



HAL
open science

Topologie des variétés de représentations de groupes fuchsien

Florent Schaffhauser

► **To cite this version:**

Florent Schaffhauser. Topologie des variétés de représentations de groupes fuchsien. Mathématiques [math]. Université de Strasbourg, IRMA UMR 7501, 2019. tel-02394282v2

HAL Id: tel-02394282

<https://hal.science/tel-02394282v2>

Submitted on 15 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

**INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE**

UMR 7501

Strasbourg

Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Florent Schaffhauser

**Topologie des variétés de représentations de
groupes fuchsien**

Soutenu le Vendredi 13 décembre 2019
devant la commission d'examen

Olivier Guichard (Strasbourg), garant
Carlos Simpson (Nice), rapporteur
Richard Wentworth (Maryland), rapporteur
Anna Wienhard (Heidelberg), rapporteur
Carlo Gasbarri (Strasbourg), examinateur
Frank Loray (CNRS, Rennes), examinateur
Vincent Koziarz (Bordeaux), examinateur
Jean-Yves Welschinger (CNRS, Lyon), examinateur

irma.math.unistra.fr

Florent Schaffhauser

TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS DE
REPRÉSENTATIONS DE
GROUPES FUCHSIENS

MÉMOIRE D'HABILITATION À
DIRIGER DES RECHERCHES

Florent Schaffhauser

Université de Strasbourg – Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA) UMR 7501,
7 rue René Descartes, 67000 Strasbourg, France.

TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS DE REPRÉSENTATIONS DE
GROUPES FUCHSIENS

MÉMOIRE D'HABILITATION À
DIRIGER DES RECHERCHES

Florent Schaffhauser

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	11
1. Introduction	13
1.1. Contenu du mémoire / Overview	13
1.1.1. Moduli spaces of real and quaternionic vector bundles	14
1.1.1.1. Connected components	14
1.1.1.2. The Narasimhan-Seshadri correspondence	16
1.1.1.3. Mod 2 Betti numbers and construction of maximal varieties	19
1.1.2. Hitchin components for orbifold fundamental groups	24
1.1.2.1. Higher Teichmüller Spaces	24
1.1.2.2. Analytic parameterization of Hitchin components	26
1.1.2.3. Geometric properties and applications	27
1.2. Liste des travaux réalisés depuis la thèse / List of publications	28
2. Aspects orbifolds de la correspondance de Hodge non-abélienne	31
2.1. L'espace de Betti d'un orbifold	31
2.2. Systèmes locaux	37
2.3. Torseurs plats	40
2.4. Réductions harmoniques	44
2.5. Torseurs de Higgs	48
3. Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques réelles	55
3.1. Aspects différentiels	56
3.1.1. Classification topologique	56
3.1.2. Connexions invariantes	57
3.1.3. La fonctionnelle de Yang-Mills	58
3.2. Aspects algébriques	61
3.3. Topologie des champs de modules de fibrés réels	64
3.3.1. Champs de modules de fibrés semistables	64
3.3.2. L'espace classifiant du groupe de jauge	67
4. Espaces de Teichmüller Supérieurs pour les orbifolds	75
4.1. Orbi-surfaces hyperboliques	75
4.2. Composantes de Hitchin	77
4.3. Paramétrisation analytique et calcul de la dimension	80
4.4. Applications	84
4.4.1. Rigidité	84
4.4.2. Fibrés de Higgs cycliques	85

4.4.3. Structures projectives sur les variétés de Seifert	86
4.4.4. Orbifolds à bord	87
5. Perspectives	89
5.1. Aspects orbifolds de la correspondance de Hodge non abélienne	89
5.1.1. Fibrés paraboliques sur un orbifold	89
5.1.2. Stabilité des toreseurs plats et de Higgs	89
5.1.3. Géométrie des espaces de modules de toreseurs de Higgs	90
5.2. Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques réelles	90
5.2.1. Topologie des champs de modules	90
5.2.2. Variétés réelles maximales et Galois-maximales	90
5.2.3. La formule de Laumon et Rapoport sur le corps des réels	91
5.3. Espaces de Teichmüller supérieurs pour les orbifolds	91
5.3.1. Composantes de Hitchin pour des groupes déployés à centre non trivial	91
5.3.2. Composantes maximales	91
5.3.3. Représentations positives et composantes exotiques	92
Bibliographie	93

Strasbourg, le 30 novembre 2019

Je pense que, quand les professeurs ne font pas un effort pour expliquer d'où viennent leurs idées, leur intuition (car maintenant, je ne crois plus que, dès le berceau, les hommes étaient prédestinés à savoir comme moi à ignorer) eh bien, ils pratiquent, délibérément ou non, une attitude raciste et sexiste à l'égard des catégories qui n'ont pas baigné toute leur vie dans la culture mathématique et qui n'ont aucun autre moyen de savoir, hors de l'enseignement, d'où viennent les idées en cours.

Michèle VERGNE, *Devenir mathématicienne* (1975) ⁽¹⁾

*Es desaconsejable la escritura,
a menos de que no se pueda ser feliz haciendo otra cosa.*

Pilar QUINTANA

1. Disponible sur <https://webusers.imj-prg.fr/~michele.vergne/ecritsdivers/devenirMath.pdf>. Voir aussi le site *Images des maths* : <http://images.math.cnrs.fr/Michele-vergne-en-1974?lang=fr>.

REMERCIEMENTS

Ce mémoire n'aurait jamais vu le jour sans la bienveillance à mon égard d'Olivier Guichard, qui n'a jamais douté (crois-je savoir!) de mes capacités à m'acquitter de cette formalité. Son jugement acéré m'a plusieurs fois tiré des moments de confusion mathématique dans lequel un isolement excessif m'avait plongé et son influence sur ce travail a été très positive. Je lui sais gré d'avoir accepté d'être l'hôte de mon projet de recherche *Marie Curie* et de m'avoir proposé de postuler à un *Fellowship* de l'USIAS, ce qui m'a permis de passer deux ans à l'IRMA de septembre 2018 à août 2020. Ce séjour a d'ailleurs été le catalyseur des pages qui vont suivre. Quelques collègues, en particulier, ont joué par leurs encouragements un rôle moteur tout au long de l'année 2019. Je pense notamment à Thomas Delzant et à Pierre Py, qui ont su canaliser mes efforts dans les moments clés. Pierre Guillot, Viktoria Heu, Nicolas Juillet et Ana Rechtman m'ont également beaucoup aidé, en répondant à mes interrogations ponctuelles et intempestives avec toute la gentillesse qu'ils montrent toujours et à tous tout au long de l'année. Nalini Anantharaman, Giuseppe Ancona, Yann Bugeaud, Charles Frances, Vladimir Fock, Carlo Gasbarri, Viatcheslav Kharlamov, Florence Lecomte, Emmanuel Opshtein, Athanase Papadopoulos, Sheila Sandon et Christine Vespa, enfin, ont tous eu un mot gentil ou d'encouragement à un moment ou à un autre et cela m'a touché sans doute au-delà de ce que j'ai laissé transparaître sur le vif.

Et puis il y a ceux qui, comme moi, vont encore par monts et par vaux ou sont tout juste installés quelque part ! Les camarades de bureau, Georgios Kydonakis (avec qui l'expression *calme olympien* prend tout son sens...), Guillaume Klein et Jérémy Daniel, ont rendu le quotidien à l'UFR extrêmement plaisant et divertissant. Sans oublier bien sûr Thibaut Delcroix, qui a su trouver les mots pour m'encourager et me sortir de l'ornière lors d'un moment de doute sur la forme à donner à ce mémoire. Un grand merci à toi, Thibaut ! J'ai également eu la chance d'arriver à l'IRMA en même temps que Federica Fanoni et Martin Vogel, ce qui nous a (crois-je savoir, là encore !) naturellement rapprochés. *Abyssinia forever* ;-) C'est dommage que vous ne puissiez pas être là le jour J mais je ne doute pas du fait que nous nous rattraperons très vite ! Et pour finir, la bonne humeur et l'ouverture d'esprit qui règnent dans le "couloir des doctorants" de l'UFR m'ont également fait du bien, tout au long de l'année écoulée.

Et puisque le jour de la soutenance approche, je souhaite profiter de ces lignes pour remercier les membres du jury d'avoir bien voulu en faire partie. Anna Wienhard a non seulement accepté de lire le manuscrit et d'écrire un rapport mais a également soutenu sur le long terme mon projet de ré-intégration *Marie Curie*, grâce auquel j'ai pu passer du temps à Heidelberg, interagir avec les autres membres du groupe de recherche d'Anna et en particulier collaborer avec Daniele Alessandrini et Gye-Seon Lee. Je l'en remercie vivement. Richard Wentworth a suivi ma trajectoire de recherche depuis son tout début, lors d'un séjour à Baltimore en 2002. Et il a toujours été là pour discuter de maths, m'encourager à poursuivre inlassablement mes efforts et reconnaître mes succès. Je lui dois beaucoup et je suis très heureux qu'il ait accepté d'écrire un rapport sur ce mémoire. Merci pour tout, Richard. Carlos Simpson, enfin, m'a fait l'honneur d'accepter, lui aussi, de lire ce mémoire et d'écrire un rapport sur son contenu. Ses articles sur la

théorie de Hodge non abélienne sont une source constante d'inspiration pour moi comme pour de nombreuses autres personnes et je suis fier d'essayer de suivre la voie qu'il a tracée. Je remercie également les examinateurs externes, Vincent Koziarz, Frank Loray et Jean-Yves Welschinger d'avoir bien voulu faire partie du jury et venir à Strasbourg pour la soutenance. Je suis sûr que vos remarques et questions me permettront d'approfondir encore les notions développées dans ce mémoire. Et puisqu'on en revient toujours aux Strasbourgeois, qu'il me soit permis de remercier une nouvelle fois Olivier Guichard et Carlo Gasbarri. Le premier pour avoir accepté d'être le garant d'habilitation d'un grand angoissé existentiel, et le second pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury en tant qu'examinateur interne : ton attitude et ta perspective sur les maths me font sentir moins seul et je tâcherai de me montrer à la hauteur de ton exemple.

Je ne serais bien sûr pas arrivé jusqu'ici si je n'avais pas rencontré des collaborateurs et des collaboratrices aux nombreuses qualités mathématiques et humaines. En premier lieu, Melissa Liu, dont le savoir et la vision mathématiques m'impressionnent toujours autant : j'ai hâte d'ouvrir un nouveau chapitre dans notre recherche en commun. D'autres collaborations ont suivi, qui se sont concrétisées de belle manière et se poursuivent aujourd'hui, avec Gye-Seon Lee, Daniele Alessandrini, Indranil Biswas et Victoria Hoskins. Pouvoir parler de maths avec chacun d'entre eux représente une chance que je mesure tous les jours. Et puisqu'on sait tous que faire des maths ne se réduit pas, loin s'en faut, à juxtaposer des noms sur un article, je veux aussi profiter de ces quelques lignes pour remercier d'autres collègues, toujours enclins à partager leurs idées et à expliquer les notions fécondes qu'ils manipulent dans leurs travaux. Je pense en particulier à Jochen Heinloth, Alexander Schmitt, Erwan Brugallé ou Ilia Itenberg. Il y en a d'autres (mais pas tant que ça !) que j'oublie ici sous le coup de l'émotion. J'espère qu'ils et elles me le pardonneront.

Quant à la famille et aux amis, *que dire que vous ne sachiez déjà* ⁽²⁾ ? Je vous aime ! Mes parents Roland et Marie-Christine, mon petit frère JM et ma belle-soeur Marie, les trois phénomènes Leopold, Lucille et Augustin, vous m'accompagnez tous les jours. Anis, Delphine, Sacha et Elliot, ensemble pour la vie, d'Alger à Manille. Tom mon vieux Tom, mon *travel buddy* préféré, son épouse Delphine et leurs deux filles Salomé et Jeanne. Aude et Mathieu et leurs enfants, Anna et Tristan. Hakim, Béatrice et Charlotte. Marion, Benjamin, Romane et Louise. Céline. Les amis du Japon : 谷口さん、洋平、いつもありがとうね。これからも、よろしくお願ひします！ Et ceux de (la Grande) Colombie : Alexander y Alejandra, Alf y Ana María, Marco, Coco, Mario, Sandra, Henry, Alsonso, Carlos, Mayita, Carlos y Marcela, Esperanza y Evelyn, Valeria y Daniel. Merci de me laisser faire partie de votre monde. Y mi mundo personal es usted, señora Natalia. La amo. No se le vaya a olvidar, se lo pide también Milagros.

2. Je ne peux pas vous raconter mes vacances, je n'en prends jamais !

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Contenu du mémoire / Overview

In this memoir, we give an exposition of our research of the past nine years on moduli spaces, focusing on results that have to do with topological properties of representation spaces of fundamental groups of orbi-surfaces. The two main examples we study are located, in a sense, at “opposite ends of the spectrum” : the first topic follows up on the line of research opened in [Sch05, Sch08] and is concerned with *unitary* representations of fundamental groups of smooth real algebraic curves (Chapter 3 of this memoir), while the second one is a generalization of the notion of Higher Teichmüller Space to the case of 2-dimensional orbifolds and focuses on representations of orbifold fundamental groups in *split real forms* of adjoint groups of simple complex Lie algebras (Chapter 4). The key to our study, in both cases, is the Non-Abelian Hodge Correspondence (NAHC) of Hitchin, Donaldson, Corlette and Simpson ([Hit87b, Don87, Cor88, Sim88]) : it provides an equivalence between representations of cocompact Fuchsian groups and orbifold Higgs bundles, which unlocks the door to an understanding of the basic topological properties of moduli spaces of such objects. Here, by Fuchsian group we mean a discrete subgroup of the full isometry group of the hyperbolic plane, which leads naturally to analytic objects (curves and bundles) of an orbifold nature, possibly defined over the field of real numbers. Initially, when dealing with real algebro-geometric objects, our approach of these problems was strictly equivariant : we would see a real curve as complex curve with a real structure and proceed from there ([Sch11]). This led to the study of group actions on moduli spaces, in particular Galois actions ([Sch12]), which is indeed sufficient to study vector bundles over real algebraic curves efficiently ([LS13, Sch17]). The equivariant point of view is very natural and widely spread in moduli theory ([DR77, Wan93, Ho04]). It has for instance been applied to the study of representations of fundamental groups of non-orientable surfaces in the mid 2000s ([Ho04, HL03, HL05, Bai10, Pal10]) and recently found a new impetus, coming from the fact that these equivariant techniques give rise to geometrically meaningful special submanifolds called *branes* in hyper-Kähler manifolds ([BGP15, HS18, FJM17, FPN17, FGPN17]). As a matter of fact, this is a direction that we have also pursued, both in the context of bundles ([Sch19a]) and quiver representations ([HS19, HS20]). After some time, though, it became clear that there was cause for a more intrinsic approach to the correspondence between bundles and representations over Riemann surfaces with symmetry, one in which the equivariant perspective would only be used as a technical step, and this is the point of view for which we advocate in Chapter 2 of this memoir. Hopefully, the synthesis we suggest will make it clear how the notion of an orbifold bundle can help generalize the by now familiar (but still daunting) Non-Abelian Hodge Correspondence and, in the process, answer a question of Simpson’s on the Dolbeault space corresponding to the Betti space defined by coefficient groups equipped with a non-trivial action of the fundamental group. While our motivation stems from differential geometry (representation spaces of Fuchsian groups), it is the input from algebraic geometry that

provides the adequate language and appropriate tools to study our problem. This is, of course, a general trend in mathematics of the early 21st century, and this memoir is no exception. We do hope, however, that it will help popularize among differential geometers certain concepts from algebraic geometry that have been around for more than fifty years (namely group schemes and torsors under these), but whose differential geometric counterparts (e.g. orbifold group bundles and their principal homogeneous spaces), are, as far I have witnessed, not of common use in the field.

We briefly summarize below the contents of the articles on which this memoir is based and that will be presented in greater detail in Chapters 2, 3 and 4. As we shall see, we have given a lot of importance, over the years, to the computation of certain invariant quantities naturally attached to the spaces under study, be it the number of connected components and mod 2 Betti numbers of moduli spaces of real and quaternionic vector bundles, or the dimension of Hitchin components for orbifold fundamental groups. Applications of the explicit formulas that we have obtained will be presented in Chapters 3 and 4.

1.1.1. Moduli spaces of real and quaternionic vector bundles. —

1.1.1.1. Connected components. — In [Sch08], we generalized Falbel and Wentworth’s notion of decomposable representations of the fundamental group of a punctured sphere ([FW06]) to surfaces of higher genus and we studied the associated real structure of the space of unitary representations using methods from quasi-Hamiltonian geometry ([AMM98]) : the use of group-valued momentum maps enabled us to stick to a strictly finite-dimensional setting and show the existence of tuples of unitary matrices whose product is the identity and which satisfy an additional reality condition by proving a quasi-Hamiltonian analogue of the real convexity theorem of O’Shea and Sjamaar ([OS00]). In [Sch11], we went back to the infinite-dimensional Hamiltonian picture of Atiyah and Bott ([AB83]) to provide a vector bundle interpretation of the Lagrangian submanifolds constructed in [Sch08], hereby answering a question of H. Bursztyn and A. Alekseev on the geometric nature of decomposable representations.

The key geometric notion to make sense of this interpretation is that of a real vector bundle in the sense of Atiyah ([Ati66]), which is an equivariant vector bundle over a complex curve equipped with a real structure. Gauge theory then gave us a way to construct moduli spaces of such bundles ([Sch11]) and relate them to the set of real points of the usual moduli variety of semistable vector bundles of fixed rank and degree over a complex projective curve with real structure ([Sch12]). As a matter of fact, using the related notion of quaternionic (sometimes also called symplectic) vector bundle ([Dup69]), we were able to give a modular interpretation of the set of real points of that variety. This was complemented by a careful analysis of the notion of stability for real and quaternionic vector bundles, which is not the same as geometric stability (=stability of the associated complex vector bundle). This has to be taken into account if one wants to obtain an analogue of a result of Sehasdri’s on the existence of Jordan-Hölder filtrations for semistable real and quaternionic vector bundles ([Sch12]). Using infinite-dimensional Morse-theoretic results previously obtained by Biswas, Huisman and Hurtubise ([BHH10]), we deduced from the above modular interpretation a way of counting the connected components of the set of real points of moduli varieties of geometrically stable vector bundles over a real projective curve.

To fix notation, let (X, σ) be a *Klein surface*, i.e. a pair consisting of a compact Riemann surface X , of genus g , and an anti-holomorphic involution $\sigma : X \rightarrow X$. Let $n \geq 0$ be the number of connected components of the real locus $X^\sigma := \text{Fix}(\sigma) \subset X$ and let $r \geq 1$ and $d \in \mathbb{Z}$ be integers. We denote by $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)$ (respectively, $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)$) the moduli variety parameterizing geometrically stable (respectively, semistable) vector bundles of rank r and degree d over X , equipped with the real structure induced by $\mathcal{E} \mapsto \overline{\sigma^* \mathcal{E}}$. The sets of real points of these varieties will be denoted respectively by $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)^\sigma$ and $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)^\sigma$.

Theorem 1.1. — [Sch12] For all $g \geq 2$, the set of real points of $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)$ decomposes in the following way :

$$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)^{\sigma} \simeq \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d) \sqcup \mathcal{N}_{\mathbb{H}}(r, d)$$

where $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d)$, respectively $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(r, d)$, is the set of isomorphism classes of geometrically stable real, respectively, quaternionic, vector bundles of rank r and degree d over (X, σ) . Moreover :

1. If $n > 0$, then $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d)$ has 2^{n-1} connected components, and two real vector bundles (\mathcal{E}_1, τ_1) and (\mathcal{E}_2, τ_2) lie in a same connected component of $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d)$ if and only if the vector bundles $\mathcal{E}_1^{\tau_1}$ and $\mathcal{E}_2^{\tau_2}$ over X^{σ} have the same first Stiefel-Whitney class.
2. If $n = 0$, then $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d)$ is connected. And it is non-empty if and only if $d = 2d'$.
3. $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(r, d)$ is connected. If $n > 0$, it is non-empty if and only if $r = 2r'$ and $d = 2d'$. And if $n = 0$, it is non-empty if and only if $d + r(g - 1) \equiv 0 \pmod{2}$.

Remark 1.2. — It is implicit in the statement above that two geometrically stable real or quaternionic vector bundles which are isomorphic as complex vector bundles are in fact isomorphic as real or quaternionic vector bundles, which is an artefact of Hilbert's 90 Theorem. In collaboration with Victoria Hoskins ([HS19, HS20]), we have proposed a group cohomology framework to analyze such phenomena (group actions on moduli spaces and the modular interpretation of the fixed-point set) in the quiver setting, which is more tractable than the vector bundle case ([Sch19a]).

Theorem 1.1 is the main result of [Sch12]. It extends results of Gross and Harris on Picard varieties of real projective curves ([GH81]) to the arbitrary rank case. If r and d are not coprime, the corresponding statement does not hold for $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)^{\sigma}$, since a strictly semistable vector bundle \mathcal{E} such that $\overline{\sigma^* \mathcal{E}} \simeq \mathcal{E}$ may admit both a real and a quaternionic structure, e.g. $\mathcal{E} \simeq \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$ where (\mathcal{L}, τ) is a real line bundle, then \mathcal{E} admits the real structure $\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$ and the quaternionic structure $\begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$.

In joint work with Indranil Biswas, we have studied the analogous situation in the genus 1 case. The upshot is that, in this case, it is possible to completely identify the moduli space $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)$ as a real algebraic variety.

Theorem 1.3. — [BS16] If $g = 1$ and $h := r \wedge d$ is the g.c.d. of r and d , we have the following isomorphisms of real algebraic varieties :

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d) \simeq_{\mathbb{R}} \begin{cases} \text{Sym}^h(X) & \text{if } X^{\sigma} \neq \emptyset, \\ \text{Sym}^h(X) & \text{if } X^{\sigma} = \emptyset \text{ and } \frac{d}{h} \text{ is odd,} \\ \text{Sym}^h(\text{Jac}(X)) & \text{if } X^{\sigma} = \emptyset \text{ and } \frac{d}{h} \text{ is even,} \end{cases}$$

where $\text{Sym}^h(X)$ denotes the symmetric product and $\text{Jac}(X)$ is the Jacobian variety of X .

This extends classical results of Atiyah [Ati57b], as revisited by Loring Tu [Tu93], to the case of real elliptic curves. Contrary to the higher genus case, for $g = 1$ there are no geometrically stable vector bundles of rank r and degree d if r and d are not coprime, i.e. for $g = 1$, $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d) = \emptyset$ unless $r \wedge d = 1$. The situation can then be summed up as follows.

Theorem 1.4. — [Sch12, BS16] The number of connected components of $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)^{\sigma}$ is given by the following tables, where g is the genus of X and $n \in \{0; \dots; g + 1\}$ is the number of

connected components of X^σ :

$\mathbf{n} > \mathbf{0}$	$r \wedge d = 1$	$r \wedge d \neq 1$
$g = 1$	2^{n-1} (= n in this case)	0
$g \geq 2$	2^{n-1}	$\begin{cases} 2^{n-1} & \text{if } r \text{ odd or } d \text{ odd,} \\ 2^{n-1} + 1 & \text{if } r \text{ even and } d \text{ even.} \end{cases}$

$\mathbf{n} = \mathbf{0}$	$r(g-1)$ is odd	$r(g-1)$ is even
d odd	1	0
d even	1	$\begin{cases} 2 & \text{if } g \geq 2 \text{ or } (g = 1 \text{ and } r \wedge d = 1) \\ 0 & \text{if } g = 1 \text{ and } r \wedge d \neq 1 \end{cases}$

Remark 1.5. — For $g = 0$, a theorem due to Grothendieck ([Gro57]) shows that $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d) = \emptyset$ if $r \geq 2$, and reduces to a point if $r = 1$. In the latter case, the real locus $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(1, d)^\sigma$ is also a point, regardless of the real structure with which $\mathbb{C}\mathbf{P}_1$ is endowed. The modular interpretation of that real locus, however, depends on the real structure chosen on the Riemann sphere : if the real structure on $\mathbb{C}\mathbf{P}_1$ has real points then the unique line bundle of degree d on $\mathbb{C}\mathbf{P}_1$ is real ; otherwise it is real if $d = 2d'$ and quaternionic if $d = 2d' + 1$.

1.1.1.2. *The Narasimhan-Seshadri correspondence.* — It is desirable to interpret the results of Section 1.1.1.1 in terms of representations of discrete groups. Indeed, if the Riemann surface X is of genus $g \geq 2$, the Narasimhan-Seshadri theorem ([NS65]) asserts the existence of a homeomorphism

$$(1.1.1) \quad \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d) \simeq \text{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_d, \mathbf{U}(r)) / \mathbf{U}(r)$$

between the moduli space of semistable vector bundles of rank r and degree d over the Riemann surface X and the space of unitary representations of a certain central extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_d \longrightarrow \pi_1 X \longrightarrow 1,$$

whose isomorphism class is entirely determined by $d \in \text{H}^2(\pi_1 X; \mathbb{Z}) \simeq \text{H}^2(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Geometrically, π_d is isomorphic to the fundamental group of a Seifert fibered space over X , namely the sphere bundle $S(L)$ (with respect to an arbitrary Hermitian metric) of the unique smooth line bundle L of degree d over X , and a representation of π_d in $\mathbf{U}(r)$ is required to send the generator $1 \in \mathbb{Z}$ to the diagonal matrix $e^{i\frac{2\pi}{r}} I_r \in \mathbf{U}(r)$, hence the notation $\text{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_d; \mathbf{U}(r))$ in (1.1.1). In particular, a representation of π_d in $\mathbf{U}(r)$ induces a representation of $\pi_1 X$ in $\mathbf{PU}(r)$.

$$(1.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_d & \longrightarrow & \pi_1 X \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow e^{i\frac{2\pi}{r}} I_r & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{U}(1) & \longrightarrow & \mathbf{U}(r) & \longrightarrow & \mathbf{PU}(r) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Seifert proved in [Sei33] that the group $\pi_d = \pi_1(S(L))$ admitted the following presentation :

$$(1.1.3) \quad \pi_d \simeq \left\langle (a_i, b_i)_{1 \leq i \leq g}, h \mid [a_i, h] = [b_i, h] = 1 = h^{-d} \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right\rangle$$

When $d = 0$, one has $\pi_0 \simeq \mathbb{Z} \times \pi_1 X$ and in this case the map $\varrho \mapsto \varrho|_{\pi_1 X}$ induces a homeomorphism

$$\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_0, \mathbf{U}(r)) / \mathbf{U}(r) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1 X; \mathbf{U}(r)) / \mathbf{U}(r).$$

Moreover, through the isomorphism (1.1.1), stable vector bundles of rank r and degree d correspond to irreducible representations of π_d in $\mathbf{U}(r)$:

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, 0) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}, \mathrm{irr}}(\pi_d; \mathbf{U}(r)) / \mathbf{U}(r)$$

and the assumption that $g \geq 2$ guarantees that this space is non-empty ([NS65]).

The Narasimhan-Seshadri theorem still holds if $g = 1$ and $d = 0$: as $\pi_1 X$ is Abelian in this case, one has

$$\mathrm{Hom}(\pi_1 X; \mathbf{U}(r)) / \mathbf{U}(r) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1 X; \mathbf{T}^r) / \mathfrak{S}_r,$$

where $\mathbf{T}^r \simeq \mathbf{U}(1)^r$ is the standard maximal torus of $\mathbf{U}(r)$ with associated Weyl group \mathfrak{S}_r , and it was proved independently in [FMW98] and in [Las98] that this space is homeomorphic to $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, 0)$ when X is an elliptic curve. If $r > 1$, there are no irreducible representations of $\pi_1 X$ in this case, and indeed there are no stable bundles of degree 0 and rank $r \geq 2$ on an elliptic curve ([Tu93]).

The goal of [Sch17] was to obtain an analogue of the above picture for real and quaternionic vector bundles over a compact Klein surface (X, σ) of genus $g \geq 2$. The case $g = 1$ was later dealt with in [BS16]. To that end, we generalized in [Sch17] the usual construction $\varrho \mapsto \mathcal{E}_{\varrho}$ of the polystable vector bundle associated to a unitary representation of $\pi_1 X$ to the case where the latter is assumed to extend to a unitary representation of the orbifold fundamental group $\pi_1(X / \langle \sigma \rangle)$, in the sense that the commutative diagram, which first appeared in [BHH10], is commutative :

$$(1.1.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1 X & \longrightarrow & \pi_1(X / \langle \sigma \rangle) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varrho & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{U}(r) & \longrightarrow & \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

The observation in [Sch17] is that, given $\varrho : \pi_1(X / \langle \sigma \rangle) \rightarrow \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ as above, the action of $\pi_1(X / \langle \sigma \rangle)$ on the product bundle $\tilde{X} \times \mathbb{C}^r$ induces a real structure on $\mathcal{E}_{\varrho|_{\pi_1 X}}$, because $\pi_1(X / \langle \sigma \rangle) / \pi_1 X \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. And the result is that any polystable real vector bundle of degree 0 is isomorphic to a bundle of the form \mathcal{E}_{ϱ} for some $\varrho : \pi_1(X / \langle \sigma \rangle) \rightarrow \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ as above, which induces a homeomorphism

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, 0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1 X; \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) / \mathbf{U}(r),$$

between the space $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, 0)$ of S -equivalence classes of semistable real vector bundles of rank r and degree 0 and the space $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1 X; \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ of representations ϱ as in Diagram (1.1.4). This had been previously proved (using a different approach) by Biswas, Huisman and Hurtubise in [BHH10], who also proved an analogous statement for the moduli space $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, 0)$ of quaternionic vector bundles, for which they replaced group homomorphisms $\varrho \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1 X; \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ by certain twisted maps ϱ between these groups. In [Sch17], we replaced instead the target group $\mathbf{W}^+(r) := \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ by another extension :

$$(1.1.5) \quad 1 \longrightarrow \mathbf{U}(r) \longrightarrow \mathbf{W}^-(r) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

(the only non-trivial one, corresponding to the element $-1 \in \mathbb{H}^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathcal{Z}(\mathbf{U}(r))) \simeq \{\pm 1\}$, where $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ acts on the coefficients $\mathcal{Z}(\mathbf{U}(r)) \simeq \mathbf{U}(1)$ by complex conjugation) and obtained a homeomorphism

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, 0) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1(X/\langle\sigma\rangle); \mathbf{W}^-(r))/\mathbf{U}(r).$$

Moreover, we generalized this to the case of real and quaternionic bundles of degree $d \neq 0$ by considering the orbifold fundamental group of the real circle bundle $(S(L), \tau_L)$ as above, (L, τ_L) being a smooth real line bundle of degree d . The orbifold fundamental group $\pi_1(S(L)/\langle\tau_L\rangle)$ is now a *non-central* extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S(L)/\langle\tau_L\rangle) \longrightarrow \pi_1(X/\langle\sigma\rangle) \longrightarrow 1,$$

since here $\pi_1(X/\langle\sigma\rangle)$ acts non-trivially on \mathbb{Z} , via the canonical homomorphism $\pi_1(X/\langle\sigma\rangle) \longrightarrow \langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and the involution $n \mapsto -n$ on \mathbb{Z} . An extra difficulty arises here, to show that the group $\pi_1(S(L)/\langle\tau_L\rangle)$, this time as an extension

$$1 \longrightarrow \pi_1(S(L)) \longrightarrow \pi_1(S(L)/\langle\tau_L\rangle) \longrightarrow \langle\tau_L\rangle \longrightarrow 1,$$

depends only on $d = \deg L$, not on the full isomorphism class of (L, τ_L) as a smooth real bundle, but this follows from the fact that $\mathbb{H}^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ is trivial for the previous action of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on \mathbb{Z} ([Sch17, Remark 2.8]). Then, given a representation $\varrho : \pi_1(S(L)/\langle\tau_L\rangle) \longrightarrow \mathbf{W}^\pm(r)$ which is compatible with the projection to $\langle\tau_L\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in the sense of Diagram (1.1.4) and sends the generator $1 \in \mathbb{Z}$ to $e^{i\frac{2\pi}{r}} I_r \in \mathbf{W}^\pm(r)$, as in Diagram (1.1.2), we can construct a polystable real or quaternionic vector bundle of degree $d := \deg L$, and the main result of [Sch17] is that all such bundles come from a representation of that sort. In what follows, we denote by $\text{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}(\pi_1(S(L)/\langle\tau_L\rangle); \mathbf{W}^\pm(r))$ the set of such representations.

Theorem 1.6. — [Sch17] *Let (X, σ) be a compact Klein surface of genus $g \geq 2$. Then there are homeomorphisms*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, d) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}(\pi_1(S(L)/\langle\tau_L\rangle); \mathbf{W}^+(r))/\mathbf{U}(r)$$

and

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, d) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}(\pi_1(S(L)/\langle\tau_L\rangle); \mathbf{W}^-(r))/\mathbf{U}(r)$$

where $\mathbf{W}^+(r) := \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ with respect to the involution $\theta(g) = \bar{g}$ on $\mathbf{U}(r)$, and $\mathbf{W}^-(r)$ is the only non-trivial extension of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ by $\mathbf{U}(r)$ with respect to that same action.

Corollary 1.7. — *The homeomorphism type of the moduli spaces $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, d)$ and $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, d)$ depends only on the homeomorphism type of the topological surface $X/\langle\sigma\rangle$, not on the complex analytic structure of X .*

We recall that the homeomorphism type of the topological surface $X/\langle\sigma\rangle$ is entirely determined by three numbers : the genus g of X , the number $n \in \{0; \dots, g+1\}$ of connected components of X^σ , and the number $a \in \{0; 1\}$ which is 0 if $X \setminus X^\sigma$ is not connected (i.e. $X/\langle\sigma\rangle$ is orientable) and 1 if $X \setminus X^\sigma$ is connected (i.e. $X/\langle\sigma\rangle$ is not orientable). When $X^\sigma \neq \emptyset$, Theorem 1.6 takes a more readable form, as it is expressed entirely in terms of the usual central extension π_d whose presentation was recalled in (1.1.3). To formulate it, let us denote by J the matrix of the linear transformation $(x, y) \mapsto (y, -x)$ of \mathbb{C}^{2r} .

Theorem 1.8. — [Sch17] *Choose a base point $x \in X^\sigma$ and consider the induced action of $\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on $\pi_1 X$. Denote by $\text{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_d; \mathbf{U}(r))^{\sigma_{\mathbb{R}}}$, respectively $\text{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_d; \mathbf{U}(r))^{\sigma_{\mathbb{H}}}$, the space of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -equivariant representations, where $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ acts on $\mathbf{U}(r)$ via $\theta_{\mathbb{R}}(g) = \bar{g}$ in the real case, and via $\theta_{\mathbb{H}}(g) = J\bar{g}J^{-1}$ in the quaternionic case. Then there are homeomorphisms*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, d) \simeq \text{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_d; \mathbf{U}(r))^{\sigma_{\mathbb{R}}}/\mathbf{O}(r)$$

and

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, d) \simeq \text{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_d; \mathbf{U}(r))^{\sigma_{\mathbb{H}}}/\mathbf{Sp}(\frac{r}{2}).$$

A consequence of Theorem 1.8 is that we can define an obstruction map *à la* Goldman ([Gol88b])

$$\mathcal{W} : \text{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_d; \mathbf{U}(r))^{\sigma} / \mathbf{O}(r) \longrightarrow \mathbf{O}(1)^n,$$

where n is the number of connected components of X^{σ} , such that the non-empty fibers of \mathcal{W} are exactly the connected components of the representation space ([Sch17, Corollary 4.9]).

As for the genus 1 case, in collaboration with Indranil Biswas, we have proved the following analogue over \mathbb{R} of the results in [FMW98, Las98].

Theorem 1.9. — [BS16] *Let (X, σ) be a compact Klein surface of genus 1. Then the map*

$$\begin{aligned} \text{Jac}(X)^r &\longrightarrow \mathcal{M}(r, 0) \\ (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r) &\longmapsto \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_r \end{aligned}$$

induces an isomorphism of projective real algebraic varieties

$$\text{Jac}(X)^r / \mathfrak{S}_r \simeq_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, 0).$$

In view of the classical homeomorphism $\text{Jac}(X) \simeq \text{Hom}(\pi_1 X; \mathbf{U}(1))$, Theorem 1.9 shows that the Narasimhan-Seshadri homeomorphism $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, 0) \simeq \text{Hom}(\pi_1 X; \mathbf{U}(1)^r) / \mathfrak{S}_r$ over an elliptic curve is $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -equivariant. Note that if $X^{\sigma} \neq \emptyset$, then $\text{Jac}(X) \simeq_{\mathbb{R}} X$, so when (X, σ) is a real elliptic curve, the conclusion of Theorem 1.9 is that $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, 0) \simeq_{\mathbb{R}} X^r / \mathfrak{S}_r$.

1.1.1.3. Mod 2 Betti numbers and construction of maximal varieties. — Building on the number-theoretic approach of Harder and Narasimhan ([HN75]), which uses the Weil conjectures, Desale and Ramanan computed the rational Poincaré polynomial of $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)$ for r and d coprime ([DR75]). The key tool in both papers is the canonical filtration

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_{\ell} = \mathcal{E}$$

of a holomorphic vector bundle, now known as the Harder-Narasimhan (HN) filtration, which is uniquely characterized by the fact that the successive quotients $(\mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1})_{1 \leq i \leq \ell}$ are semistable with respective slopes

$$\mu(\mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_0) > \dots > \mu(\mathcal{E}_{\ell} / \mathcal{E}_{\ell-1}).$$

In [AB83], Atiyah and Bott used the remarkable properties of the Harder-Narasimhan filtration to develop a differential-geometric approach to the computation of the rational Betti numbers of the moduli space $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)$. They showed that, given a fixed C^{∞} complex vector bundle E of rank r and degree d , the affine space \mathcal{C} , consisting of all holomorphic structures (=Dolbeault operators) on E , admitted a stratification according to the *Harder-Narasimhan type* of the holomorphic structure, the latter being defined as the collection of topological invariants $(r_i, d_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ of the successive quotients $(\mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1})_{1 \leq i \leq \ell}$. Equivalently, the *Harder-Narasimhan type* of \mathcal{E} is by definition the tuple

$$(1.1.6) \quad \mu := \left(\frac{d_1}{r_1}, \dots, \frac{d_1}{r_1}, \dots, \frac{d_{\ell}}{r_{\ell}}, \dots, \frac{d_{\ell}}{r_{\ell}} \right)$$

where $\frac{d_i}{r_i}$ appears r_i times and

$$\frac{d_1}{r_1} > \dots > \frac{d_{\ell}}{r_{\ell}}.$$

Note that $d_1 + \dots + d_{\ell} = d$ and $r_1 + \dots + r_{\ell} = r$. This stratification was studied in detail by Shatz ([Sha77]) and, in [AB83], Atiyah and Bott showed that the Shatz stratification of \mathcal{C} is *equivariantly perfect* with respect to the action of the complex gauge group $\mathcal{G}_E := \text{Aut}(E)$ of E . This means that if we write

$$(1.1.7) \quad \mathcal{C} = \bigsqcup_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}} \mathcal{C}_{\mu}$$

where $I_{r,d}$ is the set of Harder-Narasimhan types μ and \mathcal{C}_μ is the space of holomorphic structures of type μ on E , then each stratum \mathcal{C}_μ is \mathcal{G}_E -invariant and the \mathcal{G}_E -equivariant rational Poincaré series $P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_\mu; \mathbb{Q})$ of \mathcal{C} is given by the formula

$$(1.1.8) \quad P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}; \mathbb{Q}) = \sum_{\mu \in I_{r,d}} t^{2d_\mu} P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_\mu; \mathbb{Q}),$$

where d_μ is the complex codimension of \mathcal{C}_μ in \mathcal{C} . This result is based on an observation in equivariant cohomology, sometimes called the Atiyah-Bott lemma, which says that, for equivariant perfection to hold, it suffices that, for each stratum \mathcal{C}_μ , the equivariant Euler class of the normal bundle to \mathcal{C}_μ in \mathcal{C} (which exists because that bundle is a *complex* vector bundle) be not a zero divisor in the \mathcal{G}_E -equivariant cohomology algebra of \mathcal{C} .

The stratification (1.1.7) has a unique open stratum \mathcal{C}_{ss} consisting of semistable holomorphic structures on E and corresponding to the Harder-Narasimhan type $\mu_{ss} := (\frac{d}{r}, \dots, \frac{d}{r})$. In what follows, we set $P_g(r, d) := P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q})$ and $Q_g(r) := P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$. To make Formula (1.1.8) recursive, the missing ingredient is this : For all Harder-Narasimhan type μ as in (1.1.6), one has (see [AB83])

$$(1.1.9) \quad P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_\mu; \mathbb{Q}) = \prod_{i=1}^{\ell} P_g(r_i, d_i),$$

which means that the equivariant Poincaré series of the unstable strata can be computed as products of equivariant Poincaré series of semistable strata of lower rank.

Theorem 1.10. — [AB83] *For all $r \geq 1$ and all $d \in \mathbb{Z}$, one has*

$$(1.1.10) \quad P_g(r, d) = Q_g(r) - \sum_{\mu \in I_{r,d} \setminus \{\mu_{ss}\}} t^{2d_\mu} \prod_{i=1}^{\ell} P_g(r_i, d_i),$$

where $d_\mu = \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} r_i r_j (\mu_i - \mu_j + (g-1))$.

As we shall see momentarily, $Q_g(r)$ is indeed independent of d . Moreover, for all $d \in \mathbb{Z}$, one has $P_g(1, d) = Q_g(1)$, because every holomorphic line bundle is semistable. So, to be able to compute recursively from Formula (1.1.10), we only need know $Q_g(r)$ for all r . The following formula for $Q_g(r)$ was obtained by Atiyah and Bott in a very geometric manner, which will be detailed in Section 3.3.

Theorem 1.11. — [AB83] *For all $r \geq 1$, one has*

$$\begin{aligned} Q_g(r) &= P_t(\Omega\mathrm{SU}(r); \mathbb{Q}) P_t(\mathrm{U}(r); \mathbb{Q})^{2g} P_t(\mathrm{BU}(r); \mathbb{Q}) \\ &= \frac{\prod_{j=1}^r (1 + t^{2j-1})^{2g}}{\prod_{j=1}^{r-1} (1 - t^{2j}) \prod_{j=1}^r (1 - t^{2j})}. \end{aligned}$$

Example 1.12. — When $r = 2$ and $d \in \mathbb{Z}$, the possible Harder-Narasimhan types are $\mu_{ss} = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ and $\mu = (k, d-k)$ with $k > d-k$, so

$$P_g(2, d) = Q_g(2) - t^{2g-2} \sum_{k > \frac{d}{2}} t^{4k-2d} Q_g(1)^2$$

with $Q_g(1) = \frac{(1+t)^{2g}}{1-t^2}$. The result only depends on the parity of d and, explicitly, we have

$$P_g(2, 0) = \frac{(1+t)^{2g}(1+t^3)^{2g}}{(1-t^2)^2(1-t^4)} - \frac{t^{2g+2}(1+t)^{4g}}{(1-t^2)^2(1-t^4)}$$

and

$$P_g(2, 1) = \frac{(1+t)^{2g}(1+t^3)^{2g}}{(1-t^2)^2(1-t^4)} - \frac{t^{2g}(1+t)^{4g}}{(1-t^2)^2(1-t^4)}$$

$$= \frac{(1+t)^{2g} \left[(1+t^3)^{2g} - t^{2g}(1+t)^{2g} \right]}{(1-t^2)(1-t^2)(1-t^4)}.$$

By definition, $P_g(r, d) := P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q})$ is the rational Poincaré series of the quotient stack $[\mathcal{C}_{ss}/\mathcal{G}_E]$. Theorems 1.10 and 1.11 show that this can be computed without any assumptions on r and d . When $r \wedge d = 1$, more can be said : every semistable holomorphic structure on E is in fact stable (we shall write that $\mathcal{C}_{ss} = \mathcal{C}_s$) and the Betti numbers of the coarse moduli space $\mathcal{C}_s/\mathcal{G}_E$ can be computed in this case. Indeed, the stabilizer of any element in \mathcal{C}_s reduces to $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_E) \simeq \mathbb{C}^*$, so the action of $\overline{\mathcal{G}}_E := \mathcal{G}_E/\mathbb{C}^*$ on \mathcal{C}_s is free and the rational Poincaré polynomial of the moduli space

$$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d) \simeq \mathcal{C}_s/\overline{\mathcal{G}}_E$$

satisfies $P_t(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d); \mathbb{Q}) = P_t^{\overline{\mathcal{G}}_E}(\mathcal{C}_s; \mathbb{Q})$. To compute this polynomial, Atiyah and Bott have proved that, when $r \wedge d = 1$, the \mathcal{G}_E -equivariant Poincaré series of $\mathcal{C}_{ss} = \mathcal{C}_s$ is related to its $\overline{\mathcal{G}}_E$ -equivariant Poincaré series in the following way :

$$(1.1.11) \quad P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q}) = P_t(B\mathbb{C}^*; \mathbb{Q}) P_t^{\overline{\mathcal{G}}_E}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q}).$$

Thus, $P_t(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d); \mathbb{Q}) = (1-t^2)P_g(r, d)$ when $r \wedge d = 1$. For $r = 1$, one finds $P_t(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(1, d); \mathbb{Q}) = (1+t)^{2g}$, the Poincaré polynomial of the Picard variety $\text{Pic}^d(X)$.

Example 1.13. — When $r = 2$ and $d = 1$,

$$(1-t^2)P_g(2, 1) = (1+t)^{2g} \sum_{j=0}^{g-1} (1+t^3)^{2(g-1-j)} (t(1+t))^{2j},$$

whose value at 1 (=the total Betti number of $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2, 1)$) is equal to $g2^{4g-2}$ ([DR75]).

In joint work with Melissa Liu, we obtained analogues of Theorems 1.10 and 1.11 for the topological spaces $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, d)$ and $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, d)$. First, we checked that, given a real or quaternionic structure τ on the C^∞ complex vector bundle E , the Harder-Narasimhan strata were globally invariant under τ . This happens because the rank and degree of a holomorphic vector bundle \mathcal{E} over the Klein surface (X, σ) are preserved by the involution $\mathcal{E} \mapsto \overline{\sigma^* \mathcal{E}}$ and the HN filtration of a τ -compatible holomorphic structure on E consists of τ -invariant sub-bundles (by uniqueness of this filtration). Then, in analogy with (1.1.7), we have :

$$\mathcal{C}^\tau = \bigsqcup_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}^\tau} \mathcal{C}_\mu^\tau$$

where $\mathbb{I}_{r,d}^\tau$ is the set of possible Harder-Narasimhan types of a τ -compatible holomorphic structure on E and \mathcal{C}_μ^τ is the space of τ -compatible holomorphic structures of type μ on E . The HN type of a τ -compatible holomorphic structure on E again consists of the topological invariants of the successive quotients of the HN filtration, which are now either real or quaternionic bundles, so may have more invariants than just the rank and degree (this is indeed the case when $X^\sigma \neq \emptyset$ and τ is real). As a consequence, there is a map $\mathbb{I}_{r,d}^\tau \rightarrow \mathbb{I}_{r,d}$ but it is neither injective nor surjective in general : if $X^\sigma = \emptyset$, the degree of a real vector bundle must be even, and if $X^\sigma \neq \emptyset$, then the fiber of that map above a HN type $\mu \in \mathbb{I}_{r,d}$ that is of length ℓ contains $2^{(n-1)(\ell-1)}$ elements, where n is the number of connected components of X^σ (these $2^{(n-1)(\ell-1)}$ elements correspond to the Stiefel-Whitney classes of the real or quaternionic successive quotients of the HN filtration). The equivariant normal bundle to the stratum \mathcal{C}_μ^τ is now a real vector bundle only (of real dimension d_μ) and it may not be orientable (at least when τ is a real structure, as we checked in [LS13, Section 5.3] by showing that its first Stiefel-Whitney class is not always zero). This is one of the reasons why in [LS13] we use mod 2 coefficients : to always have an equivariant Euler class. Equivariant perfection with respect to the group \mathcal{G}_E^τ (the group of complex linear automorphisms of E that

commute to τ) then holds by the same, slightly refined, argument ([LS13, Lemma 5.9]) as in [AB83] and we get the following analogue of (1.1.8) :

$$P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}^\tau} t^{d_\mu} P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}_\mu^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

Let us now set $P_{(g,n)}^\tau(r, d) := P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}_{ss}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ and $Q_{(g,n)}^\tau(r) := P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. As the notation suggests, these two formal series will end up depending only on the topological invariants g, n, r and (for the first one) d . First, in analogy with (1.1.9), we have, for all $\mu \in \mathbb{I}_{r,d}^\tau$:

$$(1.1.12) \quad P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}_\mu^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \prod_{i=1}^{\ell} P_{(g,n)}^\tau(r_i, d_i).$$

So we get the following recursive formula, similar to (1.1.10).

