



**HAL**  
open science

# Étude de la diffraction électromagnétique tridimensionnelle par la méthode des intégrales de frontière

Abdelkrim Kedadra

► **To cite this version:**

Abdelkrim Kedadra. Étude de la diffraction électromagnétique tridimensionnelle par la méthode des intégrales de frontière. Energie électrique. Ecole Centrale de Lyon, 1996. Français. NNT: . tel-02356174

**HAL Id: tel-02356174**

**<https://hal.science/tel-02356174>**

Submitted on 8 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée devant

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

pour obtenir

**le grade de DOCTEUR**

Spécialité: Génie Électrique

*(Arrêté du 30/03/1992)*

préparée au sein de

**l'École Doctorale**

*Électronique, Électrotechnique, Automatique de Lyon*

par

**M. Abdelkrim KEDADRA**

---

**Étude de la diffraction électromagnétique tridimensionnelle  
par la méthode des intégrales de frontière**

---

Soutenue le 30 septembre 1996 devant la Commission d'Examen:

M.	G. MEUNIER (INPG)	<i>Président et Rapporteur</i>
Mme	M.-A. GALLAND (ECL)	
et: MM.	L. KRÄHENBÜHL (ECL)	
	A. NICOLAS (ECL)	
	L. NICOLAS (ECL)	
	A. RAZEK (LGEP)	<i>Rapporteur</i>

---

## ABSTRACT

Our work concerns the modeling of electromagnetic diffraction phenomena 3D in micro-wave domain (a band of frequency situated between 300 MHz and 300 GHz). Problems of wave propagation which is an open area (it is necessary to consider the propagation until the infinity) will not be able to be entirely stitch by finite elements. One seeks even to curtail it the most possible because of the number of generated unknowns. It is judicious to find methods that allow to calculate with more economy than the finite element method.

The problem that we consider consists in fact, how an electromagnetic plane wave will be disturbed by an object of any form, it can be conductor, dielectric and/or permeable. Among direct applications, one can quote, among others, the calculation of the radar cross-section (RCS). The modeling will be realized by the Boundary Element Method (B.E.M). This work places in the continuation of realized works currently on numerical methods, whose method of Boundary element is the most recent expression. The developed numerical formulation is incorporated in the software of PHI3D©, realized for the more general simulation of electromagnetic devices in three dimensions.

This method has been chosen among several numerical methods used for the modeling 3D of phenomena of diffraction. It concerns an entire formulation based on the utilization of the Green theorem. Different formulations have been established, for perfect conductor and dielectric objects in harmonic regime, and only for perfect conductor object in temporal regime. The numerical implementation of these discretized equations, by using of surface finite element, conduits to a linear system of small size thanks to a gain of one dimension in the modeling.

Difficulties met in the implementation of this method are singularity and discontinuity. For the resolution of the problem of singularity, different numerical procedures have been tested and validated, so as to make emerge the best of them. The problem of the discontinuity has been processed by using a special elements called semi -discontinuous elements.

Obtained numerical results have been confronted with an analytic results: it concerns the diffraction by a spherical object perfect conductor. The module resulting from our works has been integrated to the PHI3D software.

Contrarily to the finite element method, our method offers the possibility to process with a cheaper cost the 3D microwave modeling electromagnetic diffraction problems essentially when the domain is open. Its large advantage is that it necessitates no approximation for taking into account the infinity.

---

**Keywords :** Boundary Element Method, microwaves, three-dimensional electromagnetic scattering, numerical modeling, singular integral, discontinuous element, spherical functions, far field.

*JE DÉDIE CE TRAVAIL :*

*- À MA PATRIE POUR QUE LA PAIX RÈGNE SUR TOUT SON GRAND TERRITOIRE.*

*- À LA MÉMOIRE DE MES PARENTS;*

*QUE DIEU AIT LEURS ÂMES ET LES ACCUEILLEN EN SON VASTE PARADIS.*

**École Centrale de Lyon:**  
**Liste des personnes habilitées à encadrer des thèses**

A. du 30/03/82 Art. 21 et A. du 23/11/88 - Mise à jour: 1er sept. 1995

**Directeur:** Étienne PASCAUD  
**Directeur Adjoint:** Léo VINCENT  
**Directeur des études:** Jean ROZINOER  
**Directeur Administration de la Recherche:** Francis LEBOEUF

DEPARTEMENT	NOM-PRENOM	FONCTION
ACOUSTIQUE	COMTE-BELLOT Geneviève	PROFESSEUR
	JUVE Daniel	---
	ROGER Michel	---
	GALLAND Marie-Annick	MAITRE DE CONFERENCES
ACOUSTIQUE	BLANC-BENON Philippe	CHARGE DE RECHERCHE CNRS
	SUNYACH Michel	PROFESSEUR IUT LYON I
ELECTRONIQUE LEAME	BLANCHET Robert	PROFESSEUR
	LE HELLEY Michel	---
	HELLOUIN Yves	MAITRE DE CONFERENCES
	VIKTOROVITCH Pierre	DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS
	HOLLINGER Guy	---
	GENDRY Michel	CHARGE DE RECHERCHE CNRS
ELECTRONIQUE LEAME	KRAWCZYK Stanislas	---
	TARDY Jacques	---
ELECTROTECHNIQUE CEGELY	AURIOL Philippe	PROFESSEUR
	NICOLAS Alain	---
	BEROUAL Abderrahmane	MAITRE DE CONFERENCES
	ROJAT Gérard	---
ELECTROTECHNIQUE CEGELY	NICOLAS Laurent	CHARGE DE RECHERCHE CNRS
MACHINES THERMIQUES	ARQUES Philippe	PROFESSEUR
	BRUN Maurice	---
	CHAMPOUSSIN Jean-Claude	---

<p>MATERIAUX MECANIQUE PHYSIQUE</p>	<p>GUIRALDENQ Pierre TREHEUX Daniel VANNES Bernard VINCENT Léo</p> <p>BLANC-BENON Jean BRUGIRARD Jean</p> <p>NGUYEN Du</p> <p>FAYEULLE Serge JUVE Denyse</p>	<p>PROFESSEUR --- --- ---</p> <p>PROFESSEUR LYON I ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS INGENIEUR D'ETUDES</p>
<p>MATHEMATIQUES INFORMATIQUE SYSTEMES</p>	<p>DAVID Bertrand MARION Martine MAITRE Jean-François MOUSSAOUI Mohand Arezki THOMAS Gérard</p> <p>MUSY François ROZINOER Jean</p>	<p>PROFESSEUR --- --- --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES ---</p>
<p>MECANIQUE DES FLUIDES</p>	<p>MATHIEU Jean ALCARAZ Emilio JEANDEL Denis LEBOEUF Francis SCOTT Jean</p> <p>BATAILLE Jean BUFFAT Marc GAY Bernard GENCE Jean-Noël LANCE Michel</p> <p>BEN HADID Hamda HAMADICHE Mahmoud</p> <p>MOREL Robert</p> <p>CAMBON Claude</p> <p>BERTOGLIO Jean-Pierre ESCUDIE Dany FERRAND Pascal HENRY Daniel</p>	<p>PROFESSEUR EMERITE PROFESSEUR --- --- ---</p> <p>PROFESSEUR LYON I --- --- --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES LYON I ---</p> <p>PROFESSEUR INSA</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS --- --- --- ---</p>

<p>MECANIQUE DES SOLIDES</p>	<p>CAMBOU Bernard JEZEQUEL Louis SIDOROFF François</p> <p>SURRY Claude</p>	<p>PROFESSEUR --- ---</p> <p>PROFESSEUR ENISE</p>
<p>PHYSICOCHIMIE DES INTERFACES</p>	<p>CLECHET Paul JOSEPH Jacques MARTELET Claude MARTIN Jean-René PORTE Louis</p> <p>ROBACH Yves STREMSDOERFER Guy</p> <p>JAFFREZIC Nicole</p> <p>SOUTEYRAND Elyane</p>	<p>PROFESSEUR --- --- --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES ---</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS</p>
<p>PHOTACATALYSE</p>	<p>PICHAT Pierre HERRMANN Jean-Marie HOANG-VAN Can</p>	<p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS ---</p>
<p>TRIBOLOGIE ET DYNAMIQUE DES SYSTEMES</p>	<p>GEORGES Jean-Marie SABOT Jean MARTIN Jean-Michel</p> <p>DONNET Christophe</p> <p>MATHIA Thomas KAPSA Philippe</p> <p>LOUBET Jean-Luc MAZUYER Denis</p> <p>LE BOSSE Jean-Claude</p> <p>LOPEZ Jacques</p> <p>ROUSSEAU Jacques</p>	<p>PROFESSEUR --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS ---</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES INSA</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES UCB</p> <p>PROFESSEUR ENISE</p>

## **REMERCIEMENTS**

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Alain NICOLAS, pour m'avoir accueilli au Centre de Génie électrique de Lyon, et pour m'avoir permis d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions.

Je tiens à remercier Messieurs Laurent NICOLAS et Olivier FABRÈGUE de leur collaboration pour l'aboutissement de ce travail.

Les discussions que j'ai eues avec Monsieur Laurent KRÄHENBÜHL m'ont été d'un précieux secours; il a également réalisé la mise en forme du manuscrit avant le tirage définitif: qu'il en soit ici remercié !

Je remercie Madame M.-A. GALLAND, ainsi que Messieurs A. RAZEK et G. MEUNIER, qui ont bien voulu me faire l'honneur de participer au Jury.

Mes remerciements s'adressent également à tous les gens et amis qui m'ont aidé à mener à bien ce travail, et spécialement à ma femme.

Enfin, je suis reconnaissant à tout le personnel du Département, au service bibliographique, et à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail.



# TABLE DES MATIÈRES

<i>Liste des personnels autorisés à encadrer des thèses</i>	I
<i>Remerciements</i>	IV
<i>Tables des matières</i>	V
<i>Résumés (en français et en anglais)</i>	VII
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : LES MÉTHODES NUMÉRIQUES UTILISÉES DANS LA DIFFRACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE</b>	<b>5</b>
I - 1. HISTORIQUE ET GENERALITÉS.	5
I - 2. LA MÉTHODE DES MULTIPLES MULTIPÔLES.	8
I - 3. LA MÉTHODE DES MOMENTS.	8
I - 4. LA THÉORIE GÉOMETRIQUE DE LA DIFFRACTION.	10
I - 5. LES FORMULATIONS ITÉRATIVES ET HYBRIDES.	12
I - 6. LA FORMULATION EN DIFFERENCES FINIES.	13
I - 7. LA FORMULATION EN ÉLÉMENTS FINIS.	14
I - 8. LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FRONTIÈRE.	15
I - 9. SYNTHÈSE DES NOUVELLES APPROCHES.	16
I - 9.1. Les techniques de résolution directe dans le domaine temporel.	17
I - 9.2. Les techniques de résolution directe dans le domaine harmonique.	18
I - 10. COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉTHODES.	19
I - 10.1. Leurs avantages.	19
I - 10.2. Leurs inconvénients.	21
I - 11. CONCLUSION.	23
<b>CHAPITRE II : FORMULATION DU PROBLÈME DE DIFFRACTION ÉLECTRO- MAGNÉTIQUE EN 3D PAR LES É. I. F.</b>	<b>25</b>
II - 1. LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DANS LA THÉORIE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME.	26
II - 1.1. Provenance des équations intégrales en régime harmonique.	26
II - 1.2. Représentation intégrale des champs électromagnétiques.	29
II - 2. CAS SPÉCIAUX DE DIFFRACTION.	29
II - 2.1. Diffraction par un objet conducteur parfait.	34
II - 2.2. Diffraction par un objet diélectrique.	36
II - 3. LA FORMULATION INTÉGRALE EN RÉGIME TEMPOREL ...	39
II - 4. CONCLUSION.	42
<b>CHAPITRE III : DÉVELOPPEMENT NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉ- GRALES POUR LA DIFFRACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE</b>	<b>43</b>
III - 1. LE RÉGIME HARMONIQUE.	44
III - 1.1. Cas d'un objet conducteur parfait.	44
III - 1.2. Cas d'un objet diélectrique.	47
III - 2. LE RÉGIME TEMPOREL.	48
III - 3. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES ...	50
III - 3.1. Traitement de l'intégrale singulière.	51
III - 3.2. Traitement de la discontinuité.	54
III - 4. CONCLUSION.	60

<b>CHAPITRE IV VALIDATION DES CALCULS NUMÉRIQUES</b>	<b>61</b>
IV - 1. APERÇU GÉNÉRAL DU LOGICIEL PHI3D.	62
IV - 2. LA SOLUTION ANALYTIQUE OBTENUE DANS LE CAS DE LA DIFFRACTION PAR UNE SPHÈRE CONDUCTRICE.	66
IV- 2.1. Présentation du problème.	66
IV- 2.2. Les expressions analytiques des champs et des courants.	66
IV- 2.3. Convergence de la solution analytique en fonction de l'ordre des fonctions de Bessel et de Legendre.	72
IV - 3. LA SOLUTION NUMÉRIQUE OBTENUE DANS LE CAS DE DIFFRACTION PAR UNE SPHÈRE CONDUCTRICE.	75
IV- 3.1. Choix de la méthode de traitement de la singularité pour le schéma quadratique.	75
IV- 3.2. Influence du maillage.	77
IV- 3.3. Le temps CPU.	82
IV - 4. DÉTERMINATION DU CHAMP DIFFRACTÉ À L'EXTÉRIEUR D'UN OBJET PARFAITEMENT CONDUCTEUR.	86
IV- 4.1. Calcul du champs proche pour le cas d'un objet sphérique.	87
IV- 4.2. Calcul du champ lointain pour le cas d'un objet sphérique.	89
IV - 5. EXEMPLE DE LA DIFFRACTION PAR UN CYLINDRE PARFAITEMENT CONDUCTEUR.	90
IV - 6. CONCLUSION.	92
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES</b>	<b>93</b>
<b>ANNEXE 1    RAPPEL DU CONCEPT DES ÉQUATIONS DE MAXWELL</b>	<b>95</b>
<b>ANNEXE 2    FONCTIONS ET POTENTIELS UTILISÉES</b>	<b>98</b>
A - LES FONCTIONS SPHÉRIQUES DE BESSEL	98
B - LES FONCTIONS ASSOCIÉES AU POLYNÔME DE LEGENDRE	102
C - LES EXPRESSIONS DE CHAMPS DUS AUX VECTEURS POTENTIELS A ET F	105
C.1. DÉFINITION DU POTENTIEL VECTEUR A.	105
C.2. DÉFINITION DU POTENTIEL VECTEUR F.	106
C.3. CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE CHAMPS.	107
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>113</b>
<i>Autorisation de soutenance</i>	<i>IX</i>

---

## RÉSUMÉ

Ce travail concerne la modélisation des phénomènes de diffraction électromagnétique 3D en hyperfréquences (bande des fréquences situées entre 300 MHz et 300 GHz). Nous cherchons à calculer les propagations d'ondes dans un domaine ouvert (jusqu'à l'infini) qui ne pourra être entièrement maillé en éléments finis. On cherche même à le tronquer le plus possible pour limiter le nombre d'inconnues générées: il est donc judicieux de trouver des méthodes qui permettent de calculer avec plus d'économie que la méthode des éléments finis.

Le problème que nous considérons consiste en fait à savoir comment une onde électromagnétique plane sera perturbée par un objet de forme quelconque, qui peut être conducteur, diélectrique et/ou perméable. Parmi les applications directes, on peut citer le calcul de la "section-radar". La modélisation est réalisée par la méthode des équations intégrales de frontière (*Boundary Element Method*). La formulation numérique développée est incorporée dans le logiciel de Conception Assistée par Ordinateur PHI3D®, dédié jusqu'ici à la simulation des dispositifs électromagnétiques 3D en statique ou quasi-statique.

Après avoir discuté les raisons du choix de cette méthode basée sur l'utilisation du théorème de Green nous en établissons différentes formulations, pour les objets conducteurs parfaits et les objets diélectriques en régime harmonique, et pour les objets conducteurs parfaits en régime temporel. La mise en oeuvre numérique de ces équations, discrétisées en utilisant des éléments finis de surface, conduit à un système linéaire de petite taille grâce au gain d'une dimension dans la modélisation.

Les difficultés rencontrées dans la mise en oeuvre de cette méthode sont les problèmes de singularité et de discontinuité. Pour la résolution du problème de singularité, différentes procédures numériques ont été testées et validées, afin de faire ressortir la meilleure d'entre elles. Le problème de la discontinuité a été traité en utilisant des éléments spéciaux appelés éléments semi-discontinus.

Les résultats numériques obtenus ont été confrontés à des résultats analytiques : il s'agit de la diffraction par un objet sphérique conducteur parfait. Le grand avantage de cette méthode est qu'elle permette la prise en compte exacte de l'infini: les résultats obtenus peuvent aussi servir de référence pour des méthodes de frontières absorbantes.

---

**Mots clés :** équations intégrales de frontières, hyperfréquences, micro-ondes, diffraction électromagnétique tridimensionnelle, modélisation numérique, intégrale singulière, éléments discontinus, fonctions sphériques, champ lointain.

## **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

Dans de nombreux domaines, et en particulier pour les systèmes électromagnétiques, les avancées technologiques dépendent des analyses et des synthèses des ingénieurs et des physiciens. On peut citer les télécommunications, les surveillances radars, les études géophysiques, les diagnostics médicaux et thérapeutiques, les systèmes de défense stratégique, le contrôle et la compréhension des phénomènes de radiation, de diffraction et de pénétration des ondes électromagnétiques. L'introduction de l'outil informatique pour la résolution des équations de Maxwell liées à ces systèmes électromagnétiques a permis récemment des avancées importantes.

Les premiers développements de la modélisation électromagnétique sont dus à la curiosité intellectuelle concernant les implications de la théorie de Maxwell (1873), qui relia les champs électrique et magnétique. Cette curiosité s'est accrue après la vérification de cette théorie par Hertz qui a prévu en 1880 la possibilité de propagation de l'énergie électromagnétique sans les habituels fils conducteurs. On concentra dans un premier temps les recherches sur la résolution analytique des équations de Maxwell liées aux différents problèmes de diffraction. La plus grande partie de la théorie du phénomène de diffraction fut développée durant les cinquante années avant la deuxième guerre mondiale. Ensuite, la théorie géométrique de la diffraction fut formulée et élaborée à partir de la théorie de la géométrie optique. Cependant, les chercheurs ont essayé d'avancer vers des techniques permettant l'analyse des problèmes d'interactions électromagnétiques complexes. D'où la naissance des modèles mathématiques basés sur des formulations en équations intégrales, ainsi que sur des transformations des opérateurs d'équations à des formes matricielles plus maniables, nommées Méthodes des Moments (MOM).

Actuellement, l'emploi des méthodes numériques dans la conception des machines et appareillages électriques connaît un grand développement. En effet, durant plusieurs décennies, des méthodes de calcul de champ par différences finies, puis par éléments finis, furent proposées et explorées par de nombreux chercheurs. Cependant, leur utilisation industrielle demeurait quelque peu marginale. L'extension récente des performances des ordinateurs de grande puissance et l'amélioration des possibilités des logiciels ont permis depuis peu l'implantation de ces méthodes en association avec des logiciels de communication entre le concepteur et la machine. En tenant compte de cette évolution, les recherches actuelles s'orientent vers la construction de véritables systèmes de Conception Assistée par Ordinateur, basés sur l'introduction des méthodes numériques pour le calcul de champ.

Notre travail concerne la modélisation des phénomènes de diffraction électromagnétique 3D en *hyperfréquences*. Ce dernier terme désigne *une bande de fréquence* située entre 300 MHz et 300 GHz. Le terme *micro-ondes* (qui est une traduction de l'anglais *microwaves*) est également employé. Il dénote la petitesse des longueurs d'ondes par rapport à celles dont on fait usage en radiodiffusion. Les problèmes de propagation d'onde concernent par définition un domaine ouvert (il faut considérer la propagation jusqu'à l'infini) qui ne pourra être entièrement maillé en éléments finis. On cherche même à le tronquer le plus possible à cause du nombre d'inconnues générées, car des études précédentes ont montré que 10 noeuds de maillage par longueur d'onde ( $\lambda$ ) étaient nécessaires pour donner des résultats précis : par exemple un petit problème de  $3\lambda \times 3\lambda \times 3\lambda$  (c.à.d. de  $(30 \text{ cm})^3$  à  $f = 3 \text{ GHz}$ ) présentant 3 inconnues par noeud, nécessite donc  $30 \times 30 \times 30$ , c'est à dire 81 000 inconnues complexes. Il est judicieux de trouver des méthodes qui permettent de calculer avec plus d'économie que la méthode des éléments finis.

Le problème que nous considérons consiste en fait à savoir comment une onde électromagnétique plane sera perturbée par un objet de forme quelconque, qui peut être conducteur, diélectrique et/ou perméable. Parmi les applications directes, on peut citer, entre autres, le calcul de la section-radar. La modélisation sera réalisée par la méthode des équations intégrales de frontière (« B.E.M. »: Boundary Element Method). Ce travail se place dans le prolongement des travaux réalisés actuellement sur les méthodes numériques, dont la méthode des équations intégrales de frontière est l'expression la plus récente. La formulation numérique

ainsi développée est incorporée dans le logiciel de Conception Assistée par Ordinateur PHI3D<sup>®</sup>, destiné à la simulation des dispositifs électromagnétiques en trois dimensions.

Notre mémoire sera divisé en cinq chapitres : le premier chapitre est consacré à un développement très général sur l'histoire et l'application des méthodes numériques déjà utilisées dans le domaine de la diffraction électromagnétique, en mettant en évidence leurs avantages et leurs inconvénients. Le second chapitre traite de la formulation mathématique des équations intégrales pour les problèmes de diffraction électromagnétique dans le cas des objets conducteurs parfaits et dans le cas des objets diélectriques. Dans le troisième chapitre, nous allons développer la résolution numérique des équations intégrales pour chacun de ces cas en régime harmonique et en régime temporel. Nous décrivons également le traitement des différentes difficultés qui se présentent, comme la singularité de l'intégrale et la discontinuité des valeurs physiques et géométriques. Le quatrième chapitre va être consacré à la discussion et l'interprétation des résultats obtenus. Une conclusion générale et les perspectives ainsi ouvertes seront enfin exposées.

# **CHAPITRE I**

## **LES MÉTHODES NUMÉRIQUES UTILISÉES DANS LA DIFFRACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE**

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les différentes méthodes numériques utilisées pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques en 3D et en particulier celles qui peuvent être utilisées pour le traitement de la diffraction. Nous essayerons de mettre en évidence leurs avantages et inconvénients respectifs, ainsi que leur domaine d'application privilégié.

### **I - 1. HISTORIQUE ET GENERALITÉS.**

Les ordinateurs ont été utilisés pour déterminer les solutions des équations de Maxwell seulement quatre-vingts dix ans après la formulation de ces dernières. Ainsi, dès la deuxième guerre mondiale et jusqu'au début des années soixante, beaucoup de recherches ont été menées pour déterminer leurs solutions. Après les années soixante et jusqu'au début des années quatre-vingts, de nouveaux concepts technologiques ont permis une progression importante en capacité et en vitesse pour les machines de calcul. Celles-ci ont rendu possible la mise en oeuvre de différentes techniques numériques pour déterminer les solutions exactes et/ou approchées des modèles mathématiques permettant la résolution de ces équations.

Actuellement de nombreux chercheurs s'intéressent aux problèmes de compatibilité électromagnétique (CEM) qui deviennent des phénomènes liés à notre vie quotidienne. Leurs modèles mathématiques peuvent être mis sous la forme :

1) - d'équations intégrales, dont le développement dépend du choix de la fonction de Green qui dépend elle-même du type de problème étudié. La plus utilisée dans les problèmes

de CEM est la fonction scalaire de Green qui correspond à une propagation d'onde progressive dans un milieu infini.

2) - d'équations différentielles qui sont déduites directement des équations de Maxwell et dont le développement est plus simple à obtenir que pour le cas des équations intégrales.

3) - d'équations de champs qui sont basées sur les équations de Maxwell, avec les vecteurs champ électrique  $E(r)$  et champ magnétique  $H(r)$ . Ces derniers sont des fonctions complexes de l'espace qui dépendent du vecteur position " $r$ " et s'expriment sous la forme de séries de fonctions à plusieurs multipôles dont les coefficients sont déterminés à partir des conditions aux limites du problème.

4) - d'équations de réseaux ou de télégraphiste dont l'étude repose sur le concept des lignes de transmission. L'espace à modéliser est divisé en plusieurs blocs. Le système équivalent est représenté par des constantes réparties suivant la forme géométrique et les caractéristiques physiques de chaque bloc.

5) - d'équations dites équations optiques obtenues suite à l'introduction de la géométrie optique pour l'étude des phénomènes de diffraction électromagnétique. L'étude détaillée de ces équations a fait comprendre aux chercheurs que la diffraction est seulement un phénomène local qui dépend de la forme de l'objet de diffraction et du type de l'onde incidente. Depuis, ces équations sont très utilisées dans le traitement des problèmes de diffraction à très haute fréquence. Leur fondement utilise le principe de Fermat qui stipule que l'amplitude et la phase du champ d'un rayon diffracté varie de la même façon qu'en optique géométrique. Certains chercheurs comme Keller ont montré que les champs diffractés dans la région cachée (obscur) décroissent selon une forme exponentielle à partir de la frontière limite de cette région et sont des ondes progressives.

Depuis la vérification de la théorie de Maxwell par Hertz en 1880, beaucoup de chercheurs ont essayé de trouver la solution analytique des équations de Maxwell liées aux différents problèmes de diffraction. La première solution exacte a été donnée par Rayleigh en 1881, lorsqu'une onde électromagnétique est diffractée par un conducteur cylindrique de longueur infinie. La solution, obtenue grâce à une technique de séparation des variables, est donnée sous forme d'une série infinie de fonctions d'onde cylindrique [1]. Une procédure analogue a été développée par Mie en 1908 pour trouver la solution analytique de la diffraction électromagnétique par une sphère parfaitement conductrice [2].



La méthode de séparation des variables ne peut être appliquée que à des objets dont la forme géométrique s'exprime dans un système de coordonnées orthonormales. Ceci explique la limite d'application de cette méthode, étant donné le nombre limité de ces formes géométriques. De plus, seuls les objets de petites tailles peuvent être traités, car le nombre de fonctions d'ondes élémentaires devant être additionnées afin d'aboutir à des résultats convergents dépend de la longueur d'onde.

C'est grâce aux travaux de Sommerfeld (1896) que les objets larges de formes simples ont pu être traités. Pour la diffraction d'une onde plane ou sphérique par un plan fin semi-fini, la solution est obtenue en fonction des intégrales de Fresnel [3][4]. Une évaluation asymptotique des intégrales de courants de surface a été développée par Debye en 1908[5]. Entre 1930 et 1940, Pauli, Fock et Pekeris ont développé une solution sous forme de séries asymptotiques pour la diffraction par des objets coniques comme des coins et des paraboloides de révolution[6][7]. Après 1940, Luneberg, Friedlander et Kline ont montré qu'en général, dans la théorie de la diffraction, le champ dépend de chaque point de l'objet diffracté. Il peut être développé en une série asymptotique dont les coefficients sont inversement proportionnels à l'exponentielle du nombre d'onde  $k$  [7][8].

D'autres techniques ont été très utilisées. Parmi les plus importantes, nous pouvons citer: la méthode à plusieurs multipôles ("MMP" Multiple Multipole Method)[9], la méthode dite *théorie géométrique de diffraction* ("GTD" Geometrical Theory of Diffraction) et ses variantes[10], la méthode des moments ("MOM" the Method of Moments) appliquée à des modèles bidimensionnels[11], la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

A la fin des années 1980, la naissance de nouvelles approches a rendu possible la résolution des problèmes de diffraction électromagnétiques sur des formes complexes (problèmes réels). On utilise directement les équations différentielles de Maxwell, en leur appliquant la méthode des différences finies transitoire (notée FD-TD : Finite-Difference Time-Domain) ou la méthode des éléments finis en régime transitoire ( notée FE-TD : Finite-Element Time-Domain ) [12][13]. De plus, durant les années soixante, d'autres chercheurs ont mis au point la méthode des équations intégrales de frontières (Boundary Element Method "BEM" [14][15][16]) qui peut être appliquée en régime fréquentiel et/ou temporel. Elle est bien adaptée aux problèmes extérieurs comme nous le verrons par la suite, ses possibilités de

mise en oeuvre dépendront surtout des performances des machines utilisées, c'est à dire de la vitesse et de l'espace mémoire dont on dispose.

## I - 2. LA MÉTHODE DES MULTIPLES MULTIPÔLES.

La méthode MMP consiste à développer le champ électromagnétique (E,H) sous forme de série en terme de champ facilement calculables, appelés multipôles. C'est une méthode semi-analytique, dans laquelle le champ  $f$  est directement approché par un développement en série :

$$f = f^0 + \varepsilon = \sum_{n=1}^N A_n f_n + \varepsilon$$

Les  $f_n$  sont des fonctions de base. Elles forment les équations du champ à l'intérieur d'un domaine isotrope, homogène et linéaire. Les coefficients  $A_n$  sont les paramètres inconnus dans les séries pouvant être obtenues par la méthode de séparation des variables. La procédure est basée directement sur la technique GMT (Generalized Multipole Technique) [17]. Les coefficients peuvent également être déterminés par des techniques de collocation, qui assurent que les conditions sur les frontières des régions adjacentes sont vérifiées. Cependant, cette dernière approche par technique de collocation aboutit à la résolution d'un système d'équations avec une matrice rectangulaire dense.

La plus grande difficulté dans la méthode MMP est le choix des séries représentant l'inconnue dans le domaine d'étude.

## I - 3. LA MÉTHODE DES MOMENTS.

Le « M.I.T. Radiation Laboratory » (Massachusetts Institut of Technology) fut le premier laboratoire à avoir développé, durant la seconde guerre mondiale, la résolution des problèmes électromagnétiques réels. La première solution numérique obtenue pour la modélisation de structures électromagnétiques arbitraires en faibles et moyennes fréquences est probablement due aux travaux de Schwinger et autres, qui a appliqué la méthode variationnelle à un problème de micro-ondes. Marcuvitz est le premier à avoir résumé dans un manuel les solutions de plusieurs types de problèmes. En 1950, Rumsey a développé quelques

concepts avec des notations simplifiées dans son bulletin "Reaction Concept". D'autres chercheurs comme Harrington ont appliqué ces méthodes variationnelles à de nombreux problèmes pratiques.

Au début des années soixante la recherche est devenue une nécessité pour le développement industriel et le progrès du confort dans la société. De même les systèmes électromagnétiques sont devenus de plus en plus utilisés dans les moyens de défense. D'autre part, les premiers ordinateurs avec une vitesse de calcul et un espace mémoire satisfaisants ont vu le jour. Plusieurs chercheurs furent donc intéressés par la possibilité de la mise en oeuvre de méthodes numériques afin de résoudre des problèmes électromagnétiques complexes (dans leur aspect réel). A titre d'exemple Mei et Van Bladel utilisaient la méthode des sous-structures et des techniques de collocation pour la résolution numérique de la diffraction par des objets cylindriques. D'autres, comme Andreasen et Oshiro, ont aussi développé des méthodes similaires.

Au milieu des années soixante, Harrington s'était fixé un agenda pour les vingt ans avenir, dans lequel il faisait ressortir la description systématique de l'espace fonctionnel des interactions électromagnétiques, que l'on appelle la méthode des moments [18]. Dans ce contexte, les équations intégrales ou intégral-différentielles qui découlent des équations de Maxwell pour des structures données ont été interprétées comme une fonctionnelle de dimension infinie. La forme de cette fonctionnelle est  $Lf = g$ , où  $L$  est l'opérateur linéaire associé aux équations,  $g$  est une fonction associée à l'excitation, et  $f$  est une fonction inconnue (en général une distribution de courant) à déterminer. La méthode des moments donne la solution numérique en faisant la projection de l'espace de dimension infinie sur un sous-espace de dimension finie, telle qu'elle était définie par Hilbert, et qui est très utilisée en mécanique quantique. Cette projection consiste à représenter la fonction inconnue  $f$  par un ensemble de fonctions de base  $f_i$  dans le domaine de définition de l'opérateur  $L$ . Les fonctions poids  $w_i$  sont aussi définies dans ce domaine. Nous prenons le produit scalaire (le plus souvent une intégration) de chaque fonction poids par l'opérateur développé. L'utilisation de la propriété de linéarité nous donne un ensemble fini d'équations dont les coefficients sont les fonctions de bases. L'ensemble de ces équations est résolu pour avoir la solution exacte ou approchée de  $f$  (la solution exacte ou approchée dépendra des fonctions de base et des fonctions poids choisies).

Après Harrington, beaucoup de chercheurs ont amélioré l'application de la méthode des moments aux problèmes de diffraction et de pénétration, à faibles et moyennes fréquences. La méthode a été appliquée avec succès aux problèmes de rayonnement et de diffraction des lignes, à des cylindres conducteurs et diélectriques en deux dimensions, et à des objets 3D conducteurs et diélectriques de formes quelconques. L'utilisation de la méthode des moments est très répandue à cause de sa puissance et sa flexibilité.

## I - 4. LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA DIFFRACTION.

L'application de la méthode des moments pour l'analyse des problèmes de compatibilité électromagnétique a commencé au début des années 1970. Elle est utilisée dans la résolution de problèmes dont la taille géométrique est très petite devant la longueur d'onde. Pour des objets de dimensions très importantes, il a été démontré que l'approche haute fréquence ou l'approche analytique pouvait fournir de bons résultats concernant le champ lointain, spécialement pour les objets conducteurs. Ceci est basé sur la théorie géométrique de la diffraction (GTD: "Geometric theory of Diffraction") et ses variantes : on peut notamment citer l'optique géométrique (G.O.: "Geometric Optics"), l'optique physique (P.O.: "Physical Optics") et la théorie physique de la diffraction (P.T.D.: "Physical Theory of Diffraction"). Les petites structures à propriétés physiques complexes ne peuvent pas être étudiées aussi facilement à l'aide des techniques de diffraction à haute fréquence. Des approches hybrides, constituées par la méthode des moments et la méthode GTD, ont alors été utilisées pour étudier des structures aussi bien larges que petites et composées de diélectriques et/ou de conducteurs.

La GTD fut formulé en 1950 par Keller. Elle consiste à généraliser la mise en forme des séries asymptotiques de Luneberg [19], en incluant dans ces séries les champs associés aux rayons diffractés par les sommets et les creux, les courbures de surfaces régulières ainsi que les discontinuités, et d'autres caractéristiques. Keller a élargi l'application du principe de Fermat, en développant une loi gouvernant ces rayonnements. Ainsi, en considérant des problèmes canoniques (les problèmes qui ont une même géométrie locale au niveau du point de diffraction d'une arête, d'une surface ou d'un sommet de diffraction), il est possible de déterminer les coefficients de diffraction pour diverses sortes de problèmes.

Dans la théorie de l'optique géométrique, les champs sont mis sous la forme de termes géométriques vectoriels. Ces derniers sont obtenus à partir d'un développement asymptotique provenant des équations de Maxwell dans un milieu homogène:

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \times E = j\omega\mu H$$

avec:  $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$  constante de propagation, qui croît avec la fréquence.

Pour des valeurs importantes de  $k$ , le champ électrique peut être mis sous la forme d'un développement asymptotique de polynôme en  $1/k^m$  en utilisant le développement de Luneburg-Kline [20]:

$$E(r) = e^{-jkS(r)} \sum_{m=0}^{\infty} (-jk)^{-m} E_m(r)$$

où  $S(r)$  est la fonction de phase et  $\nabla S(r)$  indique la direction de propagation du rayonnement (dans la Géométrie Optique,  $m=0$ ).

La méthode GTD fut progressivement améliorée. Puisque cette dernière donne une infinité de valeurs non physiques pour le champ au niveau des points focaux, des surfaces cachées et des surfaces caustiques (surfaces tangentes aux faisceaux lumineux), des fonctions spéciales ou des intégrales de surfaces, appelées intégrales de Fresnel, ont alors été utilisées pour représenter le champ d'une manière uniforme dans ces cas de figures. Comme la GTD nécessite des coefficients de diffraction à chaque type d'arêtes et de sommets dans les structures et les surfaces constituant le diffuseur, des techniques numériques et asymptotiques ont été employées pour les obtenir. On peut citer en exemple les surfaces et les arêtes diélectriques.

