

UNIVERSITE DE NANTES

ECOLE DOCTORALE  
« MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL »  
DE NANTES

Année 2001

Thèse de DOCTORAT

Discipline : Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité : Génie Civil

Présentée et soutenue publiquement par

**Alexandre de la Foye**

Le 9 juillet 2001

à l'Ecole Centrale de Nantes

# CALCUL DE LA REPONSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES ELANCEES A LA TURBULENCE DU VENT

Jury :

WIELGOSZ Christian	Professeur, Université de Nantes	Président
BORRI Claudio	Professeur, Université de Florence	Rapporteur
GIBERT René	Professeur associé, IUP d'Evry	Rapporteur
BIETRY Jacques	Ingénieur	Invité
CREMONA Christian	Ingénieur	Invité
VIRLOGEUX Michel	Ingénieur consultant	Invité
GRILLAUD Gérard	Docteur	Examineur
JOUBE Pierre	Professeur, Université de Nantes	Examineur
OLIVARI Dominico	Professeur, Institut Von Karman	Examineur

Directeur de thèse : JOUBE Pierre

Laboratoire de Génie Civil

N°ED 0367-009

# *Sommaire*

<i>Sommaire</i>	<i>2</i>
<i>Notations</i>	<i>6</i>
<i>Introduction</i>	<i>13</i>
<i>Chapitre 1 Modélisation du vent</i>	<i>17</i>
1.1 La couche limite atmosphérique	18
1.2 Caractéristiques du modèle statistique	18
1.3 Le vent moyen	20
1.4 Le vent turbulent	21
1.4.1 Ecart types et intensité de turbulence	21
1.4.2 Coefficients de corrélation et échelles de turbulence	22
1.4.3 Densités (inter)spectrales de puissance	23
a) Densités spectrales de puissance (cas où $m = n$ et $P = P'$ )	23
b) Densités interspectrales et fonctions de cohérences	25
1.5 Conclusion	27

<b>Chapitre 2</b>	<b>Les forces aérodynamiques</b>	<b>28</b>
<b>2.1</b>	<b>Forces aérodynamiques s'exerçant sur un corps mal profilé</b>	<b>30</b>
2.1.1	Forces s'exerçant sur une section fixe plongée dans un flux laminaire	30
2.1.2	Forces s'exerçant sur une section fixe en flux turbulent: approche quasi-statique	34
2.1.3	Section mobile, flux incident variable : approche quasi-statique	42
<b>2.2</b>	<b>Les forces aéroélastiques</b>	<b>43</b>
2.2.1	Formulation mixte temps-fréquence : Scanlan et Tomko (1971)	43
2.2.2	Généralisation à un mouvement quelconque de la section	45
a)	Formulation fréquentielle	45
b)	Formulation temporelle des forces aéroélastiques	47
<b>2.3</b>	<b>Le détachement tourbillonnaire</b>	<b>52</b>
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>53</b>
<b>Chapitre 3</b>	<b>Mesure des forces aérodynamiques</b>	<b>54</b>
<b>3.1</b>	<b>Mesure des coefficients stationnaires</b>	<b>55</b>
<b>3.2</b>	<b>Mesure de l'admittance aérodynamique</b>	<b>60</b>
<b>3.3</b>	<b>Mesure des coefficients aéroélastiques par la technique des oscillations libres</b>	<b>62</b>
3.3.1	Bases théoriques	63
3.3.2	Application pratique	66
<b>3.4</b>	<b>Méthode des oscillations forcées</b>	<b>75</b>
3.4.1	Instrumentation de la maquette	75
3.4.2	Cas des oscillations pures	77
3.4.3	Mesure des rapports d'amplitudes, fréquences d'oscillations et déphasages	79
3.4.4	Cas du mouvement couplé	80
3.4.5	Résultats	81
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>

<b>Chapitre 4</b>	<b>Calcul de la réponse dynamiques de l'ouvrage</b>	<b>89</b>
<b>4.1</b>	<b>Discrétisation en éléments finis</b>	<b>90</b>
4.1.1	Généralités	90
4.1.2	Mise en équations	91
a)	Cas d'un élément	91
b)	Assemblage	92
<b>4.2</b>	<b>Calcul des modes propres de la structure</b>	<b>93</b>
<b>4.3</b>	<b>La méthode spectrale</b>	<b>95</b>
4.3.1	Principe	95
4.3.2	Définition des repères	96
4.3.3	Calcul de la matrice de densité spectrale des forces turbulentes	97
4.3.4	Calcul de la matrice de densité spectrale des forces aéroélastiques	100
4.3.5	Mise en équations	102
4.3.6	Analyse de la stabilité	103
4.3.7	Résolution complète	105
4.3.8	Résolution simplifiée	106
<b>4.4</b>	<b>Simulation numérique d'un signal de vent tridimensionnel spatialement corrélé</b>	<b>110</b>
4.4.1	Méthode de Shinozuka	111
4.4.2	Méthode de Jin, Lutes et Sarkani (1997)	113
a)	Hypothèses et notations	113
b)	Evaluation de la moyenne conditionnelle dans le cas général	114
c)	Evaluation de la variable aléatoire Y	116
d)	Algorithme de résolution	116
4.4.3	Comparaison entre les deux méthodes	119
<b>4.5</b>	<b>La méthode temporelle</b>	<b>121</b>
4.5.1	Mise en équation	121
a)	Formulation des forces turbulentes	121
b)	Formulation des forces aéroélastiques	122
c)	Formulation simplifiée des forces aéroélastiques	128
d)	Mise en équation	128
4.5.2	Résolution du système dans la base modale	129
<b>4.6</b>	<b>Introduction de simulations temporelles dans le calcul spectral</b>	<b>130</b>
4.6.1	Méthode de « linéarisation équivalente » des coefficients aérodynamiques	130
	Combinaison des charges modales extrêmes en cas de charges statiques équivalents	133
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>137</b>

<b>Chapitre 5</b>	<b>Validation expérimentale</b>	<b>138</b>
<b>5.1</b>	<b>Présentation des maquettes</b>	<b>139</b>
<b>5.2</b>	<b>Caractérisation mécanique des maquettes</b>	<b>142</b>
5.2.1	Mesure des fréquences, amortissements et masses généralisées	142
5.2.2	Mesure des déformées modales	142
5.2.3	Calcul des déformées	144
5.2.4	Récapitulatif données expérimentales utilisés pour le calcul numérique	144
<b>5.3</b>	<b>Caractérisation du vent de la soufflerie</b>	<b>148</b>
5.3.1	Dispositif expérimental	148
5.3.2	Résultats	149
a)	Profils de vitesse moyenne et de turbulence	149
b)	Echelles de turbulence et coefficients de cohérence	152
c)	Récapitulatif des résultats	154
<b>5.4</b>	<b>Caractérisation aérodynamique des tabliers</b>	<b>156</b>
<b>5.5</b>	<b>Mesure des déplacements</b>	<b>158</b>
<b>5.6</b>	<b>Résultats</b>	<b>160</b>
5.6.1	Considérations sur les incertitudes de calcul	160
5.6.2	Calcul spectral	161
a)	Cas du tablier trapézoïdal	162
b)	Cas du tablier rectangulaire	162
c)	Conclusion	163
5.6.3	Calcul temporel	167
<b>5.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>174</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>175</b>
	<b>Perspectives</b>	<b>177</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>

# Notations

B	Dimension caractéristique de tablier : en général sa largeur
$B_r$	Variable aléatoire, module de $\hat{Y}_r^n$
c	Coefficient d'amortissement
$C_{1Lh}, C_{2Lh}, C_{3Lh}, C_{4Lh}, d_{3Lh}, d_{4Lh}$	Coefficients des fonctions indicielles pour les forces de portance et les déplacements verticaux
$C_{1Mh}, C_{2Mh}, C_{3Mh}, C_{4Mh}, d_{3Mh}, d_{4Mh}$	Coefficients des fonctions indicielles pour les forces de moment et les déplacements verticaux
$C_{1M\alpha}, C_{2M\alpha}, C_{3M\alpha}, C_{4M\alpha}, d_{3M\alpha}, d_{4M\alpha}$	Coefficients des fonctions indicielles pour les forces de moment et les déplacements angulaires
$C_{1L\alpha}, C_{2L\alpha}, C_{3L\alpha}, C_{4L\alpha}, d_{3L\alpha}, d_{4L\alpha}$	Coefficients des fonctions indicielles pour les forces de portance et les déplacements angulaires
$C_u^x, C_v^x, C_w^x, C_u^y, C_v^y, C_w^y, C_u^z, C_v^z, C_w^z$	Coefficients de cohérence
$C_D, C_L, C_M$	Coefficients de traînée, portance, moment dans un repère lié au vent
$C_X, C_Y, C_M$	Coefficients de traînée, portance, moment dans un repère local
D	Epaisseur de tablier
$F_D, F_L, M$	Forces de traînée, portance, moment dans un repère lié au vent
$F_X, F_Y, M_Z$	Forces de traînée, portance, moment dans un repère local
$\bar{F}_X, \bar{F}_Y, \bar{M}_Z$	Forces de traînée, portance, moment moyennes dans un repère local
$F_X^t, F_Y^t, F_Z^t, M_X^t, M_Y^t, M_Z^t$	Forces et moments liés à la turbulence du vent dans un repère local
$F_X^a, F_Y^a, F_Z^a, M_X^a, M_Y^a, M_Z^a$	Forces et moments aéroélastiques dans un repère local
$F_{L\alpha}, F_{Lh}, F_{M\alpha}, F_{Mh}$	Fonctions indicielles dans le domaine spectral
$f_{L\alpha}, f_{Lh}, f_{M\alpha}, f_{Mh}$	Fonctions indicielles dans le domaine temporel
f	Fréquence
$f_c$	Fréquence de coupure

$f_N$	Fréquence de Nyquist
$g_{L\alpha}, g_{Lh}$	Fonctions indicielles de Lin
$g_r^n, \hat{g}_r^n$	Moyenne conditionnelle des termes $u_r^n, \hat{u}_r^n$
$h$	Déplacement vertical
$H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*$	Coefficients aéroélastiques adimensionnels de Scanlan
$H_1, H_2, H_3, H_4, A_1, A_2, A_3, A_4$	Coefficients aéroélastiques de Scanlan
$\tilde{h}_m, \tilde{\alpha}_n$	Déplacements vertical et angulaire sinusoïdaux de pulsations $\omega_m$ et $\omega_n$
$\hat{h}, \hat{\alpha}$	Transformées de Fourier des déplacements vertical et angulaire <sup>3</sup>
$I_u, I_v, I_w$	Intensités de turbulence du vent
$J$	Jacobien
$K$	Fréquence réduite (en fait pulsation réduite)
$K_1, K_2$	Fréquences réduites des déplacements verticaux et angulaires
$l_{ae}^e, m_{ae}^e$	Forces de portance et de moment aéroélastiques agissant sur un élément
$L$	Longueur d'un élément poutre
$L_{ae}, M_{ae}$	Forces de portance et moment aéroélastiques
$\tilde{L}_{aemmn}, \tilde{M}_{aemmn}$	Forces de portance et moment aéroélastiques générés par des mouvements de flexion et de torsion sinusoïdaux
$\tilde{L}_{aem}, \tilde{M}_{aem}, \tilde{L}_{aen}, \tilde{M}_{aen}$	Forces de portance et moment aéroélastiques dans générés par des mouvements de flexion ou de torsion sinusoïdaux
$L_h, M_h, L_\alpha, M_\alpha$	Forces de portance et moment aéroélastiques dans le domaine temporel
$L_{h3}, M_{h3}, L_{h4}, M_{h4}, L_{\alpha3}, M_{\alpha3}, L_{\alpha4}, M_{\alpha4}$	Composantes des forces de portance et moment aéroélastiques dans le domaine temporel
$L_u^x, L_v^x, L_w^x, L_u^y, L_v^y, L_w^y, L_u^z, L_v^z, L_w^z$	Echelles de turbulence
$m_g$	Masse généralisée
$ndlt$	Nombre de degrés de liberté total de la structure
$n_e$	Nombre d'éléments poutres de la structure
$P, P'$	Points de l'espace

$R_{jk}^{mp}$	Fonction de covariance entre la composante j du signal m et la composante k du signal p
Re	Nombre de Reynolds
$S_u, S_v, S_w$	Spectres des composantes u, v, w de la turbulence du vent
$S_{jk}^{mp}$	Densité interspectrale de puissance entre la composante j du signal m et la composante k du signal p
St	Nombre de Strouhal
T	Période
t	Temps
$\vec{U}$	Vecteur vitesse instantané du vent
$\bar{U}$	Norme du vecteur vitesse moyenne du vent
$\bar{U}_{ref}$	Vitesse moyenne de référence
$\bar{U}_{10m}$	Vitesse moyenne de référence à 10m
U	Vitesse de vent instantanée
$\tilde{U}$	Vitesse de vent instantanée dans un plan perpendiculaire à un élément poutre
u, v, w	Composantes de la turbulence du vent dans un repère lié au vent puis dans un repère lié à un élément poutre
$u_L, v_L, w_L$	Composantes de la turbulence du vent dans un repère local
$u_r^n, \hat{u}_r^n$	$r^{ième}$ composante du signal tridimensionnel généré au point n dans les domaines temporel et spectral
$W_{ij}^{nm}, \hat{W}_{ij}^{nm}$	Composante des matrices $\underline{\underline{W}}^{nm}$ et $\hat{\underline{\underline{W}}}^{nm}$
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Base de projection liée à un élément poutre
$x_1, y_1, z_1, r_{x1}, r_{y1}, r_{z1}, x_2, y_2, z_2, r_{x2}, r_{y2}, r_{z2}$	12 degrés de liberté d'un élément poutre
$y_p, z_p$	Positions suivant les directions y et z du point P
$Y_r^n, \hat{Y}_r^n$	Variable gaussienne centrée, composantes de $u_r^n, \hat{u}_r^n$
$z_0$	Rugosité d'un site
$z_{ref}$	Altitude de référence
$\alpha$	Déplacement angulaire
$\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w$	Fonctions de cohérence de Davenport
$\gamma_{Xu}, \gamma_{Yu}, \gamma_{Mu}, \gamma_{Xv}, \gamma_{Yv}, \gamma_{Mv}, \gamma_{Xw}, \gamma_{Yw}, \gamma_{Mw}$	« Racines carrées » des fonctions d'admittance aérodynamique



$\theta$	Incidence du vecteur vent dans un repère lié à un élément poutre
$\theta_{ki}$	Phase associée au point k et à la fréquence $i\Delta f$
$\xi$	Amortissement rapporté au critique
$\rho$	Densité de l'air
$\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$	Ecart types des trois composantes de la turbulence du vent
$\sigma_q, \sigma_q^{dyn}, \sigma_q^{qs}$	Ecart types total, dynamique et quasi statique des déplacements modaux
$\tau$	Temps utilisé dans les produits de convolutions
$\Psi$	Coordonnée paramétrique des éléments poutres
$\Psi_{Xu}, \Psi_{Xv}, \Psi_{Xw}$	Fonctions d'admittance aérodynamique de traînée
$\Psi_{Yu}, \Psi_{Yv}, \Psi_{Yw}$	Fonctions d'admittance aérodynamique de portance
$\Psi_{Mu}, \Psi_{Mv}, \Psi_{Mw}$	Fonctions d'admittance aérodynamique de moment
$\omega_1, \omega_2$	Pulsations des mouvements de flexion et torsion
$\omega$	Pulsation
$\underline{d}^p$	Vecteur des déplacements en un point d'un élément poutre dans le repère local
$\underline{d}$	Vecteur des déplacements de la structure dans la base nodale et le repère général
$\underline{d}^e$	Vecteur des déplacements dans un repère local
$\underline{d}^n$	Vecteur des déplacements d'un élément poutre dans la base nodale et le repère local
$\underline{d}^{ng}$	Vecteur des déplacements d'un élément poutre dans la base nodale et le repère général
$\underline{E}$	Vecteur contenant les modules d'Young des éléments poutres
$\underline{f}_v, \underline{f}_s$	Vecteurs forces extérieures volumique et surfacique
$\underline{f}_t^e$	Vecteur des buffeting forces dans un repère local
$\underline{f}_{ae}^e$	Vecteur des forces aéroélastiques dans un repère local
$\underline{f}_t^{ne}$	Vecteur des buffeting forces dans la base nodale et le repère local
$\underline{f}_{ae}^{ne}$	Vecteur des forces aéroélastiques dans la base nodale et le repère local
$\underline{f}_t^{ng}$	Vecteur des buffeting forces dans la base nodale et le repère général

$\underline{F}_t^n, \underline{F}_t^m$	Vecteurs des buffeting forces globaux dans les bases nodale et modale
$\underline{F}_{ae}$	Vecteur des forces aéroélastiques
$\underline{F}_t$	Vecteur des buffeting forces
$\underline{F}$	Vecteur des forces extérieures
$\underline{G}$	Vecteur contenant les modules de cisaillement des éléments poutres
$\underline{I}_X, \underline{I}_Y, \underline{I}_Z$	Vecteurs contenant les inerties surfaciques des éléments poutres
$\underline{m}_{ddl}$	Vecteur contenant les masses et inerties ponctuelles affectées à chaque degré de liberté de la structure
$\underline{M}_X, \underline{M}_Y, \underline{M}_Z$	Vecteurs contenant les moments de flexion et torsion des éléments poutres
$\underline{M}_{Xi}, \underline{M}_{Yi}, \underline{M}_{Zi}$	Vecteurs contenant les moments de flexion et torsion modaux des éléments poutres
$\underline{N}$	Vecteur contenant les efforts normaux des éléments poutres
$\underline{N}_i$	Vecteur contenant les efforts normaux modaux des éléments poutres
$\underline{q}$	Vecteur des déplacements de la structure dans la base modale
$\underline{S}$	Vecteur contenant les sections des éléments poutres
$\underline{T}_X, \underline{T}_Y$	Vecteurs contenant les efforts tranchants des éléments poutres
$\underline{T}_{Xi}, \underline{T}_{Yi}$	Vecteurs contenant les efforts tranchants modaux des éléments poutres
$\underline{u}^n$	Vecteur vent tridimensionnel synthétique
$\underline{x}$	Vecteur position d'un point d'un élément poutre
$\underline{x}^n$	Vecteur des coordonnées d'un nœud
$\underline{Z}_j$	$j^{\text{ième}}$ vecteur propre
$\underline{Z}_j'$	Dérivée du $j^{\text{ième}}$ vecteur propre par rapport à l'abscisse curviligne
$\underline{\varepsilon}$	Vecteur des déformations élastiques
$\underline{\Theta}$	Vecteur polynomial de l'incidence du vent
$\underline{\zeta}$	Vecteur des forces aéroélastiques dans le domaine temporel
$\underline{\chi}_N^{ec}, \underline{\chi}_{TX}^{ec}, \underline{\chi}_{TY}^{ec}, \underline{\chi}_{MX}^{ec}, \underline{\chi}_{MY}^{ec}, \underline{\chi}_{MZ}^{ec}$	Vecteurs des cas de charges extrêmes
$\underline{\underline{A}}$	Matrice aéroélastique globale

$\underline{\underline{A}}^e$	Matrice aéroélastique élémentaire exprimée dans un repère local
$\underline{\underline{A}}^{ng}$	Matrice aéroélastique élémentaire exprimée dans un repère général
$\underline{\underline{B}}$	Matrice aéroélastique globale
$\underline{\underline{B}}^e$	Matrice aéroélastique élémentaire exprimée dans un repère local
$\underline{\underline{B}}^{ng}$	Matrice aéroélastique élémentaire exprimée dans un repère général
$\underline{\underline{C}}_{ad}$	Matrice des coefficients aérodynamiques
$\underline{\underline{C}}_{12345}$	Matrice polynomiale des coefficients aérodynamiques
$\underline{\underline{C}}_{\psi}$	Matrice des coefficients aérodynamique avec prise en compte de l'admittance aérodynamique
$\underline{\underline{C}}_{1\psi}, \underline{\underline{C}}_{2\psi}$	Matrice des coefficients aérodynamique avec prise en compte de l'admittance aérodynamique
$\underline{\underline{C}}_{ae}^{ng}, \underline{\underline{K}}_{ae}^{ng}$	Matrices amortissement et raideur aérodynamiques élémentaires exprimées dans la base nodale et le repère général
$\underline{\underline{C}}_{ae}, \underline{\underline{K}}_{ae}$	Matrices amortissement et raideur aérodynamiques globales exprimées dans la base nodale et le repère général
$\underline{\underline{\hat{C}}}_{ae}, \underline{\underline{\hat{K}}}_{ae}$	Matrices amortissement et raideur aérodynamiques globales exprimées dans la base modale
$\underline{\underline{C}}_{ae}^e, \underline{\underline{K}}_{ae}^e$	Matrices amortissement et raideur aérodynamiques élémentaires exprimées dans la base nodale et le repère local
$\underline{\underline{D}}$	Matrice aéroélastique globale
$\underline{\underline{D}}^e$	Matrice aéroélastique élémentaire exprimée dans un repère local
$\underline{\underline{D}}^{ng}$	Matrice aéroélastique élémentaire exprimée dans un repère général
$\underline{\underline{E}}$	Matrice de rigidité
$\underline{\underline{H}}$	Matrice de transfert
$\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{k}}$	Matrices masse, amortissement et raideur élémentaires
$\underline{\underline{m}}_j, \underline{\underline{c}}_j, \underline{\underline{k}}_j$	Matrices masse, amortissement et raideur élémentaires associées à l'élément j
$\underline{\underline{m}}_j', \underline{\underline{c}}_j', \underline{\underline{k}}_j'$	Matrices masse, amortissement et raideur élémentaires associées à l'élément j

$\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{K}}$	l'élément j insérées dans les matrices carrées nulles de dimension ndlt Matrices masse, amortissement et raideur globales exprimées dans la base nodale
$\underline{\underline{\hat{M}}}, \underline{\underline{\hat{C}}}, \underline{\underline{\hat{K}}}$	Matrices masse, amortissement et raideur globales exprimées dans la base modale
$\underline{\underline{N}}$	Matrice d'interpolation
$\underline{\underline{P}}_{12}$	Matrice de changement de repère pour un vecteur 12 composantes
$\underline{\underline{P}}_V$	Matrice de changement de repère vent
$\underline{\underline{P}}_L$	Matrice de changement de repère local-général
$\underline{\underline{S}}_V^{e,e'}$	Matrice de densité interspectrale élémentaire de la turbulence du vent
$\underline{\underline{S}}_{f_t^{ng}, f_t^{n'g}}$	Matrice de densité interspectrale élémentaire des buffeting forces
$\underline{\underline{S}}_F$	Matrice de densité interspectrale des forces aérodynamiques
$\underline{\underline{X}}$	Matrice reliant $\underline{\underline{\varepsilon}}$ à $\underline{\underline{u}}^n$
$\underline{\underline{W}}^{nm}, \underline{\underline{\hat{W}}}^{nm}$	Matrices de pondération de $\underline{\underline{u}}^m$ et $\underline{\underline{\hat{u}}}^m$
$\underline{\underline{\Phi}}$	Matrice des vecteurs propres

# *Introduction*

L'amélioration constante des technologies dans le domaine du génie civil et des matériaux permet de concevoir des ouvrages sans cesse innovants, de plus en plus légers et élancés. Les ponts suspendus ou à haubans en sont les représentants extrêmes. Il résulte de cette évolution une sensibilité accrue aux sollicitations fluctuantes du vent. Les ouvrages peuvent alors adopter un comportement vibratoire très marqué susceptible de les mener à la ruine ou tout simplement d'en rendre l'utilisation périlleuse.

