



HAL
open science

Quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades et les principes de grandes déviations pour des estimateurs de paramètres de diffusions

Adrien Richou

► **To cite this version:**

Adrien Richou. Quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades et les principes de grandes déviations pour des estimateurs de paramètres de diffusions. Probabilités [math.PR]. Université de Bordeaux, 2019. tel-02400113

HAL Id: tel-02400113

<https://hal.science/tel-02400113v1>

Submitted on 9 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Document de synthèse présenté à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE

par **Adrien RICHOU**

en vue de l'obtention du diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité — MATHÉMATIQUES

**Quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques
rétrogrades et les principes de grandes déviations pour des
estimateurs de paramètres de diffusions**

Date de soutenance : 04/12/2019

Après l'avis des rapporteurs :

Peter IMKELLER Professeur émérite, Humboldt-Universität zu Berlin
Huyên PHAM Professeur, Université de Paris, LPSM
Denis TALAY Directeur de recherche, INRIA Sophia Antipolis

Devant la commission d'examen composée de :

Marc ARNAUDON	Professeur, Université de Bordeaux, IMB	Examinateur
Philippe BRIAND	Professeur, Université Savoie Mont Blanc, LAMA	Examinateur
Ying HU	Professeur, Université de Rennes 1, IRMAR	Examinateur
Monique JEANBLANC	Professeure émérite, Université d'Évry, LaMME	Examinatrice
Huyên PHAM	Professeur, Université de Paris, LPSM	Rapporteur
Denis TALAY	Directeur de recherche, INRIA Sophia Antipolis	Rapporteur

Table des matières

Publications	5
Thèses de doctorat co-encadrées et co-dirigées	9
1 Introduction	11
1.1 EDSRs et applications	11
1.1.1 Quelques résultats connus	13
1.1.2 Quelques champs d'application des EDSRs	16
1.1.3 La simulation numérique des EDSRs	18
1.2 Plan de la synthèse	19
1.3 Notations	20
2 EDSRs quadratiques et sur-quadratiques	23
2.1 Résultats généraux	23
2.2 Retour sur l'unicité des solutions dans le cas non borné	25
2.3 Le cadre markovien et trajectoire-dépendant	30
2.4 Second retour sur l'unicité des solutions dans le cas non borné	37
2.5 Quid du cadre multidimensionnel ?	38
3 EDSRs ergodiques	43
3.1 EDSREs associées à des EDPs avec condition de Neumann	44
3.2 Comportement en temps long des EDPs paraboliques semi-linéaires	46
3.3 Vous reprendrez bien un peu de quadratique ?	47
4 EDSRs obliquement réfléchies et problèmes de commutation optimale	49
4.1 EDSRs obliquement réfléchies	49
4.2 Problèmes de commutation randomisée optimale	53
5 Discrétisation temporelle des EDSRs	57
5.1 Quelques outils et notion de stabilité numérique	57
5.1.1 Quelques outils utiles pour l'étude des EDSRs discrétisées	57
5.1.2 Notion de stabilité numérique	59
5.2 Approximation numérique des EDSRs markoviennes quadratiques	60
5.3 Discrétisation temporelle des EDSRs obliquement réfléchies	64

6	Principes de grandes déviations pour des estimateurs de paramètres de diffusions	67
6.1	Principes de grandes déviations pour les estimateurs des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck biaisé	67
6.2	Revisite du cas non biaisé	70
	Bibliographie	71

Publications

Je recense ici la totalité de mes publications. À l'exception de [A17], elles sont accessibles librement sur ArXiv, HAL et TEL pour la thèse.

Thèse de doctorat

[T1] A. RICHOU, Étude théorique et numérique des équations différentielles stochastiques rétrogrades, *Thèse de doctorat de l'université de Rennes 1*, 2010.¹

Articles dans des revues internationales à comité de lecture

[A1] A. RICHOU

Ergodic BSDEs and related PDEs with Neumann boundary conditions
Stochastic Processes and their Applications (2009), vol. 119, no. 9, pp 2945–2969.

[A2] F. DELBAEN, Y. HU, A. RICHOU

On the uniqueness of solutions to quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions
Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques (2011), vol. 47, no. 2, pp 559–574.

[A3] A. RICHOU

Numerical simulation of BSDEs with drivers of quadratic growth
Annals of Applied Probability (2011), vol. 21, no. 5, pp 1933–1964.

[A4] A. RICHOU

Markovian quadratic and superquadratic BSDEs with an unbounded terminal condition
Stochastic Processes and their Applications (2012), vol. 122, no. 9, pp 3173–3208.

[A5] F. MASIERO, A. RICHOU

A note on the existence of solutions to Markovian superquadratic BSDEs with an unbounded terminal condition
Electronic Journal of Probability (2013), vol. 18, 15 pp.

1. Ce rapport de thèse est composé des articles [A1], [A2] et [A3] ainsi que de quelques compléments mineurs concernant [A1] et [A3].

- [A6] F. MASIERO, A. RICHOU
HJB equations in infinite dimensions with locally Lipschitz Hamiltonian and unbounded terminal condition
 Journal of Differential Equations (2014), vol. 257, no. 6, pp 1989–2034.
- [A7] Y. HU, P.-Y. MADEC, A. RICHOU
A probabilistic approach to large time behavior of mild solutions of HJB equations in infinite dimension
 SIAM Journal on Control and Optimization (2015), vol. 53, no. 1, pp 378–398.
- [A8] J.-F. CHASSAGNEUX, A. RICHOU
Numerical stability analysis of the Euler scheme for BSDEs
 SIAM Journal on Numerical Analysis (2015), vol. 53, no. 2, pp 1172–1193.
- [A9] F. DELBAEN, Y. HU, A. RICHOU
On the uniqueness of solutions to quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions : the critical case
 Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A (2015), vol. 35, no. 11, pp 5273–5283.
- [A10] B. BERCU, A. RICHOU
Large deviations for the Ornstein-Uhlenbeck process with shift
 Advances in Applied Probability (2015), vol. 47, no. 3, pp 880–901.
- [A11] J.-F. CHASSAGNEUX, A. RICHOU
Numerical simulation of quadratic BSDEs
 Annals of Applied Probability (2016), vol. 26, no. 1, pp 262–304.
- [A12] B. BERCU, A. RICHOU
Large deviations for the Ornstein-Uhlenbeck process without tears
 Statistics and Probability Letters (2017), vol. 123, pp 45–55.
- [A13] J. HARTEK, A. RICHOU
A stability approach for solving multidimensional quadratic BSDEs
 Electronic Journal of Probability (2019), vol. 24, Paper no. 4, 51 pp.
- [A14] J.-F. CHASSAGNEUX, A. RICHOU
Rate of convergence for the discrete-time approximation of reflected BSDEs arising in switching problems
 Stochastic Processes and their Applications, In press.

Actes de colloques internationaux à comité de lecture

- [A15] P. BRIAND, A. RICHOU
On the uniqueness of solutions to quadratic BSDEs with non-convex generators
 Frontiers in Stochastic Analysis - BSDEs, SPDEs and their Applications - Edinburgh, July 2017, In press.

Travaux soumis

[A16] J.-F. CHASSAGNEUX, A. RICHOU

Obliquely Reflected BSDEs

In revision in Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques.

Travaux en cours d'achèvement

[A17] C. BENEZET, J.-F. CHASSAGNEUX, A. RICHOU

Randomised switching problems and obliquely reflected BSDEs

Thèses de doctorat co-encadrées et co-dirigées

J'ai eu énormément de chance de pouvoir co-diriger une thèse et co-encadrer une autre thèse grâce à Bernard BERCU et Marc ARNAUDON. Je les remercie chaleureusement pour cela.

[T2] Marie DU ROY DE CHAUMARAY , Estimation statistique des paramètres pour les processus de Cox-Ingersoll-Ross et de Heston, *Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux*, soutenue le 2 décembre 2016.

Directeur : Bernard BERCU. Co-directeur : Adrien RICHOU.

[T3] Jonathan HARTER, Martingales sur les variétés de valeur terminale donnée, *Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux*, soutenue le 5 juin 2018.

Directeur : Marc ARNAUDON. Co-encadrant : Adrien RICHOU.

Marie DU ROY DE CHAUMARAY est actuellement en poste à l'ENSAI à Bruz, Jonathan HARTER est actuellement enseignant en classe préparatoire BCPST à Pau.

Chapitre 1

Introduction

Ce document synthétise tous les résultats mathématiques que j'ai obtenus depuis ma thèse [T1] soutenue sous la direction de Philippe BRIAND et Ying HU en 2010 à l'université de Rennes 1. Cette thèse portait sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades¹. Depuis ma prise de poste à l'université de Bordeaux, au sein de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, j'ai continué mes recherches dans le domaine des EDSRs tout en commençant de nouveaux travaux portant sur des principes de grandes déviations² pour des estimateurs de paramètres de diffusions. Avant de rentrer dans les détails des différents résultats obtenus, je propose ici une partie introductive sur les EDSRs permettant d'introduire des définitions et les outils principaux nécessaires à l'énoncé de ces résultats. De plus, comme les résultats concernant les EDSRs sont beaucoup plus nombreux que ceux concernant les PGDs, ces derniers sont tous regroupés dans la partie 6 qui est totalement auto-contenue.

1.1 EDSRs et applications³

Commençons donc par rappeler qu'une EDSR est une équation du type

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

où $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dont la filtration naturelle augmentée est notée $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Les données d'une telle équation sont d'une part la condition terminale ξ , qui est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable à valeur dans \mathbb{R}^k et d'autre part, le générateur f , fonction aléatoire définie sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$, à valeur dans \mathbb{R}^k et mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k \times d})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, \mathcal{P} désignant la tribu des événements prévisibles. Dans tout ce document on supposera que pour tout $t \in [0, T]$, $(y, z) \mapsto f(t, y, z)$ est continue. Résoudre une telle équation consiste à

1. L'abréviation EDSR sera employée dans toute la suite du document.
2. L'abréviation PGD sera employée dans toute la suite du document.
3. Dans un souci d'optimisation (non stochastique), cette partie s'inspire très fortement de [T1] qui s'inspire déjà très fortement d'autres sources comme [Bri07].

trouver un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ adapté par rapport à la filtration engendrée par le mouvement brownien W et vérifiant l'équation (1.1). Donnons une définition plus précise.

Définition 1.1 Une solution de l'EDSR (1.1) est un couple de processus (Y, Z) à valeur dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$ tel que, Y est continu et adapté, Z est prévisible et \mathbb{P} -p.s. $t \mapsto Z_t$ appartient à $L^2([0, T])$, $t \mapsto f(t, Y_t, Z_t)$ appartient à $L^1([0, T])$ et

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Pour le lecteur non spécialiste il est simple d'expliquer intuitivement la notion d'EDSR. Supposons que l'on souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t), \quad t \in [0, T],$$

avec la condition terminale $Y_T = \xi$ - d'où la dénomination « rétrograde » - en imposant que, pour tout instant $t \in [0, T]$, Y_t ne dépende pas du futur après t , c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$. Prenons un exemple simple : $f = 0$. On doit donc résoudre l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{dY_t}{dt} = 0, \quad t \in [0, T], \quad \text{avec } Y_T = \xi.$$

Le candidat naturel pour être solution est alors $Y_t = \xi$. Malheureusement ce dernier n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. Nous pouvons alors considérer la meilleure approximation, dans L^2 , adaptée, donnée par la martingale $Y_t = \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t]$. Le théorème de représentation des martingales browniennes nous assure alors l'existence d'un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Un simple calcul montre ainsi que

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \text{i.e.} \quad -dY_t = -Z_t dW_t, \quad \text{avec } Y_T = \xi.$$

La seconde inconnue Z permet donc au processus Y d'être adapté. On vient de cette façon de traiter le cas $f = 0$. Pour garder le plus de généralité possible, on peut alors faire dépendre f de Z et ainsi l'équation différentielle initiale devient l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t) dt - Z_t dW_t, \quad \text{avec } Y_T = \xi.$$

Ainsi une EDSR peut-être vue comme une simple généralisation de l'espérance conditionnelle, appelée parfois espérance conditionnelle non linéaire. Notons que l'on travaille ici en filtration brownienne mais que l'on peut travailler dans des filtrations plus générales. Concrètement la démarche reste la même à la différence près qu'il n'existe pas nécessairement de théorème de représentation martingale pour l'espérance conditionnelle. On peut alors scinder la martingale en une partie admettant un théorème de représentation et une partie orthogonale puis faire dépendre le générateur du processus issu du théorème de représentation. Nous renvoyons à [EKH97, CE12] pour de plus amples détails.

1.1.1 Quelques résultats connus

Les EDSRs ont été introduites, dans le cas où le générateur est une fonction linéaire, par J.M. BISMUT [Bis76]. Néanmoins, le point de départ de la théorie des équations rétrogrades est l'article de É. PARDOUX et S. PENG [PP90], dans lequel ces deux auteurs considèrent des EDSRs dont le générateur est non linéaire par rapport aux deux variables y et z . Rappelons ce résultat.

Théorème 1.2 *Supposons le générateur f lipschitzien par rapport à (y, z) , uniformément en (t, ω) , et*

$$\mathbb{E} \left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 ds \right] < +\infty.$$

Alors l'EDSR (1.1) possède une unique solution (Y, Z) telle que Z soit un processus de carré intégrable.

Il convient de noter que ce résultat peut être démontré en suivant les mêmes idées que pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution pour des équations différentielles ordinaires ou stochastiques via un schéma de Picard (cf [PP90]) ou bien un argument de point fixe (cf [EKPQ97]).

Depuis [PP90] de très nombreux auteurs ont cherché à affaiblir les hypothèses sous lesquelles on peut obtenir l'existence et l'unicité de l'EDSR (1.1). La liste complète de ces travaux serait bien trop longue à énumérer et finalement de peu d'intérêt d'un point de vue pédagogique. Nous allons brièvement donner quelques grandes directions de recherches passées et actuelles afin de mieux situer ensuite nos travaux.

Grossièrement on peut diviser les résultats d'existence et d'unicité en deux catégories : ceux valables en toutes dimensions, lorsque Y est à valeur dans \mathbb{R}^k , voir dans un espace de Hilbert, et ceux qui sont propres à la dimension 1, Y étant alors un processus réel. En ce qui concerne le premier point, les résultats reposent généralement sur l'obtention d'estimations a priori déduites d'une variante du lemme de Grönwall et d'un théorème du point fixe. Signalons notamment l'article [BDH⁺03] qui donne des résultats d'existence et d'unicité pour des EDSRs dont la condition terminale appartient à un L^p pour $p > 1$ et dont le générateur est supposé lipschitzien en z mais seulement « monotone » en y . Pour le second point, à savoir Y à valeurs réelles, les hypothèses peuvent être affaiblies en utilisant un théorème de comparaison. Avant d'aller plus avant, il sera utile pour la suite de comprendre formellement comment on obtient un théorème de comparaison. On considère donc deux EDSRs de générateurs f^1 et f^2 , de conditions terminales ξ^1 et ξ^2 et de solutions (Y^1, Z^1) et (Y^2, Z^2) vérifiant

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \xi^1 + \int_t^T f^1(s, Y_s^1, Z_s^1) ds - \int_t^T Z_s^1 dW_s, \\ Y_t^2 &= \xi^2 + \int_t^T f^2(s, Y_s^2, Z_s^2) ds - \int_t^T Z_s^2 dW_s. \end{aligned}$$

On peut alors utiliser une technique classique de linéarisation permettant d'écrire

$$f^1(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(s, Y_s^2, Z_s^2) = f^1(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(s, Y_s^1, Z_s^1) + a_s(Y_s^1 - Y_s^2) + (Z_s^1 - Z_s^2)b_s$$

avec a_s et b_s deux processus explicites à valeurs dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^d par exemple donnés par

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{f^2(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(s, Y_s^2, Z_s^1)}{Y_s^1 - Y_s^2} \mathbb{1}_{Y_s^1 \neq Y_s^2} \\ b_s &= \frac{\top(Z_s^1 - Z_s^2)(f^2(s, Y_s^2, Z_s^1) - f^2(s, Y_s^2, Z_s^2))}{|Z_s^1 - Z_s^2|^2} \mathbb{1}_{Z_s^1 \neq Z_s^2}. \end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire, au moins formellement,

$$\begin{aligned} Y_t^1 - Y_t^2 &= \xi^1 - \xi^2 + \int_t^T f^1(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(s, Y_s^1, Z_s^1) + a_s(Y_s^1 - Y_s^2) + (Z_s^1 - Z_s^2)b_s ds \\ &\quad - \int_t^T Z_s^1 - Z_s^2 dW_s \\ &= e^{\int_t^T a_s ds} (\xi^1 - \xi^2) + \int_t^T e^{\int_t^s a_u du} (f^1(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(s, Y_s^1, Z_s^1)) ds \\ &\quad - \int_t^T e^{\int_t^s a_u du} (Z_s^1 - Z_s^2) (dW_s - b_s ds). \end{aligned}$$

Si les intégrales précédentes sont bien définies, que l'intégrale stochastique est une martingale et qu'en plus on peut appliquer le théorème de Girsanov de telle sorte que $W_t - \int_0^t b_s ds$ est un mouvement brownien sous une nouvelle probabilité \mathbb{Q}_b , alors on obtient

$$Y_t^1 - Y_t^2 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_b} \left[e^{\int_t^T a_s ds} (\xi^1 - \xi^2) + \int_t^T e^{\int_t^s a_u du} (f^1(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(s, Y_s^1, Z_s^1)) ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (1.2)$$

De la formule précédente découle deux types de résultats :

- Si on a un signe pour $\xi^1 - \xi^2$ et $f^1(\cdot, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(\cdot, Y_s^1, Z_s^1)$ alors on a un signe pour $Y^1 - Y^2$. C'est ce qu'on appelle un théorème de comparaison. En particulier, si $\xi^1 = \xi^2$ et $f^1 = f^2$ alors on a unicité de la solution. Plus formellement, on a le « résultat » suivant :

Remarque 1.3 *Si f est uniformément Lipschitz par rapport à y , ce qui implique que a est borné, alors on a unicité de la solution dans la classe des processus pour lesquels on a le droit d'appliquer Girsanov.*

Évidemment ce n'est pas un résultat en soi puisque toute la difficulté est de montrer que la classe d'unicité est non vide afin d'obtenir quelque chose d'intéressant... remarquons également que dans le cadre Lipschitz classique b est également borné donc on récupère trivialement l'unicité.

- On peut utiliser cette formule en essayant de majorer le membre de droite par une quantité dépendant de $\xi^1 - \xi^2$ et de $f^1(\cdot, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(\cdot, Y_s^1, Z_s^1)$ mais pas des processus a et b (à travers \mathbb{Q}_b). En particulier, on peut chercher à appliquer, si possible, l'inégalité d'Hölder conditionnelle pour passer de \mathbb{Q}_b à \mathbb{P} . Remarquons encore une fois que cela est très simple à faire dans le cadre Lipschitz classique car a et b sont bornés. On obtient alors un résultat de stabilité : on sait majorer la distance entre deux solutions à l'aide de la distance entre les deux conditions terminales et les deux générateurs.

Enfin, notons que la technique de linéarisation n'est pas propre à la dimension 1 (pour Y) mais l'utilisation du théorème de Girsanov nous y restreint.

Ainsi, en considérant des EDSRs scalaires, on peut obtenir des résultats d'existence avec des hypothèses faibles sur le générateur par convergence monotone. Dans cette veine, J.P. LEPELTIER et J. SAN MARTÍN [LSM97] ont construit des solutions maximales et minimales lorsque le générateur est seulement continu en (y, z) et à croissance linéaire. On peut également citer les travaux récents [HT18, BHT18] portant sur l'affaiblissement de la classe l'intégrabilité de la condition terminale et de la partie aléatoire du générateur. Mais une des avancées significatives pour cette théorie qui nous intéressera particulièrement pour la suite est due à M. KOBYLANSKI [Kob00] qui a construit des solutions pour des EDSRs quadratiques, c'est à dire des EDSRs dont le générateur est à croissance quadratique par rapport à la variable z . Pour être plus précis, une EDSR du type (1.1) est dite quadratique lorsque le générateur f satisfait la condition :

$$\forall t, y, z, \quad |f(t, y, z)| \leq \alpha_t + \beta |y| + \frac{\gamma}{2} |z|^2, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad (1.3)$$

où β, γ sont des constantes positives et α est un processus adapté positif. Le résultat d'existence est obtenu sous une hypothèse de bornitude de la condition terminale et de α . La question de l'unicité est également traitée dans ce même article avec des hypothèses supplémentaires. Il s'avère que cette hypothèse de bornitude n'est pas naturelle et qu'il est possible d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité sous des hypothèses plus faibles. J'y reviendrai par la suite. Pour terminer cette partie, attardons nous sur l'unicité. Il a été remarqué dans [HIM05b] que les solutions (Y, Z) bornées de l'EDSR quadratique sont telles que $\int_0^\cdot Z_s dW_s$ est une martingale OMB^{4,5}. Donc, si on suppose que f est uniformément Lipschitz en y et localement Lipschitz en z , i.e.

$$|f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq C(1 + |z| + |z'|)|z - z'|, \quad \forall (t, y, z, z') \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d} \times \mathbb{R}^{1 \times d}, \quad (1.4)$$

alors la remarque 1.3 s'applique grâce aux propriétés des martingales OMB. Plus intéressant encore, on peut également obtenir un résultat de stabilité en appliquant l'approche expliquée succinctement ci-dessus, encore une fois grâce aux propriétés des martingales OMB. Nous renvoyons le lecteur vers la monographie de N. KAZAMAKI pour la définition et les nombreuses propriétés des martingales OMB.

Enfin, une question naturelle est de savoir si on peut avoir une croissance du générateur plus que quadratique en z . X. BAO, F. DELBAEN et Y. HU ont montré que ce problème est mal posé dans le sens où :

- étant donné un générateur sur-quadratique, il existe une condition terminale bornée telle que l'EDSR n'admet pas de solution,
- si de plus une EDSR sur-quadratique admet une solution bornée, alors elle admet une infinité de solutions bornées.

Néanmoins, ils montrent également que le problème devient raisonnable si on se restreint au cadre markovien, i.e. l'aléatoire de la condition terminale et du générateur proviennent d'une

4. BMO en anglais.

5. Les calculs étaient déjà présents dans le papier de M. KOBYLANSKI [Kob00] mais elle n'avait pas fait le lien avec la théorie des martingales OMB.

équation différentielle stochastique. Notons qu'il est également possible d'obtenir des résultats raisonnables dans le cas trajectoire dépendant, c'est à dire que l'aléatoire de la condition terminale et du générateur proviennent de toute la trajectoire d'une équation différentielle stochastique.

1.1.2 Quelques champs d'application des EDSRs

Depuis les premiers résultats théoriques obtenus pour les EDSRs, cette théorie n'a cessé de se développer en raison de ses applications dans les domaines des équations aux dérivées partielles⁶, de la finance et du contrôle stochastique. Pour ce qui est des applications des EDSRs aux EDPs, il convient d'introduire la classe particulière des EDSRs markoviennes. Pour ces équations, l'aléatoire du générateur et de la condition terminale est donné par une diffusion. Plus précisément (Y, Z) est solution de l'EDSR

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T F(s, X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad (1.5)$$

où X est solution de l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

et F et g sont des fonctions déterministes. Ainsi, (1.5) est bien une EDSR de la forme (1.1) où l'on prend $\xi := g(X_T)$ et $f(t, y, z) := F(t, X_t, y, z)$ ⁷. Dans toute la suite du document on supposera que b et σ vérifient les conditions habituelles

- il existe $M > 0$ tel que $|b(t, 0)| + |\sigma(t, 0)| \leq M$ pour tous $t \in [0, T]$,
- b et σ sont uniformément (en t) K -Lipschitz en x .

En particulier, sous ces hypothèses il y a existence et unicité d'une solution forte pour l'EDS. Considérons l'EDP

$$\partial_t u + \mathcal{L}u + F(\cdot, \cdot, u, \top \nabla u \sigma) = 0, \quad u(T, \cdot) = g, \quad (1.6)$$

avec \mathcal{L} le générateur du semi-groupe de la diffusion X donné par

$$\mathcal{L}v = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^\top \sigma \nabla^2 v) + \top b \nabla v,$$

et supposons que cette EDP possède une solution suffisamment régulière u . En appliquant la formule d'Itô, on montre finalement que $(u(t, X_t), \top \nabla u \sigma(t, X_t))_{0 \leq t \leq T}$ est solution de l'EDSR (1.5). En particulier, la formule $u(0, x) = Y_0$ généralise la formule de Feynman-Kac qui donne une représentation probabiliste d'une solution de l'EDP (1.6). Plus généralement, si on note X^{t_0, x_0} la solution de l'EDS partant de x_0 au temps t_0 et $(Y^{t_0, x_0}, Z^{t_0, x_0})$ la solution de l'EDSR associée, alors on peut remarquer que Y^{t_0, x_0} est déterministe et vaut $u(t_0, x_0)$. Cette relation entre

6. L'abréviation EDP sera employée dans toute la suite du document.

7. Par soucis de clarté dans la suite de ce document, nous noterons autant que faire ce peut F les générateurs markoviens et f les générateurs non markoviens.

les EDPs et les EDSRs s'utilise dans les deux sens : on peut étudier l'EDSR pour obtenir certaines propriétés de l'EDP associée ou faire le contraire. Une autre application possible de ce type de formule est la simulation numérique de solutions d'EDPs en utilisant des méthodes probabilistes. S. PENG [Pen91] est le premier à remarquer ce lien entre les EDSRs et les EDPs en travaillant avec des solutions classiques (pour les EDPs). Néanmoins, la théorie des EDSRs permet de travailler de manière naturelle avec des solutions de viscosité (cf [PP92]). Nous allons rappeler rapidement la définition d'une solution de viscosité. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au livre de G. BARLES [Bar94].

Définition 1.4 Une fonction continue u définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ telle que $u(T, \cdot) = h$ est une sous-solution (respectivement sur-solution) de viscosité de l'EDP (1.6) si pour toute fonction φ , de classe $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, on a

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + \mathcal{L}\varphi(t_0, x_0) - f(t_0, x_0, u(t_0, x_0), {}^\top \nabla \varphi \sigma(t_0, x_0)) \geq 0, \quad (\text{respectivement } \leq 0)$$

dès que $u - \varphi$ possède un maximum local (respectivement minimum local) au point $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d$. Une solution de viscosité est à la fois sous-solution et sur-solution de viscosité.