Il est difficile d'appliquer la GTD à des objets présentant des cavités, aux guides d'ondes et aux régions rentrantes où les rayons rebondissent d'une façon répétitive. Il en résulte une trajectoire chaotique. Il est préférable alors de représenter le champ en fonction des modes au lieu de la trajectoire. Finalement, puisque la GTD peut employer des nombres et types de rayons différents dans les différentes régions du diffuseur, avec des expressions différentes des champs associés, des représentations uniformes sont obtenues sans avoir recours à des moyens de modélisation importants.

## I - 5. LES FORMULATIONS ITÉRATIVES ET HYBRIDES.

La méthode GTD de Keller et la méthode des moments de Harrington sont deux approches qui ont beaucoup servi dans la résolution des problèmes d'électromagnétisme avant les années quatre-vingts. Au cours de ces dernières années, grâce aux nouveaux outils de conception, il est devenu possible de traiter des structures très complexes qui ne peuvent pas l'être avec l'une ou l'autre des deux méthodes indépendamment. Parmi ces structures nous pouvons citer celles dont :

- . la dimension est très grande devant la longueur d'onde;
- . la composition physique est non homogène;
- . les surfaces métalliques sont recouvertes par un diélectrique ou un milieu perméable (composé par exemple de matériaux en céramiques et composites en fibres de carbone).

Afin de traiter ces cas de figures, des formulations itératives et hybrides ont été mises en oeuvre.

En principe, la méthode des moments permet de prendre en compte les propriétés physiques du milieu interne et les objets non métalliques. Néanmoins, dans la résolution par la méthode des moments, on obtient un système linéaire dense d'équations (une matrice pleine de  $N^2$  coefficients, où  $N$  est le nombre d'inconnues) nécessitant un temps d'exécution important pour sa résolution (proportionnel à  $N^2$  ou  $N^3$ ). A titre d'exemple, pour traiter un problème électromagnétique simple de dimensions 0.1 à 0.2 longueur d'onde, une capacité de mémoire de plusieurs gigaoctets et une vitesse d'exécution qui se mesure en gigaflops (des billions d'opérations de points flottants par seconde) sont nécessaires.

Au début des années soixante dix, Thiele, Newhouse et Burnside, Yu, Marhfeka ont utilisé la MOM pour obtenir numériquement les coefficients de diffraction de la GTD dans les cas des structures qui présentent des arêtes et des coins. Ensuite, ils ont appliqué la méthode GTD pour modéliser physiquement la diffraction par les arêtes et les coins [21]. Cette approche réduit le besoin intensif en ressources de calcul de la méthode des moments, car l'application de celle-ci peut être localisée uniquement au voisinage des singularités géométriques, le reste étant pris en compte par la GTD. Cette approche ne peut pas être

appliquée à des régions à réflexions multiples, ou si la zone nécessitant l'application de la MOM constitue la totalité de la région à réflexions multiples. De plus, des difficultés supplémentaires apparaissent quand la surface de la structure est recouverte par un diélectrique ou lorsqu'elle n'est pas parfaitement conductrice; ceci élargit davantage la zone où la méthode des moments doit être appliquée.

Reconnaissant la limite d'application des techniques hybrides, un groupe de chercheurs a essayé de développer des approches plus efficaces avec la méthode des moments seule. Au début et au milieu des années quatre-vingt, un travail préliminaire concentré sur des techniques à formulations itératives a été effectué par Sarkar, Siarkiewicz et Stratton [22]. Les techniques du gradient conjugué et de la transformée de Fourier rapide ont été utilisées pour éliminer le stockage et l'inversion de la matrice pleine obtenue. Ceci réduit le temps d'exécution, qui passe de l'ordre  $N^2$  à  $N \log N$ , et même dans certains cas à l'ordre  $N$  ( $N$  est le nombre d'inconnues). Cependant, la résolution itérative pour la méthode des moments converge très lentement vers la bonne solution et peut même s'arrêter certaines fois en plein processus itératif. Tout cela dépend de la nature du problème et du conditionnement de la matrice associée. En conséquence, des outils de préconditionnement du système obtenu par la MOM ont été développés, afin d'assurer l'uniformité, la rapidité et la convergence de la majorité des algorithmes de résolution. Ils prennent en considération une formulation itérative alternative basée sur une décomposition spatiale de l'objet réfléchissant.

## **I - 6. LA FORMULATION EN DIFFERENCES FINIES.**

Au milieu des années soixante, Yee a introduit un outil efficace pour la résolution numérique des équations de Maxwell en régime temporel, en utilisant la méthode des différences finies [23]. Dans cette approche, le champ électromagnétique continu dans le volume de l'espace fini est discrétisé en points géométriques dans l'espace du maillage et en points temporels à des intervalles de temps égaux. La propagation d'ondes, la diffraction, les phénomènes de pénétration sont modélisés "pas à pas" dans le temps. La discrétisation dans le temps et dans l'espace est choisie à partir de critères qui permettent d'éviter des solutions aberrantes et de garantir la stabilité de l'algorithme d'itération temporelle.

En principe la formulation de Yee permet de modéliser les phénomènes d'interactions des ondes électromagnétiques avec des structures aussi diverses qu'avec la Méthode des Moments. Par contre, la méthode des différences finies n'aboutit pas à une résolution d'un système d'équations linéaires dans le domaine de définition du problème. La composante du champ à l'instant  $n$  nécessite seulement la connaissance des composantes du champ calculées à l'instant  $(n-1)$ , déjà stockées en mémoire. Le temps de calcul et de sauvegarde pour la méthode de FD-TD est proportionnel à l'ordre du système  $N$  (le nombre d'inconnues). Le nombre  $N$  dépend de la puissance de la machine de calcul utilisée. En fait, réduire ce nombre  $N$  est la finalité recherchée dans l'approche itérative de la méthode des moments.

Au milieu des années quatre vingt, de grands progrès ont été réalisés dans le domaine électromagnétique grâce au traitement des différents problèmes par la méthode FD-TD. Plusieurs publications, dont celles de Taflove et Umashankar, ont montré la puissance de résolution de la FD-TD [24]. C'est la seule méthode qui a permis de franchir la limite imposée par les autres approches pour traiter les modèles de diffraction, de pénétration, de couplage et d'interaction.

Par la suite, Engquist et Majda ont développé une méthode encore plus performante en imposant des conditions aux limites absorbantes sur la frontière.

Avec l'apparition des super calculateurs comme le CRAY, qui ont une mémoire centrale et une vitesse arithmétique suffisantes, la FD-TD a pu être appliquée à des modèles 3D de 10 à 30 longueurs d'ondes. Il s'avère que la FD-TD et la MOM ont les mêmes performances en précision et en modélisation; par contre la FD-TD permet d'étudier des structures de taille plus larges.

## **I - 7. LA FORMULATION EN ÉLÉMENTS FINIS.**

Au début des années soixante dix, Mie, Morgan et Chang introduisirent la méthode des éléments finis afin de résoudre les équations de Helmholtz [25]. Ils conclurent qu'elle était bien adaptée aux structures 3D axisymétriques conducteurs ou diélectriques. Avec cette approche, le champ électromagnétique est supposé continu dans un volume d'espace fini et axisymétrique, contenant la structure de l'objet étudié. Le champ est approché par un ensemble de fonctions linéaires. L'utilisation de cette méthode donne d'excellents résultats, très proches



des résultats analytiques et expérimentaux, surtout pour les objets diélectriques de formes sphériques et cylindriques finies et pour les formes géométriques de dimensions ne dépassant pas quelques longueurs d'onde.

La méthode des éléments finis dans le domaine temporel (FE-TD: finite-element time-domain) fut développée à la fin des années soixante dix par Mie et al. Ils utilisèrent, pour le maillage, soit des points de collocation, soit des éléments quadrilatères isoparamétriques, soit des éléments uniformes rectangulaires dans toute l'espace, et, sur les bords de l'objet, des éléments spéciaux. De très bons résultats furent obtenus pour des objets convexes conducteurs ou diélectriques. Des codes 3D furent aussi développés par Mei et al et Madsen et al.

## **I - 8. LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FRONTIÈRE.**

Au cours des années soixante dix, la méthode des équations intégrales de frontière a fait l'objet de nouveaux travaux, simultanément en mécanique et en électrotechnique [14] [26][27][28]. L'apparition de calculateurs plus performants a permis sa mise en oeuvre. La formulation peut se faire de plusieurs manières, des plus simples aux plus complexes. En général, elle transforme les équations aux dérivés partielles (équations de Maxwell), régissant le modèle mathématique du problème, à des équations intégrales sur la frontière du domaine d'étude; dans la plupart des cas, ce dernier est non borné [29][30]. On gagne ainsi une dimension d'espace. La formulation repose sur la connaissance de la solution fondamentale (la fonction de Green [31]). Numériquement, elle consiste à discrétiser la frontière enveloppant le domaine; les inconnues sont seulement sur la surface et la matrice du système linéaire obtenu est pleine. Cette méthode est bien adaptée aux problèmes ouverts. La précision numérique dépend essentiellement de l'erreur d'approximation géométrique, des fonctions d'interpolation et du schéma d'intégration.

## I - 9. SYNTHÈSE DES NOUVELLES APPROCHES.

Nous venons donc de voir que de nombreuses approches analytiques et numériques sont valables pour étudier les problèmes de diffraction et d'interactions des ondes électromagnétiques. Le choix de la méthode dépend de la forme de l'objet étudié et de ses caractéristiques matérielles. Comme catégories, nous pouvons ainsi citer :

1 . Les objets avec ou sans ouverture:

- parfaitement conducteurs.
- de types électriques.
- de types magnétiques.

2 . Les objets fermés :

- diélectriques.
- non homogènes.
- anisotropes.

Les approches utilisées pour modéliser ces problèmes sont classées suivant leurs possibilités de résolution en temporel ou en harmonique. Les techniques de résolution utilisées pour résoudre directement un problème électromagnétique en régime temporel conservent généralement les dérivées temporelles dans les équations de Maxwell. Elles expriment la solution générale de la partie homogène (transitoire) et la solution particulière de la partie dépendant de la fonction d'excitation. Ces approches directes sont utilisées pour traiter les modèles à excitation sinusoïdale ou non sinusoïdale. La solution fréquentielle est ensuite obtenue par la transformation de Fourier de la réponse temporelle à l'excitation impulsionnelle proposée.

En général, les techniques de résolution dans le domaine fréquentiel supposent que la fonction d'excitation est sinusoïdale. Toutes les quantités de charges, de courants et le vecteur phase des champs (sinusoïdal en régime permanent) sont exprimées à l'aide de fonctions exponentielle du temps  $t$  ( $e^{j\omega t}$ ). Pour une excitation quelconque, la solution consiste à déterminer les quantités inconnues du courant ou du champ fréquence par fréquence; la solution temporelle est ensuite obtenue à partir de la résolution complète d'un spectre de solutions de champs électriques ou magnétiques en régime harmonique, en leur appliquant une FFT inverse. Mais ceci est très lourd à mettre en oeuvre.

## I - 9.1. LES TECHNIQUES DE RÉOLUTION DIRECTE DANS LE DOMAINE TEMPOREL.

Les techniques de résolution directe dans le domaine temporel se divisent en deux grandes catégories : les formulations en équations intégrales et les formulations en équations différentielles.

La formulation en équations intégrales est appelée souvent approche intégrale avec potentiel retardé. Cette approche, sous forme d'une équation intégrale pour le champ électromagnétique, est liée à l'écriture des conditions aux limites sur la surface de l'objet de diffraction. Elle nécessite de déterminer la solution de l'équation intégrale pas à pas dans le temps, c'est effectivement une méthode itérative. Le grand avantage de cette méthode est que la solution est obtenue en utilisant seulement la surface de l'objet à étudier. L'inconvénient réside dans le stockage temporel des résultats des intégrales retardées. La capacité de mémoire nécessaire est ainsi augmentée, ce qui limite l'application de cette approche à l'étude des lignes, des objets de révolution conducteurs ou diélectriques, et des objets de petite taille devant la longueur d'onde.

La formulation en équations différentielles est développée sous forme de différences finies ou éléments finis. Ici, les équations vectorielles de Maxwell sont directement résolues dans le volume contenant la structure du modèle étudié. Une condition de rayonnement est utilisée numériquement pour tronquer le domaine de calcul tout en simulant son extension à l'infini. Une caractéristique importante de cette approche est qu'elle ne nécessite pas le stockage des résultats pour les pas de temps déjà écoulés. L'inconvénient est que le domaine de calcul n'est pas seulement limité à la surface de la structure, mais qu'il doit aussi inclure son intérieur dans certains cas et suffisamment d'espace extérieur pour permettre l'implantation efficace de la condition de radiation. Ceci peut être à la fois un inconvénient mais aussi un grand avantage, lorsqu'il s'agit de modéliser, entre autres, des structures diélectriques non homogènes comme les tissus biologiques et autres compositions complexes.

Un autre inconvénient est qu'une résolution (inversion d'un système matriciel) est nécessaire à chaque pas de temps. Des applications ont été publiées sur la modélisation de certains problèmes de diffraction, d'interactions et de pénétrations d'ondes avec des structures 3D de 30 longueurs d'ondes environ.

## I - 9.2. LES TECHNIQUES DE RÉSOLUTION DIRECTE DANS LE DOMAINE HARMONIQUE.

Comme pour les techniques de résolution directe en régime temporel, les techniques de résolution directe dans le domaine harmonique se divisent en deux grandes catégories: les formulations en équations intégrales et les formulations en équations différentielles. Il faut toutefois noter que, dans les techniques de résolution en régime harmonique, il existe une approche utilisant la séparation de variables, où la solution analytique peut être déterminée facilement pour une petite classe d'objet de diffraction de formes simples (sphériques, cylindres circulaires ou cylindres elliptiques).

Dans le cas de la résolution numérique en régime harmonique par une formulation intégrale, le problème est ramené à un problème sur la frontière. L'équation intégrale ou intégro-différentielle est écrite pour le champ électrique et/ou magnétique sur la surface de l'objet de diffraction. En fait, les équations générales obtenues peuvent être adaptées ou simplifiées en particulier en tenant compte des propriétés physiques des objets. Pour les structures de formes complexes, des équations intégrales volumiques ou surfaciques sont appliquées. Les équations intégrales volumiques sont principalement basées sur la relation du courant de polarisation en fonction du champ total. Plusieurs techniques numériques sont employées pour résoudre ces dernières équations. L'approche actuellement la plus utilisée est la méthode des moments (MOM). Comme le domaine d'étude est modélisé élément par élément, un élément de forme arbitraire, ou une inhomogénéité, peut facilement être introduit, et l'inconnue en un point donné du domaine dépend de la contribution de tous les autres points. La matrice résultante est pleine et peut prendre un espace mémoire très important.

Plusieurs travaux ont été réalisés sur l'application de la formulation en équations intégrales volumiques et l'utilisation de la méthode des moments dans les cas de diffraction par un cylindre diélectrique, par des surfaces planes et par certaines sections réelles de tissus biologiques.

La formulation en équations intégrales surfaciques est utilisée pour traiter des objets conducteurs parfaits, ou diélectriques homogènes, ou bien des objets constitués de plusieurs régions de caractéristiques physiques différentes mais homogènes. La procédure usuelle consiste à déterminer un ensemble d'équations intégrales couplées avec les termes des densités de courants électrique et magnétique sur les surfaces des régions homogènes. Pour un objet

composé de plusieurs régions (couches), les champs induits dans n'importe quelle région sont dus aux courants électriques et magnétiques équivalents sur la surface des régions adjacentes. Il en résulte un bloc tridiagonal dans la matrice globale. Cette méthode donne de très bons résultats pour les objets conducteurs parfaits.

La formulation en équation différentielle est appelée aussi méthode unimoment [32]. Elle s'applique à des objets de petite taille. Elle consiste à envelopper la structure de l'objet de diffraction par une région sphérique ou cylindrique d'un rayon minimum. Le champ diffracté à l'extérieur de cette région peut être développé sous forme de fonctions d'ondes sphériques ou cylindriques sortantes. Le champ incident sera aussi exprimé sous la forme d'ondes harmoniques entrantes. La méthode des éléments finis est appliquée pour la résolution à l'intérieur de la région. Des conditions aux limites appropriées pour les champs tangentiels sont imposées sur l'interface entre les zones intérieures et extérieures. Nous obtenons un ensemble d'équations permettant de déterminer les champs diffractés ou incidents inconnus. Cette méthode peut être appliquée à des structures diélectriques de révolution, en trois dimensions, de taille supérieure à quatre fois la longueur d'onde et pouvant présenter des inhomogénéités. Par contre, l'efficacité de cette méthode n'est pas encore confirmée.

## **I - 10. COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉTHODES.**

### **I - 10.1. LEURS AVANTAGES.**

#### **I - 10.1.1. La méthode MMP.**

- calcule directement le champ, sans étape intermédiaire.

#### **I - 10.1.2. La méthode des moments.**

- efficace dans la modélisation des antennes, des lignes, des surfaces et des lignes attachées à des structures larges;
- modélise en détail des distributions de courants sur des structures de formes quelconques;
- utilise la condition de radiation, ce qui permet la simulation des champs E et H à l'extérieur de la structure rayonnée;

- calcule les paramètres d'une antenne : l'impédance d'entrée, le gain , la section radar.

#### **I - 10.1.3. Les méthodes GTD et PTD.**

- sont efficaces pour la modélisation des structures de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde;

- peuvent être utilisées pour résoudre les problèmes qui n'ont pas de solutions exactes (des systèmes incluant des formes géométriques singulières telles que les coins et les arrêtes );

- sont très efficaces pour les problèmes de diffraction en haute fréquence, incluant des sections radar;

- sont économiques au niveau de la capacité de mémoire et du temps d'exécution.

- peuvent être combinées avec d'autres techniques, avec la méthode des moments par exemple.

#### **I - 10.1.4. La méthode FD-TD.**

- a une formulation simple pour résoudre les équations de Maxwell;

- ne nécessite pas de mémorisation des résultats pour la modélisation dans l'espace;

- modélise facilement les milieux non homogènes;

- est efficace pour la modélisation des problèmes intérieurs. Elle nécessite deux étapes explicites.

#### **I - 10.1.5. La méthode des éléments finis.**

- utilise les propriétés électriques et géométriques qu'on peut définir séparément;

- est efficace pour la modélisation d'un domaine intérieur;

- peut modéliser des milieux non homogènes, non linéaires, anisotropes;

- possibilité d'utiliser des éléments d'ordre élevé;

- maillages efficaces.

#### **I - 10.1.6. La méthode des équations intégrales de frontière.**

- les domaines ouverts sont facilement modélisés;

- l'exactitude numérique est généralement meilleure que celle des éléments finis;

- l'ordre du système d'équations obtenu est inférieur à celui avec les éléments finis;

- les inconnues sont situées uniquement sur la frontière et leurs valeurs au delà de celle-ci (à l'extérieur) sont facilement déduites.

## **I - 10.2. LEURS INCONVÉNIENTS.**

### **I - 10.2.1. La méthode MMP.**

- elle calcule uniquement les champs, tous les autres paramètres sont déduits des valeurs de champs obtenus;
- elle est coûteuse en temps de calcul;
- l'utilisateur de la méthode MMP doit connaître la forme des séries avec lesquelles le champ peut être développé (les multipôles).

### **I - 10.2.2. La méthode des moments.**

- très difficile de modéliser des régions intérieures;
- très difficile de modéliser des régions non homogènes;
- elle nécessite des ressources informatiques importantes (temps CPU et espace mémoire), ceci explique son utilisation seulement pour des petits problèmes à des fréquences faibles.

### **I - 10.2.3. Les méthodes GTD et PTD.**

- elle donne peu d'informations concernant les paramètres caractérisant les antennes;
- elle est efficace seulement en hautes fréquences;
- elle donne peu d'informations sur les courants de volume;
- elle est seulement fiable pour les calculs du champ lointain.

### **I - 10.2.4. La méthode FD-TD.**

- les problèmes ouverts nécessitent la modélisation de tout l'espace entourant le domaine d'étude;
- elle peut mener à des erreurs numériques dites de dispersion (c'est à dire bien que les paramètres numériques soient identiques, l'erreur commise n'est plus linéaire en fonction du niveau des champs. Actuellement, des thèmes de recherches se développent pour le traitement de ce phénomène;
  - la quantité de calculs nécessaires peut être importante;
- cette méthode est uniquement recommandée pour le calcul du champ de propagation. Elle est très difficile à appliquer pour calculer les autres paramètres comme le courant de distribution par exemple (à cause de la dérivation du champ);

- les objets étant discrétisés en faces planes, leur description est très lourde. Actuellement des schémas d'ordre élevé existent, mais ils sont très difficiles à manipuler.

#### **I - 10.2.5. La méthode des éléments finis.**

- les problèmes ouverts nécessitent la modélisation de tout l'espace entourant le domaine d'étude;

- elle est robuste, mais il est très difficile de modéliser des problèmes ouverts où les valeurs des champs sont inconnues sur les points de la frontière (surface fermée de l'objet), et il faut utiliser des conditions aux limites absorbantes qui sont approximatives.

#### **I - 10.2.6. La méthode des équations intégrales de frontière.**

- difficile de modéliser des géométries complexes présentant des cavités;

- en général, dans la formulation, l'intégration inclut une singularité de type Kernel dans un repère cartésien;

- il n'est pas facile de représenter des matériaux non homogènes et non linéaires;

- la matrice obtenue est pleine et son conditionnement n'est pas assuré dans tous les cas.



## I - 11. CONCLUSION.

Avec l'apparition des nouvelles machines de calculs ayant une capacité de mémoire et une vitesse d'exécution importantes, il est devenu possible de mettre en oeuvre des méthodes numériques pour la résolution des modèles mathématiques complexes tels que la résolution des équations de Maxwell. Parmi ces techniques, nous pouvons citer: la méthode des multiples multipôles (MMP), la méthode des moments (MoM), la méthode dite théorie géométrique de la diffraction (GTD), la méthode des différences finies en régime temporel (FD-TD), la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des Equations Intégrales de Frontière (BEM) ainsi que les méthodes hybrides.

Dans notre travail nous nous intéressons à l'étude du phénomène de diffraction électromagnétique tridimensionnel en hyperfréquences. De l'étude bibliographique sur les différentes méthodes citées ci-dessus, après avoir mis en évidence leurs avantages et leurs inconvénients respectifs, nous avons conclu que la méthode des équations intégrales de frontière (BEM) est très bien adaptée à ce type de problème.

Le prochain chapitre sera entièrement consacré au développement théorique de la formulation du problème de diffraction électromagnétique en 3D par les équations intégrales de frontière (EIF).

## **CHAPITRE II**

### **FORMULATION DU PROBLÈME DE DIFFRACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE EN 3D PAR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FRONTIÈRE**

Le but général est de trouver des modèles mathématiques simples pour résoudre en régime harmonique ou temporel les problèmes de diffraction électromagnétique par des objets tridimensionnelles complexes. La procédure consiste à réduire leur espace d'étude d'une dimension, en passant de 3D volumique à 2D surfacique: les inconnues sont exprimées seulement sur la surface de l'objet et non dans son volume.

Par conséquent, pour la résolution des équations d'ondes électromagnétiques, vérifiant certaines conditions aux limites sur la frontière, nous choisissons une formulation surfacique pour une raison de simplicité. Les seules difficultés rencontrées sont les problèmes de discontinuité et de singularité, qui nécessitent un traitement spécial suivant les formes géométriques et les degrés de singularité de l'intégrale surfacique:  $O(1/r)$ ,  $O(1/r^2)$ ,  $O(1/r^2)$  [33][34].

Nous nous référons aux équations intégro-différentielles lorsque des équations intégrales contiennent une opération différentielle explicite. Dans notre texte, nous ne faisons pas de distinction entre Équations Intégrales et Intégro-différentielles quand l'opérateur différentiel est sous le signe intégral. Dans la résolution numérique, nous faisons simplement la distinction si la procédure de la différentiation numérique est applicable aux fonctions de surface inconnues ou à l'intégrale complète.

Dans ce chapitre nous mettons en place les formulations intégrales pour les problèmes de la diffraction électromagnétique en général. Nous déterminons en régime harmonique celles adaptées aux conducteurs électriques parfaits et celles adaptées aux diélectriques. Une formulation intégrale en régime transitoire est également développée pour le cas d'un conducteur parfait.

## II - 1. LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DANS LA THÉORIE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME.

Les équations intégrales obtenues pour un problème de diffraction électromagnétique peuvent être utilisées dans leur forme générale. Elles sont utilisées pour des problèmes d'antennes ou de diffraction électromagnétique. Nous utilisons les équations intégrales dues au champ magnétique et celles dues au champ électrique, en régime fréquentiel ou harmonique. Nous nous intéressons uniquement aux formes tridimensionnelles. Les équations intégrales en régime transitoire seront déduites de la même manière que celles utilisées pour le régime fréquentiel.

### II - 1.1. PROVENANCE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES EN RÉGIME HARMONIQUE.

A partir des équations de Maxwell, on peut formuler deux types d'équations intégrales, les équations intégrales du champ électrique ("EFIE": Electric Field Integral Equations) et les équations intégrales du champ magnétique ("MFIE": Magnetic Field Integral Equations). Un développement similaire est décrit dans STRATTON (1940) [35] et complété en utilisant les techniques suggérées par N. Bajariski (1969) et Chertock et Grosso (1966) [36]. Avec ces techniques, les équations intégrales peuvent être écrites sur des surfaces dont les tangentes sont des fonctions de position non dérivables (différentiables) à n'importe quels points de la surface. Pour les surfaces régulières les équations vont être réduites à une forme similaire à celle de Maue (1949) [37].

Les équations intégrales sont obtenues pour les cas où la surface peut être assimilée à un conducteur électrique parfait, un diélectrique, un domaine avec une condition d'impédance sur la frontière ou un fil fin.

Les équations générales de Maxwell sont écrites sous leur forme différentielle dans l'ANNEXE I. Nous séparons les coordonnées spatiales de la coordonnée temporelle, qui varie sinusoidalement. Ainsi, les expressions de champs dépendant de  $t$  peuvent être représentées comme suit :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \Re(\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}) \quad \text{avec } \Re \text{ opérateur mathématique qui désigne}$$

la partie réelle d'une quantité complexe.

Les équations de Maxwell deviennent alors :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{K} & \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} & \nabla \cdot \mathbf{H} = m / \mu \end{cases} \quad (2.1a)$$

Avec les relations définissant la conservation de charge :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho \quad \nabla \cdot \mathbf{K} = -j\omega m \quad (2.1b)$$

$\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont respectivement les vecteurs champ électrique et champ magnétique;

$\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont les densités de courants électrique et magnétique;

$\rho$  et  $m$  sont les densités de charge électrique et magnétique.

Pour un milieu homogène, isotrope et linéaire, les paramètres  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des scalaires.

Par conséquent, les équations d'ondes vectorielles associées à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont :

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{K} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2\mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{K} + \nabla \times \mathbf{J} \end{cases} \quad (2.2)$$

$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  étant le nombre d'onde.

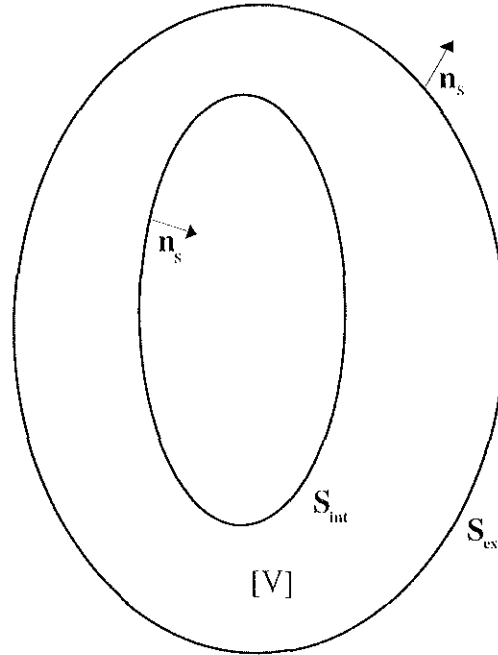
Pour résoudre ces dernières équations dans un espace contenant des sources et sachant que les paramètres de cet espace diffèrent de ceux du milieu contenant celui-ci, il est possible d'utiliser la Formulation Vectorielle du Théorème de GREEN [38]:

$$\oint_{\mathcal{V}} (\mathbf{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}) dV = \int_{\Sigma} (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}) ds \quad (2.3)$$

$\Sigma$  est la surface enveloppant le volume  $\mathcal{V}$ , intérieurement et extérieurement (fig. 2.1).

$\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont des fonctions vectorielles supposées continues et de classe  $C^2$  (leurs dérivées première et seconde sont continues) dépendant de la position de la source et du point de calcul sur et dans  $\Sigma$ ;

$$\Sigma = S_{\text{int}} + S_{\text{ext}} = \partial\mathcal{V}$$



**Fig. 2.1** - Représentation plane d'un objet de volume [V].  
Le vecteur  $\mathbf{n}_s$  est la normale extérieure à l'élément de surface  $ds$ .

Comme la fonction vectorielle  $\mathbf{Q}$  peut être choisie arbitrairement, il suffit qu'elle satisfasse les conditions aux limites spécifiées auparavant. Elle peut être donc écrite sous la forme :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u}\phi(x, x') = \frac{\mathbf{u}.e^{-jk|x-x'|}}{|x-x'|} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire de direction arbitraire et  $x, x'$  sont, respectivement, le point observateur et le point source. Notons que le point  $x = x'$  est exclu du domaine d'étude à cause de la singularité de  $\phi$ . La substitution de la fonction  $\mathbf{P}$  par le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans l'équation (2.3), en suivant la même démarche que celle décrite dans [35], permet d'obtenir:

$$\int_V \{j\omega\mu\mathbf{J}\phi + \mathbf{K} \times \nabla\phi - (\rho / \epsilon)\nabla\phi\} dv = \int_{\Sigma} \{j\omega\mu(\mathbf{n}_s \times \mathbf{H})\phi - (\mathbf{n}_s \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi - (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{E})\nabla\phi\} ds \quad (2.5)$$

Les opérations vectorielles dans (2.5) sont représentées dans le repère des coordonnées source. La relation entre les coordonnées source et observateur est réalisée par la fonction  $f$ . Ceci implique que, par la suite, tous les calculs seront faits dans le repère source.

Une justification rigoureuse du choix des fonctions vectorielles  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  pourra être trouvée dans [31].

## II - 1.2. REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Les conditions de continuité imposées au champ  $\mathbf{E}$  et à la fonction vectorielle  $\phi$  limitent l'application de l'équation (2.5). Le point observateur  $x$  et le point source  $x'$  ne peuvent pas coïncider, même à l'intérieur du volume  $[v]$ , à cause de la singularité de  $\phi$ . Le point observateur ne peut pas être sur la surface  $S_{int}+S_{ext}$ , étant donnée la discontinuité du champ à l'interface séparant deux différents milieux. Afin de contourner ces difficultés, le point observateur  $x$  est enveloppé dans une sphère  $S_s$  de rayon  $r$  (fig. 2.2) :

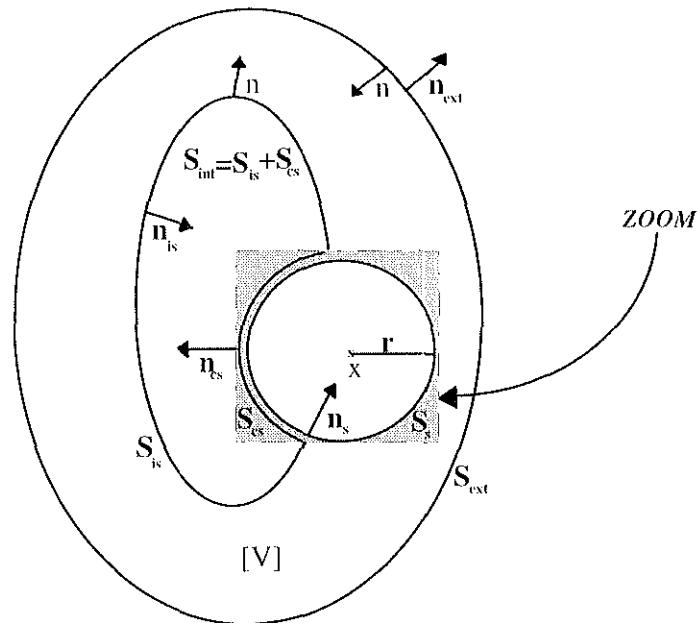


Fig. 2.2 -représentation schématique pour l'obtention des équations intégrales.

Nous avons maintenant la liberté de choisir  $x$  partout sur la surface intérieure  $S_{int}$  du volume  $[v]$ . La surface  $S_{int}$  (fig. 2.1) est alors séparée en deux parties (fig. 2.2), de manière à avoir deux portions distinctes:  $S_{is}$  se trouvant à l'extérieur de l'intersection de  $S_{int}$  et  $S_s$  ( $S_{is} = \mathcal{C}_{S_{int} \cap S_s}$ ) et  $S_{es} = S_{int} \cap S_s$ . L'équation (2.5), exprimée dans le repère source devient, donc :

$$\int_v \{j\omega\mu \mathbf{J}\phi + \mathbf{K} \times \nabla' \phi - (\rho / \epsilon) \nabla' \phi\} dv' =$$

$$\left[ \int_{S_{es}} + \int_{S_{is}} + \int_{S_{es}} + \int_{S_s} \right] \times \{j\omega\mu (\mathbf{n}_s' \times \mathbf{H})\phi - (\mathbf{n}_s' \times \mathbf{E}) \times \nabla' \phi - (\mathbf{n}_s' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \phi\} ds' \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{n}'_s$  représente  $\mathbf{n}_{ext}$ ,  $\mathbf{n}_{is}$ ,  $\mathbf{n}_{es}$  et  $\mathbf{n}_s$ , normales à la surface d'indice correspondant exprimées dans le repère source.

Nous limitons à présent notre étude à la somme des deux intégrales sur  $S_s$  et  $S_{cs}$ , notées  $I$ , lorsque nous faisons tendre  $r = |x - x'|$  vers 0. Quand  $r$  tend vers zéro, les termes de phase des fonctions  $\phi$  et  $\nabla' \phi$  sont négligeables. On prendra donc la valeur moyenne du champ au point  $x'$ , que l'on notera  $\mathbf{E}$ .

En utilisant: 
$$\bar{\nabla}' \phi = \frac{(1 + jkr)}{r} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{(x - x')}{|x - x'|} \quad (2.7)$$

on arrive à : 
$$I = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ -\mathbf{E} \int_{S_s} \frac{\mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{n}'_s}{r^2} ds' - \mathbf{E} \int_{S_{cs}} \frac{\mathbf{n}'_{cs} \cdot \mathbf{n}'_{cs}}{r^2} ds' \right\}$$

D'après la définition de l'angle solide associé au point  $x$  ( $d\Omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^2} ds$  avec  $\mathbf{n}$  normale positive sortant de la région contenant  $x$ ), nous pouvons écrire :

$$d\Omega_s = \frac{\mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{n}'_s}{r^2} ds \quad \text{et} \quad d\Omega_{cs} = -\frac{\mathbf{n}'_{cs} \cdot \mathbf{n}'_{cs}}{r^2} ds$$

Par conséquent, la valeur limite de la somme  $I$ , avec  $x$  à l'intérieur de  $S_s$ , est :

$$I = -\mathbf{E}(x)[4\pi - \Omega_{cs}] \quad (2.8)$$

où  $\Omega_{cs}$  représente la valeur absolue de l'angle solide au point  $x$ , délimité par  $S_{cs}$ , lorsque  $r = |x - x'|^2$  tend vers zéro. Tout ce que nous venons de développer permet à  $x$  d'être localement sur la surface où la tangente en ce point est une fonction non dérivable; néanmoins, il est absolument nécessaire que le champ possède une valeur moyenne finie.