Les bureaux d'études chargés du dimensionnement des ouvrages ont besoin d'introduire dans leurs calculs les sollicitations induites par les tempêtes les plus sévères. Dans le cas de bâtiments massifs de formes suffisamment simples, la prise en compte des effets du vent est estimée à partir des règles en vigueur (Neige et Vent ou Eurocode) basées sur la détermination de charges statiques forfaitaires.

Dans le cas de formes complexes à comportement dynamique marqué, des études plus poussées et personnalisées sont nécessaires, d'une part pour estimer les charges aérodynamiques s'exerçant sur l'enveloppe, et d'autre part pour déterminer la réponse dynamique de la structure sous les sollicitations de la turbulence du vent. Différentes approches peuvent être envisagées aujourd'hui :

- En ce qui concerne la détermination des efforts s'exerçant sur l'enveloppe d'une structure, il existe deux types de démarches : la première consiste à mesurer en soufflerie les efforts générés par le vent sur des maquettes rigides de section constante appelées "maquettes sectionnelles" ; la seconde consiste à calculer numériquement ces mêmes efforts à l'aide de codes C.F.D. (Computational Fluid Dynamics) basés sur la résolution discrète des équations de Navier-Stokes. Si cette seconde approche est en plein essor et s'annonce prometteuse, la première reste aujourd'hui, et pour, sans doute, quelques années encore, la plus opérationnelle.

- Pour estimer l'amplitude des déplacements, étape obligatoire avant le calcul des contraintes, deux types de méthodes sont actuellement utilisées : la plus pragmatique consiste à mesurer directement ces déplacements en soufflerie sur des maquettes dites "aéroélastiques" reproduisant, à échelle réduite, les comportements aérodynamique et mécanique de la structure étudiée ; la seconde, plus théorique, consiste, dans un premier temps, à mesurer les caractéristiques aérodynamiques de la structure à l'aide de maquettes sectionnelles, pour estimer ensuite, à l'aide d'un code de calcul des structures, la réponse de l'ouvrage complet à des conditions de vent données. C'est cette dernière approche que nous avons développée et exposons dans le présent mémoire.

Il s'agit tout d'abord de s'intéresser à la modélisation du vent naturel turbulent dans la partie basse de l'atmosphère: *la couche limite atmosphérique*. Pour définir ce processus tridimensionnel fortement aléatoire, nous utilisons un certain nombre d'outils statistiques permettant d'intégrer les corrélations adéquates dans le temps et dans l'espace. Nous sommes alors amenés à substituer la dimension fréquentielle ou *spectrale* à la dimension temporelle. C'est l'objet de notre premier chapitre.

Dans un second chapitre, nous présentons des modèles qui permettent, à partir de la bonne connaissance du vent au voisinage de la structure et de la caractérisation aérodynamique des profils transversaux de l'enveloppe de l'ouvrage étudié, d'obtenir une estimation des forces s'exerçant sur la structure. Nous verrons que des forces de différentes natures sollicitent dynamiquement les ouvrages :

- les forces fluctuantes directement liées au caractère turbulent du vent souvent appelées *buffeting forces*; on y associe la notion d'*admittance aérodynamique* représentant l'impact différencié des structures tourbillonnaires suivant leur taille;
- les forces dites *aéroélastiques* engendrées par les mouvements de la structure pouvant être responsables d'un comportement instable de la structure;
- les forces liées à un phénomène aérodynamique propre aux corps mal profilés et élancés : le détachement tourbillonnaire.

Nous consacrons le troisième chapitre aux différentes techniques expérimentales permettant de caractériser les propriétés aérodynamiques des profils transversaux des structures élancées. Les méthodes de mesure des *buffeting forces* et de l'*admittance aérodynamique* sont brièvement présentées. On insistera plus particulièrement sur deux techniques expérimentales permettant de caractériser les forces aéroélastiques : la technique des *oscillations libres* et celle des *oscillations forcées*. La dernière a été l'objet d'une publication à l'occasion d'un congrès du *Wind Engineering* (de la Foye, 2000). Nous présentons les résultats obtenus pour deux profils de tabliers. Ces résultats seront utilisés par la suite lors de notre procédure de validation.

Le quatrième chapitre constitue la pierre angulaire de nos travaux. Nous y montrons comment, à partir de la connaissance des forces aérodynamiques s'exerçant sur la structure, nous résolvons numériquement le problème mécanique posé. Deux méthodes, s'appuyant sur une discrétisation en éléments finis de la structure, sont développées et présentées :

- la méthode spectrale, de nature statistique, est basée sur la résolution des équations de la mécanique dans le domaine fréquentiel;
- la méthode temporelle, semi-déterministe, est basée sur la génération d'un signal de vent synthétique spatialement corrélé, et la résolution des mêmes équations, cette fois dans le domaine temporel.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous présentons la procédure mise en place pour valider les codes développés. Pour cela, nous plaçons en soufflerie deux maquettes aéroélastiques, représentant des travées centrales de tabliers de ponts, et en mesurons la réponse dynamique pour différentes configurations de vent. Des calculs sont alors effectués, avec, en conditions d'entrée, les caractéristiques du vent mesurées en soufflerie, les caractéristiques mécaniques de la structure, et les propriétés aérodynamiques de la structure présentées au chapitre 3. Nous procédons alors à une analyse comparative des différentes méthodes de calcul numérique avec les résultats obtenus expérimentalement, et tentons de mettre en évidence, d'une part l'influence des différents paramètres d'entrée sur les résultats obtenus numériquement, puis, dans un deuxième temps, d'autre part les forces et limites d'application des différentes approches.

Précisons que notre travail s'inscrit dans la continuité de nombreux travaux réalisés sur le sujet depuis une quarantaine d'années. En effet, des approches spectrales ont été proposées dès 1962 par A. Davenport pour calculer la réponse des structures élancées à la turbulence du vent. L'application au calcul spectral du concept de forces aéroélastiques, issu de l'aéronautique, fut initiée en 1971 par R.H. Scanlan.

M. Attou développa au CSTB, dans le cadre d'une thèse de doctorat soutenue en 1994, un premier module de calcul spectral en langage Fortran. La géométrie des structures était limitée à deux dimensions, la vitesse moyenne du vent horizontale et les forces aéroélastiques négligées. Un module temporel fut également élaboré dont les limites étaient similaires à celles du module spectral. Le signal de vent, bidimensionnel, était généré par un programme basé sur l'algorithme de Shinozuka.

De 1994 à 1997, P. Bourcier, successeur de M. Attou, s'est essentiellement attaqué au problème de la modélisation des effets aéroélastiques et de leur introduction dans des codes de calcul spectral et temporel. Il n'a cependant pas finalisé ses travaux et laissé derrière lui des programmes difficilement

exploitables. Parallèlement, A. Patron-Solares développa au LCPC un ensemble de modules de calculs spectraux et temporels intégrant les modèles de forces aéroélastiques proposés par Scanlan.

Notre tâche a d'abord consisté à reprendre en amont le travail entamé par P. Bourcier. Nous avons ensuite fait le choix de redévelopper entièrement les outils spectraux et temporels sous l'environnement Matlab. En outre, les éléments suivants ont été introduits:

- Une définition multizonale des caractéristiques du vent turbulent;
- Un générateur de processus temporel tridimensionnel plus performant que le précédent basé sur les travaux de Jin et al. (1997);
- Une méthode d'optimisation de la linéarisation des forces aérodynamiques dans l'optique de calculs spectraux;
- La prise en compte de l'admittance aérodynamique dans les modules spectraux et temporels;
- La réelle prise en compte de l'incidence du vent et de la déformée statique ;
- Une méthode de combinaison des charges modales extrêmes et calcul de charges statiques équivalentes à l'intention des bureaux d'études.

Notre travail est donc essentiellement axé sur le calcul numérique des déplacements des structures élancées soumises à la turbulence du vent. Nous l'avons cependant inscrit dans le contexte plus général de la prise en compte des effets du vent dans le dimensionnement des grands ouvrages, depuis l'étude climatologique du site d'implantation jusqu'à l'estimation des contraintes extrêmes s'exerçant au sein de la structure. Interviendront donc tout au long du mémoire les disciplines suivantes : climatologie, aérodynamique, mécanique des vibrations et résistance des matériaux.



## Chapitre 1

# Modélisation du vent

Tous les ouvrages du génie civil sont entièrement situés dans la plus basse couche de l'atmosphère appelée *couche limite atmosphérique*. A cette altitude, le vent, très fluctuant dans le temps et dans l'espace, est couramment assimilé à un processus aléatoire tridimensionnel. On est donc naturellement amené à utiliser des approches statistiques pour modéliser ses fluctuations.

Ainsi, l'objet de ce premier chapitre est de présenter une série d'outils statistiques permettant de caractériser le vent turbulent au voisinage des structures de génie civil. Nous verrons qu'il est alors commode de substituer à la dimension temporelle, la dimension fréquentielle ou "spectrale" . Cette notion essentielle reviendra ensuite comme un leit motiv dans notre travail.

## 1.1 La couche limite atmosphérique

Pour une altitude supérieure à quelques centaines de mètres, la vitesse du vent résulte de l'interaction entre les forces de Coriolis engendrées par la rotation de la terre et les forces créées par le champ de pression atmosphérique. La turbulence est presque nulle. Pour une altitude inférieure à 300 mètres environ, là où se trouvent les ouvrages d'art, les forces de frottement dues à la rugosité du sol et les phénomènes thermiques deviennent prépondérants vis-à-vis des forces de Coriolis ; ils engendrent des fluctuations de la vitesse du vent, dans le temps et dans l'espace, susceptibles d'exciter les structures souples. Cette zone est couramment nommée *couche limite atmosphérique*.

En réalité, seul le champ de vent à proximité directe de l'ouvrage étudié intéresse notre travail. Cependant, même ainsi réduite, la zone d'étude reste difficile à caractériser. On comprend bien qu'une approche expérimentale ne permet d'accéder simultanément qu'à un nombre très limité de points de l'espace. Les codes de calcul, résolvant les équations de la mécanique des fluides dans un espace et un temps discrétisés, permettent bien, en théorie, d'accéder aux caractéristiques du vent en tout point du temps et de l'espace ; seulement, la complexité géométrique de la structure étudiée, additionnée à celle d'un environnement qu'on ne peut pas ignorer, rend, encore aujourd'hui, les temps de calcul rédhibitoires. Des modèles mathématiques, essentiellement statistiques, ont donc été développés, permettant de caractériser le vent par un nombre limité de paramètres, accessibles par la mesure, et jugés suffisamment pertinents pour permettre d'en déduire la réaction d'un ouvrage soumis à son influence.

## 1.2 Caractéristiques du modèle statistique

L'analyse spectrale de la vitesse du vent dans la couche limite turbulente, caractérisant la distribution en fréquence de son énergie, permet de mettre en évidence plusieurs échelles de fluctuation.

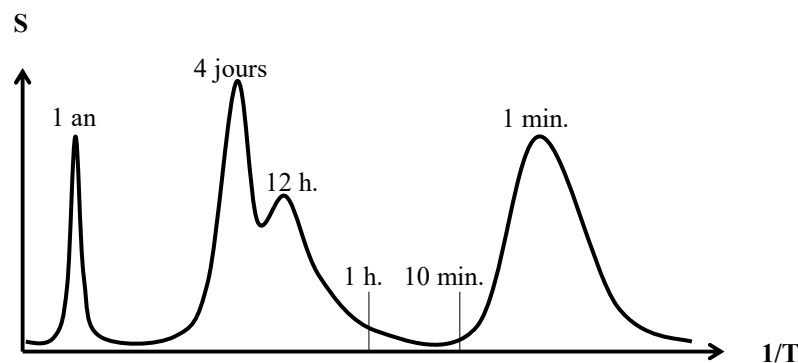


Figure 1.1 - Spectre de Van der Hoven

La figure 1.1 montre l'allure d'un spectre de densité de puissance représentatif de la vitesse horizontale du vent à 100 mètres au dessus du sol d'après Van der Hoven, 1957.

On constate qu'une partie importante de l'énergie est distribuée autour d'une période de l'ordre de la minute, correspondant à l'échelle des mouvements turbulents. On observe également un trou d'énergie pour des périodes comprises entre 10 minutes et une heure. Par conséquent, sur une période incluse dans ce trou d'énergie, la vitesse du vent est localement assimilable à un processus stationnaire. On peut donc aussi considérer la vitesse du vent comme la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante. La figure 1.2 représente un enregistrement de la vitesse du vent sur 5 minutes.

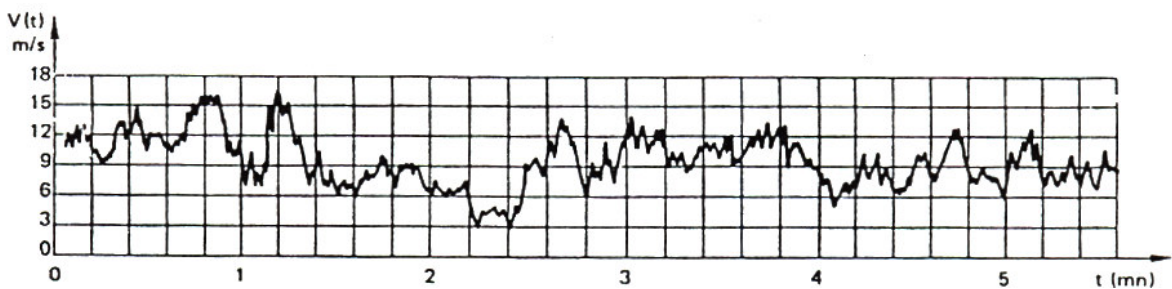


Figure 1.2 – Signal de la composante longitudinale du vent sur cinq minutes

Pour des raisons de commodité, le vecteur vitesse du vent est modélisé par un processus supposé gaussien, stationnaire<sup>1</sup> et ergodique<sup>2</sup>. Ainsi, par rapport à une base  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  où  $\bar{x}$  est parallèle au flux moyen et  $\bar{z}$  est généralement vertical, la vitesse du vent en tout point du site peut s'écrire :

$$\vec{U} = (\bar{U} + u)\bar{x} + v\bar{y} + w\bar{z} \tag{1.1}$$

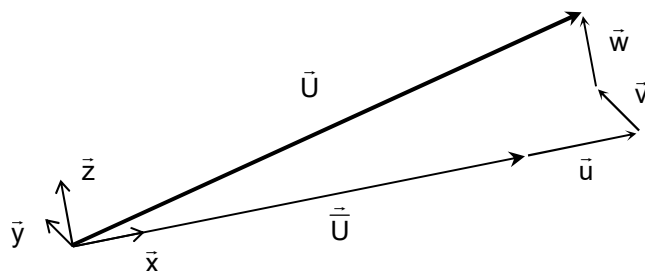


Figure 1.3 - Décomposition du vecteur vitesse du vent

<sup>1</sup> Un processus aléatoire est dit stationnaire si sa structure de probabilité est invariante vis-à-vis d'un changement de l'origine des temps.

<sup>2</sup> L'hypothèse d'ergodicité permet de remplacer des moyennes d'ensemble par des moyennes temporelles sur une réalisation unique du processus.

- $\bar{U}$  est la vitesse moyenne au point considéré ; elle caractérise la vitesse à laquelle sont convectés les tourbillons;
- $u, v, w$  sont trois processus gaussiens stationnaires centrés représentant les fluctuations du signal autour de la moyenne ; ils caractérisent les variations de la vitesse du vent dues aux passages des tourbillons.

### 1.3 Le vent moyen

En aval d'un site relativement homogène (étendue de mer, bois, ville), on peut considérer que la direction moyenne du vent est identique en tout point et que son module ne dépend que de la hauteur. Différentes lois de variation peuvent alors être envisagées :

La loi logarithmique, fondée sur la théorie de la couche limite donne :

$$\bar{U}(z) = \left( \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) / \ln\left(\frac{z_{\text{ref}}}{z_0}\right) \right) \bar{U}_{\text{ref}} \quad (1.2)$$

où  $z$  est la hauteur du point considéré au dessus du sol,  $z_0$  le paramètre de rugosité exprimé en mètres,  $\bar{U}_{\text{ref}}$  une vitesse de référence à la hauteur de référence  $z_{\text{ref}}$ .

A titre d'exemple, le tableau ci-dessous indique les ordres de grandeur proposés par Bietry et al. (1978) :

Site	Classe	$z_0$ (m)
Océans et grands lacs	I	0,001 - 0,01
Aéroport, rase campagne	II	0,01 - 0,1
Bocage, banlieue	III	0,1 - 0,5
Zones urbaines	IV	0,5 - 1,5
Très grande ville	V	1,5 - 2,5

Tableau 1.1 - Coefficients  $z_0$  caractérisant la rugosité du site

Lorsque la couche limite atmosphérique n'est pas bien développée, une loi puissance empirique peut être utilisée :

$$\bar{U}(z) = U_{\text{ref}} \left( \frac{z}{z_{\text{ref}}} \right)^\alpha \quad (1.3)$$

où  $U_{ref}$  est la vitesse à la hauteur  $z_{ref}$ , et  $\alpha$  un exposant sans dimension dépendant de la rugosité du site.

Le tableau ci-dessous donne une idée de l'équivalence  $\alpha$ - $z_0$  :

$z_0$ (m)	0,005	0,07	0,3	1,0	2,5
$\alpha$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,35

Tableau 1.2 – Coefficients  $\alpha$

## 1.4 Le vent turbulent

On note  $(u, v, w)$  le vecteur représentant les composantes fluctuantes de la vitesse du vent ;  $u$  représente la composante longitudinale parallèle au flux moyen,  $w$  la composante verticale et  $v$  est la composante latérale.

Il s'agit alors d'en décrire les variations temporelles et spatiales ; ces dernières jouent un rôle essentiel dans l'étude des structures élancées dont la taille peut être largement supérieure aux dimensions caractéristiques des tourbillons. Chacune des composantes  $u, v, w$ , en un point de l'espace donné, sera modélisée par un processus gaussien centré, stationnaire et ergodique. Nous pourrons ainsi appliquer un certain nombre d'outils statistiques permettant de les caractériser dans l'espace et dans le temps .

### 1.4.1 Ecart types et intensité de turbulence

On caractérise tout d'abord l'énergie cinétique fluctuante massique moyenne du flux par l'écart type de chaque composante turbulente:

$$\sigma_{u_m}(P) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_m^2(P, t) dt} \quad u_m = u, v, w \quad (1.4)$$

où  $T$  est la durée d'observation du signal. Pour  $T$  de l'ordre de 10 minutes, on a vu que le vent pouvait être assimilé à un signal stationnaire. On constate expérimentalement que ces écart types sont proportionnels à la vitesse moyenne  $\bar{U}$ . On remarque également que, pour des sites suffisamment homogènes, ils sont indépendants de la position spatiale et, en particulier, ne dépendent pas de l'altitude  $z$ . Par contre, ils augmentent avec la rugosité du sol.

On utilise plus souvent les notions alternatives d'intensités de turbulence. Adimensionnelles, elles sont définies par:

$$I_u = \frac{\sigma_u}{\bar{U}}, \quad I_v = \frac{\sigma_v}{\bar{U}}, \quad I_w = \frac{\sigma_w}{\bar{U}} \quad (1.5)$$

### 1.4.2 Coefficients de corrélation et échelles de turbulence

D'une manière générale, afin de traduire la concomitance entre deux composantes de la vitesse du vent en deux points P et P' et à deux instants t et t+τ, on introduit la notion statistique d'inter-corrélation définie par :

$$\rho_{u_m, u_n}(P, P', \tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u_m(P, t) u_n(P', t + \tau) dt \quad u_m, u_n = u, v, w \quad (1.6)$$

vérifiant notamment la double inégalité  $-\sigma_{u_m} \sigma_{u_n} < \rho_{u_m, u_n} < \sigma_{u_m} \sigma_{u_n}$

Dans la plupart des cas, on se limite au cas où  $m = n$  ; on parle alors de corrélations spatiales ( $\tau = 0$ ), temporelles ( $P = P'$ ), ou spatio-temporelles ( $\tau \neq 0, P \neq P'$ ) pour une composante de vent donnée. On définit, à partir de ces dernières, les notions d'échelles de turbulence. Celles-ci ont une double signification:

- physique : les dimensions des tourbillons les plus énergétiques dans chaque direction ;
- mathématique : la distance, dans chaque direction, à partir de laquelle la corrélation entre deux signaux devient négligeable.