Un second exemple d'application, en étroite relation avec l'application précédente, se trouve dans le domaine du contrôle stochastique. Considérons par exemple le problème de contrôle optimal étudié dans l'article [FHT06] consistant à minimiser la fonction de coût suivante :

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T h(t, X_t^u, u_t) dt + g(X_T^u) \right],$$

où u désigne un processus de contrôle à valeur dans K un sous ensemble fermé de \mathbb{R}^m , et X^u est le processus défini comme solution de l'EDS suivante :

$$X_t^u = x + \int_0^t b(s, X_s^u) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^u) [dW_s + r(s, X_s^u, u_s) ds]. \quad (1.7)$$

Afin de résoudre ce problème nous introduisons l'hamiltonien du système ψ comme suit :

$$\psi(t, x, z) = \inf_{u \in K} (h(t, x, u) + z \cdot r(t, x, u)).$$

La réponse au problème de contrôle s'exprime à l'aide de la solution (Y, Z) de l'EDSR

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T \psi(s, X_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

où X est solution de l'EDS (1.7) avec $r = 0$. On a alors $J(u) \geq Y_0 \forall u \in K$ et sous certaines conditions on peut montrer l'égalité ainsi qu'exhiber un contrôle optimal⁸ à l'aide de Z . Notons que dans ce cas on en déduit immédiatement l'unicité de Y . On peut également remarquer que, sous l'hypothèse que la fonction h est à croissance quadratique par rapport à x et u , ψ est à

8. Un contrôle optimal est un contrôle qui permet d'atteindre l'infimum de J sur l'ensemble des contrôles admissibles.

croissance quadratique en z et, de ce fait, l'EDSR associée est de type quadratique. D'autres applications des EDSRs au domaine du contrôle optimal sont abordées dans les articles [Pen93] et [EKM97] par exemple.

Enfin, les mathématiques financières sont également un très grand domaine d'application des EDSRs. N'ayant pas travaillé sur ce type de problématiques au cours de cette thèse, nous renvoyons le lecteur à l'article de N. EL KAROUI, S. PENG et M.C. QUENEZ [EKPQ97]. En ce qui concerne le problème plus spécifique des EDSRs quadratiques, on pourra se référer par exemple aux articles [REK00, HIM05b, HIM05a].

1.1.3 La simulation numérique des EDSRs

Dès lors que des applications pratiques voient le jour, la question de la simulation numérique des EDSRs se pose tout naturellement. Tout d'abord, notons que le problème de la discrétisation et de la simulation d'EDSs est plutôt bien compris et traité⁹. Par exemple, si le processus X est solution de l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

alors la solution la plus simple pour obtenir une approximation en temps discret de X est de considérer le schéma d'Euler

$$\begin{cases} X_{t_n}^\pi &= x \\ X_{t_{i+1}}^\pi &= X_{t_i}^\pi + b(t_i, X_{t_i}^\pi)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, X_{t_i}^\pi)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad i \in \{0, \dots, n-1\}, \end{cases}$$

avec $\pi = \{0 = t_0 < \dots < t_n = T\}$ une partition de $[0, T]$ et n le nombre de pas de temps. On notera également $h_i = t_{i+1} - t_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et $h = T/n$ si h_i ne dépend pas de i . Le processus ainsi obtenu a le bon goût d'être encore adapté. De plus, il est possible d'obtenir assez facilement une vitesse de convergence pour ce schéma modulo des hypothèses standard sur b et σ . Enfin, un tel algorithme peut facilement être mis en œuvre sur un ordinateur. Considérons maintenant (Y, Z) la solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

que l'on souhaite approcher par un couple (Y^π, Z^π) de processus adaptés à temps discret. Si l'on remplace $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, Y_s, Z_s) ds$ par $(t_{i+1} - t_i) f(t_i, Y_{t_i}^\pi, Z_{t_i}^\pi)$ alors le théorème de représentation martingale nous assure l'existence d'un processus $(\tilde{Z}_t^\pi)_{t \in [0, T]}$ tel que l'on ait

$$Y_{t_i}^\pi = Y_{t_{i+1}}^\pi + f(t_i, Y_{t_i}^\pi, Z_{t_i}^\pi)(t_{i+1} - t_i) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{Z}_s^\pi dW_s.$$

Pour $Z_{t_i}^\pi$ nous allons prendre la meilleure approximation de \tilde{Z}^π par une variable aléatoire \mathcal{F}_{t_i} -mesurable dans $L^2(\Omega \times [t_i, t_{i+1}])$, à savoir

$$Z_{t_i}^\pi := (t_{i+1} - t_i)^{-1} \mathbb{E} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{Z}_s^\pi ds \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] = (t_{i+1} - t_i)^{-1} \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

9. voir par exemple le livre de P. E. KLOEDEN et E. PLATEN [KP92]

d'après l'isométrie de l'intégrale d'Itô. Cela nous permet d'obtenir un premier schéma de discrétisation en temps donné par

$$\begin{cases} Y_{t_n}^\pi = \xi \\ Z_{t_i}^\pi = (t_{i+1} - t_i)^{-1} \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ Y_{t_i}^\pi = \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, Y_{t_i}^\pi, Z_{t_i}^\pi), \quad i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Un tel schéma est implicite car $Y_{t_i}^\pi$ est solution d'une équation non linéaire. Néanmoins, si l'on suppose que f est une fonction Lipschitz en y alors un argument de point fixe nous assure l'existence et l'unicité d'une solution lorsque h est suffisamment petit car dans ce cas $y \mapsto \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, y, Z_{t_i}^\pi)$ est une contraction dans $L^2(\mathcal{F}_{t_i})$. Notons qu'il est également possible de modifier légèrement ce schéma pour le rendre explicite en considérant

$$\begin{cases} Y_{t_n}^\pi = \xi \\ Z_{t_i}^\pi = (t_{i+1} - t_i)^{-1} \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ Y_{t_i}^\pi = \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, Y_{t_{i+1}}^\pi, Z_{t_i}^\pi) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right], \quad i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Contrairement au schéma d'Euler pour les EDSs, l'algorithme obtenu ne peut pas être mis en œuvre tel quel car il reste à évaluer les espérances conditionnelles. Depuis le travail originel de D. CHEVANCE [Che97], de nombreux auteurs se sont intéressés à la question de la convergence de ce type de schéma couplé ou non à l'approximation des espérances conditionnelles afin d'avoir un algorithme utilisable en pratique. Il n'est pas possible de tous les citer mais on peut néanmoins mettre en avant les travaux [Zha04, BT04] qui ont obtenu une vitesse de convergence pour le schéma de discrétisation temporelle dans le cadre Lipschitz markovien ou trajectoire dépendant¹⁰. Enfin [BT04, GLW05] sont parmi les premiers à proposer un algorithme que l'on peut totalement mettre en œuvre numériquement et se basant sur (1.8).

Notons que ce n'est pas la seule méthode possible pour résoudre numériquement une EDSR et beaucoup de nouvelles approches se sont développées ces dernières années : [EHJK19, BBC⁺19, HLOT⁺19, HPBL18] en sont quelques exemples parmi d'autres. On peut également citer l'article de P. BRIAND et C. LABART [BL14] qui a la particularité de pouvoir traiter des EDSRs non nécessairement markoviennes. Les discussions présentes dans l'article [EHJK19] propose un très large panorama des méthodes disponibles ainsi que de nombreuses références associées.

1.2 Plan de la synthèse

Le chapitre 2 est consacré aux EDSRs dont le générateur est à croissance quadratique, c'est à dire qu'il vérifie (1.3). On y traite en particulier de résultats d'unicité tirés de [A2, A4, A9, A15]. Quelques résultats concernant les EDSRs dont le générateur à une croissance plus que quadratique, dites EDSRs sur-quadratiques, et tirés de [A4, A5, A6] sont également abordés. Le cas des EDSRs quadratiques multidimensionnelles, i.e. $k > 1$, est étudié dans la partie 2.5 qui s'appuie sur [A13].

10. Le schéma (1.8) est parfois appelé schéma BTZ.

Les EDSRs ergodiques sont introduites dans le chapitre 3. Cette classe spécifique d'EDSRs markoviennes en horizon infini est naturellement associée à des EDPs elliptiques et à des problèmes de contrôles stochastiques ergodiques. L'article [A1] qui aborde les EDSREs associées à des EDPs elliptiques avec condition de Neumann est détaillé dans la première partie tandis que la deuxième partie explique comment une EDSR ergodique permet d'obtenir le comportement asymptotique en temps long d'une EDP parabolique semi-linéaire, résultats tirés de [A7].

Le chapitre 4 est dévolu aux EDSRs obliquement réfléchies, c'est à dire aux EDSRs dont on contraint la solution Y à rester dans un domaine convexe en la réfléchissant au bord de ce domaine dans une direction possiblement non normale au bord. L'article [A16] qui s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une solution pour de telles EDSRs est présenté dans la première partie. La seconde partie est consacrée à un nouveau problème de contrôle stochastique optimal de type commutation, introduit dans [A17] et lié naturellement à certaines EDSRs obliquement réfléchies.

Dans le chapitre 5 nous abordons la problématique de l'approximation numérique des EDSRs et plus précisément la discrétisation temporelle de ces équations. Dans une première partie nous sériions les outils utiles à l'étude des schémas de discrétisation, notamment l'outil de linéarisation discrète et le théorème de comparaison qui en découle. Nous évoquons également la notion de stabilité numérique qui a été formalisée et étudiée pour les EDSRs dans [A8]. La seconde partie évoque les pistes disponibles pour l'approximation numérique d'EDSRs quadratiques et regroupe en particulier les résultats de [A3,A4,A11]. Enfin la troisième partie s'intéresse quant à elle à la discrétisation temporelle des EDSRs obliquement réfléchies intervenant dans des problèmes de commutation classiques. Ces résultats sont tirés de [A14].

Le dernier chapitre est totalement décorrélié des précédents. On y traite des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres d'un processus de Ornstein-Uhlenbeck standard. Plus précisément on étudie un principe de grandes déviations pour le couple d'estimateur. On propose également une méthode simple permettant de retrouver facilement des résultats de grandes déviations déjà connus lorsque le processus d'Ornstein-Uhlenbeck n'est pas biaisé. Tous ces résultats sont tirés de [A10,A12].

1.3 Notations

Nous allons terminer ce chapitre en donnant quelques notations qui seront utilisées dans la suite de ce document. On rappelle que W est un mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^d défini sur un espace de probabilité complet dont la filtration naturelle augmentée est notée $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Soit E un espace de Banach. Pour tout réel $p \geq 1$, on note $\mathcal{S}^p(E)$, ou plus simplement \mathcal{S}^p , l'espace de Banach des processus $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans E adaptés et càdlàg tels que

$$|Y|_{\mathcal{S}^p} := \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y_t|^p \right]^{1/p} < +\infty.$$

On note également $\mathcal{M}^p(E)$, ou plus simplement \mathcal{M}^p , l'espace de Banach des processus prévi-

sibles $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans E tels que

$$|Z|_{\mathcal{M}^p} := \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Z_s|^2 ds \right)^{p/2} \right]^{1/p} < +\infty.$$

On note \mathcal{S}^∞ l'ensemble des processus càdlàg adaptés et bornés. Pour un processus $Y \in \mathcal{S}^p$, on note $Y^* = \sup_{t \in [0, T]} |Y_t|$. On dit qu'un processus $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ appartient à la classe D si

$$\{Y_\tau | \tau \text{ temps d'arrêt}\}$$

est uniformément intégrable.

Pour un processus $(\beta_t)_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , progressivement mesurable et tel que

$$\int_0^T |\beta_t|^2 dt < +\infty, \quad \text{p.s.}$$

on note $\mathcal{E}(\beta)$ le processus de Doléans-Dade associé, à savoir la martingale locale

$$\mathcal{E}(\beta)_t = e^{\int_0^t \beta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\beta_s|^2 ds}.$$

Pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}^*$ et $M > 0$ on note $\rho_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur la boule Euclidienne de rayon M régularisée de telle sorte que ρ_M vaut l'identité sur $B_{\mathbb{R}^n}(0, M)$ et est bornée par $M + 1$ sur \mathbb{R}^n .

Pour toute fonction φ convexe on note $\partial\varphi$ sa sous-différentielle.

C désigne dans tout le document une constante qui peut changer d'une ligne à l'autre.

Chapitre 2

EDSRs quadratiques et sur-quadratiques

2.1 Résultats généraux

On considère dans cette partie l'EDSR (1.1) satisfaisant la croissance quadratique (1.3). Mis à part la dernière section, nous nous plaçons dans le cadre unidimensionnel pour Y . Avant toute chose intéressons nous à l'EDSR quadratique la plus simple à traiter :

$$Y_t = \xi + \int_t^T \alpha_s + \frac{\gamma}{2} |Z_s|^2 ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad (2.1)$$

avec $\gamma \neq 0$ une constante et α un processus progressivement mesurable positif. Il est aisé de remarquer que cette EDSR se résout explicitement via une transformation exponentielle, également appelée transformation de Cole-Hopf, nous donnant

$$Y_t = \frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E} \left[e^{\gamma \xi + \gamma \int_t^T \alpha_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

En particulier cette solution est bien définie si et seulement si $\xi + \int_0^T \alpha_s ds$ (ou $-\xi - \int_0^T \alpha_s ds$) possède un moment exponentiel suffisamment grand.

Comme expliqué dans l'introduction, les premiers résultats d'existence et d'unicité d'une solution pour les EDSRs quadratiques remontent aux travaux de M. KOBYLANSKI [Kob97, Kob00] où ξ et α sont supposés bornés. Une généralisation de ces résultats est obtenue par J.-P. LEPELTIER et J. SAN MARTÍN [LSM98] pour traiter des EDSRs dont le générateur est également à croissance sur-linéaire en y . Notons également que ces résultats ont été en partie redémontrés par R. TEVZADZE [Tev08] en utilisant un argument de point fixe et par P. BRIAND et R. ÉLIE [BE13] via une approche par stabilité et des arguments de martingales OMB¹. Même si ces deux articles ne démontrent pas à proprement parlé de nouveaux résultats, les techniques nouvelles de preuves ont donné lieu à des résultats nouveaux dans d'autres contextes. En particulier dans la dernière section de ce chapitre nous expliquerons comment nous avons adapté avec J. HARTEK dans [A13] l'approche de P. BRIAND et R. ÉLIE au cadre multidimensionnel.

1. BMO en anglais.

Au vu de l'exemple (2.1), il est évident que l'hypothèse de bornitude sur ξ et α semble bien trop forte et qu'une simple hypothèse de moment exponentiel serait a priori suffisante. C'est effectivement ce qui est démontré par P. BRIAND et Y. HU dans [BH06, BH08]. Plus précisément ils montrent le résultat suivant :

Théorème 2.1 *On suppose que f vérifie (1.3) et que $|\xi| + \int_t^T \alpha_s ds$ possède un moment d'ordre $\gamma e^{\beta T}$. Alors l'EDSR (1.1) admet une solution (Y, Z) .*

Ce résultat a été redémontré par P. BARRIEU et N. EL KAROUI dans [BEK13] sans s'appuyer sur les résultats de M. KOBYLANSKI.

On peut remarquer que ce résultat n'est pas optimal pour l'exemple (2.1). Cela provient du fait que pour (2.1) le générateur a une croissance quadratique unilatérale. En effet, P. BRIAND et Y. HU montrent également dans [BH06] le raffinement suivant ² :

Théorème 2.2 *On suppose que f vérifie la croissance*

$$\forall t, y, z, \quad -\underline{\alpha}_t - r(|y| + |z|) \leq f(t, y, z) \leq \bar{\alpha}_t + \beta |y| + \frac{\gamma}{2} |z|^2, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

avec $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $\underline{\alpha}$ et $\bar{\alpha}$ deux processus progressivement mesurable positifs. Si $\xi^+ + \int_0^T \bar{\alpha}_s ds$ possède un moment exponentiel d'ordre $\gamma e^{\beta T}$ et $\xi^- + \int_0^T \underline{\alpha}_s ds$ appartient à L^p pour $p > 1$, alors l'EDSR (1.1) possède une solution minimale.

Concernant l'unicité, les résultats sont plus lacunaires et des questions ouvertes restent encore en suspens. Le premier résultat d'unicité dans le cas non borné a été prouvé par P. BRIAND et Y. HU dans [BH08].

Théorème 2.3 *On suppose que f vérifie (1.3), que f est uniformément β -Lipschitz par rapport à y . On suppose également que pour tout $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto f(t, y, z)$ est convexe. Si $|\xi| + \int_0^T \alpha_s ds$ possède un moment exponentiel de tout ordre, alors l'EDSR (1.1) possède une unique solution (Y, Z) telle que Y appartient à l'ensemble des processus continus et adaptés \tilde{Y} tels que \tilde{Y}^* possède un moment exponentiel de tout ordre.*

La preuve de ce théorème repose sur un résultat de stabilité. Ce résultat amène plusieurs questions naturelles auxquelles nous avons répondu plus ou moins partiellement dans les articles [A2, A4, A9, A15] et dont nous allons parler dans les sections suivantes :

- Est-il possible de garder le théorème précédent en supposant uniquement l'existence d'un moment exponentiel suffisamment grand pour $|\xi| + \int_0^T \alpha_s ds$, et si oui, peut-on se contenter du même moment exponentiel que pour le résultat d'existence ? Nous apportons des réponses partielles à ces questions dans la section 2.2 traitant des articles [A2, A9].
- Peut-on relâcher l'hypothèse de convexité du générateur ? Nous apportons des réponses partielles à cette question dans les sections 2.3 et 2.4 traitant des articles [A4, A15].

2. Voir également [A2] pour l'énoncé exact lorsque le générateur est non borné en l'aléa.

Pour terminer, notons qu'il est possible d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité pour les EDSRs à croissance quadratique sous des hypothèses beaucoup plus faibles que l'existence d'un certain moment exponentiel pour la condition terminale lorsque l'on considère des générateurs avec des croissances plus spécifiques du type

$$|f(t, y, z)| \leq \alpha_t + h(y)|z|^2.$$

Nous renvoyons à [BEO17] et aux nombreuses références qui y sont citées.

2.2 Retour sur l'unicité des solutions dans le cas non borné

L'article [A2] co-écrit avec F. DELBAEN et Y. HU a pour but d'améliorer le résultat d'unicité de P. BRIAND et Y. HU dans [BH08] en réduisant l'hypothèse de moment exponentiel. Plus précisément on montre le résultat suivant :

Théorème 2.4 *On suppose que*

- *f vérifie la croissance*

$$\forall t, y, z, \quad -\underline{\alpha}_t - r(|y| + |z|) \leq f(t, y, z) \leq \bar{\alpha}_t + \beta |y| + \frac{\gamma}{2} |z|^2, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

avec $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $\underline{\alpha}$ et $\bar{\alpha}$ deux processus progressivement mesurables positifs,

- *f est uniformément β -Lipschitz par rapport à y,*
- *pour tout $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto f(t, y, z)$ est convexe,*
- *$\xi^+ + \int_0^T \bar{\alpha}_s ds$ possède un moment exponentiel d'ordre $pe^{\beta T}$ avec $p > \gamma$ et $\xi^- + \int_0^T \underline{\alpha}_s ds$ possède un moment exponentiel d'ordre ε avec $\varepsilon > 0$.*

Alors on a :

1. *L'EDSR (1.1) possède une solution (Y, Z) vérifiant : il existe $q > \gamma$ et $\tilde{\varepsilon} > 0$ tels que*

$$\mathbb{E} \left[e^{q(Y^+ + \int_0^T \bar{\alpha}_s ds)^*} \right] < +\infty, \quad (2.2)$$

$$\mathbb{E} \left[e^{\tilde{\varepsilon}(Y^-)^*} \right] < +\infty, \quad (2.3)$$

2. *L'EDSR (1.1) possède une unique solution (Y, Z) dans la classe des solutions vérifiant (2.2) et (2.3).*

La démonstration du point 1) reposant uniquement sur de légères améliorations d'estimées sur la solution Y déjà présentes dans [BH06, BH08], nous allons uniquement expliquer les idées de la preuve du point 2). Pour comprendre les éléments clés de la preuve on va se contenter de considérer le cas d'un générateur f ne dépendant que de z (par un léger abus de notation on notera $f(z)$) vérifiant $f(z) \leq \frac{\gamma}{2}|z|^2$. Contrairement à l'approche de [BH08], ici l'idée est d'appliquer une méthode de vérification : on définit un problème de contrôle stochastique et on montre que toute solution Y de l'EDSR (1.1) est la valeur optimale associée à ce problème de contrôle. De cette façon l'unicité de Y en découle et l'unicité de Z est standard. Afin de définir

le problème de contrôle, on utilise la transformée de Legendre-Fenchel de f , fonction que l'on a pris soin de supposer convexe. Ainsi on a

$$f(z) = \sup_{q \in \mathbb{R}^d} (zq - g(q)), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{1 \times d},$$

avec g la transformée de Legendre-Fenchel de f . On peut maintenant remarquer que si (Y, Z) est une solution de (1.1) alors

$$\begin{aligned} Y_t &= \xi + \int_t^T f(Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s \\ &\geq \xi + \int_t^T \{Z_s q_s - g(q_s)\} ds - \int_t^T Z_s dW_s \quad \forall q \text{ progressivement mesurable} \\ &= \xi - \int_t^T g(q_s) ds - \int_t^T Z_s (dW_s - q_s ds). \end{aligned}$$

Prenons maintenant un processus q progressivement mesurable de telle sorte que $\mathcal{E}(q)$ soit une martingale. Alors d'après le théorème de Girsanov, $W_t^q := W_t - \int_0^t q_s ds$ est un mouvement brownien sous une probabilité \mathbb{Q}^q vérifiant $\frac{d\mathbb{Q}^q}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(q)_T$. On a envie de passer à l'espérance conditionnelle sous \mathbb{Q}^q dans l'inégalité précédente néanmoins on sait juste que $\int_t^\cdot Z_s (dW_s - q_s ds)$ est une martingale locale. On a donc seulement

$$Y_t \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^q} \left[Y_{\tau_n} + \int_t^{\tau_n} g(q_s) ds \right]$$

avec le temps d'arrêt $\tau_n = \inf \{s \geq t \mid \int_t^s |Z_s|^2 ds > n\}$. Si q est tel que $(Y_{\tau_n})_n$ est uniformément intégrable sous \mathbb{Q}^q alors on peut passer à la limite dans l'inégalité précédente, en remarquant que $g(q) \geq \frac{1}{2\gamma} |q|^2$, et obtenir

$$Y_t \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^q} \left[\xi + \int_t^T g(q_s) ds \right],$$

ce qui nous donne donc

$$Y_t \geq \operatorname{ess\,sup}_{q \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^q} \left[\xi + \int_t^T g(q_s) ds \right],$$

avec \mathcal{A} un ensemble de processus progressivement mesurables bien choisi afin que toutes les hypothèses faites précédemment soient justes. Enfin remarquons que si l'on prend q^* un processus progressivement mesurable tel que $q_s^* \in \partial g(Z_s)$ et que $q^* \in \mathcal{A}$ alors l'inégalité du début devient une égalité et on obtient

$$Y_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{q^*}} \left[\xi + \int_t^T g(q_s^*) ds \right] = \operatorname{ess\,sup}_{q \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^q} \left[\xi + \int_t^T g(q_s) ds \right].$$

Toute la difficulté revient donc à trouver le bon espace de contrôles admissibles \mathcal{A} et montrer que $q^* \in \mathcal{A}$. Cela est effectivement possible et dans **[A2]** on montre le résultat suivant.

Proposition 2.5 *Pour tout $t \in [0, T]$ on a*

$$Y_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{g^*}} \left[\xi + \int_t^T g(q_s^*) ds \right] = \operatorname{ess\,sup}_{q \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^q} \left[\xi + \int_t^T g(q_s) ds \right]$$

avec

$$\mathcal{A} := \left\{ (q_s)_{s \in [0, T]} \text{ progressivement mesurable} : \int_0^T |q_s|^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P} - p.s. \right. \\ \left. \mathcal{E}(q) \text{ est une martingale, } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^q} \left[\int_0^T |q_s|^2 ds \right] < +\infty, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^q} [|\xi|] < +\infty \right\}.$$

Lorsque le générateur dépend de y , le problème de contrôle stochastique est plus difficile à écrire. En particulier on a du découper l'intervalle de temps $[0, T]$ en morceaux et définir les processus de \mathcal{A} par itération rétrograde sur chaque sous intervalle de temps³.

Comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, une application possible de l'unicité est l'obtention d'une formule de Feynman-Kac. Plus précisément on introduit la diffusion $X^{t,x}$ solution de

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}) dr + \int_t^s \sigma(r) dW_r, \quad t \leq s \leq T, \text{ and } X_s^{t,x} = x, \quad s \leq t$$

et on considère l'EDSR markovienne associée, de solution, si elle existe, $(Y^{t,x}, Z^{t,x})$. On cherche à obtenir une formule de Feynman-Kac non linéaire lorsque le générateur est quadratique. Se pose alors la question des hypothèses à mettre sur la condition terminale et la partie aléatoire du générateur afin d'avoir existence et unicité de $(Y^{t,x}, Z^{t,x})$. Rappelons le lemme suivant concernant l'EDS :

Lemme 2.6 *On suppose $|b(\cdot, 0)|$ borné, b uniformément Lipschitz par rapport à x et σ borné. Alors on a*

- Pour tout $p \in [0, 2[$ et $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\lambda |X_t^{t_0, x_0}|^p} \right] < +\infty.$$

-

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\lambda |X_t^{t_0, x_0}|^2} \right] < +\infty,$$

pour tout $\lambda < \lambda_0$ explicite⁴.

Ce lemme nous aide à comprendre que le résultat d'unicité de P. BRIAND et Y. HU [BH06, BH08] permet de traiter des EDPs avec croissance sous quadratique de la condition terminale et du générateur (en x) tandis que notre résultat permet d'atteindre une croissance quadratique (pas trop grande). En particulier on montre ceci :

3. c.f. le théorème 3.3. dans [A2].

4. c.f. le lemme 4.1. dans [A2].

