre deux algèbres.

Soient $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$ une η -équivalence de Morita entre (A, σ) et (B, τ) , G un groupe fini et $\varepsilon \in K^*$ vérifiant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$. Nous montrons que l'on peut construire un isomorphisme de $W(K, \sigma|_K)$ -modules

$$W^\varepsilon(G, A, \sigma) \simeq W^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau)$$

(on a même un énoncé plus précis, voir le théorème 2.2.1) qui fournit une condition suffisante à l'isomorphie de deux groupes de Witt équivariants.

La classe des algèbres Brauer-équivalentes (munies d'involutions de même espèce ayant même restriction au centre) forme une sous-classe des algèbres à involutions Morita-équivalentes (voir la proposition 2.3.1) et le théorème 2.2.1 reste donc vrai dans ce cadre (voir le corollaire 2.3.3). Enfin, nous précisons que le théorème 2.2.1 admet un raffinement dans le cas des involutions unitaires (voir le corollaire 2.3.5) avant de donner un exemple caractéristique d'utilisation de ces résultats dans le cas des involutions de première espèce par le biais d'un célèbre théorème dû à Merkurjev (voir le théorème 2.3.6).

La plupart des résultats présentés dans ce chapitre peuvent être considérés comme conséquences de principes généraux sortant du cadre de ce travail : voir [25] et [32]. Néanmoins, l'approche de ces notions par le biais de la théorie des algèbres simples centrales à involution fournit, à notre connaissance, de nouvelles preuves de ces faits.

Le chapitre 3 a pour objet la généralisation aux formes hermitiennes sur une algèbre simple centrale à involution de notions et d'invariants classiques en théorie des formes quadratiques par le biais de l'équivalence de Morita. Cette généralisation est souvent immédiate lorsque l'algèbre considérée est une algèbre à division. Cette constatation rend l'isomorphisme du théorème 2.2.1 (voir ci-dessus) particulièrement intéressant lorsque $B = D$ est une algèbre à division et nous incite à examiner chaque notion selon le plan d'étude suivant :

1. rappel de la notion pour les formes quadratiques ;
2. généralisation de cette notion aux formes ε -hermitiennes sur une algèbre à division ;
3. transport de la notion aux formes ε -hermitiennes sur une algèbre simple centrale au moyen de l'équivalence de Morita et du théorème 2.2.1.

Nous nous intéressons tout d'abord aux propriétés d'isotropie et de décomposition de Witt. En 1969, dans [48], McEvertt montre que l'équivalence de Morita permet de généraliser exactement ces deux notions aux formes hermitiennes sur une algèbre simple

centrale à involution. Nous démontrons ces résultats dans un cadre différent de celui de l'article de McEvet (voir la proposition 3.1.3 et le théorème 3.1.5).

Ensuite, nous étudions deux invariants : le rang et le discriminant à signe (raffiné) d'une forme. Le cadre offert par les équivalences de Morita permet de définir ces notions pour une forme hermitienne sur une algèbre simple centrale (voir la proposition 3.2.4 et la sous-section 3.2.2). On construit également un raffinement du discriminant à signe en nous inspirant de travaux effectués par Bayer-Fluckiger et Parimala dans [8].

Enfin, nous terminons ce chapitre en mentionnant brièvement la généralisation aux formes hermitiennes de certains des autres invariants définis par les isomorphismes de Milnor-Voevodsky par l'intermédiaire de l'équivalence de Morita.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de suites exactes de groupes de Witt. Les sections 4.1 à 4.4 sont le fruit d'un travail commun avec Mohammad Mahmoudi (voir [27]). La section 4.5 traite de suites exactes de groupes de Witt équivariants.

Le cadre de ce chapitre est le suivant : A est une K -algèbre simple centrale, σ est une involution sur A et nous supposons que λ et μ sont deux éléments inversibles de A qui anticommulent et tels que $\sigma(\lambda) = -\lambda$, $\sigma(\mu) = -\mu$ et $K(\lambda)/K$ est une extension quadratique.

En 1995, dans [57], Parimala, Sridharan et Suresh construisent la suite exacte de groupes de Witt suivante

$$W^\varepsilon(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_1^\varepsilon} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \xrightarrow{\rho_1^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2). \quad (1)$$

Dans cette suite, \tilde{A} désigne le commutant de $K(\lambda)$ dans A , σ_1 et σ_2 sont des involutions sur \tilde{A} définies à partir de σ et $\pi_1^\varepsilon, \pi_2^\varepsilon$ (resp. ρ_1^ε) sont des applications de transfert (resp. de restriction). Cette suite est une étape clé dans la démonstration par Bayer-Fluckiger et Parimala de la conjecture II de Serre (voir [7]) et du principe de Hasse II (voir [8]) pour les groupes algébriques linéaires de type classique. A partir d'autres homomorphismes de groupes de Witt, nous construisons la suite exacte suivante :

$$W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2) \xrightarrow{\rho_2^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \quad (2)$$

(voir le théorème 4.1.1). La combinaison de ces deux suites fournit un octogone exact de groupes de Witt (voir le corollaire 4.3.1). Pour une extension quadratique ou une algèbre de quaternions à division munie de son involution canonique, ce résultat est dû à Lewis (voir [37]).

Lorsque A est une algèbre à division, nous calculons de manière explicite le noyau et l'image de chacune des applications apparaissant dans ces suites exactes et étudions le comportement de chacune d'entre elles vis à vis de l'isotropie (voir la proposition 4.4.1 et le théorème 4.4.4). Comme application de ces résultats, nous obtenons une autre preuve

de l'exactitude de l'octogone du corollaire 4.3.1 dans le cas des algèbres à division (voir le corollaire 4.4.5).

Enfin, nous nous inspirons de [15] pour définir une notion d'isotropie pour les G -formes ε -hermitiennes (voir la définition 4.5.1) de telle manière que dans toute classe de Witt il existe, à isométrie près, une unique G -forme ε -hermitienne anisotrope (voir la proposition 4.5.4). Cette propriété nous permet d'étendre aux G -formes ε -hermitiennes les suites exactes (1) et (2) :

$$\begin{aligned} W^\varepsilon(G, A, \sigma) &\xrightarrow{\pi_1^\varepsilon} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_1) \xrightarrow{\rho_1^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_2) \\ W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) &\xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_2) \xrightarrow{\rho_2^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) \xrightarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_1) \end{aligned}$$

(voir le théorème 4.1.2) et en combinant ces deux suites on obtient un octogone exact de groupes de Witt équivariants. Encore une fois, dans le cas d'une extension quadratique ou d'une algèbre de quaternions à division munie de son involution canonique, ce résultat est dû à Lewis (voir [40]) ; nos démonstrations des résultats d'exactitude présents dans ce chapitre s'inspirent des preuves données par Lewis dans cet article.

Le chapitre 5 vise à étudier certains sous-modules du groupe de Witt par le biais des suites exactes du chapitre précédent. Il se divise en deux parties distinctes.

Dans la première partie de ce chapitre, nous décrivons des cas pour lesquels les suites exactes du chapitre 4 peuvent se restreindre à certains sous-modules du groupe de Witt. Pour ce faire, nous nous inspirons de travaux effectués par Bayer-Fluckiger et Parimala sur la suite exacte (1) et précisons le comportement de la suite exacte (2) vis à vis du rang et du discriminant (raffiné) dans le cas des algèbres à division (voir la sous-section 5.1.1 et la proposition 5.1.7). Ces descriptions explicites nous permettent de restreindre ces deux suites exactes au sous-module I_1 engendré par les formes ε -hermitiennes de rang pair sauf dans un cas particulier (voir la proposition 5.1.10) ; si de plus, l'involution est supposée unitaire et si F est un corps C_2^0 (voir la définition 7.4.1), on peut restreindre ces suites exactes au sous-module I_2 engendré par les formes de rang pair et de discriminant à signe trivial (voir la proposition 5.1.12).

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous utilisons les suites exactes du chapitre 4 pour étudier quelques propriétés des formes de Pfister hermitiennes sur une algèbre de multi-quaternions. Une forme de Pfister hermitienne sur une algèbre simple centrale A munie d'une involution σ est, par définition, l'induite d'une forme de Pfister quadratique définie sur le sous-corps fixe de A par σ . Cette notion ainsi que le niveau hermitien d'un anneau à involution ont été définies par Lewis dans [43].

En [43], Lewis pose (implicitement) la question suivante :

Question. *Etant donnée une algèbre à involution (A, σ) , si on omet les cas où A est une extension quadratique ou une algèbre de quaternions munie de son involution canonique, est-ce-que les notions d'isotropie et d'hyperbolicité coïncident pour les formes de Pfister*

hermitiennes ?

La réponse aux deux cas omis dans cette question est donnée par le théorème 6.2.3 de Jacobson. En 1997 et en 2002, dans [72] et [73], Serhir prouve que la réponse à cette question est positive lorsque A est une algèbre de quaternions munie d'une involution quelconque ou une algèbre de biquaternions munie du produit tensoriel des deux involutions canoniques. En utilisant les suites exactes du chapitre 4, nous prouvons que si une forme de Pfister hermitienne h est isotrope sur un produit tensoriel A d'algèbres de quaternions à involutions (d'espèce arbitraire) et si A est une algèbre à division alors h est faiblement hyperbolique et que, de plus, le coefficient d'hyperbolicité faible ne dépend que du degré de cette algèbre (voir la proposition 5.2.10). Ce résultat a été obtenu de manière indépendante (et différente) par Mahmoudi en [47]. Ce résultat nous permet de préciser l'ordre additif de la forme unité dans de telles algèbres (voir le corollaire 5.2.12).

Enfin, sur le modèle des idéaux $I^n(K)$ de $W(K)$, nous définissons naturellement des sous-modules $I^n(A, \sigma)$ dans le groupe de Witt d'une algèbre à involution (A, σ) . D'après un célèbre théorème d'Arason et Pfister, on sait que l'intersection des idéaux $I^n(K)$ est triviale. La question de savoir si ceci reste vrai au niveau des modules $I^n(A, \sigma)$ semble être une question difficile ; nous pouvons seulement prouver un analogue faible de ce résultat : plus précisément, si (A, σ) est un produit tensoriel d'algèbres de quaternions à involution et si A est une algèbre à division, nous montrons que l'intersection des modules $I^n(A, \sigma)$ est un module de 2^r -torsion où, encore une fois, r ne dépend que du degré de A (voir la proposition 5.2.16).

Dans le chapitre 6, nous nous intéressons à la généralisation aux formes hermitiennes de critères d'isomorphie connus au niveau des anneaux de Witt.

Deux corps K et L de caractéristique différente de 2 sont dits Witt-équivalents si leurs anneaux de Witt $W(K)$ et $W(L)$ sont isomorphes (en tant qu'anneaux). En 1970, Harrison trouve un critère important donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux corps soient Witt-équivalents : ce résultat est connu dans la littérature mathématique sous le nom de critère de Harrison, voir le théorème 6.1.1. En 1994, dans [60], Perlis, Szymiczek, Conner et Litherland utilisent ce critère pour prouver que deux corps globaux sont Witt-équivalents si et seulement si il existe une équivalence de réciprocity entre eux (i.e. il existe une bijection entre leurs groupes de classes de carrés et une bijection entre leurs places non triviales qui "respecte" les symboles de Hilbert : voir la définition 6.4.7).

Dans la première partie de ce chapitre, nous expliquons comment obtenir un analogue du critère de Harrison pour les groupes de Witt dans les deux cas suivants :

1. le groupe de Witt d'une extension quadratique munie de son automorphisme non trivial pour sa structure d'anneau (voir le théorème 6.1.3) ;
2. le groupe de Witt d'une algèbre de quaternions à division munie de son involution canonique pour sa structure de $W(K)$ -module (voir le théorème 6.3.7 et le corollaire

6.3.9) ; ce critère est similaire dans sa formulation à un critère obtenu par Baeza et Moresi pour les corps de caractéristique 2 (voir le théorème 6.1.2).

Dans la seconde partie de ce chapitre et pour le premier des deux cas précédents, nous définissons la notion d'équivalence de réciprocité quadratique entre deux corps globaux. Comme conséquence des résultats précédents, nous montrons que les groupes de Witt des extensions quadratiques de deux corps globaux munies de leurs automorphismes non triviaux sont isomorphes en tant qu'anneaux si et seulement si il existe une équivalence de réciprocité quadratique entre eux (voir le théorème 6.1.5).

Le chapitre 7 traite des groupes $SK_1(A)$ et $USK_1(A)$ respectivement appelés groupe de Whitehead réduit de A et groupe de Whitehead unitaire réduit de A , où A est une algèbre simple centrale sur un corps de caractéristique *quelconque*. On s'intéresse à la trivialité de ces deux groupes sous des conditions aussi faibles que possible.

Nous rappelons tout d'abord quelques résultats remarquables concernant la structure de chacun de ces deux groupes. Nous insistons particulièrement sur des liens possibles entre ces deux groupes et sur des résultats célèbres donnant des conditions suffisantes à leur trivialité.

Nous démontrons ensuite des résultats préliminaires à ceux de la dernière section de ce chapitre. D'une part, nous prouvons un résultat de "descente" pour USK_1 généralisant un résultat de Yanchevskiï et analogue dans sa formulation à un résultat de Wang concernant SK_1 (voir le lemme 7.3.4). D'autre part, à partir d'un corps quelconque et d'un nombre premier différent de la caractéristique du corps, nous construisons à partir du corps de base un corps vérifiant certaines propriétés intéressantes (voir la proposition 7.3.6). Lorsque ce nombre premier vaut 2, ce résultat est dû à Bayer-Fluckiger et Serre et la preuve générale s'en inspire.

Nous nous intéressons également au lien qu'il existe entre la surjectivité de la norme réduite et la dimension cohomologique. Dans ce cadre, le résultat le plus important est dû à Merkurjev et Suslin (voir le théorème 7.4.3) qui donne des critères locaux reliant ces deux notions. Nous n'utilisons pas ce résultat dans toute sa généralité et insistons plutôt sur un de ses corollaires (dû aussi à Merkurjev et Suslin) dont nous donnons une preuve (voir le corollaire 7.1.6).

Enfin, dans la section 7.5, nous utilisons les résultats précédents pour établir des critères locaux de trivialité de SK_1 et USK_1 (voir les théorèmes 7.1.8 et 7.1.9) ; nous précisons également ce que deviennent ces critères d'un point de vue global (voir le corollaire 7.5.2). Certains de ces résultats sont probablement conséquences de résultats plus généraux (comme par exemple le théorème 7.4.3 de Merkurjev et Suslin) mais nous avons préféré présenter des preuves mettant en valeur les techniques astucieuses inhérentes aux résultats de trivialité obtenus par Platonov, Yanchevskiï et Wang.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Algèbres simples centrales à involution

Les premières algèbres non commutatives apparaissent en 1844 dans les travaux de Hamilton lorsqu'il découvre l'algèbre des quaternions sur le corps des nombres réels. En 1878, Frobenius démontre que celle-ci constitue en fait le seul exemple de corps non commutatif (de dimension finie) sur le corps des nombres réels. Le début du XX^e siècle voit la naissance d'une tendance commune à toute l'Algèbre : l'abandon de toute restriction sur les corps et les anneaux. En particulier, la commutativité ne devient plus systématique dans l'étude des corps et, sous l'impulsion des travaux de Dickson, Moore et Wedderburn, la théorie des algèbres à division est développée. La conséquence la plus marquante de ces travaux est sans doute le théorème de Wedderburn établissant qu'une algèbre à division finie est nécessairement commutative.

Parallèlement à ces travaux, Wedderburn, en 1907, cherche le premier à étudier les algèbres simples et démontre d'importants résultats de structure les concernant. En 1927, Brauer et Noether (rejoints par Albert et Hasse en 1930) continuent l'étude systématique des algèbres à division et développent la théorie des algèbres simples à la lumière des résultats de Wedderburn. Sur la base de ces travaux et de ses propres recherches, Albert conçoit, au cours des années 1930, la théorie des algèbres simples centrales à involution sur un corps quelconque telle qu'on l'aborde aujourd'hui.

En 1929, Brauer réussit à munir l'ensemble des classes d'isomorphismes d'algèbres à division qui sont de dimension finie sur leur centre commun K d'une structure de groupe abélien de torsion, que l'on appelle aujourd'hui groupe de Brauer de K . Au début des années 1930, Noether montre l'importance de ce groupe comme invariant de K en le reliant à la cohomologie galoisienne au moyen des produits croisés. La conséquence la plus remarquable de ces travaux est sans doute la description complète du groupe de Brauer d'un corps de nombres algébriques obtenue quelques années plus tard par Albert, Brauer, Hasse et Noether : voir l'exemple 1.1.9(5).

Le langage de toute cette théorie trouve ses sources dans les livres d'Albert (voir [1]) et de Deuring (voir [18]). Nous recommandons la lecture de [22] et [71] qui offrent un traitement de cette théorie à la lumière de résultats plus récents. On pourra également consulter [33] qui a par ailleurs été une grande source d'inspiration tant pour la présentation de cette section que pour les notations adoptées tout au long de ce travail.

1.1.1 Algèbres simples centrales à involution

Dans ce travail, K désignera un corps commutatif. Sauf mention contraire, toutes les algèbres considérées dans ce travail seront unifères et de dimension finie et tous les modules seront des modules à droite supposés finiment engendrés. Les notations fixées dans ce chapitre seront conservées (autant que possible) tout au long de ce travail.

Une *algèbre simple centrale* sur K est une algèbre (de dimension finie) $A \neq \{0\}$ de centre K et qui ne possède, outre $\{0\}$ et A , aucun idéal bilatère. Une algèbre $A \neq \{0\}$ est une *algèbre à division* (ou un *corps gauche*) si tout élément non nul de A est inversible pour la multiplication ; une algèbre à division est une algèbre simple centrale sur son centre. Etant données une algèbre simple centrale sur K et une extension de corps L/K , on obtient, par extension des scalaires de K à L , la L -algèbre simple centrale $A_L = A \otimes_K L$. A toute algèbre A correspond son algèbre opposée A^{op} : $A^{\text{op}} = A$ en tant que K -module mais sa multiplication $*$ est définie par $a * b = ba$ pour tous $a, b \in A$.

La structure des algèbres simples centrales est entièrement déterminée par le théorème de Wedderburn :

Théorème 1.1.1 (Wedderburn). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) A est une K -algèbre simple centrale.
- (2) L'application canonique $A \otimes_K A^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_K(A)$ qui à $a \otimes b$ associe l'endomorphisme $x \mapsto axb$ est un isomorphisme d'algèbres.
- (3) Il existe un corps L contenant K tel que $A_L \simeq M_n(L)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
- (4) Il existe une K -algèbre à division D de dimension finie et $r \in \mathbb{N}$ tels que $A \simeq M_r(D)$.
De plus, si l'une de ces conditions est satisfaite, tous les A -modules à gauche (ou à droite) simples sont isomorphes et l'algèbre à division D de l'assertion (4) est uniquement déterminée à isomorphisme près par $D = \text{End}_A(M)$ où M désigne un A -module à gauche simple.

Preuve. Voir [22, §3] ou [71, Chapter 8, §1]. □

Tout corps vérifiant l'assertion (3) du résultat précédent est appelé *corps déployant* de A .

Remarque 1.1.2. Plus généralement, toute K -algèbre simple centrale possède un corps déployant M tel que M/K soit une extension finie galoisienne d'après un célèbre théorème de Köthe (voir [22, §9, p. 64]).

La dimension d'une algèbre ne changeant pas par extension des scalaires, l'assertion (3) du théorème 1.1.1 nous indique que la dimension de toute algèbre simple centrale sur son centre est le carré d'un entier naturel n : cet entier n est appelé *degré* de A et est noté $\deg A$; le degré de l'algèbre à division D de l'assertion (4) est appelé *indice* (de Schur) de A et est noté $\text{ind } A$. Cet indice mesure la "distance" qu'il existe entre A et une algèbre de matrices sur K .

Une *involution* sur une algèbre simple centrale A (ou plus généralement sur un anneau unitaire) est une application σ de A dans A vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma(a + b) &= \sigma(a) + \sigma(b), \\ \sigma(ab) &= \sigma(b)\sigma(a), \\ \sigma \circ \sigma &= \text{id}_A,\end{aligned}$$

pour tous $a, b \in A$; il revient au même de dire que σ est un antiautomorphisme d'anneaux de A d'ordre 2. On voit aisément que la restriction d'une involution σ au centre K de A est un automorphisme d'ordre au plus 2. Il se produit exclusivement deux cas :

1. σ fixe le centre de A élément par élément (autrement dit σ est K -linéaire) ; dans ce cas, elle est appelée *involution de première espèce* ;
2. la restriction de σ à K est un automorphisme d'ordre 2 ; dans ce cas, elle est appelée *involution de deuxième espèce*.

Par souci de précision, on dira plutôt que σ est une K/F -*involution* sur A : cela signifiera que σ est une involution sur A , que le centre de A est K et que F est le sous-corps de K (éventuellement égal à K) formé de tous les éléments fixés par σ . En caractéristique différente de 2, il est clair que pour une K/F -involution avec $F \neq K$, l'extension de corps K/F est séparable de degré 2.

Si (A, σ) et (B, τ) sont deux K/F -algèbres simples centrales à involutions de même espèce, un homomorphisme d'algèbres à involution $f : (A, \sigma) \rightarrow (B, \tau)$ est, par définition, la donnée d'un homomorphisme de K -algèbres $f : A \rightarrow B$ qui commute aux involutions (c'est-à-dire tel que $\tau \circ f = f \circ \sigma$).

Si (A, σ) est une K -algèbre simple centrale à involution de première espèce et si $\text{car}(K) \neq 2$, on a la décomposition en somme directe $A = \text{Sym}(A, \sigma) \oplus \text{Skew}(A, \sigma)$ où

$$\begin{aligned}\text{Sym}(A, \sigma) &= \{x \in A \mid \sigma(x) = x\}, \\ \text{Skew}(A, \sigma) &= \{x \in A \mid \sigma(x) = -x\},\end{aligned}$$

désignent les sous- K -espaces vectoriels de A formés respectivement des éléments symétriques et antisymétriques de A relativement à σ . Si n est le degré de A alors, en étendant les scalaires à un corps déployant de A , on peut voir que soit $\text{Sym}(A, \sigma)$, soit $\text{Skew}(A, \sigma)$ a pour dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (voir [71, Chapter 8, Theorem 7.5]) : l'involution σ est dite *de type*

orthogonal si $\text{Sym}(A, \sigma)$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, de *type symplectique* dans le cas contraire. Au lieu d'involution de seconde espèce, on parlera aussi d'involution *de type unitaire*, ce nom provenant du lien qu'il existe entre elles et les groupes unitaires (voir [33, Chapter III]).

L'exemple le plus simple d'involution de première espèce est donné par la transposition sur une algèbre de matrices à coefficients dans K ; l'automorphisme non trivial d'une extension quadratique séparable donne un exemple d'involution de seconde espèce. L'involution canonique d'une algèbre de quaternions constitue un autre exemple important d'involution de première espèce ; ce type d'algèbre à involution étant primordial pour la suite de ce travail, nous en rappelons brièvement les principales caractéristiques :

Exemple 1.1.3. Soit K un corps de caractéristique différente de 2 ; on appelle *algèbre de quaternions* et on note $(a, b)_K$ (avec $a, b \in K^*$) l'algèbre engendrée par deux éléments i et j sujets aux relations

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji.$$

On peut montrer que $(a, b)_K$ est une K -algèbre simple centrale de degré 2 et réciproquement on peut voir que toute K -algèbre simple centrale de degré 2 est une algèbre de quaternions au sens précédent (si K est un corps de caractéristique quelconque, on convient d'appeler algèbre de quaternions toute K -algèbre simple centrale de degré 2). Le nom de cette algèbre provient du fait qu'elle est la généralisation à un corps quelconque de l'algèbre de quaternions $(-1, -1)_{\mathbb{R}}$ découverte par Hamilton en 1844.

On appelle *involution canonique* de l'algèbre de quaternions $A = (a, b)_K$, l'involution – définie par

$$\bar{i} = -i, \quad \bar{j} = -j.$$

On peut définir une autre involution \wedge sur A en posant

$$\hat{i} = -i, \quad \hat{j} = j.$$

Il est aisé de voir que ces deux involutions sont de première espèce sur A et, en évaluant les dimensions des espaces symétriques correspondants, on voit en outre que – est symplectique (c'est d'ailleurs la seule involution de type symplectique sur A : voir [33, Proposition 2.21]) et que \wedge est orthogonale.

1.1.2 Quelques grands théorèmes

Dans cette sous-section, nous nous bornons à rappeler sans preuve(s) quelques grands résultats qui nous seront utiles par la suite.

A tout élément inversible u de A correspond un automorphisme de A noté $\text{Int}(u)$ et défini par $x \mapsto uxu^{-1}$; cet automorphisme est appelé automorphisme intérieur de A induit par u .

Nous en venons à un résultat de base dans la théorie des algèbres simples centrales, le théorème de Skolem-Noether, qui caractérise les automorphismes des algèbres simples centrales en terme de leurs automorphismes intérieurs.

Théorème 1.1.4 (Skolem-Noether). *Soient A une K -algèbre simple centrale et B une sous-algèbre simple de A . Alors, tout homomorphisme de K -algèbres $\rho : B \rightarrow A$ peut être étendu à un automorphisme intérieur de A . En particulier, tout automorphisme de K -algèbres de A est un automorphisme intérieur.*

Preuve. Voir [13, §10, Théorème 1] ou [71, Chapter 8, Theorem 4.2]. □

Ce résultat est une conséquence importante des travaux sur les corps gauches entrepris par Albert, Brauer, Hasse et Noether à la fin des années 1920. Il a été découvert par Skolem en 1927 et redécouvert indépendamment quelques années plus tard par Noether, en 1933.

Remarque 1.1.5. Le théorème 1.1.4 est vrai plus généralement si A est un anneau artinien simple de centre K et si B est une K -algèbre simple de dimension finie.

Etant donnée une K/F -invololution de première espèce (resp. de deuxième espèce) sur une algèbre simple centrale, on peut caractériser les K/F -involutions de première espèce (resp. de deuxième espèce ayant même restriction à K) sur cette algèbre de la manière suivante :

Proposition 1.1.6. (1) *Soit A une algèbre simple centrale munie d'une K/F -invololution σ de première espèce. Pour chaque K/F -invololution σ' de première espèce sur A , il existe un $u \in A^*$ uniquement déterminé à un scalaire de F^* près, tel que l'on ait $\sigma' = \text{Int}(u) \circ \sigma$ et $\sigma(u) = \pm u$. De plus, σ et σ' sont de même type si et seulement si $\sigma(u) = u$.*

(2) *Soit B une algèbre simple centrale munie d'une K/F -invololution σ de seconde espèce. Pour toute K/F -invololution σ' sur B ayant même restriction à K que σ , il existe un $u \in B^*$, uniquement déterminé à un scalaire de F^* près tel que $\sigma' = \text{Int}(u) \circ \sigma$, et $\sigma(u) = u$.*

Preuve. Ce résultat est une conséquence du théorème de Skolem-Noether : voir [33, Proposition 2.7] pour (1) et [33, Proposition 2.18] pour (2). □

On écrit \bar{A} pour désigner l'algèbre conjuguée de A (on a $\bar{\bar{A}} = A$ en tant qu'anneau mais sa loi externe est obtenue en tordant la loi externe de A par l'action de $\text{Gal}(K/F)$). Dès 1939, Albert donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre simple centrale admette une K/F -invololution de première espèce. Il met également en valeur une telle condition pour les produits croisés d'un genre particulier possédant une K/F -invololution de deuxième espèce, résultat complété par Riehm en 1970 et par Scharlau en 1975 pour aboutir au théorème suivant :

Théorème 1.1.7. (Albert)(1) Soit A une algèbre simple centrale sur K . Il existe une K/F -involution de première espèce sur A si et seulement si $A \otimes_K A$ est déployée.

(Albert-Riehm-Scharlau)(2) Soit B une algèbre simple centrale sur K . Il existe une K/F -involution de seconde espèce sur B laissant les éléments de F invariant élément par élément si et seulement si $N_{K/F}(B)$ est déployée (voir la remarque 1.1.8 pour la définition de $N_{K/F}$).

Preuve. Voir [1, Theorem 10.19] pour (1) et [68] ou [71, Chapter 8, Theorem 9.5] pour (2). On peut consulter aussi [33, §3] pour une preuve différente de ces deux assertions. \square

Remarque 1.1.8. Rappelons la définition de l'algèbre $N_{K/F}$ définie par Riehm en 1970 (voir [68]). Soient $\bar{}$ – l'automorphisme non trivial de K et

$$s : \begin{cases} \bar{A} \otimes_K A & \rightarrow \bar{A} \otimes_K A \\ \bar{a} \otimes b & \mapsto \bar{b} \otimes a \end{cases}$$

l'application “échange”, alors $N_{K/F}$ est la sous- F -algèbre de $\bar{A} \otimes_K A$ de degré $(\deg A)^2$ fixe sous s i.e.

$$N_{K/F}(A) = \{u \in \bar{A} \otimes_K A \mid s(u) = u\}.$$

Dans la littérature, $N_{K/F}(A)$ est appelée la norme (le transfert, la corestriction) de la K -algèbre A .

1.1.3 Groupe de Brauer

Nous rappelons la définition d'un groupe introduit par Brauer en 1929.

Grâce au théorème 1.1.1(4), nous savons que toute algèbre simple centrale sur K est isomorphe à une algèbre de matrices sur un corps gauche de centre K , celui ci étant uniquement déterminé à isomorphisme près. Deux K -algèbres simples centrales A et B sont *Brauer-équivalentes* (et on écrit $A \sim B$) si elles sont K -isomorphes à des algèbres de matrices sur des corps gauches isomorphes ou, de façon équivalente, s'il existe deux entiers n et m tels que $M_n(A) \simeq M_m(B)$. Il est clair que \sim définit une relation d'équivalence sur les K -algèbres simples centrales de dimension finie ; la classe d'une K -algèbre simple centrale A sera notée $[A]$.

Le produit tensoriel (sur K) de deux K -algèbres simples centrales étant à nouveau une K -algèbre simple centrale (d'après le théorème du double centralisateur dû à Brauer, voir [71, Chapter 8, Theorem 3.2]), l'ensemble des classes d'équivalences de K -algèbres simples centrales muni de la loi induite par le produit tensoriel de K -algèbres est un groupe abélien appelé *groupe de Brauer de K* et noté $\text{Br}(K)$. Dans ce groupe, l'élément neutre est $[K]$ et l'inverse de $[A]$ est $[A^{\text{op}}]$ (par l'assertion (2) du théorème 1.1.1). La 2-torsion de ce groupe abélien sera notée $\text{Br}_2(K)$.

Le groupe de Brauer est un invariant de K qui fournit d'importantes informations sur les algèbres centrales à division sur K et qui est, en général, difficile à calculer.

- Exemples 1.1.9.** (1) Le groupe de Brauer d'un corps algébriquement clos est trivial.
(2) Le groupe de Brauer d'un corps fini (ou plus généralement d'un corps C_1) est trivial.
(3) $\text{Br}(\mathbb{R})$ est un groupe cyclique d'ordre 2 ; son élément non trivial est donné par la classe de l'algèbre des quaternions d'Hamilton $(-1, -1)_{\mathbb{R}}$.
(4) Si K est un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini (e.g. le corps p -adique \mathbb{Q}_p), $\text{Br}(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(5) Si K est un corps de nombres algébriques ou un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini, on a une suite exacte (réciprocité de Hasse)

$$0 \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus \text{Br}(K_p) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

où K_p désigne la complétion de K en la place p . Pour les corps de nombres algébriques, ce résultat est essentiellement dû à Albert, Brauer, Hasse et Noether.

On pourra trouver dans [74, Chapitres X, XII, XIII] la preuve de ces résultats ainsi que d'autres exemples de calculs de groupes de Brauer.

Le résultat qui suit est un corollaire important du théorème 1.1.7, découvert par Albert en 1939 puis complété par Scharlau en 1975 :

Corollaire 1.1.10 (Albert-Scharlau). *Soit A une K -algèbre simple centrale possédant une K/F -involution σ . Alors toute algèbre Brauer-équivalente à A possède une K/F -involution de même espèce que σ .*

Preuve. Si σ est de première espèce, le résultat découle directement du théorème 1.1.7(1). Si σ est de seconde espèce, on utilise successivement le théorème 1.1.7(2), puis [71, Chapter 8, Lemma 9.7] et enfin [33, Proposition 3.13] pour conclure. \square

Remarque 1.1.11. Il serait illusoire de croire que si une K -algèbre simple centrale A possède une K/F -involution σ de première espèce et si B est Brauer-équivalente à A alors B possède une K/F -involution de première espèce et de même type que σ : on obtient un contre-exemple en considérant $A = M_n(K)$ avec $n > 1$, σ une involution symplectique sur A (par exemple $\sigma = \text{Int}(u) \circ t$ où t désigne la transposition matricielle et où u est une matrice antisymétrique : voir [33, Proposition 2.19]) et $B = K$; par contre, dans la situation ci-dessus, si σ est orthogonale, il n'est pas difficile de voir que B possède aussi une involution orthogonale.

1.2 Formes

Si la théorie des formes quadratiques a été créée dès l'Antiquité pour servir d'armature à la géométrie euclidienne, elle trouve son aspect actuel durant la seconde moitié du XVII^e

siècle avec Descartes et Fermat qui la sortent quelque peu de ce contexte. Jusqu'au XIX^e siècle, cette théorie est un élément à part entière de la théorie des nombres et il faudra attendre les travaux de Minkowski, Siegel, Hasse et Eichler pour qu'elle devienne autonome et que la théorie arithmétique des formes quadratiques naisse.

Les travaux de Dedekind, Frobenius, Noether et Artin contribuent au développement du concept d'algèbre linéaire abstraite qui va conduire au cours du XX^e siècle à l'abandon de toute restriction sur l'anneau des scalaires, donnant ainsi un nouvel élan à des théories par ailleurs déjà connues telles que la théorie des formes hermitiennes ou, plus généralement, celle des formes sesquilineaires.

Le premier pas vers cette généralisation est franchi avec les travaux novateurs de Witt en 1937 qui pose les fondements de la théorie des formes quadratiques sur un corps quelconque. Cette théorie connaît un essor formidable à partir de 1965, quand Pfister justifie l'importance de cette approche grâce à ses théorèmes de structure : on parlera désormais de théorie algébrique des formes quadratiques.

À partir de 1960, le développement de nouvelles théories comme la topologie algébrique ou la K -théorie algébrique conduit à considérer l'étude des formes quadratiques sur un anneau commutatif et des formes sesquilineaires et hermitiennes sur un anneau à involution. Là aussi d'importants résultats sont obtenus, tantôt s'inspirant de résultats connus en théorie des formes quadratiques, tantôt révélant des principes plus généraux inhérents à ces théories.

Une partie importante de la théorie des formes hermitiennes traite de formes hermitiennes sur des anneaux ou des algèbres de groupe. L'attrait de cette théorie provient du fait qu'elle se situe au carrefour de plusieurs parties importantes des Mathématiques : outre la topologie algébrique et la K -théorie algébrique, on peut citer la théorie des représentations, la théorie des algèbres simples, la théorie des anneaux ordonnés et la théorie algébrique des nombres.

Les ouvrages de référence concernant la théorie arithmétique des formes quadratiques sont [23] et [56]. Pour la théorie algébrique des formes quadratiques, nous recommandons la lecture de [34] et [71]. Le lecteur intéressé par les théories des formes sesquilineaires et hermitiennes pourra consulter [14], [32] et [71]. On pourra également se reporter à [39] qui traite de la classification à isométrie près des formes hermitiennes.

1.2.1 Définitions

Nous supposerons dorénavant, sauf mention contraire, que K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Nous désignerons par A une K -algèbre simple centrale à K/F -involution σ , par ε un élément de K vérifiant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$ et par G un groupe fini d'élément neutre e . Bien que définies sur une algèbre simple centrale à involution, toutes les notions contenues dans cette sous-section sont généralisables sans difficulté à un anneau à involution.

Formes sesquilinéaires

Une *forme sesquilinéaire* (M, s) sur (A, σ) est la donnée d'un couple constitué d'un A -module à droite M et d'une application biadditive $s : M \times M \rightarrow A$ telle que

$$s(x\alpha, y\beta) = \sigma(\alpha)s(x, y)\beta,$$

pour tous $x, y \in M$, pour tous $\alpha, \beta \in A$.

Formes ε -hermitiennes

Une forme sesquilinéaire (M, h) sur (A, σ) est une *forme ε -hermitienne* si elle vérifie en outre

$$h(y, x) = \varepsilon\sigma(h(x, y)),$$

pour tous $x, y \in M$. Si $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$), on dira plus volontiers que la forme est hermitienne (resp. antihermitienne).

Remarque 1.2.1. Si σ est une K/F -involution de première espèce, $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = \varepsilon^2 = 1$ (puisque $\varepsilon \in K^*$) et $\varepsilon = \pm 1$.

Le *module dual* d'un A -module à droite M est l'ensemble $\text{Hom}_A(M, A)$ que l'on notera plutôt M^* . M^* peut être muni d'une structure canonique de A -module à gauche en posant

$$(a \cdot f)(m) = af(m),$$

pour tous $a \in A$, $f \in M^*$, $m \in M$. En tordant cette action au moyen de l'involution σ , on peut voir M^* comme un A -module à droite (ce que l'on fera toujours par la suite) en posant

$$(f \cdot a)(m) = \sigma(a)f(m),$$

pour tous $a \in A$, $f \in M^*$, $m \in M$.

Si (M, h) est une forme ε -hermitienne sur (A, σ) alors h induit un homomorphisme de A -modules à droite :

$$\widehat{h} : \begin{cases} M & \rightarrow M^* \\ x & \mapsto h_x \end{cases}$$

où $h_x(y) = h(x, y)$ pour tout $y \in M$. La forme ε -hermitienne (M, h) est dite *non dégénérée* (ou *régulière*) si \widehat{h} est un isomorphisme de A -modules à droite. Désormais, nous supposerons toujours que les formes considérées sont non dégénérées.

Remarque 1.2.2. Dans la terminologie usuelle, une forme ε -hermitienne (M, h) sur (A, σ) est dite unimodulaire si \widehat{h} est bijective, non dégénérée si \widehat{h} est injective. Comme les dimensions sur K de M et M^* sont égales, il n'y a pas lieu de distinguer ces deux notions dans notre propos.

Un cas particulier important : les formes quadratiques

Si on suppose que $A = K$ est un corps commutatif et que $\sigma = \text{id}_K$, les A -modules à droite deviennent des K -espaces vectoriels à droite, et les formes hermitiennes (resp. antihermitiennes) deviennent des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques).

Soit V un K -espace vectoriel (de dimension finie). Une *forme quadratique* sur V est une application $q : V \rightarrow K$ telle que

$$q(x\alpha) = q(x)\alpha^2$$

pour tout $x \in V$ et pour tout $\alpha \in K$ et telle que l'application $b_q : V \times V \rightarrow K$ définie par

$$b_q(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

soit une forme bilinéaire (nécessairement symétrique).

Les formes quadratiques et les formes bilinéaires symétriques sont interchangeables lorsque la caractéristique de K est différente de 2 puisque $b_q(x, x) = 2q(x)$. De cette manière, tous les concepts concernant les formes bilinéaires symétriques peuvent être transportés aux formes quadratiques et réciproquement. Lorsque la caractéristique de K est 2, ces deux concepts sont différents.

On verra par la suite que les formes quadratiques (même en caractéristique 2) fournissent (souvent) une bonne source d'inspiration pour aborder les problèmes concernant les formes ε -hermitiennes sur une algèbre à division.

G -Formes ε -hermitiennes

Une forme ε -hermitienne (M, h) sur (A, σ) est une G -forme ε -hermitienne ou plus simplement une G -forme si G agit sur M à droite (c'est-à-dire si pour tout élément g de G , l'application $M \rightarrow M : m \mapsto m \cdot g$ est un automorphisme de A -modules à droite : de façon plus concise, on dira aussi que M est un G -module sur A) et si on a l'identité d'équivariance

$$h(m \cdot g, n \cdot g) = h(m, n),$$

pour tous $m, n \in M$ et pour tout $g \in G$.

Etant donnée une G -forme ε -hermitienne (M, h) sur (A, σ) , on parle de *forme ε -hermitienne sous-jacente* pour signifier que l'on se concentre sur la structure de forme ε -hermitienne de (M, h) sur (A, σ) . Si (M, h) est une G -forme ε -hermitienne, elle est dite *non dégénérée* si la forme ε -hermitienne sous-jacente est non dégénérée.

Nous allons montrer que les G -formes ε -hermitiennes sur A sont interchangeables avec les formes ε -hermitiennes sur l'*algèbre de groupe* $A[G]$ de G sur A . On rappelle que $A[G]$ désigne l'ensemble des applications de G dans A , et que celui-ci peut être muni d'une

structure d'anneau (au moyen de l'addition usuelle des applications et de la multiplication définie par

$$(ff')(g) = \sum_{\substack{(g_1, g_2) \in G \times G \\ g_1 g_2 = g}} f(g_1) f'(g_2)$$

pour tous $f, f' \in A[G]$ et pour tout $g \in G$), d'une structure de A -module à droite libre et d'une structure de K -algèbre. Si on note $\{\eta_g\}_{g \in G}$ la base canonique du A -module à droite $A[G]$ i.e.

$$\eta_g : G \rightarrow A : g' \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } g' \neq g \\ 1 & \text{si } g' = g \end{cases},$$

tout $f \in A[G]$ s'écrit de façon unique $f = \sum_{g \in G} \eta_g f_g$ où $f_g \in A$ représente les coordonnées en g de f dans cette base pour tout $g \in G$. L'algèbre de groupe $A[G]$ possède une involution canonique notée $\underline{\sigma}$ définie par

$$\underline{\sigma}(\eta_g f_g) = \eta_{g^{-1}} \sigma(f_g)$$

pour tout $g \in G$ et pour tout $f_g \in A$.

Remarque 1.2.3. Les données de G -modules sur A et de $A[G]$ -modules sont équivalentes lorsque l'on pose

$$m \cdot (\eta_g f_g) = (m \cdot g) f_g$$

pour tout $m \in M$, pour tout $f_g \in A$ et pour tout $g \in G$. Si M (resp. N) désigne un G -module sur A (resp. un $A[G]$ -module), on notera (momentanément) \underline{M} le $A[G]$ -module (resp. \tilde{N} le G -module sur A) qui lui est associé de cette manière.

Si (M, h) est une G -forme ε -hermitienne sur (A, σ) , on peut lui associer la forme ε -hermitienne $(\underline{M}, \underline{h})$ sur $(A[G], \underline{\sigma})$ définie par

$$\underline{h}(m, m') = \sum_{g \in G} \eta_g h(m \cdot g, m')$$

pour tous $m, m' \in M$.

Réciproquement, si (N, H) est une forme ε -hermitienne sur $(A[G], \underline{\sigma})$, on peut lui associer la G -forme ε -hermitienne (\tilde{N}, \tilde{H}) sur (A, σ) définie par

$$\tilde{H}(n, n') = H(n, n')_e$$

pour tous $n, n' \in N$, $H(n, n')_e$ désignant la projection de $H(n, n')$ sur la composante neutre. Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre et induisent la correspondance bijective annoncée :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} G\text{-formes } \varepsilon\text{-hermitiennes} \\ \text{non dégénérées sur } (A, \sigma) \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{formes } \varepsilon\text{-hermitiennes non} \\ \text{dégénérées sur } (A[G], \underline{\sigma}) \end{array} \right\} \\ (M, h) & \rightarrow & (\underline{M}, \underline{h}) \\ (\tilde{N}, \tilde{H}) & \leftarrow & (N, H). \end{array}$$

Remarques 1.2.4. (1) On peut montrer sans difficulté que la correspondance bijective précédente induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des G -espaces ε -hermitiens sur (A, σ) et celle des espaces ε -hermitiens sur $(A[G], \underline{\sigma})$.
(2) Désormais, on ne fera plus de distinction de notation entre les structures de G -module sur A et de $A[G]$ -module.

Si on se donne (M, h) et (M', h') deux G -formes ε -hermitiennes, on peut définir leur *somme orthogonale* en posant

$$\begin{cases} (M \oplus M') \times (M \oplus M') & \rightarrow A \\ (m_1 \oplus m_1', m_2 \oplus m_2') & \mapsto h(m_1, m_2) + h'(m_1', m_2') \end{cases} ,$$

que l'on notera $(M, h) \perp (M', h')$ ou $h \perp h'$. Il est évident que cette application est à nouveau une G -forme ε -hermitienne et qu'elle est non dégénérée aussitôt que les deux formes de départ le sont.

Isométries, formes hyperboliques et formes métaboliques

Nous définissons ces différentes notions pour les G -formes ε -hermitiennes, les notions correspondantes pour les formes ε -hermitiennes (resp. les formes quadratiques) pouvant se déduire directement de celles-ci en prenant $G = 1$ (resp. $G = 1, \varepsilon = 1, A = K$ et $\sigma = \text{id}_K$).

Deux G -formes ε -hermitiennes (M, h) et (M', h') sur (A, σ) sont dites *isométriques* s'il existe un isomorphisme de $A[G]$ -modules à droite $\theta : M \rightarrow M'$ tel que

$$h'(\theta(x), \theta(y)) = h(x, y)$$

pour tous $x, y \in M$. On écrira $h \simeq h'$ et on dira que θ est une isométrie entre h et h' .

Soit M un G -module sur A ; en plus d'une structure de A -module à droite, le module dual M^* peut être naturellement muni d'une structure de G -module sur A en posant

$$(f \cdot g)(m) = f(m \cdot g^{-1})$$

pour tous $f \in M^*, m \in M$ et $g \in G$. La *forme hyperbolique associée* à M est la G -forme ε -hermitienne non dégénérée $(M \oplus M^*, \mathbb{h}_M)$ sur (A, σ) avec

$$\mathbb{h}_M(m \oplus f, m' \oplus g) = f(m') + \varepsilon \sigma(g(m))$$

pour tous $f, g \in M^*, m, m' \in M$. On dira qu'une G -forme ε -hermitienne (P, h) sur (A, σ) est une *forme hyperbolique* si (P, h) est isométrique à la forme hyperbolique associée à un certain G -module sur A .

Soit (M, h) une G -forme ε -hermitienne sur (A, σ) . (M, h) est une *forme métabolique* s'il existe un sous- $A[G]$ -module N de M tel que $N = N^\perp$ (pour h), N^\perp désignant l'orthogonal du module N relativement à h i.e.

$$N^\perp = \{x \in M \mid h(x, n) = 0 \text{ pour tout } n \in N\}.$$

On précisera lors de la sous-section 1.2.2 le rapport qu'il existe entre les notions de forme hyperbolique et métabolique.

1.2.2 Premières propriétés

Les formes quadratiques sur un corps commutatif possèdent nombre de propriétés agréables : entre autres choses, on sait qu'elles sont diagonalisables (après choix éventuel d'une base convenable), qu'elles vérifient la propriété de simplification de Witt et que les notions d'hyperbolicité et de métabolicité coïncident. Cette sous-section vise, en plus de fixer quelques notations supplémentaires, à préciser ce que deviennent ces propriétés au niveau des formes hermitiennes.

Diagonalisation

Un fait bien connu dans la théorie des formes quadratiques (sur un corps commutatif) est l'existence d'une base orthogonale pour chacune d'entre elles. Par voie de conséquence, toute forme quadratique sur un corps commutatif est isométrique à une forme diagonale ; on dit qu'elle est diagonalisable.

Cette propriété n'est, en général, pas vraie pour les formes ε -hermitiennes sur une K -algèbre à involution (A, σ) . Néanmoins, si $A = D$ est une algèbre à division et si on exclut le cas où $D = K$, $\sigma = \text{id}_K$ et $\varepsilon = -1$, toute forme ε -hermitienne non dégénérée sur (D, σ) est *diagonalisable*, c'est-à-dire que cette forme possède une D -base orthogonale ou encore, si B désigne la matrice de cette forme dans une base donnée, qu'il existe une matrice P inversible à coefficients dans D telle que ${}^t\sigma(P)BP = C$, où C est une matrice diagonale et où t désigne la transposition matricielle habituelle (voir [71, Chapter 7, Theorem 6.3]).

Dans la suite, on écrira $h \simeq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ pour signifier qu'une forme ε -hermitienne sur (A, σ) est diagonalisable avec a_1, \dots, a_n pour entrées diagonales et nous supposons toujours que le cas où $D = K$, $\sigma = \text{id}_K$ et $\varepsilon = -1$ est exclu ; ceci n'est pas une grosse restriction puisque le groupe de Witt $W^{-1}(K, \text{id}_K)$ est trivial, toute forme antihermitienne étant hyperbolique sur (K, id_K) (voir la section suivante pour la définition du groupe de Witt).

Remarque 1.2.5. Si on considère une forme ε -hermitienne sur (A, σ) qui soit diagonalisable, ses entrées diagonales prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{x \in A \mid \varepsilon\sigma(x) = x\}$ qui coïncide avec $\text{Sym}(A, \sigma)$ (resp. $\text{Skew}(A, \sigma)$) lorsque $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$).

Simplification de Witt

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à la question suivante :

Question 1.2.6. *Etant données (M, h) , (M', h') et (M'', h'') des "formes", si*

$$(M, h) \perp (M', h') \simeq (M, h) \perp (M'', h''),$$

est-il vrai que $(M', h') \simeq (M'', h'')$?

Lorsque cette question admet une réponse affirmative, on dit que les formes considérées possèdent la propriété de *simplification de Witt*.

Afin de répondre à la question 1.2.6 pour les G -formes ε -hermitiennes, nous avons besoin de définir la notion de forme paire : une forme ε -hermitienne (M, h) sur (A, σ) est *paire* s'il existe une forme sesquilinéaire (N, s) telle que l'on ait

$$h(x, y) = s(x, y) + \varepsilon\sigma(s(y, x)) \quad (1.1)$$

pour tous $x, y \in M$.

Quebbemann, Scharlau et Schulte ont montré en 1979 que ces formes se comportent bien vis à vis de la simplification de Witt :

Théorème 1.2.7 (Quebbemann-Scharlau-Schulte). *Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps K (de caractéristique quelconque) munie d'une involution K -linéaire. Alors, la propriété de simplification de Witt est vraie pour les formes hermitiennes paires.*

Preuve. Voir [65, 3.4]. □

En fait, lorsque K est de caractéristique différente de 2, il est très facile de voir que la notion de G -forme ε -hermitienne paire n'apporte rien à la notion de G -forme ε -hermitienne :

Lemme 1.2.8. *Si la caractéristique de K est différente de 2, toute G -forme ε -hermitienne (M, h) sur une K -algèbre à involution (A, σ) est paire.*

Preuve. Il suffit de trouver $\alpha \in K^*$ tel que $\alpha + \sigma(\alpha) = 1$; le contexte nous autorise à prendre $\alpha = \frac{1}{2}$. En posant $s(x, y) = \alpha h(x, y)$, on vérifie que s est sesquilinéaire et que h vérifie l'équation (1.1). □

Des deux résultats précédents, on déduit aisément que la propriété de simplification de Witt est vraie pour les G -formes ε -hermitiennes dans le cadre que l'on s'est fixé.

Avant de clore ce paragraphe, nous rappelons l'évolution de cette propriété au cours du XX^e siècle. En 1937, Witt prouve que les formes quadratiques sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2 vérifient la propriété de simplification de Witt (voir [81]). Le pas suivant est franchi par Jacobson qui montre en 1953 que ce résultat s'étend aux formes hermitiennes sur un anneau à division à involution (voir [31, Chapter 5,11]). Ensuite, en 1969, McEvettt montre que cette propriété se prolonge aux formes hermitiennes sur une algèbre semi-simple à involution en utilisant l'équivalence de Morita (voir [48, §3]). Enfin, le résultat le plus complet sur ce sujet est le théorème 1.2.7.

Le devenir de l'importante propriété de décomposition de Witt pour les formes hermitiennes fera l'objet de la sous-section 3.1.2.

Hyperbolicité et métabolicité

Nous concluons cette section en rappelant le lien qu'il existe entre la notion de G -forme ε -hermitienne hyperbolique et celle de G -forme ε -hermitienne métabolique sur une algèbre simple centrale à involution (A, σ) . Rappelons qu'une K -algèbre B est semi-simple si le B -module B_B est somme directe (peut-être infinie) de B -modules simples.

Tout d'abord, il n'est pas difficile de voir, à partir de la définition, que la notion de métabolicité englobe la notion d'hyperbolicité : si on a une isométrie $(M, h) \simeq (N \oplus N^*, \mathbb{h}_n)$ alors on montre facilement que $N = N^\perp$ relativement à \mathbb{h}_N .