On écrit ainsi:

$$L_{u_m}^x(P) = \frac{\bar{U}}{\sigma_{u_m}} \int_0^\infty \rho_{u_m, u_m}(P, P, \tau) d\tau \quad u_m = u, v, w \quad (1.7)$$

$$L_{u_m}^y(P) = \frac{1}{\sigma_{u_m}} \int_0^\infty \rho_{u_m, u_m}(y_P, y_P + \Delta y, 0) d\Delta y \quad u_m = u, v, w \quad (1.8)$$

$$L_{u_m}^z(P) = \frac{1}{\sigma_{u_m}} \int_0^\infty \rho_{u_m, u_m}(z_P, z_P + \Delta z, 0) d\Delta z \quad u_m = u, v, w \quad (1.9)$$

On peut se demander pourquoi la définition de  $L_{u_m}^x$  diffère de celles des  $L_{u_m}^y, L_{u_m}^z$ . La raison est double : d'abord il est délicat d'un point de vue expérimental de placer deux appareils de mesure l'un derrière l'autre pour des problèmes évidents de sillage ; ensuite, les grandeurs  $L_{u_m}^y, L_{u_m}^z$  interviennent effectivement par la suite pour caractériser des degrés de corrélation entre deux points de l'espace tandis que la grandeur  $L_{u_m}^x$  intervient plutôt en tant qu'indicateur de corrélation temporelle en un point donné.

Inversement, la connaissance expérimentale des valeurs  $L_{u_m}^x, L_{u_m}^y, L_{u_m}^z$ , permet d'estimer la corrélation spatiale par la formule empirique suivante:

$$\rho_{u_m, u_m}(P, P', 0) \approx \exp \left( - \sqrt{\left( \frac{\Delta x}{L_{u_m}^x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{L_{u_m}^y} \right)^2 + \left( \frac{\Delta z}{L_{u_m}^z} \right)^2} \right) \quad u_m = u, v, w \quad (1.10)$$

$$\Delta x = x_p - x_{p'} \quad \Delta y = y_p - y_{p'} \quad \Delta z = z_p - z_{p'}$$

### 1.4.3 Densités (inter)spectrales de puissance

Plutôt que de travailler directement avec les fonctions de corrélation définies en (1.6), on préfère manipuler leurs transformées de Fourier, appelées densités (inter)spectrales de puissance. Ce sont elles qui interviendront dans le calcul numérique de la réponse à la turbulence des structures élancées. Dans le cas particulier où  $m = n$  et  $P = P'$ , on parle simplement de densité spectrale de puissance; celle-ci représente la répartition fréquentielle de l'énergie turbulente en un point P donné et pour une composante m donnée. Dans les cas plus généraux où  $m \neq n$  et/ou  $P \neq P'$ , les densités interspectrales de puissance indiquent, pour chaque gamme de fréquence, avec quel degré de corrélation l'énergie cinétique est fournie à deux signaux distincts.

#### a) Densités spectrales de puissance (cas où $m = n$ et $P = P'$ )

Dans ce cas précis, on définit la fonction densité spectrale de puissance par :

$$S_{u_m}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{u_m, u_m}(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau \quad u_m = u, v, w \quad (1.11)$$

Comme  $\rho_{u_m, u_m}$  est une fonction paire,  $S_{u_m}$  est une fonction à valeurs réelles. Mais, comme toutes les densités spectrales de puissance, elle vérifie surtout la propriété suivante :

$$\int_0^{+\infty} S_{u_m}(n) df = \sigma_{u_m}^2 \quad u_m = u, v, w \quad (1.12)$$

La forme typique du spectre de la composante u est représentée figure 1.4. On identifie trois régions caractéristiques :

- une région de basses fréquences, associée aux grands tourbillons anisotropes (dont le comportement est différent dans les trois directions de l'espace) qui dépendent fortement des conditions extérieures,
- une région de moyennes fréquences, concentrant l'essentiel de l'énergie, associée aux structures tourbillonnaires issues de la désagrégation des gros tourbillons par les forces de cisaillement,
- une région de hautes fréquences, associée à une turbulence isotrope, dont l'énergie est convertie en chaleur par dissipation visqueuse, appelée domaine d'équilibre universel.

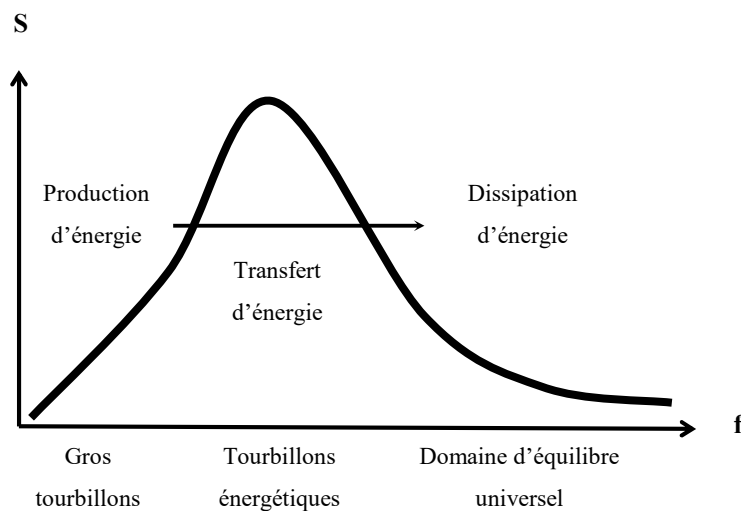


Figure 1.4 - Spectre de la composante longitudinale de la vitesse du vent

Différentes formulations sont proposées dans la littérature pour approcher cette distribution  $S_{u_m}$ . Les plus couramment utilisées sont, pour la composante u, celles de :

Von Karman (1948) :

$$S_u(f) = \frac{4L_x^u / \bar{U}}{(1 + 70,7(fL_x^u / \bar{U})^2)^{5/6}} \sigma_u^2 \quad (1.13)$$

Kaimal (1972) :

$$S_u(f) = \frac{17z / \bar{U}}{(1 + 33fz / \bar{U})^{5/3}} \sigma_u^2 \quad (1.14)$$



$$\text{Simiu (1974) : } S_u(f) = \frac{32z/\bar{U}}{(1 + 50fz/\bar{U})^{5/3}} \sigma_u^2 \quad (1.15)$$

$$\text{Davenport (1961) : } S_u(f) = \frac{0,65 \cdot 1200 / \bar{U}_{10m}}{(1 + (1200f / \bar{U}_{10m})^2)^{5/3}} \sigma_u^2 \quad (1.16)$$

Pour v et w, les formulations proposées le plus généralement sont :

$$\text{Von Karman: } S_v(f) = \frac{4 \frac{L_v}{U} \left( 1 + 188,4 \left( 2f \frac{L_v}{U} \right)^2 \right)}{\left( 1 + 70,7 \left( 2f \frac{L_v}{U} \right)^2 \right)^{11/6}} \sigma_v^2 \quad S_w(f) = \frac{4 \frac{L_w}{U} \left( 1 + 188,4 \left( 2f \frac{L_w}{U} \right)^2 \right)}{\left( 1 + 70,7 \left( 2f \frac{L_w}{U} \right)^2 \right)^{11/6}} \sigma_w^2 \quad (1.17)$$

$$\text{Kaimal : } S_v(f) = \frac{4,2z/\bar{U}}{(1 + 9,5fz/\bar{U})^{5/3}} \sigma_v^2 \quad S_w(f) = \frac{1,4z/\bar{U}}{(1 + 5,3fz/\bar{U})^{5/3}} \sigma_w^2 \quad (1.18)$$

$$\text{Simiu : } S_v(f) = \frac{2,5z/\bar{U}}{(1 + 9,5fz/\bar{U})^{5/3}} \sigma_v^2 \quad S_w(f) = \frac{0,56z/\bar{U}}{(1 + 10fz/\bar{U})^{5/3}} \sigma_w^2 \quad (1.19)$$

Si l'on s'amuse à intégrer ces fonctions sur  $[0 + \infty]$ , on s'aperçoit que la relation (1.12) n'est pas vérifiée.

Par exemple, l'intégration analytique de (1.14) donne  $\frac{17}{22} \sigma_u^2$ . Cela n'est pas bien grave dans la mesure où on ne cherche jamais à modéliser l'intégralité du spectre mais uniquement la plage susceptible d'exciter une structure souple.

## b) Densités interspectrales et fonctions de cohérences

Entre deux points, et pour une composante m donnée, la densité interspectrale de puissance s'exprime :

$$S_{u_m}(P, P', f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{u_m, u_m}(P, P', \tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau \quad (1.20)$$

La partie imaginaire de cette fonction complexe, donnant des informations sur le déphasage entre les deux signaux considérés, est généralement ignorée dans les calculs. On se contente donc de faire

intervenir son module, directement relié aux spectres des deux composantes par une fonction dite de cohérence  $\gamma_{u_m}$  :

$$\gamma_{u_m}^2(P, P', f) = \frac{|S_{u_m}(P, P', f)|^2}{S_{u_m}(P, f)S_{u_m}(P', f)} \quad u_m = u, v, w \quad (1.21)$$

Cette fonction est assez mal connue car les enregistrements de vent montrent trop de dispersion pour bâtir un modèle précis. Néanmoins, la formulation généralement retenue est celle de Davenport (1968) :

$$\gamma_{u_m}^2(P, P', f) = \exp\left[-\frac{fZ}{\bar{U}} \sqrt{C_{u_m}^x \left(\frac{\Delta x}{Z}\right)^2 + C_{u_m}^y \left(\frac{\Delta y}{Z}\right)^2 + C_{u_m}^z \left(\frac{\Delta z}{Z}\right)^2}\right] \quad u_m = u, v, w \quad (1.22)$$

où  $Z$  est la hauteur moyenne entre les points  $P$  et  $P'$ . Les coefficients  $C_{u_m}^x$ ,  $C_{u_m}^y$ ,  $C_{u_m}^z$  sont appelés coefficients de cohérence. Adimensionnels, leurs valeurs habituelles sont de l'ordre de 10 à 30 pour la composante  $u$ , de 5 à 15 pour  $v$ , et de 10 à 50 pour  $w$ .

En théorie, leur description nécessiterait une mesure par couple de points. Toutefois, pour des raisons pratiques, ceci n'est jamais fait. On considère généralement un point fixe, l'autre point balayant l'espace. Les valeurs retenues sont les moyennes des différentes valeurs des coefficients obtenues au cours de la scrutation.

Pour un même point, et entre deux composantes  $m$  et  $n$  données, on peut également définir une fonction de cohérence permettant de calculer la densité inter-spectrale de puissance. On remarque expérimentalement que seules les composantes  $u$  et  $w$  présentent une fonction de cohérence non négligeable. Celle-ci est définie par (Attou, 1994):

$$\gamma_{u,w}(P, f) = \frac{S_{u,w}(P, f)}{\sqrt{S_u(P, f)S_w(P, f)}} \approx \frac{-0,3}{\left(0,247 + 0,344 \log(z) - 0,036 \log(z)^2\right) \sqrt{1 + 0,4(fL_u^x/\bar{U})^2}} \quad (1.23)$$

Entre deux points  $P$  et  $P'$ , on peut définir une fonction de cohérence par :

$$\gamma_{u,w}(P, P', \omega) = \frac{S_{u,w}(P, P', n)}{\sqrt{S_u(P, n)S_w(P', n)}} \approx \exp\left(-\frac{\omega Z}{2\pi\bar{U}} \sqrt{C_{u,w}^x \left(\frac{\Delta x}{Z}\right)^2 + C_{u,w}^y \left(\frac{\Delta y}{Z}\right)^2 + C_{u,w}^z \left(\frac{\Delta z}{Z}\right)^2}\right) \quad (1.24)$$

avec  $C_{u,w}^i = f(C_u^i, C_w^i, z, L_u^x)$

Ainsi, pour chaque couple de points de l'espace  $P$  et  $P'$ , on peut définir une matrice de densité interspectrale de puissance s'écrivant :

$$S_u(P, P') = \begin{bmatrix} S_{u,u'} & (S_{v,u'}) & S_{w,u'} \\ (S_{u,v'}) & S_{v,v'} & (S_{w,v'}) \\ S_{u,w'} & (S_{v,w'}) & S_{w,w'} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

où tous les termes entre parenthèses sont supposés nuls faute de modèles appropriés.

## 1.5 Conclusion

Les modèles présentés dans ce chapitre apportent une réponse au problème de la modélisation de la répartition fréquentielle et spatiale de l'énergie du vent. On verra dans les chapitres suivants que ce type de modélisation est tout à fait adapté pour déterminer les effets du vent sur des structures élancées de grandes dimensions.

Dans le cas des ouvrages exceptionnels pour lesquels l'effet du vent est dimensionnant (pont de Rion-Antirion en Grèce ou Viaduc de Millau par exemple), les différents coefficients du modèle sont établis par une étude spécifique pouvant inclure des mesures sur site, des essais sur maquette topographique en soufflerie atmosphérique ou des simulations numériques.

Ces études peuvent être relativement coûteuses et donc, pour des projets de moindre envergure, ou moins sensibles aux effets du vent, on peut se contenter d'estimer les différentes valeurs caractéristiques du vent à partir d'études effectuées sur des sites similaires ou des données issues de la littérature.

## *aérodynamiques*

Après avoir défini un modèle permettant de qualifier le champ de vitesse du vent sur un site donné, nous allons nous intéresser à la modélisation des efforts éoliens s'exerçant sur un ouvrage placé dans ce site. Un tel ouvrage est soumis à un champ de pression dont l'intégration sur une surface donnée permet de calculer des efforts résultants.

La première tâche affectée à l'outil numérique que nous allons développer sera de déduire des caractéristiques spatio-temporelles du vent la répartition spatiale des efforts résultants et leur évolution dans le temps.

Les structures élancées, dont font partie les ponts suspendus et à haubans, présentent l'avantage d'être facilement modélisables via une discrétisation en éléments finis de type « poutre », de caractéristiques mécaniques et aérodynamiques données ; les efforts résultants seront alors calculés par intégration d'efforts linéiques sur ces poutres élémentaires.

Ces efforts linéiques sont préalablement mesurés en soufflerie sur de simples tronçons à échelle réduite, de sections constantes, et de longueurs suffisamment importantes pour marginaliser les effets de bouts : ce que l'on appellera par la suite des maquettes « sectionnelles ». Les sections des ouvrages vraie grandeur étant généralement variables, autant de sections significatives que nécessaire devront être testées, compte tenu de la précision de calcul attendue. Cette tâche pourra également être accomplie à l'aide d'outils numériques de type CFD (Computational Fluid Dynamics) ; nous y reviendrons plus loin.

Dans le cas le plus trivial d'une structure fixe soumise à un flux incident laminaire et constant, on modélise simplement les forces aérodynamiques, via l'introduction de coefficients adimensionnels, caractéristiques de la forme de la section et de son incidence par rapport à la direction de l'écoulement. Pour chaque incidence de vent, on établit ainsi une relation, généralement linéaire, entre la pression dynamique amont et les forces aérodynamiques.

Dans le cas d'une structure réelle, l'écoulement incident est turbulent et génère donc des signaux de forces fluctuants. On verra que l'utilisation des coefficients évoqués précédemment, bien que tentante, est alors moins appropriée ; on introduit donc une nouvelle notion permettant de modéliser la décroissance de corrélation spatiale du vent autour d'une tranche de structure à mesure que les fluctuations deviennent plus rapides : l'admittance aérodynamique.

D'autre part, en entrant en vibration sous l'effet de la variation temporelle des forces extérieures, l'ouvrage modifie la structure du flux qui l'environne et par conséquent les forces aérodynamiques. Ceci sera modélisé par l'introduction de forces supplémentaires dites d'auto-excitation ou aéroélastiques selon le modèle proposé par Scanlan.

Enfin, à l'instar de la plupart des corps mal profilés, les tabliers de ponts peuvent être soumis, lorsque le flux incident n'est pas trop turbulent, à des sollicitations périodiques dues à un phénomène appelé détachement tourbillonnaire. Nous présenterons quelques modèles permettant de modéliser ces sollicitations. Cependant, ceux-ci ne seront pas intégrés dans les codes de calcul développés par la suite.

L'ensemble des modélisations présentées dans ce chapitre seront faites dans l'optique de leur utilisation par les deux modules du code de calcul que nous développons : l'un, de nature statistique, basé sur une résolution des équations de la mécanique dans le domaine fréquentiel, l'autre, de nature instationnaire, basé sur une résolution des mêmes équations, mais dans le domaine temporel. Le premier présentera comme avantage essentiel d'être économique en terme de temps de calcul et facile à manipuler. Le second, plus lourd, permettra notamment de mieux prendre en compte le caractère non linéaire de l'évolution des coefficients aérodynamiques en fonction de l'incidence du vent et d'appréhender les phénomènes d'instabilités aérodynamiques.

## 2.1 Forces aérodynamiques s'exerçant sur un corps mal profilé

### 2.1.1 Forces s'exerçant sur une section fixe plongée dans un flux laminaire

Considérons une section de tablier fixe, de largeur  $B$  et de hauteur  $H$ , placée dans un écoulement bidimensionnel laminaire, stationnaire et caractérisé par un vecteur vitesse amont  $U$  compris dans le plan de la section (fig.2.1). Selon la forme du profil et l'incidence par rapport à l'écoulement, des zones caractéristiques dites de *recirculation* sont générées par un décollement du flux au niveau des angles d'attaque et se développent de façon plus ou moins stable et marquée.

Selon les cas, cette zone peut ressembler à un bulbe, caractérisé par un point de recollement sur le profil, comme elle peut se confondre avec la zone dite de *sillage* se développant en aval de la section. Entre les zones de recirculation ou de sillage et l'écoulement libre se développe une couche de cisaillement caractérisée par un fort gradient vertical de vitesse et un taux de turbulence élevé. Le sillage, lui, est composé de tourbillons plus ou moins bien organisés dont la dimension caractéristique est fixée par  $H$ .

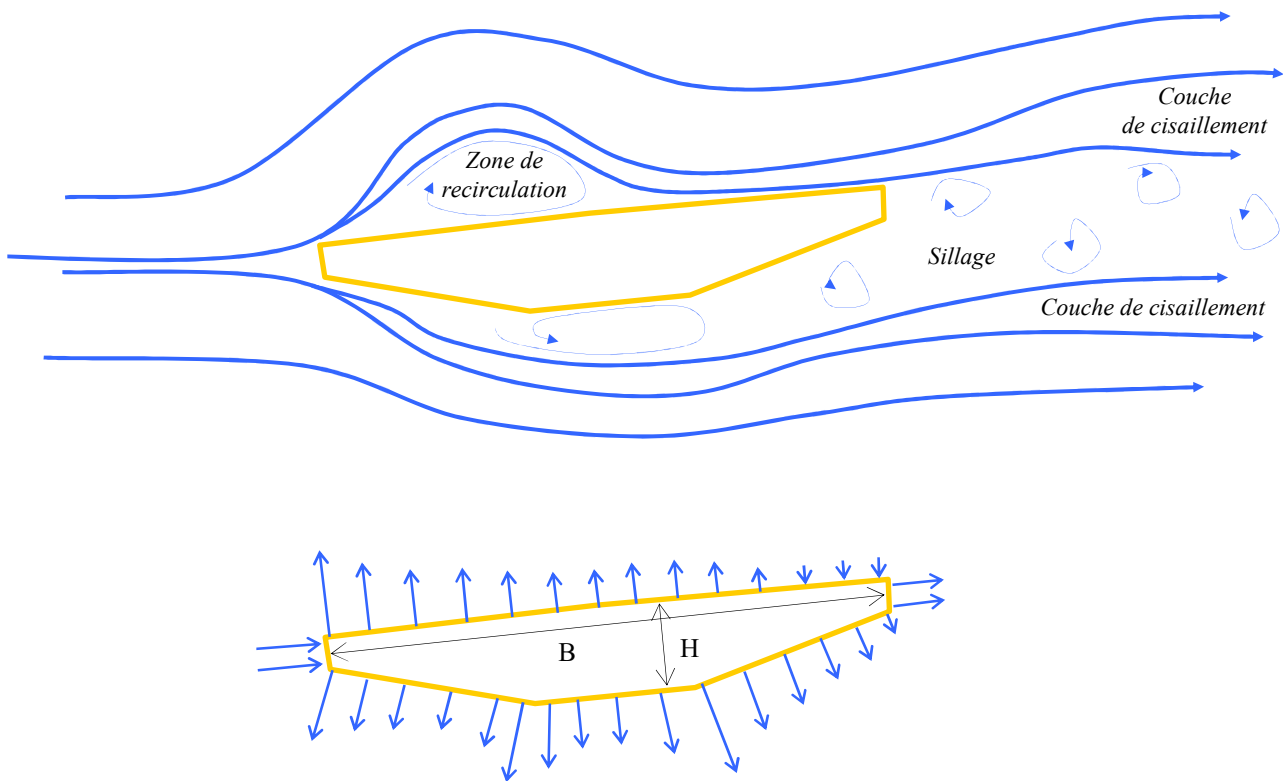


Figure 2.1 – Écoulement laminaire autour d'un corps non profilé :  
lignes de courant et pressions pariétales moyennes

Pour un nombre de Reynolds<sup>3</sup> suffisamment grand ( $>10^4$ ), ces tourbillons peuvent être convectés de manière périodique et sont alors baptisés tourbillons de Von Karman : on parle alors d'échappement tourbillonnaire. La périodicité de ce phénomène, dont le processus de création est encore mal connu, est caractérisé par le nombre de Strouhal :

$$St = \frac{f H}{U} \quad (2.1)$$

où  $H$  est la hauteur du tablier et  $f$  la fréquence caractéristique du détachement tourbillonnaire. Pour un tablier de pont ce nombre varie entre 0,1 et 0,2. Nous reviendrons à ce phénomène plus loin.

L'intégration des valeurs de pression sur une tranche de tablier, de section constante, fournit la valeur des efforts résultants s'exerçant sur cette tranche : un effort de traînée  $F_D$  (drag) dans la direction du flux moyen, un effort de portance  $F_L$  (lift) perpendiculaire au flux et un moment de torsion  $M$  autour de l'axe perpendiculaire au plan de la section. On introduit alors les coefficients adimensionnels suivants :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho B L U^2} \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho B L U^2} \quad C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho B^2 L U^2} \quad (2.2)$$

où  $\rho$  représente la masse volumique de l'air,  $B$  une dimension caractéristique de la section (en général la largeur),  $L$  la longueur de la tranche, et  $U$  la vitesse du flux incident.