Theorem 1.14. — [LS13] *For all $r \geq 1$ and all $d \in \mathbb{Z}$, one has*

$$(1.1.13) \quad P_{(g,n)}^\tau(r, d) = Q_{(g,n)}^\tau(r) - \sum_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}^\tau \setminus \{\mu_{ss}\}} t^{d_\mu} \prod_{i=1}^{\ell} P_{(g,n)}^\tau(r_i, d_i),$$

where $d_\mu = \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} r_i r_j (\mu_i - \mu_j + (g-1))$.

As in the complex case, we have $P_{(g,n)}^\tau(1, d) = Q_{(g,n)}^\tau(1)$ for all $d \in \mathbb{Z}$. So, to conclude, we only need a real and quaternionic analogue of Theorem 1.11. This was indeed obtained in [LS13], by a method that we will go over in Section 3.3. Mod 2 coefficients are also essential there, at least for part of the spectral sequence computations to hold.

Theorem 1.15. — [LS13] *For all $r \geq 1$, one has :*

1. *If $n > 0$ and $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$ is a real structure, then*

$$\begin{aligned} Q_{(g,n)}^{\tau_{\mathbb{R}}}(r) &= P_t(\Omega\mathbf{SU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) P_t(\mathbf{U}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g+1-n} P_t(\mathbf{SO}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ &\quad \times P_t(\mathbf{U}(r)/\mathbf{O}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} P_t(\mathbf{BO}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &= \frac{\prod_{j=1}^r (1 + t^{2j-1})^{g+1-n} \prod_{j=1}^{r-1} (1 + t^j)^n \prod_{j=1}^r (1 + t^j)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{r-1} (1 - t^{2j}) \prod_{j=1}^r (1 - t^j)}. \end{aligned}$$

2. *If $n = 0$ and $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$ or $\tau_{\mathbb{H}}$ is a real or quaternionic structure, then*

$$\begin{aligned} Q_{(g,0)}^\tau(r) &= P_t(\Omega\mathbf{SU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) P_t(\mathbf{U}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g+1} P_t(\mathbf{BU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &= \frac{\prod_{j=1}^r (1 + t^{2j-1})^{g+1}}{\prod_{j=1}^{r-1} (1 - t^{2j}) \prod_{j=1}^r (1 - t^{2j})}. \end{aligned}$$

3. *If $n > 0$ and $\tau = \tau_{\mathbb{H}}$ is a quaternionic structure, in which case r is necessarily even, then*

$$Q_{(g,n)}^{\tau_{\mathbb{H}}}(r) = \frac{\prod_{j=1}^r (1 + t^{2j-1})^g}{\prod_{j=1}^{r/2-1} (1 - t^{4j}) \prod_{j=1}^{r/2} (1 - t^{4j})}.$$

In particular, $Q_{(g,n)}^{\tau_{\mathbb{H}}}(r)$ is in fact independent of n .

Remark 1.16. — We note that, when $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$, we can unify the $n > 0$ and $n = 0$ cases by using the fact ([Bor53]) that $P_t(\mathbf{BO}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = P_t(\mathbf{BU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) P_t(\mathbf{U}(r)/\mathbf{O}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ to get :

$$\begin{aligned} Q_{(g,n)}^{\tau_{\mathbb{R}}}(r) &= P_t(\Omega\mathbf{SU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) P_t(\mathbf{U}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g+1-n} P_t(\mathbf{SO}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ &\quad \times P_t(\mathbf{U}(r)/\mathbf{O}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n P_t(\mathbf{BU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

And the reason why, for $n = 0$, the answer is the same in the real and quaternionic cases is because we can always tensor a quaternionic vector bundle $(\mathcal{E}, \tau_{\mathbb{H}})$ by a quaternionic line bundle $(\mathcal{L}, \tau_{\mathcal{L}})$ of degree $(g-1)$, to obtain a real vector bundle $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}, \tau_{\mathbb{H}} \otimes \tau_{\mathcal{L}})$, so the stack of quaternionic

vector bundles of rank r and degree d over a real curve without real points is isomorphic to the stack of real vector bundles of rank r and degree $d + r(g - 1)$ over that curve.

Example 1.17. — Let us retake Example 1.12 with $n > 0$, $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$ and $r = 2$. Then, for each $\mu \in \mathbb{I}_{2,d} \setminus \{\mu_{ss}\}$, there are $2^{(n-1)}$ real Harder-Narasimhan types $\mu_{\mathbb{R}} \in \mathbb{I}_{2,d}^{\tau}$ that map to μ under the canonical map $\mathbb{I}_{2,d}^{\tau} \rightarrow \mathbb{I}_{2,d}$. So we get, for all $d \in \mathbb{Z}$,

$$P_{(g,n)}^{\tau_{\mathbb{R}}}(2, d) = Q_{(g,n)}^{\tau_{\mathbb{R}}}(2) - 2^{n-1} t^{g-1} \sum_{k > \frac{d}{2}} t^{2k-d} Q_{(g,n)}^{\tau_{\mathbb{R}}}(1)^2.$$

In particular, when $n = g + 1$ (the maximal possible value for n) :

$$P_{(g,g+1)}^{\tau_{\mathbb{R}}}(2, 0) = \frac{(1+t)^{2g}(1+t^2)^g}{(1-t)^2(1-t^2)} - 2^g \frac{t^{g+1}(1+t)^{2g}}{(1-t)^2(1-t^2)}$$

and

$$\begin{aligned} P_{(g,g+1)}^{\tau_{\mathbb{R}}}(2, 1) &= \frac{(1+t)^{2g}(1+t^2)^g}{(1-t)^2(1-t^2)} - 2^g \frac{t^g(1+t)^{2g}}{(1-t)^2(1-t^2)} \\ &= \frac{(1+t)^{2g-1}}{(1-t)^3} [(1+t^2)^g - (2t)^g]. \end{aligned}$$

As in the complex case, more can be said when $r \wedge d = 1$. First we recall that, if $n > 0$, quaternionic vector bundles must have even rank and degree, so they cannot occur if r and d are assumed to be coprime : we have $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)^{\sigma} \simeq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, d)$ in this case. Second, for all $n \geq 0$, the stabilizer of any holomorphic structure in \mathcal{C}_s^{τ} reduces to $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}^{\tau} \simeq \mathbb{R}^*$ so the action of $\overline{\mathcal{G}}_E^{\tau} := \mathcal{G}_E^{\tau}/\mathbb{R}^*$ on \mathcal{C}_s^{τ} is free. Then, in analogy with (1.1.11), we have, when r and d are coprime :

$$(1.1.14) \quad P_t^{\overline{\mathcal{G}}_E^{\tau}}(\mathcal{C}_{ss}^{\tau}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = P_t(B\mathbb{R}^*; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) P_t^{\overline{\mathcal{G}}_E^{\tau}}(\mathcal{C}_{ss}^{\tau}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

so $P_t(\mathcal{C}_s^{\tau}/\overline{\mathcal{G}}_E^{\tau}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (1-t)P_{(g,n)}^{\tau}(r, d)$ in this case. This again uses in an essential way that we are working with mod 2 coefficients ([LS13, Theorem 6.4]). For $r = 1$ and $n > 0$, taking into account the number of connected components of $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(1, d)^{\tau}$, one finds $P_t(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(1, d)^{\tau}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2^{n-1}(1+t)^g$, the Poincaré polynomial of the real locus of the Picard variety $\text{Pic}^d(X)$. And when $n = 0$, the result is similar : every connected component of $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)^{\sigma}$ is again homeomorphic to a product of g circles and the number of connected components is either 0, 1 or 2, depending on the parity of d and g (Theorem 1.4).

Example 1.18. — When $n = g + 1$, $r = 2$ and $d = 1$, we have

$$(1-t)P_{(g,g+1)}^{\tau_{\mathbb{R}}}(2, 1) = (1+t)^{2g-1} \sum_{j=0}^{g-1} (1+t^2)^{g-1-j} (2t)^j,$$

whose value at 1 is $g2^{3g-2}$. Since this value is the total mod 2 Betti number of any given connected component of $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2, 1)^{\tau} = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2, 1)$ and this space has 2^g connected components (Theorem 1.4), the total mod 2 Betti number of $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2, 1)^{\tau}$ is $g2^{4g-2}$.

In Example 1.13, we recalled the value of the total rational Betti number of $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)$, which is also the total Betti number with coefficients in \mathbb{Z} and $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ since Atiyah and Bott have proved that the integral cohomology of $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r, d)$ is a torsion-free \mathbb{Z} -module when $r \wedge d = 1$. From Examples 1.13 and 1.18, we then deduce the following.

Theorem 1.19. — [LS13] *If (X, σ) is a maximal real algebraic curve, i.e. if $n = g + 1$, then the real algebraic variety $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2, 1)$ is also maximal, in the sense that the total mod 2 Betti number of the real locus is equal to the total mod 2 Betti number of the complex locus.*

As a matter of fact, we also proved in [LS13] that if (X, σ) is not maximal, then $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2, 1)$ is not maximal. The higher the rank, the harder it is to obtain an explicit polynomial expression for $(1-t)P_{(g,n)}^{\tau}(r, 1)$ and evaluate it at $t = 1$. In [LS13, Theorem 6.2], we applied a theorem of Don Zagier's ([Zag96]) to solve the recursion in Theorem 1.14 and obtain a closed formula for $P_{(g,n)}^{\tau}(r, d)$. But even with that closed formula, evaluating the polynomials

$$(1-t^2)P_g(r, d) \quad \text{and} \quad 2^{n-1}(1-t)P_{(g,n)}^{\tau}(r, d)$$

at $t = 1$ for r and d coprime is not always feasible, because the formula we obtain involves a rational function with a pole at 1. Using computer software, Erwan Brugallé has checked that the analogue of Theorem 1.19 holds for all $r \leq 6$ and d coprime to r . It seems reasonable to conjecture that this should hold for arbitrary r and d coprime.

1.1.2. Hitchin components for orbifold fundamental groups. —

1.1.2.1. *Higher Teichmüller Spaces.* — In [Wie18], Anna Wienhard gave the following definition of a Higher Teichmüller Space (HTS).

Definition 1.20. — Given a closed orientable surface X and a real Lie group G , one calls *Higher Teichmüller Space* any union of connected components of the representation space

$$\text{Hom}(\pi_1 X; G)/G$$

consisting solely of conjugacy classes of discrete and faithful representations.

The fundamental example is of course the Fricke-Teichmüller space

$$\mathcal{T}(X) \simeq \text{Hom}^{\text{d.f.}}(\pi_1 X; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}))/\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}),$$

the result here being that discrete and faithful representations $\varrho : \pi_1 X \rightarrow \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ form a connected component of the $\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ -representation space of $\pi_1 X$. As a matter of fact, this is true for (orbifold) fundamental group of *all* closed orbi-surfaces of negative (orbifold) Euler characteristic Y .

As explained in [Wie18], known examples of HTS for surface groups come in two infinite families, Hitchin components and spaces of maximal representations, and there are conjectures about how to construct other, and possibly all, examples. In joint work with Daniele Alessandrini and Gye-Seon Lee, we take the notion of HTS into a different direction and study what happens for 2-dimensional orbifolds, focusing primarily on Hitchin components. Recall that, given a simple complex Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ with split real form \mathfrak{g} , the (connected) adjoint group $G_{\mathbb{C}} := \text{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ has an associated split real form G , whose neutral component is $\text{Int}(\mathfrak{g})$ and which comes equipped with a *principal morphism* $\kappa : \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow G$ ([Kos59]). If Y is a closed 2-orbifold of negative Euler characteristic, a representation $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ is called *Fuchsian* ([Hit92]) if it lifts to a discrete and faithful representation $h : \pi_1 Y \rightarrow \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$, meaning that the following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) & \\ & \nearrow h & \downarrow \kappa \\ \pi_1 Y & \xrightarrow{\varrho} & G \end{array}$$

Discrete and faithful representations $h : \pi_1 Y \rightarrow \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ are precisely holonomy representations of hyperbolic structures on Y and we get in this way a continuous map

$$(1.1.15) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{T}(Y) & \longrightarrow & \text{Hom}(\pi_1 Y; G)/G \\ [h] & \longmapsto & [\kappa \circ h] \end{array}$$

whose image is called the *Fuchsian locus* of the representation space $\text{Hom}(\pi_1 Y; G)/G$. Since the Teichmüller space $\mathcal{T}(Y)$ is connected, the image of the map (1.1.15) picks out a single connected component of $\text{Hom}(\pi_1 Y; G)/G$, called the *Hitchin component* and which we shall

denote by $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$. Contrary to what happens for compact real forms (Section 1.1.1.3), Hitchin components for surface groups have a trivial topology :

Theorem 1.21 (Hitchin). — [Hit92] *Let X be a closed orientable surface of negative Euler characteristic $\chi(X)$ and let G be the split real form of the adjoint group of a simple complex Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Then $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$ is homeomorphic to a real vector space of dimension $-\chi(X) \dim G$.*

By definition of Hitchin components, one has $\text{Hit}(\pi_1 X; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})) \simeq \mathcal{T}(X)$, which is of real dimension $6g - 6$, where g is the genus of X . In the orbifold case, the Teichmüller space is still homeomorphic to a real vector space, this time of dimension

$$(1.1.16) \quad -3\chi(|Y|) + 2k + \ell$$

where :

- $|Y|$ is the “underlying surface” of the 2-orbifold Y ,
- k is the number of cone points of Y ,
- ℓ is the number of corner reflectors / dihedral points of Y .

We recall that, even though $\chi(Y) < 0$ by assumption, the topological surface $|Y|$ may be of non-negative Euler characteristic, or non-orientable, or have a boundary, or all of that at the same time (the Möbius strip). The study of Hitchin components for orbi-surfaces was initiated by Choi and Goldman in [CG05], who proved the following result when $G = \mathbf{PGL}(3; \mathbb{R})$, in which case the Hitchin component is in fact homeomorphic to the deformation space of convex projective structures on Y :

Theorem 1.22 (Choi & Goldman). — [CG05] *Let Y be a closed orbi-surface of negative Euler characteristic $\chi(Y)$. Then $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(3; \mathbb{R}))$ is homeomorphic to a real vector space of dimension*

$$-8\chi(|Y|) + (6k - k_2) + (3\ell - \ell_2),$$

where k_2 (respectively, ℓ_2) is the number of cone points (respectively, dihedral points) of order 2 in Y .

In [ALS18], we extended their result to arbitrary split real forms G and obtained the following generalization of the formula in Theorem 1.21.

Theorem 1.23. — [ALS18] *Let Y be a closed orbi-surface of negative Euler characteristic $\chi(Y)$. Let G be as in Theorem 1.21 and denote by r its rank and by d_1, \dots, d_r the exponents of its Lie algebra \mathfrak{g} . Then $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ is homeomorphic to a real vector space of dimension*

$$-\chi(|Y|) \dim G + \sum_{\alpha=1}^r \left(2 \sum_{i=1}^k O(d_{\alpha} + 1, m_i) + \sum_{j=1}^{\ell} O(d_{\alpha} + 1, n_j) \right)$$

where m_i (respectively, n_j) is the order of the i -th cone point (respectively, the j -th dihedral point) of Y and $O(d, m) := \lfloor d - \frac{d}{m} \rfloor$ is the integral part of the real number $(d - \frac{d}{m})$.

As a matter of fact, like Choi and Goldman in [CG05], we can also deal with the case of orbifolds with boundary (see Section 4.4.4 of this memoir for details). We note that, when Y has no cone or dihedral points, then $\chi(Y) = \chi(|Y|)$ and Hitchin’s formula holds without modification.

There is another way of writing the formula in Theorem 1.23, which resembles more that of (1.1.16) and Theorem 1.22. We will present it in Chapter 4 (Theorem 4.10). We get for instance :

$$\begin{aligned} \dim \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})) &= -15\chi(|Y|) + (12k - 4k_2 - 2k_3) + (6\ell - 2\ell_2 - \ell_3) \\ \dim \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PSp}^{\pm}(4; \mathbb{R})) &= -10\chi(|Y|) + (8k - 2k_2 - 2k_3) + (4\ell - \ell_2 - \ell_3) \end{aligned}$$

We see that these dimensions may vanish for certain orbifolds Y and that such orbifolds form an infinite family (spheres with three cone points of order $(2, 3, r)$ for all $r \geq 7$). This has applications to the rigidity of projective structures and contact projective structures on Seifert-fibered spaces

with base Y (for instance, in the spirit of [GW08], foliated convex projective structures on the unit tangent bundle of Y), to be presented in Section 4.4.3.

Note that, in Theorem 1.23, the orbifold Y can be just a topological surface with boundary (with its canonical orbifold structure), or a non-orientable surface (with trivial orbifold structure). The latter case is perhaps particularly interesting because, in the absence of a boundary and any other orbifold singularities, the orbifold fundamental group is isomorphic to the topological fundamental group. The way we think about these examples, and more generally non-orientable orbi-surfaces (which includes the case of topological surfaces with boundary, orientable or not in the usual sense) is by seeing such a surface as the set of closed points of a real algebraic curve (or orbi-curve, if there are cone or dihedral points). In particular, we could always replace a non-orientable orbi-surface Y with its orientation cover $Y^+ \xrightarrow{2:1} Y$, equipped with its canonical involution, which would put us in the familiar setting of real algebraic geometry (see Section 1.1.1).

1.1.2.2. Analytic parameterization of Hitchin components. — The way we proved Theorem 1.23 is by extending Hitchin’s techniques to the orbifold case in order to get an analytic parameterization of $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$, in terms of *symmetric differentials* on Y (sections of symmetric powers of the cotangent bundle). We now recall his result.

Theorem 1.24. — [Hit92] *Fix an analytic structure on the closed orientable surface X and denote by K_X its canonical bundle. Then there exists a homeomorphism*

$$\text{Hit}(\pi_1 X; G) \simeq \bigoplus_{\alpha=1}^r \mathbb{H}^0(X; K_X^{d_{\alpha}+1}).$$

In [ALS18], we showed that, although Hitchin’s formula for the dimension (Theorem 1.21) does not generalize in a straightforward manner to the orbifold case (there was essentially no hope, because $\chi(Y) \in \mathbb{Q}$ in general), Hitchin’s parameterization of Theorem 1.24, on the contrary, does extend with no modification at all to the orbifold case :

Theorem 1.25. — [ALS18] *Fix a dianalytic structure on the closed orbi-surface Y and let K_Y be its canonical bundle. Then there exists a homeomorphism*

$$\text{Hit}(\pi_1 Y; G) \simeq \bigoplus_{\alpha=1}^r \mathbb{H}^0(Y; K_Y^{d_{\alpha}+1}).$$

When the orbifold Y is orientable, it actually admits an analytic structure and the vector spaces $\mathbb{H}^0(Y; K_Y^d)$ are complex vector spaces, just as in the usual Riemann surface case. When Y is not orientable, a dianalytic structure on Y can be thought of as the structure one obtains, *by descent*, from an analytic structure on Y^+ that makes the canonical involution $\sigma : Y^+ \rightarrow Y^+$ anti-analytic. In particular, $\mathbb{H}^0(Y; K_Y^d)$ is a real vector space whose complexification is $\mathbb{H}^0(Y^+; K_{Y^+}^d)$, so

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^0(Y; K_Y^d) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^0(Y^+; K_{Y^+}^d) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^0(Y^+; K_{Y^+}^d).$$

This is reflected in the formula of Theorem 1.23 for the real dimension of $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$, where the sum over cone points appears with a factor of 2.

To prove Theorem 1.25, we used an equivariant version of the non-Abelian Hodge correspondence, that we can now recast in a more intrinsic way using the notion of Higgs torsor introduced in Chapter 2 (Section 2.5). An essential step in the proof is provided by the equivariant properties of the Hitchin fibration and the Hitchin section over a Riemann surface with symmetry (see Section 4 of [ALS18] and Section 4.3 of the present memoir). Using Theorem 1.25, the dimension of $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ can be computed exactly as in the surface group case, by an application of the (orbifold) Riemann-Roch theorem, as we shall see in Section 4.3 (this being actually a slight improvement over the proof in [ALS18, Section 5]; see [Sch19b]).

1.1.2.3. *Geometric properties and applications.* — It remains to see whether Hitchin components for orbifold fundamental groups are indeed examples of Higher Teichmüller Spaces in the sense of Definition 1.20. In [ALS18], we prove that this is the case when $G = \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$, $\mathbf{PSp}^\pm(2m; \mathbb{R})$, $\mathbf{PO}(m, m+1)$ and \mathbf{G}_2 : Hitchin representations with values in one of these groups are discrete and faithful, thus generalizing to the orbifold setting Labourie’s results in [Lab06]:

Theorem 1.26. — [ALS18] *Let Y be a closed orbi-surface of negative Euler characteristic. Then $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ -Hitchin representations of $\pi_1 Y$ are Anosov, discrete, faithful and strongly irreducible. Moreover, elements of infinite order in $\pi_1 Y$ are sent to purely loxodromic elements of $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ by such a representation.*

Thus, Hitchin representations of orbifold groups share certain of the properties of Hitchin representations of surface groups. There are, however, also some discrepancies, for instance the following *rigidity* phenomenon (see Section 4.4.1 for details).

Proposition 1.27. — [ALS18] *Let Y be a sphere with three cone points, of respective orders $(2, 4, 5)$. Then the canonical map*

$$\mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R})) \longrightarrow \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})) \simeq \mathbb{R}^2$$

is surjective. In particular, any Hitchin representation $\varrho : \pi_1 Y \longrightarrow \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})$ is $\mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})$ -conjugate to a representation with values in $\mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R})$. Such a representation is therefore never Zariski-dense.

Other phenomena that occur only for orbifold groups that are not surface groups will be presented in Sections 4.4.2 (Cyclic Higgs bundles) and 4.4.3 (Projective structures on Seifert manifolds).

1.2. Liste des travaux réalisés depuis la thèse / List of publications

- Travaux présentés dans ce mémoire / Articles presented in this memoir :
 8. Avec Daniele Alessandrini et Gye-Seon Lee. Hitchin components for orbifolds. Soumis pour publication. arXiv 1811.05366. 40 pages.
 7. Symmetric differentials and the dimension of Hitchin components for orbi-curves. A paraître dans Proceedings of the 2019 ISAAC Congress (Aveiro), arXiv 1911.11370.
 6. Finite group actions on moduli spaces of vector bundles. *Sémin. Théor. Spectr. Géom. (Grenoble)* 34 (2019), 33-63.
 5. On the Narasimhan-Seshadri correspondence for Real and Quaternionic vector bundles. *J. Differential Geom.* (2017) 105 (1), 119-162.
 4. Avec Indranil Biswas. Vector bundles over a real elliptic curve. *Pacific J. Math.* (2016) 283 (1), 43-62.
 3. Avec Chiu-Chu Melissa Liu. The Yang-Mills equations over Klein surfaces. *J. Topol.* (2013) 6 (3), 569-643.
 2. Real points of coarse moduli schemes of vector bundles on a real algebraic curve. *J. Symplectic Geom.* 10 (2012), no. 4, 503-534.
 1. Moduli spaces of vector bundles over a Klein surface. *Geom. Dedicata* 151 (2011), no. 1, 187-206.
- Travaux non présentés dans ce mémoire / Articles not presented in this memoir :
 3. Avec Indranil Biswas. Parabolic vector bundles on Klein surfaces. A paraître dans *Illinois J. Math.* 9 pages.
 2. Avec Victoria Hoskins. Rational points of quiver moduli spaces. A paraître aux *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 46 pages.
 1. Avec Victoria Hoskins. Group actions on quiver varieties and applications. *Internat. J. Math.* 30 (2019), no. 2, p. 1950007, 46.
- Articles issus de la thèse / Articles extracted from Doctoral Dissertation :
 5. Decomposable representations and Lagrangian submanifolds of moduli spaces associated to surface groups. *Math. Ann.* 342 (2008), no. 2, 405-447.
 4. Anti-symplectic involutions on quasi-Hamiltonian quotients. *Trav. Math.* 17 (2007), 57-64.
 3. Un théorème de convexité réel pour les applications moment à valeurs dans un groupe de Lie. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 345 (2007), no. 1, 25-30.
 2. Representations of the fundamental group of an L -punctured sphere generated by products of Lagrangian involutions. *Canad. J. Math.* 59 (2007), no. 4, 845-879.
 1. Avec Elisha Falbel et Jean-Pierre Marco. Classifying triples of Lagrangians in a Hermitian vector space. *Topology Appl.* 144 (2004), no. 1-3, 1-27.
- Autres publications (avec comité de lecture) / Other (refereed) publications :
 4. Lectures on Klein surfaces and their fundamental group. *Geometry and Quantization of Moduli Spaces*, Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, Springer (2016), 67-108.
 3. Differential geometry of holomorphic vector bundles on a curve. *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, Proceedings of the 2009 Villa de Leyva Summer School, Cambridge University Press (2013), 39-80.
 2. Quasi-Hamiltonian quotients as disjoint unions of symplectic manifolds. In *Non-Commutative Geometry and Physics 2005-Proceedings of the International Sendai-Beijing Joint Workshop* (2007), 31-54. World Scientific Press.
 1. A note on quasi-Hamiltonian geometry and representation spaces of surface groups. In *The COE Seminar on Mathematical Sciences 2005* (2007), vol. 36 of *Sem. Math. Sci.*, 35-48.

– Ouvrage d'enseignement / Textbook :

1. Avec Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini, Hakim Boumaza, Benjamin Collas, Stéphane Collion, Marie Dellinger et Zoé Faget. *Analyse L3*. Pearson Education France (2009), ISBN-9782744073502.

CHAPITRE 2

ASPECTS ORBIFOLDS DE LA CORRESPONDANCE DE HODGE NON-ABÉLIENNE

2.1. L'espace de Betti d'un orbifold

Soit π un groupe discret et soit G un groupe de Lie. On suppose que π agit sur G par automorphismes et on note $\varphi : \begin{array}{ccc} \pi & \longrightarrow & \text{Aut}(G) \\ \gamma & \longmapsto & \varphi_\gamma \end{array}$ le morphisme de groupes associé. Soit

$$Z_\varphi^1(\pi; G) := \{ \varrho : \pi \longrightarrow G \mid \forall (\gamma, \gamma') \in \pi \times \pi, \varrho(\gamma\gamma') = \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(\varrho(\gamma')) \}$$

l'ensemble des *morphismes croisés* de π dans G , muni de la topologie compacte-ouverte. Si π est de type fini, tout choix de générateurs $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ définit une application continue

$$\begin{array}{ccc} Z_\varphi^1(\pi; G) & \longrightarrow & G^r \\ \varrho & \longmapsto & (\varrho(\gamma_1), \dots, \varrho(\gamma_r)) \end{array}$$

qui est un homéomorphisme sur son image, ce qui permet d'identifier $Z_\varphi^1(\pi; G)$ à un sous-espace fermé de G^r . Les morphismes croisés de π dans G sont également appelés des *1-cocycles* et deux tels cocycles ϱ et ϱ' sont dits *équivalents* s'il existe $g \in G$ tel que, pour tout $\gamma \in \pi$, on a $\varrho'(\gamma) = g^{-1}\varrho(\gamma)\varphi_\gamma(g)$. Ceci définit une action à droite de G sur $Z_\varphi^1(\pi; G)$ et on note

$$H_\varphi^1(\pi; G) := Z_\varphi^1(\pi; G)/G$$

l'espace des orbites de cette action. Deux 1-cocycles équivalents sont également dits *cohomologues* et on munit l'ensemble $H^1(\pi; G)$ de la topologie quotient. Elle n'est, en général, pas séparée. Si φ est trivial, on a $H^1(\pi; G) = \text{Hom}(\pi; G)/G$, l'espace des classes de conjugaison sous G de morphismes de groupes de π dans G . Dans ce cas, les 1-cocycles sont également appelés des *représentations* de π dans G . Le lemme suivant permet de remplacer les cocycles (= représentations généralisées) par des représentations au sens usuel (dans un groupe plus grand) même lorsque φ est non-trivial, ce qui présente l'avantage d'être compatible avec l'action *par conjugaison* de G , comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.1. — *L'application*

$$\begin{array}{ccc} Z_\varphi^1(\pi; G) & \longrightarrow & \text{Hom}(\pi; G \rtimes \text{Aut}(G)) \\ \varrho & \longmapsto & (\widehat{\varrho} : \gamma \longmapsto (\varrho(\gamma), \varphi_\gamma)) \end{array}$$

a pour image l'ensemble

$$(2.1.1) \quad \text{Hom}_\varphi(\pi; G \rtimes \text{Aut}(G)) := \{ \varrho \in \text{Hom}(\pi; G \rtimes \text{Aut}(G)) \text{ tel que } \text{pr}_2 \circ \widehat{\varrho} = \varphi \}$$

où $\text{pr}_2 : G \rtimes \text{Aut}(G) \longrightarrow \text{Aut}(G)$ est la projection canonique. Cette application est de plus G -équivariante pour l'action par conjugaison de $G \subset G \rtimes \text{Aut}(G)$ sur $\text{Hom}_\varphi(\pi; G \rtimes \text{Aut}(G))$ et elle induit une bijection

$$H_\varphi^1(\pi; G) \simeq \text{Hom}_\varphi(\pi; G \rtimes \text{Aut}(G))/G.$$

Démonstration. — Par définition, un homomorphisme croisé $\varrho : \pi \rightarrow G$ relativement à $\varphi : \pi \rightarrow \text{Aut}(G)$ est la première composante d'un morphisme de groupes $\widehat{\varrho} : \gamma \mapsto (\varrho(\gamma), \varphi_\gamma)$ de π à valeurs dans le produit semi-direct $G \rtimes \text{Aut}(G)$. Le reste est une simple vérification. \square

Remarquons que la condition pour qu'un homomorphisme $\chi : \pi \rightarrow G \rtimes \text{Aut}(G)$ appartienne à l'ensemble $\text{Hom}_\varphi(\pi; G \rtimes \text{Aut}(G))$ défini en (2.1.1) consiste à demander la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{\chi} & G \rtimes \text{Aut}(G) \\ & \searrow \varphi & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & \text{Aut}(G) \end{array}$$

L'objet de ce mémoire est de présenter nos recherches sur la topologie des espaces $\text{H}_\varphi^1(\pi; G)$ dans le cas où π est un sous-groupe discret du groupe des isométries (directes et indirectes) du plan hyperbolique $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$. Nous parlerons de *groupe fuchsien* pour désigner un tel groupe π . On identifiera le plus souvent $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ au demi-plan supérieur $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ muni de l'unique métrique conforme (à la métrique euclidienne canonique du plan complexe) de courbure de Gauss constante égale à -1 . Le groupe des isométries de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ est donc isomorphe à $\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$, ce dernier agissant sur \mathcal{H} par homographies :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z := \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{si } ad - bc > 0, \\ \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} & \text{si } ad - bc < 0. \end{cases}$$

Notons que $\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \simeq \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ via conjugaison par l'élément $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, qui représente la structure réelle canonique $z \mapsto -\bar{z}$ de \mathcal{H} (unique à conjugaison par un élément de $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ près). Cet isomorphisme est compatible avec le morphisme canonique

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto & \frac{ad - bc}{|ad - bc|} \end{array}$$

induit par le morphisme “signe du déterminant” d'une matrice réelle 2×2 inversible. On a en effet le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & \searrow \varepsilon & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

d'où, pour tout sous-groupe $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$, un morphisme canonique :

$$(2.1.2) \quad \varepsilon : \begin{array}{ccc} \pi & \longrightarrow & \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \gamma & \longmapsto & \varepsilon_\gamma := \frac{\det(\gamma)}{|\det(\gamma)|} \end{array}$$

Définition 2.2. — On dira que le groupe discret $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ est *orientable* si $\varepsilon(\pi) = \{1\}$, i.e. si $\pi \subset \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$.

Au vu de la notion ci-dessus, on peut remarquer que, pour définir une action par automorphismes de π sur un groupe de Lie réel G , il suffit de munir ce dernier d'un automorphisme

$\theta : G \longrightarrow G$ tel que $\theta^2 = \text{id}_G$, et de poser, pour tout $\gamma \in \pi$,

$$(2.1.3) \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ \varphi_\gamma : g & \longmapsto & \begin{cases} g & \text{si } \varepsilon_\gamma = +1, \\ \theta(g) & \text{si } \varepsilon_\gamma = -1. \end{cases} \end{array}$$

Une telle action de π sur G est alors triviale si et seulement si π est orientable au sens de la Définition 2.2.

Exemple 2.3. — Dans la suite, on s'intéressera particulièrement aux exemples suivants :

1. $G = \mathbf{U}(n)$, le groupe des isométries de l'espace hermitien \mathbb{C}^n , muni de l'involution $\theta : g \longmapsto \bar{g}$.
2. $G = \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$, le groupe des automorphismes de l'espace projectif \mathbb{RP}_{n-1} , muni de l'automorphisme trivial $\theta = \text{id}_G$.
3. $G = \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$, vu comme groupe de Lie *réel* et muni de l'automorphisme induit par la conjugaison complexe de \mathbb{C} .

De manière plus abstraite, on peut considérer les trois familles suivantes, où G est à chaque fois le *groupe des points réels d'un groupe algébrique réductif* :

1. $G = K$, un groupe de Lie compact (réel), muni de l'automorphisme θ induit par une forme réelle quelconque du complexifié $K_{\mathbb{C}}$ de K (en particulier, θ pourrait être égal à id_K).
2. G est le groupe des points réel du groupe algébrique $\text{Int}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ son complexifié, et $\text{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ désigne la composante neutre de $\text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ pour sa topologie de groupe de Lie complexe ($\text{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est un groupe de Lie complexe, connexe et de centre trivial, ayant $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ pour algèbre de Lie, et si un groupe de Lie complexe $G_{\mathbb{C}}$ vérifie ces mêmes propriétés alors il est isomorphe à $\text{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ via la représentation adjointe $\text{Ad} : G_{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$).
3. $G = (\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}})(\mathbb{R})$ où $G_{\mathbb{C}}$ est un groupe algébrique complexe et $\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ est le foncteur de restriction de Weil, de sorte que la conjugaison complexe de \mathbb{C} induit bien un automorphisme involutif θ du groupe de Lie *réel* G .

Exemple 2.4. — Un autre exemple important d'action d'un groupe fuchsien π sur un groupe de Lie G est le suivant. On considère une courbe hyperelliptique complexe (X, σ) de genre $g \geq 2$ et on note Γ le groupe engendré par l'involution holomorphe $\sigma : X \longrightarrow X$. Par hypothèse, l'orbifold analytique $Y := [X/\Gamma]$ est une sphère avec $2g+2$ points coniques⁽¹⁾, tous d'ordre 2, et on a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \pi_1 X \longrightarrow \pi_1 Y \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1.$$

Là encore, pour définir une action de $\pi_1 Y$ sur un groupe de Lie G , il suffit de se donner une involution de G , que nous noterons simplement σ . Le groupe $\pi_1 Y$ étant orientable au sens de la Définition 2.2, il est naturel de choisir une involution de G qui préserve l'orientation, par exemple $\sigma(g) = {}^t g^{-1}$ sur $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Exemple 2.5. — On peut aussi combiner les Exemples 2.3 et 2.4 en prenant pour X une courbe hyperelliptique définie sur \mathbb{R} , à laquelle on pense comme une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ munie d'une involution hyperelliptique σ et d'une involution anti-holomorphe τ , qui commutent entre elles. Le groupe $\Gamma := \langle \sigma, \tau \rangle$ qu'elles engendrent est donc isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'orbifold quotient $Y := [X/\Gamma]$ est un disque avec $2g+2$ point diédraux, tous d'ordre 2. Son groupe fondamental orbifold est non orientable et, par construction, il est muni d'un morphisme $\pi_1 Y \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (dont le noyau est $\pi_1 X$). Pour faire agir $\pi_1 Y$ sur un groupe de Lie G , il suffit donc de se donner deux involutions σ et τ de G qui commutent entre elles, par exemple $\sigma(g) = {}^t g^{-1}$ et $\tau(g) = \bar{g}$ sur $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

1. La terminologie usuelle sur les "singularités" d'orbi-surfaces sera rappelée à la Section 4.1.

Lorsque l'on fait agir π sur G comme dans nos exemples, à travers un morphisme $\varphi : \pi \rightarrow \text{Aut}(G)$ d'image finie $F \subset \text{Aut}(G)$, le Lemme 2.1 prend la forme plus agréable suivante, où les représentations du groupe fuchsien π à valeurs dans $G \rtimes \text{Aut}(G)$ sont remplacées par des représentations à valeurs dans $G \rtimes F$.

Lemme 2.6. — Soit $\varphi : \pi \rightarrow \text{Aut}(G)$ un morphisme d'image finie $F := \text{Im } \varphi \subset \text{Aut}(G)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_\varphi^1(\pi; G) &\longrightarrow \text{Hom}_\varphi(\pi; G \rtimes F) \\ \varrho &\longmapsto (\widehat{\varrho} : \gamma \mapsto (\varrho(\gamma), \varphi_\gamma)) \end{aligned}$$

induit un homéomorphisme $\mathbb{H}_\varphi^1(\pi; G) \simeq \text{Hom}_\varphi(\pi; G \rtimes F)/G$.

On peut remarquer que si $\varphi : \pi \rightarrow \text{Aut}(G)$ admet un relèvement $\widetilde{\varphi} : \pi \rightarrow G$ relativement à l'action adjointe $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(G)$, et si on pose $\widetilde{F} = \text{Im } \widetilde{\varphi} \subset G$, alors on a aussi $\mathbb{H}_\varphi^1(\pi; G) \simeq \text{Hom}_{\widetilde{\varphi}}(\pi; G \rtimes \widetilde{F})/G$ et ce dernier est homéomorphe à $\text{Hom}(\pi; G)/G$ car, pour une action par automorphismes intérieurs, le produit semi-direct $G \rtimes \widetilde{F}$ est isomorphe au produit direct $G \rtimes \widetilde{F}$. On est donc essentiellement intéressé par le cas où π agit sur G par un groupe fini d'automorphismes extérieurs (cf. Exemples 2.3 et 2.4).

Afin de mener à bien l'étude topologique de $\mathbb{H}^1(\pi; G)$ pour π un groupe fuchsien et G un groupe de Lie, on cherche à donner une interprétation géométrique de ces espaces, en s'inspirant des cas connus. Lorsque $\pi \subset \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ est un *groupe de surface*⁽²⁾, l'espace quotient $X := \mathbf{H}_\mathbb{R}^2/\pi$ est muni d'une structure canonique de surface de Riemann, dont le groupe fondamental $\pi_1 X$ est isomorphe à π , ce qui reste vrai plus généralement si $\pi \subset \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ agit *librement* sur $\mathbf{H}_\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire si π ne contient pas d'élément elliptique/d'ordre fini. Lorsque G est un groupe linéaire réductif, l'espace $\mathbb{H}^1(\pi_1 X; G)$ est noté $\mathbb{H}_{\text{Betti}}^1(X; G)$ par C. Simpson ([**Sim92**]), qui le met en relation, lorsque X est compact ou au moins de volume hyperbolique fini, avec l'espace $\mathbb{H}_{\text{Dol}}^1(X; G)$, lequel paramètre des objets holomorphes sur X appelés *G-fibrés de Higgs*, introduits par N. Hitchin ([**Hit87a**, **Hit87b**, **Hit92**]) et étudiés de manière systématique par Simpson ([**Sim88**, **Sim90**, **Sim92**, **Sim94a**, **Sim94b**]). Nous reviendrons plus loin sur la relation précise, appelée *correspondance de Hodge non-abélienne*, entre $\mathbb{H}_{\text{Betti}}^1(X; G)$ et $\mathbb{H}_{\text{Dol}}^1(X; G)$ dans le cas des groupes de surfaces, qui motive la mise en place du cadre formel dans lequel se situe notre étude de la topologie de $\mathbb{H}^1(\pi; G)$ pour $\pi \subset \mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ discret. Pour schématiser, on peut dire que le cas bien compris de la correspondance de Hodge non-abélienne est celui où π est un réseau sans torsion de $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ et que la double généralisation dont nous avons besoin consiste à autoriser π à contenir à la fois des éléments d'ordre fini et des transformations qui renversent l'orientation du plan hyperbolique, i.e. π à être un réseau de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ tout entier. Des travaux ont déjà été réalisés en ce sens dans [**Bod91**, **FS92**, **NS95a**, **NS95b**] et notre apport principal à la théorie générale concerne essentiellement le cas où π agit *non trivialement* sur G dans la définition de $\mathbb{H}^1(\pi; G)$, ce qui oblige à interpréter l'espace de Dolbeault de manière un peu différente, en termes d'objets algébro-géométriques définis sur le corps des réels. Le problème consistant à étendre la correspondance de Hodge non-abélienne à des espaces de Betti plus généraux est d'ailleurs déjà mentionné par Simpson pour $G = \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$:

« A problem suggested by this interpretation is to describe the Dolbeault cohomology in the case when $\pi_1 X$ acts non-trivially on $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ » [**Sim92**, Page 20].

La notion clé pour étudier géométriquement l'espace topologique $\mathbb{H}^1(\pi; G)$ est bien sûr celle de *groupe fondamental orbifold* : si le groupe discret $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ n'est pas supposé sans torsion, on ne peut plus l'identifier au groupe fondamental topologique du quotient $\mathbf{H}_\mathbb{R}^2/\pi$ mais on peut considérer le *quotient orbifold* $Y := [\mathbf{H}_\mathbb{R}^2/\pi]$ et identifier π au groupe fondamental orbifold de

2. C'est-à-dire que π est supposé isomorphe au groupe fondamental topologique d'une surface fermée orientable, que nous supposons de caractéristique d'Euler négative. Puisque π est par hypothèse un sous-groupe discret de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$, cela revient à demander que π soit cocompact et sans torsion.

Y . Plus précisément, puisque le groupe discret π agit (fidèlement et) proprement sur la variété $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$, le quotient de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ par π admet une structure canonique d'orbifold de classe C^∞ et, comme la variété $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ est de plus simplement connexe, c'est un revêtement universel orbifold de Y ⁽³⁾. Le groupe fondamental orbifold de Y , qui par définition est le groupe d'automorphismes du revêtement universel, est donc bien isomorphe à π . Pour étudier la topologie de $H^1(\pi; G)$, on cherchera à interpréter cet espace en termes d'objets *analytiques* sur l'orbifold Y . Mais pour donner un sens à cela, il est nécessaire d'équiper au préalable Y d'une structure analytique orbifold, en un sens à préciser, et c'est ce qui conduit à la discussion suivante :

- Si l'on suppose que $Y = [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$ est orientable, c'est-à-dire que le groupe π agit sur $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$, qui est un ouvert de \mathbb{C} , par isométries directes, alors l'atlas orbifold donné par la projection canonique $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$ est un atlas analytique complexe pour Y , car les isométries directes de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ sont des transformations holomorphes. L'orbifold Y est donc localement isomorphe à un orbifold de la forme $[U/\Gamma]$, avec U un ouvert de \mathbb{C} et Γ un groupe fini agissant (fidèlement et) de manière holomorphe sur U , ce qui est la définition d'un orbifold analytique complexe.
- Dans le cas général, le groupe discret $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ peut contenir des isométries qui renversent l'orientation, et celles-ci sont des transformations anti-holomorphes de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$. On dit alors que l'atlas $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$ est *dianalytique*. Et dans ce cas, Y est localement isomorphe à $[U/\Gamma]$, toujours avec U un ouvert de \mathbb{C} mais avec un groupe fini Γ pouvant contenir des transformations anti-holomorphes de U . Sur un tel objet $[U/\Gamma]$, on peut définir le faisceau suivant, qui est un faisceau Γ -équivant sur U : les germes de sections en un point $x \in U$ sont les germes de fonctions analytiques complexes au voisinage de x et l'action de $\gamma \in \Gamma$ envoie le germe de f en x sur le germe en $\gamma \cdot x$ de la fonction $\gamma \cdot f$, définie par $f \circ \gamma^{-1}$ si $\gamma : U \rightarrow U$ est holomorphe et $\overline{f \circ \gamma^{-1}}$ si γ est anti-holomorphe. Si Γ ne contient que des transformations holomorphes, on retrouve le faisceau des fonctions analytiques de $[U/\Gamma]$. De nombreuses notions de géométrie analytique (faisceaux de modules, cohomologie, *etc.*) restent vraies en géométrie dianalytique et nous renvoyons à [AG71, Gre71] pour une introduction à cette théorie.

Notons que deux points de vue sont alors possibles. Le premier consiste à considérer les structures analytiques (qui ne peuvent exister que sur un orbifold orientable) comme des cas particuliers de structures dianalytiques : cela présente l'avantage de tout englober dans un même formalisme mais celui-ci n'est pas forcément aisé à manipuler. La seconde option est de considérer les orbifolds dianalytiques non orientables comme des quotients $Y \simeq [Y^+/\langle \tau \rangle]$ d'un orbifold analytique Y^+ par l'action d'une involution anti-analytique et de remplacer l'orbifold Y par le couple (Y^+, τ) , comme c'est le cas en géométrie réelle lorsque l'on remplace l'étude d'une variété algébrique réelle X par celle de ses points complexes $X(\mathbb{C})$, munis de l'action du groupe de Galois de \mathbb{C}/\mathbb{R} . Pour définir Y^+ , étant donné un orbifold dianalytique non orientable Y , on note \tilde{Y} son revêtement universel orbifold et $\pi_1 Y := \text{Aut}_Y(\tilde{Y})$ son groupe fondamental orbifold. Comme \tilde{Y} est nécessairement orientable (sinon on pourrait construire un revêtement d'orientation connexe et à deux feuillets), on a un morphisme canonique

$$(2.1.4) \quad \varepsilon : \pi_1 Y \longrightarrow \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

qui généralise (2.1.2) et envoie $\gamma \in \pi_1 Y$ sur ± 1 selon que γ préserve ou renverse l'orientation de \tilde{Y} . Le groupe $\pi^+ := \ker \varepsilon$ est un sous-groupe d'indice 2 et l'orbifold $Y^+ := [\tilde{Y}/\pi^+]$ est analytique et muni d'une involution anti-analytique canonique $\tau : Y^+ \rightarrow Y^+$, correspondant à l'action de π/π^+ sur Y^+ et telle que $[Y^+/\langle \tau \rangle] \simeq Y$ en tant qu'orbifold dianalytique. L'existence de ce revêtement canonique $Y^+ \rightarrow Y$ montre que l'on peut toujours se ramener, si on le souhaite, au

3. Notons que l'orbifold Y n'est plus un $K(\pi, 1)$ topologique en général mais seulement un $K(\pi, 1)$ rationnel, c'est-à-dire que ses groupes d'homotopie rationnels $\pi_i^{\mathbb{Q}}(Y)$ sont tous triviaux, excepté $\pi_1^{\mathbb{Q}}(Y) = H_1(Y; \mathbb{Q})$, qui est isomorphe à $\pi^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

cas d'un orbifold analytique, pourvu qu'on accepte de le munir d'une involution anti-analytique. Cette discussion montre aussi que la Définition 2.2 est très géométrique : le groupe fuchsien π est orientable si et seulement si l'orbifold $[\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$ est orientable. Par ailleurs, cette notion de "groupe orientable" s'étend à tout groupe fondamental orbifold grâce au morphisme canonique (2.1.4).

Exemple 2.7. — L'exemple fondamental est celui où le sous-groupe discret $\pi \subset \mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ est tel que $\pi \cap \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R}) = \pi^+$ est sans torsion : si π^+ est un sous-groupe strict de π , il est d'indice 2 de π ; on peut alors remplacer l'orbifold dianalytique $Y = [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$ par la surface de Riemann (de structure orbifold triviale) $X := [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi^+]$, munie de l'action induite de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \pi/\pi^+$ via une involution anti-holomorphe σ .