La véracité de la réciproque dépend d'un analogue du théorème suivant pour l'algèbre de groupe $A[G]$:

Théorème 1.2.9 (Maschke). *Soient K un corps commutatif et G un groupe fini. La K -algèbre $K[G]$ est semi-simple si et seulement si la caractéristique de K ne divise pas l'ordre de G .*

Preuve. Voir [3, Chapitre VI, Théorème 7.9]. □

De même, la caractéristique de K ne divise pas l'ordre de G si et seulement si $A[G]$ est une algèbre semi-simple et on peut montrer que, dans ce cas, les notions d'hyperbolicité et de métabolicité coïncident (la preuve de ce fait est analogue à un résultat de Bayer-Fluckiger et Lenstra Jr. : voir [6, 1.4] pour plus de détails). En particulier, il n'y a pas lieu de distinguer ces deux notions pour les formes ε -hermitiennes sur une algèbre simple centrale.

1.3 Groupe et anneau de Witt

Depuis la naissance de l'algèbre linéaire jusqu'au début du XX^e siècle, la théorie des formes quadratiques ne constitue pas une branche autonome des mathématiques. Il faut attendre l'intervention de Witt en 1937 pour que cet état de fait change et pour que les fondements de la théorie algébrique des formes quadratiques soient posés (voir son article fondateur : [81]). Alors que les formes quadratiques sont jusqu'alors regardées individuellement, Witt a l'idée géniale de les considérer globalement sur un corps de base fixé. A partir de l'ensemble des formes quadratiques sur un même corps de base, il construit un anneau connu aujourd'hui sous le nom d'anneau de Witt.

Les idées de Witt sont sans doute trop avancées car il faut attendre l'intervention de Pfister en 1965 pour que les mathématiciens se rendent compte de l'importance de cette approche et pour que l'anneau de Witt devienne l'objet central de la théorie algébrique des formes quadratiques.

Dès lors, de nombreux mathématiciens ont contribué au formidable essor de cette théorie et à celui de théories connexes comme celle des formes hermitiennes. Dans celle-ci, les notions introduites par Witt ont des analogues et l'objet central est appelé groupe de Witt.

Pour des informations plus précises sur l'anneau ou le groupe de Witt, on se référera à [71].

1.3.1 Groupe de Grothendieck-Witt

Soit (M, h) une G -forme ε -hermitienne non dégénérée sur une K/F -algèbre simple centrale à involution (A, σ) . La classe d'isométrie de (M, h) est notée $[M, h]$ ou $[h]$ et $[0]$ désigne la classe d'isométrie de la G -forme nulle, que l'on suppose non dégénérée par convention. Notons $S^\varepsilon(G, A, \sigma)$ l'ensemble des classes d'isométrie de G -formes ε -hermitiennes non dégénérées. La somme orthogonale définie en 1.2.1 confère à cet ensemble une structure de monoïde commutatif d'élément neutre $[0]$ en définissant

$$[h] + [h'] = [h \perp h'].$$

Il existe une manière canonique de construire un groupe abélien à partir d'un monoïde ; cette construction due à Grothendieck, est calquée sur l'obtention de \mathbb{Z} à partir de \mathbb{N} : on définit une relation d'équivalence sur les couples d'éléments du monoïde et on vérifie que l'addition naturelle confère à l'ensemble des classes d'équivalences une structure de groupe abélien (voir [71, Chapter 2, §1] pour plus de détails). Le groupe abélien obtenu de cette façon à partir de $S^\varepsilon(G, A, \sigma)$ est un objet universel qui est noté $Gr^\varepsilon(G, A, \sigma)$ et qui est appelé *groupe de Grothendieck-Witt équivariant* sur (G, A, σ) ; ses éléments sont des classes de couples de G -formes non dégénérées que l'on note $[h, h']$.

Puisque la simplification de Witt est vraie pour les G -formes (voir 1.2.2), il y a une injection

$$i : \begin{cases} S^\varepsilon(G, A, \sigma) & \hookrightarrow Gr^\varepsilon(G, A, \sigma) \\ [h] & \mapsto [h, 0] \end{cases}$$

et l'on peut ainsi identifier $S^\varepsilon(G, A, \sigma)$ avec son image dans $Gr^\varepsilon(G, A, \sigma)$. Par conséquent, tout élément de $Gr^\varepsilon(G, A, \sigma)$ s'écrit comme différence formelle $[h] - [h']$ de G -formes non dégénérées.

Remarque 1.3.1. Lorsque $G = 1$ (i.e. lorsque l'on travaille avec des formes ε -hermitiennes), on notera plus volontiers $S^\varepsilon(A, \sigma)$ et $Gr^\varepsilon(A, \sigma)$ les ensembles définis ci-dessus. Dans ce cas, $Gr^\varepsilon(A, \sigma)$ sera appelé *groupe de Grothendieck-Witt* sur (A, σ) .

1.3.2 Groupe de Witt

Habituellement, le groupe de Witt est défini comme le quotient du groupe de Grothendieck-Witt par le sous-groupe engendré par les formes hyperboliques. Nous adoptons une démarche différente en définissant le *groupe de Witt équivariant* sur (G, A, σ) comme étant le quotient de $Gr^\varepsilon(G, A, \sigma)$ par le sous-groupe engendré par les formes métaboliques ; ce

groupe sera noté $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$. Bien sûr, si l'on suppose que $\text{car}(K) \nmid |G|$, il n'y a pas de différence entre ces deux définitions du groupe de Witt (puisqu'il n'y a pas lieu de distinguer les notions d'hyperbolicité et de métabolicité (voir 1.2.2)). En particulier, lorsque $G = 1$, il est équivalent de parler de formes hyperboliques et de formes métaboliques, et les deux groupes ci-dessus coïncident ; dans ce cas, on parle de *groupe de Witt* sur (A, σ) et on note $W^\varepsilon(A, \sigma)$.

Notre approche aura l'avantage de simplifier certaines preuves (les formes métaboliques étant souvent plus faciles à manipuler que les formes hyperboliques) et d'obtenir certains énoncés même dans le cas où $\text{car}(K) \mid |G|$ (dans ce cas, les deux définitions de groupe de Witt sont évidemment différentes).

1.3.3 Anneau de Witt et structure de module pour le groupe de Witt

Dans le cas où $A = K$ et $G = 1$, on peut utiliser le produit tensoriel pour définir un produit de formes qui correspond matriciellement au produit de Kronecker ; au moyen de simples calculs, on voit que ce produit est compatible avec les différentes relations d'équivalences précédemment évoquées donnant ainsi naissance à un anneau appelé *anneau de Witt* : voir [14] ou [71, Chapter 2, §1]. On notera cet anneau $W(K, \sigma|_K)$ ou, plus simplement, $W(K)$ lorsque $\sigma = \text{id}_K$: $W(K)$ est l'anneau défini par Witt en 1937 (voir [81]).

Grâce à cet anneau, nous pouvons renforcer la structure de groupe de $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ en une structure de module : si $[V, q] \in W(K, \sigma|_K)$ et $[M, h] \in W^\varepsilon(G, A, \sigma)$, on définit $[V \otimes_K M, q \cdot h] \in W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ comme étant la classe de Witt de la G -forme ε -hermitienne non dégénérée

$$q \cdot h : \begin{cases} (V \otimes_K M) \times (V \otimes_K M) & \rightarrow A \\ (v \otimes m, v' \otimes m') & \mapsto q(v, v')h(m, m') \end{cases} .$$

Le produit tensoriel étant associatif et distributif par rapport à la somme directe, cette action munit $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ d'une structure de $W(K, \sigma|_K)$ -module.

Remarque 1.3.2. L'équivalence de catégories entre la catégorie des G -espaces ε -hermitiens sur (A, σ) et celle des espaces ε -hermitiens sur $(A[G], \underline{\sigma})$ (rappelée lors de la section 1.2.1) induit un isomorphisme de $W(K, \sigma|_K)$ -modules entre $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ et $W^\varepsilon(A[G], \underline{\sigma})$. Dans la suite on ne s'intéressera qu'au module $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ sans perte de généralité.

Chapitre 2

Equivalence de Morita et isomorphismes de groupes de Witt équivariants

2.1 Préliminaires

Lorsque l'on considère deux anneaux A et B , il est naturel de se demander si leurs catégories de modules sont ou non équivalentes. Cette question conduit à l'étude d'une notion introduite par Morita en 1958 appelée "équivalence de Morita". Dans la littérature mathématique, il existe plusieurs approches de cette notion. Dans le cadre fixé au chapitre 1, trois d'entre elles sont couramment utilisées.

Deux K -algèbres A et B (ou plus généralement deux anneaux commutatifs) sont Morita-équivalent(e)s s'il existe une équivalence de catégories K -linéaire entre la catégorie $\text{Mod } A$ des A -modules à droite (où les flèches sont les applications A -linéaires) et la catégorie $\text{Mod } B$. D'après un célèbre théorème de Morita, on sait que A et B sont Morita-équivalentes si et seulement si il existe un progénérateur P de $\text{Mod } A$ tel que $\text{End}(P) \simeq B$; dans ce cas, l'équivalence de catégories est donnée par la paire de foncteurs $F = \text{Hom}_A(P, -)$ et $G = - \otimes_B P$. Ce résultat conduit, par exemple, à une construction de la plus petite algèbre possible Morita-équivalente à une algèbre artinienne donnée. Beaucoup de notions concernant les algèbres (les anneaux) sont préservées par une équivalence de Morita (on dit alors que la notion est Morita-invariante ou qu'elle est un invariant de Morita) ce qui rend leur étude particulièrement intéressante ; par exemple, le fait d'être simple ou le centre sont deux invariants de Morita. On peut trouver une liste non exhaustive de ces propriétés ainsi qu'une preuve du théorème de Morita et de certaines de ses conséquences en [3, Chapitre 8, §3].

Bien que l'approche précédente soit la plus communément utilisée dans la littérature, il arrive que la seule structure de K -algèbre soit trop faible pour les résultats que l'on

visé. On peut alors “renforcer” la notion précédente en faisant intervenir des involutions sur ces algèbres. On obtient ainsi une notion d’équivalence de Morita entre deux algèbres à involution (A, σ) et (B, τ) : par définition, c’est une équivalence de catégories entre la catégorie $\text{Herm}(A, \sigma)$ des formes hermitiennes non dégénérées sur (A, σ) (où les flèches sont les isométries) et la catégorie $\text{Herm}(B, \tau)$.

Alternativement, une équivalence de Morita entre deux algèbres à involution peut être vue comme étant une liste de propriétés vérifiées par celles-ci (voir la définition 2.1.1). Cette définition s’intègre parfaitement dans le langage que l’on a rappelé au cours du chapitre précédent, et nous parlerons d’équivalence de Morita en ce sens ; ce choix n’entraîne aucune perte de généralité, cette approche étant équivalente à la précédente (voir [5, Chapter 2, Proposition 3.1] ou [32, Chapter 1, §9]).

Nous utiliserons librement les définitions et notations usuelles se rapportant à la notion d’équivalence de Morita. Dans ces conditions, les ouvrages de référence sont [5, Chapter 2, §3] et [32, Chapter 1, §9] dans lesquels on pourra trouver des renseignements plus généraux concernant la notion d’équivalence de Morita pour des anneaux à involution.

2.1.1 Équivalence de Morita

Dans ce chapitre, (A, σ) et (B, τ) désigneront deux K -algèbres simples centrales munies de K/F -involutions σ et τ de même espèce.

On rappelle qu’un ensemble M muni à la fois d’une structure de A -module à gauche et de B -module à droite est un (A, B) -bimodule si ces deux structures sont compatibles c’est-à-dire si

$$a(mb) = (am)b$$

pour tous $a \in A$, $m \in M$ et $b \in B$.

La définition suivante est inspirée de travaux de Fröhlich et Mac Evett en 1969 (voir [25, §8]) ; nous avons choisi de conserver les notations introduites par Dejaiffe en [17].

Définition 2.1.1. On pose $\eta = 1$ si σ et τ sont de première espèce et de même type ou de seconde espèce, $\eta = -1$ dans le cas contraire. Une η -équivalence de Morita entre les algèbres à involution (A, σ) et (B, τ) est la donnée de :

- M un (A, B) -bimodule ;
- N un (B, A) -bimodule ;
- deux homomorphismes de bimodules $f : M \otimes_B N \rightarrow A$ et $g : N \otimes_A M \rightarrow B$ non nuls et associatifs, c’est-à-dire

$$f(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot g(n \otimes m'), \quad g(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot f(m \otimes n')$$

pour tous $m, m' \in M, n, n' \in N$;

- une application linéaire bijective $\nu : M \rightarrow N$ vérifiant $\nu(amb) = \tau(b)\nu(m)\sigma(a)$ pour tous $a \in A, m \in M, b \in B$.

Dans toute la suite, on utilisera la notation $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$ pour désigner la donnée d'une η -équivalence de Morita entre (A, σ) et (B, τ) .

2.1.2 Premières propriétés

Dans cette sous-section, nous montrons qu'une équivalence de Morita au sens de la définition 2.1.1 possède des propriétés standards pour la notion d'équivalence de Morita entre deux algèbres.

Soit $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$ une η -équivalence de Morita. Alors :

Lemme 2.1.2. *f est un isomorphisme de (A, A) -bimodules et g est un isomorphisme de (B, B) -bimodules.*

Preuve. Ce résultat se trouve en [17, §1]. Montrons que f est un isomorphisme de (A, A) -bimodules. L'application f étant non nulle, sa surjectivité découle directement du fait que A est une algèbre simple. En particulier, il existe des $m_i \in M$ et des $n_i \in N$ tels que

$$f\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = 1_A.$$

Soit $\sum_j m'_j \otimes n'_j$ un élément du noyau de f . Grâce à l'associativité de f et g , on peut écrire la suite d'équations suivante

$$\begin{aligned} \sum_j m'_j \otimes n'_j &= \sum_j m'_j \otimes n'_j \cdot \left(\sum_i f(m_i \otimes n_i)\right) \\ &= \sum_{j,i} m'_j \otimes g(n'_j \otimes m_i) \cdot n_i \\ &= \sum_{j,i} f(m'_j \otimes n'_j) \cdot m_i \otimes n_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

qui conduit au fait que f est injective. Les mêmes arguments conduisent à la bijectivité de g . \square

Remarque 2.1.3. De façon plus précise, f (resp. g) est un isomorphisme de (A, A) -bimodules (resp. de (B, B) -bimodules) si et seulement si M est un B -module projectif finiment engendré (resp. un B -module fidèlement projectif) : voir [32, Chapter 1, Proposition 9.1.1, 9.1.2]. Le fait que M_B soit projectif (resp. fidèlement projectif) découle, dans notre cas, de la simplicité de l'algèbre B : voir [5, Chapter 2, §3].

Le contexte fourni par l' η -équivalence de Morita nous conduit naturellement à identifier A à une algèbre d'endomorphismes :

Proposition 2.1.4. *Il existe un isomorphisme de K -algèbres : $\Psi : A \simeq \text{End}_B(M_B)$.*

Preuve. Considérons l'application $\Psi : A \rightarrow \text{End}_B(M_B) : a \mapsto l_a$, l_a étant l'endomorphisme de multiplication à gauche par a . On vérifie sans peine que Ψ est un morphisme de K -algèbres. Ce morphisme étant non nul, puisque $\Psi(1_A) = \text{id}_M$, la simplicité de A entraîne que Ψ est injectif.

Montrons maintenant que Ψ est surjectif. D'après le lemme 2.1.2, f est un isomorphisme de (A, A) -bimodules : c'est donc en particulier un isomorphisme de A -modules à droite. Par suite, f induit l'isomorphisme d'anneaux suivant :

$$F : \begin{cases} \text{End}_A((M \otimes_B N)_A) & \rightarrow \text{End}_A(A_A) \\ \Phi & \mapsto f \circ \Phi \circ f^{-1} \end{cases} .$$

Soit $\phi \in \text{End}_B(M_B)$. En posant $a = F(\phi \otimes \text{id})(1_A)$, on va montrer que pour tout $m \in M$, $\phi(m) = a.m$ ce qui terminera la preuve de la proposition. Par surjectivité de g , on peut trouver des $n_i \in N$ et des $m_i \in M$ tels que

$$1_B = \sum_i g(n_i \otimes m_i).$$

Si $m' \in M$, on peut écrire les égalités suivantes, d'après l'associativité de f et g :

$$\begin{aligned} m' &= m' \cdot 1_B \\ &= \sum_i m' \cdot g(n_i \otimes m_i) \\ &= \sum_i f(m' \otimes n_i) \cdot m_i. (**) \end{aligned}$$

Ensuite, si $m \in M$ et $n \in N$, on a :

$$\begin{aligned} a \cdot f(m \otimes n) &= F(\phi \otimes \text{id})(1_A) \cdot f(m \otimes n) \\ &= F(\phi \otimes \text{id})(f(m \otimes n)) \\ &= f \circ (\phi \otimes \text{id})(m \otimes n) \\ &= f(\phi(m) \otimes n). (***) \end{aligned}$$

Enfin, on conclut au moyen de la suite d'égalités suivante

$$\phi(m) \stackrel{(**)}{=} \sum_i f(\phi(m) \otimes n_i) \cdot m_i \stackrel{(***)}{=} \sum_i a \cdot f(m \otimes n_i) \cdot m_i \stackrel{(**)}{=} a \cdot m. \quad \square$$

Remarque 2.1.5. On montre de même que $B \simeq \text{End}_A(N_A)$ en tant que K -algèbres. Il est également possible de montrer que $N \simeq M^*$ en tant que (B, A) -bimodules (et que $M \simeq N^*$ en tant que (A, B) -bimodules) mais cette propriété, également standard pour l'équivalence de Morita entre deux algèbres, ne nous sera pas utile dans la suite de ce travail. On pourra consulter [5, Chapter 2, §3] pour une preuve de ces faits.

2.2 Le résultat principal

Le but de cette section est de prouver le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$ une η -équivalence de Morita. Alors, pour tout $\varepsilon \in K^*$ vérifiant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$, et pour tout groupe fini G , on a les isomorphismes suivants :*

$$\begin{aligned} S^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq S^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que monoïdes commutatifs,} \\ Gr^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq Gr^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que groupes abéliens,} \\ W^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq W^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que } W(K, \sigma|_K)\text{-modules.} \end{aligned}$$

En 1969, Fröhlich et McEvettt prouvent ce résultat dans le cadre plus général des algèbres à involution sur un anneau commutatif : voir [25, §8, Corollary 8.2] ; le théorème 2.2.1 est ainsi une conséquence de leur résultat général.

Le théorème 2.2.1 peut être également vu comme une conséquence d'un résultat de Knus, toujours dans le cadre des algèbres à involution sur un anneau commutatif, énoncé cette fois ci en terme d'équivalence de catégorie entre catégories d'espaces hermitiens convenables : voir [32, Chapter 1, Théorème 9.3.5].

Si notre approche se situe entre ces deux références, on choisit, à l'instar de Dejaiffe (voir [17, §1]), d'insister sur le rôle joué par le type des involutions et d'utiliser la terminologie et les notations de [33] (en ce qui concerne les algèbres simples centrales à involution) tant dans l'énoncé de notre résultat que dans sa démonstration. Nous avons également choisi d'énoncer ce résultat sous une forme "équivariante".

La suite de la section 2.2 est construite de façon logique en vue de la preuve du théorème 2.2.1.

2.2.1 Constructions de formes

Dans cette sous-section comme dans la suivante, $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$ désignera une η -équivalence de Morita. Afin de prouver le théorème 2.2.1, nous allons définir des formes hermitiennes particulières sur M et N avant de montrer que σ et τ leurs sont adjointes.

Nous rappelons que si M est un module sur une algèbre simple centrale à K/F -involution (E, θ) et si h est une forme ε -hermitienne sur M , il existe une unique involution σ_h sur $\text{End}_E(M)$ appelée *involution adjointe à h* telle que $\sigma_h(\alpha) = \theta(\alpha)$ pour tout $\alpha \in F$ et telle que, pour tous $x, y \in M$, on ait l'identité

$$h(x, f(y)) = h(\sigma_h(f)(x), y).$$

Pour une preuve de ce fait, on pourra consulter [33, 4A].

Définition d'applications

On a vu précédemment (en 2.1.4 et 2.1.5) que l'on pouvait identifier A et $\text{End}_B(M_B)$, B et $\text{End}_A(N_A)$ en tant que K -algèbres à l'aide de la multiplication à gauche. Cette identification induit naturellement des isomorphismes d'algèbres à involution entre (A, σ) et $(\text{End}_B(M_B), \tilde{\sigma})$, (B, τ) et $(\text{End}_A(N_A), \tilde{\tau})$, $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ étant définies de façon à commuter à la multiplication à gauche.

Définissons les deux applications suivantes :

$$b_0 : \begin{cases} M \times M & \rightarrow B \\ (m, m') & \mapsto g(\nu(m) \otimes m') \end{cases} ,$$

$$b'_0 : \begin{cases} N \times N & \rightarrow A \\ (n, n') & \mapsto f(\nu^{-1}(n) \otimes n') \end{cases} .$$

On ne peut pas démontrer directement que ces deux applications sont non dégénérées. Par contre, il est possible de montrer une propriété plus faible :

Lemme 2.2.2. b_0 est non dégénérée à gauche i.e. l'application $s_{b_0} : M \rightarrow M^* : m \mapsto b_{0,m}$ où $b_{0,m}(m') = b_0(m, m')$ pour tous $m, m' \in M$ est un isomorphisme de B -modules à droite.

Preuve. On montre que $s_{b_0} : M \rightarrow M^*$ est une application injective et surjective.

Soit $\phi \in M^*$. La surjectivité de f (voir le lemme 2.1.2) entraîne l'existence de certains $m_i \in M, n_i \in N$ pour lesquels $f(\sum_i m_i \otimes n_i) = 1_A$. Tout $m \in M$ s'écrit alors

$$m = 1_A \cdot m = \sum_i m_i \cdot g(n_i \otimes m)$$

et on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \phi(m) &= \phi(1_A \cdot m) \\ &= \phi\left(\sum_i m_i \cdot g(n_i \otimes m)\right) \\ &= \sum_i \phi(m_i) \cdot g(n_i \otimes m). \end{aligned}$$

On en déduit que $\phi = \sum_i g_{n_i} \cdot \tau(\phi(m_i))$ où g_{n_i} est l'application définie par

$$g_{n_i}(m) = g(n_i \otimes m) = s_{b_0}(\nu^{-1}(n_i))(m)$$

pour tout $m \in M$. Il vient immédiatement

$$\phi = s_{b_0}\left(\sum_i \nu^{-1}(n_i) \cdot \tau(\phi(m_i))\right),$$

ce qui implique que s_{b_0} est une application surjective.

Avec les mêmes notations que précédemment, on peut prouver la formule d'inversion suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_i \nu^{-1}(n_i) \cdot \tau(s_{b_0}(m)(m_i)) &= \sum_i \nu^{-1}(b_0(m, m_i) \cdot n_i) \\
&= \nu^{-1}\left(\sum_i g(\nu(m) \otimes m_i) \cdot n_i\right) \\
&= \nu^{-1}\left(\sum_i \nu(m) \cdot f(m_i \otimes n_i)\right) \\
&= m
\end{aligned}$$

qui conduit directement à l'injectivité de l'application s_{b_0} . □

Remarque 2.2.3. On vérifie de la même manière que b'_0 est non dégénérée à gauche.

Deux relations d'adjonction

Avant de poursuivre l'étude des propriétés de b_0 et b'_0 , il nous faut prouver les relations suivantes :

Lemme 2.2.4. *Si $m, m' \in M, n, n' \in N, \phi \in \text{End}_B(M_B)$ et $\psi \in \text{End}_A(N_A)$ alors*

$$\begin{aligned}
b_0(m, \tilde{\sigma}(\phi)(m')) &= b_0(\phi(m), m') \text{ et} \\
b'_0(n, \tilde{\tau}(\psi)(n')) &= b'_0(\psi(n), n').
\end{aligned}$$

Preuve. Pour la première égalité, il suffit d'effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
b_0(m, \tilde{\sigma}(\phi)(m')) &= b_0(m, \sigma(a) \cdot m') \\
&= g(\nu(m) \otimes \sigma(a) \cdot m') \\
&= g(\nu(m) \cdot \sigma(a) \otimes m') \\
&= g(\nu(a \cdot m) \otimes m') \\
&= b_0(\phi(m), m').
\end{aligned}$$

La deuxième égalité se montre de manière similaire. □

Formes η -hermitiennes sur M et N

Si $f \in \text{End}_B(M_B)$, rappelons que l'application transposée de f est notée ${}^t f \in \text{End}_B(M_B^*)$ et donnée par

$${}^t f(\phi) = \phi \circ f,$$

pour tout $\phi \in M_B^*$.

Grâce aux calculs précédents, nous pouvons supposer que les formes b_0 et b'_0 sont η -hermitiennes sans perte de généralité :

Proposition 2.2.5. *Il existe $k \in K^*$ tel que, quitte à remplacer ν par $k.\nu$ dans l' η -équivalence de Morita choisie, les deux propriétés suivantes soient simultanément satisfaites :*

- (1) b_0 est une forme η -hermitienne par rapport à τ ;
- (2) b'_0 est une forme η -hermitienne par rapport à σ .

Preuve. (1) On vérifie aisément que l'application b_0 est sesquilinéaire. D'après le lemme 2.2.2, b_0 est non dégénérée à gauche ; dans ces conditions il est bien connu (voir par exemple [14]) qu'il existe un unique antiautomorphisme σ_1 de $\text{End}_B(M_B)$ vérifiant

$$b_0(x, f(y)) = b_0(\sigma_1(f)(x), y)$$

pour tous $x, y \in M$, $f \in \text{End}_B(M_B)$. Comme $\tilde{\sigma}$ vérifie cette dernière relation d'après le lemme 2.2.4, on en déduit que $\sigma_1 = \tilde{\sigma}$ est une involution.

De plus, si $f \in \text{End}_B(M_B)$, on a la suite d'implications suivante, pour tous $x, y \in M$:

$$\begin{aligned} b_0(x, f(y)) = b_0(\tilde{\sigma}(f)(x), y) &\Rightarrow s_{b_0}(x)(f(y)) = s_{b_0}(\tilde{\sigma}(f)(x))(y) \\ &\Rightarrow ({}^t f \circ s_{b_0}(x))(y) = s_{b_0}(\tilde{\sigma}(f)(x))(y). \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité

$$\tilde{\sigma}(f) = (s_{b_0})^{-1} \circ {}^t f \circ s_{b_0},$$

pour tout $f \in \text{End}_B(M_B)$, s_{b_0} étant un isomorphisme (d'après le lemme 2.2.2). En posant $b_0^*(x, y) = \tau(b_0(y, x))$ pour $x, y \in M$, on vérifie sans peine la relation

$$b_0^*(x, f(y)) = b_0^*(\tilde{\sigma}(f)(x), y)$$

pour tous $x, y \in M$. Ceci nous permet d'écrire, pour $f \in \text{End}_B(M_B)$, les suites d'égalités suivantes :

$$\begin{aligned} {}^t f \circ s_{b_0^*} &= s_{b_0^*} \circ \tilde{\sigma}(f) = s_{b_0^*} \circ (s_{b_0})^{-1} \circ {}^t f \circ s_{b_0} \\ {}^t f \circ s_{b_0^*} \circ (s_{b_0})^{-1} &= s_{b_0^*} \circ (s_{b_0})^{-1} \circ {}^t f. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\alpha = s_{b_0^*} \circ (s_{b_0})^{-1}$ est un élément du centre de $\text{End}_B(M_B^*)$. Puisque les anneaux $\text{End}_B(M_B^*)$ et $\text{End}_B(M_B)$ sont isomorphes et que ce dernier a été identifié à A (voir la proposition 2.1.4), α est en fait un élément de K^* . Finalement les égalités $\tau(b_0(y, x)) = \alpha b_0(x, y)$ pour tous $x, y \in M$ et $\tau(\alpha)\alpha = 1$ prouvent que b_0 est une forme α -hermitienne (non dégénérée) par rapport à τ .

A la lueur de cette nouvelle propriété, la première égalité du lemme 2.2.4 signifie exactement que $\tilde{\sigma}$ est adjointe à b_0 ce qui nous permet d'explicitier la valeur de l'élément α :

★ si σ et τ sont de première espèce et de même type, alors $\alpha = 1$ d'après [33, Theorem 4.2] ;

★ si σ et τ sont de première espèce et de type différent, ce même théorème implique que $\alpha = -1$;

★ si σ et τ sont de seconde espèce il existe $\beta \in K^*$ tel que $\alpha = \sigma(\beta)\beta^{-1}$, d'après le théorème 90 de Hilbert. Quitte à remplacer ν par $k\nu$ dans $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$ où $k = \beta^{-1}$, on peut supposer que b_0 est une forme 1-hermitienne (par rapport à τ).

Dans tous les cas, nous aboutissons au fait que b_0 est une forme η -hermitienne par rapport à τ , η étant défini comme dans la définition 2.1.1.

(2) Ceci étant, on suppose que $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$ est fixée comme à la fin de la preuve de l'assertion (1) (de telle sorte que b_0 soit une forme η -hermitienne par rapport à τ), et on va montrer que b'_0 est une forme η -hermitienne par rapport à σ . b'_0 est clairement une application sesquilinéaire. Soient $m \in M$ et $x, y \in N$:

$$\begin{aligned}
b'_0(y, x) \cdot m &= \nu^{-1}(y) \cdot g(x \otimes m) \\
&= \nu^{-1}(y) \cdot b_0(\nu^{-1}(x), m) \\
&= \eta\nu^{-1}(y) \cdot \tau(b_0(m, \nu^{-1}(x))) \\
&= \eta\nu^{-1}(b_0(m, \nu^{-1}(x)) \cdot y) \\
&= \eta\nu^{-1}(g(\nu(m) \otimes \nu^{-1}(x)) \cdot y) \\
&= \eta\nu^{-1}(\nu(m) \cdot f(\nu^{-1}(x) \otimes y)) \\
&= \eta\sigma(f(\nu^{-1}(x) \otimes y)) \cdot m \\
&= \eta\sigma(b'_0(x, y)) \cdot m.
\end{aligned}$$

Ce calcul montre que $b'_0(y, x) - \eta\sigma(b'_0(y, x)) \in \text{Ann}(M)$, $\text{Ann}(M)$ étant l'annulateur du A -module M i.e.

$$\text{Ann}(M) = \{a \in A \mid a \cdot m = 0 \quad \forall m \in M\}.$$

Cet ensemble est un idéal bilatère de A donc $\text{Ann}(M) = A$ ou $\{0\}$ par simplicité de A . Si $\text{Ann}(M) = A$ alors $a \cdot m = 0$ pour tout $a \in A$ et pour tout $m \in M$ donc $M = 0$. Ce fait contredit la définition 2.1.1 car alors f est nul. Donc $\text{Ann}(M) = \{0\}$ et b'_0 est une forme η -hermitienne (non dégénérée) par rapport à σ . \square

Récapitulatif

D'après 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.5, nous avons démontré que b_0 et b'_0 sont deux formes η -hermitiennes non dégénérées. On peut ainsi interpréter le lemme 2.2.4 en disant que $\tilde{\sigma}$ (resp $\tilde{\tau}$) est adjointe à b_0 (resp. b'_0). Nous pouvons également dire, par abus de langage, que σ (resp. τ) est adjointe à b_0 (resp. b'_0).

2.2.2 La preuve du théorème 2.2.1

Jusqu'à présent, nous avons construit et étudié les formes b_0 et b'_0 . Nous entamons maintenant la preuve du théorème 2.2.1 en suivant le schéma suivant :

1. nous montrons que la donnée de G -formes (P, b) (resp. (Q, k)) permet de construire, au moyen des formes η -hermitiennes b_0 et b'_0 , des G -formes b_0b et b'_0k ;
2. à l'aide de ces G -formes, nous définissons des morphismes Θ et Θ' entre les groupes de Witt considérés ;
3. nous vérifions que Θ et Θ' sont des isomorphismes.

Construction de G -formes

Tout d'abord, nous construisons des G -formes à partir de (M, b_0) et (N, b'_0) .

Si (P, b) est une G -forme ε -hermitienne sur (A, σ) , on définit

$$\Theta(P, b) = (P \otimes_A M, b_0b)$$

où

$$(b_0b)(p \otimes m, p' \otimes m') = b_0(m, b(p, p')m')$$

pour tous $m, m' \in M, p, p' \in P$.

Si (Q, k) est une G -forme $\eta\varepsilon$ -hermitienne sur (B, τ) , on pose

$$\Theta'(Q, k) = (Q \otimes_B N, b'_0k)$$

où

$$(b'_0k)(q \otimes n, q' \otimes n') = b'_0(n, k(q, q')n')$$

pour tous $q, q' \in Q, n, n' \in N$. Dans ces conditions :

Lemme 2.2.6. $\Theta(P, b)$ (resp. $\Theta'(Q, k)$) est une G -forme $\eta\varepsilon$ -hermitienne (resp. ε -hermitienne) sur (B, τ) (resp. (A, σ)).

Preuve. Effectuons les calculs pour $\Theta(P, b)$. On vérifie sans peine que b_0b est une application biadditive.

Soient $\alpha, \beta \in B, p, p' \in P$ et $m, m' \in M$ alors

$$\begin{aligned} (b_0b)((p \otimes m)\alpha, (p' \otimes m')\beta) &= (b_0b)(p \otimes (m\alpha), p' \otimes (m'\beta)) \\ &= b_0(m\alpha, b(p, p')m'\beta) \\ &= \tau(\alpha)b_0(m, b(p, p')m')\beta \\ &= \tau(\alpha)(b_0b)(p \otimes m, p' \otimes m')\beta. \end{aligned}$$

Soient $p, p' \in P$ et $m, m' \in M$:

$$\begin{aligned}
(b_0 b)(p' \otimes m', p \otimes m) &= b_0(m', b(p', p)m) \\
&= b_0(m', \varepsilon \sigma(b(p, p'))m) \\
&= \varepsilon b_0(m', \sigma(b(p, p'))m) \\
&= \varepsilon b_0(b(p, p')(m'), m) \\
&= \varepsilon b_0(b(p, p')m', m) \\
&= \eta \varepsilon \tau((b_0 b)(p \otimes m, p' \otimes m'))
\end{aligned}$$

et $\Theta(P, b)$ est une forme $\eta \varepsilon$ -hermitienne.

On munit $P \otimes_A M$ d'une structure de G -module sur B en posant

$$(p \otimes m) \cdot g = (p \cdot g) \otimes m$$

pour tous $p \in P, m \in M, g \in G$. On vérifie enfin que $\Theta(P, b)$ est une G -forme $\eta \varepsilon$ -hermitienne sur (B, τ) . \square

La preuve du théorème 2.2.1

Avant d'entamer la preuve de ce résultat, nous en rappelons l'énoncé :

Théorème. *Soit $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$ une η -équivalence de Morita. Alors, pour tout $\varepsilon \in K^*$ vérifiant $\varepsilon \sigma(\varepsilon) = 1$, et pour tout groupe fini G , on a les isomorphismes suivants :*

$$\begin{aligned}
S^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq S^{\eta \varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que monoïdes commutatifs,} \\
Gr^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq Gr^{\eta \varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que groupes abéliens,} \\
W^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq W^{\eta \varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que } W(K, \sigma|_K)\text{-modules.}
\end{aligned}$$

Preuve. Puisque $\eta \in \{1, -1\}$, les applications Θ et Θ' induisent les morphismes de monoïdes suivants :

$$\Theta : \begin{cases} S^\varepsilon(G, A, \sigma) & \rightarrow S^{\eta \varepsilon}(G, B, \tau) \\ [P, b] & \mapsto [P \otimes_A M, b_0 b] \end{cases},$$

$$\Theta' : \begin{cases} S^{\eta \varepsilon}(G, B, \tau) & \rightarrow S^\varepsilon(G, A, \sigma) \\ [Q, k] & \mapsto [Q \otimes_B N, \eta b'_0 k] \end{cases}.$$

Afin d'établir le premier isomorphisme, il suffit de vérifier que Θ et Θ' sont inverses l'un de l'autre.

Soit (Q, k) une G -forme $\eta \varepsilon$ -hermitienne sur (B, τ) ; alors, $(Q \otimes_B N, \eta b'_0 k)$ est une G -forme ε -hermitienne sur (A, σ) et $(Q \otimes_B N \otimes_A M, \eta b_0 b'_0 k)$ est une G -forme $\eta \varepsilon$ -hermitienne

sur (B, τ) d'après le lemme 2.2.6. L'isomorphisme de bimodules g induit l'isomorphisme de $B[G]$ -modules à droite suivant :

$$h : \begin{cases} Q \otimes_B N \otimes_A M & \rightarrow Q \\ q \otimes n \otimes m & \mapsto q.g(n \otimes m) \end{cases} .$$

On montre que les G -formes $(Q \otimes_B N \otimes_A M, \eta b_0(b'_0 k))$ et (Q, k) sont isométriques via ce dernier isomorphisme au moyen du calcul suivant :

$$\begin{aligned} (\eta b_0 b'_0 k)(q \otimes n \otimes m, q' \otimes n' \otimes m') &= \eta b_0(m, b'_0(n, k(q, q')n')m') \\ &= \eta g(\nu(m) \otimes f(\nu^{-1}(n) \otimes k(q, q')n') \cdot m') \\ &= \eta g(g(\nu(m) \otimes \nu^{-1}(n)) \cdot k(q, q') \cdot (n' \otimes m')) \\ &= \eta g(\nu(m) \otimes \nu^{-1}(n)) \cdot k(q, q') \cdot g(n' \otimes m') \\ &= \eta^2 \tau(g(n \otimes m)) \cdot k(q, q') \cdot g(n' \otimes m') \\ &= k(h(q \otimes n \otimes m), h(q' \otimes n' \otimes m')) . \end{aligned}$$

On en déduit que Θ est un isomorphisme de monoïdes commutatifs.

Par la propriété universelle du groupe de Grothendieck-Witt, l'isomorphisme de monoïdes Θ induit un isomorphisme de groupes

$$\Theta : Gr^\varepsilon(G, A, \sigma) \simeq Gr^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau).$$

Désignons par $s_A : Gr^\varepsilon(G, A, \sigma) \rightarrow W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ et $s_B : Gr^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau) \rightarrow W^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau)$ les surjections canoniques. Si (P, b) est une G -forme ε -hermitienne métabolique sur (A, σ) alors soit P' un sous- $A[G]$ -module à droite de P tel que $P = P^\perp$ (pour b). Par définition de $b_0 b$, $P' \otimes_A M \subset (P' \otimes_A M)^\perp$ et, en comparant les dimensions, on voit que $(P \otimes_A M, b_0 b)$ est une G -forme $\eta\varepsilon$ -hermitienne métabolique ; ainsi $\ker s_A \subset \ker(s_B \circ \Theta)$. D'après le théorème de factorisation, il existe un unique homomorphisme de groupes u de $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ dans $W^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau)$ tel que $u \circ s_A = s_B \circ \Theta$. Un raisonnement symétrique avec Θ' montre qu'il existe un unique homomorphisme de groupes v de $W^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau)$ dans $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ tel que $v \circ s_B = s_A \circ \Theta'$. On vérifie sans peine que u et v sont inverses l'un de l'autre ce qui termine la preuve. \square

2.3 Quelques conséquences

Dans la suite de ce travail, nous n'utiliserons pas le théorème 2.2.1 dans toute sa généralité mais seulement pour la classe restreinte d'algèbres Morita-équivalentes que forment les algèbres Brauer-équivalentes.

Dans la première partie de cette section, nous rappelons comment il est possible de construire une équivalence de Morita entre deux algèbres simples centrales Brauer-équivalentes (munies d'involutions de même espèce et ayant la même restriction au centre).

L'équivalence de Morita est très utile quand il s'agit de transporter un problème d'une algèbre simple centrale à une algèbre qui lui est Brauer-équivalente et dans laquelle le problème est plus facile à appréhender. Dans la seconde partie de cette section, nous indiquerons une première utilisation de ce principe ainsi qu'un raffinement du théorème 2.2.1 dans le cas où les involutions sont unitaires.

2.3.1 Équivalence de Brauer et équivalence de Morita

Proposition 2.3.1. *Soient A et B deux K -algèbres simples centrales Brauer-équivalentes munies respectivement de K/F -involutions σ et τ de même espèce ayant même restriction à K . Alors il existe une η -équivalence de Morita $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$.*

Preuve. Cette preuve est basée sur [17, 1.4]. Il suffit de définir les différents éléments de l'équivalence de Morita et de vérifier un à un les axiomes de la définition 2.1.1. Pour ce faire, nous allons utiliser le rapport qui existe entre les représentations matricielles de A et de B . L'entier η est d'ores et déjà déterminé par σ et τ .

A et B étant Brauer-équivalentes, il existe, par définition, une algèbre à division D et des entiers r et s tels que l'on puisse identifier A et $M_r(D)$, B et $M_s(D)$ en tant qu'algèbres. D'après le corollaire 1.1.10, on peut munir D d'une involution γ qui soit de même espèce que σ et τ (mais pas forcément de même type si σ et τ sont de première espèce). On définit une involution θ (adaptée à A et B) en posant

$$\theta(a_{ij}) = {}^t(\gamma(a_{ij})) \text{ et } \theta(b_{ij}) = {}^t(\gamma(b_{ij})).$$

Puisque $\theta(a) = \gamma(a)$ pour tout $a \in K$, θ et γ sont de même espèce et de même type (voir [33, Proposition 2.20]). Dès lors, d'après la proposition 1.1.6, il existe $u \in \text{GL}_r(D)$ et $v \in \text{GL}_s(D)$ tels que $\sigma = \text{Int}(u) \circ \theta$, $\tau = \text{Int}(v) \circ \theta$ et de plus

- ★ $(\theta(u) = u \text{ et } \theta(v) = v)$ ou $(\theta(u) = -u \text{ et } \theta(v) = -v)$, si σ et τ sont de première espèce et de même type ;
- ★ $(\theta(u) = -u \text{ et } \theta(v) = v)$ ou $(\theta(u) = u \text{ et } \theta(v) = -v)$, si σ et τ sont de première espèce et de types différents ;
- ★ $\theta(u) = u$ et $\theta(v) = v$, si σ et τ sont de seconde espèce.

On pose $M = M_{r,s}(D)$ (resp. $N = M_{s,r}(D)$) et on vérifie aisément que M (resp. N) est un (A, B) -bimodule (resp. un (B, A) -bimodule).

Soit $f : M \times N \rightarrow A : (m, n) \mapsto m.n$ l'application induite par le produit matriciel. On vérifie sans peine que f est bien définie, non nulle, biadditive et équilibrée. Par propriété universelle du produit tensoriel, il existe un unique homomorphisme de groupes (encore noté f)

$$f : \begin{cases} M \otimes_B N & \rightarrow A \\ m \otimes n & \mapsto m.n \end{cases}.$$

C'est en fait un homomorphisme de (A, A) -bimodules dont on vérifie aisément qu'il est associatif par associativité du produit matriciel. On définit g de manière similaire.

Enfin, en posant $\nu(m) = v\theta(m)u^{-1}$ (θ désignant l'application de M dans N induite par l'involution θ) pour tout $m \in M$, on vérifie que ν est clairement bijective, linéaire et

$$\nu(amb) = \tau(b)v\theta(m)u^{-1}\sigma(a) = \tau(b)\nu(m)\sigma(a),$$

pour tous $a \in A$, $b \in B$ et $m \in M$. □

Remarque 2.3.2. Dans la proposition 2.3.1, la condition portant sur la restriction de σ et τ à K ne sert que dans l'utilisation de la proposition 1.1.6(2) ; on peut remarquer que cette condition est automatique lorsque σ et τ sont de première espèce.

En combinant le théorème 2.2.1 et la proposition précédente, on obtient :

Corollaire 2.3.3. *Soient A et B deux K -algèbres simples centrales Brauer-équivalentes munies respectivement de K/F -involutions σ et τ de même espèce ayant même restriction à K . Alors, pour tout $\varepsilon \in K^*$ vérifiant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$, et pour tout groupe fini G , on a les isomorphismes suivants :*

$$\begin{aligned} S^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq S^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que monoïdes commutatifs,} \\ Gr^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq Gr^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que groupes abéliens,} \\ W^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq W^{\eta\varepsilon}(G, B, \tau) \text{ en tant que } W(K, \sigma|_K)\text{-modules.} \end{aligned}$$

2.3.2 Applications

Nous donnons deux conséquences du corollaire 2.3.3.

Algèbres simples centrales à involution de seconde espèce

Il est bien connu que, sur une algèbre simple centrale à involution unitaire, il suffit de s'intéresser aux formes (1-)hermitiennes pour connaître les formes ε -hermitiennes. En effet :

Proposition 2.3.4. *Soient A une K -algèbre simple centrale munie d'une K/F -involution de type unitaire, $\varepsilon \in K$ tel que $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$ et G un groupe fini. Alors, on a les isomorphismes suivants :*

$$\begin{aligned} S^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq S(G, A, \tau) \text{ en tant que monoïdes commutatifs,} \\ Gr^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq Gr(G, A, \tau) \text{ en tant que groupes abéliens,} \\ W^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq W(G, A, \tau) \text{ en tant que } W(K, \sigma|_K)\text{-modules.} \end{aligned}$$

Preuve. Soit (P, h) une G -forme ε -hermitienne sur (A, σ) . Comme $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$ avec $\varepsilon \in K$, il existe $\mu \in K$ tel que $\varepsilon = \sigma(\mu)\mu^{-1}$ d'après le théorème 90 de Hilbert. Un simple calcul permet de vérifier que $(P, \mu h)$ est alors une G -forme 1-hermitienne. Par suite, l'application $h \mapsto \mu h$ fournit une correspondance 1-1 entre les formes ε -hermitiennes et les formes 1-hermitiennes. Il est aisé de voir que cette correspondance induit les isomorphismes attendus. \square

En combinant la proposition précédente et le corollaire 2.3.3, on obtient :

Corollaire 2.3.5. *Soient A et B deux K -algèbres simples centrales Brauer-équivalentes munies respectivement de K/F -involutions σ et τ de type unitaire et ayant même restriction à K . Alors, pour tous $\varepsilon, \varepsilon' \in K^*$ vérifiant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1 = \varepsilon'\tau(\varepsilon')$, et pour tout groupe fini G , on a les isomorphismes suivants :*

$$\begin{aligned} S^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq S^{\varepsilon'}(G, B, \tau) \text{ en tant que monoïdes commutatifs,} \\ Gr^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq Gr^{\varepsilon'}(G, B, \tau) \text{ en tant que groupes abéliens,} \\ W^\varepsilon(G, A, \sigma) &\simeq W^{\varepsilon'}(G, B, \tau) \text{ en tant que } W(K, \sigma|_K)\text{-modules.} \end{aligned}$$

Un théorème de Merkurjev

Un des résultats fondamentaux concernant les algèbres simples centrales à involution de première espèce est le théorème suivant qui les détermine entièrement dans le groupe de Brauer :

Théorème 2.3.6 (Merkurjev). *Soient A une K -algèbre simple centrale et σ une K/F -involution de première espèce sur A . Alors, il existe des algèbres de quaternions Q_1, \dots, Q_n sur K telles que l'on ait $[A] = [Q_1 \otimes_K \dots \otimes_K Q_n] \in \text{Br}(K)$ (et même dans $\text{Br}_2(K)$, d'après le théorème 1.1.7(1)).*

Preuve. Voir [49]. \square

En conséquence, il suffit souvent de raisonner sur un produit tensoriel d'algèbres de quaternions pour en déduire un résultat plus général concernant les algèbres simples centrales à involution de première espèce. Ceci est toujours possible lorsque l'on travaille sur des notions préservées par équivalence de Morita : il suffit d'appliquer le théorème précédent et le corollaire 2.3.3. Ce fait a, par exemple, été utilisé par Bayer-Fluckiger et Parimala en [7, Theorem 4.3.1, 4.4.1] et [8, Theorem 6.2, 7.3] pour caractériser les formes hermitiennes non dégénérées hyperboliques sur une algèbre à involution de première espèce sous certaines hypothèses sur le corps de base.

Chapitre 3

Equivalence de Morita et formes ε -hermitiennes

3.1 Isotropie et décomposition de Witt

Une forme quadratique (V, q) sur un corps K est dite isotrope si il existe $x \in V$ non nul tel que $q(x) = 0$, anisotrope dans le cas contraire.

Dans son article fondateur de la théorie algébrique des formes quadratiques, en 1937, Witt montre qu'il est toujours possible de décomposer une forme quadratique non dégénérée en somme orthogonale d'une forme hyperbolique maximale et d'une forme anisotrope, ces formes étant uniquement déterminées à isométrie près : c'est le théorème de décomposition de Witt (voir [81]).

On peut naturellement se demander s'il est possible de généraliser d'une quelconque manière les notions d'isotropie et de décomposition de Witt aux formes hermitiennes. Ce problème a été résolu par McEvet en 1969 dans [48] : en utilisant l'équivalence de Morita, il a montré que ces deux notions se généralisaient *exactement* aux formes ε -hermitiennes sur une algèbre simple centrale à involution.

Cette section vise à donner un exposé de ces résultats dans un contexte différent de celui de l'article de McEvet. On conserve les notations du chapitre précédent.

3.1.1 Isotropie

Puisque l'on envisage de généraliser la notion d'isotropie aux formes hermitiennes, nous définissons la notion de forme bilinéaire (symétrique) isotrope : une forme bilinéaire (symétrique) (V, b) est dite *isotrope* si il existe un $x \in V$ non nul tel que $b(x, x) = 0$ (autrement dit si le vecteur x est orthogonal à lui-même relativement à b). Dans le cas contraire, on dit que la forme est *anisotrope*.

Soit maintenant (A, σ) une K -algèbre simple centrale munie d'une K/F -involution. En

regardant ce qui se passe au niveau des formes bilinéaires symétriques, il semble naturel de poser la définition suivante :

Définition 3.1.1. Soit (V, h) une forme ε -hermitienne sur (A, σ) . Elle est dite *isotrope* si il existe un $x \in V$ non nul tel que $h(x, x) = 0$ et *anisotrope* dans le cas contraire.

La fin de ce paragraphe ainsi que la sous-section qui suit seront consacrés à la justification du bien-fondé de cette définition.

Soit D l'algèbre à division Brauer-équivalente à A ; d'après le corollaire 1.1.10, on peut munir D d'une involution τ de même espèce et ayant même restriction à K que σ . D'après la proposition 2.3.1, il existe une η -équivalence de Morita $((A, \sigma), (D, \tau), M, N, f, g, \nu)$. Comme D est une algèbre à division, les A -modules M et N possèdent une propriété supplémentaire :

Lemme 3.1.2. *M est un A -module à gauche simple et N est un A -module à droite simple.*

Preuve. Prouvons cette affirmation pour N , la preuve pour M étant similaire. Comme A est une algèbre simple, on sait, d'après la théorie des modules semi-simples (voir [13]), que N est un A -module à droite semi-simple isotypique, c'est-à-dire qu'il existe un entier n tel que $N \simeq T^n$, T étant un A -module à droite simple. D'après le lemme 2.1.2, les (D, D) -bimodules $N \otimes_A M$ et D sont isomorphes. On en déduit la suite d'isomorphismes de D -espaces vectoriels à droite suivante :

$$D \stackrel{g^{-1}}{\simeq} N \otimes_A M \simeq (T \otimes_A M)^n.$$

En comparant les dimensions, on trouve $n = 1$ et par suite N est un A -module à droite simple. □

La proposition suivante donne une première justification de notre approche de l'isotropie (voir la sous-section 2.2.2 pour la définition de Θ et Θ' et pour les notations utilisées dans la preuve) :

Proposition 3.1.3. *Soit (V, h) une forme ε -hermitienne sur (A, σ) . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *(V, h) est isotrope sur (A, σ) .*
- (2) *Il existe une η -équivalence de Morita entre (A, σ) et (D, τ) telle que $\Theta(V, h)$ soit isotrope sur (D, τ) .*
- (3) *Pour toute η -équivalence de Morita entre (A, σ) et (D, τ) , $\Theta(V, h)$ est isotrope sur (D, τ) .*

Preuve. On peut trouver une preuve de ce résultat dans [48] dans un contexte différent. Pour prouver cette proposition, il suffit de montrer que (1) est équivalente à (3).

Soient $x \in V - \{0\}$ tel que $h(x, x) = 0$ et $((A, \sigma), (D, \tau), M, N, f, g, \nu)$ une η -équivalence de Morita. On peut voir qu'il existe un $m \in M$ tel que $x \otimes m \neq 0$; en fait, si $x \otimes m = 0$

pour tout $m \in M$, alors on a $V_1 \otimes_A M = 0$ où $V_1 = xA \neq 0$. On sait que N est un A -module à droite simple d'après le lemme 3.1.2, donc on a $V_1 = N^d$, pour un certain entier $d \geq 1$. En conséquence, on peut dire que

$$0 = V_1 \otimes_A M \simeq (N \otimes_A M)^d \stackrel{g}{\simeq} D^d,$$

ce qui aboutit à une contradiction. Ceci étant, $x \otimes m$ est clairement un vecteur isotrope pour b_0h et $\Theta(V, h)$ est isotrope.