Proposition 2.7 *On suppose que*

1. $\forall t \in [0, T], |b(t, 0)| \leq K,$
2. $\forall t \in [0, T], \forall (x, x') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, |b(t, x) - b(t, x')| \leq K |x - x'|.$
3. *pour chaque* $(t, x, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1 \times d},$

$$\forall (y, y') \in \mathbb{R}^2, \quad |F(t, x, y, z) - F(t, x, y', z)| \leq \beta |y - y'|;$$

4. *pour chaque* $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \quad z \mapsto F(t, x, y, z)$ *est convexe sur* $\mathbb{R}^{1 \times d};$
5. *pour chaque* $(t, x, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d},$

$$-r(1 + |x|^2 + |y| + |z|) \leq F(t, x, y, z) \leq r + \alpha |x|^2 + \beta |y| + \frac{\gamma}{2} |z|^2,$$

$$-r(1 + |x|^2) \leq g(x) \leq r + \alpha' |x|^2;$$

6. *pour chaque* $(t, x, x', y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d},$

$$|F(t, x, y, z) - F(t, x', y, z)| \leq r(1 + |x| + |x'|) |x - x'|,$$

$$|g(x) - g(x')| \leq r(1 + |x| + |x'|) |x - x'|;$$

7.

$$\alpha' + T\alpha < \frac{1}{2\gamma e^{(2K+\beta)T} \|\sigma\|_\infty^2 T}.$$

Alors, en posant $u(t, x) := Y^{(t, x)},$ u est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ et vérifie

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad |u(t, x)| \leq C(1 + |x|^2).$$

De plus u est une solution de viscosité de l'EDP (1.6).

L'une des difficultés de la preuve est de montrer la continuité de $u,$ on utilise pour cela le théorème de représentation obtenu précédemment (Proposition (2.5)) afin d'en déduire un résultat de stabilité pour l'EDSR dont la continuité de u découle. En particulier, la limitation sur σ ne dépendant que du temps découle de cette partie de la preuve. Notons que cette limitation n'est pas présente dans [BH08].

Le théorème (2.4) n'est pas encore tout à fait satisfaisant en terme d'hypothèse de moment exponentiel au vu de l'exemple (2.1). l'article [A9] co-écrit avec F. DELBAEN et Y. HU a pour but d'obtenir un résultat d'unicité sous une hypothèse de moment exponentiel identique à celle de l'existence et qui correspond exactement à l'exemple (2.1). Pour cela on considère l'EDSR quadratique simplifiée suivante

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

avec f convexe et à croissance quadratique. On supposera également dans toute cette partie que $f(0) = 0$ et $0 \leq f(z) \leq C_1 + \frac{\gamma}{2} |z|^2$. En copiant une nouvelle fois la procédure de localisation de [BH06] on peut montrer ceci :

5. Pour une fonction convexe f quelconque on peut toujours se ramener à ces deux hypothèses en modifiant la condition terminale ξ et la probabilité $\mathbb{P}.$

Proposition 2.8 *On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que*

$$\xi^- \in L^1 \text{ et } \exp(\gamma\xi) \in L^1.$$

Alors l'EDSR (2.4) possède une solution (Y, Z) telle que

$$\mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t] \leq Y_t \leq \frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E} \left[e^{\gamma C_1 T} e^{\gamma \xi^+} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

En particulier, $e^{\gamma Y}$ et Y appartiennent à la classe (D).

Si l'on considère maintenant l'exemple classique $f(z) = \frac{\gamma}{2}|z|^2$, il est simple de constater que la solution de l'EDSR est unique parmi les solutions (Y, Z) telles que $e^{\gamma Y}$ appartient à la classe (D). En effet, si (Y, Z) est une solution telle que $e^{\gamma Y}$ appartient à la classe (D), alors $e^{\gamma Y}$ est une martingale uniformément intégrable et

$$Y_t = \frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E} \left[e^{-\gamma \xi} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Pour un f plus général nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.9 *On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que*

$$\xi^- \in L^1 \text{ et } \exp(\gamma\xi) \in L^1.$$

on suppose également que f est fortement convexe en dehors d'un compact, i.e. il existe deux constantes $\varepsilon > 0$ et $C_2 \geq 0$ telles que $\forall z, z' \in \mathbb{R}^{1 \times d}, \forall s \in \partial g(z')$,

$$g(z) - g(z') - (z - z')s \geq \frac{\varepsilon}{2} |z - z'|^2 - C_2. \quad (2.5)$$

Alors l'EDSR (2.4) possède une unique solution (Y, Z) telle que Y et $e^{\gamma Y}$ appartiennent à la classe (D).

Les hypothèses d'intégrabilité sont maintenant optimales, néanmoins l'hypothèse supplémentaire (2.5) a fait son apparition. On ne sait pas actuellement si cette hypothèse est nécessaire ou bien si, au contraire, le théorème 2.9 reste vrai sans celle-ci.

Afin de montrer ce résultat, on peut légitimement se demander s'il est possible d'adapter la preuve du théorème 2.4. Si l'on revient sur le problème de contrôle stochastique associé (c.f. Proposition 2.5) et notamment la classe des contrôles admissibles notée \mathcal{A} , un point essentiel de la preuve repose sur le point suivant

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(q)_T \ln \mathcal{E}(q)_T] = \frac{1}{2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^q} \left[\int_0^T |q_s|^2 ds \right] < +\infty, \quad \forall q \in \mathcal{A}.$$

Dit autrement, $\mathcal{E}(q)_T$ appartient à la classe $L \log L$, ce qui implique d'après le lemme de de La Vallée Poussin que $\mathcal{E}(q)$ est une martingale uniformément intégrable. En particulier, il est essentiel d'avoir $\mathbb{E}[\mathcal{E}(q^*)_T \ln \mathcal{E}(q^*)_T] < +\infty$ pour tout processus progressivement mesurable tel que $q_s^* \in \partial f(Z_s)$ pour tous $s \in [0, T]$. Il s'avère que ce dernier fait n'est plus nécessairement vrai sous les hypothèses plus faibles du théorème 2.9⁶. La stratégie de preuve du théorème 2.4 n'est donc pas exploitable a priori. Néanmoins, il est possible de montrer que $\mathcal{E}(q^*)$ est encore une martingale uniformément intégrable ce qui permet en pratique de pouvoir utiliser une nouvelle fois le théorème de Girsanov.

6. c.f. remarque 2 dans [A9].

2.3 Le cadre markovien et trajectoire-dépendant

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, Z_t représente dans un cadre markovien, en un sens faible, ${}^\top \nabla u(t, X_t) \sigma(t, X_t)$ avec $u(t, x) = Y_t^{t,x}$. Ainsi, il semblerait naturel de récupérer des estimées intéressantes sur Z lorsque g et F ont un peu de régularité et que cette régularité se transfère bien à u . En particulier on a un résultat très simple à prouver qui montre que sous certaines conditions Z peut être borné.

Lemme 2.10 *On suppose que $\sigma(t, \cdot) = \sigma(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, g est Lipschitz, F est uniformément Lipschitz en x et y et il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante telle que pour tout $(t, x, y, z, z') \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$ on a*

$$|F(t, x, y, z) - F(t, x, y, z')| \leq C(1 + \varphi(|z|) + \varphi(|z'|)) |z - z'|. \quad (2.6)$$

Alors il existe une unique solution $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^\infty$.

Ce résultat peut donc s'appliquer à des EDSRs quadratiques et sur-quadratiques. Donnons une idée de la preuve. On commence par tronquer le générateur pour retomber sur une EDSR Lipschitz classique : pour tout $M > 0$ on note (Y^M, Z^M) l'unique solution de l'EDSR de générateur $F_M := F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \rho_M(\cdot))$ avec ρ_M une régularisation de la projection sur la boule euclidienne centrée de rayon M . On suppose que F et g sont différentiables, on peut alors dériver Y par rapport à x et tomber sur une nouvelle EDSR linéaire

$$\nabla Y_t^M = \nabla g(X_T) \nabla X_T + \int_t^T \nabla_x F_M \nabla X_s + \nabla_y F_M \nabla Y_s^M + \nabla_z F_M \nabla Z_s^M ds - \int_t^T \nabla Z_s^M dW_s.$$

On peut réécrire explicitement l'EDSR comme dans l'équation (1.2) et utiliser la bornitude de $\nabla_y f_M$ (indépendante de M) pour obtenir

$$\begin{aligned} |Z_t^M| = |\nabla Y_t^M (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)| &\leq C \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M} \left[|\nabla g(X_T) \nabla X_T (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)| \middle| \mathcal{F}_t \right] + \\ &C \int_t^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M} \left[|\nabla_x F_M \nabla X_s (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)| \middle| \mathcal{F}_t \right] ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Comme $\nabla g(X_T) \nabla X_T (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)$ et $\nabla_x F_M (X_T) \nabla X_s (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)$ sont bornés indépendamment de M , il en découle que $|Z^M| \leq C$ avec C indépendante de M . Il suffit alors de prendre M plus grand que C pour retomber sur l'EDSR initiale. Classiquement, le cas non différentiable s'obtient par approximation. Il est possible de faire le même raisonnement avec une EDSR non markovienne en supposant cette fois que la dérivée de Malliavin de ξ et du générateur (par rapport à l'aléa) sont bornées, c.f. [CN14]. Remarquons également que l'on peut passer très facilement au cadre trajectoire dépendant à partir du cadre markovien. En effet, si l'on considère l'EDSR

$$Y_t = g((X_s)_{s \in [0, T]}) + \int_t^T F(s, (X_{u \wedge s})_{u \in [0, T]}, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s$$

alors le lemme 2.10 reste vrai avec les nouvelles conditions de lipschitzianité suivantes : pour tous $t \in [0, T]$, $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in C([0, T], \mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^{1 \times d}$,

$$|g(\mathbf{x}) - g(\tilde{\mathbf{x}})| \leq K|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|_\infty,$$

$$|F(t, \mathbf{x}, y, z) - F(t, \tilde{\mathbf{x}}, y, z)| \leq K_g(1 + \varphi(|\mathbf{x}|_\infty) + \varphi(|\tilde{\mathbf{x}}|_\infty))|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|_\infty.$$

L'idée de la preuve consiste à passer dans un premier temps du cadre markovien au cadre trajectoire dépendant discret⁷ comme dans [HM04] et ensuite passer à la limite pour obtenir le cadre trajectoire dépendant. Une fois ce résultat simple exposé, se posent deux questions naturelles :

- Peut-on avoir une borne (aléatoire) sur Z lorsque les fonctions g et F sont seulement localement Lipschitz en x ?
- Que se passe-t-il si σ dépend également de x ?

g et F localement Lipschitz. Dans l'article [A4] je m'intéresse à la première question. En particulier je montre le résultat suivant :

Théorème 2.11 *On se place toujours sous l'hypothèse $\sigma(t, \cdot) = \sigma(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. On suppose que F est uniformément Lipschitz en y et qu'il existe des constantes $l \geq 1$, $0 \leq r < \frac{1}{l}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\gamma \geq 0$ telles que :*

1. pour tout $(t, x, y, z, z') \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$,

$$|F(t, x, y, z) - F(t, x, y, z')| \leq \left(C + \frac{\gamma}{2}(|z|^l + |z'|^l) \right) |z - z'|;$$

2. pour tout $(t, x, x', y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$,

$$|F(t, x, y, z) - F(t, x', y, z)| \leq \left(C + \frac{\beta}{2}(|x|^r + |x'|^r) \right) |x - x'|,$$

$$|g(x) - g(x')| \leq \left(C + \frac{\alpha}{2}(|x|^r + |x'|^r) \right) |x - x'|; \quad (2.8)$$

Il existe une solution $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ à l'EDSR markovienne telle que,

$$|Z_t| \leq C(1 + |X_t|^r) \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ p.p.} \quad (2.9)$$

De plus cette solution est unique parmi les solutions (Y, Z) telles que

- $Y \in \mathcal{S}^2$,
- il existe $\eta > 0$ tel que

$$\mathbb{E} \left[e^{(\frac{1}{2} + \eta) \frac{\gamma^2}{4} \int_0^T |Z_s|^{2l} ds} \right] < +\infty.$$

Avant de parler de la preuve, nous pouvons faire quelques remarques sur ce résultat.

Remarque 2.12

7. C'est-à-dire que la condition terminale devient une fonction de $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ une grille de $[0, T]$ et idem pour le générateur.

- Le résultat d'existence était nouveau uniquement dans le cadre sur-quadratique (i.e. $l > 1$).
- Le résultat d'unicité dans le cadre quadratique était nouveau car le générateur F n'est pas supposé convexe, c.f. la section 2.2.
- Comme d'habitude le résultat d'unicité permet d'obtenir une formule de Feynman-Kac, c.f. la section 4 dans [A4]. Néanmoins, si on s'intéresse directement à l'EDP, A. COSSO, H. PHAM et H. XING obtiennent dans [CPX17] un résultat d'existence sous des hypothèses plus faibles et plus naturelles : en particulier, les hypothèses sur la régularité Lipschitz de g et la partie aléatoire de F sont remplacées par des hypothèses sur la croissance. De plus, leur résultat s'appliquent également aux EDPs totalement non linéaires. Ils obtiennent ce résultat d'existence grâce à une représentation probabiliste de la solution à travers une EDSR avec contrainte sur la partie martingale en suivant les idées de [KMPZ10]. Notons toutefois que leur résultat nécessite d'avoir un générateur F convexe par rapport à z .
- Comme expliqué précédemment il est possible de généraliser ces résultats simplement au cadre trajectoire dépendant. Dans ce cas l'estimée sur Z devient

$$|Z_t| \leq C(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^r) \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ p.p.}$$

- Le cas critique $r = 1/l$ est également traité dans [A4]. Dans ce cas le résultat d'existence et d'unicité n'est valable que pour un temps petit, ce qui est cohérent avec ce que l'on a expliqué dans la partie 2.2 concernant les EDSRs quadratiques.
- L'estimée 2.9 peut être utile également pour l'étude des schémas d'approximation numérique (c.f. la section 5 de [A4] qui sera détaillée dans la partie 5.2) ainsi que pour l'étude d'EDSRs dirigées par un processus gaussien [Ben14].

L'idée de la preuve du théorème 2.11 est de s'appuyer sur le lemme 2.10. On considère donc (Y^M, Z^M) la solution de l'EDSR de fonction terminale $g_M := g \circ \rho_M$ et de générateur $F_M := F(\cdot, \rho_M(\cdot), \cdot, \cdot)$. D'après le lemme 2.10, Z^M est borné (par une constante dépendant de M) et on tombe sur une EDSR Lipschitz classique modulo une troncation du générateur en z . Supposons qu'il existe deux constantes A_n et \tilde{C} telles que $|Z_t^M| \leq A_n + \tilde{C} |X_t|^r$ et \tilde{C} ne dépend pas de M ⁸. On peut utiliser la même approche que dans la preuve du lemme 2.10 afin d'obtenir une estimée sur Z : on suppose, sans perte de généralité, que l'on a de la régularité sur g_M et F_M et on obtient

$$\begin{aligned} |Z_t^M| &\leq C \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M} \left[|\nabla g(X_T) \nabla X_T (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)| \middle| \mathcal{F}_t \right] + C \int_t^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M} \left[|\nabla_x F_M \nabla X_s (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)| \middle| \mathcal{F}_t \right] ds \\ &\leq C \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M} \left[|X_T|^r \middle| \mathcal{F}_t \right] + \int_t^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M} \left[|X_s|^r \middle| \mathcal{F}_t \right] ds \right). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser l'hypothèse $|Z_t^M| \leq A_n + \tilde{C} |X_t|^r$ pour obtenir une estimée de la quantité $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M} \left[|X_s|^r \middle| \mathcal{F}_t \right]$ et donc une nouvelle estimée pour $|Z_t^M|$ de la forme

$$|Z_t^M| \leq A_{n+1} + \tilde{C} |X_t|^r$$

8. Z^M étant borné, l'inégalité est vraie pour A_0 suffisamment grand et n'importe quel \tilde{C} .

avec $A_{n+1} = C(1 + A_n^{rl})$, si \tilde{C} a été choisie suffisamment grande. Comme la constante C a le bon goût d'être indépendante de M et que $rl < 1$, on peut alors itérer et obtenir une estimée limite sur Z^M indépendante de M . Notons que lorsque $rl = 1$ la méthode fonctionne encore si la constante C précédente est suffisamment petite. Une fois cette estimée obtenue, il suffit de montrer que $(Y^M, Z^M)_{M \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ en utilisant un résultat de stabilité.

σ plus général. Passons à la deuxième question : que se passe-t-il pour un σ plus général ? Si on s'intéresse uniquement au cadre markovien et en particulier à l'EDP, le résultat de [CPX17] est suffisamment général pour traiter un σ quelconque. Si on revient au problème d'existence et d'unicité pour les EDSRs, il est possible de dire des choses pour des EDSRs quadratiques. En particulier, on montre très facilement dans [A4] que le lemme 2.10 reste vrai dans le cadre quadratique ($\varphi(z) = |z|$) lorsque g et $F(\cdot, \cdot, 0, 0)$ sont bornées, en supposant évidemment que σ est bornée. En effet, il suffit d'utiliser le fait que dans le cadre borné nous avons à notre disposition des estimées OMB (uniforme en M) sur Z^M : ainsi dans 2.7, on remarque qu'il est possible d'appliquer une inégalité de Hölder conditionnelle pour se débarrasser de la probabilité \mathbb{Q}^M grâce à l'inégalité de Hölder inverse vérifiée par $\mathcal{E}(\nabla_z F_M)$. Néanmoins, avec P. BRIAND nous avons montré dans [A15] que le résultat reste vrai sans cette hypothèse de bornitude, et s'étend même facilement au cadre trajectoire dépendant, c.f. le corollaire 3.7 de [A15]. La preuve consiste à se ramener au cadre borné afin d'utiliser une nouvelle fois des outils de martingales OMB. Plus généralement, on montre également facilement dans [A4] que le théorème 2.11 reste vrai dans le cadre quadratique ($l = 1$) toujours sous l'hypothèse non naturelle que g et $F(\cdot, \cdot, 0, 0)$ sont bornées. Plus précisément on a le résultat suivant.

Proposition 2.13 *On suppose que*

1. F et g vérifient les hypothèses de 2.11 avec $l = 1$ et $r \in \mathbb{R}^+$ quelconque,
2. il existe $\kappa \in [0, 1]$ tels que $|\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|^\kappa)$, $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$,
3. g et $F(\cdot, \cdot, 0, 0)$ sont bornées.

Alors il existe une solution $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ à l'EDSR markovienne telle que,

$$|Z_t| \leq C(1 + |X_t|^{r+\kappa}) \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ p.p.} \quad (2.10)$$

Comme précédemment, cette proposition se généralise au cadre trajectoire dépendant, l'estimée 2.10 devenant

$$|Z_t| \leq C(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^{r+\kappa}) \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ p.p.}$$

Il est évidemment naturel de se demander si ce résultat peut se passer de l'hypothèse de bornitude. À ma connaissance la question reste ouverte.

Exercice 2.14 *Est-ce que la proposition 2.13 reste vraie sans l'hypothèse 3. ?*

Résultats d'existence plus généraux pour les EDSRs sur-quadratiques. Comme nous l'avons déjà remarqué à plusieurs reprises, les résultats d'existence obtenus dans [A4] dans le cadre sur-quadratique sont restrictifs au sens où l'on impose des conditions sur la croissance des constantes de Lipschitz locale de g et $F(t, \cdot, y, z)$ plutôt que sur la croissance des fonctions elles-mêmes. Avec F. MASIERO [A5] nous avons obtenu des résultats partiels permettant de réduire la régularité demandée. Les hypothèses nécessaires pour nos résultats étant nombreuses et peu lisibles, nous n'allons pas reproduire ces résultats ici mais juste en donner un aperçu. Notons une fois encore que si l'on s'intéresse à l'EDP, les résultats de [CPX17] sont établis sous des hypothèses bien plus générales que [A5] mais nécessitent tout de même d'avoir un générateur convexe en z .

Une stratégie extrêmement classique consiste à approcher des fonctions g et $F(t, \cdot, y, z)$ peu régulières par une suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(F_n(t, \cdot, y, z))_{n \in \mathbb{N}}$ localement Lipschitz et tenter de montrer que la suite de solutions $(Y^n, Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui converge donc vers une limite (Y, Z) pour laquelle il convient de vérifier qu'elle est solution de l'EDSR souhaitée. En utilisant une nouvelle fois la linéarisation (1.2), on peut remarquer que le résultat est trivial dès que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T], z \in \mathbb{R}^{1 \times d}} \{|g_n(x) - g(x)| + |F_n(t, x, y, z) - F(t, x, y, z)|\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il est effectivement possible d'approcher des fonctions de la sorte si g et $F(t, \cdot, y, z)$ sont uniformément continues pour une métrique particulière⁹. On peut par exemple prendre g comme la somme d'une fonction uniformément continue (pour la métrique standard cette fois) et d'une fonction localement Lipschitz. Ce résultat se généralise trivialement au cadre trajectoire-dépendant.

Si on cherche à approcher des fonctions g et $F(t, \cdot, y, z)$ moins régulières, il est nécessaire d'avoir en poche des estimées (uniformes en n) sur Z^n . Par exemple dans le cadre borné traité dans [DHB10], ils passent d'une suite de fonctions g_n Lipschitz bornée à une fonction semi-continue inférieurement bornée g en s'appuyant sur l'estimée

$$|Z_t^n| \leq \frac{C}{\sqrt{T-t}} \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ p.p.}$$

En adoptant la même démarche et en supposant les hypothèses *ad hoc*, on peut montrer dans notre cadre une estimée du type

$$|Z_t^n| \leq \frac{C(1 + |X_t|^{r_1})}{(T-t)^{1/l}} + C|X_t|^{r_2} \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ p.p.}$$

avec l la croissance en z du générateur et r_1, r_2 des constantes liées à la croissance des fonctions g et F en les différentes variables.

Formule de Feynman-Kac en dimension infinie.¹⁰ Pour conclure cette section nous allons parler de l'article [A6] écrit avec F. MASIERO dans lequel nous nous intéressons à des EDSRs

9. Tout ces résultats sont disponibles dans une première version de [A5] disponible sur ArXiv. Par contre, la version publiée de [A5] ne les contient pas.

10. Le début de ce paragraphe est fortement inspiré du manuscrit [Bri07].

en dimension infinie. Plus précisément, on considère toujours une EDSR à valeurs réelles où l'on remplace le mouvement brownien d -dimensionnel par un processus de Wiener cylindrique, toujours noté W , à valeurs dans un espace de Hilbert séparable Ξ de dimension infinie : W_t , $0 \leq t \leq T$, est une famille d'applications linéaires de Ξ dans L^2 telle que

- pour tout $u \in \Xi$, $\{W_t u\}_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien réel,
- pour tous u, v de Ξ , $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}[W_t u, W_t v] = t \langle u, v \rangle_{\Xi}$.

L'objectif de [A6] est d'obtenir une formule de Feynman-Kac pour des EDPs non-linéaires lorsque la variable spatiale est à valeurs dans un espace de Hilbert séparable H de dimension infinie. On considère dans la suite l'EDP suivante

$$\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) + F(t, x, u(t, x), \nabla_x u(t, x) \Sigma) = 0, \quad u(T, x) = g(x), \quad (2.11)$$

avec \mathcal{L} le générateur infinitésimal du processus à valeurs dans H

$$dX_s^{t,x} = AX_s^{t,x} ds + b(s, X_s^{t,x}) ds + \Sigma dW_s, \quad X_t^{t,x} = x, \quad (2.12)$$

au sens où l'on a

$$X_s^{t,x} = e^{(s-t)A} x + \int_t^s e^{(s-r)A} b(r, X_r^{t,x}) dr + \int_t^s e^{(r-s)A} \sigma dW_r, \quad t \leq s \leq T.$$

On suppose que A est le générateur d'un semi-groupe fortement continu et $\Sigma : \Xi \rightarrow H$ est un opérateur linéaire borné. On note $P_{t,s}$ le semi-groupe associé à la diffusion X défini par

$$P_{t,s}[\phi](x) = \mathbb{E} [\phi(X_s^{t,x})],$$

pour toute fonction $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ bornée continue. Vu que notre espace d'état est maintenant de dimension infinie, la notion de solution de viscosité pour (2.11) est mal définie. On considère donc plutôt la notion suivante de solution faible¹¹.

Définition 2.15 Une fonction $u : [0, T] \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution faible de (2.11) si

$$u(t, x) = P_{t,T}[g](x) + \int_t^T P_{t,s} [F(s, \cdot, u(s, \cdot), \nabla_x u(s, \cdot) \Sigma)](x) ds, \quad (t, x) \in [0, T] \times H,$$

où $\nabla_x u$ désigne la différentielle de Gâteaux de u .

Notons que l'EDP (2.11) apparaît naturellement lorsque l'on étudie des problèmes de contrôle d'EDPs stochastiques : pour un contrôle donné l'EDP stochastique se réécrit sous la forme d'une EDS contrôlée et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème de contrôle stochastique s'écrit sous la forme (2.11) avec F l'hamiltonien.

Le but est maintenant de montrer que l'EDSR

$$Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T F(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) dr - \int_s^T Z_r^{t,x} dW_r, \quad t \leq s \leq T \quad (2.13)$$

11. *mild solution* en anglais.

permet de définir une solution de (2.11) via la formule habituelle $u(t, x) := Y_t^{t,x}$. En particulier, contrairement au cadre fini-dimensionnel abordé précédemment, il convient de montrer que $x \mapsto (Y^{t,x}, Z^{t,x})$ est Gâteaux différentiable. Les premiers travaux étudiant l'EDP (2.11) à l'aide de l'outil des EDSRs sont dus à M. FUHRMAN et G. TESSITORE [FT02, FT04] qui traitent le cas des générateurs Lipschitz (en y et z). P. BRIAND et F. CONFORTOLA étudient le cas des générateurs monotones (en y) dans [BC08c] puis le cadre quadratique borné dans [BC08b]¹². L'objectif de notre article est d'étendre les résultats de [BC08c] lorsque g et $F(t, \cdot, y, z)$ ne sont pas bornées et de considérer également le cas sur-quadratique. Notons que le cas sur-quadratique a déjà été étudié à l'aide d'outils analytiques par F. GOZZI [Goz96] sous l'hypothèse que g est bornée Lipschitz et F est bornée par rapport à x .

Afin d'énoncer un premier théorème, rappelons quelques définitions.

Définition 2.16 Soient X, Y et V des espaces de Banach.

- $f : X \rightarrow V$ est de classe $\mathcal{G}^1(X; V)$ si elle est continue, Gâteaux différentiable sur X et $\nabla f : X \rightarrow L(X, V)$ est fortement continu.
- $f : Y \times X \rightarrow V$ est de classe $\mathcal{G}^{0,1}(Y \times X; V)$ si elle est continue, Gâteaux différentiable par rapport à x sur $Y \times X$ et $\nabla f : Y \times X \rightarrow L(X, V)$ est fortement continu.

On va se focaliser sur les hypothèses nécessaires pour l'EDSR, on suppose donc vérifiées toutes les hypothèses de [FT02] sur les coefficients de l'EDS (2.12) suffisantes pour que l'application $(t, x) \mapsto X^{t,x}$ de $[0, T] \times H$ dans $\mathcal{S}^p(H)$ soit de classe $\mathcal{G}^{0,1}$ pour tout $p \geq 1$.