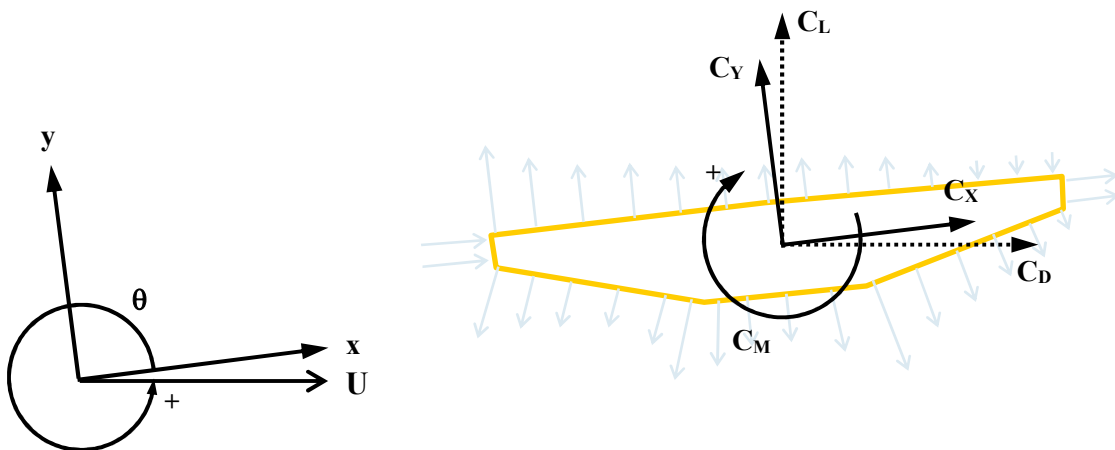


Figure 2.2 – Repères de projection des coefficients aérodynamiques

<sup>3</sup> Le nombre de Reynolds  $Re = UH/v$ , où  $U$  représente la vitesse moyenne du flux,  $H$  une dimension transversale caractéristique de l'obstacle, et  $v$  la viscosité du fluide, traduit le rapport entre forces d'inertie et forces dissipatives. Sa valeur conditionne largement le régime de l'écoulement, en particulier lorsque l'obstacle est dépourvu d'arêtes vives.

Ces coefficients, appelés coefficients aérodynamiques stationnaires, peuvent être mesurés en soufflerie sur des maquettes sectionnelles (cf. chapitre 3). Ils dépendent de la forme de la section, de son incidence par rapport au flux et du nombre de Reynolds de l'écoulement au voisinage de la section.

On sait toutefois que pour des nombres de Reynolds élevés, et pour des sections peu profilées, cette dernière dépendance est assez faible. En conséquence, les efforts générés sur la section sont proportionnels au carré de la vitesse  $U$  du flux incident.

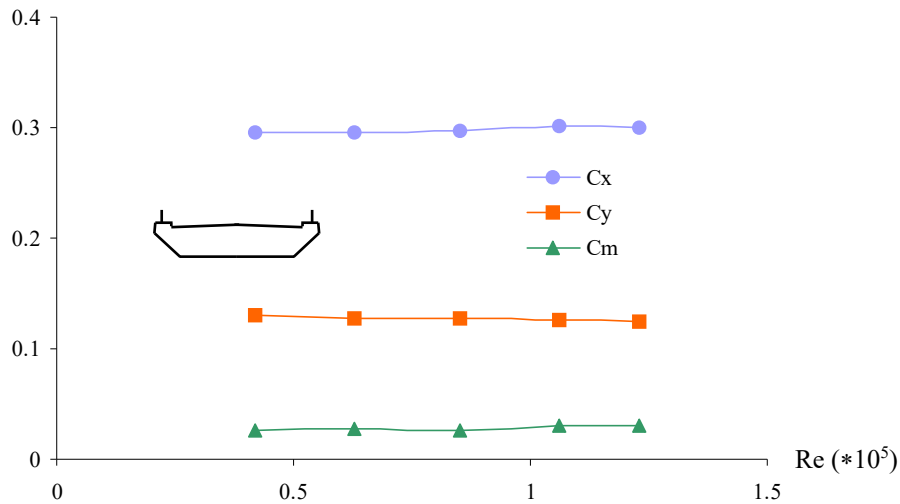


Figure 2.3 – Influence du nombre de Reynolds sur les coefficients stationnaires du tablier du pont de Saint-Nazaire

On préfère le plus souvent exprimer les forces et coefficients associés dans un repère lié à la section étudiée. Les  $C_D$  et  $C_L$  sont alors convertis en  $C_X$  et  $C_Y$  par une simple combinaison linéaire :

$$C_X(\theta) = C_D \cos \theta - C_L \sin \theta \quad (2.3)$$

$$C_Y(\theta) = C_D \sin \theta + C_L \cos \theta \quad (2.4)$$

Les figures 2.4 à 2.6 illustrent l'évolution de ces coefficients en fonction de l'incidence du vent pour trois types de profils de tabliers. On peut remarquer que pour un tablier profilé, les coefficients aérodynamiques varient quasi linéairement avec l'incidence. Pour un viaduc ferroviaire, beaucoup plus massif, ou un bipoutre, moins bien profilé, cette linéarité n'est plus du tout vérifiée, en particulier pour  $C_Y$ .

Comme on le verra par la suite, le calcul dynamique par approche spectrale nécessite une expression linéaire des coefficients aérodynamiques en fonction de l'incidence du vent. Cela nous amènera à proposer une méthode permettant de linéariser « intelligemment » des courbes fortement non linéaires.



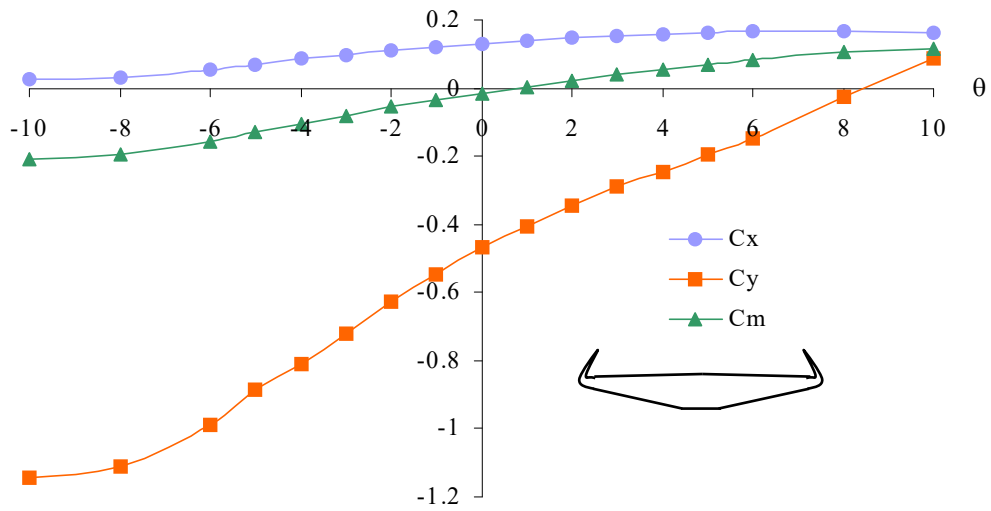


Figure 2.4 – Coefficients aérodynamiques d'un tablier profilé : viaduc de Millau

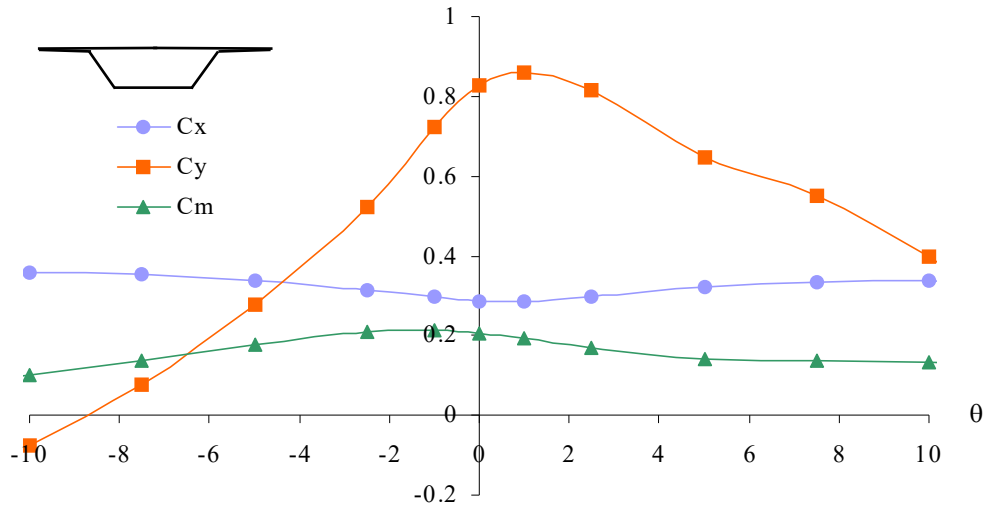


Figure 2.5 – Coefficients aérodynamiques d'un tablier non profilé : viaduc de Verrières

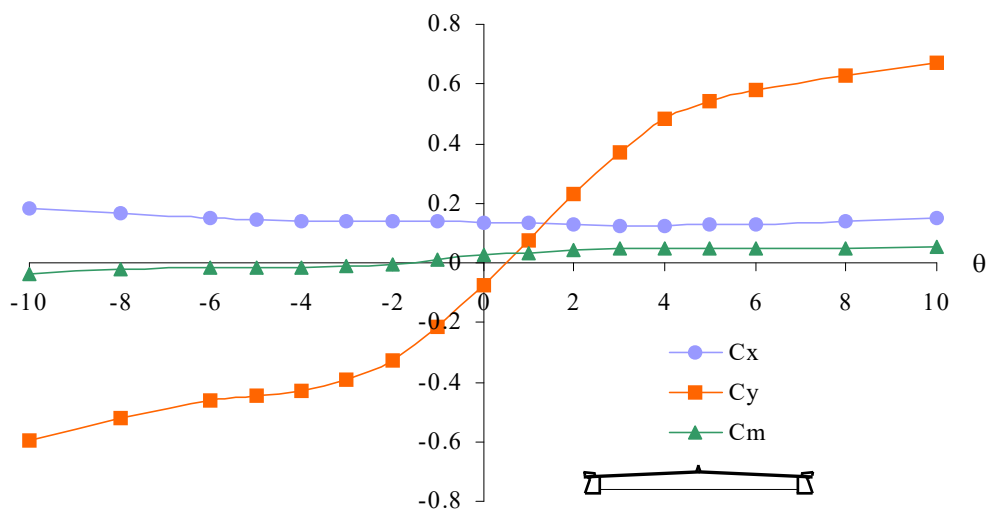


Figure 2.6 – Coefficients aérodynamiques d'un tablier bipoutre : pont du Tage

### 2.1.2 Forces s'exerçant sur une section fixe en flux turbulent: approche quasi-statique

On ne peut évidemment pas se contenter d'une modélisation des forces aérodynamiques ne s'appliquant qu'au cas trivial d'un vent de vitesse et d'incidence constantes. Toutefois, dans un premier temps, on se limite à une approche dite « quasi-statique » selon laquelle, à un instant  $t$  donné, les efforts exercés par un signal de vent fluctuant sont les mêmes que ceux qui seraient exercés par un signal constant de même amplitude à cet instant  $t$ .

Cependant, appliquer cette hypothèse brutalement, revient à négliger l'impact du degré de turbulence sur la façon dont l'écoulement moyen contournera l'obstacle ; les positions des points de décollement et de recollement pourront en effet en être très affectées et par là-même les efforts moyens s'exerçant sur l'obstacle. Des essais sur maquettes sectionnelles effectués en vent turbulent permettent de régler ce problème en remplaçant les coefficients moyens "laminaires" par des coefficients moyens "turbulents".

Mais appliquer l'hypothèse de quasi-stationnarité, revient surtout à négliger la nature même de l'écoulement turbulent. Celui-ci peut en effet être assimilé à un ensemble de structures tourbillonnaires d'échelles variables dont le comportement face à un obstacle sera également variable. Les structures de grande taille par rapport à l'obstacle seront peu perturbées par son franchissement ; à l'inverse, les petites structures seront sérieusement désorganisées.

Ainsi, les coefficients moyens sont incapables de différencier l'impact des différentes échelles tourbillonnaires sur l'obstacle. En d'autres termes, ils ne permettent pas de fournir des informations précises sur la façon dont l'énergie éolienne sera convertie en énergie sollicitante dans le domaine fréquentiel.

Heureusement, l'essentiel de l'énergie éolienne est généralement concentré dans des structures tourbillonnaires dont les dimensions caractéristiques sont de l'ordre de quelques dizaines de mètres c'est-à-dire plusieurs fois la taille d'un élément de pont classique. On peut donc raisonnablement assimiler le flux turbulent à un flux « localement laminaire variable » et, par conséquent, accepter l'hypothèse de quasi-stationnarité dans un premier temps.

Mais il faudra bien garder à l'esprit qu'à mesure que le taux de turbulence augmente, d'une part, et que le spectre de puissance se décale vers les hautes fréquences, d'autre part, cette hypothèse perd de sa pertinence. Nous seront alors amenés à introduire une nouvelle notion correctrice : celle d' *admittance aérodynamique*...

Mais restons pour le moment dans le cadre de cette hypothèse et considérons le vecteur vitesse instantanée  $\vec{U}(t)$  qu'aurait le flux au centre de gravité de la section, en l'absence de cette dernière,  $\tilde{U}$  la norme de la composante de  $\vec{U}(t)$  comprise dans le plan de la section et  $\theta(t)$  l'angle que fait cette composante avec l'axe x du repère lié à la section. On écrit alors:

$$F_X(t) = \frac{1}{2} \rho B \tilde{U}(t)^2 C_X(\theta(t)) \quad (2.5)$$

$$F_Y(t) = \frac{1}{2} \rho B \tilde{U}(t)^2 C_Y(\theta(t)) \quad (2.6)$$

$$M_Z(t) = \frac{1}{2} \rho B^2 \tilde{U}(t)^2 C_M(\theta(t)) \quad (2.7)$$

On exprime à présent les composantes du vecteur vent dans une base  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  liée à la structure, où  $(\bar{x}, \bar{y})$  définit une base du plan contenant la section considérée. Ainsi, le vecteur vitesse instantané  $\vec{U}(t)$  s'écrit:

$$\vec{U}(t) = U_L(t) \bar{x} + V_L(t) \bar{y} + W_L(t) \bar{z} \quad (2.8)$$

on peut donc écrire:

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{V_L(t)}{U_L(t)}\right) \quad (2.9)$$

$$\tilde{U}(t) = \sqrt{U_L(t)^2 + V_L(t)^2} \quad (2.10)$$

En introduisant  $\tilde{U}$  à la place de  $\|\vec{U}\|$  on néglige donc tous les effets de la composante  $W_L(t)$ .

Par analogie avec la relation (1.1), le vecteur vitesse instantané peut s'écrire sous la forme:

$$\vec{U}(t) = (\bar{U}_L + u_L(t), \bar{V}_L + v_L(t), \bar{W}_L + w_L(t)) \quad (2.11)$$

Les équations (2.5-7) deviennent donc:

$$F_X(t) = \frac{1}{2} \rho \left[ (\bar{U}_L + u_L(t))^2 + (\bar{V}_L + v_L(t))^2 \right] B C_X(\theta(t)) \quad (2.12)$$

$$F_Y(t) = \frac{1}{2} \rho \left[ (\bar{U}_L + u_L(t))^2 + (\bar{V}_L + v_L(t))^2 \right] B C_Y(\theta(t)) \quad (2.13)$$

$$M_Z(t) = \frac{1}{2} \rho \left[ (\bar{U}_L + u_L(t))^2 + (\bar{V}_L + v_L(t))^2 \right] B^2 C_M(\theta(t)) \quad (2.14)$$

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{\bar{V}_L + v_L(t)}{\bar{U}_L + u_L(t)}\right) \quad (2.15)$$

On suppose que la vitesse du vent "vue" par le tablier est la même que celle qu'on aurait en absence du tablier ; or les tourbillons se déforment en entrant en contact avec ce dernier. Le champ de pression qui en découle va alors être longitudinalement plus cohérent que le champ de vent incident. Ce phénomène est négligé ici faute de modèles mathématiques appropriés.

La méthode spectrale, présentée plus loin, dont l'objet est la détermination des effets de la turbulence sur les structures élancées nécessite que la relation liant les forces aérodynamiques au champ de vent turbulent soit linéaire. Or, les intensités de turbulence, dans le cas de l'écoulement atmosphérique, sont généralement inférieures à 20% donc  $u_L$  et  $v_L$  sont petits par rapport à  $\bar{U}_L$ ,  $\bar{V}_L$ . On peut donc linéariser les expressions ci-dessus au voisinage de  $u = 0$  et  $v = 0$  :

$$C_x(\theta) \approx C_x(\theta_0) + \frac{dC_x}{d\theta}(\theta_0)\delta\theta \quad (2.16)$$

$$C_y(\theta) \approx C_y(\theta_0) + \frac{dC_y}{d\theta}(\theta_0)\delta\theta \quad (2.17)$$

$$C_M(\theta) \approx C_M(\theta_0) + \frac{dC_M}{d\theta}(\theta_0)\delta\theta \quad (2.18)$$

avec  $\delta\theta = \theta(t) - \theta_0$ .

on peut alors développer  $\theta(t)$  comme suit :

$$\theta(t) = \theta_0 + \delta\theta \approx \arctan\left(\frac{\bar{V}_L}{\bar{U}_L}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial u_L}(0,0)u_L + \frac{\partial\theta}{\partial v_L}(0,0)v_L \quad (2.19)$$

avec 
$$\frac{\partial\theta}{\partial u_L}(0,0) = -\frac{\bar{V}_L}{\bar{U}_L^2 + \bar{V}_L^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\theta}{\partial v_L}(0,0) = \frac{\bar{U}_L}{\bar{U}_L^2 + \bar{V}_L^2} \quad (2.20)$$

En ne gardant que les termes du premier ordre, on obtient:

$$F_x(t) = \bar{F}_x + F_{ix}(t) \quad (2.21)$$

$$F_y(t) = \bar{F}_y + F_{iy}(t) \quad (2.22)$$

$$M_z(t) = \bar{M}_z + M_{iz}(t) \quad (2.23)$$

$$\text{avec } \bar{F}_x = \frac{1}{2} \rho (\bar{U}_L^2 + \bar{V}_L^2) B C_x(\theta_0) \quad (2.24)$$

$$F_{ix}(t) = \rho (\bar{U}_L u_L(t) + \bar{V}_L v_L(t)) B C_x(\theta_0) + \frac{1}{2} \rho B \frac{\partial C_x}{\partial \theta}(\theta_0) (\bar{U}_L v_L(t) - \bar{V}_L u_L(t)) \quad (2.25)$$

$$\bar{F}_y = \frac{1}{2} \rho (\bar{U}_L^2 + \bar{V}_L^2) B C_y(\theta_0) \quad (2.26)$$

$$F_{iy}(t) = \rho (\bar{U}_L u_L(t) + \bar{V}_L v_L(t)) B C_y(\theta_0) + \frac{1}{2} \rho B \frac{\partial C_y}{\partial \theta}(\theta_0) (\bar{U}_L v_L(t) - \bar{V}_L u_L(t)) \quad (2.27)$$

$$\bar{M}_z = \frac{1}{2} \rho (\bar{U}_L^2 + \bar{V}_L^2) B^2 C_m(\theta_0) \quad (2.28)$$

$$M_{iz}(t) = \rho (\bar{U}_L u_L(t) + \bar{V}_L v_L(t)) B^2 C_m(\theta_0) + \frac{1}{2} \rho B^2 \frac{\partial C_m}{\partial \theta}(\theta_0) (\bar{U}_L v_L(t) - \bar{V}_L u_L(t)) \quad (2.29)$$

Ainsi, dans la formulation linéarisée des forces aérodynamiques, chaque composante est la somme de deux termes:

- un premier terme constant qui dépend des caractéristiques du vent moyen, de son incidence par rapport à la section et de la valeur des coefficients aérodynamiques à l'incidence moyenne ;
- un second terme fluctuant proportionnel aux composantes turbulentes du vent couramment appelé « buffeting force » ; c'est ce terme qui est à l'origine du comportement dynamique de la structure ; c'est donc lui qui, dorénavant, retiendra l'essentiel de notre attention.

Par la suite, on exprimera les équations (2.25), (2.27), et (2.29) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} F_{ix}(t) \\ F_{iy}(t) \\ F_{iz}(t) \\ M_{ix}(t) \\ M_{iy}(t) \\ M_{iz}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho B \left( C_x \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_x}{d\theta} \bar{V}_L \right) & \rho B \left( C_x \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_x}{d\theta} \bar{U}_L \right) & 0 \\ \rho B \left( C_y \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_y}{d\theta} \bar{V}_L \right) & \rho B \left( C_y \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_y}{d\theta} \bar{U}_L \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho B^2 \left( C_m \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_m}{d\theta} \bar{V}_L \right) & \rho B^2 \left( C_m \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_m}{d\theta} \bar{U}_L \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_L(t) \\ v_L(t) \\ w_L(t) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

que l'on contractera en  $\underline{F}_i(t) = \underline{C}_{ad} \underline{u}_L(t)$ .

Lorsque la section est correctement profilée, on a vu que les coefficients aérodynamiques variaient quasiment linéairement avec l'incidence du vent ; dans ce cas, la formulation linéarisée des forces

aérodynamiques est pleinement justifiée. Pour les sections mal profilées, notre formulation est par contre moins représentative de la réalité. Ainsi, à titre d'exemple, l'annulation de la dérivée du coefficient de portance du tablier de Verrières (figure 2.5) autour de l'incidence  $1^\circ$  est peu significative des variations du coefficient au voisinage de ce point, sauf à considérer d'infimes variations d'incidences autour de cette position.