Réciproquement, si $\Theta(V, h)$ est isotrope et si $((A, \sigma), (D, \tau), M, N, f, g, \nu)$ désigne une η -équivalence de Morita, soit $y \neq 0$ un vecteur isotrope pour b_0h . Par le même genre d'arguments que précédemment, on peut trouver un $n \in N$ tel que $y \otimes n \neq 0$. Il est aisé de voir que $y \otimes n$ est un vecteur isotrope pour $\eta b'_0 b_0 h$. Or $(V \otimes_A M \otimes_D N, \eta b'_0 b_0 h)$ est isométrique à (V, h) (voir la preuve du théorème 2.2.1) donc il existe un $x \in V - \{0\}$ tel que $h(x, x) = 0$, ce qui termine la preuve. \square

3.1.2 Décomposition de Witt

Au moyen de la notion d'isotropie définie ci-dessus, on peut généraliser aux formes hermitiennes le théorème suivant connu sous le nom de *théorème de décomposition de Witt* :

Théorème 3.1.4 (Witt (1937)). *Soit (V, q) un espace quadratique non dégénéré. Alors*

$$(V, q) \simeq (V_{hyp}, q_{hyp}) \perp (V_{an}, q_{an})$$

où (V_{hyp}, q_{hyp}) est une forme hyperbolique et (V_{an}, q_{an}) une forme anisotrope. De plus, ces deux formes sont uniquement déterminées à isométrie près.

Preuve. Voir [81], [34, Chapter 1, §4] ou [71, Chapter 1, §5]. \square

En adaptant la preuve précédente, on peut voir que le théorème de décomposition de Witt est vrai pour les formes ε -hermitiennes sur une algèbre à division à involution (voir par exemple [71, Chapter 7, Corollary 9.2]). En se servant de ce fait et de l'équivalence de Morita, on peut transporter la décomposition de Witt aux formes hermitiennes sur une algèbre simple centrale à involution :

Théorème 3.1.5. *Soit (V, h) une forme ε -hermitienne non dégénérée sur (A, σ) une K -algèbre simple centrale à K/F -involution. Alors*

$$(V, h) \simeq (V_{hyp}, h_{hyp}) \perp (V_{an}, q_{an})$$

où (V_{hyp}, h_{hyp}) est une forme hyperbolique et (V_{an}, q_{an}) est une forme anisotrope (au sens de la définition 3.1.1). De plus, ces deux formes sont uniquement déterminées à isométrie près.

Preuve. Soit $((A, \sigma), (D, \tau), M, N, f, g, \nu)$ une η -équivalence de Morita. Avec les notations de la sous-section 2.2.2, la décomposition de Witt étant vraie sur (D, τ) , on obtient la décomposition

$$\Theta(V, h) \simeq (V_1, h_1) \perp (V_2, h_2)$$

où h_1 est hyperbolique et h_2 anisotrope sur (D, τ) . Ainsi, on a les isométries

$$(V, h) \simeq (\Theta' \circ \Theta)(V, h) \simeq \Theta'(h_1) \perp \Theta'(h_2).$$

De plus, d'après la proposition 3.1.3, $\Theta'(h_1)$ est hyperbolique et $\Theta'(h_2)$ est anisotrope sur (A, σ) ce qui assure l'existence de la décomposition. Par le même type d'argument, on montre que cette décomposition est unique à isométrie près puisque c'est déjà le cas sur (D, τ) . \square

Remarques 3.1.6. (1) On peut déduire un fait important du théorème précédent : en conservant les mêmes notations, si $[h] \in W^\varepsilon(A, \sigma)$, il existe une unique forme ε -hermitienne anisotrope h_0 sur (A, σ) telle que $[h] = [h_0] \in W^\varepsilon(A, \sigma)$. Ce fait jouera un rôle prépondérant dans la preuve des résultats du chapitre 4.

(2) Le théorème 3.1.5 est vrai plus généralement si A est une algèbre semi-simple dans laquelle 2 est une unité d'après un résultat de McEvetts : voir [48].

3.2 Rang et discriminant à signe

L'un des problèmes majeurs en théorie des formes quadratiques est d'obtenir leur classification à isométrie près sur un corps K donné. La méthode principale pour s'attaquer à ce genre de problème est d'attacher un certain nombre d'invariants à une forme afin qu'elle soit autant que possible déterminée par ces invariants. Les invariants usuels que l'on peut associer aux formes quadratiques sont la dimension, le discriminant à signe, l'invariant de Hasse, l'invariant de Clifford, l'invariant de Witt et les signatures en chaque ordre du corps (s'il en existe). Dans de nombreux cas, certains de ces invariants sont suffisants pour classifier les formes quadratiques. Néanmoins, une classification des formes quadratiques sur un corps quelconque n'a encore jamais été obtenue.

En 1974, Elman et Lam dans [24] établissent deux importants résultats de classification. Notons $I(K)$ l'idéal fondamental de $W(K)$ formé des formes quadratiques de dimension paire et posons $I^3(K) = (I(K))^3$. Ils montrent que $I^3(K) = 0$ si et seulement si les formes quadratiques sur K sont classifiées à isométrie près par leur dimension, leur discriminant et leur invariant de Clifford. Plus généralement, ils prouvent que $I^3(K)$ est sans torsion si et seulement si les formes quadratiques sur K sont classifiées à isométrie près par leur dimension, leur discriminant, leur invariant de Clifford et leur signature en chaque ordre de K . Grâce à ces résultats, les formes quadratiques sont entièrement classifiées sur un grand nombre de corps parmi lesquels les suivants (qui vérifient $I^3(K) = 0$) : les corps p -adiques,

les corps globaux non formellement réels et les corps de fonctions en deux variables sur un corps algébriquement clos.

Il est également possible de définir des invariants en théorie des formes hermitiennes sur une algèbre à involution (A, σ) . Les plus usités sont le rang, le discriminant, le discriminant raffiné, l'invariant de Clifford (si l'involution est orthogonale), les signatures et l'invariant de Rost (si l'involution est orthogonale). Au moyen de ces invariants, Bayer-Fluckiger et Parimala en 1995 dans [7] et en 1998 dans [8] obtiennent des résultats de classification de formes hermitiennes (dépendants du type de l'involution) généralisant ceux d'Elman et Lam. Ces résultats sont obtenus pour des corps de dimension cohomologique au plus 2 (ou plus précisément pour des corps sur lesquels toute algèbre à division d'exposant 2 est décomposable) si le corps est non formellement réel et pour des corps de dimension cohomologique virtuelle au plus 2 si le corps est formellement réel. Par exemple, si σ est orthogonale et si $\text{cd}(K) \leq 2$, les formes hermitiennes sur K sont classifiées à isométrie près par leur rang, leur discriminant et leur invariant de Clifford. Ces résultats de classification jouent un rôle primordial dans leurs démonstrations de la conjecture II de Serre (voir [7]) et du principe de Hasse sur les corps de dimension cohomologique virtuelle au plus 2 (voir [8]) pour les groupes algébriques de type classique.

En conséquence des résultats de Bayer-Fluckiger et Parimala évoqués ci-dessus et de résultats de Merkurjev et Suslin (voir le théorème 7.4.3 et le corollaire 7.1.6), Lewis et Tignol établissent, en 1999 (dans [45]), une classification des involutions à conjugaison près sous certaines conditions sur le corps de base ; leurs résultats dépendent du type de l'involution, de la parité du degré de l'algèbre et du fait que le corps soit ou non formellement réel. Dans l'énoncé de ces résultats, les invariants de formes sont remplacés par des invariants d'algèbres à involution tels que l'algèbre de Clifford ou l'algèbre Discriminant (voir [33, §8, §10] pour une définition de ces objets). Par exemple, si $\text{cd}(K) \leq 2$, les involutions orthogonales sur une K -algèbre simple centrale sont conjuguées si et seulement si leurs algèbres de Clifford sont K -isomorphes.

Le lecteur désireux d'en savoir plus sur les invariants en théorie des formes quadratiques pourra consulter [71]. En ce qui concerne les invariants pour les formes hermitiennes, nous conseillons la lecture des articles [7] et [8] qui nous ont, du reste, grandement inspiré pour ce chapitre ainsi que ceux qui suivent ; on pourra également se référer à l'article [39] qui présente les résultats les plus importants concernant la classification des formes hermitiennes sur une algèbre à division. Enfin, l'article [45] présente la classification des involutions sur une algèbre simple centrale et a été une grande source d'inspiration pour présenter le rappel des résultats principaux relatifs à la classification des formes quadratiques et hermitiennes.

Dans la suite de cette section, nous montrons que le rang et le discriminant (raffiné) d'un espace hermitien sont invariants par équivalence de Morita. Pour ce faire, nous suivons le plan d'étude donné en introduction et utilisons les résultats du chapitre 2 et des calculs explicites. Il est à noter que ces résultats peuvent être obtenus par une voie plus directe : voir la remarque 3.2.10.

3.2.1 Le rang

Formes quadratiques

Pour une forme quadratique, le rang porte le nom plus évocateur de dimension puisque l'on travaille sur des K -espaces vectoriels. La *dimension* (V, q) sur K est $\dim_K V$, que l'on note plus volontiers $\dim q$. On vérifie que la dimension est un invariant de la classe d'isométrie de (V, q) mais pas de sa classe de Witt en général. Par contre

$$e_0(q) = \dim q \pmod{2} \quad (3.1)$$

est un invariant de la classe de Witt de (V, q) . En fait, $e_0 : W(K) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneaux surjectif dont le noyau est l'idéal d'augmentation $I(K)$ de $W(K)$ constitué des formes quadratiques de dimension paire. En particulier, $I(K)$ est un idéal maximal de $W(K)$. Dans toute la suite, on écrira $I^n(K)$ pour désigner l'idéal $I(K)$ élevé à la puissance n .

Formes ε -hermitiennes sur une algèbre à division

Supposons à présent que (V, h) soit une forme ε -hermitienne sur une K -algèbre à division D munie d'une K/F -involution τ . Comme nous travaillons avec des D -espaces vectoriels, nous pouvons à nouveau définir la dimension (ou plutôt le *rang*) de (V, h) comme étant l'entier naturel $\dim_D V$ dont nous allons montrer qu'il est en tout point similaire à la dimension d'un espace quadratique. Le rang est évidemment un invariant de la classe d'isométrie de (V, h) compatible avec la somme orthogonale. D'après la propriété universelle du groupe de Grothendieck-Witt, on en déduit qu'il induit un unique morphisme de groupes $r_\varepsilon : Gr^\varepsilon(D, \tau) \rightarrow \mathbb{Z}$. De plus :

Lemme 3.2.1. *Le morphisme de groupes r_ε est surjectif.*

Preuve. Il suffit de montrer que r_ε atteint 1. Soit $a \in D^*$. En considérant l'application non dégénérée

$$h : \begin{cases} D \times D & \rightarrow D \\ (x, y) & \mapsto \tau(x)ay \end{cases},$$

on voit que le problème se ramène à trouver $a \in D^*$ tel que $\varepsilon\tau(a) = a$. Il y a plusieurs cas :

- (1) si τ est de première espèce et $\varepsilon = 1$, on choisit $a \in \text{Sym}(D, \tau)$;
- (2) si τ est de première espèce et $\varepsilon = -1$, on choisit $a \in \text{Skew}(D, \tau)$ (cela est possible car $\text{Skew}(D, \tau) = 0$ si et seulement si $D = K$ et $\tau = \text{id}_K$ par [33, Proposition 2.6], cas qui a été exclu de notre propos lors de la sous-section 1.2.2) ;
- (3) si τ est de seconde espèce, on utilise le théorème 90 de Hilbert. □

Il n'est pas difficile de voir que le rang d'une forme métabolique est pair. En effet, si (V, h) est une forme métabolique sur (D, τ) , soit W un sous- D -espace vectoriel à droite de V auto-orthogonal pour h . Puisque h est non dégénérée, son adjoint \widehat{h} fournit un isomorphisme de D -espaces vectoriels à droite entre V et son dual V^* . Définissons la projection

$$\psi : \begin{cases} V^* & \rightarrow W^* \\ f & \mapsto f|_W \end{cases} .$$

Alors $\psi \circ \widehat{h}$ est un morphisme de D -espaces vectoriels à droite qui est surjectif grâce à l'existence d'un supplémentaire de W dans V et $\ker \psi \circ \widehat{h} = W^\perp$. On en déduit que le rang de h est le double de la dimension sur D de W . En résumé :

Proposition 3.2.2. *Le rang induit un morphisme de groupes surjectif $r_\varepsilon : W^\varepsilon(D, \tau) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont le noyau (noté $I_1^\varepsilon(D, \tau)$) est le sous-module de $W^\varepsilon(D, \tau)$ constitué des classes des formes de rang pair. En particulier, on a :*

$$W^\varepsilon(D, \tau)/I_1^\varepsilon(D, \tau) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Formes ε -hermitiennes sur une algèbre simple centrale

Soit (A, σ) une K -algèbre simple centrale à K/F -involution. Nous allons montrer que l'on peut définir le rang d'un espace ε -hermitien sur (A, σ) au travers de l'équivalence de Morita. Nous conservons les notations du chapitre 2.

Soient D une algèbre à division Brauer-équivalente à A et $((A, \sigma), (D, \tau), M, N, f, g, \nu)$ une η -équivalence de Morita entre (A, σ) et (D, τ) (τ et l'équivalence de Morita existent d'après la proposition 2.3.1). Soit (V, h) une forme ε -hermitienne sur (A, σ) ; on définit son *rang* comme étant l'entier $\dim_D \Theta(V, h) = \dim_D V \otimes_A M$.

Il nous reste à montrer que ce nombre est indépendant du choix de l' η -équivalence de Morita. Pour ce faire, choisissons $((A, \sigma), (D', \tau'), M', N', f', g', \nu')$ une η' -équivalence de Morita où D' est une algèbre à division Brauer-équivalente à A . Le lemme 3.1.2 nous assure du fait que N et N' sont deux A -modules à droite simples, ce qui implique que $N \simeq N'$ en tant que A -modules à droite. Comme V est un A -module à droite, il existe deux entiers naturels r et r' tels que $V = N^r = N'^{r'}$. Compte tenu de ce qui précède, $r = r'$ et le rang est bien défini (et vaut r). On voit en outre que le rang de (V, h) peut être alternativement défini par l'entier n vérifiant $V = W^n$, W étant un A -module à droite simple ; on retrouve ainsi la définition usuelle du rang d'un module sur un anneau simple.

Une fois encore, le rang est un invariant de la classe d'isométrie de h qui induit un morphisme de groupes $r_\varepsilon : Gr^\varepsilon(A, \sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ et :

Lemme 3.2.3. *Le morphisme de groupes r_ε est surjectif.*

Preuve. Il suffit de montrer que r_ε atteint 1. Si W est un A -module à droite simple, il est de rang 1. Il nous reste à trouver une forme ε -hermitienne non dégénérée sur W .

Montrons d'abord que W et W^* sont isomorphes en tant que A -modules à droite. A est un A -module à droite donc il existe un entier r tel que $A = W^r$. Comme $A \simeq \text{End}_A(A)$, on en déduit les isomorphismes de A -modules à droite suivants :

$$W^{*r} \simeq \text{End}_A(A) \simeq A \simeq W^r.$$

Puisque W^* est un A -module à droite, il existe un entier d tel que $W^* = W^d$. On en déduit que $d = 1$ et qu'il existe un isomorphisme de A -modules à droite $W \stackrel{f}{\simeq} W^*$.

En conséquence, l'application

$$\phi : \begin{cases} W \times W & \rightarrow A \\ (u, v) & \mapsto f(u)(v) \end{cases}$$

est sesquilinéaire non dégénérée et induit l'application sesquilinéaire non dégénérée

$$\phi^\sigma : \begin{cases} W \times W & \rightarrow A \\ (u, v) & \mapsto \sigma(\phi(v, u)) \end{cases}.$$

Définissons maintenant l'application h en posant $h = \varepsilon\phi + \phi^\sigma$. Il est clair que cette application est ε -hermitienne sur (A, σ) . Si h est non nulle, elle est non dégénérée par simplicité de W et W^* donc (W, h) est une forme ε -hermitienne non dégénérée de rang 1 sur (A, σ) , ce qui termine la preuve.

Si h est nulle alors on est dans l'un des deux cas suivants :

1. ($\varepsilon = 1$ et ϕ est antihermitienne) ou ($\varepsilon = -1$ et ϕ est hermitienne) et σ est de première espèce ;
2. ϕ est $(-\sigma(\varepsilon))$ -hermitienne et σ est de deuxième espèce.

Afin de finir la preuve, il ne nous reste qu'à exhiber une forme ε -hermitienne (W, h') sur (A, σ) dans chacun de ces deux cas.

1. Comme ϕ est hermitienne ou antihermitienne, elle possède une involution adjointe σ_ϕ sur $\text{End}_A(W)$. D'après le théorème 1.1.1, $\text{End}_A(W)$ s'identifie à D^{op} où D est l'algèbre à division Brauer-équivalente à A . On choisit un élément $d \in \text{Skew}(D^{\text{op}}, \sigma_\phi)$ et on pose $h'(x, y) = \phi(d.x, y)$ pour tous $x, y \in W$.
2. Si $K = F(a)$ avec $a^2 \in F^*$, on pose $h'(x, y) = a\sigma(\phi(x, y))$ pour tous $x, y \in W$. \square

En raisonnant comme lors du paragraphe précédent, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.2.4. *Le rang induit un morphisme de groupes surjectif $r_\varepsilon : W^\varepsilon(A, \sigma) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont le noyau (noté $I_1^\varepsilon(A, \sigma)$) est le sous-module de $W^\varepsilon(A, \sigma)$ constitué des classes des formes de rang pair. En particulier, on a :*

$$W^\varepsilon(D, \sigma)/I_1^\varepsilon(A, \sigma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3.2.2 Le discriminant

Avant de montrer que le discriminant (à signe) d'un espace hermitien est un invariant de Morita, nous rappelons quelques faits concernant la norme réduite.

La norme réduite

Soient A une algèbre simple centrale sur K et L un corps déployant de A . L'application *norme réduite* $\text{Nrd}_{A/K} : A \rightarrow K$ peut être définie par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{Nrd}_{A/K}} & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_L & \xrightarrow{\det} & L \end{array}$$

où les flèches verticales sont les injections canoniques ; la norme réduite est ainsi la généralisation aux algèbres simples centrales de la notion usuelle de déterminant. On peut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix du corps déployant de A . En fait, si $a \in A$, $n = \deg A$ et si on a un isomorphisme f entre $A \otimes_K L$ et $M_n(L)$ alors $\text{Nrd}_{A/K}(a) = \det(f(a \otimes 1))$ (voir [22, §22] pour plus de précisions sur ces faits).

La norme réduite possède un grand nombre de propriétés, par exemple :

- Proposition 3.2.5.** (1) $N_{A/K}(a) = (\text{Nrd}_{A/K}(a))^n$ pour tout $a \in A$ ($N_{A/K}$ désignant la norme de l'extension A/K , i.e. le déterminant de la multiplication à gauche) ;
(2) $\text{Nrd}_{A/K}$ est une application multiplicative ;
(3) $\text{Nrd}_{A/K}(a) = a^n$ si $a \in K$;
(4) $\text{Nrd}_{A \otimes_K L/L}(a \otimes 1) = \text{Nrd}_{A/K}(a)$ pour toute extension de corps L/K ;
(5) $\text{Nrd}_{A \otimes_K B/K}(a \otimes 1) = (\text{Nrd}_{A/K}(a))^m$ pour toute algèbre simple centrale B de degré m ;
(6) si θ est un automorphisme (resp. un antiautomorphisme) d'anneaux de A et si $a \in A$ alors $\text{Nrd}_{A/K}(\theta(a)) = \theta(\text{Nrd}_{A/K}(a))$.

Preuve. Voir [22, §22]. □

Formes quadratiques

Soit (V, q) une forme quadratique de dimension n . Le déterminant de q , vu comme élément de K^*/K^{*2} , est un invariant de la classe d'isométrie de q mais pas de sa classe de Witt en général. Pour remédier à ceci, on tord le déterminant par une puissance de -1 pour définir le *discriminant à signe* $d_{\pm}(q)$ de q par

$$d_{\pm}(q) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det q \in K^*/K^{*2}.$$

On vérifie sans peine que $d_{\pm}(q)$ est un invariant de la classe de Witt de q et induit l'application

$$d_{\pm} : W(K) \rightarrow K^*/K^{*2}.$$

Cela n'est pas un morphisme de groupes en général. Par contre :

Proposition 3.2.6. $d_{\pm} : I(K) \rightarrow K^*/K^{*2}$ est un morphisme du groupe additif $I(K)$ dans le groupe multiplicatif K^*/K^{*2} , surjectif et dont le noyau est $I^2(K)$. En particulier d_{\pm} induit l'isomorphisme

$$e_1 : I(K)/I^2(K) \simeq K^*/K^{*2}.$$

Formes ε -hermitiennes sur une algèbre à division

Afin de généraliser le concept de discriminant à signe pour un espace ε -hermitien (V, h) sur une K/F -algèbre à involution à division (D, τ) , on peut se servir naturellement de l'application norme réduite définie plus haut. Nous nous inspirons de [7, §2.1].

Supposons d'abord que τ soit de première espèce. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une D -base du D -module V . Notons M la matrice de h dans cette base, $E = M_n(D)$ et $m = n \deg(D)$. On définit le *discriminant à signe* de (V, h) par

$$d_{\pm}(h) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \text{Nrd}_{E/K}(M) \in K^*.$$

On peut montrer que d_{\pm} induit une application des classes d'isométrie de formes ε -hermitiennes sur (D, τ) dans K^*/K^{*2} et que

$$d_{\pm} : I_1^{\varepsilon}(D, \tau) \rightarrow K^*/K^{*2}$$

est un morphisme de groupes. Son noyau est noté $I_2^{\varepsilon}(D, \tau)$.

Si τ est une K/F -involution de seconde espèce et si $\varepsilon = 1$, le *discriminant à signe* de (V, h) se définit comme précédemment et induit un morphisme de groupes

$$d_{\pm} : I_1^1(D, \tau) \rightarrow F^*/N_{K/F}(K^*).$$

Si τ est une K/F -involution de seconde espèce et si $\varepsilon \neq 1$, on peut définir le discriminant à signe d'une forme de rang pair (V, h) par le biais de la correspondance bijective rappelée lors de la preuve de la proposition 2.3.4. En effet, d'après le théorème 90 de Hilbert, il existe $\mu \in K^*$ tel que $\varepsilon = \tau(\mu)\mu^{-1}$. Comme la forme $(V, \mu h)$ est hermitienne, on définit le *discriminant à signe* de (V, h) comme étant celui de $(V, \mu h)$. Il faut vérifier que cette définition est indépendante du choix de $\mu \in K^*$. Soit alors $\mu' \in K^*$ vérifiant $\varepsilon = \tau(\mu')\mu'^{-1}$. Comme $\mu\mu'^{-1}$ est fixé par τ , c'est un élément de F^* . Au vu du comportement des éléments de F^* vis à vis de la norme réduite (voir la proposition 3.2.5(1)) et par parité du rang, on vérifie aisément que $d_{\pm}(V, \mu h) = d_{\pm}(V, \mu' h)$ dans $F^*/N_{K/F}(K^*)$, ce qui implique que le discriminant à signe est bien défini pour les formes ε -hermitiennes de *rang pair*. En conséquence, le discriminant à signe induit un morphisme de groupes

$$d_{\pm} : I_1^{\varepsilon}(D, \tau) \rightarrow F^*/N_{K/F}(K^*).$$

Formes ε -hermitiennes sur une algèbre simple centrale

Soient (A, σ) une algèbre simple centrale à K/F -involutions et (V, h) une forme ε -hermitienne de rang pair n sur (A, σ) . Soit $((A, \sigma), (D, \tau), M, N, f, g, \nu)$ une η -équivalence de Morita, où D est une algèbre à division Brauer-équivalente à A . On va définir le discriminant à signe de (V, h) comme étant le discriminant à signe de la forme correspondant à (V, h) par une η -équivalence de Morita avec (D, τ) . En d'autres termes, en conservant les notations du chapitre 2, le discriminant à signe de (V, h) est

$$d_{\pm}(h) = d_{\pm}(V \otimes_A M, b_0 h)$$

vu comme un élément de K^*/K^{*2} (resp. $F^*/N_{K/F}(K^*)$) si σ est de première espèce (resp. si σ est de seconde espèce). Il nous faut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de l' η -équivalence de Morita entre (A, σ) et une algèbre à division Brauer-équivalente à A munie d'une involution.

Soit alors $((A, \sigma), (D_1, \tau_1), M_1, N_1, f_1, g_1, \nu_1)$ une η_1 -équivalence de Morita entre (A, σ) et (D_1, τ_1) , D_1 étant une algèbre à division Brauer-équivalente à A . D'après le théorème 2.2.1, il existe deux isomorphismes de monoïdes

$$\Theta_0 : \begin{cases} S^{\varepsilon}(A, \sigma) & \rightarrow S^{\eta^{\varepsilon}}(D, \tau) \\ (V, h) & \mapsto (V \otimes_A M, b_0 h) \end{cases} ,$$

$$\Theta_1 : \begin{cases} S^{\varepsilon}(A, \sigma) & \rightarrow S^{m\varepsilon}(D_1, \tau_1) \\ (V, h) & \mapsto (V \otimes_A M_1, b_1 h) \end{cases} .$$

Nous allons montrer que $d_{\pm}(\Theta_0(V, h)) = d_{\pm}(\Theta_1(V, h))$.

D'après le théorème 1.1.1, il existe un isomorphisme de K -algèbres l entre D et D_1 . Via l^{-1} on peut voir M comme un D_1 -module à droite. D'après le lemme 3.1.2, M et M_1 sont deux $A \otimes_K D_1^{\text{op}}$ -modules à gauche simples, ce qui équivaut au fait qu'il existe un isomorphisme de (A, D_1) -bimodules i entre M et M_1 (voir [10]).

Soit τ_2 l'involutions sur D_1 définie par $\tau_2 \circ l = l \circ \tau$. Dans ces conditions, d'après la proposition 1.1.6, il existe $u \in D_1^*$ tel que $\tau_1 = \text{Int}(u) \circ \tau_2$ et $\tau_2(u) = \eta\eta_1 u$.

Nous définissons les deux applications

$$b_2 : \begin{cases} M_1 \times M_1 & \rightarrow D_1 \\ (m, m') & \mapsto l(b_0(i^{-1}(m), i^{-1}(m'))) \end{cases} ,$$

$$b_3 : \begin{cases} M_1 \times M_1 & \rightarrow D_1 \\ (m, m') & \mapsto u \cdot b_2(m, m') \end{cases} .$$

Il est aisé de vérifier que (M_1, b_2) est une forme η -hermitienne sur (D_1, τ_2) et que (M_1, b_3) est une forme η_1 -hermitienne sur (D_1, τ_1) . On démontre :

Lemme 3.2.7. $\widehat{b}_3^{-1} \circ \widehat{b}_1 \in F^*$.

Preuve. En conservant les notations du chapitre 2, on rappelle que $\tilde{\sigma}$ est adjointe à b_0 et à b_1 et que l'on identifie $\text{End}_{D_1}(M_1)$ et A . Soient $m, m' \in M_1$ et $\phi \in \text{End}_{D_1}(M_1)$ auquel correspond la multiplication à gauche par l'élément $a_\phi \in A$. Alors :

$$\begin{aligned} b_3(m, \tilde{\sigma}(\phi)(m')) &= b_3(m, \sigma(a_\phi) \cdot m') \\ &= u \cdot l(b_0(i^{-1}(m), i^{-1}(\sigma(a_\phi) \cdot m'))) \\ &= u \cdot l(b_0(i^{-1}(m), \sigma(a_\phi) \cdot i^{-1}(m'))) \\ &= b_3(\phi(m), m'). \end{aligned}$$

Ce calcul nous indique que $\tilde{\sigma}$ est également adjointe à b_3 et comme

$$\widehat{b}_1^{-1} \circ {}^t\phi \circ \widehat{b}_1 = \tilde{\sigma}(\phi) = \widehat{b}_3^{-1} \circ {}^t\phi \circ \widehat{b}_3,$$

on en déduit que $\lambda = \widehat{b}_3^{-1} \circ \widehat{b}_1$ est dans le centre de $\text{End}_{D_1}(M_1^*)$ qui a été identifié à K .

Ainsi, pour tous $m, m' \in M_1$,

$$b_3(m, m') = \tau_1(\lambda)\lambda^{-1}b_3(m, m').$$

Puisque la forme b_3 est non dégénérée, $(\tau_1(\lambda)^{-1}\lambda) - 1 \in \text{Ann}(M_1)$ et en raisonnant comme à la fin de la proposition 2.2.5, on en déduit que $\tau_1(\lambda) = \lambda$ puis que $\lambda \in F^*$. \square

Soit $\theta : {}^{\tau_2}M_1^* \rightarrow {}^{\tau_1}M_1^*$ l'application définie par $\theta(\phi)(m) = u \cdot \phi(m)$ pour tout $\phi \in M_1^*$ et pour tout $m \in M_1$ (rappelons que si β est une involution de D_1 , ${}^\beta M_1^*$ désigne le D_1 -module à droite M_1^* tordu par l'involution β : voir [33, §4.2]). Si on définit $\Psi : {}^{\tau}M^* \rightarrow {}^{\tau_1}M_1^*$ en posant $\Psi(\phi)(m) = l(\phi(i^{-1}(m)))$ pour tout $\phi \in M^*$ et pour tout $m \in M_1$, on a

$$\widehat{b}_1 = \theta \circ {}^t(i^{-1}) \circ \Psi \circ \widehat{b}_0 \circ \lambda,$$

ou, quitte à prendre λu au lieu de u (puisque $\lambda \in F^*$ d'après le lemme 3.2.7),

$$\widehat{b}_1 = \theta \circ {}^t(i^{-1}) \circ \Psi \circ \widehat{b}_0.$$

En notant $\widetilde{b_0 h} = {}^t(i^{-1}) \circ \Psi \circ \widehat{b}_0$, on vérifie sans peine que $b_1 h = u \widetilde{b_0 h}$ et, puisque le rang de h est pair par hypothèse, on a l'égalité

$$\text{Nrd}_{M_n(D_1)/K}(b_1 h) = \text{Nrd}_{M_n(D_1)/K}(\widetilde{b_0 h}) \quad (3.2)$$

dans K^*/K^{*2} (resp. $F^*/N_{K/F}(K^*)$).

L'isomorphisme de K -algèbres l se prolonge naturellement en un isomorphisme de K -algèbres entre $M_n(D)$ et $M_n(D_1)$ que l'on note \tilde{l} . Si on désigne par $B = (b_{j,k})$ la matrice de $b_0 h$ dans une D -base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $V \otimes_A M$ alors :

Lemme 3.2.8. Dans la D_1 -base $\{(\text{id} \otimes i)(e_1), \dots, (\text{id} \otimes i)(e_n)\}$ de $V \otimes_A M_1$, la matrice de $\widetilde{b_0 h}$ est $\tilde{l}(B) = (c_{j,k})$.

Preuve. On sait que $b_{j,k} = \eta \varepsilon \tau(b_0 h(e_k, e_j))$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Pour conclure, nous effectuons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \eta^{-1} \varepsilon \tau_2(\widetilde{b_0 h}((\text{id} \otimes i)(e_k), (\text{id} \otimes i)(e_j))) \\ &= \eta^{-1} \varepsilon \tau_2(l(b_0 h(e_k, e_j))) \\ &= \eta^{-1} \varepsilon l(\tau(b_0 h(e_k, e_j))) \\ &= l(b_{j,k}). \end{aligned}$$

□

On déduit du lemme précédent et de (3.2) que

$$\text{Nrd}_{M_n(D_1)/K}(b_1 h) = \text{Nrd}_{M_n(D_1)/K}(\tilde{l}(b_0 h)). \quad (3.3)$$

En revenant à la définition de la norme réduite, il n'est pas difficile de voir que l'on a l'égalité

$$\text{Nrd}_{M_n(D_1)/K}(\tilde{l}(b_0 h)) = \text{Nrd}_{M_n(D)/K}(b_0 h)$$

qui conduit finalement, avec (3.3), à l'égalité attendue :

$$d_{\pm}(\Theta_0(V, h)) = d_{\pm}(\Theta_1(V, h)).$$

En conséquence, le *discriminant à signe* d'une forme ε -hermitienne de rang pair sur (A, σ) peut se définir par

$$d_{\pm}(h) = d_{\pm}(V \otimes_a M, b_0 h) \in K^*/K^{*2}$$

si σ est de première espèce, et par

$$d_{\pm}(h) = d_{\pm}(V \otimes_a M, b_0 h) \in F^*/N_{K/F}(K^*)$$

si σ est de seconde espèce. On note $I_2^{\varepsilon}(A, \sigma)$ les noyaux de ces morphismes.

3.2.3 Le discriminant raffiné

Nous rappelons brièvement comment définir un discriminant plus fin que le discriminant à signe. Nous nous inspirons de travaux de Bayer-Fluckiger et Parimala : voir [8, p. 662-663].

Supposons tout d'abord que (V, h) soit une forme ε -hermitienne sur une K -algèbre à division D munie d'une involution τ . On désigne par $\text{Nrd}_{D/K}(D^*)$ l'image de l'application

norme réduite dans K^* . Supposons que h est de rang n et posons $E = M_n(D)$. Si $h \simeq h'$ alors il existe une matrice $T \in \mathrm{GL}_n(D)$ telle que $M(h') = {}^t\tau(T)M(h)T$ et ainsi

$$d_{\pm}(h') = d_{\pm}(h)\mathrm{Nrd}_E(T)^2 \in K^*,$$

si τ est de première espèce et

$$d_{\pm}(h') = d_{\pm}(h)(\mathrm{Nrd}_E(T)\tau(\mathrm{Nrd}_E(T))) \in K^*,$$

si τ est de seconde espèce. Or :

Lemme 3.2.9. *Si A est une K -algèbre simple centrale Brauer-équivalente à D , on a l'égalité $\mathrm{Nrd}_{A/K}(A^*) = \mathrm{Nrd}_{D/K}(D^*)$ où $\mathrm{Nrd}_{A/K}(A^*)$ désigne, comme précédemment, l'image de l'application norme réduite dans K^* .*

Preuve. La preuve se fait avec l'aide du déterminant de Dieudonné : voir [22, §22, Theorem 1] pour plus de précisions sur cet outil. \square

Ainsi, si on voit le discriminant à signe comme un élément de $K^*/\mathrm{Nrd}_{D/K}(D^*)^2$ (resp. $F^*/N_{K/F}(\mathrm{Nrd}_{D/K}(D^*))$), il est bien défini sur la classe d'isométrie de h . De plus, si h est une forme de rang pair, $d_{\pm}(h) \in \mathrm{Nrd}_{D/K}(D^*)$. L'application *discriminant raffiné* désigne le morphisme de groupes

$$\mathrm{Disc} : I_1^{\varepsilon}(D, \tau) \rightarrow \mathrm{Nrd}_{D/K}(D^*)/\mathrm{Nrd}_{D/K}(D^*)^2,$$

lorsque τ est de première espèce et

$$\mathrm{Disc} : I_1^{\varepsilon}(D, \tau) \rightarrow \mathrm{Nrd}_{D/F}(D^*)/N_{K/F}(\mathrm{Nrd}_{D/K}(D^*)),$$

lorsque τ est de seconde espèce.

Si (A, σ) est une K -algèbre simple centrale munie d'une K/F -involution, on définit le discriminant raffiné d'une forme ε -hermitienne de rang pair en utilisant l'équivalence de Morita. La preuve de ce fait s'effectue de façon identique à ce que l'on a présenté lors de la sous-section précédente et peut donc être omise.

Remarque 3.2.10. Jean-Pierre Tignol m'a fait remarquer qu'il existe une voie plus directe pour montrer l'invariance par équivalence de Morita des notions de rang et de discriminant (raffiné). Il suffit d'utiliser le fait que l'algèbre d'endomorphismes d'un module hermitien munie de l'involution adjointe est un invariant de Morita. En définissant ces notions en terme d'algèbre d'endomorphismes, on obtient alors forcément des invariants de Morita. Ainsi, si (V, h) est un espace hermitien sur (A, σ) , son rang peut être défini par le quotient $\frac{\deg E}{\mathrm{ind} E}$ où $E = \mathrm{End}_A(V)$. De même, si (V, h) est un espace hermitien de rang pair, son discriminant à signe est le discriminant à signe de l'involution adjointe sur E .

3.3 Quelques autres invariants

3.3.1 Formes de Pfister et isomorphismes de Milnor-Voevodsky

Nous nous référons à [75] et à [33, Chapter VII] pour toutes les notions concernant la cohomologie galoisienne. Soit Γ le groupe de Galois absolu de K , c'est-à-dire $\Gamma = \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$ où K_{sep} est une clôture séparable de K . Alors Γ est un groupe profini et, si G est un schéma en groupe commutatif, nous notons $H^i(K, G)$ le i^{e} groupe de cohomologie de Γ à coefficients dans $G(K_{\text{sep}})$. Si $G = \mu_2$ désigne les racines carrées de l'unité, on a la suite exacte de schémas en groupe suivante (appelée suite de Kummer)

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow G_m \xrightarrow{()^2} G_m \rightarrow 1,$$

où G_m est défini par $G_m(S) = S^*$.

Il est facile de voir que $H^0(K, \mu_2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et, puisque $H^1(K, G_m) = 0$ d'après le théorème de Hilbert 90, la suite exacte précédente nous permet d'écrire $H^1(K, \mu_2) \simeq K^*/K^{*2}$. Les résultats (3.1) et 3.2.6 se réécrivent

$$e_0 : W(K)/I(K) \simeq H^0(K, \mu_2)$$

et

$$e_1 : I(K)/I^2(K) \simeq H^1(K, \mu_2).$$

On voit facilement que l'idéal $I^n(K)$ est additivement engendré par les formes quadratiques du type

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = \bigotimes_{i=1}^n \langle 1, -a_i \rangle$$

avec $a_1, \dots, a_n \in K^*$. Ces formes quadratiques sont appelées *n-formes de Pfister* et jouent un rôle primordial en théorie des formes quadratiques.

En 1970 dans [52], Milnor a conjecturé que la cohomologie galoisienne de μ_2 avait une relation profonde avec les formes quadratiques et particulièrement avec les formes de Pfister :

Conjecture 3.3.1 (Milnor). Si $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$e_n : \begin{cases} I^n(K)/I^{n+1}(K) & \rightarrow H^n(K, \mu_2) \\ \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle & \mapsto (a_1) \cup \dots \cup (a_n) \end{cases}$$

induites par le cup produit sont des isomorphismes de groupes.

Dans ce même article, Milnor a prouvé la véracité de sa conjecture pour les corps globaux, les corps locaux, les corps finis et les corps réels clos.

On a vu précédemment que cette conjecture est (facilement) vraie en général pour $n = 0, 1$. Le cas $n = 2$ a été montré par Merkurjev en 1981 dans [49] et découle du théorème 2.3.6 et de l'identification entre $H^2(K, \mu_2)$ et $\text{Br}_2(K)$ au moyen de la suite exacte de Kummer (en utilisant le fait que $H^2(K, \mathbb{G}_m) \simeq \text{Br}(K)$: voir [33, Proposition 29.11]). Le cas $n = 3$ a été montré de manière indépendante par Merkurjev et Suslin dans [50] et par Rost dans [69]. Rost a également montré le cas $n = 4$ quelques années plus tard. Enfin, en 1996, Voevodsky a prouvé la conjecture 3.3.1 en général: voir [79] pour plus de détails.

3.3.2 Invariants de formes hermitiennes

Dans ce paragraphe, nous mentionnons l'existence de deux invariants pour les formes hermitiennes pouvant se définir au moyen de l'équivalence de Morita et nous rappelons l'existence de la notion de signature d'une forme hermitienne. Ce bref rappel est loin d'être exhaustif et nous renvoyons aux articles [7] et [8] pour tout renseignement complémentaire.

L'invariant de Clifford

Soient (D, σ) une K -algèbre simple centrale à involution orthogonale et (V, h) une forme hermitienne non dégénérée sur (D, σ) . Si (V, h') est une forme hermitienne avec $d_{\pm}(h) = d_{\pm}(h')$, Bartels définit en 1975 l'invariant de Clifford relatif $\text{Cl}_{h'}(h) \in \text{Br}_2(K)/[D]$. Si on suppose que (V, h) est de rang pair $2n$ et de discriminant trivial et si H_{2n} désigne une forme hyperbolique de rang $2n$ alors on définit l'invariant de Clifford de h par $\text{Cl}(h) = \text{Cl}_{H_{2n}}(h)$. On peut montrer que l'invariant de Clifford se comporte bien vis à vis de l'équivalence de Morita et constitue ainsi un invariant pour les formes hermitiennes de rang pair et de discriminant trivial sur une algèbre simple centrale à involution orthogonale. Si $D = K$ et $\sigma = \text{id}_k$, l'invariant $\text{Cl}(h)$ est appelé invariant de Clifford ou invariant de Hasse-Witt de h ; cet invariant induit l'isomorphisme e_2 .

L'invariant de Rost

Soient (D, σ) est une K -algèbre simple centrale à involution orthogonale et (V, h) une forme hermitienne non dégénérée sur (D, σ) de rang pair, de discriminant et d'invariant de Clifford trivial. On peut définir un élément $R(h) \in H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^1(K, \mu_2) \cup [D]$ appelé invariant de Rost de h . Cet invariant se comporte bien vis à vis de l'équivalence de Morita et se transporte ainsi aux algèbres simples centrales à involution orthogonale. Si $D = K$ et $\sigma = \text{id}_k$, l'invariant $R(h)$ est appelé invariant de Arason de h ; cet invariant induit l'isomorphisme e_3 .

Les signatures

Enfin, si (A, σ) est une K -algèbre simple centrale à K/F -involutions et si F est un corps ordonné, on peut définir la signature d'une forme hermitienne (V, h) sur (A, σ) . D'abord, le théorème d'inertie de Jacobi-Sylvester est vrai pour les formes quadratiques sur F vis à vis d'un ordre P et permet de définir un homomorphisme de signature $\text{sgn}_P : W(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ (voir [71, Chapter 2, §4]). Ensuite, on peut définir la signature de (V, h) si F est un corps réel clos, en utilisant l'équivalence de Morita et en raisonnant suivant l'espèce et le type de l'involutions. Enfin, le cas général s'obtient en étendant les scalaires à une clôture réelle de F .

Chapitre 4

Suites exactes de groupes de Witt

4.1 Introduction

Le changement de base est un outil important dans la théorie algébrique des formes quadratiques et des formes hermitiennes sur une algèbre à division. Etant donnée une extension de corps (de caractéristique différente de 2), on peut considérer l'application de changement de base de K à L , alternativement appelée application de restriction ; si l'extension est de degré fini, on a aussi à notre disposition l'application transfert de Scharlau, celle-ci pouvant être considérée comme une application trace généralisée. Pour ces deux types d'applications, la situation est bien comprise lorsque L/K est une extension de degré impair ou quadratique. On pourra consulter le livre de Scharlau [71, Chapter 2, §5] pour avoir un aperçu de ces notions et de ces résultats.

Le groupe de Witt (resp. l'anneau de Witt) offre un cadre intéressant pour étudier les formes hermitiennes (resp. les formes quadratiques). En ce sens, les résultats ci-dessus peuvent être exprimés de façon efficace avec l'aide de ces structures. Un des résultats de base dans la théorie des formes quadratiques est un théorème de Pfister datant de 1965 qui détermine le noyau de l'application de restriction $r_{L/K}^* : W(K) \rightarrow W(L)$ pour une extension L/K quadratique. Plus précisément, ce noyau est l'idéal engendré par la forme quadratique $\langle 1, -\delta \rangle$ où $L = K(\sqrt{\delta})$. On peut exprimer ce résultat au moyen de l'exactitude de la suite :

$$W(K) \xrightarrow{t} W(K) \xrightarrow{r_{L/K}^*} W(L) \tag{4.1}$$

où t désigne la multiplication par la forme binaire $\langle 1, -\delta \rangle$. L'exactitude de cette suite a été précisée par Elman et Lam. En utilisant l'application transfert de Scharlau $s_* : W(L) \rightarrow W(K)$, ils intègrent la suite (4.1) dans le triangle exact suivant (voir [71, Chapter 2,

Theorem 5.10] :

$$\begin{array}{ccc}
 W(K) & \xrightarrow{r^*} & W(L) \\
 & \swarrow t & \searrow s_* \\
 & W(K) &
 \end{array} \tag{4.2}$$

Pour une extension quadratique L/K (resp. une algèbre de quaternions à division $(a, b)_K = D$) munie de son automorphisme non trivial $-$ (resp. de son involution canonique $-$), on peut considérer l'application trace $W(L, -) \rightarrow W(K)$ (resp. $W(D, -) \rightarrow W(K)$). Ces applications sont toutes deux injectives d'après un résultat de Jacobson (voir le théorème 6.2.3).

En 1973, dans [53, Appendix 2], Milnor et Husemoller construisent la suite exacte de $W(K)$ -modules suivante :

$$0 \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W(K) \longrightarrow W(L), \tag{4.3}$$

$-$ désignant l'automorphisme non trivial de l'extension quadratique L/K . Les résultats concernant les formes hermitiennes sur une algèbre de quaternions à division $(D, -)$ sont donnés dans les articles de Lewis [36], [37] datant respectivement de 1979 et 1982. Plus précisément, il démontre l'exactitude de la suite suivante :

$$0 \longrightarrow W(D, -) \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W^{-1}(D, -) \longrightarrow W(L) \tag{4.4}$$

où $L = K(\sqrt{a}) \subset D$ est stable par $-$. En 1982, cette suite est utilisée par Lewis dans [38] afin de produire une version non cohomologique de l'invariant de Clifford relatif défini par Bartels (que l'on a évoqué lors de la section 3.3) ; dans ce même article, Lewis emploie cet invariant pour étudier les formes antihermitiennes sur des algèbres de quaternions à division sur des corps de nombres algébriques. En fait, si D est déployée, la suite précédente reste exacte (voir [71, Chapter 10, Theorem 3.2]). Dans l'article [42] de 1985, Lewis construit un octogone exact de groupes de Witt d'algèbres de Clifford (de formes quadratiques) de telle manière que les suites (4.4) et (4.6) ci-dessous en soient des cas particuliers.

En 1995, dans [57], Parimala, Sridharan et Suresh obtiennent la suite exacte de groupes de Witt suivante :

$$W^\varepsilon(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_1^\varepsilon} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \xrightarrow{\rho_1^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2). \tag{4.5}$$

Dans cette suite, A est une K -algèbre simple centrale munie d'une K/F -involution σ d'espèce quelconque, ε est (comme d'habitude) un élément de K vérifiant $\sigma(\varepsilon)\varepsilon = 1$, \tilde{A} désigne le centralisateur d'un élément antisymétrique (pour σ) $\lambda \in A^*$, $L = K(\lambda)$ est une extension quadratique de K , σ_1 est la restriction de σ à \tilde{A} et σ_2 une certaine involution de \tilde{A}

fixant L élément par élément. Les applications π_1^ε et $\pi_2^{-\varepsilon}$ ci-dessus sont des transferts et ρ_1^ε une application de restriction (voir la section 4.2 pour plus de détails). On peut remarquer que (4.4) devient un cas particulier de (4.5) si on admet le résultat de Jacobson rappelé précédemment. La suite exacte (4.5) a été utilisée par Bayer-Fluckiger et Parimala dans [7] et [8] pour obtenir les résultats de classification de formes hermitiennes sur une algèbre à involution que nous avons évoqués en introduction de la section 3.2.2. Ces résultats ont été primordiaux dans leurs preuves de la conjecture II de Serre pour les groupes classiques et du principe de Hasse sur les corps de dimension cohomologique virtuelle au plus 2.

En 1982, dans [36], Lewis trouve une suite exacte plus longue que les précédentes contenant (4.4) et symétrique par rapport à $W(L)$:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow W(D, -) \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W^{-1}(D, -) \longrightarrow W(L) \longrightarrow W^{-1}(D, -) \longrightarrow \\ \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W(D, -) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Cette suite exacte nous a motivés pour définir des applications supplémentaires entre groupes de Witt afin de continuer la suite exacte (4.5) par la droite. On obtient :

Théorème 4.1.1. *Il existe une suite exacte de $W(K, \sigma|_K)$ -modules :*

$$W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2) \xrightarrow{\rho_2^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \quad (4.7)$$

où $\pi_3^{-\varepsilon}$ (resp. ρ_2^ε) est une application de transfert (resp. de restriction) définie au cours de la section 4.2.

Bien sûr, il est possible de prouver l'exactitude de (4.7) d'une manière similaire à celle employée par Parimala, Sridharan et Suresh pour prouver l'exactitude de (4.5) dans [57], mais notre preuve est basée sur celle donnée par Lewis dans [40] dans le cas des algèbres de quaternions à division. La preuve du théorème 4.1.1 fera l'objet de la section 4.3.

En dépit de l'exactitude de la suite (4.5), nous ne possédons pas beaucoup d'informations sur le noyau des applications la composant. Dans la section 4.4, nous donnons une description explicite du noyau de chaque application apparaissant dans (4.5) et (4.7) lorsque A est une algèbre à division. Plus précisément, le théorème 4.4.4 décrit le comportement de ces applications par rapport à l'isotropie lorsque A est une algèbre à division. En particulier, si on combine 4.4.4 avec la description explicite de chaque image donnée dans [7], cela fournit une autre preuve de l'exactitude de (4.5).

En 1983, dans [40], Lewis obtient un octogone exact de groupes de Witt équivariants pour les extensions quadratiques et pour les algèbres de quaternions à division. Dans la section 4.5, après avoir défini une notion de G -forme ε -hermitienne isotrope convenable, nous montrons que les suites (4.5) et (4.7) restent exactes en remplaçant les groupes de Witt par des groupes de Witt équivariants. De façon plus précise :

Théorème 4.1.2. *Supposons que (A, σ) vérifie les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.1.1. Alors, les deux suites suivantes sont des suites exactes de $W(K, \sigma|_K)$ -modules :*

$$W^\varepsilon(G, A, \sigma) \xrightarrow{\pi_1^\varepsilon} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_1) \xrightarrow{\rho_1^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_2) \quad (4.8)$$

$$W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_2) \xrightarrow{\rho_2^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) \xrightarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_1) \quad (4.9)$$

Dans la section 4.3, en utilisant (4.5) et (4.7) (resp. le théorème 4.1.2) nous montrerons en outre comment il est possible de construire des octogones exacts de groupes de Witt (resp. de groupes de Witt équivariants) : voir 4.3.1 et 4.5.6. On trouve de nombreux exemples d’octogones exacts de groupes de Witt dans la littérature ; par exemple, on pourra consulter les articles suivants de Lewis : [40] and [42]. Ranicki nous a fait remarquer que l’octogone exact de 4.3.1 peut être vu comme un cas particulier d’un octogone exact de L -groupes ; plus précisément, dans [66], Ranicki prouve l’exactitude d’une certaine “tresse” (“braid”, en anglais) pour chaque “extension quadratique ρ -tordue” d’anneaux. Quand ces anneaux sont semi-simples, cela conduit à un octogone exact : pour plus de détails, on pourra consulter [66] et [67, p. 242].

En dépit du fait que certains de nos résultats peuvent déjà être présents dans la littérature, soit sous forme cachée ou implicite, soit comme conséquence de principes plus généraux, nous pensons que notre approche à la fois explicite et calculatoire pourra se révéler intéressante et utile en travaillant dans des situations particulières, par exemple sur un corps donné.

4.2 Définitions des applications

Les notations de cette section seront conservées tout au long de ce chapitre. Soit A une K -algèbre simple centrale munie d’une K/F -involutions σ (d’espèce quelconque). Pour $\varepsilon \in K^*$ vérifiant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$, on a vu au cours du premier chapitre que $\varepsilon = \pm 1$ si σ est de première espèce et que $W^\varepsilon(A, \sigma)$ ne dépendait pas du choix de ε si σ est de seconde espèce (voir la proposition 2.3.4). Ainsi, on peut supposer dans la suite de ce chapitre que $\varepsilon = \pm 1$, bien que tous les résultats y figurant puissent être adaptés à un $\varepsilon \in K^*$ arbitraire vérifiant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$.

Remarque 4.2.1. Rappelons que comme l’algèbre A est simple, il n’y a aucune différence entre les notions de forme ε -hermitienne hyperbolique et métabolique (voir la sous-section 1.2.2). On pourra ainsi utiliser indifféremment l’une ou l’autre de ces notions (hormis dans la section 4.5 qui traite de G -formes ε -hermitiennes).

Nous allons maintenant définir les applications apparaissant dans les suites exactes de

ce chapitre. Comme dans [7] et [57], nous supposons l'existence de $\lambda, \mu \in A^*$ vérifiant

$$\begin{cases} \sigma(\lambda) = -\lambda \text{ et } \sigma(\mu) = -\mu, \\ \mu\lambda = -\lambda\mu, \\ L = K(\lambda) \text{ est une extension quadratique de } K. \end{cases} \quad (4.10)$$

Nous notons \tilde{A} pour désigner le centralisateur de L dans A ; d'après le théorème du double centralisateur, \tilde{A} est une algèbre simple centrale sur L (voir [71, Chapter 8, Theorem 3.2]).