Théorème 2.17 On suppose qu'il existe $C > 0$, $r > 0$ et $l > 0$ vérifiant $rl < 1$ et tels que

1. Pour tout $s \in [0, T]$, $(x, y, z) \mapsto F(s, x, y, z)$ est de classe $\mathcal{G}^{1,1,1}(H \times \mathbb{R} \times \Xi^*, \mathbb{R})$ et on a $\forall s \in [0, T], \forall x \in H, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \Xi^*$

$$|\nabla_x F(s, x, y, z)| \leq C(1 + |x|^r), \quad |\nabla_y F(s, x, y, z)| \leq C, \quad |\nabla_z F(s, x, y, z)| \leq C(1 + |z|^l).$$

2. $g \in \mathcal{G}^1(H, \mathbb{R})$ et on a

$$|\nabla \phi(x)| \leq C(1 + |x|^r), \quad \forall x \in H.$$

Alors $(t, x) \mapsto (Y^{t,x}, Z^{t,x})$ est de classe $\mathcal{G}^{0,1}([0, T] \times H; \mathcal{S}^p \times \mathcal{M}^p)$ pour tout $p > 1$. De plus pour tous $x, h \in H$ les processus des dérivées directionnelles $(\nabla Y_s^{t,x} h, \nabla Z_s^{t,x} h)_{s \in [0, T]}$ sont solution de l'EDSR linéaire suivante : pour $s \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \nabla Y_\tau^{t,x} h &= \nabla g(X_\tau^{t,x}) \nabla X_\tau^{t,x} h + \int_s^\tau \nabla_x F(u, X_u^{t,x}, Y_u^{t,x}, Z_u^{t,x}) \nabla X_u^{t,x} h \, du \\ &\quad + \int_s^\tau \nabla_y F(u, X_u^{t,x}, Y_u^{t,x}, Z_u^{t,x}) \nabla Y_u^{t,x} h \, du + \int_s^\tau \nabla_z F(u, X_u^{t,x}, Y_u^{t,x}, Z_u^{t,x}) \nabla Z_u^{t,x} h \, du \\ &\quad - \int_s^\tau \nabla Z_u^{t,x} h \, dW_u. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Enfin $u(t, x) := Y_t^{t,x}$ est l'unique solution faible de (2.11).

¹². La différentiabilité de $x \mapsto Y^x$ a été obtenue par les mêmes techniques de manière indépendante par S. ANKIRCHNER, P. IMKELLER et G. DOS REIS dans [AIdR07].

Ce type de résultat a été prouvé dans le cadre quadratique borné, c.f. [AIdR07, BC08b], en utilisant le fait que $\int_t^{\cdot} Z_s^{t,x} dW_s$ est une martingale OMB et en utilisant un résultat de stabilité découlant de la méthode de linéarisation. Vu que nous sommes dans le cadre non borné, il est vain d'essayer de se raccrocher aux martingales OMB, mais on peut par contre exploiter une nouvelle fois l'estimée (2.9) et adopter la même approche en utilisant le critère de Novikov.

Il est parfois possible de réduire la régularité demandée sur g et F . En particulier, F. MASIERO dans [Mas12] s'intéresse au cadre sur-quadratique avec g et $F(t, \cdot, y, z)$ des fonctions Lipschitz bornées où toutes les hypothèses de Gâteaux différentiabilité sont remplacées par des hypothèses de lipschitzianité. Pour cela, elle utilise une propriété de régularisation faible du semi-groupe qui dit que sous certaines hypothèses sur A et Σ pour toute fonction $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $s \in]0, T]$, la fonction $P_{t,s}[\phi]$ est différentiable par rapport à x dans les directions appartenant à $\text{Im}(\Sigma)$ et $\forall x \in H, \xi \in \Xi$,

$$|\nabla P_{t,\tau}[f](x) \Sigma \xi| \leq \frac{c}{(\tau - t)^\alpha} |f|_\infty |\xi|.$$

Le fait que $P_{t,s}[\phi]$ soit dérivable uniquement dans certaines directions est un résultat plus faible que d'autres résultats plus classiques de régularisation mais nécessite des hypothèses plus faibles que pour ces derniers. En particulier, il n'est pas nécessaire d'avoir Σ inversible, contrairement pas exemple à la formule de Bismut-Elworthy. En se plaçant sous les bonnes hypothèses pour avoir la propriété de régularisation faible du semi-groupe, il est alors possible de montrer que la formule de Feynman-Kac du théorème 2.17 reste vraie lorsque l'on remplace les hypothèses de Gâteaux différentiabilité par des hypothèses de lipschitzianité. La preuve consiste une nouvelle fois à considérer une suite de conditions terminales $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de générateurs $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réguliers approchant g et F . On montre facilement la convergence de la suite de solutions, la principale difficulté étant de démontrer la régularité de la solution limite.

2.4 Second retour sur l'unicité des solutions dans le cas non borné

Les résultats de la partie 2.3, notamment le théorème 2.11, nous donnent des résultats d'unicité dans une classe de solution demandant des conditions d'intégrabilité exponentielle sur Z . Ce type de condition n'est pas très satisfaisant et il serait préférable que celles-ci portent plutôt sur Y . C'est précisément ce que l'on a cherché à faire avec P. BRIAND dans [A15]. Nous allons donner une idée des résultats obtenus en simplifiant une nouvelle fois le cadre en prenant un générateur ne dépendant que de z . On suppose que f est C^1 de dérivée Lipschitz. On considère (Y, Z) et (\tilde{Y}, \tilde{Z}) deux solutions de (2.4) et on note $\delta Y := Y - \tilde{Y}$, $\delta Z := Z - \tilde{Z}$. Un développement trivial de f nous donne l'existence d'un processus a borné tel que

$$\delta Y_t = 0 + \int_t^T \delta Z_s \nabla_z f(Z_s) + a_s |\delta Z_s|^2 ds - \int_t^T \delta Z_s dW_s.$$

Supposons que $\mathcal{E}(\nabla_z f(Z))$ est une martingale, alors on peut une nouvelle fois utiliser le théorème de Girsanov pour obtenir

$$\delta Y_t = 0 + \int_t^T a_s |\delta Z_s|^2 ds - \int_t^T \delta Z_s dW_s^{\mathbb{Q}}.$$

Il suffit ensuite d'appliquer une transformation exponentielle pour faire disparaître le terme quadratique dans le générateur : pour $r > 0$ suffisamment grand on a

$$e^{r\delta Y_t} = 0 + \int_t^T e^{r\delta Y_s} \left(r a_s - \frac{r^2}{2} \right) |\delta Z_s|^2 ds - \int_t^T e^{r\delta Y_s} \delta Z_s dW_s^{\mathbb{Q}} \leq \int_t^T e^{r\delta Y_s} \delta Z_s dW_s^{\mathbb{Q}}$$

si on a suffisamment d'intégrabilité sur $|\delta Y|$. On a alors, en prenant un temps d'arrêt τ bien choisi

$$e^{r\delta Y_t} \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{r\delta Y_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Pour conclure sur le signe de δY_t , et donc par symétrie conclure sur l'unicité, il suffit de prendre une suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la faire tendre p.s. vers T . Pour passer à la limite dans l'inégalité du dessus, il convient d'étudier l'uniforme intégrabilité sous \mathbb{Q} de $(e^{r\delta Y_{\tau_n}})_{n \in \mathbb{N}}$. On a facilement

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{r(1+\varepsilon)|\delta Y_{\tau_n}|} \right] \leq \mathbb{E} \left[\mathcal{E}(\nabla_z f(Z))_T e^{r(1+\varepsilon)Y^*} e^{r(1+\varepsilon)\tilde{Y}^*} \right] \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

Supposons maintenant que l'on a en main une solution (Y, Z) telle que $\mathcal{E}(\nabla_z f(Z_s))_T \in L^p$ pour $p > 1$ et Y^* a tous ses moments exponentiels finis. Alors une simple application de l'inégalité de Hölder dans la quantité précédente permet d'avoir $Y = \tilde{Y}$ dès que \tilde{Y}^* a tous ses moments exponentiels finis et ce sans aucune hypothèse sur \tilde{Z} ! Ce petit résultat technique nous permet dans [A15] d'obtenir l'unicité dans la classe des solutions admettant tous leurs moments exponentiels finis dans plusieurs cas de figure :

- Lorsque ξ est bornée¹³,
- lorsque $\xi = g((X_s)_{s \in [0, T]}) + \tilde{\xi}$ avec $\tilde{\xi}$ bornée, g Lipschitz et X solution d'une EDS standard telle que σ est bornée,
- lorsque $\xi = g((X_s)_{s \in [0, T]}) + \tilde{\xi}$ avec $\tilde{\xi}$ bornée, g localement Lipschitz, à croissance sous-quadratique et X solution d'une EDS standard telle que σ est bornée et ne dépend que du temps.

Pour conclure sur le problème d'unicité des EDSRs quadratiques non bornées lorsque le générateur est non convexe on peut citer le récent travail de S. FAN, Y. HU et S. TANG [FHT19] qui obtiennent un résultat d'unicité sous des hypothèses de moments exponentiels pour la condition terminale et la partie aléatoire du générateur, ce qui est bien plus général que dans [A15]. En contrepartie, ils supposent une hypothèse de coercivité sur le générateur du type :

$$-\alpha_t - \beta|y| + \varepsilon|z|^2 \leq f(t, y, z) \leq +\alpha_t + \beta|y| + \frac{\gamma}{2}|z|^2.$$

Cette hypothèse leur permet de récupérer assez naturellement un moment exponentiel pour $\int_0^T |Z_s|^2 ds$.

2.5 Quid du cadre multidimensionnel ?

Pour terminer cette partie sur les EDSRs quadratiques nous allons présenter les résultats de [A13]¹⁴ co-écrit avec J. HARTER et traitant du cadre multidimensionnel, i.e. Y vit maintenant dans \mathbb{R}^d . Commençons par remarquer que la question de l'existence et de l'unicité d'une

13. Rappelons que le résultat d'unicité de M. KOBYLANSKI a lieu dans la classe plus petite des solutions bornées.

14. Ce travail fait partie des résultats obtenus par J. HARTER durant sa thèse.

solution pour une EDSR quadratique multidimensionnelle dépasse l'intérêt purement mathématique car ce type d'équation apparaît dans de nombreuses applications. On peut citer par exemple des jeux stochastiques à somme non nulle intervenant dans des problèmes de contrôle de risques financiers [EKH03, HT16], des problèmes d'équilibre financier avec plusieurs agents en interaction [ET15, FdR11, Fre14, BLDR17], des modèles micro-économiques de variation des prix d'actifs sur les marchés financiers [KP16b, KP16a], des problèmes de contrats de type principal-agent avec des interactions d'agents en compétition [EP19], des problèmes d'équilibre stochastique en marchés financiers incomplets [KXŽ15, XŽ18] ou le problème d'existence de martingales de valeur terminale donnée dans des variétés [Dar95].

Comme nous l'avons déjà dit, obtenir des résultats dans le cadre multidimensionnel est plus difficile qu'en dimension 1 car nous n'avons plus à notre disposition des outils comme la convergence monotone ou bien la transformée de Girsanov. Mais surtout, A. FREI et G. DOS REIS [FdR11] ont exhibé un exemple d'EDSR quadratique multidimensionnelle avec une condition terminale bornée qui ne possède pas de solution. Plus précisément, l'EDSR est de la forme suivante :

$$\begin{cases} Y_t^1 = \xi - \int_t^T Z_s^1 dW_s \\ Y_t^2 = 0 + \int_t^T |Z_s^1|^2 + |Z_s^2|^2 ds - \int_t^T Z_s^2 dW_s. \end{cases}$$

On remarque que les deux équations sont découplées : on résout la première puis la seconde. De plus la seconde se résout explicitement à l'aide d'une transformation exponentielle. L'idée est alors de trouver une condition terminale ξ telle que $\int_0^T |Z_s^1|^2 ds$ n'a pas le moment exponentiel nécessaire pour obtenir l'existence d'une solution pour la seconde EDSR. Ce contre-exemple nous montre qu'il est vain de chercher à établir une généralisation directe du résultat de M. KOBYLANSKI [Kob00] dans un cadre multidimensionnel ou du résultat de É. PARDOUX et S. PENG [PP90] pour des générateurs localement Lipschitz. Néanmoins il existe plusieurs articles dans la littérature qui traitent des cas particuliers d'EDSRs quadratiques multidimensionnelles : on va en donner un aperçu succinct. Tout d'abord le premier résultat assez général a été obtenu par R. TEVZADZE [Tev08], lorsque la condition terminale est suffisamment petite, en utilisant un argument de point fixe et l'outil des martingales OMB. Des réécritures de ce résultats pour traiter des conditions terminales un peu plus générales sont considérées dans [Fre14, KP16b]. Dans [CN15], P. CHERIDITO et K. NAM traitent des EDSRs quadratiques avec des générateurs possédant des structures spécifiques. Avant tous ces articles, R. DARLING [Dar95] avait déjà pu construire des martingales de valeur terminale donnée dans certaines variétés en résolvant des EDSRs quadratiques multidimensionnelles. Sa preuve repose sur un résultat de stabilité obtenu par des arguments de couplage. Plus récemment, le cas quadratique diagonale été traité par Y. HU et S. TANG dans [HT16]. Plus précisément, ils supposent que la n -ième ligne du générateur a une croissance quadratique uniquement en la n -ième ligne de Z . Ce type d'hypothèse permet d'utiliser partiellement la transformée de Girsanov pour se débarrasser des termes quadratiques dans leurs estimées. Nous renvoyons également à [JKL17] (voir également [LT15]) pour d'autres résultats dans la même veine. Finalement, dans le récent papier [XŽ18], H. XING et G. ZITKOVIĆ obtiennent un résultat général dans un cadre markovien avec des hypothèses faibles de régularité sur le générateur et la condition terminale. Au lieu de supposer des hypothèses spécifiques sur le générateur, ils supposent l'existence d'une fonction dite « de Liapounov » permettant d'obtenir des estimées uniformes sur une suite (Y^n, Z^n) d'approximations de (Y, Z) .

Leur approche repose sur des méthodes analytiques. Enfin il existe plusieurs articles traitant de la résolution de systèmes d'EDPs paraboliques semi-linéaires avec des hypothèses spécifiques sur la structure du générateur. On renvoie aux nombreuses références citées dans l'introduction de [XŽ18].

Stratégie de preuve. Notre approche pour résoudre des EDSRs quadratiques multidimensionnelles repose sur les idées développées par P. BRIAND et R. ÉLIE [BE13] dans le cadre de la dimension 1. Commençons donc par rappeler le schéma de preuve utilisé dans cet article. Comme d'habitude on suppose que f est localement Lipschitz (i.e. (1.4) est vérifiée) et pour simplifier le propos on va supposer que f ne dépend que de z . Tout d'abord, ils commencent par considérer l'EDSR approchée suivante

$$Y_t^M = \xi + \int_t^T f(\rho^M(Z_s^M)) ds - \int_t^T Z_s^M dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Cette nouvelle EDSR est Lipschitz donc possède une unique solution (Y^M, Z^M) . Si on suppose maintenant que ξ est Malliavin différentiable avec une dérivée de Malliavin bornée, alors on a déjà remarqué précédemment que Z^M est borné (uniformément en M) et que cette borne uniforme est obtenue grâce à une estimée uniforme en M de la norme OMB de la martingale $\int_0^\cdot Z_s^M dW_s$. Ainsi, (Y^M, Z^M) est solution de l'EDSR non tronquée dès que M est suffisamment grand. L'étape suivante est d'étendre le résultat d'existence et d'unicité pour une condition terminale bornée générale : ξ est approchée par une suite $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conditions terminales bornées avec une dérivée de Malliavin bornée et on considère (Y^n, Z^n) la solution de l'EDSR suivante

$$Y_t^n = \xi^n + \int_t^T f(Z_s^n) ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

En utilisant un résultat de stabilité pour les EDSRs quadratiques, ils montrent que (Y^n, Z^n) est une suite de Cauchy qui converge vers la solution de l'EDSR initiale (1.1). Encore une fois, le résultat de stabilité utilisé par P. BRIAND et R. ÉLIE repose sur la linéarisation (1.2) et une estimée uniforme en n de la norme OMB de la martingale $\int_0^\cdot Z_s^n dW_s$.

Le but de notre article [A13] est d'adapter cette approche au cadre multidimensionnel. Dans la première étape d'approximation, on arrive à montrer que Z^M est borné uniformément en M si on a une estimée de la norme OMB de la martingale $\int_0^\cdot Z_s^M dW_s$ uniforme en M et suffisamment petite. Mais contrairement au cas scalaire, il n'est pas possible de montrer une estimée (uniforme en M) sur la norme OMB de $\int_0^\cdot Z_s^M dW_s$ sous des hypothèses de croissance quadratique générales sur f : cela serait en contradiction avec le contre-exemple de A. FREI et G. DOS REIS [FdR11]. Ainsi, cette estimée (uniforme en M) sur la norme OMB de $\int_0^\cdot Z_s^M dW_s$ devient dans notre article une hypothèse *a priori* et cette hypothèse doit être vérifiée au cas par cas en fonction du générateur considéré. Dans la deuxième étape d'approximation, on rencontre également le même problème : nous arrivons à montrer un résultat d'existence et d'unicité pour l'EDSR initiale en utilisant un résultat de stabilité si on a une estimée (uniforme en n) suffisamment petite sur la norme OMB de $\int_0^\cdot Z_s^n dW_s$ et cette estimée devient une nouvelle fois une hypothèse qui doit être vérifiée au cas par cas. Remarquons que l'estimée sur la bornitude de Z^M et le résultat de stabilité utilisé dans la seconde étape de la preuve s'appuient sur des résultats obtenus par F. DELBAEN et S. TANG dans [DT10].

Le fait que nos résultats soient valables uniquement lorsque nous avons une estimée suffisamment petite sur la borne OMB des martingales $\int_0^{\cdot} Z_s^M dW_s$ et $\int_0^{\cdot} Z_s^n dW_s$ est la principale limitation de nos résultats. Donnons donc quelques détails sur le point de blocage et ce qu'il conviendrait de prouver pour obtenir un résultat parfaitement satisfaisant. Pour simplifier encore plus le propos on supposera que W est unidimensionnel. On cherche à montrer notre borne uniforme sur Z . Pour cela on utilise une représentation de Z^M : en supposant vérifiées les bonnes hypothèses de régularité sur ξ et f_M , on a pour tout $t \in [0, T]$, $D_t Y_t$ est une version de Z_t et $(D_t Y, D_t Z)$ est solution de l'EDSR

$$D_t Y_s = D_t \xi + \int_s^T \nabla_z f(\rho_M(Z_u^M)) D_t Z_u du - \int_s^T D_t Z_u dW_u \quad 0 \leq s \leq T.$$

On ne peut pas utiliser Girsanov car $\nabla_z f(\rho_M(Z_u^M))$ est une matrice. Néanmoins on peut montrer facilement que l'on a

$$D_t Y_s^M = \mathbb{E} \left[(S_s^M)^{-1} S_T^M D_t \xi \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.15)$$

avec S^M solution de l'EDS

$$dS_s^M = S_s^M \nabla_z f(\rho_M(Z_s^M)) dW_s, \quad S_0^M = I_{d \times d}.$$

Il est facile de voir qu'en dimension 1 la solution de l'équation précédente est $\mathcal{E}(\nabla_z f(\rho_M(Z^M)))$ et que (2.15) devient

$$D_t Y_s^M = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M} \left[D_t \xi \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

avec $\frac{d\mathbb{Q}^M}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(\nabla_z f(\rho_M(Z^M)))_T$. Revenons au cas-multidimensionnel. En appliquant l'inégalité de Hölder conditionnelle à (2.15) on obtient

$$|D_t Y_s^M| \leq \mathbb{E} \left[|(S_t^M)^{-1} S_T^M|^p \middle| \mathcal{F}_t \right]^{1/p} \mathbb{E} \left[|D_t \xi|^q \middle| \mathcal{F}_t \right]^{1/q} \leq \mathbb{E} \left[|(S_t^M)^{-1} S_T^M|^p \middle| \mathcal{F}_t \right]^{1/p} |D_t \xi|_{\infty}$$

La question est alors la suivante : existe-t-il $p \geq 1$ et $C > 0$, indépendants de M , tels que

$$\mathbb{E} \left[|(S_t^M)^{-1} S_T^M|^p \middle| \mathcal{F}_t \right]^{1/p} \leq C ?$$

La réponse est évidemment positive en dimension 1 : Si on a une estimée OMB uniforme sur $\int_0^{\cdot} Z_s^M dW_s$ alors l'inégalité précédente est vraie pour tous les $p \in [1, p_c[$ avec $p_c > 1$ d'après l'inégalité de Hölder inverse. En dimension plus grande, on sait répondre positivement à la question uniquement quand l'estimée OMB uniforme sur $\int_0^{\cdot} Z_s^M dW_s$ est suffisamment petite et la question reste ouverte pour une estimée quelconque. Cette question est fortement liée à l'existence d'une solution pour une EDS linéaire avec coefficients OMB, qui est également un problème ouvert si on ne se limite pas aux coefficients de norme OMB petite.

Exercice 2.18 Soit $(B_t)_{t \in [0, T]}$ un processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ avec $d > 1$ et tel que $\int_0^{\cdot} |B_t| dW_s$ est une martingale OMB. On considère l'EDS à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ suivante

$$dX_t = X_t B_t dW_t, \quad X_0 = I_{d \times d}. \quad (2.16)$$

1. Existe-t-il une solution forte à l'équation (2.16) ?
2. Existe-t-il des constantes $p_c > 1$ et $C > 0$ dépendant juste de la norme OMB de $\int_0^\cdot |B_s| dW_s$ tels que l'on a, $\forall p \in [1, p_c[$,

$$\mathbb{E} \left[|(X_t)^{-1} X_T|^p \middle| \mathcal{F}_t \right] \leq C ?$$

Bien entendu, tous ces résultats n'ont aucun intérêt tant que l'on a pas identifié des situations où l'on est capable d'obtenir les estimées uniformes sur les normes OMB de $\int_0^\cdot Z_s^M dW_s$ et $\int_0^\cdot Z_s^n dW_s$. Il s'avère que c'est effectivement le cas pour les EDSRs traitées dans les articles [Tev08, Dar95, HT16]. L'intérêt de notre approche réside dans le fait que pour retrouver les résultats de [Tev08, Dar95, HT16] on a juste besoin d'obtenir des estimées à l'aide de calculs très simples, du type : appliquer la formule d'Itô a une fonction bien choisie de Y ¹⁵. Il est ainsi possible d'obtenir facilement de nouveaux résultats : par exemple, nous avons pu étendre le résultat de R. TEVZADZE lorsque le générateur vérifie une hypothèse du type monotonie par rapport à y . Enfin, il est utile de noter que le résultat de bornitude sur Z obtenu dans la première étape de la preuve est également intéressant en soi puisqu'il permet de ramener l'EDSR quadratique initiale à une simple EDSR Lipschitz et donne ainsi accès à de nombreux résultats sur les EDSRs Lipschitz : on peut citer par exemple les résultats de convergence des schémas d'approximation numériques, les résultats de différentiabilité ou bien encore les résultats de stabilité.

En guise d'ouverture, il pourrait être intéressant d'essayer d'étendre cette approche à des EDSRs quadratiques dirigées par des martingales plus générales comme, en particulier, les EDSRs à saut. Dans ce cadre, les notions de martingales OMB et de dérivée de Malliavin ont encore un sens.

15. On peut faire ici le parallèle avec la fonction de Liapounov utilisée dans [XŽ18] pour obtenir des estimées sur les solutions approchées.

Chapitre 3

EDSRs ergodiques

Nous allons dans ce chapitre aborder la notion d'EDSR ergodique¹ et les résultats obtenus dans les articles [A1] et [A8]. Ce type d'EDSR a été introduit par M. FUHRMAN, Y. HU et G. TESSITORE dans [FHT09] afin de traiter des problèmes de contrôle stochastique ergodique. Les EDSRs ergodiques sont des EDSRs markoviennes en horizon infini spécifiques. Classiquement une EDSR (non nécessairement markovienne) en horizon infini est une équation de la forme

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall t, T \text{ tels que } 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

où Y est unidimensionnel. Pour avoir existence et unicité d'une solution (Y, Z) pour une telle équation, il est nécessaire d'avoir une hypothèse de monotonie en y pour le générateur, i.e. il existe $\mu > 0$ tel que $\forall (s, y, y', z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$

$$(y - y') \cdot (f(s, y, z) - f(s, y', z)) \leq -\mu |y - y'|^2. \quad (3.2)$$

On renvoie à [BH98, Roy04]. Notons que pour le cas multidimensionnel, il faut que μ soit suffisamment grande par rapport à la constante de Lipschitz en z , c.f. [DP97, BH98]. En particulier, les EDSRs markoviennes en horizon infini permettent d'avoir une représentation probabiliste des EDPs elliptiques semi-linéaires du type

$$\mathcal{L}u(x) + F(x, u(x), {}^t \nabla u \sigma(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec \mathcal{L} le générateur du semi-groupe associé à X . Restons dans le monde markovien et considérons maintenant un générateur F ne dépendant pas de y , ainsi la condition de stricte monotonie n'est pas vérifiée. Pour tenter de donner un sens à une telle EDSR on considère la solution $(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha})$ de l'équation

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \alpha Y_s^{x,\alpha} ds - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s, \quad \forall t, T \text{ tels que } 0 \leq t \leq T,$$

1. EDSRE dans la suite du document.

avec X^x la solution d'une EDS standard partant de $x \in \mathbb{R}^d$ au temps 0. On peut ensuite montrer par un argument de compacité que, sous certaines conditions, on a $(Y^{x,\alpha} - Y_0^{0,\alpha}, Z^{x,\alpha}, \alpha Y_0^{0,\alpha})$ qui converge lorsque $\alpha \rightarrow 0$ vers (Y^x, Z^x, λ) solution de l'EDSRE

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda ds - \int_t^T Z_s^x dW_s, \quad \forall t, T \text{ tels que } 0 \leq t \leq T.$$

Notons que la constante λ , appelée constante d'ergodicité, fait partie de la solution. Le point essentiel pour obtenir la convergence de la suite de processus est de contrôler la constante de Lipschitz de $x \mapsto Y_0^{x,\alpha}$ uniformément en α : c'est la démarche utilisée dans [FHT09] mais également dans les nombreux articles antérieurs traitant de l'EDP associée². Pour pouvoir faire cela, on ajoute une hypothèse de dissipativité forte sur le processus X . Cette hypothèse de dissipativité a été affaiblie dans [DHT11].