L'expérience montre cependant que l'incidence instantanée du vent varie de plusieurs degrés autour de l'incidence moyenne. C'est pourquoi nous proposons une méthode permettant de remplacer les courbes d'évolution des coefficients aérodynamiques en fonction de l'incidence du vent par des fonctions affines équivalentes vis-à-vis de la réponse dynamique de nos structures. Nous y reviendrons dans le chapitre 4.

Les coefficients aérodynamiques stationnaires pourraient, si l'on poussait à fond la logique de l'hypothèse de quasi-stationnarité, être mesurés dans des conditions d'écoulement laminaire puis appliqués dans des cas d'écoulement turbulent. Cependant, comme on l'a déjà évoqué, on préfère mesurer ces coefficients en régime turbulent. La figure 2.7 montre, pour le tablier du viaduc de Millau, les coefficients  $C_X$ ,  $C_Y$ ,  $C_M$ , mesurés en conditions laminaires, et ceux mesurés en écoulement turbulent. On peut remarquer que les différences sont faibles.

Il nous semble important d'appuyer sur le fait que, même dans cette configuration expérimentale, les coefficients mesurés sont de simples rapports entre pressions dynamiques moyennes amont et efforts moyens mesurés. Cela signifie que l'on rend compte, dans l'estimation des coefficients stationnaires « turbulents », des caractéristiques moyennes de l'écoulement propres à son taux de turbulence (allures moyennes des zones de recirculation, sillage,...) mais pas de l'impact différencié des différentes échelles de turbulence.

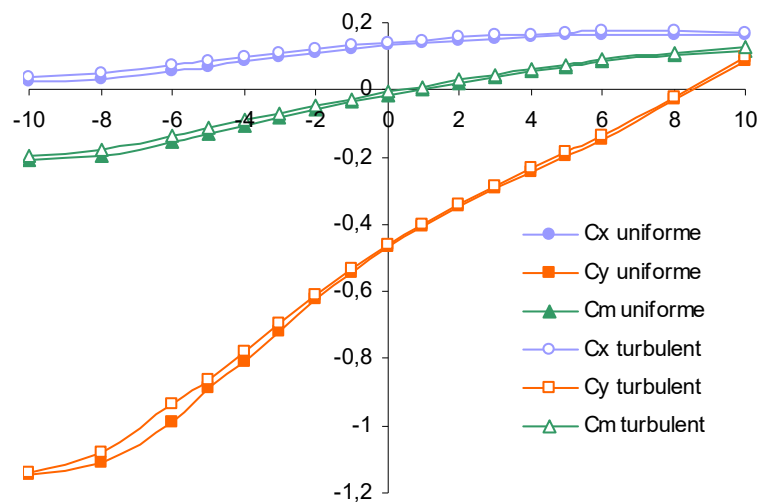


Figure 2.7 – Coefficients stationnaires du viaduc de Millau mesurés en vents uniforme et turbulent

De plus, même plongé dans un écoulement parfaitement laminaire, un corps mal profilé est soumis à une turbulence générée par lui-même : son sillage ou « signature » aérodynamique.

Ces notions sont prises en compte via l'introduction d'une fonction correctrice s'exprimant dans le domaine fréquentiel : la *fonction d'admittance aérodynamique*. Cette fonction prend la valeur unité pour les tourbillons de basses fréquences, et décroît à mesure qu'on se rapproche des échelles de hautes fréquences. On modélise ainsi, pour une section donnée, l'évolution de la corrélation spatiale d'un champ de pressions dynamiques en fonction de la taille des structures tourbillonnaires.

Ainsi, en réécrivant (2.30) dans le domaine spectral, et en introduisant les termes  $\gamma_{ij}(\omega)$  ( $i = F_X, F_Y, M_Z, j = u, v$ ), on obtient :

$$\begin{pmatrix} F_{iX}(\omega) \\ F_{iY}(\omega) \\ F_{iZ}(\omega) \\ M_{iX}(\omega) \\ M_{iY}(\omega) \\ M_{iZ}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho B \left( C_X \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_X}{d\theta} \bar{V}_L \right) \gamma_{Xu}(\omega) & \rho B \left( C_X \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_X}{d\theta} \bar{U}_L \right) \gamma_{Xv}(\omega) & 0 \\ \rho B \left( C_Y \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_Y}{d\theta} \bar{V}_L \right) \gamma_{Yu}(\omega) & \rho B \left( C_Y \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_Y}{d\theta} \bar{U}_L \right) \gamma_{Yv}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho B^2 \left( C_M \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_M}{d\theta} \bar{V}_L \right) \gamma_{Mu}(\omega) & \rho B^2 \left( C_M \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_M}{d\theta} \bar{U}_L \right) \gamma_{Mv}(\omega) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_L(\omega) \\ v_L(\omega) \\ w_L(\omega) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

que l'on contractera en  $\underline{F}_i(\omega) = \underline{C}_\gamma(\omega) \underline{u}_L(\omega)$ .

Considérons deux points P et P' d'une structure vibrante ; les fonctions d'admittance  $\Gamma_{ij,kl}(\omega)$  sont les produits conjugués des fonctions  $\gamma_{ij}(\omega)$  au point P et  $\gamma_{kl}(\omega)$  au point P'; elles apparaissent dans l'expression reliant la matrice de densité interspectrale des forces à la matrice de densité interspectrale de la turbulence pour cette paire de points :

$$\underline{\underline{S}}_F(\omega) = \underline{\underline{C}}_\gamma(\omega) \underline{\underline{S}}_{u,u'}(\omega) \underline{\underline{C}}_{\gamma'}^{t*}(\omega) \quad (2.32)$$

Dans le cas des ponts, seul le tablier, en raison de sa profondeur d'une part (désynchronisation des tourbillons qui transitent) et de sa sensibilité d'autre part (forte contribution en terme de forces généralisées), est généralement affecté de fonctions d'admittance aérodynamique. De plus, seules les six fonctions d'admittance aérodynamiques « non couplées » du type  $\Gamma_{ij}(\omega)$  ( $i = F_X, F_Y, M_Z, j = u, v$ ) sont supposées non nulles.

Elles sont même souvent approchées par une seule et même fonction empirique. Plusieurs formulations peuvent être utilisées (figure 2.8) :

Davenport (1962) :

$$\gamma(\omega)^2 = \frac{2 \left[ \frac{7}{2\pi} \frac{\omega B}{\bar{U}} - 1 + e^{\left( -\frac{7}{2\pi} \frac{\omega B}{\bar{U}} \right)} \right]}{\left( \frac{7}{2\pi} \frac{\omega B}{\bar{U}} \right)^2} \quad (2.33)$$

Vickery (Holmes,1975):

$$\gamma(\omega)^2 = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{\omega B}{\bar{U}}} \quad (2.34)$$

Liepmann (1952):

$$\gamma(\omega)^2 = \frac{1}{1 + \pi \frac{\omega B}{\bar{U}}} \quad (2.35)$$

L'inconvénient majeur de ces formulations est qu'elles ne sont pas associées à un type de tablier particulier. Il est donc difficile de faire un choix a priori. C'est pourquoi il est préférable de les mesurer en soufflerie via une procédure que l'on explicitera dans le chapitre suivant.

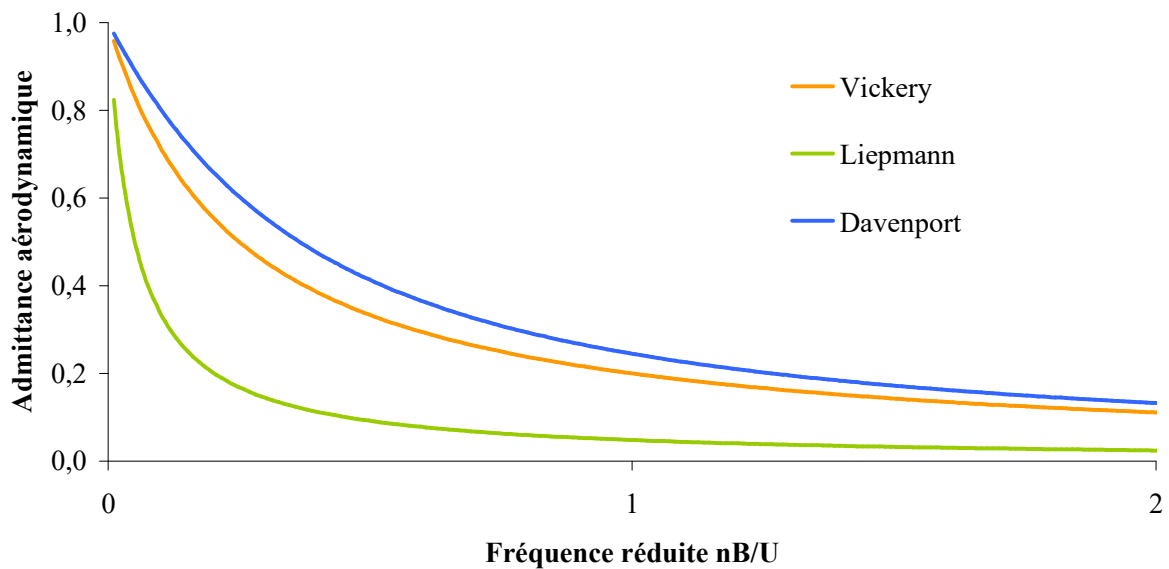


Figure 2.8 – Modèles de fonctions d'admittance aérodynamique

Dans le domaine temporel, l'admittance aérodynamique intervient naturellement sous forme de produits de convolution :



$$\begin{pmatrix} F_{ix}(t) \\ F_{iy}(t) \\ F_{iz}(t) \\ M_{ix}(t) \\ M_{iy}(t) \\ M_{iz}(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} \rho B \left( C_x \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_x}{d\theta} \bar{V}_L \right) \gamma_{xu}(\tau) & \rho B \left( C_x \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_x}{d\theta} \bar{U}_L \right) \gamma_{xv}(\tau) & 0 \\ \rho B \left( C_x \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_y}{d\theta} \bar{V}_L \right) \gamma_{yu}(\tau) & \rho B \left( C_y \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_y}{d\theta} \bar{U}_L \right) \gamma_{yv}(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho B^2 \left( C_M \bar{U}_L - \frac{1}{2} \frac{dC_M}{d\theta} \bar{V}_L \right) \gamma_{Mu}(\tau) & \rho B^2 \left( C_M \bar{V}_L + \frac{1}{2} \frac{dC_M}{d\theta} \bar{U}_L \right) \gamma_{Mv}(\tau) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_L(t-\tau) \\ v_L(t-\tau) \\ w_L(t-\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

que l'on contracte en  $\underline{F}_t(t) = \int_0^t \underline{C}_\gamma(\tau) \underline{u}_L(t-\tau) d\tau$  (2.36)

Les fonctions  $\psi_{ij}(t)$ , transformées de Fourier inverses des fonctions  $\psi_{ij}(\omega)$ , sont généralement nommées *fonctions indicielles*. Des fonctions similaires interviendront dans la modélisation des forces aéroélastiques. L'hypothèse selon laquelle toutes les fonctions d'admittance sont égales permet de factoriser (2.36) :

$$\underline{F}_t(t) = \int_0^t \gamma(\tau) \underline{C}_{ad} \underline{u}_L(t-\tau) d\tau \quad (2.37)$$

### 2.1.3 Section mobile, flux incident variable : approche quasi-statique

On considère maintenant une section en mouvement dans un flux turbulent. On suppose que le mouvement modifie peu la structure du fluide environnant. On note  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $\alpha(t)$  les déplacements horizontal, vertical, et en torsion de la section considérée.

Dans ce cas, l'équation 2.15 devient :

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{\bar{V} + v(t) - \dot{y}(t)}{\bar{U} + u(t) - \dot{x}(t)}\right) - \alpha(t) \quad (2.38)$$

ce qui nous donne, par linéarisation, en supposant  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  petits devant  $U$  et  $V$  :

$$F_X(t) = \bar{F}_X + F_X^t(t) + F_X^a(t) \quad F_Y(t) = \bar{F}_Y + F_Y^t(t) + F_Y^a(t) \quad F_M(t) = \bar{F}_M + F_M^t(t) + F_M^a(t) \quad (2.39)$$

où les deux premiers termes de chacune des trois expressions sont identiques à ceux développés en 2.24-29 et où les termes supplémentaires, correspondant aux forces issues des déplacements du tablier et dits « aéroélastiques » s'expriment comme suit :

$$F_{\text{aex}}(t) = \frac{1}{2} \rho B \frac{\partial C_x}{\partial \theta}(\bar{\theta})(\bar{V}_L \dot{x}(t) - \bar{U}_L \dot{y}(t) - \alpha(\bar{U}_L^2 + \bar{V}_L^2)) \quad (2.40)$$

$$F_{\text{aeY}}(t) = \frac{1}{2} \rho B \frac{\partial C_Y}{\partial \theta}(\bar{\theta})(\bar{V}_L \dot{x}(t) - \bar{U}_L \dot{y}(t) - \alpha(\bar{U}_L^2 + \bar{V}_L^2)) \quad (2.41)$$

$$F_{\text{aeM}}(t) = \frac{1}{2} \rho B^2 \frac{\partial C_M}{\partial \theta}(\bar{\theta})(\bar{V}_L \dot{x}(t) - \bar{U}_L \dot{y}(t) - \alpha(\bar{U}_L^2 + \bar{V}_L^2)) \quad (2.42)$$

Ces forces, proportionnelles à des déplacements ou vitesses de déplacements, s'apparentent donc à des *raideurs et amortissements aérodynamiques*. Cette première approche des forces aéroélastiques reste correcte tant que l'hypothèse de quasi-stationnarité est vérifiée. Autrement dit, les formulations (2.40-42) sont valables pour modéliser les déplacements de basses fréquences, mais perdent de leur pertinence à mesure que l'on s'approche des hautes fréquences de vibration. C'est pourquoi d'autres modèles ont été développés pour représenter les forces aéroélastiques sur l'ensemble du spectre des déplacements.

## 2.2 Les forces aéroélastiques

En première approximation, on a pu tenir compte du mouvement de la structure en remplaçant la vitesse du vent par la vitesse relative par rapport à la section. Néanmoins ceci est insuffisant car les oscillations de la section modifient la géométrie de l'écoulement et par conséquent les forces aérodynamiques.

Les premières formulations permettant de prendre en compte les phénomènes aéroélastiques sont issues du domaine de l'aéronautique et font intervenir des fonctions dites *indicielles* (travaux de Wagner en 1925 et Theodorsen en 1935). Ces fonctions permettent d'exprimer l'incidence d'une perturbation de type Dirac dans le signal des déplacements sur le signal des forces aérodynamiques. La prise en compte, à un instant  $t$ , de tout l'historique des déplacements sur la valeur du signal des forces se fait via un simple produit de convolution. Ces formulations ont été adaptées plus tard aux tabliers de ponts, notamment par Bleich (1948), Bisplinghoff (1962), Scanlan (1971,1974) et Lin (1983).

Les formulations évoquées ci-dessus présentent l'inconvénient d'être difficilement appréhendables expérimentalement. Scanlan et Tomko (1971) ont proposé une formulation dite mixte, car s'exprimant à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel, ayant l'intérêt majeur d'être basée sur une famille de modèles expérimentaux clairement définis : maquette sectionnelle rigide à un, deux ou trois degrés de liberté en oscillations sinusoïdales. Cette formulation (ou plutôt ce type de formulation car il en existe d'autres analogues), bien que non universelle, constitue néanmoins le nœud essentiel entre la caractérisation expérimentale des propriétés aéroélastiques d'un tablier et le calcul numérique de son comportement en vraie grandeur.

Ainsi, nous aborderons notre présentation de la modélisation des forces aéroélastiques par le modèle proposé par Scanlan et Tomko. Nous montrerons ensuite comment généraliser ce modèle afin de l'intégrer aux méthodes de calcul spectrale et temporelle.

### 2.2.1 Formulation mixte temps-fréquence : Scanlan et Tomko (1971)

Considérons un tablier de section constante à deux degrés de liberté : flexion + torsion de pulsations respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , placé dans un flux laminaire. Lorsque les deux modes sont excités, on observe expérimentalement l'apparition de forces supplémentaires, proportionnelles aux déplacements et vitesses de déplacements, et donc assimilables à des termes de raideur et d'amortissement. Ceci se traduit alors, dans le cas d'oscillations libres, par une modification de la décroissance des signaux de déplacements et un glissement en fréquence de ceux-ci.

Ces raideur et amortissement sont fonctions, outre de la forme de la section et de son incidence par rapport à l'écoulement, de la vitesse du flux et de la pulsation des modes excités. Généralement, on considère uniquement la dépendance vis-à-vis de la pulsation réduite  $K_i$  appelée couramment *fréquence réduite*, définie comme suit :

$$K_i = \frac{\omega_i B}{U} \quad i = 1, 2 \quad (2.43)$$

où  $\omega_i$  est la pulsation des oscillations,  $B$  une dimension caractéristique du tablier (en général sa largeur),  $U$  la vitesse du vent. Une petite analyse dimensionnelle montre que cette variable représente le nombre d'oscillations effectuées par le tablier pendant le trajet d'une particule d'air entre le bord d'attaque et le bord de fuite. Abstraction faite de l'influence du nombre de Reynolds sur la géométrie de l'écoulement, la dépendance au nombre  $K$  relève physiquement du bon sens.

Bien que le mouvement horizontal du tablier soit également soumis à de tels effets, on ne s'intéresse en général qu'aux effets aéroélastiques de portance et de moment, qui sont les plus significatifs. En supposant que ces forces supplémentaires dépendent linéairement des déplacements, on peut les écrire sous la forme suivante:

$$L_{ac} = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B (H_1 \dot{h} + H_2 \dot{\alpha} + H_3 \alpha + H_4 h) \quad (2.44)$$

$$M_{ac} = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B^2 (A_1 \dot{h} + A_2 \dot{\alpha} + A_3 \alpha + A_4 h) \quad (2.45)$$

$H_1$  traduit l'amortissement aérodynamique en flexion,  $A_2$  l'amortissement aérodynamique en torsion,  $H_4$  le glissement en fréquence en flexion, et  $A_3$  le glissement en fréquence en torsion. Les autres termes  $A_1, A_4, H_2, H_3$  traduisent les phénomènes de couplage entre modes.

On introduit généralement les coefficients adimensionnels  $H_i^*$  et  $A_i^*$  définis ci-dessous :

$$H_1 = \frac{K_1}{U} H_1^*(K_1) \quad H_2 = \frac{K_2 B}{U} H_2^*(K_2) \quad H_3 = K_2^2 H_3^*(K_2) \quad H_4 = \frac{K_1^2}{B} H_4^*(K_1) \quad (2.46)$$

$$A_1 = \frac{K_1}{U} A_1^*(K_1) \quad A_2 = \frac{K_2 B}{U} A_2^*(K_2) \quad A_3 = K_2^2 A_3^*(K_2) \quad A_4 = \frac{K_1^2}{B} A_4^*(K_1) \quad (2.47)$$

Ces nouveaux termes sont appelés coefficients aéroélastiques. Insistons sur le fait qu'ils dépendent de la forme de la section, de son incidence, de la fréquence réduite, et ... du nombre de Reynolds.

Remarquons que dans les publications de Scanlan sur le sujet (Scanlan, 1974), la variable  $K$  n'est affectée d'aucun indice, ce qui pose régulièrement des problèmes dans les interprétations : rien n'indique si la fréquence correspond au mouvement de flexion ou de torsion. Nous avons donc opté pour la convention qui nous semblait la plus logique.

## 2.2.2 Généralisation à un mouvement quelconque de la section

### a) Formulation fréquentielle

Les formules 2.44 et 2.45 ne fournissent une modélisation des effets aéroélastiques que pour un mouvement purement sinusoïdal. On aimerait cependant généraliser cette formulation à un mouvement quelconque.

Notons encore  $h(t)$  et  $\alpha(t)$  les déplacements verticaux et en torsion du même tablier à deux degrés de liberté et supposons qu'ils admettent chacun une transformée de Fourier  $\hat{h}(\omega)$  et  $\hat{\alpha}(\omega)$ . Considérons à présent deux mouvements purement sinusoïdaux  $\tilde{h}_m(t)$ ,  $\tilde{\alpha}_n(t)$ , d'amplitudes  $\hat{h}(\omega_m)$ ,  $\hat{\alpha}(\omega_n)$ , et de pulsations  $\omega_m, \omega_n$ .

D'après 2.44 et 2.45, en posant  $\tilde{h}_m(t) = \hat{h}(\omega_m)e^{i\omega_m t}$ ,  $\tilde{\alpha}_n(t) = \hat{\alpha}(\omega_n)e^{i\omega_n t}$  ces déplacements génèrent les efforts aéroélastiques suivants:

$$\tilde{L}_{ac\ mn}(t) = \frac{1}{2}\rho\bar{U}^2B\left(iK_m^2H_1^*(K_m)\frac{\tilde{h}_m(t)}{B} + iK_n^2H_2^*(K_n)\tilde{\alpha}_n(t) + K_n^2H_3^*(K_n)\tilde{\alpha}_n(t) + K_m^2H_4^*(K_m)\frac{\tilde{h}_m(t)}{B}\right) \quad (2.48)$$

$$\tilde{M}_{ac\ mn}(t) = \frac{1}{2}\rho\bar{U}^2B^2\left(iK_i^2A_1^*(K_i)\frac{\tilde{h}_i(t)}{B} + iK_j^2A_2^*(K_j)\tilde{\alpha}_j(t) + K_j^2A_3^*(K_j)\tilde{\alpha}_j(t) + K_i^2A_4^*(K_i)\frac{\tilde{h}_i(t)}{B}\right) \quad (2.49)$$

où  $K_n = \omega_n B/U$  et  $K_m = \omega_m B/U$ .