La substitution de (2.8) dans (2.6) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & -\frac{T}{4\pi} \int_v \{j\omega\mu \mathbf{J}\phi + \mathbf{K} \times \nabla' \phi - (\rho / \epsilon) \nabla' \phi\} dv' \\ & - \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{ext} + S_{int}} \{j\omega\mu (\mathbf{n}'_s \times \mathbf{H})\phi - (\mathbf{n}'_s \times \mathbf{E}) \times \nabla' \phi - (\mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{E}) \nabla' \phi\} ds' \end{aligned} \quad (2.9a)$$

avec  $T = (1 - \frac{\Omega}{4\pi})^{-1}$  et  $\oint_{S_{ext} + S_{int}}$  la valeur principale de l'intégrale sur  $S_{ext} + S_{int}$ .

L'intégrale est calculée sur la surface fermée sauf pour tout  $\epsilon$  au voisinage de la singularité. Par la dualité des équations de Maxwell, le champ magnétique peut être écrit dans une forme similaire à celle du champ électrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x) = & \frac{T}{4\pi} \int_v \{j\omega\epsilon\mathbf{K}\phi + \mathbf{J} \times \nabla' \phi - (m/\mu)\nabla' \phi\} dv' \\ & + \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{ext}+S_{int}} \{j\omega\epsilon(\mathbf{n}'_s \times \mathbf{E})\phi - (\mathbf{n}'_s \times \mathbf{H}) \times \nabla' \phi - (\mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{H})\nabla' \phi\} ds' \end{aligned} \quad (2.9b)$$

La situation la plus intéressante est obtenue lorsqu'on suppose que la surface  $S_{ext}$  est à l'infini où le champ  $\mathbf{E}$  et la fonction  $\phi$  sont nuls. Pour les sources dont le rayonnement est limité à l'intérieur du volume  $v$ , nous pouvons appliquer le principe de HUYGENS dit aussi principe d'équivalence. Il stipule que toute distribution de sources extérieures à une région d'espace peut être remplacée par des sources équivalentes, également situées à l'extérieur ou éventuellement à la surface de cette région ( $S_{ext}$ ). Par conséquent, on se réfère à cette contribution (si elle existe) comme à un champ incident et les équations (2.9) seront :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & T \cdot \mathbf{E}^{inc}(x) - \overbrace{\frac{T}{4\pi} \int_v \{j\omega\mu\mathbf{J}\phi + \mathbf{K} \times \nabla' \phi - (\rho/\epsilon)\nabla' \phi\} dv'}^{\text{termes sources}} \\ & - \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{int}} \{j\omega\mu(\mathbf{n}'_s \times \mathbf{H})\phi - (\mathbf{n}'_s \times \mathbf{E}) \times \nabla' \phi - (\mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{E})\nabla' \phi\} ds' \\ \mathbf{H}(x) = & T \cdot \mathbf{H}^{inc}(x) + \overbrace{\frac{T}{4\pi} \int_v \{j\omega\epsilon\mathbf{K}\phi + \mathbf{J} \times \nabla' \phi - (m/\mu)\nabla' \phi\} dv'}^{\text{termes sources}} \\ & + \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{int}} \{j\omega\epsilon(\mathbf{n}'_s \times \mathbf{E})\phi + (\mathbf{n}'_s \times \mathbf{H}) \times \nabla' \phi + (\mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{H})\nabla' \phi\} ds' \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notons qu'implicitement nous supposons que toute inhomogénéité est exclue de  $[v]$  et de la surface  $S$ . En effet, quand la région extérieure à  $S_{ext}$  est homogène et que ses paramètres sont identiques à ceux de  $v$ , l'intégrale sur  $S_{ext}$  représente toujours la contribution due aux sources extérieures à  $S_{ext}$ .

Les équations (2.9) et (2.10) sont dites équations intégrales vectorielles associées aux vecteurs champs  $\mathbf{E}(x)$  et  $\mathbf{H}(x)$  avec  $x$  appartenant à  $S_{int}$ . Elles sont appelées respectivement équation intégrale du champ électrique ("EFIE": Electric Field Integral Equation) et équation intégrale du champ magnétique ("MFIE": Magnetic Field Integral Equation).

Une autre représentation qui utilise seulement une seule variable de champ dans une équation donnée est possible. Représentons par  $H_{ts}$  l'intégrale dans l'équation du champ magnétique sur la surface  $S_{int}$  fermée (dans une région libre on a  $\nabla' \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$ ). Alors, nous pouvons écrire  $H_{ts}$  sous la forme :



$$\mathbf{H}^{ts}(x) = \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} [\mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{H}) \phi + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \phi + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \phi] ds' \quad (2.11)$$

La première étape dans la simplification est de soustraire de l'équation (2.11) l'intégrale de surface qui est de la forme  $\frac{T}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} [(\mathbf{n}' \cdot \nabla')(\phi \mathbf{H}) + \mathbf{n}' \times \nabla' \times (\phi \mathbf{H}) - \mathbf{n}' \cdot \nabla' \cdot (\phi \mathbf{H})] ds'$  et qui est

identiquement nulle; nous utilisons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla' \phi \times (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) &= \mathbf{n}' (\mathbf{H} \cdot \nabla' \phi) - \mathbf{H} (\mathbf{n}' \cdot \nabla' \phi); \\ \mathbf{n}' \times (\nabla' \times (\phi \mathbf{H})) &= -\mathbf{n}' \times (\mathbf{H} \times \nabla' \phi - \phi (\nabla' \times \mathbf{H})); \\ \mathbf{n}' \times (\mathbf{H} \times \nabla' \phi) &= \mathbf{H} (\mathbf{n}' \cdot \nabla' \phi) - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \phi. \end{aligned}$$

L'intégrale de surface en coordonnées rectangulaire peut alors être réduite à la forme :

$$\mathbf{H}^{ts}(x) = \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} \left( \mathbf{H} \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \phi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) \right) ds' \quad (2.12a)$$

De la même façon, l'intégrale de surface pour le champ électrique devient :

$$\mathbf{E}^{ts}(x) = \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \phi (\nabla' \cdot \mathbf{E}) \right) ds' \quad (2.12b)$$

Par conséquent, les équations intégrales obtenues (2.10), appliquées dans un espace libre (l'air où  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont nuls) sont réduites à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= T \cdot \mathbf{E}^{inc}(x) - \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} \{ j\omega\mu (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \phi - (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' \phi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \phi \} ds' \\ \mathbf{H}(x) &= T \cdot \mathbf{H}^{inc}(x) + \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} \{ j\omega\epsilon (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \phi - (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \phi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \phi \} ds', \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dans un espace libre, (2.10) deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= T \mathbf{E}^{inc}(x) - \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \phi (\nabla' \cdot \mathbf{E}) \right] ds' \\ \mathbf{H}(x) &= T \mathbf{H}^{inc}(x) - \frac{T}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} \left[ \mathbf{H} \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \phi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) \right] ds' \end{aligned} \quad (2.14)$$

La représentation (2.13) est la plus usuelle même si elle est plus complexe dans sa forme. La représentation mathématique des conditions aux limites pour des formes arbitraires de surfaces est plus facile à mettre en oeuvre dans (2.13) que dans (2.14). Cependant, les équations (2.14) sont utilisées en 2D où la séparation entre les modes TE et TM facilite une simple interprétation des termes de l'intégrale.

## II - 2. CAS SPÉCIAUX DE DIFFRACTION.

Dans l'étude de la diffraction électromagnétique par différents types d'obstacles, les expressions des équations intégrales qui viennent d'être établies trouvent de larges applications. Les cas traités dans notre étude se rattachent à des classes de problèmes pour lesquels on a seulement une source à l'infini (une antenne par exemple). Une modification simple suffit si nous prenons en compte les cas où il y a une source primaire à l'intérieur du domaine.

Bien que toute notre attention soit consacrée aux équations intégrales de surface, un autre type de formulation qui emploiera la distribution volumique des sources du problème est exigé dans le cas de diffraction par un obstacle diélectrique. Dans ce cas on aboutit à la résolution d'une équation intégrale volumique.

Avant tout développement, il est nécessaire de définir l'inconnue fondamentale. Souvent on s'intéresse à la détermination exacte des champs diffractés ( $\mathbf{E}^s(x)$  ou  $\mathbf{H}^s(x)$ ). A l'extérieur du volume [V] contenant l'objet diffractant, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}^{inc}(x) + \mathbf{E}^s(x) \\ \mathbf{H}(x) &= \mathbf{H}^{inc}(x) + \mathbf{H}^s(x) \end{aligned}$$

Les champs ci-dessus peuvent être déterminés facilement à partir des équations (2.10) : on considère simplement la contribution de la part des intégrales sur l'enveloppe de  $V_x$  avec T égal à 1 quand x n'est pas sur  $\partial V_x$ . Par conséquent, les champs diffractés sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(x) &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_x} \left\{ j\omega\mu(n' \times \mathbf{H})\phi - (n' \times \mathbf{E}) \times \nabla' \phi - (n' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \phi \right\} ds' \\ \mathbf{H}^s(x) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_x} \left\{ j\omega\epsilon(n' \times \mathbf{E})\phi - (n' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \phi - (n' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \phi \right\} ds' \end{aligned} \quad (2.15a)$$

Le système (2.15a) représente les équations intégrales du champ diffracté en fonction des champs (ou des sources équivalentes) sur la surface de l'objet diffractant. Les champs diffractés peuvent être aussi déterminés à partir des distributions volumiques des sources induites (i.e.) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{V_x} \left\{ j\omega\mu \mathbf{J} \phi - \mathbf{K} \times \nabla' \phi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \phi \right\} dv' \\ \mathbf{H}^s(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_x} \left\{ -j\omega\epsilon \mathbf{K} \phi + \mathbf{J} \times \nabla' \phi + \frac{m}{\mu} \nabla' \phi \right\} dv' \end{aligned} \quad (2.15b)$$

La détermination des champs dans l'intégrale de (2.15) demande la résolution des équations intégrales déjà écrites. Au cours de notre étude, nous avons montré qu'il est toujours possible d'écrire plusieurs équations intégrales (systèmes d'équations) pour le même problème. Il faut alors que les équations intégrales choisies que l'on cherche à résoudre soient bien adaptées aux problèmes spécifiques. Un choix judicieux des inconnues simplifie la procédure de détermination de la solution. Les seules difficultés numériques pouvant se présenter sont les problèmes de singularités et de discontinuités.

## II - 2.1. DIFFRACTION PAR UN OBJET CONDUCTEUR PARFAIT.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la diffraction par un objet conducteur électrique parfait de surface  $S$ . Ce dernier est illuminé par un champ électromagnétique représenté par  $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$ . Nous nous intéressons en effet à cette configuration car, étant donné les hautes valeurs de fréquence ( $\geq$  GHz), la profondeur de pénétration des courants dans les « bons » conducteurs est suffisamment faible pour que ceux-ci puissent être considérés comme parfaits. Dans un problème classique de radar, la source de ces champs est à l'infini. Elle donne lieu à une onde incidente plane. Considérons le problème illustré ci-dessous (fig. 2.3) :

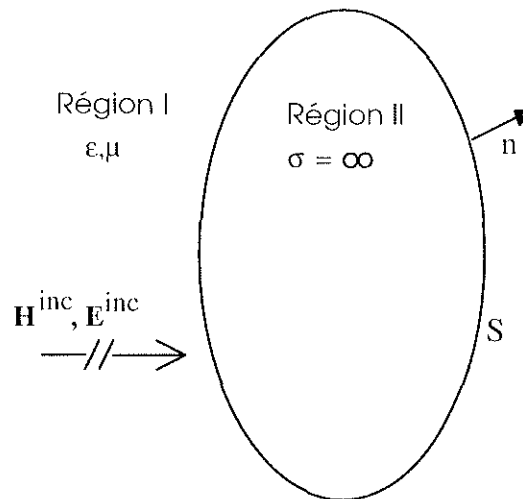


Fig. 2.3 - Diffraction par un objet conducteur parfait.

Les conditions d'interfaces sur la surface  $S$  stipulent que le champ électrique tangentiel est nul ( $E_t = 0$ ), i.e.  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ , et de plus  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ . Alors, il est immédiat d'écrire les EFIE et

MFIE à partir des équations (2.10) exprimées pour les composantes tangentielles des champs sur la surface  $S$  ; avec  $\Omega = 2\pi$  ( $\Rightarrow T = 2$ ), on aura :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{inc}(x) &= \frac{1}{4\pi} \times \mathbf{n} \oint_S \{ j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})\phi - (\mathbf{n}' \times \mathbf{E})\nabla' \phi \} ds' \quad x \in S \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}(x) &= 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(x) + \frac{1}{2\pi} \mathbf{n}' \times \oint_S (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \phi ds' \quad x \in S \end{aligned} \quad (2.16)$$

Notons que *la seconde équation a une seule inconnue*, alors que *la première équation a deux inconnues* dans l'intégrale. En utilisant les équations de Maxwell, on peut établir que :

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E} = \frac{j}{\omega\epsilon} \nabla_s' \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H})$$

où  $\nabla_s'$  : représente l'opérateur de divergence de surface dans les coordonnées sources.

Si nous introduisons la notation des sources équivalentes :  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ , les deux équations peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{inc}(x) &= \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \mathbf{n} \times \oint_S \left( -\omega^2 \mu\epsilon \mathbf{J}_s \phi + \nabla_s' \cdot \mathbf{J}_s \nabla' \phi \right) ds', \quad x \in S \\ \mathbf{J}_s(x) &= 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(x) + \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \oint_S \mathbf{J}_s \times \nabla' \phi ds', \quad x \in S \end{aligned} \quad (2.17)$$

La première équation en champ électrique est appelée équation intégrale de première espèce car l'inconnue est seulement sous le signe intégrale. Dans la deuxième équation en champ magnétique, l'inconnue est en même temps à l'extérieur et sous le signe intégral: elle est alors appelée équation intégrale de seconde espèce. L'une de ces deux équations peut être utilisée pour calculer le courant surfacique équivalent. L'utilisation d'une équation intégrale plutôt que l'autre est généralement dictée par la géométrie de l'objet de diffraction et par la technique de résolution. Étant donné que l'inconnue est en même temps à l'extérieur et sous le signe intégral dans l'équation de seconde espèce, cette dernière est généralement préférée puisque l'inconnue en un point donné de la surface dépendra de toutes les autres contributions sur la surface. Cependant, cette équation devient inutilisable lorsque la surface  $S$  devient très petite, ceci étant dû aux facteurs géométriques dans l'intégrale. Il est aussi idéal d'utiliser l'EFIE dans le cas des objets minces et la MFIE pour les conducteurs larges et de surface régulière, car, dans ce dernier cas, les facteurs géométriques tendent souvent à mettre l'importance de la contribution de l'intégrale au second plan.

## II - 2.2. DIFFRACTION PAR UN OBJET DIÉLECTRIQUE.

Considérons un objet diélectrique dont l'enveloppe extérieure coïncide avec la surface  $S$  (fig. 2.4) et ayant une permittivité de valeur  $\epsilon_2$ .

Deux approches différentes ont été développées; pour plus de détails mathématiques le lecteur se référera au développement rigoureux de MÜLLER [39].

### II - 2.2.1. L'approche à l'aide des équations intégrales surfaciques.

Pour que les conditions d'interfaces sur la surface  $S$  soient satisfaites, il faut que les composantes tangentielles des vecteurs champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  soient continues. Par conséquent, nous déduisons des équations de champs que la composante normale de  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  est aussi continue.

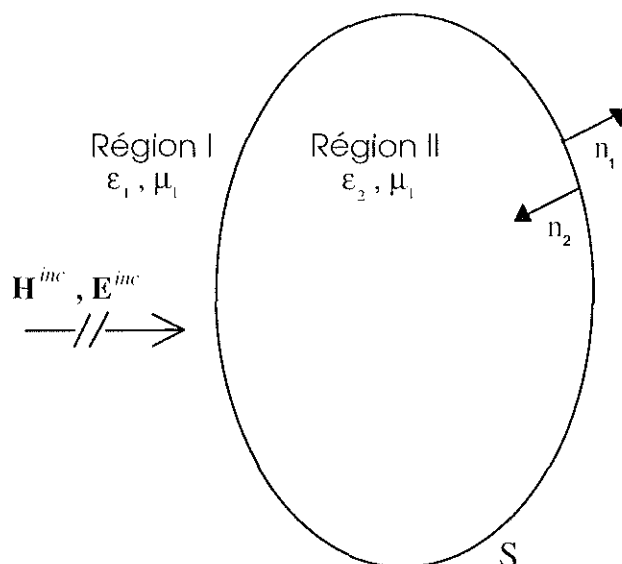


Fig. 2.4 - Diffraction par un objet diélectrique.

On peut alors écrire les équations intégrales pour les composantes tangentielles de champs sur  $S$ , dans les régions I et II respectivement ( $x$  est sur  $S$ ) :

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1(x) = T\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}^{inc}(x) - \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \oint_S \{ j\omega\mu(\mathbf{n}_1' \times \mathbf{H}_1) \phi_1 - (\mathbf{n}_1' \times \mathbf{E}_1) \times \nabla' \phi_1 - (\mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{E}_1) \nabla' \phi_1 \} ds'$$

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1(x) = T\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}^{inc}(x) + \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \oint_S \{ j\omega\epsilon(\mathbf{n}_1' \times \mathbf{E}_1) \phi_1 + (\mathbf{n}_1' \times \mathbf{H}_1) \times \nabla' \phi_1 + (\mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{H}_1) \nabla' \phi_1 \} ds'$$

Les mêmes équations seront écrites dans la région II, en remplaçant seulement l'indice 1 par l'indice 2 dans les équations précédentes avec :

$$\phi_i = \frac{e^{-jk_i(x-x')}}{|x-x'|}; \quad k_i = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_i}; \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 \quad \text{et} \quad x \in S$$

La condition de continuité des composantes tangentielles du champ est :

$$\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad ; \quad \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad \text{sur } S$$

La condition de continuité de la composante normale de  $\mathbf{D}$  est :

$$\mathbf{n}_1 \times (\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2) = 0$$

Par combinaison des équations intégrales on aura ( $x$  est sur  $S$ ):

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{inc}(x) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \oint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H}_i)(\phi_1 + \phi_2) - (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}_i) \times \nabla'(\phi_1 + \phi_2) - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}_i) \nabla'(\phi_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \phi_2) \right\} ds'$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(x) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \oint_S \left\{ j\omega\varepsilon_1(\mathbf{n}' \times \mathbf{E}_i)(\phi_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \phi_2) + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}_i) \times \nabla'(\phi_1 + \phi_2) + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}_i) \nabla'(\phi_1 + \phi_2) \right\} ds'$$

Si nous remplaçons les indices des champs et des normales, nous aurons au total quatre équations scalaires avec six inconnues ( $E_1, E_2, H_1, H_2, \phi_1, \phi_2$ ). Il manque deux équations, qui sont obtenues en utilisant les relations des composantes normales des équations de Maxwell sur la surface  $S$  :

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla'_s \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H})$$

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla'_s \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E})$$

En utilisant les expressions des courants surfaciques équivalents :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n}' \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{K}_s = -\mathbf{n}' \times \mathbf{E}$$

on aura :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{inc}(x) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \oint_S \left\{ j\omega\mu \mathbf{J}_s(\phi_1 + \phi_2) - \mathbf{K}_s \times \nabla'(\phi_1 + \phi_2) - \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} (\nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s) \nabla'(\phi_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \phi_2) \right\} ds'$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(x) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \oint_S \left\{ j\omega\varepsilon_1 \mathbf{K}_s(\phi_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \phi_2) - \mathbf{J}_s \times \nabla'(\phi_1 + \phi_2) + \frac{1}{j\omega\mu} (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}_s) \nabla'(\phi_1 + \phi_2) \right\} ds' \quad (2.18)$$

Il y a à présent autant d'équations que d'inconnues dans (2.18); cependant une autre difficulté numérique apparaît : c'est la dérivation surfacique des courants de surface dans l'intégrale.

## II - 2.2.2. L'approche à l'aide des équations intégrales volumiques.

Une autre approche utilise les distributions volumiques de sources équivalentes appelée par certains auteurs *approche à l'aide du courant de polarisation*. Les Équations Intégrales appropriées sont déduites en écrivant les équations de Maxwell dans les deux régions :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_1 = -j\omega\mu_1 \mathbf{H}_1; & \nabla \times \mathbf{H}_1 = j\omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 & \text{dans la région I} \\ \nabla \times \mathbf{E}_2 = -j\omega\mu_1 \mathbf{H}_2; & \nabla \times \mathbf{H}_2 = j\omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 = j\omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_2 + j\omega(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mathbf{E}_2 & \text{dans la région II} \end{cases}$$

Dans cette dernière équation de Maxwell modifiée, nous pouvons noter que tous les vecteurs champs, tant qu'ils existent à l'intérieur du volume [V] de paramètres physiques  $\varepsilon_1$  et  $\mu_1$  enveloppé par une surface S, peuvent être interprétés comme étant des vecteurs de densité de courant équivalent. Ils sont donnés par  $\mathbf{J}_c = -j\omega(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mathbf{E}_2$ . Cette distribution volumique de sources de courant équivalent peut être utilisée dans l'équation intégrale donnée par (2.10). En gardant en mémoire que la charge surfacique apparente est due à la discontinuité de la constante diélectrique et aboutit donc à une intégrale surfacique, nous arrivons à l'équation intégrale :

$$\mathbf{E}_2(x) = \mathbf{E}^{inc}(x) + \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right) \omega^2 \mu \varepsilon_1 \mathbf{E}_2 \phi \cdot dV + \oint_S \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right) (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}_2) \nabla' \phi \cdot dS' \quad x \in S \quad (2.19)$$

La formulation représentée par l'équation (2.19) est plus simple que celle présentée par l'équation (2.18), mais elle est écrite pour tout x appartenant à [V]; il faut donc prendre en compte tous les points à l'intérieur du volume [V]. Dans cette formulation, quelques caractéristiques intéressantes apparaissent : la première, la plus significative, est que l'hétérogénéité du diélectrique modifie l'intégrale volumique d'une manière très simple. Cependant, nous ne pouvons pas modifier n'importe comment les constantes de propagation dans le corps diélectrique. La seconde caractéristique est que la forme de l'équation intégrale (2.19) obtenue quand  $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$  est évidente et aucune question ne se pose sur les équations superflues ou indéterminées comme celles déduites dans la formulation en intégrales surfaciques.

## II - 3. LA FORMULATION INTÉGRALE EN RÉGIME TEMPOREL POUR LES CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES PARFAITS.

En régime transitoire le modèle mathématique est obtenu à partir des équations de Maxwell temporelles, en suivant la même démarche qu'en régime harmonique et en définissant la fonction de Green appropriée au problème. La fonction de Green doit vérifier ces équations différentielles ainsi que les conditions aux limites. La solution est exprimée en fonction de la source multipliée par cette fonction de Green. Nous déterminons dans cette partie la formulation permettant la résolution du problème directement en régime temporel. Dans le chapitre suivant nous verrons comment est discrétisée l'équation intégrale obtenue ainsi que les techniques numériques envisagées pour sa résolution.

Nous proposons d'étudier un objet conducteur parfait, illuminé par une onde électromagnétique. Les équations de Maxwell qui régissent ce phénomène sont :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.20}$$

$\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sont respectivement le champ électrique et magnétique,  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité électrique.

En combinant ces dernières équations (2.20), nous aboutissons à l'équation d'onde vectorielle pour le champ magnétique  $\mathbf{H}$  (pour plus de détails voir [40][41]).

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla \times \mathbf{J}\tag{2.21}$$

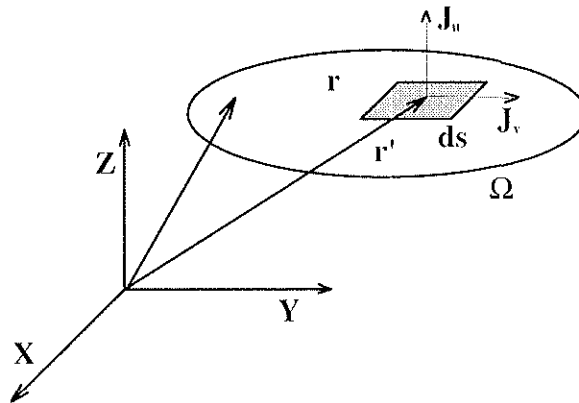


Fig. 2.5 - La géométrie d'un objet diffracteur avec un élément de surface ds.



La fonction de Green appropriée doit vérifier :

$$\nabla \times \nabla \times G + \mu\epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \mathbf{p}\delta(t-t')\delta(t-t') + \nabla(\nabla \cdot G)$$

avec

$$G = \mathbf{p}G(r, r'; t, t') = \mathbf{p} \frac{\delta(t-t' - R/c)}{4\pi R} \quad (2.22)$$

$G$  est la solution de l'équation d'onde scalaire en 3D [31].

$\mathbf{p}$  est un vecteur arbitraire.

$t$  et  $t'$  sont respectivement le temps au point observateur et au point source.

$R$  est la distance euclidienne entre le point observateur et le point source.

$c = \sqrt{\epsilon\mu}$  est la vitesse de propagation électromagnétique de la lumière.

Toutes les variables indiquées en prime(') sont exprimées dans le repère source; sans le prime, elles sont exprimées dans le repère de l'observateur.

L'application du théorème de l'équivalence de Green avec tous les opérateurs exprimés dans le repère source permet d'écrire:

$$\int_{t'=0}^{t^+} \iiint_{\Omega} \{ \mathbf{A} \cdot \nabla' \times \nabla' \times G - G \cdot \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{A} \} d\Omega dt' =$$

$$\int_{t'=0}^{t^+} \iint_{\Gamma} \{ G \times \nabla' \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla' \times G \} \cdot \vec{n} \, d\Gamma dt' \quad (2.23)$$

avec  $t^+ = t + \epsilon$ , où  $\epsilon$  est le plus petit pas de temps d'incrémentatation pour que l'intégration soit calculée avant le pic de la fonction  $d$ .

En appliquant ce théorème aux équations différentielles de D'Alembert (2.21) et avec une certaine manipulation (voir [41] pour le cas du régime harmonique) on obtient une relation intégrale reliant le champ incident à la densité de courant électrique sur la surface du conducteur (Equation intégrale du champ magnétique, Magnetic Field Integral Equation):

$$T(r) \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}(r, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(r, t) - \mathbf{n} \times \int_{t'=0}^{t^+} \iint_{\Gamma} (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(r', t')) \times \nabla' G(r, r'; t, t') d\Gamma dt' \quad (2.24)$$

$\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $G$ .

$\mathbf{H}$  est le vecteur champ magnétique.

$\nabla$  est l'opérateur divergence.

$T(r)$  est le coefficient de singularité : il vaut  $1/2$  lorsque le point observateur est sur la surface régulière, et  $\Omega / 4\pi$  pour les points situés sur les arêtes ou sur les coins.

$W$  est l'angle solide.

La valeur de  $T(r)$  dépend du coté de la surface par lequel le volume caché est vu.

En injectant dans l'équation (2.24) la densité de courant  $\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$  et  $[t'=0, t^+]$ , nous obtenons:

$$T(r) \cdot \mathbf{J}(r, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(r, t) - \mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left\{ \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{RC} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \mathbf{J}(r', t') \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right\} \Big|_{t'=t-RC} d\Gamma \quad (2.25)$$

L'équation (2.25) est très simple, car elle ne présente qu'une seule inconnue, la densité de courant  $\mathbf{J}$ . C'est une équation intégrale de seconde espèce, cas favorable pour une approximation numérique. Elle ne pose pas beaucoup de problèmes. Cependant, elle présente une singularité des termes géométriques d'ordre  $O(1/R)$  pour les schémas d'ordre 2 sur les surfaces régulières. De plus, les composantes du vecteur normal ne sont pas uniques aux points de singularité géométrique pour les surfaces discontinues ou irrégulières. Ces difficultés seront supprimées en déplaçant les noeuds des éléments par rapport aux noeuds de singularité géométrique (utilisation des éléments semi-discontinus) [42].

## II - 4. CONCLUSION.

Les équations intégrales proviennent directement des équations de Maxwell en utilisant la formulation vectorielle du théorème de Green et les conditions aux limites imposées sur la frontière.

Deux types d'équations intégrales sont déduites pour les problèmes de diffraction électromagnétique: les équations intégrales dues au champ électrique (EFIE) et celles dues au champ magnétique (MFIE). Elles peuvent être obtenues pour les cas où la surface de l'objet diffracteur est assimilée à un conducteur électrique parfait, un diélectrique, un domaine avec une condition d'impédance sur la frontière ou un fil fin.

En suivant la même démarche qu'en régime harmonique, une formulation intégrale en régime transitoire a été déterminée en définissant une fonction de Green appropriée, qui vérifie les équations différentielles du problème temporel ainsi que ses conditions aux limites.

Dans notre étude, nous nous intéressons à des classes de problèmes où nous avons seulement une source à l'infini. Deux formulations en équations intégrales sont possibles : les équations intégrales surfaciques, qui sont les plus utilisées et les équations intégrales volumiques qui sont exigées dans le cas de la diffraction par un obstacle diélectrique, et pour lesquelles nous avons une distribution volumique des sources du problème.

Nous allons établir dans le prochain chapitre le développement numérique des équations intégrales obtenues dans le cas de diffraction par un objet conducteur parfait ou diélectrique en régime harmonique et pour le cas d'un conducteur parfait en régime transitoire. Nous verrons en particulier comment traiter les problèmes de singularité et de discontinuité.

Nous allons établir dans le prochain chapitre le développement numérique des équations intégrales obtenues dans le cas de diffraction par un objet conducteur parfait ou diélectrique en régime harmonique et pour le cas d'un conducteur parfait en régime transitoire. Nous verrons en particulier comment traiter les problèmes de singularité et de discontinuité.

## **CHAPITRE III**

# **DÉVELOPPEMENT NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES POUR LA DIFFRACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE**

Dans le chapitre I, nous avons vu que la méthode des équations intégrales de frontière est bien adaptée à la résolution des problèmes de diffraction électromagnétique, que ce soit en régime harmonique ou en régime temporel. Cette méthode présente en effet de nombreux avantages, surtout pour l'étude des domaines ouverts.

Dans le chapitre II, nous avons formulé, à partir des équations de Maxwell, deux types d'équations intégrales: les équations intégrales dues au champ électrique (EFIE) et les équations intégrales dues au champ magnétique (MFIE).

Nous allons à présent établir le développement numérique des équations intégrales pour la diffraction électromagnétique et nous verrons comment sont résolus les problèmes de singularité et de discontinuité.

### III - 1. LE RÉGIME HARMONIQUE.

#### III - 1.1. CAS D'UN OBJET CONDUCTEUR PARFAIT.

Considérons un objet conducteur électrique parfait de surface  $S$ , illuminé par un champ électromagnétique incident représenté par les vecteurs champs  $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$ . La source de ces champs est supposée à l'infini et donne lieu à une onde plane incidente (fig. 3.1) :

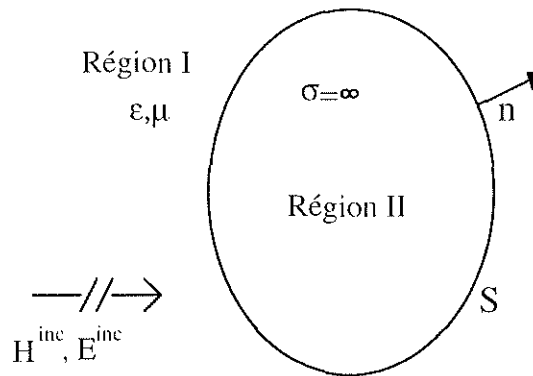


Fig. 3.1.- Diffraction par un objet conducteur électrique parfait.

Dans le système d'équation (2.17), la formulation due au champ magnétique (M.F.I.E) est donnée par :

$$\mathbf{J}(x) = 2 \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(x) + \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \oint_S \mathbf{J}_s(y) \times \nabla_y \Phi ds(y) \quad x \in S \quad (3.1)$$

avec :

$$\Phi(R) = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad \text{la fonction de Green}$$

$R$  est la distance entre le point observateur  $x$  (point de calcul) et le point source  $y$ .

$\mathbf{n}$  est le vecteur unité normal à la surface  $S$ .

$\mathbf{J}$  est la densité du courant total au point observateur  $x$ .

Cette équation peut être résolue numériquement en discrétisant la surface  $S$  de l'objet en éléments de surface quadrilatéraux comme le montre la figure 3.2 pour le cas d'un objet de forme cylindrique ou sphérique. Cette discrétisation géométrique utilise les fonctions de formes [40]  $N_j$ , telles que :

$$y(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^{Ns} \bar{y}_j N_j(u_1, u_2) \quad i = [1,3]$$

$\bar{y}_j$ : la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée dans l'élément de discrétisation.

$(u_1, u_2)$ : repère local

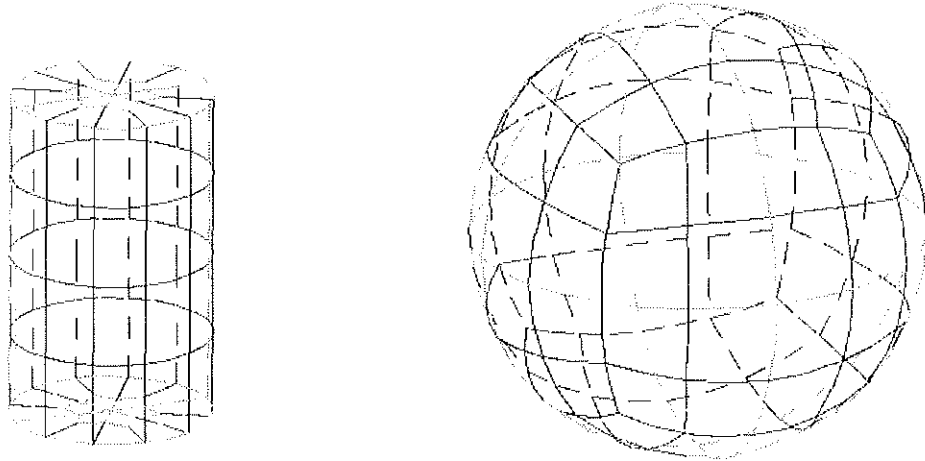
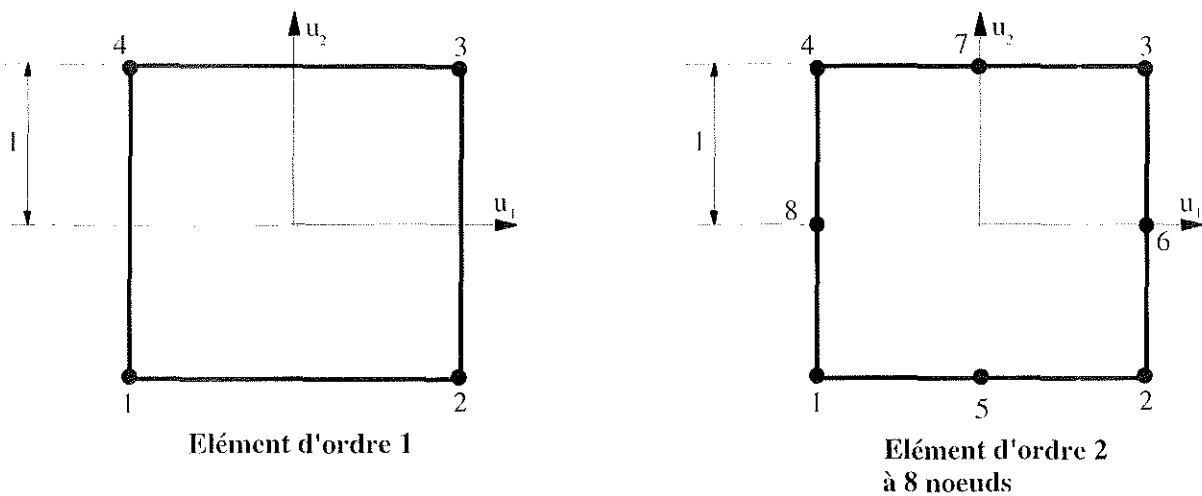


Fig. 3.2 - Construction du maillage d'une sphère et d'un cylindre.

Dans chaque élément de frontière, le courant  $J$  est approché par des fonctions d'interpolation de la même classe que les fonctions de forme utilisées dans la discrétisation géométrique.