Dans les cas qui nous intéressent, $\tilde{Y} \simeq \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ et $\pi_1 Y$ se plonge dans $\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$. Si l'on suppose, comme nous le ferons toujours dans la suite, que $\pi_1 Y$ est *de type fini*⁽⁴⁾, alors le lemme de Selberg ([Sel60]) garantit l'existence d'un sous-groupe distingué d'indice fini *sans torsion* $\pi' \subset \pi_1 Y$. Quitte à remplacer π' par $\pi' \cap \pi^+$ (où $\pi^+ := \pi \cap \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$), on peut même supposer que π' est un groupe fuchsien orientable au sens de la Définition 2.2. Le quotient $X := \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi'$ est donc une surface de Riemann munie d'une action canonique du groupe fini $\Gamma := \pi_1 Y/\pi_1 X$. Nous dirons que le revêtement orbifold galoisien $X \rightarrow Y$ est une *présentation* de Y , qui est alors canoniquement isomorphe à $[X/\Gamma]$ en tant qu'orbifold⁽⁵⁾. Le groupe Γ agit par transformations holomorphes ou anti-holomorphes sur X et on a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \pi_1 X \longrightarrow \pi_1 Y \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

donc un homomorphisme induit $\Gamma \rightarrow \text{Out}(\pi_1 X)$. Si l'on suppose en outre que $\pi_1 Y$ agit sur G comme dans les Exemples 2.3 et 2.4, alors le sous-groupe $\pi_1 X$ agit trivialement sur G et on a un morphisme induit $\bar{\varphi} : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G)$, donc une action de Γ sur G . Le morphisme $\Gamma \rightarrow \text{Out}(G) \times \text{Out}(\pi_1 X)$ ainsi défini fournit donc une action de Γ sur $H^1(\pi_1 X; G) = \text{Hom}(\pi_1 X; G)/G$ et on voit assez facilement que l'application qui envoie $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ sur sa restriction $\varrho|_{\pi_1 X} : \pi_1 X \rightarrow G$ induit une application

$$(2.1.5) \quad H^1(\pi_1 Y; G) \longrightarrow \text{Fix}_{\Gamma}(H^1(\pi_1 X; G))$$

qui n'est malheureusement ni injective ni surjective en général. S'il est tentant de vouloir remplacer les morphismes croisés de $\pi_1 Y$ dans G par des représentations de $\pi_1 X$ dans G dont la classe de conjugaison sous G est fixée par Γ , on se heurte ce faisant à des obstacles techniques évidents, dont le fait (non négligeable, quoiqu'implicite dans ce qui précède) que le morphisme $\Gamma \rightarrow \text{Out}(\pi_1 X)$ ne se relève pas à $\text{Aut}(\pi_1 X)$ en général. Combiné au fait que la présentation $Y \simeq [X/\Gamma]$ n'est pas canonique en général, on voit qu'il est préférable de chercher à travailler directement sur Y , point de vue que nous adopterons le plus souvent possible par la suite (il sera néanmoins fréquent d'utiliser le lemme de Selberg comme auxiliaire dans les démonstrations).

Au vu de la discussion ci-dessus, nous pouvons désormais introduire l'espace de Betti d'un orbifold.

Définition 2.8. — Soit Y un orbifold et soit $\pi_1 Y$ son groupe fondamental. Soit G un groupe de Lie et soit $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$ une action par automorphismes de $\pi_1 Y$ sur G . On appelle *espace de Betti* de Y à coefficients dans G l'espace topologique

$$H_{\text{Betti}}^1(Y; G) := H_{\varphi}^1(\pi_1 Y; G)$$

des classes d'équivalence de morphismes croisés de $\pi_1 Y$ dans G .

4. Ce qui est le cas par exemple si Y est compact ou plus généralement si Y est de volume hyperbolique fini.

5. À la différence de ce qu'il se passe dans l'Exemple 2.7 et plus généralement avec le revêtement $Y^+ \rightarrow Y$, le revêtement galoisien $X \rightarrow Y$ n'est *pas* canonique : il existe de nombreuses présentations de Y par une surface fermée orientable et il n'y en a pas une qui soit "minimale" ou "meilleure que les autres".

Exemple 2.9. — Soit $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ un groupe fuchsien cocompact et soit $Y := [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$, de sorte que $\pi_1 Y \simeq \pi$. Reprenons alors les Exemples 2.3 et 2.4.

1. Si $G = \mathbf{U}(n)$ et $\theta(g) = \bar{g}$, alors $\mathbf{H}_{\text{Betti}}^1(Y; \mathbf{U}(n)) \simeq \text{Hom}_{\theta}(\pi_1 Y; \mathbf{U}(n) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/\mathbf{U}(n)$. Lorsque Y est l'ensemble des points fermés d'une courbe algébrique réelle (Exemple 2.7), l'espace de représentations ci-dessus est l'espace étudié dans [Sch11, Sch12, LS13] et [Sch17]. Nous présenterons dans le Chapitre 3 nos principaux résultats sur la géométrie et la topologie de cet espace.
2. Si $G = \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ et $\theta(g) = g$, alors

$$\mathbf{H}_{\text{Betti}}^1(Y; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})) \simeq \text{Hom}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R}))/\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R}),$$

soit la variété de représentations usuelle, car $\pi_1 Y$ agit ici trivialement sur G . Comme le cas où π est sans torsion le montre déjà, la topologie de $\mathbf{H}_{\text{Betti}}^1(Y; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R}))$ n'est pas séparée. Dans le Chapitre 4, nous présenterons les résultats de [ALS18], qui montrent comment étudier une composante particulière de cet espace, appelée *composante de Hitchin* et homéomorphe à un espace vectoriel réel, dont nous calculons explicitement la dimension.

3. Si $G = \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$ et $\theta(g) = \bar{g}$, alors

$$\mathbf{H}_{\text{Betti}}^1(Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})) \simeq \text{Hom}_{\theta}(\pi_1 Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C}) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/\mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$$

et nous verrons en 2.5 quel est l'espace de Dolbeault correspondant. Si Y est une surface de Klein, cet espace a été étudié par I. Biswas, O. García-Prada et J. Hurtubise dans [BGP14].

4. Supposons ici que Y est le quotient d'une courbe hyperelliptique (X, σ) et soit $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ muni de l'involution holomorphe $\sigma(g) = {}^t g^{-1}$. Alors

$$\mathbf{H}_{\text{Betti}}^1(Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})) \simeq \text{Hom}_{\sigma}(\pi_1 Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C}) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/\mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$$

paramètre les *systèmes locaux σ -équivariants sur (X, σ)* et nous verrons dans l'Exemple 2.42 (Section 2.5) quel est l'espace de Dolbeault correspondant.

2.2. Systèmes locaux

Avant de passer à une description holomorphe de $\mathbf{H}_{\text{Betti}}^1(Y; G)$ dans la Section 2.5, donnons une interprétation de ces espaces de *représentations généralisées* (= morphismes croisés de $\pi_1 Y$ dans G) en termes de *systèmes locaux*, également généralisés, sur Y . Rappelons que, étant donné un groupe G , un système local de groupe G sur un espace topologique X est par définition un faisceau localement constant \mathcal{F} sur X admettant G comme groupe de structure⁽⁶⁾ ([Gro55]). L'exemple type est le faisceau \mathcal{S} des solutions locales d'une équation différentielle linéaire $W'(z) = A(z)W(z)$, où Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $A : \Omega \rightarrow \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$ est une application holomorphe : \mathcal{S} est alors un faisceau localement constant d'espaces vectoriels complexes de dimension n , admettant le groupe $\mathbf{GL}(n; \mathbb{C}) \simeq \text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ comme groupe de structure. Plus géométriquement, on peut munir le groupe G de la topologie discrète et penser à un système local de groupe G comme un *torseur* (=espace homogène principal) sous le revêtement en groupes $G_X := X \times G$ au-dessus de X , c'est-à-dire un revêtement $V \rightarrow X$ muni d'une action de G_X qui est simple et transitive dans les fibres. De manière équivalente, V est un revêtement de X muni d'un morphisme $V \times G_X \rightarrow V$, vérifiant les axiomes d'une action de groupe (à droite) et tel que le morphisme induit

$$\begin{aligned} V \times G_X &\longrightarrow V \times V \\ (p, g) &\longrightarrow (p, p \cdot g) \end{aligned}$$

6. C'est-à-dire que les germes d'automorphismes de \mathcal{F} sont exactement les germes d'applications localement constantes à valeurs dans G .

est un isomorphisme⁽⁷⁾. Par exemple, G_X est un torseur sous lui-même pour l'action par translation à droite de G_X sur lui-même. Le faisceau des sections locales de G_X est bien localement constant puisque G est discret, et il admet G comme groupe de structure. Quel que soit le point de vue adopté (torseur sous un revêtement en groupes ou bien faisceau), tous les systèmes locaux de groupe G sur X sont localement isomorphes au torseur G_X (respectivement, au faisceau des sections locales de G_X).

La description des systèmes locaux comme toseurs est très facilement généralisable au cas orbifold ; il suffit pour cela de se donner un revêtement en groupes \mathcal{G} de Y et de considérer les toseurs sous cet objet. L'exemple clé est le suivant : étant donné un orbifold Y , un groupe discret G et une action $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow G$, on considère le revêtement produit $G_{\tilde{Y}} := \tilde{Y} \times G$, au-dessus du revêtement universel de Y , et on le munit de l'action de $\pi_1 Y$ donnée par $\gamma \cdot (\xi, g) := (\gamma \cdot \xi, \varphi_\gamma(g))$. On peut alors former le quotient $\mathcal{G}_\varphi := [G_{\tilde{Y}}/\pi_1 Y]$, qui est un orbifold et un revêtement en groupes sur Y , non trivial en général⁽⁸⁾.

Définition 2.10. — Soit Y un orbifold et $\mathcal{G} \rightarrow Y$ un revêtement en groupes. On appelle \mathcal{G} -système local sur Y tout \mathcal{G} -torseur \mathcal{V} au-dessus de Y , i.e. tout revêtement (orbifold) $\mathcal{V} \rightarrow Y$ muni d'une action $\mathcal{V} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{V}$ pour laquelle le morphisme induit $\mathcal{V} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ est un isomorphisme. Un morphisme entre deux \mathcal{G} -systèmes locaux \mathcal{V} et \mathcal{V}' est un morphisme de revêtements orbifolds $u : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ qui est en outre \mathcal{G} -équivariant.

Lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\varphi$ comme ci-dessus, c'est-à-dire que \mathcal{G} est induit par un morphisme $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$, on dira aussi que le \mathcal{G} -système local \mathcal{V} est un système local de groupe G . Du point de vue des faisceaux, on peut définir les systèmes locaux orbifold comme suit. Un faisceau (orbifold) sur un ouvert de carte $[U/\Gamma]$ de Y est un faisceau Γ -équivariant sur U , et un système local de groupe G sur $[U/\Gamma]$ est un faisceau Γ -équivariant sur U , localement constant et admettant G comme groupe de structure, où la notion de Γ -équivariance est prise relativement à un morphisme $\varphi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G)$. Un système local sur un orbifold Y est alors un faisceau orbifold localement isomorphe à un système local sur les ouverts $[U/\Gamma]$ d'un atlas de Y . En guise d'exemple, on peut considérer le faisceau des sections locales de \mathcal{G}_φ , que nous noterons $\mathcal{C}_Y(G)$.

Exemple 2.11. — *Equations différentielles avec symétries.* Des exemples élémentaires de systèmes locaux orbifold sont fournis par les équations différentielles invariantes sous l'action d'un groupe fini.

1. Soit $Y := [\mathbf{D}(0;1)/\mu_n]$ le quotient du disque unité par le groupe des racines n -ièmes de l'unité ($n \geq 2$). On considère l'équation différentielle linéaire $\frac{d}{dz}u(z) - nz^{n-1}u(z) = 0$ sur $\mathbf{D}(0;1)$. Sur n'importe quel ouvert μ_n -invariant $U \subset \mathbf{D}(0;1)$, le groupe μ_n agit sur l'espace des solutions définies sur U via $u^\zeta(z) := u(\zeta z)$ si $\zeta^n = 1$. Par exemple, l'espace des solutions définies sur un disque centré en 0 est un espace vectoriel complexe de dimension 1, admettant la fonction μ_n -invariante $\exp(z^n)$ comme base. Le système local associé (=faisceau des solutions locales de l'équation) est isomorphe au faisceau des sections localement constantes de $\mathbf{D}(0;1) \times \mathbb{C}$, qui admet \mathbb{C}^* comme groupe de structure. On peut donc le voir comme un torseur sous le revêtement en groupes $\mathbf{D}(0;1) \times \mathbb{C}^*$, admettant de plus une action de μ_n , compatible avec celle de ce même groupe sur la base. Le quotient $[(\mathbf{D}(0;1) \times \mathbb{C})/\mu_n]$ est un revêtement orbifold de $Y = [\mathbf{D}(0;1)/\mu_n]$. Il peut être vu comme un torseur \mathcal{V} sous le revêtement en groupes $\mathcal{G}_\varphi := [(\mathbf{D}(0;1) \times \mathbb{C}^*)/\mu_n]$, lequel est isomorphe à $Y \times \mathbb{C}^*$ puisqu'ici

7. Ici, les produits $P \times G_X$ et $P \times P$ sont pris dans la catégorie des revêtements de X , c'est-à-dire que ce sont des produits fibrés d'espaces topologiques au-dessus de X .

8. Si l'orbifold \tilde{Y} est une variété topologique, on a toujours $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_\varphi$ pour un certain groupe discret G et un certain morphisme $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$ car, si l'on note $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ le revêtement universel de Y , le revêtement en groupes $q^* \mathcal{G} \rightarrow \tilde{Y}$ est nécessairement trivial, isomorphe à $\tilde{Y} \times G$ pour un certain groupe discret G , et l'action par automorphismes de $\pi_1 Y$ sur $q^* \mathcal{G}$, provenant de l'identification canonique des fibres $(q^* \mathcal{G})_\xi \simeq \mathcal{G}_{q(\xi)} \simeq (q^* \mathcal{G})_{\gamma \cdot \xi}$ pour $\xi \in \tilde{Y}$ et $\gamma \in \pi_1 Y$, est alors donnée par un morphisme $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$.

μ_n agit trivialement sur \mathbb{C}^* . Les sections locales de \mathcal{V} au-dessus de $[U/\mu_n]$ s'identifient aux solutions locales μ_n -invariantes de l'équation $\frac{d}{dz}u(z) - nz^{n-1}u(z) = 0$ sur U .

2. Dans l'exemple précédent, $\mathbf{D}(0; 1)$ possède une structure réelle canonique $z \mapsto \bar{z}$, qui induit une structure réelle $\bar{u}(z) := \overline{u(\bar{z})}$ sur l'espace des germes de solutions de l'équation $u' = nz^{n-1}u$ car les coefficients de cette équation sont des polynômes en z dont les coefficients sont réels et $\frac{d}{dz}\bar{u}(z) = \overline{u'(\bar{z})}$. Si on note D_n le groupe diédral $\mu_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur μ_n par conjugaison complexe, alors D_n agit non trivialement sur \mathbb{C}^* (via la projection sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ suivi de la conjugaison complexe, comme en (2.1.3) avec $\pi = D_n$ et $G = \mathbb{C}^*$) et le fibré $\mathbf{D}(0; 1) \times \mathbb{C}$ est D_n -équivariant au-dessus de $\mathbf{D}(0; 1)$. Il descend donc à $[\mathbf{D}(0; 1)/D_n] \simeq [Y/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})]$, où il définit un torseur \mathcal{V} sous le revêtement en groupes non trivial $[(\mathbf{D}(0; 1) \times \mathbb{C}^*)/D_n]$. Là encore, les sections locales de \mathcal{V} au-dessus de $[U/D_n]$ s'identifient aux solutions locales D_n -invariantes de l'équation $\frac{d}{dz}u(z) - nz^{n-1}u(z) = 0$ sur U .

Dans chacun des deux exemples ci-dessus, le point de vue équivariant et le point de vue orbifold sont bien sûr équivalents car dans les deux cas l'orbifold considéré est présenté comme un quotient global. Mais dans le deuxième exemple la condition d'équivariance est plus compliquée à écrire car il faut tenir compte de l'action non triviale de D_n sur \mathbb{C}^* , alors que le point de vue orbifold permet d'inclure cette action directement dans la définition du revêtement en groupes $[(\mathbf{D}(0; 1) \times \mathbb{C}^*)/D_n]$.

On peut alors montrer la correspondance attendue entre les systèmes locaux de groupe G sur un orbifold Y et les représentations généralisées à valeurs dans G du groupe fondamental $\pi_1 Y$.

Théorème 2.12. — Soit Y un orbifold et soit G un groupe discret muni d'une action $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$. On note $\mathcal{G}_\varphi \rightarrow Y$ le revêtement en groupes

$$\mathcal{G}_\varphi := [(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y] \rightarrow Y$$

associé à φ , où $\pi_1 Y$ agit sur $G_{\tilde{Y}} := \tilde{Y} \times G$ via $\gamma \cdot (\xi, g) := (\gamma \cdot \xi, \varphi_\gamma(g))$.

Alors l'application qui envoie une représentation généralisée $\varrho \in \mathcal{Z}_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$ sur le \mathcal{G}_φ -torseur

$$\mathcal{V}_\varrho := [(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y],$$

où $\pi_1 Y$ agit sur $\tilde{Y} \times G$ via $\gamma \cdot (\xi, h) := (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(h))$, induit une bijection entre l'espace de Betti orbifold $\mathbb{H}_{\text{Betti}}^1(Y; G) := \mathbb{H}_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de \mathcal{G}_φ -torseurs sur Y .

Démonstration. — Vérifions d'abord brièvement que \mathcal{V}_ϱ est bien un \mathcal{G}_φ -torseur sur Y . Il suffit pour cela de vérifier que le revêtement produit $\tilde{\mathcal{V}} := \tilde{Y} \times G$ est un $G_{\tilde{Y}}$ -torseur $\pi_1 Y$ -équivariant sur Y , l'action à droite de $G_{\tilde{Y}}$ sur $\tilde{\mathcal{V}}$ étant définie, pour $(\xi, h) \in \tilde{\mathcal{V}}$ et $(\xi, g) \in G_{\tilde{Y}}$, par $(\xi, h) \cdot (\xi, g) := (\xi, hg)$. Par définition de cette action, le morphisme canonique $\tilde{\mathcal{V}} \times G_{\tilde{Y}} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{V}}$ est bien un isomorphisme. D'après l'énoncé, l'action de $\pi_1 Y$ sur $\tilde{\mathcal{V}}$ est définie par $\gamma \cdot (\xi, h) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(h))$ et on vérifie que c'est bien une action car $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ est un morphisme croisé relativement à $\varphi : \pi \rightarrow \text{Aut}(G)$, qui est lui-même un morphisme de groupes. De plus, cette action de $\pi_1 Y$ sur $\tilde{\mathcal{V}}$ relève l'action de $\pi_1 Y$ sur \tilde{Y} et est compatible avec celle de $G_{\tilde{Y}}$ au sens suivant :

$$\gamma \cdot ((\xi, h) \cdot (\xi, g)) = (\gamma \cdot (\xi, h)) \cdot (\gamma \cdot (\xi, g)),$$

ce qui découle du fait que les φ_γ sont des automorphismes de groupes. En effet,

$$\gamma \cdot (\xi, hg) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(hg)) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(h)\varphi_\gamma(g)) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(h)) \cdot (\gamma \cdot \xi, \varphi_\gamma(g))$$

avec $(\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(h)) = \gamma \cdot (\xi, h)$ dans $\tilde{\mathcal{V}}$ et $(\gamma \cdot \xi, \varphi_\gamma(g)) = \gamma \cdot (\xi, g)$ dans $G_{\tilde{\mathcal{Y}}}$. On a donc, pour chaque $\gamma \in \pi_1 Y$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{\mathcal{V}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{Y} \end{array}$$

et on résume la condition de compatibilité avec l'action de $G_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ précédente en disant que $\tilde{\mathcal{V}}$ est un $G_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ -torseur $\pi_1 Y$ -équivariant, ou encore un $(\pi_1 Y, G_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ -torseur. Comme par définition $\mathcal{G}_\varphi = [G_{\tilde{\mathcal{Y}}}/\pi_1 Y]$, le $G_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ -torseur $\pi_1 Y$ -équivariant $\tilde{\mathcal{V}}$ sur \tilde{Y} induit bien un \mathcal{G}_φ -torseur $\mathcal{V}_\varrho = [\tilde{\mathcal{V}}/\pi_1 Y]$ sur $Y = [\tilde{Y}/\pi_1 Y]$.

Il s'agit maintenant de voir que, réciproquement, tout \mathcal{G}_φ -torseur \mathcal{V} sur Y est isomorphe à un tosseur \mathcal{V}_ϱ défini comme ci-dessus par un morphisme croisé $\varrho \in Z_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$. Pour cela, notons $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ le revêtement universel de Y . Alors l'image inverse $q^*\mathcal{V}$ est un revêtement de \tilde{Y} et un $G_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ -torseur $\pi_1 Y$ -équivariant (puisque $q^*\mathcal{G}_\varphi = G_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ par définition de \mathcal{G}_φ). Comme \tilde{Y} est le revêtement universel de Y , le revêtement $q^*\mathcal{V} \rightarrow \tilde{Y}$ est nécessairement trivial, isomorphe à $\tilde{Y} \times G$ comme $G_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ -torseur. À travers cet isomorphisme, l'action de $\pi_1 Y$ sur $q^*\mathcal{V}$ est définie par un homomorphisme croisé $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$, entièrement déterminé par la condition $\gamma \cdot (\xi, 1_G) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma))$, où $\varrho(\gamma)$ est indépendant de ξ car G est supposé discret et l'action de $\pi_1 Y$ sur $\tilde{Y} \times G$ est continue. L'application $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ ainsi définie est bien un homomorphisme croisé car $q^*\mathcal{V}$ est par construction un $G_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ -torseur $\pi_1 Y$ -équivariant relativement à $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \gamma_2) \cdot (\xi, 1_G) &= \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot (\xi, 1_G)) \\ &= \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \xi, \varrho(\gamma_2)) \\ &= \gamma_1 \cdot ((\gamma_2 \cdot \xi, 1_G) \cdot (\gamma_2 \cdot \xi, \varrho(\gamma_2))) \\ &= (\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \xi, 1_G)) \cdot (\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \xi, \varrho(\gamma_2))) \\ &= (\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \xi), \varrho(\gamma_1)) \cdot (\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \xi), \varphi_{\gamma_1}(\varrho(\gamma_2))) \\ &= ((\gamma_1 \gamma_2) \cdot \xi, \varrho(\gamma_1)\varphi_{\gamma_1}(\varrho(\gamma_2))), \end{aligned}$$

ce qui implique bien $\varrho(\gamma_1 \gamma_2) = \varrho(\gamma_1)\varphi_{\gamma_1}(\varrho(\gamma_2))$. \square

2.3. Torseurs plats

Soit Y un orbifold et soit $\mathcal{G} \rightarrow Y$ un fibré en groupes sur Y (pas nécessairement un revêtement), c'est-à-dire que \mathcal{G} est un fibré orbifold sur Y qui admet une section globale $e : Y \rightarrow \mathcal{G}$ et qui est muni de deux morphismes $\mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ et $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ vérifiant les axiomes d'une loi de groupe. Comme dans la Définition 2.10, on peut considérer les tosseurs sous \mathcal{G} . Dans la suite, on supposera *toujours* que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\varphi$, c'est-à-dire que \mathcal{G} est le fibré en groupes $[(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y]$ associé au choix d'un groupe topologique G (non nécessairement discret) et d'un morphisme $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$. On supposera aussi que le revêtement universel \tilde{Y} de Y est une variété (de classe C^∞) et on notera $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ ce revêtement. Alors, si $\mathcal{V} \rightarrow Y$ est un \mathcal{G}_φ -torseur, son image inverse $q^*\mathcal{V} \rightarrow \tilde{Y}$ est un tosseur sous le fibré en groupes $G_{\tilde{\mathcal{Y}}} = \tilde{Y} \times G$, c'est-à-dire un G -fibré principal sur la variété \tilde{Y} , qui est en outre $\pi_1 Y$ -équivariant (Définition 2.13). Un G -fibré principal sur la variété simplement connexe \tilde{Y} n'est pas nécessairement trivial (on peut penser au fibré des repères du fibré tangent de la sphère de dimension 2) mais il l'est sous l'hypothèse que \tilde{Y} est contractile (rappelons que le cas qui nous intéresse est $\tilde{Y} \simeq \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$), auquel cas les structures $\pi_1 Y$ -équivariantes d'un G -fibré principal trivial peuvent être classifiées très simplement (Théorème 2.14).

La définition suivante est écrite de manière à avoir un sens dans les trois contextes qui vont nous intéresser dans la suite : topologique, C^∞ et analytique complexe.

Définition 2.13 (Fibré principal équivariant). — Soient X une variété et G un groupe de Lie. Soit π un groupe agissant sur X par automorphismes et sur G via un morphisme $\varphi : \pi \rightarrow \text{Aut}(G)$. Soit E un G -fibré principal sur X . Une *structure π -équivariante sur E* est la donnée d'une famille de morphismes $\tau_\gamma : E \rightarrow E$ telle que :

1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau_\gamma} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

est commutatif et on a $\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \tau_{\gamma_1}\tau_{\gamma_2}$ et $\tau_{\text{Id}_X} = \text{Id}_E$.

2. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $p \in G$, on a $\tau_\gamma(p \cdot g) = \tau_\gamma(p) \cdot \varphi_\gamma(g)$.

Un G -fibré principal π -équivariant sur X est un couple (E, τ) où E est un G -fibré principal sur X et τ une structure π -équivariante sur E . Un morphisme entre deux G -fibrés principaux π -équivariants (E, τ) et (E', τ') est un morphisme de G -fibrés principaux $u : E \rightarrow E'$ tel que, pour tout $\gamma \in \pi$, on a $u \circ \tau_\gamma = \tau'_\gamma \circ u$.

Dans la suite, étant donné un groupe π agissant par automorphismes sur une variété X (topologique / différentiable / analytique complexe) et sur un groupe de Lie G via un morphisme $\varphi : \pi \rightarrow \text{Aut}(G)$, nous noterons $\mathcal{O}_X(G)$ le faisceau des fonctions (continues / de classe C^∞ / holomorphes) à valeurs dans G sur X et $\mathcal{O}(X; G)$ le *groupe* des sections globales de ce faisceau, muni de l'action de π par automorphismes induite par φ et définie, pour tout $\gamma \in \pi$ et tout $f \in \mathcal{O}(X; G)$, par $\gamma \cdot f := \varphi_\gamma \circ f \circ \gamma^{-1}$. Comme annoncé plus haut, on peut complètement classifier les structures π -équivariantes sur le G -fibré principal produit $X \times G$.

Théorème 2.14. — [Gro58] *Il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de structures π -équivariantes sur le G -fibré principal $X \times G$ et l'ensemble $H_\varphi^1(\pi; \mathcal{O}(X; G))$ des classes d'équivalence de morphismes croisés $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow \mathcal{O}(X; G)$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'une structure π -équivariante sur $X \times G$ est nécessairement définie par un morphisme croisé $\varrho : \pi \rightarrow \mathcal{O}(X; G)$, ce qui se démontre de la même façon que dans le Théorème 2.12, à la différence que là nous avons $\mathcal{O}(X; G) \simeq G$ car G était supposé discret. \square

Nous allons appliquer cela au cas où $X = \tilde{Y}$ est le revêtement universel d'un orbifold Y et π est le groupe fondamental $\pi_1 Y := \text{Aut}_Y(\tilde{Y})$, toujours sous l'hypothèse que \tilde{Y} est une variété. Le corollaire suivant découle immédiatement du Théorème 2.14 car un G -fibré principal sur un espace contractile est nécessairement trivial.

Corollaire 2.15. — *Plaçons-nous dans le contexte topologique ou C^∞ . Si \tilde{Y} est contractile, alors l'application qui envoie un morphisme croisé $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{Y}; G)$ vers le \mathcal{G}_φ -torseur*

$$(2.3.1) \quad \mathcal{V}_\varrho := [(\tilde{Y} \times G) / \pi_1 Y]$$

défini comme dans le Théorème 2.12 induit une bijection entre $H_\varphi^1(\pi_1 Y; \mathcal{C}(\tilde{Y}; G))$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de \mathcal{G}_φ -torseurs sur Y .

On dispose également du corollaire suivant, qui classe les toseurs analytiques de groupe (complexe) G sur un orbifold analytique Y dont le revêtement universel est une variété de Stein contractile. L'intérêt du Corollaire 2.16 est qu'il s'applique aux quotients du plan hyperbolique $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ par un groupe fuchsien, puisque les ouverts du plan complexe sont des cas particuliers d'espaces de Stein.

Corollaire 2.16. — [Gro58] *Plaçons-nous dans le contexte holomorphe. Si Y est un orbifold analytique complexe tel que \tilde{Y} est une variété de Stein contractile, alors l'ensemble des classes d'isomorphisme de \mathcal{G}_φ -torseurs analytiques sur Y est en bijection avec $H_\varphi^1(\pi_1 Y; \mathcal{O}(\tilde{Y}; G))$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{V} \rightarrow Y$ un \mathcal{G}_φ -torseur analytique. Comme \tilde{Y} est contractile, le G -fibré principal analytique $q^*\mathcal{V} \rightarrow \tilde{Y}$ est topologiquement trivial. Et comme \tilde{Y} est de Stein, un théorème de Grauert montre qu'il est holomorphiquement trivial ([Gra56]). On peut donc appliquer le Théorème 2.14. \square

Remarque 2.17. — Si Y est un orbifold dianalytique non-orientable et $\pi_1 Y$ agit sur un groupe analytique complexe G comme en (2.1.3), c'est-à-dire via le morphisme canonique $\varepsilon : \pi_1 Y \rightarrow \{\pm 1\}$ de (2.1.4) et une involution anti-holomorphe $\theta : G \rightarrow G$, alors on a une notion associée de \mathcal{G}_φ -torseur dianalytique sur Y . Le Corollaire 2.16 s'étend à ce cadre pour montrer que les \mathcal{G}_φ -torseurs dianalytiques sur Y sont encore une fois classifiés par $H_\varphi^1(\pi_1 Y; \mathcal{O}(\tilde{Y}; G))$.

Plaçons-nous maintenant dans le contexte C^∞ . D'après le Corollaire 2.15, si $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ est un groupe fuchsien agissant sur un groupe de Lie G via un morphisme de groupes $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$, les \mathcal{G}_φ -torseurs sur l'orbifold $Y := [\mathbf{H}_\mathbb{R}^2/\pi]$ sont classifiés par les morphismes croisés $\varrho \in Z_\varphi^1(\pi_1 Y; \mathcal{O}(\tilde{Y}; G))$, où $\mathcal{O}(\tilde{Y}; G)$ est le groupe des applications différentiables $f : \tilde{Y} \rightarrow G$. En particulier, si ϱ est à valeurs dans les fonctions constantes, on obtient un \mathcal{G}_φ -torseur d'un type particulier, qui est l'analogue dans le présent contexte \mathcal{C}_∞ , des \mathcal{G}_φ -systèmes locaux rencontrés précédemment (Définition 2.10). Par construction, les \mathcal{G}_φ -torseurs ainsi obtenus, que nous allons maintenant caractériser, sont classifiés par $H_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$, comme dans le Théorème 2.12. Pour obtenir ce résultat, il suffit de comprendre quelle structure supplémentaire le \mathcal{G}_φ -torseur \mathcal{V}_ϱ du Corollaire 2.15 acquiert lorsque le morphisme croisé ϱ est à valeurs dans le sous-groupe $G \subset \mathcal{O}(\tilde{Y}; G)$, constitué des fonctions constantes de \tilde{Y} dans G .

Supposons désormais, avec les mêmes notations que précédemment, que π est discret et agit de manière propre sur la variété différentielle X . Alors, si (E, τ) est un G -fibré principal π -équivariant sur X , on dispose d'une action induite de π sur l'espace des G -connexions sur E , définie pour $\gamma \in \pi$ par pullback de la connexion à γ^*E , qui lui-même s'identifie canoniquement à E à l'aide de la structure π -équivariante de ce fibré. Les connexions orbifoldes sur le $[(X \times G)/\pi]$ -torseur $[E/\pi]$ au-dessus de l'orbifold $[X/\pi]$ correspondent alors aux G -connexions π -invariantes sur E . Rappelons en effet qu'un \mathcal{G}_φ -torseur \mathcal{V} sur un orbifold Y est donné, dans une carte orbifold $[U/\Gamma]$ avec $U \subset X$ ouvert et Γ fini, par un G -fibré principal Γ -équivariant (que l'on peut supposer trivial en tant que G -fibré, c'est-à-dire de la forme $U \times G$), où la structure équivariante est donnée (comme dans le Théorème 2.12) par un morphisme croisé $\varrho_\Gamma : \Gamma \rightarrow G$ et par la formule $\gamma \cdot (x, h) = (\gamma \cdot x, \varrho_\Gamma(\gamma)\varphi_\gamma(h))$: dans une telle carte, la donnée d'une \mathcal{G}_φ -connexion orbifold correspond par définition à la donnée d'une G -connexion Γ -invariante sur $U \times G$. La courbure d'une telle connexion est alors définie, de même, dans les cartes orbifoldes. On peut donc parler de connexion orbifold *plate* pour désigner une connexion orbifold dont la courbure est nulle.

Définition 2.18 (Torseur plat). — Soit Y un orbifold dont le revêtement universel \tilde{Y} est une variété C^∞ et soit G un groupe de Lie muni d'une action $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$. Un \mathcal{G}_φ -torseur plat sur Y est un couple (\mathcal{V}, ∇) constitué d'un \mathcal{G}_φ -torseur plat \mathcal{V} sur Y et d'une \mathcal{G}_φ -connexion orbifold plate ∇ sur \mathcal{V} . Un morphisme entre deux \mathcal{G}_φ -torseurs plats (\mathcal{V}, ∇) et (\mathcal{V}', ∇') est un morphisme de \mathcal{G}_φ -torseurs $u : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ (i.e. un morphisme de fibrés orbifolds $u : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ qui est en outre \mathcal{G}_φ -équivariant) tel que $u^*\nabla' = \nabla$.

On arrive alors au résultat de classification annoncé plus haut.

Théorème 2.19. — *On se place dans le cadre de la Définition 2.18. Soit $c \in Z_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$. La connexion plate canonique sur le le G -fibré principal $\tilde{Y} \times G$ est $\pi_1 Y$ -invariante pour l'action*

de $\pi_1 Y$ induite par la structure $\pi_1 Y$ -équivariante de $\tilde{Y} \times G$ associée à ϱ , qui est donnée par $\gamma \cdot (\xi, h) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(h))$. Le \mathcal{G}_φ -torseur associé $\mathcal{V}_\varrho := [(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y]$ est donc muni d'une \mathcal{G}_φ -connexion orbifold plate, que nous noterons ∇_{can} .

Réciproquement, si (\mathcal{V}, ∇) est un \mathcal{G}_φ -torseur plat sur Y , il existe un homomorphisme croisé $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ tel que $(\mathcal{V}_\varrho, \nabla_{\text{can}}) \simeq (\mathcal{V}, \nabla)$.

La correspondance décrite ci-dessus induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de \mathcal{G}_φ -torseurs plats sur Y et l'ensemble $H_{\text{Betti}}^1(Y; G) := H_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$.

Démonstration. — L'invariance de la connexion plate canonique de $\tilde{Y} \times G$ sous l'action de $\pi_1 Y$ est assez facile à vérifier ([ALS18, Proposition 3.2]). Tout \mathcal{G}_φ -torseur de la forme \mathcal{V}_ϱ est donc muni d'une connexion orbifold plate ∇_{can} .

Pour la réciproque, on peut raisonner de la façon suivante :

1. Si (\mathcal{V}, ∇) est un \mathcal{G}_φ -torseur plat sur Y et $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ est le revêtement universel de Y , le G -fibré principal $q^*\mathcal{V}$ est muni de la G -connexion plate $\pi_1 Y$ -invariante $q^*\nabla$.
2. Comme \tilde{Y} est une variété C^∞ simplement connexe, le transport parallèle sur $q^*\mathcal{V}$, par rapport à la connexion $q^*\nabla$, induit un isomorphisme de fibrés plats $q^*\mathcal{V} \simeq \tilde{Y} \times G$.
3. Via l'isomorphisme $q^*\mathcal{V} \simeq \tilde{Y} \times G$ précédent, le G -fibré $\tilde{Y} \times G$ acquiert une structure $\pi_1 Y$ -équivariante. D'après le Théorème 2.14, celle-ci est nécessairement définie par un morphisme croisé $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Y}; G)$.
4. Le fait que la connexion canonique de $\tilde{Y} \times G$ est $\pi_1 Y$ -invariante implique alors que ϱ est en fait à valeurs dans $G \subset \mathcal{O}(\tilde{Y}; G)$.

□

Étant donné un \mathcal{G}_φ -torseur plat (\mathcal{V}, ∇) sur Y , on peut appeler *représentation d'holonomie généralisée* le morphisme croisé $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ tel que $\mathcal{V}_\varrho \simeq \mathcal{V}$ en tant que fibrés plats. Cette remarque peut d'ailleurs servir de point de départ à une démonstration légèrement différente du Théorème 2.19, valable sous l'hypothèse que l'orbifold Y possède un revêtement galoisien fini $X \rightarrow Y$ tel que X est une variété et $\pi_1 X$ agit de manière triviale sur G . Cette hypothèse est vérifiée dans tous les exemples que nous avons rencontrés (Exemples 2.3 et 2.4) : d'une part parce que nous supposons toujours que $\pi_1 Y$ s'identifie à un sous-groupe de type fini (et même cocompact) de $\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$, donc le lemme de Selberg implique l'existence d'un revêtement galoisien fini tel que X est une surface C^∞ , et d'autre part parce que, dans tous nos exemples, l'image de $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$ est un groupe fini; on peut donc, si besoin est, remplacer la variété X par la variété X' définie par $\pi_1 X' := \ker \varphi|_{\pi_1 X}$, qui est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1 Y$ qui agit trivialement sur G . Et sous cette hypothèse, les \mathcal{G}_φ -torseurs sur Y correspondent bijectivement aux G -fibrés principaux Γ -équivariants sur X , où $\Gamma := \pi_1 Y/\pi_1 X$ est le groupe d'automorphismes du revêtement, et les \mathcal{G}_φ -torseurs plats correspondent bijectivement aux G -fibrés principaux Γ -équivariants munis d'une G -connexion qui est à la fois plate et Γ -invariante (cette propriété est une simple reformulation de la notion de fibré orbifold avec connexion lorsque l'orbifold Y admet une présentation comme un quotient global $[X/\Gamma]$, avec Γ fini). Pour démontrer le Théorème 2.19, il suffit donc de voir qu'un G -fibré Γ -équivariant (\mathcal{V}, τ) muni d'une connexion plate et Γ -invariante ∇ possède une représentation d'holonomie généralisée $\varrho \in Z_\varphi^1(\pi_1([X/\Gamma]); G)$.

Pour cela, soit $c : [0; 1] \rightarrow X$ un chemin dans X et soit $T_c^\nabla : V_{c(0)} \rightarrow V_{c(1)}$ l'opérateur de transport parallèle le long de c . Comme la connexion ∇ est Γ -invariante, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_{c(0)} & \xrightarrow{T_c^\nabla} & V_{c(1)} \\ \downarrow \tau_\gamma & & \downarrow \tau_\gamma \\ V_{\gamma(c(0))} & \xrightarrow{T_{\gamma \circ c}^\nabla} & V_{\gamma(c(1))} \end{array}$$

où $\tau_\gamma : V \rightarrow V$ désigne le relèvement à V de l'action de Γ sur X (i.e. $\tau = (\tau_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est, par définition, la structure Γ -équivariante de V). Et la commutativité de ce diagramme entraîne que la représentation d'holonomie de $\varrho_\nabla : \pi_1 X \rightarrow G$ de la connexion plate ∇ se prolonge

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 X & \xrightarrow{\varrho_\nabla} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1 Y & \xrightarrow{\widehat{\varrho}} & G \rtimes \Gamma \end{array}$$

en une représentation $\widehat{\varrho} : \pi_1 Y \rightarrow G \rtimes \Gamma$ ou, de manière équivalente, en un morphisme croisé $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ (cf. [Sch17, Proposition 4.2 et Théorème 4.4]), ce qui termine la démonstration du Théorème 2.19 sous l'hypothèse additionnelle sur Y mentionnée plus haut (qui est satisfaite dans tous les exemples que nous étudions). Au passage, on a aussi démontré le résultat suivant, qui nous sera utile par la suite.

Théorème 2.20. — *Soit Y un orbifold de classe C^∞ et supposons qu'il existe un revêtement galoisien fini $p : X \rightarrow Y$ de l'orbifold Y par une variété C^∞ telle que $\pi_1 X$ agisse trivialement sur G . On note Γ le groupe d'automorphismes du revêtement, de sorte que $Y \simeq [X/\Gamma]$ en tant qu'orbifold. Alors il existe une bijection entre $H_{\text{Betti}}^1(Y; G)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de G -fibrés principaux Γ -équivariants $E \rightarrow X$ munis d'une G -connexion ∇ qui soit à la fois Γ -invariante et plate.*

Remarque 2.21. — On peut observer pour terminer que, lorsque $\pi_1 Y$ agit par automorphismes sur un groupe de Lie complexe G , les toseurs plats sous \mathcal{G}_φ sont aussi analytiques, puisque les applications localement constantes à valeurs dans G sont holomorphes. On peut donc étendre au cadre orbifold avec action non triviale de $\pi_1 Y$ sur G la définition du foncteur de Weil ([Wei38, Gro58, NS65])

$$\varrho \in Z_\varphi^1(\pi_1 Y; G) \mapsto \mathcal{E}_\varrho := [(\widetilde{Y} \times G)/\pi_1 Y].$$

Il serait intéressant de caractériser l'image essentielle de ce foncteur en termes de classes caractéristiques, au moins dans le cas $G = \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$, comme dans le Théorème de Weil original, qui affirme qu'un $\mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$ -fibré E sur l'orbifold Y provient d'une représentation si et seulement si toutes ses composantes indécomposables sont de degré 0 ([Wei38, Ati57a, Gro58]), puis d'étendre également cela au cas dianalytique (au sens de la Remarque 2.17).

2.4. Réductions harmoniques

Comme pour les G -fibrés principaux, on dispose, pour les \mathcal{G} -torseurs, d'une notion de *réduction* à un sous-fibré en groupes $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{G}$. Cela consiste, par définition, à choisir une \mathcal{K}_y -orbite dans chaque fibre \mathcal{V}_y d'un \mathcal{G} -torseur $\mathcal{V} \rightarrow Y$. Formellement, il s'agit donc de choisir une section du fibré $\mathcal{V}/\mathcal{K} \rightarrow Y$. Etant donné une telle section $s : Y \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{K}$, on pose $\mathcal{V}_\mathcal{K} := \pi^{-1}(\text{Im } s)$, où $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{K}$ désigne la projection canonique. Le morphisme $\mathcal{V} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{V}$, qui définit l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{V} , induit alors un morphisme $\mathcal{V}_\mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{V}_\mathcal{K}$, qui fait de $\mathcal{V}_\mathcal{K}$ un \mathcal{K} -torseur puisque le morphisme associé $\mathcal{V}_\mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{V}_\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ est un isomorphisme. De plus, \mathcal{K} agit sur $\mathcal{V}_\mathcal{K} \times \mathcal{G}$ via $(p, g) \cdot k := (p \cdot k, k^{-1}g)$ et on a un isomorphisme de \mathcal{G} -torseurs

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{V}_\mathcal{K} \times \mathcal{G})/\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ [p, g] & \longmapsto & p \cdot g \end{array}$$

où la structure de \mathcal{G} -torseur sur $\mathcal{V}_\mathcal{K} \times_\mathcal{K} \mathcal{G} := (\mathcal{V}_\mathcal{K} \times \mathcal{G})/\mathcal{K}$ est donnée par $[p, g] \cdot g' := [p, gg']$. Inversement, la donnée d'un \mathcal{K} -torseur $\mathcal{V}_\mathcal{K}$ et d'un isomorphisme de \mathcal{G} -torseurs $\mathcal{V}_\mathcal{K} \times_\mathcal{K} \mathcal{G} \simeq \mathcal{V}$ définit une section de \mathcal{V}/\mathcal{K} , induite par passage au quotient par l'inclusion canonique $\mathcal{V}_\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{V}$, qui est \mathcal{K} -équivariante.

Définition 2.22. — Soit $\mathcal{G} \rightarrow Y$ un fibré en groupes sur l'orbifold Y et soit $\mathcal{V} \rightarrow Y$ un \mathcal{G} -torseur. On appelle *réduction* de \mathcal{V} à un sous-fibré en groupes $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{G}$, ou simplement *\mathcal{K} -réduction*, la donnée d'une section globale du fibré \mathcal{V}/\mathcal{K} ou, de manière équivalente, d'un \mathcal{K} -torseur $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ et d'un isomorphisme de \mathcal{G} -torseurs $\mathcal{V}_{\mathcal{K}} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{G} \simeq \mathcal{V}$.

On peut alors remarquer que, comme pour les G -fibrés, il existe un isomorphisme de fibrés orbifold

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}/\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{V} \times_{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{K}) \\ p\mathcal{K}_y & \longmapsto & [p, e_y\mathcal{K}_y] \\ (p \cdot g)\mathcal{K}_y & \longleftarrow & [p, g\mathcal{K}_y] \end{array}$$

où e_y est l'élément neutre du groupe \mathcal{G}_y et $p \in \mathcal{V}_y$, tandis que $g \in \mathcal{G}_y$ et l'action de \mathcal{G} sur $\mathcal{V} \times \mathcal{G}/\mathcal{K}$ est donnée, pour $g' \in \mathcal{G}_y$, par $(p, g\mathcal{K}_y) \cdot g' := (p \cdot g, (g')^{-1}g\mathcal{K}_y)$. Une \mathcal{K} -réduction de \mathcal{V} peut donc également être vue comme une section globale du fibré $\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{K}) \rightarrow Y$.

Supposons désormais que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\varphi} := [(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y]$ et que $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ est le sous-fibré en groupes associé à un sous-groupe $K \subset G$ invariant par $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$, i.e. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\varphi} := [(\tilde{Y} \times K)/\pi_1 Y]$ où $\gamma \in \pi_1 Y$ agit sur $K_{\tilde{Y}} := \tilde{Y} \times K$ via $\gamma \cdot (\xi, k) := (\gamma \cdot \xi, \varphi_{\gamma}(k))$. On parlera alors plus simplement de *K -réduction*. Dans la suite, nous serons particulièrement intéressés par le cas où K est un sous-groupe compact maximal de G . Dans ce cas, et si on suppose en outre que Y possède un revêtement fini par une variété X telle que $\pi_1 X \subset \pi_1 Y$ agit de manière triviale sur G , on peut montrer de la façon suivante qu'il existe toujours des K -réductions.

Lemme 2.23. — Soit Y un orbifold, G un groupe de Lie, et soit $\mathcal{G}_{\varphi} := [(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y]$ le fibré en groupes sur Y induit par le choix d'une action $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$. Soit $\mathcal{V} \rightarrow Y$ un \mathcal{G}_{φ} -torseur sur Y . Supposons que Y possède un revêtement galoisien fini par une variété X telle que $\varphi|_{\pi_1 X}$ soit le morphisme trivial. Soit $\Gamma := \text{Aut}_Y(X)$ le groupe d'automorphismes de ce revêtement et soit $q : X \rightarrow Y \simeq [X/\Gamma]$ la projection canonique. On suppose également qu'il existe un sous-groupe compact maximal K de G tel que, pour tout $\gamma \in \pi_1 Y$, $\varphi_{\gamma}(K) = K$. Alors il existe une bijection entre l'espace des sections de $\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_{\varphi}} (\mathcal{G}_{\varphi}/\mathcal{K}_{\varphi}) \rightarrow Y$ et l'espace, non vide, des sections Γ -invariantes du G -fibré principal Γ -équivariant $((q^*\mathcal{V}) \times_G (G/K)) \rightarrow X$. En particulier, \mathcal{V} possède des K -réductions.

Démonstration. — Comme $\pi_1 X \subset \ker \varphi$, on a $q^*\mathcal{G}_{\varphi} \simeq X \times G$ et $q^*\mathcal{K}_{\varphi} \simeq X \times K$, ce qui implique l'existence d'un isomorphisme de G -fibrés Γ -équivariants $q^*(\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_{\varphi}} (\mathcal{G}_{\varphi}/\mathcal{K}_{\varphi})) \simeq (q^*\mathcal{V}) \times_G (G/K)$, où $\Gamma \simeq \pi_1 Y/\pi_1 X$ agit sur G et K via le morphisme $\bar{\varphi} : \pi_1 Y/\pi_1 X \rightarrow \text{Aut}(G)$. D'où la bijection dont l'existence est affirmée dans l'énoncé. Comme de plus Γ est un groupe fini, et que l'on dispose d'une notion de barycentre dans l'espace symétrique G/K , on peut moyenner une section globale quelconque du G -fibré $(q^*\mathcal{V}) \times_G (G/K)$, qui existe car G/K est contractile, pour construire une section globale Γ -invariante. \square

Dans les cas qui nous intéressent, où $\pi_1 Y$ agit sur G via un morphisme $\varepsilon : \pi_1 Y \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et une involution $\theta : G \rightarrow G$ fixée une fois pour toutes (Exemples 2.3 et 2.4), la condition de φ -invariance de K est très facile à satisfaire : il suffit pour cela que K soit invariant par θ . En particulier, si G est le groupe des points réels d'un groupe algébrique réductif (comme c'est le cas dans nos exemples), on peut toujours trouver un sous-groupe compact maximal $K \subset G$ tel que $\theta(K) = K$ ([Hel78]). Dans la suite, nous considérerons principalement le cas où \mathcal{V} est un toseur plat au sens de la Définition 2.18, i.e. $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_{\varrho}$ pour un certain morphisme croisé $\varrho \in \mathbb{Z}_{\varphi}^1(\pi_1 Y; G)$, de sorte que $\mathcal{V} \simeq [\tilde{\mathcal{V}}/\pi_1 Y]$ où $\gamma \in \pi_1 Y$ agit sur $\tilde{\mathcal{V}} := \tilde{Y} \times G$ via $\gamma \cdot (\xi, h) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_{\gamma}(h))$. On dispose alors du résultat suivant.