Lemme 4.2.2. *Sous les hypothèses (4.10), on peut vérifier que $\mu\tilde{A} = \tilde{A}\mu$, $\mu^2 \in \tilde{A}$, $\sigma(\tilde{A}) = \tilde{A}$ et $A = \tilde{A} \oplus \mu\tilde{A}$.*

Preuve. Toutes ces assertions découlent de (4.10) après de simples calculs. \square

On peut ainsi munir \tilde{A} des deux involutions $\sigma_1 = \sigma|_{\tilde{A}}$ et $\sigma_2 = \text{Int}(\mu^{-1}) \circ \sigma_1$ (où, comme d'habitude, $\text{Int}(\mu^{-1})(x) = \mu^{-1}x\mu$).

Remarques 4.2.3. Les hypothèses (4.10) faites sur l'algèbre A ne sont pas trop restrictives.

(1) Par exemple, toute algèbre de multi-quaternions $A = Q_1 \otimes_K \cdots \otimes_K Q_n$ où chaque Q_i est une algèbre de quaternions à division sur K entre dans le cadre de ces hypothèses pour une involution σ convenable : en effet, si $Q_n = (a, b)_K$ avec $i^2 = a$ et $j^2 = b$, il suffit de considérer $\lambda = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes i$ et $\mu = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes j$ et de poser $\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n$ où $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ sont des involutions de première espèce quelconques sur (respectivement) Q_1, \dots, Q_{n-1} et où σ_n est l'involution canonique de Q_n . En outre, d'après le théorème de Merkurjev (voir 2.3.6), toute algèbre simple centrale à involution de première espèce est de cette forme à équivalence de Brauer près.

(2) Bayer-Fluckiger et Parimala ont montré en [7, §3.3] que toute algèbre à division munie d'une involution de seconde espèce entre également dans ce cadre, quitte à étendre les scalaires de cette algèbre par une extension de degré impair.

4.2.1 Définition des applications de transfert

Nous considérons les deux projections L -linéaires

$$\pi_1 : \begin{cases} \tilde{A} \oplus \mu\tilde{A} & \rightarrow & \tilde{A} \\ a_1 + \mu a_2 & \mapsto & a_1 \end{cases} \text{ et } \pi_2 : \begin{cases} \tilde{A} \oplus \mu\tilde{A} & \rightarrow & \tilde{A} \\ a_1 + \mu a_2 & \mapsto & a_2 \end{cases}.$$

Si (V, h) est une forme ε -hermitienne sur (A, σ) , on définit (pour $i = 1, 2$) $\pi_i^\varepsilon(h) : V \times V \rightarrow \tilde{A}$ en posant $\pi_i^\varepsilon(h)(x, y) = \pi_i(h(x, y))$. Dans ces conditions, $\pi_1^\varepsilon(h)$ est une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_1) et $\pi_2^\varepsilon(h)$ est une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_2) . Afin de vérifier que π_1^ε et π_2^ε induisent des homomorphismes de groupes de Witt, il suffit de prouver que ces deux

applications respectent la régularité, les classes d'isométrie, la somme orthogonale et la métabolité. Toutes ces propriétés découlent de la suite d'équivalences suivante :

$$[h(x, y) = 0 \quad \forall y \in V] \iff [\pi_1^\varepsilon(h)(x, y) = 0 \quad \forall y \in V] \iff [\pi_2^\varepsilon(h)(x, y) = 0 \quad \forall y \in V].$$

Ainsi, π_1^ε et π_2^ε induisent respectivement les homomorphismes de monoïdes commutatifs et de groupes de Witt suivants (que l'on note encore π_1^ε et π_2^ε) :

$$\begin{aligned} \pi_1^\varepsilon : S^\varepsilon(A, \sigma) &\rightarrow S^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) ; \quad \pi_1^\varepsilon : W^\varepsilon(A, \sigma) \rightarrow W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) ; \\ \pi_2^\varepsilon : S^\varepsilon(A, \sigma) &\rightarrow S^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_2) ; \quad \pi_2^\varepsilon : W^\varepsilon(A, \sigma) \rightarrow W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_2). \end{aligned}$$

On définit π_3^ε comme étant l'application définie par $\lambda\pi_1^\varepsilon$; de même, π_3^ε induit les homomorphismes suivants :

$$\pi_3^\varepsilon : S^\varepsilon(A, \sigma) \rightarrow S^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1) ; \quad \pi_3^\varepsilon : W^\varepsilon(A, \sigma) \rightarrow W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1).$$

4.2.2 Définition des applications de restriction

Soit (V, f) une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_1) . On lui associe $(V \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_1^\varepsilon(f))$ où

$$\rho_1^\varepsilon(f)(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \sigma(\alpha)\lambda f(x, y)\beta,$$

pour tous $x, y \in V$ et tous $\alpha, \beta \in A$. On vérifie que ρ_1^ε est bien définie et que $(V \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_1^\varepsilon(f))$ est une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne sur (A, σ) . Il est facile de voir que ρ_1^ε respecte les classes d'isométrie, la somme orthogonale et la métabolité. Il reste à démontrer que ρ_1^ε respecte la régularité :

Lemme 4.2.4. *Si (V, f) est non dégénérée, $(V \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_1^\varepsilon(f))$ est non dégénérée.*

Preuve. On a

$$\widehat{\rho_1^\varepsilon(f)} = u \circ (\widehat{\lambda f} \otimes \text{id}),$$

où u est le morphisme de A -modules à droite de $V^* \otimes_{\tilde{A}} A$ dans $(V \otimes_{\tilde{A}} A)^*$ défini par

$$u(\phi \otimes a)(v \otimes a') = \sigma(a)\phi(v)a'$$

pour tous $\phi \in V^*$, $a, a' \in A$ et $v \in V$. Puisque f est non dégénérée, $\widehat{\lambda f} \otimes \text{id}$ est un isomorphisme de A -modules à droite. En invoquant le fait que A soit un \tilde{A} -module libre de rang 2 (ou que V soit un \tilde{A} -module projectif de type fini), on en déduit que u est un isomorphisme de A -modules à droite (voir, par exemple, [11, §5, Proposition 8]) ce qui permet de conclure. \square

Par suite, ρ_1^ε induit des homomorphismes :

$$\rho_1^\varepsilon : S^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \rightarrow S^{-\varepsilon}(A, \sigma) ; \quad \rho_1^\varepsilon : W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \rightarrow W^{-\varepsilon}(A, \sigma).$$

Soit (V, f) une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_2) . On lui associe $(V \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_2^\varepsilon(f))$ où

$$\rho_2^\varepsilon(f)(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \sigma(\alpha)\lambda\mu f(x, y)\beta,$$

pour tous $x, y \in V$ et tous $\alpha, \beta \in A$. De même que précédemment, ρ_2^ε induit des homomorphismes :

$$\rho_2^\varepsilon : S^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2) \rightarrow S^{-\varepsilon}(A, \sigma) ; \quad \rho_2^\varepsilon : W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2) \rightarrow W^{-\varepsilon}(A, \sigma).$$

On définit $\rho_3^\varepsilon(f) = \rho_1^{-\varepsilon}(\lambda^{-1}f)$, i.e.,

$$\rho_3^\varepsilon(f)(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \sigma(\alpha)f(x, y)\beta,$$

pour tous $x, y \in V$ et tous $\alpha, \beta \in A$. Après une simple vérification, on obtient les homomorphismes :

$$\rho_3^\varepsilon : S^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \rightarrow S^\varepsilon(A, \sigma) ; \quad \rho_3^\varepsilon : W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \rightarrow W^\varepsilon(A, \sigma).$$

Remarque 4.2.5. Dans ces définitions, ε est arbitraire ; ainsi, par exemple, $\pi_1^{-\varepsilon}$ sera un homomorphisme de groupes de Witt de $W^{-\varepsilon}(A, \sigma)$ à $W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1)$.

On pourra trouver un résumé de ces définitions dans la table 4.4.6.

4.3 La preuve du théorème 4.1.1

Dans cette section, on suppose que A vérifie les hypothèses (4.10).

Nous prouvons le résultat énoncé en 4.1.1 :

Théorème *Il existe une suite exacte de $W(K, \sigma|_K)$ -modules :*

$$W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2) \xrightarrow{\rho_2^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1).$$

Preuve. Nous prouvons d'abord que cette suite est un complexe.

Montrons que $\rho_2^\varepsilon \circ \pi_2^{-\varepsilon} = 0$. Si (V, h) une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne sur (A, σ) , alors $\pi_2^{-\varepsilon}(h)$ est une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_2) et $\rho_2^\varepsilon \pi_2^{-\varepsilon}(h)$ est une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne sur (A, σ) . Il suffit de trouver un sous- A -module de $V \otimes_{\tilde{A}} A$ auto-orthogonal par rapport à $\rho_2^\varepsilon \pi_2^{-\varepsilon}(h)$. Si on pose

$$W = \{x \cdot \mu \otimes 1 + x \otimes \mu \mid x \in V\}, \tag{4.11}$$

on voit aisément que W est un sous- A -module à droite de $V_{\tilde{A}} \otimes_{\tilde{A}} A$ et que c'est un sous-module totalement isotrope de $\rho_2^\varepsilon \pi_2^{-\varepsilon}(h)$. Ainsi $W \subset W^\perp$ et, en considérant leurs dimensions sur K , on obtient $W = W^\perp$ (par rapport à $\rho_2^\varepsilon \pi_2^{-\varepsilon}(h)$) ce qui signifie exactement que la forme $\rho_2^\varepsilon \pi_2^{-\varepsilon}(h)$ est métabolique.

Montrons maintenant que $\pi_3^{-\varepsilon} \circ \rho_2^\varepsilon = 0$. Soit (V, h) une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_2) . En posant

$$W' = \{x \otimes 1 \mid x \in V\} \subset V \otimes_{\tilde{A}} A, \quad (4.12)$$

W' est un sous- \tilde{A} -module de $V_A \otimes_{\tilde{A}} A$ totalement isotrope pour $\pi_3^{-\varepsilon} \rho_2^\varepsilon(h)$. En utilisant un argument de dimension, on obtient $W' = W'^\perp$ et donc $\pi_3^{-\varepsilon} \rho_2^\varepsilon(h)$ est métabolique.

Nous prouvons maintenant que la suite est exacte.

Montrons l'inclusion $\ker(\rho_2^\varepsilon) \subset \text{im}(\pi_2^{-\varepsilon})$. Soit (W, f) une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_2) telle que $\rho_2^\varepsilon(f)$ soit métabolique. Grâce à la remarque 3.1.6(i), nous pouvons supposer que f est anisotrope. Par hypothèse, il existe un sous- A -module W_1 de $W \otimes_{\tilde{A}} A$ tel que $W_1^\perp = W_1$ (par rapport à $\rho_2^\varepsilon(f)$). Soient $W \otimes \mu = \{w \otimes \mu \mid w \in W\}$ et $w_1 \in W_1 \cap (W \otimes \mu)$ ($w_1 = w \otimes \mu$ avec $w_1 \in W_1$ et $w \in W$). Comme $\rho_2^\varepsilon(f)(w_1, w_1) = 0$, $f(w, w) = 0$ et donc $w_1 = w \otimes \mu = 0$ par anisotropie de f . Or

$$\dim_K W_1 = \frac{1}{2} \dim_K W \otimes_{\tilde{A}} A = \dim_K W \otimes \mu,$$

ce qui permet d'écrire la décomposition $W \otimes_{\tilde{A}} A = W_1 \oplus (W \otimes \mu)$ en tant que \tilde{A} -modules à droite. Cela implique que, pour tout $w \in W$, il existe $w' \in W$ tel que $w \otimes 1 + w' \otimes \mu \in W_1$. Comme A est un \tilde{A} -module libre, w' est uniquement déterminé par w et on note $J(w)$ au lieu de w' . Par définition, J vérifie les deux identités

$$J^2(w) = w\mu^{-2}, \quad J(wa) = J(w)\mu a\mu^{-1}$$

pour tout $w \in W$ et pour tout $a \in \tilde{A}$. Puisque $W_1 = W_1^\perp$, l'équation

$$\rho_2^\varepsilon(f)(x \otimes 1 + J(x) \otimes \mu, y \otimes 1 + J(y) \otimes \mu) = 0$$

est vérifiée pour tous $x, y \in W$ et on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} f(x, y) + \mu f(J(x), J(y))\mu = 0 \\ f(x, J(y))\mu + \mu f(J(x), y) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Au moyen de J , on définit une structure de A -module sur W par

$$w \cdot \mu = J(w)\mu^2$$

pour tout $w \in W$ et on note W_J le A -module W muni de cette nouvelle action. Soit h l'application définie par

$$h(x, y) = \mu f(x, J(y))\mu + \mu f(x, y) \quad (4.14)$$

pour tous $x, y \in W_J$. En utilisant la définition de J et (4.13), on en déduit que (W_J, h) est une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne sur (A, σ) . Montrons par exemple que h est sesquilinéaire à gauche par rapport à σ : h est clairement biadditive, et donc il suffit de montrer ce fait pour μ et pour les éléments de \tilde{A} . On a :

$$\begin{aligned}
h(x \cdot \mu, y) &= h(J(x)\mu^2, y) \\
&= \mu f(J(x)\mu^2, J(y))\mu + \mu f(J(x)\mu^2, y) \\
&= \mu^3 f(J(x), J(y))\mu + \mu^3 f(J(x), y) \\
&= -\mu^2 f(x, y) - \mu^2 f(x, J(y))\mu \quad (\text{en utilisant (4.13)}) \\
&= \sigma(\mu)h(x, y).
\end{aligned}$$

La sesquilinearité à gauche pour les éléments de \tilde{A} et la linéarité à droite se prouvent de la même manière. Prouvons maintenant que h est $(-\varepsilon)$ -hermitienne par rapport à σ :

$$\begin{aligned}
h(y, x) &= \mu f(y, J(x))\mu + \mu f(y, x) \\
&= \varepsilon\sigma(f(J(x), y))\mu^2 + \varepsilon\sigma(f(x, y))\mu \\
&= -\varepsilon\sigma(\mu^{-1}f(x, J(y))\mu)\mu^2 - \varepsilon\sigma(\mu f(x, y)) \quad (\text{en utilisant (4.13)}) \\
&= -\varepsilon\sigma(h(x, y)).
\end{aligned}$$

Si h est dégénérée, par (4.14), il existe un $x \in W$ non nul tel que $f(x, y) = 0$ pour tout $y \in W$. En particulier, f est isotrope et on obtient une contradiction. (W_J, h) est l'antécédent de (W, f) par $\pi_2^{-\varepsilon}$, i.e. $((W_J)_{\tilde{A}}, \pi_2^{-\varepsilon}(h))$ est isométrique à (W, f) (l'isométrie étant donnée par l'application identité). Finalement, on en déduit que $\ker(\rho_2^\varepsilon) \subset \text{im}(\pi_2^{-\varepsilon})$ puis l'exactitude en $W^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2)$.

Montrons que $\ker(\pi_3^{-\varepsilon}) \subset \text{im}(\rho_2^\varepsilon)$. Soit (V, h) une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne sur (A, σ) telle que $\pi_3^{-\varepsilon}(h)$ soit métabolique. En utilisant la remarque 3.1.6(i), on peut supposer que h est anisotrope. Il existe un sous- \tilde{A} -module W de $V_{\tilde{A}}$ tel que $W^\perp = W$ (par rapport à $\pi_3^{-\varepsilon}(h)$). En particulier, $h(x, y) \in \mu\tilde{A}$, pour tous $x, y \in W$. On pose

$$j : \begin{cases} W \times W & \rightarrow \tilde{A} \\ (x, y) & \mapsto \mu^{-1}\lambda^{-1}h(x, y) \end{cases} \quad (4.15)$$

Comme h est anisotrope, j est une application non dégénérée, et on peut vérifier facilement que (W, j) est une forme ε -hermitienne sur (\tilde{A}, σ_2) . En définissant

$$\Phi : \begin{cases} W \otimes_{\tilde{A}} A & \rightarrow V \\ x \otimes a & \mapsto xa \end{cases}, \quad (4.16)$$

on vérifie aisément que Φ est un morphisme de A -modules à droite et nous allons montrer que c'est un isomorphisme. L'équation

$$\rho_2^\varepsilon(j)(x \otimes a, y \otimes b) = h(\Phi(x \otimes a), \Phi(y \otimes b)) \quad (4.17)$$

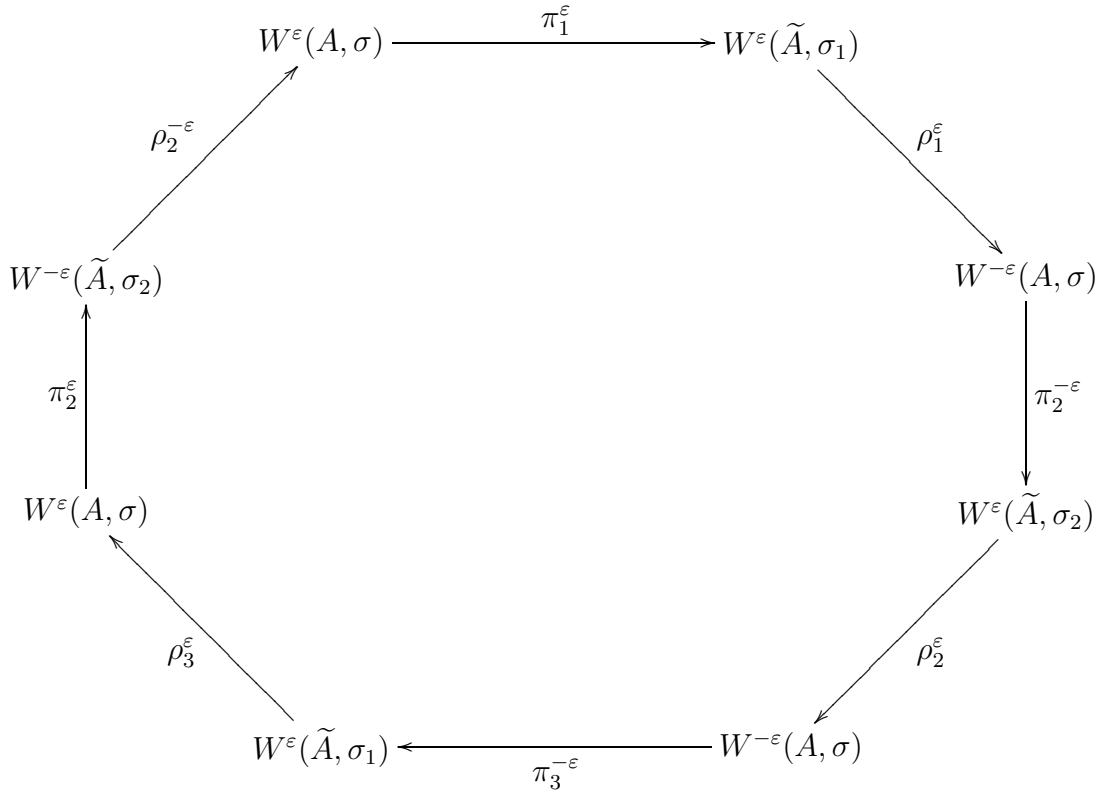
est vraie pour tous $x, y \in W, a, b \in A$. Ainsi, si $X \in \ker(\Phi)$, on peut prouver la relation

$$\rho_2^\varepsilon(j)(X, Y) = h(\Phi(X), \Phi(Y))$$

pour tout $Y \in W \otimes_{\tilde{A}} A$. Puisque j est non dégénérée, cela conduit au fait que Φ est injective. Φ est également surjective, par un argument de dimension et, au vu de la relation (4.17), Φ fournit une isométrie entre les formes $(W \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_2^\varepsilon(j))$ et (V, h) . Finalement, $\ker \pi_3^{-\varepsilon} \subset \text{im } \rho_2^\varepsilon$ ce qui termine la preuve. \square

On en déduit :

Corollaire 4.3.1. *Avec les mêmes hypothèses que dans la section 4.2, il y a un octogone exact de $W(K, \sigma|_K)$ -modules :*



Preuve. Par définition de chaque application, l'exactitude en un point de l'octogone est équivalente à l'exactitude au point opposé de l'octogone. Le résultat découle ainsi de la suite exacte de Parimala, Sridharan et Suresh (4.5) et du théorème 4.1.1. \square

Remarque 4.3.2. Dans [42], Lewis a construit un octogone exact similaire mettant en jeu des groupes de Witt d'algèbres de Clifford de formes quadratiques munies de leurs involutions canoniques.

Remarque 4.3.3. David Lewis nous a fait remarquer que, dans 4.3.1, il est possible de remplacer le groupe de Witt en bas à gauche de l'octogone par $W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1)$ puisque la multiplication par λ induit un isomorphisme $W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1) \simeq W^{\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1)$. Ainsi, nous obtenons un octogone présentant une "asymétrie antipodale". Dans ce cas, l'exactitude de 4.3.1 est équivalente à l'exactitude du carré suivant obtenu en ajoutant les groupes de Witt opposés dans 4.3.1 :

$$\begin{array}{ccc} W^{\varepsilon}(A, \sigma) \oplus W^{-\varepsilon}(A, \sigma) & \longrightarrow & W^{\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1) \oplus W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1) \\ \uparrow & & \downarrow \\ W^{\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_2) \oplus W^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_2) & \longleftarrow & W^{-\varepsilon}(A, \sigma) \oplus W^{\varepsilon}(A, \sigma) \end{array} \quad (4.18)$$

Remarque 4.3.4. Si A est une algèbre de quaternions déployée sur K et si σ est symplectique, alors l'octogone exact de 4.3.1 devient :

$$0 \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W(K) \longrightarrow W(L) \longrightarrow W(K) \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow 0$$

où L/K est une extension quadratique munie de son automorphisme non trivial $- = \sigma|_L$.

Si $A = D$ est une algèbre de quaternions à division et si $-$ est son involution canonique alors 4.3.1 devient :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow W(D, -) \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W^{-1}(D, -) \longrightarrow W(L) \longrightarrow W^{-1}(D, -) \longrightarrow \\ \longrightarrow W(L, -) \longrightarrow W(D, -) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où L est un sous-corps maximal de D stable par $-$. Ces deux suites sont déjà des cas particuliers d'octogones exacts trouvés par Lewis dans [40] et [42] et se trouvent dans [37].

4.4 Comportement des applications pour les algèbres à division

Dans cette section, (D, τ) désigne une K -algèbre à division munie d'une K/F -involution τ d'espèce quelconque. On suppose que (D, τ) satisfait les hypothèses mentionnées en (4.10) pour (A, σ) . Dans ce cas, on peut déterminer explicitement l'image de chaque application :

Proposition 4.4.1. (i) Si $h = \langle \delta \rangle$ est une forme ε -hermitienne de dimension 1 sur (D, τ) (avec $\delta = d_1 + \mu d_2$, $d_1, d_2 \in \tilde{D}$) alors la matrice de $\pi_1^{\varepsilon}(h)$ sur (\tilde{D}, τ_1) par rapport à la base $\{1, \mu\}$ est

$$\begin{pmatrix} d_1 & \mu d_2 \mu \\ -\mu^2 d_2 & -\mu d_1 \mu \end{pmatrix}.$$

(ii) Si P est la matrice d'une forme ε -hermitienne f sur (\tilde{D}, τ_1) par rapport à une base B , alors λP est la matrice de $\rho_1^{\varepsilon}(f)$ sur (D, τ) par rapport à la base $B \otimes 1$.

(iii) Si $h = \langle \delta \rangle$ est une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne de dimension 1 sur (D, τ) (avec $\delta = d_1 + \mu d_2$, $d_1, d_2 \in \tilde{D}$) alors la matrice de $\pi_2^{-\varepsilon}(h)$ sur (\tilde{D}, τ_2) par rapport à la base $\{1, \mu\}$ est

$$\begin{pmatrix} d_2 & \mu^{-1}d_1\mu \\ -d_1 & -\mu d_2\mu \end{pmatrix}.$$

(iv) Si P est la matrice d'une forme ε -hermitienne f sur (\tilde{D}, τ_2) par rapport à une base B , alors $\lambda\mu P$ est la matrice de $\rho_2^\varepsilon(f)$ sur (D, τ) par rapport à la base $B \otimes 1$.

(v) Pour une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne h sur (D, τ) , la matrice de $\pi_3^{-\varepsilon}(h)$ par rapport à une base B est λ fois la matrice de $\pi_1^\varepsilon(h)$ par rapport à la base $B \cup \mu B$.

(vi) Si P est la matrice d'une forme ε -hermitienne f sur (\tilde{D}, τ_1) par rapport à une base B , alors P est la matrice de $\rho_3^\varepsilon(f)$ sur (D, τ) par rapport à la base $B \otimes 1$.

Preuve. Tous ces calculs se font sans difficulté. Ces résultats sont presque tous mentionnés dans [7, §3]. \square

On peut trouver un résumé de la proposition précédente dans la table 4.4.7.

Lemme 4.4.2. Si \tilde{D} est commutative alors D est une algèbre de quaternions $D = (a, b)_K$, $\tilde{D} = L = K(\lambda)$ avec $\lambda^2 = a \in K$ et $\mu^2 = b \in K$.

Preuve. \tilde{D} est par définition le commutateur de L dans D , donc c'est une algèbre simple centrale de centre L . Comme \tilde{D} est commutative, on a $\tilde{D} = L$ et les autres propriétés du lemme découlent de ce fait. \square

Lemme 4.4.3. Si E est une K -algèbre simple centrale non commutative et si \star est une K/F -involution sur E , alors pour $\varepsilon = \pm 1$, l'ensemble des éléments non nuls et ε -hermitiens par rapport à \star est non vide.

Preuve. C'est une conséquence de [71, Chapter 8, Theorem 7.5]. \square

Le théorème suivant détermine entièrement le comportement des applications $\pi_1, \rho_1, \pi_2, \rho_2, \pi_3$ et ρ_3 par rapport à l'isotropie.

Théorème 4.4.4. (i) Soit $h \in S^\varepsilon(D, \tau)$. Si \tilde{D} est commutative et $\varepsilon = 1$, alors $\pi_1^\varepsilon(h) \in S^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_1)$ est isotrope si et seulement si h est isotrope. Sinon, $\pi_1^\varepsilon(h)$ est isotrope si et seulement si il existe $c \in \tilde{D}^*$ avec $\tau_2(c) = -\varepsilon c$ tel que h contienne une sous-forme isométrique à $\langle \mu c \rangle$.

(ii) Soit $f \in S^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_1)$. Si \tilde{D} est commutative, $\varepsilon = 1$ et $\dim(f) = 2$, alors $\rho_1^\varepsilon(f) \in S^{-\varepsilon}(D, \tau)$ est isotrope si et seulement si f est isotrope ou si f est isométrique à une forme binaire anisotrope $\langle c, -bc \rangle$ avec $c \in K^*$ et $b = \mu^2$ (voir 4.4.2). Sinon, $\rho_1^\varepsilon(f)$ est isotrope si et

seulement si il existe $d_1, d_2 \in \tilde{D}$ tels que $\tau_1(d_1) = \varepsilon d_1$, $\tau_2(d_2) = -\varepsilon d_2$ et $f = f_1 \perp f_2$ pour une forme non dégénérée

$$f_1 \simeq \begin{pmatrix} d_1 & \mu d_2 \mu \\ -\mu^2 d_2 & -\mu d_1 \mu \end{pmatrix}.$$

(iii) Si $h \in S^{-\varepsilon}(D, \tau)$, $\pi_2^{-\varepsilon}(h) \in S^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_2)$ est isotrope si et seulement si il existe $c \in \tilde{D}^*$ avec $\tau_1(c) = -\varepsilon c$ tel que h contienne une sous-forme isométrique à $\langle c \rangle$.

(iv) Si $f \in S^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_2)$, $\rho_2^\varepsilon(f) \in S^{-\varepsilon}(D, \tau)$ est isotrope si et seulement si il existe $d_1, d_2 \in \tilde{D}$ tels que $\tau_1(d_1) = -\varepsilon d_1$, $\tau_2(d_2) = \varepsilon d_2$ et $f = f_1 \perp f_2$ pour une forme non dégénérée

$$f_1 \simeq \begin{pmatrix} d_2 & \mu^{-1} d_1 \mu \\ -d_1 & -\mu d_2 \mu \end{pmatrix}.$$

(v) Soit $h \in S^{-\varepsilon}(D, \tau)$. Si \tilde{D} est commutative et $\varepsilon = -1$, alors $\pi_3^{-\varepsilon}(h) \in S^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_1)$ est isotrope si et seulement si h est isotrope. Sinon, $\pi_3^{-\varepsilon}(h)$ est isotrope si et seulement si il existe $c \in \tilde{D}^*$ avec $\tau_2(c) = \varepsilon c$ tel que h contienne une sous-forme isométrique à $\langle \mu c \rangle$.

(vi) Soit $f \in S^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_1)$. Si \tilde{D} est commutative, $\varepsilon = -1$ et $\dim(f) = 2$, alors $\rho_3^\varepsilon(f) \in S^\varepsilon(D, \tau)$ est isotrope si et seulement si f est isotrope ou si f est isométrique à une forme binaire anisotrope $\langle \lambda c, -\lambda b c \rangle$ avec $c \in K^*$ et $b = \mu^2$ (voir 4.4.2). Sinon, $\rho_3^\varepsilon(f)$ est isotrope si et seulement si il existe $d_1, d_2 \in \tilde{D}$ tels que $\tau_1(d_1) = -\varepsilon d_1$, $\tau_2(d_2) = \varepsilon d_2$ et $f = f_1 \perp f_2$ pour une forme non dégénérée

$$f_1 \simeq \begin{pmatrix} \lambda d_1 & \lambda \mu d_2 \mu \\ -\lambda \mu^2 d_2 & -\lambda \mu d_1 \mu \end{pmatrix}.$$

Preuve. Dans toute la preuve, \mathbb{H}_ε désignera un plan ε -hyperbolique.

(i) Supposons tout d'abord que \tilde{D} soit commutative et que $\varepsilon = 1$. D'après le lemme 4.4.2, nous savons que D est une algèbre de quaternions à division. L'équivalence annoncée provient alors du fait que, dans ce cas, la forme trace de h est isotrope si et seulement si h est isotrope (voir [71, Chapter 10, §1] pour une définition de la forme trace dans ce cas là).

Supposons maintenant que le cas précédent soit exclu. Si h est anisotrope et $\pi_1^\varepsilon(h)$ est isotrope alors on peut trouver un $x \in V - \{0\}$ tel que $\pi_1^\varepsilon(h(x, x)) = 0$, i.e., $h(x, x) = \mu c$ avec $c \in \tilde{D}^*$. Comme $\tau(h(x, x)) = \varepsilon h(x, x)$, on en déduit l'identité $\tau_2(c) = -\varepsilon c$. Il en résulte facilement que h contient $\langle \mu c \rangle$. Supposons maintenant que h soit isotrope. On a $\mathbb{H}_\varepsilon \simeq \langle \mu c, -\mu c \rangle$ pour tout $c \in \tilde{D}^*$ avec $\tau_2(c) = -\varepsilon c$, à supposer qu'un tel c existe. Si $\varepsilon = -1$ il suffit de prendre $c = 1$. Si $\varepsilon = 1$ il nous suffit de montrer qu'il existe $c \in \tilde{D}$ tel que $\tau_2(c) = -c$. Par hypothèse, \tilde{D} est non commutative, et on peut ainsi appliquer le lemme 4.4.3 pour conclure.

Réciproquement, supposons que h contienne une sous-forme isométrique à $\langle \mu c \rangle$ comme dans l'assertion. En appliquant la proposition 4.4.1(i) à la forme $\langle \mu c \rangle$, il en résulte aisément

que $\pi_1^\varepsilon(h)$ est isotrope.

(ii) Supposons tout d'abord que \tilde{D} soit commutative, que $\varepsilon = 1$ et que $\dim(f) = 2$. On est dans la situation du lemme 4.4.2. Si f est isotrope ou $f \simeq \langle c, -bc \rangle$, il est évident que $\rho_1^\varepsilon(f)$ soit isotrope. Réciproquement, supposons qu'il existe une forme binaire $f = \langle c, d \rangle$ telle que $\rho_1^\varepsilon(f) = \langle \lambda c, \lambda d \rangle$ soit isotrope. Il existe alors $q \in D^*$ tel que

$$\tau(q)\lambda cq + \lambda d = 0. \quad (4.19)$$

Ecrivons $q = z_1 + \mu z_2$ avec $z_1, z_2 \in \tilde{D}$. En remplaçant q par $z_1 + \mu z_2$ dans (4.19), en utilisant le fait que $\{1, \mu\}$ soit une L -base de D et en remarquant que $\tau_2 = \text{id}_L$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \tau_1(z_1)cz_1 + \tau_1(z_2)bcz_2 + d = 0 \\ z_1z_2 = 0 \end{cases}.$$

Si $z_2 = 0$, alors $\tau_1(z_1)cz_1 + d = 0$ et donc f est isotrope. Si $z_1 = 0$ alors $d = -\tau_1(z_2)bcz_2$, et $f \simeq \langle c, -\tau_1(z_2)bcz_2 \rangle \simeq \langle c, -bc \rangle$.

Supposons maintenant que le cas précédent soit exclu. Si f est anisotrope et $\rho_1^\varepsilon(f)$ est isotrope, soit $z = x_1 \otimes 1 + y_1 \otimes \mu$ un vecteur isotrope non nul de $\rho_1^\varepsilon(f)$. Par définition de ρ_1^ε , on obtient

$$(\lambda f(x_1, x_1) - \mu \lambda f(y_1, y_1)\mu) + (\lambda f(x_1, y_1)\mu - \mu \lambda f(y_1, x_1)) = 0 \quad (4.20)$$

puis le système suivant :

$$\begin{cases} f(x_1, x_1) + \mu f(y_1, y_1)\mu = 0 \\ \mu f(y_1, x_1) + f(x_1, y_1)\mu = 0 \end{cases}. \quad (4.21)$$

Grâce à ce système, nous pouvons supposer que x_1 et y_1 sont tous deux non nuls puisque f est anisotrope. De plus, x_1 et y_1 sont linéairement indépendants sur \tilde{D} . Si au contraire, x_1 et y_1 sont linéairement dépendants sur \tilde{D} , on a $x_1 = y_1d$ pour un certain $d \in \tilde{D}^*$ et en remplaçant x_1 par y_1d dans (4.21), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \tau(d)f(y_1, y_1)d + \mu f(y_1, y_1)\mu = 0 \\ \mu f(y_1, y_1)d + \tau(d)f(y_1, y_1)\mu = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

D'après la seconde équation de (4.22), on a $\tau(d)f(y_1, y_1) = -\mu f(y_1, y_1)d\mu^{-1}$. En substituant $-\mu f(y_1, y_1)d\mu^{-1}$ à $\tau(d)f(y_1, y_1)$ dans la première équation de (4.22), on obtient l'équation

$$\mu f(y_1, y_1)(-d\mu^{-1}d + \mu) = 0.$$

Le second facteur étant non nul pour tout $d \in \tilde{D}$, $f(y_1, y_1) = 0$ ce qui contredit l'anisotropie de f . Maintenant, y_1 et x_1 engendrent un sous-espace W de dimension 2 sur \tilde{D} et si on note $d_1 = f(y_1, y_1)$, $d_2 = \mu^{-1}f(y_1, x_1)\mu^{-1}$, la matrice M de $f|_W$ par rapport à la base $\{y_1, x_1\}$ est

exactement celle donnée dans la proposition. Comme $f_1 = f|_W$ est non dégénérée (puisque f est anisotrope), on peut écrire $f = f_1 \perp f_2$ et f contient la forme annoncée. Considérons maintenant le cas où f est isotrope. Si \tilde{D} est non commutative, on prend $d_1 = 0$, on peut trouver $d_2 \in \tilde{D}$ tel que $\tau_2(d_2) = -\varepsilon d_2$ et il est clair que

$$\mathbb{H}_\varepsilon \simeq \begin{pmatrix} 0 & \mu d_2 \mu \\ -\mu^2 d_2 & 0 \end{pmatrix},$$

donc f contient la forme annoncée. Si \tilde{D} est commutative et $\varepsilon = -1$, on prend $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$ ce qui implique que \mathbb{H}_{-1} est isométrique à la matrice donnée dans la proposition. Si \tilde{D} est commutative, $\varepsilon = 1$ et $\dim(f) \geq 3$ alors $f \simeq \mathbb{H}_1 \perp f_1$ avec $\dim(f_1) \geq 1$. Si $f_1 \simeq \langle a, \dots \rangle$ alors $f \simeq \langle \mu a \mu, -\mu a \mu, a, \dots \rangle$ et, pour $d_1 = a$, $d_2 = 0$, f contient la forme annoncée.

Réciproquement, avec les mêmes notations que dans (ii), la proposition 4.4.1(ii) et un calcul simple montrent que $(\mu, 1)$ est un vecteur isotrope pour $\rho_1^\varepsilon(f_1)$.

(iii) Si h est anisotrope et si $\pi_2^{-\varepsilon}(h)$ est isotrope alors il existe $x \in V - \{0\}$ tel que $\pi_2^{-\varepsilon}(h(x, x)) = 0$ ou, autrement dit, $h(x, x) = c \in \tilde{D}^*$. On conclut alors comme en (i). Si h est isotrope et $\varepsilon = 1$ alors $h \simeq \langle \lambda, -\lambda \rangle \perp h_1$ et il suffit de prendre $c = \lambda$. Si h est isotrope et $\varepsilon = -1$, $h \simeq \mathbb{H}_1 \perp h_1$ et il suffit de trouver $c \in \tilde{D}^*$ tel que $\tau_1(c) = c$; on choisit $c = 1$.

La réciproque est une conséquence facile de la proposition 4.4.1(iii).

(iv) Si f est anisotrope et si $\rho_2^\varepsilon(f)$ est isotrope, soit $z = x_1 \otimes 1 + y_1 \otimes \mu$ un vecteur isotrope non nul pour $\rho_2^\varepsilon(f)$. Tous calculs faits, nous trouvons le même système que lors de la preuve de (ii). En procédant de la même manière, on peut supposer que x_1 et y_1 sont tous deux non nuls et engendrent un sous-espace W de dimension 2 sur \tilde{D} . Si $d_1 = -f(x_1, y_1)$ et $d_2 = f(y_1, y_1)$ alors la matrice de $f|_W$ par rapport à la base $\{y_1, x_1\}$ est exactement celle donnée dans la proposition. Supposons maintenant que f soit isotrope. Si $\varepsilon = 1$, on prend $d_2 = 0$ et $d_1 = \lambda$. Si $\varepsilon = -1$, on prend $d_2 = 0$ et $d_1 = 1$.

Réciproquement, $(\mu, 1)$ est un vecteur isotrope pour $\rho_2^\varepsilon(f_1)$.

(v) Si \tilde{D} est commutative et $\varepsilon = -1$ alors l'équivalence entre le fait que $\pi_3^{-\varepsilon}(h)$ est isotrope et la fait que h est isotrope provient de (i). Supposons maintenant que le cas précédent soit exclu. Si h est anisotrope et si $\pi_3^{-\varepsilon}(h)$ est isotrope, on conclut comme en (i) et (iii). Si h est isotrope alors $h \simeq \langle \mu c, -\mu c \rangle \perp h_1$ pour tout $c \in \tilde{D}^*$ vérifiant $\tau_2(c) = \varepsilon c$ et il nous suffit de trouver un tel c . Si \tilde{D} est non commutative, c'est clair. Si \tilde{D} est commutative alors $\tau_2 = \text{id}_L$. Puisque $\varepsilon = 1$ on peut prendre $c = 1$.

Réciproquement, on applique la proposition 4.4.1 (v).

(vi) Supposons d'abord que \tilde{D} soit commutative, $\varepsilon = -1$ et $\dim(f) = 2$: on est dans la situation du lemme 4.4.2. La preuve se déroule comme en (ii).

Supposons maintenant que le cas précédent soit exclu. Si f est anisotrope et si $\rho_3^\varepsilon(f)$ est isotrope, soit $z = x_1 \otimes 1 + y_1 \otimes \mu$ un vecteur isotrope non nul pour $\rho_3^\varepsilon(f)$. On obtient

le système suivant :

$$\begin{cases} f(x_1, x_1) - \mu f(y_1, y_1)\mu = 0 \\ f(x_1, y_1)\mu - \mu f(y_1, x_1) = 0 \end{cases} .$$

Soient $d_1 = \lambda^{-1}f(y_1, y_1)$ et $d_2 = \mu^{-1}\lambda^{-1}f(y_1, x_1)\mu^{-1}$. Soit W le sous- \tilde{D} -espace de dimension 2 engendré par x_1 et y_1 (la preuve du fait que x_1 et y_1 soient linéairement indépendant sur \tilde{D} est similaire à (ii)). La matrice de $f|_W$ par rapport à la base $\{y_1, x_1\}$ est exactement celle donnée dans la proposition (la forme $f|_W$ est non dégénérée par anisotropie de f). Considérons maintenant le cas où f est isotrope. Si \tilde{D} est non commutative, on prend $d_1 = 0$ et $d_2 \in \tilde{D}$ vérifiant $\tau_2(d_2) = \varepsilon d_2$. Si \tilde{D} est commutative et $\varepsilon = 1$, $f \simeq \mathbb{H}_1 \perp f_1$ et on prend $d_2 = 1$ et $d_1 = 0$. Si \tilde{D} est commutative, $\varepsilon = -1$ et $\dim(f) \geq 3$, on conclut comme en (ii).

Réciproquement, $(\mu, 1)$ est un vecteur isotrope pour $\rho_3^\varepsilon(f_1)$. \square

Si f et h sont anisotropes, on déduit du théorème 4.4.4 la table 4.4.8. En combinant les résultats 4.4.1 et 4.4.4, on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 4.4.5. *Les suites (4.5) et (4.7) sont exactes si A est une algèbre à division.*

Table 4.4.6.

Application	Définition
$S^\varepsilon(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_1^\varepsilon} S^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \quad (V_A, h) \mapsto (V_{\tilde{A}}, \pi_1^\varepsilon(h))$	$\pi_1^\varepsilon(h)(x, y) = \pi_1(h(x, y))$
$S^\varepsilon(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^\varepsilon} S^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_2) \quad (V_A, h) \mapsto (V_{\tilde{A}}, \pi_2^\varepsilon(h))$	$\pi_2^\varepsilon(h)(x, y) = \pi_2(h(x, y))$
$S^\varepsilon(A, \sigma) \xrightarrow{\pi_3^\varepsilon} S^{-\varepsilon}(\tilde{A}, \sigma_1) \quad (V_A, h) \mapsto (V_{\tilde{A}}, \pi_3^\varepsilon(h))$	$\pi_3^\varepsilon(h)(x, y) = \lambda \pi_1^\varepsilon(h(x, y))$
$S^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \xrightarrow{\rho_1^\varepsilon} S^{-\varepsilon}(A, \sigma) \quad (W, f) \mapsto (W \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_1^\varepsilon(f))$	$\rho_1^\varepsilon(f)(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \sigma(\alpha) \lambda f(x, y) \beta$
$S^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_2) \xrightarrow{\rho_2^\varepsilon} S^{-\varepsilon}(A, \sigma) \quad (W, f) \mapsto (W \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_2^\varepsilon(f))$	$\rho_2^\varepsilon(f)(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \sigma(\alpha) \lambda \mu f(x, y) \beta$
$S^\varepsilon(\tilde{A}, \sigma_1) \xrightarrow{\rho_3^\varepsilon} S^\varepsilon(A, \sigma) \quad (W, f) \mapsto (W \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_3^\varepsilon(f))$	$\rho_3^\varepsilon(f)(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \sigma(\alpha) f(x, y) \beta$

Table 4.4.7.

Application	Forme	Conditions	Image
π_1^ε	$\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle ; \delta_i = d_{2i-1} + \mu d_{2i},$ $d_{2i-1}, d_{2i} \in \tilde{D}$	$\tau_1(d_{2i-1}) = \varepsilon d_{2i-1}$ $\tau_2(d_{2i}) = -\varepsilon d_{2i}$	$\bigoplus_{i=1}^n \begin{pmatrix} d_{2i-1} & \mu d_{2i} \mu \\ -\mu^2 d_{2i} & -\mu d_{2i-1} \mu \end{pmatrix}$
ρ_1^ε	$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle ;$ $\gamma_i \in \tilde{D}$	$\tau_1(\gamma_i) = \varepsilon \gamma_i$	$\langle \lambda \gamma_1, \dots, \lambda \gamma_n \rangle$
$\pi_2^{-\varepsilon}$	$\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle ; \delta_i = d_{2i-1} + \mu d_{2i},$ $d_{2i-1}, d_{2i} \in \tilde{D}$	$\tau_1(d_{2i-1}) = -\varepsilon d_{2i-1}$ $\tau_2(d_{2i}) = \varepsilon d_{2i}$	$\bigoplus_{i=1}^n \begin{pmatrix} d_{2i} & \mu^{-1} d_{2i-1} \mu \\ -d_{2i-1} & -\mu d_{2i} \mu \end{pmatrix}$
ρ_2^ε	$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle ;$ $\gamma_i \in \tilde{D}$	$\tau_2(\gamma_i) = \varepsilon \gamma_i$	$\langle \lambda \mu \gamma_1, \dots, \lambda \mu \gamma_n \rangle$
$\pi_3^{-\varepsilon}$	$\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle ; \delta_i = d_{2i-1} + \mu d_{2i},$ $d_{2i-1}, d_{2i} \in \tilde{D}$	$\tau_1(d_{2i-1}) = -\varepsilon d_{2i-1}$ $\tau_2(d_{2i}) = \varepsilon d_{2i}$	$\bigoplus_{i=1}^n \begin{pmatrix} \lambda d_{2i-1} & \lambda \mu d_{2i} \mu \\ -\lambda \mu^2 d_{2i} & -\lambda \mu d_{2i-1} \mu \end{pmatrix}$
ρ_3^ε	$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle ;$ $\gamma_i \in \tilde{D}$	$\tau_1(\gamma_i) = \varepsilon \gamma_i$	$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$

Table 4.4.8.

<i>Comportement vis à vis de l'hyperbolicité</i>	<i>Conditions</i>
$\pi_1^\varepsilon(h)$ est hyperbolique $\Rightarrow h \simeq \langle \mu\gamma_1, \dots, \mu\gamma_n \rangle$	$\tau_2(\gamma_i) = -\varepsilon\gamma_i$
$\rho_1^\varepsilon(f)$ est hyperbolique $\Rightarrow f \simeq \bigoplus_{i=1}^n \begin{pmatrix} d_{2i-1} & \mu d_{2i}\mu \\ -\mu^2 d_{2i} & -\mu d_{2i-1}\mu \end{pmatrix}$	$\tau_1(d_{2i-1}) = \varepsilon d_{2i-1}$ $\tau_2(d_{2i}) = -\varepsilon d_{2i}$
$\pi_2^{-\varepsilon}(h)$ est hyperbolique $\Rightarrow h \simeq \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$	$\tau_1(\gamma_i) = -\varepsilon\gamma_i$
$\rho_2^\varepsilon(f)$ est hyperbolique $\Rightarrow f \simeq \bigoplus_{i=1}^n \begin{pmatrix} d_{2i} & \mu^{-1} d_{2i-1}\mu \\ -d_{2i-1} & -\mu d_{2i}\mu \end{pmatrix}$	$\tau_1(d_{2i-1}) = -\varepsilon d_{2i-1}$ $\tau_2(d_{2i}) = \varepsilon d_{2i}$
$\pi_3^{-\varepsilon}(h)$ est hyperbolique $\Rightarrow h \simeq \langle \mu\gamma_1, \dots, \mu\gamma_n \rangle$	$\tau_2(\gamma_i) = \varepsilon\gamma_i$
$\rho_3^\varepsilon(f)$ est hyperbolique $\Rightarrow f \simeq \bigoplus_{i=1}^n \begin{pmatrix} \lambda d_{2i-1} & \lambda \mu d_{2i}\mu \\ -\lambda \mu^2 d_{2i} & -\lambda \mu d_{2i-1}\mu \end{pmatrix}$	$\tau_1(d_{2i-1}) = -\varepsilon d_{2i-1}$ $\tau_2(d_{2i}) = \varepsilon d_{2i}$

4.5 Suites exactes de groupes de Witt équivariants

Soient A une K -algèbre simple centrale à K/F -involutions σ , ε un élément de K satisfaisant $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$ et G un groupe fini. Le but de cette section est de prouver le théorème 4.1.2. Avant d'en commencer la preuve, nous définissons une notion d'isotropie pour les G -formes ε -hermitiennes sur (A, σ) .

4.5.1 Isotropie des G -formes ε -hermitiennes

On a vu précédemment que toute forme ε -hermitienne sur (A, σ) est Witt-équivalente à une forme anisotrope et que celle-ci est unique à isométrie près (voir la remarque 3.1.6(i)). Ce fait est primordial dans la preuve du théorème 4.3.1.

Dans cette sous-section, nous définissons une notion d'isotropie pour les G -formes ε -hermitiennes avant de vérifier que la remarque 3.1.6(i) est vraie dans ce nouveau cadre. Pour la définition 4.5.1 et la proposition 4.5.4, nous nous inspirons de travaux effectués par Cibils dans [15, §1] pour les formes ε -symétriques invariantes.

Définition 4.5.1. Une G -forme ε -hermitienne (M, h) sur (A, σ) est dite *isotrope* si il existe un sous- $A[G]$ -module N de M tel que $N \cap N^\perp \neq 0$. Sinon la forme est dite anisotrope. En d'autres termes, une G -forme est anisotrope si et seulement si tous ses sous-modules sont non dégénérés.

Remarques 4.5.2. (1) Cette notion d'isotropie est usuelle : elle est par exemple utilisée en [19, Chapitre I, §7].

(2) Il n'est pas difficile de prouver que, dans le cas d'une forme ε -hermitienne sur (A, σ) , les notions d'isotropie définies en 3.1.1 et en 4.5.1 coïncident : si N est comme en 4.5.1, tout élément de $N \cap N^\perp$ fournit un vecteur isotrope au sens de 3.1.1 ; réciproquement, si $h(x, x) = 0$, il suffit de prendre pour N le sous- A -module engendré par x .

(3) Pour les G -formes, la notion d'isotropie définie en 4.5.1 est en général strictement plus forte que la notion d'isotropie définie en 3.1.1 comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple 4.5.3. Nous définissons une G -forme quadratique isotrope au sens de 3.1.1 et anisotrope au sens de 4.5.1. Soit

$$q : \begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto x^2 + y^2 \end{cases}$$

et soit $G = \{1, \theta\}$ où θ est la réflexion dans l'hyperplan orthogonal à $(1, 0)$. Alors q est une G -forme quadratique non dégénérée et elle est isotrope au sens de 3.1.1 (prendre le vecteur $(1, i)$, $i^2 = -1$ par exemple). Si cette forme est isotrope au sens de 4.5.1, soit N un sous- $\mathbb{C}[G]$ -espace vectoriel de \mathbb{C}^2 pour lequel on a $N \cap N^\perp \neq 0$. On a alors forcément $\dim_{\mathbb{C}}(N \cap N^\perp) = 1$ (car q est non dégénérée) et il existe $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $N \cap N^\perp = \text{Vect}((u, v))$. Mais alors $(-u, v) \in N \cap N^\perp$ puis $u = v = 0$ ce qui implique que q est anisotrope au sens de 4.5.1.

On peut maintenant prouver la proposition suivante qui généralise la remarque 3.1.6(i)

:

Proposition 4.5.4. *Si $[M, h] \in W^\varepsilon(G, A, \sigma)$, avec (M, h) non métabolique, il existe une G -forme ε -hermitienne anisotrope (M', h') sur (A, σ) telle que $[M, h] = [M', h']$. De plus, cette forme est unique à isométrie près.*

Preuve. Cette preuve s'inspire de [15, §1, Proposition 2].

Pour prouver la première affirmation, nous montrons que sa négation est fautive ; supposons qu'il existe $[M, h] \in W^\varepsilon(G, A, \sigma)$ non métabolique dont tous les représentants soient isotropes. Parmi ceux-ci, on choisit (P, f) un représentant de rang minimal. En particulier, il existe un sous- $A[G]$ -module N de P tel que $L = N \cap N^\perp \neq 0$.