Les schémas linéaire et quadratique incomplet utilisés avec leurs fonctions d'interpolations sont :



$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4}(u_1 - 1)(u_2 - 1) \\ N_2 = \frac{1}{4}(u_1 + 1)(u_2 - 1) \\ N_3 = \frac{1}{4}(u_1 + 1)(u_2 + 1) \\ N_4 = \frac{1}{4}(u_1 - 1)(u_2 + 1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4}(u_1 - 1)(u_2 - 1)(-u_1 - u_2 - 1) \\ N_2 = \frac{1}{4}(u_1 + 1)(u_2 - 1)(-u_1 + u_2 + 1) \\ N_3 = \frac{1}{4}(u_1 + 1)(u_2 + 1)(u_1 + u_2 - 1) \\ N_4 = \frac{1}{4}(u_1 - 1)(u_2 + 1)(u_1 - u_2 + 1) \\ N_5 = \frac{1}{2}(1 - u_1^2)(1 - u_2) \\ N_6 = \frac{1}{2}(1 + u_1)(1 - u_2^2) \\ N_7 = \frac{1}{2}(1 - u_1^2)(1 + u_2) \\ N_8 = \frac{1}{2}(1 - u_1)(1 - u_2^2) \end{array} \right.$$

Donc :

$$J_i(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^{N_s} J_j^i N_j(u_1, u_2) \quad i = [1, 3]$$

$J_j^i$  : représente la i-ème composante de la densité du courant surfacique au j-ème noeud fonctionnel dans l'élément.

Par conséquent, l'équation (3.1) MFIE discrétisée peut être mise sous la forme suivante :

$$2 \cdot [n \times H^{inc}(x)] = J_s(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{N_e=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{N_s} \oint_{s_e} \left( n(x) \times \left[ J_k \cdot N_k(y) \times \nabla_y \frac{e^{-jkR}}{R} \right] \right) ds_e(y) \quad (3.2)$$

$N_t$  est le nombre total d'éléments.

$N_s$  est le nombre total des noeuds dans l'élément de surface  $S_e$  ( $N_s = 4$  pour le schéma d'ordre 1,  $N_s = 8$  ou 9 pour le schéma d'ordre 2).

Avec :

$$\vec{\nabla} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) = \left( jk + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-jkR}}{R^2} (x_j - y_j) \vec{e}_j \quad (3.3)$$

En posant

$$\vec{V}_{kj} = N_k(y) \left( jk + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-jkR}}{R^2} (x_j - y_j) \vec{e}_j$$

nous aboutissons à l'équation finale discrétisée sous la forme :

$$2. \left[ \mathbf{n}(x) \times \mathbf{H}^{inc}(x) \right] = \mathbf{J}_s(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{N_e=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{N_s} \oint \left[ n_i \mathbf{J}_{kj} \cdot \mathbf{V}_{ki} - n_j \mathbf{J}_{ki} \cdot \mathbf{V}_{kj} \right] e_j ds_e(y) \quad (3.4)$$

### III - 1.2. CAS D'UN OBJET DIÉLECTRIQUE.

Soit un objet diélectrique dont l'enveloppe extérieure coïncide avec la surface S (fig. 3.3) et ayant une permittivité de valeur  $\epsilon_2$ .

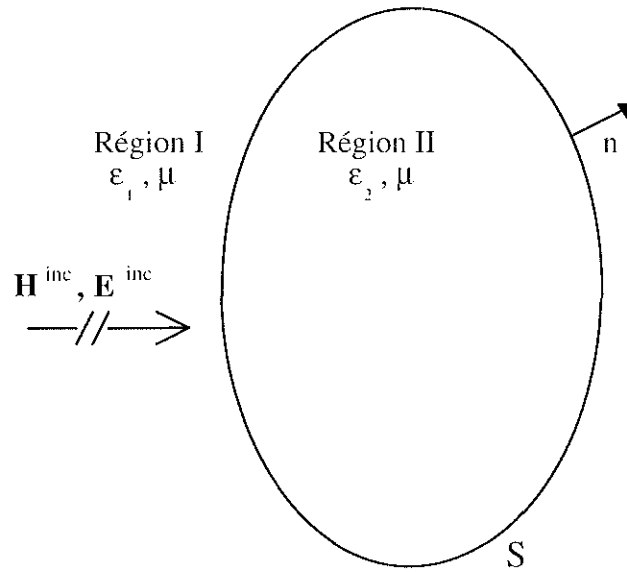


Fig. 3.3 - Diffraction par un objet diélectrique

Du système d'équations (2.18) développé dans le second chapitre pour l'approche surfacique, nous avons (x est sur S):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{inc}(x) &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \oint_s \left\{ j\omega\mu \mathbf{J}_s(\phi_1 + \phi_2) - \mathbf{K}_s \times \nabla'(\phi_1 + \phi_2) - \frac{1}{j\omega\epsilon_1} (\nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s) \nabla'(\phi_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \phi_2) \right\} ds' \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(x) &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \oint_s \left\{ j\omega\epsilon_1 \mathbf{K}_s(\phi_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \phi_2) - \mathbf{J}_s \times \nabla'(\phi_1 + \phi_2) + \frac{1}{j\omega\mu} (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}_s) \nabla'(\phi_1 + \phi_2) \right\} ds' \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec :

$$\phi_i(R) = \frac{e^{-jk_i R}}{R} \quad \text{la fonction de Green dans le milieu } i \ [i=1, 2]$$

$k_i$  est la constante de propagation dans le milieu  $i$ ,  $k_i = \omega \sqrt{\mu_i \epsilon_i}$

$R$  est la distance entre le point observateur  $x$  et le point source  $y$ .

$\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $S$ .



Dans un repère cartésien on a :

$$\nabla \cdot X_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix} \quad \text{avec } X_s = J_s \text{ ou } K_s$$

En suivant la même démarche que dans le cas d'un conducteur parfait, l'équation intégrale (3.5) discrétisée devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{inc}(x) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{N_c=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{N_s} \oint_{s_c} \left\{ \mathbf{n}(x) \times \left( j\omega\mu \mathbf{J}_k \cdot N_k \cdot (\phi_1 + \phi_2) - \mathbf{K}_k \cdot N_k \times \nabla_y(\phi_1 + \phi_2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{j\omega\epsilon_1} \nabla_y(\mathbf{J}_k \cdot N_k) \cdot \nabla_y(\phi_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \phi_2) \right) \right\} ds_c(y) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{inc}(x) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{N_c=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{N_s} \oint_{s_c} \left\{ \mathbf{n}(x) \times \left( j\omega\epsilon_1 \mathbf{K}_k \cdot N_k \cdot (\phi_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \phi_2) - \mathbf{J}_k \cdot N_k \times \nabla_y(\phi_1 + \phi_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_y(\mathbf{K}_k \cdot N_k) \cdot \nabla_y(\phi_1 + \phi_2) \right) \right\} ds_c(y) \end{aligned} \quad (3.6)$$

### III - 2. LE RÉGIME TEMPOREL.

Les problèmes d'identification (target identification) et de compatibilité électromagnétique font souvent intervenir les phénomènes d'interaction en impulsions électromagnétiques.

Dans cette partie, nous étudierons la discrétisation de l'équation intégrale obtenue pour le régime temporel et nous verrons que le système linéaire qui en découle est petit devant celui obtenu en appliquant la méthode des différences finies ou éléments finis. La matrice de ce système est cependant pleine et dépend du temps de retard du signal électromagnétique.

Les méthodes intégrales appliquées aux phénomènes de diffraction électromagnétique peuvent être divisées en deux groupes suivant le type de résolution: une résolution intégrale pour le régime harmonique comme dans le cas précédent et une résolution temporelle comme nous allons le voir par la suite. La façon la plus répandue pour obtenir une réponse temporelle est d'appliquer une transformation de Fourier aux solutions obtenues en régime harmonique.

La méthode que nous proposons ici est la résolution du problème directement en régime temporel. Nous appliquons une résolution pas à pas dans le temps avec ou sans algorithme d'inversion de matrice; tout dépend de la représentation de la solution sur la surface. Il est en effet possible d'avoir directement la solution temporelle au problème de diffraction, en discrétisant l'équation obtenue en éléments de frontières. Nous discuterons l'utilisation des éléments de frontières semi-discontinus et l'obtention d'une solution stable via la technique d'inversion de matrices.

La discrétisation de l'équation intégrale de seconde espèce (2.25) obtenue dans le chapitre précédent est résolue en discrétisant la surface fermée G de la région considérée W (fig. 2.5) en éléments de surface. L'équation discrétisée obtenue est de la forme suivante :

$$T_i(r_i) \cdot \mathbf{J}_i(r_i, t) = \mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_i^{inc}(r_i, t) - \mathbf{n}_i \times \sum_{j=1}^N \iint_{\Gamma_j} \left\{ \mathbf{J}_j(r_j', t') \times L(R_{ij}, t') \right\} \Big|_{t'=t-R_{ij}/C} d\Gamma \quad (3.7)$$

$$L(R_{ij}, t') = \frac{R_{ij}}{R_{ij}} \left( \frac{1}{R_{ij}^2} + \frac{1}{R_{ij}} \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

Considérons tous les noeuds du maillage N ( $i=1, \dots, N$ ), pendant la durée de K intervalles de temps ( $l=1, \dots, K$ ), nous aboutissons alors à un système d'équations linéaires qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{A}_K] \{ \mathbf{J}_K \} = \{ \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_K^{inc} \} - \sum_{l=\max(1, K-L_{ret})}^{K-1} [\mathbf{A}_l] \{ \mathbf{J}_l \}$$

$$L_{ret} = \text{int} \left( \frac{\max(R_{ij} / C)}{\Delta t} \right) + 1 \quad (3.8)$$

Les matrices  $[\mathbf{A}_j]$  sont calculées à partir de l'équation intégrale discrétisée (3.8), où chaque intervalle de temps  $t_l$  dans le passé (contenant le nombre  $L_{ret}$  de pas de temps qui est donné par le temps de retard du signal électromagnétique) génère sa propre matrice  $[\mathbf{A}_j]$ . L'axe du temps est subdivisé en éléments d'intervalles constants où nous supposons que les variations des quantités de champs sont linéaires.

Les termes de droite dans le système d'équations (3.8) contiennent seulement le champ incident  $\mathbf{H}^{inc}$  et les valeurs de courants de surface déjà connues aux pas de temps écoulés.

La solution à un pas de temps donné sera donc déterminée en construisant toutes les solutions des différents pas de temps écoulés. Cette méthode est appelée résolution pas à pas dans le temps.

Cette méthode détermine seulement la solution suivant un seul angle d'incidence. Cependant, une fois que les coefficients de la matrice finale sont déterminés et stockés, nous n'avons pas besoin de répéter entièrement le calcul numérique pour déterminer les matrices d'entrées pour des angles d'incidence différents. Ainsi, la solution est obtenue par la multiplication de la matrice finale obtenue pour le dernier pas de temps (une fois inversée et restaurée) par les termes de droite du système.

Ces derniers se composent du vecteur champ incident évalué aux points de collocation et des valeurs de courants aux différents pas de temps (Ils sont multipliés par leur matrice appropriée représentant le passé). Il suffit alors de multiplier les coefficients de la matrice globale finale par le nouveau coefficient d'incidence de champ, et la nouvelle solution sera obtenu par une résolution comparable à celle utilisée en régime harmonique.

### III - 3. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES LIÉES AUX PROBLÈMES DE DIFFRACTION PAR DES OBJETS CONDUCTEURS PARFAITS EN RÉGIME HARMONIQUE.

Dans cette partie nous allons nous restreindre à la résolution numérique des équations intégrales liées aux problèmes de diffraction par des objets conducteurs parfaits en 3D et en régime harmonique.

Pour résoudre numériquement les équations intégrales MFIE ou EFIE obtenues, nous utilisons la méthode dite *des équations intégrales de frontière* (Boundary Element Method) [44][45][46][47]. Elle est bien adaptée aux problèmes traités dans les domaines ouverts et elle présente peu d'inconvénients (voir § I - 10.2). Parmi ceux-ci nous pouvons citer les problèmes de singularité et de discontinuité. Nous allons montrer comment résoudre ces problèmes et la validation de la méthode sera réalisée dans le chapitre IV avec l'étude de diffraction par des objets de forme géométrique simple (sphérique).

Des équations intégrales MFIE et EFIE (2.16)-(2.17) déterminées pour un objet conducteur parfait, nous avons déduit que l'équation intégrale MFIE est la plus simple à utiliser car l'inconnue en un point donné de la surface dépend uniquement des autres contributions sur la surface. Il faut cependant noter que cette équation devient inutilisable lorsque la surface  $S$  se rétrécit en un très petit diffracteur, les facteurs géométriques dans l'intégrale étant responsables de ce comportement.

### III - 3.1. TRAITEMENT DE L'INTÉGRALE SINGULIÈRE.

L'utilisation des éléments finis isoparamétriques dans l'équation discretisée (3.4) va nous conduire à utiliser des formules de quadrature numérique pour calculer sur chaque élément une intégrale  $I$  écrite sous la forme suivante :

$$I = \oint_{A_c} \mathbf{n}(x) \times \left[ \mathbf{J}(y) \times \nabla \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) \right] dA_c(y) \quad (3.9)$$

Cependant, quand le point source  $y$  est localisé à l'intérieur de l'élément, l'équation (3.9) est difficile à intégrer pour le schéma quadratique (ordre 2), comme nous allons le montrer dans ce qui suit: en particulier, il y a un noyau singulier lorsque  $R$  tend vers 0.

#### III - 3.1.1. Absence de singularité dans le schéma linéaire (ordre 1).

Soit la fonction  $\mathbf{g}(R) = \nabla \frac{e^{-jkR}}{R} = \left( \frac{-jkR - 1}{R^2} \right) e^{-jkR} \mathbf{R}$ , avec  $\mathbf{R}$  un vecteur unitaire qui joint le point observateur  $x$  et le point source  $y$ . La limite de la fonction  $\mathbf{g}(R)$  tend vers  $\left( \frac{-1}{R^2} \right) \mathbf{R}$  quand  $R$  tend vers 0. Par conséquent la fonction  $\mathbf{g}$  est portée par le vecteur  $\mathbf{R}$  quand  $R$  tend vers 0.

Pour le schéma d'ordre 1, l'élément est plan (fig. 3.4).

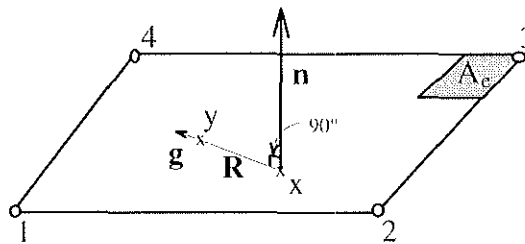


Fig. 3.4 - Présentation de  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{n}$  dans un élément linéaire.

Des identités vectorielles nous avons :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{J} \times \mathbf{g} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{g})\mathbf{J} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\mathbf{g} \quad (3.10)$$

$\mathbf{g}$  étant dans le plan de l'élément, les vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{g}$  sont donc orthogonaux. De plus, sur la surface d'un conducteur parfait nous avons  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$ . L'équation (3.10) est donc identiquement nulle, quelque soit le point  $y$  appartenant à la surface  $S$  :  $\mathbf{n} \times \mathbf{J} \times \mathbf{g} = 0$ .

Donc pour un schéma linéaire (ordre 1, élément plan), l'intégrale  $I$  ne présente aucune difficulté numérique, d'où l'absence de *singularité dans le schéma d'ordre 1*.

### III - 3.1.2. Présence d'une singularité en $1/R$ pour un schéma quadratique (ordre 2).

La limite de la fonction  $g(R)$  utilisée dans (III - 3.11) tend vers  $\left(\frac{-1}{R^2}\right)R$  quand  $R$  tend vers 0. Avec  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$  sur la surface d'un conducteur parfait, l'équation (3.10) peut s'écrire:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{J} \times \mathbf{g} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{g})\mathbf{J} \quad (3.11)$$

Le schéma descriptif de cette situation est présenté en fig. 3.5 :

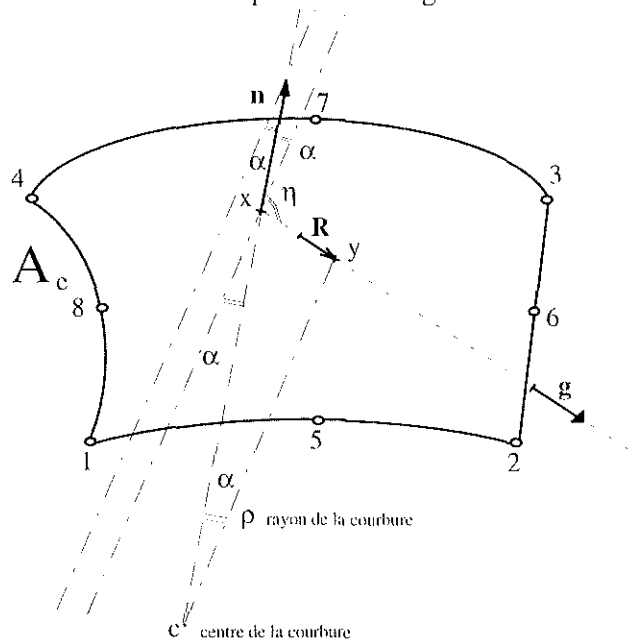


Fig. 3.5. - Présentation de  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{R}$  dans un élément quadratique.

Dans l'élément curviligne ci-dessus (fig. 3.5) :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{g}\| \cos \eta$$

or :  $\cos \eta = -\sin \alpha$

ceci implique que :  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = -\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{g}\| \sin \alpha$

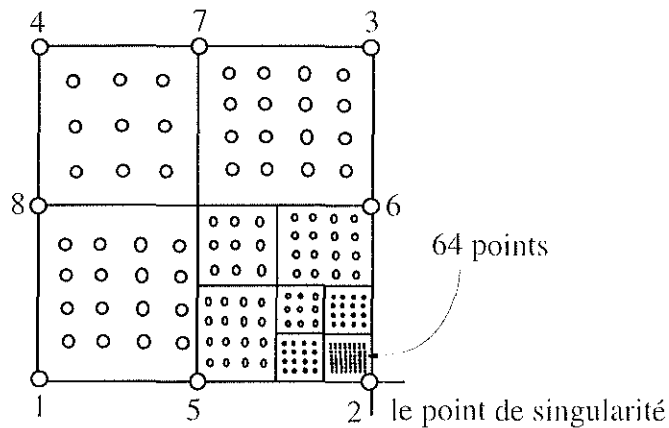
si  $\alpha$  tend vers 0,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$  tend vers  $-\|\mathbf{g}\|\alpha \rightarrow -\|\mathbf{g}\|\frac{R}{\rho} \rightarrow \frac{1}{R \cdot \rho}$

avec  $\rho$  le rayon de courbure de la surface

élémentaire quand  $R$  tend vers 0

Nous venons de démontrer que la singularité est du type  $1/R$ . Il existe plusieurs méthodes pour traiter ce type de problème de singularité, nous pouvons citer:

- La méthode analytique, qui consiste à transformer l'intégrale exprimée dans un repère cartésien local en une intégrale à calculer dans un repère polaire  $q$  et  $r$  [48];
- La méthode de décomposition de l'élément où se présente la singularité, qui décompose le domaine d'intégration en sous domaines. On doit alors choisir le nombre optimal de points d'intégration de GAUSS dans chaque sous-élément afin d'évaluer l'intégrale totale avec une bonne précision [49]. Le nombre optimal varie en fonction de la distance au point singulier. Cette méthode est fondée sur les travaux de LACHAT et WATSON[50] dont le principe de décomposition est illustré en figure 3.6:



*Les nombres représentent le nombre de points d'intégration nécessaires.*

**Fig. 3.6** - Décomposition d'un élément principal présentant une singularité au noeud 2.

- La méthode de transformation des coordonnées locales en coordonnées auto-adaptatives [51]. Elle consiste à exprimer l'intégrale en coordonnées locales dans un système de coordonnées auto-adaptatives dont la valeur du jacobien est minimale;
- La méthode utilisant des fonctions d'interpolations spéciales. Elle consiste à transformer les fonctions d'interpolations standards en fonctions d'interpolations spéciales [52], appelées fonctions d'interpolation singulières afin de minimiser aussi le jacobien.

Nous verrons au chapitre IV comment se comportent ces différentes méthodes dans le cas de la diffraction par une sphère parfaitement conductrice (§ IV- 3).

### III - 3.2. TRAITEMENT DE LA DISCONTINUITÉ.

A part les objets diffracteurs qui présentent des frontières lisses (par exemple la sphère), les objets courants ont souvent des formes géométriques plus complexes pouvant présenter une discontinuité géométrique et/ou une discontinuité physique. La discontinuité géométrique est due à la normale non définie au niveau des coins et des arrêtes et la discontinuité physique se manifeste par de multiples valeurs de densités de courants en ces points. Afin de contourner ces difficultés nous faisons appel à une technique numérique [53] utilisant des éléments spéciaux appelés éléments de frontière discontinus ou semi-discontinus (fig. 3.7).

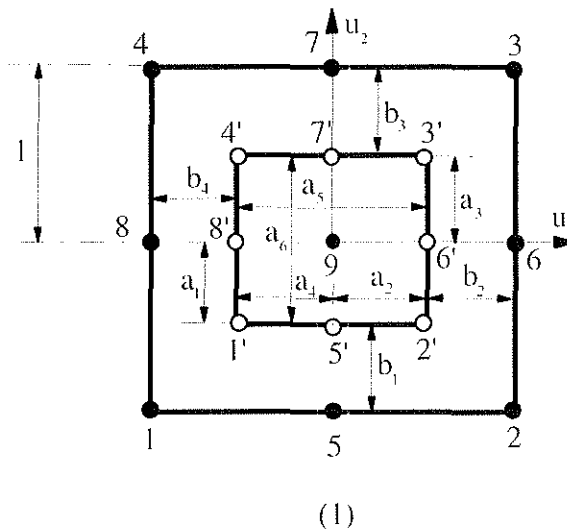


Fig. 3.7 - Élément continu (1,2,3,4,5,6,7,8) Élément discontinu (1',2',3',4',5',6',7',8')

Pour définir les coordonnées locales des noeuds de l'élément semi-discontinu, nous avons besoins de six paramètres  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  telles que :  $a_i = 1 - b_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) et  $a_5 = a_2 + a_4$ ,  $a_6 = a_1 + a_3$ , avec  $b_i$  ( $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ ) égal à  $1/2$  dans le cas linéaire, ou bien égal à  $1/3$  dans le cas quadratique. Les coordonnées locales des noeuds du schéma (fig. 3.7) sont récapitulées dans le tableau suivant :

Noeuds	$\eta_1$	$\eta_2$
1'	$-a_1$	$-a_1$
2'	$a_2$	$-a_1$
3'	$a_2$	$a_3$
4'	$-a_1$	$a_3$
5'	0	$-a_1$
6'	$a_2$	0
7'	0	$a_3$
8'	$-a_1$	0
9'	0	0

Les fonctions de formes associées au cas général sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4} \cdot u_1 u_2 (u_1 - 1)(u_2 - 1) \\ N_2 = \frac{1}{4} \cdot u_1 u_2 (u_1 + 1)(u_2 - 1) \\ N_3 = \frac{1}{4} \cdot u_1 u_2 (u_1 + 1)(u_2 + 1) \\ N_4 = \frac{1}{4} \cdot u_1 u_2 (u_1 - 1)(u_2 + 1) \\ N_5 = \frac{1}{2} \cdot u_2 (1 - u_1^2)(u_2 - 1) \\ N_6 = \frac{1}{2} \cdot u_1 (1 + u_1)(1 - u_2^2) \\ N_7 = \frac{1}{2} \cdot u_2 (1 - u_1^2)(1 + u_2) \\ N_8 = \frac{1}{2} \cdot u_1 (u_1 - 1)(1 - u_2^2) \\ N_9 = (1 - u_1^2)(1 - u_2^2) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_{1'} = \frac{u_1 u_2}{a_1 a_4 a_5 a_6} \cdot (u_1 - a_2)(u_2 - a_3) \\ N_{2'} = \frac{u_1 u_2}{a_1 a_2 a_5 a_6} \cdot (u_1 + a_4)(u_2 - a_3) \\ N_{3'} = \frac{u_1 u_2}{a_2 a_3 a_5 a_6} \cdot (u_1 + a_4)(u_2 + a_1) \\ N_{4'} = \frac{u_1 u_2}{a_3 a_4 a_5 a_6} \cdot (u_1 - a_2)(u_2 + a_1) \\ N_{5'} = \frac{u_2}{a_1 a_2 a_4 a_6} \cdot (a_2 - u_1)(u_1 + a_4)(u_2 - a_3) \\ N_{6'} = \frac{u_1}{a_1 a_2 a_3 a_5} \cdot (a_3 - u_2)(u_1 + a_4)(u_2 + a_1) \\ N_{7'} = \frac{u_2}{a_2 a_3 a_4 a_6} \cdot (a_2 - u_1)(u_1 + a_4)(u_2 + a_1) \\ N_{8'} = \frac{u_1}{a_1 a_3 a_4 a_5} \cdot (a_3 - u_2)(u_2 + a_1)(u_1 - a_2) \\ N_{9'} = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} \cdot (a_2 - u_1)(a_3 - u_2)(u_1 + a_4)(u_2 + a_1) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Élément continu

Élément discontinu



Il est également possible de définir des éléments semi-discontinus, ce qui a pour intérêt de traiter la discontinuité présente uniquement sur une, deux ou trois arêtes de l'élément principal. La procédure consiste à faire déplacer les noeuds qui sont sur ces arêtes à l'intérieur de l'élément comme le montrent les schémas ci-dessous (fig. 3.8):

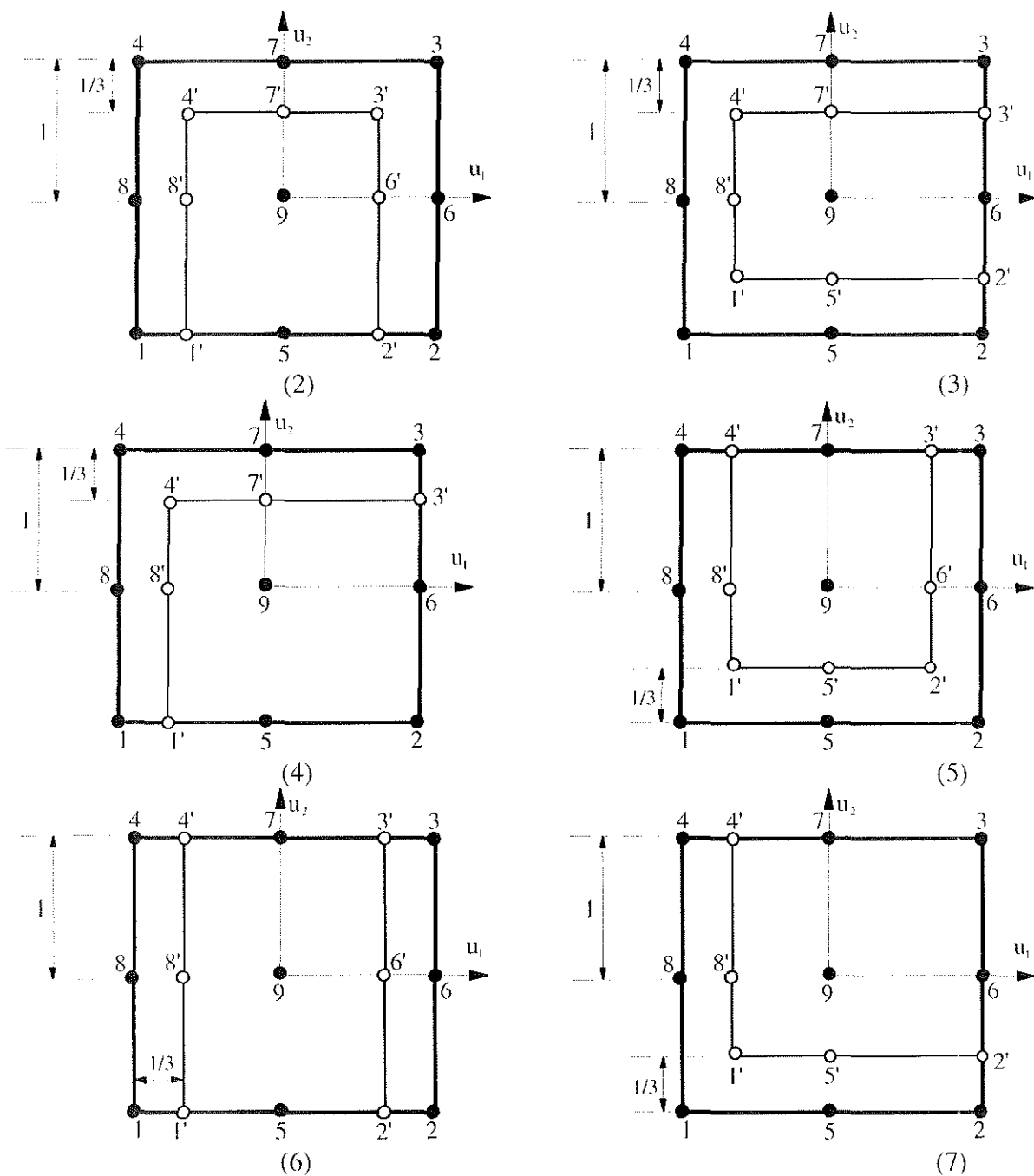


Fig. 3.8 (a) - Différents types d'éléments semi-discontinus.

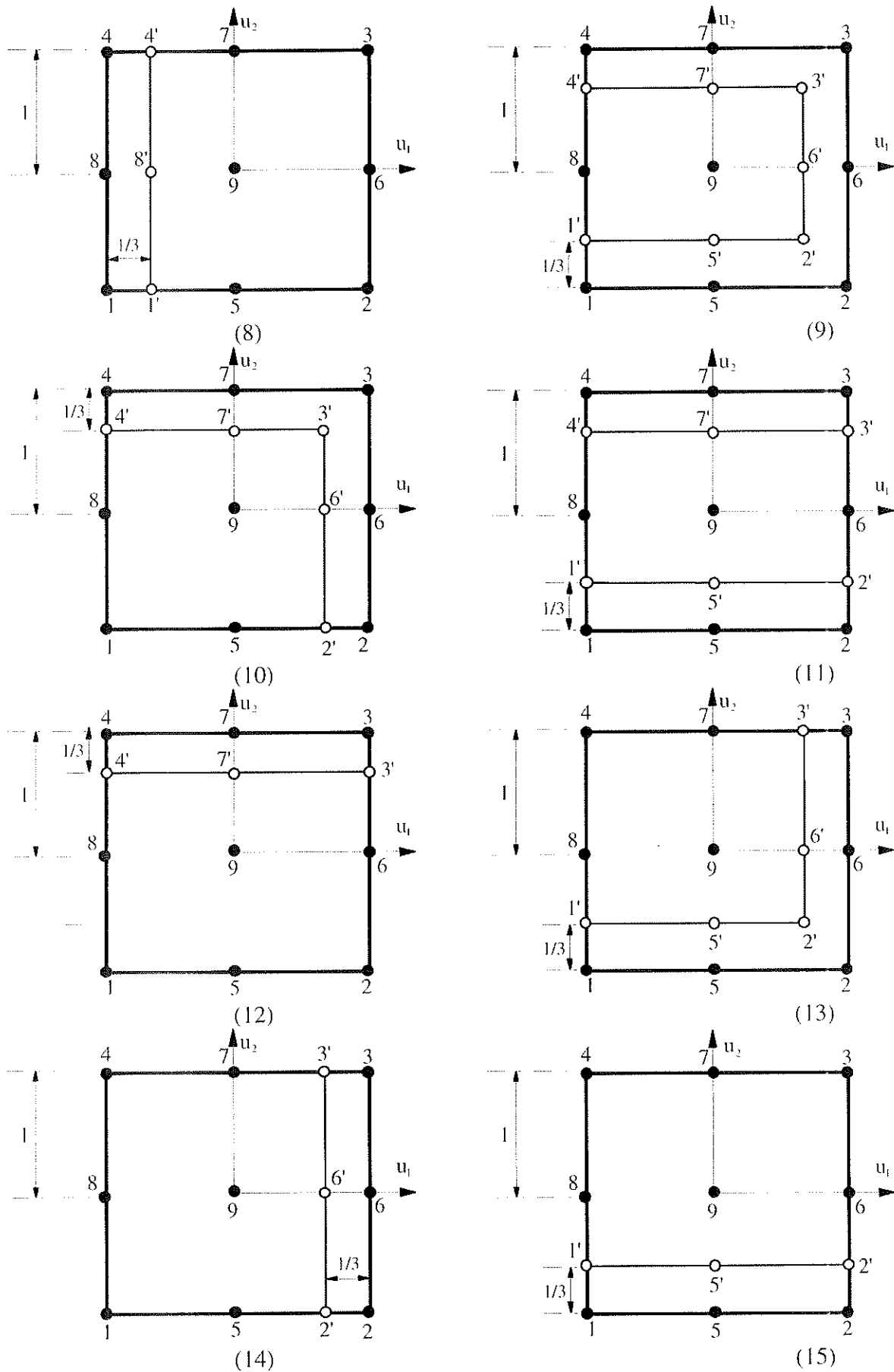


Fig. 3.8 (b) - Différents types d'éléments semi-discontinus.

Pour les éléments semi-discontinus de schémas ci-dessus, les fonctions de formes sont obtenues en remplaçant dans leurs formules (3.12) les paramètres  $a_i$  ( $i=1,\dots,6$ ) par leurs valeurs dans le tableau (fig. 3.9) suivant :

$a_i$ l'élément	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
(1)	2/3	2/3	2/3	2/3	4/3	4/3
(2)	1	2/3	2/3	2/3	4/3	5/3
(3)	2/3	1	2/3	2/3	5/3	4/3
(4)	1	1	2/3	2/3	5/3	5/3
(5)	2/3	2/3	1	2/3	4/3	5/3
(6)	1	2/3	1	2/3	4/3	2
(7)	2/3	1	1	2/3	5/3	5/3
(8)	1	1	1	2/3	5/3	2
(9)	2/3	2/3	2/3	1	5/3	4/3
(10)	1	2/3	2/3	1	5/3	5/3
(11)	2/3	1	2/3	1	2	4/3
(12)	2/3	2/3	1	2/3	4/3	5/3
(13)	2/3	2/3	1	1	5/3	5/3
(14)	1	2/3	1	1	5/3	2
(15)	2/3	1	1	1	2	5/3

Fig. 3.9 - Tableau des paramètres  $a_i$  pour les différents schémas.

Ainsi, pour l'élément présenté à la figure 3.8 (12) les fonctions d'interpolations seront de formes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4} \cdot u_1 u_2 (u_1 - 1)(u_2 - 1) \\ N_2 = \frac{1}{4} \cdot u_1 u_2 (u_1 + 1)(u_2 - 1) \\ N_3 = \frac{1}{4} \cdot u_1 u_2 (u_1 + 1)(u_2 + 1) \\ N_4 = \frac{1}{4} \cdot u_1 u_2 (u_1 - 1)(u_2 + 1) \\ N_5 = \frac{1}{2} \cdot u_2 (1 - u_1^2)(u_2 - 1) \\ N_6 = \frac{1}{2} \cdot u_1 (1 + u_1)(1 - u_2^2) \\ N_7 = \frac{1}{2} \cdot u_2 (1 - u_1^2)(1 + u_2) \\ N_8 = \frac{1}{2} \cdot u_1 (u_1 - 1)(1 - u_2^2) \\ N_9 = (1 - u_1^2)(1 - u_2^2) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{3}{10} \cdot u_1 u_2 (u_1 - 1)(u_2 - 2/3) \\ N_2 = \frac{3}{10} \cdot u_1 u_2 (u_1 + 1)(u_2 - 2/3) \\ N_3 = \frac{9}{20} \cdot u_1 u_2 (u_1 + 1)(u_2 + 1) \\ N_4 = \frac{9}{20} \cdot u_1 u_2 (u_1 - 1)(u_2 + 1) \\ N_5 = \frac{3}{5} \cdot u_2 (1 - u_1^2)(u_2 - 2/3) \\ N_6 = \frac{3}{4} \cdot u_1 (1 + u_1)(2/3 - u_2)(u_2 + 1) \\ N_7 = \frac{9}{10} \cdot u_2 (1 - u_1^2)(1 + u_2) \\ N_8 = \frac{3}{4} \cdot u_1 (u_1 - 1)(2/3 - u_2)(u_2 + 1) \\ N_9 = \frac{3}{2} \cdot (1 - u_1^2)(2/3 - u_2)(u_2 + 1) \end{array} \right.$$

élément continu
élément semi-discontinu

L'application de ces éléments semi-discontinus le long de l'arête ou du coin permet, avec ces noeuds flottants, de calculer les termes discontinus en ces points, ce qui ne représente réellement aucune difficulté.