Les EDSREs fournissent une représentation probabiliste de la solution de l'EDP elliptique

$$\mathcal{L}u(x) + F(x, {}^t\nabla u\sigma(x)) = \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

et permettent de traiter des problèmes de contrôle ergodique de la forme :

$$I(x, \rho) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}^{\rho, T} \left[\int_0^T L(X_s^x, \rho_s) ds \right], \quad (3.3)$$

où ρ est un processus adapté à valeur dans un espace métrique séparable U et $\mathbb{E}^{\rho, T}$ est l'espérance par rapport à la probabilité \mathbb{P}_T^ρ sous laquelle $W_t^\rho = W_t + \int_0^t R(\rho_s) ds$ est un mouvement brownien.

3.1 EDSREs associées à des EDPs avec condition de Neumann

Le but de l'article [A1] est de construire des EDSRs ergodiques associées à des EDPs ergodiques définies sur un compact, ayant des conditions de Neumann au bord et telles que la constante d'ergodicité apparaît dans la condition au bord. Pour ce faire, nous allons considérer l'EDSR généralisée en horizon infini suivante : pour tous $0 \leq t \leq T < +\infty$,

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [F(X_s^x, Z_s^x) - \lambda] ds + \int_t^T [h(X_s^x) - \mu] dK_s^x - \int_t^T Z_s^x dW_s. \quad (3.4)$$

Dans cette équation (X^x, K^x) est la solution d'une EDS réfléchie dans un domaine borné régulier $G = \{\phi > 0\}$ qui est donnée par

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x) ds + \int_0^t \sigma(X_s^x) dW_s + \int_0^t \nabla \phi(X_s^x) dK_s^x, & t \geq 0; \\ K_t^x = \int_0^t \mathbb{1}_{X_s^x \in \partial G} dK_s^x, & K_0^x = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

La solution d'une telle équation est un triplet (Y, Z, μ) . μ - appelée « coût ergodique à la frontière » - fait partie des inconnues tandis que λ est simplement un paramètre. Lorsque F et h sont

2. On renvoie le lecteur aux références données dans l'introduction de [FHT09].

des fonctions de y strictement monotones, É. PARDOUX et S. ZHANG [PZ98] ont montré³ qu'il existe une unique solution « classique » (Y, Z) . L'apparition de cette nouvelle inconnue s'explique donc par la non monotonie stricte de ces fonctions. Notons qu'il existe quelques articles traitant des EDPs ergodiques où la constante d'ergodicité μ est présente dans la condition de Neumann : nous renvoyons en particulier à [Ari03, BDL05, BDLLS08]. Il est bon de souligner que les constantes λ et μ n'ont pas le même rôle : notre résultat principal dit que sous de bonnes hypothèses, pour tout λ il existe une constante μ telle que (3.4) a une solution. À première vue λ ne joue pas de rôle et pourrait être incorporée à F , néanmoins notre stratégie de preuve l'utilise : nous montrons tout d'abord que pour tout μ , il existe une unique constante $\lambda := \lambda(\mu)$ pour laquelle (3.4) a une solution et ensuite nous prouvons que $\lambda(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Pour être plus précis, nous commençons par traiter le cas d'EDSREs avec une condition de Neumann nulle dans un domaine régulier borné. Pour cela, il suffit d'adapter les arguments de [FHT09] à notre contexte. En particulier, on suppose une hypothèse de forte dissipativité sur l'EDS sous-jacente ainsi que la convexité du domaine G .

Dans un deuxième temps nous nous ramenons à une condition de Neumann non nulle en considérant \tilde{v} une fonction vérifiant $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n}(x) + g(x) = \mu, \forall x \in \partial G$. À l'aide du processus $\tilde{v}(X^x)$ nous pouvons alors modifier l'EDSRE initiale (3.4) pour pouvoir obtenir une EDSRE avec condition de Neumann nulle et ainsi appliquer le résultat d'existence précédent. À ce stade de la démonstration nous obtenons le résultat suivant : pour tout μ , il existe une unique constante $\lambda := \lambda(\mu)$ pour laquelle (3.4) a une solution. Enfin, dans un troisième temps, l'étude de la fonction $\mu \mapsto \lambda(\mu)$ montre qu'elle est continue et décroissante. Sous certaines conditions, nous avons également $\lambda(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow +\infty} -\infty$ et $\lambda(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow -\infty} +\infty$ ce qui permet de conclure : pour tout λ , il existe une constante μ pour laquelle (3.4) a une solution. Lorsque F est bornée, ce résultat est vrai si nous supposons que

$$\int_{x \in \bar{G}} \mathbb{E}[K_1^x] \nu(dx) > 0$$

avec ν l'unique mesure invariante de X . Cette hypothèse naturelle signifie que la frontière doit être suffisamment vue dans le temps par le processus X . Malheureusement, l'application des EDSREs aux problèmes de contrôle nécessite que F soit non borné. Dans ce cas, l'étude est plus compliquée : voir la partie 4 de [A1] et le chapitre 3 de [T1].

Une fois obtenus ces résultats d'existence, nous pouvons les appliquer à des problèmes de contrôle optimal dont les coûts sont donnés par

$$I(x, \rho) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}^{\rho, T} \left[\int_0^T L(X_s^x, \rho_s) ds + \int_0^T [h(X_s^x) - \mu] dK_s^x \right],$$

$$J(x, \rho) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \mathbb{E}^{\rho, T}[K_T^x] = 0, \\ \frac{1}{\mathbb{E}^{\rho, T}[K_T^x]} \mathbb{E}^{\rho, T} \left[\int_0^T [L(X_s^x, \rho_s) - \lambda] ds + \int_0^T h(X_s^x) dK_s^x \right] & \text{sinon,} \end{cases}$$

3. En fait ces auteurs ont montré un résultat d'existence et d'unicité dans un cadre multidimensionnel lorsque la constante de monotonie μ est supérieure à une valeur explicite dépendant de la constante de Lipschitz du générateur en z . Néanmoins il est possible de généraliser ce résultat en dimension 1 pour $\mu > 0$ en appliquant la même démarche que dans l'article [BH98] : cf. chapitre 3 de [T1].

où ρ est un processus adapté à valeur dans un espace métrique séparable U et $\mathbb{E}^{\rho, T}$ est l'espérance par rapport à la probabilité \mathbb{P}_T^ρ sous laquelle $W_t^\rho = W_t + \int_0^t R(\rho_s) ds$ est un mouvement brownien. Avec des hypothèses appropriées et en prenant

$$F(x, z) = \inf_{u \in U} \{L(x, u) + zR(u)\}$$

dans (3.4), nous prouvons alors que $\lambda = \inf_\rho I(x, \rho)$ et $\mu = \inf_\rho J(x, \rho)$ où l'infimum est pris sur tous les contrôles admissibles. Pour conclure, notons que P.Y. MADEC s'est intéressé au même type d'EDSRE dans [Mad15] sous une hypothèse de dissipativité faible.

3.2 Comportement en temps long des EDPs paraboliques semi-linéaires

Nous avons vu que les EDSREs permettent de traiter des problèmes de contrôle stochastique ergodique du type (3.3) : i.e. on cherche

$$\sup_{\rho \text{ admissible}} \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}^{\rho, T} \left[\int_0^T L(X_s^x, \rho_s) ds \right].$$

On peut se poser la question de ce qui se passe lorsque on inverse la limite et le sup : i.e.

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sup_{\rho \text{ admissible}} \mathbb{E}^{\rho, T} \left[\int_0^T L(X_s^x, \rho_s) ds \right].$$

Il s'avère que sous certaines conditions, il y a égalité entre ces deux quantités. Mieux, on peut montrer que la solution de l'EDSRE associée fournit un développement asymptotique précis de l'EDSR en horizon fini lorsque $T \rightarrow +\infty$. En terme d'EDP, cela revient à dire que la solution de l'EDP ergodique fournit un développement asymptotique de l'EDP parabolique associée.

Dans [A7], Y. HU, P.Y. MADEC et moi même avons étudié le comportement en temps long des solutions du problème de Cauchy dans un espace de Hilbert H :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathcal{L}u(t, x) + F(x, \nabla u(t, x)\Sigma), & \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times H, \\ u(0, x) = g(x), & \forall x \in H, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $u : \mathbb{R}_+ \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est la solution et \mathcal{L} est le générateur infinitésimal du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans H donné par (2.12). Contrairement à la partie précédente, on supposera ici une hypothèse de faible dissipativité comme dans [DHT11], i.e. on suppose A dissipatif et b bornée plutôt que $A + b$ dissipatif. Pour étudier le comportement en temps long de u , nous avons introduit (v, λ) la solution de l'EDP ergodique suivante :

$$\mathcal{L}v + f(x, \nabla v(x)G) - \lambda = 0, \quad \forall x \in H.$$

On utilise maintenant les représentations probabilistes de u et v . Soit $(Y^{T, x}, Z^{T, x})$ la solution de l'EDSR en horizon fini T :

$$\begin{cases} dY_s^{T, x} = -F(X_s^x, Z_s^{T, x}) ds + Z_s^{T, x} dW_s, \\ Y_T^{T, x} = g(X_T^x), \end{cases}$$

et (Y, Z, λ) la solution de l'EDSRE :

$$dY_s = -(F(X_s^x, Z_s^x) - \lambda)ds + Z_s^x dW_s.$$

On a alors la représentation

$$\begin{cases} Y_s^{T,x} = u(T-s, X_s^x), \\ Y_s^x = v(X_s^x). \end{cases}$$

En utilisant ensuite des arguments déjà développés dans [DHT11], notamment une estimée de couplage, on peut en déduire l'existence d'une constante $L \in \mathbb{R}$ telle que pour tous $x \in H$ on a

$$Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} L,$$

i.e.

$$u(T, x) - \lambda T - v(x) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} L. \quad (3.7)$$

De plus on arrive à obtenir une vitesse de convergence :

$$|u(T, x) - \lambda T - v(x) - L| \leq C(1 + |x|^{2+\mu})e^{-\hat{\eta}T}, \quad (3.8)$$

où la constante μ vient de la croissance polynomiale de g et $F(\cdot, 0)$ tandis que $\hat{\eta}$ est liée à la constante de dissipativité de A .

Ce type de comportement asymptotique a déjà été étudié par des outils analytiques pour différents types d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman⁴ (c.f. quelques références dans l'introduction de [A7]). On peut également citer l'article de A. COSSO, M. FUHRMAN et H. PHAM [CFP16] qui obtiennent des résultats pour des équations HJB potentiellement totalement non-linéaires en utilisant des outils d'EDSRs à sauts contraints. Notons que cet article traite des EDPs en dimension finie. Néanmoins, à notre connaissance seul l'article [NR97] présente une vitesse de convergence explicite du type (3.8) dans un cadre restrictif. Notons que la même démarche a ensuite été adoptée dans [HM16] pour traiter des EDPs avec condition de Neumann.

3.3 Vous reprendrez bien un peu de quadratique ?

Tous les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus pour des générateurs Lipschitz par rapport à la variable z . Vu la teneur du chapitre précédent, on peut se demander s'il serait possible d'obtenir des résultats pour des générateurs quadratiques. Des résultats allant dans ce sens sont déjà disponibles dans la littérature [IS13, RX15, LZ17, CI19]. En adaptant facilement la méthode développée dans la section 2.3 il est possible de traiter des EDSREs quadratiques non bornées en dimension éventuellement infinie, ce qui représente un résultat nouveau, et surtout une approche nouvelle, par rapport aux résultats déjà présents dans la littérature.

En prenant un peu de distance, il est bon de noter que tous les résultats concernant les EDSREs sont dans un cadre markovien ce qui est fondamental dans les preuves. On peut naturellement se demander s'il serait possible de développer des outils permettant d'étudier le comportement en temps long d'EDSRs trajectoire dépendantes.

4. HJB pour la suite.

Chapitre 4

EDSRs obliquement réfléchies et problèmes de commutation optimale

4.1 EDSRs obliquement réfléchies

Dans l'article [A16] écrit avec J.F. CHASSAGNEUX nous étudions une classe d'EDSRs dont les solutions sont contraintes à rester dans un domaine convexe fermé dont l'intérieur est noté \mathcal{D} . Afin de satisfaire la contrainte, le processus Y est réfléchi au bord du domaine $\partial\mathcal{D}$ et la direction de réflexion peut être oblique. De telles équations sont dénommées EDSRs obliquement réfléchies, EDSRORs¹ en abrégé, et permettent notamment de caractériser la solutions de certains problèmes de contrôle stochastiques. Plus précisément, nous cherchons une solution progressivement mesurable de l'équation suivante

$$\begin{cases} (i) Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T H(s, Y_s, Z_s) \Phi_s ds - \int_t^T Z_s dW_s, & 0 \leq t \leq T, \\ (ii) Y_t \in \bar{\mathcal{D}} \text{ p.s., } \Phi_t \in \partial\varphi(Y_t) dt \otimes d\mathbb{P}\text{-p.p., } \int_0^T |\Phi_s| \mathbb{1}_{\{Y_s \notin \partial\mathcal{D}\}} ds = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où φ est la fonction indicatrice (convexe) de \mathcal{D} , $\partial\varphi$ est la sous-différentielle de φ et $(f, H) : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k \times k})$ est une fonction $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d})$ -mesurable. Les contraintes portant sur le couple (Y, Φ) sont données par (4.1)(ii). Comme nous l'avons déjà précisé, la première consiste à imposer que Y prend ses valeurs dans un domaine convexe $\bar{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^d$ non vide. Le fait que $\Phi_t \in \partial\varphi(Y_t)$ impose que Φ est dirigé dans la direction du cône normal sortant du domaine convexe, le point important étant que dans (i) cette direction est perturbée par l'opérateur H : on considère donc une direction de réflexion oblique. Lorsque (4.1)(i) est considérée de façon rétrograde en temps, le processus Φ ou, plus généralement $\Psi := H(\cdot)\Phi$, est un processus permettant à Y de rester dans $\bar{\mathcal{D}}$. La condition $\int_0^T |\Phi_t| \mathbb{1}_{\{Y_t \notin \partial\mathcal{D}\}} dt = 0$ est alors interprétée comme une condition minimale, au sens où Ψ ne sera active que lorsque Y touche la frontière du domaine. Il est bien entendu nécessaire d'ajouter cette condition pour obtenir un résultat d'unicité.

1. On notera une certaine appétence au sein de la communauté pour la recherche du sigle le plus long.

Commençons par rappeler les résultats connus pour traiter ce type d'équations. Dans le cas uni-dimensionnel, elles ont été étudiées en premier dans [EKKP⁺97] en ce qui concerne le cas simplement réfléchi et dans [CK96] pour le cas doublement réfléchi. La littérature sur le sujet s'est ensuite énormément développée à cause de ses applications, en particulier en mathématiques financières et en contrôle stochastique. On peut citer l'article récent [GIO⁺17] demandant des hypothèses extrêmement faibles sur la frontière de réflexion. Pour sa part, le cas multidimensionnel est bien compris seulement dans le cadre de la réflexion normale, c'est-à-dire que la fonction H à valeur matricielle vaut l'identité, voir [GPP96]. Le cas de la réflexion oblique n'est quant à lui que partiellement traité. Jusqu'à il y a peu, seuls des exemples spécifiques pour (H, \mathcal{D}) avaient été considérés. Dans citeRamasubramanian-02, l'auteur étudie le cas d'une réflexion dans un orthant avec des restrictions sur la direction de réflexion et le générateur f . Un autre cadre qui a reçu beaucoup d'attention est celui des EDSRORS associées à des problèmes de commutation optimale. Dans ce cas le domaine à une forme spécifique et les directions de réflexions se font le long des axes. De plus des conditions de structures sur f sont nécessaires pour obtenir des résultats d'existence ainsi que d'unicité. Cette restriction provient de la technique de preuve qui repose principalement sur un théorème de limite monotone à la PENG [Pen99]. Nous renvoyons à la partie 4.2 pour une présentation des problèmes de commutation ainsi qu'aux références [HT10, HZ10, CEK11]. Sauf erreur de notre part, le premier résultat qui s'attaque au problème des EDSRORS en toute généralité se trouve dans [GRR15]. Malheureusement leur cadre d'hypothèse est encore assez restrictif concernant H et f : ils obtiennent une solution faible pour dans un cadre Markovien, lorsque f ne dépend pas de z . Notons que contrairement au cas rétrograde, il existe des résultats d'existence et d'unicité pour les EDSs réfléchies sous des hypothèses très faibles, voir par exemple [LS84, DI93]. Le but de [A16] est donc de prouver des résultats d'existence et d'unicité pour les EDSRs (4.1) avec un H générique et un domaine convexe \mathcal{D} sans imposer aucune condition de structure sur le générateur f . Ainsi, nous obtenons un résultat d'existence très général dans un cadre Markovien, en supposant seulement une propriété de domination faible sur le processus progressif X . Dans le cas général non Markovien, nous sommes obligé d'imposer des hypothèses de régularité sur ξ et sur H qui ne peut dépendre que de t et y . Dans ce cas on obtient à la fois l'existence et l'unicité d'une solution pour (4.1).

L'outil principal pour obtenir le résultat d'existence est de considérer la suite d'équations pénalisées : pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$,

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - \int_t^T Z_s^n dW_s - \int_t^T H(s, Y_s^n, Z_s^n) \nabla \varphi_n^M(Y_s^n) ds, \quad (4.2)$$

où, pour $y \in \mathbb{R}^k$, et un $M > 0$,

$$\varphi_n^M(y) := n \inf_{x \in \mathcal{D}} \theta_M(y - x) \quad \text{avec} \quad \theta_M(h) = \begin{cases} M|h| - \frac{M^2}{2} & \text{si } |h| > M, \\ \frac{1}{2}|h|^2 & \text{si } |h| \leq M. \end{cases} \quad (4.3)$$

De manière classique, le point clé pour obtenir la convergence de la suite $(Y^n)_n$ vers un processus limite consiste à obtenir des estimées uniformes sur (Y^n, Z^n, Φ^n) . Cela nous permet ensuite d'avoir également l'existence de processus limites (Z, Φ) . Pour les EDSRORS, la question de l'unicité est généralement traitée séparément.

Le premier argument possible pour obtenir la convergence de (Y^n) est de prouver de la monotonie sur la suite afin d'appliquer le théorème de limite monotone de S. PENG [Pen99]. Dans le cadre multidimensionnel, cette monotonie est obtenue sous des conditions de structures très restrictives sur le générateur. Néanmoins cette méthode a été utilisée avec succès pour les EDSRs associées aux problèmes de commutation optimale. Un autre argument possible est d'utiliser des résultats de compacité faible : c'est l'approche suivie par [GRR15]. Mais, encore une fois, des conditions de structures fortes sur le générateur sont demandées pour obtenir leurs résultats. Dans [A16] nous suivons une approche similaire dans le cadre Markovien, l'idée étant d'adapter légèrement le papier [HLP97] qui concerne les EDSRs multidimensionnelles avec un générateur juste continu. Cela nous permet d'obtenir un résultat d'existence avec un H dépendant de Z . Notons que comme d'habitude on note F le générateur et $g(X_T)$ la condition terminale car nous nous trouvons dans le cadre Markovien.

Théorème 4.1 *On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

- i) g a une croissance polynomiale.
- ii) F est continue en y et z , avec une croissance polynomiale en x et linéaire en y et z .
- iii) H est une fonction continue en y et z et bornée. Il existe $\eta > 0$ telle que, pour tous $(t, x, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$

$$H(t, x, \mathfrak{P}(y), z)v \cdot v \geq \eta, \quad \forall v \in \mathfrak{n}(\mathfrak{P}(y)), \quad (4.4)$$

avec \mathfrak{P} la projection sur $\overline{\mathcal{D}}$.

- iv) On a l'hypothèse de domination suivante sur l'EDS. Soit $\mathcal{X} = \{\mu(t, x; s, dy), x \in \mathbb{R}^d \text{ et } 0 \leq t \leq s \leq T\}$ la famille des lois de $X^{t,x}$ sur \mathbb{R}^d , i.e., les mesures telles que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mu(t, x; s, A) = \mathbb{P}(X_s^{t,x} \in A)$. Pour tout $t \in [0, T]$, pour $\mu(0, a; t, dy)$ -presque tous les $x \in \mathbb{R}^d$, et n'importe quel $\delta \in]0, T - t]$, il existe une application $\phi_{t,x} : [t, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :

$$(a) \quad \forall R \geq 1, \phi_{t,x} \in L^2([t + \delta, T] \times [-R, R]^d; \mu(0, a; s, dy)ds),$$

$$(b) \quad \mu(t, x; s, dy)ds = \phi_{t,x}(s, y)\mu(0, a; s, dy)ds \text{ sur } [t + \delta, T] \times \mathbb{R}^d.$$

Alors il existe une solution $(Y, Z, \Phi) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2 \times \mathcal{M}^2$ à l'équation (4.1).

Notons que l'hypothèse de domination est vérifiée dès que $\sigma^\top \sigma$ est bornée, inversible, d'inverse bornée [HLP97]. De plus, T. DE ANGELIS, G. FERRARI et S. HAMADÈNE ont également obtenu, de façon concomitante, des résultats dans la même veine en utilisant la même stratégie, c.f. [DAFH]. Enfin il est également possible d'obtenir des résultats lorsque H est discontinue en y et z , c.f. la partie 4.2 dans [A16].

Une dernière approche possible pour obtenir la convergence de la suite $(Y_n)_n$ est de montrer que l'on a une suite de Cauchy. C'est l'approche qui a été utilisée dans le papier originel de A. GÉGOUT-PETIT et É. PARDOUX [GPP96] pour les EDSRs réfléchies normalement, i.e. H est la matrice identité de \mathbb{R}^k . Pour obtenir leur résultat ainsi qu'un résultat de stabilité donnant l'unicité, ces derniers utilisent de façon cruciale la convexité du domaine ainsi que la direction normale de réflexion. En effet, si on prend deux solutions (Y^n, Z^n) et (Y^m, Z^m) de (4.2) et que l'on applique la formule d'Itô à $|Y^n - Y^m|^2$, on voit apparaître les termes

$$\langle \mathfrak{P}(Y_s^n) - \mathfrak{P}(Y_s^m), \nabla \varphi_n^M(Y_s^n) \rangle ds \text{ et } \langle \mathfrak{P}(Y_s^n) - \mathfrak{P}(Y_s^m), \nabla \varphi_m^M(Y_s^m) \rangle ds$$

qui ont tous les deux un signe car $\overline{\mathcal{D}}$. Si on applique la même chose avec un H quelconque, les termes précédents deviennent

$$\langle \mathfrak{P}(Y_s^n) - \mathfrak{P}(Y_s^m), H(s, Y_s^n) \nabla \varphi_n^M(Y_s^n) \rangle ds \text{ et } \langle \mathfrak{P}(Y_s^n) - \mathfrak{P}(Y_s^m), H(s, Y_s^m) \nabla \varphi_m^M(Y_s^m) \rangle ds$$

et on perd le signe. Afin de contourner le problème, on simplifie la situation en supposant que H ne dépend pas de z et on applique la formule d'Itô à $\langle Y^n - Y^m, {}^\top H^{-1}(\cdot, Y^n) Y^n - Y^m \rangle$. On récupère ainsi un signe sur les termes problématiques mais en contrepartie des termes parasites font leur apparition et nécessitent d'appliquer la formule d'Itô à $\Gamma \langle Y^n - Y^m, {}^\top H^{-1}(\cdot, Y^n) Y^n - Y^m \rangle$ avec le processus

$$\Gamma_t = e^{C^1 t + \int_0^t C^2 (|\varphi_n^M(Y_s^n)| + |\varphi_m^M(Y_s^m)| + |Z_s^n|^2 + |Z_s^m|) ds}$$

où C^1 et C^2 sont des constantes bien choisies. Afin de mener à bien tous les calculs, il faut tout de même étudier l'intégrabilité du processus Γ : pour cela nous allons une nouvelle fois faire appel à l'outil des martingales OMB qui permettent d'arriver au résultat souhaité modulo une limitation sur la condition terminale. Notons également que l'application de la formule d'Itô nécessite de la régularité sur H et \mathcal{D} . Enfin, l'unicité découle d'un résultat de stabilité du même type mais obtenu directement sur deux solutions de (4.1).

Théorème 4.2 *On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

i) La martingale $\mathcal{Y}_t^\xi := \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t] = \xi - \int_t^T \mathcal{Z}_s^\xi dW_s$, $t \leq T$, est une martingale OMB et

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda \int_0^T |\mathcal{Z}_s^\xi|^2 ds} \right] < +\infty$$

pour un $\lambda > 0$ suffisamment grand².

ii) f est uniformément Lipschitz en y et z . De plus, le processus $\int_0^\cdot f(s, \mathcal{Y}_s^\xi, \mathcal{Z}_s^\xi) dW_s$ est une martingale OMB.

iii) Le domaine convexe ouvert \mathcal{D} est donné par une fonction $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ avec une dérivée première bornée, c'est à dire que $\mathcal{D} = \{\phi < 0\}$ et $\partial \mathcal{D} = \{\phi = 0\}$.

iv) $H : [0, T] \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$ est à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques Q vérifiant

$$|Q| \leq L, \quad L|v|^2 \geq v^\top (Q^{-1})^\top v \geq \frac{1}{L}|v|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^k. \quad (4.5)$$

$(t, y) \mapsto H(t, y)$ est une fonction $\mathcal{C}^{0,1}$ et $(t, y) \mapsto {}^\top (H^{-1})(t, y)$ est une fonction $\mathcal{C}^{1,2}$ telle que

$$|\partial_y H| + |{}^\top (H^{-1})| + |\partial_t {}^\top (H^{-1})| + |\partial_y {}^\top (H^{-1})| + |\partial_{yy}^2 {}^\top (H^{-1})| \leq C. \quad (4.6)$$

Alors il existe une unique solution $(Y, Z, \Phi) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2 \times \mathcal{M}^2$ à l'équation (4.1).

Ce premier résultat « général » demande tout de même certaines hypothèses fortes qui mériteraient d'être affaiblies. En particulier, le résultat reste-t-il vrai si

2. c.f. [A16] pour une borne explicite.

- la condition générale et la partie aléatoire du générateur sont juste de carré intégrables ?
- Le domaine est juste convexe, sans autre régularité ?
- H est juste Lipschitz en y ?