Soit $g = f|_{L^\perp \times L^\perp}$ et considérons son application adjointe $\widehat{g} : L^\perp \rightarrow (L^\perp)^*$. Nous allons montrer que $\ker(\widehat{g}) = L$. Il est clair que $L \subset L^\perp$ et que l'on a $\ker(\widehat{g}) = L^\perp \cap (L^\perp)^\perp$. Soit U un sous- $A[G]$ -module de P . L'application adjointe $\widehat{f} : P \rightarrow P^*$ est un isomorphisme et la projection canonique $P^* \rightarrow U^*$ donnée par la restriction à U est surjective (car U est facteur direct de P , A étant une algèbre simple). Puisque le noyau de la composée $P \rightarrow P^* \rightarrow U^*$ est U^\perp , on en déduit que $P/U^\perp \simeq U^*$. Comme $\text{rang}_A(U) = \text{rang}_A(U^*)$ et que $\text{rang}_A(P/U^\perp)$ est fini et vaut $\text{rang}_A(P) - \text{rang}_A(U^\perp)$, on a

$$\text{rang}_A(P) = \text{rang}_A(U) + \text{rang}_A(U^\perp). \quad (4.23)$$

En utilisant (4.23) avec $U = L$ puis avec $U = L^\perp$, on obtient les deux égalités

$$\text{rang}_A(P) = \text{rang}_A(L) + \text{rang}_A(L^\perp), \quad \text{rang}_A(P) = \text{rang}_A(L^\perp) + \text{rang}_A((L^\perp)^\perp).$$

En les soustrayant, on obtient $\text{rang}_A(L) = \text{rang}_A((L^\perp)^\perp)$ et, puisque $L \subset (L^\perp)^\perp$, $L = (L^\perp)^\perp$. Finalement, $\ker(\widehat{g}) = L^\perp \cap L = L$.

Désignons par s la surjection canonique $L^\perp \rightarrow L^\perp/L$ et définissons

$$g' : \begin{cases} (L^\perp/L) \times (L^\perp/L) & \rightarrow A \\ (s(l), s(l')) & \mapsto g(l, l') \end{cases} .$$

Si il existe $s(l) \in L^\perp/L$ tel que $g'(s(l), s(l')) = 0$ pour tout $s(l') \in L^\perp/L$, alors $g(l, l') = 0$ pour tout $l' \in L^\perp$ donc $s(l) = 0$. L'application adjointe de g' est donc injective puis bijective en invoquant un argument de dimension. On en déduit que $(L^\perp/L, g')$ est une G -forme ε -hermitienne non dégénérée sur (A, σ) .

Nous allons montrer que $(L^\perp/L, g')$ est Witt-équivalente à (P, f) . Pour ce faire, on considère la G -forme ε -hermitienne non dégénérée $(P \oplus (-L^\perp/L), f \perp (-g'))$ où

$$(f \perp (-g'))((p, s(l)), (p', s(l'))) = f(p, p') - g'(s(l), s(l'))$$

pour tous $p, p' \in P, s(l), s(l') \in L^\perp/L$. Le module $P \oplus (-L^\perp/L)$ est un $A[G]$ -module et cette forme est non dégénérée comme somme de formes non dégénérées. Soit

$$S = \{(l, s(l)) \mid l \in L^\perp\}.$$

Alors S est un sous- $A[G]$ -module de $P \oplus (-L^\perp/L)$ et un simple calcul montre que $S \subset S^\perp$. De plus l'application

$$\begin{cases} L^\perp & \rightarrow S \\ l & \mapsto (l, s(l)) \end{cases}$$

est un isomorphisme de A -modules à droite donc $\text{rang}_A(L^\perp) = \text{rang}_A(S)$. Enfin

$$\begin{aligned} \text{rang}_A(P \oplus (-L^\perp/L)) &= \text{rang}_A(P) + \text{rang}_A(L^\perp) - \text{rang}_A(L) \\ &= 2 \text{rang}_A(L^\perp) \\ &= 2 \text{rang}_A(S) \end{aligned}$$

d'une part, et

$$\text{rang}_A(P \oplus (-L^\perp/L)) = \text{rang}_A(S) + \text{rang}_A(S^\perp)$$

d'autre part. En particulier, $\text{rang}_A(S^\perp) = \text{rang}_A(S)$ et on en déduit que S est un métaboliseur de $P \oplus (-L^\perp/L)$. Finalement

$$[P, f] = [L^\perp/L, g'] \in W^\varepsilon(G, A, \sigma).$$

Maintenant de deux choses l'une :

(1) soit $L \neq L^\perp$ et comme $\text{rang}_A(L^\perp/L) < \text{rang}_A(L^\perp) < \text{rang}_A(P)$, cela contredit la minimalité du rang de (P, h) ;

(2) soit $L = L^\perp$ et L est un métaboliseur de P donc $[M, h] = 0$ ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Ceci termine la preuve de l'existence. On omet la preuve de l'unicité qui ne nous servira pas dans la suite : on peut adapter la preuve présente en [15, §1, Proposition 2]. \square

4.5.2 La preuve du théorème 4.1.2

Il est aisé de voir que les applications de transfert et de restriction définies lors de la section 4.2 induisent des homomorphismes de groupes entre les groupes de Witt équivariants correspondants : si W est un $\tilde{A}[G]$ -module alors $W \otimes_{\tilde{A}} A$ est un $A[G]$ -module où, comme d'habitude, G agit sur $W \otimes_{\tilde{A}} A$ par $(w \otimes a) \cdot g = w \cdot g \otimes a$ pour tous $w \in W$, $a \in A$, $g \in G$.

Nous prouvons le théorème 4.1.2 :

Théorème *Supposons que (A, σ) vérifie les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.1.1. Alors, les deux suites suivantes sont des suites exactes de $W(K, \sigma|_K)$ -modules :*

$$\begin{aligned} W^\varepsilon(G, A, \sigma) &\xrightarrow{\pi_1^\varepsilon} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_1) \xrightarrow{\rho_1^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_2) \\ W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) &\xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_2) \xrightarrow{\rho_2^\varepsilon} W^{-\varepsilon}(G, A, \sigma) \xrightarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} W^\varepsilon(G, \tilde{A}, \sigma_1) \end{aligned}$$

Preuve. Nous prouvons l'exactitude de la seconde suite, la preuve de l'exactitude de la première étant similaire. Nous allons adapter la preuve du théorème 4.1.1 dont nous conservons les notations.

Le fait que cette suite soit un complexe provient essentiellement de la preuve de 4.1.1 puisque l'on vérifie sans problème que les espaces W et W' peuvent être munis de structures de G -module à droite (voir (4.11) et (4.12) pour la définition de ces espaces).

Afin de montrer que cette suite est exacte, nous utilisons la proposition 4.5.4 pour exhiber un représentant anisotrope (au sens de la définition 4.5.1) de chaque forme dans le noyau considéré.

Montrons que $\ker(\rho_2^\varepsilon) \subset \text{im}(\pi_2^{-\varepsilon})$. Nous insistons seulement sur les changements avec la preuve originale. Soit (W, f) un G -espace ε -hermitien anisotrope appartenant au noyau de ρ_2^ε . Il existe un sous- $A[G]$ -module W_1 de $W \otimes_{\tilde{A}} A$ tel que $W_1 = W_1^\perp$. Pour montrer que $W_1 \cap (W \otimes \mu) = 0$, nous considérons le sous-espace suivant

$$V = \{w \in W \mid w \otimes \mu \in W_1\}.$$

C'est un sous- \tilde{A} -module de W et si $w \in W$, $g \in G$ on a $w \cdot g \otimes \mu = (w \otimes \mu) \cdot g \in W_1$ puisque W_1 est un G -module à droite. Donc, V est un sous- $\tilde{A}[G]$ -module de W . Dès lors, si $v, v' \in V$ alors $\rho_2^\varepsilon(f)(v \otimes \mu, v' \otimes \mu) = 0$ et on obtient $f(v, v') = 0$. Ainsi $V \subset V^\perp$ et, puisque (W, f) est anisotrope, on en déduit que $V = 0$ et que $W_1 \cap (W \otimes \mu) = 0$. On a la décomposition $W \otimes_{\tilde{A}} A = W_1 \oplus (W \otimes \mu)$ en tant que $\tilde{A}[G]$ -modules et ceci implique que, pour tout $w \in W$, il existe (un unique) $w' \in W$ tel que $w \otimes 1 + w' \otimes \mu \in W_1$. Il nous est possible de définir l'application $J : W \rightarrow W$ exactement comme dans la preuve de 4.1.1 en posant $J(w) = w'$ (J est bien définie par anisotropie de f). J vérifie la relation supplémentaire

$$J(w \cdot g) = J(w) \cdot g$$

pour tout $w \in W$ et tout $g \in G$. Cette dernière relation nous permet de montrer que W_J est un $A[G]$ -module. Ensuite, on définit h comme en (4.14). Si h est dégénérée alors il existe $x \neq 0$ dans W_J tel que $h(x, y) = 0$ pour tout $y \in W_J$. On en déduit que $f(x, y) = 0$ pour tout $y \in W$ et cela montre que $x \in W \cap W^\perp$. Cette affirmation contredit l'anisotropie de (W, f) . On conclut comme en 4.1.1.

Montrons que $\ker(\pi_3^{-\varepsilon}) \subset \text{im}(\rho_2^\varepsilon)$. Soit (V, h) un G -espace ε -hermitien anisotrope appartenant au noyau de $\pi_3^{-\varepsilon}$. Alors, il existe un sous- $\tilde{A}[G]$ -module W de $V_{\tilde{A}}$ tel que $W = W^\perp$. On définit la G -forme ε -hermitienne j comme en (4.15) et il nous reste à montrer que celle-ci est non dégénérée. Si au contraire, j est dégénérée, soit U le $A[G]$ -module à droite engendré par W . Alors U est un sous- $A[G]$ -module de V . Il existe $x \in W$ tel que $h(x, y) = 0$ pour tout $y \in W$ et cela implique que $h(x, y) = 0$ pour tout $y \in U$. Ainsi, $x \in U \cap U^\perp$ ce qui contredit l'anisotropie de (V, h) . Enfin, on définit Φ comme en (4.16). C'est un morphisme de $A[G]$ -modules qui fournit une isométrie entre les G -formes $(W \otimes_{\tilde{A}} A, \rho_2^\varepsilon(j))$ et (V, h) . \square

Remarque 4.5.5. Si le groupe G est trivial, alors (4.5) et (4.7) sont des cas particuliers de 4.1.2.

Comme lors de la section 4.3, nous obtenons facilement le corollaire suivant :

Corollaire 4.5.6. *L'octagone de 4.3.1 est aussi exact pour les groupes de Witt équivariants.*

Preuve. La preuve est similaire à celle de 4.3.1 en utilisant le théorème 4.1.2. \square

Chapitre 5

Sous-modules du groupe de Witt

5.1 Restrictions de suites exactes de groupes de Witt

Soit L/K une extension quadratique de corps. Considérons les applications r^* , s_* et t définies dans le triangle exact (4.2) d'Elman et Lam et n un entier positif. On peut facilement voir que si $q \in I^n(K)$ alors $r^*(q) \in I^n(L)$ et $t(q) \in I^{n+1}(K)$ et si $q' \in I^n(L)$ alors $s_*(q') \in I^n(K)$. Le triangle exact donne ainsi naissance à un complexe long infini

$$\dots \longrightarrow I^n(K) \xrightarrow{r^*} I^n(L) \xrightarrow{s_*} I^n(K) \xrightarrow{t} I^{n+1}(K) \longrightarrow \dots \quad (5.1)$$

Il s'avère que l'exactitude de ce complexe a un rapport avec la conjecture de Milnor 3.3.1. Si e_n est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le complexe (5.1) est exact. Réciproquement, si e_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'exactitude du complexe (5.1) pour toute extension quadratique implique que e_n est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (voir [2] pour plus de détails). D'après les résultats de Voevodsky, le complexe (5.1) est donc une suite exacte.

Ce résultat (entre autres) conduit aux deux questions suivantes dans une K -algèbre simple centrale à involution (A, σ) :

Questions 5.1.1. (1) *Peut-on restreindre l'octogone exact du corollaire 4.3.1 à certains sous-modules du groupe de Witt ?*

(2) *Y a-t-il un analogue de l'idéal I^n dans le module $W^\varepsilon(A, \sigma)$?*

On semble bien loin de pouvoir répondre à la seconde question. Jusqu'à présent, seuls $I(K)$ et $I^2(K)$ semblent avoir des analogues dans le groupe de Witt (i.e. $I_1^\varepsilon(A, \sigma)$ et $I_2^\varepsilon(A, \sigma)$). Nous verrons toutefois une réponse possible à cette question lors de la section 5.2. Dans la suite de cette section, nous nous concentrons sur la question 5.1.1(1).

Dans [7, §3.2] et [8, §3.5], Bayer-Fluckiger et Parimala étudient le comportement des applications π_1^ε , ρ_1^ε et π_2^ε de la suite (4.5) vis à vis du discriminant, de l'invariant de Clifford (si σ est orthogonale), du Discriminant (un raffinement du discriminant usuel dans le cas

des corps formellement réels : voir [8, §3.4]) et des signatures. Si de plus σ est unitaire et si le corps de base est de dimension cohomologique virtuelle au plus 2, elles prouvent comme conséquence des études précédentes, que la suite exacte (4.5) se restreint à I_2 (voir la proposition 5.1.9).

Dans la suite de cette section, nous commençons par préciser le comportement des applications des suites (4.5) et (4.7) vis à vis du rang. Ensuite, nous nous inspirons des méthodes de Bayer-Fluckiger et Parimala pour étudier le comportement des applications ρ_2^ε , π_3^ε et ρ_3^ε vis à vis du discriminant avant d'en déduire des résultats similaires aux leurs concernant la restriction de la suite (4.7) à I_1 et I_2 .

Dans la suite de cette section, nous supposons donc que (A, σ) satisfait les hypothèses (4.10).

5.1.1 Comportement des applications vis à vis du rang

L'étude du comportement des applications vis à vis du rang conduit à considérer deux cas distincts. Après avoir identifié ces deux cas, nous nous proposons de relier les degrés des algèbres à division Brauer-équivalentes à A et à \tilde{A} et de déterminer la forme que prend cette dernière dans chacun de ces cas.

Nous effectuons tout d'abord des rappels concernant les anneaux simples et les modules semi-simples. Dans ce cas, la référence principale est [13]. Soient A un anneau et M un A -module semi-simple. On appelle *longueur* de M et on note $l_A(M)$ le cardinal de tout ensemble de sous-modules simples de M dont M soit la somme directe (voir [13, §3, no 5, Théorème 2] pour la justification de cette définition). Supposons maintenant que A soit un anneau simple et que B soit un sous-anneau simple de A contenant 1_A . On appelle *indice* de B dans A et note $i(A, B)$ la longueur du A -module $N \otimes_B A$, N étant un B -module à droite simple. On appelle *hauteur* de A sur B et on note $h(A, B)$ la longueur du B -module obtenu en restreignant à B les opérations d'un A -module simple. En notant $[A : B]$ pour désigner le cardinal de toute base de A vu comme B -module à droite, on démontre la formule (voir [13, §5, no 6])

$$[A : B] = h(A, B) i(A, B).$$

Nous allons appliquer cette formule à notre cas particulier. On prend A une K -algèbre simple centrale vérifiant (4.10) et $B = \tilde{A}$ le centralisateur de $L = K(\lambda)$ dans A . D'après 4.2.2, $[A : \tilde{A}] = 2$ et on obtient

$$2 = h(A, \tilde{A}) i(A, \tilde{A}). \tag{5.2}$$

Avant d'étudier les deux cas découlant de cette formule, nous rappelons deux résultats et fixons quelques notations. On peut relier A à \tilde{A} de la manière suivante :

Lemme 5.1.2. On a un isomorphisme de L -algèbres $\Psi : L \otimes_K A \rightarrow M_2(\tilde{A})$ défini par

$$\Psi(1 \otimes (x + \mu y)) = \begin{pmatrix} x & \mu y \mu \\ y & \mu^{-1} x \mu \end{pmatrix}$$

pour tous $x, y \in \tilde{A}$.

Preuve. Ce résultat se trouve en [7, §3.2]. Tous les calculs se font sans difficulté. \square

Nous avons également besoin du résultat de réduction d'indice suivant :

Théorème 5.1.3. Soit $[A] \in \text{Br}(K)$, D une algèbre à division Brauer-équivalente à A et L/K une extension de corps. Alors on a les formules suivantes :

(1) $\text{ind } A \otimes_K L \mid \text{ind } A$.

(2) $\frac{\text{ind } A}{\text{ind } A \otimes_K L} \mid [L : K]$ si L/K est une extension finie.

(3) $\frac{\text{ind } A}{\text{ind } A \otimes_K L} = [L : K]$ si et seulement si L peut s'injecter dans D .

De plus, si D est une K -algèbre à division et si L/K est de degré premier, alors soit L s'injecte dans D soit $D \otimes_K L$ est une algèbre à division.

Preuve. Voir [22, §9, Theorem 12, Corollary 9]. \square

Nous étudions maintenant les deux cas mis en valeur par l'équation (5.2). Conformément au théorème 1.1.1, on identifie A et $M_n(D)$, \tilde{A} et $M_{n'}(D')$, D (resp. D') étant une algèbre à division Brauer-équivalente à A (resp. \tilde{A}).

Cas I : $i(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) = 2$

Il est aisé de vérifier que les applications de restriction apparaissant dans (4.5) et (4.7) multiplient le rang par 2 et que les applications de transfert conservent le rang. Comme $\deg A = 2 \deg \tilde{A}$, des considérations de dimensions montrent que $n = 2n'$ et $\deg D = \deg D'$. Si $L = K(\lambda)$, d'après le lemme 5.1.2, on a $\text{ind } A \otimes_K L = \text{ind } \tilde{A} = \text{ind } A$ et en appliquant le théorème 5.1.3, on en déduit que $D \otimes_K L$ est une algèbre à division. Dans $\text{Br}(L)$ on a

$$[D \otimes_K L] = [A \otimes_K L] \stackrel{5.1.2}{=} [\tilde{A}] = [D']. \quad (5.3)$$

Puisque $D \otimes_K L$ est une algèbre à division, D' s'identifie à $D \otimes_K L$ en tant que L -algèbre.

Cas II : $i(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) = 1$

On vérifie facilement que les applications de restriction apparaissant dans (4.5) et 4.7 conservent le rang et que les applications de transfert multiplient le rang par 2. Comme ci-dessus, on voit que $n = n'$ et $\deg D = 2 \deg D'$. En évaluant les indices au moyen du lemme 5.1.2 et en appliquant le théorème 5.1.3, on en déduit que L s'injecte dans D . On peut alors considérer le centralisateur de $L = K(\lambda)$ dans D : notons-le \tilde{D} . D'après [22, §9, Corollary 1], on a $[\tilde{D}] = [D \otimes_K L]$ dans $\text{Br}(L)$. La suite d'égalités (5.3) est encore valable et on en déduit que $[\tilde{D}] = [D']$ dans $\text{Br}(L)$ ce qui conduit au fait que D' s'identifie à \tilde{D} .

Avant de clore cette section, montrons que ces deux cas se produisent effectivement :

Exemples 5.1.4. (1) Soient K un corps, $d \notin K^{*2}$, $A = M_2(K)$ et

$$L = K(\sqrt{d}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ dy & x \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\}.$$

En choisissant $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et σ l'involution canonique définie par

$$\sigma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

on vérifie les hypothèses (4.10). Puisque $L \otimes_K K \simeq L$ est une algèbre à division, l'étude précédente montre que l'on est dans le cas I (les deux cas s'excluant mutuellement, d'après le théorème 5.1.3).

(2) Soit $A = D = (a, b)_K$ une algèbre de quaternions à division munie de son involution canonique. Alors les hypothèses (4.10) sont satisfaites (voir la remarque 4.2.3) et comme L s'injecte dans D , on se trouve forcément dans le cas II. Plus généralement, toute algèbre à division satisfaisant (4.10) entre dans le cadre du cas II.

5.1.2 Comportement des applications vis à vis du discriminant

Nous en venons maintenant à étudier le comportement des applications ρ_2^ε , $\pi_3^{-\varepsilon}$ et ρ_3^ε vis à vis du discriminant et du discriminant raffiné. Bien que les résultats démontrés dans cette section soient sans doute généralisables à une algèbre simple centrale A quelconque par le biais des techniques utilisées par Bayer-Fluckiger et Parimala, nous supposons, pour simplifier les preuves, que $A = D$ est une algèbre à division munie d'une involution τ : nous sommes alors forcément dans le cas II mentionné plus haut d'après l'exemple 5.1.4(2).

Avant d'entamer l'étude, rappelons les résultats obtenus par Bayer-Fluckiger et Parimala pour la suite (4.5). Nous fixons quelques notations supplémentaires.

Dans la suite, F désigne le sous-corps fixe de $\tau|_K$ et E_1 (resp. E_2) celui de $\tau_1|_L$ (resp. $\tau_2|_L$). Si τ est de première espèce, $E_1 = E_2 = K = F$ et si τ est de seconde espèce on

obtient le treillis d'extensions quadratiques suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & \swarrow & | & \searrow & \\
 E_1 & & K & & E_2 \\
 & \swarrow & | & \searrow & \\
 & & F & &
 \end{array} \tag{5.4}$$

Si k est un sous-corps de D (resp. \tilde{D}), nous écrivons $k^{*(D)}$ (resp. $k^{*(\tilde{D})}$) pour désigner $\text{Nrd}_{D/k}(D^*)$ (resp. $\text{Nrd}_{\tilde{D}/k}(\tilde{D}^*)$). La proposition suivante détermine entièrement le comportement de la suite (4.5) vis à vis du discriminant et du discriminant raffiné :

Proposition 5.1.5 (Bayer-Fluckiger-Parimala). (1) *Soit h une forme ε -hermitienne de rang pair sur (D, τ) . Alors, si τ est de première espèce,*

$$d_{\pm}(\pi_1^{\varepsilon}(h)) = d_{\pm}(h) \in K^*/N_{L/K}(L^*), \quad \text{Disc}(\pi_1^{\varepsilon}(h)) = \text{Disc}(h) \in K^{*(\tilde{D})}/N_{L/K}(L^{*(\tilde{D})}),$$

et si τ est de seconde espèce,

$$d_{\pm}(\pi_1^{\varepsilon}(h)) = d_{\pm}(h) \in E_1^*/N_{L/E_1}(L^*), \quad \text{Disc}(\pi_1^{\varepsilon}(h)) = \text{Disc}(h) \in E_1^{*(\tilde{D})}/N_{L/E_1}(L^{*(\tilde{D})}).$$

(2) *Soit f une forme ε -hermitienne de rang pair sur (\tilde{D}, τ_1) . Alors, si τ est de première espèce,*

$$d_{\pm}(\rho_1^{\varepsilon}(f)) = 1 \in K^*/K^{*2}, \quad \text{Disc}(\rho_1^{\varepsilon}(f)) = 1 \in K^{*(D)}/K^{*(D)2},$$

et si τ est de seconde espèce,

$$d_{\pm}(\rho_1^{\varepsilon}(f)) = N_{E_1/F}(d_{\pm}(f)) \in F^*/N_{K/F}(K^*),$$

$$\text{Disc}(\rho_1^{\varepsilon}(f)) = N_{E_1/F}(\text{Disc}(f)) \in F^{*(D)}/N_{K/F}(K^{*(D)}).$$

(3) *Soit h une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne de rang pair sur (D, τ) . Alors, si τ est de première espèce,*

$$d_{\pm}(\pi_2^{-\varepsilon}(h)) = d_{\pm}(h) \in L^*/L^{*2}, \quad \text{Disc}(\pi_2^{-\varepsilon}(h)) = \text{Disc}(h) \in L^{*(\tilde{D})}/L^{*(\tilde{D})2},$$

et si τ est de seconde espèce,

$$d_{\pm}(\pi_2^{-\varepsilon}(h)) = d_{\pm}(h) \in E_2^*/N_{L/E_2}(L^*), \quad \text{Disc}(\pi_2^{-\varepsilon}(h)) = \text{Disc}(h) \in E_2^{*(\tilde{D})}/N_{L/E_2}(L^{*(\tilde{D})}).$$

Preuve. Voir [7, Proposition 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3] pour les preuves concernant le discriminant et [8, Proposition 3.10] pour celles concernant le discriminant raffiné. \square

Remarques 5.1.6. (1) A l'origine, la proposition 5.1.5 est énoncée pour les formes hermitiennes. On peut vérifier que les preuves s'adaptent sans difficulté au cas des formes ε -hermitiennes.

(2) Dans le cas des corps formellement réels, la proposition précédente est vraie de façon plus générale. Supposons que F soit un corps formellement réel (i.e. -1 n'est pas somme de carrés de F) et notons F_v pour désigner une complétion de F en une de ses places v . Soit $k = K, F, E_1$ ou E_2 . Si $k^{*(D)}$ (resp. $k^{*(\tilde{D})}$) désigne l'ensemble des éléments de k^* qui proviennent de normes réduites de $D \otimes_k k_v$ (resp. de $\tilde{D} \otimes_k k_v$) pour toute place v de k , on peut définir un discriminant plus fin que Disc (que l'on note encore Disc). En adoptant ces nouvelles notations, la proposition 5.1.5 reste correcte. On pourra consulter [8, §3.4, Proposition 3.10] pour plus de détails.

On peut démontrer un résultat similaire à 5.1.5 pour les applications apparaissant dans la suite (4.7) :

Proposition 5.1.7. (1) Soit f une forme ε -hermitienne de rang pair sur (\tilde{D}, τ_2) . Alors, si τ est de première espèce,

$$d_{\pm}(\rho_2^{\varepsilon}(f)) = N_{L/K}(d_{\pm}(f)) \in K^*/K^{*2}, \quad \text{Disc}(\rho_2^{\varepsilon}(f)) = N_{L/K}(\text{Disc}(f)) \in K^{*(D)}/K^{*(D)2},$$

et si τ est de seconde espèce,

$$d_{\pm}(\rho_2^{\varepsilon}(f)) = N_{E_2/F}(d_{\pm}(f)) \in F^*/N_{K/F}(K^*),$$

$$\text{Disc}(\rho_2^{\varepsilon}(f)) = N_{E_2/F}(\text{Disc}(f)) \in F^{*(D)}/N_{K/F}(K^{*(D)}).$$

(2) Soit h une forme $(-\varepsilon)$ -hermitienne de rang pair sur (D, τ) . Alors, si τ est de première espèce,

$$d_{\pm}(\pi_3^{-\varepsilon}(h)) = d_{\pm}(h) \in K^*/N_{L/K}(L^*), \quad \text{Disc}(\pi_3^{-\varepsilon}(h)) = \text{Disc}(h) \in K^{*(\tilde{D})}/N_{L/K}(L^{*(\tilde{D})}),$$

et si τ est de seconde espèce,

$$d_{\pm}(\pi_3^{-\varepsilon}(h)) = d_{\pm}(h) \in E_1^*/N_{L/E_1}(L^*), \quad \text{Disc}(\pi_3^{-\varepsilon}(h)) = \text{Disc}(h) \in E_1^{*(\tilde{D})}/N_{L/E_1}(L^{*(\tilde{D})}).$$

(3) Soit f une forme ε -hermitienne de rang pair sur (\tilde{D}, τ_1) . Alors, si τ est de première espèce,

$$d_{\pm}(\rho_3^{\varepsilon}(f)) = 1 \in K^*/K^{*2}, \quad \text{Disc}(\rho_3^{\varepsilon}(f)) = 1 \in K^{*(D)}/K^{*(D)2}$$

et si τ est de seconde espèce,

$$d_{\pm}(\rho_3^{\varepsilon}(f)) = N_{E_1/F}(d_{\pm}(f)) \in F^*/N_{K/F}(K^*),$$

$$\text{Disc}(\rho_3^{\varepsilon}(f)) = N_{E_1/F}(\text{Disc}(f)) \in F^{*(D)}/N_{K/F}(K^{*(D)}).$$

Preuve. Les assertions (2) et (3) proviennent respectivement des assertions (1) et (2) de la proposition 5.1.5 au vu des définitions de $\pi_3^{-\varepsilon}$ et ρ_3^ε (voir la table 4.4.6 ou la section 4.2). Nous donnons une preuve de l'assertion (1).

Supposons tout d'abord que τ soit une involution de première espèce. Alors τ_1 est de type unitaire, τ_2 est de première espèce et de type opposé à τ et $E_1 = E_2 = K = F$. Soit f une forme ε -hermitienne de rang $n = 2p$ sur (\tilde{D}, τ_2) ($\varepsilon = \pm 1$) ; on peut supposer que $f = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ avec $a_i \in \tilde{D}$ pour $i = 1, \dots, n$. D'après 5.1.4(2), $\rho_2^\varepsilon(f)$ est aussi de rang n et, comme $n \deg D \equiv 0 \pmod{4}$,

$$d_\pm(\rho_2^\varepsilon(f)) = \text{Nrd}_{M_n(D)/K}(\rho_2^\varepsilon(f)) = \text{Nrd}_{D/K}(\lambda\mu)^n \text{Nrd}_{M_n(D)/K}(f). \quad (5.5)$$

Or, puisque $a_i \in \tilde{D}$, $\text{Nrd}_{D/K}(a_i) = N_{L/K}(\text{Nrd}_{\tilde{D}/L}(a_i))$ pour $i = 1, \dots, n$ (voir [22, §22, Corollary 5] et en remplaçant cette expression dans (5.5), on obtient

$$d_\pm(\rho_2^\varepsilon(f)) = \text{Nrd}_{D/K}(\lambda\mu)^n N_{L/K}(\text{Nrd}_{M_n(\tilde{D})/L}(f)) = \text{Nrd}_{D/K}(\lambda\mu)^n N_{L/K}(d_\pm(f)).$$

On conclut en utilisant le fait que, puisque n est pair, $\text{Nrd}_{D/K}(\lambda\mu)^n \in K^{*(D)^2}$.

Supposons maintenant que τ soit unitaire ; τ_1 et τ_2 sont aussi unitaires et leurs sous-corps fixes sont comme en (5.4). Soit f une forme ε -hermitienne de rang $n = 2p$ sur (\tilde{D}, τ_2) . Soient $\zeta \in L^*$ et $\zeta' \in K^*$ tels que $\tau_2(\zeta)\zeta^{-1} = \varepsilon = \tau(\zeta')\zeta'^{-1}$. En raisonnant comme précédemment on obtient

$$d_\pm(\rho_2^\varepsilon(f)) = \text{Nrd}_{D/K}(\lambda\mu)^n \text{Nrd}_{D/K}(\zeta')^n N_{L/K}(\text{Nrd}_{\tilde{D}/L}(\zeta))^{-n} N_{L/K}(d_\pm(f)). \quad (5.6)$$

Examinons un à un les termes du membre de droite. Tout d'abord, en utilisant successivement la proposition 3.2.5(6) et la parité du degré de D , il apparaît que

$$\tau(\text{Nrd}_{D/K}(\lambda\mu)) = \text{Nrd}_{D/K}(-\lambda\mu) = \text{Nrd}_{D/K}(\lambda\mu).$$

Puisque n est pair, on en déduit aisément que $\text{Nrd}_{D/K}(\lambda\mu)^n \in N_{K/F}(K^{*(D)})$. Ensuite,

$$\text{Nrd}_{D/K}(\zeta')^n = \underbrace{\text{Nrd}_{D/K}(\zeta')^p \tau(\text{Nrd}_{D/K}(\zeta'))^p}_{\in N_{K/F}(K^{*(D)})} \varepsilon^{-p \deg D}.$$

Enfin, on effectue le calcul suivant en utilisant la proposition 3.2.5(6) :

$$\begin{aligned} N_{L/K}(\text{Nrd}_{\tilde{D}/L}(\zeta))^{-n} &= \text{Nrd}_{D/K}(\zeta)^{-n} \\ &= \text{Nrd}_{D/K}(\zeta)^{-p} \text{Nrd}_{D/K}(\varepsilon^{-1}\tau_2(\zeta))^{-p} \\ &= \varepsilon^{p \deg D} \text{Nrd}_{D/K}(\zeta)^{-p} \tau_2(\text{Nrd}_{D/K}(\zeta))^{-p} \\ &= \varepsilon^{p \deg D} \underbrace{N_{K/F}(\text{Nrd}_{D/K}(\zeta))^{-p}}_{\in N_{K/F}(K^{*(D)})}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (5.6) devient

$$\text{Disc}(\rho_2^\varepsilon(f)) = N_{L/K}(\text{Disc}(f)) = N_{E_2/F}(\text{Disc}(f)) \in F^{*(D)}/N_{K/F}(K^{*(D)})$$

ce qui termine la preuve. \square

Remarques 5.1.8. (1) La preuve ci-dessus est facilement transposable à ρ_1^ε et ρ_3^ε .
(2) L'idée de la preuve pour π_1^ε est la suivante : si h est une forme ε -hermitienne sur (D, τ) de rang n , on utilise le lemme 5.1.2 et la proposition 3.2.5(4) pour écrire l'équation

$$\text{Nrd}_{M_n(D)/K}(h) \text{Nrd}_{\tilde{D}/L}(\mu^2)^n = \text{Nrd}_{M_{2n}(\tilde{D})}(\pi_1^\varepsilon(h))$$

qui conduit aux assertions de la proposition 5.1.5(1) après quelques calculs. Les calculs pour $\pi_2^{-\varepsilon}$ et π_3^ε sont similaires.

5.1.3 Restrictions des suites exactes

Lors des sous-sections 5.1.1 et 5.1.2, le comportement de chaque application (apparaissant dans les suites exactes (4.5) et (4.7)) vis à vis du rang et du discriminant à signe a été précisé. Ces précisions vont nous permettre de restreindre l'octogone exact du corollaire 4.3.1 aux sous-modules suivants :

1. à I_1 pour une algèbre à division à involution de n'importe quelle espèce (sauf pour une algèbre de quaternions munie d'une involution de première espèce) : voir la proposition 5.1.10 ;
2. à I_2 pour une algèbre à division à involution unitaire si le corps F est C_2^0 : voir la proposition 5.1.12.

Encore une fois, les méthodes utilisées s'inspirent d'un résultat obtenu par Bayer-Fluckiger et Parimala pour la suite exacte (4.5) :

Proposition 5.1.9 (Bayer-Fluckiger–Parimala). *Soient F un corps de dimension cohomologique virtuelle inférieure ou égale à 2 et (A, σ) une K -algèbre simple centrale à K/F -involution unitaire satisfaisant les hypothèses (4.10). Alors la suite exacte (4.5) se restreint à I_2 .*

Preuve. Voir [8, Proposition 4.6]. \square

Si F est un corps dont la dimension cohomologique virtuelle est inférieure ou égale à 2, $I^3(F)$ est sans torsion et par suite, F est un corps formellement réel. Si F est un corps C_2^0 alors la dimension cohomologique de F est inférieure ou égale à 2 et F est un corps non formellement réel (voir la remarque 7.4.4(1)). Le résultat de restriction que

nous obtenons lorsque l'involution est unitaire peut ainsi être considéré comme le pendant non formellement réel de la proposition 5.1.9. Toutefois, les preuves de ces résultats sont similaires et dépendent tous deux de résultats obtenus par Yanchevskii à propos du groupe de Whitehead unitaire réduit d'une algèbre à involution unitaire : voir le chapitre 7. On suppose dans le reste de cette section que $A = D$ est une algèbre à division munie d'une K/F -involution τ .

Restriction à I_1

Proposition 5.1.10. *Soit (D, τ) une K -algèbre simple centrale à division munie d'une K/F -involution d'espèce quelconque vérifiant les hypothèses (4.10). Soit $\varepsilon \in K^*$ satisfaisant $\varepsilon\tau(\varepsilon) = 1$. Alors, l'octogone exact du corollaire 4.3.1 se restreint à I_1 sauf si D est une algèbre de quaternions et τ est une involution de première espèce.*

Preuve. Au vu des résultats obtenus lors de la sous-section 5.1.1, l'octogone exact du corollaire 4.3.1 induit un complexe par restriction à I_1 . Il suffit alors de vérifier que toute forme appartenant au noyau d'une application de cet octogone possède un antécédent de rang pair par l'application qui la précède.

Puisque D est une algèbre à division, les applications de restriction respectent le rang. Si h est telle que $\pi(h)$ est métabolique (où π est une application de transfert du corollaire 4.3.1), il existe donc une forme f de même rang que h telle que $\rho(f) = h$, ρ désignant l'application de restriction précédant π dans 4.3.1. Il suffit alors de se concentrer sur les antécédents des formes appartenant au noyau d'une application de restriction.

Supposons que $\rho_1^\varepsilon(f)$ soit métabolique. Par exactitude de l'octogone 4.3.1, il existe $f_1 \in W^\varepsilon(D, \tau)$ telle que $\pi_1^\varepsilon(f_1) = f$. La méthode va consister à ajouter à f_1 une forme de rang 1 qui devienne métabolique via π_1 . D'après le théorème 4.4.4(i), il est nécessaire et suffisant de considérer une forme de rang 1 du type $\langle \mu c \rangle$ où c est un élément de \tilde{D}^* avec $\varepsilon\tau_2(c) = -c$ (s'il existe). Supposons tout d'abord que τ soit de première espèce. Si $\varepsilon = -1$, $c = \lambda$ convient ; au moyen de la proposition 4.4.1(i), on vérifie aisément que \tilde{D} est un métaboliseur de $\pi_1^{-1}(\langle \mu \lambda \rangle)$. Ainsi

$$\pi_1^{-1}(f_1 \perp \langle \mu \lambda \rangle) = \pi_1^{-1}(f_1) = f,$$

et on peut supposer que $f_1 \in I_1^{-1}(D, \tau)$. Si $\varepsilon = 1$, il suffit de choisir $c \in \text{Skew}(\tilde{D}, \tau_2)$ ce qui est toujours possible si \tilde{D} est non commutative par le lemme 4.4.3 : on conclut comme ci-dessus. Si \tilde{D} est commutative, D est une algèbre de quaternions d'après le lemme 4.4.2 et $\text{Skew}(\tilde{D}, \tau_2) = 0$ puisque $\tau_2 = \text{id}_L$: on ne peut donc trouver c comme ci-dessus et on doit exclure le cas. Si τ est une involution de seconde espèce, on choisit $\zeta \in K^*$ tel que $-\varepsilon = \tau(\zeta)\zeta^{-1}$ grâce au théorème 90 de Hilbert. Dans ces conditions, on vérifie que $c = \lambda\zeta^{-1}$ convient.

Si $\rho_2^\varepsilon(f)$ est métabolique, il existe $f_1 \in W^{-\varepsilon}(D, \tau)$ tel que $\pi_2^{-\varepsilon}(f_1) = f$. On procède comme ci-dessus en utilisant le théorème 4.4.4(iii) et la proposition 4.4.1(iii). Il suffit de

trouver $c \in \tilde{D}$ tel que $\varepsilon\tau_1(c) = -c$. Supposons que τ soit de première espèce. Si $\varepsilon = 1$, on prend $c = \lambda$; pour $\varepsilon = -1$, il suffit de prendre $c = 1$. Si τ est de seconde espèce et si $-\varepsilon = \tau(\zeta)\zeta^{-1}$, $\zeta \in K^*$, on choisit $c = \zeta^{-1}$.

Si $\rho_3^\varepsilon(f)$ est métabolique, il existe $f_1 \in W^{-\varepsilon}(D, \tau)$ tel que $\pi_3^{-\varepsilon}(f_1) = f$. On utilise cette fois le théorème 4.4.4(v) et la proposition 4.4.1(v). Il suffit de trouver $c \in \tilde{D}$ tel que $\varepsilon\tau_2(c) = c$ (s'il existe). Supposons que τ soit de première espèce. Si $\varepsilon = 1$, on prend $c = \lambda^{-1}$. Si $\varepsilon = -1$ et \tilde{D} est non commutative, on prend $c \in \text{Skew}(\tilde{D}, \tau_2)$. Si \tilde{D} est commutative, on ne peut trouver un tel c . Si τ de seconde espèce et si $\varepsilon = \tau(\zeta)\zeta^{-1}$, $\zeta \in K^*$, on prend $c = \lambda\zeta^{-1}$.

En conséquence, si τ est de première espèce, on doit exclure du propos le cas où \tilde{D} est commutative et $\varepsilon = \pm 1$, c'est-à-dire le cas où D est une algèbre de quaternions munie d'une involution de première espèce. \square

Restriction à I_2

Dans ce paragraphe, D est une algèbre simple centrale à division munie d'une K/F -involution unitaire τ et $\varepsilon \in K^*$ vérifie $\tau(\varepsilon)\varepsilon = 1$.

Avant de montrer le résultat de restriction, nous démontrons un lemme qui se déduit d'un résultat de Yanchevskiï :

Lemme 5.1.11. *Soient F un corps C_2^0 (voir la définition 7.4.1) et $x \in F^*$. Alors, il existe $y_1, \dots, y_r \in \text{Sym}(D, \tau) \cap D^*$ tels que*

$$x = \prod_{i=1}^r \text{Nrd}_{D/K}(y_i).$$

De plus, il existe une forme ε -hermitienne h de rang pair sur (D, τ) telle que $d_\pm(h) = x$.

Preuve. Comme dans le chapitre 7, nous notons $\Sigma_\tau(D)$ (resp. $\Sigma'_\tau(D)$) pour désigner le sous-groupe de D^* engendré par les éléments symétriques (resp. le sous-groupe de D^* engendré par les éléments dont les normes réduites sont symétriques) pour l'involution τ . Puisque F est C_2^0 , on a $\Sigma_\tau(D) = \Sigma'_\tau(D)$ d'après un théorème de Yanchevskiï (voir le théorème 7.1.5). Si $x \in F^*$ alors il existe $y \in D^*$ tel que $\text{Nrd}_{D/K}(y) = x$ (F est un corps C_2^0 donc la norme réduite est surjective) et $y \in \Sigma'_\tau(D) = \Sigma_\tau(D)$. Par définition de $\Sigma_\tau(D)$, il existe $y_1, \dots, y_r \in D^*$ symétriques par rapport à τ tels que

$$x = \prod_{i=1}^r \text{Nrd}_{D/K}(y_i).$$

Ceci étant, soit $\zeta \in K^*$ tel que $\varepsilon = \tau(\zeta)\zeta^{-1}$. Alors, pour $i = 1, \dots, r$, $\varepsilon\tau(\zeta^{-1}y_i) = \zeta^{-1}y_i$. Posons $z_i = \zeta^{-1}y_i$. Quitte à ajouter des z_i égaux à ζ^{-1} , on peut supposer que $r \equiv 0$

mod 4. Dans ces conditions, on pose $h = \langle z_1, \dots, z_r \rangle$ et on a

$$d_{\pm}(h) = \text{Nrd}_{M_r(D)/k}(\zeta \langle z_1, \dots, z_r \rangle) = \prod_{i=1}^r \text{Nrd}_{D/K}(y_i) = x. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant prouver le résultat annoncé :

Proposition 5.1.12. *Soient D une algèbre simple centrale à division munie d'une K/F -involution unitaire τ vérifiant les hypothèses (4.10) et $\varepsilon \in K^*$ vérifiant $\tau(\varepsilon)\varepsilon = 1$. On suppose que F est un corps C_2^0 . Alors l'octogone exact du corollaire 4.3.1 se restreint à I_2 .*

Preuve. En vertu des propositions 5.1.5 et 5.1.7, l'octogone exact du corollaire 4.3.1 se restreint à I_2 sous forme d'un complexe. De plus, d'après la proposition 5.1.10, toute forme appartenant au noyau d'une application de cet octogone possède un antécédent de rang pair par l'application qui la précède ; il nous reste à montrer que cette forme peut être choisie de discriminant trivial. Pour ce faire, nous nous inspirons de méthodes utilisées par Bayer-Fluckiger et Parimala pour prouver la proposition 5.1.9. Montrons que, après restriction au sous-module I_2 , $\ker(\pi_3^{-\varepsilon}) \subset \text{im}(\rho_2^{\varepsilon})$ et $\ker(\rho_3^{\varepsilon}) \subset \text{im}(\pi_3^{-\varepsilon})$. Puisque τ est unitaire nous sommes dans la situation (5.4) ; plus précisément, nous avons le treillis d'extensions de corps suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L = F(\sqrt{a}, \sqrt{b}) & & \\
 & & | & & \\
 E_1 = F(\sqrt{a}) & & K = F(\sqrt{b}) & & E_2 = F(\sqrt{ab}) \\
 & & | & & \\
 & & F & &
 \end{array} \tag{5.7}$$

où E_1 est le sous-corps fixe de τ_1 , E_2 celui de τ_2 et K celui de $\tau_1 \circ \tau_2$.

Nous nous intéressons tout d'abord à la suite exacte suivante :

$$I_1^{-\varepsilon}(D, \tau) \xrightarrow{\pi_2^{-\varepsilon}} I_1^{\varepsilon}(\tilde{D}, \tau_2) \xrightarrow{\rho_2^{\varepsilon}} I_1^{-\varepsilon}(D, \tau) \xrightarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} I_1^{\varepsilon}(\tilde{D}, \tau_1).$$

Soit $h \in I_2^{-\varepsilon}(D, \tau)$ avec $\pi_3^{-\varepsilon}(h) = 0$. Alors, par 5.1.10, il existe $f_1 \in I_1^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_2)$ telle que $\rho_2^\varepsilon(f_1) = h$. D'après la proposition 5.1.7(1),

$$1 = d_\pm(\rho_2^\varepsilon(f_1)) = N_{E_2/F}(d_\pm(f_1)) \in F^*/N_{K/F}(K^*).$$

Il existe donc $c \in K^*$ tel que $N_{E_1/F}(d_\pm(f_1)) = N_{K/F}(c)$. De plus

$$N_{L/E_1}(d_\pm(f_1)c^{-1}) = N_{L/E_1}(d_\pm(f_1))N_{L/E_1}(c^{-1}) = N_{E_2/F}(d_\pm(f_1))N_{K/F}(c^{-1}) = 1, \quad (5.8)$$

et par le théorème 90 de Hilbert, il existe $\alpha \in L^*$ tel que $d_\pm(f_1)c^{-1} = \tau_1(\alpha)\alpha^{-1}$. Posons $\beta = c\tau_1(\alpha)$ et $\gamma = N_{L/K}(\beta)c^{-1} \in K^*$. On a

$$\begin{aligned} \gamma &= N_{L/K}(\beta)c^{-1} \\ &= N_{L/K}(d_\pm(f_1))N_{L/K}(\alpha)c^{-1} \\ &= N_{E_2/F}(d_\pm(f_1))N_{L/K}(\alpha)c^{-1} \\ &\stackrel{5.8}{=} N_{K/F}(c)c^{-1}N_{L/K}(\alpha) \\ &= N_{L/E_2}(c\tau_1(\alpha))N_{L/E_2}(\tau_1(\alpha)^{-1})c^{-1}N_{L/K}(\alpha). \end{aligned}$$

Or $N_{L/E_2}(\tau_1(\alpha)^{-1})N_{L/K}(\alpha) = \alpha\tau_1(\alpha)^{-1}$ donc

$$\gamma = N_{L/E_2}(c\tau_1(\alpha))d_\pm(f_1)^{-1}.$$

Ainsi $\gamma \in (E_2 \cap K)^* = F^*$ et il existe $g \in F^*$ tel que $g = d_\pm(f_1) \in E_2^*/N_{L/E_2}(L^*)$ (en prenant $g = \gamma^{-1}$). Puisque F est un corps C_2^0 , d'après le lemme 5.1.11, il existe $h_1 \in I_1^{-\varepsilon}(D, \tau)$ telle que $d_\pm(h_1) = g$. La forme $f_1 \perp \pi_2^{-\varepsilon}(h_1)$ qui est alors une forme de rang pair et de discriminant trivial est un antécédent de h par ρ_2^ε .

Intéressons-nous maintenant à la suite exacte suivante :

$$I_1^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_2) \xrightarrow{\rho_2^\varepsilon} I_1^{-\varepsilon}(D, \tau) \xrightarrow{\pi_3^{-\varepsilon}} I_1^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_1) \xrightarrow{\rho_3^\varepsilon} I_1^\varepsilon(D, \tau).$$

Soit $f \in I_2^\varepsilon(\tilde{D}, \tau_1)$ telle que $\rho_3^\varepsilon(f) = 0$. Par 5.1.10, il existe $h_2 \in I_1^{-\varepsilon}(D, \tau)$ telle que $\pi_3^{-\varepsilon}(h_2) = f$. D'après la proposition 5.1.7(2),

$$d_\pm(\pi_3^{-\varepsilon}(h_2)) = d_\pm(h_2) = 1 \in E_1^*/N_{L/E_1}(L^*).$$

Il existe $u \in L^*$ tel que $N_{L/E_1}(u) = d_\pm(h_2)$. La stratégie consiste à trouver $v \in E_2^*$ tel que $N_{E_2/F}(v) = d_\pm(h_2)$ afin d'appliquer le lemme 5.1.11 à v . En écrivant $u = x + y\sqrt{a} + z\sqrt{b} + t\sqrt{ab}$, $x, y, z, t \in F^*$, on a

$$d_\pm(h_2) = (x + y\sqrt{a})^2 - b(z + t\sqrt{a})^2, \quad xy - bzt = 0.$$

Quitte à multiplier $d_\pm(h_2)$ par un élément de $N_{K/F}(K^*)$ ou de $N_{E_2/F}(E_2^*)$, on peut supposer $x \neq 0$. En effet, si $x = 0$, alors au moins un élément parmi y, z ou t est non nul et

- (1) si $z \neq 0$, $N_{K/F}(\sqrt{b}) d_{\pm}(h_2) = N_{L/E_1}(z + \dots)$;
(2) si $t \neq 0$, $N_{E_2/F}(\sqrt{ab}) d_{\pm}(h_2) = N_{L/E_1}(t + \dots)$;
(3) sinon, $x = z = t = 0$ et $y \neq 0$; alors $N_{K/F}(\sqrt{b}) d_{\pm}(h_2) = N_{E_2/F}(y\sqrt{ab})$, on choisit $v = y\sqrt{ab}$ et on finit la preuve comme ci-dessous.
Ainsi, on peut supposer $x \neq 0$ et comme $y = bx^{-1}zt$,

$$\begin{aligned} d_{\pm}(h_2) &= N_{L/E_1}(x + bx^{-1}zt\sqrt{a} + z\sqrt{b} + t\sqrt{ab}) \\ &= N_{L/E_1}((x + t\sqrt{ab})(1 + zx^{-1}\sqrt{b})) \\ &= N_{E_2/F}(x + t\sqrt{ab}) N_{K/F}(1 + zx^{-1}\sqrt{b}). \end{aligned}$$

Le discriminant de h_2 étant défini modulo les normes de K/F , on en déduit qu'il existe $v \in E_2^*$ tel que $N_{E_2/F}(v) = d_{\pm}(h_2)$. D'après le lemme 5.1.11, puisque E_2 est un corps C_2^0 , il existe $f_2 \in I_1^{\varepsilon}(\tilde{D}, \tau_2)$ telle que $d_{\pm}(f_2) = v$. Puisque $d_{\pm}(\rho_2^{\varepsilon}(f_2)) = N_{E_2/F}(v)$ d'après la proposition 5.1.7(1), la forme $h_2 \perp \rho_2^{\varepsilon}(f_2)$ est un antécédent (de rang pair et de discriminant trivial) de f par $\pi_3^{-\varepsilon}$.

Les autres inclusions se prouvent de manière similaire et conduisent à l'exactitude de l'octogone du corollaire 4.3.1 par restriction au sous-module I_2 . \square

Remarque 5.1.13. L'existence de g dans la première partie de la preuve précédente est équivalente à l'exactitude de la suite

$$F^*/N_{K/F}(K^*) \longrightarrow E_2^*/N_{L/E_2}(L^*) \xrightarrow{N_{E_2/F}} F^*/N_{K/F}(K^*),$$

la première application étant induite par l'inclusion. De même, l'existence de v dans la seconde partie de la preuve est équivalente à l'exactitude de la suite

$$E_2^*/N_{L/E_2}(L^*) \xrightarrow{N_{E_2/F}} F^*/N_{K/F}(K^*) \longrightarrow E_1^*/N_{L/E_1}(L^*).$$

On peut déjà trouver des analogues de ces deux suites en [8, Lemma 3.12, 3.13].

Remarque 5.1.14. Lorsque F est un corps parfait, F est un corps C_2^0 si et seulement si $\text{cd}(F) \leq 2$ d'après un théorème de Merkurjev et Suslin (voir le théorème 7.1.6). Ce résultat permet de trouver un grand nombre d'exemples de corps sur lesquels le résultat précédent est vrai.

5.2 Formes de Pfister hermitiennes

Les formes de Pfister jouent un rôle central dans la théorie algébrique des formes quadratiques. Ces formes sont introduites par Pfister dans [58] en 1965. Dans cet article, Pfister montre qu'elles jouissent de propriétés remarquables : par exemple, l'ensemble des valeurs

non nulles représentées par une forme de Pfister est un groupe multiplicatif et une forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique. Ces propriétés (entre autres) permettent à Pfister de bâtir une nouvelle théorie qui sera baptisée “théorie des formes de Pfister” quelques années plus tard.