### III - 4. CONCLUSION.

Pour la résolution numérique des équations intégrales obtenues dans le cas de diffraction par un objet conducteur parfait ou diélectrique en régime harmonique et pour le cas d'un conducteur parfait en régime transitoire, la méthode des équations intégrales de frontière est la mieux adaptée. Elle est réalisée en discrétisant la frontière de l'objet en éléments de surfaces et l'équation discrétisée nécessite un calcul intégral sur chaque élément de la frontière d'où le nom de la méthode intégrales de frontière (BEM). Les seules difficultés sont les problèmes de singularité et de discontinuité.

En régime transitoire, la résolution de l'équation intégrale obtenue pour la diffraction électromagnétique par un conducteur parfait est directe. La solution est obtenue en discrétisant la surface dans l'équation intégrale en éléments finis et nous appliquons une résolution pas à pas dans le temps. La matrice du système obtenu est pleine et dépend du temps de retard du signal.

Dans la résolution numérique nous sommes restreints aux problèmes de diffraction par des objets conducteurs parfaits en 3D et en régime harmonique. Nous avons montré qu'une singularité existe seulement dans le cas du schéma quadratique et qu'elle est de la forme de  $1/R$ . Plusieurs méthodes ont été envisagées pour le traitement de cette dernière.

Une discontinuité se présente dans les formes géométriques non lisses qui sont les plus utilisées dans la réalité. Nous proposons alors l'utilisation d'éléments spéciaux appelés éléments semi-discontinus. La validation de ces traitements sera réalisé dans le prochain chapitre.

## **CHAPITRE IV**

### **VALIDATION DES CALCULS NUMÉRIQUES**

Du fait que les essais expérimentaux s'avèrent très coûteux pour améliorer les dispositifs électrotechniques modernes qui sont le plus souvent exposés à des perturbations liées aux problèmes de diffraction électromagnétique, le recours à la C.A.O. est devenu un moyen très efficace et beaucoup plus facile à utiliser et qui donne des résultats très réalistes si le modèle mathématique est bien choisi.

Le travail qui nous a été proposé est de mettre en oeuvre un moyen de simulation des problèmes de diffraction électromagnétique liés aux dispositifs tridimensionnels. Une fois les modèles mathématiques développés pour ce type de problèmes, une base de données tridimensionnelles a été indispensable. Pour cela nous avons fait appel au logiciel PHI3D, permettant la simulation des dispositifs tridimensionnels par la méthode des équations intégrales de frontière, qui est développé au Centre de Génie Électrique de Lyon.

Nous avons commencé par mettre en Équations Intégrales le problème de la diffraction électromagnétique. Pour valider le modèle, nous avons d'abord programmé la solution analytique d'un objet diffracteur sphérique dont la géométrie est facilement modélisée car sa surface extérieure est lisse. La validation commence donc par la détermination de l'ordre optimal  $n$  où la solution analytique converge. Nous étudierons ensuite l'influence du maillage sur la solution numérique ainsi que l'ordre du schéma élémentaire (l'ordre 1 et l'ordre 2). Nous testerons également les différentes méthodes utilisées pour le traitement de la singularité ainsi que l'application des éléments spéciaux (semi-discontinus) pour enlever les problèmes de discontinuité. Enfin, nous décrivons le module d'évaluation des champs proche et lointain diffractés intégré à PHI3D.

Toutefois, avant de passer aux applications numériques qui font l'objet de ce chapitre, nous allons présenter un aperçu général sur l'organisation du logiciel de modélisation PHI3D.

## IV - 1. APERÇU GÉNÉRAL DU LOGICIEL PHI3D.

PHI3D est un logiciel de CAO développé depuis 1983 par le Cegely en collaboration avec Cedrat-Recherche. Ce logiciel permet d'analyser des dispositifs électrotechniques tridimensionnels. Ses différents domaines d'application sont:

- l'électrostatique : on détermine les potentiel et champs électriques sans circulation de courant, afin d'optimiser les formes de conducteurs ou diélectriques pour, par exemple, limiter les risques de claquage;

- la conduction volumique : on détermine la répartition des densités de courant et de potentiel électrique dans des pièces de forme complexes, pour par exemple, en réduire leur résistance;

- la magnétostatique linéaire : on calcule le champ magnétique dû à des courants continus associés à des matériaux ferromagnétiques linéaires. Les dispositifs modélisés sont, entre autres, des électroaimants, des moteurs, des canons à électrons.

- la magnétodynamique à très faible épaisseur de peau: on calcule le champ magnétique dû à des courants alternatifs à fréquence élevée associés à des matériaux conducteurs massifs. Les applications sont par exemple la trempe superficielle, le contrôle non destructif par courants de Foucault.

La modélisation numérique dans PHI3D est réalisée par la Méthode des Équations Intégrales de Frontière en formulation de Green appliquée à l'équation de Laplace. Le programme est écrit en Fortran 77 et utilise la bibliothèque de dialogues *Caobibs*©.

Il contient cinq groupes principaux :

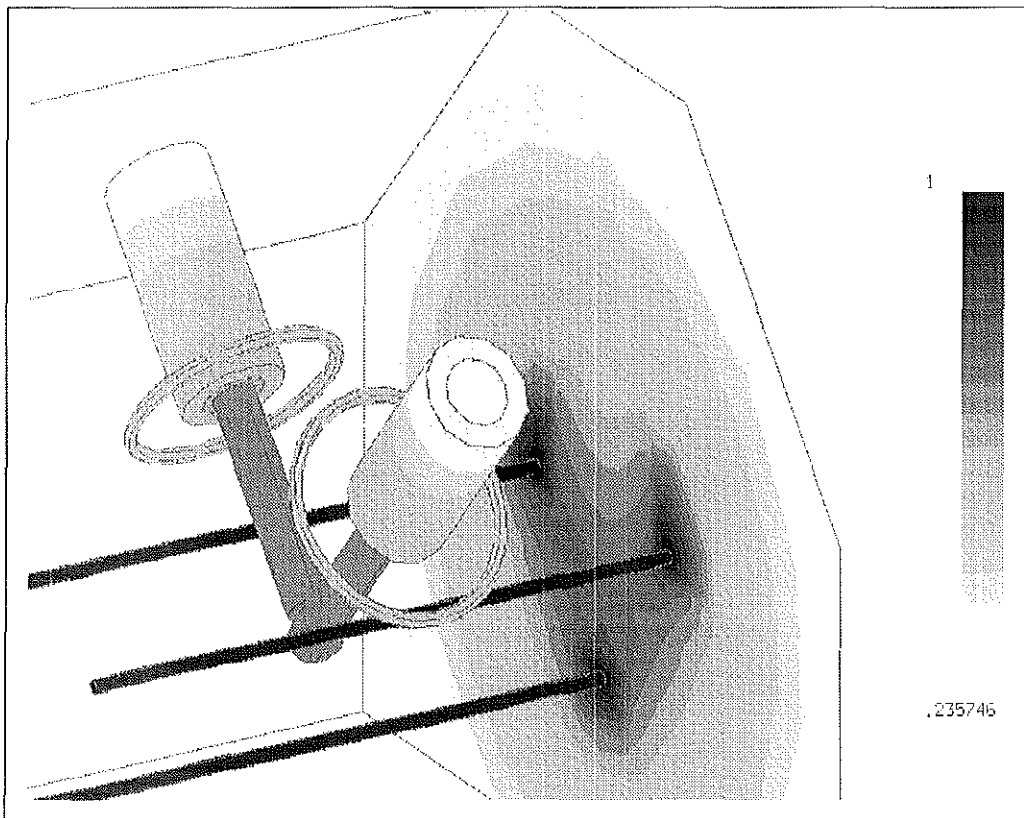
*Construire* : création de surfaces, maillage, propriétés physiques, conditions aux limites, ainsi que des utilitaires;

*Visualiser* : rotations, loupes, élimination des parties cachées, ainsi que des utilitaires;

*Résoudre* : préparation, résolution sur les surfaces et dans les coupes;

*Exploiter* : calcul et visualisation des grandeurs complémentaires;

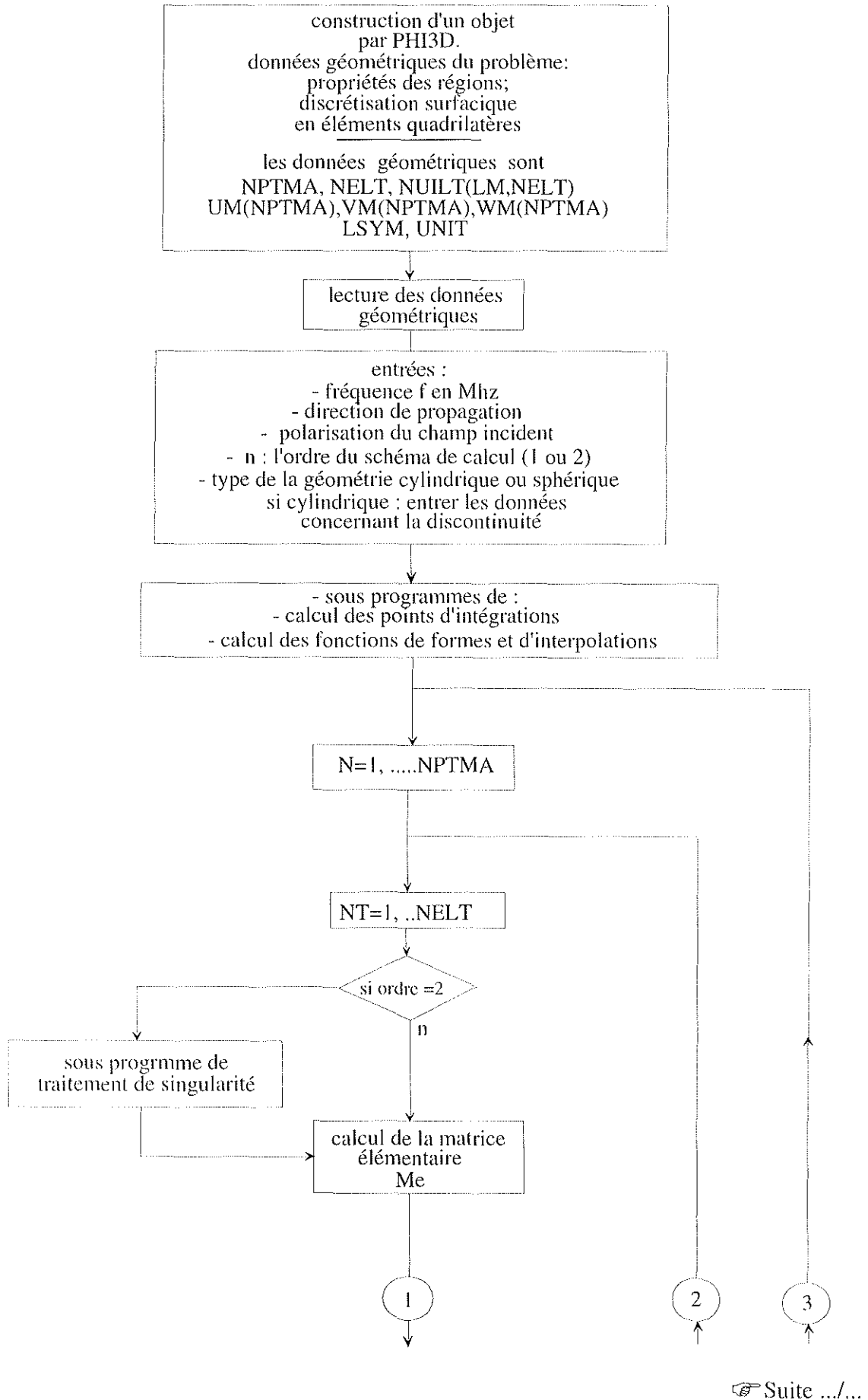
*Gérer* : gestion des problèmes, informations sur le problème courant.



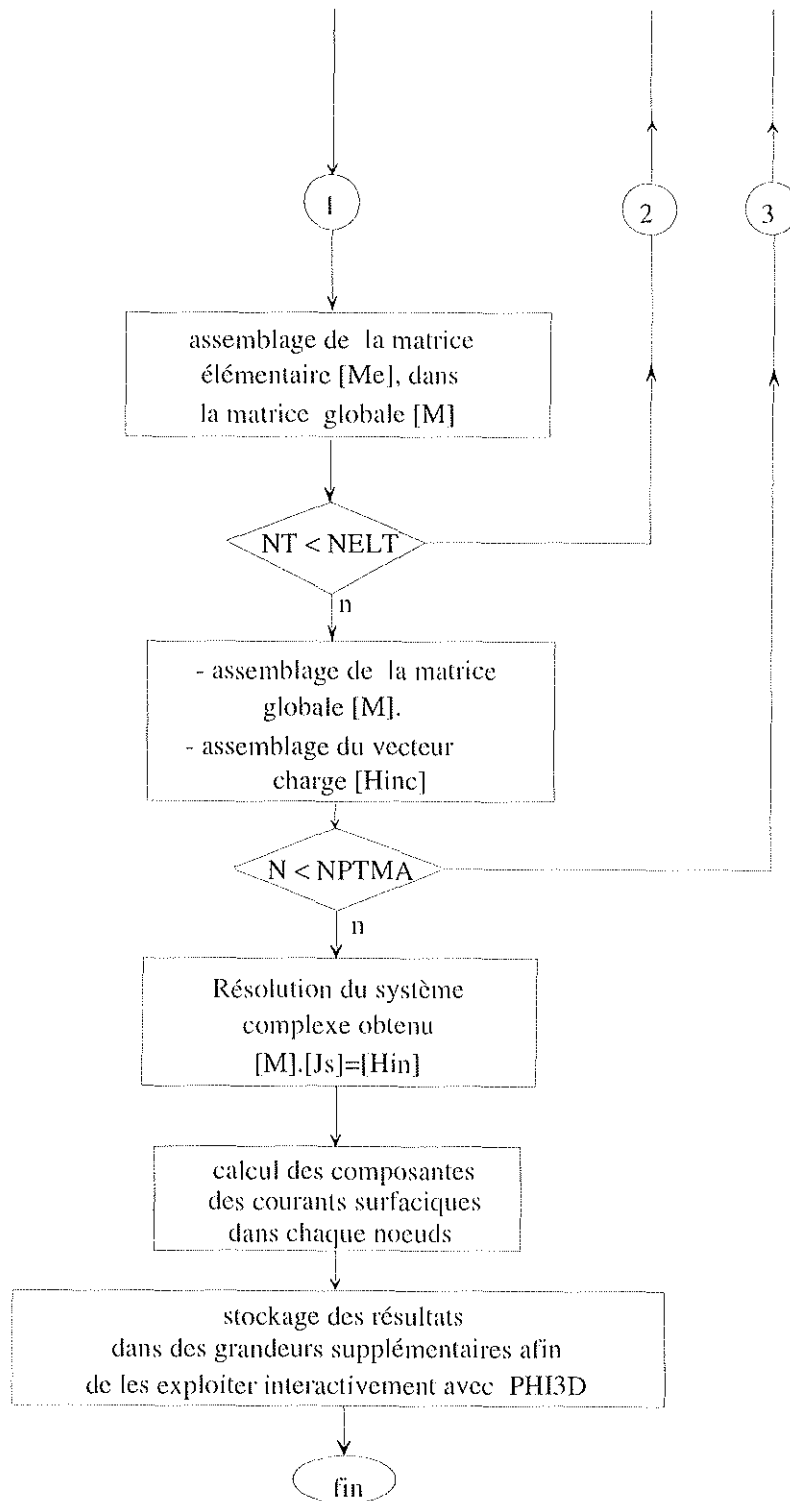
PHI3D<sup>®</sup> : Modélisation d'un hall d'essai HT - Electrostatique

Dans le cadre de ce travail de doctorat, un module hyper-harmonique a été ajouté aux modules cités ci-dessus afin de pouvoir simuler des problèmes de diffraction électromagnétique. Ce module fait appel à plusieurs sous-programmes rédigés en fortran 77 (calcul des points de Gauss, calcul des fonctions d'interpolation, calcul du jacobien,...) et à quelques sous-programmes de dialogue *Caobibs*©. L'organigramme général de ce module est le suivant :





cf suite .... / ...



Organigramme de calcul des courants surfaciques à l'aide de la Méthode des Equations Intégrales de Frontière

## IV - 2. LA SOLUTION ANALYTIQUE OBTENUE DANS LE CAS DE LA DIFFRACTION PAR UNE SPHÈRE CONDUCTRICE.

Dans cette partie nous présentons les expressions analytiques des vecteurs champs et celles des densités de courants surfaciques dans le cas de diffraction par une sphère conductrice de rayon  $a$ , illuminée par un champ incident sous la forme d'une onde plane polarisée en  $x$  et qui se déplace suivant  $z$  (fig. 4.1).

### IV- 2.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME.

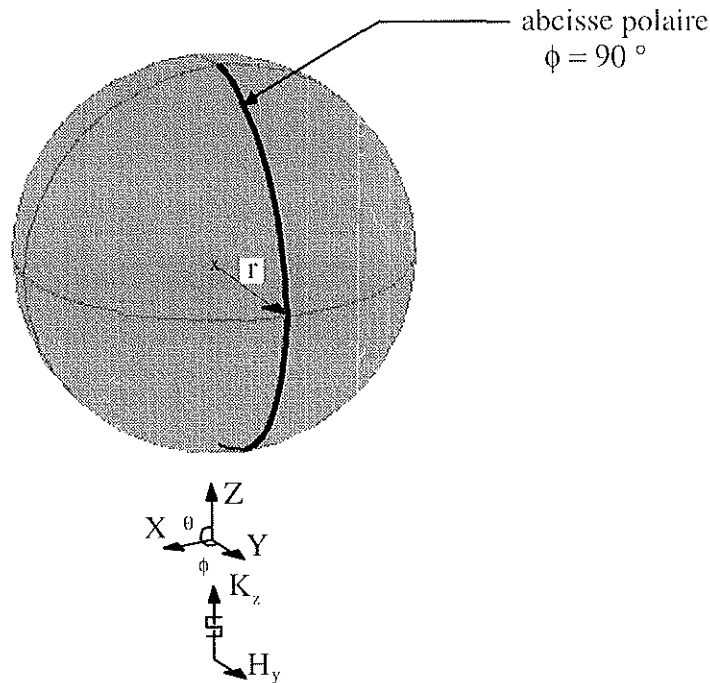


Fig. 4.1 - Schéma décrivant le problème de la diffraction par une sphère.

### IV- 2.2 LES EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES CHAMPS ET DES COURANTS

Les expressions analytiques des champs incidents  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont :

$$\begin{aligned} E_x^{inc} &= E_0 e^{-jkz} = E_0 e^{-jkrcos\theta} \\ H_y^{inc} &= \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkrcos\theta} \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $k$  : constante de propagation,  $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  ;

$\theta$  : angle polaire;

h : impédance caractéristique du milieu,  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  ; dans un le vide:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ ohms}$$

Dans un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , elles peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} E_r^{inc} &= E_x^{inc} \sin\theta \cos\phi = E_0 \sin\theta \cos\phi e^{-jkr \cos\theta} = E_0 \frac{\cos\phi}{jkr} \frac{\partial}{\partial\theta} (e^{-jkr \cos\theta}) \\ E_\theta^{inc} &= E_x^{inc} \cos\theta \cos\phi = E_0 \cos\theta \cos\phi e^{-jkr \cos\theta} \\ E_\phi^{inc} &= -E_x^{inc} \sin\phi = -E_0 \sin\phi e^{-jkr \cos\theta} \end{aligned} \quad (4.2)$$

En utilisant :

$$e^{jz} = e^{jrcos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(r) P_n(\cos\theta)$$

avec  $P_n$  et  $j_n$  respectivement polynôme de Legendre et fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n (pour plus de détails sur ces fonctions spéciales voir ANNEXE 2), chacune des composantes sphériques du champ incident devient :

$$\begin{aligned} E_r^{inc} &= -jE_0 \frac{\cos\phi}{(kr)^2} \sum_{n=1}^{\infty} j^{-n} (2n+1) \hat{j}_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \\ E_\theta^{inc} &= E_0 \frac{\cos\theta \cos\phi}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} j^{-n} (2n+1) \hat{j}_n(kr) P_n^0(\cos\theta) \\ E_\phi^{inc} &= -E_0 \frac{\sin\phi}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} j^{-n} (2n+1) \hat{j}_n(kr) P_n^0(\cos\theta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec: 
$$j_n(kr) = \frac{1}{kr} \hat{j}_n(kr) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial\theta} &= P_n^1(\cos\theta) \\ P_0^1 &= 0 \end{aligned}$$

$\hat{j}_n$  : la fonction de Bessel sphérique d'ordre n.

Sur la surface S, nous avons  $\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ , ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\theta &= -\mathbf{H}_\phi \\ \mathbf{J}_\phi &= \mathbf{H}_\theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les vecteurs champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  totaux (somme des champs incidents et des champs diffractés) sont obtenues en passant par une formulation en potentiels vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{F}$  dont le développement théorique est présenté en détail dans l'ANNEXE 2C.

Leurs expressions sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \mathbf{A}_r \\ \mathbf{E}_\theta &= \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \phi} + \frac{1}{\hat{y} r} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_r}{\partial r \partial \theta} \\ \mathbf{E}_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{\hat{y} r \sin \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_r}{\partial r \partial \phi} \end{aligned} \quad (4.6)$$

et:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r &= \frac{1}{\hat{z}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \mathbf{F}_r \\ \mathbf{H}_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \phi} + \frac{1}{\hat{z} r} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_r}{\partial r \partial \theta} \\ \mathbf{H}_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{\hat{z} r \sin \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_r}{\partial r \partial \phi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$  sont respectivement l'admittance ( $\hat{y} = j\omega\epsilon$ ) et l'impédance ( $\hat{z} = j\omega\mu$ ). Par conséquent le champ incident peut être écrit sous la forme :

$$\mathbf{E}_r^{inc} = \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \mathbf{A}_r^{inc}$$

Des équations (4.3) et (4.6) ci-dessus nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r^{inc} &= \mathbf{E}_0 \frac{\cos \phi}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{j}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \\ \text{avec} & \\ a_n &= j^{-n} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

En procédant de la même façon et utilisant les équations (4.7), nous aurons :

$$\mathbf{F}_r^{inc} = \mathbf{E}_0 \frac{\sin \phi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{j}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (4.9)$$

Puisque les composantes du champ incident (sous forme d'onde plane) étaient représentées à partir des modes  $\text{TE}^r$  et  $\text{TM}^r$  (voir ANNEXE 2C), ces modes sont construits en utilisant les potentiels vecteurs  $\mathbf{A}_r^{inc}$  et  $\mathbf{F}_r^{inc}$ . Les composantes du champ diffracté peuvent

également être représentées à partir des modes TE<sup>r</sup> et TM<sup>r</sup> et construites en utilisant les potentiels vecteurs  $\mathbf{A}_r^s$  et  $\mathbf{F}_r^s$ .

La forme de  $\mathbf{A}_r^s$  et  $\mathbf{F}_r^s$  est similaire à celle de  $\mathbf{A}_r^{inc}$  et  $\mathbf{F}_r^{inc}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r^s &= E_0 \frac{\cos \phi}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{H}_n^{(2)}(kr) P_n^1(\cos \theta) \\ \mathbf{F}_r^s &= E_0 \frac{\sin \phi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{H}_n^{(2)}(kr) P_n^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$b_n$  et  $c_n$  sont obtenus en utilisant les conditions aux limites du problème de diffraction. Dans ces deux dernières équations (4.9) et (4.10), les fonctions de Hankel alternatives (sphériques) de seconde espèce ont remplacé les fonctions alternatives de Bessel de première espèce pour représenter les ondes sortantes (outward traveling waves).

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r^t &= \mathbf{A}_r^{inc} + \mathbf{A}_r^s = E_0 \frac{\cos \phi}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \hat{J}_n(kr) + b_n \hat{H}_n^{(2)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \\ \mathbf{F}_r^t &= \mathbf{F}_r^{inc} + \mathbf{F}_r^s = E_0 \frac{\sin \phi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \hat{J}_n(kr) + c_n \hat{H}_n^{(2)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec

$$a_n = j^{-n} \frac{(2n+1)}{n(n+1)}$$

Pour déterminer les coefficients  $b_n$  et  $c_n$ , nous utilisons les conditions aux limites "champ tangentiel nul" sur la surface de la sphère de rayon  $r = a$  :

$$\begin{aligned} E_{\theta}^t(r = a, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi) &= 0 \\ E_{\phi}^t(r = a, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\theta}^t &= -jkE_0 \frac{\cos \phi}{\omega^2 \mu \epsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \hat{J}_n'(kr) + b_n \hat{H}_n'^{(2)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \\ &\quad - \frac{E_0 \cos \phi}{\omega \epsilon \eta r \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \hat{J}_n(kr) + c_n \hat{H}_n^{(2)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \end{aligned}$$

où

$$' = \frac{\partial}{\partial(kr)} \text{ pour les fonctions sphériques de Bessel ou de Hankel.}$$

$$' = \frac{\partial}{\partial \theta} \text{ pour les fonctions de Legendre associées.}$$

Pour que ces conditions aux limites soient satisfaites il faut que :

$$\begin{aligned} a_n \hat{j}'_n(ka) + b_n \hat{H}'^{(2)}_n(ka) = 0 &\Rightarrow b_n = -a_n \frac{\hat{j}'_n(ka)}{\hat{H}'^{(2)}_n(ka)} \\ a_n \hat{j}_n(ka) + c_n \hat{H}^{(2)}_n(ka) = 0 &\Rightarrow c_n = -a_n \frac{\hat{j}_n(ka)}{\hat{H}^{(2)}_n(ka)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

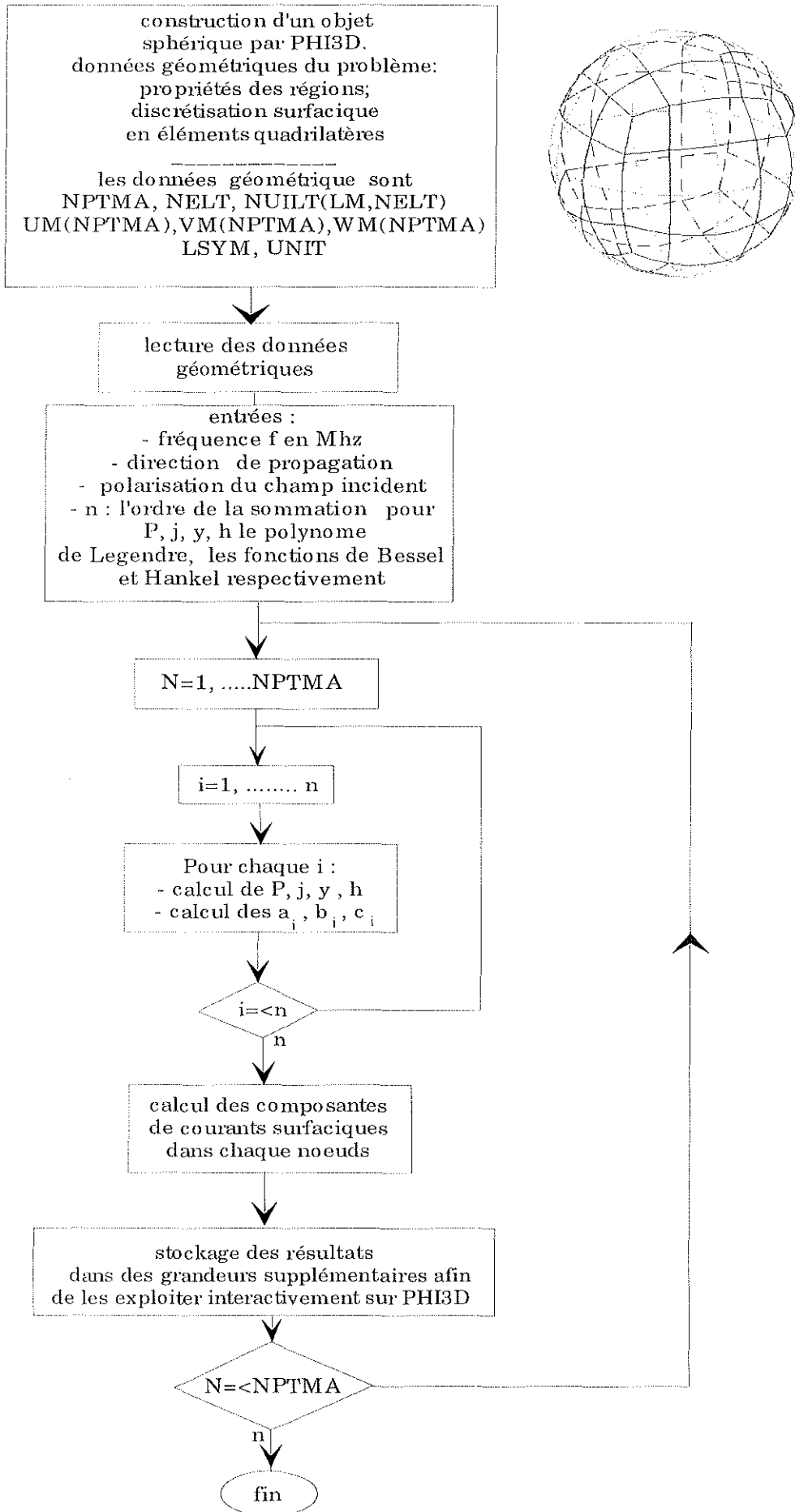
Quand  $r=a$  (sur la surface), les équations (4.7) deviennent :

$$\begin{aligned} J_\theta &= \frac{j}{\eta} E_0 \frac{\cos\phi}{ka} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \frac{P'_n(\cos\theta)}{\hat{H}'^{(2)}_n(ka)} + \frac{jP'_n(\cos\theta)}{\sin\theta \hat{H}'^{(2)}_n(ka)} \right] \\ J_\phi &= \frac{j}{\eta} E_0 \frac{\sin\phi}{ka} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \frac{P_n(\cos\theta)}{\hat{H}^{(2)}_n(ka)} - \frac{\sin\theta P_n(\cos\theta)}{j\hat{H}^{(2)}_n(ka)} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

' = dérivé e par rapport à la variable (.).

Un développement détaillé est décrit dans l'Annexe 2 afin d'obtenir les expressions des fonctions de Bessel Sphériques (Alternatives) modifiées  $\hat{J}$ ,  $\hat{Y}$  et  $\hat{H}$ , en utilisant le développement en séries des fonctions de Bessel sphériques décrites dans [1].

Les équations (4.14) expriment les valeurs exactes des courants surfaciques en coordonnées sphériques. Nous les avons structurées sous forme d'un module intégré dans PHI3D suivant l'organigramme de la page suivante.



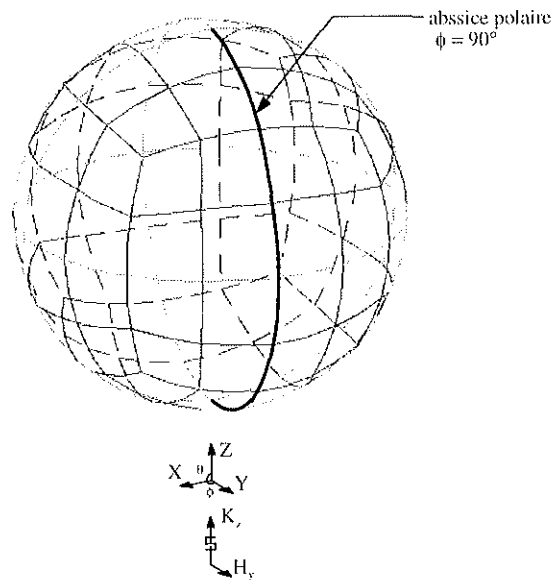


### IV- 2.3. CONVERGENCE DE LA SOLUTION ANALYTIQUE EN FONCTION DE L'ORDRE DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE LEGENDRE.

Comme le courant est obtenu analytiquement par une somme infinie (équ.4.14), il est donc nécessaire de tronquer cette série pour effectuer le calcul. La question posée est donc : à partir de quel ordre la solution peut-elle être considérée comme exacte ?

Deux cas de figures sont envisagés : premièrement, faire varier  $n$  et voir à partir de quel ordre le résultat est convergent; deuxièmement, faire varier le rayon  $r$  de la sphère en gardant toujours constant le rapport  $r/l$ , ce qui revient à faire varier la fréquence  $f$ , et voir si les résultats obtenus sont identiques.

Le cas test est une sphère de rayon  $r=0.2l$ . Le champ incident est polarisé suivant  $y$  et de direction de propagation suivant  $z$ . La discrétisation de la surface de l'objet est réalisée avec des éléments quadrilatères du deuxième ordre. Le maillage est fait de telle façon qu'il y ait au moins dix noeuds sur une longueur d'onde, soit 96 éléments et 290 noeuds (fig. 4.2).



**Fig. 4.2** - une sphère de rayon  $r=0.2\lambda$ , 96 éléments, 290 noeuds.

#### 1er Cas :

Les calculs analytiques sont faits pour l'ordre  $n=3, n=5, n=8, n=12, n=14$  et  $n=20$ . Nous constatons que la convergence devient excellente à partir de l'ordre 8 (fig. 4.3).

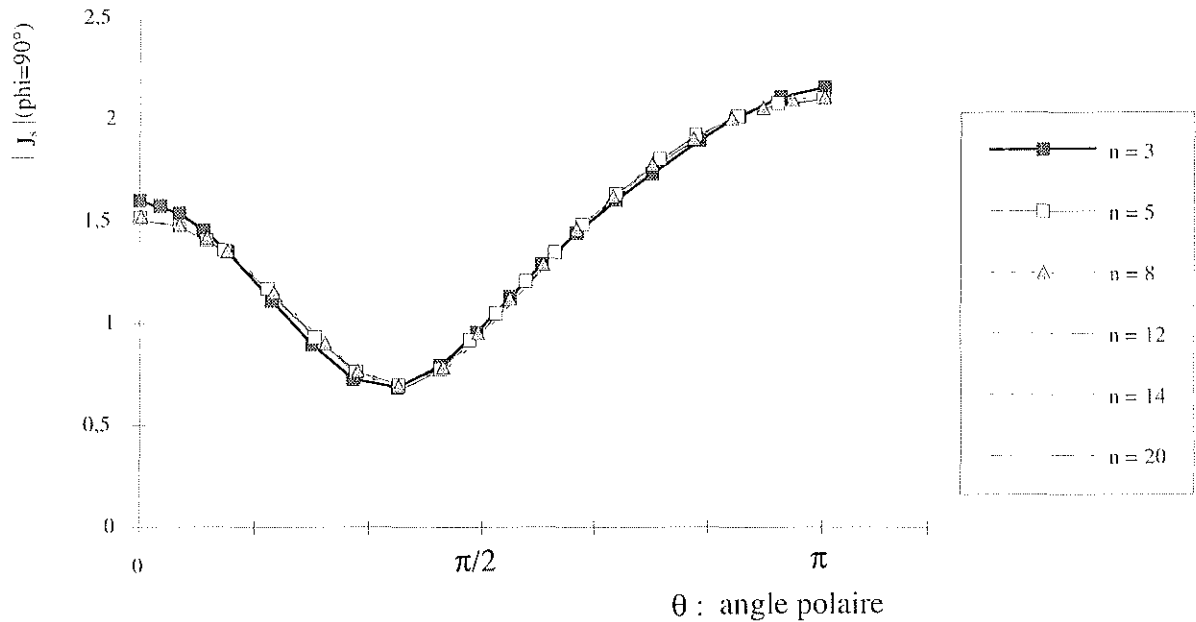


Fig. 4.3 - représentation du module des courants analytiques pour différents ordre  $n$ , sur la surfacique d'une sphère de rayon  $r = 0.2 \lambda$ .