Proposition 2.24. — Le groupe $\pi_1 Y$ agit sur $\tilde{Y} \times G/K$ via $\gamma \cdot (\xi, gK) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(g)\varphi_{\gamma}(g)K)$, induisant un isomorphisme $\mathcal{V}_{\varrho} \times_{\mathcal{G}_{\varphi}} (\mathcal{G}_{\varphi}/\mathcal{K}_{\varphi}) \simeq [(\tilde{Y} \times (G/K))/\pi_1 Y]$.

Démonstration. — Par définition de \mathcal{G}_φ et \mathcal{V}_ϱ , l'action de \mathcal{G}_φ sur $\mathcal{V}_\varrho \times (\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi)$ est induite par l'action analogue de $G_{\tilde{Y}}$ sur $\tilde{Y} \times (G_{\tilde{Y}}/K_{\tilde{Y}})$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de montrer qu'il existe un isomorphisme $\pi_1 Y$ -équivariant $\tilde{\mathcal{V}} \times_{G_{\tilde{Y}}} (G_{\tilde{Y}}/K_{\tilde{Y}}) \simeq \tilde{Y} \times (G/K)$, où $\gamma \in \pi_1 Y$ agit sur G/K comme dans l'énoncé. Pour cela, on pose

$$u: \begin{array}{ccc} \tilde{Y} \times (G_{\tilde{Y}}/K_{\tilde{Y}}) & \longrightarrow & \tilde{Y} \times (G/K) \\ ((\xi, h), (\xi, gK)) & \longmapsto & (\xi, hgK) \end{array}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} u(\gamma \cdot (\xi, h), (\gamma \cdot \xi, gK)) &= u((\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(h)), (\gamma \cdot \xi, \varphi_\gamma(g)K)) \\ &= (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(h)\varphi_\gamma(g)K) \\ &= (\gamma \cdot \xi, \varrho(\gamma)\varphi_\gamma(hg)K) \\ &= \gamma \cdot u((\xi, h), (\xi, gK)). \end{aligned}$$

Ce morphisme est $G_{\tilde{Y}}$ -invariant car $u((\xi, hg'), (\xi, (g')^{-1}gK)) = u((\xi, h), (\xi, gK))$ et le morphisme induit $\tilde{\mathcal{V}} \times_{G_{\tilde{Y}}} (G_{\tilde{Y}}/K_{\tilde{Y}}) \longrightarrow \tilde{Y} \times (G/K)$ est un isomorphisme. \square

Corollaire 2.25. — *Si $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_\varrho$ est un torseur plat, une application $\pi_1 Y$ -équivariante $f: \tilde{Y} \longrightarrow G/K$, où $\pi_1 Y$ agit sur G/K via $\gamma \cdot (\xi, gK) = (\gamma \cdot \xi, \varrho(g)\varphi_\gamma(g)K)$, induit une K -réduction de \mathcal{V} . Réciproquement, toute K -réduction de \mathcal{V} provient d'une telle application. En particulier, le Lemme 2.23 montre qu'il existe bien des applications $\pi_1 Y$ -équivariantes $f: \tilde{Y} \longrightarrow G/K$.*

Démonstration. — Une application $\pi_1 Y$ -équivariante $f: \tilde{Y} \longrightarrow G/K$ induit, par passage au quotient, une section de $[(\tilde{Y} \times G/K)/\pi_1 Y]$, lequel est isomorphe à $\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_\varphi} (\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi)$ d'après la Proposition 2.24. La réciproque découle du fait qu'une section de $\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_\varphi} (\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi)$ induit une section $\pi_1 Y$ -équivariante du tiré en arrière de ce fibré au revêtement universel de Y , qui n'est autre que $\tilde{Y} \times (G/K)$. \square

On souhaite maintenant énoncer dans ce cadre le théorème de Corlette ([Cor88]), qui garantit, sous une hypothèse de *stabilité* des torseurs plats, l'existence de K -réductions remarquables appelées K -réductions *harmoniques*. Pour cela, nous supposons dorénavant que l'orbifold Y est *compact* et muni d'une métrique riemannienne orbifold, i.e. sur chaque carte locale, d'une métrique riemannienne Γ -invariante sur U . Comme le groupe G est supposé réductif, l'espace tangent $T_{eK}(G/K) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ est muni d'un produit scalaire euclidien K -invariant (si G est semi-simple, on dispose d'un produit scalaire canonique : la restriction à \mathfrak{k}^\perp de la forme de Killing de \mathfrak{g}), ce qui permet de définir une métrique riemannienne G -invariante sur G/K et, partant, une métrique riemannienne orbifold \mathcal{G}_φ -invariante sur $\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi$. Soit alors (\mathcal{V}, ∇) un \mathcal{G}_φ -torseur avec connexion, par exemple un \mathcal{G}_φ -torseur plat. Le fibré orbifold $\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_\varphi} (\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi)$ est donc muni d'une connexion, induite par ∇ et la connexion de Levi-Civita de $\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi$, ce qui donne un sens à $|d_\nabla s|^2$, la norme de la partie verticale de la différentielle d'une section $s \in \Gamma(\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_\varphi} (\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi))$. En intégrant cette fonction positive par rapport à la densité riemannienne préalablement fixée sur Y , on obtient donc la notion d'*énergie* d'une K -réduction s de \mathcal{V} :

$$\mathcal{E}_\nabla(s) = \int_Y |d_\nabla s|^2.$$

Définition 2.26. — Soit (\mathcal{V}, ∇) un \mathcal{G}_φ -torseur avec connexion. Une K -réduction $s \in \Gamma(\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_\varphi} (\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi))$ est dite *harmonique* si elle est un point critique de la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{E}_\nabla: \Gamma(\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_\varphi} (\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi)) \longrightarrow [0; +\infty[$.

On montre alors que s est harmonique si et seulement si elle solution de l'équation d'Euler-Lagrange $d^* d_\nabla s = 0$, où d^* est l'opérateur adjoint de d pour la métrique L^2 sur l'espace des sections de $\mathcal{V} \times_{\mathcal{G}_\varphi} (\mathcal{G}_\varphi/\mathcal{K}_\varphi)$. Lorsque le \mathcal{G}_φ -torseur (\mathcal{V}, ∇) est *plat* et que $f: \tilde{Y} \longrightarrow G/K$ est l'application $\pi_1 Y$ -équivariante correspondante à s (Corollaire 2.25), on a $\mathcal{E}_\nabla(f) = \int_Y |df|^2$, où df

est la différentielle de f et l'intégrale est prise sur un domaine fondamental de l'action de $\pi_1 Y$ sur \tilde{Y} , de sorte que f induit une K -réduction harmonique si et seulement si f est harmonique en tant qu'application $\pi_1 Y$ -équivariante entre les deux variétés riemanniennes \tilde{Y} et G/K , ce que l'on résume dans la définition formelle suivante.

Définition 2.27. — Soit $\varrho \in Z_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$ un morphisme croisé et soit $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_\varrho$ le \mathcal{G}_φ -torseur plat associé (Définition 2.18). Soit K un sous-groupe compact maximal φ -invariant de G . D'après le Corollaire 2.25, une K -réduction de \mathcal{V} au sens de la Définition 2.22 peut alors être vue comme une application $\pi_1 Y$ -équivariante $f : \tilde{Y} \rightarrow G/K$, où $\pi_1 Y$ agit sur G/K via ϱ comme dans la Proposition 2.24. Une telle K -réduction est dite *harmonique* si f est harmonique en tant qu'application entre les variétés riemanniennes \tilde{Y} et G/K .

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit alors simplement $d^* df = 0$ et la théorie de Donaldson et Corlette ([Don87, Cor88]) fournit une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une K -réduction harmonique pour un toseur plat $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_\varrho$. Cette condition, dite *de stabilité*, porte sur le morphisme croisé $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ définissant le toseur plat $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_\varrho$. Notons que l'image d'un tel morphisme n'est pas un sous-groupe de G lorsque $\pi_1 Y$ agit non trivialement sur G , qui est le cas qui nous intéresse. On peut néanmoins étendre à ce cadre la notion de stabilité usuelle pour les représentations de groupes de surfaces, en se ramenant à un sous-groupe distingué d'indice fini dans $\pi_1 Y$ agissant de manière triviale sur G (de tels sous-groupes existent toujours dans notre cadre).

Définition 2.28. — Soit Y une orbi-surface fermée de caractéristique d'Euler négative. On dit qu'un morphisme croisé $\varrho \in Z_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$ est *polystable* (ou que le toseur plat \mathcal{V}_ϱ associé à ϱ est polystable) s'il existe un revêtement galoisien fini $q : X \rightarrow Y$ de Y par une surface fermée orientable X tel que :

1. $\pi_1 X$ agit trivialement sur G .
2. La clôture de Zariski de $\varrho(\pi_1 X)$ dans G est un groupe réductif.

Cette notion est bien définie car elle ne dépend pas du choix du revêtement galoisien fini $q : X \rightarrow Y$, comme nous allons le voir tout de suite⁽⁹⁾. Si X_1, X_2 sont deux revêtements galoisiens finis de Y tels que les groupes $\pi_1 X_1$ et $\pi_1 X_2$ agissent trivialement sur G , c'est également le cas du revêtement $q : X \rightarrow Y$ défini par le sous-groupe $\pi_1 X := \pi_1 X_1 \cap \pi_1 X_2 \subset \pi_1 Y$. Comme $\varrho|_{\pi_1 X_i}$ est un morphisme de groupes et que $\pi_1 X$ est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1 X_i$, on a que $\varrho(\pi_1 X)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\varrho(\pi_1 X_i)$. Donc $\overline{\varrho(\pi_1 X)}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\overline{\varrho(\pi_1 X_i)}$, la clôture de Zariski de $\varrho(\pi_1 X_i)$ dans G . En particulier, les groupes algébriques $\overline{\varrho(\pi_1 X_1)}$ et $\overline{\varrho(\pi_1 X_2)}$ ont même algèbre de Lie donc l'un est réductif si et seulement si l'autre l'est.

Remarque 2.29. — Il serait intéressant de savoir si la notion de stabilité, que l'on pourrait qualifier de *virtuelle*, de la Définition 2.28 correspond, comme dans le cas des groupes de surfaces, au fait que la G -orbite de ϱ (pour l'action par conjugaison croisée $\varrho^g(\gamma) := g^{-1}\varrho(\gamma)\varphi_\gamma(g)$ de G sur $Z_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$) est fermée dans $Z_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$, qui est la notion de stabilité algébro-géométrique usuelle pour l'action algébrique du groupe réductif G sur la variété affine $Z_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$. Lorsque les hypothèses du Lemme 2.6 sont satisfaites, c'est-à-dire lorsque le morphisme $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$ est d'image finie $F := \text{Im } \varphi$, on peut remplacer la représentation généralisée $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ par le morphisme de groupes

$$\widehat{\varrho} : \begin{array}{ccc} \pi_1 Y & \longrightarrow & G \rtimes F \\ \gamma & \longmapsto & (\varrho(\gamma), \varphi_\gamma) \end{array}$$

9. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire, dans la Définition 2.28, de supposer que X est une surface fermée orientable : la seule propriété importante est que $\pi_1 X$ agit trivialement sur G (et si tel est le cas, on peut toujours un autre tel revêtement $X' \rightarrow Y$, de degré plus grand, tel que X' est une surface fermée orientable).

et on voit que ϱ est polystable au sens de la Définition 2.28 si et seulement si la clôture de Zariski $\overline{\varrho(\pi_1 Y)}$ est un sous-groupe réductif de $G \rtimes F$, puisque celui-ci a même algèbre de Lie que $\varrho(\pi_1 X)$ pour tout sous-groupe distingué d'indice fini $\pi_1 X \triangleleft \pi_1 Y$ agissant trivialement sur G . La classe de conjugaison de $\widehat{\varrho}$ sous $G \rtimes F$ est donc fermée dans $\text{Hom}(\pi_1 Y; G \rtimes F)$, voir par exemple [LM85, Theorem 1.27] pour le cas $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ et [Sim97, Theorem 2.1] pour le cas général. Je ne sais pas si cela implique que la G -classe de conjugaison de $\widehat{\varrho}$ est fermée dans $\text{Hom}_\varphi(\pi_1 Y; G \rtimes F)$. Comme l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Z}_\varphi^1(\pi_1 Y; G) & \longrightarrow & \text{Hom}_\varphi(\pi_1 Y; G) \\ \varrho & \longmapsto & \widehat{\varrho} \end{array}$$

est un homéomorphisme G -équivariant d'après le Lemme 2.6, l'observation précédente suffirait à montrer que la G -orbite de ϱ est fermée dans $\text{Z}_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$.

On peut alors démontrer un théorème d'existence de K -réductions harmoniques pour les toiseurs plats polystables, i.e. un analogue orbifold du théorème de Corlette. Pour cela, supposons que le morphisme croisé $\varrho \in \text{Z}_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$ est polystable au sens de la Définition 2.28 et soit $q : X \rightarrow Y$ un revêtement galoisien fini tel que $\pi_1 X$ agit trivialement sur G et $\overline{\varrho(\pi_1 X)}$ est un sous-groupe réductif de G . Le tiré en arrière $q^* \mathcal{V}_\varrho$ est un G -fibré principal Γ -équivariant \mathcal{E}_ϱ sur X (où $\Gamma \simeq \pi_1 Y / \pi_1 X$), muni d'une G -connexion plate Γ -invariante ∇ (Théorème 2.20).

Supposons d'abord que $G \subset \mathbf{GL}(n; \mathbb{R})$. Dans ce cas, l'hypothèse de réductivité de $\overline{\varrho(\pi_1 X)}$ et le théorème de Corlette ([Cor88]) montre que ∇ est conjuguée, sous l'action du groupe de jauge de \mathcal{E}_ϱ , à une connexion *minimale* ∇_∞ , obtenue comme limite de ∇ sous le flot gradient d'une certaine fonctionnelle d'énergie (qui est la norme au carré d'une application moment, [Cor88]) : une fois la convergence du flot (donc l'existence de ∇_∞) établie, l'hypothèse de complète réductibilité montre que l'orbite de ∇ sous l'action du groupe d'automorphismes de \mathcal{E}_ϱ est fermée, ce qui signifie que ∇_∞ est conjuguée à ∇ par l'action de ce groupe. Comme ∇ est Γ -invariante et que l'ensemble des connexions invariantes est un fermé de l'espace des connexions, ∇_∞ est également Γ -invariante. Enfin, les résultats de [HWW18, Sch17] montrent que, dans une telle situation, le flot gradient issu de ∇ est contenu dans l'orbite de cette connexion *sous l'action de la partie Γ -invariante du groupe de jauge de \mathcal{E}_ϱ* (c'est une conséquence de la compatibilité entre l'application moment et l'action de Γ), ce qui montre que $(\mathcal{E}_\varrho, \nabla_\infty)$ est isomorphe à $(\mathcal{E}_\varrho, \nabla)$ *en tant que fibré Γ -équivariant*. Pour le cas général, on se ramène au cas linéaire à l'aide d'une représentation fidèle du groupe algébrique G , en suivant pour cela la démonstration de [Sim97, Theorem 2.1]. On obtient ainsi l'existence d'une K -réduction harmonique Γ -invariante pour le G -fibré plat Γ -équivariant $(\mathcal{E}_\varrho, \nabla)$ sur X ou, ce qui revient au même, une K -réduction harmonique du toiseur plat $\mathcal{V}_\varrho = [\mathcal{E}_\varrho / \Gamma]$ sur l'orbifold $Y = [X / \Gamma]$, au sens de la Définition 2.27. Plus précisément, l'analogue orbifold du théorème de Corlette peut se formuler comme suit (et se déduire de la démonstration de Corlette à l'aide des remarques ci-dessus).

Théorème 2.30 (Donaldson-Corlette). — *Soit $\varrho \in \text{Z}_\varphi^1(\pi_1 Y; G)$ un morphisme croisé et soit \mathcal{V}_ϱ le \mathcal{G}_φ -toiseur plat associé sur l'orbi-surface Y . On se donne K un sous-groupe compact maximal φ -invariant de G et on considère l'action de $\pi_1 Y$ sur G/K induite par ϱ comme dans la Proposition 2.24. Alors il existe une application $\pi_1 Y$ -équivariante harmonique $f : \widetilde{Y} \rightarrow G/K$ si et seulement si \mathcal{V}_ϱ est polystable au sens de la Définition 2.28.*

2.5. Torseurs de Higgs

Rappelons que, si X est une surface de Riemann (dont le fibré cotangent sera dénoté K_X) et G un groupe de Lie réel (réductif et dont on a fixé un sous-groupe compact maximal K ainsi qu'une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de son algèbre de Lie), un G -fibré de Higgs sur X est par définition un couple (\mathcal{E}, s) où \mathcal{E} est un $K_{\mathbb{C}}$ -fibré principal holomorphe et s est une

section holomorphe du fibré vectoriel $K_X \otimes (\mathcal{E} \times_{K_{\mathbb{C}}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ ⁽¹⁰⁾. Afin d'étendre cette définition au cas d'une orbi-courbe analytique Y (définie sur \mathbb{C} ou sur \mathbb{R}) et d'un fibré en groupes $\mathcal{G} \rightarrow Y$, nous nous restreindrons au cas où $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\varphi} := [(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y]$ avec G un groupe de Lie réel et $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$ un morphisme de groupes. Pour simplifier la notation, nous écrirons simplement \mathcal{G} au lieu de \mathcal{G}_{φ} . Nous supposons également, comme dans la Section 2.4, qu'il existe un sous-groupe compact maximal $K \subset G$ qui soit en outre $\pi_1 Y$ -équivariant, hypothèse qui est bien vérifiée dans tous les exemples connus et considérés dans la suite. En particulier, les fibrés en groupes $\mathcal{K} := [(\tilde{Y} \times K)/\pi_1 Y]$ et $\mathcal{K}_{\mathbb{C}} := [(\tilde{Y} \times K_{\mathbb{C}})/\pi_1 Y]$ (qui sont des fibrés orbifold sur Y) sont bien définis. De même, les fibrés vectoriels orbifold $\mathfrak{P} := [(\tilde{Y} \times \mathfrak{p})/\pi_1 Y]$ et $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}} := [(\tilde{Y} \times \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})/\pi_1 Y]$ sont bien définis car, sous les hypothèses ci-dessus, l'action de $\pi_1 Y$ sur $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ préserve le sous-espace vectoriel \mathfrak{p} .

Définition 2.31. — Soit Y une orbi-courbe analytique et soit K_Y son fibré cotangent⁽¹¹⁾. Soit G un groupe de Lie réel et soit $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$ un morphisme. Soit $K \subset G$ un sous-groupe compact maximal $\pi_1 Y$ -invariant. Avec les notations ci-dessus, on appelle \mathcal{G} -torseur de Higgs sur Y un couple (\mathcal{E}, s) où \mathcal{E} est un $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ -torseur sur Y et s est une section analytique du fibré vectoriel orbifold $K_Y \otimes (\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$, appelée *champ de Higgs* sur \mathcal{E} .

Ici, $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}) := \mathcal{E} \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ est par définition le quotient du fibré produit $\mathcal{E} \times \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ (produit fibré sur Y) par l'action du fibré en groupes $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$. Pour se convaincre que c'est un objet bien défini, le plus simple est de voir Y comme un quotient $[X/\Gamma]$, où X est une surface de Riemann et Γ un groupe fini : si $q : X \rightarrow Y$ désigne la projection canonique et que l'on suppose de plus que $\pi_1 X$ agit trivialement sur G , alors $q^* \mathcal{E}$ est un $K_{\mathbb{C}}$ -fibré principal sur X et $q^* \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe au fibré produit $X \times \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$; la version Γ -équivariante de la construction habituelle donne alors

$$\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{P}_{\mathbb{C}} \simeq \left[((q^* \mathcal{E}) \times_{K_{\mathbb{C}}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) / \Gamma \right].$$

De même, $K_Y \otimes (\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}) \simeq [(K_X \otimes ((q^* \mathcal{E}) \times_{K_{\mathbb{C}}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})) / \Gamma]$. Notons également que, lorsque l'orbi-courbe analytique Y est supposée définie sur \mathbb{R} , on peut considérer l'orbi-courbe analytique complexe Y^+ (qui est le revêtement double canonique $q : Y^+ \rightarrow Y$ construit en (2.1.4) et est muni d'une structure réelle $\sigma : Y^+ \rightarrow Y^+$ telle que $[Y^+ / \langle \sigma \rangle] \simeq Y$) et voir un \mathcal{G} -torseur de Higgs sur Y comme un \mathcal{G}^+ -torseur réel sur Y^+ : cette notion est bien définie car on a un isomorphisme canonique $\pi_1 Y / \pi_1 Y^+ \simeq \langle \sigma \rangle$, qui permet de rendre Galois-équivariante la Définition 2.31. Explicitement, un \mathcal{G} -torseur de Higgs (\mathcal{E}, s) sur Y se tire en arrière en (ou encore, peut être défini comme) un triplet $(\mathcal{E}^+, \sigma_{\mathcal{E}^+}, s^+)$ où \mathcal{E}^+ est un toseur sous le fibré en groupes $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}^+ := [(\tilde{Y} \times K_{\mathbb{C}}) / \pi_1 Y^+] \simeq q^* \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$, l'application $\sigma_{\mathcal{E}^+}$ est une structure réelle sur \mathcal{E}^+ et s^+ est une section réelle (i.e. équivariante par rapport à σ et $\sigma_{\mathcal{E}^+}$) du fibré vectoriel orbifold $K_{Y^+} \otimes (\mathcal{E}^+ \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}^+} \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^+)$ sur Y^+ , où les structures réelles de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}^+$ et $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^+ := [(\tilde{Y} \times \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) / \pi_1 Y^+] \simeq q^* \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ sont induites par les structures réelles canoniques du groupe $K_{\mathbb{C}}$ et de l'espace vectoriel $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$.

Exemple 2.32. — En vue des Chapitres 3 et 4, les deux exemples fondamentaux sont les suivants.

1. $G = \mathbf{U}(n)$. Lorsque Y a pour seules singularités orbifolds des points miroirs, c'est le cas étudié en détail dans [Sch17] : ici, les \mathcal{G} -torseurs de Higgs sur la surface de Klein Y , pour $\mathcal{G} = [(\tilde{Y} \times \mathbf{U}(n)) / \pi_1 Y]$ ⁽¹²⁾, correspondent exactement aux fibrés vectoriels réels sur

10. Ici et dans la suite, $K_{\mathbb{C}}$ désigne le complexifié du groupe de Lie réel K et $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

11. Si $Y \simeq [X/\Gamma]$ avec X une surface de Riemann et Γ un groupe fini, le fibré orbifold K_Y est isomorphe à $[K_X/\Gamma]$, où Γ agit sur K_X via l'action induite par celle de Γ sur X . Plus généralement, ce point de vue donne la description locale de K_Y pour les ouverts de cartes $[U/\Gamma]$ de l'orbifold Y .

12. Avec $\pi_1 Y$ agissant sur $\mathbf{U}(n)$ via le morphisme canonique $\pi_1 Y \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et la conjugaison complexe sur $\mathbf{U}(n)$, comme dans l'Exemple 2.3.

la surface de Riemann réelle (Y^+, σ) . La généralisation au cas où Y^+ possède des points coniques est immédiate.

2. $G = \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. C'est le cas étudié dans [ALS18], qui permet en particulier de voir que, bien que l'action de $\pi_1 Y$ sur G soit ici triviale, la structure réelle des fibrés $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ est non triviale lorsque Y est supposée être définie sur \mathbb{R} .

Dans l'optique de la correspondance de Hodge non abélienne orbifold, les exemples les plus importants de \mathcal{G} -torseurs de Higgs sont, comme dans le cas classique, ceux qui proviennent des \mathcal{G} -torseurs plats munis d'une \mathcal{K} -réduction harmonique (au sens de la Section 2.4). Étant donné une telle réduction $\mathcal{V}_{\mathcal{K}} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{G} \simeq \mathcal{V}$, le torseur plat \mathcal{V} donne lieu à un *torseur harmonique*, au sens suivant. La \mathcal{G} -connexion plate ∇ sur \mathcal{V} induit une \mathcal{K} -connexion A sur le \mathcal{K} -torseur $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ et une 1-forme à valeurs dans \mathfrak{P} sur Y . Pour le voir, il suffit de donner une version Γ -équivariante de la construction habituelle sur une surface de Riemann X : si $Y \simeq [X/\Gamma]$ avec $\pi_1 X$ qui agit de manière triviale sur G , une application $\pi_1 Y$ -équivariante $f : \tilde{Y} \rightarrow G/K$ induit une K -réduction Γ -invariante du G -fibré principal Γ -équivariant $(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 X$ sur X , c'est-à-dire que la connexion plate Γ -invariante ∇' de ce fibré se décompose en $A' + \psi'$ avec A' et ψ' elles-mêmes Γ -invariantes⁽¹³⁾, induisant donc A et ψ sur Y ⁽¹⁴⁾. Le fait que la connexion ∇ soit plate et la réduction f harmonique implique alors que le couple (A, ψ) vérifie les équations de Hitchin sur Y :

$$(2.5.1) \quad F_A + \frac{1}{2}[\psi, \psi] = 0, \quad d_A \psi = 0 \text{ et } d_A^* \psi = 0,$$

c'est-à-dire que (A', ψ') sont des solutions Γ -invariantes de ces mêmes équations lorsqu'on les considère sur X . On obtient alors un \mathcal{G} -torseur de Higgs sur Y en munissant le fibré orbifold lisse $\mathcal{E} := \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ de la structure analytique définie par la \mathcal{K} -connexion A et du champ de Higgs $s := \psi^{1,0}$, qui est bien analytique par rapport à A au vu des équations (2.5.1) (ce qui n'est, encore une fois, rien d'autre qu'une version équivariante des constructions de Hitchin et Simpson).

Définition 2.33. — On appelle *torseur harmonique* sur l'orbifold Y tout triplet $(\mathcal{V}_{\mathcal{K}}, A, \psi)$ constitué d'un \mathcal{K} -torseur $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$, une connexion A sur $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ et une 1-forme ψ à valeurs dans \mathcal{P} sur Y , tel que le couple (A, ψ) est solution des équations de Hitchin (2.5.1).

Un torseur harmonique donne donc lieu, comme dans le cas classique, à un \mathcal{G} -torseur plat $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{G}$ (muni de la connexion plate $\nabla := A + \psi$) et à un \mathcal{G} -torseur de Higgs $\mathcal{E} := \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ (muni du champ de Higgs $s := \psi^{1,0}$).

Un \mathcal{G} -torseur de Higgs au sens de la Définition 2.31 peut également être vu comme un cas particulier de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ -torseur de Higgs, où $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} := [(\tilde{Y} \times G_{\mathbb{C}})/\pi_1 Y]$, très exactement comme un $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ -torseur de Higgs (\mathcal{E}', s') muni d'une $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ -réduction et tel que le champ de Higgs s' vérifie une *condition de réalité* relativement à cette $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ -réduction : pour le voir, il suffit de poser $\mathcal{E}' = \mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}) := \mathcal{E} \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ et $s' \in H^0(Y; K_Y \otimes (\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}) \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}))$ la section induite par le champ de Higgs s de \mathcal{E} , qui est une section de

$$K_Y \otimes (\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}) \subset K_Y \otimes (\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}) \simeq K_Y \otimes (\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}) \times_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}),$$

où $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}} := [(\tilde{Y} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\pi_1 Y]$. Si $q : X \rightarrow Y$ est un revêtement galoisien fini de Y par une surface de Riemann telle que $\pi_1 X$ agit trivialement sur $G_{\mathbb{C}}$, posons $E(G_{\mathbb{C}}) := q^*(\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}})) \simeq (q^* \mathcal{E}) \times_{K_{\mathbb{C}}} G_{\mathbb{C}}$: c'est un $G_{\mathbb{C}}$ -fibré principal sur X , muni d'une $K_{\mathbb{C}}$ -réduction et d'une structure Γ -équivariante canonique, où $\Gamma \simeq \pi_1 Y / \pi_1 X$ est le groupe d'automorphismes du revêtement. C'est-à-dire que $E(G_{\mathbb{C}})$ est muni d'une famille $\tau := (\tau_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ de transformations de $E(G_{\mathbb{C}})$ qui relève l'action de Γ sur X de manière compatible avec l'action de $G_{\mathbb{C}}$ sur $E(G_{\mathbb{C}})$, au sens suivant :

13. Les détails de cette vérification sont disponibles dans [ALS18, Proposition 3.7].

14. On peut aussi montrer localement, c'est-à-dire sur les ouverts de cartes $[U/\Gamma] \subset Y$, l'existence de la décomposition $\nabla = A + \psi$, par le même calcul.

1. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(G_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\tau_{\gamma}} & E(G_{\mathbb{C}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

et on a $\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \tau_{\gamma_1}\tau_{\gamma_2}$ et $\tau_{\text{Id}_X} = \text{Id}_{E(G_{\mathbb{C}})}$.

2. τ_{γ} est holomorphe si γ est holomorphe et anti-holomorphe si γ est anti-holomorphe.
3. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $p \in G_{\mathbb{C}}$, on a $\tau_{\gamma}(p \cdot g) = \tau_{\gamma}(p) \cdot \varepsilon_{\gamma}(g)$, où $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G_{\mathbb{C}})$ est l'homomorphisme induit par l'action de $\pi_1 Y$ sur $G_{\mathbb{C}}$.

De plus, le champ de Higgs s sur $\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}})$ induit un champ de Higgs Γ -équivariant α sur $E(G_{\mathbb{C}}) = q^*(\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}))$, c'est-à-dire que α est une section Γ -équivariante de $K_X \otimes E(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, où $E(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) := E(G_{\mathbb{C}}) \times_{G_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, qui vérifie en outre une condition de réalité relative au sous-groupe $K_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$: comme le champ de Higgs s sur $\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}})$ est à valeurs dans $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$, le champ de Higgs induit α sur $E(G_{\mathbb{C}})$ est à valeurs dans $E(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$.

$$\begin{array}{ccc} K_X \otimes E(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\gamma \otimes \tau_{\gamma}} & K_X \otimes E(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ X & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

Définition 2.34. — Nous appellerons *G-fibré de Higgs Γ -équivariant* sur X tout triplet de la forme (E, α, τ) comme ci-dessus.

Pour $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, la notion de stabilité appropriée pour de tels fibrés est celle donnée par C. Simpson dans [Sim88], où il montre que les sommes directes de fibrés de Higgs Γ -équivariants stables de degré 0 admettent des métriques hermitiennes Γ -invariantes particulières, dites métriques *harmoniques*, qui sont celles pour lesquelles la connexion de Chern associée A et le champ de Higgs α fournissent des solutions $(A, \psi := \alpha + \alpha^*)$ aux équations de Hitchin (2.5.1). La démonstration de Simpson est présentée dans le cas où le groupe fini Γ agit de manière holomorphe sur la surface de Riemann X mais elle s'étend au cas où Γ contient des transformations anti-holomorphes en remarquant qu'un tel groupe agit encore par *pullback* sur l'ensemble des métriques hermitiennes d'un fibré vectoriel complexe Γ -équivariant : il suffit pour cela d'appliquer la conjugaison complexe si l'on tire en arrière une métrique par une transformation anti-holomorphe, comme vérifié dans [ALS18, Section 3.3]. Dans [Sim92, Corollary 6.16], Simpson étend son résultat au cas des G -fibrés de Higgs (E, α) sur X sous l'hypothèse que les classes de Chern de $E(\mathcal{G}_{\mathbb{C}})$ sont toutes nulles : cette hypothèse lui permet de définir la semistabilité de (E, α) à l'aide d'une représentation fidèle $G_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbf{GL}(W_{\mathbb{C}})$, i.e. en se ramenant au cas vectoriel ([Sim92, p.86]). Nous suivrons ici sa démarche, afin de pouvoir étendre au cas orbifold la correspondance de Hodge non abélienne. Pour cela, nous avons besoin de la définition préliminaire suivante, dans laquelle \mathcal{G} désigne, comme d'habitude, le fibré en groupes orbifold $[(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y]$ associé à un groupe de Lie réel G muni d'une action par automorphismes de $\pi_1 Y$.

Définition 2.35. — Soit Y une orbi-courbe analytique compacte de caractéristique d'Euler négative et soit (\mathcal{E}, s) un \mathcal{G} -torseur de Higgs sur Y . On dit que les classes de Chern du $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ -torseur $\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}) := \mathcal{E} \times_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ sont toutes nulles s'il existe un revêtement galoisien fini $q : X \rightarrow Y$ de Y par une surface de Riemann X tel que :

1. $\pi_1 X$ agit trivialement sur $G_{\mathbb{C}}$.
2. Les classes de Chern du $G_{\mathbb{C}}$ -fibré principal $E(G_{\mathbb{C}}) := q^*(\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}))$ au-dessus de X sont toutes nulles.

Ici, par classes de Chern de $E(G_{\mathbb{C}})$ nous entendons les classes caractéristiques, dans la cohomologie de De Rham de X , du $G_{\mathbb{C}}$ -fibré principal $E(G_{\mathbb{C}})$, obtenues par l’homomorphisme de Chern-Weil à partir des polynômes $\text{Ad}_{G_{\mathbb{C}}}$ -invariants sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. La Définition 2.35 a alors bien un sens car la propriété que ces classes caractéristiques soient toutes nulles est invariante par passage à un revêtement fini. En guise d’exemple, les classes de Chern d’un \mathcal{G} -torseur de Higgs (\mathcal{E}, s) provenant d’un \mathcal{G} -torseur *plat* \mathcal{V} muni d’une réduction harmonique $f : \tilde{Y} \rightarrow G/K$ sont toutes nulles, puisque dans ce cas $\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathcal{V} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ est un $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ -torseur plat.

Nous pouvons désormais définir la notion de semistabilité d’un tel \mathcal{G} -torseur de Higgs (\mathcal{E}, s) à la manière de Simpson, en utilisant une représentation fidèle $G_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbf{GL}(W_{\mathbb{C}})$ et, comme dans les Définitions 2.28 et 2.35, un revêtement galoisien fini $q : X \rightarrow Y$ tel que $\pi_1 X$ agit trivialement sur $G_{\mathbb{C}}$. Rappelons pour cela que, sur une surface de Riemann compacte X munie d’une action d’un groupe fini $\Gamma \subset \text{Aut}^{\pm}(X)$, un G -fibré de Higgs Γ -équivariant (E, α, τ) tel que les classes de Chern de $E(G_{\mathbb{C}})$ sont toutes nulles est dit *semistable* si le fibré de Higgs $E(W_{\mathbb{C}}) := E \times_{K_{\mathbb{C}}} W_{\mathbb{C}}$ est semistable ([Sim92, p.86]), c’est-à-dire si, pour tout sous-espace $G_{\mathbb{C}}$ -invariant $U_{\mathbb{C}} \subset W_{\mathbb{C}}$ tel que, en outre, le sous-fibré vectoriel $E(U_{\mathbb{C}})$ de $E(W_{\mathbb{C}})$ soit Γ -invariant⁽¹⁵⁾ et α -invariant, on a $\deg E(U_{\mathbb{C}}) \leq 0$. La stabilité est définie de manière similaire, à l’aide d’une inégalité stricte, et on dit qu’un G -fibré de Higgs Γ -équivariant (E, α, τ) comme ci-dessus est *polystable* si $E(W_{\mathbb{C}})$ est isomorphe à une somme directe de fibrés de Higgs Γ -équivariants stables au sens précédent (qui sont donc en particulier de degré 0). Le point crucial pour nous ici est que, en vertu d’un théorème de Simpson ([Sim88, Sim92]), cette notion de polystabilité est invariante par revêtement fini : Simpson a en effet caractérisé les fibrés de Higgs Γ -equivariants polystables (E, α, τ) comme étant ceux qui admettent des métriques harmoniques Γ -invariantes ; le pullback d’un tel fibré est donc encore polystable et, si $X \rightarrow X/\Gamma$ est un revêtement analytique entre surfaces de Riemann (cas d’une action libre de Γ), alors (E, α, τ) descend à X/Γ et le fibré de Higgs ainsi défini est polystable puisque la métrique harmonique invariante de E descend aussi et la métrique ainsi induite sur E/Γ est encore harmonique. Remarquons par ailleurs que la notion de semistabilité est également invariante par revêtement fini, par unicité du fibré déstabilisant dans la filtration d’Harder-Narasimhan ([HN75]). Les résultats de Simpson, joints à ceux de Harder et Narasimhan, permettent donc de donner un sens à la définition suivante.

Définition 2.36. — Soit Y une orbi-courbe analytique compacte de caractéristique d’Euler négative et soit (\mathcal{E}, s) un \mathcal{G} -torseur de Higgs sur Y tel que les classes de Chern de $\mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}})$ sont toutes nulles. On dit que (\mathcal{E}, s) est *semistable* (respectivement, *polystable*) s’il existe un revêtement galoisien fini $q : X \rightarrow Y$ de Y par une surface de Riemann X tel que :

1. $\pi_1 X$ agit trivialement sur $G_{\mathbb{C}}$.
2. Le G -fibré de Higgs Γ -équivariant $E := q^* \mathcal{E}$ au-dessus de X est semistable (respectivement, polystable).

Remarque 2.37. — Il ne semble pas possible de définir de même la notion de stabilité pour un fibré de Higgs orbifold, celle-ci n’étant pas invariante par revêtement fini (que ce soit dans un cadre purement holomorphe, [Ram81], ou pour les courbes définies sur \mathbb{R} , [Sch12]). Pour les courbes définies sur un corps fini, Harder et Narasimhan utilisent une notion de stabilité *géométrique*, au sens où un fibré E défini sur un corps k est dit (géométriquement) stable si $E \times_k \bar{k}$ est stable. Cette notion a l’avantage d’être compatible avec la stabilité au sens de la théorie des invariants mais elle n’est pas suffisante pour obtenir des filtrations de Jordan-Hölder pour les fibrés semistables (voir [Sch12] et la Section 3.2 du présent mémoire).

¹⁵. Si Γ contient des transformations anti-holomorphes, l’action de Γ sur $W_{\mathbb{C}}$ est non-triviale, induite par le morphisme canonique $\text{Aut}^{\pm}(X) \rightarrow \{\pm 1\}$ et une structure réelle $W_{\mathbb{C}} \simeq W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sur $W_{\mathbb{C}}$, la représentation $G_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbf{GL}(W_{\mathbb{C}})$ étant alors supposée compatible avec cette structure réelle au sens où $\overline{g\bar{w}} = \bar{g}w$.

La Définition 2.36 est (faite pour et) suffisante pour appliquer le théorème de Simpson, qui caractérise les fibrés de Higgs polystables en termes de métriques harmonique ou, de manière équivalente, comme les fibrés de Higgs provenant de fibrés harmoniques.

Théorème 2.38 (Hitchin-Simpson). — *Soit Y une orbi-courbe analytique compacte de caractéristique d'Euler négative et soit (\mathcal{E}, s) un \mathcal{G} -torseur de Higgs sur Y tel que les classes de Chern de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ sont toutes nulles. Alors (\mathcal{E}, s) est polystable au sens de la Définition 2.36 si et seulement s'il existe un \mathcal{G} -torseur harmonique $(\mathcal{V}_{\mathcal{K}}, A, \psi)$ au sens de la Définition 2.33 tel que (\mathcal{E}, s) soit isomorphe, en tant que \mathcal{G} -torseur de Higgs, à $(\mathcal{V}_{\mathcal{K}} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_{\mathbb{C}}, \psi^{1,0})$.*

Ce résultat dit que l'image essentielle du foncteur qui envoie un toseur harmonique sur un toseur de Higgs est la catégorie des toseurs de Higgs polystables de degré 0 (et Simpson démontre par ailleurs que ce foncteur est pleinement fidèle; c'est un corollaire de [Sim92, Lemma 1.2]). Cela implique le résultat suivant, que l'on peut qualifier de correspondance de Hodge non abélienne sur l'orbifold Y et qui, en vertu de l'analyse conduite plus haut, est une conséquence des travaux de Corlette et Simpson.

Théorème 2.39. — *Soit Y une orbi-courbe analytique compacte de caractéristique d'Euler négative. Soit G un groupe de Lie réel muni d'une action par automorphismes $\varphi : \pi_1 Y \rightarrow \text{Aut}(G)$ et soit \mathcal{G} le fibré en groupes orbifold $\mathcal{G} := [(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y]$. Alors il existe une équivalence de catégories entre les \mathcal{G} -torseurs plats polystables sur Y et les \mathcal{G} -torseurs de Higgs polystables de degré 0 sur Y .*

En utilisant le Théorème 2.12 et le fait que la notion de polystabilité est par définition la même pour les toseurs plats et pour les représentations d'holonomie qui les définissent (Définition 2.28), on peut reformuler le Théorème 2.39 en termes (d'un sous-espace) de l'espace de Betti $H_{\text{Betti}}^1(Y; G) := Z_{\varphi}^1(\pi_1 Y; G)/G$ introduit dans la Définition 2.8.

Corollaire 2.40. — *Il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de \mathcal{G} -torseurs de Higgs polystables de degré 0 sur Y et l'ensemble*

$$Z_{\varphi}^1(\pi_1 Y; G)_{\text{ps}} / G \subset H_{\text{Betti}}^1(Y; G)$$

des morphismes croisés polystables de $\pi_1 Y$ dans G .

Ce corollaire justifie que nous appelions également espace de Betti l'ensemble $Z_{\varphi}^1(\pi_1 Y; G)_{\text{ps}} / G$ des classes d'équivalence de morphismes croisés polystables.

Remarque 2.41. — Lorsque $G = \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$, le fait qu'il existe une correspondance bijective entre les extensions de toseurs plats polystables et celles de toseurs de Higgs polystables de degré 0 ([Sim92, Lemma 2.2]) implique que l'on peut étendre le Théorème 2.39 en une équivalence entre la catégorie des toseurs plats et la catégorie des toseurs de Higgs *semistables* de degré 0. L'ensemble des classes d'isomorphisme des objets de ces catégories est alors en bijection avec l'espace de Betti

$$H_{\text{Betti}}^1(Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})) = Z_{\varphi}^1(\pi_1 Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})) / \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$$

tout entier. Ceci (ainsi que le Corollaire 2.40 pour la restriction au cas polystable) constitue un élément de réponse à la question posée par Simpson sur l'espace de Dolbeault correspondant à un espace de Betti défini par une action non triviale du groupe fondamental sur $\mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$ (cf. Section 2.1).

Exemple 2.42. — Reprenons les cas particuliers d'espaces de Betti de l'Exemple 2.9 pour illustrer le Théorème 2.39 en décrivant à chaque fois l'espace de Dolbeault correspondant.

1. Si $G = \mathbf{U}(n)$ et $\theta(g) = \bar{g}$, l'espace de Betti

$$H_{\text{Betti}}^1(Y; \mathbf{U}(n)) \simeq \text{Hom}_\theta(\pi_1 Y; \mathbf{U}(n) \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) / \mathbf{U}(n)$$

est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme d'orbi-fibrés vectoriels (de champ de Higgs nul) polystables de degré 0 sur l'orbi-courbe analytique Y .

2. Si $G = \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ et $\theta(g) = g$, l'espace de Betti

$$\text{Hom}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R}))_{\text{ps}} / \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$$

est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme d'orbi-fibrés en algèbres de Lie, de fibre type $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$, munis d'une forme quadratique non dégénérée et d'un champ de Higgs à valeurs dans les endomorphismes symétriques relativement à cette forme quadratique, polystables de degré 0 sur Y .

3. Si $G = \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$ et $\theta(g) = \bar{g}$, l'espace de Betti

$$H_{\text{Betti}}^1(\pi_1 Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})) \simeq \text{Hom}_\theta(\pi_1 Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) / \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$$

est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme d'orbi-fibrés de Higgs de degré 0 semistables sur l'orbi-courbe analytique Y .

4. Si $Y = [X/\langle\sigma\rangle]$ est le quotient d'une courbe hyperelliptique (X, σ) et $G = \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$ est muni de l'involution holomorphe $\sigma(g) \simeq {}^t g^{-1}$, alors l'espace de Betti

$$H_{\text{Betti}}^1(Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})) = \text{Hom}_\sigma(\pi_1 Y; \mathbf{GL}(n; \mathbb{C}) \rtimes_\sigma \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) / \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$$

est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$ -fibrés de Higgs $\langle\sigma\rangle$ -équivariants semistables de degré 0 sur la surface de Riemann X . Ces derniers peuvent également être vus comme des objets sur Y , à savoir des \mathcal{G} -torseurs de Higgs semistables de degré 0 sur l'orbi-courbe analytique Y , où \mathcal{G} est l'orbi-fibré en groupes $\mathcal{G} := [(X \times \mathbf{GL}(n; \mathbb{C})) / \langle\sigma\rangle]$. On peut remarquer qu'ici, l'orbi-fibré en groupes \mathcal{G} est construit de manière algébrique.

Notons, pour conclure, que nous n'avons pas exploité toute la généralité du théorème de Simpson sur l'existence de métriques harmoniques invariantes sous l'action d'un groupe fini $\Gamma \subset \text{Aut}^\pm(X)$. En effet, dans [Sim88], Simpson ne suppose pas, comme nous le faisons ici, qu'étant donné un fibré de Higgs Γ -équivariant (E, α, τ) sur X , le champ de Higgs α est Γ -invariant : il suppose seulement, pour Γ agissant de manière holomorphe sur X , qu'il existe un caractère $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(\alpha) = \chi(\gamma)\alpha$ et conclut à l'existence d'une métrique harmonique sous hypothèse de stabilité du fibré (E, α, τ) . Si l'on autorise Γ à contenir des transformations anti-holomorphes de X , le caractère χ doit être remplacé par un morphisme croisé $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ (relativement à l'action de Γ sur \mathbb{C}^* induite par le morphisme canonique $\text{Aut}^\pm(X) \rightarrow \{\pm 1\}$ et la conjugaison complexe sur \mathbb{C}^*) mais la conclusion reste la même.

CHAPITRE 3

FIBRÉS VECTORIELS SUR LES COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES

Dans tout ce chapitre, nous désignerons par Y le quotient d'une surface fermée orientable X par le groupe engendré par une involution $\sigma : X \rightarrow X$ qui renverse l'orientation. En tant qu'orbi-surface fermée, $Y \simeq [X/\langle\sigma\rangle]$ est donc non orientable. Et en tant que surface différentielle, Y peut avoir un bord non vide ou être non orientable ou les deux à la fois. Il est donc possible d'interpréter Y comme *l'ensemble des points fermés d'une courbe algébrique réelle*, la surface X ci-dessus étant alors l'ensemble des points complexes de cette courbe algébrique. De ce point de vue-là, le groupe fondamental orbifold $\pi_1[X/\langle\sigma\rangle]$ contrôle les *revêtements réels* de (X, σ) , qui forment une catégorie équivalente à celle des $\pi_1[X/\langle\sigma\rangle]$ -ensembles. Les revêtements réels connexes de (X, σ) , en particulier, correspondent aux sous-groupes de $\pi_1[X/\langle\sigma\rangle]$ non contenus dans le noyau du morphisme canonique $\pi_1[X/\langle\sigma\rangle] \rightarrow \langle\sigma\rangle$ (voir par exemple [Sch16] pour une exposition de ces propriétés).

Dans la série d'articles [Sch11, Sch12, LS13, BS16, Sch17], nous avons étudié les fibrés vectoriels au-dessus d'une courbe réelle (X, σ) , en nous concentrant principalement sur les aspects suivants :

1. Le problème des modules pour de tels objets ([Sch11, Sch12, BS16]) ;
2. La correspondance de Narasimhan-Seshadri dans ce contexte ([Sch17]) ;
3. La topologie des espaces de modules et des variétés de représentations construits aux points précédents ([LS13]).