Dans les années qui suivent, Pfister illustre la puissance de ses précédentes découvertes par d’impressionnants résultats qui donnent une impulsion formidable à la théorie algébrique des formes quadratiques. Il démontre par exemple que, si deux éléments d’un corps sont sommes de 2^n carrés, il en va de même pour leur produit, résultat qui était connu jusque là pour les valeurs $n = 0, 1, 2, 3$ et pour lesquelles les formules étaient explicites. En outre, la théorie des formes de Pfister constitue un outil très puissant dans l’étude des valeurs prises par certains invariants de corps tels que le niveau, la hauteur ou le u -invariant d’un corps. Ainsi, Pfister prouve que le niveau d’un corps s’il est fini est une puissance de 2, résolvant ainsi un problème ouvert depuis plus de 30 ans. De plus, il produit une construction permettant de trouver un corps ayant pour niveau une puissance de 2 donnée.

En 1988 dans [43, §1], Lewis définit le niveau hermitien d’un anneau unitaire à involution (A, σ) (voir la définition 5.2.2) et prouve que l’on peut trouver un anneau à involution qui ait pour niveau hermitien un entier prescrit. De plus, dans le cas des extensions quadratiques de corps et des algèbres de quaternions à division munies de leurs involutions canoniques, Lewis montre que le niveau hermitien, s’il est fini, est une puissance de 2.

Dans [43, §1], Lewis définit également une notion de forme de Pfister hermitienne sur une algèbre à involution (A, σ) (voir définition 5.2.5). Quand A est une extension quadratique de corps ou une algèbre de quaternions à division munies de leurs involutions canoniques, on peut voir qu’une forme de Pfister hermitienne est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique comme conséquence du théorème 6.2.3 de Jacobson. Dans ce même article, Lewis prouve, au moyen de la suite exacte (4.6), que si une forme de Pfister hermitienne ϕ sur une algèbre de quaternions à division munie d’une involution orthogonale est isotrope alors $2 \times \phi$ est hyperbolique et pose la question suivante :

Question 5.2.1. *Sur une algèbre de quaternions à division munie d’une involution (non symplectique), existe-t-il une forme de Pfister hermitienne isotrope qui ne soit pas hyperbolique ?*

En 1997 dans [72] (resp. en 2002 dans [73]), Serhir montre que la réponse à cette question est négative pour les involutions orthogonales (resp. unitaires) prouvant ainsi que le niveau hermitien de telles algèbres à involution s’il est fini est encore une puissance de 2.

Le lecteur intéressé par la théorie des formes de Pfister et ses applications pourra consulter [34, Chapter X, XI], [71, Chapter 4] ou [59]. Les articles [43], [72] et [73] donnent un grand nombre d’informations sur les formes de Pfister hermitiennes et sur le niveau hermitien d’un anneau.

Après avoir rappelé quelques définitions et résultats, nous relierons dans un premier temps l’isotropie d’une forme de Pfister hermitienne sur une algèbre de multi-quaternions à son

hyperbolicité faible. Dans un second temps, après avoir donné une réponse possible à la question 5.1.1(2), nous montrons un analogue faible d'un résultat d'Arason et Pfister.

Résultats de base

Nous supposons tout d'abord que R est un anneau unitaire muni d'une involution σ et que 2 est inversible dans R . Conformément à [43], nous posons les définitions suivantes :

Définition 5.2.2. (1) Un élément de R est un *carré hermitien* s'il peut s'écrire sous la forme $\sigma(x)x$ pour un certain $x \in R$.

(2) Le *niveau hermitien* de R est le plus petit entier n tel que -1 soit somme de carrés hermitiens de R . On écrit $S_h(R, \sigma)$ pour désigner le niveau hermitien de R et on pose $S_h(R, \sigma) = \infty$ si -1 ne s'exprime pas comme somme de carrés hermitiens de R .

On peut citer les exemples suivants :

Exemples 5.2.3. (1) Si $R = \mathbb{C}$ et si σ est la conjugaison complexe, $S_h(R, \sigma) = \infty$.

(2) Si R est un corps de nombres muni d'une involution σ alors $S_h(R, \sigma) \leq 2$ en appliquant le principe de Hasse.

(3) Si R est une algèbre de quaternions à division sur un corps de nombres munie de son involution canonique alors $S_h(R, \sigma) = 1$ ou ∞ d'après le principe de Hasse.

Les exemples précédents sont dus à Lewis dans [43, §1] ; le lecteur pourra y trouver de nombreux autres exemples de niveaux hermitiens. On peut prouver que le niveau hermitien est toujours une puissance de 2 dans les cas suivants :

Proposition 5.2.4 (Lewis). *Si (R, σ) est une extension quadratique d'un corps K (resp. une K -algèbre de quaternions à division) munie de son involution canonique, alors $S_h(R, \sigma)$ (s'il est fini) est une puissance de 2. Plus précisément, $S_h(R, \sigma)$ vaut la moitié de l'ordre de la forme norme correspondante dans $W(K)$.*

Preuve. Voir [43, Proposition 1.5]. □

Lewis remarque que sa preuve de la proposition 5.2.4 dépend du fait que la forme norme de (R, σ) est une forme de Pfister ce qui le conduit à poser la définition suivante :

Définition 5.2.5. Supposons que (A, σ) soit une K -algèbre simple centrale munie d'une K/F -involution. Une *n -forme de Pfister hermitienne* est une forme hermitienne sur (A, σ) qui est isométrique à l'induite à (A, σ) d'une n -forme de Pfister quadratique sur F .

En rapport avec le résultat de Pfister mentionné dans l'introduction concernant l'isotropie des formes de Pfister, on a le résultat suivant :

Proposition 5.2.6 (Pfister-Jacobson-Serhir). *Si (A, σ) est (1) un corps commutatif et $\sigma = \text{id}_K$, (2) une extension quadratique munie de son automorphisme non trivial, (3) une algèbre de quaternions à division munie de son involution canonique, (4) une algèbre de quaternions à division munie d'une involution orthogonale ou (5) une algèbre de quaternions à division munie d'une involution unitaire, une forme de Pfister hermitienne sur (A, σ) est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique.*

Preuve. Le cas (1) est le résultat prouvé par Pfister en 1966 : on pourra en trouver une preuve en [34, Chapter X, Corollary 1.6]. Dans les cas (2) et (3), l'application trace $W(A, \sigma) \rightarrow W(K)$ donnée par la multiplication par la forme norme est injective d'après le théorème 6.2.3 de Jacobson et la conclusion provient de (1). Le cas (4) est un résultat dû à Serhir en 1997 et se trouve en [72, Proposition 3.1]. Le cas (5) a également été prouvé par Serhir en 2002 en [73, Théorème 1.4]. \square

Cette proposition permet d'obtenir un corollaire qui généralise la proposition 5.2.4 :

Corollaire 5.2.7 (Pfister-Lewis-Serhir). *En conservant les notations de la proposition 5.2.6, le niveau hermitien de (A, σ) pour les cas (1) à (5) lorsqu'il est fini est une puissance de 2.*

Preuve. Soit r l'entier tel que $2^r \leq S_h(A, \sigma) < 2^{r+1}$. On conclut en appliquant la proposition 5.2.6 à la forme de Pfister hermitienne $2^{r+1} \times \langle 1 \rangle$ qui, par définition du niveau hermitien, est isotrope. Alors, $2^{r+1} \times \langle 1 \rangle = 0 \in W(A, \sigma)$ donc $2^r \times \langle 1 \rangle \simeq 2^r \times \langle -1 \rangle$ et -1 est somme de 2^r carrés hermitiens. \square

Remarque 5.2.8. Dans le corollaire 5.2.7, le cas (1) est dû à Pfister en 1966, les cas (2) et (3) à Lewis en 1988 (voir proposition 5.2.4) et les cas (4) et (5) à Serhir en 1997 et en 2002 (voir [72, Corollaire 3.2] et [73, Corollaire 1.5]).

Isotropie des formes de Pfister hermitiennes sur une algèbre de multi-quaternions

Les résultats du paragraphe précédent nous conduisent à formuler les questions suivantes sur une algèbre simple centrale à involution (A, σ) :

Questions 5.2.9. (1) *Est-il vrai qu'une forme de Pfister hermitienne sur (A, σ) est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique ?*
 (2) *Est ce que $S_h(A, \sigma)$ lorsqu'il est fini est une puissance de 2 ?*

Ces questions sont déjà implicitement posées dans l'article [43] de Lewis. Dans la suite de ce paragraphe, nous essayons de donner un début de réponse à la question 5.2.9(1) en reliant l'isotropie d'une forme de Pfister hermitienne sur une algèbre de multi-quaternions à son hyperbolicité faible. Rappelons qu'une forme hermitienne (V, h) sur (A, σ) est *faiblement isotrope* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \times h = 0 \in W(A, \sigma)$.

Proposition 5.2.10. *Supposons que $A = Q_1 \otimes_K \cdots \otimes_K Q_n$ soit une K -algèbre à division telle que chaque Q_i soit une K -algèbre de quaternions et $\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n$ où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont des K/F -involutions de même espèce. Alors, si une forme de Pfister hermitienne sur (A, σ) est isotrope, elle est faiblement hyperbolique. Plus précisément, si A est une extension quadratique munie de son automorphisme non trivial (i.e. si $n = 0$) et si h est isotrope alors h est hyperbolique ; si $n \geq 1$ et si h est une forme de Pfister isotrope, $(\frac{\deg A}{2})h$ est hyperbolique.*

Preuve. Cette preuve généralise une preuve présentée par Serhir en [73, Proposition 2.1] pour les algèbres de biquaternions. La clé de la preuve est de montrer que, sous les hypothèses faites sur (A, σ) , l'octogone exact du corollaire 4.3.1 existe avant d'utiliser certaines de ses applications pour terminer la preuve. Nous notons

(P_n) : la proposition 5.2.10 est vraie pour n algèbres de quaternions.

Nous supposons tout d'abord que σ est une involution unitaire et nous allons prouver la propriété (P_n) par récurrence sur n . Nous savons que (P_0) et (P_1) sont vraies dans le cas d'une involution unitaire d'après 5.2.6(2) et 5.2.6(5). Supposons que (P_{n-1}) soit vraie dans le cadre des involutions de seconde espèce. D'après un théorème d'Albert (voir [33, Proposition 2.22]), $(Q_n, \sigma_n) = (Q \otimes_F K, \gamma \otimes \sigma_n|_K)$ où Q est une F -algèbre de quaternions et où γ est son involution canonique. Supposons que $Q = (a_n, b_n)_F$ où $(a_n, b_n)_F$ est l'algèbre de quaternions engendrée par les éléments i et j sujets aux relations $i^2 = a_n$, $j^2 = b_n$, $ij = -ji$. Posons $\lambda_1 = i \otimes 1$, $\mu_1 = j \otimes 1$ et $L_1 = F(\lambda_1)$. Il est facile de voir que le centralisateur de L_1 dans Q_n est $L_1 \otimes_F K$. En outre, K et L_1 sont deux extensions linéairement disjointes sur F (sinon $K = L_1$ ce qui contredit le fait que Q_n soit une algèbre à division) et par un argument de théorie des corps, $L_1 \otimes_F K$ est un corps. Ceci étant, on pose $\lambda = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \lambda_1$, $\mu = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \mu_1$ et $L = F(\lambda)$. Par ce qui précède, il est facile de vérifier que ces éléments vérifient les hypothèses (4.10) et que $\tilde{A} = Q_1 \otimes_K \cdots \otimes_K Q_{n-1} \otimes_K (L \otimes_F K)$ est munie de l'involution de deuxième espèce σ_1 ; ainsi, l'octogone exact du corollaire 4.3.1 existe. Si h est une forme de Pfister hermitienne isotrope sur (A, σ) alors nous pouvons supposer que $h = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ avec $a_i \in F^*$. D'après la proposition 4.4.1(i),

$$\pi_1^1(h) \simeq \langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h$$

et puisque h est isotrope sur (A, σ) , $\pi_1^1(h)$ est isotrope sur (\tilde{A}, σ_1) . De plus, $\pi_1^1(h)$ est une forme de Pfister hermitienne sur (\tilde{A}, σ_1) (car $\mu^2 \in L$ qui est le sous-corps fixe de σ_1 dans $L \otimes_F K$), et, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h) = 0 \in W(\tilde{A}, \sigma_1).$$

L'application de restriction ρ_3^1 est un morphisme de groupes ce qui permet de raffiner l'expression précédente en

$$2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h) = 0 \in W(A, \sigma). \quad (5.9)$$

Or

$$\langle -\mu^2 \rangle \simeq \langle 1 \rangle,$$

puisque $\sigma(\mu^{-1})(-\mu^2)\mu^{-1} = 1$ et en substituant $\langle 1 \rangle$ à $\langle -\mu^2 \rangle$ dans (5.9), on obtient finalement $(\frac{\deg A}{2})h = 0$ dans $W(A, \sigma)$.

Supposons ensuite que toutes les involutions σ_i soient orthogonales. Nous savons que la propriété (P_1) est vraie dans ce cadre d'après le résultat 5.2.6(3) de Serhir. Comme pour le cas unitaire, nous montrons que la propriété (P_n) est vraie par récurrence sur n . Puisque σ_n est orthogonale, il existe λ_1 et $\mu_1 \in Q_n^*$ vérifiant $\sigma_n(\lambda_1) = \lambda_1$, $\sigma_n(\mu_1) = -\mu_1$, $\lambda_1\mu_1 = -\mu_1\lambda_1$ et $L_1 = K(\lambda_1)$ est une extension quadratique de K . On pose $\lambda = 1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1$, $\mu = 1 \otimes \cdots \otimes \mu_1$ et $L = K(\lambda)$. L'involution $\tau = \text{Int}(\mu) \circ \sigma$ est une involution symplectique sur A (d'après 1.1.6(1)) et on a un isomorphisme

$$\Gamma : W(A, \sigma) \simeq W^{-1}(A, \tau)$$

donné par la multiplication par μ . En outre, l'octogone exact de 4.3.1 existe pour l'algèbre à involution (A, τ) . Si h est une forme de Pfister hermitienne isotrope sur (A, σ) alors la forme $\Gamma(h) = \mu h$ est isotrope. Par suite, $\pi_2^{-1}(\mu h)$ est une forme de Pfister hermitienne isotrope sur (\tilde{A}, τ_2) puisque

$$\pi_2^{-1}(\mu h) \simeq \langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h$$

d'après la proposition 4.4.1(iii). Comme τ est symplectique, τ_2 est orthogonale et on en déduit, d'après l'hypothèse de récurrence, que

$$2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h) = 0 \in W(\tilde{A}, \tau_2).$$

Via ρ_2^1 , on peut raffiner l'expression précédente en

$$2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes \lambda \mu h) = 0, \quad 2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes \mu h) = 0 \in W^{-1}(A, \tau)$$

et, puisque $\tau(\mu) = -\mu$, $2^{n-1}\mu h$ est hyperbolique sur (A, τ) ce qui équivaut au fait que $2^{n-1}h$ est hyperbolique sur (A, σ) .

Supposons enfin que σ est de première espèce et qu'au moins une involution parmi les σ_i soit symplectique ; nous pouvons supposer que σ_n est symplectique. Nous savons que la propriété (P_1) est vraie dans ce cadre d'après le résultat 5.2.6(3) de Lewis. Nous montrons directement la propriété (P_n) dans ce cadre pour $n > 1$ en nous servant du cas unitaire établi auparavant. Supposons que $Q_n = (a_n, b_n)_F$ où $(a_n, b_n)_F$ est l'algèbre de quaternions engendrée par les éléments i et j sujets aux relations $i^2 = a_n$, $j^2 = b_n$, $ij = -ji$. Nous vérifions les hypothèses (4.10) pour (A, σ) en posant $\lambda = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes i$, $\mu = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes j$ et $L = F(\lambda)$. Par suite, l'octogone exact du corollaire 4.3.1 existe et $\tilde{A} = Q_1 \otimes_K \cdots \otimes_K Q_{n-1} \otimes_K L$. Si h est une forme de Pfister hermitienne isotrope sur (A, σ) alors, puisque

$$\pi_1^1(h) \simeq \langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h$$

d'après la proposition 4.4.1(i), $\pi_1^1(h)$ est une forme de Pfister hermitienne isotrope sur (\tilde{A}, σ_1) . Puisque \tilde{A} est munie de l'involution unitaire σ_1 , la conclusion provient de la propriété (P_{n-1}) pour les involutions unitaires et de calculs identiques à ceux effectués ci-dessus. \square

Remarques 5.2.11. (1) La proposition 5.2.10 a été démontrée indépendamment et de manière différente par Mahmoudi en [47, Theorem 25.2] : sa preuve est basée sur le même genre d'arguments mais elle utilise le fait que, dans les cas d'existence de l'octogone de 4.3.1, $\ker \pi_1^\varepsilon \cap \ker \pi_2^\varepsilon$ est inclus dans la 2-torsion du module $W^\varepsilon(A, \sigma)$.

(2) La proposition 5.2.10 était déjà connue pour les algèbres de biquaternions munies du produit tensoriel des deux involutions canoniques d'après un résultat de Serhir : voir [73, Proposition 2.1].

(3) On pourrait croire que l'équivalence de Morita peut servir à transporter le résultat de la proposition 5.2.10 aux algèbres à involutions de première espèce. Malheureusement, celle-ci ne respecte pas (apparemment) la notion de forme de Pfister hermitienne définie en 5.2.5.

(4) Il n'est pas étonnant de voir que le coefficient de faible hyperbolicité de h dans la proposition 5.2.10 est une puissance de 2. En effet d'après un théorème de Scharlau en 1970, on sait que la torsion dans le groupe de Witt est 2-primaire : voir [70]. Le résultat correspondant dans l'anneau de Witt est dû à Pfister : voir [71, Chapter 2, Theorem 10.12].

(5) Jean-Pierre Tignol m'a fait remarquer qu'en utilisant le principe local-global de Lewis et Unger (voir [46, Theorem 4.1]), on peut prouver que les formes de Pfister hermitiennes isotropes sont de torsion comme dans la proposition précédente. En effet, pour chaque ordre, la signature d'une forme de Pfister hermitienne est soit nulle, soit égale au degré de l'algèbre d'endomorphismes (l'involution adjointe se décomposant en produit tensoriel d'involutions sur des algèbres de degré 2). Or, la forme étant isotrope, sa signature ne peut valoir le degré en aucun ordre ; sa signature est nulle partout et, d'après le principe local-global de Lewis et Unger, on en déduit que la forme est de torsion. Ce raisonnement ne donne toutefois pas d'estimation du coefficient de torsion.

Corollaire 5.2.12. *Avec les mêmes notations que dans la proposition 5.2.10, si $2^{r-1} \leq S_h(A, \sigma) < 2^r$, alors $2^{r+n-1}\langle 1 \rangle = 0 \in W(A, \sigma)$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la forme $2^r\langle 1 \rangle$ qui, par définition du niveau hermitien, est isotrope. On conclut comme en 5.2.7. \square

Remarque 5.2.13. Ce corollaire a déjà été remarqué par Lewis en [43, Corollary p. 473] pour une algèbre de quaternions à involution orthogonale et par Serhir en [73, Corollary 2.2] pour une algèbre de biquaternions munie du produit tensoriel d'involutions canoniques.

Sur la torsion d'un sous-module du groupe de Witt

Dans ce dernier paragraphe, nous nous proposons de donner une réponse possible à la question 5.1.1(2). Il semble naturel de définir $I^n(A, \sigma)$ comme étant le sous- $W(K, \sigma|_K)$ -module de $W(A, \sigma)$ engendré par les n -formes de Pfister hermitiennes.

Remarques 5.2.14. (1) Si $A = K$ et $\sigma = \text{id}_K$, il est clair que $I^n(A, \sigma) = I^n(K)$.

(2) Si A est une extension quadratique de corps munie de son automorphisme non trivial alors, en conservant les notations du chapitre 3,

$$I^1(A, \sigma) = I_1^1(A, \sigma), \quad I_2(A, \sigma) \stackrel{6.3.2}{=} I_1(A, \sigma)^2 = I^2(A, \sigma).$$

(3) Si A est une algèbre de quaternions munie de son involution canonique, on a

$$I^2(A, \sigma) \subseteq I^1(A, \sigma) = I_1(A, \sigma) = I_2(A, \sigma).$$

(4) En général, on a les inclusions

$$\cdots \subset I^n(A, \sigma) \subset I^{n-1}(A, \sigma) \subset \cdots \subset I^1(A, \sigma) \subset W(A, \sigma).$$

Une conséquence célèbre d'un théorème d'Arason et Pfister sur la dimension des formes de $I^n(K)$ anisotropes (voir le théorème 6.2.2) est le résultat suivant :

Corollaire 5.2.15 (Arason-Pfister).

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n(K) = 0.$$

Preuve. Voir [71, Chapter 4, Theorem 5.6, Corollary 5.7]. □

Il est naturel de se demander si un tel résultat peut demeurer exact pour les modules $I^n(A, \sigma)$. Cette question semble difficile ; nous pouvons seulement prouver :

Proposition 5.2.16. *Supposons que $A = Q_1 \otimes_K \cdots \otimes_K Q_n$ soit une K -algèbre à division telle que chaque Q_i soit une K -algèbre de quaternions et $\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n$ où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont des K/F -involutions de même espèce. Si A est une extension quadratique munie de son automorphisme non trivial (i.e., si $n = 0$), $\bigcap_{m=1}^{\infty} I^m(A, \sigma) = 0$; si $n \geq 1$, $\bigcap_{m=1}^{\infty} I^m(A, \sigma)$ est un module de $(\frac{\text{deg} A}{2})$ -torsion.*

Preuve. Nous conservons les notations de la preuve de la proposition 5.2.10.

Si A est une extension quadratique munie de son automorphisme non trivial ou une algèbre de quaternions à involution canonique, la conclusion provient du corollaire 5.2.15, π_1^1 étant injective d'après le théorème 6.2.3.

Si A est une algèbre de quaternions à involution unitaire et si $h \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m(A, \sigma)$ alors on peut écrire $h = \bigperp_{i=1}^k \alpha_i \cdot h_i$ où $\alpha_i = \pm 1$ et h_i est une forme de Pfister hermitienne. L'octogone exact du corollaire 4.3.1 existe et, pour $i = 1, \dots, k$

$$\pi_1^1(h_i) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m(\tilde{A}, \sigma_1) = 0$$

car \tilde{A} est une extension quadratique de corps. Ceci implique, d'après le théorème 4.4.4(i), que h_i est isotrope puis que h_i est hyperbolique d'après la proposition 5.2.6. La forme h est donc hyperbolique.

Si A est une algèbre de quaternions à involution orthogonale σ et si $h \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m(A, \sigma)$, écrivons $h = \bigperp_{i=1}^k \alpha_i \cdot h_i$ où $\alpha_i = \pm 1$ et h_i est une forme de Pfister hermitienne. On a $\pi_1^{-1}(\mu h_i) = 0$ et μh_i est isotrope sur (A, τ) (en vertu de 4.4.4(i)). Par suite, h_i est isotrope sur (A, σ) puis hyperbolique d'après le théorème 5.2.6(4). En conséquence, h est hyperbolique.

Notons alors

(P'_n) la proposition 5.2.16 est vraie pour n algèbres de quaternions.

La suite de la preuve étant similaire à la preuve de 5.2.10, nous n'en donnons que les grandes lignes.

Si σ est une involution unitaire, on procède par récurrence sur n . On a vérifié ci-dessus la véracité de la propriété (P'_1). Si $h \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m(A, \sigma)$ alors $\pi_1^1(h) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m(\tilde{A}, \sigma_1)$ puisque

$$\pi_1^1(h) \simeq \langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h.$$

Par récurrence,

$$2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h) = 0 \in W(\tilde{A}, \sigma_1)$$

et, en appliquant ρ_3^1 ,

$$2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h) = 0 \in W(A, \sigma).$$

On en déduit que $\frac{\deg A}{2}h$ est hyperbolique.

Supposons maintenant que toutes les involutions σ_i sont orthogonales. Une fois encore, la propriété (P'_1) est vraie et on procède par récurrence sur n . Si $h \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m(A, \sigma)$ alors, comme lors de la preuve de 5.2.10, et par récurrence on voit que

$$2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes h) = 0 \in W(\tilde{A}, \tau_2)$$

et en appliquant ρ_2^1 de part et d'autre, on obtient finalement

$$2^{n-2}(\langle 1, -\mu^2 \rangle \otimes \mu h) = 0 \in W^{-1}(A, \tau).$$

Ainsi, $\frac{\deg A}{2}h$ est hyperbolique.

Enfin, si σ est de première espèce et si au moins une des involutions σ_i est symplectique, la conclusion provient comme lors de la preuve de 5.2.10, de la propriété au rang inférieur pour les involutions unitaires. \square

Chapitre 6

Critères de Harrison, équivalences de Witt et équivalences de réciprocity

6.1 Introduction

Depuis l'intervention de Witt en 1937, l'étude de l'anneau de Witt s'est substituée à l'étude des formes bilinéaires sur les corps commutatifs. Une des questions de base dans la théorie algébrique des formes quadratiques est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux corps K et L aient des anneaux de Witt isomorphes : dans ce cas, les corps K et L sont dits *Witt-équivalents*. En 1970 dans [29], Harrison traduit l'équivalence de Witt dans les termes suivants :

Théorème 6.1.1 (Harrison). *Soient K et L deux corps de caractéristique différente de 2. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) K et L sont Witt-équivalents.
- (2) Il existe un isomorphisme de groupes $t : K^*/K^{*2} \rightarrow L^*/L^{*2}$ envoyant -1 sur -1 et tel que la forme quadratique $\langle x, y \rangle$ représente 1 sur K si et seulement si la forme quadratique $\langle t(x), t(y) \rangle$ représente 1 sur L pour tous $x, y \in K^*$.

Le théorème 6.1.1 est connu dans la littérature sous le nom de "critère de Harrison". En 1973 dans [16, Theorem 2.3], Cordes montre que les deux conditions du théorème 6.1.1 sont encore équivalentes à la condition suivante appelée "condition de Harrison-Cordes" :

- (3) Il existe un isomorphisme de groupes $t : K^*/K^{*2} \rightarrow L^*/L^{*2}$ envoyant -1 sur -1 vérifiant $t(D_K(\langle 1, a \rangle)) = D_L(\langle 1, t(a) \rangle)$, où $D_K(\langle 1, a \rangle)$ est l'ensemble des classes de carrés non nuls de K^*/K^{*2} représentés sur K par la forme quadratique $\langle 1, a \rangle$.

Ce critère permet ensuite à Cordes de classer les anneaux de Witt d'ordres au plus 32 à équivalence de Witt près par leur structure de groupe : voir [16, Theorem 7.1].

En 1985 dans [4], Baeza et Moresi étudient les possibilités d'étendre le critère de Harrison aux corps de caractéristique 2. Ils montrent d'une part que les anneaux de Witt

bilinéaires de deux corps K et L de caractéristique 2 sont isomorphes si et seulement si K et L sont isomorphes si $\dim_{K^2} K = \dim_{L^2} L > 2$ et étudient les cas $\dim_{K^2} K = \dim_{L^2} L = 1, 2$: voir [4, Theorem 2.9, Proposition 2.10]. D'autre part, dans [4, Theorem 3.1], ils caractérisent l'isomorphie des modules de Witt quadratiques $W_q(K)$ et $W_q(L)$ de deux corps K et L de caractéristique 2 par une condition similaire à la condition d'Harrison-Cordes et une condition mixte mettant en jeu le sous-groupe image de K et L par l'application d'Artin-Schreier :

Théorème 6.1.2 (Baeza-Moresi). *Pour deux corps K et L de caractéristique 2, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un isomorphisme d'anneaux $\Phi : W(K) \rightarrow W(L)$ et un isomorphisme de groupes $\Psi : W_q(K) \rightarrow W_q(L)$ tels que*

$$\Psi(b.q) = \Phi(b).\Psi(q)$$

pour tout $b \in W(K)$ et pour tout $q \in W_q(K)$.

(2) *Il existe des isomorphismes de groupes*

$$t_1 : K^*/K^{*2} \rightarrow L^*/L^{*2}, \quad t_2 : K/\mathcal{P}(K) \rightarrow L/\mathcal{P}(L)$$

tels que

$$t_1(D_K(\langle 1, a \rangle)) \subseteq D_L(\langle 1, t_1(a) \rangle), \quad t_1(D_K[1, b]) \subseteq D_L[1, t_2(b)]$$

pour tout $a \in K^$ et pour tout $b \in K$ (où $\mathcal{P}(K) = \{a + a^2 \mid a \in K\}$).*

Ce genre de critère est très utile ; à titre d'exemple, le critère de Harrison a été utilisé par Mináč et Spira en 1996 pour relier l'équivalence de Witt de deux corps K et L à l'isomorphie de groupes G_K et G_L (appelés W-groupes), G_K étant le groupe de Galois d'une certaine extension $K^{(3)}$ de K : voir [54].

Pour toutes ces raisons, il semble utile d'essayer d'obtenir de tels critères d'isomorphie concernant le groupe de Witt d'algèbres à involutions. Après avoir rappelé quelques préliminaires lors de la section 6.2, nous donnons, dans la section 6.3 de tels critères dans deux cas particuliers. Nous obtenons tout d'abord un critère similaire à 6.1.1 pour les groupes de Witt d'extensions quadratiques de corps munies de leurs automorphismes non triviaux :

Théorème 6.1.3. *Soient k et l deux corps de caractéristique différente de 2. Soit $K = k(\sqrt{a})$ (resp. $L = l(\sqrt{b})$) une extension quadratique de k (resp. l) munie de son automorphisme non trivial σ_a (resp. σ_b). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$W(K, \sigma_a) \simeq W(L, \sigma_b)$ en tant qu'anneaux.*

(2) *Il existe un isomorphisme de groupes $t : k^*/N_{K/k}(K^*) \rightarrow l^*/N_{L/l}(L^*)$ envoyant -1 sur -1 tel que la forme quadratique $\langle\langle a, x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur k si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle b, t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur l pour tous $x, y \in k^*$.*

Un exemple montre que, dans l'assertion (2), la condition $t(-1) = -1$ ne découle pas des deux autres (voir exemple 6.3.4). Ensuite, dans le cas d'une algèbre de quaternions à division munie d'une involution canonique, nous obtenons le théorème 6.3.7 qui présente, en un certain sens, un critère à la fois similaire à 6.1.1 et à 6.1.2. Deux exemples indiquent que le choix de la structure de module pour un tel critère paraît être le plus judicieux (voir exemples 6.3.11). Si à première vue, le théorème 6.3.7 paraît plutôt correspondre aux résultats de Baeza et Moresi, la similitude avec le critère de Harrison apparaît lorsque l'on choisit $K = L$ (voir le corollaire 6.3.9).

Un problème intéressant est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux corps globaux soient Witt-équivalents. En 1985, Baeza et Moresi montrent que deux corps globaux de caractéristique 2 sont toujours Witt-équivalents (voir [4] ou [60, §2]). En outre, si on combine leurs résultats avec le fait que $I^2(K) = 0$ si K est un corps global, on en déduit que si deux corps globaux sont Witt-équivalents alors soit $\text{car}(K), \text{car}(L) \neq 2$ soit $\text{car}(K) = \text{car}(L) = 2$ (voir [60, §2]) ce qui permet d'exclure les corps de caractéristique 2 du propos. En 1994 dans [60, §3, §4], Perlis, Szymiczek, Conner et Litherland terminent cette classification en prouvant le théorème suivant :

Théorème 6.1.4 (Perlis-Szymiczek-Conner-Litherland). *Soient K et L deux corps globaux de caractéristique différente de 2. Alors K et L sont Witt-équivalents si et seulement si il existe une équivalence de réciprocity entre K et L (voir la définition 6.4.7).*

En combinant ce résultat avec des résultats obtenus par Carpenter, Perlis, Szymiczek, Conner et Litherland obtiennent un principe de Hasse pour les isomorphismes d'anneaux de Witt de corps globaux : voir [60, §6]. Dans la section 6.4, nous esquissons les grandes lignes de la preuve du théorème 6.1.4 en mentionnant tout particulièrement l'utilisation du critère de Harrison pour prouver le sens indirect de ce résultat. Nous terminons ce chapitre en utilisant le théorème 6.1.3 afin d'obtenir le résultat suivant, similaire à 6.1.4 dans son énoncé :

Théorème 6.1.5. *Soient k et l deux corps globaux de caractéristique différente de 2. Soit $K = k(\sqrt{a})$ (resp. $L = l(\sqrt{b})$) une extension quadratique de k (resp. l) munie de son automorphisme non trivial σ_a (resp. σ_b). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

:

- (1) $W(K, \sigma_a) \simeq W(L, \sigma_b)$ en tant qu'anneaux.
- (2) Il existe une (a, b) -équivalence de réciprocity quadratique entre k et l (voir la définition 6.4.10).

6.2 Résultats de base

Durant tout le reste de ce chapitre, tous les corps seront supposés de caractéristique différente de 2.

6.2.1 Préliminaires

Nous énonçons tout d'abord une condition équivalente aux deux conditions du théorème 6.1.1 et qui préfigure la forme que prendront nos résultats dans la suite de ce chapitre :

Lemme 6.2.1. *Soient K et L deux corps de caractéristique différente de 2. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) K et L sont Witt-équivalents.
- (2) Il existe un isomorphisme de groupes $t : K^*/K^{*2} \rightarrow L^*/L^{*2}$ envoyant -1 sur -1 et tel que la forme quadratique $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur K si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur L pour tous $x, y \in K^*$.

Preuve. La forme quadratique $\langle x, y \rangle$ représente 1 sur K si et seulement si la forme quadratique $\langle 1, -x, -y \rangle$ est isotrope sur K ce qui est équivalent à ce que la forme quadratique $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur K (en raisonnant avec le discriminant à signe). L'équivalence annoncée résulte alors de la condition (2) du critère de Harrison 6.1.1. \square

Nous avons également besoin du résultat suivant appelé ‘‘Hauptsatz de Arason-Pfister’’ qui donne une borne inférieure optimale pour la dimension des formes quadratiques anisotropes de I^n :

Théorème 6.2.2 (Arason-Pfister). *Soit q une forme quadratique anisotrope sur K . Si q est un élément de $I^n(K)$ alors $\dim q \geq 2^n$.*

Preuve. Voir [34, Chapter X, Theorem 3.1] ou [71, Chapter 4, Theorem 5.6]. \square

Nous rappelons également le théorème suivant dû à Jacobson :

Théorème 6.2.3 (Jacobson). *Soit L/K une extension quadratique et (resp. $(a, b)_K = D$ une algèbre de quaternions à division) munie de son involution canonique $-$ (resp. γ). Alors les applications ‘‘traces’’*

$$W(L, -) \rightarrow W(K), \quad W(D, \gamma) \rightarrow W(K)$$

sont injectives.

Preuve. Voir [71, Chapter 10, 1.1, 1.2, 1.7] ou [30]. \square

6.2.2 Equivalences en chaîne

Tout au long de cette sous-section, nous utilisons les notations de [34, Chapter I, §5].

Soient $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ et $q' = \langle a'_1, \dots, a'_n \rangle$ deux formes quadratiques sur K . Elles sont dites *simplement équivalentes* si il existe $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\langle a_i, a_j \rangle \simeq \langle b_i, b_j \rangle$ et $a_k = b_k$ pour tous les k différents de i et de j . Deux formes quadratiques sous

forme diagonale sont *équivalentes en chaîne* si il existe une suite de formes quadratiques diagonales f_0, \dots, f_m telles que $f = f_0$, $g = f_m$ et telles que f_i soit simplement équivalente à f_{i+1} pour $0 \leq i \leq m - 1$. De la définition, il découle directement que deux formes équivalentes en chaîne sont isométriques. En fait, la réciproque est aussi vraie d'après le *théorème d'équivalence en chaîne de Witt* :

Théorème 6.2.4 (Witt). *Si f et g sont des formes quadratiques sous forme diagonale, et si f est isométrique à g , alors f est équivalente en chaîne à g .*

Preuve. Voir [34, Chapter I, Theorem 5.2] ou la proposition 6.2.6 ci-dessous. □

Remarque 6.2.5. Dans la littérature mathématique, il existe des notions d'équivalence simple et d'équivalence en chaîne propres aux formes de Pfister appelées respectivement p -équivalence simple et p -équivalence en chaîne. Ces notions présentent des analogies avec celles introduites ci-dessus : voir [34, Chapter X, §1] ou [71, Chapter 4, §1].

Supposons maintenant que D soit une K -algèbre à division munie d'une involution τ d'espèce quelconque. Toute forme ε -hermitienne sur (D, τ) étant diagonalisable (voir 1.2.2), nous pouvons définir sans difficultés les notions d'équivalence simple et d'équivalence en chaîne pour les formes hermitiennes sur (D, τ) . Comme pour les formes quadratiques, nous avons le résultat suivant :

Proposition 6.2.6. *Soient f et g deux formes ε -hermitiennes sur (D, τ) que l'on suppose sous forme diagonale. Alors f et g sont isométriques si et seulement si f et g sont équivalentes en chaîne.*

Preuve. Le sens indirect de la proposition est clair par définition. Pour le sens direct, tout se passe comme pour les formes quadratiques : nous nous basons sur [34, Chapter I, Theorem 5.2]. Remarquons tout d'abord que l'équivalence simple permet de permuter les coefficients d'une diagonalisation. Soient $f = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ et $g = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ deux formes ε -hermitiennes que l'on suppose isométriques. On procède par récurrence sur n : si $n = 1, 2$, il n'y a rien à montrer. Supposons maintenant $n \geq 3$. Parmi les formes ε -hermitiennes équivalentes en chaîne à f , on choisit une forme ε -hermitienne $f' = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ qui soit telle qu'une de ses sous-formes $\langle c_1, \dots, c_p \rangle$ représente b_1 pour p le plus petit possible (f' existe d'après l'axiome du bon ordre).

Nous allons montrer que $p = 1$. Si au contraire $p \geq 2$, alors il existe $d_1, \dots, d_p \in D^*$ tels que :

$$b_1 = \sum_{i=1}^p \sigma(d_i) c_i d_i. \tag{6.1}$$

Par minimalité de p , aucune sous-somme de (6.1) n'est nulle et en particulier

$$d = \sigma(d_1) c_1 d_1 + \sigma(d_2) c_2 d_2 \neq 0.$$

Par hypothèse, f est équivalente en chaîne à f' et, puisqu'il existe $d' \in D$ tel que $\langle c_1, c_2 \rangle \simeq \langle d, d' \rangle$, f est aussi équivalente en chaîne à $\langle d, c_3, \dots, c_p, \dots, c_n, d' \rangle$. Ainsi, b_1 est représenté par la forme $\langle d, c_3, \dots, c_p \rangle$ qui est de rang $p - 1$ ce qui contredit la minimalité de p . Par conséquent, $p = 1$ puis $\langle b_1 \rangle \simeq \langle c_1 \rangle$.

Enfin, puisque f est isométrique à g , $\langle b_1, c_2, \dots, c_n \rangle \simeq \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ et, en utilisant la simplification de Witt (voir 1.2.2), $\langle c_2, \dots, c_n \rangle \simeq \langle b_2, \dots, b_n \rangle$. Par récurrence, $\langle c_2, \dots, c_n \rangle$ est équivalente en chaîne à $\langle b_2, \dots, b_n \rangle$ puis f est équivalente en chaîne à g . \square

Remarque 6.2.7. La proposition précédente est très utile pour montrer des propriétés sur les formes quadratiques (resp. hermitiennes) de rang quelconque connaissant des propriétés sur les formes quadratiques (resp. hermitiennes) de rang 2 : voir les preuves des théorèmes 6.1.1, 6.1.3 et 6.3.7.

6.3 Analogues du critère de Harrison

Dans cette section, nous établissons des résultats analogues au critère de Harrison 6.1.1 pour les extensions quadratiques munies de leurs automorphismes non triviaux et pour les algèbres de quaternions à division munies de leurs involutions canoniques.

6.3.1 Cas des extensions quadratiques

On démontre le théorème 6.1.3 qui est similaire au théorème 6.1.1 tant dans son énoncé que dans sa preuve :

Théorème Soient k et l deux corps de caractéristique différente de 2. Soit $K = k(\sqrt{a})$ (resp. $L = l(\sqrt{b})$) une extension quadratique de k (resp. l) munie de son automorphisme non trivial σ_a (resp. σ_b). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $W(K, \sigma_a) \simeq W(L, \sigma_b)$ en tant qu'anneaux.
- (2) Il existe un isomorphisme de groupes $t : k^*/N_{K/k}(K^*) \rightarrow l^*/N_{L/l}(L^*)$ envoyant -1 sur -1 tel que la forme quadratique $\langle\langle a, x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur k si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle b, t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur l pour tous $x, y \in k^*$.

Au cours de la preuve, nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 6.3.1. Avec les mêmes notations que dans la sous-section 3.2.2, le discriminant à signe induit un isomorphisme de groupes $d_{\pm} : I_1(K, \sigma_a)/I_2(K, \sigma_a) \simeq k^*/N_{K/k}(K^*)$ (et idem en remplaçant a par b , k par l et K par L).

Preuve. Nous savons que

$$d_{\pm} : I_1(K, \sigma_a) \rightarrow k^*/N_{K/k}(K^*)$$

est un morphisme de groupes de noyau $I_2(K, \sigma_a)$. Si b est un représentant de $\bar{b} \in k^*/N_{K/k}(K^*)$, on a :

$$d_{\pm}(\langle 1, -b \rangle) = (-1)^1 \text{Nrd}_{M_2(K)/K}(\langle 1, -b \rangle) = -\text{Nrd}_K(-b) = b,$$

d'où l'on déduit la surjectivité de d_{\pm} . □

Nous considérons $W(K, \sigma_a)$ et $W(L, \sigma_b)$ en tant qu'anneaux donc I_1 et I_2 en sont des idéaux. De plus, ces idéaux sont reliés de la façon suivante :

Lemme 6.3.2. $(I_1)^2 = I_2$.

Preuve. Un simple calcul de discriminant à signe montre l'inclusion $(I_1)^2 \subseteq I_2$.

Réciproquement, si $\phi \in I_2$ avec $\phi = \langle a_1, \dots, a_{2s} \rangle$, $a_i \in k^*$, $i = 1, \dots, 2s$, alors

$$1 = d_{\pm}(\phi) = (-1)^{\frac{2s(2s-1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^{2s} a_i \right) \in k^*/N_{K/k}(K^*).$$

Nous procédons par récurrence sur s .

Si $s = 1$ et $\phi \simeq \langle a, b \rangle$ alors $-ab = 1 \in k^*/N_{K/k}(K^*)$ et donc $-a = b \in k^*/N_{K/k}(K^*)$. Ainsi, $\phi = \langle a, -a \rangle$ et $\phi \in (I_1)^2$.

Si $s = 2$ et $\phi \simeq \langle a, b, c, d \rangle$ alors $d = abc \in k^*/N_{K/k}(K^*)$ et

$$\phi \simeq \langle a \rangle \otimes \langle 1, ab, ac, bc \rangle \simeq \langle a \rangle \otimes \langle 1, ab \rangle \otimes \langle 1, ac \rangle$$

puis $\phi \in (I_1)^2$.

Supposons $s \geq 3$. On peut écrire $\phi = \langle a, b, c \rangle \perp \phi'$ puis

$$\phi = \underbrace{\langle a, b, c, abc \rangle}_{\alpha} \perp \underbrace{\langle \phi' \perp \langle -abc \rangle \rangle}_{\beta} \in W(K, \sigma_a).$$

Par hypothèse, $d_{\pm}(\phi) = 1$ et $d_{\pm}(\alpha) = 1$ donc $d_{\pm}(\beta) = 1$. Par récurrence, $\beta \in (I_1)^2$ puis $\phi \in (I_1)^2$ ce qui termine la preuve. □

Preuve de 6.1.3 : (1) \Rightarrow (2) : Soit $\Phi : W(K, \sigma_a) \simeq W(L, \sigma_b)$ un isomorphisme d'anneaux. On sait, d'après la proposition 3.2.2, que $I_1(K, \sigma_a)$ est un idéal d'indice 2 (donc maximal) de $W(K, \sigma_a)$. $I_1(K, \sigma_a)$ est en fait l'unique idéal d'indice 2 de $W(K, \sigma_a)$. En effet, si I' est un idéal d'indice 2 de $W(K, \sigma_a)$ alors $\langle 1 \rangle \notin I'$ sinon $I' = W(K, \sigma_a)$. De plus, quel que soit $a \in k^*$, $\langle a \rangle \notin I'$ sinon $\langle a \rangle \otimes \langle a \rangle = \langle 1 \rangle \in I'$ ce qui est faux. Soient maintenant $\langle a \rangle, \langle b \rangle \in W(K, \sigma_a)$. Comme I' est d'indice 2, on a

$$\langle a \rangle, \langle b \rangle \notin I' \Rightarrow \langle a \rangle \perp \langle b \rangle = \langle a, b \rangle \in I'.$$

Par récurrence immédiate, $I_1(K, \sigma_a) \subset I' \subsetneq W(K, \sigma_a)$ et par maximalité, $I' = I_1(K, \sigma_a)$.

Φ est un isomorphisme d'anneaux donc $\Phi(I_1(K, \sigma_a))$ est un idéal maximal de $W(L, \sigma_b)$. D'après la proposition 3.2.2, on sait que le rang $r : W(L, \sigma_b) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneaux surjectif. Par conséquent, $\ker(r \circ \Phi)$ est un idéal d'indice 2 de $W(K, \sigma_a)$, donc $\ker(r \circ \Phi) = I_1(K, \sigma_a)$. Or $\ker(r \circ \Phi) = \Phi^{-1}(\ker(r))$ donc $\Phi^{-1}(I_1(L, \sigma_b)) = I_1(K, \sigma_a)$. En conséquence, $\Phi|_{I_1(K, \sigma_a)} : I_1(K, \sigma_a) \rightarrow I_1(L, \sigma_b)$ est un isomorphisme de groupes et d'après le lemme 6.3.2,

$$\Phi(I_2(K, \sigma_a)) = \Phi(I_1(K, \sigma_a)^2) = \Phi(I_1(K, \sigma_a))^2 = I_1(L, \sigma_b)^2 = I_2(L, \sigma_b).$$

Φ induit par factorisation un isomorphisme de groupes

$$I_1(K, \sigma_a)/I_2(K, \sigma_a) \simeq I_1(L, \sigma_b)/I_2(L, \sigma_b).$$

Ce dernier isomorphisme induit, au moyen du lemme 6.3.1, l'isomorphisme de groupes :

$$t : \begin{cases} k^*/N_{K/k}(K^*) & \rightarrow & l^*/N_{L/l}(L^*) \\ c & \mapsto & d_{\pm}(\Phi(\langle 1, -c \rangle)) \end{cases} .$$

Un simple calcul montre que $t(-1) = -1$. Puisque Φ induit également un isomorphisme de groupes

$$u : I_1(K, \sigma_a)^2/I_1(K, \sigma_a)^3 \simeq I_1(L, \sigma_b)^2/I_1(L, \sigma_b)^3,$$

on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} k^*/N_{K/k}(K^*) \times k^*/N_{K/k}(K^*) & \xrightarrow{\theta_K} & I_1(K, \sigma_a)^2/I_1(K, \sigma_a)^3 \\ \downarrow (t,t) & & \downarrow u \\ l^*/N_{L/l}(L^*) \times l^*/N_{L/l}(L^*) & \xrightarrow{\theta_L} & I_1(L, \sigma_b)^2/I_1(L, \sigma_b)^3 \end{array}$$

où

$$\theta_K(x, y) = \langle 1, -x \rangle \otimes \langle 1, -y \rangle \pmod{I_1(K, \sigma_a)^3}$$

pour tous $x, y \in k^*$ (et idem pour θ_L). Si la forme hermitienne $\langle 1, -x, -y, xy \rangle$ est hyperbolique alors $\langle 1, -x, -y, xy \rangle \in I_1(K, \sigma_a)^3$. Réciproquement, si la forme hermitienne

$\langle 1, -x, -y, xy \rangle \in I_1(K, \sigma_a)^3$, puisque

$$\Psi : \begin{cases} W(K, \sigma_a) & \rightarrow \langle 1, -a \rangle W(k) \\ h & \mapsto \langle 1, -a \rangle \otimes h \end{cases} \quad (6.2)$$

est un isomorphisme de groupes additifs (voir [71, Chapter 10, Theorem 1.2]),

$$\Psi(\langle 1, -x, -y, xy \rangle) \in I^4(k).$$

D'après le Hauptsatz de Arason-Pfister (voir le théorème 6.2.2), la forme quadratique $\Psi(\langle 1, -x, -y, xy \rangle)$ est hyperbolique sur k et par suite la forme hermitienne $\langle 1, -x, -y, xy \rangle$ est hyperbolique sur (K, σ_a) .

Enfin, si la forme quadratique $\langle \langle a, x, y \rangle \rangle$ est hyperbolique sur k alors, d'après (6.2), la forme hermitienne $\langle 1, -x, -y, xy \rangle$ est hyperbolique sur (K, σ_a) puis $\langle 1, -x, -y, xy \rangle \in I_1(K, \sigma_a)^3$. Ainsi, par commutativité du diagramme précédent,

$$0 = u(\theta_K(x, y)) = \theta_L(t(x), t(y)).$$

On en déduit que la forme hermitienne $\langle 1, -t(x), -t(y), t(xy) \rangle \in I_1(L, \sigma_b)^3$ ce qui implique que la forme quadratique $\langle \langle b, t(x), t(y) \rangle \rangle$ est hyperbolique sur l . La réciproque se montre de façon similaire.

(2) \Rightarrow (1) : On définit une application Φ sur les formes diagonales en posant

$$\Phi(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \langle t(a_1), \dots, t(a_n) \rangle.$$

Il nous faut vérifier que cette définition ne dépend pas de la diagonalisation choisie. Si $n = 1$, c'est clair. Si $n = 2$, supposons que $\langle u, v \rangle \simeq \langle u', v' \rangle$ en tant que formes hermitiennes. En prenant le discriminant à signe, on a $uv = u'v' \in k^*/N_{K/k}(K^*)$. En multipliant par la forme $\langle u \rangle$ de part et d'autre et en se servant de l'égalité précédente, on en déduit que la forme hermitienne $\langle 1, -uu', -uv', uv \rangle$ est hyperbolique et, par suite, la forme hermitienne $\langle 1, -t(u)t(u'), -t(u)t(v'), t(u)t(v) \rangle$ l'est également. En multipliant par la forme $\langle t(u) \rangle$, on en déduit que les formes hermitiennes $\langle t(u), t(v) \rangle$ et $\langle t(u')t(v') \rangle$ sont isométriques. Si $n > 2$, le résultat provient du théorème 6.2.6 et du fait que la propriété soit vraie pour $n = 2$. Puisque $t(-1) = -1$, l'application Φ respecte les formes hyperboliques et induit une application bien définie sur les classes de Witt des formes diagonales. Puisque toute classe de Witt admet pour représentant une forme hermitienne diagonale (voir 1.2.2), Φ induit en fait une application entre $W(K, \sigma_a)$ et $W(L, \sigma_b)$. En outre Φ est biadditive et multiplicative (car ϕ est multiplicative sur les formes de rang 1 et que celles-ci engendrent additivement $W(K, \sigma_a)$) et l'inverse de t fournit un inverse pour Φ qui est donc un isomorphisme d'anneaux. \square

Remarques 6.3.3. (1) La preuve précédente est similaire à la preuve du critère de Harrison : voir [29] ou [60, §2] pour une preuve de ce résultat.

(2) Puisque $K^{*2} = D_K(\langle 1 \rangle)$ et que $N_{K/k}(K^*) = D_k(\langle 1, -a \rangle)$, le théorème 6.1.3 est un analogue quadratique du critère de Harrison 6.1.1.

Dans le théorème 6.1.3 la condition $t(-1) = -1$ n'est pas conséquence des autres conditions de l'assertion (2) :

Exemple 6.3.4. Posons $k = \mathbb{Q}_3$ et $l = \mathbb{Q}_5$. Alors

$$k^*/k^{*2} = \{1, -1, 3, -3\}, \quad l^*/l^{*2} = \{1, 2, 5, 10\}, \quad u(k) = u(l) = 4,$$

et l'unique forme anisotrope de dimension 4 sur k (resp. sur l) est $\langle 1, 1, -3, -3 \rangle$ (resp. $\langle 1, -2, -5, 10 \rangle$) (pour tous ces résultats, on peut consulter [34, Chapter 6, Theorem 2.2]). Posons alors $K = k(\sqrt{3})$ et $L = l(\sqrt{2})$. Par factorisation, il existe un unique morphisme surjectif de groupes $\theta : k^*/k^{*2} \rightarrow k^*/D_k(\langle 1, -3 \rangle)$. Par conséquent $|k^*/D_k(\langle 1, -3 \rangle)|$ divise 4. Si ce cardinal vaut 4, θ est un isomorphisme de groupes et $k^{*2} = D_k(\langle 1, -3 \rangle)$ ce qui n'est pas possible puisque $-3 \in D(\langle 1, -3 \rangle)$ et $-3 \notin k^{*2}$. Si ce cardinal vaut 1, $k^* = D_k(\langle 1, -3 \rangle)$ ce qui est à nouveau impossible puisque $-1 \notin D_k(\langle 1, -3 \rangle)$, $\langle 1, 1, -3, -3 \rangle$ étant anisotrope. Donc $|k^*/D_k(\langle 1, -3 \rangle)| = 2$ et de même $|l^*/D_l(\langle 1, -2 \rangle)| = 2$.