### 2ème Cas :

Dans ce cas nous allons prendre le même cas de figure que précédemment (fig. 4.1) avec  $n$  fixé et égal à 20, et le rayon  $r$  varie de façon que  $r = 0.2\lambda$ , ce qui revient à faire varier la fréquence  $f$ . Ces calculs analytiques sont faits pour les valeurs de  $r$  : 10 mm , 20 mm, 40 mm et 60 mm, soit respectivement pour  $f = 6$  GHz, 3 GHz, 1.5 GHz, 1 GHz. Les résultats obtenus sont présentés à la fig. 4.4.

Nous constatons dans le premier cas que la convergence est excellente à partir de  $n$  égal à 8; le temps CPU n'est pas très important, puisqu'il est de l'ordre de quelques dizaines de secondes pour  $n$  supérieur à 8 et inférieur à 20. Dans le deuxième cas, pour être sûr que la solution analytique converge, nous avons pris l'ordre  $n$  égal à 20, nombre suffisamment grand devant 8, et nous faisons varier le rayon  $r$  de la sphère en le gardant toujours égal à  $0.2\lambda$ . Nous avons alors constaté que les résultats obtenus restent identiques (même allure des courbes présentant  $J_s$  sur l'abscisse curviligne  $\phi = 90^\circ$ ) pour différentes valeurs de  $r$ .

Nous pouvons donc admettre, en conclusion, que la solution analytique du courant est exacte à l'ordre  $n$  égal à 20, et que les calculs numériques envisagés par la méthode des équations intégrales de frontière pourront être comparés à la solution analytique obtenue avec cet algorithme à cet ordre.

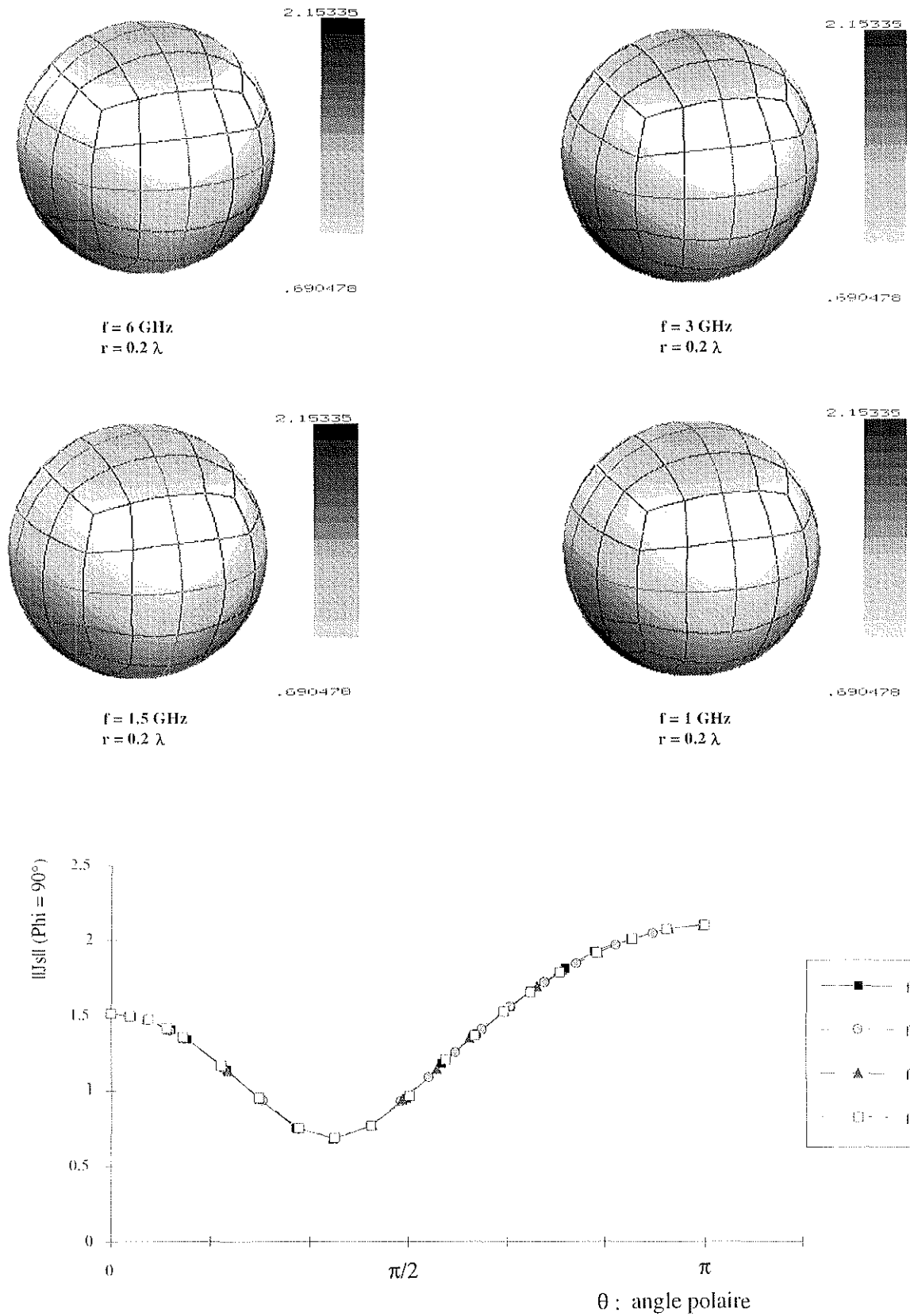


Fig. 4.4 - Représentation du module des courants analytiques, pour des fréquences différentes, sur la surface de sphères de rayon  $r = 0.2 \lambda$ .

### IV - 3. LA SOLUTION NUMÉRIQUE OBTENUE DANS LE CAS DE DIFFRACTION PAR UNE SPHÈRE CONDUCTRICE.

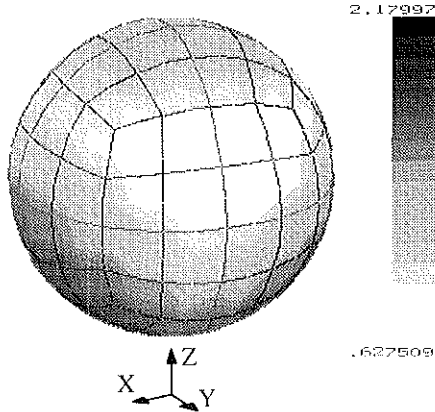
Afin de valider la résolution numérique du problème de diffraction électromagnétique, dans cette partie, nous nous préoccupons de la qualité des résultats obtenus. Nous commençons alors par choisir la meilleure méthode à utiliser pour le traitement de la singularité présente dans un schéma d'ordre 2; nous verrons aussi l'influence du maillage sur la qualité des résultats. Les solutions numériques sont obtenues pour le cas de diffraction par une sphère conductrice afin de pouvoir les comparer à la solution exacte (analytique) obtenue précédemment pour un ordre assez large ( $n=20$  voir §IV - 2.3).

La comparaison entre la solution analytique et la solution numérique est effectuée sur la variation de la densité de courant surfacique le long de la ligne polaire  $\theta=90^\circ$  (voir Fig. 4.1)

#### IV- 3.1. CHOIX DE LA MÉTHODE DE TRAITEMENT DE LA SINGULARITÉ POUR LE SCHÉMA QUADRATIQUE.

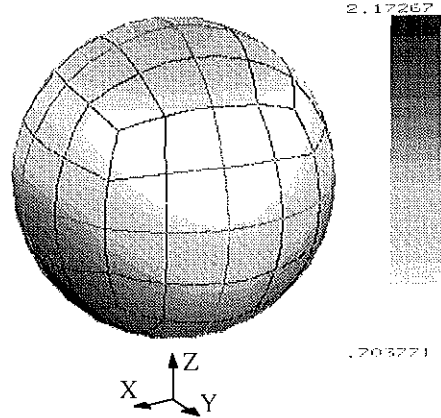
Pour contourner la difficulté de la singularité de la forme  $1/R$  présente dans le cas quadratique, plusieurs travaux ont été déjà faits [48][49][50][51][52]. Dans cette section nous validons quelques unes de ces méthodes afin de choisir la meilleure à appliquer dans notre cas (problème de diffraction). Parmi ces méthodes, nous validons :

- la méthode de transformation des fonctions d'interpolations. (« Sp.I.Functions »: Spécial Interpolation Functions Method ).
- la méthode de transformation des coordonnées locales avec une approximation d'ordre 2 (« S.AD.C.T D2 »: Self-Adaptative Co-ordinate Transformation with second-degree relation).
- la méthode de transformation des coordonnées locales avec une approximation d'ordre 3 (« S.AD.C.T.D3 »: a Self-Adaptative Co-ordinate Transformation with Third-Degree relation).



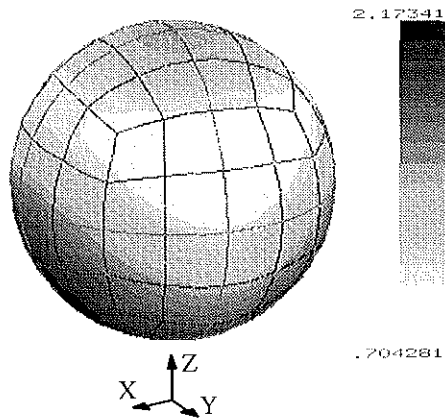
Représentation de  $\|J_s\|$  sur la surface où le traitement de la singularité est fait avec la méthode S.A.D.C.T.D2.

CPU = 1563,94 s



Représentation de  $\|J_s\|$  sur la surface où le traitement de la singularité est fait avec la méthode Sp.I.Functions

CPU = 1572,83 s



Représentation de  $\|J_s\|$  sur la surface où le traitement de la singularité est fait avec la méthode S.A.D.C.T.D3.

CPU = 1569,25 s

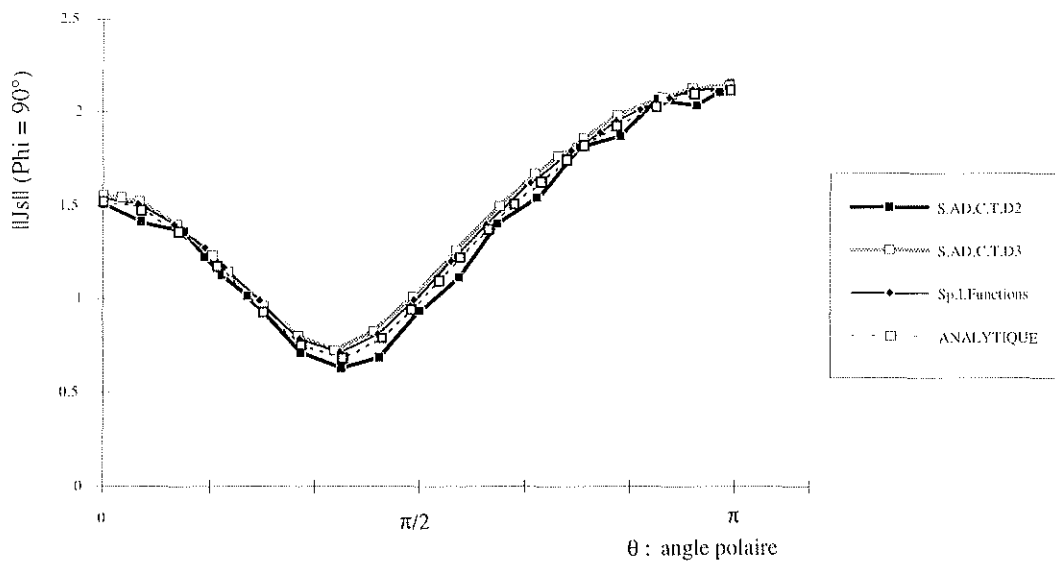


Fig. 4.5 - Représentation des différentes méthodes utilisées pour traiter la singularité.

Les calculs sont réalisés avec les mêmes paramètres géométriques que dans le cas de la solution analytique (fig. 4.2). D'après les résultats obtenus et présentés dans le schéma ci-dessus (fig. 4.5) :

- nous constatons qu'il n'y a pas d'influence de la méthode de traitement des singularités sur le temps CPU.
- la méthode qui s'avère la plus exacte est la méthode de transformation des fonctions d'interpolations.
- on note de gros problème avec la méthode de transformation des coordonnées locales avec une approximation d'ordre 2. Nous n'avons pas d'explication à proposer.

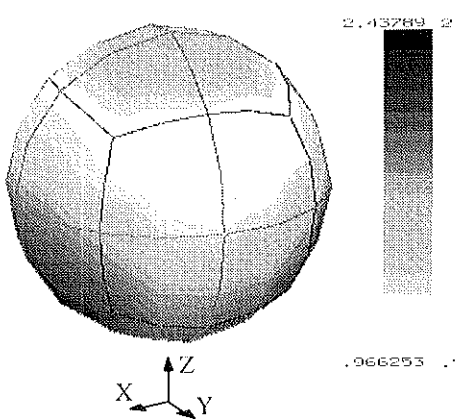
#### IV- 3.2. INFLUENCE DU MAILLAGE.

Afin de pouvoir étudier l'influence du maillage sur la résolution numérique, nous agissons sur la qualité du maillage et sur l'ordre des éléments utilisés. Les différents cas traités sont présentés sur les pages suivantes. Le rayon de la sphère est toujours égal à  $0.2 \lambda$ , et le traitement de la singularité si elle existe est effectué par la méthode de transformation des fonctions d'interpolations (Sp.I.Functions).

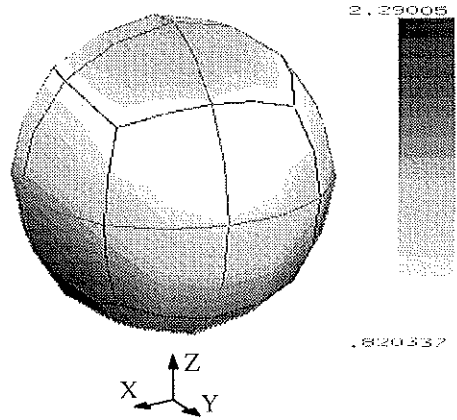
En conclusion, nous constatons que la solution obtenue pour un schéma quadratique est toujours meilleure à celle obtenue pour un schéma linéaire (la solution ordre 2 est plus proche de la solution exacte). Ceci est dû au degré des fonctions d'interpolations utilisées pour l'approximation. Nous constatons aussi que, plus la qualité du maillage est meilleure (plus fin), plus la solution quadratique s'approche de la solution exacte : elle est presque égale à la solution analytique dans le cas où le maillage est le plus fin, ce qui montre bien la nécessité d'utiliser un nombre important de noeuds par longueur d'onde (voir les calculs de  $n/\lambda$  sur les pages suivantes).

**Remarque** : le schéma linéaire est obtenu à partir du schéma quadratique en divisant ce dernier en quatre éléments d'ordre 1. Donc, en réalité, le nombre de noeuds dans un maillage d'ordre 1 est égal au nombre de noeuds dans le maillage quadratique, auquel est ajouté le nombre total d'éléments constituant ce dernier. C'est pour cette raison que le temps CPU en linéaire est plus important qu'en quadratique.

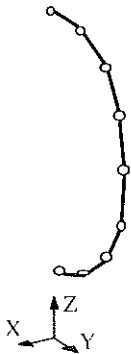
1<sup>er</sup> cas de maillage: 74 noeuds, 24 éléments



(a) représentation de  $\|S\|$  sur la surface extérieure avec un schéma d'ordre 1  
CPU = 120,17 s

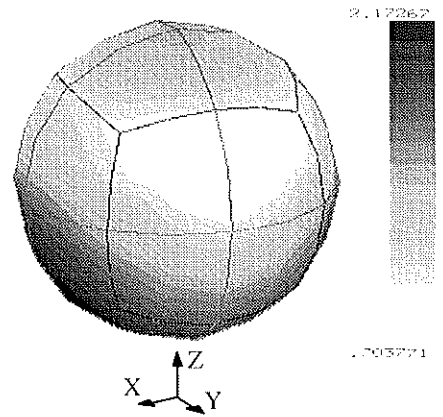


(b) représentation de  $\|S\|$  sur la surface extérieure avec un schéma d'ordre 2  
CPU = 57,34 s

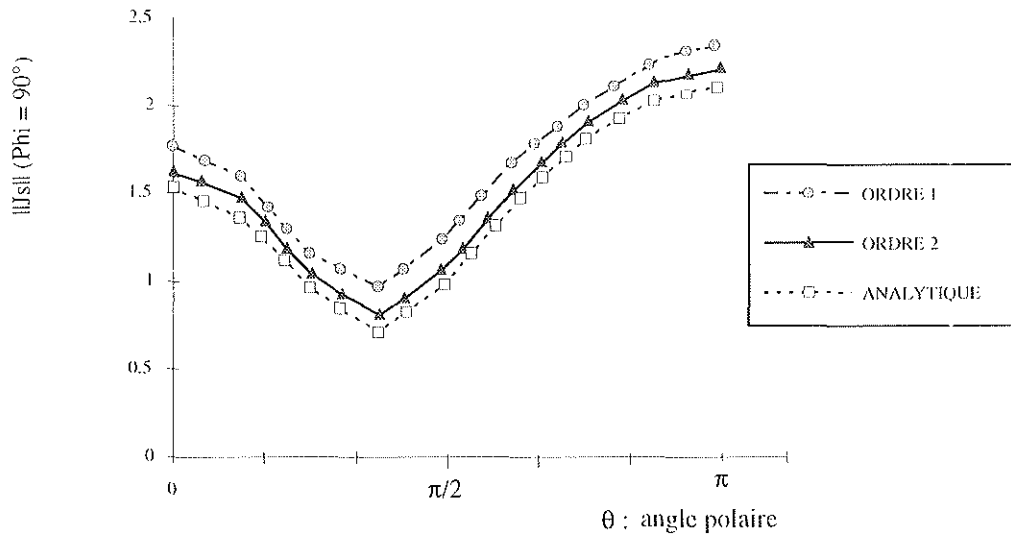


le rapport du nombre de noeuds par longueur d'onde ( $n/\lambda$ ) est obtenu en divisant le nombre total des noeuds sur 1/2 circonférence de la sphère ( $L = 0.2 \lambda \times \pi$ ) :  
dans notre cas :

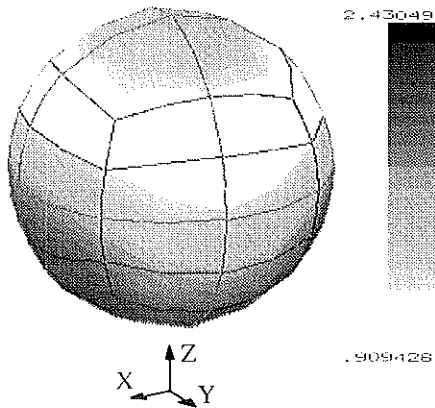
$$\frac{n}{\lambda} = 14$$



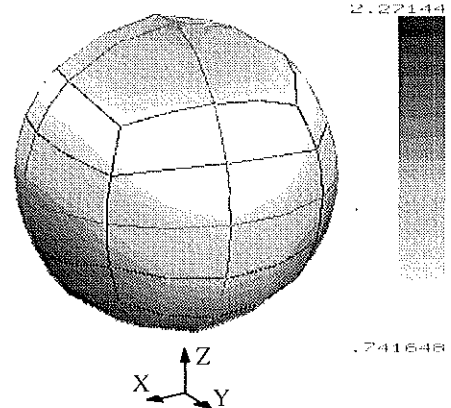
(c) représentation analytique de  $\|S\|$  sur la surface extérieure.  
CPU = 12,51 s



2<sup>ème</sup> cas de maillage : 122 noeuds, 40 éléments



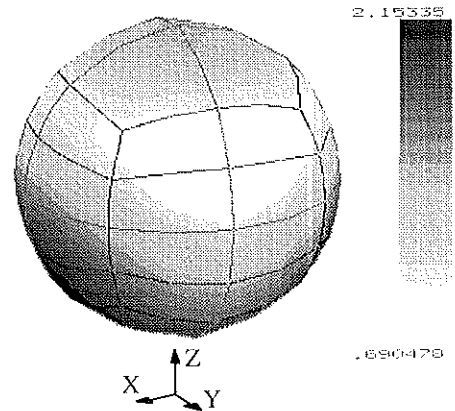
(a) représentation de  $\|J\|$  sur la surface extérieure avec un schéma d'ordre 1  
CPU = 393,87 s



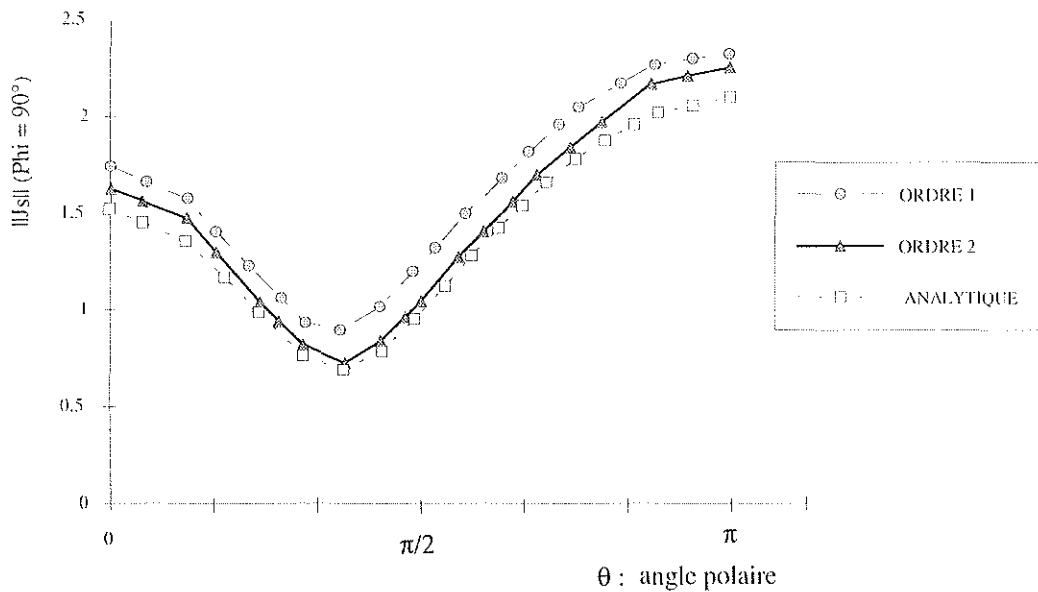
(b) représentation de  $\|J\|$  sur la surface extérieure avec un schéma d'ordre 2  
CPU = 183,47 s

Le rapport :

$$\frac{n}{\lambda} = 21$$

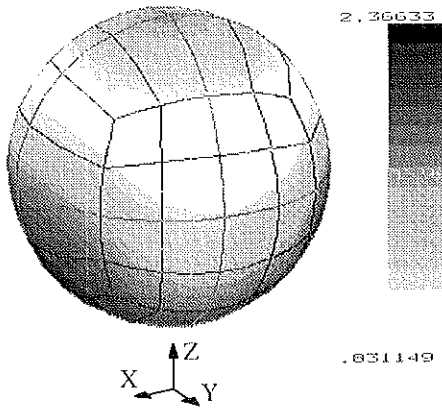


(c) représentation analytique de  $\|J\|$  sur la surface extérieure.  
CPU = 21,2 s

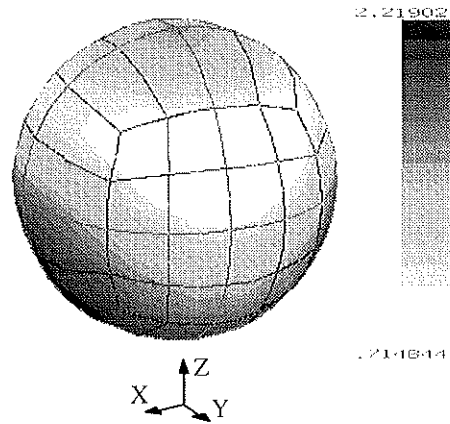




3<sup>ème</sup> cas de maillage : 194 noeuds, 64 éléments



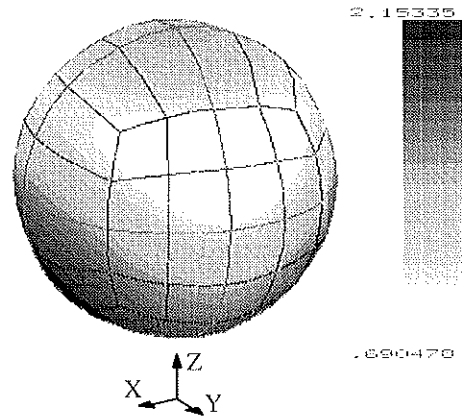
(a) représentation de  $\|J\|$  sur la surface extérieure avec un schéma d'ordre 1  
CPU = 1257,22 s



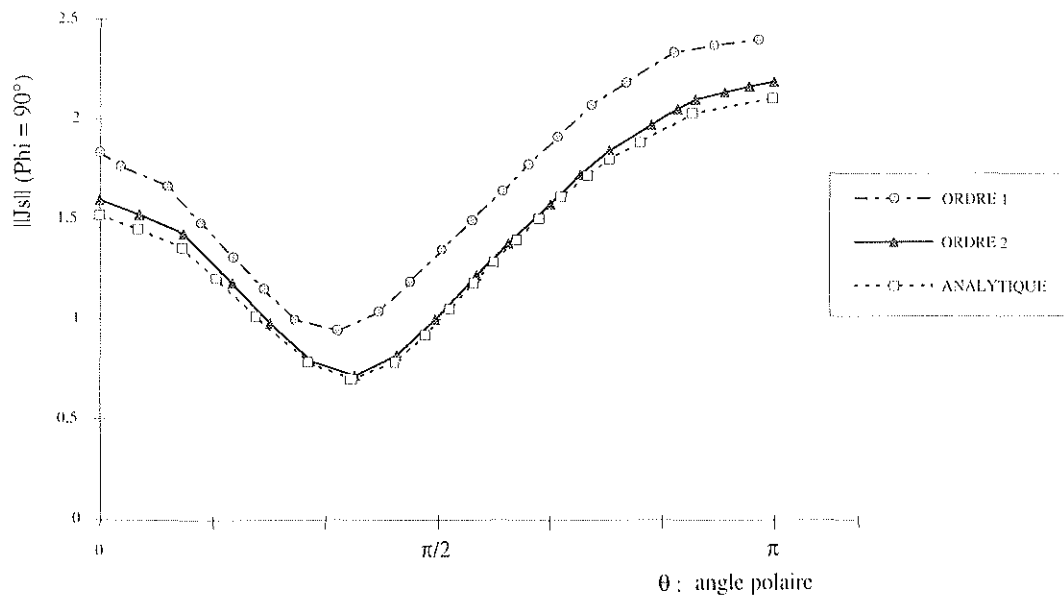
(b) représentation de  $\|J\|$  sur la surface extérieure avec un schéma d'ordre 2  
CPU = 564,89 s

Le rapport :

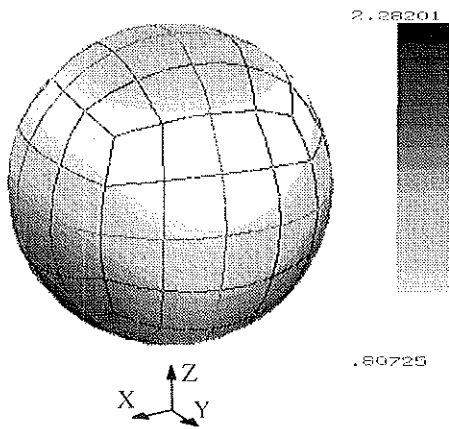
$$\frac{n}{\lambda} = 21$$



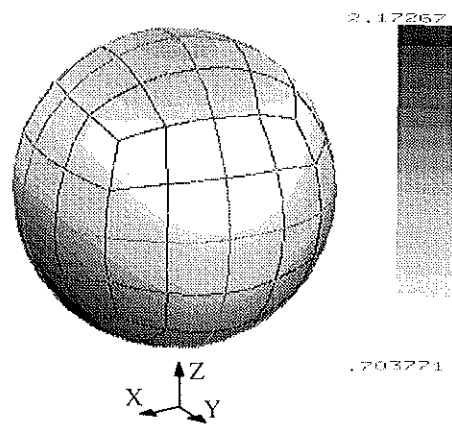
(c) représentation analytique de  $\|J\|$  sur la surface extérieure.  
CPU = 33,86 s



4<sup>ème</sup> cas de maillage : 290 noeuds, 96 éléments



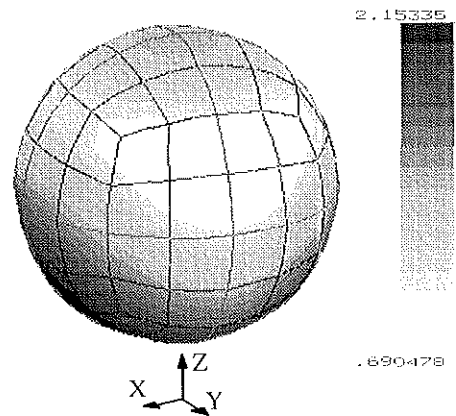
(a) représentation de  $||Js||$  sur la surface extérieure avec un schéma d' **ordre 1**  
CPU = 3712,92 s



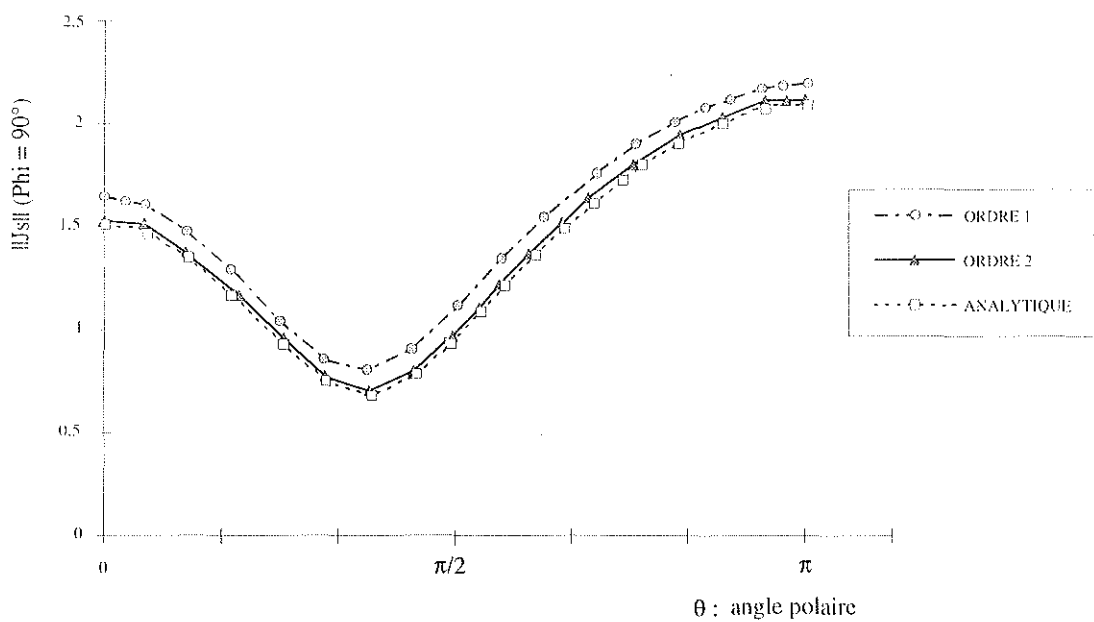
(b) représentation de  $||Js||$  sur la surface extérieure avec un schéma d' **ordre 2**  
CPU = 1572,83 s

Le rapport :

$$\frac{n}{\lambda} = 27$$



(c) représentation **analytique** de  $||Js||$  sur la surface extérieure.  
CPU = 49,85 s



### IV- 3.3. LE TEMPS CPU.

Nous allons maintenant présenter l'évolution du temps CPU en fonction de la densité du maillage (fig. 4.5 bis).

Des allures des courbes ci-dessous, nous constatons que le temps CPU augmente globalement avec le carré du nombre de noeuds, d'autre part, l'espace mémoire nécessaire est très important: une sphère maillée avec 1000 noeuds (06 inconnues réelles par noeud) occuperait par exemple un espace mémoire d'environ 140 Moctets. Afin de réduire ces paramètres (temps CPU et espace-mémoire), il faut donc bien évidemment tenir compte des symétries physiques et géométriques du problème modélisé si elles existent.

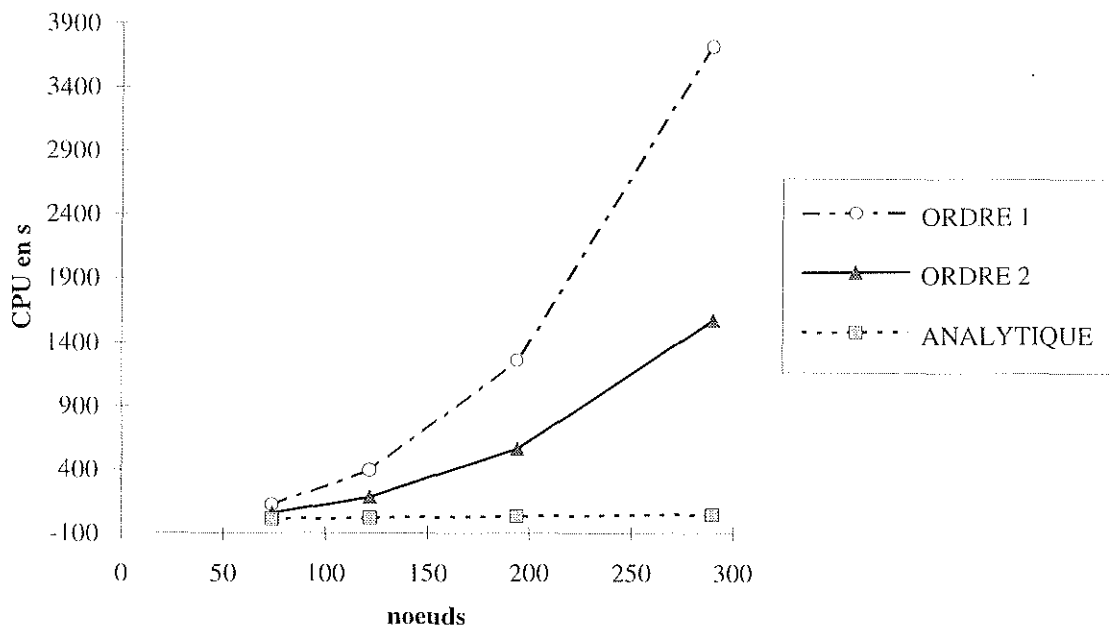
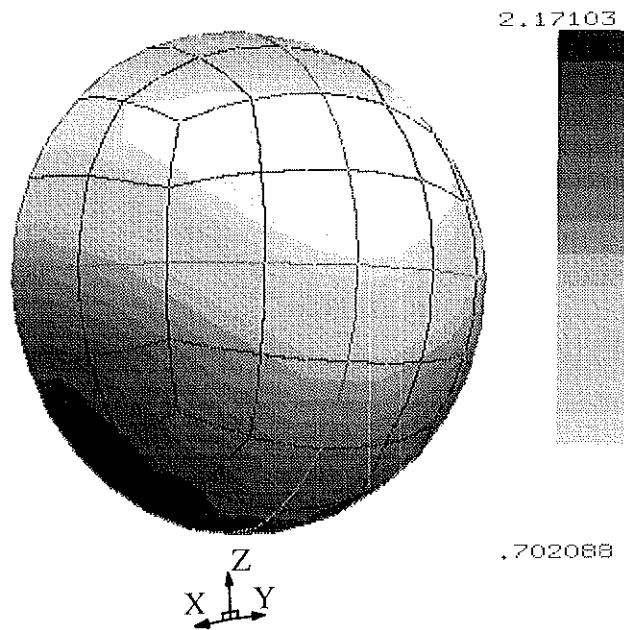


Fig. 4.5. bis - Représentation du temps CPU en fonction de la qualité du maillage.