Les thèmes ci-dessus ont retenu l'attention de nombreux chercheurs au cours de la dernière décennie ([BHH10, OT13, Cre13, BGPH14, Bai14]) et notre principal apport a trait aux points suivants :

1. La notion de stabilité pour les fibrés vectoriels réels et quaternioniques et la compréhension des espaces de modules pour ces objets ([Sch11, Sch12, BS16]) ;
2. La généralisation de la correspondance de Narasimhan-Seshadri réelle de [BHH10] au cas des fibrés réels de degré non nul, ainsi qu'une nouvelle approche du cas quaternionique ([Sch17]) ;
3. Le comptage des composantes connexes du *lieu réel* des espaces de modules de fibrés vectoriels géométriquement stables de rang et degré fixés ([Sch12]) et, dans le cas où le rang et le degré sont premiers entre eux, le calcul des nombres de Betti de ces composantes connexes pour la cohomologie singulière à coefficients dans les entiers modulo 2 ([LS13]).

Ces travaux ont eu les applications ou conséquences suivantes :

1. Bien que la notion de stabilité des fibrés réels et quaternioniques introduite dans [Sch12] (et déjà considérée par Shuguang Wang dans [Wan96]) ne soit pas, en général, invariante par extension des scalaires (elle ne coïncide donc pas avec la notion de stabilité provenant de la théorie géométriques des invariants), elle seule fournit des filtrations de Jordan-Hölder pour les fibrés réels et quaternioniques semistables ([Sch12, Théorème 2.10]).

2. La correspondance de Narasimhan-Seshadri établie dans [Sch17] a inspiré la version orbifold de la correspondance de Hodge non abélienne présentée dans le Chapitre 2 (Théorème 2.39). La construction des toiseurs plats $[(\tilde{Y} \times G)/\pi_1 Y]$ associée à un morphisme croisé $\varrho \in Z^1(\pi_1 Y; G)$, par exemple, ainsi que la correspondance de Riemann-Hilbert associée (Théorème 2.12), constituent une généralisation de [Sch17, Theorems 2.6 and 4.4].
3. Le calcul des nombres de Betti modulo 2 des espaces de modules de fibrés sur une courbe réelle a permis d'exhiber de nouveaux exemples de variétés réelles dites *maximales* ([LS13, Section 6.5]) et de démontrer une conjecture de Saveliev et Wang ([SW11]) sur les espaces de modules de fibrés vectoriels de déterminant fixé au-dessus des courbes réelles maximales.

Le point de vue adopté dans [Sch11, Sch12, LS13, BS16, Sch17] est principalement celui de la géométrie différentielle (Section 3.1), en particulier la théorie de jauge à la Atiyah-Bott-Donaldson ([AB83, Don83]) : on se concentre sur l'espace \mathcal{A}_h des connexions unitaires sur un fibré hermitien réel ou quaternionique $(E, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ et sur l'action du groupe de jauge unitaire \mathcal{G}_h sur cet espace, qui est une action hamiltonienne compatible avec la structure *réelle* de \mathcal{A}_h induite par la structure réelle ou quaternionique τ de E , et on en déduit de nombreuses propriétés topologiques. Il existe également des aspects algébriques dans les travaux susmentionnés et nous les présentons dans la Section 3.2 ci-dessous, avant de donner quelques détails, dans la Section 3.3, sur le principe du calcul des nombres de Betti des champs de modules de fibrés réels et quaternioniques (semistables et généraux), en insistant sur l'analogie avec le cas complexe étudié par Atiyah et Bott dans [AB83].

3.1. Aspects différentiels

3.1.1. Classification topologique. — Nous résumons ci-dessous les principaux aspects du problème de la *classification* des fibrés vectoriels au-dessus d'une courbe algébrique réelle. Rappelons qu'une telle courbe réelle (X, σ) , que nous supposons compacte, connexe et dont nous noterons g le genre, vérifie les propriétés suivantes (dont on peut trouver une présentation contemporaine dans [Fal83, Nat90]) :

- Deux courbes réelles (X, σ) et (X', σ') sont *topologiquement conjuguées*, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme $f : X \xrightarrow{\cong} X'$ tel que $f \circ \sigma = \sigma' \circ f$, si et seulement si les surfaces topologiques $X/\langle \sigma \rangle$ et $X'/\langle \sigma' \rangle$ sont homéomorphes.
- Le nombre n de composantes connexes de $X^\sigma := \text{Fix}_\sigma(X) \simeq \partial(X/\langle \sigma \rangle)$ est compris entre 0 et $g + 1$; si $n = 0$, alors $X/\langle \sigma \rangle$ est non orientable et si $n = g + 1$ alors $X/\langle \sigma \rangle$ est orientable. De plus, si $X/\langle \sigma \rangle$ est orientable, alors $n \equiv (g + 1) \pmod{2}$.
- Si on pose $a = 0$ pour $X/\langle \sigma \rangle$ orientable et $a = 1$ pour $X/\langle \sigma \rangle$ non orientable, alors le triplet (g, n, a) caractérise le type d'homéomorphisme de la surface $X/\langle \sigma \rangle$. On a $a = 1$ si et seulement si $X \setminus X^\sigma$ est connexe.

Nous dirons aussi *surface de Klein* pour désigner une courbe réelle (X, σ) , c'est-à-dire une surface de Riemann X munie d'une involution anti-holomorphe σ . En géométrie réelle, les courbes (X, σ) telles que $X \setminus X^\sigma$ possèdent deux composantes connexes sont appelées courbes de Type I (!), tandis que si $X \setminus X^\sigma$ est connexe, on dit que (X, σ) est de Type II, ce qui inclut le cas $n = 0$.

Un *fibré vectoriel réel* au-dessus de (X, σ) est un couple (E, τ) où $p : E \rightarrow X$ est un fibré vectoriel complexe sur X et $\tau : E \rightarrow E$ est un relèvement de σ qui est \mathbb{C} -antilinéaire dans les fibres, c'est-à-dire que $p \circ \tau = \sigma \circ p$, $\tau(\lambda v) = \bar{\lambda} \tau(v)$ et $\tau^2 = \text{Id}_E$ ([Ati66]).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau} & E \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

Un morphisme de fibrés vectoriels réels $f : (E, \tau) \longrightarrow (E', \tau')$ est un morphisme de fibrés vectoriels $f : E \longrightarrow E'$ tel que $f \circ \tau = \tau' \circ f$. Selon le contexte, le fibré vectoriel complexe E pourra être C^∞ , hermitien ou holomorphe (nous utiliserons plutôt la lettre \mathcal{E} pour désigner un fibré vectoriel *holomorphe* sur X). Lorsque $\tau^2 = -\text{Id}_E$ au lieu de Id_E , on dit que (E, τ) est un fibré vectoriel quaternionique sur (X, σ) . Les morphismes de fibrés quaternioniques sont définis comme dans le cas réel.

Il est bien connu que les fibrés vectoriels complexes C^∞ au-dessus de X sont classifiés par le couple (r, d) où $r \geq 1$ est le rang de E et $d \in \mathbb{Z}$ est son degré, que l'on peut également voir comme la première classe de Chern $c_1(E) \in H^2(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ de E . Dans [Kah87], B. Kahn a montré que l'on pouvait, de même, classifier les fibrés réels C^∞ par le couple $(r, c_{1,(\sigma)}(E))$, où $c_{1,(\sigma)}(E) \in H_{(\sigma)}^2(X; \mathbb{Z})$ est la première classe de Chern équivariante de E . On retrouve une classification équivalente dans les travaux de M. Karoubi et C. Weibel sur la K -théorie réelle d'une courbe algébrique définie sur \mathbb{R} ([KW03]). Il s'avère utile, notamment pour compter les composantes connexes des espaces de modules de fibrés réels géométriquement stables (Théorème 1.4) de disposer d'une description moins condensée de $c_{1,(\sigma)}(E)$, en termes de classes caractéristiques ordinaires, ainsi que d'une classification topologique similaire pour les fibrés vectoriels quaternioniques. Un tel résultat est par exemple présenté dans l'article [BHH10] de I. Biswas, J. Huisman et J. Hurtubise. Lorsque $X^\sigma \neq \emptyset$, nous noterons $w := w_1(E) \in H^1(X^\sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ la première classe de Stiefel-Whitney du fibré vectoriel réel (au sens usuel) $E^\tau \longrightarrow X^\sigma$. Comme X^σ est homéomorphe à une union disjointe de n cercles, on peut voir w comme un n -uplet $w = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. On notera (r, d, w) les invariants topologiques d'un fibré vectoriel réel (E, τ) , avec la convention possible que $w = 0$ lorsque $X^\sigma = \emptyset$.

Théorème 3.1 ([BHH10]). — *Soit (X, σ) une surface de Klein compacte connexe de genre $g \geq 0$. Alors :*

1. *Deux fibrés vectoriels réels (E, τ) et (E', τ') de classe C^∞ au-dessus de (X, σ) sont isomorphes si et seulement $(r, d, w) = (r', d', w')$.*
2. *Deux fibrés vectoriels quaternioniques (E, τ) et (E', τ') de classe C^∞ au-dessus de (X, σ) sont isomorphes si et seulement $(r, d) = (r', d')$.*

En outre, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

1. *Si $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$ et $n > 0$, alors $t_1 + \dots + t_n = d \pmod{2}$, et si $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$ et $n = 0$, alors d est pair.*
2. *Si $\tau = \tau_{\mathbb{H}}$ et $n > 0$, alors r et d sont tous les deux pairs, et si $\tau = \tau_{\mathbb{H}}$ et $n = 0$, alors $d + r(g - 1) \equiv 0 \pmod{2}$.*

En particulier, si $n > 0$ et $r \wedge d = 1$, il existe des fibrés réels mais pas de fibrés quaternioniques. Et si $n = 0$, il existe des fibrés en droites quaternioniques.

3.1.2. Connexions invariantes. — Grâce au Théorème 3.1, on peut ramener l'étude des fibrés réels et quaternioniques (au sens holomorphe) au-dessus d'une surface de Klein (X, σ) à celle des structures holomorphes τ -compatibles sur un fibré réel ou quaternionique (E, τ) de classe C^∞ au-dessus de (X, σ) , c'est-à-dire les structures holomorphes sur E par rapport auxquelles l'application τ est anti-holomorphe : dans [Sch11, Sch12], nous montrons que si l'on regarde les structures holomorphes sur E comme des opérateurs de Dolbeault

$$\bar{\partial}_E : \Omega^0(X; E) \longrightarrow \Omega^1(X; E),$$

alors τ induit une *involution* sur l'espace \mathcal{C} de tels opérateurs, dont les points fixes sont exactement les structures holomorphes sur E qui rendent τ anti-holomorphe : c'est clair lorsque τ est réel ([Sch11]) et réaliser que c'est également le cas lorsque $\tau^2 = -\text{Id}_E$ a permis de dégager un formalisme commun à ces deux problèmes de classification, que nous allons maintenant exposer.

D'abord, il est utile de fixer une métrique hermitienne h sur le fibré vectoriel complexe E , choisie de manière à ce que τ soit une isométrie, ainsi qu'une métrique kählérienne sur X . L'espace \mathcal{C} des structures holomorphes sur E se met alors en bijection avec l'espace \mathcal{A}_h des connexions

unitaires sur (E, h) . Cette bijection permet d'étendre l'action du groupe de jauge unitaire \mathcal{G}_h sur \mathcal{A}_h en une action du groupe de jauge complexe \mathcal{G}_E , qui joue le rôle du complexifié de \mathcal{G}_h dans l'analogie à venir avec le théorème de Kempf-Ness en théorie géométrique des invariants ([KN79]). Atiyah et Bott ont montré que l'action de \mathcal{G}_h sur \mathcal{A}_h est hamiltonienne, avec pour application moment l'application

$$F: \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_h & \longrightarrow & \Omega^2(X; \mathfrak{u}(E, h)) \simeq \Omega^0(X; \mathfrak{u}(E, h)) \\ A & \longmapsto & F_A \end{array}$$

qui envoie une connexion unitaire sur sa courbure. Les connexions projectivement plates sur E (i.e. dont la courbure est centrale et constante : $F_A = i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E$) sont alors en correspondance avec les représentations unitaires de l'extension centrale π_d , du type mentionné dans le Diagramme (1.1.2).

Lorsque E est muni d'une structure réelle ou quaternionique τ , on a des involutions induites β_τ sur \mathcal{A}_h et α_τ sur \mathcal{G}_h . Les points fixes de β_τ (connexions invariantes) sont en bijection avec les structures holomorphes τ -compatibles sur E et les points fixes de α_τ sont les automorphismes de E qui commutent à τ . En particulier, α_τ est définie sur \mathcal{G}_E tout entier et elle induit une involution sur l'algèbre de Lie $\text{Lie}(\mathcal{G}_h) \simeq \Omega^0(X; \mathfrak{u}(E, h))$, que nous noterons encore α_τ . Nous avons montré dans [Sch11, Sch12] que les involutions α_τ et β_τ sont compatibles entre elles et avec l'application moment F , au sens où, pour tout $u \in \mathcal{G}_h$ et tout $A \in \mathcal{A}_h$, on a :

$$(3.1.1) \quad \beta_\tau(u \cdot A) = \alpha_\tau(u) \cdot \beta_\tau(A) \quad \text{et} \quad F \circ \beta_\tau = \alpha_\tau \circ F.$$

En particulier, β_τ préserve $F^{-1}(i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E)$ et $\mathcal{G}_h^\tau := \text{Fix}(\alpha_\tau)$ agit sur $\mathcal{A}_h^\tau := \text{Fix}(\beta_\tau)$ et sur

$$F^{-1}(i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E)^\tau = F^{-1}(i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E) \cap \mathcal{A}_h^\tau.$$

Les observations élémentaires de géométrie symplectique réelle (au sens de [OS00]) rassemblées ci-dessus sont le point de départ de notre étude des champs et espaces de modules de fibrés réels et quaternioniques. Par exemple, le champ $[\mathcal{C}^\tau / \mathcal{G}_E^\tau]$ paramètre les familles de structures holomorphes τ -compatibles sur le fibré (E, τ) . Plus précisément, si on se fixe un type topologique (r, d, w) ou (r, d) de fibré réel ou quaternionique comme dans le Théorème 3.1 et un fibré (E, τ) ayant ce type topologique, alors $[\mathcal{C}^\tau / \mathcal{G}_E^\tau]$ peut être vu comme le champ des modules de fibrés réels ou quaternioniques de même type topologique que (E, τ) . La cohomologie du champ $[\mathcal{C}^\tau / \mathcal{G}_E^\tau]$ est par définition la cohomologie \mathcal{G}_E^τ -équivariante de \mathcal{C}^τ et, comme \mathcal{C}^τ est un espace affine, il est contractile, ce qui implique que $H_{\mathcal{G}_E^\tau}^*(\mathcal{C}^\tau) \simeq H^*(B\mathcal{G}_E^\tau)$, où $B\mathcal{G}_E^\tau$ est l'espace classifiant du groupe \mathcal{G}_E^τ .

3.1.3. La fonctionnelle de Yang-Mills. — La fonctionnelle de Yang-Mills \mathcal{L}_{YM} est la norme au carré de l'application moment $F: \mathcal{A}_h \longrightarrow \Omega^0(X; \mathfrak{u}(E, h))$. Explicitement, une fois fixée une métrique riemannienne sur le fibré vectoriel $\mathfrak{u}(E, h)$ des endomorphismes anti-hermitiens de (E, h) :

$$\mathcal{L}_{\text{YM}}: \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_h & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \int_X \|F_A\|^2 \cdot \end{array}$$

Les points critiques de cette fonctionnelle sont appelées les *connexions de Yang-Mills* : Atiyah et Bott ont montré dans [AB83] que ce sont les connexions unitaires dont la courbure vérifie

$$F_A = i2\pi \left(\frac{d_1}{r_1} I_{r_1} \oplus \dots \oplus \frac{d_\ell}{r_\ell} I_{r_\ell} \right),$$

où $\sum_{i=1}^\ell r_i = r$ et $\sum_{i=1}^\ell d_i = d$ (et où l'on peut en outre supposer que $\frac{d_1}{r_1} > \dots > \frac{d_\ell}{r_\ell}$). Les minima absolus de cette fonctionnelle correspondent donc au cas où $\ell = 1$ et $F_A = i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E$. Donaldson a montré dans [Don83] que les orbites unitaires de connexions de Yang-Mills minimales et irréductibles correspondaient exactement aux classes d'isomorphisme de structures holomorphes sur E qui sont *stables* au sens de Mumford ([Mum63]). Les travaux de Donaldson, dans la continuité de ceux d'Atiyah et Bott, ont été approfondis par G. Daskalopoulos ([Das92]) et

J. Råde ([Råd92]) et les progrès qui s'en sont ensuivis peuvent, très schématiquement, être résumés ainsi :

1. Le flot gradient descendant de la fonctionnelle de Yang-Mills

$$\begin{cases} A_0 & = & A \\ \frac{d}{dt}A_t & = & -\text{grad}_{A_t}\mathcal{L}_{\text{YM}} \end{cases}$$

existe pour tout $t \geq 0$ et converge vers un point critique A_∞ de \mathcal{L}_{YM} lorsque $t \rightarrow +\infty$.

2. La stratification de Morse-Bott de $\mathcal{A}_h \simeq \mathcal{C}$ pour la fonctionnelle de Yang-Mills coïncide avec la stratification de Harder-Narasimhan de l'espace des fibrés vectoriels holomorphes de rang r et de degré d ([AB83, Kir84, Das92, Råd92]).
3. Si l'on note \mathcal{C}_{ss} l'ensemble des connexions unitaires A telles que $A_\infty \in F^{-1}(i2\pi\frac{d}{r}\text{Id}_E) =: \mathcal{A}_{h,\min}$, alors l'adhérence d'une \mathcal{G}_E -orbite dans \mathcal{C}_{ss} contient une unique \mathcal{G}_h -orbite de connexions projectivement plates. En particulier, la relation $\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2$ si $\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2} \neq \emptyset$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_{ss}/\mathcal{G}_E$, pour laquelle on note $\mathcal{C}_{ss}/\mathcal{G}_E$ le quotient associé. Si l'on pose $\mathcal{C}_{ps} := \mathcal{G}_E \cdot \mathcal{A}_{h,\min}$, on a donc des homéomorphismes :

$$\mathcal{C}_{ss}/\mathcal{G}_E \simeq \mathcal{C}_{ps}/\mathcal{G}_E \simeq \mathcal{A}_{h,\min}/\mathcal{G}_h = F^{-1}(i2\pi\frac{d}{r}\text{Id}_E)/\mathcal{G}_h,$$

dont la composition n'est autre que l'homéomorphisme de Narasimhan-Seshadri (1.1.1), le quotient $\mathcal{C}_{ps}/\mathcal{G}_E$ étant l'espace des \mathcal{G}_E -orbites semistables fermées.

4. Le flot de Yang-Mills d'une connexion unitaire A est contenu dans la \mathcal{G}_E -orbite de A dans \mathcal{C} et ceci définit une rétraction par déformation \mathcal{G}_h -équivariante

$$r : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{ss} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{h,\min} \\ A & \longmapsto & A_\infty \end{array}$$

Comme \mathcal{G}_h et \mathcal{G}_E ont même type d'homotopie, on a donc (pour tout anneau de coefficients \mathbf{k}) un isomorphisme

$$H_{\mathcal{G}_E}^*(\mathcal{C}_{ss}; \mathbf{k}) \simeq H_{\mathcal{G}_h}^*(\mathcal{A}_{h,\min}; \mathbf{k})$$

qui nous dit que, lorsqu'on calcule $H_{\mathcal{G}_E}^*(\mathcal{C}_{ss}; \mathbf{k})$ par l'approche d'Atiyah et Bott, on trouve bien la cohomologie équivariante du quotient $\text{Hom}^{\mathbb{Z}}(\pi_d; \mathbf{U}(r))/\mathbf{U}(r)$ qui lui est associé via le Théorème de Narasimhan et Seshadri (1.1.1).

Dans [LS13] et [Sch17], nous avons obtenu une version réelle des résultats ci-dessus, en donnant pour cela un sens aux *équations de Yang-Mills sur les surfaces de Klein* : comme expliqué dans [AB83], les équations de Yang-Mills sur une surface de Riemann X sont les équations d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle de Yang-Mills et celles-ci s'écrivent $d_A(*F_A) = 0$, où $*$ est l'opérateur étoile de Hodge sur les formes différentielles à valeurs vectorielles sur X . Lorsque la surface de Riemann X est en outre munie d'une structure réelle $\sigma : X \rightarrow X$, les équations de Yang-Mills sur la surface de Klein (X, σ) sont les suivantes :

$$\begin{cases} d_A(*F_A) & = & 0 \\ \overline{A} & = & A \end{cases}$$

(où l'on a simplement écrit \overline{A} au lieu de $\beta_\tau(A)$) c'est-à-dire que les connexions de Yang-Mills au-dessus de (X, σ) sont les points critiques de \mathcal{L}_{YM} qui sont des points fixes de la structure réelle β_τ de \mathcal{A}_h ([LS13, Définition 2.15]).

Remarque 3.2. — On peut faire deux remarques sur la définition des connexions de Yang-Mills réelles au sens ci-dessus :

1. Contrairement à l'involution sur l'espace des connexions étudiée par N.K.Ho et C.C.M. Liu dans [HL08], les équations de Yang-Mills ont ici un sens car chaque strate de Morse est préservée par l'involution β_τ , pas seulement la strate semistable. Les niveaux critiques de \mathcal{L}_{YM} sont également préservés par β_τ : dans [HL08], seules l'ensemble des connexions *plates* (au-dessus d'une surface non orientable) est préservée par l'involution considérée.

Cette remarque montre aussi que nous n'avons pas encore une compréhension suffisante du cas abstrait ($G_{\mathbb{C}}$ -fibrés principaux réels pour G un groupe algébrique réel qui serait seulement *quasi-déployé*).

2. Il découle de la définition donnée qu'une connexion de Yang-Mills réelle est davantage qu'un point critique de la restriction de la fonctionnelle de Yang-Mills à l'espace \mathcal{A}_h^τ des connexions invariantes : une connexion de Yang-Mills réelle est une connexion qui est à la fois de Yang-Mills et invariante. En anticipant un peu sur ce qui va suivre (Théorème 3.3 et Section 3.2), on voit en particulier qu'être polystable au sens réel est équivalent à être polystable et réel, ce qui est la manifestation attendue d'un phénomène classique en théorie géométrique des invariants, étudié notamment par D. Birkes ([Bir71]) et G. Kempf ([Kem78]) et déjà mentionné par K. Corlette dans [Cor88, p.368], lorsqu'il considère les représentations d'un groupe de surface à valeurs dans une forme réelle d'un groupe de Lie complexe semisimple.

Comme dans le cas complexe, les propriétés espérées découlent du bon comportement du flot de Yang-Mills pour les connexions invariantes $A \in \mathcal{A}_h^\tau$: les relations de compatibilité (3.1.1) entraînent que $\mathcal{L}_{\text{YM}} \circ \beta_\tau = \mathcal{L}_{\text{YM}}$ et $\text{grad}_{\beta_\tau(A)} \mathcal{L}_{\text{YM}} = T_A \beta_\tau \cdot \text{grad}_A \mathcal{L}_{\text{YM}}$ ([Sch17, Lemma 3.15]) et ceci implique que le flot de Yang-Mills d'une connexion invariante $A \in \mathcal{A}_h^\tau$ est contenu dans la \mathcal{G}_E^τ -orbite de A . On a alors les résultats suivants :

Théorème 3.3. — [Sch17, Theorem 3.13, Corollary 3.17] *L'espace $\mathcal{C}_{ss} \subset \mathcal{C} \simeq \mathcal{A}_h$ est stable par l'involution β_τ et le flot de Yang-Mills induit une rétraction par déformation \mathcal{G}_h^τ -équivariante*

$$r|_{\mathcal{C}_{ss}^\tau} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{ss}^\tau := \text{Fix}(\beta_\tau) \cap \mathcal{C}_{ss} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{h,\min}^\tau \\ A & \longmapsto & A_\infty \end{array}$$

Comme \mathcal{G}_E^τ et \mathcal{G}_h^τ ont même type d'homotopie, on a donc un isomorphisme

$$(3.1.2) \quad \mathbb{H}_{\mathcal{G}_E^\tau}^*(\mathcal{C}_{ss}^\tau) \simeq \mathbb{H}_{\mathcal{G}_h^\tau}^*(\mathcal{A}_{h,\min}^\tau).$$

L'adhérence d'une \mathcal{G}_E^τ -orbite dans \mathcal{C}_{ss}^τ contient une unique \mathcal{G}_h^τ -orbite de connexions projectivement plates invariantes. En particulier, on a un quotient bien défini $\mathcal{C}_{ss}^\tau // \mathcal{G}_E^\tau$ et, si on pose $\mathcal{C}_{ps}^\tau := \mathcal{C}_{ps} \cap \text{Fix}(\beta_\tau)$, on a des homéomorphismes

$$\mathcal{C}_{ss}^\tau // \mathcal{G}_E^\tau \simeq \mathcal{C}_{ps}^\tau // \mathcal{G}_E^\tau \simeq \mathcal{A}_{h,\min}^\tau // \mathcal{G}_h^\tau = F^{-1} \left(i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E \right)^\tau // \mathcal{G}_h^\tau,$$

dont la composition fournit la version réelle et quaternionique de la correspondance de Narasimhan-Seshadri énoncée dans le Théorème 1.6, le quotient $\mathcal{C}_{ps}^\tau // \mathcal{G}_E^\tau$ étant l'espace des \mathcal{G}_E^τ -orbites semistables fermées.

Corollaire 3.4. — [Sch17] *L'isomorphisme (3.1.2) ci-dessus nous dit que le polynôme de Poincaré \mathcal{G}_E^τ -équivariant de \mathcal{C}_{ss}^τ est égal au polynôme de Poincaré $\mathbf{U}(r)$ -équivariant de l'espace des représentations réelles ou quaternioniques*

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}(\pi_1(S(L)/\langle \tau_L \rangle); \mathbf{W}^\pm(r))$$

du Théorème 1.6. Ce polynôme de Poincaré équivariant est calculé de manière récursive dans le Théorème 1.14.

L'intérêt du Théorème 3.3 sera confirmé dans la Section 3.2, où nous verrons que \mathcal{C}_{ss}^τ tel que nous l'avons défini correspond bien aux structures holomorphes τ -compatibles qui sont semistables au sens de la géométrie algébrique. L'espace quotient $\mathcal{A}_{h,\min}^\tau // \mathcal{G}_h^\tau$ peut alors être vu comme un espace de modules de telles structures (ses points sont en bijection avec les classes de S -équivalence d'objets semistables) et on peut étudier la topologie de ces espaces à l'aide de méthodes de théorie de Morse et de cohomologie équivariante similaires à celles d'Atiyah et Bott. Biswas, Huisman et Hurtubise ont par exemple montré dans [BHH10] que ces quotients

étaient connexes et nous verrons dans la Section 3.3 que cette construction d'espaces de modules en géométrie algébrique réelle sous la forme de *quotients lagrangiens*

$$F^{-1} \left(i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E \right)^\tau / \mathcal{G}_h^\tau$$

(une version réelle du quotient symplectique usuel, qui apparaît en géométrie kählérienne) permet dans certains cas de calculer les nombres de Betti (à coefficients dans les entiers modulo 2) des espaces de modules de fibrés réels et quaternioniques.

Le Théorème 3.3 a aussi servi de prototype pour construire, toujours à l'aide de méthodes de théorie de jauge ([Sch19a]), des espaces de modules de fibrés équivariants et pseudo-équivariants (où l'action du groupe est tordue par un cocycle) sur une surface de Riemann munie de l'action d'un groupe fini agissant par transformation holomorphes et anti-holomorphes. Une présentation plus intrinsèque et plus algébrique des résultats de [Sch19a] peut désormais être donnée à l'aide de la notion de \mathcal{G} -torseurs de Higgs développée dans la Section 2.5 (en prenant $G := K$ un groupe de Lie compact, sur lequel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit via la restriction à K de la forme réelle déployée de $K_{\mathbb{C}}$).

3.2. Aspects algébriques

Si l'on se fixe pour objectif de construire des espaces de modules de fibrés vectoriels de rang $r \geq 1$ sur une courbe algébrique de telle sorte que ces espaces soient eux-mêmes des *variétés* algébriques, la notion clé pour rendre cela possible est celle de *stabilité* au sens de la théorie géométrique des invariants (GIT) de D. Mumford ([MFK93]). Si l'on travaille sur une courbe réelle (X, σ) , on peut distinguer *a priori* les quatre notions suivantes. Rappelons que, pour un fibré vectoriel holomorphe \mathcal{E} de rang $r \geq 1$ et de degré $d \in \mathbb{Z}$, on appelle *pente* de E le nombre rationnel $\mu(E) := \frac{d}{r}$.

Définition 3.5. — [Sch12, Definition 2.5] Soit (X, σ) une surface de Klein compacte connexe. Un fibré vectoriel réel ou quaternionique (\mathcal{E}, τ) au-dessus de X est dit :

1. *stable* si, pour tout sous-fibré $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ tel que $\tau(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, on a $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$.
2. *géométriquement stable* si, pour tout sous-fibré $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$, on a $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$.
3. *semistable* si, pour tout sous-fibré $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ tel que $\tau(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, on a $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$.
4. *géométriquement semistable* si, pour tout sous-fibré $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$, on a $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$.

Si \mathcal{E} est un fibré stable, un endomorphisme non nul est nécessairement un isomorphisme. En particulier, si $u \in \text{End}(\mathcal{E})$, alors la \mathbb{C} -algèbre commutative $\mathbb{C}(u)$ est un corps qui est une extension de \mathbb{C} donc égal à \mathbb{C} puisque u est algébrique sur \mathbb{C} d'après Hamilton-Cayley. Ainsi, si \mathcal{E} est stable, on a $\text{Aut}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{C}^*$ (on dit parfois que \mathcal{E} est *simple*) et cette remarque est suffisante pour montrer qu'un fibré stable n'est pas nécessairement géométriquement stable. Mieux, la proposition suivante permet d'identifier tous les objets stables dans le présent contexte. Dans l'énoncé de cette proposition, $\tilde{\sigma}$ désigne le morphisme canonique $\overline{\sigma^* \mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$ obtenu par pullback le long de $\sigma : X \rightarrow X$ et on pose

$$\tilde{\sigma}_+ := \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma} \\ \tilde{\sigma}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_- := \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\sigma} \\ \tilde{\sigma}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.6. — [Sch12, Proposition 2.7] Si (\mathcal{E}, τ) est stable, alors soit \mathcal{E} est géométriquement stable, soit il existe un fibré vectoriel stable \mathcal{F} , non isomorphe à $\overline{\sigma^* \mathcal{F}}$ lorsque τ est une structure réelle, tel que (\mathcal{E}, τ) est isomorphe à $(\mathcal{F} \oplus \overline{\sigma^* \mathcal{F}}, \tilde{\sigma}_+)$ dans le cas réel et à $(\mathcal{F} \oplus \overline{\sigma^* \mathcal{F}}, \tilde{\sigma}_-)$ dans le cas quaternionique.

En particulier, un fibré vectoriel réel ou quaternionique (\mathcal{E}, τ) est géométriquement stable si et seulement si (\mathcal{E}, τ) est stable au sens réel et \mathcal{E} est simple.

Le résultat suivant montre que la construction GIT habituelle d'une variété de modules de fibrés vectoriels *stables au sens complexe* fournit une variété algébrique réelle (l'espace $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)$)

des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes de rang r et de degré d stables au sens complexe, munie de la structure réelle $\mathcal{E} \mapsto \overline{\sigma^* \mathcal{E}}$ dont les points réels sont des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels ou quaternioniques *géométriquement stables* ([Sch12, Propositions 2.3 et 2.8]) :

Proposition 3.7. — *Si \mathcal{E} est stable au sens complexe et tel que $\overline{\sigma^* \mathcal{E}} \simeq \mathcal{E}$, alors \mathcal{E} admet soit une structure réelle, soit une structure quaternionique. Et dans ce cas, une telle structure est unique à isomorphisme près. On peut donc décomposer le lieu réel de $(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d), \sigma)$ de la façon suivante :*

$$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)^{\sigma} \simeq \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d) \sqcup \mathcal{N}_{\mathbb{H}}(r, d),$$

où $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d)$ et $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(r, d)$ désignent respectivement l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels ou quaternioniques *géométriquement stables* de rang r et de degré d .

La Proposition 3.7 correspond à la première partie du Théorème 1.1 présenté dans l'introduction. Dans [HN75], G. Harder et M. S. Narasimhan étudient la situation analogue pour les courbes définies sur un corps fini, en choisissant d'emblée la notion de stabilité géométrique / au sens GIT. Si X est défini sur \mathbb{F}_q , il existe donc une variété de modules $\mathcal{N}(r, d)$, qui paramètre les fibrés géométriquement stables de rang r et de degré d sur X . Cette variété est définie sur \mathbb{F}_{q^n} pour un certain n et, quitte à étendre les scalaires pour la courbe X , on peut supposer que $n = 1$. Un fibré géométriquement stable Galois-invariant est alors nécessairement défini sur ce même corps \mathbb{F}_q . La différence avec le cas réel peut se comprendre en termes d'invariants arithmétiques standard, en comparant simplement les groupes de Brauer de \mathbb{R} et \mathbb{F}_q : le groupe $\text{Br}(\mathbb{F}_q)$ est trivial, tandis que $\text{Br}(\mathbb{R})$ possède deux éléments (\mathbb{R} et \mathbb{H} , si l'on veut). Nous renvoyons à [Sch17, Propositions 3.8 et 3.9] pour plus de détails sur la façon dont apparaissent les groupes de Brauer dans ce contexte.

La notion de semistabilité, quant à elle, est bien invariante par extension des scalaires, si bien qu'un fibré réel ou quaternionique (\mathcal{E}, τ) est semistable si et seulement s'il est géométriquement semistable : c'est une conséquence du théorème de Harder et Narasimhan sur l'existence et l'unicité d'une filtration canonique

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_\ell = \mathcal{E}$$

avec $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ semistable pour tout $i \in \{1; \dots; \ell\}$ et telle que

$$\mu(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0) > \mu(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) > \dots > \mu(\mathcal{E}_\ell/\mathcal{E}_{\ell-1}).$$

Dans cette filtration, le fibré \mathcal{E}_1 est en effet l'unique fibré de rang maximal parmi les sous-fibrés de pente maximale de \mathcal{E} ; il est donc nécessairement τ -invariant, ce qui implique que \mathcal{E} est semistable au sens complexe dès que (\mathcal{E}, τ) est semistable au sens de la Définition 3.5. On peut enfin remarquer que les quatre notions de (semi)stabilité de la Définition 3.5 coïncident lorsque $r \wedge d = 1$.

Au vu de ce qui précède, on pouvait espérer, par analogie avec les résultats de Seshadri dans [Ses67], pouvoir construire une compactification modulaire des variétés de modules $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d)$ et $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(r, d)$, vues, à l'aide de la Proposition 3.7, comme sous-ensembles algébriques de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)^{\sigma}$. Rappelons que la construction de Seshadri consiste à identifier deux fibrés semistables de rang r et de degré d si les objets gradués associés à une filtration de Jordan-Hölder quelconque de ces fibrés sont isomorphes : Seshadri a en effet démontré qu'un fibré holomorphe semistable de pente μ admet des filtrations

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_k = \mathcal{E}$$

où chaque quotient $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$ est stable de pente μ et que la classe d'isomorphisme de l'objet gradué associé

$$\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}$$

est indépendante du choix de la filtration, ce qui définit une relation d'équivalence (dite relation de S -équivalence) sur l'ensemble des fibrés semistables de rang r et de degré d . La Propostion 3.6

montre que, pour un fibré réel (respectivement, quaternionique), il n'existe pas nécessairement de filtrations dont les quotients sont à la fois réels (respectivement, quaternioniques) et géométriquement stables. En revanche, de telles filtrations existent bien lorsqu'on demande seulement que les quotients successifs soient stables *au sens réel ou quaternionique* ([Sch12, Theorem 2.10]). Cela permet de généraliser immédiatement le point de vue de Seshadri aux cas réel et quaternionique : on peut considérer les classes de $S_{\mathbb{R}}$ -équivalence (respectivement, $S_{\mathbb{H}}$ -équivalence) sur l'ensemble des fibrés réels (respectivement, quaternioniques) semistables de rang r et de degré d . Dans le cas réel, on peut même considérer cette relation d'équivalence sur l'ensemble des fibrés vectoriels réels semistables de type topologique (r, d, w) au sens du Théorème 3.1. Notons qu'une filtration de Jordan-Hölder réelle ou quaternionique n'est pas en général une filtration de Jordan-Hölder au sens complexe : les filtrations de Jordan-Hölder complexes de $(\mathcal{F} \oplus \overline{\sigma^* \mathcal{F}}, \overline{\sigma_{\pm}})$ sont de longueur 2 mais cet objet est stable du point de vue réel ou quaternionique.

Il s'agit alors de mettre une topologie sur l'ensemble $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, d, w)$ des classes de $S_{\mathbb{R}}$ -équivalence de fibrés réels (respectivement, quaternioniques) semistables de type topologique fixé (respectivement, sur l'ensemble $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, d)$ des classes de $S_{\mathbb{H}}$ -équivalence de fibrés quaternioniques semistables de type topologique fixé). Une façon de le faire particulièrement utile pour la suite est d'effectuer ici la jonction avec le point de vue différentiel de la Section 3.1, en démontrant la version réelle et quaternionique suivante du Théorème de Donaldson ([Don83]). Rappelons qu'un fibré vectoriel est dit polystable s'il est semistable et isomorphe à une somme directe de fibrés stables (qui sont alors nécessairement de même pente).

Théorème 3.8. — [Sch12, Theorem 3.7] *Soit (E, τ) un fibré vectoriel réel ou quaternionique hermitien de classe C^∞ sur (X, σ) . Une connexion unitaire invariante $A \in \mathcal{A}_h^\tau$ définit une structure holomorphe τ -compatible polystable sur E si sa \mathcal{G}_E^τ -orbite contient une connexion projectivement plate. Dans ce cas, deux telles connexions sont situées dans une même \mathcal{G}_h^τ -orbite.*

En conséquence, on a des bijections

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, d, w) \simeq \mathcal{A}_{h, \min}^\tau / \mathcal{G}_h^\tau = F^{-1} \left(i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E \right)^\tau / \mathcal{G}_h^\tau$$

et

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, d) \simeq \mathcal{A}_{h, \min}^\tau / \mathcal{G}_h^\tau = F^{-1} \left(i2\pi \frac{d}{r} \text{Id}_E \right)^\tau / \mathcal{G}_h^\tau.$$

Ce point de vue est à la base de tous les résultats sur la topologie des espaces de modules de fibrés réels et quaternioniques présentés dans ce mémoire :

1. Le comptage des composantes connexes de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)^\sigma$ énoncé dans le Théorème 1.4 : la proposition 3.7 combinée au Théorème 3.8 et aux résultats de [BHH10] sur la connexité des quotients $\mathcal{A}_{h, \min}^\tau / \mathcal{G}_h^\tau$ (voir aussi [Sch19a, Theorem 2.12]) montre que les composantes connexes de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)^\sigma$ sont indexées par les types topologiques de fibrés réels et quaternioniques ([Sch12, Theorem 3.8]). L'espace $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(r, d)$ est donc connexe, ainsi que l'espace $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(r, d)$ si $X^\sigma = \emptyset$. Si X^σ a $n > 0$ composantes connexes, alors le nombre de types topologiques de fibrés réels est égal, d'après le Théorème 3.1, au nombre de solutions de l'équation $t_1 + \dots + t_n = d \pmod{2}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit 2^{n-1} . Les Théorèmes 1.1 et 1.4 sont donc démontrés.
2. La correspondance de Narasimhan-Seshadri pour les fibrés vectoriels réels et quaternioniques des Théorèmes 1.6 (et 1.8), que l'on obtient en étudiant les représentations d'holonomie de connexions unitaires invariantes et projectivement plates ([Sch17, Theorem 4.5]) : puisque la connexion est projectivement plate, elle fournit une représentation unitaire $\varrho : \pi_d \rightarrow \mathbf{U}(r)$ au sens considéré dans le Diagramme (1.1.2), où $d = \deg(E)$ et π_d est le groupe fondamental dont une construction et une présentation ont été rappelés en (1.1.3). Et le fait que la connexion A est invariante entraîne que la représentation d'holonomie associée *s'étend* en une représentation du groupe fondamental orbifold $\pi_1(X/\langle \sigma \rangle)$, au sens

du diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1 X & \longrightarrow & \pi_1(X/\langle\sigma\rangle) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \varrho & & \parallel \\
1 & \longrightarrow & \mathbf{U}(r) & \longrightarrow & \mathbf{W}^\pm(r) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0
\end{array}$$

dans lequel, lorsque τ est une structure réelle, la représentation ainsi étendue est à valeurs dans le groupe $\mathbf{W}^+(r) := \mathbf{U}(r) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pour l'action $u \mapsto \bar{u}$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbf{U}(r)$, et lorsque τ est quaternionique, c'est l'unique extension non triviale (pour cette même action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbf{U}(r)$) qui apparaît :

$$1 \longrightarrow \mathbf{U}(r) \longrightarrow \mathbf{W}^-(r) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Ce résultat a été généralisé à des actions de groupes finis quelconques dans [Sch19a, Theorem 3.2].

3. Le calcul de la série de Poincaré du champ $[\mathcal{C}_{ss}^\tau/\mathcal{G}_E^\tau]$, dont le résultat est présenté dans les Théorèmes 1.14 et 1.15 et sur lequel nous reviendrons dans la Section 3.3.

Remarque 3.9. — La correspondance de Narasimhan-Seshadri pour les fibrés vectoriels réels et quaternioniques montre en particulier que les espaces topologiques $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(r, d, w)$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}(r, d)$ sont bien des compactifications modulaires des composantes connexes $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d, w)$ et $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(r, d)$ de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(r, d)^\sigma$, puisque les espaces de représentations unitaires généralisées du Théorème 1.6 sont compacts.

Enfin, en collaboration avec I. Biswas, nous avons également étudié les modules de fibrés réels et quaternioniques sur les courbes réelles de genre 1 et nous avons obtenu des résultats sur les fibrés semistables et les fibrés indécomposables au-dessus de telles courbes, pour lesquels nous renvoyons à l'introduction de ce mémoire (Théorème 1.3) ainsi qu'à [BS16, Theorem 1.3 et 1.4].

3.3. Topologie des champs de modules de fibrés réels

Le but de qui suit est de présenter les résultats obtenus en collaboration avec Melissa Liu sur la topologie des champs de modules $[\mathcal{C}^\tau/\mathcal{G}_E^\tau]$ et $[\mathcal{C}_{ss}^\tau/\mathcal{G}_E^\tau]$, en établissant un parallèle entre notre calcul et celui d'Atiyah et Bott pour les champs de modules $[\mathcal{C}/\mathcal{G}_E]$ et $[\mathcal{C}_{ss}/\mathcal{G}_E]$. Nous allons commencer par l'étude du champ $[\mathcal{C}_{ss}^\tau/\mathcal{G}_E^\tau]$, pour laquelle les cas réels et quaternioniques se traitent exactement de la même façon, puis nous passerons à celle du champ $[\mathcal{C}^\tau/\mathcal{G}_E^\tau]$, pour laquelle il faut distinguer plusieurs cas, réel et quaternionique mais aussi selon le type topologique de (X, σ) . Néanmoins, afin de ne pas alourdir inutilement la présentation, nous nous restreindrons, pour $[\mathcal{C}^\tau/\mathcal{G}_E^\tau]$, au cas où (E, τ) est réel et $X^\sigma \neq \emptyset$, renvoyant à l'introduction du mémoire pour l'énoncé des résultats dans les autres cas et nous contentant de commentaires occasionnels sur ceux-ci dans la Section 3.3.2.

3.3.1. Champs de modules de fibrés semistables. — Dans le tableau suivant, nous rassemblons les principaux points pour lesquels l'analogie entre le cas complexe et le cas réel est quasi-parfaite.

Cas complexe	Cas réel ou quaternionique
- La filtration de Harder-Narasimhan complexe induit une <i>stratification</i>	- La filtration de Harder-Narasimhan réelle ou quaternionique induit une <i>stratification</i>
$\mathcal{C} = \bigsqcup_{\mu \in I_{r,d}} \mathcal{C}_\mu$	$\mathcal{C}^\tau = \bigsqcup_{\mu \in I_{r,d}^\tau} \mathcal{C}_\mu^\tau$
en sous-espaces de codimension complexe $d_\mu < +\infty$. La strate \mathcal{C}_μ est \mathcal{G}_E -invariante.	en sous-espaces de codimension réelle $d_\mu < +\infty$. La strate \mathcal{C}_μ est \mathcal{G}_E^τ -invariante.

- Le fibré normal équivariant de \mathcal{C}_μ est un fibré vectoriel complexe, il est donc *orientable* en tant que fibré vectoriel réel (au sens usuel) et possède une classe d'Euler *rationnelle*

$$e_{\mathcal{G}_E}(\mathcal{N}_\mu) \in H_{\mathcal{G}_E}^{2d_\mu}(\mathcal{C}_\mu; \mathbb{Q})$$

qui n'est pas un diviseur de zéro dans la \mathbb{Q} -algèbre $H^*(\mathcal{C}_\mu; \mathbb{Q})$.

- D'après [AB83, Proposition 1.9], la suite exacte longue (de Gysin) associée à la stratification $(\mathcal{C}_\mu)_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}}$ se décompose en suites exactes courtes, ce qui revient à dire que

$$P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}; \mathbb{Q}) = \sum_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}} t^{2d_\mu} P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_\mu; \mathbb{Q}).$$

- L'inclusion canonique $\mathcal{C}_{ss} \hookrightarrow \mathcal{C}$ induit un morphisme surjectif

$$H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{\mathcal{G}_E}^*(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q}).$$

- Le fibré normal équivariant de \mathcal{C}_μ^τ est un fibré vectoriel réel (au sens usuel), qui n'est pas toujours orientable ([LS13, Section 5.3]). Il possède cependant une classe d'Euler *modulo 2*

$$e_{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{N}_\mu^\tau) \in H_{\mathcal{G}_E^\tau}^{d_\mu}(\mathcal{C}_\mu^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

qui n'est pas un diviseur de zéro dans la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -algèbre $H^*(\mathcal{C}_\mu^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

- D'après [LS13, Théorème 5.12], la suite exacte longue (de Gysin) associée à la stratification $(\mathcal{C}_\mu^\tau)_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}^\tau}$ se décompose en suites exactes courtes, ce qui revient à dire que

$$P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}^\tau} t^{d_\mu} P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}_\mu^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

- L'inclusion canonique $\mathcal{C}_{ss}^\tau \hookrightarrow \mathcal{C}^\tau$ induit un morphisme surjectif

$$H^*(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\mathcal{G}_E^\tau}^*(\mathcal{C}_{ss}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

On pourra simplement noter que, dans le cas réel ou quaternionique, il est un peu plus compliqué que dans le cas complexe de démontrer que la classe d'Euler équivariante du fibré normal aux strates n'est pas un diviseur de zéro dans $H_{\mathcal{G}_E^\tau}^*(\mathcal{C}_\mu^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Comme dans [AB83], on procède par réduction à la cohomologie équivariante sous l'action du groupe de Lie compact

$$K_\mu := \mathbf{U}(r_1) \times \dots \times \mathbf{U}(r_\ell),$$

où (r_1, \dots, r_ℓ) sont les rangs des quotients successifs $(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})_{1 \leq i \leq \ell}$ associés à une filtration de Harder-Narasimhan de type $\mu \leftrightarrow (r_i, d_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, puis par réduction à la cohomologie équivariante sous l'action d'un tore maximal $T \subset K_\mu$. Mais il nous faut ensuite réduire encore cela à la "partie réelle" du tore maximal T ([LS13, Lemma 5.9]), avant de reprendre le fil de l'argument d'Atiyah et Bott ([LS13, Lemma 5.10]).