Décomposant chacune des deux formulations ci-dessus en deux parties, suivant les indices  $i$  et  $j$ , on peut considérer les quatre forces distinctes suivantes:

$$\tilde{L}_{acm}(t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left( i K_m^2 H_1^*(K_m) \frac{\tilde{h}_m(t)}{B} + K_m^2 H_4^*(K_m) \frac{\tilde{h}_m(t)}{B} \right) \quad (2.50)$$

$$\tilde{L}_{acn}(t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left( i K_n^2 H_2^*(K_n) \tilde{\alpha}_n(t) + K_n^2 H_3^*(K_n) \tilde{\alpha}_n(t) \right) \quad (2.51)$$

$$\tilde{M}_{acn}(t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B^2 \left( i K_n^2 A_2^*(K_n) \tilde{\alpha}_n(t) + K_n^2 A_3^*(K_n) \tilde{\alpha}_n(t) \right) \quad (2.52)$$

$$\tilde{M}_{acm}(t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B^2 \left( i K_m^2 A_1^*(K_m) \frac{\tilde{h}_m(t)}{B} + K_m^2 A_4^*(K_m) \frac{\tilde{h}_m(t)}{B} \right) \quad (2.53)$$

On remplace aisément les  $\sim$  par des  $\wedge$  en divisant tous les termes de (2.50) et (2.51) par  $e^{i\omega m t}$  et ceux de (2.52) et (2.53) par  $e^{i\omega n t}$  arrivant ainsi à une formulation fréquentielle des efforts aéroélastiques.

Considérant que  $h$  et  $\alpha$  résultent de la sommation des signaux sinusoïdaux d'amplitudes  $\hat{h}, \hat{\alpha}$  sur l'ensemble du domaine fréquentiel, on fait la supposition que  $L_{ac}, M_{ac}$  résultent également de l'intégration des signaux d'amplitudes  $\hat{L}_{ac}, \hat{M}_{ac}$  sur la même plage de fréquences: "principe de superposition. On peut légitimement mettre en doute la validité de cette hypothèse ; en effet, les équations de Navier-Stokes régissant l'écoulement du flux autour de la section n'ayant pas un caractère linéaire, il n'y a aucune raison que les effets s'additionnent aussi simplement. Si on l'applique tout de même,  $\hat{L}_{ac}, \hat{M}_{ac}$  sont alors les transformées de Fourier de  $L_{ac}, M_{ac}$ .

En introduisant les fonctions suivantes:

$$F_{L\alpha}(\omega) = \frac{1}{2} \rho B^3 \omega^2 (H3^* + iH2^*) \quad F_{Lh}(\omega) = \frac{1}{2} \rho B^2 \omega^2 (H4^* + iH1^*) \quad (2.54)$$

$$F_{M\alpha}(\omega) = \frac{1}{2} \rho B^4 \omega^2 (A3^* + iA2^*) \quad F_{Mh}(\omega) = \frac{1}{2} \rho B^3 \omega^2 (A4^* + iA1^*) \quad (2.55)$$

on pose alors:

$$\hat{L}_{ac}(\omega) = F_{Lh}(\omega) \hat{h}(\omega) + F_{L\alpha}(\omega) \hat{\alpha}(\omega) \quad (2.56)$$

$$\hat{M}_{ac}(\omega) = F_{Mh}(\omega) \hat{h}(\omega) + F_{M\alpha}(\omega) \hat{\alpha}(\omega) \quad (2.57)$$

Ainsi, la transformée de Fourier des déplacements fournit la transformée de Fourier des forces aéroélastiques. Ceci se généralise facilement au cas où  $h$  et  $\alpha$  sont deux processus aléatoires admettant une fonction de densité spectrale de puissance.

### b) Formulation temporelle des forces aéroélastiques

Les expressions (2.56) et (2.57), modélisant les forces aéroélastiques dans le domaine fréquentiel sous forme de simples combinaisons linéaires, se transposent aisément dans le domaine temporel via l'introduction de produits de convolution.

Soient  $f_{Lh}$ ,  $f_{L\alpha}$ ,  $f_{Mh}$ ,  $f_{M\alpha}$  les transformées de Fourier inverses des fonctions  $F_{Lh}$ ,  $F_{L\alpha}$ ,  $F_{Mh}$ ,  $F_{M\alpha}$ .

On écrit alors:

$$L_{ac}(t) = \int_{-\infty}^t f_{Lh}(t-\tau)h(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^t f_{L\alpha}(t-\tau)\alpha(\tau)d\tau = L_h(t) + L_\alpha(t) \quad (2.58)$$

$$M_{ac}(t) = \int_{-\infty}^t f_{Mh}(t-\tau)h(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^t f_{M\alpha}(t-\tau)\alpha(\tau)d\tau = M_h(t) + M_\alpha(t) \quad (2.59)$$

où  $L_h$  et  $L_\alpha$  sont les forces de portance générées par les mouvements vertical et angulaire ;  $M_h$  et  $M_\alpha$  sont les moments générés par les mouvements vertical et angulaire.

Signalons qu'on retrouve là des expressions analogues à celles développées par Lin (1983), en cela qu'elles font intervenir des fonctions de type indiciel. Toutefois, les formulations de Lin ne font pas intervenir les fonctions déplacement mais leurs dérivées par rapport au temps. Ainsi, par exemple, la force de portance s'exprime sous la forme suivante :

$$L_{ac}(t) = \int_{-\infty}^t g_{Lh}(t-\tau)\dot{h}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^t g_{L\alpha}(t-\tau)\dot{\alpha}(\tau)d\tau \quad (2.60)$$

Les fonctions indicielles  $g_{Lh}$  et  $g_{L\alpha}$  ont le mérite d'avoir un sens physique clair. En effet,  $g_{Lh}(t) \delta h = g_{Lh}(t) \dot{h}(0) \delta t$  ( resp.  $g_{L\alpha}(t) \delta \alpha = g_{L\alpha}(t) \dot{\alpha}(0) \delta t$  ) représente la force élémentaire générée à l'instant  $t$  par une impulsion élémentaire  $\delta h$  ( resp.  $\delta \alpha$  ) à l'instant  $t=0$ . Les efforts totaux générés à un instant  $t$  s'obtiennent naturellement par intégration des efforts élémentaires, l'instant de l'impulsion variant de  $-\infty$  à  $t$ . Notre propos est illustré par les figures 2.9 et 2.10.

Si le sens physique des équations (2.58) et (2.59) paraît a priori moins évident, on remarque toutefois qu'une simple intégration par parties des équations de Lin permet de retomber sur des équations de la forme de celles issues de la transformée de Fourier des équations de Scanlan. Ce qui est plutôt rassurant.

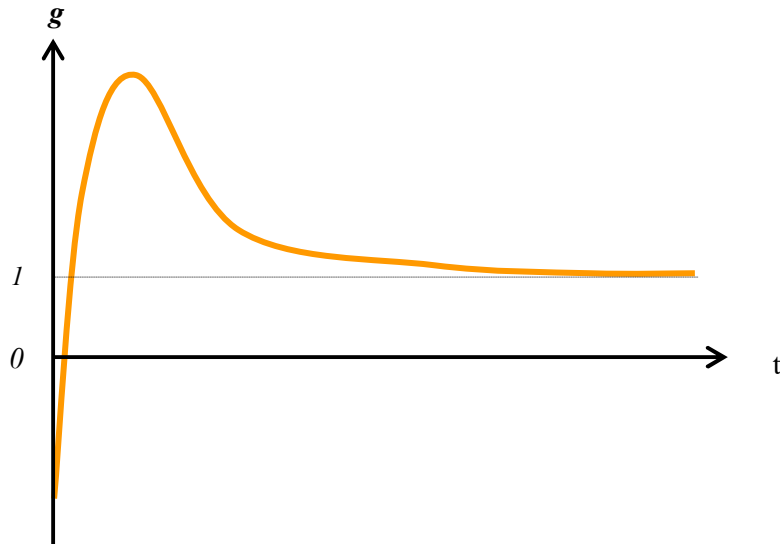


Figure 2.9 – Allure d'une fonction indicielle

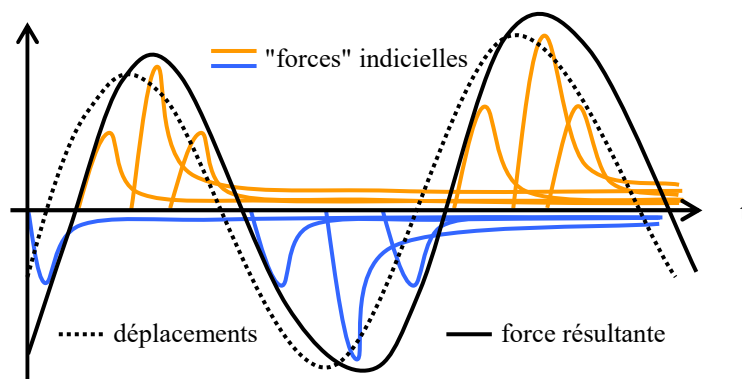


Figure 2.10 – Intégration des fonctions indicielles

Les coefficients  $H_i^*$  et  $A_i^*$  mesurés en soufflerie suffisent donc, en théorie, pour estimer les fonctions indicielles permettant la prise en compte des efforts aéroélastiques dans le domaine temporel.

Cependant, afin de réduire les temps de calcul, on préfère ne pas calculer numériquement les transformées de Fourier inverses des fonctions  $F_{Lh}$ ,  $F_{L\alpha}$ ,  $F_{Mh}$ ,  $F_{M\alpha}$  puis le produit de convolution. On approche donc ces quatre fonctions par des applications dont on connaît les transformées de Fourier analytiques, suivant la forme proposée par Bucher (1988).



Chaque fonction  $F$  est paramétrée par six coefficients  $C_1, C_2, C_3, C_4, d_3, d_4$ , et a la forme suivante:

$$F_{Lh}(\omega) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \left( C_{1Lh} + \frac{B}{\bar{U}} i\omega C_{2Lh} + \sum_{k=3}^4 C_{kLh} \frac{i\omega}{d_{kLh} \frac{\bar{U}}{B} + i\omega} \right) \quad (2.61)$$

$$F_{L\alpha}(\omega) = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left( C_{1L\alpha} + \frac{B}{\bar{U}} i\omega C_{2L\alpha} + \sum_{k=3}^4 C_{kL\alpha} \frac{i\omega}{d_{kL\alpha} \frac{\bar{U}}{B} + i\omega} \right) \quad (2.62)$$

$$F_{Mh}(\omega) = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left( C_{1Mh} + \frac{B}{\bar{U}} i\omega C_{2Mh} + \sum_{k=3}^4 C_{kMh} \frac{i\omega}{d_{kMh} \frac{\bar{U}}{B} + i\omega} \right) \quad (2.63)$$

$$F_{M\alpha}(\omega) = \frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left( C_{1M\alpha} + \frac{B}{\bar{U}} i\omega C_{2M\alpha} + \sum_{k=3}^4 C_{kM\alpha} \frac{i\omega}{d_{kM\alpha} \frac{\bar{U}}{B} + i\omega} \right) \quad (2.64)$$

Alors, en appliquant les transformées de Fourier inverses<sup>4</sup>, on obtient :

$$L_h(t) = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left( C_{1Lh} \frac{h(t)}{B} + \frac{B}{\bar{U}} C_{2Lh} \frac{\dot{h}(t)}{B} + L_{h_3}(t) + L_{h_4}(t) \right) \quad (2.65)$$

$$L_\alpha(t) = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left( C_{1L\alpha} \alpha(t) + \frac{B}{\bar{U}} C_{2L\alpha} \dot{\alpha}(t) + L_{\alpha_3}(t) + L_{\alpha_4}(t) \right) \quad (2.66)$$

$$M_h(t) = \frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left( C_{1Mh} \frac{h(t)}{B} + \frac{B}{\bar{U}} C_{2Mh} \frac{\dot{h}(t)}{B} + M_{h_3}(t) + M_{h_4}(t) \right) \quad (2.67)$$

$$M_\alpha(t) = \frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left( C_{1M\alpha} \alpha(t) + \frac{B}{\bar{U}} C_{2M\alpha} \dot{\alpha}(t) + M_{\alpha_3}(t) + M_{\alpha_4}(t) \right) \quad (2.68)$$

où on pose, avec  $k = 3, 4$  :

<sup>4</sup> Dans le cas présent, afin d'être en cohérence avec les formulations (2.54-55), la transformée de Fourier est définie au facteur  $1/2\pi$  près.

$$L_{h_k}(t) = C_{Lhk} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{h}}{B}(\tau) e^{-\frac{d_{Lhk}\bar{U}}{B}(t-\tau)} d\tau \quad L_{\alpha_k}(t) = C_{L\alpha k} \int_{-\infty}^t \dot{\alpha}(\tau) e^{-\frac{d_{L\alpha k}\bar{U}}{B}(t-\tau)} d\tau \quad (2.69)$$

$$M_{h_k}(t) = C_{Mhk} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{h}}{B}(\tau) e^{-\frac{d_{Mhk}\bar{U}}{B}(t-\tau)} d\tau \quad M_{\alpha_k}(t) = C_{M\alpha k} \int_{-\infty}^t \dot{\alpha}(\tau) e^{-\frac{d_{M\alpha k}\bar{U}}{B}(t-\tau)} d\tau \quad (2.70)$$

On montre facilement que les fonctions  $L_{h_k}(t), L_{\alpha_k}(t), M_{h_k}(t), M_{\alpha_k}(t)$  vérifient les relations suivantes:

$$\dot{L}_{h_k}(t) = -\frac{d_{Lhk}\bar{U}}{B} L_{h_k}(t) + C_{Lhk} \dot{h}(t) \quad \dot{L}_{\alpha_k}(t) = -\frac{d_{L\alpha k}\bar{U}}{B} L_{\alpha_k}(t) + C_{L\alpha k} \dot{\alpha}(t) \quad (2.71)$$

$$\dot{M}_{h_k}(t) = -\frac{d_{Mhk}\bar{U}}{B} M_{h_k}(t) + C_{Mhk} \dot{h}(t) \quad \dot{M}_{\alpha_k}(t) = -\frac{d_{M\alpha k}\bar{U}}{B} M_{\alpha_k}(t) + C_{M\alpha k} \dot{\alpha}(t) \quad (2.72)$$

Pour calculer les coefficients  $C_k$  et  $d_k$ , on remanie les expressions (2.61-64) (resp.(2.54-55)) en remplaçant les variables  $B, U$  et  $\omega$  par  $K$  (resp. les variables  $B$  et  $\omega$  par  $K$  et  $U$ ) et on identifie terme à terme ces expressions pour différentes valeurs de  $K$ . Cela donne :

$$H_1^*(K) = \frac{1}{K^2} \left( KC_{Lh2} + \sum_{k=3}^4 \frac{C_{Lhk} d_{Lhk} (1/K)}{1 + d_{Lhk}^2 (1/K^2)} \right) \quad H_4^*(K) = \frac{1}{K^2} \left( C_{Lh1} + \sum_{k=3}^4 \frac{C_{Lhk}}{1 + d_{Lhk}^2 (1/K^2)} \right) \quad (2.73)$$

$$H_2^*(K) = \frac{1}{K^2} \left( KC_{L\alpha 2} + \sum_{k=3}^4 \frac{C_{L\alpha k} d_{L\alpha k} (1/K)}{1 + d_{L\alpha k}^2 (1/K^2)} \right) \quad H_3^*(K) = \frac{1}{K^2} \left( C_{L\alpha 1} + \sum_{k=3}^4 \frac{C_{L\alpha k}}{1 + d_{L\alpha k}^2 (1/K^2)} \right) \quad (2.74)$$

$$A_1^*(K) = \frac{1}{K^2} \left( KC_{Mh2} + \sum_{k=3}^4 \frac{C_{Mhk} d_{Mhk} (1/K)}{1 + d_{Mhk}^2 (1/K^2)} \right) \quad A_4^*(K) = \frac{1}{K^2} \left( C_{Mh1} + \sum_{k=3}^4 \frac{C_{Mhk}}{1 + d_{Mhk}^2 (1/K^2)} \right) \quad (2.75)$$

$$A_2^*(K) = \frac{1}{K^2} \left( KC_{M\alpha 2} + \sum_{k=3}^4 \frac{C_{M\alpha k} d_{M\alpha k} (1/K)}{1 + d_{M\alpha k}^2 (1/K^2)} \right) \quad A_3^*(K) = \frac{1}{K^2} \left( C_{M\alpha 1} + \sum_{k=3}^4 \frac{C_{M\alpha k}}{1 + d_{M\alpha k}^2 (1/K^2)} \right) \quad (2.76)$$

On résout alors ce système d'équations en utilisant la méthode d'optimisation non linéaire par les moindres carrés de Levenberg-Marquardt.

L'approximation des fonctions  $F$  par des formulations analytiques permet certes de manipuler des expressions des forces aéroélastiques où n'apparaissent pas de produits de convolution, mais, en contrepartie, nécessitent d'ajouter des équations différentielles supplémentaires à l'équation du mouvement.

La forme temporelle des forces aéroélastiques donne a priori les efforts pour un mouvement quelconque. Il ne faut pas pour autant oublier les nombreuses hypothèses qui ont été nécessaires pour exprimer ces forces aéroélastiques:

- petite amplitude du mouvement permettant de supposer l'incidence constante,
- application du principe de superposition,
- flux incident constant.

Or, nous nous intéressons, dans ce qui suit, aux effets du vent turbulent sur les structures élancées ; l'amplitude du mouvement n'est pas forcément faible et surtout, l'incidence n'est pas constante. On supposera donc que les effets aéroélastiques, dans le cas d'un écoulement incident turbulent, sont identiques à ceux créés par l'écoulement moyen autour de l'incidence moyenne.

En outre, on pourrait essayer d'estimer l'influence de la turbulence sur les effets aéroélastiques en appliquant la même technique d'identification des coefficients  $H_i^*$ ,  $A_i^*$  sur des signaux obtenus en écoulement turbulent et en écoulement laminaire.

### 2.3 Le détachement tourbillonnaire

On a vu, au début de ce chapitre, que, dans certaines conditions, pouvait se produire un phénomène, appelé détachement tourbillonnaire, caractérisé par un lâché de tourbillons de part et d'autre du profil, alternés (i.e. en opposition de phase), à une fréquence  $n$  bien précise reliée à la vitesse  $\bar{U}$  de l'écoulement et à la hauteur du tablier par le nombre de Strouhal :  $St = \frac{f_s H}{\bar{U}}$ .

Ce phénomène se traduit par la génération d'efforts fluctuants de fréquence  $2n$  dans la direction du vent et  $n$  dans la direction orthogonale. Les premiers sont généralement négligés tandis que les seconds font l'objet de plusieurs formulations empiriques plus ou moins complexes.

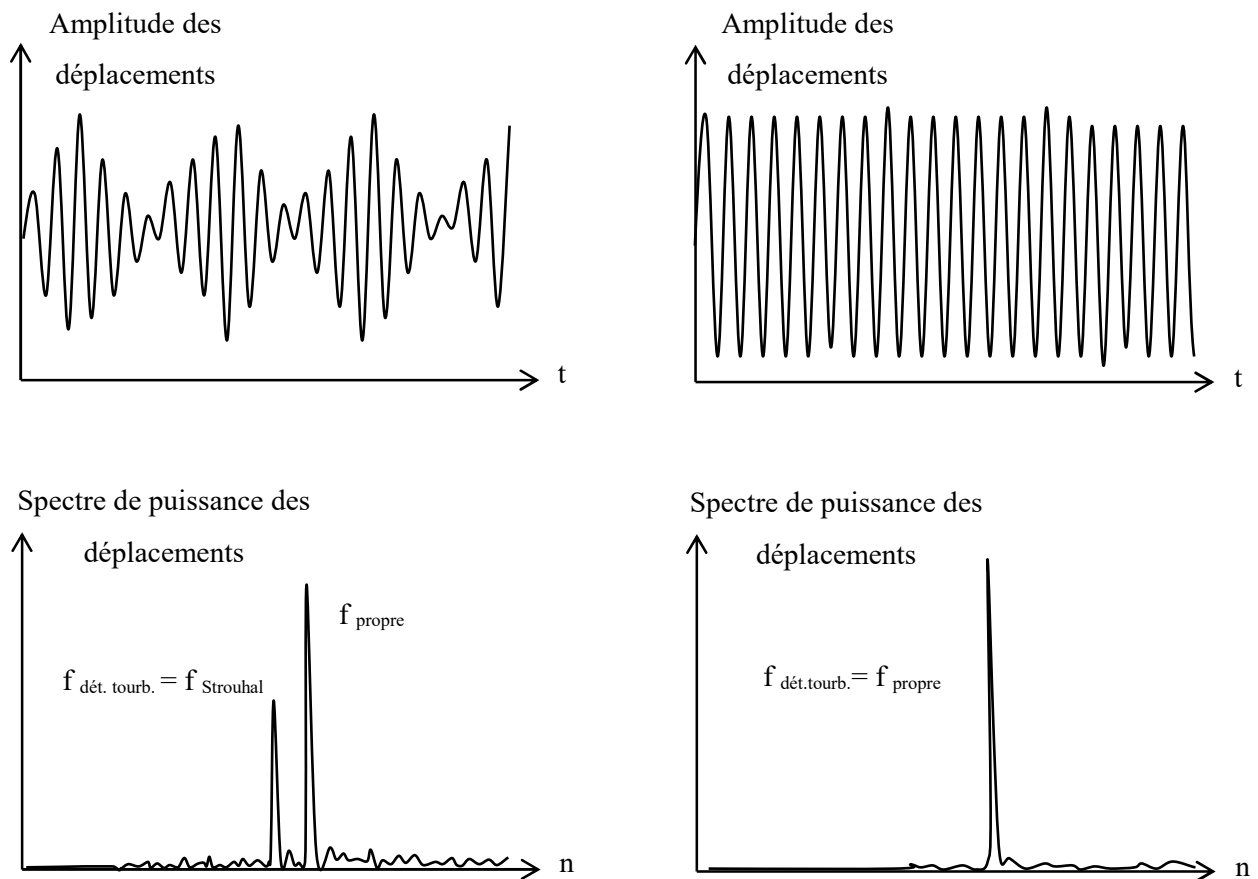


Figure 2.11 - Signaux de déplacements verticaux lorsque la fréquence de détachement tourbillonnaire est proche d'une fréquence propre structurelle : phénomène de synchronisation forcée

Dans le cas où la fréquence naturelle de détachement tourbillonnaire est suffisamment proche de la fréquence propre d'un mode transversal de la structure considérée (fig.2.11), on assiste à un phénomène de synchronisation forcée de la première sur la deuxième. Si l'écart est un peu plus important mais reste suffisamment faible on observe sur le signal des déplacements le phénomène bien connu de « battement ».