Pour ce faire, la méthode que nous avons mise en oeuvre est classique: l'objet est d'abord reconstitué fictivement, au niveau de l'assemblage, afin de prendre en compte la constitution de tous les éléments du maillage, y compris les éléments symétriques. la résolution se fait ensuite uniquement avec les noeuds initiaux, tels qu'ils ont été décrits au niveau du mailleur.

Le cas test que nous avons choisi pour la validation de la méthode est toujours celui d'une sphère, présentant un ou deux plans de symétrie. Le temps CPU demandé par la résolution diminue alors considérablement en prenant en compte la présence de symétries, sans que la solution ne soit perturbée (ce qui est rassurant, et valide la méthode: cf. fig. 4.6,

4.7 et 4.8). Il devient donc possible d'obtenir la solution pour un maillage global très important en utilisant les plans de symétries.



Représentation de  $\|J\|$  sur la surface extérieure d'un demi-sphère maillée en 161 noeuds et 48 éléments  
CPU = 524,15 s

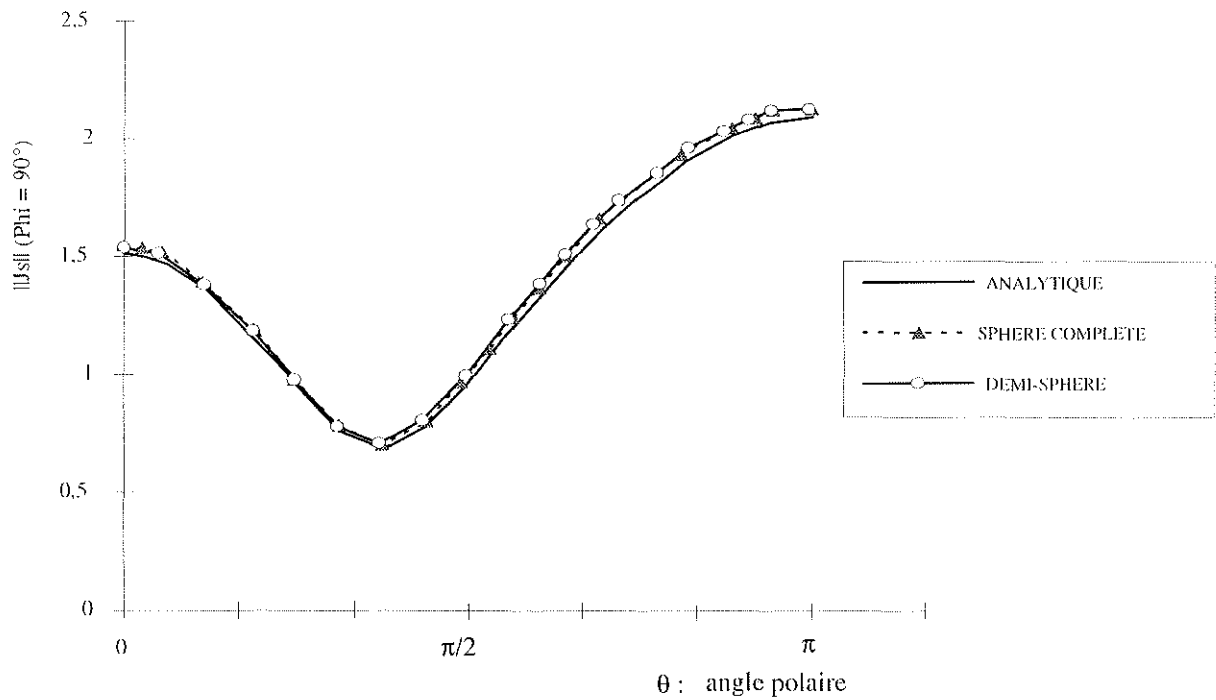
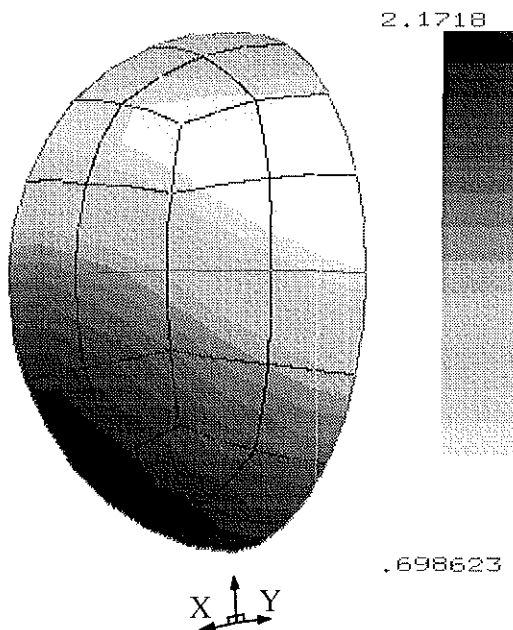
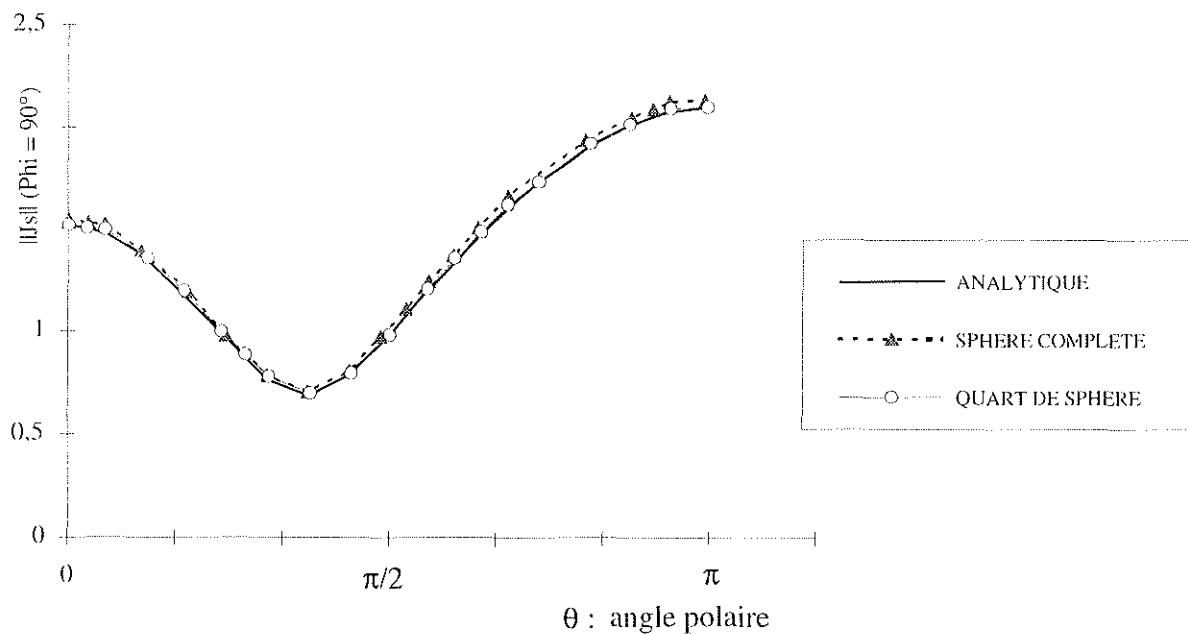


Fig. 4.6. - Représentation des calculs avec un seul plan de symétrie.



Représentation de  $\|J\|$  sur la surface extérieure d'un quart de sphère maillée en 89 noeuds et 24 éléments .  
**CPU = 241,56 s**



**Fig. 4.7** - Représentation des calculs avec deux plans de symétries et avec un maillage suffisant pour la résolution.

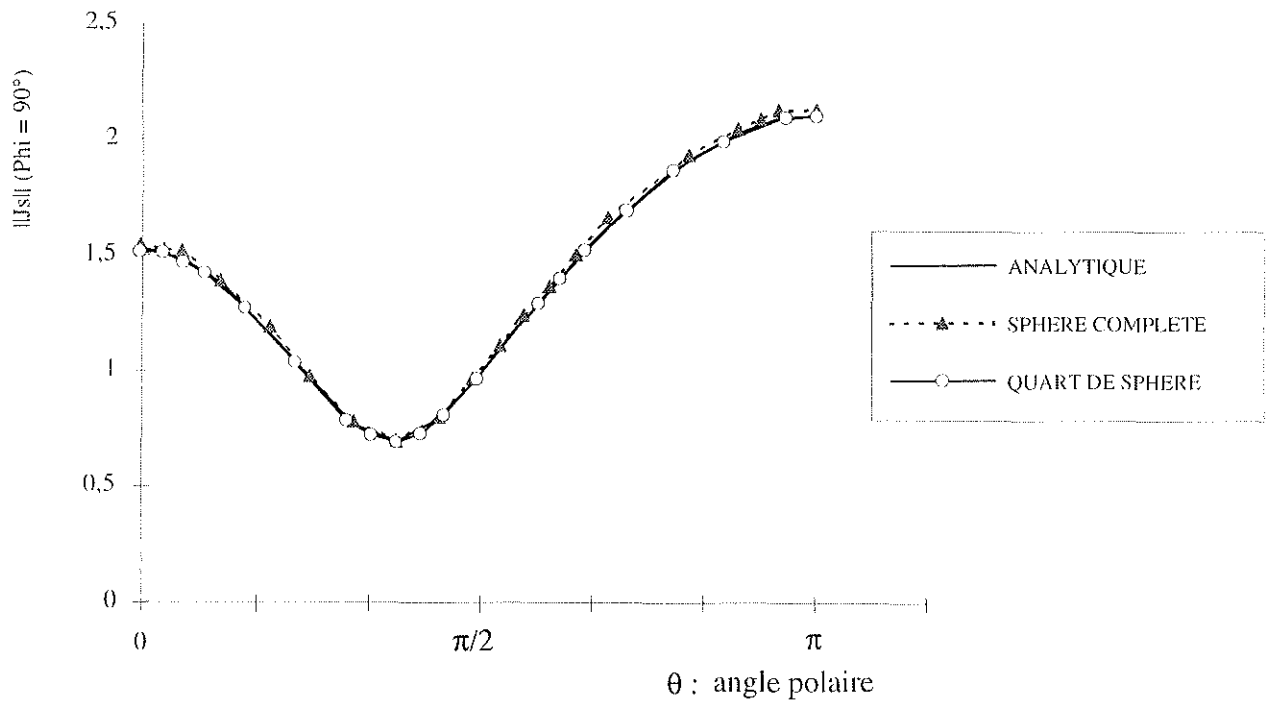
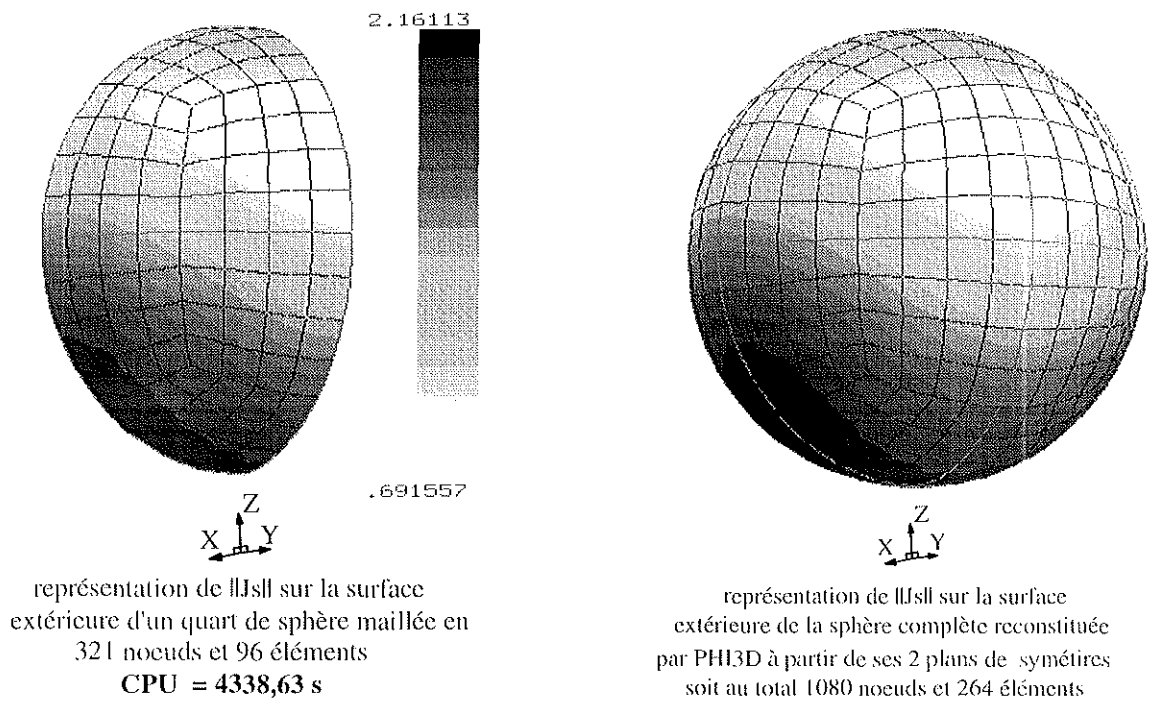


Fig. 4.8 - Représentation des calculs avec deux plans de symétries et avec un maillage fin.

## IV - 4. DÉTERMINATION DU CHAMP DIFFRACTÉ À L'EXTÉRIEUR D'UN OBJET PARFAITEMENT CONDUCTEUR.

Dans cette partie nous allons déterminer les expressions des champs diffractés à l'extérieur de la surface d'un objet parfaitement conducteur. Sur cette dernière, nous avons  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ , les équations (2.15) seront donc :

$$\begin{aligned} E^s(x) &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_s} \{j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})\phi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E})\nabla' \phi\} ds' \\ H^s(x) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_s} \{(\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \phi\} ds' \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ , les équations ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned} E^s(x) &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_s} \left\{ j\omega\mu \mathbf{J}_s \phi - \frac{j}{\omega\mu} \nabla' \mathbf{J}_s \cdot \nabla' \phi \right\} ds' \\ H^s(x) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_s} \{ \mathbf{J}_s \times \nabla' \phi \} ds' \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ce système représente les équations intégrales du champ diffracté en fonction des sources équivalentes sur la surface d'un objet diffracteur parfaitement conducteur. La détermination des quantités de champ demande la résolution des équations intégrales (2.17).

La deuxième équation est plus facile à résoudre numériquement car, dans la première, nous devons effectuer la dérivation d'une valeur approchée, ce qui provoque des erreurs numériques très importantes.

Cette équation peut être résolue numériquement en utilisant les solutions des densités de courants calculées précédemment sur une surface S d'un objet diffracteur discrétisée en éléments quadrilatéraux.

L'équation utilisée à l'extérieur de l'objet sera écrite sous la forme discrétisée suivante :

$$H^s(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{N_e=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{N_s} \oint_{\partial V_s} [J_{kj} \cdot \mathbf{V}_{ki} - J_{ki} \cdot \mathbf{V}_{kj}] e_j ds_e(y) \quad (4.17)$$

les significations des différentes variables sont indiquées dans les équations (3.1) à (3.4).

Le paramètre le plus important à connaître en diffraction est la section radar de l'objet diffracteur. Elle est définie comme étant l'aire interceptant une puissance totale, diffractée dans un milieu isotrope, et produisant au niveau d'un récepteur une densité de puissance égale

à celle diffractée par l'objet. Elle est obtenue en se plaçant à l'infini ( $kr \rightarrow \infty$ ), donc lorsque le champ est considéré comme lointain.

Nous allons évaluer le champ proche et lointain dans le cas d'une sphère parfaitement conductrice ainsi que le diagramme de rayonnement représentant la section radar. Les calculs seront faits pour les points sommets de triangles situés dans un plan de coupe réalisé par PHI3D. Deux cas possibles : soit le plan de coupe est proche de l'objet, soit il est éloigné (lointain) de ce dernier. Pour valider les calculs, nous prenons le cas simple d'une sphère parfaitement conductrice (fig. 4.9) et (fig. 4.12), où la solution analytique est déterminée.

#### IV- 4.1. CALCUL DU CHAMP PROCHE POUR LE CAS D'UN OBJET SPHÉRIQUE.

Soit une sphère conductrice de rayon  $r$ , les densités de courants surfaciques sont connues sur les noeuds des éléments quadrilatéraux quadratiques, son plan de coupe est réalisé avec PHI3D et maillé en éléments triangulaires (fig. 4.9).

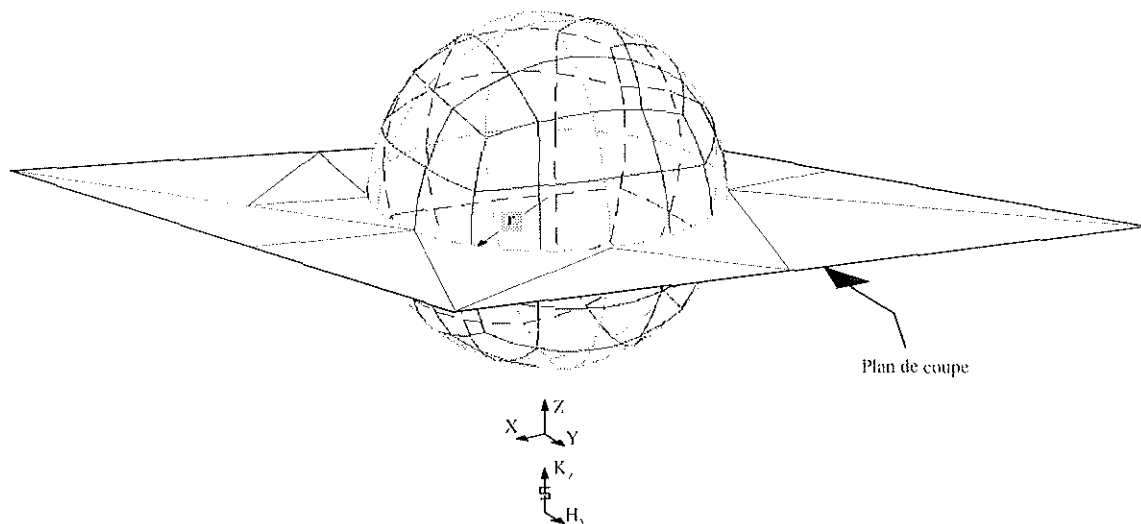


Fig.

4.9. - Représentation d'une coupe proche avec le plan XY.

Dans le cas de figure IV - 2 où notre sphère est illuminée par un champ incident sous la forme d'une onde plane polarisée en x et qui se déplace suivant z (fig. 4.1), nous allons faire un calcul proche dans le plan de coupe d'équation  $Y = 0$ .

Les résultats obtenus sont présentés comme suit :

- représentation des isovaleurs du module du champ total dans le plan de coupe pour le cas analytique et le cas de la méthode intégrale (fig. 4.10).



- représentation de l'allure de champ sur un arc de cercle formé par l'angle  $q$  (de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ ). Cet arc de cercle est d'abord situé à une distance très proche de la surface de la sphère, puis à une distance moyenne (au milieu du plan de la coupe, fig. 4.11.).

Les résultats obtenus numériquement sont très proches de ceux obtenus analytiquement: ceci valide la méthode utilisée pour évaluer le champ proche et lointain.

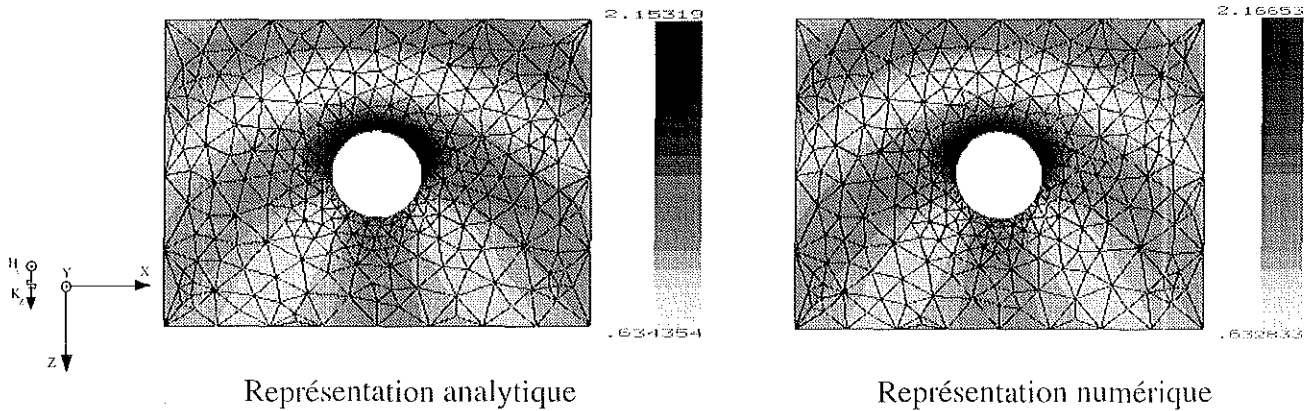


Fig. 4.10 - Module des isovalues du champs total dans un plan de coupe  $Y=0$ .

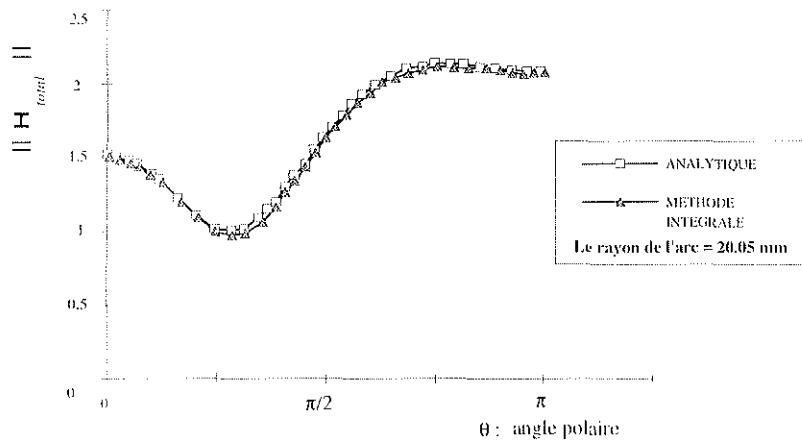


Fig. 4.11 (a) - Module du champ total sur un arc de cercle très proche de la sphère.

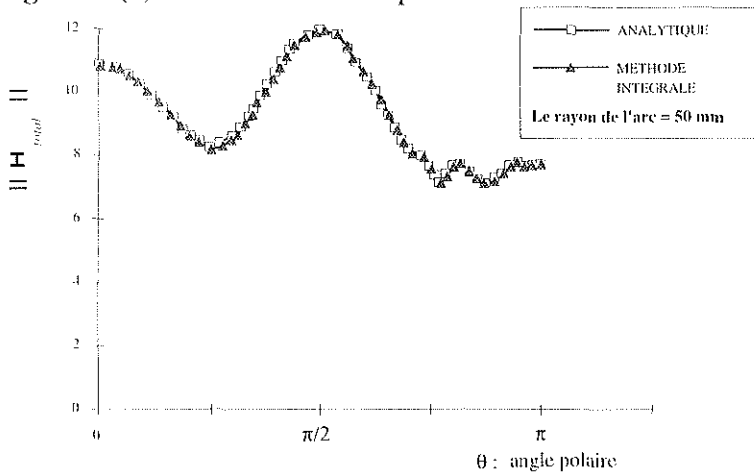


Fig. 4.11 (b) - Module du champ total sur un arc de cercle éloigné de la sphère ( $r=50$  mm).

#### IV- 4.2. CALCUL DU CHAMP LOINTAIN POUR LE CAS D'UN OBJET SPHÉRIQUE.

Dans ce cas de figure, le plan de coupe lointain est réalisé avec deux cercles concentriques (fig. 4.12). Les coordonnées des points de calculs (x,y,z) sont stockées dans un fichier qui sera interprété par PHI3D et qui va le prendre comme étant une coupe.

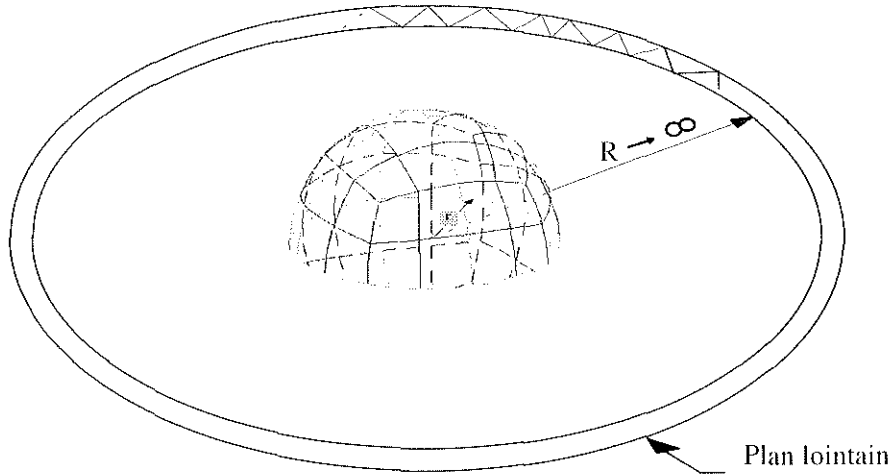


Fig. 4.12. - Représentation d'une coupe lointaine (plan XY).

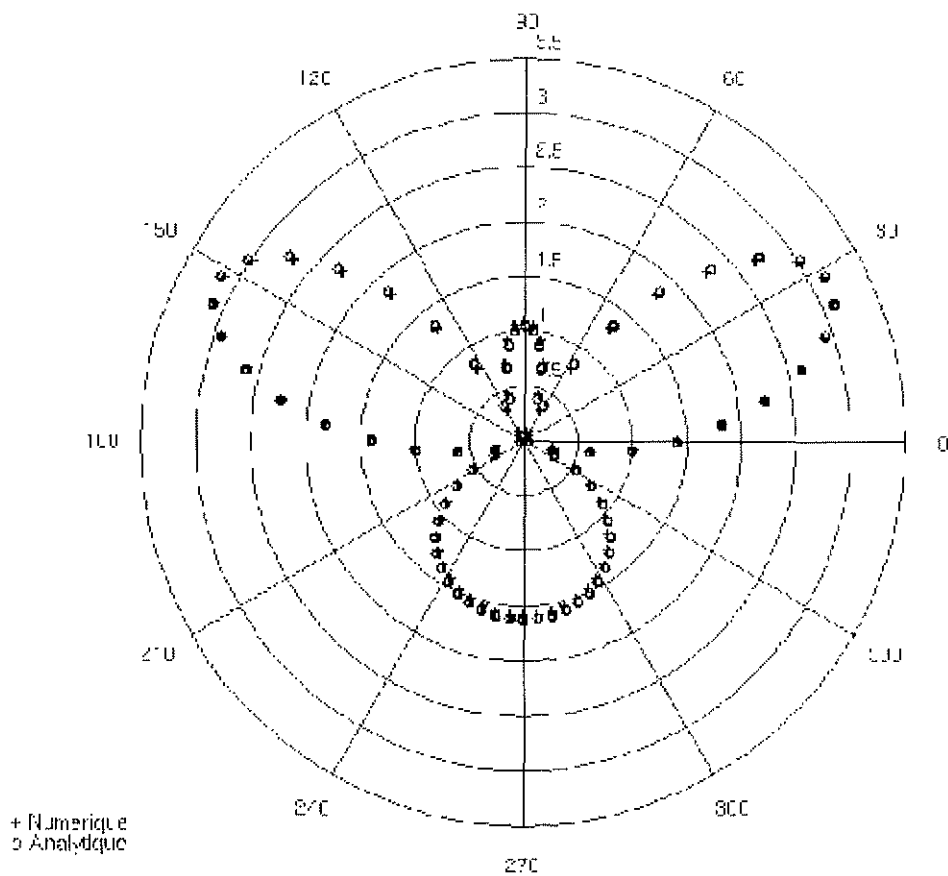
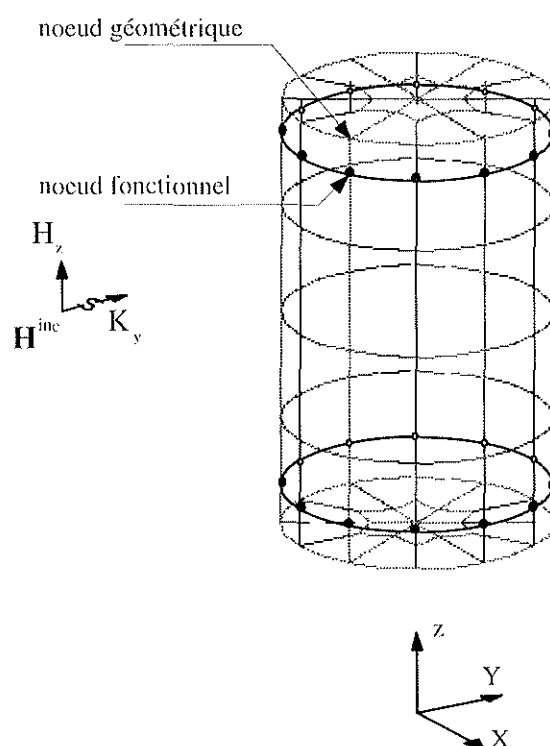


Fig. 4.13. - Diagramme de rayonnement pour une sphère parfaitement conductrice.

Pour valider les calculs numériques, nous allons comparer les valeurs de la section radar obtenues numériquement à celles déterminées par les calculs analytiques (fig. 4.13).

#### IV - 5. EXEMPLE DE LA DIFFRACTION PAR UN CYLINDRE PARFAITEMENT CONDUCTEUR.

Afin de valider la méthode de traitement de la discontinuité (utilisation d'éléments semi-discontinus), nous avons modélisé le cas de la diffraction d'une onde incidente par un cylindre conducteur parfait. La fonction associée au vecteur normal ainsi que les vecteurs champs sont discontinus au niveau des circonférences reliant les bases du cylindre (bords) à sa surface génératrice. Nous utilisons donc des éléments semi-discontinus à la place des éléments continus situés sur les deux côtés le long de la circonférence reliant le bord et la surface génératrice (fig. 4.14).



**Fig. 4.14** - Présentation du problème de diffraction par un cylindre.

Les isovalues du module des densités de courants surfaces sont présentés ci-dessous (fig. 4.15) pour le schéma d'ordre 1 et le schéma d'ordre 2 :

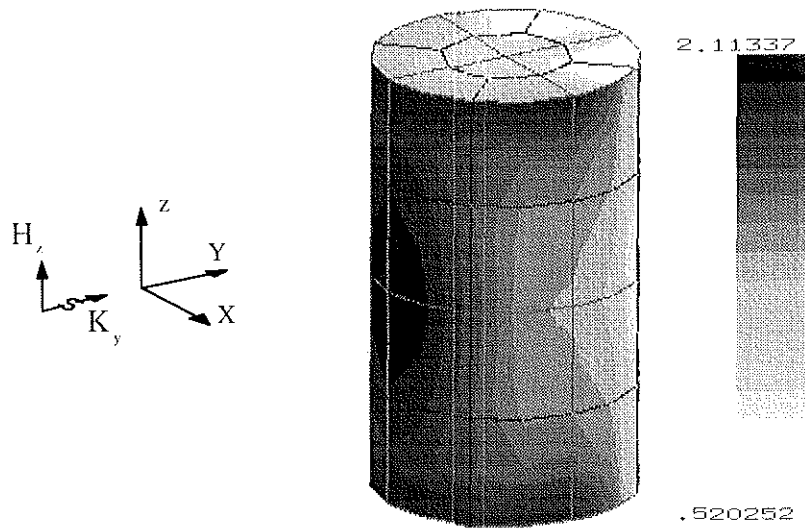


Fig. 4.15 (a) - Représentation des isovaleurs du module des densités de courants surfacique pour le schéma d'ordre 1.

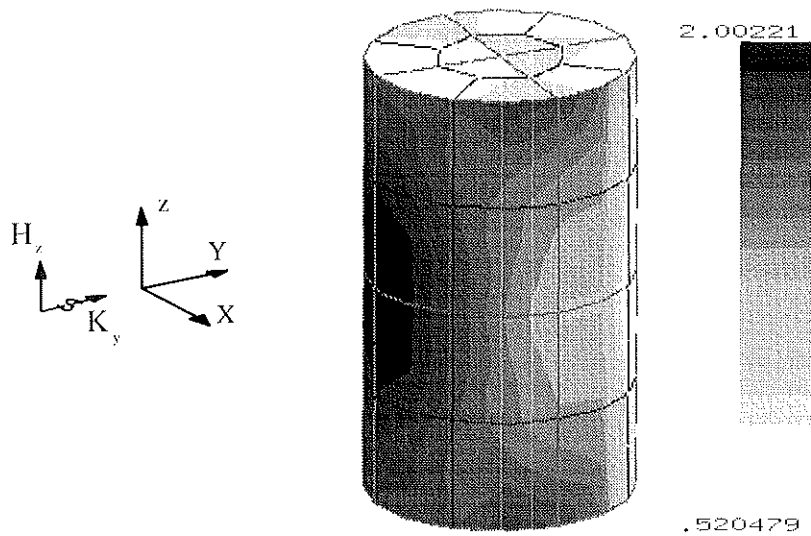


Fig. 4.15 (b) - Représentation des isovaleurs du module des densités de courants surfacique pour le schéma d'ordre 2.

Nous constatons que les densités de courants sont bien discontinues au niveau des arêtes.

## IV- 6 CONCLUSION

La validation de la méthode que nous proposons pour la résolution des problèmes de diffraction électromagnétique tridimensionnelle à été réalisée par l'intégration d'un module Hyper-harmonique au logiciel PHI3D, déjà utilisé pour la modélisation des dispositifs électrotechniques 3D (logiciel développé au sein du CEGELY).

Pour valider ce modèle, nous avons commencé par programmer la solution analytique d'un objet diffracteur sphérique. Nous avons déterminé l'ordre optimal des fonctions sphériques utilisées dans les expressions analytiques. Une fois la solution analytique supposée exacte, nous avons confronté les résultats obtenus par la méthode intégrale à l'ordre 1, où le problème de singularité est inexistant, ainsi qu'à l'ordre 2. Nous avons également déterminé la méthode la plus précise pour la résolution du problème de singularité lorsque le schéma quadratique est utilisé.

Nous avons ensuite étudié l'influence du maillage sur la précision des résultats numériques obtenus et sur les temps de calcul. Enfin, nous avons validé la méthode des éléments finis semi-discontinus pour la prise en compte des discontinuités géométriques et physiques.

## **CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES**

Nous avons exposé dans ce travail une méthode de résolution numérique pour des problèmes de diffraction électromagnétique 3D en hyperfréquences. Cette méthode a été choisie parmi l'éventail des méthodes numériques utilisées pour la modélisation 3D des phénomènes de diffraction. Il s'agit d'une formulation intégrale basée sur l'utilisation du théorème de Green.

Différentes formulations ont été établies, pour les objets conducteurs parfaits et les objets diélectriques en régime harmonique, et pour les objets conducteurs parfaits en régime temporel. La mise en oeuvre numérique de ces équations, discrétisées en utilisant des éléments finis de surface, conduit à un système linéaire de petite taille grâce au gain d'une dimension dans la modélisation.

Les difficultés rencontrées dans la mise en oeuvre de cette méthode sont les problèmes de singularité et de discontinuité. Pour la résolution du problème de singularité, différentes procédures numériques ont été testées et validées, afin de faire ressortir la meilleure d'entre elles. Le problème de la discontinuité a été traité en utilisant des éléments spéciaux appelés éléments semi-discontinus.

Les résultats numériques obtenus ont été confrontés à des résultats analytiques : il s'agit de la diffraction par un objet sphérique conducteur parfait. Le module résultant de nos travaux a été intégré au logiciel PHI3D.

Contrairement à la méthode des éléments finis, notre méthode offre la possibilité de traiter avec un moindre coût des problèmes de diffraction électromagnétique tridimensionnels en hyperfréquences essentiellement lorsque ceux-ci sont ouverts. Son grand avantage est qu'elle ne nécessite aucune approximation pour la prise en compte de l'infini.