$\langle 1, -3 \rangle$ ne représente pas -1 sur k et $\langle 1, -2 \rangle$ ne représente pas 5 sur l donc

$$k^*/D_k(\langle 1, -3 \rangle) = \{1, -1\}, \quad l^*/D_l(\langle 1, -2 \rangle) = \{1, 5\}.$$

On a un isomorphisme de groupes :

$$\begin{aligned} t : k^*/D_k(\langle 1, -3 \rangle) &\rightarrow l^*/D_l(\langle 1, -2 \rangle) \\ 1 &\mapsto 1 \\ -1 &\mapsto 5 \end{aligned}$$

De plus, $\langle 1, -2 \rangle$ représente clairement -1 sur l et

$$t(-1) \neq -1 \in l^*/D_l(\langle 1, -2 \rangle).$$

Enfin, puisque $u(k) = u(l) = 4$, les formes quadratiques $\langle\langle 3, x, y \rangle\rangle$ et $\langle\langle 2, t(x), t(y) \rangle\rangle$ sont hyperboliques pour tous $x, y \in k^*$.

6.3.2 Cas des algèbres de quaternions à division

Dans cette sous-section, $Q_1 = (a, b)_K$ (resp. $Q_2 = (c, d)_L$) désignera une algèbre de quaternions à division sur K (resp. sur L) munie de son involution canonique γ_1 (resp. γ_2). Par souci de simplification d'écriture, nous posons la définition suivante :

Définition 6.3.5. Deux corps K et L de caractéristique différente de 2 sont (Q_1, Q_2) -équivalents si il existe un morphisme de groupes $t : K^*/K^{*2} \rightarrow L^*/L^{*2}$ envoyant -1 sur -1 tel que si la forme quadratique $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur K alors la forme quadratique $\langle\langle t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur L qui induit par factorisation un isomorphisme de groupes $\tilde{t} : K^*/D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle) \simeq L^*/D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)$ pour tous $x, y \in K^*$. La paire (t, \tilde{t}) est appelée une (Q_1, Q_2) -équivalence.

Remarque 6.3.6. Si A est une K -algèbre simple centrale, on définit

$$\mathrm{SH}_0(A) = \mathrm{coker} \left(K_1(\mathrm{Nrd}_{A/K}) \right) = K^*/\mathrm{Nrd}_{A/K}(A^*).$$

Le groupe SH_0 est appelé groupe des résidus de normes réduites et est en relation avec le groupe réduit de Whitehead SK_1 (dont nous reparlerons dans le chapitre 7) : voir [22, §23]. Dans notre cas, on a donc

$$\mathrm{SH}_0(Q_1) = K^*/D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle), \quad \mathrm{SH}_0(Q_2) = L^*/D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle),$$

ce qui permet de traduire la définition 6.3.5 au moyen de ces groupes.

Théorème 6.3.7. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un morphisme d'anneaux $\Phi : W(K) \rightarrow W(L)$ envoyant une forme de dimension 1 sur une forme de dimension 1 et un isomorphisme de groupes $\Psi : W(Q_1, \gamma_1) \rightarrow W(Q_2, \gamma_2)$ tels que $\Psi(\langle 1 \rangle) = \langle 1 \rangle$ et*

$$\Psi(q.h) = \Phi(q).\Psi(h),$$

pour tous $q \in W(K)$, $h \in W(Q_1, \gamma_1)$.

(2) *Il existe une (Q_1, Q_2) -équivalence (t, \tilde{t}) entre K et L telle que les formes hermitiennes $\langle u, v \rangle$ et $\langle u', v' \rangle$ sont isométriques sur (Q_1, γ_1) si et seulement si les formes hermitiennes $\langle \tilde{t}(u), \tilde{t}(v) \rangle$ et $\langle \tilde{t}(u'), \tilde{t}(v') \rangle$ sont isométriques sur (Q_2, γ_2) pour tous $u, v, u', v' \in K^*$.*

(3) *Il existe une (Q_1, Q_2) -équivalence (t, \tilde{t}) entre K et L telle que la forme quadratique $\langle\langle a, b, u, v \rangle\rangle$ est hyperbolique sur K si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle c, d, \tilde{t}(u), \tilde{t}(v) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur L pour tous $u, v \in K^*$.*

Au cours de la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 6.3.8. *Soient $u, v, u', v' \in K^*$. Si la forme quadratique $\langle\langle a, b \rangle\rangle \otimes \langle u, v, -u', -v' \rangle$ est hyperbolique sur K alors $uvu'v' \in D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)$.*

Preuve. Puisque les formes quadratiques $\langle u, v, -u', -v' \rangle$ et $\langle 1, -uu'vv' \rangle$ ont même discriminant, leur différence est un élément de $I^2(K)$. Ainsi

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle \otimes \langle u, v, -u', -v' \rangle \equiv \langle\langle a, b \rangle\rangle \otimes \langle 1, -uu'vv' \rangle \quad \text{mod } I^4(K).$$

D'après l'hypothèse et le Hauptsatz d'Arason-Pfister (voir 6.2.2), la forme quadratique $\langle\langle a, b \rangle\rangle \otimes \langle 1, -uu'vv' \rangle$ est hyperbolique sur K et donc $uvu'v' \in D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)$. \square

Preuve de 6.3.7 : (3) \Rightarrow (2) : Soient $u, v, u', v' \in K^*$ tels que l'on ait

$$\langle u, v \rangle \simeq \langle u', v' \rangle \tag{6.3}$$

en tant que formes hermitiennes sur (Q_1, γ_1) . D'après le théorème 6.2.3, l'application $W(Q_1, \gamma_1) \rightarrow W(K)$ donnée par la multiplication par la forme norme de Q_1 est injective. L'équation (6.3) est donc équivalente à

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle \otimes \langle u, v \rangle \simeq \langle\langle a, b \rangle\rangle \otimes \langle u', v' \rangle$$

en tant que formes quadratiques. Ceci est encore équivalent à l'hyperbolicité de la forme quadratique $\langle\langle a, b \rangle\rangle \otimes \langle u, v, -u', -v' \rangle$ sur K et donc $uvu'v' \in D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)$ d'après le lemme 6.3.8 (et aussi $t(uvu'v') \in D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)$). En multipliant (6.3) par la forme $\langle u \rangle$ on obtient

$$\langle 1, uv \rangle \simeq \langle uu', uv' \rangle$$

en tant que formes hermitiennes sur (Q_1, γ_1) et, puisque $uvu'v' \in D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)$,

$$\langle 1, u'v' \rangle \simeq \langle vv', vu' \rangle$$

en tant que formes hermitiennes sur (Q_1, γ_1) . L'équation précédente est équivalente à l'hyperbolicité de la forme quadratique $\langle\langle a, b, vv', uu' \rangle\rangle$ sur K et par (3) la forme quadratique $\langle\langle c, d, \tilde{t}(vv'), \tilde{t}(uu') \rangle\rangle$ est hyperbolique sur L . En remontant le raisonnement précédent (et en utilisant $t(uvu'v') \in D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)$), on en déduit que les formes hermitiennes $\langle \tilde{t}(u), \tilde{t}(v) \rangle$ et $\langle \tilde{t}(u'), \tilde{t}(v') \rangle$ sont isométriques sur (Q_2, γ_2) . La réciproque est similaire.

(2) \Rightarrow (1) : supposons qu'il existe une (Q_1, Q_2) -équivalence (t, \tilde{t}) entre K et L satisfaisant les conditions de l'assertion (2). Les hypothèses faites sur t impliquent, comme dans la preuve du sens indirect du critère de Harrison 6.1.1, l'existence d'un morphisme $\Phi : W(K) \rightarrow W(L)$ envoyant la classe de Witt d'une forme de rang 1 sur la classe de Witt d'une forme de rang 1. On définit Ψ en posant

$$\Psi : \begin{cases} W(Q_1, \gamma_1) & \rightarrow W(Q_2, \gamma_2) \\ \langle a_1, \dots, a_n \rangle & \mapsto \langle \tilde{t}(a_1), \dots, \tilde{t}(a_n) \rangle \end{cases} .$$

Comme lors de la preuve du théorème 6.1.3, en utilisant la proposition 6.2.6, on vérifie que Ψ est une application qui induit un morphisme d'anneaux et l'inverse de \tilde{t} fournit un inverse à Ψ . Au vu de la relation entre t et \tilde{t} , on prouve sans difficulté la relation de compatibilité entre Φ et Ψ .

(1) \Rightarrow (3) : supposons l'existence de Φ et Ψ comme en (1). Puisque $\Phi(I(K)) \subset I(L)$, Φ induit le morphisme de groupes

$$t : \begin{cases} K^*/K^{*2} & \rightarrow L^*/L^{*2} \\ a & \mapsto d_{\pm}(\Phi(\langle 1, -a \rangle)) \end{cases}$$

et t satisfait aux autres propriétés énoncées dans la définition 6.3.5 en vertu de la preuve du sens direct du théorème 6.1.1. Nous allons montrer que

$$D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)/K^{*2} = t^{-1}(D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)/L^{*2}). \quad (6.4)$$

Soit $\bar{u} \in D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)/K^{*2}$ représenté par u . Alors

$$\Psi(\langle u \rangle) = \Psi(\langle 1 \rangle) = \langle 1 \rangle$$

d'une part et

$$\Psi(\langle u \rangle) = \Phi(\langle u \rangle) \cdot \langle 1 \rangle$$

d'autre part (noter que $\Phi(\langle u \rangle)$ désigne une forme quadratique sur L alors que $\Psi(\langle u \rangle)$ est une forme hermitienne sur (Q_2, γ_2) ; le même abus de notation sera réutilisé au cours de cette preuve). En posant $\Phi(\langle u \rangle) = \langle x \rangle$, on voit que $t(\bar{u}) = x$ puis que $x \in D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)$ ce qui implique que $t(\bar{u}) \in D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)/L^{*2}$ ou encore que $D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)/K^{*2} \subset t^{-1}(D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)/L^{*2})$.

Soit maintenant $\bar{v} \in D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)/L^{*2}$ tel que $t(\bar{y}) = \bar{v}$ pour un certain $y \in K^*$. Si on écrit $\Phi(\langle y \rangle) = \langle y' \rangle$ alors $v = y' \in L^*/L^{*2}$. De plus

$$\Psi(\langle y \rangle) = \Phi(\langle y \rangle) \cdot \langle 1 \rangle = \langle v \rangle \cdot \langle 1 \rangle = \langle 1 \rangle.$$

Par injectivité de Ψ , on en déduit que $\langle y \rangle \simeq \langle 1 \rangle$ et que $t^{-1}(D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)/L^{*2}) \subset D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)/K^{*2}$.

Puisque (6.4) est vraie, t induit par factorisation un unique morphisme de groupes injectif $\tilde{t} : K^*/D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle) \rightarrow L^*/D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)$ avec

$$\tilde{t}(\bar{x}) = t(x) \pmod{D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)}.$$

Notons $s_1 : K^*/K^{*2} \rightarrow K^*/D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle)$ et $s_2 : L^*/L^{*2} \rightarrow L^*/D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)$ les deux surjections canoniques. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} K^*/K^{*2} & \xrightarrow{t} & L^*/L^{*2} & \xrightarrow{s_2} & L^*/D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle) \\ \downarrow s_1 & & & \nearrow \tilde{t} & \\ & & & & K^*/D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle) \end{array}$$

On montre maintenant que $s_2 \circ t$ est surjective. Soit $\bar{w} \in L^*/D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)$; Ψ étant surjective, il existe une forme hermitienne h sur $W(Q_1, \gamma_1)$ telle que $\Psi(h) = \langle w \rangle = \Phi(h) \cdot \langle 1 \rangle$. On peut supposer que $h = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ et $\Phi(h) = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ avec $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in K^*$ (n est forcément impair). En prenant le discriminant à signe raffiné (voir la sous-section 3.2.3) de part et d'autre de l'égalité précédente, on obtient

$$\prod_{i=1}^n b_i^2 = w^2 \pmod{D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)^2}$$

et donc il existe $d \in Q_2^*$ tel que $(\prod_{i=1}^n b_i^2) \cdot \text{Nrd}_{Q_2/L}(d)^2 = w^2$ ou encore

$$w = \pm \left(\prod_{i=1}^n b_i \right) \cdot \text{Nrd}_{Q_2/L}(d).$$

L'élément $\pm(\prod_{i=1}^n a_i)$ est en fait un antécédent de w par $s_2 \circ t$. En effet

$$\begin{aligned} t\left(\pm \prod_{i=1}^n a_i\right) &= \pm \prod_{i=1}^n t(a_i) \\ &= \pm d_{\pm} \left(n\langle 1 \rangle \perp -\Phi(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) \right) \\ &= \pm d_{\pm} \left(n\langle 1 \rangle \perp \langle -b_1, \dots, -b_n \rangle \right) \\ &= \pm \prod_{i=1}^n b_i \in L^*/L^{*2}. \end{aligned}$$

Donc

$$(s_2 \circ t)\left(\pm \prod_{i=1}^n a_i\right) = \pm \prod_{i=1}^n b_i \pmod{D_L(\langle\langle c, d \rangle\rangle)} = \bar{w}.$$

On en déduit que $s_2 \circ t$ est surjective puis que \tilde{t} est un isomorphisme de groupes.

Soient $u, v \in K^*$ tels que la forme quadratique $\langle\langle a, b, u, v \rangle\rangle$ soit hyperbolique sur (Q_1, γ_1) . La forme de Pfister hermitienne $\langle 1, -u, -v, uv \rangle$ est également hyperbolique d'après le théorème 6.2.3. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi(\langle 1, -u, -v, uv \rangle) \\ &= \Phi(\langle 1, -u, -v, uv \rangle) \cdot \langle 1 \rangle \\ &= (\Phi(\langle 1, -u \rangle) \otimes \Phi(\langle 1, -v \rangle)) \cdot \langle 1 \rangle. \end{aligned}$$

Par définition de t et de \tilde{t} , on obtient d'autre part

$$\begin{aligned} \Psi(\langle 1, -u, -v, uv \rangle) &= \langle 1, -t(u) \rangle \otimes \langle 1, -t(v) \rangle \\ &= \langle 1, -t(u), -t(v), t(u)t(v) \rangle \\ &= \langle 1, -\tilde{t}(u), -\tilde{t}(v), -\tilde{t}(u)\tilde{t}(v) \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que la forme quadratique $\langle\langle c, d, \tilde{t}(u), \tilde{t}(v) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur L . Les deux séries d'équations précédentes fournissent la réciproque en vertu de l'injectivité de Ψ . \square

Dans le cas particulier où $K = L$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 6.3.9. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $W(Q_1, \gamma_1) \simeq W(Q_2, \gamma_2)$ en tant que $W(K)$ -modules.
- (2) Il existe un isomorphisme de groupes $\tilde{t} : K^*/D_K(\langle\langle a, b \rangle\rangle) \simeq K^*/D_K(\langle\langle c, d \rangle\rangle)$ avec $\tilde{t}(-1) = -1$ tel que la forme quadratique $\langle\langle a, b, u, v \rangle\rangle$ est hyperbolique si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle c, d, \tilde{t}(u), \tilde{t}(v) \rangle\rangle$ est hyperbolique pour tous $u, v \in K^*$.

Preuve. (1) \Rightarrow (2) : on pose $\Phi = \text{id}_{W(K)}$ (donc $t = \text{id}_{K^*/K^{*2}}$). L'implication (1) \Rightarrow (3) du théorème 6.3.7 permet de conclure.

(2) \Rightarrow (1) : cela provient de même de l'implication (3) \Rightarrow (1) du théorème 6.3.7. \square

Remarques 6.3.10. (1) Les conditions sur l'hyperbolicité des formes quadratiques dans le théorème 6.3.7 peuvent être remplacées par des conditions similaires à la condition de Harrison-Cordes présentée dans l'introduction de ce chapitre ; le théorème 6.3.7 présente ainsi une analogie avec le théorème 6.1.2 de Baeza et Moresi. Il présente aussi quelques différences :

– la bijectivité de Φ n'est pas supposée dans l'assertion (1) ;

– il y a des conditions supplémentaires sur le rang pour Φ et sur l'existence d'un “point base” $\langle 1 \rangle$ pour Ψ dans l'assertion (1) ;

(2) Puisque $K^{*2} = D_K(\langle 1 \rangle)$ et que $\text{Nrd}_{Q_1/K}(Q_1^*) = D_K(\langle \langle a, b \rangle \rangle)$, le corollaire 6.3.9 est un analogue quaternionique du critère de Harrison 6.1.1 (dans le cas où $K = L$).

(3) En 1988, dans [35], Leep et Marshall construisent une application surjective entre $\text{Aut}(W(K))$ et l'ensemble des applications dites de “Harrison” (vérifiant l'assertion (2) du critère 6.1.1) et décrivent le noyau de cette application. Leurs résultats utilisent le fait que tout $\rho \in \text{Hom}_{\text{ann}}(W(K), W(L))$ induit un élément $\bar{\rho} \in \text{Hom}_{\text{ann}}(W(K), W(L))$ respectant la dimension des formes quadratiques et caractérisé par

$$\bar{\rho}(q) \equiv \rho(q) \pmod{I^2}$$

pour tout $q \in W(K)$. Il serait intéressant de voir si de telles propriétés existent au niveau des formes hermitiennes sur une algèbre de quaternions pour voir si certaines hypothèses du théorème 6.3.7(1) peuvent être éliminées ou si l'on peut généraliser les résultats précédents aux formes hermitiennes.

Pour terminer cette section, nous motivons notre préférence pour la structure de module dans le théorème 6.3.7 et le corollaire 6.3.9 par deux exemples (l'un où le cardinal de l'anneau de Witt est infini, l'autre où il est fini) montrant qu'au niveau des formes quadratiques la structure de groupe de l'anneau de Witt ne suffit pas à classer les corps à Witt-équivalence près comme dans le critère 6.1.1.

Exemples 6.3.11. (1) Cet exemple, dû à Perlis, Szymiczek, Conner et Litherland se trouve en [60, §7]. Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ et $L = \mathbb{Q}$, on montre que $W(K) \simeq W(L)$ en tant que groupes : en utilisant des résultats de Conner et Perlis et une suite exacte de Knebusch, on montre que le groupe additif $W(K)$ est somme directe d'un groupe cyclique infini et d'une infinité dénombrable de groupes cycliques d'ordre 2 ou 4 et on sait que la même chose est vraie pour $L = \mathbb{Q}$ (voir [71, Chapter 5, Theorem 3.4]). Le résultat [60, §4, Corollary 2] montre que $W(K) \not\simeq W(L)$ en tant qu'anneaux.

(2) Cet exemple est dû à Cordes en 1973 en [16, Example 7.2] et se base sur une construction

de Gross et Fischer obtenue en 1965 en [28, §II.1]. On choisit $K = \mathbb{Q}_2(\sqrt{d})$ où $d \in \mathbb{Q}_2^* \setminus \pm \mathbb{Q}_2^{*2}$. Alors K est un corps local et

$$|K^*/K^{*2}| = 16, \quad s(K) = 2, \quad u(K) = 4$$

(voir [34, Chapter VI, Corollary 2.24], [34, Chapter XI, Examples 2.4(7), 4.2(4)]). Soit F_1 un corps avec

$$|F_1^*/F_1^{*2}| = 4, \quad s(F_1) = 2, \quad u(F_1) = 2$$

(F_1 existe d'après les résultats de Cordes). Alors $L = F_1((X))$ vérifie

$$|L^*/L^{*2}| = 8, \quad s(L) = 2, \quad u(L) = 4.$$

D'après [16, Theorem 4.5],

$$W(K) \simeq W(L) \simeq C_4 \times C_4 \times C_2 \times C_2$$

en tant que groupes. Mais $W(K) \not\simeq W(L)$ en tant qu'anneaux d'après le critère de Harrison 6.1.1 puisque $|K^*/K^{*2}| = 16 \neq 8 = |L^*/L^{*2}|$.

6.4 Equivalences de réciprocité

6.4.1 Préliminaires

Dans cette sous-section, nous fixons quelques notations et rappelons quelques faits concernant les corps globaux. Nous renvoyons à [56] pour tout renseignement complémentaire concernant les formes quadratiques sur des corps globaux.

Un *corps global* est un corps de nombres algébriques (i.e. une extension finie de \mathbb{Q}) ou un corps de fonctions algébriques (i.e. une extension finie d'un corps de la forme $\mathbb{F}_q(X)$ où q est une puissance d'un nombre premier et X est une indéterminée).

Soient F un corps global, P une place non triviale de F et F_P une complétion de F en P . Alors, si P est une place non archimédienne, P est discrète et F_P est un corps local à corps résiduel fini ; on dit aussi que P est une *place finie*. Si P est une place archimédienne, il existe un isomorphisme topologique de F_P sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} : la place est appelée *réelle* dans le premier cas, *complexe* dans le second. Une place archimédienne est aussi appelée *place infinie*. Si F est un corps de fonctions algébriques, toutes les places de F sont finies et si F est un corps de nombres algébriques, il y a un nombre fini de places archimédiennes (plus précisément le nombre de places archimédiennes est au moins 1 et au plus $[F : \mathbb{Q}]$). On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega_F &= \{\text{places non triviales de } F\}, \\ \Omega_F^f &= \{\text{places finies de } F\}, \\ \Omega_F^\infty &= \{\text{places infinies de } F\}, \\ \Omega_F^r &= \{\text{places réelles de } F\} = \{P \in \Omega_F^\infty \mid F_P = \mathbb{R}\}, \\ \Omega_F^c &= \{\text{places complexes de } F\} = \{P \in \Omega_F^\infty \mid F_P = \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

On a évidemment les unions disjointes $\Omega_F = \Omega_F^f \cup \Omega_F^\infty$ et $\Omega_F^\infty = \Omega_F^r \cup \Omega_F^c$.

Les deux résultats centraux concernant les formes quadratiques sur des corps globaux sont les deux théorèmes suivants :

Théorème 6.4.1 (Principe de Hasse-Minkowski). *Si q est une forme quadratique sur un corps global F alors q est hyperbolique sur F si et seulement si q est hyperbolique sur F_P pour tout $P \in \Omega_F$.*

Preuve. Voir [34, Chapter VI, Theorem 3.1]. □

Théorème 6.4.2 (Global Square Theorem). *Si F est un corps global et si $a \in F^*$ alors $a \in F^{*2}$ si et seulement si $a \in F_P^{*2}$ pour tout $P \in \Omega_F$.*

Preuve. Voir [34, Chapter VI, Theorem 3.6]. □

Remarque 6.4.3. On appelle généralement “principe de Hasse-Minkowski” le résultat suivant : une forme quadratique q sur un corps global F est isotrope si et seulement si elle est isotrope sur F_P pour tout $P \in \Omega_F$. Le théorème 6.4.1 en est une conséquence.

Précisons quelques faits concernant les places réelles d’un corps global : soient F un corps global et $P \in \Omega_F^r$. Alors il existe un isomorphisme $\phi : F_P \simeq \mathbb{R}$. Via ϕ , on peut voir F_P comme un corps ordonné (au sens habituel : voir [71, Chapter 2, Definition 4.1]) pour F_P^{*2} . Puisque F_P est un corps réel clos et euclidien, F_P^{*2} est le seul ordre de F_P (voir [71, Chapter 3, Theorem 1.1.4]). On dit alors qu’un élément $a \in F^*$ est positif (resp. négatif) en P et on note $a \underset{P}{>} 0$ (resp. $a \underset{P}{<} 0$) si $a \in F_P^{*2}$ (resp. $a \in -F_P^{*2}$). Si $a \in F^*$, nous notons :

$$\Omega_{F,a} = \{P \in \Omega_F^r \mid a \underset{P}{<} 0\}.$$

On a le résultat suivant :

Lemme 6.4.4. *Soient $P \in \Omega_F^r$ et q une forme quadratique sur F . Alors q est hyperbolique sur F_P si et seulement si $\text{sgn}_P(q) = 0$ où sgn_P désigne la signature en P (voir la sous-section 3.3.2).*

Preuve. Le sens direct est évident. Si $\text{sgn}_P(q) = 0$, rappelons que sgn_P est la composée $W(F) \rightarrow W(F_P) \simeq \mathbb{Z}$. Puisque la signature d’une forme hyperbolique est nulle, q est hyperbolique sur F_P . □

On peut calculer la valeur de la signature (en une place réelle) d’une 2-forme de Pfister $\langle\langle x, y \rangle\rangle$:

Table 6.4.5.

x	y	xy	$\text{sgn}_P(\langle\langle x, y \rangle\rangle)$
+	+	+	0
-	+	-	0
+	-	-	0
-	-	+	4

On obtient finalement le résultat suivant qui nous sera utile dans la sous-section 6.4.3 :

Lemme 6.4.6. *Soit F un corps global et $P \in \Omega_F^r$. Une n -forme de Pfister $q = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ n'est pas hyperbolique sur F_P si et seulement si $a_i \leq_P 0$ pour $i = 1, \dots, n$.*

Preuve. Le fait que $a_i \leq_P 0$ pour $i = 1, \dots, n$ est équivalent à $\text{sgn}_P(q) = 2^n$ d'après la table 6.4.5 et une récurrence sur n . Cette dernière propriété est aussi équivalente au fait que q soit non hyperbolique sur F_P d'après le lemme 6.4.4. \square

6.4.2 Equivalence de réciprocité

Dans cette sous-section, K et L désignent des corps globaux de caractéristiques différentes de 2. Pour définir la notion d'équivalence de réciprocité, nous nous basons sur [60, §1] :

Définition 6.4.7. Une *équivalence de réciprocité* entre deux corps globaux K et L est un couple d'applications (t, T) , où t est un isomorphisme de groupes $t : K^*/K^{*2} \rightarrow L^*/L^{*2}$ et où T est une bijection $T : \Omega_K \rightarrow \Omega_L$ telles que (t, T) respecte les symboles de Hilbert i.e.

$$(x, y)_P = (tx, ty)_{TP}$$

pour tous $x, y \in K^*/K^{*2}$ et tout $P \in \Omega_K$.

Remarque 6.4.8. Puisque $(x, y)_P = 1$ si et seulement si la forme quadratique $\langle 1, -x, -y \rangle$ est isotrope sur K_P ce qui équivaut à ce que la 2-forme de Pfister quadratique $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ soit hyperbolique sur K_P , on peut remplacer la condition de la définition 6.4.7 concernant les symboles de Hilbert par “ \dots telles que la forme quadratique $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur K_P si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur $L_{T(P)}$ ”.

Le théorème 6.1.4 de Perlis, Szymiczek, Conner et Litherland élucide le lien qu'il y a entre équivalence de Witt et équivalence de réciprocité pour des corps de caractéristique différente de 2. Rappelons son énoncé :

Théorème *K et L sont Witt-équivalents si et seulement si il existe une équivalence de réciprocité entre K et L .*

Pour terminer cette sous-section, nous mentionnons une idée de la preuve de ce résultat qui dépend, pour une part importante, du critère de Harrison 6.1.1. Tout d'abord :

Corollaire 6.4.9 (Perlis, Szymiczek, Conner, Litherland). *S'il existe une équivalence de réciprocité entre K et L , ils sont Witt-équivalents.*

Preuve. La preuve de ce résultat est en [60, §2, Corollary 1]. Soit (t, T) une équivalence de réciprocité entre K et L . La forme quadratique $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur K si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur K_P pour tout $P \in \Omega_K$ ce qui équivaut à ce que la forme quadratique $\langle\langle t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur $L_{T(P)}$ pour tout $P \in \Omega_K$. D'après le principe de Hasse-Minkowski 6.4.1, ceci est équivalent au fait que la forme quadratique $\langle\langle t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur L . Ensuite, si on pose $t(-1) = c \in L^*/L^{*2}$, un calcul montre que $-c$ est un carré localement partout ce qui implique, d'après le théorème 6.4.2, $t(-1) = -1$. On conclut en appliquant le critère de Harrison 6.1.1. \square

La preuve du sens direct du théorème 6.1.4 est beaucoup plus difficile et se base sur une description de la 2-torsion du groupe de Brauer par l'ensemble des sous-ensembles de $\Omega_K \setminus \Omega_K^c$ d'ordre pair muni de la différence symétrique. Cette description permet d'associer (difficilement) à $\Phi : W(K) \simeq W(L)$, une bijection entre les places non complexes de K et L . Cette bijection peut ensuite s'étendre à une bijection entre toutes les places non triviales de K et L . On pourra consulter [60, §3, 4] pour avoir la preuve de ces faits.

6.4.3 Équivalence de réciprocité quadratique

Dans cette sous-section, k (resp. l) désigne un corps global de caractéristique différente de 2, $K = k(\sqrt{a})$ (resp. $L = l(\sqrt{b})$) une extension quadratique de k (resp. l) et σ_a (resp. σ_b) l'automorphisme non trivial de K (resp. L). Le but de cette sous-section est de prouver le théorème 6.1.5. A ce titre, nous définissons la notion suivante :

Définition 6.4.10. Une (a, b) -équivalence de réciprocité quadratique entre k et l est un couple d'applications (t, T) où t est un isomorphisme de groupes $t : k^*/N_{K/k}(K^*) \rightarrow l^*/N_{L/l}(L^*)$ avec $t(-1) = -1$ et où T est une bijection $T : \Omega_{k,a} \rightarrow \Omega_{l,b}$ telles que la forme quadratique $\langle\langle a, x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur k_P si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle b, t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur $l_{T(P)}$ pour tous $x, y \in k^*/N_{K/k}(K^*)$ et tout $P \in \Omega_{k,a}$.

Le résultat que nous prouvons est le suivant :

Théorème *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $W(K, \sigma_a) \simeq W(L, \sigma_b)$ en tant qu'anneaux.
- (2) Il existe une (a, b) -équivalence de réciprocité quadratique entre k et l .

Preuve. (2) \Rightarrow (1) : en vertu de l'implication (2) \Rightarrow (1) du théorème 6.1.3, il suffit de montrer que la forme quadratique $\langle\langle a, x, y \rangle\rangle$ est hyperbolique sur k si et seulement si la forme quadratique $\langle\langle b, t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur l . Notons que pour tout

$P \in \Omega_k \setminus \Omega_{k,a}$ (resp. tout $Q \in \Omega_l \setminus \Omega_{l,b}$) et tous $x, y \in k^*$, la forme quadratique $\langle\langle a, x, y \rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle b, t(x), t(y) \rangle\rangle$) est hyperbolique sur k_P (resp. sur l_Q). Ce fait est clair si la place est complexe ou si $a \underset{P}{>} 0$ (resp. si $b \underset{Q}{>} 0$) et si la place est réelle en vertu du lemme 6.4.6 ; si la place P (resp. Q) est finie cela provient du fait que k_P (resp. l_Q) est un corps local à corps résiduel fini et que $u(k_P) = 4 = u(l_Q)$ (voir [34, Chapter XI, Example 4.2(4)]). Ceci étant, supposons que la forme quadratique $\langle\langle a, x, y \rangle\rangle$ soit hyperbolique sur k . Alors $\phi = \langle\langle b, t(x), t(y) \rangle\rangle$ est hyperbolique sur l_Q pour toute place $Q \in \Omega_{l,b}$ et, puisque ϕ est aussi hyperbolique sur l_Q pour $Q \in \Omega_l \setminus \Omega_{l,b}$, ϕ est hyperbolique sur l d'après le principe de Hasse-Minkowski 6.4.1. La réciproque se montre pareillement.

(1) \Rightarrow (2) : en appliquant le théorème 6.1.3, il nous reste à trouver la bijection T de la définition 6.4.10.

Nous montrons tout d'abord que k et l ont le même nombre de places réelles distinctes pour lesquelles a et b sont négatifs. Grâce au lemme 6.4.6, il est facile de voir que k n'a pas de place réelle où a est négatif si et seulement si l n'a pas de places réelles où b est négatif ; dans ce cas (par exemple si k et l sont deux corps de fonctions algébriques), la preuve est alors terminée, la propriété d'hyperbolicité de 6.4.6 étant obligatoirement satisfaite. Supposons donc que $|\Omega_{k,a}| = n$ et notons

$$\Omega_{k,a} = \{P_1, \dots, P_n\}.$$

Puisque k est un corps global ayant au moins une place archimédienne, c'est un corps SAP (voir, par exemple, [44, §2]). Ainsi, il existe $x_1, \dots, x_n \in k^*$ tels que

$$x_i \underset{P_i}{>} 0, \quad x_i \underset{P_j}{<} 0 \text{ si } j \neq i,$$

pour $i = 1, \dots, n$. D'une part, il est facile de voir que pour tout i ,

$$(-1)^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \underset{P_i}{<} 0$$

et donc, en vertu du lemme 6.4.6, la forme quadratique $\langle\langle a, -1, (-1)^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \rangle\rangle$ n'est pas hyperbolique sur k . Par conséquent, la forme quadratique

$$\langle\langle b, -1, (-1)^n t(x_1) \cdots t(x_{i-1}) t(x_{i+1}) \cdots t(x_n) \rangle\rangle$$

n'est pas hyperbolique sur l et il existe une place Q_i (forcément réelle) telle que la forme quadratique $\langle\langle b, -1, (-1)^n t(x_1) \cdots t(x_{i-1}) t(x_{i+1}) \cdots t(x_n) \rangle\rangle$ ne soit pas hyperbolique sur l_{Q_i} d'après le principe de Hasse-Minkowski 6.4.1. En appliquant le lemme 6.4.6, on voit que $b \underset{Q_i}{<} 0$ et

$$(-1)^n t(x_1) \cdots t(x_{i-1}) t(x_{i+1}) \cdots t(x_n) \underset{Q_i}{<} 0, \tag{6.5}$$

pour $i = 1, \dots, n$. D'autre part on a aussi

$$(-1)^n x_1 \cdots x_n \underset{P_i}{\leq} 0$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et, en utilisant le même genre d'arguments que précédemment, on voit que

$$(-1)^n t(x_1) \cdots t(x_n) \underset{Q_i}{\leq} 0. \quad (6.6)$$

En combinant (6.5) et (6.6), on en déduit que $t(x_i) \underset{Q_i}{>} 0$ pour $i = 1, \dots, n$. Nous pouvons maintenant montrer que les n places Q_i sont distinctes. Si au contraire il existe $i \neq j$ tels que $Q = Q_i = Q_j$ alors

$$t(x_i) \underset{Q}{>} 0, \quad t(x_j) \underset{Q}{>} 0$$

donc la forme quadratique $\langle\langle b, t(-x_i), t(-x_j) \rangle\rangle$ n'est pas hyperbolique sur l ce qui implique que la forme quadratique $\langle\langle a, -x_i, -x_j \rangle\rangle$ n'est pas hyperbolique sur k . D'après le principe de Hasse-Minkowski 6.4.1 et le lemme 6.4.6, il existe une place $P \in \Omega_{k,a}$ pour laquelle

$$x_i \underset{P}{>} 0, \quad x_j \underset{P}{>} 0,$$

ce qui est impossible par construction des x_i .

Puisque l'application t est bijective, les arguments précédents impliquent donc que $|\Omega_{k,a}| = |\Omega_{l,b}| = n$. Définissons

$$T : \begin{cases} \Omega_{k,a} & \rightarrow \Omega_{l,b} \\ P_i & \mapsto Q_j \end{cases}$$

où j est déterminé de la manière suivante : on choisit $x \underset{P_i}{>} 0$ et $x \underset{P_m}{<} 0$ pour tout $m \neq i$ alors j est l'indice tel que $t(x) \underset{Q_j}{>} 0$ et $t(x) \underset{Q'_m}{<} 0$ pour tout $m' \neq j$. T est une application bien définie (les arguments sont les mêmes que précédemment) et on peut supposer que $T(P_i) = Q_i$ pour i, \dots, n .

Supposons enfin que la forme quadratique $\langle\langle a, x, y \rangle\rangle$ ne soit pas hyperbolique sur k_{P_i} et montrons que la forme quadratique $\langle\langle b, t(x), t(y) \rangle\rangle$ n'est pas hyperbolique sur l_{Q_i} . Alors, d'après la proposition 5.2.6(1), cette dernière forme est anisotrope sur l_{Q_i} et donc $t(x) \underset{Q_i}{\leq} 0$ et $t(y) \underset{Q_i}{\leq} 0$ d'après le lemme 6.4.6. Puisque $t(x_i) \underset{Q_i}{>} 0$ par définition, les formes quadratiques

$$\langle\langle b, t(-x_i), t(x) \rangle\rangle \text{ et } \langle\langle b, t(-x_i), t(y) \rangle\rangle$$

ne sont pas hyperboliques sur l_{Q_i} puis sur l par le principe de Hasse-Minkowski 6.4.1. Donc les formes quadratiques

$$\langle\langle a, -x_i, x \rangle\rangle \text{ et } \langle\langle a, -x_i, y \rangle\rangle$$

ne sont pas hyperboliques sur k . En appliquant à nouveau le principe de Hasse-Minkowski, on en déduit qu'il existe $P, R \in \Omega_{k,a}$ telles que

$$x_i \underset{P}{>} 0, x \underset{P}{<} 0 \text{ et } x_i \underset{R}{>} 0, x \underset{R}{<} 0.$$

Ainsi $P = R = P_i$ et la forme quadratique $\langle\langle a, x, y \rangle\rangle$ n'est pas hyperbolique sur k_{P_i} . La réciproque se montre de la même manière. \square

Remarques 6.4.11. (1) Si, au regard de la remarque 6.4.8, on peut dire que les théorèmes 6.1.4 et 6.1.5 présentent une analogie, il existe tout de même quelques différences importantes. Dans la démonstration du théorème 6.1.4, les places qui posent problème sont les places finies qui n'interviennent pas dans la preuve précédente puisque le complété d'un corps en une telle place est p -adique (au sens de Lam : voir [34, Chapter VI, Définition 2.1]) et son u -invariant vaut 4. En outre, la preuve du théorème 6.1.5 peut être considérée comme élémentaire au vu des techniques employées alors que la preuve du théorème 6.1.4 est ardue. Enfin, dans la théorème 6.1.5, on suppose que $t(-1) = -1$ ce qui n'est pas le cas dans le résultat 6.1.4 ; cette condition découle, dans ce dernier cas, du "Global Square Theorem" 6.4.2 qui n'admet pas (à notre connaissance) d'analogue adapté à notre cas.

(2) Dans la preuve précédente pour (1) \Rightarrow (2), au lieu d'invoquer le fait que le corps est SAP, nous pouvons utiliser le théorème d'approximation fort pour les corps globaux : voir [56, Chapter II, Theorem 2.1.2].

(3) Comme il a été remarqué au cours de la preuve, le théorème 6.1.5 n'apporte rien au théorème 6.1.3 pour deux corps de fonctions algébriques. Dans ce cas, les conditions concernant l'hyperbolicité de formes quadratiques disparaissent de ces résultats.

Chapitre 7

Groupes de Whitehead réduits

7.1 Introduction

Soit K un corps de caractéristique *quelconque*. Si A une K -algèbre simple centrale on pose

$$\mathrm{SL}_1(A) = \{a \in A^* \mid \mathrm{Nrd}_{A/K}(a) = 1\},$$

et on note $[A^*, A^*]$ le groupe engendré par les commutateurs de A (i.e. les éléments de la forme $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in A^*$). En 1943, Tannaka et Artin posent (indépendamment) la question suivante :

Question 7.1.1 (Tannaka-Artin). *Si on omet les cas particuliers $A = M_2(\mathbb{F}_2)$, $M_2(\mathbb{F}_3)$, est-il toujours vrai que $\mathrm{SL}_1(A)$ et $[A^*, A^*]$ coïncident ?*

S'il est trivialement vrai que $\mathrm{SL}_1(A) \subseteq [A^*, A^*]$, la question de la véracité de la réciproque a été un problème ouvert durant de nombreuses années connu sous le nom de "problème de Tannaka-Artin".

La question 7.1.1 a pu être reformulée dans deux situations particulièrement intéressantes. Tout d'abord, Bass est le premier à remarquer l'importance de cette question vis à vis de la K -théorie algébrique et la présente de la manière suivante :

Question 7.1.2 (Bass). *Si on omet les cas particuliers $A = M_2(\mathbb{F}_2)$, $M_2(\mathbb{F}_3)$, est-il toujours vrai que $\mathrm{SK}_1(A) = 1$?*

Ici, $\mathrm{SK}_1(A)$ est le groupe défini par

$$\mathrm{SK}_1(A) = \mathrm{SL}_1(A)/[A^*, A^*],$$

et est appelé le *groupe de Whitehead réduit* de A (on oubliera dorénavant de citer les deux cas particuliers de 7.1.1 et 7.1.2). Ensuite, la question 7.1.1 a un rapport avec la théorie des groupes algébriques ; celle-ci est en fait équivalente à la conjecture de Kneser-Tits pour les groupes classiques de type A_n (voir [78] pour plus de détails).

Contre toute attente, Platonov montre en 1975 que la réponse à 7.1.1 est négative en construisant un contre-exemple sur un corps local (voir [61]). Ceci montre du même coup que la question 7.1.2 admet une réponse négative et que la conjecture de Kneser-Tits pour les groupes de type A_n est fautive. Platonov bâtit ensuite une K -théorie dite réduite dans une série d'articles (voir les références 8 à 14 dans l'article de Yanchevskiï [84]) et met en valeur des connections importantes entre les groupes de Whitehead réduits et les groupes algébriques.

De même que la conjecture de Kneser-Tits est vérifiée pour beaucoup de groupes simplement connexes, le groupe $SK_1(A)$ est trivial dans un grand nombre de cas et il demeure intéressant de trouver des conditions les plus faibles possibles sur le corps K ou sur l'algèbre A afin d'assurer la trivialité de $SK_1(A)$. Parmi la multitude de résultats existants, le résultat qui suit, dû à Wang en 1949 (voir [80]), est primordial :

Théorème 7.1.3 (Wang). *Si A est déployée ou si l'indice de A est sans facteurs carrés, $SK_1(A) = 1$.*

En 1975 dans [83, Theorem p. 492], Yanchevskiï montre le résultat général suivant :

Théorème 7.1.4 (Yanchevskiï). *Si K est un corps C_2^0 , alors $SK_1(A) = 1$ (voir 7.4.1 pour la définition d'un corps C_2^0).*

En particulier, toute algèbre simple centrale sur un corps C_2 admet un groupe de Whitehead réduit trivial. Bien sûr, beaucoup d'autres résultats concernant SK_1 sont disponibles dans la littérature et certains d'entre eux sont rappelés au début de la section 7.2. Nous donnons également une liste (non exhaustive) de propriétés vérifiées par ce groupe.

A partir de 1973, Platonov et Yanchevskiï développent parallèlement une K -théorie unitaire réduite dont l'objet central est le *groupe de Whitehead unitaire réduit* USK_1 défini pour une K -algèbre simple centrale à K/F -involution unitaire σ par

$$USK_1(A) = \Sigma'_\sigma(A)/\Sigma_\sigma(A),$$

où $\Sigma_\sigma(A)$ (resp. $\Sigma'_\sigma(A)$) est le sous-groupe de A^* engendré par les éléments symétriques (resp. par les éléments dont les normes réduites sont symétriques) pour l'involution σ . Ce groupe est un analogue de SK_1 pour les algèbres à involutions unitaires présentant également des liens avec la K -théorie algébrique et les groupes algébriques. Platonov et Yanchevskiï montrent que le groupe USK_1 n'est pas toujours trivial (voir [63]) et, en conséquence la conjecture de Kneser-Tits pour les groupes unitaires est fautive. Néanmoins, il existe des conditions suffisantes à sa trivialité comme par exemple le théorème suivant dû à Yanchevskiï en 1974 (voir [82, Theorem 1]) et qui dépend (dans ses hypothèses) du théorème 7.1.4 :

Théorème 7.1.5 (Yanchevskiï). *Si F est un corps C_2^0 alors $USK_1(A) = 1$.*

Le groupe USK_1 possède (souvent) des propriétés comparables à SK_1 et ces deux groupes ont parfois des liens. Nous rappelons quelques uns de ces faits dans la seconde partie de la section 7.2.

La section 7.3 contient des résultats préliminaires aux preuves des résultats de la section 7.5. Après avoir rappelé deux résultats classiques dus à Wang, nous prouvons une généralisation d'un lemme technique de Yanchevskiï (voir 7.1.8). Enfin, nous nous inspirons d'un résultat énoncé par Bayer-Fluckiger et Serre en [9] pour construire à partir d'un corps de caractéristique différente de p un corps parfait vérifiant certaines autres propriétés (voir 7.3.6).

En 1985 dans [76, §24], Merkurjev et Suslin prouvent un résultat primordial reliant la p -dimension cohomologique à la surjectivité de la norme réduite pour les algèbres p -primaires (voir le théorème 7.4.3). Ce résultat est une conséquence de leurs travaux sur les homomorphismes de résidus normiques et admet le corollaire suivant qui montre que les corps à la fois C_2^0 et parfaits ont une description cohomologique simple :

Corollaire 7.1.6 (Merkurjev-Suslin). *Si K est un corps parfait, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $cd(K) \leq 2$.
- (2) K est un corps C_2^0 .

Dans la section 7.4, après avoir donné la définition d'un corps C_2^0 , nous donnons une preuve élémentaire de ce résultat (modulo le théorème 7.4.3 que nous admettons).

Au vu des résultats 7.1.4, 7.1.5 et 7.1.6, on peut espérer obtenir des critères cohomologiques pour assurer la trivialité de SK_1 ou de USK_1 dans certains cas. En ce sens, en 1995, Bayer-Fluckiger et Parimala énoncent (implicitement) le résultat suivant (voir [7, Lemma 4.1.2]) :

Proposition 7.1.7. *Si F est un corps de caractéristique différente de 2, si $cd_2(F) \leq 2$ et si D est une algèbre à division de degré 2-primaire munie d'une K/F -involution unitaire, $USK_1(D) = 1$.*

Ce résultat est utile dans leur preuve de la conjecture II de Serre pour les groupes classiques de type spécial unitaire (voir [7, Theorem 4.1.1, Theorem 5.1.2]).

La proposition 7.1.7 étant énoncée sans preuve, nous prouvons, lors de la section 7.5 un énoncé plus général reposant sur les résultats des sections 7.3 et 7.4 :

Théorème 7.1.8. *Soient F un corps de caractéristique p (éventuellement nulle) et q un nombre premier différent de p . Supposons que $cd_q(F) \leq 2$ et que D est une K -algèbre à division de degré q -primaire munie d'une K/F -involution unitaire. Alors $USK_1(D) = 1$.*

En outre, nous prouvons également le résultat suivant :

Théorème 7.1.9. *Soient K un corps de caractéristique p (éventuellement nulle) et q un nombre premier différent de p . Supposons que $cd_q(K) \leq 2$ et que D est une K -algèbre à division de degré q -primaire. Alors $SK_1(D) = 1$.*

Les résultats 7.1.8 et 7.1.9 peuvent être considérés comme des critères locaux pour la trivialité des groupes de Whitehead réduits. Le corollaire 7.5.2 précise le devenir de ces deux résultats d'un point de vue global.

Bien que les preuves de ces résultats puissent être sans doute obtenus comme conséquence de résultats généraux, nous n'avons trouvé nulle part d'énoncés de ce type. Nous avons préféré présenter ces preuves de façon élémentaire dans le but de mettre en valeur quelques-unes des techniques astucieuses mises au point par Wang, Platonov et Yanchevskii.

7.2 Groupes de Whitehead réduits d'une algèbre simple centrale. Résultats principaux

Dans la suite de ce chapitre, sauf mention contraire, nous considérons des corps de caractéristique quelconque.

7.2.1 Le groupe de Whitehead réduit

Dans cette sous-section, nous nous contentons de rappeler quelques résultats significatifs concernant SK_1 et renvoyons à l'ouvrage de Draxl [22, §23] ou de Platonov et Yanchevskii [64, Chapter 4, §2] pour tout renseignement complémentaire.

Propriétés

Soient K un corps et A une K -algèbre simple centrale. Rappelons que le groupe de Whitehead $K_1(A)$ est, par définition, $A^*/[A^*, A^*]$ et que l'on peut définir le morphisme de norme réduite

$$\text{Nrd} : K_1(A) \rightarrow K_1(K) = K^*.$$

Le *groupe de Whitehead réduit* $SK_1(A)$ est alors le noyau de ce morphisme. Le premier cas que l'on peut étudier est le suivant :

Lemme 7.2.1. *Si $n \geq 1$ et si $n \neq 2$ et $K \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$, on a $SK_1(M_n(K)) = 1$.*

Preuve. On a un morphisme de groupes surjectif $GL_n(K) \rightarrow K^*$ donné par le déterminant qui a pour noyau $SL_n(K)$. Ainsi $SK_1(M_n(K)) \simeq SL_n(K)/[GL_n(K), GL_n(K)]$ qui est trivial sauf si $n = 2$ et $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ (voir [22, §20, Theorem 4] pour un résultat plus général). \square

Remarque 7.2.2. Si $A = M_2(\mathbb{F}_2)$, $SK_1(A)$ et $K_1(A)$ sont des groupes cycliques d'ordre 2. Si $A = M_2(\mathbb{F}_3)$, $SK_1(A)$ est un groupe cyclique d'ordre 3 et $K_1(A)$ est un groupe cyclique d'ordre 6.

En utilisant la théorie des déterminants de Dieudonné (voir [22, §20] ou [64, Chapter 2, §4]), on montre que

$$\mathrm{SK}_1(M_n(D)) \simeq \mathrm{SK}_1(D)$$

si D est une algèbre à division ce qui, en vertu du théorème 1.1.1, indique que le groupe de Whitehead réduit de A dépend seulement de la classe de A dans $\mathrm{Br}(K)$. On peut ainsi se restreindre à l'étude de ces groupes pour les algèbres à division.

SK_1 possède la propriété fonctorielle suivante : si L/K est une extension de corps, on a un morphisme

$$\mathrm{SK}_1(A) \rightarrow \mathrm{SK}_1(A \otimes_K L)$$

et, si L/K est algébrique, le noyau de ce morphisme est annulé par $(\mathrm{ind} A, [L : K])$ (voir [78, Lemme 2.2]). En appliquant ce résultat à un sous-corps maximal de A , on en déduit que $\mathrm{SK}_1(A)$ est annulé par $\mathrm{ind} A$. Si $(\mathrm{ind} A, [L : K]) = 1$, le morphisme précédent est injectif.

On sait (voir [22, §9, Corollary 11]) que toute algèbre à division D dont le degré est $\prod_{i=1}^n p_i^{n_i}$ (où les p_i sont des premiers distincts deux à deux et les n_i sont des entiers positifs) peut s'écrire sous la forme

$$D = D_1 \otimes_K \cdots \otimes_K D_n \tag{7.1}$$

où chaque D_i est une algèbre à division de degré $p_i^{n_i}$. Dans ce cas, on peut montrer que (voir [22, §23, Lemma 6] ou [64, Chapter 4, §2.2, Theorem 1])

$$\mathrm{SK}_1(D) \simeq \prod_{i=1}^n \mathrm{SK}_1(D_i)$$

ce qui permet de réduire le calcul de SK_1 aux algèbres à division de degré p -primaire, p étant un nombre premier.

Si le groupe $\mathrm{SK}_1(A)$ peut grossir exagérément par extension des scalaires de K à une extension algébrique (voir [64, Chapter 4, §2.4, 2.5]), ce phénomène ne se produit pas pour les extensions transcendentes :

Théorème 7.2.3 (Platonov). *Si R est une extension transcendante pure de K alors $\mathrm{SK}_1(A) \simeq \mathrm{SK}_1(A \otimes_K R)$ (induit par l'injection canonique $A \rightarrow A \otimes_K R$).*

Preuve. Voir [64, Chapter 4, §2.7, Stability Theorem]. □

Calcul de SK_1

Le groupe $\mathrm{SK}_1(A)$ est trivial pour toute K -algèbre simple centrale A sur un grand nombre de corps K . D'après un résultat de Nakayama et Matsushima en 1942, ceci est vrai si K est un corps p -adique (voir [55]) et d'après un résultat de Wang en 1949 (voir [80, Theorem

p. 329]) ceci est également vrai pour les corps de nombres algébriques. Ces deux résultats ont confirmé l'opinion générale selon laquelle $SK_1(A)$ devait être trivial pour un corps K arbitraire ce qui fut infirmé en 1975 par Platonov. Le théorème 7.1.4 dû à Yanchevskii en 1975 est un autre exemple de résultat de type général. Le résultat de Yanchevskii permet de montrer que $SK_1(A) = 1$ pour les corps de fonctions algébriques (en effet, un tel corps est forcément C_2 (voir [75, Chapitre II, §4.5] donc C_2^0 : voir la remarque 7.4.2). En combinant ce résultat avec celui de Wang, on en déduit que $SK_1(A) = 1$ pour les corps globaux.