En prenant un peu plus de recul, on peut noter que le problème des EDSRs réfléchies (normalement ou obliquement) dans un domaine non convexe est très largement ouvert même lorsque le générateur est nul !³

4.2 Problèmes de commutation randomisée optimale

Commençons par rappeler le cadre classique des problèmes de commutation optimale. On considère un système qui peut se trouver dans k états différents⁴. On peut changer l'état du système à tout moment, mais toute commutation entraîne un coût noté c^{ij} si on passe de l'état i à l'état j . Le but du problème est de trouver quels sont les meilleurs instants pour commuter d'état afin de maximiser une fonction de récompense tenant compte des états visités au cours du temps et des coûts engendrés par les commutations éventuelles. Plus concrètement, on définit le problème de contrôle stochastique de la façon suivante.

- Une stratégie de commutation \mathbf{a} est une suite croissante de temps d'arrêts $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ combinée avec une suite de variables aléatoires $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{1, \dots, k\}$ tels que α_n est \mathcal{F}_{τ_n} -mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{A}_{t,i}$ l'ensemble des stratégies telles que $\tau_0 = t, \alpha_0 = i$ et $\mathbb{E} \left[\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\tau_n \leq T} \right|^2 \right] < +\infty$.
- Pour $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{t,i}$, on note $a_s = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \mathbb{1}_{[\tau_n, \tau_{n+1}[}(s), s \in [t, T]$, le processus d'état associé à \mathbf{a} .
- Pour $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{t,i}$, on note $A_s^\mathbf{a} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c^{\alpha_n \alpha_{n+1}} \mathbb{1}_{\{\tau_{n+1} \leq s\}}, s \geq 0$, le processus des coûts de commutation associé à \mathbf{a} .

Le but est de maximiser la fonction récompense suivante

$$J(t, i, \mathbf{a}) = \mathbb{E} \left[\xi^{\mathbf{a}_T} + \int_t^T f^{\mathbf{a}_s}(s) ds - (A_T^\mathbf{a} - A_t^\mathbf{a}) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T], 1 \leq i \leq k, \mathbf{a} \in \mathcal{A}_{t,i},$$

ou, plus généralement, la fonction récompense donnée par $Y_t^\mathbf{a}$ avec $(Y^\mathbf{a}, Z^\mathbf{a})$ la solution de l'EDSR commutée unidimensionnelle suivante

$$Y_s^\mathbf{a} = \xi^{\mathbf{a}_T} + \int_s^T f^{\mathbf{a}_u}(u, Y_u^\mathbf{a}, Z_u^\mathbf{a}) du - \int_s^T Z_u^\mathbf{a} dW_u - (A_T^\mathbf{a} - A_s^\mathbf{a}), \quad s \in [t, T], 1 \leq i \leq k, \mathbf{a} \in \mathcal{A}_{t,i}.$$

Enfin on suppose également des conditions de structure sur les coûts de commutation ainsi que leur positivité. En supposant des hypothèses d'intégrabilité et de régularité standard sur ξ et f ainsi que

$$f^i(s, y, z) = f^i(s, y^i, z^i) \quad \forall s \in [0, T], 1 \leq i \leq k, y \in \mathbb{R}^k, z \in \mathbb{R}^{k \times d},$$

avec z^i la i -ème ligne de z , on peut caractériser le contrôle optimal à l'aide d'une EDSR obliquement réfléchie.

3. On peut tout de même citer l'article [BH17] qui s'intéresse à un cas très particulier.

4. Par exemple une centrale électrique qui peut être allumée ou éteinte, c.f. [HJ07].

Proposition 4.3 Soit $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ une solution de l'EDSROR

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s + \int_t^T \Psi_s ds, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_t^\ell \geq \max_{j \in \{1, \dots, k\}} \{Y_t^j - c^{\ell j}\}, & 0 \leq t \leq T, \ell \in \{1, \dots, k\}, \\ \int_0^T \left[Y_t^\ell - \max_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{\ell\}} \{Y_t^j - c^{\ell j}\} \right] \Psi_t^\ell dt = 0, & \ell \in \{1, \dots, k\}. \end{cases} \quad (4.7)$$

On a

$$Y_t^i = \operatorname{ess\,sup}_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,i}} (Y_t^\alpha - A_t^\alpha) = Y_t^{\alpha^*} - A_t^{\alpha^*}$$

avec une stratégie optimale α^* explicite, c.f. [HT10, HZ10].

Notons que ce type de problème de contrôle apparaît dans des problèmes d'évaluation d'option financières [CL08] et a donné lieu à une importante littérature en mathématiques financières et plus généralement en mathématiques appliquées. On pourra consulter notamment l'introduction de [HZ10].

Le but de l'article [A17] co-écrit avec C. BÉNÉZET et J.F. CHASSAGNEUX est de considérer une généralisation du problème précédent appelé problème de commutation randomisée⁵. On suppose maintenant que lorsque l'on choisit de commuter depuis un état de départ donné, l'état d'arrivée est donné par une chaîne de Markov éventuellement contrôlée. Nous allons devoir redéfinir mathématiquement le problème de contrôle stochastique considéré. En particulier, l'ajout d'aléa provenant de la chaîne de Markov nous fait sortir de la filtration brownienne augmentée, notée dans cette partie $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$. Cet aléa supplémentaire sera donné par une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. i.i.d. indépendantes de W et de loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

- Une stratégie de commutation randomisée α est un état de départ $\zeta_0 \in \{1, \dots, k\}$, une suite croissante de temps aléatoires $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite de contrôles $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ à valeur dans un espace métrique compact ordonné \mathcal{C} tels que
 - le temps de départ $\tau_0 \in [0, T]$ et l'état de départ $\zeta_0 \in \{1, \dots, k\}$ sont déterministes.
 - Pour tout $n \geq 0$, τ_{n+1} est un $(\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt et α_{n+1} est $\mathcal{F}_{\tau_{n+1}}^n$ -mesurable. On définit alors $(\mathcal{F}_t^{n+1})_{t \geq 0}$ en posant $\mathcal{F}_t^{n+1} := \mathcal{F}_t^n \vee \sigma(X_{n+1} \mathbb{1}_{\tau_{n+1} \leq t})$. Enfin on note $\mathcal{F}_t^\infty := \bigvee_{n \geq 0} \mathcal{F}_t^n$.
- On note $\mathcal{A}_{t,i}$ l'ensemble des stratégies telles que $\tau_0 = t$, $\zeta_0 = i$ et qui possèdent certaines propriétés d'intégrabilité.
- On note $(\zeta_n)_n$ la chaîne de Markov contrôlée à valeurs dans $\{1, \dots, k\}$ et définie par $\zeta_{n+1} = F(\alpha_{n+1}, \zeta_n, X_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. On note $(p_{ij}^u)_{1 \leq i, j \leq k}$ la matrice de transition associée à cette chaîne pour un contrôle $u \in \mathcal{C}$ donné.
- Pour $\alpha \in \mathcal{A}_{t,i}$, on note $a_s = \sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n \mathbb{1}_{[\tau_n, \tau_{n+1}[}(s)$, $s \in [t, T]$, le processus d'état associé à α .

5. Comme proposé par B. MANDELROT dans [Man10], on préférera utiliser le verbe « randomiser », dérivé notamment de l'ancien français « à rondon » désignant un cheval dont le cavalier a perdu le contrôle, plutôt que l'anglicisme « randomiser ». Je remercie infiniment Jürgen ANGST pour m'avoir appris l'existence de ce mot.

- Partant d'un état $i \in \{1, \dots, d\}$ et appliquant un contrôle $\alpha \in \mathcal{C}$, on note $c^{i\alpha}$ le coût de commutation associé. Pour $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{t,i}$, on note $A_s^{\mathbf{a}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c^{\zeta_n \alpha_{n+1}} \mathbb{1}_{\{\tau_{n+1} \leq s\}}$, $s \geq 0$, le processus des coûts de commutation associé à \mathbf{a} .

Comme précédemment, la fonction récompense est écrite à l'aide d'une EDSR commutée unidimensionnelle. Néanmoins, le fait de ne plus être en filtration brownienne mais dans la filtration non continue $(\mathcal{F}_t^\infty)_{t \geq 0}$ provoque l'apparition d'une martingale orthogonale de sauts purs. Ainsi la fonction récompense est donnée par $Y_t^{\mathbf{a}}$ avec $(Y^{\mathbf{a}}, Z^{\mathbf{a}}, M^{\mathbf{a}})$ la solution de l'EDSR commutée unidimensionnelle suivante, pour $1 \leq i \leq k$, $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{t,i}$,

$$Y_s^{\mathbf{a}} = \xi^{\mathbf{a}T} + \int_s^T f^{\mathbf{a}u}(u, Y_u^{\mathbf{a}}, Z_u^{\mathbf{a}}) du - \int_s^T Z_u^{\mathbf{a}} dW_u - (M_T^{\mathbf{a}} - M_s^{\mathbf{a}}) - (A_T^{\mathbf{a}} - A_s^{\mathbf{a}}), \quad s \in [t, T].$$

Comme dans le cas classique on peut caractériser le contrôle optimale à l'aide d'une EDSR obliquement réfléchie.

Théorème 4.4 *On suppose la stricte positivité des coûts ainsi que $p_{i,i}^u < 1$, $\forall u \in \mathcal{C}$ et $1 \leq i \leq k$. Soit $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ une solution de l'EDSROR*

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s + \int_t^T \Psi_s ds, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_t^\ell \geq \sup_{u \in \mathcal{C}} \left\{ \sum_{j=1}^d p_{i,j}^u Y_t^j - c^{iu} \right\}, & 0 \leq t \leq T, \ell \in \{1, \dots, k\}, \\ \int_0^T \left[Y_t^\ell - \sup_{u \in \mathcal{C}} \left\{ \sum_{j=1}^d p_{i,j}^u Y_t^j - c^{iu} \right\} \right] \Psi_t^\ell dt = 0, & \ell \in \{1, \dots, k\}. \end{cases} \quad (4.8)$$

On a

$$Y_t^i = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{t,i}} \mathbb{E} \left[Y_t^{\mathbf{a}} - A_t^{\mathbf{a}} \middle| \mathcal{F}_t^0 \right] = \mathbb{E} \left[Y_t^{\mathbf{a}^*} - A_t^{\mathbf{a}^*} \middle| \mathcal{F}_t^0 \right]$$

avec une stratégie optimale \mathbf{a}^* explicite, c.f. [A17].

La preuve de ce théorème suit l'approche classique que l'on trouve dans [HT10, HZ10] à la différence non négligeable près qu'il faut traiter des cas de sauts multiples instantanés.

Le théorème 4.4 ne donne pas l'existence d'une solution à l'EDSR (4.8) il faut donc la construire. L'idée est d'utiliser les résultats d'existence démontrés dans [A16]. Pour cela il faut faire le lien entre (4.8) et (4.1) et en particulier il convient de construire H . La principale difficulté provient du fait que les domaines de réflexion obtenus possèdent des coins. Ainsi le théorème 4.2 ne peut être appliqué en l'état car le domaine est non régulier. On s'est donc intéressé dans [A17] au cadre markovien dans le cas simplifié où \mathcal{C} est un singleton. Il convient alors de construire H seulement continu vérifiant les hypothèses du théorème 4.1. On montre que c'est possible lorsque la chaîne de Markov (non contrôlée) est irréductible modulo une hypothèse technique sur la matrice de transition qui est toujours vérifiée lorsque $k = 3$ ⁶. Il est

6. Voir l'hypothèse 3.3 dans [A17].

également possible de relaxer la régularité du domaine demandée dans le théorème 4.2 tout en maintenant la régularité sur H . On peut alors traiter certains cas non markoviens, toujours dans le cas simplifié où \mathcal{C} est un singleton, comme

- $k = 3, p_{ij} > 0 \forall i \neq j$,
- $p_{ij} = \frac{1}{k-1} \forall i \neq j$.

Enfin il est également possible de traiter « à la main » des exemples contrôlés en dimension 3. Le cas général d'existence d'une solution de (4.8) reste toutefois largement ouvert.

Chapitre 5

Discrétisation temporelle des EDSRs

5.1 Quelques outils et notion de stabilité numérique

5.1.1 Quelques outils utiles pour l'étude des EDSRs discrétisées

Afin d'étudier le comportement d'un schéma de discrétisation temporelle tel que (1.8) ou (1.9) - c'est à dire regarder la convergence du schéma lorsque le pas de temps tend vers 0 ou bien encore étudier la stabilité numérique du schéma dans un sens qui sera défini dans la partie 5.1.2 - il est important d'avoir des outils pour palier l'absence de ceux disponibles en temps continu.

Tout d'abord, il peut être utile de représenter sous une forme rétrograde plus classique le schéma de discrétisation. En copiant [BDM01], on peut réécrire facilement (1.8) sous la forme

$$Y_k^\pi = Y_n^\pi + \sum_{i=k}^{n-1} f(t_i, Y_i^\pi, Z_i^\pi)h - \sum_{i=k}^{n-1} Z_i^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) - \sum_{i=k}^{n-1} \Delta M_i, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (5.1)$$

avec ΔM_i un incrément de martingale L^2 orthogonale à W . Une telle réécriture permet par exemple de récupérer des estimées assez facilement en appliquant le pendant discret de la formule d'Itô sur le carré à savoir la formule triviale

$$|y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y - x \rangle + |y - x|^2. \quad (5.2)$$

On peut naturellement se demander si la technique de linéarisation donnant la représentation (1.2) est également transposable au cas discret. Pour cela il suffit de regarder ce qui se passe pour un générateur linéaire, en prenant bien évidemment le soin de se placer en dimension 1 pour Y^π . En supposant que $f(t_i, Y_i^\pi, Z_i^\pi) = \alpha_i + \beta_i Y_i^\pi + \gamma_i Z_i^\pi$, on obtient assez facilement

$$Y_k^\pi = \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=k}^{n-1} (1 - \beta_i h) \right)^{-1} \left(\prod_{i=k}^{n-1} (1 + \gamma_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})) \right) \left(Y_k^\pi + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h \right) \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right].$$

Le lien avec la formule en temps continu est évident. En particulier, si on souhaite avoir un théorème de comparaison il est nécessaire d'avoir les deux premier termes sous l'espérance

conditionnelle de signe positif : pour le premier il suffit d'avoir h petit - si f est Lipschitz en y - mais le second ne peut pas avoir de signe. Cette constatation nous amène à modifier le schéma initial en remplaçant $\frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{h}$ dans la définition de Z_i^π par H_i un incrément de martingale qui a le bon goût d'être borné et qui vérifie

$$c_i I_{d \times d} = h \mathbb{E}[H_i^\top H_i] = h \mathbb{E}_{t_i} [H_i^\top H_i], \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{d} \leq c_i \leq \frac{\Lambda}{d}$$

avec λ, Λ des constantes strictement positives¹. Notons qu'un candidat naturel pour H_i est une troncature de $\frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{h}$. On peut alors réécrire le nouveau schéma sous la forme (5.1)

$$Y_k^\pi = Y_n^\pi + \sum_{i=k}^{n-1} f(t_i, Y_i^\pi, Z_i^\pi)h - \sum_{i=k}^{n-1} Z_i^\pi H_i h - \sum_{i=k}^{n-1} \Delta M_i, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (5.3)$$

et la linéarisation devient

$$Y_k^\pi = \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=k}^{n-1} (1 - \beta_i h) \right)^{-1} \left(\prod_{i=k}^{n-1} (1 + \gamma_i H_i h) \right) \left(Y_k^\pi + \sum_{i=k}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} (1 - \beta_j h) \right) \alpha_i \right) \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right]. \quad (5.4)$$

On obtient ainsi a peu de frais un résultat de comparaison pour le schéma dès que h est suffisamment petit par rapport aux constants de Lipschitz de f en y et z ainsi que la borne des $(H_i)_{0 \leq i \leq n-1}$. Ce type de résultat était déjà présent dans les travaux de S. N. COHEN et R. J. ELLIOTT [CE10, CE12] tandis que sa première utilisation dans un cadre de schéma de discrétisation remonte à [A11]².

Si on souhaite maintenant comparer une EDSR avec son schéma de discrétisation et notamment montrer que la solution du schéma tend, dans un espace bien choisi, vers la solution de l'EDSR initiale, il convient de réécrire l'EDSR comme un schéma afin de pouvoir comparer deux objets de même nature. Ainsi on peut toujours écrire

$$Y_{t_i} = \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}} + h f(t_i, Y_{t_i}, \tilde{Z}_i) + R_i^\pi \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

avec

$$\tilde{Z}_i = \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}} H_i \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \quad \text{et} \quad R_i^\pi = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, Y_s, Z_s) ds - h f(t_i, Y_{t_i}, \tilde{Z}_i)$$

la dernière quantité étant appelée erreur de troncature locale. C'est l'erreur que l'on commet en un pas de temps lorsque l'on injecte la vraie solution dans le schéma. Maintenant que l'on a deux objets comparables, il suffit d'obtenir un résultat de stabilité pour le schéma³ qui permet ainsi d'avoir l'erreur entre l'EDSR et le schéma de discrétisation majorée par la sommes des erreurs de troncatures. Cette distinction entre erreur de troncature et stabilité du schéma est connue depuis longtemps en analyse numérique pour les équations différentielles ordinaires⁴ [But03]

-
1. Dans toute la suite on considérera ces schémas plus généraux plutôt que (1.8) et (1.9).
 2. [A11] a été écrit avant [A8] mais a été publié après.
 3. Ne pas confondre avec la notion de stabilité numérique définie dans la partie 5.1.2.
 4. EDOs dans la suite.

mais a été formalisée pour les EDSRs que récemment par J.-F. CHASSAGNEUX et D. CRISAN [CC14] ouvrant ainsi la voie à l'étude de schémas d'ordre supérieur [CC14, Cha14]. Enfin, il est important de noter que, comme en temps continu, il est possible d'obtenir un résultat de stabilité pour les schémas soit en appliquant directement la « formule d'Itô discrète » (5.2), soit en s'appuyant sur la méthode de linéarisation.

5.1.2 Notion de stabilité numérique

Avec J.-F. CHASSAGNEUX nous avons défini dans l'article [A8] la notion de stabilité numérique pour les schémas d'Euler⁵ d'approximations des EDSRs. Commençons par expliquer cette notion sur une simple EDO :

$$y' = -ay, \quad y_0 = x \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

La solution de cette EDO $y_t = xe^{-at}$ ayant la propriété de rester bornée en temps, on peut se demander si cette propriété reste valable pour le schéma. Si on note y^π (respectivement \tilde{y}^π) le schéma explicite (resp. implicite), on a

$$y_n^\pi = x(1 - ah)^n, \quad \tilde{y}_n^\pi = x(1 + ah)^{-n},$$

et l'on obtient directement que y^π reste borné si et seulement si $h \leq 1/a$ tandis que \tilde{y}^π est borné pour tout h . C'est ainsi que l'on définit la notion de stabilité numérique pour un schéma de discrétisation d'EDO : un schéma est numériquement stable si, appliqué à une EDO de solution bornée, il renvoie une solution bornée. Ce n'est donc pas une notion de précision d'approximation mais plutôt de propriété qualitative du schéma.

Retournons maintenant dans le monde des rétrogrades en supposant que f est L_y -Lipschitz en y et L_z -Lipschitz en z , ne dépend que de y, z et vérifie $f(0, 0) = 0$. Sous certaines conditions, la solution d'une EDSR est bornée et sa borne ne dépend pas de T .

Proposition 5.1 *On suppose que f est l_y -monotone (au sens de (3.2) avec $l_y > 0$).*

- Si Y est unidimensionnel, on a pour tout $T > 0$

$$|Y|_{\mathcal{S}^\infty} \leq |\xi|_{L^\infty}.$$

- Dans le cas général cette propriété reste vraie dès que $(L_z)^2 \leq 2l_y$.

On va donc définir la notion de stabilité numérique de la façon suivante.

Définition 5.2 *On dit qu'un schéma de discrétisation est numériquement stable s'il existe h^* tel que pour tout $h \leq h^*$,*

$$|Y_0^\pi| \leq |\xi|_{L^\infty}$$

pour toute condition terminale ξ \mathcal{F}_T -mesurable essentiellement bornée. De plus, on dit que le schéma est A-stable si $h^ = +\infty$.*

5. i.e. (1.8) et (1.9) où l'on remplace éventuellement l'incrément de mouvement brownien renormalisé par un incrément de martingale H_i comme dans la partie précédente.

Comme la proposition 5.1 s'obtient très facilement en appliquant la méthode de la linéarisation en dimension 1 et la formule d'Itô sur le carré en dimension quelconque [BH98, Par99], on peut facilement appliquer la même stratégie sur le schéma pour obtenir des conditions suffisantes de stabilité.

Proposition 5.3 • *En dimension quelconque, le schéma implicite est A-stable dès que $\Lambda(L_z)^2 \leq 2l_y$ tandis que le schéma explicite est stable dès que*

$$(\sqrt{\Lambda}L_z + \sqrt{h}L_y)^2 \leq 2l_y.$$

• *En dimension 1, le schéma implicite est stable dès que $hL_z(\max_{0 \leq i \leq n-1} |H_i|_{L^\infty}) \leq 1$ tandis que le schéma explicite est stable dès que*

$$h \left[\frac{(L_y)^2}{2l_y} + L_z \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} |H_i|_{L^\infty} \right) \right] \leq 1.$$

On a également cherché à exhiber des conditions nécessaires de stabilité. Pour cela on s'est inspiré des méthodes numériques pour les EDP en considérant l'analyse de stabilité de Von Neumann : on s'intéresse uniquement à des conditions terminales complexes de la forme $\xi = e^{i \sum_{l=1}^d k_l W_T^l}$. On s'est alors restreint aux générateurs linéaires $f(y, z) = ay + bz$ pour pouvoir mener à bien les calculs. On obtient ainsi des conditions nécessaires pour les schémas explicites et implicites. De plus la forme des zones de stabilités numériques obtenues théoriquement est semblable à celle des zones de stabilité numériques obtenues par des expérimentations numériques sur des générateurs non linéaires. On renvoie aux parties 3 et 4 de [A8] pour des résultats précis. Remarquons tout de même que l'on peut rencontrer des phénomènes surprenants n'existant pas, à ma (maigre) connaissance, dans l'étude des ODEs. C'est le cas notamment du schéma implicite : pour certaines valeurs de a et de b le schéma est stable au sens de Von Neumann ssi h n'est pas dans un intervalle ouvert de \mathbb{R}_+ , c.f. figure 5.1⁶.

5.2 Approximation numérique des EDSRs markoviennes quadratiques

Alors que de nombreux travaux d'étude de schémas numériques d'approximation d'EDSRs markoviennes se placent dans un cadre Lipschitz, les résultats concernant des générateurs non Lipschitz ne sont pas légion. Lorsque le générateur est seulement monotone en y nous renvoyons à la série d'articles de A. LIONNET, G. DOS REIS et L. SZPRUCH, notamment [LdRS15, LdRS18]. Pour ma part je me suis intéressé aux générateurs Lipschitz en y mais seulement localement Lipschitz en z avec une croissance quadratique voir sur-quadratique et j'ai abordé cette problématique dans les articles [A3, A4, A11]. Avant de détailler toutes les stratégies disponibles pour traiter ce type de problème, insistons sur le fait qu'il est souvent essentiel d'avoir de la régularité sur le processus Z et des estimées suffisamment fortes pour obtenir une vitesse de convergence exploitable en pratique. Évidemment ces estimées dépendent des hypothèses faites sur le générateur F , la condition terminale g ainsi que l'EDS et sont plus ou moins

6. On renvoie également à [A8] pour les valeurs de A et \tilde{p} présents sur la figure.

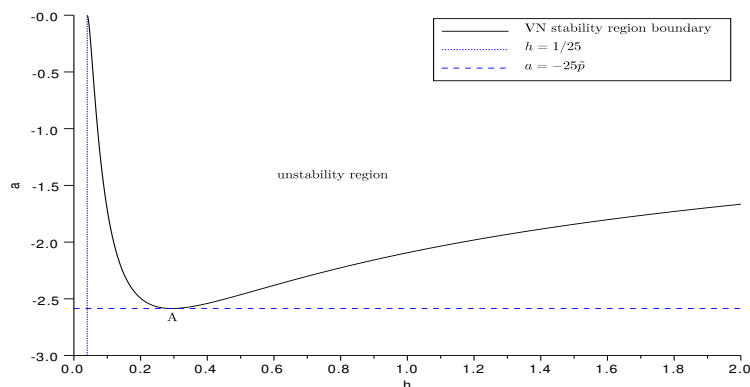


FIGURE 5.1 – Région de stabilité au sens de Von Neumann pour le schéma implicite, $d = 1$, $b = 5$.

difficiles à obtenir. Dans toute la suite on suppose que F est Lipschitz par rapport à y et b, σ sont Lipschitz par rapport à x et t ⁷. Pour simplifier le propos, on va également supposer que le générateur F ne dépend que de y et z . En effet, la partie aléatoire du générateur se traite très souvent comme la condition terminale, il suffit donc de transposer les hypothèses sur la condition terminale à la partie aléatoire du générateur⁸. J’ai collecté dans le tableau 5.1 les différentes estimées que l’on peut obtenir sur Z en fonction des hypothèses que l’on met sur g et σ . J’y fais également figurer quel article traite du problème d’approximation numérique⁹.

Nous pouvons maintenant commencer à passer en revue l’ensemble des résultats et techniques disponibles. Tout d’abord, lorsque le générateur a une forme spécifique¹⁰ il est possible de se ramener au cadre Lipschitz en utilisant une transformation exponentielle, c.f. notamment [IdRZ10]). Il est également possible de résoudre numériquement des EDPs quadratiques en résolvant en système progressif-rétrograde fortement couplé¹¹. C’est la méthode utilisée par F. DELARUE et S. MENOZZI dans [DM06, DM08] pour résoudre en particulier l’EDP KPZ déterministe. Néanmoins ces résultats d’approximation demandent des hypothèses fortes sur la régularité des coefficients et une hypothèse d’uniforme ellipticité pour σ . De plus l’algorithme est plus compliqué à mettre en œuvre du fait du couplage progressif-rétrograde fort.

Il est parfois possible de s’appuyer sur les résultats classiques dans un cadre Lipschitz afin de résoudre une EDSR quadratique. En effet, lorsque la condition terminale g est Lipschitz et σ est borné, il est possible de montrer que Z est borné par une constante M ¹². Puisque le générateur

7. Bien souvent on peut se contenter de 1/2-Hölder en t .

8. Il existe au moins une exception notable à ce fait empirique, c.f. la partie de ce document traitant de [A3].

9. Seuls les articles co-écrits y figurent mais les travaux d’autres auteurs sont évidemment mentionnés et mis en perspective dans la suite du document.

10. Grossièrement le générateur est la somme d’un terme purement quadratique $z \mapsto C|z|^2$ et d’une fonction Lipschitz.

11. i.e. Y et Z sont également dans les coefficients de l’EDS.