Comme dans l'introduction (Equation (1.1.9) et Théorème 1.10 dans le cas complexe, Equation (1.1.12) et Théorème 1.14 dans le cas réel ou quaternionique), on déduit de ce qui précède les formules récursives suivantes :

$$P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q}) = P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}; \mathbb{Q}) - \sum_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d} \setminus \{\mu_{ss}\}} t^{2d_\mu} P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_\mu; \mathbb{Q})$$

et

$$P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}_{ss}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - \sum_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}^\tau \setminus \{\mu_{ss}\}} t^{d_\mu} P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}_\mu^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Nous renvoyons aux points susmentionnés de l'introduction pour une explication de pourquoi les formules ci-dessus sont bien récursives. Pour compléter le calcul, il reste à déterminer $P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$ et $P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui, comme \mathcal{C} et \mathcal{C}^τ sont des espaces affines (donc contractiles), sont égales respectivement à $P_t(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q})$ et $P_t(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, les séries de Poincaré des espaces classifiants des groupes de jauge \mathcal{G}_E et \mathcal{G}_E^τ . Avant d'expliquer comment celles-ci peuvent être calculées (Section 3.3.2), mentionnons encore deux propriétés des séries formelles $P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q})$ et $P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}_{ss}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1. Comme dans le cas complexe ([Zag96, Theorem 2]), la formule récursive associée à

$$(3.3.1) \quad P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_{\mu \in \mathbb{I}_{r,d}^\tau} t^{d_\mu} P_t^{\mathcal{G}_E^\tau}(\mathcal{C}_\mu^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

peut être transformée de façon à obtenir une formule récursive qui vérifie les hypothèses du théorème de Zagier, donc aussi en une formule close ([LS13, Theorem 6.2]). L'un des points importants dans la modification à faire subir à la formule (3.3.1) est qu'apparaisse une somme indexée par $I_{r,d}$, pas $I_{r,d}^T$, afin de pouvoir effectivement appliquer le théorème de Zagier.

2. Lorsque $r \wedge d = 1$ (ce qui équivaut à dire que tous les fibrés semistables sont stables), on peut déduire des séries de Poincaré équivariantes $P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$ et $P_t^{\mathcal{G}_E^T}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ les séries de Poincaré ordinaires des espaces de modules $\mathcal{C}_{ss}/\overline{\mathcal{G}_E}$ et $\mathcal{C}_{ss}^T/\overline{\mathcal{G}_E^T}$ (où $\overline{\mathcal{G}_E} := \mathcal{G}_E/\mathbb{C}^*$ et $\overline{\mathcal{G}_E^T} := \mathcal{G}_E^T/\mathbb{R}^*$ sont les groupes de jagues complexes et réels modulo leurs centres respectifs, ces derniers étant exactement les stabilisateurs des structures géométriquement stables sous l'action du groupe de jague), comme expliqué dans l'introduction (Equations (1.1.11) et 1.1.14, reproduites ci-dessous).

Travaillons désormais sous l'hypothèse que $r \wedge d = 1$. Nous donnons dans le tableau suivant un peu plus de détails sur la façon dont les relations

$$(3.3.2) \quad P_t^{\mathcal{G}_E}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q}) = P_t(B\mathbb{C}^*; \mathbb{Q}) P_t^{\overline{\mathcal{G}_E}}(\mathcal{C}_{ss}; \mathbb{Q})$$

et

$$(3.3.3) \quad P_t^{\mathcal{G}_E^T}(\mathcal{C}_{ss}^T; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = P_t(B\mathbb{R}^*; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) P_t^{\overline{\mathcal{G}_E^T}}(\mathcal{C}_{ss}^T; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

sont établies, en nous attachant à montrer le rôle crucial des coefficients modulo 2 dans les cas réel et quaternionique.

Cas complexe	Cas réel ou quaternionique
- Pour montrer (3.3.2), il suffit de montrer que le morphisme	- Pour montrer (3.3.3), il suffit de montrer que le morphisme
(3.3.4) $H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(B\mathbb{C}^*; \mathbb{Q})$	(3.3.4) $H^*(B\mathcal{G}_E^T; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(B\mathbb{R}^*; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
induit par l'inclusion canonique	induit par l'inclusion canonique
$\mathbb{C}^* \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_E) \hookrightarrow \mathcal{G}_E$	$\mathbb{R}^* \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_E^T) \hookrightarrow \mathcal{G}_E^T$
est surjectif pour pouvoir appliquer le théorème de Leray-Hirsch aux fibrations du diagramme commutatif suivant :	est surjectif pour pouvoir appliquer le théorème de Leray-Hirsch aux fibrations du diagramme commutatif suivant :
$\begin{array}{ccccc} BC^* & \longrightarrow & E\mathcal{G}_E \times_{\mathcal{G}_E} \mathcal{C}_{ss} & \longrightarrow & E\overline{\mathcal{G}_E} \times_{\overline{\mathcal{G}_E}} \mathcal{C}_{ss} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ BC^* & \longrightarrow & B\mathcal{G}_E & \longrightarrow & B\overline{\mathcal{G}_E} \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} B\mathbb{R}^* & \longrightarrow & E\mathcal{G}_E^T \times_{\mathcal{G}_E^T} \mathcal{C}_{ss} & \longrightarrow & E\overline{\mathcal{G}_E^T} \times_{\overline{\mathcal{G}_E^T}} \mathcal{C}_{ss} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ B\mathbb{R}^* & \longrightarrow & B\mathcal{G}_E^T & \longrightarrow & B\overline{\mathcal{G}_E^T} \end{array}$
- Comme $H^*(B\mathbb{C}^*; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[c_1]$ avec $\deg c_1 = 2$, il suffit, pour montrer que (3.3.4) est surjectif, de montrer que	- Comme $H^*(B\mathbb{R}^*; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[w_1]$ avec $\deg w_1 = 1$, il suffit, pour montrer que (3.3.4) est surjectif, de montrer que
(3.3.5) $H^2(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(B\mathbb{C}^*; \mathbb{Q})$	(3.3.5) $H^1(B\mathcal{G}_E^T; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(B\mathbb{R}^*; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
est surjectif, ce qui est bien le cas ([AB83, (9.2) p.577]).	est surjectif, ce qui est bien le cas ([LS13, Proposition 6.6]).

Bien que très similaires, les énoncés (3.3.5) complexe et réel/quaternionique se démontrent de manière quelque peu différente. Sur ce point précis, nous pouvons résumer les différences entre [AB83] et [LS13] de la façon suivante.

- Dans le cas complexe, Atiyah et Bott démontrent que l'analogue de (3.3.5) pour la cohomologie à coefficients entiers est vrai : le morphisme

$$H^2(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(B\mathbb{C}^*; \mathbb{Z})$$

est surjectif ([AB83, Proposition 2.21, p.544]). D'après le théorème des coefficients universels, ce résultat est alors vrai *pour la cohomologie à coefficients dans un corps quelconque* car les groupes $H^*(B\mathbb{C}^*; \mathbb{Z})$ et $H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Z})$ sont *sans torsion* ([AB83, Proposition 2.10]).

Enfin, l'utilisation de la K -théorie permet, toujours dans le cas complexe, de se ramener au cas où X est *de genre 0*. Dans ce cas, $\mathcal{G}_E = \mathcal{G}_0(E)$ est *connexe* (donc $B\mathcal{G}_0(E)$ est simplement connexe) et, pour montrer que

$$H^2(B\mathcal{G}_0(E); \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(B\mathbb{C}^*; \mathbb{Z})$$

est surjective, il suffit, d'après le théorème des coefficients universels, de montrer que le morphisme canonique

$$\pi_1(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}_0(E))$$

est *injectif*, ce qui est vrai lorsque $r \wedge d = 1$ ([AB83, Corollary 2.26, p.545]).

- Dans le cas *réel*, $H_1(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z})$ a toujours de la torsion si $r \geq 2$ ([LS13, Corollary 6.8]). On ne peut donc pas raisonner exactement comme dans le cas complexe. On peut néanmoins appliquer le théorème des coefficients universels *pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$* et obtenir le résultat suivant : pour montrer que le morphisme (3.3.5) réel ou quaternionique est surjectif, il suffit de montrer que le morphisme canonique

$$\pi_0(\mathbb{R}^*) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{G}_E^\tau)$$

est *injectif* ([LS13, Proposition 6.6]), ce qui est vrai lorsque $r \wedge d = 1$ ([LS13, Proposition 6.10, 6.11]), ainsi que sous certaines autres hypothèses plus générales que nous présentons dans [LS13, *loc. cit.*].

Les résultats précédents sont vrais *en genre quelconque* et également dans le cas quaternionique.

3.3.2. L'espace classifiant du groupe de jauge. — Atiyah et Bott ont donné dans [AB83] plusieurs manières de calculer $H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q})$, qui ne sont pas toutes exploitables dans le cas réel. Mais le point de départ commun à toutes ces méthodes est le résultat suivant.

Lemme 3.10. — [AB83, Proposition 2.4] *Soit X une surface fermée orientable de genre $g \geq 0$. Soit E un fibré vectoriel complexe de rang $r \geq 1$ et de degré $d \in \mathbb{Z}$, dont on note \mathcal{G}_E le groupe d'automorphismes. Soit enfin $B\mathcal{G}_E$ l'espace classifiant de ce groupe. Alors $B\mathcal{G}_E$ a même type d'homotopie que l'espace $\text{Maps}_d(X; B\mathbf{GL}(r; \mathbb{C}))$, qui est par définition la composante connexe de l'espace*

$$\text{Maps}(X; B\mathbf{GL}(r; \mathbb{C})) := \{f : X \longrightarrow B\mathbf{GL}(r; \mathbb{C}) \mid f \text{ continue}\}$$

constituée des applications continues f de X dans $B\mathbf{GL}(r; \mathbb{C})$ telles que le pullback par f du fibré vectoriel universel $\mathcal{W}(r) := E\mathbf{GL}(r; \mathbb{C}) \times_{\mathbf{GL}(r; \mathbb{C})} \mathbb{C}^r$ soit un fibré de degré d sur X .

L'idée de la démonstration du Lemme 3.10 est de montrer que, pour G un groupe de Lie et P un G -fibré principal de type topologique $d \in \pi_1(G) \simeq H^2(X; \pi_1(G))$ sur X , l'espace $\text{Maps}(P; EG)^G$ des applications G -équivariantes de P dans EG définit un $\text{Aut}(P)$ -fibré principal

$$\text{Maps}(P; EG)^G \longrightarrow \text{Maps}_d(X; BG).$$

Comme $\text{Maps}(P; EG)^G$ est contractile, on a bien une équivalence d'homotopie

$$B\text{Aut}(P) \sim \text{Maps}_d(X; BG).$$

À ce stade, Atiyah et Bott utilisent l'équivalence d'homotopie rationnelle

$$(3.3.6) \quad B\mathbf{GL}(r; \mathbb{C}) \sim_{\mathbb{Q}} K(\mathbb{Z}; 2) \times \dots \times K(\mathbb{Z}; 2r)$$

et un théorème de Thom ([**Tho65**]) sur les espaces d'applications continues à valeurs dans un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi; n)$ pour déterminer la série de Poincaré rationnelle de $\text{Maps}_d(X; \mathbf{BGL}(r; \mathbb{C}))$.

Dans le cas *réel*, on ne dispose pas d'un résultat de type (3.3.6) pour la cohomologie à coefficients dans les entiers modulo 2. On peut en revanche démontrer l'analogie suivant du Lemme 3.10.

Lemme 3.11. — *Soit (X, σ) une surface fermée orientable de genre $g \geq 0$, munie d'une involution σ qui renverse l'orientation. Soit (E, τ) un fibré vectoriel réel de rang $r \geq 1$ et de degré $d \in \mathbb{Z}$, dont on note \mathcal{G}_E^τ le groupe d'automorphismes. Soit enfin $B(\mathcal{G}_E^\tau)$ l'espace classifiant de ce groupe. On munit $\mathbf{BGL}(r; \mathbb{C})$ de l'involution induite par la structure réelle $g \mapsto \bar{g}$ de $\mathbf{GL}(r; \mathbb{C})$. Alors le groupe $\langle \sigma \rangle$ agit sur $\text{Maps}_d(X; \mathbf{BGL}(r; \mathbb{C}))$ et on a une équivalence d'homotopie*

$$B(\mathcal{G}_E^\tau) \sim \text{Maps}_d(X; \mathbf{BGL}(r; \mathbb{C}))^\sigma.$$

Remarquons que dans l'énoncé des Lemmes 3.10 et 3.11, on peut remplacer $\mathbf{BGL}(r; \mathbb{C})$ par $\mathbf{BU}(r)$ car $\mathbf{GL}(r; \mathbb{C})$ et $\mathbf{U}(r)$ ont même type d'homotopie. C'est ce que nous ferons dorénavant, ce qui fera coïncider la notation ci-dessous avec celle de [**AB83**] et [**LS13**].

Choisissons un point $x_0 \in X$ et notons $\mathcal{G}_E(x_0)$ le noyau du morphisme d'évaluation en x_0 :

$$(3.3.7) \quad 1 \longrightarrow \mathcal{G}_E(x_0) \longrightarrow \mathcal{G}_E \xrightarrow{\text{ev}_{x_0}} \mathbf{U}(r) \longrightarrow 1.$$

On pose alors $\mathcal{G}_E^\tau(x_0) := \ker \text{ev}_{x_0}|_{\mathcal{G}_E^\tau}$. Si (E, τ) est réel, l'application ev_{x_0} est équivariante relativement à l'involution $u \mapsto \bar{u}$ sur $\mathbf{U}(r)$ et si en outre $X^\sigma \neq \emptyset$ et $x_0 \in X^\sigma$, alors on a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_E^\tau(x_0) \longrightarrow \mathcal{G}_E^\tau \longrightarrow \mathbf{O}(r) \longrightarrow 1$$

mais si $X^\sigma = \emptyset$, alors on a seulement ([**LS13**, p.593]) une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_E^\tau(x_0) \longrightarrow \mathcal{G}_E^\tau \longrightarrow \mathbf{U}(r) \longrightarrow 1.$$

Si (E, τ) est quaternionique et $n > 0$, on a de même une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_E^\tau(x_0) \longrightarrow \mathcal{G}_E^\tau \longrightarrow \mathbf{Sp}\left(\frac{r}{2}\right) \longrightarrow 1$$

et, si $n = 0$, à nouveau la suite exacte courte ([**LS13**, *loc. cit.*])

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_E^\tau(x_0) \longrightarrow \mathcal{G}_E^\tau \longrightarrow \mathbf{U}(r) \longrightarrow 1.$$

Comme annoncé au début de la Section 3.3, nous allons nous concentrer sur le cas où τ est réel et $X^\sigma \neq \emptyset$.

Les espaces classifiants des groupes de jauge "pointés" $\mathcal{G}_E(x_0)$ et $\mathcal{G}_E^\tau(x_0)$ vérifient la version suivante des Lemmes 3.10 et 3.11 :

$$B\mathcal{G}_E(x_0) \sim \text{Maps}_d^\bullet(X; \mathbf{BU}(r)) \quad \text{et} \quad B\mathcal{G}_E^\tau(x_0) \sim \text{Maps}_d^\bullet(X; \mathbf{BU}(r))^\sigma,$$

où $\text{Maps}_d^\bullet(X; \mathbf{BU}(r))$ désigne l'espace des applications pointées $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbf{BU}(r), *)$. L'application d'évaluation en x_0 définit une fibration

$$(3.3.8) \quad \text{Maps}_d^\bullet(X; \mathbf{BU}(r)) \longrightarrow \text{Maps}_d(X; \mathbf{BU}(r)) \xrightarrow{\text{ev}_{x_0}} \mathbf{BU}(r),$$

équivalente à la fibration

$$B\mathcal{G}_E(x_0) \longrightarrow B\mathcal{G}_E \longrightarrow \mathbf{BU}(r)$$

induite par (3.3.7). Si $x_0 \in X^\sigma \neq \emptyset$, on a de même une fibration :

$$B\mathcal{G}_E^\tau(x_0) \longrightarrow B\mathcal{G}_E^\tau \longrightarrow \mathbf{BO}(r).$$

Dans le cas complexe, il y a trois façons de calculer $H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q})$. Les deux premières, présentées ci-dessous, sont très semblables entre elles et extraites toutes deux de [**AB83**]. La troisième, également présentée plus bas, est une reformulation de [**AB83**], proposée dans [**LS13**]. Le point de départ commun est l'idée d'Atiyah et Bott dans [**AB83**] de compléter le choix du point base

$x_0 \in X$ en le choix d'une décomposition cellulaire de X . Pour une surface fermée orientable X de genre g , on dispose d'une décomposition cellulaire standard, obtenue en recollant de manière idoine un disque le long d'un bouquet de $2g$ cercles. On a donc une cofibration

$$(3.3.9) \quad \bigvee_{i=1}^{2g} S_1 \hookrightarrow X \longrightarrow S_2$$

qui donne lieu, lorsqu'on lui applique $\text{Maps}_d^\bullet(_ ; BU(r))$, à la fibration horizontale du diagramme (3.3.10) ci-dessous et, lorsqu'on lui applique $\text{Maps}_d(_ ; BU(r))$, à la fibration verticale de ce diagramme-là. Cette dernière coïncide avec la Fibration (3.3.8).

$$(3.3.10) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Maps}_d^\bullet(S_2; BU(r)) & \longrightarrow & \text{Maps}_d^\bullet(X; BU(r)) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{2g} \text{Maps}^\bullet(S_1; BU(r)) \\ & & \downarrow & & \\ & & \text{Maps}(X; BU(r)) & & \\ & & \downarrow \text{ev}_{x_0} & & \\ & & BU(r) & & \end{array}$$

Remarquons que $\text{Maps}^\bullet(S_1; BU(r))$ est indépendant de d car tout fibré vectoriel complexe sur S_1 est topologiquement trivial. De plus

$$\text{Maps}^\bullet(S_1; BU(r)) = \Omega BU(r) \sim \mathbf{U}(r).$$

Enfin, $\text{Maps}_d^\bullet(S_2; BU(r))$ est une composante connexe de

$$\text{Maps}^\bullet(S_2; BU(r)) \sim \Omega^2 BU(r) \sim \Omega \mathbf{U}(r)$$

et les composantes connexes de $\Omega \mathbf{U}(r)$ ont toutes même type d'homotopie que $\Omega \mathbf{SU}(r)$. D'où le diagramme suivant, équivalent au Diagramme (3.3.10) :

$$(3.3.11) \quad \begin{array}{ccccc} \Omega \mathbf{SU}(r) & \longrightarrow & B\mathcal{G}_E(x_0) & \longrightarrow & \mathbf{U}(r)^{2g} \\ & & \downarrow & & \\ & & B\mathcal{G}_E & & \\ & & \downarrow \text{ev}_{x_0} & & \\ & & BU(r) & & \end{array}$$

Le théorème de Thom auquel nous faisons allusion plus haut ([**Tho65**]) implique que les fibrations du Diagramme 3.3.10 sont cohomologiquement triviales sur \mathbb{Q} . Mais de toute façon, Atiyah et Bott démontrent via une application du Théorème de Leray-Hirsch que celles du Diagramme (3.3.11) le sont, utilisant pour cela les générateurs connus des algèbres de cohomologie de $\mathbf{U}(r)$, $BU(r)$ et $\Omega \mathbf{SU}(r)$, ces derniers ayant d'ailleurs été déterminés par Bott lui-même plusieurs décennies auparavant ([**Bot56**, **Bot58**]). L'avantage de cette deuxième stratégie est double : d'une part Atiyah et Bott obtiennent ainsi des générateurs de $H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q})$ et d'autre part cette même approche fonctionne pour la cohomologie à coefficients *entiers*, même si, pour obtenir des générateurs de la \mathbb{Z} -algèbre $H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Z})$, on a besoin d'une quantité infinie de classes de cohomologie (ce qui est déjà le cas pour $H^*(\Omega \mathbf{SU}(r); \mathbb{Z})$, comme l'a montré Bott dans [**Bot58**]).

Dans [**LS13**], nous avons proposé une ré-interprétation de la fibration

$$(3.3.12) \quad \Omega \mathbf{SU}(r) \longrightarrow B\mathcal{G}_E(x_0) \longrightarrow \mathbf{U}(r)^{2g}$$

de (3.3.11), afin de pouvoir dégager un analogue réel et quaternionique de cette troisième approche. Rappelons que, dans [**AB83**], le fibré vectoriel complexe E est muni d'une métrique hermitienne, ce que nous n'avons pas utilisé jusqu'à présent. L'espace \mathcal{C} des structures holomorphes

sur E s'identifie alors à l'espace des connexions unitaires sur E . Le fait de prendre l'holonomie d'une telle connexion le long d'un lacet fournit donc une application $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{U}(r)$. De plus, comme le groupe de jauge pointé $\mathcal{G}_E(x_0)$ agit de manière libre sur l'espace des connexions unitaires, qui est contractile, l'espace quotient $\mathcal{C}/\mathcal{G}_E(x_0)$ a le même type d'homotopie que $B\mathcal{G}_E(x_0)$. Or $\mathcal{C}/\mathcal{G}_E(x_0)$ s'envoie dans $\mathbf{U}(r)^{2g}$ via l'application d'holonomie le long des $2g$ lacets de la décomposition cellulaire standard (3.3.9) de X , ce qui nous donne une fibration $\mathcal{C}/\mathcal{G}_E(x_0) \rightarrow \mathbf{U}(r)^{2g}$ dont la fibre correspond au cas où il n'y a pas de lacets dans la décomposition cellulaire standard de X , c'est-à-dire au cas où $X \simeq S_2$:

$$(3.3.13) \quad B\mathcal{G}_E^{S_2}(x_0) \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{G}_E(x_0) \rightarrow \mathbf{U}(r)^{2g}.$$

Le Lemme 3.10 permet alors d'identifier $B\mathcal{G}_E^{S_2}(x_0)$ et $\text{Maps}_d^*(S_2; B\mathbf{U}(r))$, qui lui-même a le type d'homotopie de $\Omega\mathbf{SU}(r)$, comme nous l'avons rappelé. La Fibration (3.3.13) est bien équivalente à la Fibration (3.3.12) car, lorsque nous avons identifié $\Omega B\mathbf{U}(r)$ à $\mathbf{U}(r)$ pour obtenir (3.3.12) à partir de (3.3.10), nous avons implicitement utilisé l'application qui envoie un lacet dans $B\mathbf{U}(r)$ vers l'holonomie de la connexion universelle du $\mathbf{U}(r)$ -fibré principal $E\mathbf{U}(r) \rightarrow B\mathbf{U}(r)$: c'est l'application $\Omega B\mathbf{U}(r) \rightarrow \mathbf{U}(r)$ ainsi définie qui fournit l'équivalence d'homotopie communément utilisée $\Omega B\mathbf{U}(r) \sim \mathbf{U}(r)$.

Les considérations ci-dessus permettent de donner une troisième approche, après celle via le Théorème de Thom et celle via le Théorème de Leray-Hirsch, du calcul de $H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q})$. En effet, l'application d'holonomie $\mathcal{C}/\mathcal{G}_E(x_0) \rightarrow \mathbf{U}(r)^{2g}$ est $\mathbf{U}(r)$ -équivariante (pour l'action de $\mathbf{U}(r) \simeq \mathcal{G}_E/\mathcal{G}_E(x_0)$ induite par celle de \mathcal{G}_E sur \mathcal{C} et l'action diagonale par conjugaison de $\mathbf{U}(r)$ sur $\mathbf{U}(r)^{2g}$). On peut donc compléter le Diagramme (3.3.11) en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Omega\mathbf{SU}(r) & \longrightarrow & \mathcal{C}_E/\mathcal{G}_E(x_0) & \longrightarrow & \mathbf{U}(r)^{2g} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega\mathbf{SU}(r) & \longrightarrow & [\mathcal{C}_E/\mathcal{G}_E] & \longrightarrow & [\mathbf{U}(r)^{2g}/\mathbf{U}(r)] \\ & & \downarrow \text{ev}_{x_0} & & \downarrow \\ & & [\cdot/\mathbf{U}(r)] & \longlongequal{\quad} & [\cdot/\mathbf{U}(r)] \end{array}$$

où $[M/G]$ désigne ici le quotient homotopique $EG \times_G M$. Notons que l'on a bien $B\mathbf{U}(r) \sim [\cdot/\mathbf{U}(r)]$ et $B\mathcal{G}_E \sim [\mathcal{C}/\mathcal{G}_E]$ car \mathcal{C} est contractile. Il est alors équivalent de montrer la trivialité cohomologique des fibrations du Diagramme (3.3.11) et celle des fibrations du Diagramme (3.3.14) ci-dessous :

$$(3.3.14) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{U}(r)^{2g} & & \\ & & \downarrow & & \\ \Omega\mathbf{SU}(r) & \longrightarrow & [\mathcal{C}_E/\mathcal{G}_E] & \longrightarrow & [\mathbf{U}(r)^{2g}/\mathbf{U}(r)] \\ & & & & \downarrow \\ & & & & [\cdot/\mathbf{U}(r)] \end{array}$$

Pour la fibration verticale du Diagramme 3.3.14, cela revient à dire que l'action de $\mathbf{U}(r)$ sur lui-même par conjugaison est équivariantement formelle, ce qui est vrai ([CJ98, Exemple 15.40, p.325]). Il reste alors à montrer la trivialité cohomologique de la fibration

$$(3.3.15) \quad \Omega\mathbf{SU}(r) \rightarrow [\mathcal{C}/\mathcal{G}_E] \rightarrow [\mathbf{U}(r)^{2g}/\mathbf{U}(r)],$$

ce qui s'obtient en utilisant le théorème de Leray-Hirsch. Le résultat final est alors le suivant, qui est également vrai sur \mathbb{Z} :

$$H^*(B\mathcal{G}_E; \mathbb{Q}) \simeq H^*(\Omega\mathbf{SU}(r); \mathbb{Q}) \otimes H^*(\mathbf{U}(r); \mathbb{Q})^{2g} \otimes H^*(B\mathbf{U}(r); \mathbb{Q}).$$

Comme on le voit, l'approche via le Diagramme (3.3.14) permet de presque totalement se passer du Lemme 3.10, puisqu'on n'utilise plus celui-ci que pour montrer que $B\mathcal{G}_E^{S_2}(x_0) \sim \Omega^2\mathbf{SU}(r)$, ce qui est très certainement un résultat classique (pour lequel je n'ai cependant pas de référence précise autre que [AB83]).

C'est la troisième et dernière approche ci-dessus (via le Diagramme (3.3.14)) que nous avons adaptée au cas réel (et quaternionique) dans [LS13] pour obtenir les résultats sur la topologie de $B\mathcal{G}_E^\tau$ exposés dans l'introduction de ce mémoire (Théorème 1.15). Comme on l'a vu dans l'étude du cas complexe, le calcul utilise, quelle que soit l'approche choisie, une décomposition cellulaire de la surface de Riemann X : deux décompositions cellulaires différentes conduisent à des espaces-buts différents pour l'application d'holonomie, qui pour nous était $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{U}(r)^{2g}$ du fait de la décomposition cellulaire standard (3.3.9). Ce choix est très important car il conditionne les suites spectrales qui interviennent ensuite dans le calcul. Dans le cas d'une surface de Klein (X, σ) , on s'attend à ce qu'il soit préférable de partir d'une décomposition cellulaire de X qui soit "la plus compatible possible" avec l'involution σ et l'idée pour cela est de partir d'une décomposition cellulaire de la surface $X/\langle\sigma\rangle$ et de la relever à X . Même ainsi, il nous faut distinguer plusieurs cas, cinq au total, selon que $X^\sigma \neq \emptyset$ ou $X^\sigma = \emptyset$ et selon que $X/\langle\sigma\rangle$ est ou non orientable (somme connexe, dans ce cas, d'une surface fermée orientable et d'une surface qui est soit un plan projectif soit une bouteille de Klein), pour τ réel d'abord et pour τ quaternionique ensuite. Dans chaque cas, on a un espace d'holonomie différent. Lorsque $X^\sigma \neq \emptyset$, il y a donc trois cas à considérer (un cas où $X/\langle\sigma\rangle$ est orientable et deux cas où elle est non orientable) mais on se rend compte *a posteriori* que les espaces d'holonomie construits via le choix de nos décompositions cellulaires ont tous la même cohomologie modulo 2 que l'espace produit

$$(3.3.16) \quad \mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r) := \mathbf{U}(r)^{g+1-n} \times \mathbf{SO}(r)^n \times (\mathbf{U}(r)/\mathbf{O}(r))^{n-1}$$

Il est intéressant de constater que, dans cette approche, la fibre de l'application d'holonomie réelle $\mathcal{C}^\tau \rightarrow \mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r)/\mathcal{G}_E^\tau(x_0)$ reste $\Omega\mathbf{SU}(r)$ car la décomposition cellulaire choisie sur $X/\langle\sigma\rangle$ n'a toujours qu'une seule 2-cellule. Par exemple, si $X/\langle\sigma\rangle$ est orientable, c'est une surface à bord de genre topologique \hat{g} avec n composantes de bord, où \hat{g} et n vérifient la relation $2\hat{g} + 1 - n = g$. On peut donc la construire en collant une 2-cellule F le long d'un bouquet de $(2\hat{g} + n)$ cercles (un par composante de bord et deux pour chaque anse) de manière à ce que le bord orienté de \overline{F} soit

$$\partial F = \left(\prod_{j=1}^{\hat{g}} [\alpha_j, \beta_j] \right) \gamma_1 \left(\prod_{m=2}^n (\delta_m^{-1} \gamma_m \delta_m) \right)$$

où les γ_m sont les composantes de bord et δ_m est un chemin entre γ_1 (qui contient le point base $x_0 \in X^\sigma$) et la composante γ_m . Cette décomposition cellulaire donne lieu à la cofibration

$$\bigvee_{j=1}^{\hat{g}} (\alpha_j \vee_{x_1} \beta_j) \vee_{x_1} \gamma_1 \vee_{x_1} \bigvee_{j=2}^n (\delta_m^{-1} \gamma_m \delta_m) \hookrightarrow X/\langle\sigma\rangle \rightarrow \overline{F}/\partial F \simeq S_2$$

et lorsqu'on relève la décomposition cellulaire de $X/\langle\sigma\rangle$ à X et que l'on prend l'holonomie d'une connexion unitaire le long des lacets $(\alpha_j, \beta_j)_{1 \leq j \leq \hat{g}}$ et $\gamma_1, (\delta_m^{-1} \gamma_m \delta_m)_{2 \leq m \leq n}$, tous basés en x_1 , on tombe bien dans un espace qui a la même cohomologie modulo 2 que l'espace $\mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r)$ de

(3.3.16). Il reste alors à montrer que les fibrations du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Omega\mathbf{SU}(r) & \longrightarrow & B\mathcal{G}_E^\tau(x_0) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r) \\ & & \downarrow & & \\ & & B\mathcal{G}_E^\tau & & \\ & & \downarrow \text{ev}_{x_0} & & \\ & & \mathbf{BO}(r) & & \end{array}$$

ou, de manière équivalente, celle du diagramme

$$(3.3.17) \quad \begin{array}{ccccc} & & & & \mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r) \\ & & & & \downarrow \\ \Omega\mathbf{SU}(r) & \longrightarrow & [\mathcal{C}^\tau/\mathcal{G}_E^\tau] & \longrightarrow & [\mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r)/\mathbf{O}(r)] \\ & & & & \downarrow \\ & & & & [\cdot/\mathbf{O}(r)] \end{array}$$

sont cohomologiquement triviales sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui donne, dans le cas $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$ et $n > 0$:

$$(3.3.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}^*(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\simeq \mathbf{H}^*(\Omega\mathbf{SU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes \mathbf{H}^*(\mathbf{U}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g+1-n} \otimes \mathbf{H}^*(\mathbf{SO}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ (3.3.19) \quad &\otimes \mathbf{H}^*(\mathbf{U}(r)/\mathbf{O}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \otimes \mathbf{H}^*(\mathbf{BO}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Remarque 3.12. — Dans le cas où $X^\sigma = \emptyset$, nous renvoyons à [LS13, Section 3.1.1] pour la construction de décompositions cellulaires de $X/\langle\sigma\rangle$. L'espace d'holonomie associé est

$$\mathbf{H}_{(g,0)}^\tau(r) := \mathbf{U}(r)^{g+1},$$

munie de l'action diagonale par conjugaison de $\mathbf{U}(r)$. L'analogue dans ce cas du Diagramme (3.3.17) donne lieu à deux fibrations cohomologiquement triviales sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc au résultat suivant :

$$\mathbf{H}^*(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbf{H}^*(\Omega\mathbf{SU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes \mathbf{H}^*(\mathbf{U}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g+1} \otimes \mathbf{H}^*(\mathbf{BU}(r); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Remarque 3.13. — En fait, dans le cas $n > 0$, l'espace d'holonomie (3.3.16) n'est pas celui qui apparaît dans [LS13] : l'espace d'holonomie que nous avons utilisé dans [LS13] (pour le cas $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$) a la même cohomologie modulo 2 que $\mathbf{U}(r)^{g+a} \times \mathbf{SO}(r)^n$, où $a = 0$ si $X/\langle\sigma\rangle$ est orientable et $a = 1$ sinon. Cette différence est due au fait que, dans [LS13], nous avons fait le choix, pour respecter la compatibilité avec certaines fibrations déjà étudiées dans [BHH10], d'une décomposition cellulaire à n ou $n+1$ points bases (selon que $X/\langle\sigma\rangle$ est ou non orientable). Le groupe qui agit sur l'espace d'holonomie n'est alors plus $\mathbf{O}(r)$ mais le groupe produit $\mathbf{U}(r)^a \times \mathbf{O}(r)^n$ ([LS13, Définition 3.2]). Même si des difficultés techniques apparaissent lorsque l'on calcule la cohomologie équivariante de l'espace d'holonomie sous l'action de ce groupe produit (à savoir qu'il n'y a *pas* formalité équivariante : la suite spectrale ne dégénère pas à la page E_2), le principe du calcul reste le même : en poussant le calcul de la suite spectrale jusqu'à la page E_∞ , nous avons bien trouvé la cohomologie $\mathbf{O}(r)$ -équivariante modulo 2 de l'espace d'holonomie $\mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r)$ de (3.3.16), que nous avons alors pu identifier *a posteriori*. En particulier, la fibration horizontale dans le diagramme correspondant à (3.3.17) dans [LS13] est, elle, cohomologiquement triviale. On voit de manière concrète sur cet exemple que le choix de la décomposition cellulaire a une influence très grande sur la faisabilité des calculs.

Remarque 3.14. — Dans le cas où $n > 0$ et $\tau = \tau_{\mathbb{H}}$, aucune des fibrations dont nous disposons n'est cohomologiquement triviale : on s'en convainc si l'on remarque que la formule pour $P_t(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dans le Théorème 1.15 ne dépend pas de la valeur de n lorsque celui-ci est non nul. Les calculs de suites spectrales faits dans [LS13] ont néanmoins permis d'arriver à une expression relativement simple pour $P_t(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dans le cas quaternionique, même si on ne sait pas pour l'instant exprimer le résultat sous forme géométrique.

Nous renvoyons à [LS13, Section 4.3.2, 4.3.4] pour la construction de classes de cohomologie dans $H^*(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ permettant d'appliquer le Théorème de Leray-Hirsch aux fibrations

$$\Omega\mathbf{SU}(r) \longrightarrow B\mathcal{G}_E^\tau \longrightarrow [\mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r)/\mathbf{O}(r)]$$

(ou encore $\Omega\mathbf{SU}(r) \longrightarrow B\mathcal{G}_E^\tau \longrightarrow \mathbf{H}_{(g,n)}^\tau(r)$) pour τ réel et quaternionique. Comme lorsqu'Atiyah et Bott travaillent sur \mathbb{Z} , nous avons besoin, pour engendrer la cohomologie modulo 2 de $\Omega\mathbf{SU}(r)$, d'une quantité infinie de classes de cohomologie dans $H^*(B\mathcal{G}_E^\tau; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et celles-ci sont obtenues à partir de classes caractéristiques de fibrés vectoriels virtuels associés au push-forward K -théorique

$$f_! : K^0(B\mathcal{G}_E \times M) \longrightarrow K^0(B\mathcal{G}_E)$$

du fibré universel sur $B\mathcal{G}_E \times M$ (qui est le tiré en arrière, par l'application d'évaluation $B\mathcal{G}_E \longrightarrow BU(r)$ du fibré vectoriel universel sur $BU(r)$, [AB83, p.543]), que nous tirons lui-même en arrière via l'application $j : B\mathcal{G}_E^\tau \hookrightarrow B\mathcal{G}_E$, induite par l'inclusion canonique de \mathcal{G}_E^τ dans \mathcal{G}_E .

CHAPITRE 4

ESPACES DE TEICHMÜLLER SUPÉRIEURS POUR LES ORBIFOLDS

4.1. Orbi-surfaces hyperboliques

Rappelons la définition d'un Espace de Teichmüller Supérieur donnée par A. Wienhard dans son exposé au Congrès International des Mathématiciens 2018 ([Wie18]).

Définition 4.1. — Etant donné un groupe de surface $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ et un groupe de Lie réel G , on appelle *Espace de Teichmüller Supérieur* toute réunion de composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\pi; G)/G$ dont les éléments sont des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes $\varrho : \pi \rightarrow G$.

L'exemple fondateur est bien sûr l'espace de Teichmüller classique

$$\mathcal{T}(X) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathrm{f.d.}}(\pi; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})) / \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$$

d'une surface fermée orientable X , également appelé espace de Fricke ([Gol88a]) : c'est par définition l'espace des représentations d'holonomie de structures hyperboliques sur X et il se trouve que ces représentations sont fidèles et discrètes et forment une composante connexe de $\mathrm{Hom}(\pi; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})) / \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \simeq \mathbf{H}^1(\pi; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}))$. De fait, les représentations fidèles et discrètes $\varrho : \pi_1 X \rightarrow \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ sont exactement celles dont la classe d'Euler $e(\varrho)$ est égale à $\pm\chi(X)$, c'est-à-dire les représentations ϱ telles que $|e(\varrho)|$ est *maximal*, puisque $|e(\varrho)| \leq -\chi(X)$ d'après l'inégalité de Milnor-Wood ([Mil58, Woo71]). La transformation de Cayley $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ envoie le demi-plan supérieur sur le disque unité, induisant ainsi un isomorphisme $\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \simeq \mathbf{PU}(1, 1) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbf{PU}(1, 1)$ par conjugaison complexe. On peut alors poser

$$\mathrm{Max}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1)) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\mathrm{max}}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) / \mathbf{PU}(1, 1),$$

où $\mathrm{Hom}^{\mathrm{max}}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1))$ (qui est égal à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\mathrm{max}}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ puisque X est supposée orientable ; voir Remarque 4.2) désigne l'ensemble des représentations de $\pi_1 X$ dans $\mathbf{PU}(1, 1)$ dont la classe d'Euler est maximale en valeur absolue : d'après un résultat dû à B. Goldman ([Gol88b]), cet ensemble est réunion de deux composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1))$.

On a une action résiduelle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\mathrm{max}}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, qui induit un homéomorphisme

$$\mathrm{Max}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1)) / (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathcal{T}(X).$$

Avec nos conventions, $\mathcal{T}(X)$ est une composante connexe de

$$\mathrm{Hom}(\pi; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})) / \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \simeq \mathbf{H}^1(\pi; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})),$$

tandis que $\mathrm{Max}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1))$ est une union de deux composantes connexes (toutes deux homéomorphes à $\mathcal{T}(X)$) de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) / \mathbf{PU}(1, 1) \simeq \mathbf{H}^1(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1)).$$

Remarque 4.2. — Pour X une surface fermée *orientable* X , l'action du groupe $\pi_1 X$ sur $\mathbf{PU}(1, 1)$ définie en (2.1.3) est triviale. On a donc

$$H^1(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1)) \simeq \text{Hom}(\pi_1 X; \mathbf{PU}(1, 1)) / \mathbf{PU}(1, 1)$$

dans ce cas, qui est un exemple fondamental. Les définitions générales ci-dessus sont néanmoins utiles car elle se généralisent immédiatement aux orbifolds de la forme $[\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$ avec π un groupe fuchsien non nécessairement orientable et susceptible de contenir des éléments d'ordre fini.

La Définition 4.1 a un sens pour tout groupe fuchsien $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ et notre but principal dans ce chapitre est de construire des exemples d'Espaces de Teichmüller Supérieurs pour les groupes fondamentaux d'orbi-surfaces compactes et d'étudier leur topologie. Comme pour les groupes de surfaces, les deux familles les mieux comprises sont les *composantes de Hitchin* d'une part et les *composantes maximales* d'autre part.

Soit $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ un groupe fuchsien et soit $Y = [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$ l'orbi-surface associée. Le stabilisateur dans π d'un point $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ est soit trivial, soit isomorphe à l'un des groupes finis suivants :

- le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, agissant sur un petit disque ouvert $D(0; \varepsilon)$ par réflexion par rapport à un diamètre $w \mapsto \bar{w}$;
- le groupe cyclique $C_m \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, agissant sur $D(0; \varepsilon)$ par la rotation d'ordre fini $w \mapsto e^{\frac{i2\pi}{m}} w$;
- le groupe diédral $D_n \simeq C_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, agissant sur $D(0; \varepsilon)$ par combinaison des deux actions précédentes ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant sur $C_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par l'inversion dans le groupe).

Le point $[z]$ de Y est alors appelé, respectivement, un point *miroir*, un *point conique* ou un *point diédral*. Ce point admet un voisinage ouvert isomorphe au quotient de $D(0; \varepsilon)$ par l'action correspondante du stabilisateur de z dans $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$, que l'on peut se représenter ainsi :

- un demi-disque $D(0; \varepsilon)^+ = \{w \in D(0; \varepsilon) \mid \text{Im } w \geq 0\} \simeq D(0; \varepsilon)/(w \mapsto \bar{w})$ si $[z]$ est un point miroir ;
- un cône $V_m := D(0; \varepsilon)/C_m$ d'angle $\frac{2\pi}{m}$ si $[z]$ est un point conique (on dit alors que $[z]$ est un point conique d'ordre m) ;
- un “cône aplati” $D(0; \varepsilon)/D_n \simeq V_n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ si $[z]$ est un point diédral (on dit alors que $[z]$ est un point diédral d'ordre n).

Les points miroirs sont dits d'ordre 2 (notons qu'ils ne sont pas isolés). Tous les autres points sont dits d'ordre 1 ; ils possèdent un voisinage ouvert isomorphe à $D(0; \varepsilon)$. La notion d'ordre d'un point $[z] \in Y$ ne dépend pas du choix du relèvement $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$. Les points d'ordre > 1 sont appelés des *singularités orbifolds*.

Lorsque π est cocompact, l'orbi-surface Y a un nombre fini de singularités orbifolds et on peut définir sa caractéristique d'Euler (orbifold) de la façon suivante :

$$(4.1.1) \quad \chi(Y) = \chi(|Y|) - \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right)$$

où :

- $|Y|$ est la surface topologique “sous-jacente” à Y ;
- k est le nombre de points coniques et m_i l'ordre du i -ème point conique ;
- ℓ est le nombre de points diédraux et n_j l'ordre du j -ème point diédral ;

Cette définition est spécifique au cas des orbifolds de dimension 2 (de classe au moins C^1), auxquels on peut aussi penser comme des surfaces différentiables (non nécessairement orientables et pouvant admettre un bord) munies d'une *signature*, i.e. une application de $|Y|$ dans \mathbb{N}^* qui associe un ordre à chaque point de $|Y|$ ⁽¹⁾. La définition (4.1.1) s'obtient alors en imposant que

1. En fait, la signature n'est commode à définir sur $|Y|$ que si Y est une orbi-surface orientable, cas pour lequel nous renvoyons par exemple à [Ser92]. Pour une orbi-surface non orientable, le mieux est de définir la signature sur la surface topologique $|Y^+|$ “sous-jacente” au revêtement d'orientation Y^+ de Y . Celle-ci doit alors

$\chi(Y)$ soit multiplicative sur les revêtements finis : si $Y' \rightarrow Y$ est un revêtement orbifold de degré d , on a $\chi(Y') = d\chi(Y)$. En particulier, le signe de $\chi(Y)$ est invariant par revêtement fini. Enfin, rappelons qu'une orbi-surface Y est dite *orientable* si $|Y|$ est orientable et Y ne contient que des points coniques comme singularités orbifolds.

Pour une orbi-surface compacte Y de la forme $Y \simeq [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$, on a toujours $\chi(Y) < 0$. Et réciproquement, si Y est une orbi-surface de caractéristique d'Euler négative, alors elle admet une *structure hyperbolique* (c'est-à-dire que Y est localement isomorphe à $[U/\Gamma]$ avec $U \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ ouvert et $\Gamma \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ un groupe fini qui laisse U invariant). Cette structure hyperbolique est *uniformisable*, c'est-à-dire que $Y \simeq [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi_1 Y]$ où $\pi_1 Y := \text{Aut}_Y(\tilde{Y})$ est le groupe fondamental orbifold de Y , défini comme le groupe des automorphismes du revêtement universel \tilde{Y} de Y . L'espace des déformations de structures hyperboliques sur Y , également appelé espace de Teichmüller de Y et noté $\mathcal{T}(Y)$, est homéomorphe à l'espace des représentations fidèles et discrètes de $\pi_1 Y$ dans $\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \simeq \text{Isom}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2)$:

$$\mathcal{T}(Y) \simeq \text{Hom}^{\text{f.d.}}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})) / \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}).$$

Le résultat suivant est classique⁽²⁾ et on peut en trouver une exposition dans [Thu79] ou dans [CG05].

Théorème 4.3. — *Soit Y une orbi-surface compacte de caractéristique d'Euler négative avec k points coniques et ℓ points diédraux. L'espace de Teichmüller de Y est homéomorphe à un espace vectoriel réel de dimension $-3\chi(|Y|) + 2k + \ell$.*

En particulier, $\dim \mathcal{T}(Y) = 0$ si et seulement si Y est une sphère avec 3 points coniques, ou un disque avec 1 point conique et 1 point diédral, ou un disque avec 3 points diédraux (de manière équivalente, $\dim \mathcal{T}(Y) = 0$ si et seulement si Y est isomorphe à un quotient de sphère avec 3 points coniques).

4.2. Composantes de Hitchin

Dans [Hit92], Hitchin a montré que l'espace $\text{Hom}(\pi_1 X; G)/G$ des représentations du groupe fondamental d'une surface fermée orientable X dans la forme réelle déployée d'un groupe de Lie complexe simple, connexe et de centre trivial possédait une composante connexe contractile, dont il a donné une paramétrisation analytique en termes de différentielles symétriques holomorphes sur X . Nous allons voir qu'une telle composante existe également dans l'espace $\text{Hom}(\pi_1 X; G)/G$ des représentations du groupe fondamental d'un orbifold fermé, éventuellement non orientable, et que l'on peut la paramétrer de manière analogue.

Pour cela, fixons d'abord une forme réelle quelconque \mathfrak{g} d'une algèbre de Lie complexe (semi) simple $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Le groupe adjoint $G_{\mathbb{C}} := \text{Int}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, qui est la composante neutre de $\text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ pour sa topologie de groupe de Lie complexe, est de centre trivial et muni d'une structure réelle canonique, induite par la conjugaison complexe sur $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On notera G le groupe des points réels de $G_{\mathbb{C}}$ pour cette involution : c'est un groupe de Lie réel de centre trivial, dont la composante neutre est $\text{Int}(\mathfrak{g})$.

Exemple 4.4. — Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est une algèbre de Lie classique, on trouve les groupes suivants, qui montrent que G n'est pas connexe en général.

1. Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$, le groupe G est isomorphe à $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. Il a donc deux composantes connexes si n est pair et une seule si n est impair.

être compatible avec l'involution naturelle $\sigma : |Y^+| \rightarrow |Y^+|$, au sens où deux points de $|Y^+|$ conjugués par σ doivent avoir même signature. Les points fixes de σ dans $|Y^+|$ donneront des points miroirs dans Y s'ils sont d'ordre 1 dans Y^+ et ils donneront des points diédraux d'ordre n s'ils sont (coniques) d'ordre $n > 1$ dans Y^+ .

2. Dans [CG05], Choi et Goldman l'attribuent à Thurston.

2. Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p, q)$, le groupe G est isomorphe à $\mathbf{PO}^\pm(p, q)$, où

$$\mathbf{O}^\pm(p, q) := \{A \in \mathbf{GL}(p+q; \mathbb{R}) \mid {}^t A I_{p,q} A = \pm I_{p,q}\}$$

et, pour tout sous-groupe $H \subset \mathbf{GL}(n; \mathbb{K})$, on note \mathbf{PH} le groupe $H/H \cap \mathcal{Z}(\mathbf{GL}(n; \mathbb{K}))$. On peut remarquer que $\mathbf{PO}^\pm(p, q) = \mathbf{PO}(p, q)$ si $p \neq q$. En particulier, ce groupe a deux composantes connexes si $p \neq q$ et quatre si $p = q$. Dans ce qui suit, nous serons surtout intéressés par les formes réelles déployées $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m, m+1)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m, m)$, avec $m \geq 3$ dans ce dernier cas.

3. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2m; \mathbb{R})$, le groupe G est isomorphe à $\mathbf{PSp}^\pm(2m; \mathbb{R})$, où

$$\mathbf{Sp}^\pm(2m; \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(2m; \mathbb{R}) \mid {}^t A J A = \pm J\}.$$

En particulier, G a deux composantes connexes.

4. Si \mathfrak{g} est la forme réelle déployée d'une algèbre de Lie complexe simple de type G_2 , nous noterons \mathbf{G}_2 le groupe des points réels de $\text{Int}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$. Ce groupe a deux composantes connexes et peut être obtenu comme sous-groupe de $\mathbf{PO}(3, 4)$.

Supposons désormais que la forme réelle \mathfrak{g} est *déployée*. On appelle \mathfrak{sl}_2 -triplet (e_+, e_-, x) de \mathfrak{g} toute sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} engendrée par trois éléments (e_+, e_-, x) vérifiant $[x, e_+] = e_+$, $[x, e_-] = -e_-$ et $[e_+, e_-] = x$ (de sorte que $\langle e_+, e_-, x \rangle \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$). Si l'élément nilpotent e_+ est en outre *régulier*, c'est-à-dire que son stabilisateur pour l'action adjointe est de dimension minimale (égale au rang réel de \mathfrak{g}), on dit que le \mathfrak{sl}_2 -triplet (e_+, e_-, x) est *principal*. D'après le Théorème de Jacobson et Morozov, il suffit, pour construire de tels triplets, de trouver un élément nilpotent e_+ , car un tel élément peut toujours être inclus dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet ([Kos59, Theorem 3.4]). De plus, deux \mathfrak{sl}_2 -triplets le contenant sont conjugués via un élément de G qui stabilise e_+ pour l'action adjointe ([Kos59, Corollary 3.6]). Comme deux éléments nilpotents réguliers sont conjugués par l'action adjointe, cela implique en particulier que deux \mathfrak{sl}_2 -triplets principaux quelconques sont conjugués. On a alors, comme l'a montré Hitchin ([Hit92, Proposition 6.1]), que le choix d'un \mathfrak{sl}_2 -triplet principal induit un morphisme de groupes $\kappa : \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow G$, appelé dans la suite *morphisme principal*. En vertu de ce qui précède, deux tels morphismes sont conjugués sous G .

Définition 4.5. — Fixons un morphisme principal $\kappa : \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow G$. Soit $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ un groupe fuchsien et soit G le groupe des points réels de $\text{Int}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$, où \mathfrak{g} est la forme réelle déployée d'une algèbre de Lie complexe simple. Une représentation $\varrho : \pi \rightarrow G$ est dite *fuchsienne* si elle se relève, relativement au morphisme principal κ , en une représentation fidèle et discrète $h : \pi \rightarrow \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\varrho = \kappa \circ h$.

Par définition, les représentations fuchiennes sont donc celles qui proviennent des représentations d'holonomie de structures hyperboliques sur l'orbifold $Y := [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/\pi]$ (cf. Diagramme (4.2.1)). Les représentations de Hitchin, quant à elles, sont les déformations, au sens de la Définition 4.6, de représentations fuchiennes.

(4.2.1)

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \\ & \nearrow h & \downarrow \kappa \\ \pi_1 Y & \xrightarrow{\varrho} & G \end{array}$$

Définition 4.6. — Une représentation $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ est dite *de Hitchin* si sa classe de conjugaison sous G appartient à la composante connexe de $\text{Hom}(\pi_1 Y; G)/G$ qui contient le lieu fuchsien. La composante connexe ainsi définie est appelée *composante de Hitchin* et notée $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$.

Comme le lieu fuchsien est par définition l'image de l'application continue

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(Y) & \longrightarrow & \text{Hom}(\pi_1 Y; G)/G \\ [h] & \longmapsto & [\kappa \circ h] \end{array}$$

et que l'espace de Teichmüller de Y est connexe, la composante de Hitchin est bien définie (notons qu'elle ne dépend pas non plus du choix du morphisme principal $\kappa : \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow G$, puisque deux tels morphismes sont G -conjugués). Lorsque $G = \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$, on a simplement $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})) \simeq \mathcal{T}(Y)$ par l'application précédente. En collaboration avec D. Alessandrini et G.S. Lee, nous nous sommes intéressés à la topologie des composantes de Hitchin orbifold et nous avons généralisé dans une direction commune les deux résultats suivants.

Théorème 4.7 (Hitchin). — [Hit92] *Soit X une surface fermée orientable de caractéristique d'Euler négative et soit G un groupe comme ci-dessus. Alors $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$ est homéomorphe à un espace vectoriel réel de dimension $-\chi(X) \dim G$.*

Théorème 4.8 (Choi & Goldman). — [CG05] *Soit Y une orbi-surface fermée de caractéristique d'Euler négative. Alors $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(3; \mathbb{R}))$ est homéomorphe à un espace vectoriel réel de dimension $-8\chi(|Y|) + (6k - k_2) + (3\ell - \ell_2)$, où k_2 (respectivement, ℓ_2) est le nombre de points coniques (respectivement, diédraux) d'ordre 2 de Y .*

Notons d'abord que, puisque la caractéristique d'Euler orbifold (4.1.1) est un nombre rationnel en général non entier, on ne peut pas espérer que la formule de Hitchin reste vraie telle quelle (c'est d'ailleurs ce que démontrent Choi et Goldman). Ensuite, il est utile de réaliser que les démonstrations de Hitchin et de Choi et Goldman sont très différentes : Hitchin utilise des techniques de géométrie analytique (fibrés de Higgs) et différentielle (correspondance de Hodge non abélienne), tandis que les méthodes de Choi et Goldman sont purement géométriques (techniques de *cut-and-paste* d'orbifolds à partir d'orbifolds dits *élémentaires*), fondées sur l'interprétation de $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(3; \mathbb{R}))$ comme espace des déformations de structures projectives convexes (plates) sur Y . Face à l'absence d'une telle interprétation pour un groupe de Lie G général, notre approche s'inscrit dans les pas de celle de Hitchin : grâce à la correspondance de Hodge non-abélienne orbifold, nous obtenons une paramétrisation analytique de la composante de Hitchin (en termes de différentielles sur l'orbifold Y) et c'est ce qui nous permet de calculer la dimension de cet espace et de montrer qu'il est contractile. La formule que nous obtenons est la suivante.

Théorème 4.9. — [ALS18] *Soit Y une orbi-surface fermée de caractéristique d'Euler négative et soit G un groupe comme ci-dessus, dont nous noterons r le rang. Soient d_1, \dots, d_r les exposants de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Alors $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ est homéomorphe à un espace vectoriel réel de dimension*

$$-\chi(|Y|) \dim G + \sum_{\alpha=1}^r \left(2 \sum_{i=1}^k O(d_\alpha + 1, m_i) + \sum_{j=1}^{\ell} O(d_\alpha + 1, n_j) \right),$$

où $O(d, m) := \lfloor d - \frac{d}{m} \rfloor$ désigne la partie entière de $(d - \frac{d}{m})$.

En particulier, si Y n'a que des points miroirs comme singularités orbifolds, ce qui se produit précisément lorsque $|Y|$ est l'espace topologique sous-jacent d'une courbe algébrique réelle (vue avec sa topologie analytique), alors la formule de Hitchin reste vraie telle quelle. C'est notamment le cas pour les surfaces à bord orientables, pour lesquelles F. Labourie et G. McShane avaient déjà développé une notion de composante de Hitchin (pour le groupe fondamental *topologique* d'une telle surface et lorsque $G = \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$, [LM09]) et nous verrons plus loin (Remarque 4.29) que leur composante de Hitchin est homéomorphe à celle introduite ici pour les groupes fondamentaux orbifolds.

Notons également que, puisque $\mathfrak{so}(m, m+1)$ et $\mathfrak{sp}(2m; \mathbb{R})$ ont même dimension, même rang réel et mêmes exposants, on a $\dim \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PO}(m, m+1)) = \dim \text{Hit}(\pi_1 Y, \mathbf{PSp}(2m; \mathbb{R}))$. Enfin, par des manipulations élémentaires, nous pouvons écrire la formule du Théorème 4.9 d'une manière plus proche de celle choisie par Choi et Goldman.

Théorème 4.10. — [ALS18] *Sous les hypothèses du Théorème 4.9, posons $k_m := \{\#i \mid m_i = m\}$, $\ell_n := \{\#j \mid n_j = n\}$ et $M := \max_{1 \leq \alpha \leq r} d_\alpha$. Alors*

$$\begin{aligned} \dim \text{Hit}(\pi_1 Y, G) &= -\chi(|Y|) \dim G + \frac{1}{2}(\dim G - \text{rg } G)(2k + \ell) - 2 \sum_{m=2}^M \left(\sum_{\alpha=1}^{\text{rg } G} \left\lfloor \frac{d_\alpha + 1}{m} - 1 \right\rfloor \right) k_m \\ &\quad - \sum_{n=2}^M \left(\sum_{\alpha=1}^{\text{rg } G} \left\lfloor \frac{d_\alpha + 1}{n} - 1 \right\rfloor \right) \ell_n, \end{aligned}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière supérieure du réel x .

On a par exemple les formules suivantes (d'autres sont données dans [ALS18, Appendix A]) :

$$\begin{aligned} \dim \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})) &= -15\chi(|Y|) + (12k - 4k_2 - 2k_3) + (6\ell - 2\ell_2 - \ell_3) \\ \dim \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R})) &= -10\chi(|Y|) + (8k - 2k_2 - 2k_3) + (4\ell - \ell_2 - \ell_3) \\ \dim \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{G}_2) &= -14\chi(|Y|) + (12k - 4k_2 - 2k_3 - 2k_4 - 2k_5) + (6\ell - 2\ell_2 - \ell_3 - \ell_4 - \ell_5) \\ \dim \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PO}^\pm(4, 4)) &= -28\chi(|Y|) + (24k - 8k_2 - 6k_3 - 2k_4 - 2k_5) + (12\ell - 4\ell_2 - 3\ell_3 - \ell_4 - \ell_5) \end{aligned}$$

Remarque 4.11. — Le fait que les coefficients des termes en ℓ diffèrent d'un facteur $\frac{1}{2}$ de ceux des termes en k n'est pas une coïncidence : cela s'explique par la relation entre $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ et $\text{Hit}(\pi_1 Y^+; G)$, où $Y^+ \rightarrow Y$ est le revêtement d'orientation de Y . Dans la paramétrisation analytique que nous obtenons (Théorème 4.13), $\text{Hit}(\pi_1 Y^+; G)$ est un espace vectoriel *complexe*, qui contient $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ comme lieu des points fixes d'une structure réelle. De plus, Y^+ possède deux points coniques pour chaque point conique de Y , ainsi qu'un point conique pour chaque point diédral de Y , d'où la relation sur les coefficients dans la formule pour la dimension.

4.3. Paramétrisation analytique et calcul de la dimension

Le résultat principal de [ALS18] est de montrer que la paramétrisation que donne Hitchin de la composante $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$ lorsque X est une surface fermée orientable s'étend au cas orbifold. Rappelons tout d'abord l'énoncé du résultat de Hitchin.

Théorème 4.12. — [Hit92] *Fixons une structure analytique sur la surface fermée orientable X et notons K_X le fibré canonique de X . Alors il existe un homéomorphisme*

$$(4.3.1) \quad \text{Hit}(\pi_1 X; G) \simeq \bigoplus_{\alpha=1}^r \mathbb{H}^0(X; K_X^{d_\alpha+1}),$$

où les (d_1, \dots, d_r) sont les exposants de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . En particulier, $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$ est contractile et

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Hit}(\pi_1 X; G) = -\chi(X) \dim_{\mathbb{R}} G.$$

La démonstration repose sur l'utilisation de la correspondance de Hodge non-abélienne et la *fibration de Hitchin*

$$(4.3.2) \quad F : \mathcal{M}_X(G) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha=1}^r \mathbb{H}^0(X; K_X^{d_\alpha+1}) =: \mathfrak{B}_X(\mathfrak{g}),$$

définie sur l'espace des modules de G -fibrés de Higgs semistables par le choix d'une famille de générateurs homogènes de l'algèbre des fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ([Hit87a]). Dans [Hit92], Hitchin construit une section explicite de F , dont l'image est constituée de G -fibrés de Higgs stables et s'identifie, via la correspondance de Hodge non-abélienne, à une *composante connexe* de l'espace des fibrés plats à holonomie dans G , qui se trouve être la composante contenant le lieu fuchsien, c'est-à-dire $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$. Un fait saillant de la construction de cette section $s : \mathfrak{B}_X(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{M}_X(G)$ est que le fibré holomorphe sous-jacent est le même dans toute l'image de la section : seul le champ de Higgs varie. Plus précisément, le fibré introduit par Hitchin dans [Hit92, Section 5] est le fibré en algèbres de Lie holomorphe

$$(4.3.3) \quad \mathcal{E}_{\text{can}} := \bigoplus_{d=-M}^M K_X^d \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{(d)}$$

où $M = \max(d_1, \dots, d_r)$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{(d)} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est le sous-espace de poids d pour l'élément x du \mathfrak{sl}_2 -triplet principal de \mathfrak{g} (que l'on s'est fixé une fois pour toutes au début).

L'homéomorphisme (4.3.1), induit par la fibration de Hitchin, montre en particulier que la composante $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$ est contractile, puisqu'elle est homéomorphe à un espace vectoriel complexe, dont la dimension peut de plus être calculée par une application du théorème de Riemann-Roch : puisque, pour tout $\alpha \in \{1; \dots; r\}$, $\deg K_X^{d_\alpha+1} > \deg K_X$, on a $H^1(X; K_X^{d_\alpha+1}) = 0$ et, en notant $g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X; O_X)$ le genre de X ,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X; K_X^{d_\alpha+1}) = \deg K_X^{d_\alpha+1} + (1-g) = (d_\alpha + 1)(2g - 2) + 1 - g = (g - 1)(2d_\alpha + 1),$$

de sorte que

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hit}(\pi_1 X; G) = (g - 1) \sum_{\alpha=1}^r (2d_\alpha + 1) = (g - 1) \dim_{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}.$$

La version orbifold du résultat de Hitchin peut alors être vue comme une version équivariante du Théorème 4.12. Rappelons que, si l'on fixe une présentation de Y comme quotient global d'une surface fermée orientable par un groupe fini, le fibré canonique K_Y d'une orbi-surface $Y \simeq [X/\Gamma]$ peut être défini comme le fibré orbifold $[K_X/\Gamma]$ ⁽³⁾, où l'action de Γ sur le cotangent holomorphe $K_X = T^*X$ est induite par l'action de Γ sur X . Le groupe Γ agit alors sur les sections *holomorphes* de K_X de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} K_X & \xrightarrow{\tau_\gamma} & K_X \\ \downarrow s & & \downarrow \sigma(s) \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

En particulier, la section $\sigma(s)$ est bien holomorphe, même lorsque σ (donc également τ_γ) est anti-holomorphe. Nous démontrons alors dans [ALS18] que la fibration et la section de Hitchin possèdent les propriétés de Γ -équivariance attendues dans le présent contexte (Proposition 4.2, Lemme 4.3 et Corollaire 4.4 de [ALS18]). Il est pour cela important que le fibré holomorphe sous-jacent aux fibrés de Higgs correspondant aux représentations de Hitchin de $\pi_1 X$ dans G soit toujours le même et possède une structure Γ -équivariante canonique, ce qui est bien le cas par définition de ce fibré (voir (4.3.3)), de sorte que Γ agit sur les champs de Higgs définis sur \mathcal{E}_{can} et les champs invariants correspondent aux connexions plates Γ -invariantes (donc aux représentations d'holonomie de $\pi_1 X$ dans G qui s'étendent à $\pi_1 Y$, en vertu du Théorème 2.20). On obtient ainsi le résultat suivant, qui est une paramétrisation de $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ pour tout orbifold fermé Y .

Théorème 4.13. — [ALS18] *Fixons une structure dianalytique sur l'orbi-surface fermée Y . Alors, pour toute présentation $Y \simeq [X/\Gamma]$ de Y comme quotient global d'une surface de Riemann par l'action d'un groupe fini de transformations holomorphes ou anti-holomorphes, il existe un homéomorphisme*

$$\text{Hit}(\pi_1 Y; G) \simeq \bigoplus_{\alpha=1}^r \text{Fix}_\Gamma(H^0(X; K_X^{d_\alpha+1})),$$

où les (d_1, \dots, d_r) sont les exposants de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . En particulier, l'application $\varrho \mapsto \varrho|_{\pi_1 X}$ induit un homéomorphisme

$$(4.3.4) \quad \text{Hit}(\pi_1 Y; G) \xrightarrow{\simeq} \text{Fix}_\Gamma(\text{Hit}(\pi_1 X; G))$$

et cet espace est contractile.

Le Théorème 4.13 montre en particulier que, étant donné (X, Γ) , la dimension des espaces vectoriels $\text{Fix}_\Gamma H^0(X; K_X^{d_\alpha+1})$ ne dépend que de l'orbifold $[X/\Gamma]$. Plus précisément, on a, pour tout $d \geq 1$:

$$\text{Fix}_\Gamma H^0(X; K_X^d) \simeq H^0(Y; K_Y^d),$$

de sorte que $\mathfrak{B}_Y(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\alpha=1}^r H^0(Y; K_Y^{d_\alpha+1})$, comme dans le cas de surfaces de Riemann, et le théorème 4.13 peut être reformulé de la façon suivante, qui étend au cas des orbi-surfaces le résultat de Hitchin (Théorème 4.12).

3. En particulier, si Y est orientable, $\deg K_Y = \deg[K_X/\Gamma] = \frac{1}{|\Gamma|} \deg K_X = -\frac{1}{|\Gamma|} \chi(X) = -\chi(Y) \in \mathbb{Q}$.

Théorème 4.14. — Fixons une structure dianalytique sur l'orbi-surface fermée Y et notons K_Y le fibré canonique de Y . Alors il existe un homéomorphisme

$$(4.3.5) \quad \text{Hit}(\pi_1 Y; G) \simeq \bigoplus_{\alpha=1}^r H^0(Y; K_Y^{d_\alpha+1}),$$

où les (d_1, \dots, d_r) sont les exposants de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Pour calculer la dimension des espaces vectoriels $H^0(Y; K_Y^d)$, on peut utiliser le théorème de Riemann-Roch orbifold ([Kaw79, Abr05]) et reproduire le calcul de Hitchin, en commençant par le cas où Y est orientable. Dans ce cas, la formule de Riemann-Roch orbifold peut s'écrire de la façon suivante :

$$(4.3.6) \quad \chi(Y; K_Y^d) = \chi(Y; O_Y) + \deg K_Y^d - \sum_{i=1}^k \hat{\text{age}}_{y_i}(K_Y^d)$$

où les $(y_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont les points coniques de Y et l'âge en un point du fibré orbifold K_Y^d se calcule de la façon suivante. Si $\mathcal{L} \rightarrow Y$ est un fibré en droites orbifold quelconque au-dessus de Y et $[U/\Gamma]$ est une carte locale autour d'un point y , on peut voir le fibré \mathcal{L} restreint à $[U/\Gamma]$ comme un fibré Γ -équivariant $U \times \mathbb{C}$ au-dessus de U , où Γ agit sur \mathbb{C} via une représentation linéaire $\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$. Rappelons que puisque $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$, le groupe fini Γ est cyclique, isomorphe à $C_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Il agit donc sur \mathbb{C} par multiplication par ζ^a , où ζ est une racine m -ième de l'unité et $0 \leq a < m$. Dans ce cas, l'âge de \mathcal{L} en y est par définition égal à $\frac{a}{m} \in [0; 1[$ (4). Pour calculer l'âge de K_Y^d en un point conique y , il suffit de trivialisier K_Y au voisinage d'un tel point : l'action de C_m sur les vecteurs tangents à U se faisant par multiplication par ζ , sur les vecteurs cotangents elle se fait par multiplication par $\zeta^{-1} = \zeta^{m-1}$. L'âge de K_Y en un point d'ordre $m \geq 1$ est donc égal à $m-1$. De plus, l'action de C_m sur K_Y^d au voisinage d'un tel point se fait par multiplication par $\zeta^{d(m-1)}$. La division euclidienne $d(m-1) = qm + a$ donne alors $\zeta^{d(m-1)} = \zeta^a$ avec $q = \lfloor d - \frac{d}{m} \rfloor$ et $a = d(m-1) - qm \in [0; m[$. L'âge de K_Y^d en un point conique d'ordre m est donc égal à $\frac{a}{m} = \frac{d(m-1)}{m} - \lfloor d - \frac{d}{m} \rfloor$ (5). Enfin, puisque $\deg K_Y^d = d \deg K_Y > \deg K_Y = -\chi(Y) > 0$ pour tout $d \geq 2$, on a $H^1(Y; K_Y^d) = 0$. La formule de Riemann-Roch (4.3.6) donne donc :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(Y; K_Y^d) = 1 - g + d(2g - 2) + \sum_{i=1}^k \left[d - \frac{d}{m_i} \right],$$

où $g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(Y; O_Y)$ est le genre de Y . La formule du Théorème 4.9 dans le cas orientable s'en déduit en sommant ce qui précède pour $d = d_1, \dots, d_r$, comme dans le calcul de Hitchin. Pour le cas non orientable, on procède de même en utilisant le revêtement d'orientation $Y^+ \rightarrow Y$ et le fait que $H^0(Y; K_Y^d)$ s'identifie au lieu des points fixes de la structure réelle canonique de $H^0(Y^+; K_{Y^+}^d)$.

Remarque 4.15. — Notons que le calcul de la dimension des espaces de différentielles symétriques invariantes sous l'action d'un groupe fini de transformations holomorphes Γ de X avait déjà été fait par J. Lewittes ([Lew63]), en utilisant le théorème de Riemann-Roch classique sur la surface de Riemann X/Γ . Avec ce point de vue, la démonstration consiste à identifier les différentielles holomorphes Γ -invariantes sur X à des différentielles méromorphes sur X/Γ avec des pôles d'ordre pas trop grand en les points de branchement du revêtement ramifié $X \rightarrow X/\Gamma$. Plus précisément, si l'on note $f : z \mapsto z^m$ le revêtement ramifié de degré m du disque unité et $q(w) = \frac{h(w)}{w^s} dw^{\otimes d}$ une différentielle symétrique d'ordre d sur l'espace d'arrivée, alors $(f^*q)(z)$ est holomorphe sur l'espace de départ si et seulement si $s \leq \lfloor d - \frac{d}{m} \rfloor$. En effet, $(f^*q)(z) = h(z^m)z^{-ms}m^d z^{d(m-1)} dz^{\otimes d}$ et cette différentielle de degré d est holomorphe si et seulement si $d(m-1) - ms \geq 0$, soit $s \leq \lfloor d - \frac{d}{m} \rfloor$.

4. La définition de l'âge peut sembler étrange au premier abord et, en pratique, on peut se contenter de voir cette quantité précisément comme le terme correcteur faisant que la formule de Riemann-Roch est vraie sur une orbi-courbe analytique compacte. Rappelons que, pour un fibré vectoriel orbifold sur une orbi-courbe analytique, le degré est un nombre rationnel en général non entier, ce qui empêche la formule de Riemann-Roch classique d'être vraie telle quelle.

5. C'est là l'origine des termes $O(d, m) := \lfloor d - \frac{d}{m} \rfloor$ dans la formule du Théorème 4.9. Voir aussi la Remarque 4.15.

À l'aide du Théorème 4.13, il est facile de voir que les composantes de Hitchin orbifold fournissent bien des exemples d'Espaces de Teichmüller Supérieurs au sens de la Définition 4.1 étendue au cas de tous les groupes fuchsien compacts, pas seulement orientables et sans torsion, au moins dans le cas où $G = \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ ⁽⁶⁾ : il s'agit de montrer qu'une représentation de Hitchin $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ est fidèle et discrète et l'idée de la démonstration est d'utiliser le fait que

$$\mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})) \simeq \mathrm{Fix}_\Gamma(\mathrm{Hit}(\pi_1 X; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})))$$

pour déduire ces deux propriétés du résultat analogue pour les groupes de surfaces, démontré par Labourie ([Lab06]). Le point-clé est bien sûr que $\pi_1 Y$ contient un groupe de surface $\pi_1 X$ comme sous-groupe d'indice fini.

Proposition 4.16. — Soit $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ une représentation de Hitchin. Alors $\varrho(\pi_1 Y)$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$.

Démonstration. — Soit $p : X \rightarrow Y$ un revêtement fini par une surface fermée orientable. Comme $\varrho|_{\pi_1 X}$ est une représentation de Hitchin, $\varrho(\pi_1 X)$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ d'après [Lab06, Lemma 10.4]. C'est donc un fermé de $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. Et comme $\pi_1 X$ est d'indice fini dans $\pi_1 Y$, le sous-groupe $\varrho(\pi_1 Y)$ est réunion d'un nombre fini de fermés discrets de $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. Il est donc lui-même fermé et discret dans $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. \square

Proposition 4.17. — Soit $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ une représentation de Hitchin. Alors ϱ est injective.

Démonstration. — Soit $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ une représentation de Hitchin. D'après [Lab06, Proposition 3.4], les éléments de $\varrho(\pi_1 X) \setminus \{1\}$ sont diagonalisables, à valeurs propres réelles de multiplicité 1. En particulier, $\varrho|_{\pi_1 X}$ est injective. Soit maintenant $\gamma \in \pi_1 Y \setminus \pi_1 X$. Puisque $\pi_1 Y / \pi_1 X$ est un groupe fini, il existe un entier q , que l'on supposera minimal, tel que $\gamma^q \pi_1 X$. Si $\gamma^q \neq 1_{\pi_1 X}$ alors $\varrho(\gamma)^q = \varrho(\gamma^q) \neq 1$ dans $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. Donc $\varrho(\gamma) \neq 1$. Et si $\gamma^q = 1_{\pi_1 X}$ alors γ est d'ordre fini donc les valeurs propres de $\varrho(\gamma)$ restent constantes par déformation continue de ϱ dans $\mathrm{Hom}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R}))$. Fixons alors une représentation fuchsienne $\varrho' : \pi_1 Y \rightarrow \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. D'après ce que l'on vient de voir, $\varrho'(\gamma)$ a les mêmes valeurs propres que ϱ . Et comme $\gamma \neq 1_{\pi_1 Y}$ et ϱ' est fuchsienne, on a $\varrho'(\gamma) \neq 1$ dans $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. Donc $\varrho'(\gamma)$ a au moins une valeur propre distincte de 1. Donc $\varrho(\gamma)$ également, ce qui montre que $\varrho(\gamma) \neq 1$ dans $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$. \square

Comme le morphisme principal canonique $\kappa : \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ est d'image contenue dans $\mathbf{PSp}^\pm(2m; \mathbb{R})$ si $n = 2m$ et $\mathbf{PO}(m, m+1)$ si $n = 2m+1$ (et même \mathbf{G}_2 si $n = 7$), on a des applications

$$\begin{aligned} \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PSp}^\pm(2m; \mathbb{R})) &\rightarrow \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(2m; \mathbb{R})), \\ \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PO}(m, m+1)) &\rightarrow \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(2m+1; \mathbb{R})), \\ \text{et } \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{G}_2) &\rightarrow \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PO}(3, 4)) \rightarrow \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(7; \mathbb{R})). \end{aligned}$$

Et comme les exposants de ces différents sous-groupes de $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ forment une sous-famille des exposants de $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$, il résulte de la version orbifold de paramétrisation de Hitchin que ces applications sont injectives ⁽⁷⁾. En conséquence, les représentations de Hitchin à valeurs dans $\mathbf{PSp}^\pm(2m; \mathbb{R})$, $\mathbf{PO}(m, m+1)$ et \mathbf{G}_2 sont également fidèles et discrètes. Je ne sais pas si c'est aussi le cas pour les représentations de Hitchin à valeurs dans $\mathbf{PO}^\pm(m, m)$ ou dans les formes réelles déployées de groupes de Lie simples exceptionnels autres que \mathbf{G}_2 . Dans [ALS18, Section 2.5], nous généralisons également au cas orbifold certaines propriétés géométriques et dynamiques connues des $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ -représentations de Hitchin de groupes de surfaces (le fait d'être Anosov, l'irréductibilité forte, l'hyperconvexité, etc.).

Remarque 4.18. — Le Théorème 4.13 affirme que l'application $\varrho \mapsto \varrho|_{\pi_1 X}$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Hit}(\pi_1 Y; G) \simeq \mathrm{Fix}_\Gamma(\mathrm{Hit}(\pi_1 X; G))$. Comme mentionné en (2.1.5), cette propriété n'est pas vraie en général : c'est parce que l'on se restreint à la composante de Hitchin de $\mathrm{Hom}(\pi_1 Y; G)/G$ qu'on l'obtient. De

6. Ce qui implique que le résultat est également vrai pour $G = \mathbf{PSp}^\pm(2m; \mathbb{R})$, $\mathbf{PO}(m, m+1)$ et \mathbf{G}_2 .

7. Ce résultat déjà connu pour les groupes de surfaces et on pourrait déduire ce qui suit de ce cas-là, en reproduisant les démonstrations des Propositions 4.16 et 4.17. Il est néanmoins intéressant d'étendre au cas orbifold, quand c'est possible, les inclusions du type $\mathrm{Hit}(\pi_1 Y; H) \hookrightarrow \mathrm{Hit}(\pi_1 Y; G)$ pour H un sous-groupe de G : nous verrons dans la Section 4.4 des applications de cette propriété.

fait, on peut démontrer l’injectivité de manière relativement élémentaire ([ALS18, Proposition 2.10]) : il suffit de montrer que si deux représentations $\varrho_1, \varrho_2 : \pi_1 Y \rightarrow G$ ont des restrictions au sous-groupe distingué $\pi_1 X$ qui sont égales, alors elles coïncident sur tout $\pi_1 Y$. Cela utilise le fait, conséquence des travaux de Simpson et Labourie, qu’une représentation de Hitchin $\varrho : \pi_1 X \rightarrow G$ ont pour stabilisateur le centre de G , qui est ici supposé trivial (rappelons que G est le groupe des points réels de $\text{Int}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$ avec \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle). Plus précisément, soient $\varrho_1, \varrho_2 : \pi_1 Y \rightarrow G$ deux représentations de Hitchin telles que $\varrho_1|_{\pi_1 X} = \varrho_2|_{\pi_1 X}$ et notons $\varrho : \pi_1 X \rightarrow G$ la représentation ainsi définie. Soit alors $\gamma \in \pi_1 Y$ et considérons la représentation de $\varrho' : \pi_1 X \rightarrow G$ définie par $\delta \mapsto \varrho_1(\gamma)\varrho_2(\gamma^{-1})\varrho(\delta)\varrho_2(\gamma)\varrho_1(\gamma)^{-1}$. Alors on a, pour tout $\delta \in \pi_1 X$,

$$\varrho'(\delta) = \varrho_1(\gamma)\varrho_2(\gamma^{-1}\delta\gamma)\varrho_1(\gamma)^{-1} = \varrho_1(\gamma\gamma^{-1}\delta\gamma\gamma^{-1}) = \varrho(\delta),$$

de sorte que $\varrho_1(\gamma)\varrho_2(\gamma)^{-1} \in \text{Stab}_G(\varrho) = \mathcal{Z}(G) = \{1_G\}$, i.e. $\varrho_1(\gamma) = \varrho_2(\gamma)$.

4.4. Applications

Le but de ce paragraphe est de présenter quelques applications du Théorème 4.9. Nous en donnerons quatre, en renvoyant à la pré-publication [ALS18] pour les détails des démonstrations. D’autres exemples d’utilisation de nos résultats ont été donnés par M. Burger, A. Iozzi, A. Parreau et B. Pozzetti dans [BIPP19], qui ont traité aux compactifications des variétés de caractères.

4.4.1. Rigidité. — Les composantes de Hitchin de groupes fondamentaux orbifolds possèdent deux propriétés de rigidité pouvant être mises en évidence assez simplement, l’une attendue et l’autre plus surprenante.

Le premier type de rigidité est classique : sous certaines conditions sur l’ordre des points orbifold de Y et pour G de rang pas trop grand, la dimension de $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ peut être petite, en l’occurrence 0 ou 1 (ce dernier cas ne pouvant se produire que pour un orbifold non orientable). Dans [ALS18] nous sommes parvenus à une classification complète des composantes de Hitchin de dimension 0, que nous énonçons ci-dessous. Remarquons que si $\dim \text{Hit}(\pi_1 Y; G) = 0$, alors l’espace de Teichmüller de Y est réduit à un point, ce qui force Y à être un quotient de sphère avec trois points coniques. Enfin, puisque $\dim \text{Hit}(\pi_1 Y; G) = \frac{1}{2} \dim \text{Hit}(\pi_1 Y^+; G)$ avec Y^+ le revêtement d’orientation de Y ([ALS18, Corollary 5.9]), il suffit de classifier les orbifolds orientables dont la composante de Hitchin dans G est réduite à un point pour les classifier toutes.

Théorème 4.19. — [ALS18] *Soit Y une sphère avec trois points coniques, d’ordres respectifs $m_1 \leq m_2 \leq m_3$, et supposons que le quadruplet (G, m_1, m_2, m_3) fasse partie de l’une des familles suivantes :*

1. $G = \text{PGL}(2, \mathbb{R}) \simeq \text{PO}(1, 2) \simeq \text{PSp}^\pm(2, \mathbb{R})$ et $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$.
2. $G = \text{PGL}(3, \mathbb{R})$, $m_1 = 2$ et $\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < \frac{1}{2}$.
3. $G = \text{PGL}(4, \mathbb{R}) \simeq \text{PO}^\pm(3, 3)$, $\text{PGL}(5, \mathbb{R})$, $\text{PSp}^\pm(4, \mathbb{R}) \simeq \text{PO}(2, 3)$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ et $m_3 \geq 7$.
4. $G = \text{PSp}^\pm(4, \mathbb{R}) \simeq \text{PO}(2, 3)$, $m_1 = m_2 = 3$ et $m_3 \geq 4$.
5. $G = \mathbf{G}_2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$ or 5 et $m_3 = 5$.

Alors $\dim \text{Hit}(\pi_1 Y, G) = 0$, c’est-à-dire que deux représentations de Hitchin quelconques de $\pi_1 Y$ dans G sont nécessairement conjuguées. Notons qu’il existe une infinité d’orbifolds Y pour lesquels ce phénomène se produit.

De plus, si Y est orientable mais que les conditions ci-dessus ne sont pas vérifiées pour Y ou G , alors les représentations de Hitchin de $\pi_1 Y$ dans G admettent des déformations non-triviales, i.e. $\dim \text{Hit}(\pi_1 Y, G) > 0$.

On peut de même classifier les composantes de Hitchin de dimension 1 ou 2 ([ALS18, Theorem 6.5]). Etant donné Y et G tels que $\dim \text{Hit}(\pi_1 Y; G) = 1$, on obtient donc, pour tout revêtement galoisien fini $X \rightarrow Y$ de Y par une surface fermée orientable, une sous-variété de dimension 1 de $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$ via le plongement $\text{Hit}(\pi_1 Y; G) \hookrightarrow \text{Hit}(\pi_1 X; G)$ induit par $\varrho \mapsto \varrho|_{\pi_1 X}$ (voir Remarque 4.18). Comme l’image de ce plongement est exactement $\text{Fix}_\Gamma \text{Hit}(\pi_1 X; G)$, où $\Gamma \simeq \pi_1 Y / \pi_1 X$ agit sur $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$ via le morphisme canonique $\Gamma \rightarrow \text{Out}(\pi_1 X)$, on voit que $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ s’envoie sur une géodésique de $\text{Hit}(\pi_1 X; G)$ pour toute métrique invariante sous l’action du groupe modulaire $\text{Mod}^\pm(X) \simeq \text{Out}(\pi_1 X)$, par exemple les métriques de pression ([BCLS15, BCLS18]).

Exemple 4.20. — Soit \mathcal{K} la quartique de Klein, qui est une surface de Riemann de genre 3. Alors l'orbifold $\mathcal{T} := \mathcal{K}/\text{Aut}^\pm(\mathcal{K})$ est un triangle de type $(2, 3, 7)$ et, pour tout entier n tel que $6 \leq n \leq 11$, la composante de Hitchin $\text{Hit}(\pi_1\mathcal{T}; \mathbf{PGL}(n, \mathbb{R}))$ se plonge canoniquement sur une géodésique de $\text{Hit}(\pi_1\mathcal{K}, \mathbf{PGL}(n, \mathbb{R}))$, qui est de dimension $4(n^2 - 1) \geq 140$.

Le second phénomène de rigidité rencontré est plus surprenant et concerne la notion de Zariski-densité des représentations de $\pi_1 Y$ dans G : sous certaines conditions sur Y et G , il existe des composantes de Hitchin $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ qui ne contiennent *aucune* représentation Zariski-dense. Plus précisément, on montre que si $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow G$ est une représentation de Hitchin, alors il existe $g \in G$ tel que $g(\text{Im } \varrho)g^{-1} \subset H$, avec H un sous-groupe strict de G . La raison à ce phénomène est que l'on peut trouver des triplets (Y, G, H) pour lesquels l'application $\text{Hit}(\pi_1 Y; H) \rightarrow \text{Hit}(\pi_1 Y, G)$ est *surjective*. Il est remarquable que, pour un orbifold Y bien choisi, cela puisse se produire *même lorsque la dimension des composantes de Hitchin est non nulle*. Dans [ALS18, Theorem 6.3], nous classifions tous les tels triplets (Y, G, H) et nous montrons qu'il existe une infinité d'orbifolds pour lesquels ce phénomène survient (cependant, le rang de G ne peut pas, ici non plus, être arbitrairement grand). On a par exemple le résultat suivant.

Proposition 4.21. — Soit Y une sphère avec trois points coniques, d'ordres respectifs $(2, 4, 5)$. Alors l'application canonique $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R})) \rightarrow \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})) \simeq \mathbb{R}^2$ est *surjective*. En particulier, toute représentation de Hitchin $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})$ est *conjuguée*, dans $\mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})$, à une représentation à valeurs dans $\mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R})$. Une telle représentation ϱ n'est donc jamais Zariski-dense.

4.4.2. Fibrés de Higgs cycliques. — Soit $\varrho \in \text{Hit}(\pi_1 X; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})) \simeq \bigoplus_{d=2}^n H^0(X; K_X^d)$. On dit que la représentation ϱ (ou, de manière équivalente, le fibré de Higgs associé) est *cyclique* ([Bar15]) si la famille de différentielles symétriques correspondante est de la forme $(0, \dots, 0, q_n)$, et on dit que ϱ est $(n-1)$ -cyclique ([Col16]) si la famille de différentielles correspondante est de la forme $(0, \dots, 0, q_{n-1}, 0)$. Pour de tels fibrés, les équations de Hitchin prennent une forme simple, qui permet de mieux comprendre les propriétés géométriques et asymptotiques des fibrés associés ([CL17, DL18]). Grâce à la paramétrisation (4.3.5), les définitions ci-dessus se généralisent de façon immédiate au cas orbifold. De plus, étant donné une présentation $Y \simeq [X/\Gamma]$, l'homéomorphisme

$$\bigoplus_{d=2}^n H^0(Y; K_Y^d) \simeq \text{Fix}_\Gamma \bigoplus_{d=2}^n H^0(X; K_X^d)$$

de (4.3.4) montre que $\varrho : \pi_1 Y \rightarrow \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$ est cyclique (respectivement, $(n-1)$ -cyclique) si et seulement si $\varrho|_{\pi_1 X}$ est cyclique (respectivement, $(n-1)$ -cyclique).

L'intérêt de développer la notion de représentation cyclique dans le cas orbifold est que l'on peut construire des exemples d'orbifolds Y tels que $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R}))$ est tout entière constituée de représentations cycliques ou $(n-1)$ -cycliques, du moins pour certaines valeurs de n (voir [ALS18, Corollary 6.7] pour une liste complète). Ce phénomène ne se produit jamais pour les groupes de surfaces, pour lesquels la composante de Hitchin contient toujours des représentations non cycliques. Nous espérons que cette description, de nature géométrique, de certains fibrés de Higgs cycliques permettra à terme de mieux comprendre la géométrie à l'infini des composantes de Hitchin des groupes de surfaces.

Notons que l'on peut donner un sens à la notion de représentation cyclique (respectivement, $(n-1)$ -cyclique) également pour les sous-groupes $G = \mathbf{PO}(m, m+1)$, $\mathbf{PSp}^\pm(2m; \mathbb{R})$ ou \mathbf{G}_2 de $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$, en voyant simplement $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ comme un sous-espace de $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R}))$ dans ces cas-là.

Exemple 4.22. — Soit Y une sphère avec k points coniques, d'ordres respectifs $m_1 \leq \dots \leq m_k$ (on suppose toujours que $\chi(Y) < 0$).

1. Si $k = 4$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, ou si $k = 5$ et $\forall i, m_i = 2$, alors $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(3; \mathbb{R}))$ est tout entière constituée de représentations 2-cycliques.
2. Si $k = 3$ et $m_1 \geq 3$, alors $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(3; \mathbb{R}))$ est tout entière constituée de représentations cycliques.
3. Si $k = 3$ et $m_2 \neq 3$, alors $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R}))$ est tout entière constituée de représentations cycliques.
4. Tous les autres cas possibles sont listés dans le Tableau B.5 de [ALS18].

Plus généralement, les groupes fondamentaux orbifolds nous permettent de construire des exemples de lieux géométriques dans $\text{Hit}(\pi_1 X; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})) \simeq \bigoplus_{\alpha=2}^n H^0(X; K_X^\alpha)$, définis par l'annulation de certaines

différentielles symétriques. Par exemple, lorsque H est un sous-groupe de rang 2 de G et $\text{Hit}(\pi_1 X; H) \rightarrow \text{Hit}(\pi_1 X; G)$ est l'application dont l'existence découle des travaux de Labourie ([**Lab17**]) pour X une surface fermée de genre $g \geq 2$, on peut, dans certains cas ([**ALS18**, Corollary 6.9]), construire un orbifold Y qui est un quotient de X et tel que l'image du morphisme canonique $\text{Hit}(\pi_1 Y; G) \rightarrow \text{Hit}(\pi_1 X; G)$ est contenue dans l'image du morphisme de Labourie $\text{Hit}(\pi_1 X; H) \rightarrow \text{Hit}(\pi_1 X; G)$:

Exemple 4.23. — Soit Y une sphère avec 3 points coniques d'ordres respectifs $(2, 4, 5)$. Alors, pour toute présentation $Y \simeq [X/\Gamma]$ de Y par une surface fermée orientable X , l'image du morphisme canonique

$$\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PSp}^\pm(6; \mathbb{R})) \rightarrow \text{Hit}(\pi_1 X; \mathbf{PSp}^\pm(6; \mathbb{R}))$$

est contenue dans l'image du morphisme de Labourie

$$\begin{array}{ccc} \text{Hit}(\pi_1 X; \mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R})) & \rightarrow & \text{Hit}(\pi_1 X; \mathbf{PSp}^\pm(6; \mathbb{R})) \\ (q_2, q_4) & \mapsto & (q_2, q_4, 0) \end{array}$$

et correspond au lieu géométrique

$$L := \{(q_2, q_4, q_6) \in \text{Hit}(\pi_1 X; \mathbf{PSp}^\pm(6; \mathbb{R})) \mid q_2 = q_6 = 0\},$$

de dimension complexe 1 et paramétré par une unique différentielle (de degré 4).

4.4.3. Structures projectives sur les variétés de Seifert. — O. Guichard et A. Wienhard ont montré dans [**GW08**] que la composante de Hitchin à valeurs dans $\mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})$ était homéomorphe à l'espace des déformations de structures projectives convexes feuilletées sur le fibré tangent unitaire de cette surface. Dans [**ALS18**], nous proposons une généralisation de ce résultat à tout revêtement fini du fibré tangent unitaire d'une orbi-surface fermée orientable (de caractéristique d'Euler négative). Notre principale motivation à cela est l'étude des $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ -structures géométriques sur les variétés de dimension 3. Plus précisément, si M est une variété de dimension 3 compacte et sans bord, notons $\mathcal{D}_{\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})}(M)$ l'espace des déformations de $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ -structures sur M . Lorsque cet espace est non-vide, M est difféomorphe à un revêtement fini du fibré tangent unitaire d'une orbi-surface fermée orientable bien définie Y ([**ALS18**, Proposition 6.10]). De plus, les $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ -structures sur M peuvent être étudiées à l'aide d'un modèle projectif $\Omega^+ \subset \mathbb{RP}_3$, fourni par le morphisme principal $\kappa : \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})$: par définition, $\Omega^+ \subset \mathbb{RP}_3$ est l'unique orbite ouverte de $\kappa(\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R}))$ sur laquelle l'action de ce groupe est en outre libre. Comme l'image de ce morphisme est contenue dans $\mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R})$, ce modèle projectif Ω^+ admet également une structure de contact, que nous noterons ω . Cela nous permet de voir les $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ -structures sur M comme un cas particulier de structures projectives ou de structures projectives de contact. En d'autres termes, on a une application canonique

$$(4.4.1) \quad \mathcal{D}_{\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})}(M) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{RP}_3^\omega}(M) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{RP}_3}(M),$$

dont les fibres ont chacune deux éléments, car le groupe non connexe $\kappa(\mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}))$ préserve également l'ouvert Ω^+ , et dont nous souhaitons décrire l'image. Si on identifie les points de $\mathcal{D}_{\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})}(M)$ situés dans une même fibre de l'application (4.4.1), on obtient un homéomorphisme entre le quotient associé $\mathcal{D}_{\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})}(M)/\sim$ et la composante de Hitchin $\text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}))$, où Y est la base de Seifert de la variété M ([**ALS18**, Proposition 6.10]). L'image de l'application (4.4.1) est donc contenue dans des composantes connexes bien définies $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}_3^\omega}^0(M)$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}_3}^0(M)$, respectivement de $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}_3^\omega}(M)$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}_3}(M)$. La généralisation à ce cadre du résultat de Guichard et Wienhard est alors la suivante.

Théorème 4.24. — [**ALS18**, Theorem 1.14] *Soit M une variété de dimension 3 admettant au moins une $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ -structure et soit Y sa base de Seifert. Alors il existe des homéomorphismes*

$$\mathcal{D}_{\mathbb{RP}_3^\omega}^0(M) \simeq \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\mathbb{RP}_3}^0(M) \simeq \text{Hit}(\pi_1 Y; \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})).$$

En particulier, ces espaces de déformation de structures géométriques sont homéomorphes à des boules ouvertes, de dimensions respectives

$$-10\chi(|Y|) + (8k - 2k_2 - 2k_3) \quad \text{et} \quad -15\chi(|Y|) + (12k - 4k_2 - 2k_3).$$

On peut se représenter de la façon suivante la situation décrite ci-dessus :

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Hit}(\pi_1 Y, \mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})) & \hookrightarrow & \text{Hit}(\pi_1 Y, \mathbf{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})) & \hookrightarrow & \text{Hit}(\pi_1 Y, \mathbf{PGL}(4, \mathbb{R})) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
(4.4.2) \quad \mathcal{D}_{\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})}(M) / \sim & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^\circ(M) & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^\circ(M) \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
& & \mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}(M) & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}(M)
\end{array}$$

et, en guise d'application du résultat principal de [ALS18] sur la dimension des composantes de Hitchin de groupes fondamentaux orbifolds (Théorème 4.9), on obtient alors l'énoncé suivant.

Corollaire 4.25. — [ALS18, Corollary 1.15] *Soit M un revêtement fini du fibré tangent unitaire d'une sphère avec 3 points coniques, d'ordres respectifs $m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Alors $\mathcal{D}_{\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})}(M) = \{*\}$ et :*

1. Si $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ et $m_3 \geq 7$, alors $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^0(M) = \mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^0(M) = \{*\}$: la structure projective canonique de M est rigide.
2. Si $m_1 = m_2 = 3$ et $m_3 \geq 4$, alors $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^0(M) = \{*\}$ mais $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^0(M)$ est de dimension positive : M est rigide du point de vue des structures projectives de contact mais pas du point de vue des structures projectives générales.
3. Pour tous les autres triplets (m_1, m_2, m_3) , $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^0(M)$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}(M)$ sont de dimension positive.

En affinant un peu cette étude à l'aide du Théorème 6.3 de [ALS18], on peut également montrer que $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^0(M) = \mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^0(M) \neq \{*\}$ si Y est une sphère avec k points coniques d'ordres respectifs $1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k$ tels que :

1. Si $k = 3$, alors $m_1 = 2$ et $m_2, m_3 \geq 4$.
2. Si $k = 4$, alors $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ et $m_4 \geq 3$.
3. Si $k = 5$, alors $\forall i, m_i = 2$.