Il nous semble important de préciser que le signal des déplacements liés au détachement tourbillonnaire n'a pas, en général, un caractère divergent ; l'expérience a montré que son amplitude dépassait rarement la moitié de la hauteur du profil considéré. Il est clair que les oscillations maximales seront observées pendant le phénomène de synchronisation forcée ; c'est donc dans ces conditions sécuritaires que seront effectués les calculs de déplacements.

Différentes formulations empiriques, plus ou moins élaborées, ont été proposées afin de modéliser les efforts dus au détachement tourbillonnaire. Cependant, celles-ci concernent essentiellement des formes simples telles que les cylindres. Il n'existe pas véritablement de modèles permettant de représenter les efforts exercés par le détachement tourbillonnaire sur des formes complexes telles qu'une section de tablier de pont. Les effets du détachement tourbillonnaire ne seront donc pas pris en compte dans nos calculs.

## 2.4 Conclusion

Nous avons, tout au long de ce chapitre, introduit un certain nombre de modèles mathématiques permettant, à partir de la connaissance du vent, de représenter les forces aérodynamiques s'exerçant sur une structure souple et élancée. Les buffeting forces, liées à l'action turbulente du vent ont été modélisées à partir des coefficients stationnaires et de l'admittance aérodynamique. Les forces aéroélastiques, liées aux oscillations de l'ouvrage, ont été modélisées par les coefficients instationnaires de Scanlan dans le domaine spectral et par des fonctions indicielles dans le domaine temporel.

L'intérêt majeur des modèles présentés est de réduire la notion de forces aérodynamiques à un nombre assez limité de coefficients et, surtout, des relations simples avec le champ de vitesse du vent. Cela permet de s'affranchir de la résolution des équations de la mécanique des fluides lors de l'estimation de la réponse dynamique de l'ouvrage ; on réduit ainsi considérablement les temps de calcul.

## *Chapitre 3*

# *Mesure des forces aérodynamiques*

Dans le chapitre précédent, nous avons défini et modélisé les forces aérodynamiques susceptibles de solliciter une structure élancée. Pour cela, nous avons introduit une série de coefficients adimensionnels permettant de caractériser les propriétés aérodynamiques d'une section soumise à un écoulement aéraulique bidimensionnel. Ceux-ci permettent donc, à partir de la connaissance du vent, des dimensions de la structure et de l'historique de son comportement dynamique, de calculer les forces aérodynamiques s'exerçant sur chaque section élémentaire de la structure.

Ces coefficients peuvent être estimés expérimentalement et/ou numériquement. Les méthodes expérimentales sont basées sur la fabrication de maquettes rigides, de sections continues, appelées maquettes sectionnelles, placées en soufflerie. Les méthodes numériques sont basées sur la résolution 2D ou 3D des équations de Navier-Stokes dans une veine virtuelle contenant le profil à étudier. Ces méthodes, en plein essor, ne sont pas encore réellement opérationnelles pour des applications au domaine des ponts. Aussi nous consacrons ce chapitre exclusivement aux différentes techniques expérimentales permettant de caractériser aérodynamiquement les tabliers de pont.

Ces techniques sont appliquées à deux types de profils : un profil "théorique" rectangulaire de ratio largeur/épaisseur égal à huit et un profil "classique" trapézoïdal proche de celui du viaduc de Millau. Les résultats présentés seront utilisés par la suite lors de la procédure de validation de notre code de calcul.

### 3.1 Mesure des coefficients stationnaires

Les coefficients stationnaires sont généralement mesurés sur des maquettes sectionnelles fixées à deux balances dynamométriques. Chaque balance est équipée de 16 jauges d'extensométrie, permettant de mesurer 8 forces horizontales et 8 forces verticales. On obtient les coefficients de trainée, portance et moment globaux par combinaison linéaire des trente-deux voies et adimensionalisation.

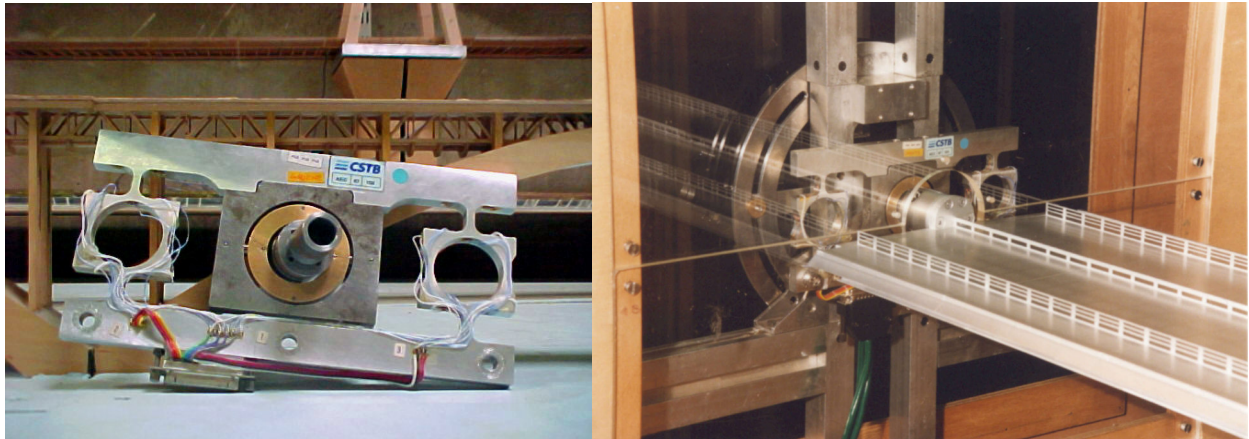


Figure 3.1 – Balance dynamométrique

Une deuxième technique consiste à équiper la maquette sectionnelle de prises de pression pariétales reliées à des capteurs de pression et de calculer les efforts globaux par intégration de ces pressions sur la surface de la maquette. En plus d'obtenir des informations sur l'allure des champs de pression (voir figure 3.2), on peut accéder à des valeurs de coefficients « instantanés », la bande passante des capteurs de pression étant plus large que celle des balances. Cette méthode présente toutefois les inconvénients d'être plus lourde à mettre en place et moins précise en ce qui concerne la mesure de coefficients moyens.

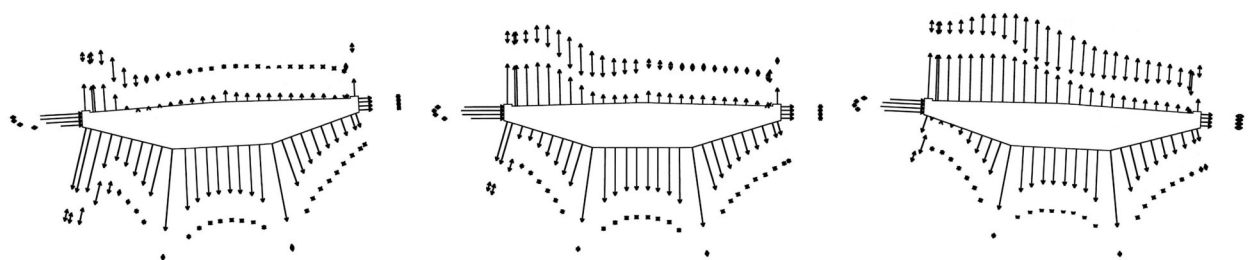


Figure 3.2 – Champs de pressions moyens et fluctuants autour du tablier trapézoïdal pour les incidences  $-3^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $+3^\circ$



Figure 3.3 – Capteurs de pression à l'intérieur d'une maquette sectionnelle

Dans tous les cas les maquettes sont fixées sur le "banc dynamique" de la soufflerie atmosphérique du CSTB (figure 3.12). Ce banc est composé de deux parois verticales épaisses de 15 cm appelées "flasques". Le profilage en amont permet de minimiser l'épaisseur de la couche limite sur les parois internes et garantit ainsi un écoulement bidimensionnel. C'est à l'intérieur de ces flasques que sont placés les balances et autres dispositifs métrologiques.

Nous avons mis en place un montage permettant de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes. Nos deux tabliers, équipés de 64 prises de pressions, ont été fixés à des balances dynamométriques et soumis à un flux laminaire. Les mesures ont donc été effectuées simultanément avec les balances et les capteurs de pression.

Les 2\*32 signaux analogiques de pression sont multiplexés à une cadence de 20 kHz et envoyés en rafales à une carte d'acquisition 16 bits à une cadence de 200 Hz . Les signaux analogiques issus du tube de Pitot et des capteurs de déplacements, filtrés électroniquement à 100 Hz, sont également multiplexés et placés à la suite des mesures de pressions avant d'être transmis à la carte d'acquisition, puis à une station de travail. Les données numériques sont « synchronisées » pendant la phase de traitement par des interpolations de type « Stirling ».



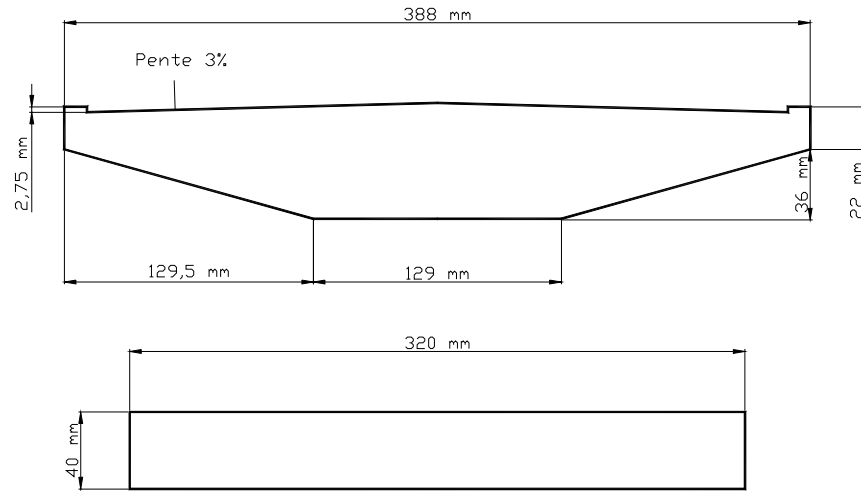


Figure 3.4 – Profils des maquettes sectionnelles des tabliers trapézoïdal et rectangulaire de ratio 8

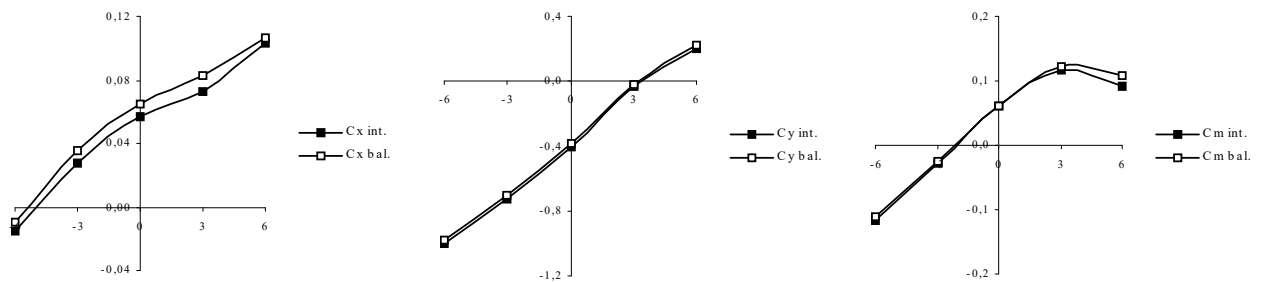


Figure 3.5 – Coefficients aérodynamiques du tablier trapézoïdal mesurés par pressions et balances

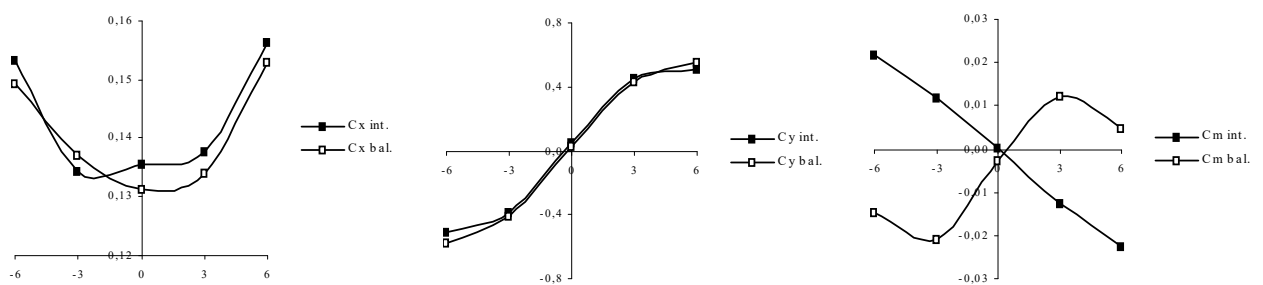


Figure 3.6 – Coefficients aérodynamiques du tablier rectangulaire mesurés par pressions et balances

La comparaison des résultats obtenus en terme de coefficients stationnaires s'avère globalement satisfaisante. Seul le coefficient de moment du tablier rectangulaire de ratio 8 posait un petit problème : ses valeurs, très faibles en valeur absolue, sont de signes opposés selon que la mesure est globale ou médiane.

Les deux mesures semblant « justes », nous avons décidé d'approfondir la question en étudiant l'évolution des courbes de moment de tabliers rectangulaires autour du ratio 8. Nous espérons que les tendances observées en faisant évoluer le ratio dans un sens ou dans l'autre nous permettraient de mieux qualifier les propriétés aérodynamiques naturelles du ratio 8 et identifier les effets 3D.

Pour cela, nous avons placé sur les balances du banc dynamique une âme rectangulaire en contreplaqué longue de 1,6 m sur laquelle nous avons pu fixer d'autres planches d'épaisseurs variables. Pour chaque ratio, nous avons alors mesuré les coefficients de moment pour 3 vitesses de vent et 7 incidences.

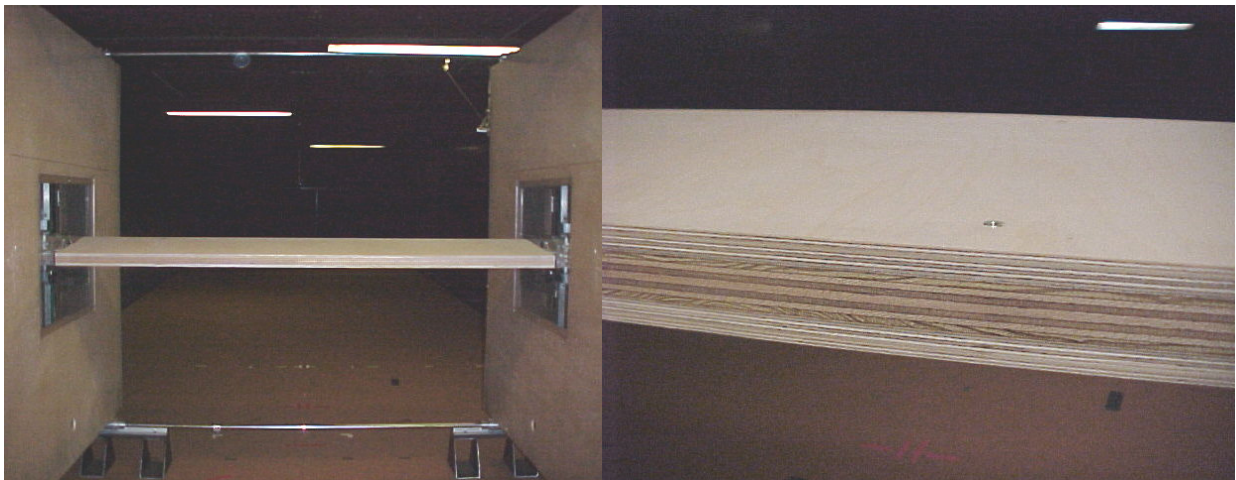


Figure 3.7 – Etude paramétrique de tabliers rectangulaires

L'analyse des résultats, présentés figure 3.8, nous a amené à formuler l'explication suivante :

Deux différentes structures d'écoulement se développent le long d'une maquette sectionnelle rectangulaire de ratio 8 : une première au centre, générant les coefficients de moment vus par les capteurs de pression, une seconde, à chaque extrémité, générant des coefficients de moment proches de ceux mesurés par les balances sur les ratios supérieurs. La première structure serait d'autant plus favorisée que le profil est épais tandis que la seconde se développerait davantage quand le profil est élancé.

Dans le cas de la maquette sectionnelle de 1 m de long, les structures de bords sont prépondérantes et constituent l'essentiel des forces mesurées par les balances. Dans le cas de la maquette sectionnelle de 1,6 m, la structure centrale se développe plus largement et prend le pas sur les structures latérales, ce qui se traduit par une courbe intermédiaire entre les deux courbes du tablier de 1 m de long.

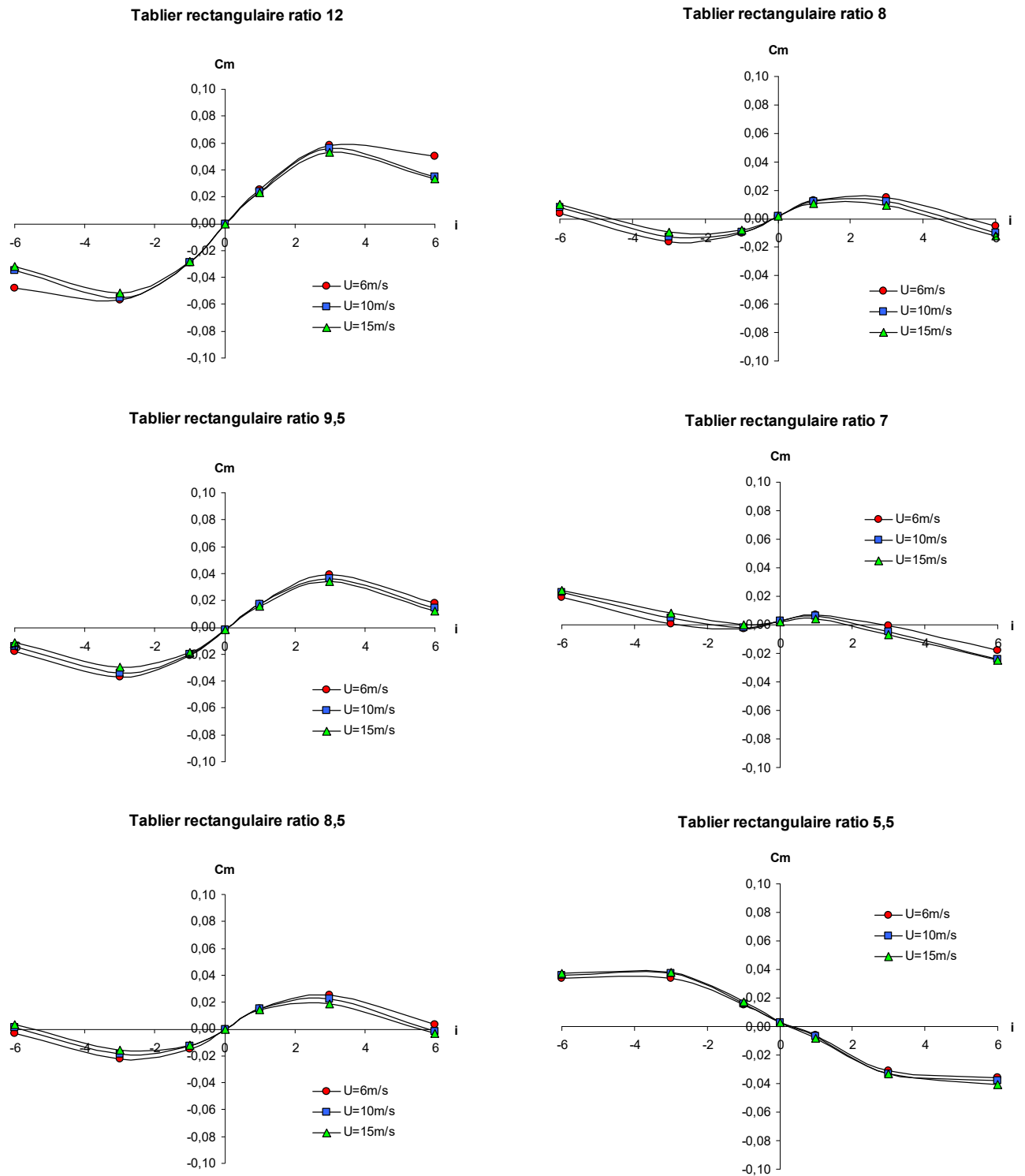


Figure 3.8 – Evolution des coefficients de moment en fonction de l'incidence du vent pour des tabliers rectangulaires de ratios variables

Les hypothèses formulées nous amènent à conclure que les résultats obtenus à partir des prises de pressions sur le tablier de 1 m de long seraient bien représentatives de phénomènes « centraux » ; il ne s'agirait donc effectivement pas d'erreurs de mesures. Par contre, la question qui se pose encore est la suivante : les structures latérales proviennent-elles d'effets de bords ou se développent-elles naturellement autour d'une structure centrale ? En d'autres termes, peut-on considérer la structure centrale comme représentative de ce qui se passerait sur un tablier infiniment long ? Ou bien peut-il se développer, par exemple, un phénomène « périodique » le long du tablier avec alternance de structures « centrales » et « latérales » ?

Pour répondre à cette question, on pourrait réaliser une étude paramétrique dont la variable serait la longueur du tablier ; des couronnes de prises de pressions seraient alors disposées à intervalles réguliers. Cependant, la faible valeur des coefficients de moment nous autorise à ne pas approfondir davantage un problème dont les répercussions sur le calcul dynamique seront vraisemblablement faibles.

Par contre, on peut se demander si les phénomènes aéroélastiques seront ou non sujets à des problèmes similaires. Faute de moyens pour répondre à cette interrogation, nous avons préféré, dans le cas du tablier rectangulaire de ratio 8, ne pas utiliser les coefficients aéroélastiques issus des oscillations forcées dans nos calculs de réponse dynamique mais plutôt ceux provenant de la méthode des oscillations libres, garantissant un meilleur « moyennage » des phénomènes tout au long du tablier.