12. Ce résultat est trivial quand σ ne dépend pas de x , un tout petit peu plus compliqué lorsque g est borné, voir

		σ bornée en x		σ non bornée en x
		$\sigma(t)$	$\sigma(t, x)$	$ \sigma(\cdot, x) \leq C(1 + x ^\kappa)$
g bornée	g Lipschitz	$ Z \leq C$ [A4]		$ Z \leq C(1 + X ^\kappa)$ [A11]
	g non Lipschitz	$ Z_t \leq \frac{C}{\sqrt{T-t}}$ ou $ Z_t \leq \frac{C}{(T-t)^{\frac{1-\alpha}{2}}}$ si g α -Hölder [A3]	$ Z \leq C(1 + X ^{r\kappa})$ si ∇g de croissance r en x . [A4]	
g non bornée	g Lipschitz	$ Z \leq C$	$ Z \leq C$ [A15]	\emptyset
	g localement Lipschitz, ∇g de croissance r en x	$ Z \leq C(1 + X ^r)$ [A4]	Exercice 2.14	\emptyset

TABLE 5.1 – Estimées sur Z et articles co-écrits traitant du problème d'approximation numériques, en fonction des hypothèses sur g et σ .

est supposé être localement Lipschitz en z , il suffit juste de remplacer le générateur F par le nouveau générateur $F_M(\cdot, \cdot, \cdot) = F(\cdot, \cdot, \rho_M(\cdot))$. Ainsi les deux EDSRs de générateurs F et F_M ont la même solution et donc on peut se contenter de résoudre l'EDSR de générateur F_M . On peut tout de même remarquer que ce nouveau générateur à une constante de Lipschitz en z possiblement énorme ce qui peut créer des problèmes numérique, voir notamment [BS12] ainsi que la partie 5.1.2.

Dans le cas général il n'y a pas de raison que Z soit borné. Néanmoins, en fonction des hypothèses considérées pour g et σ il est possible d'avoir une estimée du type $|Z| \leq C(1 + |X|^p)$, c.f. tableau 5.1. Dans ce cas l'approximation numérique et l'étude de sa vitesse se fait en deux étapes distinctes :

- Dans un premier temps on considère (Y^M, Z^M) la solution de l'EDSR de générateur F_M avec éventuellement une troncation également de g , dépendant intelligemment de M . L'erreur entre (Y, Z) et (Y^M, Z^M) s'évalue à l'aide d'un résultat de stabilité, l'estimée sur Z permettant de borner $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{|Z_t| \geq M}]$ grâce à l'inégalité de Markov.
- Comme on retombe dans le cadre Markovien, l'erreur entre (Y^M, Z^M) et sa version discrétisée est déjà connue mais elle dépend de la constante de Lipschitz de F_M en z et g en x , donc elle dépend de M .

L'erreur globale s'obtient par la somme des deux erreurs précédentes et permet de trouver un M optimal afin de la minimiser. On retrouve en particulier une vitesse de convergence standard dans deux cas de figure :

- Lorsque g vérifie (2.8) avec $r < 1$ et σ ne dépend que de t . Notons que l'on peut également considérer une croissance sur-quadratique en z pour le générateur. c.f. le théorème 5.7 dans [A4].
- Lorsque g est une fonction bornée vérifiant (2.8) et σ à une croissance κ en x telle que $2\kappa < 1 - r$. c.f. le théorème 5.9 dans [A4].

e.g. [A4], et quelque peu subtil en toute généralité, c.f. [A15].

Lorsque g est Lipschitz bornée et σ est à croissance linéaire, ce qui est un jeu d'hypothèse assez standard et souvent rencontré dans les applications, la stratégie précédente ne donne pas une vitesse intéressante. En effet l'erreur entre (Y, Z) et (Y^M, Z^M) est bornée par $\frac{C_p}{M^p}$ pour tout $p > 1$, voir l'article original de P. IMKELLER et G. DOS REIS [IdR10] revisité dans [A4], tandis que l'erreur quadratique de discrétisation temporelle de (Y^M, Z^M) est de l'ordre de $Ce^{CM^2}n^{-1}$ avec n le nombre de pas de temps. En optimisant la somme des deux, on considère $M = (\log n)^{1/2}$ et on trouve une erreur globale en $C_p(\log n)^{-p}$. Le but de l'article [A11] co-écrit avec J.F. CHASSAGNEUX est de montrer que l'erreur quadratique de discrétisation temporelle de (Y^M, Z^M) peut être majorée indépendamment de M si M est bien choisi. On retombe alors quasiment sur l'erreur globale classique. L'idée pour obtenir un tel résultat est d'adapter les outils utilisés en temps continu aux schémas discrets. Plus concrètement, comme souligné dans la partie 5.1.1, il convient d'obtenir un résultat de stabilité pour le schéma. Pour cela, on va utiliser la technique de linéarisation habituelle. Prenons deux schémas : $(Y^{\pi,1}, Z^{\pi,1})$ (resp. $(Y^{\pi,2}, Z^{\pi,2})$) est la solution du schéma de générateur F^1 (resp. F^2) et de condition terminale ξ^1 (resp. ξ^2). La différence $\delta Y := Y^{\pi,1} - Y^{\pi,2}$ s'écrit comme (5.4)

$$\delta Y_k = \mathbb{E} \left[E_k^{-1} \left(\prod_{i=k}^{n-1} (1 + h\gamma_i H_i h) \right) \left(\delta \xi + \sum_{i=k}^{n-1} E_{i+1} \delta F_i \right) \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right], \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (5.5)$$

avec $E_k = \prod_{i=k}^{n-1} (1 - \beta_i h)$, $\delta \xi = \xi^1 - \xi^2$ et $\delta F_i = F^1(Y_i^{\pi,1}, Z_i^{\pi,1}) - F^2(Y_i^{\pi,1}, Z_i^{\pi,1})$. Il convient une nouvelle fois d'avoir $h\gamma_i H_i h > 0$ ce qui signifie qu'il faut avoir des variables aléatoires H_i bornées. De plus les γ_i sont bornées par la constante de Lipschitz de F^1 en z , à savoir M dans notre cadre d'application. En pratique, on prendra donc des fonctions de n pour M et la borne sur les H_i de telle sorte que $h\gamma_i H_i h > 0$. On a par contre $E_k > 0$ gratuitement dès que h est suffisamment petit par rapport à la constante de Lipschitz en y . Une fois que l'on s'est assuré de la positivité de tous ces termes on en déduit facilement l'estimée

$$|\delta Y_k| \leq C \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(|\delta \xi| + \sum_{i=k}^{n-1} |\delta F_i| \right) \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right]. \quad (5.6)$$

Pour pouvoir se défaire de la probabilité sous \mathbb{Q} et revenir à \mathbb{P} il suffit maintenant de faire appel une nouvelle fois à l'outil des martingales OMB : il convient de montrer une estimée uniforme en M et n sur la norme OMB associée à $Z^{\pi,1}$ et $Z^{\pi,2}$, donc aussi à γ , afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Hölder inverse. On arrive finalement au résultat suivant :

Théorème 5.4 *Soit $\alpha \in]0, 1/2[$ un paramètre fixé. On pose $M = n^\alpha$ ainsi que $R = \ln(n)$ et on considère les poids H_i suivants :*

$$(H_i)^\ell = \frac{-R}{\sqrt{h_i}} \vee \frac{W_{t_{i+1}}^\ell - W_{t_i}^\ell}{h_i} \wedge \frac{R}{\sqrt{h_i}}, \quad 1 \leq \ell \leq d. \quad (5.7)$$

On a alors, pour tout $\eta > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq n} |Y_{t_i} - Y_i^\pi|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - Z_i^\pi|^2 ds \right] \leq C_{\alpha, \eta} h^{1-\eta},$$

où (Y^π, Z^π) est la solution du schéma implicite avec les poids H_i et le générateur F_M .

Enfin, notons que dans [A11] nous étudions également la vitesse de convergence d'un schéma numérique où les espérances conditionnelles sont remplacées par des approximations numériques de ces dernières et des exemples numériques sont proposés.

Dans un dernier temps, intéressons nous au cas des conditions terminales bornées non Lipschitz. Dans ce cas de nouvelles difficultés apparaissent, même lorsque le générateur est Lipschitz, on renvoie notamment à [GM10]. Lorsque l'on considère une EDSR quadratique, lorsque σ ne dépend que du temps, il est possible de montrer, sous certaines conditions, une estimée sur Z de la forme

$$|Z_t| \leq \frac{C}{\sqrt{T-t}}, \quad \text{ou} \quad |Z_t| \leq \frac{C}{(T-t)^{(1-\alpha)/2}} \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ p.p.}$$

si la condition terminale est α -Hölder. Notons que cette estimée est obtenue en supposant que la partie aléatoire du générateur est Lipschitz et, à ma connaissance, il n'existe pas d'estimées de ce type lorsque l'on ne suppose pas ce type de régularité. On pourra consulter [DG06] et [A3] ou bien encore [DHB10] pour le cas sur-quadratique. Grâce à cette estimée, il est une nouvelle fois possible de remplacer notre générateur quadratique par un générateur Lipschitz tel que la constante de Lipschitz en z dépend du temps et explose en T . Dans [A3] je m'intéresse au problème de discrétisation temporelle tandis que l'approximation numérique des espérance conditionnelles par une régression des moindres carrés est traité dans l'article [GT16]. L'idée est de considérer une grille de discrétisation temporelle non uniforme qui prend en compte cette estimée sur Z . En particulier il convient de mettre plus de points près du temps T qu'à l'origine. Cela permet à la fin de récupérer des vitesses de convergences acceptables.

5.3 Discrétisation temporelle des EDSRs obliquement réfléchies intervenant dans les problèmes de commutation

Le but de l'article [A14] co-écrit avec J.-F. CHASSAGNEUX est l'étude de la discrétisation temporelle de l'EDSR obliquement réfléchi markovienne suivante

$$\begin{cases} Y_t = g(X_T) + \int_t^T F(X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s + K_T - K_t, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_t^\ell \geq \max_{j \in \{1, \dots, k\}} \{Y_t^j - c^{\ell j}(X_t)\}, & 0 \leq t \leq T, \ell \in \{1, \dots, k\}, \\ \int_0^T \left[Y_t^\ell - \max_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{\ell\}} \{Y_t^j - c^{\ell j}(X_t)\} \right] dK_t^\ell = 0, & \ell \in \{1, \dots, k\}, \end{cases} \quad (5.8)$$

où F , g et $(c^{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ sont des fonctions Lipschitz et X est encore une fois solution d'une EDS standard. Comme nous l'avons déjà précisé un peu dans la partie 4.2, c.f. notamment l'équation (4.7), ces EDSRs sont liées à des problèmes de commutation et les résultats d'existence et d'unicité pour (5.8) imposent des conditions de structure sur F et les fonctions de coûts c^{ij} , c.f. [CEK11, HM13]. L'approximation numérique de (5.8) par des méthodes probabilistes a déjà été étudiée dans les articles [PTW09, EK10, CEK12] et seul le dernier cité prouve une vitesse de convergence sous des conditions restrictives sur F et les fonctions de coûts c^{ij} . Le but de [A14]

est donc de raffiner les résultats de [CEK12] en obtenant une vitesse de convergence pour un schéma de discrétisation temporelle de l'EDSROR (5.8) sous les mêmes conditions portant sur F afin d'avoir existence et unicité d'une solution pour (5.8) et uniquement une condition Lipschitz pour les fonctions de coûts ainsi que la partie aléatoire du générateur. On peut souligner que nous n'avons besoin d'aucune hypothèse d'inversibilité pour la matrice σ .

Comme dans [MZ05, BC08a, CEK12], on commence par introduire une version discrètement réfléchie de (5.8), où les temps de réflexions appartiennent à une grille déterministe $\mathfrak{R} = \{r_0 := 0, \dots, r_\kappa := T\} : Y_T^{\mathfrak{R}} = \tilde{Y}_T^{\mathfrak{R}} := g(X_T) \in \mathcal{Q}(X_T)$, et, pour $j \leq \kappa - 1$ et $t \in [r_j, r_{j+1})$,

$$\begin{cases} \tilde{Y}_t^{\mathfrak{R}} = Y_{r_{j+1}}^{\mathfrak{R}} + \int_t^{r_{j+1}} f(X_u, \tilde{Y}_u^{\mathfrak{R}}, Z_u^{\mathfrak{R}}) du - \int_t^{r_{j+1}} Z_u^{\mathfrak{R}} dW_u, \\ Y_t^{\mathfrak{R}} = \tilde{Y}_t^{\mathfrak{R}} \mathbb{1}_{\{t \notin \mathfrak{R}\}} + \mathcal{P}(X_t, \tilde{Y}_t^{\mathfrak{R}}) \mathbb{1}_{\{t \in \mathfrak{R}\}}, \end{cases} \quad (5.9)$$

où $\mathcal{P}(x, \cdot)$ est l'opérateur de projection sur le convexe fermé

$$\mathcal{Q}(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^k \mid y^i \geq \max_{j \in \{1, \dots, k\}} (y^j - c^{ij}(x)), \forall i \in \{1, \dots, k\} \right\},$$

défini par

$$\mathcal{P} : (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \mapsto \left(\max_{j \in \{1, \dots, k\}} \{y^j - c^{ij}(x)\} \right)_{1 \leq i \leq k}.$$

On note $|\mathfrak{R}|$ le pas de la grille \mathfrak{R} , i.e. $|\mathfrak{R}| := \max_{0 \leq i \leq \kappa-1} |r_{i+1} - r_i|$.

La première étape importante est de montrer que les EDSRs discrètement réfléchies (5.9) sont une bonne approximation des EDSRs continûment réfléchies (5.8). Nous sommes capables dans [A14] de contrôler l'erreur d'approximation à l'aide de $|\mathfrak{R}|$ et notre résultat améliore en particulier celui de [CEK12] qui nécessite des conditions de structures sur F plus restrictives, une condition de bornitude du générateur par rapport à F et des hypothèses de régularité supplémentaires sur les fonctions de coûts c^{ij} . Au passage, nous avons pu nous départir de l'hypothèse de bornitude de F en z en montrant une nouvelle estimée sur Z qui peut être intéressante en elle-même et devrait pouvoir se généraliser au cas trajectoire dépendant à peu de frais :

$$|Z_t| \leq C(1 + |X_t|) \quad d\mathbb{P} \otimes dt \text{ p.p.}$$

La seconde étape consiste maintenant à considérer un schéma d'approximation temporelle pour l'EDSR discrètement obliquement réfléchi (5.9) définie sur une grille $\pi = \{0 = t_0 \leq \dots \leq t_n = T\}$ par $Y_n^{\mathfrak{R}, \pi} := g(X_T^\pi)$ et, pour $i \in \{n-1, \dots, 0\}$,

$$\begin{cases} Z_i^{\mathfrak{R}, \pi} := \mathbb{E}[Y_{i+1}^{\mathfrak{R}, \pi} H_i \mid \mathcal{F}_{t_i}], \\ \tilde{Y}_i^{\mathfrak{R}, \pi} := \mathbb{E}[Y_{i+1}^{\mathfrak{R}, \pi} \mid \mathcal{F}_{t_i}] + h_i f(X_{t_i}^\pi, \tilde{Y}_i^{\mathfrak{R}, \pi}, Z_i^{\mathfrak{R}, \pi}), \\ Y_i^{\mathfrak{R}, \pi} := \tilde{Y}_i^{\mathfrak{R}, \pi} \mathbb{1}_{\{t_i \notin \mathfrak{R}\}} + \mathcal{P}(X_{t_i}^\pi, \tilde{Y}_i^{\mathfrak{R}, \pi}) \mathbb{1}_{\{t_i \in \mathfrak{R}\}}, \end{cases} \quad (5.10)$$

où X^π est le schéma d'Euler associé à X , $h_i := t_{i+1} - t_i$ et les poids $(H_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ sont donnés par

$$(H_i)^\ell = \frac{-R}{h_i} \vee \frac{W_{t_{i+1}}^\ell - W_{t_i}^\ell}{h_i} \wedge \frac{R}{h_i}, \quad 1 \leq \ell \leq k, \quad (5.11)$$

avec $R > 0$ un paramètre. On note une nouvelle fois $|\pi|$ le pas de la grille π et on suppose que l'on a toujours $\mathfrak{R} \subset \pi$.

Pour étudier la convergence du schéma (5.10) vers (5.9), nous allons encore une fois établir un résultat de stabilité pour le schéma. Pour ce faire, le point central consiste à montrer un résultat de représentation du même type que celui fourni par la proposition 4.3 mais cette fois pour les schémas. Comme dans le cas continu, on doit définir ce qu'est un schéma rétrograde commuté, i.e. un schéma unidimensionnel pour lequel on change de générateur à des temps aléatoires discrets donnés par une stratégie. Pour établir un tel résultat de représentation il est essentiel d'avoir un théorème de comparaison pour notre schéma commuté ce qui est bien le cas dès lors que l'on a pris soin de prendre des poids H_i tronqués. C'est précisément ce résultat qui manquait à [CEK12] pour obtenir une vitesse de convergence exploitable lorsque F dépend de z .

Finalement, en combinant les deux approximations successives introduites précédemment, on obtient le résultat de convergence suivant sous des conditions sur le générateur et les fonctions de coûts $c^{i,j}$ déjà évoqués précédemment.

Théorème 5.5 *On pose $\alpha(|\pi|) = \log(2T/|\pi|)$.*

(i) *Si $|\mathfrak{R}| \sim |\pi|^{1/2}$, on a*

$$\sup_{0 \leq i \leq n} \mathbb{E} \left[|Y_{t_i} - \tilde{Y}_i^{\mathfrak{R}, \pi}|^2 + |Y_{t_i} - Y_i^{\mathfrak{R}, \pi}|^2 \right] \leq C|\pi|^{1/2} \alpha(|\pi|).$$

(ii) *Si $|\mathfrak{R}| \sim |\pi|^{1/3}$, on a*

$$\sup_{0 \leq i \leq n} \mathbb{E} \left[|Y_{t_i} - \tilde{Y}_i^{\mathfrak{R}, \pi}|^2 + |Y_{t_i} - Y_i^{\mathfrak{R}, \pi}|^2 \right] \leq C|\pi|^{1/3} \alpha(|\pi|),$$

et

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - Z_i^{\mathfrak{R}, \pi}|^2 ds \right] \leq C|\pi|^{1/6} \sqrt{\alpha(|\pi|)}.$$

De plus, si les coûts de transaction sont constants, alors les estimées précédentes restent vraies avec $\alpha(|\pi|) := 1$.

Chapitre 6

Principes de grandes déviations pour des estimateurs de paramètres de diffusions

6.1 Principes de grandes déviations pour les estimateurs des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck biaisé

Cette partie, orthogonale au reste du document et auto-contenue, traite des articles [A10,A12] co-écrits avec B. BERCU. Considérons un processus d'Ornstein-Uhlenbeck biaisé unidimensionnel observé sur l'intervalle de temps $[0, T]$

$$dX_t = \theta X_t dt + \gamma dt + dW_t, \quad X_0 = 0,$$

avec le paramètre de rappel $\theta < 0$. On s'intéresse à l'estimation du couple (θ, γ) . plus précisément on considère l'estimateur du maximum de vraisemblance donné par

$$\hat{\theta}_T = \frac{T \int_0^T X_t dX_t - X_T \int_0^T X_t dt}{T \int_0^T X_t^2 dt - \left(\int_0^T X_t dt \right)^2}$$

et

$$\hat{\gamma}_T = \frac{X_T \int_0^T X_t^2 dt - \int_0^T X_t dX_t \int_0^T X_t dt}{T \int_0^T X_t^2 dt - \left(\int_0^T X_t dt \right)^2}.$$

Il existe de nombreux travaux portant sur l'étude du comportement asymptotique de ces estimateurs. En particulier, il est connu [Kut04] que $\hat{\theta}_T$ et $\hat{\gamma}_T$ sont tout les deux des estimateurs fortement consistant de θ et γ et leur normalité asymptotique est donnée par

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_T - \theta \\ \hat{\gamma}_T - \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, L)$$

avec la matrice de covariance limite

$$L = 2 \begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ \gamma & \kappa \end{pmatrix}$$

où $\kappa = (2\gamma^2 + \theta)/2\theta$. De plus, des inégalités de concentration pour $(\hat{\theta}_T)$ et $(\hat{\gamma}_T)$ et des résultats de déviations modérées ont été établies par F. GAO et H. JIANG [GJ09] tandis que H. JIANG a obtenu des bornes de Berry-Essen et la loi du logarithme itéré. Le but de [A10] est d'établir un principe de grandes déviations pour le couple d'estimateur comme cela existe déjà dans le cas non biaisé ($\gamma = 0$), c.f. partie 6.2.

Commençons par rappeler ce qu'est un principe de grandes déviations.

Définition 6.1 Une suite de vecteurs aléatoires (V_T) de \mathbb{R}^d satisfait un principe de grandes déviations de vitesse T et de fonction de taux I si I est une fonction semi-continue inférieurement de \mathbb{R}^d dans $[0, +\infty]$ telle que,

(i) Borne supérieure : pour tout ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}(V_T \in F) \leq - \inf_{x \in F} I(x). \quad (6.1)$$

(ii) Borne inférieure : pour tout ensemble ouvert $G \subset \mathbb{R}^d$,

$$- \inf_{x \in G} I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}(V_T \in G). \quad (6.2)$$

De plus, si les ensembles de niveau de I sont compacts on dit que I est une bonne fonction de taux.

Une méthode très classique pour obtenir un principe de grandes déviations consiste à étudier, sous réserve d'existence, la limite de la log-Laplace renormalisée de V_T définie par

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{E} \left[e^{T \langle \lambda, V_T \rangle} \right].$$

On note \mathcal{D}_Λ son domaine de finitude

$$\mathcal{D}_\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^d \mid \Lambda(\lambda) < +\infty\}.$$

Définition 6.2 On dit que Λ est escarpée si l'intérieur de \mathcal{D}_Λ est non vide, si elle est différentiable sur l'intérieur de \mathcal{D}_Λ et si la norme de son gradient tend vers l'infini pour toute suite de points de l'intérieur de \mathcal{D}_Λ qui converge vers un point du bord.

Théorème 6.3 (Théorème de Gärtner-Ellis) Si Λ existe, est escarpée et semi-continue inférieurement, alors (V_T) satisfait un PGD de vitesse T et de bonne fonction de taux Λ^* la transformée de Legendre-Fenchel de Λ .

On renvoie à [DZ98] pour de plus amples détails sur la théorie des PGDs. Si l'on cherche un PGD pour $(\widehat{\theta}_T)$ par exemple, on peut se contenter d'estimer les quantités $\mathbb{P}(\widehat{\theta}_T - \theta > c)$ et $\mathbb{P}(\widehat{\theta}_T - \theta < c)$ pour tout $c > 0$ et donc il suffit d'avoir un PGD pour

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T X_t dX_t - \frac{X_T}{T} \frac{1}{T} \int_0^T X_t dt - c \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dt - \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t dt \right)^2 \right).$$

Malheureusement la limite de la log-Laplace renormalisée de cette dernière n'est pas escarpée ce qui complique les choses sans pour autant les rendre insurmontable au prix d'un changement de probabilité dépendant du temps T et de nombreux calculs. Ainsi dans [A10] nous avons obtenu un PGD précis de $(\widehat{\theta}_T)$, i.e. un développement asymptotique de $\mathbb{P}(\widehat{\theta}_T - \theta > c)$ et $\mathbb{P}(\widehat{\theta}_T - \theta < c)$. La méthode repose sur une étude fine du développement asymptotique de $\frac{1}{T} \ln \mathbb{E} \left[e^{T \langle \lambda, \widehat{\theta}_T \rangle} \right]$ comme cela a déjà été fait dans [BR01] pour le cas non biaisé.

Concernant l'étude de $(\widehat{\gamma}_T)$ et plus généralement du couple $(\widehat{\theta}_T, \widehat{\gamma}_T)$ il ne semble pas envisageable de faire fonctionner cette approche à cause des termes présents au numérateur de $\widehat{\gamma}_T$. Néanmoins on peut contourner le problème grâce au principe de contraction qui permet de transporter un PGD.

Lemme 6.4 (Principe de contraction) *Soit (V_T) une suite de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d qui satisfait un PGD de vitesse T et de bonne fonction de taux I et soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ une fonction continue sur $\mathcal{D}_I = \{x \in \mathbb{R}^d | I(x) < +\infty\}$. Alors la suite $(g(V_T))$ satisfait un PGD de vitesse T et de bonne fonction de taux J définie pour tout $y \in \mathbb{R}^{d'}$ par*

$$J(y) = \inf_{x \in \mathcal{D}_I | g(x)=y} I(x)$$

où l'infimum sur l'ensemble vide est supposé infini.

Pour obtenir un PGD pour $(\widehat{\theta}_T, \widehat{\gamma}_T)$, on peut commencer par montrer que le couple

$$\left(\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{X_T^2}{T} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dt - \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t dt \right)^2 \right)^2}, \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{X_T^2}{T} - 1 \right)}{\frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dt - \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t dt \right)^2} \frac{1}{T} \int_0^T X_t dt \right)$$

possède le même PGD que $(\widehat{\theta}_T, \widehat{\gamma}_T)$. Il suffit alors d'avoir un PGD pour

$$\left(\frac{X_T^2}{T}, \frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dt, \frac{1}{T} \int_0^T X_t dt \right)$$

puis d'utiliser le principe de contraction pour conclure. Malheureusement la limite de la log-Laplace renormalisée de ce triplet n'est pas escarpé, ce qui ne nous avance pas beaucoup. Néanmoins, on peut remarquer après quelques calculs simples que la limite de la log-Laplace renormalisée du triplet

$$\left(\frac{X_T}{\sqrt{T}}, \frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dt, \frac{1}{T} \int_0^T X_t dt \right)$$

est escarpée. On peut donc conclure et obtenir le théorème suivant.

Théorème 6.5 *Le couple $(\hat{\theta}_T, \hat{\gamma}_T)$ satisfait un PGD de bonne fonction de taux*

$$I_{\theta, \gamma}(c, d) = \begin{cases} -\frac{(\theta - c)^2}{4c} + \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{d\theta}{c} \right)^2 & \text{si } c \leq \frac{\theta}{3}, \\ (2c - \theta) + \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{d\theta}{c} \right)^2 & \text{si } c \geq \frac{\theta}{3} \text{ et } c \neq 0, \\ -\theta & \text{si } (c, d) = (0, 0), \\ +\infty & \text{si } c = 0 \text{ et } d \neq 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Notons qu'une fois la limite de la log-Laplace renormalisée calculée, la méthode est simple à mettre en œuvre. Enfin c'est cette méthode qui a permis à M. DU ROY DE CHAUMARAY d'obtenir un PGD pour le couple d'estimateurs des deux paramètres d'un processus de Cox-Ingersoll-Ross [dRdC16], en modifiant de façon beaucoup plus fine les vecteurs aléatoires en jeu.