Dans chacun de ces cas, toute déformation non triviale de la structure projective de la $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ -variété M est nécessairement de type contact.

Pour conclure, rappelons l'analogie entre l'inclusion $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}^\circ(M) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}(M)$ induite par le morphisme canonique $\mathbf{PSp}^\pm(4; \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})$ et l'inclusion $\mathcal{D}_{\mathbf{H}^3}(M) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}(M)$ de l'espace des déformations de structures hyperboliques dans l'espace des déformations de structures projectives sur M , induite par le morphisme canonique $\mathbf{PO}(1, 3) \hookrightarrow \mathbf{PGL}(4; \mathbb{R})$ et pour laquelle $\mathcal{D}_{\mathbf{H}^3}(M) = \{*\}$ d'après le théorème de rigidité de Mostow. La composante connexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{RP}^3}(M)$ contenant le point $\mathcal{D}_{\mathbf{H}^3}(M)$ est l'espace des déformations de structures projectives convexes sur M (cette composante peut ou non être réduite à un point, selon les cas). On voit donc que, pour les $\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ -structures sur M , la situation est plus compliquée mais peut être rendue un peu plus claire à l'aide du Diagramme 4.4.2.

4.4.4. Orbifolds à bord. — Un orbifold à bord est un espace Y qui est localement de la forme $[U/\Gamma]$ où U est un ouvert d'un demi-espace fermé $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ et Γ est un groupe fini de difféomorphismes de U ([CG05]). Le bord d'un orbifold à bord Y de dimension n est alors un orbifold fermé ∂Y , de dimension $(n-1)$. Pour $n = 2$ et Y compact, les composantes de bord de Y sont donc soit des cercles (avec structure orbifold triviale; en particulier, les points de ce cercle ne sont pas des points miroirs), soit des segments dont *uniquement* les extrémités sont des points miroirs (Choi et Goldman appellent *composantes de bord pleines de dimension 1* de tels segments). La caractéristique d'Euler d'un orbifold à bord Y est donnée par la formule

$$\chi(Y) = \chi(|Y|) - \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) - \frac{1}{2}b,$$

où b est le nombre de composantes de bord pleines de dimension 1. On peut associer canoniquement à Y une orbi-surface fermée mY en décrétant que tous les points du bord sont des points miroirs, ce qui ne change pas la caractéristique d'Euler (puisque chaque composante de bord pleine de dimension 1 de Y donne lieu à deux points diédraux de mY). Cette définition est compatible avec la condition de bord classique utilisée pour définir l'espace de Teichmüller d'une (orbi-) surface à bord : on demande

que le bord soit totalement géodésique et on obtient que l'espace des déformations de telles structures hyperboliques sur Y coïncide avec celui de mY . En particulier, on a la formule ([CG05, p.1094]) :

$$\dim \mathcal{T}(Y) = -3\chi(|Y|) + 2k + \ell + 2b.$$

Notons que le groupe fondamental $\pi_1 Y$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe d'indice *infini* de $\pi_1 mY$.

Comme dans le cas d'une orbi-surface fermée, une représentation $\rho : \pi_1 Y \rightarrow G$ est dite *fuchsienne* si elle se relève, via le morphisme principal $\kappa : \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow G$, en la représentation d'holonomie d'une structure hyperbolique (à bord totalement géodésique) sur Y . En particulier, *une représentation de $\pi_1 Y$ est fuchsienne si et seulement si elle s'étend en une représentation fuchsienne de $\pi_1(mY)$* . Le lieu fuchsien de $\text{Rep}(\pi_1 Y; G)$ est donc (par définition) contenu dans le sous-espace $\text{Rep}'(\pi_1 Y; G)$ constitué des classes de conjugaison de représentations $\rho : \pi_1 Y \rightarrow G$ qui s'étendent à $\pi_1(mY)$.

Définition 4.26. — On appelle *composante de Hitchin* (à valeurs dans G) la composante connexe de $\text{Rep}'(\pi_1 Y; G)$ qui contient le lieu fuchsien.

Proposition 4.27. — [ALS18, Proposition 2.26] *Une représentation $\rho : \pi_1 Y \rightarrow G$ est de Hitchin si et seulement si elle s'étend en une représentation $\bar{\rho} : \pi_1(mY) \rightarrow G$. L'application $\rho \mapsto \bar{\rho}$ est bien définie et induit un homéomorphisme $\text{Hit}(\pi_1 Y; G) \simeq \text{Hit}(\pi_1(mY); G)$.*

À l'aide de ce résultat, on déduit des Théorèmes 4.9 et 4.10 la formule suivante pour la dimension des composantes de Hitchin d'orbi-surfaces à bord de caractéristique d'Euler négative, déjà connu de Choi et Goldman dans le cas où $G = \mathbf{PGL}(3; \mathbb{R})$ ([CG05]).

Corollaire 4.28. — [ALS18, Corollary 5.8 et Corollary 5.12] *Reprenons les notations des Théorèmes 4.9 et 4.10. Soit Y une orbi-surface à bord de caractéristique d'Euler négative et soit G la forme réelle déployée du groupe adjoint d'une algèbre de Lie simple sur \mathbb{C} . Alors $\text{Hit}(\pi_1 Y; G)$ est homéomorphe à un espace vectoriel réel de dimension égale à*

$$-\chi(|Y|) \dim G + \sum_{\alpha=1}^r \left(2 \sum_{i=1}^k O(d_\alpha + 1, m_i) + \sum_{j=1}^\ell O(d_\alpha + 1, n_j) + 2b \left\lfloor \frac{d_\alpha + 1}{2} \right\rfloor \right),$$

où b est le nombre de composantes de bord pleines de dimension 1 de Y . Cette formule peut également être écrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} -\chi(|Y|) \dim G + \frac{1}{2} (\dim G - \text{rg } G) (2k + \ell + 2b) - 2 \sum_{m=2}^M \left(\sum_{\alpha=1}^r \left\lfloor \frac{d_\alpha + 1}{m} - 1 \right\rfloor \right) k_m \\ - \sum_{n=2}^M \left(\sum_{\alpha=1}^r \left\lfloor \frac{d_\alpha + 1}{n} - 1 \right\rfloor \right) \ell_n - 2b \sum_{\alpha=1}^r \left\lfloor \frac{d_\alpha - 1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Remarque 4.29. — Pour une surface orientable à bord S , Labourie et McShane ont introduit dans [LM09] une notion de composante de Hitchin pour le groupe fondamental *topologique* de S . Nous vérifions dans [ALS18, Proposition 2.27] que $\text{Hit}(\pi_1 S; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})) \simeq \text{Hit}(\pi_1(mS); \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R}))$, ce qui montre en particulier que la composante de Labourie et MacShane est contractile, homéomorphe à un espace vectoriel réel dont la dimension reste donnée par la même formule que celle de Hitchin : $\dim \text{Hit}(\pi_1 S; \mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})) = -(n^2 - 1)\chi(S)$. Cette dernière égalité est vraie plus généralement pour toute orbi-surface fermée Y n'ayant que des points miroirs pour singularités orbifolds ([ALS18, Corollary 5.14]).

CHAPITRE 5

PERSPECTIVES

Pour conclure ce mémoire, nous présentons brièvement quelques pistes de recherche qui constituent une suite naturelle aux thématiques abordées dans les Chapitres 2, 3 et 4. Certains des sujets proposés ci-dessous pourraient servir de point de départ à un encadrement doctoral.

5.1. Aspects orbifolds de la correspondance de Hodge non abélienne

5.1.1. Fibrés paraboliques sur un orbifold. — Divers auteurs ont proposé des contextes dans lesquels voir les fibrés vectoriels paraboliques introduits par Seshadri ([Ses77, MS80]) comme des fibrés vectoriels orbifolds ([Bod91, FS92, NS95a, Bis97, AG06]) et le cas des fibrés de Higgs paraboliques a également été abordé de ce point de vue-là ([NS95b]). En géométrie algébrique, les fibrés paraboliques sont parfois vus comme des torsseurs sous certains schémas en groupes, dits *de Bruhat-Tits* ([BS15, Zel19]). Et en théorie des équations différentielles, un point de vue similaire a été développé pour les systèmes locaux, y compris au-dessus des *courbes irrégulières* ([Boa11, BY15, Boa19]). Enfin, la notion de fibré vectoriel parabolique sur une courbe réelle a également été clarifiée ([Amr14a, Amr14b, BS18]), tout comme celle de fibré de Higgs parabolique réel ([CP18]).

Il serait intéressant de comparer ces différentes notions entre elles et de les confronter au point de vue développé dans le Chapitre 2 de ce mémoire. Cela permettrait en particulier de nouveaux exemples de fibrés en groupes sur les orbifolds (les analogues en géométrie différentielle et analytique des schémas en groupes de Bruhat-Tits en géométrie algébrique) et de développer dans ce cadre la notion de fibré parabolique sur un orbifold quelconque, i.e. sans supposer que la structure parabolique est située au-dessus des points orbifold de la courbe. Pour se convaincre que les deux notions sont bien distinctes, on peut par exemple considérer le cas d'un groupe fuchsien $\pi \subset \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R})$ qui soit non cocompact mais seulement de covolume fini : les points orbifolds de $Y := [\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 / \pi]$ correspondent aux points de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ ayant un stabilisateur cyclique ou diédral, tandis que les structures paraboliques “essentiels” des fibrés vectoriels associés par exemple aux représentations unitaires de π , vont apparaître aux *points cuspidaux* de la compactification

$$\bar{Y} = [(\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 \cup \text{Cusps}(\pi)) / \pi] \simeq Y \cup \{p_1, \dots, p_s\}$$

de Y .

5.1.2. Stabilité des torsseurs plats et de Higgs. — Nous avons vu dans le Chapitre 2 que la notion de stabilité des \mathcal{G}_{φ} -torsseurs n'était pas invariante par passage à un revêtement orbifold fini, que celui-ci corresponde, du point de vue la géométrie algébrique, à une extension des scalaires $Y_{\mathbb{C}} \rightarrow Y_{\mathbb{R}}$ ou à un revêtement analytique $X_{\mathbb{C}} \rightarrow Y_{\mathbb{C}}$. Il existe néanmoins plusieurs contextes concrets où l'on sait décrire complètement les objets stables ([Ram81, Sch12, Zel19]), au moins du “côté Dolbeault” : le point commun à tous ces exemples est que l'orbifold considéré sont des quotients globaux canoniques de surfaces de Riemann compactes (réelle ou hyperelliptique). Pour ce qui est du “côté Betti”, le cas réel est également bien compris ([Sch17]) et, dans des travaux en cours, Cheng Shu est sur le point de clarifier complètement la notion de stabilité des systèmes locaux anti-invariants, y compris la relation avec le point de vue de la théorie des invariants.

Le sujet semble riche et on peut penser qu'une bonne compréhension de la notion de stabilité dans le cas général passe par une meilleure maîtrise des techniques récentes de constructions d'espaces de

modules, développés notamment par J. Alper, D. Halpern-Leistner et J. Heinloth ([Alp13, Hei17, HL13, AHLH18]).

5.1.3. Géométrie des espaces de modules de torseurs de Higgs. — Un aspect particulier des espaces de modules de torseurs de Higgs sur les orbifolds, lorsqu'ils existent, est qu'ils peuvent être d'assez petite dimension : on peut donc imaginer qu'il soit possible de les identifier complètement d'un point de vue algébrique, en voyant par exemple apparaître des quotients de variétés symplectiques holomorphes connues. Il est en effet assez naturel de conjecturer que les espaces de modules de torseurs possèdent une structure symplectique, au moins lorsque l'orbifold de base Y et le groupe de Lie G sont analytiques complexes : une telle structure devrait par exemple pouvoir être obtenue à l'aide des *techniques de géométrie quasi-hamiltonienne* développées par P. Boalch pour munir les *variétés de caractères sauvages* de structures holomorphes symplectiques ([Boa14]). Le cas réel pourrait alors être incorporé à cette description quasi-hamiltonienne en suivant les idées déjà utilisées dans [Sch07a, Sch07b, Sch08].

5.2. Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques réelles

5.2.1. Topologie des champs de modules. — La formule obtenue pour la série de Poincaré des champs de modules de fibrés vectoriels réels (Théorème 1.15) est satisfaisante parce qu'elle est très géométrique : le champs de modules en question fibre sur $BU(r)$ et la fibre de cet espace est elle-même fibrée en $\Omega\mathrm{SU}(r)$, au-dessus de l'espace d'holonomie

$$\mathrm{U}(r)^{g+1-n} \times \mathrm{SO}(r)^n \times (\mathrm{U}(r)/\mathrm{O}(r))^{n-1},$$

au moins pour ce qui est de la cohomologie modulo 2. Cette approche nous permet en particulier d'exhiber des générateurs explicites de $H^*(BG_E^r; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, comme l'ont fait Atiyah et Bott pour $H^*(BG_E; \mathbb{Q})$ et $H^*(BG_E; \mathbb{Z})$. Mais cela pose aussi des questions naturelles, qui font l'objet d'une collaboration en cours avec Melissa Liu :

- Une formule similaire à (3.3.18) est-elle possible dans le cas quaternionique ?
- Une formule similaire à (3.3.18) est-elle possible pour la cohomologie à coefficients rationnels ?

La réponse à chacune des ces question semble assez évasive pour l'instant. En particulier, nous sommes encore loin, avec nos techniques actuelles, d'une formule *motivique* permettant le calcul de la cohomologie rationnelle *du lieu réel* des champs de modules de fibrés. Dans [BGL94], Bifet, Ghione et Letizia ont développé un analogue algèbro-géométrique des constructions arithmétiques de Harder et Narasimhan ([HN75]) et de l'approche équivariante d'Atiyah et Bott ([AB83]). Leur construction fonctionne pour un corps algébriquement clos et il serait intéressant de savoir ce qu'il advient lorsque l'on prend \mathbb{R} comme corps de base.

5.2.2. Variétés réelles maximales et Galois-maximales. — Comme expliqué dans le Théorème 1.19, les variétés de modules de fibrés réels de rang 2 et de degré 1 sur une courbe réelle maximale fournissent des exemples nouveaux de variétés réelles maximales, y compris en dimension petite⁽¹⁾. Comme les nombres de Hodge de la partie complexe de ces variétés ont été calculés par R. Earl et F. Kirwan ([EK00]), les espaces de modules de fibrés vectoriels constituent une série d'exemples sur lesquels étudier la validité et la précision des conjectures de Viro, qui jouent un rôle moteur en géométrie réelle (voir par exemple [Man17]). Les premières vérifications effectuées en ce sens sont assez probantes et pourraient s'avérer fécondes. Au passage, le rôle important joué par la géométrie tropicale dans les problèmes de géométrie énumérative réelle au cours des dernières décennies constitue une incitation à déterminer la *tropicalisation* des espaces de modules de fibrés sur les courbes algébriques, comme cela a été fait pour les espaces de modules de courbes ([ACP15]).

Pour en revenir aux variétés maximales, s'il est peu probable pour l'instant que nous parvenions à démontrer, directement à partir de la formule fermée de [LS13], que les espaces de modules de fibrés vectoriels réels de rang quelconque et de degré premier au rang sur une courbe réelle maximale sont eux-mêmes *toujours* des variétés maximales, il semble faisable de s'attaquer à une notion plus faible de

1. Dimension 5 si l'on se place sur une courbe de genre 2 et même 3 si l'on fixe le déterminant dans ce cas ; en genre 3 on trouve respectivement 9 et 6. Pour des fibrés de rang 3 au-dessus d'une courbe de genre 2, la dimension de l'espace des modules est 10 et elle est égale à 8 si l'on fixe le déterminant.

maximalité qui est celle de Galois-maximalité. Sans rentrer ici dans les détails, il s’agit concrètement de montrer que le groupe de Galois agit trivialement sur la cohomologie modulo 2 du lieu complexe de ces variétés de modules. Pour cela, il suffit de disposer de générateurs de cette cohomologie et de comprendre l’action de Galois sur ces générateurs, ce qui fait l’objet d’une collaboration en cours avec Melissa Liu.

5.2.3. La formule de Laumon et Rapoport sur le corps des réels. — Lorsque l’on travaille avec des groupes algébriques définis sur \mathbb{R} , la notion de filtration de Harder-Narasimhan de Harder-Narasimhan peut s’avérer difficile à manipuler lorsque le groupe n’est pas déployé. N.K. Ho et C.C.M. Liu ont par exemple montré dans [HL08, HL11] que, pour la forme réelle $g \mapsto {}^t \bar{g}^{-1}$ de $\mathbf{GL}(r; \mathbb{C})$, les strates de Harder-Narasimhan des espaces de fibrés de degré 0 n’étaient *pas* préservées par l’action de Galois (à l’exception de la strate semistable). Du point de vue conceptuel, il s’agit de réduire le groupe de structure d’un \mathcal{G} -torseur \mathcal{E} à un sous-espace en groupes *parabolique*, défini lui aussi sur \mathbb{R} . C’est ce dernier point qui pose éventuellement problème dès que \mathcal{G} n’est pas supposé quasi-déployé et j’ignore s’il est toujours possible de se ramener à ce cas.

Les travaux de K. Behrend ([Beh95]) et J. Heinloth ([Hei08]), combinés aux résultats de Ho et Liu ([HL08, HL09, HL11]) constituent un point de départ naturel pour étudier ces questions, l’objectif étant d’obtenir une formule fermée, à la Laumon-Rapoport ([LR96]) pour les séries de Poincaré des espaces de modules de fibrés principaux réels. On s’attend en particulier à pouvoir donner ainsi une interprétation géométrique de la formule *fermée* obtenue dans [LS13] et qui correspond au cas du groupe déployé \mathbf{GL}_r/\mathbb{R} .

5.3. Espaces de Teichmüller supérieurs pour les orbifolds

5.3.1. Composantes de Hitchin pour des groupes déployés à centre non trivial. — Dans [ALS18], nous avons étudié les composantes de Hitchin pour les représentations de groupes fondamentaux orbifolds dans des groupes de Lie réels de type $\mathbf{PGL}(n; \mathbb{R})$, laissant de côté d’autres groupes avec la même algèbre de Lie mais à centre non trivial, comme par exemple

$$\mathbf{SL}^\pm(n; \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(n; \mathbb{R}) \mid \det A = \pm 1\}.$$

L’obstruction à faire cela n’est pas à chercher du côté des fibrés de Higgs (la théorie générale fonctionne très bien pour $\mathbf{SL}^\pm(n; \mathbb{R})$, comme nous avons pu le voir dans le Chapitre 2), mais plutôt du côté des structures géométriques sur les orbifolds.

Dans le cas des groupes de surfaces, une représentation fuchsienne à valeurs dans $\mathbf{SL}(n; \mathbb{R})$ doit, par définition, provenir d’une représentation fidèle et discrète du π_1 à valeurs dans $\mathbf{SL}(2; \mathbb{R})$, c’est-à-dire d’une *structure spin* sur la surface ([Hit92]). Une telle structure n’existe pas toujours sur un orbifold. En fait, pour un groupe fini Γ agissant par automorphismes sur une surface de Riemann X , il n’existe en général pas de structure spin Γ -invariante sur X ([KS10]). Long et Thistlethwaite ont trouvé dans [LT19] une manière ingénieuse de contourner le problème et l’ont appliqué aux représentations de groupes de triangles orientables dans $\mathbf{SL}(n; \mathbb{R})$. Il est permis de penser que cette approche est généralisable à un orbifold quelconque et peut être combiné aux techniques analytiques de [ALS18] pour déterminer la topologie et la dimension des composantes de Hitchin (généralisées) associées. L’interprétation géométrique des représentations ainsi obtenues, ainsi que leurs éventuelles propriétés de discrétude et de fidélité restent pour l’instant conjecturales mais devraient découler de techniques dynamiques (représentations Anosov) et à la Fock-Goncharov ([FG06]) par passage à un revêtement fini.

5.3.2. Composantes maximales. — Dans un travail en cours avec Daniele Alessandrini et Gye-Seon Lee, nous abordons la notion de *représentation maximale* pour les groupes fondamentaux orbifolds. L’inégalité de Milnor-Wood attendue se déduit du cas des groupes de surface par passage à un revêtement fini mais il n’est ensuite pas clair que les représentations maximales du groupe fondamental d’un orbifold Y soient exactement les points fixes sous l’action du groupe d’automorphismes d’un revêtement fini $X \rightarrow Y$ sur les représentations maximales de $\pi_1 X$. Pour les composantes de Hitchin, nous utilisons la paramétrisation par les différentielles analytiques pour montrer cela. Et nous ne disposons pas d’une telle paramétrisation pour les composantes maximales, sauf dans le cas du groupe $\mathbf{PSp}(4; \mathbb{R})$, grâce aux travaux de D. Alessandrini et B. Collier ([AC19]). Nous pensons pouvoir, avec Daniele et Gye-Seon, adapter cette approche au cas orbifold. Mais les détails techniques restent à fournir. Une question ouverte est de savoir si nous pourrions obtenir ainsi des exemples de composantes *compactes*, non réduites à un

point et constituées de classes d'équivalence de représentations fidèles et discrètes. Dans le cas des groupes de Coxeter, cette question est reliée à des travaux d'Yves Benoist sur les déformations de structures projectives convexes en petite dimension (voir par exemple le *survey* [CLM18]).

5.3.3. Représentations positives et composantes exotiques. — La classification des espaces de Teichmüller supérieurs au sens de Wienhard (Définition 4.1) n'est pas encore connue. Mais le cas orbifold est susceptible d'éclairer d'un jour nouveau ces mystérieuses composantes, notamment en fournissant des exemples en petite dimension, qui parfois se plongent dans l'espace de Teichmüller supérieur correspondant sur un revêtement fini quelconque. Les travaux d'Olivier Guichard et Anna Wienhard sur la positivité ([GW18]) et ceux d'Aparicio *et al.* sur les composantes de Teichmüller exotiques ([AABC⁺19]) constituent à cet égard une grande source de motivation pour développer le cas orbifold dans ce cadre général. Mais même pour les composantes de Hitchin, de nombreux aspects restent à explorer. J'espère avoir bientôt l'occasion de revenir sur ce point.

BIBLIOGRAPHIE

- [AABC⁺19] M. APARICIO-ARROYO, S. BRADLOW, B. COLLIER, O. GARCÍA-PRADA, P. GOTHEN & A. OLIVEIRA – « $\mathbf{SO}(p, q)$ -Higgs bundles and higher Teichmüller components », *Invent. Math.* **218** (2019), no. 1, p. 197–299.
- [AB83] M. F. ATIYAH & R. BOTT – « The Yang-Mills equations over Riemann surfaces », *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **308** (1983), no. 1505, p. 523–615.
- [Abr05] D. ABRAMOVIC – « Lectures on Gromov-Witten invariants of orbifolds », <https://arxiv.org/abs/math/0512372>, 2005.
- [AC19] D. ALESSANDRINI & B. COLLIER – « The geometry of maximal components of the $\mathbf{PSp}(4, \mathbb{R})$ character variety », *Geom. Topol.* **23** (2019), no. 3, p. 1251–1337.
- [ACP15] D. ABRAMOVICH, L. CAPORASO & S. PAYNE – « The tropicalization of the moduli space of curves », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **48** (2015), no. 4, p. 765–809.
- [AG71] N. L. ALLING & N. GREENLEAF – *Foundations of the theory of Klein surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 219, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [AG06] J. E. ANDERSEN & J. GROVE – « Automorphism fixed points in the moduli space of semi-stable bundles », *Q. J. Math.* **57** (2006), no. 1, p. 1–35.
- [AHLH18] J. ALPER, D. HALPERN-LEISTNER & J. HEINLOTH – « Existence of moduli spaces for algebraic stacks », <https://arxiv.org/abs/1812.01128>, 2018.
- [Alp13] J. ALPER – « Good moduli spaces for Artin stacks », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **63** (2013), no. 6, p. 2349–2402.
- [ALS18] D. ALESSANDRINI, G. S. LEE & F. SCHAFFHAUSER – « Hitchin components for orbifolds », arxiv 1811.05366, 2018, soumis.
- [AMM98] A. ALEKSEEV, A. MALKIN & E. MEINRENKEN – « Lie group valued moment maps », *J. Differential Geom.* **48** (1998), no. 3, p. 445–495.
- [Amr14a] S. AMRUTIYA – « Connections on real parabolic bundles over a real curve », *Bull. Korean Math. Soc.* **51** (2014), no. 4, p. 1101–1113.
- [Amr14b] ———, « Real parabolic vector bundles over a real curve », *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **124** (2014), no. 1, p. 17–30.
- [Ati57a] M. F. ATIYAH – « Complex analytic connections in fibre bundles », *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), p. 181–207.
- [Ati57b] ———, « Vector bundles over an elliptic curve », *Proc. London Math. Soc. (3)* **7** (1957), p. 414–452.

- [Ati66] ———, « K -theory and reality », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **17** (1966), p. 367–386.
- [Bai10] T. J. BAIRD – « Moduli spaces of flat $SU(2)$ -bundles over non-orientable surfaces », *Q. J. Math.* **61** (2010), no. 2, p. 141–170.
- [Bai14] ———, « Moduli spaces of vector bundles over a real curve : $\mathbb{Z}/2$ -Betti numbers », *Canad. J. Math.* **66** (2014), no. 5, p. 961–992.
- [Bar15] D. BARAGLIA – « Cyclic Higgs bundles and the affine Toda equations », *Geom. Dedicata* **174** (2015), p. 25–42.
- [BCLS15] M. BRIDGEMAN, R. CANARY, F. LABOURIE & A. SAMBARINO – « The pressure metric for Anosov representations », *Geom. Funct. Anal.* **25** (2015), no. 4, p. 1089–1179.
- [BCLS18] ———, « Simple root flows for Hitchin representations », *Geom. Dedicata* **192** (2018), p. 57–86.
- [Beh95] K. BEHREND – « Semi-stability of reductive group schemes over curves », *Math. Ann.* **301** (1995), no. 2, p. 281–305.
- [BGL94] E. BIFET, F. GHIONE & M. LETIZIA – « On the Abel-Jacobi map for divisors of higher rank on a curve », *Math. Ann.* **299** (1994), no. 4, p. 641–672.
- [BGP15] I. BISWAS & O. GARCÍA-PRADA – « Anti-holomorphic involutions of the moduli spaces of Higgs bundles », *J. Éc. polytech. Math.* **2** (2015), p. 35–54.
- [BGPH14] I. BISWAS, O. GARCÍA-PRADA & J. HURTUBISE – « Pseudo-real principal Higgs bundles on compact Kähler manifolds », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **64** (2014), no. 6, p. 2527–2562.
- [BHH10] I. BISWAS, J. HUISMAN & J. HURTUBISE – « The moduli space of stable vector bundles over a real algebraic curve », *Math. Ann.* **347** (2010), no. 1, p. 201–233.
- [BIPP19] M. BURGER, A. IOZZI, A. PARREAU & B. POZZETTI – « Currents, systoles and compactifications of character varieties », arXiv 1902.07680, 2019.
- [Bir71] D. BIRKES – « Orbits of linear algebraic groups », *Ann. of Math. (2)* **93** (1971), p. 459–475.
- [Bis97] I. BISWAS – « Parabolic bundles as orbifold bundles », *Duke Math. J.* **88** (1997), no. 2, p. 305–325.
- [Boa11] P. BOALCH – « Riemann-Hilbert for tame complex parahoric connections », *Transform. Groups* **16** (2011), no. 1, p. 27–50.
- [Boa14] ———, « Geometry and braiding of Stokes data ; fission and wild character varieties », *Ann. of Math. (2)* **179** (2014), no. 1, p. 301–365.
- [Boa19] ———, « Topology of the Stokes phenomenon », arXiv 1903.12612, 2019.
- [Bod91] H. U. BODEN – « Representations of orbifold groups and parabolic bundles », *Comment. Math. Helv.* **66** (1991), no. 3, p. 389–447.
- [Bor53] A. BOREL – « La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes », *Comment. Math. Helv.* **27** (1953), p. 165–197.
- [Bot56] R. BOTT – « An application of the Morse theory to the topology of Lie groups », *Bull. Soc. Math. France* **84** (1956), p. 251–281.
- [Bot58] ———, « The space of loops on a lie group », *Michigan Math. J.* **5** (1958), no. 1, p. 35–61.
- [BS15] V. BALAJI & C. S. SESHADRI – « Moduli of parahoric \mathcal{G} -torsors on a compact Riemann surface », *J. Algebraic Geom.* **24** (2015), no. 1, p. 1–49.

- [BS16] I. BISWAS & F. SCHAFFHAUSER – « Vector bundles over a real elliptic curve », *Pacific J. Math.* **283** (2016), no. 1, p. 43–62.
- [BS18] ———, « Parabolic vector bundles on Klein surfaces », <https://arxiv.org/abs/1806.09782>, 2018, To appear in *Illinois J. Math.*
- [BY15] P. BOALCH & D. YAMAKAWA – « Twisted wild character varieties », arXiv 1512.08091, 2015.
- [CG05] S. CHOI & W. M. GOLDMAN – « The deformation spaces of convex $\mathbb{R}P^2$ -structures on 2-orbifolds », *Amer. J. Math.* **127** (2005), no. 5, p. 1019–1102.
- [CJ98] M. CRABB & I. JAMES – *Fibrewise homotopy theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London Ltd., London, 1998.
- [CL17] B. COLLIER & Q. LI – « Asymptotics of Higgs bundles in the Hitchin component », *Adv. Math.* **307** (2017), p. 488–558.
- [CLM18] S. CHOI, G. S. LEE & L. MARQUIS – « Deformations of convex real projective manifolds and orbifolds », in *Handbook of group actions. Vol. III*, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 40, Int. Press, Somerville, MA, 2018, p. 263–310.
- [Col16] B. COLLIER – *Finite order automorphisms of Higgs Bundles : Theory and application*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2016, Thesis (Ph.D.)–University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [Cor88] K. CORLETTE – « Flat G -bundles with canonical metrics », *J. Differential Geom.* **28** (1988), no. 3, p. 361–382.
- [CP18] L. A. CALVO-PASCUAL – « Augmented bundles and real structures », <https://arxiv.org/abs/math/0512372>, 2018, Thesis (Ph.D.), UAM-ICMAT.
- [Cre13] R. CRETOIS – « Automorphismes réels d’un fibré et opérateurs de Cauchy-Riemann », *Math. Z.* **275** (2013), no. 1-2, p. 453–497.
- [Das92] G. D. DASKALOPOULOS – « The topology of the space of stable bundles on a compact Riemann surface », *J. Differential Geom.* **36** (1992), no. 3, p. 699–746.
- [DL18] S. DAI & Q. LI – « On cyclic Higgs bundles », *Math. Ann.* (2018), p. 1–36, <https://doi.org/10.1007/s00208-018-1779-4>.
- [Don83] S. K. DONALDSON – « A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 2, p. 269–277.
- [Don87] ———, « Twisted harmonic maps and the self-duality equations », *Proc. London Math. Soc.* (3) **55** (1987), no. 1, p. 127–131.
- [DR75] U. V. DESALE & S. RAMANAN – « Poincaré polynomials of the variety of stable bundles », *Math. Ann.* **216** (1975), no. 3, p. 233–244.
- [DR77] ———, « Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves », *Invent. Math.* **38** (1976/77), no. 2, p. 161–185.
- [Dup69] J. L. DUPONT – « Symplectic bundles and KR -theory », *Math. Scand.* **24** (1969), p. 27–30.
- [EK00] R. EARL & F. KIRWAN – « The Hodge numbers of the moduli spaces of vector bundles over a Riemann surface », *Q. J. Math.* **51** (2000), no. 4, p. 465–483.
- [Fal83] G. FALTINGS – « Real projective structures on Riemann surfaces », *Compositio Math.* **48** (1983), no. 2, p. 223–269.
- [FG06] V. FOCK & A. GONCHAROV – « Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2006), no. 103, p. 1–211.

- [FGOPN17] E. FRANCO, P. GOTHEN, A. OLIVEIRA & A. PEÓN-NIETO – « Unramified covers and branes on the Hitchin system », <https://arxiv.org/abs/1709.03549>, 2017.
- [FJM17] E. FRANCO, M. JARDIM & S. MARCHESI – « Branes in the moduli space of framed sheaves », *Bull. Sci. Math.* **141** (2017), no. 4, p. 353–383.
- [FMW98] R. FRIEDMAN, J. W. MORGAN & E. WITTEN – « Principal G -bundles over elliptic curves », *Math. Res. Lett.* **5** (1998), no. 1-2, p. 97–118.
- [FPN17] E. FRANCO & A. PEÓN-NIETO – « The Borel subgroup and branes on the Higgs moduli space », <https://arxiv.org/abs/1709.03549>, 2017.
- [FS92] M. FURUTA & B. STEER – « Seifert fibred homology 3-spheres and the Yang-Mills equations on Riemann surfaces with marked points », *Adv. Math.* **96** (1992), no. 1, p. 38–102.
- [FW06] E. FALBEL & R. A. WENTWORTH – « Eigenvalues of products of unitary matrices and Lagrangian involutions », *Topology* **45** (2006), no. 1, p. 65–99.
- [GH81] B. GROSS & J. HARRIS – « Real algebraic curves », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **14** (1981), no. 2, p. 157–182.
- [Gol88a] W. M. GOLDMAN – « Geometric structures on manifolds and varieties of representations », in *Geometry of group representations (Boulder, CO, 1987)*, Contemp. Math., vol. 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, p. 169–198.
- [Gol88b] ———, « Topological components of spaces of representations », *Invent. Math.* **93** (1988), no. 3, p. 557–607.
- [Gra56] H. GRAUERT – « Généralisation d’un théorème de Runge et application à la théorie des espaces fibrés analytiques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **242** (1956), p. 603–605.
- [Gre71] N. GREENLEAF – « Analytic sheaves on Klein surfaces », *Pacific J. Math.* **37** (1971), p. 671–675.
- [Gro55] A. GROTHENDIECK – « A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf », University of Kansas, Report No. 4, 1955, <http://www.grothendieckcircle.org>.
- [Gro57] ———, « Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann », *Amer. J. Math.* **79** (1957), p. 121–138.
- [Gro58] ———, « Sur le mémoire de Weil. Généralisation des fonctions abéliennes », in *Séminaire Bourbaki : années 1956/57 - 1957/58, exposés 137-168*, Séminaire Bourbaki, no. 4, Société mathématique de France, 1958, talk :141, p. 57–71 (fr).
- [GW08] O. GUICHARD & A. WIENHARD – « Convex foliated projective structures and the Hitchin component for $\mathrm{PSL}(4, \mathbf{R})$ », *Duke Math. J.* **144** (2008), no. 3, p. 381–445.
- [GW18] O. GUICHARD & A. WIENHARD – « Positivity and higher Teichmüller theory », in *European Congress of Mathematics*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2018, p. 289–310.
- [Hei08] J. HEINLOTH – « Semistable reduction for G -bundles on curves », *J. Algebraic Geom.* **17** (2008), no. 1, p. 167–183.
- [Hei17] ———, « Hilbert-Mumford stability on algebraic stacks and applications to \mathcal{G} -bundles on curves », *Épjournal Geom. Algébrique* **1** (2017), p. Art. 11, 37.
- [Hel78] S. HELGASON – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 80, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [Hit87a] N. J. HITCHIN – « Stable bundles and integrable systems », *Duke Math. J.* **54** (1987), no. 1, p. 91–114.

- [Hit87b] ———, « The self-duality equations on a Riemann surface. », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **55** (1987), p. 59–126.
- [Hit92] ———, « Lie groups and Teichmüller space », *Topology* **31** (1992), no. 3, p. 449–473.
- [HL03] N. K. HO & C. C. M. LIU – « Connected components of the space of surface group representations », *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 44, p. 2359–2372.
- [HL05] ———, « Connected components of spaces of surface group representations. II », *Int. Math. Res. Not.* (2005), no. 16, p. 959–979.
- [HL08] ———, « Yang-Mills connections on nonorientable surfaces », *Comm. Anal. Geom.* **16** (2008), no. 3, p. 617–679.
- [HL09] ———, « Yang-Mills connections on orientable and nonorientable surfaces », *Mem. Amer. Math. Soc.* **202** (2009), no. 948, p. viii+98.
- [HL11] ———, « Antiperfect Morse stratification », *Selecta Math. (N.S.)* **17** (2011), no. 2, p. 505–532.
- [HL13] D. S. HALPERN-LEISTNER – *Geometric invariant theory and derived categories of coherent sheaves*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2013, Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley.
- [HN75] G. HARDER & M. S. NARASIMHAN – « On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves », *Math. Ann.* **212** (1974/75), p. 215–248.
- [Ho04] N. K. HO – « The real locus of an involution map on the moduli space of flat connections on a Riemann surface », *Int. Math. Res. Not.* (2004), no. 61, p. 3263–3285.
- [HS18] S. HELLER & L. P. SCHAPOSNIK – « Branes through finite group actions », *J. Geom. Phys.* **129** (2018), p. 279–293.
- [HS19] V. HOSKINS & F. SCHAFFHAUSER – « Group actions on quiver varieties and applications », *Internat. J. Math.* **30** (2019), no. 2, p. 1950007, 46.
- [HS20] V. HOSKINS & F. SCHAFFHAUSER – « Rational points of quiver moduli spaces », à paraître dans *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 2020, arXiv 1704.08624.
- [HWW18] N. K. HO, G. WILKIN & S. WU – « Hitchin’s equations on a nonorientable manifold », *Comm. Anal. Geom.* **26** (2018), no. 4, p. 857–886.
- [Kah87] B. KAHN – « Construction de classes de Chern équivariantes pour un fibré vectoriel réel », *Comm. Algebra* **15** (1987), no. 4, p. 695–711.
- [Kaw79] T. KAWASAKI – « The Riemann-Roch theorem for complex V -manifolds », *Osaka Math. J.* **16** (1979), no. 1, p. 151–159.
- [Kem78] G. KEMPF – « Instability in invariant theory », *Ann. of Math.* **108** (1978), no. 2, p. 299–316 (English).
- [Kir84] F. C. KIRWAN – *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, vol. 31, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.
- [KN79] G. KEMPF & L. NESS – « The length of vectors in representation spaces », in *Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978)*, Lecture Notes in Math., vol. 732, Springer, Berlin, 1979, p. 233–243.
- [Kos59] B. KOSTANT – « The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group », *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 973–1032.
- [KS10] S. KALLEL & D. SJERVE – « Invariant spin structures on Riemann surfaces », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **19** (2010), no. 3-4, p. 457–477.

- [KW03] M. KAROUBI & C. WEIBEL – « Algebraic and Real K -theory of real varieties », *Topology* **42** (2003), no. 4, p. 715–742.
- [Lab06] F. LABOURIE – « Anosov flows, surface groups and curves in projective space », *Invent. Math.* **165** (2006), no. 1, p. 51–114.
- [Lab17] ———, « Cyclic surfaces and Hitchin components in rank 2 », *Ann. of Math. (2)* **185** (2017), no. 1, p. 1–58.
- [Las98] Y. LASZLO – « About G -bundles over elliptic curves », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1998), no. 2, p. 413–424.
- [Lew63] J. LEWITTES – « Automorphisms of compact Riemann surfaces », *Amer. J. Math.* **85** (1963), p. 734–752.
- [LM85] A. LUBOTZKY & A. R. MAGID – « Varieties of representations of finitely generated groups », *Mem. Amer. Math. Soc.* **58** (1985), no. 336, p. xi+117.
- [LM09] F. LABOURIE & G. MCSHANE – « Cross ratios and identities for higher Teichmüller-Thurston theory », *Duke Math. J.* **149** (2009), no. 2, p. 279–345.
- [LR96] G. LAUMON & M. RAPOPORT – « The Langlands lemma and the Betti numbers of stacks of G -bundles on a curve », *Internat. J. Math.* **7** (1996), no. 1, p. 29–45.
- [LS13] C. C. M. LIU & F. SCHAFFHAUSER – « The Yang-Mills equations over Klein surfaces », *J. Topol.* **6** (2013), no. 3, p. 569–643.
- [LT19] D. D. LONG & M. B. THISTLETHWAITE – « The dimension of the Hitchin component for triangle groups », *Geom. Dedicata* **200** (2019), p. 363–370.
- [Man17] F. MANGOLTE – *Variétés algébriques réelles*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 24, Société Mathématique de France, Paris, 2017.
- [MFK93] D. MUMFORD, J. FOGARTY & F. KIRWAN – *Geometric invariant theory. 3rd enl. ed.*, Berlin : Springer-Verlag, 1993 (English).
- [Mil58] J. MILNOR – « On the existence of a connection with curvature zero », *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), p. 215–223.
- [MS80] V. B. MEHTA & C. S. SESHADRI – « Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures », *Math. Ann.* **248** (1980), no. 3, p. 205–239.
- [Mum63] D. MUMFORD – « Projective invariants of projective structures and applications », in *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, p. 526–530.
- [Nat90] S. M. NATANZON – « Klein surfaces », *Uspekhi Mat. Nauk* **45** (1990), no. 6(276), p. 47–90, 189.
- [NS65] M. S. NARASIMHAN & C. S. SESHADRI – « Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface », *Ann. of Math. (2)* **82** (1965), p. 540–567.
- [NS95a] E. B. NASATYR & B. STEER – « The Narasimhan-Seshadri theorem for parabolic bundles : an orbifold approach », *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **353** (1995), no. 1702, p. 137–171.
- [NS95b] ———, « Orbifold Riemann surfaces and the Yang-Mills-Higgs equations », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **22** (1995), no. 4, p. 595–643.
- [OS00] L. O’SHEA & R. SJAMAAR – « Moment maps and Riemannian symmetric pairs », *Math. Ann.* **317** (2000), no. 3, p. 415–457.

- [OT13] C. OKONEK & A. TELEMAN – « Abelian Yang-Mills theory on real tori and theta divisors of Klein surfaces », *Comm. Math. Phys.* **323** (2013), no. 3, p. 813–858.
- [Pal10] F. PALESI – « Connected components of spaces of representations of non-orientable surfaces », *Comm. Anal. Geom.* **18** (2010), no. 1, p. 195–217.
- [Råd92] J. RÅDE – « On the Yang-Mills heat equation in two and three dimensions », *J. Reine Angew. Math.* **431** (1992), p. 123–163.
- [Ram81] S. RAMANAN – « Orthogonal and spin bundles over hyperelliptic curves », *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **90** (1981), no. 2, p. 151–166.
- [Sch05] F. SCHAFFHAUSER – « Représentations décomposables et sous-variétés lagrangiennes des espaces de modules associés aux groupes de surfaces », Thèse, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, 2005, <http://www.institut.math.jussieu.fr/theses/2005/schaffhauser>.
- [Sch07a] ———, « Representations of the fundamental group of an L -punctured sphere generated by products of Lagrangian involutions », *Canad. J. Math.* **59** (2007), no. 4, p. 845–879.
- [Sch07b] ———, « Un théorème de convexité réel pour les applications moment à valeurs dans un groupe de Lie », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **345** (2007), no. 1, p. 25–30.
- [Sch08] ———, « Decomposable representations and Lagrangian submanifolds of moduli spaces associated to surface groups », *Math. Ann.* **342** (2008), no. 2, p. 405–447.
- [Sch11] ———, « Moduli spaces of vector bundles over a Klein surface », *Geom. Dedicata* **151** (2011), no. 1, p. 187–206.
- [Sch12] ———, « Real points of coarse moduli schemes of vector bundles on a real algebraic curve », *J. Symplectic Geom.* **10** (2012), no. 4, p. 503–534.
- [Sch16] ———, « Lectures on Klein surfaces and their fundamental group », in *Geometry and quantization of moduli spaces*, Adv. Courses Math. CRM Barcelona, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016, p. 67–108.
- [Sch17] ———, « On the Narasimhan-Seshadri correspondence for Real and Quaternionic vector bundles », *J. Differential Geom.* **105** (2017), no. 1, p. 119–162.
- [Sch19a] ———, « Finite group actions on moduli spaces of vector bundles », *Sémin. Théor. Spectr. Géom. (Grenoble)* **34** (2019), p. 33–63.
- [Sch19b] ———, « Symmetric differentials and the dimension of Hitchin components for orbi-curves », à paraître dans Proceedings of the 2019 ISAAC Congress (Aveiro), *Special Session on Complex Geometry*, 2019, arXiv 1911.11370.
- [Sei33] H. SEIFERT – « Topologie Dreidimensionaler Gefasertes Räume », *Acta Math.* **60** (1933), no. 1, p. 147–238.
- [Sel60] A. SELBERG – « On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces », in *Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, p. 147–164.
- [Ser92] J. P. SERRE – *Topics in Galois theory*, Research Notes in Mathematics, vol. 1, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992, Lecture notes prepared by Henri Darmon, with a foreword by Darmon and the author.
- [Ses67] C. S. SESHADRI – « Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface », *Ann. of Math. (2)* **85** (1967), p. 303–336.
- [Ses77] ———, « Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures », *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), no. 1, p. 124–126.

- [Sha77] S. S. SHATZ – « The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles », *Compositio Math.* **35** (1977), no. 2, p. 163–187.
- [Sim88] C. T. SIMPSON – « Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization », *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 4, p. 867–918.
- [Sim90] ———, « Harmonic bundles on noncompact curves », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), no. 3, p. 713–770.
- [Sim92] ———, « Higgs bundles and local systems », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **75** (1992), p. 5–95.
- [Sim94a] ———, « Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1994), no. 79, p. 47–129.
- [Sim94b] ———, « Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1994), no. 80, p. 5–79 (1995).
- [Sim97] ———, « The Hodge filtration on nonabelian cohomology », in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 217–281.
- [SW11] N. SAVELIEV & S. WANG – « On real moduli spaces of holomorphic bundles over M -curves », *Topology Appl.* **158** (2011), no. 3, p. 344–351.
- [Tho65] R. THOM – « Sur l’homologie des variétés algébriques réelles », in *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965, p. 255–265.
- [Thu79] W. THURSTON – *Geometry and topology of 3-manifolds*, Lecture notes, Princeton University, 1979.
- [Tu93] L. TU – « Semistable bundles over an elliptic curve », *Adv. Math.* **98** (1993), no. 1, p. 1–26.
- [Wan93] S. WANG – « Moduli spaces over manifolds with involutions », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 1, p. 119–138.
- [Wan96] ———, « A Narasimhan-Seshadri-Donaldson correspondence over non-orientable surfaces », *Forum Math.* **8** (1996), no. 4, p. 461–474.
- [Wei38] A. WEIL – « Généralisation des fonctions abéliennes », *J. Math. Pur. Appl. (9)* **17** (1938), p. 47–87.
- [Wie18] A. WIENHARD – « An invitation Higher Teichmüller Theory », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. 1*, World Scientific, 2018, p. 1007–1034.
- [Woo71] J. W. WOOD – « Bundles with totally disconnected structure group », *Comment. Math. Helv.* **46** (1971), p. 257–273.
- [Zag96] D. ZAGIER – « Elementary aspects of the Verlinde formula and of the Harder-Narasimhan-Atiyah-Bott formula », in *Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993)*, Israel Math. Conf. Proc., no. 9, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1996, p. 445–462.
- [Zel19] H. ZELACI – « Moduli spaces of anti-invariant vector bundles over curves », *Manuscripta Math.* **160** (2019), no. 1-2, p. 79–97.

L'objet de ce mémoire, rédigé en français excepté l'introduction qui est en anglais, est de présenter les travaux de recherche récents de l'auteur, en vue de l'obtention du diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches. Les principaux thèmes abordés dans le manuscrit sont : (1) La correspondance de Hodge non abélienne orbifold, (2) Les espaces de modules de fibrés vectoriels sur les courbes algébriques réelles et (3) Les espaces de Teichmüller supérieurs pour les groupes fondamentaux orbifolds. Le fil conducteur est l'application des techniques de géométrie complexe à l'étude de la topologie des variétés de représentations de groupes fuchsians.

This memoir, written in French except for the introduction which is in English, contains a presentation of recent research work by the author, in partial fulfillment of the requirements for the degree of *Habilitation à Diriger des Recherches*. The main topics dealt with in the manuscript are : (1) The orbifold Non Abelian Hodge correspondence, (2) Moduli spaces of vector bundles over a real algebraic curve and (3) Higher Teichmüller Spaces for orbifold fundamental groups. The guiding principle is the application of techniques from complex geometry to the study of topological properties of representation varieties of Fuchsian groups.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg
CNRS
IRMA, UMR 7501
7 rue René Descartes
F-67000 STRASBOURG
Tél. 03 68 85 01 29
irma.math.unistra.fr
irma@math.unistra.fr
IRMA 2019/011
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02394282>

IRMA
 Institut de Recherche
 Mathématique Avancée

cnrs

Université
 de Strasbourg