Le résultat 7.1.3 dû à Wang en 1949 est un exemple où une condition sur l'algèbre A implique la trivialité de $SK_1(A)$ pour tout corps K .

Comme on l'a déjà mentionné plus haut, $SK_1(A)$ n'est pas toujours trivial. D'après des travaux de Platonov, c'est le cas si A est une certaine algèbre sur un corps local (voire même hensélien : voir [61] ou [78, §3]). Puisque SK_1 n'est pas toujours trivial, on peut se demander les "valeurs" qu'il peut prendre. Le résultat suivant (dont la preuve est ardue), dû indépendamment à Draxl et à Platonov, prouve que la réponse à cette question est simple et que la question 7.1.1 (et donc aussi la question 7.1.2 et la conjecture de Kneser-Tits pour les groupes de type A_n) est loin d'être vraie :

Théorème 7.2.4 (Draxl-Platonov). *Etant donné un groupe abélien fini G , il existe une algèbre à division D telle que $SK_1(D) \simeq G$.*

Preuve. Voir [20]. □

Le groupe SK_1 peut également être de cardinal infini. Plus précisément :

Théorème 7.2.5 (Platonov). *Soit $m > 1$ un entier alors il existe une algèbre à division D telle que $|SK_1(D)| = \infty$ et $\text{ind}(D) = m^2$.*

Preuve. Voir [62]. □

En 1995 dans [51], Merkurjev mentionne le théorème suivant (sans preuve) qu'il décrit comme une conséquence de résultats de Suslin et Yanchevskii :

Théorème 7.2.6 (Suslin-Yanchevskii). *Si $\text{cd}(K) \leq 2$, $SK_1(A) = 1$.*

Suslin a même conjecturé le fait suivant :

Conjecture 7.2.7 (Suslin). *Si $\text{cd}(F) \leq 3$, $SK_1(A) = 1$.*

Cette conjecture est vraie pour une algèbre de quaternions (sans hypothèse sur la dimension cohomologique : voir [22, §23 Lemma7, Theorem 1]) et a été prouvée pour une algèbre de biquaternions par Merkurjev en [51, Corollary p.76] comme conséquence de résultats de Rost concernant ces dernières.

7.2.2 Le groupe de Whitehead unitaire réduit

Pour tout renseignement complémentaire concernant ce groupe, nous renvoyons aux articles suivants de Yanchevskii [84], [85] et [86] ainsi qu'à l'article [63] ou à l'ouvrage [64, Chapter 4, §3] de Platonov et Yanchevskii. Dans cette sous-section et à chaque fois que nous parlerons de groupe de Whitehead réduit, A désignera une K -algèbre simple centrale à K/F -involution unitaire σ .

Propriétés

Tout d'abord, les définitions de $\text{USK}_1(A)$, $\Sigma_\sigma(A)$ et $\Sigma'_\sigma(A)$ dépendent, à priori, de l'involution σ . Si σ et θ sont des involutions unitaires sur A on définit la relation d'équivalence \sim par

$$\sigma \sim \theta \iff \sigma|_K = \theta|_K.$$

En appliquant la proposition 1.1.6, on montre aisément que ces définitions dépendent seulement de la classe de σ modulo \sim : voir [82, Lemma 1]. Dans la suite de ce chapitre, nous ne précisons plus l'involution et noterons ces groupes $\text{USK}_1(A)$, $\Sigma(A)$ et $\Sigma'(A)$ si A est munie d'une involution unitaire (cela voudra dire que l'on choisit n'importe quelle involution dans la classe de σ modulo \sim).

Le groupe de Whitehead unitaire réduit possède beaucoup de propriétés en commun avec SK_1 . Par exemple, pour tout entier n et pour tout corps gauche D , on a

$$\text{USK}_1(M_n(D)) \simeq \text{USK}_1(D)$$

ce qui, là encore, permet de restreindre la discussion sur la valeur de USK_1 aux algèbres à division (voir [82, Lemma 3]).

Le groupe $\text{USK}_1(A)$ est aussi annulé par $\text{ind } A$ et en reprenant les notations de (7.1), on peut également prouver que (voir [84, Proposition 2.7])

$$\text{USK}_1(D) \simeq \coprod \text{USK}_1(D_i),$$

ces résultats étant dus à Yanchevskii.

Comme pour SK_1 , le comportement de USK_1 vis à vis de l'extension des scalaires de K par une extension algébrique paraît être aléatoire et ceci change du tout au tout pour les extensions transcendentes pures d'après un résultat de Yanchevskii :

Théorème 7.2.8 (Yanchevskii). *Si R est une extension transcendante pure de K alors $\text{USK}_1(A) \simeq \text{USK}_1(A \otimes_K R)$ (induit par l'injection canonique $A \rightarrow A \otimes_K R$).*

Preuve. Voir [84, Proposition 2.10] ou [85, Theorem 2]. □

Lien avec SK_1

Les résultats du paragraphe précédent conduisent à penser que le groupe de Whitehead réduit et unitaire réduit sont liés. Cette remarque peut être clarifiée.

Tout d'abord, les deux résultats suivants laissent augurer un rapport entre ces deux groupes :

Proposition 7.2.9 (Platonov-Yanchevskiĭ). *Si D est une K -algèbre à division munie d'une K/F -invololution de seconde espèce, $[D^*, D^*] \subseteq \Sigma(D)$.*

Preuve. Voir [64, Chapter 4, §3.2, Theorem 4]. □

Proposition 7.2.10 (Yanchevskiĭ). *Si A est une K -algèbre simple centrale munie d'une K/F -invololution de seconde espèce, $[A^*, A^*] \subseteq \Sigma(A)$.*

Preuve. Voir [82, Lemma 2]. □

Si $x \in \Sigma'(A)$, alors on peut écrire $x = \sigma(x)a$ où $a \in SL_1(A)$. L'homomorphisme canonique $SL_1(A) \rightarrow SK_1(A)$ induit, en vertu de la proposition 7.2.10, un morphisme $\phi : USK_1(A) \rightarrow SK_1(A)$. En outre :

Lemme 7.2.11 (Yanchevskiĭ). *L'exposant de $\ker \phi$ divise 2. En particulier, si l'indice de A est impair, ϕ est injective.*

Preuve. On se base sur [84, Lemma p. 183]. Supposons $x \in \Sigma'(A)$ et écrivons $x = \sigma(x)a$ où $a \in SL_1(A)$. Si $x \in \ker \phi$ alors $a \in [A^*, A^*]$. D'après la proposition 7.2.10,

$$x^2 = x\sigma(x)a \in \Sigma(A).$$

De plus, si l'indice de A est impair, l'exposant de $USK_1(A)$ est impair (voir le paragraphe précédent) et la dernière égalité assure que $x \in \Sigma(A)$. □

Le lemme précédent peut être utilisé de la façon suivante : si A est une K -algèbre simple centrale d'indice impair munie d'une K/F -invololution unitaire et si on sait que $SK_1(A) = 1$ alors $USK_1(A) = 1$. Cette simple remarque permet d'assurer la trivialité de $USK_1(A)$ dans un grand nombre de cas particuliers ; elle met également en valeur le fait que, pour ce problème, le nombre premier 2 est à considérer à part. Cette impression sera confirmée lors de la section 7.5.

Calcul de USK_1

Si $USK_1(A)$ n'est pas toujours trivial (cela a d'abord été montré par Platonov et Yanchevskiĭ en 1973 : voir [63]), il n'en demeure pas moins qu'il l'est dans un grand nombre de cas.

En analogie avec les résultats de Nakayama-Matsushima et Wang (voir sous-section 7.2.1), Platonov et Yanchevskii prouvent que $\text{USK}_1(A) = 1$ si K est un corps global.

En ce qui concerne les résultats concernant les algèbres d'un type particulier, nous avons le résultat suivant, qui est similaire au théorème 7.1.3 dans son énoncé, et qui a été démontré par Yanchevskii en 1975 :

Proposition 7.2.12 (Yanchevskii). *Si A est une K -algèbre simple centrale à K/F -involutions unitaire et d'indice premier, $\text{USK}_1(A) = 1$.*

Preuve. Voir [82, Lemma 5]. □

Le résultat précédent peut être affiné (voir [21, Théorème p. 66]).

Il arrive également que $\text{USK}_1(A)$ soit trivial pour toute algèbre simple centrale à K/F -involutions unitaire pour un certain type de corps K . C'est le cas, par exemple, du théorème de Yanchevskii 7.1.5 cité en introduction. Le résultat suivant entre également dans cette catégorie et est dû à Draxl en 1979 :

Théorème 7.2.13 (Draxl). *On dit qu'un corps F vérifie la condition (Δ) si quelle que soit L/F une extension finie séparable, quel que soit D un corps gauche de rang fini sur son centre L , si Γ est un groupe d'automorphismes de L sur F cyclique d'ordre premier impair ou bien non cyclique d'ordre 4 et tel que $\text{Nrd}_{D/L}(D^*)$ soit stable sous l'opération de Γ alors*

$$H^1(\Gamma, \text{Nrd}_{D/L}(D^*)) = 0.$$

Alors, si A est une K -algèbre simple centrale à K/F -involutions unitaire et si F vérifie la condition (Δ) , $\text{USK}_1(A) = 1$.

Preuve. Voir [21, Théorème p. 66]. □

Remarque 7.2.14. Le théorème précédent améliore le théorème 7.1.5 de Yanchevskii puisque si un corps est C_2^0 , il vérifie la condition (Δ) d'après un théorème de Noether et Hilbert. Les corps globaux vérifient également la condition (Δ) ; ceci démontre à nouveau que le groupe Whitehead réduit unitaire de A est trivial sur ce type de corps : voir [21] pour tout renseignement complémentaire.

Il existe d'autres groupes de Whitehead réduits dans la littérature : par exemple on peut définir $K_1 \text{Spin}(A)$ pour une algèbre simple centrale à involution symplectique. On peut également définir $\text{USK}_1(A)$ pour des algèbres à involution de première espèce : voir [33, Chapter IV, §17] ou [86].

7.3 Résultats préliminaires à la section 7.5

7.3.1 Deux lemmes de Wang

Pour prouver la trivialité du groupe de Whitehead réduit d'une K -algèbre simple centrale lorsque K est un corps de nombres, Wang démontre deux lemmes importants :

Lemme 7.3.1 (Wang). *Soient D une algèbre à division sur K et L un corps de degré m sur K . Si $\alpha \in D$ est tel que $\alpha \otimes 1 \in [(D \otimes_K L)^*, (D \otimes_K L)^*]$ alors $\alpha^m \in [D^*, D^*]$.*

Preuve. Voir [80, Lemma 3]. □

Lemme 7.3.2 (Wang). *Soit D une algèbre à division sur K . Si $\text{Nrd}_{D/K}(\beta) = 1$ alors $\beta^{\deg D} \in [D^*, D^*]$.*

Preuve. Ce résultat provient du lemme précédent : voir [80, Lemma 4]. □

Ces deux résultats sont très utiles lorsque l'on veut prouver la trivialité de $\text{SK}_1(D)$. En effet, si le degré de l'algèbre D est p -primaire avec p premier (on a vu que l'on pouvait toujours se ramener à ce cas là : voir la sous-section 7.2.1), alors il suffit de trouver pour chaque β avec $\text{Nrd}_{D/K}(\beta) = 1$ un entier q premier à p tel que $\beta^q \in [D^*, D^*]$ pour assurer $\text{SK}_1(D) = 1$ en vertu du lemme 7.3.2. Cette technique a par exemple été utilisée par Yanchevskiï dans les preuves des théorèmes 7.1.4 et 7.1.5. Nous l'utiliserons également dans la section 7.5.

7.3.2 Un lemme technique

Soit D une K -algèbre à division munie d'une K/F -involution unitaire τ . Le lemme technique qui suit a été démontré par Yanchevskiï comme résultat préliminaire à la preuve du théorème 7.1.5. Il peut être considéré comme un analogue du lemme 7.3.1 pour USK_1 :

Lemme 7.3.3 (Yanchevskiï). *Soit L un corps de degré m sur K contenant un élément a qui soit tel que $L = K(a)$ et $[L : F(a)] = 2$. Alors, si $\beta \in \Sigma'(D)$ et si $\beta \otimes 1 \in \Sigma(D \otimes_K L)$ alors $\beta^m \in \Sigma(D)$.*

Preuve. Voir [82, Lemma 4]. □

Sur la base de ce lemme, nous pouvons en fait prouver un résultat plus général :

Lemme 7.3.4. *Soit H/F une extension de degré m linéairement disjointe de l'extension quadratique séparable K/F et soit $L = KH$ (le compositum de K et H). Si $\beta \in \Sigma'(D)$ et $\beta \otimes 1 \in \Sigma(D \otimes_K L)$ alors $\beta^m \in \Sigma(D)$.*

Preuve. Il existe a_1, \dots, a_n tels que $H = F(a_1, \dots, a_n)$ et $L = K(a_1, \dots, a_n)$. Notons $H_1 = F(a_1, \dots, a_{n-1})$ et $L_1 = K(a_1, \dots, a_{n-1})$; nous avons le treillis d'extensions suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 L & \text{-----} & H \\
 | & & | \\
 L_1 & \text{-----} & H_1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 K(a_1) & \text{-----} & F(a_1) \\
 | & & | \\
 K & \text{-----} & F
 \end{array} \tag{7.2}$$

D'après [12, Chapitre V, §2, no 3, Proposition 4], pour $i = 1, \dots, n$,

$$[K(a_1, \dots, a_i) : F(a_1, \dots, a_i)] \leq [K : F] = 2.$$

L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si K et $F(a_1, \dots, a_i)$ sont linéairement disjointes sur F ce qui est cas puisque H et K sont linéairement disjointes sur F (voir [12, Chapitre V, §2, no 3, Proposition 6]). En conséquence les extensions "horizontales" du treillis 7.2 sont quadratiques, séparables car K/F l'est, et enfin galoisiennes. La L -algèbre simple centrale $D \otimes_K L$ est munie de l'involution unitaire $\tau \otimes \theta$ où θ désigne l'automorphisme non trivial de L sur H . On a un isomorphisme d'algèbres $D \otimes_K L \simeq D' \otimes_{L_1} L$ où $D' = D \otimes_K L_1$. Puisque l'involution θ fixe H , elle fixe aussi H_1 et $\theta|_{L_1} \in \text{Gal}(L_1/H_1)$. Comme θ est l'automorphisme non trivial de L/H , $\theta|_{L_1}$ est l'automorphisme non trivial de L_1/H_1 et $\tau' \otimes \theta$ est une involution unitaire sur $D' \otimes_{L_1} L$ où $\tau' = \tau \otimes \theta|_{L_1}$. D'après les hypothèses, $\beta \otimes 1 \in \Sigma(D' \otimes_{L_1} L)$ et $\beta \in \Sigma'(D')$ et puisque $L = L_1(a_n)$, $[L : H_1(a_n)] = 2$, on déduit du lemme 7.3.3 que $(\beta \otimes 1)^{[L:L_1]} \in \Sigma(D') = \Sigma(D \otimes_K L_1)$. Par récurrence immédiate sur n on en déduit que $\beta^m \in \Sigma(D)$ où

$$m = [L : L_1] \cdots [K(a_1) : K] = [L : K].$$

□

7.3.3 Construction de corps parfaits vérifiant certaines conditions

Dans cette sous-section, étant donné un corps K (de caractéristique quelconque) nous notons G_K pour désigner le groupe de Galois $\text{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$ où K_{sep} est une clôture séparable de K . Si p est un nombre premier, nous notons $\text{cd}_p(K)$ pour désigner la p -dimension cohomologique de G_K et $\text{cd}(K)$ est le supremum sur p des p -dimensions cohomologiques. Pour toute autre information concernant ces notions nous renvoyons à [75, Chapitre I, §3].

En [9], Bayer-Fluckiger et Serre énoncent la proposition suivante qui donne un moyen de construire un corps satisfaisant des conditions intéressantes en partant d'un corps de caractéristique différente de 2 :

Proposition 7.3.5 (Bayer-Fluckiger–Serre). *Si K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, il existe une extension algébrique K' de K ayant les propriétés suivantes :*

- (1) K' est réunion filtrante d'extensions de degrés impairs de K ;
 - (2) K' est un corps parfait ;
 - (3) $G_{K'}$ est un pro-2-groupe.
- De plus $\text{cd}(K') = \text{cd}_2(K)$.

Dans cette construction, le nombre premier 2 n'a en fait rien de particulier :

Proposition 7.3.6. *Si K est un corps commutatif et si q est un nombre premier différent de $\text{car}(K) = p$, il existe une extension algébrique K' de K ayant les propriétés suivantes :*

- (1) K' est réunion filtrante d'extensions de degrés premiers à q de K ;
 - (2) K' est un corps parfait ;
 - (3) $G_{K'}$ est un pro- q -groupe.
- De plus $\text{cd}(K') = \text{cd}_q(K)$.

Preuve. La tactique de la preuve lorsque $q = 2$ a été donnée par Bayer-Fluckiger et Serre en [9, Proposition 2.3.1] ; le cas général provient du même genre d'arguments que nous allons détailler.

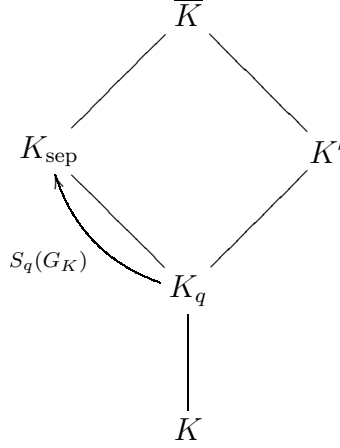
Nous nous plaçons dans une clôture algébrique \overline{K} de K . Soit $S_q(G_K)$ un q -Sylow de G_K (celui ci existe en vertu de [75, Chapitre I, §1, Proposition 3]). Soit K_q le sous-corps de K_{sep} fixé par $S_q(G_K)$; on a

$$K_q = \bigcup_{x \in K_q} K(x).$$

Ainsi K_q est réunion d'extensions de degrés premiers à q et cette réunion est filtrante (d'après le théorème de l'élément primitif, puisque $K_q \subset K_{\text{sep}}$). Si $\text{car}(K) = 0$, K_q est parfait et vérifie la condition (3). La preuve est alors terminée.

Supposons maintenant $\text{car}(K) = p \neq 0$. Soit $K' = K_q^{p^{-\infty}}$ la clôture radicielle de K_q (rappelons que la clôture radicielle de K_q est le sous-corps de \overline{K} formés des éléments radiciels sur K_q , i.e. si $x \in K' = K_q^{p^{-\infty}}$, il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $x^{p^e} \in K_q$: voir [12, Chapitre

V, §8] pour plus de détails). Nous avons donc le treillis d'extensions suivant :



Nous pouvons écrire

$$K' = \bigcup_{L \in J} L, \quad (7.3)$$

où $J = \{L/K \text{ de degré fini} \mid \exists e \in \mathbb{N}, \exists x \in K_q, L \subset (K(x))^{p^{-e}}\}$.

Montrons que si $L \in J$, $[L : K]$ est premier à q . En effet, il existe $x \in K_q$ et $e \in \mathbb{N}$ tels que $L \subset (K(x))^{p^{-e}}$. Puisque $x \in K_q$, $[K(x) : K]$ est premier à q . En outre, si $u \in LK(x)$ alors $u \in (K(x))^{p^{-e}}$ donc u est un élément radiciel sur $K(x)$. L'extension $LK(x)/K(x)$ est donc radicielle et par [12, Chapitre V, §8, Proposition 6], il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $[LK(x) : K(x)] = p^m$. En conclusion le degré $[L : K]$ divise $[K(x) : K]p^m$, il est donc premier à q .

Montrons que l'union (7.3) est filtrante. Si $L_1, L_2 \in J$ avec $L_1 \subset (K(x_1))^{p^{-e_1}}$ et $L_2 \subset (K(x_2))^{p^{-e_2}}$, alors il existe $x \in K_q$ tel que $K(x_1), K(x_2) \subset K(x)$ (par le théorème de l'élément primitif) et si $e = \max(e_1, e_2)$, nous avons

$$L_1, L_2, (K(x_1))^{p^{-e_1}}, (K(x_2))^{p^{-e_2}} \subset (K(x))^{p^{-e}}.$$

Donc $L_1L_2 \subset (K(x))^{p^{-e}}$ puis $L_1L_2 \in J$ et contient L_1 et L_2 . Ainsi, le corps K' vérifie la condition (1).

Par définition, K' est le plus petit sous-corps parfait de \overline{K}_q contenant K_q donc il vérifie également la condition (2).

D'après [75, Chapitre II, §4.1], $G_{K'}$ s'identifie à un sous-groupe de G_{K_q} et son indice vaut le degré de séparabilité $[K' : K_q]_s$. Cet indice vaut 1, puisque toute extension intermédiaire entre K' et K_q est radicielle donc inséparable. Ainsi, $G_{K'} = G_{K_q} = S_q(G_K)$ est un pro- q -Sylow d'où la propriété (3). Enfin, puisque $G_{K'}$ est un q -Sylow de G_K , on a la formule $\text{cd}(K') = \text{cd}_q(K)$, d'après [75, Chapitre I, §3.3, Corollaire 1]. \square

7.4 Autour d'un résultat de Merkurjev et Suslin

Nous commençons par poser la définition suivante :

Définition 7.4.1. Un corps K est dit C_2^0 si pour toute extension finie E/K , pour toute algèbre à division D de dimension finie sur son centre E , la norme réduite $\text{Nrd}_{D/E} : D^* \rightarrow E^*$ est surjective.

Remarque 7.4.2. Les corps C_2 sont des corps C_2^0 (voir [64, Chapter II, §4.3]). En revanche, la classe des corps C_2^0 est strictement plus grande que celle des corps C_2 , puisqu'elle contient les corps \mathbb{Q}_p pour tout p premier et que ceux ci ne sont pas des corps C_2 (ce fait est dû à Terjanian : voir [75, p. 98] pour une preuve de ce fait pour $p = 2$).

L'important théorème suivant, dû à Merkurjev et Suslin en 1985, relie la p -dimension cohomologique au fait d'être C_2^0 "localement" :

Théorème 7.4.3 (Merkurjev-Suslin). *Soit K un corps et p un premier différent de la caractéristique de K . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\text{cd}_p(K) \leq 2$.
- (2) *Pour toute extension finie E/K et pour toute E -algèbre simple centrale A de degré p -primaire, la norme réduite $\text{Nrd}_{A/K} : A^* \rightarrow E^*$ est surjective.*

Preuve. Voir [76, Theorem 24.8]. □

En conséquence, les corps C_2^0 et parfaits possèdent une description cohomologique simple donnée dans le corollaire 7.1.6 dont nous rappelons l'énoncé :

Corollaire (Merkurjev-Suslin) *Si K est un corps parfait, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\text{cd}(K) \leq 2$.
- (2) *K est un corps C_2^0 .*

Preuve. Ce corollaire est énoncé en [76, Corollary 24.9] comme conséquence directe du théorème 7.4.3. Nous en donnons une preuve comme conséquence de ce résultat profond.

Supposons tout d'abord que K soit un corps C_2^0 et montrons que $\text{cd}(K) \leq 2$. Soient p un nombre premier différent de la caractéristique de K , E/K une extension finie et A une E -algèbre simple centrale p -primaire. D'après le théorème 1.1.1, A peut s'identifier à $M_n(D)$ où D est une algèbre à division sur E . Puisque K est un corps C_2^0 , l'application $\text{Nrd}_{D/E} : D^* \rightarrow E^*$ est surjective. Par le biais du déterminant de Dieudonné, on en déduit que $\text{Nrd}_{A/E} : A^* \rightarrow E^*$ est aussi surjective (voir [22, §22, Theorem 3]). D'après l'implication (2) \Rightarrow (1) du théorème 7.4.3, $\text{cd}_p(K) \leq 2$ pour tout premier $p \neq \text{car}(K)$. Si K est un corps de caractéristique non nulle l , on a en outre $\text{cd}_l(K) \leq 1$ (voir [75, Chapitre II, §2, Proposition 3]). On en déduit que $\text{cd}(K) \leq 2$.

Réciproquement, supposons que $\text{cd}(K) \leq 2$ et soient E/K une extension finie et D une algèbre à division sur E . Alors,

$$D \simeq D_1 \otimes_E \cdots \otimes_E D_s,$$

où les D_i sont des algèbres à division sur E de degré $p_i^{f_i}$, p_i étant des premiers deux à deux différents et $\text{ind}(D) = \prod_{i=1}^s p_i^{f_i}$ (voir [22, §, Corollary 11]). D'après l'implication (1) \Rightarrow (2) du théorème 7.4.3, on en déduit que $\text{Nrd}_{D_i/E} : D_i^* \rightarrow E^*$ est surjective si $p_i \neq \text{car}(K)$. Si il existe j parmi les entiers $1, \dots, s$ tel que $p_j = \text{car}(K)$ alors, puisque E est un corps parfait (K étant parfait), on a $E^{p_j} = E$ (voir [12, Chapitre V, §7, no 3, Proposition 5]). Ainsi, quel que soit $\mu \in E^*$, il existe $\lambda_\mu \in E^*$ tel que $\lambda_\mu^{p_j^{f_j}} = \mu$ et

$$\text{Nrd}_{D_j/E}(\lambda_\mu) = \lambda_\mu^{\deg D_j} = \lambda_\mu^{p_j^{f_j}} = \mu.$$

En conséquence, l'application $\text{Nrd}_{D_i/E} : D_i^* \rightarrow E^*$ est surjective pour $i = 1, \dots, s$. Soit k un entier parmi $1, \dots, s$. Alors, si $e \in E^*$, il existe $d_k \in D_k^*$ tel que $\text{Nrd}_{D_k/E}(d_k) = e$. Puis

$$\text{Nrd}_{D/E}(1 \otimes \cdots \otimes d_k \otimes \cdots \otimes 1) = (\text{Nrd}_{D_k/E}(d_k))^{\prod_{i \neq k} p_i^{f_i}},$$

(voir [22, §22, Theorem 3]) d'où $e^{\prod_{i \neq k} p_i^{f_i}} \in \text{Nrd}_{D/E}(D^*)$. De plus,

$$\text{pgcd} \left(\prod_{i \neq k} p_i^{f_i}, 1 \leq k \leq s \right) = 1$$

et, par le théorème de Bezout, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\lambda_1 \prod_{i \neq 1} p_i^{f_i} + \cdots + \lambda_s \prod_{i \neq s} p_i^{f_i} = 1.$$

Enfin, pour chaque $e \in E^*$,

$$\begin{aligned} \text{Nrd}_{D/E}(d_1^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes d_s^{\lambda_s}) &= \text{Nrd}_{D/E}(d_1^{\lambda_1} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \cdots \text{Nrd}_{D/E}(1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes d_s^{\lambda_s}) \\ &= e^{\left(\lambda_1 \prod_{i \neq 1} p_i^{f_i} + \cdots + \lambda_s \prod_{i \neq s} p_i^{f_i} \right)} \\ &= e \in \text{Nrd}_{D/E}(D^*) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Remarques 7.4.4. (1) Dans le corollaire 7.1.6, l'implication (2) \Rightarrow (1) est vraie en toute généralité. On a ainsi la suite d'implication suivante :

$$K \text{ est un corps } C_2 \Rightarrow K \text{ est un corps } C_2^0 \Rightarrow \text{cd}(K) \leq 2 \Rightarrow \text{cd}_2(K) \leq 2 \Rightarrow I^3(K) = 0.$$

En particulier, le corps K est forcément non formellement réel.

(2) L'hypothèse $\text{cd}(K) \leq 2$ est vraie pour un grand nombre de corps parmi lesquels les corps de degré de transcendance au plus 2 sur un corps algébriquement clos, les corps p -adiques et les corps globaux non formellement réels (voir [75, Chapitre II, §4]). Philosophiquement, cette hypothèse signifie que le corps ne possède pas d'invariants de degré supérieur ou égal à 3.

(3) Les résultats 7.4.3 et 7.1.6 ont beaucoup de conséquences importantes. Par exemple, le théorème 7.4.3 entraîne la véracité de la conjecture II de Serre pour le groupe spécial linéaire $\text{SL}_n(D)$ où D est une algèbre à division de centre K . Dans leur preuve de cette même conjecture pour le groupe spécial unitaire $\text{SU}(h)$, Bayer-Fluckiger et Parimala utilisent le corollaire 7.1.6 (voir [7, Theorem 5.1.2]). Ce corollaire est également une étape importante dans la classification à conjugaison près des involutions de même type obtenue par Lewis et Tignol en 1999 (voir [45]). On verra d'autres conséquences de ces deux résultats dans la section suivante.

7.5 Preuves des résultats

Dans cette dernière section nous prouvons les théorèmes 7.1.8 et 7.1.9. Dans chacun de ces deux cas, le schéma de la preuve sera le suivant :

1. à partir de K , nous utilisons la proposition 7.3.6 pour construire un corps parfait L vérifiant $\text{cd}(L) \leq 2$;
2. d'après le corollaire 7.1.6, nous pouvons supposer que L est un corps C_2^0 ;
3. nous utilisons les résultats de Yanchevskii 7.1.4 et 7.1.5 pour conclure au niveau de L ;
4. nous utilisons le lemme 7.3.2 de Wang ou le lemme 7.3.4 pour redescendre ces informations au niveau de K .

Nous rappelons l'énoncé du théorème 7.1.9 avant d'en entamer la preuve :

Théorème *Soient K un corps de caractéristique p (éventuellement nulle) et q un nombre premier différent de p . Supposons que $\text{cd}_q(K) \leq 2$ et que D est une K -algèbre à division de degré q -primaire. Alors $\text{SK}_1(D) = 1$.*

Preuve. Il est clair que $[D^*, D^*] \subseteq \text{SL}_1(D)$. Réciproquement, soit $b \in \text{SL}_1(D)$. D'après la proposition 7.3.6, il existe un corps L qui est réunion filtrante d'extensions de degrés premiers à q sur K qui soit parfait et tel que $\text{cd}(L) \leq 2$. D'après le résultat de Merkurjev et Suslin 7.1.6, le corps L est un corps C_2^0 . Comme $b \in \text{SL}_1(D)$, $b \otimes 1 \in \text{SL}_1(D \otimes_K L)$ (voir par exemple [22, §22, Theorem 2]) et puisque L est un corps C_2^0 , le théorème de

Yanchevskii 7.1.4 nous permet d'affirmer que $b \otimes 1 \in [(D \otimes_K L)^*, (D \otimes_K L)^*]$. Puisque L est réunion filtrante d'extensions finies de K de degrés premiers à q , nous pouvons supposer que $b \otimes 1 \in [(D \otimes_K K_i)^*, (D \otimes_K K_i)^*]$ avec $([K_i : K], q) = 1$. D'après le lemme 7.3.1, on en déduit que $b^{[K_i : K]} \in [D^*, D^*]$. Or on a aussi $b^{\deg D} \in [D^*, D^*]$ d'après le lemme 7.3.2 et puisque le degré de D est q -primaire, on applique le théorème de Bezout aux entiers $\deg D$ et $[K_i : K]$ pour en déduire que $b \in [D^*, D^*]$, ce qui termine la preuve. \square

Nous prouvons maintenant le théorème 7.1.8 :

Théorème *Soient F un corps de caractéristique p (éventuellement nulle) et q un nombre premier différent de p . Supposons que $\text{cd}_q(F) \leq 2$ et que D est une K -algèbre à division de degré q -primaire munie d'une K/F -involution unitaire. Alors $\text{USK}_1(D) = 1$.*

Preuve. En vertu de l'injection $\text{USK}_1(D) \hookrightarrow \text{SK}_1(D)$ donnée dans le lemme 7.2.11, le résultat du théorème pour q impair provient du théorème 7.1.9 (puisque $\text{cd}(K) \leq \text{cd}(F)$, voir [75, Chapitre II, §4, Proposition 10]). Dans la suite de cette preuve, nous supposons donc que $q = 2$ et $p = \text{car}(K) \neq 2$. D'après la proposition 7.3.6, il existe un corps L , réunion filtrante d'extensions de F de degrés impairs, parfait et tel que $\text{cd}(L) \leq 2$: posons $L = \bigcup_{i \in I} F_i$, avec $([F_i : F], 2) = 1$.

Nous allons construire une extension quadratique E de L . Pour $i \in I$, nous posons $E_i = KF_i$ et $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ ce qui implique que $E = KL$. Comme $[K : F] = 2$ et $[F_i : F]$ est impair pour tout $i \in I$, nous avons $[E_i : F_i] = 2$ et $[E_i : K]$ est impair pour tout $i \in I$. Par conséquent, le corps E est réunion filtrante d'extensions de K de degrés impairs. Montrons que $[E : L] = 2$. Si $\{1, \sqrt{d}\}$ est une F -base de K , cette partie engendre E sur L donc $[E : L] \leq 2$. Si $E = L$ alors $K \subset L$. Si $x \in K \setminus F$ alors x est de degré 2 sur F et il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in F_{i_0}$ ce qui contredit le fait que $[F_{i_0} : F]$ est impair et, finalement, $[E : L] = 2$.

L'algèbre $D \otimes_K E$ est une algèbre simple de centre E . Si D est munie de la K/F -involution unitaire σ et si τ est l'automorphisme non trivial de E sur L alors $\sigma \otimes \tau$ est une involution unitaire sur $D \otimes_K E$.

Soit $a \in \Sigma'(D)$ alors $a \otimes 1 \in \Sigma'(D \otimes_K E)$ (voir [22, §22, Theorem 2]) et puisque L est un corps C_2^0 (d'après le théorème 7.1.6), on déduit du théorème 7.1.5 que $a \otimes 1 \in \Sigma(D \otimes_K E)$. Ainsi, il existe $j \in I$ tel que $a \otimes 1 \in \Sigma(D \otimes_K E_j)$ et, d'après le lemme 7.3.4, cela implique que $a^{[E_j : K]} \in \Sigma(D)$. Enfin, si on pose

$$b = a^{\deg D} (\text{Nrd}_{D/K}(a))^{-1},$$

on vérifie que $b \in \text{SL}_1(D)$ ce qui implique, d'après le lemme 7.3.2 que $b^{\deg D} \in [D^*, D^*]$. Or, $[D^*, D^*] \subset \Sigma(D)$ donc $a^{\deg D^2} \in \Sigma(D)$. Puisque $([E_j : K], \deg D) = 1$, $a \in \Sigma(D)$ ce qui termine la preuve. \square

Remarques 7.5.1. (1) La preuve du théorème 7.1.9 pour $q \neq 2$ peut se faire indépendamment du théorème 7.1.8 en appliquant le lemme 7.3.4.

(2) Il est probable que le théorème 7.4.3 de Merkurjev et Suslin puisse donner une autre preuve des théorèmes 7.1.8 et 7.1.9 en adaptant les preuves des théorèmes 7.1.4 et 7.1.5 données par Yanchevskii. Nous avons opté pour une utilisation du corollaire 7.1.6 en vue de présenter les preuves de ces faits par des méthodes “élémentaires”.

Nous globalisons les résultats précédents dans le corollaire suivant :

Corollaire 7.5.2. (1) Soit K un corps de caractéristique quelconque vérifiant $\text{cd}(K) \leq 2$. Soit A une K -algèbre simple centrale d'indice premier à $\text{car}(K)$. Alors $\text{SK}_1(A) = 1$.

(2) Soit F un corps de caractéristique quelconque vérifiant $\text{cd}(F) \leq 2$. Soit A une K -algèbre simple centrale d'indice premier à $\text{car}(K)$ munie d'une K/F -involution unitaire. Alors $\text{USK}_1(A) = 1$.

Preuve. (1) D'après les résultats de la sous-section 7.2.1, si D désigne l'algèbre à division Brauer-équivalente à A , on a $\text{SK}_1(A) \simeq \text{SK}_1(D)$ et

$$\text{SK}_1(D) \simeq \prod_{i=1}^n \text{SK}_1(D_i)$$

où les D_i sont des algèbres à division qui représentent les composantes p_i -primaires de D avec $p_i \neq \text{car}(K)$ par hypothèse. La conclusion provient alors du théorème 7.1.9.

(2) On conclut comme en (1) en utilisant les résultats de la sous-section 7.2.2 et le théorème 7.1.8. \square

Remarques 7.5.3. (1) La partie (1) donne une preuve du théorème 7.2.6 dans le cas où l'indice de A est premier à $\text{car}(K)$.

(2) Le corollaire 7.5.2 semble être le pendant non formellement réel d'un résultat obtenu par Bayer-Fluckiger et Parimala : voir [8, Proposition 4.5 (1)].

(3) Nous ne savons pas s'il est possible de comparer la condition (Δ) du résultat 7.2.13 de Draxl et la condition $\text{cd}(F) \leq 2$ de l'assertion (2) du corollaire 7.5.2.

Jean-Pierre Tignol m'a fait remarquer que dans le cas des algèbres à division de degré p -primaire (qui est le seul cas non traité par le corollaire 7.5.2), il est naturel de remplacer la condition sur la p -dimension cohomologique par une conditions sur les groupes de cohomologie de Kato et plus précisément sur la l -dimension séparable d'un corps (définie par Gille dans [26]). Dans [26], Gille prouve un théorème analogue au théorème 7.4.3 de Merkurjev et Suslin en ce sens qu'il relie la surjectivité de la norme réduite pour toute extension séparable finie à la l -dimension séparable (voir [26, Théorème 7] pour plus de détails).

Bibliographie

- [1] A. ALBERT : *Structure of algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **24**, (1939) ; revised edition : AMS Coll. Publ. (1961).
- [2] J. K. ARASON, R. ELMAN, B. JACOB : Graded Witt ring and Galois cohomology I, Canadian Math. Soc. Conf. Proc. vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 17–50.
- [3] I. ASSEM : *Algèbres et modules cours et exercices*, Enseignement des mathématiques, Masson.
- [4] R. BAEZA, R. MORESI : On the Witt-equivalence of fields of characteristic 2, J. Algebra **92** (1985), 446–453.
- [5] H. BASS : *Algebraic K-theory*, Benjamin, New-York 1968.
- [6] E. BAYER-FLUCKIGER, H. W. LENSTRA JR. : Forms in odd degree extensions and self-dual normal bases, Amer. J. Math. **112** (1990), n° 3, 359–373.
- [7] E. BAYER-FLUCKIGER, R. PARIMALA : Galois cohomology of the Classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2 , Invent. Math. **122** (1995), 195–229.
- [8] E. BAYER-FLUCKIGER, R. PARIMALA : Classical groups and Hasse principle, Annals of Math. **147** (1998), 651–693.
- [9] E. BAYER-FLUCKIGER, J.-P. SERRE : Torsions quadratiques et bases normales autoduales, Amer. J. Math. **116** (1994), 1–63.
- [10] A. BLANCHARD : *Les corps non commutatifs*, Presses Universitaires de France, Vendôme, 1972, Collection Sup : Le mathématicien, **9**.
- [11] N. BOURBAKI : *Algèbre linéaire*, dans *Algèbre*, Hermann, Paris, 1950, Chapitre 2.
- [12] N. BOURBAKI : *Corps commutatifs*, dans *Algèbre*, Hermann, Paris, 1950, Chapitre 5.
- [13] N. BOURBAKI : *Modules et anneaux semi-simples*, dans *Algèbre*, Hermann, Paris, 1958, Chapitre 8.

- [14] N. BOURBAKI : *Formes sesquilineaires et formes quadratiques*, dans *Algèbre*, Hermann, Paris, 1959, Chapitre 9.
- [15] C. CIBILS : Groupe de Witt d'une algèbre avec involution, *Enseign. Math. (2)* **29** (1983), n° 1-2, 27–43.
- [16] C. M. CORDES : The Witt group and the equivalence of fields with respect to quadratic forms, *J. Algebra* **26** (1973), 400–421.
- [17] I. DEJAIFFE : Somme orthogonale d'algèbres à involution et algèbre de Clifford, *Commun. Algebra* **26** (1998), n° 5, 1589–1612.
- [18] M. DEURING : *Algebren*, Vol. 4, *Ergebn. Math.*, Berlin, Springer-Verlag 1935.
- [19] J. DIEUDONNÉ : *La géométrie des groupes classiques*, *Ergebnisse der Mathematik*, Neue Folge, Heft 5, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer 1955.
- [20] P. K. DRAXL : Corps gauches dont le groupe des commutateurs n'est pas égal au noyau de la norme réduite, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, **17** n° 26, 1975/1976.
- [21] P. K. DRAXL : Corps gauches à involution de deuxième espèce, *SMF Astérisque* **61** (1979), 63–72.
- [22] P. K. DRAXL : *Skew fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 81, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [23] M. EICHLER : *Quadratische formen und orthogonale gruppen*, Berlin-Heidelberg-Göttingen, Springer 1952.
- [24] R. ELMAN, T. Y. LAM : Classification theorems for quadratic forms over fields, *Comment. Math. Helv.* **49** (1974), 373–381.
- [25] A. FRÖHLICH, A. M. MCEVETT : Forms over rings with involution, *J. Algebra* **12** (1969), 79–104.
- [26] P. GILLE : Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive, *K-theory* **21** (2000), n° 1, 57–100.
- [27] N. GRENIER-BOLEY, M. G. MAHMOUDI : Exact sequences of Witt groups, à paraître dans *Comm. Algebra*.
- [28] H. GROSS, H. R. FISCHER : Non real fields and infinite dimensional k -vectorspaces, *Math. Ann.* **159** (1965), 285–308.
- [29] D. K. HARRISON : *Witt rings*, University of Kentucky Notes, Lexington, Kentucky, 1970.

- [30] N. JACOBSON : A note on hermitian forms, *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940), 264–268.
- [31] N. JACOBSON : *Algebra*, volume 2, Van Nostrand, Princeton 1953.
- [32] M.-A. KNUS : *Quadratic and Hermitian forms over rings*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 294, Springer-Verlag, Berlin 1991.
- [33] M.-A. KNUS, A.S. MERKURJEV, M. ROST, J.-P. TIGNOL : *The book of involutions*, Coll. Pub. 44. Providence, RI : Amer. Math. Soc. (1998).
- [34] T. Y. LAM : *Algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin, Reading, Massachusetts, 1973.
- [35] D. LEEP, M. Marshall : Isomorphisms and automorphisms of Witt rings, *Canad. Math. Bull.* **31** (2) (1988), 250–256.
- [36] D. W. LEWIS : A note on Hermitian and quadratic forms, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), n° 3, 265–267.
- [37] D. W. LEWIS : New improved exact sequences of Witt Groups, *J. Algebra* **74** (1982), n° 1, 206–210.
- [38] D. W. LEWIS : Quaternionic skew-hermitian forms over a number field, *J. Algebra* **74** (1982), 232–240.
- [39] D. W. LEWIS : The isometry classification of hermitian forms over division algebras, *Linear Algebra Appl.* **43** (1982), 245–272.
- [40] D. W. LEWIS : Exact sequences of Witt groups of equivariant forms, *Enseign. Math.* (2) **29** (1983), n° 1-2, 45–51.
- [41] D. W. LEWIS : A note on Clifford algebras and central division algebras with involution, *Glasgow Math. J.* **26** (1985), 171–176.
- [42] D. W. LEWIS : Periodicity of Clifford algebras and exact octagons of Witt groups, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **98** (1985), n° 2, 263–269.
- [43] D. W. LEWIS : Sums of hermitian squares, *J. Algebra* **115** (1988), n° 2, 466–480.
- [44] D. W. LEWIS, C. SCHEIDERER, T. UNGER : A weak Hasse principle for central simple algebras with an involution, *Proceedings of the Conference on Quadratic Forms and related topics (Baton-Rouge, LA) (2001)*, doc. math. 2001, extra vol. 241–251 (electronic).

- [45] D. W. LEWIS, J.-P. TIGNOL : Classification theorems for central simple algebras with involution (with an appendix by R. Parimala), *Manuscripta Math.* **100** (1999), 259–276.
- [46] D. W. LEWIS, T. UNGER : A local-global principle for algebras with involution and hermitian forms, *Math. Z.* **244** (2003), n° 3, 469–477.
- [47] M. G. MAHMOUDI : Involutions d’une algèbre de Clifford et isotropie des formes quadratiques et hermitiennes, Thèse.
- [48] A. M. MCEVETT : Forms over semisimple algebras with involution, *J. Algebra* **12** (1969), 105–113.
- [49] A. MERKURJEV : On the norm residue symbol of degree 2, *Dokladi Akad. Nauk. SSSR* **261** (1981), 542–547 ; english translation : *Soviet Math. Dokladi* **24** (1981), 546–551.
- [50] A. MERKURJEV, A. A. SUSLIN : On the norm residue homomorphism of degree three (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **54** (1990), 339–356 ; english translation : *Math. USSR Izv.* **36** (1991), 349–368.
- [51] A. MERKURJEV : K -theory of simple algebras, *Proc. of Symposia in Pure Math.*, **58.1** (1995), 65–83.
- [52] J. MILNOR : Algebraic K -theory and quadratic forms, *Invent. Math.* **9** (1970), 318–344.
- [53] J. MILNOR, D. HUSEMOLLER : *Symmetric bilinear forms*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73*, New York-Heidelberg, Springer-Verlag 1973.
- [54] J. MINÁČ, M. SPIRA : Witt rings and Galois groups, *Annals of Math.* **144** (1996), 35–60.
- [55] T. NAKAYAMA, Y. MATSUSHIMA : Über die multiplikative Gruppe einer p -adischen Divisionsalgebra, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **19** (1943), 622–628.
- [56] O. T. O’MEARA : *Introduction to quadratic forms*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag 1963.
- [57] R. PARIMALA, R. SRIDHARAN, V. SURESH : An exact sequence of Witt groups, Appendix 2 dans [7].
- [58] A. PFISTER : Multiplikative quadratische Formen, *Arch. Math.* **16** (1965), 363–370.

- [59] A. PFISTER : *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 217, Cambridge University Press, Cambridge, 1995
- [60] R. PERLIS, K. SZYMICZEK, P. E. CONNER, R. LITHERLAND : Matching Witts with global fields, *Contemp. Math.* **155** (1994), 365–387.
- [61] V. P. PLATONOV : On the Tannaka-Artin problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **221** (1975), 1038–1041 ; english translation : *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975).
- [62] V. P. PLATONOV : The infiniteness of the reduced Whitehead group, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **227** (1976), n° 2, 299–301 ; english translation in *Soviet Math. Dokl.* **17** (1976).
- [63] V. P. PLATONOV, V. YANCHEVSKIÏ : The Kneser-Tits conjecture for unitary groups, *Dokl. Akad. Nauk USSR* **225** (1975), 48–51 ; english translation : *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975).
- [64] V. P. PLATONOV, V. YANCHEVSKIÏ : *Finite-dimensional division algebras*, Algebra IX, Finite groups of Lie Type, Finite-Dimensional Division Algebras (Berlin) (A. I. Kostrikin and I. R. Shafarevich, eds.), Encyclopaedia of Mathematical Science, vol. 77, Springer-Verlag, 121–233.
- [65] H.-G. QUEBBEMANN, W. SCHARLAU, M. SCHULTE : Quadratic and Hermitian forms in additive and abelian categories, *J. Algebra* **59** (1979), 264–289.
- [66] A. A. RANICKI : The L -theory of twisted quadratic extensions, *Canad. J. Math.* **39** (1987), n° 2, 345–364.
- [67] A. A. RANICKI : *Algebraic L-theory and topological manifolds*, Cambridge Tracts in Mathematics, 102. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [68] C. RIEHM : The corestriction of algebraic structures, *Invent. Math.* **11** (1970), 73–98.
- [69] M. ROST : Hilbert’s theorem 90 for K_3^M for degree-two extensions, preprint, 1986.
- [70] W. SCHARLAU : Induction theorems and the structure of the Witt group, *Invent. Math.* **11** (1970), 37–44.
- [71] W. SCHARLAU : *Quadratic and hermitian forms*, Grundlehren Math. Wiss. **270**, Berlin, Springer-Verlag 1985.
- [72] A. SERHIR : Niveau hermitien de certaines algèbres de quaternions, *Comm. Algebra* **25**(8) (1997), 2531–2538.

- [73] A. SERHIR : Niveau hermitien d'une algèbre de quaternions à division munie d'une involution de seconde espèce, *Comm. Algebra* **30**(10) (2002), 4621–4627.
- [74] J.-P. SERRE : *Corps Locaux*, Hermann, Paris, 1968, Troisième édition.
- [75] J.-P. SERRE : *Cohomologie galoisienne*, Lecture notes in Mathematics **5**, Springer-Verlag 1994.
- [76] A. A. SUSLIN : Algebraic K -theory and the norm residue homomorphism, *J. Soviet Math.* **30** (1985), 2556–2611.
- [77] A. A. SUSLIN : SK_1 of division algebras and Galois cohomology, *Adv. in Soviet Math.* **4** (1991), 75–99.
- [78] J. TITS : Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps, Séminaire Bourbaki, année **29**, exposé n° 505, 1976/1977.
- [79] V. VOEVODSKY : The Milnor conjecture, preprint (1996). Cet article est disponible sur le site <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/>
- [80] S. WANG : On the commutator group of a simple algebra, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 323–334.
- [81] E. WITT : Theorie der quadratischen formen in beliebigen korpern, *Crelle's J.* (1937) 31–44.
- [82] V. YANCHEVSKIĬ : Simple algebras with involution and unitary groups, *Math. Sbornik* **93** (1974) ; english translation : *Math. USSR Sbornik*, **22** (1974), 372–384.
- [83] V. YANCHEVSKIĬ : The commutator subgroups of simple algebras with surjective reduced norms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **221** (1975) ; english translation : *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975), 492–495.
- [84] V. YANCHEVSKIĬ : Reduced unitary K -theory and division rings over discretely valued Hensel fields, *Izv. Akad. Nauk USSR Ser. Math.* **42** (1978), 879–918 ; english translation : *Math. USSR Izv.* **13** (1979), 175–213.
- [85] V. YANCHEVSKIĬ : Reduced unitary K -theory, Applications to algebraic groups, *Mat. Sbornik* **110** (**152**)(1979, 579–596 ; english translation : *Math. USSR Sbornik* **38** (1981).
- [86] V. YANCHEVSKIĬ : Symmetric and skew-symmetric elements of involutions, associated groups and the problem of decomposability of involutions, *Proc. of Symposia in Pure Math.* **58.2** (1995), 431–444.

Index

- C_2^0 , 136
- $Gr^\varepsilon(G, A, \sigma)$, 24
- $I^n(A, \sigma)$, 98
- $I_1^\varepsilon(A, \sigma)$, 48
- $I_2^\varepsilon(A, \sigma)$, 53
- $S^\varepsilon(G, A, \sigma)$, 24
- $S_h(R, \sigma)$, 93
- $W(K)$, 25
- $W^\varepsilon(G, A, \sigma)$, 25
- SK_1 , 123, 126
- SL_1 , 123
- USK_1 , 124
- $((A, \sigma), (B, \tau), M, N, f, g, \nu)$, 28

- algèbre à division, 10
- algèbre de groupe, 18
- algèbre simple centrale, 10
- anneau de Witt, 25
- application transposée, 32

- (A, B) -bimodule, 27
- Brauer-équivalentes, 14

- carré hermitien, 93
- corps C_2^0 , 136
- corps global, 116

- décomposition de Witt, 43
- degré, 11
- dimension
 - d'un espace quadratique, 46
- discriminant à signe
 - d'une forme hermitienne, 53
 - d'une forme quadratique, 49
- discriminant raffiné, 54

- équivalence
 - (Q_1, Q_2) -équivalence, 110
 - de Morita, 27
 - de réciprocity, 118
 - de réciprocity quadratique, 119
 - de Witt, 101
 - en chaîne, 105
 - simple, 104

- G -forme, 18
 - ε -hermitienne, 18
 - isotrope, 74
 - non dégénérée, 18
 - paire, 22

- forme, 15
 - ε -hermitienne, 17
 - anisotrope, 42
 - isotrope, 42
 - sous-jacente, 18
 - faiblement hyperbolique, 94
 - hyperbolique, 20
 - associée à un module, 20
 - métabolique, 20
 - non dégénérée, 17
 - quadratique, 18
 - sesquilinéaire, 17

- forme bilinéaire
 - anisotrope, 41
 - isotrope, 41

- forme de Pfister, 55
 - hermitienne, 93

- groupe de Brauer, 14
- groupe de Grothendieck-Witt, 24

- équivariant, 24
- groupe de Whitehead réduit, 123, 126
- groupe de Whitehead unitaire réduit, 124
- groupe de Witt, 25
 - équivariant, 24
- indice, 11
- involution, 11
 - K/F -involution, 11
 - adjointe, 30
 - canonique, 12
 - de deuxième espèce, 11
 - de première espèce, 11
 - orthogonale, 12
 - symplectique, 12
 - unitaire, 12
- isométrie, 20
- G -module sur A , 18
- module dual, 17
- niveau hermitien, 93
- norme réduite, 49
- place, 116
 - complexe, 116
 - finie, 116
 - infinie, 116
 - réelle, 116
- rang d'un espace hermitien, 46, 47
- simplification de Witt, 22
- somme orthogonale, 20