6.2 Revisite du cas non biaisé

Revenons maintenant au modèle plus simple non biaisé, i.e. $\gamma = 0$. L'estimateur du maximum de vraisemblance devient

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T X_t dX_t}{\int_0^T X_t^2 dt} = \frac{X_T^2 - T}{2 \int_0^T X_t^2 dt}.$$

Un PGD a déjà été obtenu pour cet estimateur dans le cas stable ($\theta < 0$) [FLP99] ainsi que les cas instable $\theta = 0$ et explosif $\theta > 0$ [BCS12]. Le but de l'article [A12] est de retrouver ces résultats de façon beaucoup plus simple en appliquant la stratégie décrite dans la partie précédente concernant le couple $(\hat{\theta}_T, \hat{\gamma}_T)$. Pour ce faire, on calcule la limite de la log-Laplace renormalisée du couple

$$V_T = \left(\frac{X_T}{\sqrt{T}}, \frac{\int_0^T X_t^2 dt}{T} \right)$$

qui s'avère être escarpée lorsque $\theta < 0$. On peut alors en déduire un PGD pour le couple et conclure par une application directe du principe de contraction trivialisant ainsi le résultat de [FLP99]. Dans le cas $\theta = 0$ les choses se compliquent car 0 n'est plus dans l'intérieur du domaine. Il faut alors appliquer une version plus faible du théorème de Gärtner-Ellis qui nous donne un PGD faible, i.e. la borne supérieure dans la définition du PGD n'est maintenant vraie que sur les compacts au lieu des fermés de \mathbb{R}^d . On peut néanmoins s'en contenter et conclure par des arguments élémentaire afin de retrouver le résultat de [BCS12], modulo beaucoup moins de calculs. Enfin, dans le cas explosif $\theta > 0$, non seulement 0 n'est plus dans l'intérieur du domaine mais Λ n'a pas non plus son gradient qui tend vers l'infini au bord du domaine. On peut néanmoins s'en sortir une nouvelle fois en appliquant une version encore plus faible du théorème de Gärtner-Ellis et conclure une nouvelle fois par des calculs bien plus élémentaires que dans [BCS12].

Bibliographie

- [AIdR07] S. Ankirchner, P. Imkeller, and G. dos Reis. Classical and variational differentiability of BSDEs with quadratic growth. *Electron. J. Probab.*, **12**(53) :1418–1453 (electronic), 2007.
- [Ari03] M. Arisawa. Long time averaged reflection force and homogenization of oscillating Neumann boundary conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **20**(2) :293–332, 2003.
- [Bar94] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume **17** of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [BBC⁺19] C. Beck, S. Becker, P. Cheridito, A. Jentzen, and A. Neufeld. Deep splitting method for parabolic PDEs. *arXiv e-prints*, page arXiv :1907.03452, Jul 2019.
- [BC08a] B. Bouchard and J.-F. Chassagneux. Discrete-time approximation for continuously and discretely reflected BSDEs. *Stochastic Processes and their Applications*, **118**(12) :2269–2293, 2008.
- [BC08b] P. Briand and F. Confortola. BSDEs with stochastic Lipschitz condition and quadratic PDEs in Hilbert spaces. *Stochastic Process. Appl.*, **118**(5) :818–838, 2008.
- [BC08c] P. Briand and F. Confortola. Quadratic BSDEs with random terminal time and elliptic PDEs in infinite dimension. *Electron. J. Probab.*, **13** :no. 54, 1529–1561, 2008.
- [BCS12] B. Bercu, L. Coutin, and N. Savy. Sharp large deviations for the non-stationary Ornstein-Uhlenbeck process. *Stochastic Process. Appl.*, **122**(10) :3393–3424, 2012.
- [BDH⁺03] P. Briand, B. Delyon, Y. Hu, É. Pardoux, and L. Stoica. L^p solutions of backward stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, **108**(1) :109–129, 2003.
- [BDL05] G. Barles and F. Da Lio. On the boundary ergodic problem for fully nonlinear equations in bounded domains with general nonlinear Neumann boundary conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **22**(5) :521–541, 2005.
- [BDLLS08] G. Barles, F. Da Lio, P.-L. Lions, and P. E. Souganidis. Ergodic problems and periodic homogenization for fully nonlinear equations in half-space type domains with Neumann boundary conditions. *Indiana Univ. Math. J.*, **57**(5) :2355–2375, 2008.

- [BDM01] P. Briand, B. Delyon, and J. Mémin. Donsker-type theorem for BSDEs. *Electron. Comm. Probab.*, **6** :1–14 (electronic), 2001.
- [BE13] P. Briand and R. Élie. A simple constructive approach to quadratic BSDEs with or without delay. *Stochastic Process. Appl.*, 123(8) :2921–2939, 2013.
- [BEK13] P. Barrieu and N. El Karoui. Monotone stability of quadratic semimartingales with applications to unbounded general quadratic BSDEs. *Ann. Probab.*, 41(3B) :1831–1863, 2013.
- [Ben14] C. Bender. Backward SDEs driven by Gaussian processes. *Stochastic Process. Appl.*, 124(9) :2892–2916, 2014.
- [BEO17] K. Bahlali, M. Eddahbi, and Y. Ouknine. Quadratic BSDE with \mathbb{L}^2 -terminal data : Krylov’s estimate, Itô-Krylov’s formula and existence results. *Ann. Probab.*, 45(4) :2377–2397, 2017.
- [BH98] P. Briand and Y. Hu. Stability of BSDEs with random terminal time and homogenization of semilinear elliptic PDEs. *J. Funct. Anal.*, **155**(2) :455–494, 1998.
- [BH06] P. Briand and Y. Hu. BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value. *Probab. Theory Related Fields*, **136**(4) :604–618, 2006.
- [BH08] P. Briand and Y. Hu. Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions. *Probab. Theory Related Fields*, **141**(3-4) :543–567, 2008.
- [BH17] P. Briand and H. Hibon. Particles Systems for Mean Reflected BSDEs. *arXiv e-prints*, page arXiv :1712.07385, Dec 2017.
- [BHT18] R. Buckdahn, Y. Hu, and S. Tang. Uniqueness of solution to scalar BSDEs with $L \exp(\mu\sqrt{2 \log(1+L)})$ -integrable terminal values. *Electron. Commun. Probab.*, 23 :Paper No. 59, 8, 2018.
- [Bis76] J. M. Bismut. Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **4**(167) :xiii+130, 1976.
- [BL14] P. Briand and C. Labart. Simulation of BSDEs by Wiener chaos expansion. *Ann. Appl. Probab.*, 24(3) :1129–1171, 2014.
- [BLDR17] J. Bielagk, A. Lionnet, and G. Dos Reis. Equilibrium pricing under relative performance concerns. *SIAM J. Financial Math.*, 8(1) :435–482, 2017.
- [BR01] B. Bercu and A. Rouault. Sharp large deviations for the Ornstein-Uhlenbeck process. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 46(1) :74–93, 2001.
- [Bri07] P. Briand. Quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Habilitation à diriger des recherches, 2007.
- [BS12] C. Bender and J. Steiner. Least-Squares Monte Carlo for Backward SDEs. In R. A. Carmona, P. Del Moral, P. Hu, and N. Oudjane, editors, *Numerical Methods in Finance*, volume **12** of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 257–289. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [BT04] B. Bouchard and N. Touzi. Discrete-time approximation and Monte-Carlo simulation of backward stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, **111**(2) :175–206, 2004.

- [But03] J. C. Butcher. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2003.
- [CC14] J.-F. Chassagneux and D. Crisan. Runge-Kutta schemes for backward stochastic differential equations. *Ann. Appl. Probab.*, 24(2) :679–720, 2014.
- [CE10] S. N. Cohen and R. J. Elliott. Comparisons for backward stochastic differential equations on Markov chains and related no-arbitrage conditions. *Ann. Appl. Probab.*, 20(1) :267–311, 2010.
- [CE12] S. N. Cohen and R. J. Elliott. Existence, uniqueness and comparisons for BSDEs in general spaces. *Ann. Probab.*, 40(5) :2264–2297, 2012.
- [CEK11] J.-F. Chassagneux, R. Élie, and I. Kharroubi. A note on existence and uniqueness for solutions of multidimensional reflected BSDEs. *Electron. Commun. Probab.*, 16 :120–128, 2011.
- [CEK12] J. F. Chassagneux, R. Élie, and I. Kharroubi. Discrete-time approximation of multidimensional BSDEs with oblique reflections. *Ann. Appl. Probab.*, 22(3) :971–1007, 2012.
- [CFP16] A. Cosso, M. Fuhrman, and H. Pham. Long time asymptotics for fully nonlinear Bellman equations : a backward SDE approach. *Stochastic Process. Appl.*, 126(7) :1932–1973, 2016.
- [Cha14] J.-F. Chassagneux. Linear multistep schemes for BSDEs. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(6) :2815–2836, 2014.
- [Che97] D. Chevance. Numerical methods for backward stochastic differential equations. In *Numerical methods in finance*, Publ. Newton Inst., pages 232–244. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [CI19] E. Chasseigne and N. Ichihara. Ergodic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift. *SIAM J. Control Optim.*, 57(1) :23–52, 2019.
- [CK96] J. Cvitanic and I. Karatzas. Backward stochastic differential equations with reflection and Dynkin games. *The Annals of Probability*, pages 2024–2056, 1996.
- [CL08] R. Carmona and M. Ludkovski. Pricing asset scheduling flexibility using optimal switching. *Applied Mathematical Finance*, 15(5-6) :405–447, 2008.
- [CN14] P. Cheridito and K. Nam. BSDEs with terminal conditions that have bounded Malliavin derivative. *J. Funct. Anal.*, 266(3) :1257–1285, 2014.
- [CN15] P. Cheridito and K. Nam. Multidimensional quadratic and subquadratic BSDEs with special structure. *Stochastics*, 87(5) :871–884, 2015.
- [CPX17] A. Cosso, H. Pham, and H. Xing. BSDEs with diffusion constraint and viscous Hamilton-Jacobi equations with unbounded data. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 53(4) :1528–1547, 2017.
- [DAFH] T. De Angelis, G. Ferrari, and S. Hamadène. A note on a new existence result for reflected BSDEs with interconnected obstacles. arXiv :1710.02389v1.
- [Dar95] R. W. R. Darling. Constructing gamma-martingales with prescribed limit, using backwards SDE. *Ann. Probab.*, 23(3) :1234–1261, 1995.

- [DG06] F. Delarue and G. Guatteri. Weak existence and uniqueness for forward-backward SDEs. *Stochastic Process. Appl.*, **116**(12) :1712–1742, 2006.
- [DHB10] F. Delbaen, Y. Hu, and X. Bao. Backward SDEs with superquadratic growth. *Probab. Theory Related Fields*, pages 1–48, 2010.
- [DHT11] A. Debussche, Y. Hu, and G. Tessitore. Ergodic BSDEs under weak dissipative assumptions. *Stochastic Process. Appl.*, 121(3) :407–426, 2011.
- [DI93] P. Dupuis and H. Ishii. SDEs with oblique reflection on nonsmooth domains. *Ann. Probab.*, 21(1) :554–580, 1993.
- [DM06] F. Delarue and S. Menozzi. A forward-backward stochastic algorithm for quasi-linear PDEs. *Ann. Appl. Probab.*, **16**(1) :140–184, 2006.
- [DM08] F. Delarue and S. Menozzi. An interpolated stochastic algorithm for quasi-linear PDEs. *Math. Comp.*, **77**(261) :125–158 (electronic), 2008.
- [DP97] R. W. R. Darling and É. Pardoux. Backwards SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE. *Ann. Probab.*, 25(3) :1135–1159, 1997.
- [dRdC16] M. du Roy de Chaumaray. Large deviations for the squared radial Ornstein-Uhlenbeck process. *Teor. Veroyatn. Primen.*, 61(3) :509–546, 2016.
- [DT10] F. Delbaen and S. Tang. Harmonic analysis of stochastic equations and backward stochastic differential equations. *Probab. Theory Related Fields*, 146(1-2) :291–336, 2010.
- [DZ98] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [EHJK19] W. E, M. Hutzenthaler, A. Jentzen, and T. Kruse. On multilevel Picard numerical approximations for high-dimensional nonlinear parabolic partial differential equations and high-dimensional nonlinear backward stochastic differential equations. *J. Sci. Comput.*, 79(3) :1534–1571, 2019.
- [EK10] R. Élie and I. Kharroubi. Probabilistic representation and approximation for coupled systems of variational inequalities. *Statistics & probability letters*, 80(17) :1388–1396, 2010.
- [EKH97] N. El Karoui and S.-J. Huang. A general result of existence and uniqueness of backward stochastic differential equations. In *Backward stochastic differential equations (Paris, 1995–1996)*, volume 364 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 27–36. Longman, Harlow, 1997.
- [EKH03] N. El-Karoui and S. Hamadène. BSDEs and risk-sensitive control, zero-sum and nonzero-sum game problems of stochastic functional differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 107(1) :145–169, 2003.
- [EKKP⁺97] N. El Karoui, C. Kapoudjian, É. Pardoux, S. Peng, and M.-C. Quenez. Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's. *the Annals of Probability*, pages 702–737, 1997.

- [EKM97] N. El Karoui and L. Mazliak, editors. *Backward stochastic differential equations*, volume **364** of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1997. Papers from the study group held at the University of Paris VI, Paris, 1995–1996.
- [EKPQ97] N. El Karoui, S. Peng, and M. C. Quenez. Backward stochastic differential equations in finance. *Math. Finance*, **7**(1) :1–71, 1997.
- [EP19] R. Élie and D. Possamaï. Contracting theory with competitive interacting agents. *SIAM J. Control Optim.*, **57**(2) :1157–1188, 2019.
- [ET15] G. E. Espinosa and N. Touzi. Optimal investment under relative performance concerns. *Mathematical Finance*, **25**(2) :221–257, April 2015.
- [FdR11] C. Frei and G. dos Reis. A financial market with interacting investors : does an equilibrium exist ? *Math. Financ. Econ.*, **4**(3) :161–182, 2011.
- [FHT06] M. Fuhrman, Y. Hu, and G. Tessitore. On a class of stochastic optimal control problems related to BSDEs with quadratic growth. *SIAM J. Control Optim.*, **45**(4) :1279–1296 (electronic), 2006.
- [FHT09] M. Fuhrman, Y. Hu, and G. Tessitore. Ergodic BSDEs and optimal ergodic control in Banach spaces. *SIAM J. Control Optim.*, **48**(3) :1542–1566, 2009.
- [FHT19] S. Fan, Y. Hu, and S. Tang. On the uniqueness of solutions to quadratic BSDEs with non-convex generators and unbounded terminal conditions. *arXiv e-prints*, page arXiv :1905.12675, May 2019.
- [FLP99] D. Florens-Landais and H. Pham. Large deviations in estimation of an Ornstein-Uhlenbeck model. *J. Appl. Probab.*, **36**(1) :60–77, 1999.
- [Fre14] C. Frei. Splitting multidimensional BSDEs and finding local equilibria. *Stochastic Process. Appl.*, **124**(8) :2654–2671, August 2014.
- [FT02] M. Fuhrman and G. Tessitore. The Bismut-Elworthy formula for backward SDEs and applications to nonlinear Kolmogorov equations and control in infinite dimensional spaces. *Stoch. Stoch. Rep.*, **74**(1-2) :429–464, 2002.
- [FT04] M. Fuhrman and G. Tessitore. Infinite horizon backward stochastic differential equations and elliptic equations in Hilbert spaces. *Ann. Probab.*, **32**(1B) :607–660, 2004.
- [GIO⁺17] M. Grigorova, P. Imkeller, E. Offen, Y. Ouknine, and M.-C. Quenez. Reflected BSDEs when the obstacle is not right-continuous and optimal stopping. *Ann. Appl. Probab.*, **27**(5) :3153–3188, 2017.
- [GJ09] F. Gao and H. Jiang. Deviation inequalities and moderate deviations for estimators of parameters in an Ornstein-Uhlenbeck process with linear drift. *Electron. Commun. Probab.*, **14** :210–223, 2009.
- [GLW05] E. Gobet, J. P. Lemor, and X. Warin. A regression-based Monte Carlo method to solve backward stochastic differential equations. *Ann. Appl. Probab.*, **15**(3) :2172–2202, 2005.

- [GM10] E. Gobet and A. Makhlouf. L^2 -time regularity of BSDEs with irregular terminal functions. *Stochastic Process. Appl.*, **120**(7) :1105–1132, 2010.
- [Goz96] F. Gozzi. Global regular solutions of second order Hamilton-Jacobi equations in Hilbert spaces with locally Lipschitz nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, **198**(2) :399–443, 1996.
- [GPP96] A. Gégout-Petit and É. Pardoux. Équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies dans un convexe. *Stochastics Stochastics Rep.*, **57**(1-2) :111–128, 1996.
- [GRR15] A. M. Gassous, A. Răşcanu, and E. Rotenstein. Multivalued backward stochastic differential equations with oblique subgradients. *Stochastic Processes and their Applications*, **125**(8) :3170–3195, 2015.
- [GT16] E. Gobet and P. Turkedjiev. Approximation of backward stochastic differential equations using Malliavin weights and least-squares regression. *Bernoulli*, **22**(1) :530–562, 2016.
- [HIM05a] Y. Hu, P. Imkeller, and M. Müller. Partial equilibrium and market completion. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, **8**(4) :483–508, 2005.
- [HIM05b] Y. Hu, P. Imkeller, and M. Müller. Utility maximization in incomplete markets. *Ann. Appl. Probab.*, **15**(3) :1691–1712, 2005.
- [HJ07] S. Hamadène and M. Jeanblanc. On the starting and stopping problem : application in reversible investments. *Math. Oper. Res.*, **32**(1) :182–192, 2007.
- [HLOT⁺19] P. Henry-Labordère, N. Oudjane, X. Tan, N. Touzi, and X. Warin. Branching diffusion representation of semilinear PDEs and Monte Carlo approximation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, **55**(1) :184–210, 2019.
- [HLP97] S. Hamadene, J.-P. Lepeltier, and S. Peng. BSDEs with continuous coefficients and stochastic differential games. In *Backward stochastic differential equations*, pages 115–128. Harlow : Longman, 1997.
- [HM04] Y. Hu and J. Ma. Nonlinear Feynman-Kac formula and discrete-functional-type BSDEs with continuous coefficients. *Stochastic Process. Appl.*, **112**(1) :23–51, 2004.
- [HM13] S. Hamadène and M.A/ Morlais. Viscosity solutions of systems of PDEs with interconnected obstacles and switching problem. *Applied Mathematics & Optimization*, **67**(2) :163–196, 2013.
- [HM16] Y. Hu and P.-Y. Madec. A probabilistic approach to large time behaviour of viscosity solutions of parabolic equations with Neumann boundary conditions. *Appl. Math. Optim.*, **74**(2) :345–374, 2016.
- [HPBL18] C. Huré, H. Pham, A. Bachouch, and N. Langrené. Deep neural networks algorithms for stochastic control problems on finite horizon, part I : convergence analysis. *arXiv e-prints*, page arXiv :1812.04300, Dec 2018.
- [HT10] Y. Hu and S. Tang. Multi-dimensional BSDE with oblique reflection and optimal switching. *Probab. Theory Related Fields*, **147**(1-2) :89–121, 2010.

- [HT16] Y. Hu and S. Tang. Multi-dimensional backward stochastic differential equations of diagonally quadratic generators. *Stochastic Process. Appl.*, 126(4) :1066–1086, 2016.
- [HT18] Y. Hu and S. Tang. Existence of solution to scalar BSDEs with $L \exp(\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \log(1 + L))$ -integrable terminal values. *Electron. Commun. Probab.*, 23 :Paper No. 27, 11, 2018.
- [HZ10] S. Hamadène and J. Zhang. Switching problem and related system of reflected backward SDEs. *Stochastic Process. Appl.*, 120(4) :403–426, 2010.
- [IdR10] P. Imkeller and G. dos Reis. Path regularity and explicit convergence rate for BSDE with truncated quadratic growth. *Stochastic Process. Appl.*, 120(3) :348–379, 2010.
- [IdRZ10] P. Imkeller, G. dos Reis, and J. Zhang. Results on numerics for FBSDE with drivers of quadratic growth. In Alexander Chiarella, Carl ; Novikov, editor, *Contemporary Quantitative Finance*, page 440. Springer, 2010. Essays in Honour of Eckhard Platen.
- [IS13] N. Ichihara and S.-J. Sheu. Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with quadratic nonlinearity in gradients. *SIAM J. Math. Anal.*, 45(1) :279–306, 2013.
- [JKL17] A. Jamneshan, M. Kupper, and P. Luo. Multidimensional quadratic BSDEs with separated generators. *Electron. Commun. Probab.*, 22 :Paper No. 58, 10, 2017.
- [KMPZ10] I. Kharroubi, J. Ma, H. Pham, and J. Zhang. Backward SDEs with constrained jumps and quasi-variational inequalities. *Ann. Probab.*, 38(2) :794–840, 2010.
- [Kob97] M. Kobylanski. Résultats d’existence et d’unicité pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec des générateurs à croissance quadratique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(1) :81–86, 1997.
- [Kob00] M. Kobylanski. Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth. *Ann. Probab.*, 28(2) :558–602, 2000.
- [KP92] P. E. Kloeden and E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [KP16a] D. Kramkov and S. Pulido. Stability and analytic expansions of local solutions of systems of quadratic BSDEs with applications to a price impact model. *SIAM J. Financial Math.*, 7(1) :567–587, 2016.
- [KP16b] D. Kramkov and S. Pulido. A system of quadratic BSDEs arising in a price impact model. *Ann. Appl. Probab.*, 26(2) :794–817, 2016.
- [Kut04] Yury A. Kutoyants. *Statistical inference for ergodic diffusion processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2004.
- [KXŽ15] C. Kardaras, H. Xing, and G. Žitković. Incomplete stochastic equilibria with exponential utilities close to Pareto optimality. *arXiv.org*, page arXiv :1505.07224, May 2015.

- [LdRS15] A. Lionnet, G. dos Reis, and L. Szpruch. Time discretization of FBSDE with polynomial growth drivers and reaction-diffusion PDEs. *Ann. Appl. Probab.*, 25(5) :2563–2625, 2015.
- [LdRS18] A. Lionnet, G. dos Reis, and L. Szpruch. Convergence and qualitative properties of modified explicit schemes for BSDEs with polynomial growth. *Ann. Appl. Probab.*, 28(4) :2544–2591, 2018.
- [LS84] P.-L. Lions and A.-S. Sznitman. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37(4) :511–537, 1984.
- [LSM97] J. P. Lepeltier and J. San Martín. Backward stochastic differential equations with continuous coefficient. *Statist. Probab. Lett.*, 32(4) :425–430, 1997.
- [LSM98] J.-P. Lepeltier and J. San Martín. Existence for BSDE with superlinear-quadratic coefficient. *Stochastics Stochastics Rep.*, 63(3-4) :227–240, 1998.
- [LT15] P. Luo and L. Tangpi. Solvability of coupled FBSDEs with quadratic and superquadratic growth. *arXiv.org*, page arXiv :1505.01796, May 2015.
- [LZ17] G. Liang and T. Zariphopoulou. Representation of homothetic forward performance processes in stochastic factor models via ergodic and infinite horizon BSDE. *SIAM J. Financial Math.*, 8(1) :344–372, 2017.
- [Mad15] P. Y. Madec. Ergodic BSDEs and related PDEs with Neumann boundary conditions under weak dissipative assumptions. *Stochastic Process. Appl.*, 125(5) :1821–1860, 2015.
- [Man10] B. Mandelbrot. *Les objets fractals : Forme, hasard et dimension*. Flammarion, 2010.
- [Mas12] F. Masiero. Hamilton Jacobi Bellman equations in infinite dimensions with quadratic and superquadratic Hamiltonian. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32(1) :223–263, 2012.
- [MZ05] J. Ma and J. Zhang. Representations and regularities for solutions to BSDEs with reflections. *Stochastic processes and their applications*, 115(4) :539–569, 2005.
- [NR97] G. Namah and J.-M. Roquejoffre. Convergence to periodic fronts in a class of semilinear parabolic equations. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 4(4) :521–536, 1997.
- [Par99] É. Pardoux. BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs. In *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, volume 528 of *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 503–549. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [Pen91] S. Peng. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. *Stochastics Stochastics Rep.*, 37(1-2) :61–74, 1991.
- [Pen93] S. Peng. Backward stochastic differential equations and applications to optimal control. *Appl. Math. Optim.*, 27(2) :125–144, 1993.
- [Pen99] S. Peng. Monotonic limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of Doob–Meyers type. *Probability theory and related fields*, 113(4) :473–499, 1999.

- [PP90] É. Pardoux and S. Peng. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems Control Lett.*, **14**(1) :55–61, 1990.
- [PP92] É. Pardoux and S. Peng. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In *Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte, NC, 1991)*, volume **176** of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 200–217. Springer, Berlin, 1992.
- [PTW09] A. Porchet, N. Touzi, and X. Warin. Valuation of a power plant under production constraints and market incompleteness. *Mathematical Methods of Operations research*, **70**(1) :47–75, 2009.
- [PZ98] É. Pardoux and S. Zhang. Generalized BSDEs and nonlinear Neumann boundary value problems. *Probab. Theory Related Fields*, **110**(4) :535–558, 1998.
- [REK00] R. Rouge and N. El Karoui. Pricing via utility maximization and entropy. *Math. Finance*, **10**(2) :259–276, 2000. INFORMS Applied Probability Conference (Ulm, 1999).
- [Roy04] M. Royer. BSDEs with a random terminal time driven by a monotone generator and their links with PDEs. *Stoch. Stoch. Rep.*, **76**(4) :281–307, 2004.
- [RX15] S. Robertson and H. Xing. Large time behavior of solutions to semilinear equations with quadratic growth in the gradient. *SIAM J. Control Optim.*, **53**(1) :185–212, 2015.
- [Tev08] R. Tevzadze. Solvability of backward stochastic differential equations with quadratic growth. *Stochastic Process. Appl.*, **118**(3) :503–515, 2008.
- [XŽ18] H. Xing and G. Žitković. A class of globally solvable Markovian quadratic BSDE systems and applications. *Ann. Probab.*, **46**(1) :491–550, 2018.
- [Zha04] J. Zhang. A numerical scheme for BSDEs. *Ann. Appl. Probab.*, **14**(1) :459–488, 2004.