Nous avons vu dans le chapitre IV que, même si la méthode intégrale est peu coûteuse par rapport à une méthode de type éléments finis, pour une précision identique, la modélisation d'un problème réaliste (illumination d'un avion par une onde radar) ne peut pas être envisagée sur un ordinateur scalaire courant : pour des raisons de temps de calcul, certes, mais aussi et autant pour des raisons d'espace-mémoire.

Deux directions sont donc à envisager :

- d'une part, la résolution se fait actuellement à l'aide de la méthode de Gauss, qui est coûteuse. D'autres méthodes, itératives, doivent être envisagées.

- le calcul massivement parallèle devrait permettre de résoudre les problèmes d'espace-mémoire. Il faudra alors revoir les différents algorithmes mis en oeuvre de façon à les rendre optimaux.

Enfin, la modélisation de problèmes de C.E.M nécessite, par définition, la prise en compte réelle de la composante temporelle. Nous avons établi théoriquement une formulation dans ce domaine, mais nous n'avons pas pu la mettre en oeuvre : nous espérons qu'elle le sera dans un avenir proche.

## ANNEXE 1

### RAPPEL DU CONCEPT DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

La représentation des équations de Maxwell sous la forme différentielle est utilisée pour décrire et relier les vecteurs champs, les densités de courants et les densités de charges à n'importe quel point de l'espace et en fonction du temps. Pour que ces expressions soient valables, il est supposé que les vecteurs champs sont des fonctions continues et dérivables en temps et dans l'espace. Les distributions de charges et de courants présentent souvent une discontinuité au niveau des interfaces entre les milieux où il y a eu un changement discret des paramètres magnétiques et/ou électriques (ou physiques) à travers l'interface. Ces variations de vecteurs champs à travers une telle interface dépendent des distributions discontinues de charges et de courant auxquelles on se réfère souvent comme étant des conditions aux limites du problème. Ainsi une description complète de champs de vecteurs à n'importe quel instant nécessite la vérification de certaines lois physiques dites équations de Maxwell et les conditions aux limites associées. La forme différentielle de ces équations est la suivante :

$$\begin{cases} \nabla \times E = -K_i - \frac{\partial B}{\partial t} = -K_i - K_d = -K_t \\ \nabla \times H = J_i + J_c + \frac{\partial D}{\partial t} = J_{ic} + J_d = J_t \\ \nabla \cdot D = q_{ev} = \rho \\ \nabla \cdot B = q_{mv} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} J_{ic} = J_i + J_c & \quad \begin{cases} J_i : \text{la densité du courant électrique appliqué (A / m}^2\text{)} \\ J_c : \text{la densité du courant électrique de conduction (A / m}^2\text{)} \end{cases} \\ J_d = \frac{\partial D}{\partial t} & \quad \{ J_d : \text{la densité du courant électrique de déplacement (A / m}^2\text{)} \\ K_d = \frac{\partial B}{\partial t} & \quad \{ K_d : \text{la densité du courant magnétique de déplacement (V / m}^2\text{)} \end{aligned}$$

et



$E$  : le champ électrique (V / m)

$H$  : le champ magnétique ou l'excitation magnétique (A / m)

$D$  : l'induction ou le déplacement électrique (C / m<sup>2</sup>)

$B$  : l'induction magnétique ou la densité du flux magnétique (webers / m<sup>2</sup> ou Tesla)

$K_i$  : la densité du courant magnétique appliqué (V / m<sup>2</sup>)

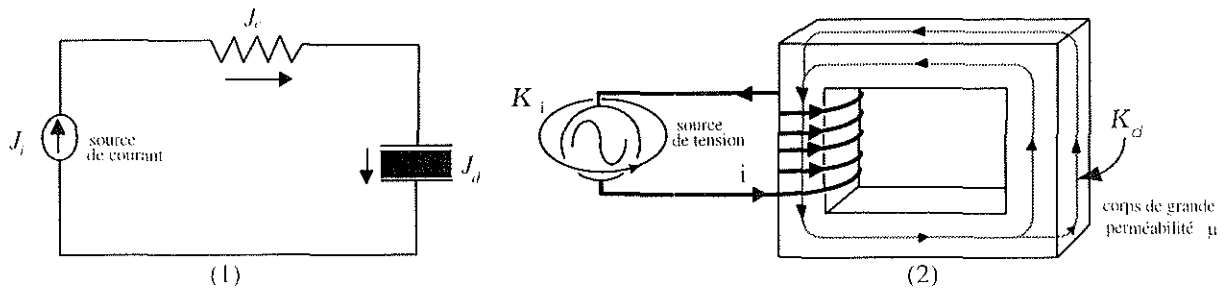
$q_{ev}$  : la densité du charge électrique (C / m<sup>3</sup>)

$q_{mv}$  : la densité du charge magnétique (webers / m<sup>3</sup>)

La densité du courant de déplacement  $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$  a été introduite par Maxwell pour compléter la loi d'Ampère en statique  $\nabla \times H = J$ . Dans un espace libre (l'air) considéré comme un fluide parfait,  $J_d$  est vue comme un ensemble de charges en mouvement dans cet espace. Pour les diélectriques une partie de la densité du courant de déplacement est vue comme un ensemble de charges en mouvement responsable de la création du courant réel. Par conséquent, dans un espace libre (de conductivité nulle), le terme  $\frac{\partial D}{\partial t}$  est entièrement considéré comme une densité de courant de déplacement.

A cause de la symétrie des équations de Maxwell, le terme  $\frac{\partial B}{\partial t}$  est désigné comme étant une densité de courant de déplacement magnétique. En plus, la densité du courant magnétique appliquée  $K_i$  (source) et la densité des charges magnétiques  $q_{mv}$  ont été introduites suite au concept général du courant. Bien que les charges magnétiques et la densité de courant magnétique sont physiquement non réalisables, elles ont été introduites afin d'équilibrer les équations de Maxwell. Les densités de courants électriques et magnétiques appliquées sont considérées comme des sources d'énergie qui génèrent des champs dont les expressions seront écrites en fonctions de ces densités de courants.

Résumons tout ce que nous venons de développer avec les schémas des deux circuits électriques suivants :



Dans le circuit (1) la source de courant est vue comme une densité de courant électrique appliqué  $J_i$ . Cette dernière génère une densité de courant de conduction  $J_c$  à travers une résistance et un courant de déplacement  $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$  à travers une capacité.

Dans le circuit (2) la source de tension est vue comme une source de densité de courant magnétique appliqué  $K_i$ . Cette dernière génère à travers un corps magnétique de perméabilité  $\mu$  très grande une densité de courant de déplacement (magnétique)  $K_d = \frac{\partial B}{\partial t}$ .

## ANNEXE 2

### A - LES FONCTIONS SPHÉRIQUES DE BESSEL

Soit l'équation différentielle :

$$z^2 \omega'' + 2z \omega' + [z^2 - n(n+1)] \omega = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{A-1})$$

Les solutions particulières de cette équation différentielle sont :

- Les fonctions de Bessel sphériques de première espèce, notées :

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z) \quad (\text{A-2})$$

- Les fonctions de Bessel sphériques de seconde espèce notées :

$$y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+1/2}(z) \quad (\text{A-3})$$

- Ainsi que leurs combinaisons linéaires appelées :

**Fonctions de Hankel sphériques de première espèce notées :**

$$h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + i y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(1)}(z) \quad (\text{A-4})$$

**Fonctions de Hankel sphériques de seconde espèce notées :**

$$h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - i y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(2)}(z) \quad (\text{A-5})$$

Toutes ces fonctions sont linéairement indépendantes pour chaque valeur de  $n$ . Leur développement en série s'écrit :

$$j_n(z) = \frac{z^n}{1.3.5 \dots (2n+1)} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(2n+3)} + \frac{\left(\frac{1}{2}z^2\right)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} + \dots \right\} \quad (\text{A-6})$$

$$y_n(z) = -\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{z^{n+1}} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(1-2n)} + \frac{\left(\frac{1}{2}z^2\right)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} + \dots \right\}$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

Les fonctions de Bessel d'ordre fractionnaire ( $n+1/2$ ) sont utilisées comme étant des solutions de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques. Dans les problèmes scalaires il est utile d'utiliser comme solutions [38] les fonctions de Bessel modifiées d'expressions :

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \\ y_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

Dans les problèmes électromagnétiques en régime harmonique, les fonctions de Bessel Sphériques (Alternatives) modifiées,  $\hat{J}$ ,  $\hat{Y}$  et  $\hat{H}$  ont pour expressions :

$$\begin{aligned} \hat{J}_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+1/2}(x) = x j_n(x) \\ \hat{Y}_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{n+1/2}(x) = x y_n(x) \\ \text{et} \\ \hat{H}_n^{(1)} &= \hat{J}_n(x) - i \hat{Y}_n(x) \\ \hat{H}_n^{(2)} &= \hat{J}_n(x) + i \hat{Y}_n(x) \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

De [1] nous avons :

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \frac{x^n}{1.3.5\dots(2n+1)} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}x^2}{1!(2n+3)} + \frac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} + \dots \right\} \\ y_n(x) &= -\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{x^{n+1}} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}x^2}{1!(1-2n)} + \frac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

Alors :

$$\left. \begin{aligned}
 j_n(x) &= \frac{x^n}{1.3.5\dots(2n+1)} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}x^2}{1!(2n+3)} + \frac{\frac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{2}}{2!(2n+3)(2n+5)} + \dots \right\} \\
 &\quad \left( \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (2n+2p+1)} \right)_{k=1} \quad \left( \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (2n+2p+1)} \right)_{k=2} \quad \dots
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 y_n(x) &= -\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{x^{n+1}} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}x^2}{1!(1-2n)} + \frac{\frac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{2}}{2!(3-2n)(5-2n)} + \dots \right\} \\
 &\quad \left( \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (-2n+2p+1)} \right)_{k=1} \quad \left( \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (-2n+2p+1)} \right)_{k=2} \quad \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-10})$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned}
 j_n(x) &= \frac{x^n}{1.3.5\dots(2n+1)} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (2n+2p+1)} \right\} \\
 y_n(x) &= -\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{x^{n+1}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (-2n+2p+1)} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-11})$$

Leurs dérivées seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} j'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1.3.5\dots(2n+1)} \left\{ n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(n+2k)(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (2n+2p+1)} \right\} \\ y'_n(x) = -\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{x^{n+2}} \left\{ -(n+1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-n-1)(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (-2n+2p+1)} \right\} \end{array} \right. \quad (\text{A-12})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} j''_n(x) = \frac{x^{n-2}}{1.3.5\dots(2n+1)} \left\{ n(n-1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(n+2k)(n-1+2k)(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (2n+2p+1)} \right\} \\ y''_n(x) = -\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{x^{n+3}} \left\{ (n+1)(n+2) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-n-1)(2k-n-2)(-1)^k \left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k! \prod_{p=1}^k (-2n+2p+1)} \right\} \end{array} \right. \quad (\text{A-13})$$

## B - LES FONCTIONS ASSOCIÉES AU POLYNÔME DE LEGENDRE

L'équation de Legendre associée est de la forme :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\omega}{d\theta} \right) + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \omega = 0 \quad (\text{B-1})$$

substituons  $u = \cos \theta$  dans l'équation ci-dessus, nous aurons :

$$(1-u^2) \frac{d^2}{du^2} - 2u \frac{d\omega}{du} + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-u^2} \right] \omega = 0 \quad (\text{B-2})$$

quand  $m = 0$ , l'équation de Legendre associée sera réduite à la forme d'une équation de Legendre ordinaire telle que :

$$(1-u^2) \frac{d^2}{du^2} - 2u \frac{d\omega}{du} + \nu(\nu+1)\omega = 0 \quad (\text{B-3})$$

Nous allons commencer par trouver la solution à l'équation de Legendre ordinaire (le cas où  $m=0$ ), ensuite nous généraliserons pour l'équation de Legendre associée.

Dans un système de coordonnées sphériques  $0 \leq \theta \leq \pi$ , la solution est impérativement dans l'intervalle  $u = [-1, 1]$ . En particulier, pour  $|1-u| < 2$ , la fonction de Legendre de première espèce s'écrit :

$$P_\nu(u) = \sum_{m=0}^N \frac{(-1)^m (\nu+m)!}{(m!)^2 (\nu-m)!} \left( \frac{1-u}{2} \right)^m - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{(m-1-\nu)(m+\nu)}{(m!)^2} \left( \frac{1-u}{2} \right)^m \quad (\text{B-4})$$

$N$  est un entier inférieur à  $\nu$

Remarque : lorsque l'ordre  $n$  de  $P$  est réel,  $P_\nu(u)$  et  $P_\nu(-u)$  sont deux solutions indépendantes de l'équation de Legendre, mais quand  $n$  est entier, l'expression de la fonction de Legendre va devenir une somme de séries finies qu'on appellera **Polynôme de Legendre de degré  $n$**  :

$$P_n(-u) = (-1)^n P_n(u) \quad (\text{B-5})$$

Une autre solution existe pour l'équation de Legendre et qu'on appelle fonction de Legendre de seconde espèce. Elle est définie comme suit :

$$Q_\nu(u) = \frac{\pi P_\nu(u) \cos \nu\pi - P_\nu(-u)}{2 \sin \nu\pi} \quad (\text{B-6})$$

Pour le cas du Polynôme de Legendre où l'ordre  $n$  est entier, seule la première sommation existe et elle pourra être mise sous la forme suivante :

$$P_n(u) = \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m (2n+2m)!}{2^n (m!)^2 (n-2m)!} (u)^{n-2m} \quad (\text{B-7})$$

avec M un entier égal à n/2 ou (n-1)/2.

Une autre forme est donnée au polynôme de Legendre par la Formule de RODRIGUES dont l'expression est :

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \quad (\text{B-8})$$

Maintenant, pour déterminer les solutions à l'équation de Legendre Associée, on prend m comme étant un entier. Si l'équation de Legendre ordinaire est dérivable m fois, on aura :

$$\left[ (1-u^2) \frac{d^2}{du^2} - 2u(m+1) \frac{d\omega}{du} + (n-m)(n+m+1) \right] \frac{d^m \omega}{du^m} = 0 \quad (\text{B-9})$$

Posons  $y = \left[ (1-u^2)^{m/2} \right] \frac{d^m \omega}{du^m}$  dans l'équation ci-dessus. Cette dernière prendra la forme de l'équation de Legendre associée en remplaçant y par  $\omega$ . Ceci implique que les solutions à l'équation de Legendre associée sont :

$$\begin{aligned} P_n^m(u) &= (-1)^m (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(u)}{du^m} \\ Q_n^m(u) &= (-1)^m (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n(u)}{du^m} \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

**on note que tout les  $P_n^m(u) = 0$  pour  $m > n$ .**

Pour déterminer les valeurs analytiques des courants induits sur la surface d'une sphère, nous nous intéressons au calcul numérique du polynôme de Legendre  $P_n(u)$  avec  $u = \cos\theta$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ , où l'ordre n du polynôme est entier. Alors, le Polynôme de Legendre  $P_n(u)$  aura la forme indiquée à l'équation B-7, avec :

$$P_n^1(u) = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(u) = -(1-u^2)^{1/2} P_n'(u) \quad (\text{B-12})$$

et

$$\begin{aligned} P_n(0) &= \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{1.2.3.5\dots(n-1)}{2.4.6\dots n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\ P_n(1) &= 1 \\ P_n(-1) &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$



$$\left. \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right|_{\theta=\pi} = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

## C - LES EXPRESSIONS DE CHAMPS DUS AUX VECTEURS POTENTIELS A ET F

Dans cette partie nous allons présenter l'introduction des fonctions auxiliaires (comme outils mathématiques) appelées potentiels vecteurs, dans l'analyse des problèmes électromagnétiques relatifs aux valeurs limites, afin d'obtenir la solution en champs électrique ( $\mathbf{E}$ ) et magnétique ( $\mathbf{H}$ ) représentant des quantités physiques mesurables.

La formulation en potentiels vecteurs représente une étape intermédiaire pour la résolution du problème du champ rayonné ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) à partir des sources électrique et/ou magnétique ( $\mathbf{J}, \mathbf{K}$ ). Bien que la procédure de résolution exige le passage par deux étapes, intégration pour obtenir les potentiels vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{F}$ , ensuite dérivation pour obtenir  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  [54], c'est une méthode très simple et plus directe, car en estimant les densités de courants équivalents sur l'enveloppe, on peut obtenir  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  facilement : ceci représente une approximation aisée et directe.

### C.1. DÉFINITION DU POTENTIEL VECTEUR $\mathbf{A}$ .

Dans un domaine d'espace libre (pas de sources), la densité de flux magnétique  $\mathbf{B}$  est supposée solénoïdale et telle que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Elle peut donc être représentée sous une autre forme vectorielle qui obéit à l'identité vectorielle:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (1.C)$$

où  $\mathbf{A}$  est un vecteur arbitraire. Alors on définit :

$$\mathbf{B}_A = \mu \mathbf{H}_A = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.C)$$

ce qui implique :

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.C)$$

l'indice  $A$  indique que le champ ne dépend que du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

Substituant l'équation (3.C) dans la première équation de Maxwell:

$$(\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}), \text{ on déduit :}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.C)$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme :

$$\nabla \times (\mathbf{E}_A + j\omega \mathbf{A}) = 0 \quad (5.C)$$

De l'identité vectorielle on peut écrire:

$$\nabla \times (-\nabla V_c) = 0 \quad (6.C)$$

Par conséquent, on peut déduire :

$$\mathbf{E}_A = -\nabla V_e - j\omega\mathbf{A} \quad (7.C)$$

où  $V_e$  représente un potentiel scalaire électrique arbitraire, fonction de la position.

De l'une des propriétés du rotationnel,  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  et de l'équation (4.C) on peut écrire :

$$\nabla \times (\mu \mathbf{H}_A) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (8.C)$$

ce qui implique pour un milieu homogène :

$$\mu \nabla \times \mathbf{H}_A = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (9.C)$$

En substituant l'équation (9.C) dans la deuxième des équations de Maxwell, on a alors :

$$\mu \mathbf{J} + j\omega \varepsilon \mu \mathbf{E}_A = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (10.C)$$

En substituant (7.C) dans (10.C), on aboutit à :

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \varepsilon \mu V_e) \quad (11.C)$$

Dans l'équation (2.C), on a défini le rotationnel de  $\mathbf{A}$  et maintenant. On a à présent le choix pour définir sa divergence, qui est indépendante de son rotationnel. En conséquence, pour simplifier (11.C), on pose :  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \varepsilon \mu V_e$ , ce qui implique :

$$\mathbf{V}_e = -\frac{1}{j\omega \varepsilon \mu} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (12.C)$$

Cette équation est connue sous le nom de condition de Lorentz; d'autres conditions peuvent également être définies. En substituant (12.C) dans (11.C) on aura :

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (13.C)$$

et (7.C) peut être réduite à :

$$\mathbf{E}_A = -j \left[ \omega \mathbf{A} + \frac{1}{\omega \varepsilon \mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \right] \quad (14.C)$$

## C.2. DÉFINITION DU POTENTIEL VECTEUR F.

Comme dans le cas du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , on peut dire que, dans une région de l'espace libre (pas de sources), la densité du flux électrique  $\mathbf{D}$  est supposée solénoïdale et que  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ . Donc elle peut se mettre sous une autre forme vectorielle (rotationnel d'un vecteur), car elle obéit aux lois de l'identité vectorielle :

$$\nabla \cdot (-\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (15.C)$$

où  $\mathbf{F}$  est un vecteur arbitraire, donc on peut définir

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_F &= -\nabla \times \mathbf{F} \\ \mathbf{E}_F &= -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (16.C)$$

l'indice  $F$  indique que le champ ne dépend que du potentiel vecteur  $\mathbf{F}$ .

Avec le même raisonnement que précédemment on aboutit à :

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -\varepsilon \mathbf{K} \quad (17.C)$$

et on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_F &= \frac{-1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}_F = \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} \\ &= -j \left[ \omega \mathbf{F} + \frac{1}{\omega\varepsilon\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \right] \end{aligned} \quad (18.C)$$

### C.3. CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE CHAMPS.

Les champs résultants  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  seront obtenus par la superposition des champs individuels :  $(\mathbf{E}_A, \mathbf{H}_A)$  et  $(\mathbf{E}_F, \mathbf{H}_F)$  qui dérivent des potentiels vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{F}$  respectivement.

Les modes TEM sont souvent les formes de configuration du champ les plus simples, ils désignent souvent les modes de plus petit ordre. Pour ce type de configuration de champ, la direction de propagation est perpendiculaire aux champs électrique et magnétique.

Le champ électrique résultant exprimé en  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{F}$  est :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F \\ \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\varepsilon\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (19.C)$$

et le champ magnétique :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F \\ \mathbf{H} &= j\omega\mathbf{F} - j\frac{1}{\omega\varepsilon\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \frac{1}{\mu} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (20.C)$$

Dans un système de coordonnées sphériques (fig 4.2). Les vecteurs potentiels et champs peuvent se mettre sous la sous la forme :

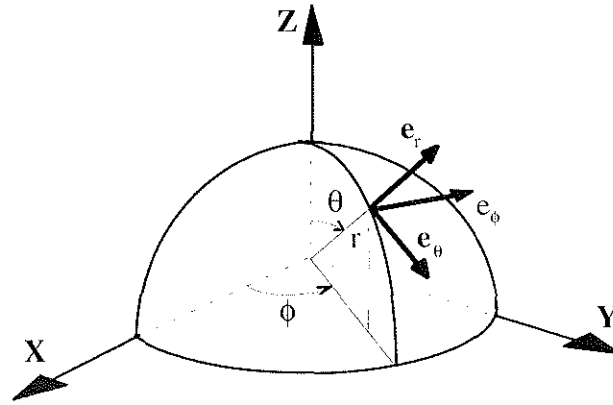


Fig. 4.2 - Système de coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(r, \theta, \phi) &= A_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r + A_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + A_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\phi \\
 \mathbf{F}(r, \theta, \phi) &= F_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + F_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\phi \\
 \text{et} \\
 \mathbf{E}(r, \theta, \phi) &= E_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r + E_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + E_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\phi \\
 \mathbf{H}(r, \theta, \phi) &= H_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r + H_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + H_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\phi
 \end{aligned}
 \tag{21.C}$$

En utilisant encore une autre fois la propriété du rotationnel  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  et en l'injectant dans (11.C), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J} - j\omega \varepsilon \mu \nabla \cdot V_e \\
 \text{et son dual (en potentiel magnétique) :} \\
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} &= \varepsilon \mathbf{K} - j\omega \varepsilon \mu \nabla \cdot V_m
 \end{aligned}
 \tag{23.C}$$

où  $V_m$  représente un potentiel scalaire magnétique arbitraire, fonction de la position.

Les vecteurs potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{F}$  dans (21.C) sont solutions des équations (23.C) qui deviennent dans espace libre :

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} &= -j\omega \varepsilon \mu \nabla \cdot V_e \\
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} &= -j\omega \varepsilon \mu \nabla \cdot V_m
 \end{aligned}
 \tag{24.C}$$

Il a été démontré [55] que, dans n'importe quels systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindriques ou sphériques), les modes TE suivant n'importe quelles directions peuvent être obtenus en posant uniquement la composante du potentiel électrique  $\mathbf{F}$  suivant cette direction non nulle. Les autres composantes de  $\mathbf{F}$  et toutes les composantes de  $\mathbf{A}$  sont nulles. L'unique composante de  $\mathbf{F}$  est obtenue comme étant une solution de l'équation d'onde scalaire:

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} = -\varepsilon \mathbf{K}$$

Dans notre cas (système de coordonnées sphériques), nous allons suivre la même procédure: la seule composante de  $\mathbf{F}(r,\theta,\phi)$ , solution de (17.C) qui ne puisse pas être réduite dans notre système de coordonnées sphériques en trois équations d'onde scalaires non couplées [38], est solution de la deuxième équation de (24.C). La composante non nulle de  $\mathbf{F}$  coïncidera avec la direction suivant laquelle les modes TE sont désirés.

Construisons les solutions qui forment les modes TE<sup>r</sup> dans un repère sphérique. Ces modes sont obtenus en posant les vecteurs potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{F}$  comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r \\ \mathbf{A} &= 0\end{aligned}\quad (25.C)$$

En développant (24.C) :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} &= \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \right] \right\} \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \right) \right] \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \phi} \right) \mathbf{e}_\phi\end{aligned}\quad (26.C)$$

et

$$\nabla \cdot V_m = \frac{\partial V_m}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_m}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

Suivant chaque composante ( $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$ ), nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \right] - k^2 F_r \right] = -j\omega\mu\varepsilon \frac{\partial V_m}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial F_r}{\partial r} \right) = -j\omega\mu\varepsilon \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial F_r}{\partial r} \right) = -j\omega\mu\varepsilon \frac{\partial V_m}{\partial \phi} \end{cases}$$

Pour que les deux dernières équations du système ci-dessus soient vérifiées, il faudrait que :

$$V_m = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial F_r}{\partial r}\quad (27.C)$$

En remplaçant  $V_m$  dans la première équation du système par son expression (27.C), nous obtenons pour  $F_r$  **une équation différentielle non-couplée** telle que :

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial \phi^2} - k^2 F_r = 0 \quad (28.C)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{F_r(r, \theta, \phi)}{r} = 0 \quad (29.C)$$

Ainsi, nous concluons que le rapport  $F_r(r, \theta, \phi)/r$  vérifie l'équation scalaire de Helmholtz (et non  $F_r(r, \theta, \phi)$ ). Par conséquent les  $F_r(r, \theta, \phi)$ , solutions de l'équation (29.C) ANNEXE 2, nous permettent d'utiliser (16.C) via (26.C) pour obtenir  $\mathbf{E}_F$  et (18.C) via (26.C), (28.C) pour  $\mathbf{H}_F$  :

$$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (30.C)$$

via (26.C) nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\theta &= \frac{-1}{\varepsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \\ E_\phi &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (31.C)$$

idem. D'après (18.C), via (26.C) et (28.C), nous obtenons :

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) F_r \\ H_\theta &= \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \\ H_\phi &= \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \phi} \end{aligned} \quad (32.C)$$

En utilisant le même raisonnement en mode TM pour obtenir les composantes de  $\mathbf{E}_A$  et  $\mathbf{H}_A$ , nous pouvons déduire, les composantes des champs totaux :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_r &= \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \mathbf{A}_r \\
 \mathbf{E}_\theta &= \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \phi} + \frac{1}{\hat{y} r} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_r}{\partial r \partial \theta} \\
 \mathbf{E}_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{\hat{y} r \sin \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_r}{\partial r \partial \phi}
 \end{aligned} \tag{33.C}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_r &= \frac{1}{\hat{z}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \mathbf{F}_r \\
 \mathbf{H}_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \phi} + \frac{1}{\hat{z} r} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_r}{\partial r \partial \theta} \\
 \mathbf{H}_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{\hat{z} r \sin \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_r}{\partial r \partial \phi}
 \end{aligned} \tag{34.C}$$

avec  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$  sont respectivement l'admittance ( $\hat{y} = j\omega\epsilon$ ) et l'impédance ( $\hat{z} = j\omega\mu$ ).



## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] - Milton Abramovitz and Irene A. Stegan: « Handbook of Mathematical Functions » - Dover publications, New York, 1965 .
- [2] - Mei , Ann physik , 25, 377 1908
- [3] - J. Beersma : « Computation of Fresnel Integrals » - J. of Math. computation, vol. 14, p. 380 (édition 1960).
- [4] - G L James: « An approximation of Fresnel Integrals » - Proc. IEEE, vol. 67, n°4, pp. 677-678, April 1979, FJ Deadrick.
- [5] - Debye, Math. Annal, n°67, p. 535, 1909.
- [6] - R.Mittra: « Numerical And Asymptotic Techniques in Elecromagnetics » - Springer-Verlag New York 1975.
- [7] - R.K Luneberg : « Mathematical theorie optics » - Press Berkely 1964
- [8] - M.K. Line: « Electromagnetic Theory and Geometrical Optics » - Interscience publishers, New-York, 1965.
- [9] - Hafner C., Klaus G., « Application of The Multiple Multipole (MMP) method to Electrodynamics » - COMPEL, Vol. 4 n°3, pp. 137-144, (1985).
- [10] - R.C. Hansen Ed.: « Geometric Theory of Diffraction » - A Selected Reprint Volume, IEEE Press, New-York, 1981.
- [11] - Wilton D.R., Rao. S. S.M and Glison. A. W.: « Electromagetie scattering by surfaces of arbitrary shape in Application of the Method of Moments to Electromagnetic Fields » (B. J. Strait ed.) pp. 139-170, SCEEE press, St Cloud, F.L.
- [12] - Yee K.S.: « Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equation in Isotropic Media » - IEEE Trans. on AP, Vol. 14, pp. 302-307.
- [13] - Larousse .R, Costache, G.I.: « Finite Element Method applied to E.M.C problems » - IEEE Trans. on EMC - Vol. 35 n°2 (1993).
- [14] - C.L.Bennett: « Space Time Integral Equations Approach to the Large Body Scattering Problem » - Final Technical Report, n° RADC -CR-73-70, A.D 763794, may 1973.
- [15] - A.J. Poggio and E.K. Miller: « Integral Equation Solutions of Three Dimensional Scattering Problems » - Compter Techniques for Electromagnetics, R. Mittra, édition Pergman (1973).
- [16] - Schlemmeer E., Wolfgang M., Rucker et K.R. Richter: « Calcul des champs électromagnétiques diffractés par un obstacle diélectrique tridimensionnel par les éléments de frontière en régime transitoire » - J. Phys. III, pp. 2115-2126, nov. 1992.

- [17] - Hafner. C.: «The Generalized Multiple Multipole Technique of Computational Electromagnetics » - Artech House Deolham M.A., 1990.
- [18] - R.F. Harrington: « Field Computation by Moments Methods » - Mac Millan, New-York, 1968.
- [19] - Keller, J.B.: « Geometrical Theory of Diffraction » - Optic. Soc. Ann. 52, pp. 116-130, 1962.
- [20] - Lüneberg E. and Westpfahl K. - Annal Phys., pp. 7-166 (1975).
- [21] - Thiele Gary A. and New House Thomas H.: « A Hybride Technique for Combining Moment Methods with the Geometrical Theory of Diffraction » - IEEE Trans. on AP, Vol. 23, n°1, pp. 62-69 (1975).
- [22] - T.K. Sarkar, K.R.Siarkiewicz et R.F. Storratt: « Survey of Numerical Methods for Solution of Large Systems of Linear Equations for electromagnetic Field Problems » - IEEE Trans. on AP, Vol .29, pp. 847-856, 1981.
- [23] - Taflove A. and Umashankar K.R.: « The Finite Difference Time Domain Method for Numerical Modeling of Electromagnetic Wave Interactions with Arbitrary Structures » - Progress in Elecromagnetics Research (M.A.Morgan ed.), pp. 287-373, Elvevier, New-York, 1990 .
- [24] - Taflove A.: « Application of the difference time-domain method to sinusoidal steady-state Electromagnetic penetration problems » - IEEE Trans. on E.M.C, Vol. 22, pp. 191-202, 1980.
- [25] - Formulation Éléments Finis. Mie, Morgan et Tchang.
- [26] - A. Nicolas: « Application de la méthode des équations intégrales de frontière à la modélisation des phénomènes d'induction » - Thèse de Docteur ès-Sciences, Ecole Centrale de Lyon, 24/06/1983.
- [27] - Bendali A.: « Approximation par éléments finis de surface de problème de diffraction des ondes électromagnétiques » - Thèse de Docteur ès-Sciences, Paris VI, 10/01/1984.
- [28] - L. Krähenbühl: « La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes de potentiels en électrotechnique, et sa formulation axisymétrique » - Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Centrale de Lyon, 16/12/1983.
- [29] - Brebbia C.A., Walker M.A.: « Boundary Element Techniques in Engineering » - Butterworth Publisher, 1980.
- [30] - Jones D. S.: « Methods in Electromanetic Wave Propagation » - Clarendon Press Oxford, second edition, 1994.
- [31] - Morse P.M., Feshbach H.: « Methods of theoretical physical » - New-York, Mc Grawhilled, 1953.
- [32] - K.K Mei: « Unimoment Method of solving Antennas and Scathering Problems » - IEEE Trans. on AP, Vol . 22 , pp. 760-766, nov. 1974.

- [33] - Stroud A.H.: « Approximate Calculation of Multiple Integrals » - New-York, Prentice Hall, 1971.
- [34] - Brebbia C.A.: « Topics in Boundary Element Research » - Vol. 6, ed. A. Brebbia, 1984.
- [35] - Stratton J.A.: « Théorie Electromagnétique » - 1941.
- [36] - Chetock and Grosso M.A.: « Some Numerical Calculation of Sound Radiation from Vibrating Surfaces » - Acoustic and Vibration Laboratory Research and Development Report 2109, 1966.
- [37] - Mane A.W.: « The formulation of a general diffraction problem by an integral equation » - Zeitschrift für Physik, Bd 126, pp. 601-618.
- [38] - Harrington R.F.: « Time Harmonic Electromagnetic Field » - Mc Graw-Hill, New-York, 1961.
- [39] - Muller C.: « Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves » - Springer-Verlag, New-York, 1969.
- [40] - Felesen L. B.: « Transient Electromagnetic Fields » - Springer Verlag ed., New York, 1976.
- [41] - Mittra R.: « Computer Techniques for Electromagnetics » - Oxford Pergaman Press ed., 1973.
- [42] - J.J. de Rego Silva: « Acoustic and Elastic Wave Scattering Wing Boundary Elements » - edited by C.A. Brebbia and J.J. Connor, 1994.
- [43] - Gary Bedrosian M.V.K, Chari John D'Angelo, Adalbert Konrad, Michael A. Palmo: « Shape Functions And Gaussian Integral Formulas For 2D And Finite Element Analysis Engineering Systems Laboratory » - G.E Corporate Research and Development Report, Schenectady, N.Y., 12301.
- [44] - Perez R.: « Handbook of Electromagnetic Compatibility » - Academic Press, New-York, 1995.
- [45] - Brebbia C. A.: « The Boundary Element Method for Engineers » - Pentech Press, London, 1980.
- [46] - Brebbia C. A.: « 3 Recent Advances in Boundary Element Methods » - Pentech Press, London, 1978.
- [47] - Banerjee P. K. S., Mukerjee S.: « Developments in Boundary Element Method-3 » - Elsevier Applied Science Publishers, 1984.
- [48] - Liu J., Beer G., Meek J. L.: « Efficient Evaluation of Integrals using Gauss Quadrature » - Engineering Analysis, Vol. 2, pp. 118-123, 1986.
- [49] - Koizumi M., Utamura M.: « A New Approach to Singular Kernel Integration for General Curved Elements » - Boundary Elements VIII Conference, 1986.

- [50] - Lachat J.O., Watson: « Effective Numerical Traitement of Boundary Integral Equation » - *Elastics International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 991-1005, 1991.
- [51] - Telles J. C. F.: « A Self-Adaptive Co-ordinate Transformation For Effecient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals » -
- [52] - Akin J.E: « Application and implementation of finite elements methods » - Academic Press, New-York, 1982.
- [53] - Rêgo S., Do J.J.: « Acoustic and Elastic Wave Scattering using Boundary Elements » - Published by the Computational Mechanics Publications, UK, 1994.
- [54] - Kedadra A.: « Evaluation des champs lointains et d'interactions dans les disposititfs ouverts à micro-ondes » - Rapport de D.E.A., Ecole Centrale de Lyon, Juin 1993.
- [55] - Balanis C.: « Advanced Engineering Electromagnetics » - John Wiley and Sons, 1989.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE**

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr A. NICOLAS      Professeur - CEGELY - ECOLE CENTRALE DE LYON,

et les rapports de

Mr G. MEUNIER      Directeur de Recherche CNRS - L.E.G.-E.N.S.I.E.G. - 38042  
ST MARTIN D'HERES Cedex,

Mr A. RAZEK      Directeur de Recherche CNRS - ESE-SUPELEC - 91192 GIF  
SUR YVETTE,

Monsieur **KEDADRA Abdelkrim**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention  
du titre de **DOCTEUR**

**Spécialité : GENIE ELECTRIQUE**

Fait à Ecully, le 26 septembre 1996

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur  
de l'Administration de la Recherche



F. LEBOEUF