### **3.2 Mesure de l'admittance aérodynamique**

Comme nous l'avons dit dans le chapitre 2, les coefficients aérodynamiques stationnaires perdent de leur pertinence à mesure que l'on s'approche des sollicitations de hautes fréquences. La fonction d'admittance aérodynamique (f.a.a.) permet de palier à ce problème. Dans l'absolu, il existe autant de fonctions d'admittance aérodynamique que de couples effort / composante turbulente. Expérimentalement, il est difficile de dissocier les effets des différentes composantes du vent. On se contente donc de mesurer trois f.a.a. associées aux forces de portance, traînée et moment.

Ces trois f.a.a. peuvent être appliquées directement au calcul spectral. Leur introduction dans la méthode temporelle nécessite, en principe, l'emploi de produits de convolution. Ces derniers entraînant des surcoûts importants en temps de calcul, on préférera raisonner de manière fréquentielle dans la base modale.

L'estimation de la f.a.a. consiste à diviser un spectre de forces "réaliste" c'est-à-dire directement mesurés sur maquettes sectionnelles à l'aide de balances ou de prises de pressions par un spectre de forces "quasi-

statique" i.e. calculé d'après les spectres des deux composantes turbulentes du vent. Ces derniers sont calculés à partir d'acquisitions effectuées à l'aide d'une sonde à fils chauds deux composantes.

Les résultats obtenus pour nos deux tabliers sont présentés figures 3.9 et 3.10. Deux f.a.a. ont été estimées, correspondant aux forces de portance et de moment. Elles sont comparées à deux formulations issues de la littérature.

Dans le cas du tablier rectangulaire, la f.a.a. associée au moment est particulièrement atypique puisque qu'elle semble environ trois fois « supérieure à la normale ». Cela n'est en fait pas si surprenant compte tenu des problèmes rencontrés dans la détermination des coefficients de moment : ce que l'on appelle ici f.a.a. est vraisemblablement le produit entre la véritable f.a.a. et un facteur correctif intégrant l'erreur d'estimation des coefficients de moment.

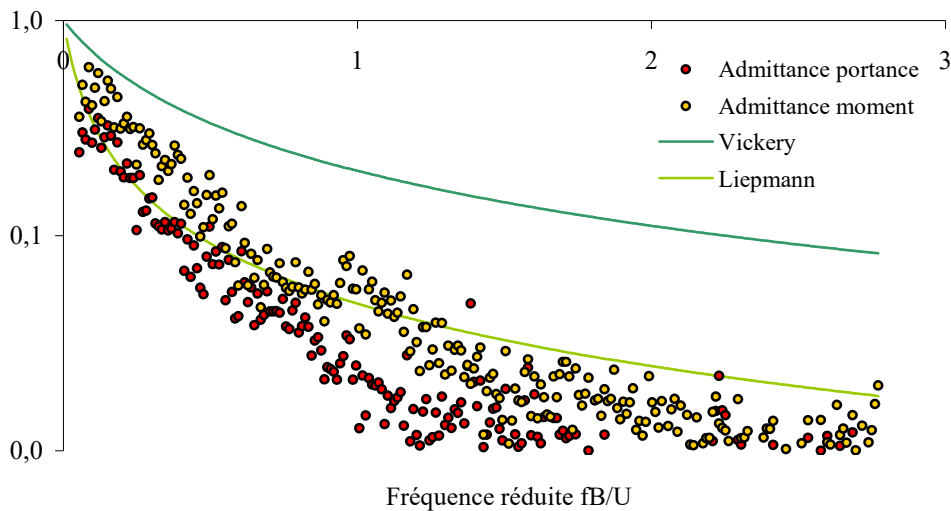


Figure 3.9 – Admittances aérodynamiques du tablier trapézoïdal

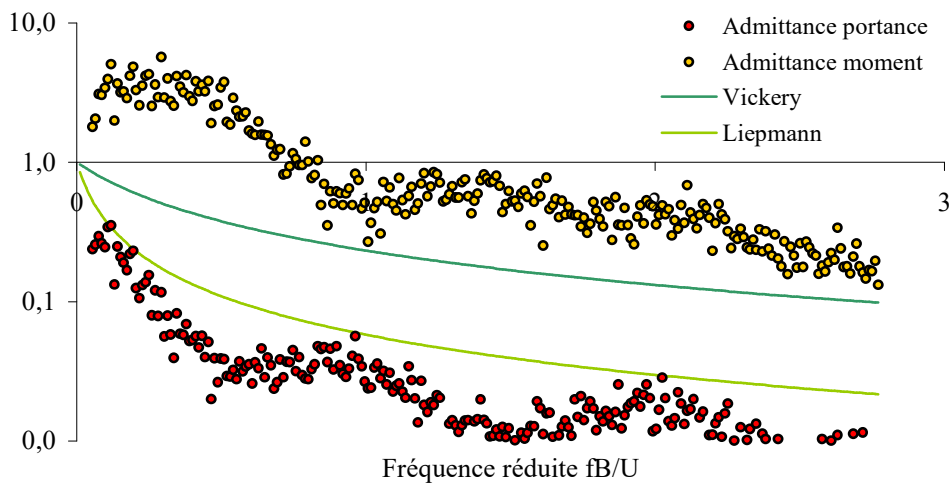


Figure 3.10 – Admittances aérodynamiques du tablier rectangulaire

### 3.3 Mesure des coefficients aéroélastiques par la technique des oscillations libres

#### 3.3.1 Bases théoriques

Les phénomènes d'instabilité induits par le vent sur un pont à haubans concernent généralement les modes verticaux et les modes de torsion du tablier de l'ouvrage. On a vu que ces phénomènes pouvaient être caractérisés par les coefficients aéroélastiques. La méthode expérimentale classique pour mesurer ces coefficients, est la méthode des oscillations libres développée par R.H. Scanlan (1974). Elle consiste à réaliser un tronçon représentatif d'une partie du tablier, que l'on suspend en soufflerie par un ensemble de ressorts afin de représenter un mode de torsion et un mode de flexion verticale.

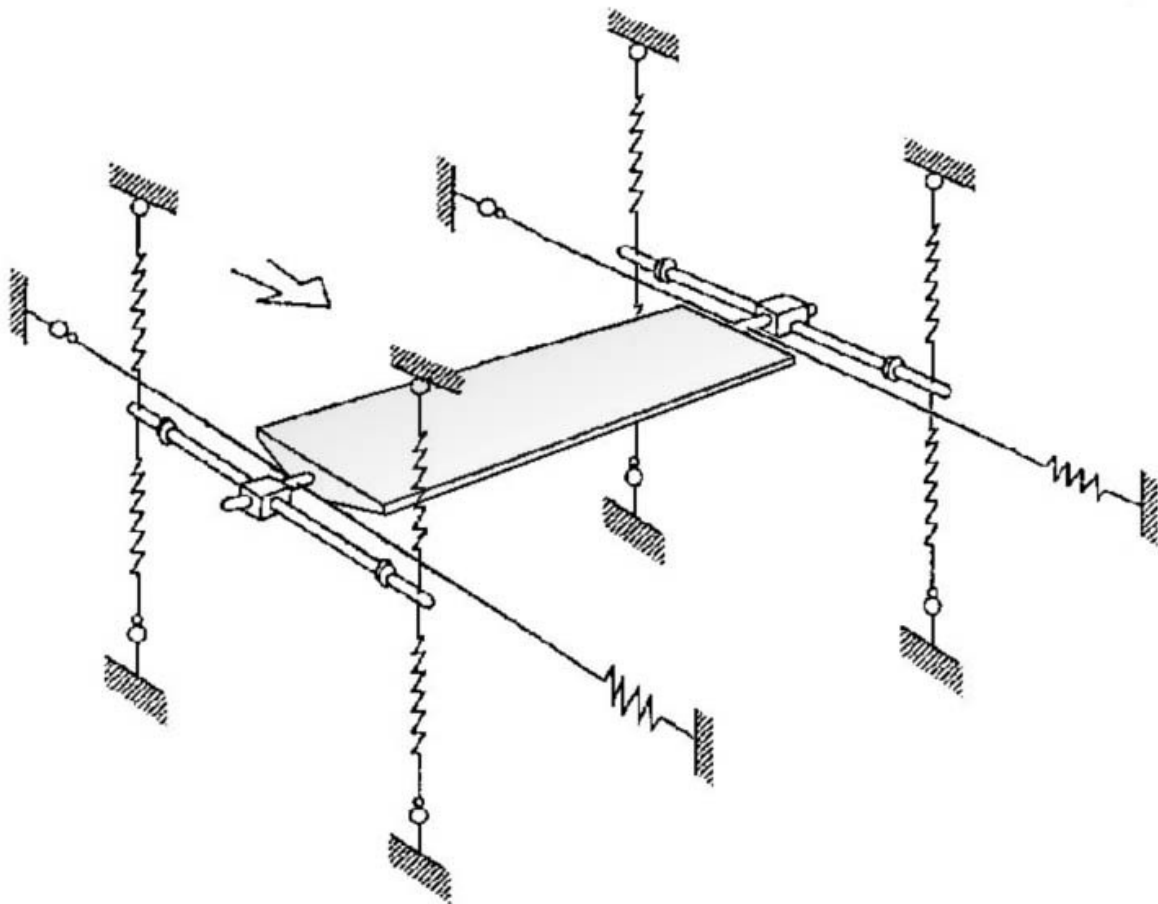


Figure 3.11 – Schéma de principe de la méthode des oscillations libres

Dans la mesure où ces essais sur tronçons ont pour but d'exprimer uniquement les caractéristiques aérodynamiques du tablier sous la forme de coefficients sans dimensions, le modèle testé n'a plus besoin d'être dynamiquement semblable au pont réel.

Toutefois, il est préférable que les caractéristiques dynamiques de la maquette restent proches de celles imposées par la similitude. Cela permet la mesure en soufflerie d'une vitesse critique de flottement directement transposable en vitesse réelle via les relations de similitude. En outre, les éventuels problèmes de flottement couplé flexion/torsion sont bien mis en évidence.

Dans le cas où l'on ne considère que deux degrés de liberté (flexion  $h(t)$  et torsion  $\alpha(t)$ ), les équations du mouvement du tronçon d'un tablier de pont peuvent s'écrire avec les définitions de Scanlan :

$$m(\ddot{h} + 2\xi_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h) = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[ KH_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^* \alpha + \frac{K^2}{B} H_4^* \right] + L_h(t) \quad (3.1)$$

$$j_0(\ddot{\alpha} + 2\xi_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha) = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[ KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + \frac{K^2}{B} A_4^* \right] + M_\alpha(t) \quad (3.2)$$

$m, j_0$  : masse et moment d'inertie par unité de longueur du modèle

$\xi_h, \xi_\alpha$  : amortissements structurels rapportés au critique pour chaque degré de liberté  $h$  et  $\alpha$

$\omega_h, \omega_\alpha$  : pulsations naturelles du mouvement à la vitesse  $U = 0$

$K = \frac{\omega B}{U}$  : fréquence réduite

Les forces  $L_h(t), M_\alpha(t)$  sont induites par un écoulement turbulent. Celles-ci sont donc supposées nulles lors d'essais en écoulement uniforme. Les équations prennent alors la forme :

$$\ddot{h} + 2\omega_h \xi_h \dot{h} + \omega_h^2 h = H_1 \dot{h} + H_4 h + H_2 \dot{\alpha} + H_3 \alpha \quad (3.3)$$

$$\ddot{\alpha} + 2\omega_\alpha \xi_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha = A_1 \dot{h} + A_4 h + A_2 \dot{\alpha} + A_3 \alpha \quad (3.4)$$

Signalons que, dans un souci de simplification des écritures, la définition des termes  $H_i$  et  $A_i$  ( $i=1,2,3$ ) est différente de celle employée dans le chapitre 2. Ici, on écrit :

$$H_1 = \frac{\rho B^2 \omega H_1^*}{2m}; H_4 = \frac{\rho B^2 \omega^2 H_4^*}{2m}; H_2 = \frac{\rho B^3 \omega H_2^*}{2m}; H_3 = \frac{\rho B^3 \omega^2 H_3^*}{2m} \quad (3.5)$$

$$A_1 = \frac{\rho B^3 \omega A_1^*}{2j}; A_4 = \frac{\rho B^3 \omega^2 A_4^*}{2j}; A_2 = \frac{\rho B^4 \omega A_2^*}{2j}; A_3 = \frac{\rho B^4 \omega^2 A_3^*}{2j} \quad (3.6)$$

Les coefficients aéroélastiques sont supposés indépendants de la nature du mouvement ; on peut donc imposer successivement un mouvement de flexion verticale et un mouvement de torsion et ainsi obtenir deux équations découplées :

$$\ddot{h} + 2\omega_h \xi_h \dot{h} + \omega_h^2 h = H_1 \dot{h} + H_4 h \quad (3.7)$$

$$\ddot{\alpha} + 2\omega_\alpha \xi_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha = A_2 \dot{\alpha} + A_3 \alpha \quad (3.8)$$

Lorsque le tablier est en oscillations libres, l'équation du mouvement peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$h = h_0 e^{-\xi_1 \omega_1 t} \sin \left[ \left( \omega_1 \sqrt{1 - \xi_1^2} \right) t + \varphi_1 \right] \quad (3.9)$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\xi_2 \omega_2 t} \sin \left[ \left( \omega_2 \sqrt{1 - \xi_2^2} \right) t + \varphi_2 \right] \quad (3.10)$$

$\xi_{1,2}$  représente l'amortissement total du système "rapporté au critique" (amortissement structural + amortissement aérodynamique) et  $\omega_{1,2}$  la pulsation du mouvement. Les pulsations et amortissements du système sont mesurés directement à partir des signaux temporels, période par période (fig.3.12) : les pulsations par identification des passages à zéro, les amortissements par la formule classique :

$$\xi = (1 / \omega T) \ln (X_{p \max} / X_{p+1 \max}) \quad (3.11)$$

où  $T$ ,  $X_{p \max}$ ,  $X_{p+1 \max}$ , représentent la pseudo-période et deux extremums successifs du signal.

D'autres méthodes plus sophistiquées comme la R.D.D. (Random Decrement Technique), dans le domaine temporel, ou le Maximum de Vraisemblance, dans le domaine spectral, peuvent également être utilisées mais présentent l'inconvénient de ne pas fournir d'informations sur l'évolution des deux variables au cours du temps. En outre, elles sont plus appropriées en vent turbulent.

Dans le cas où  $\xi_i > 0$ , i.e. l'amortissement total est positif, les signaux de déplacements du tablier ont l'allure présentée figure 3.12. Expérimentalement, on constate que l'amortissement  $\xi_i$  varie en fonction de l'amplitude des oscillations. Ceci est essentiellement dû au fait que l'amortissement structural, de nature visqueuse pour les mouvements de grande amplitude, voit sa composante solide augmenter à mesure que la taille des oscillations diminue.



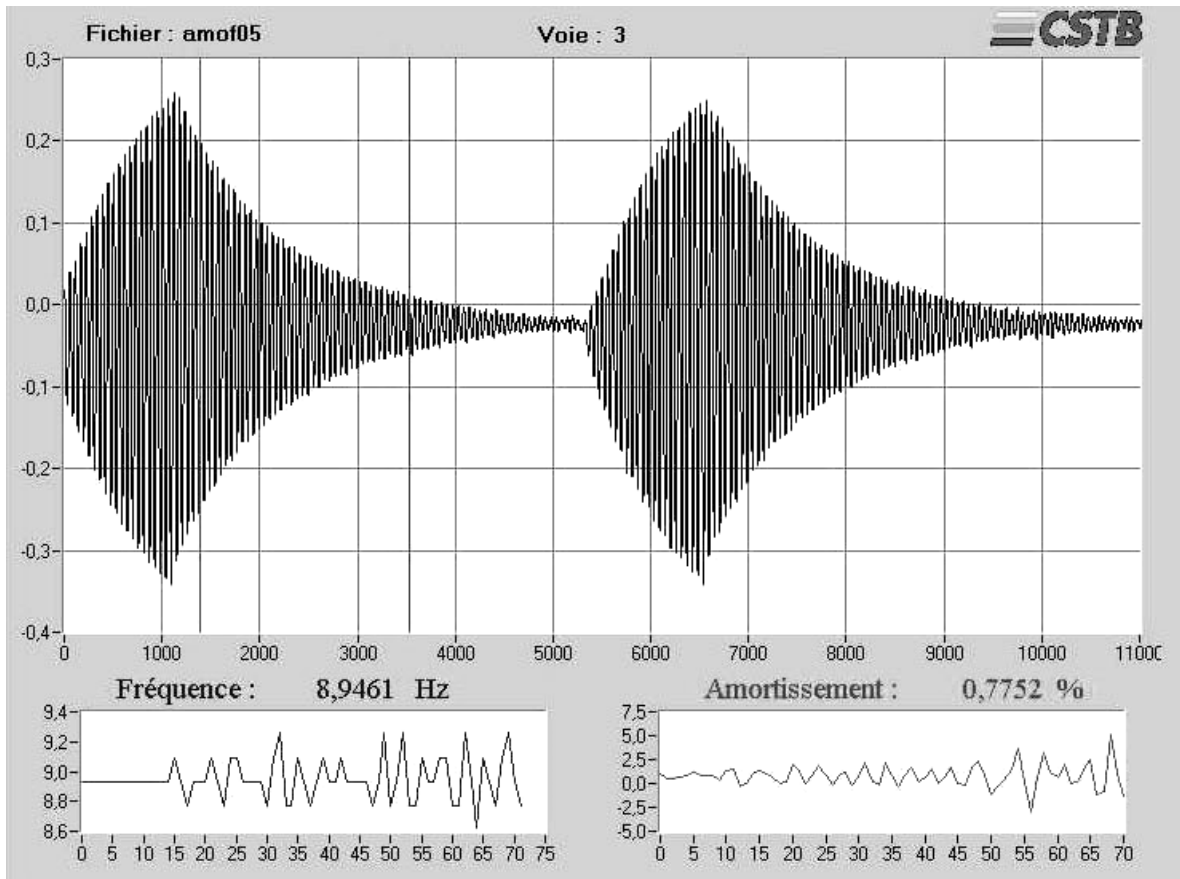


Figure 3.12 – Deux excitations et lâchers : signal de déplacement ( $\xi > 0$ )

Supposons le mouvement de torsion bloqué ; la lecture de l'enregistrement du mouvement de flexion permet, connaissant l'amortissement structural  $\xi_h$  et la pulsation naturelle du système  $\omega_h$ , la détermination de  $\xi_1$  et de  $\omega_1$ , d'où celle de  $H_1$  et  $H_4$  par l'intermédiaire des équations :

$$H_1 = 2(\xi_h \omega_h - \omega_1 \xi_1) \quad (3.12)$$

$$H_4 = \omega_h^2 - \omega_1^2 - (\omega_1 \xi_1)^2 \quad (3.13)$$

De même,

$$A_2 = 2(\xi_\alpha \omega_\alpha - \omega_2 \xi_2) \quad (3.14)$$

$$A_3 = \omega_\alpha^2 - \omega_2^2 - (\omega_2 \xi_2)^2 \quad (3.15)$$

Les coefficients  $H_1$  et  $A_2$  traduisent l'apport de l'amortissement aérodynamique à l'amortissement total, respectivement en flexion et en torsion, tandis que les coefficients  $H_4$  et  $A_3$  traduisent le glissement en fréquence induit par l'écoulement.

Lorsque  $H_1$ ,  $H_4$ ,  $A_2$  et  $A_3$  sont connus, le tablier est excité simultanément en flexion et en torsion à des fréquences d'oscillations aussi proches que possible ; le système d'équations issu de (3.4), peut alors être utilisé pour trouver les coefficients de couplage  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $A_1$  et  $A_4$ .

Lorsque l'amortissement aérodynamique est négatif (coefficients positifs,  $H_1$  pour la flexion,  $A_2$  pour la torsion), celui-ci est soustrait à l'amortissement structurel. S'il devient supérieur en valeur absolue à l'amortissement structurel, il y a alors flottement à un degré de liberté. Dans la très grande majorité des cas, c'est ce flottement à un degré de liberté, notamment en torsion, qui a tendance à apparaître sur les ponts. Le flottement couplé flexion/torsion ne peut apparaître que si les amortissements totaux en flexion et en torsion restent positifs et les fréquences de vibrations en flexion et en torsion sont proches ; en général, seuls les tabliers de pont très profilés, sont susceptibles de flottement couplé.

### 3.3.2 Application pratique

Nous présentons les résultats obtenus pour les deux maquettes sectionnelles rectangulaire et trapézoïdale. Ces maquettes sont positionnées entre les flasques du banc dynamique.

Dans le cas des essais en flexion verticale, un câble de retenue permet de maintenir la maquette horizontalement ; pour les essais en torsion, le mouvement est guidé par des pointaux. L'amortissement structurel de base est ainsi minimal. Des dispositifs amortisseurs supplémentaires permettent de régler l'amortissement structurel rapporté au critique des mouvements de flexion et torsion entre 0,1% et 1% .

Un jeu minimal de l'ordre de 3 mm, sépare l'extrémité de la maquette de la paroi du banc dynamique. Une excitation initiale suivie d'un lâcher sont réalisés par un exciteur électromagnétique (figure 3.13) piloté depuis le caisson de mesures. Cette excitation est réalisée à la fréquence de vibration en flexion verticale avec une traction au centre du tablier, puis à la fréquence de torsion avec une traction latérale. Les fréquences d'oscillations peuvent être modulées par intervention sur la raideur des ressorts, leur écartement et/ou l'ajout de masses sur les bras situés à l'intérieur des flasques.

Les déplacements de la maquette sont mesurés par des capteurs optiques à triangulation placés dans les flasques du banc dynamique. Les signaux analogiques sont discrétisés à une cadence de 500 Hz et filtrés électroniquement à 200 Hz. La vitesse du vent est mesurée par un anémomètre à hélices et un tube de Pitot situé en amont du banc dynamique. Un recalage a préalablement été effectué entre la pression dynamique amont mesurée et la pression dynamique au niveau du bord d'attaque de tablier. Chaque acquisition comporte 8096 points, ce qui correspond à une durée de 16 secondes.

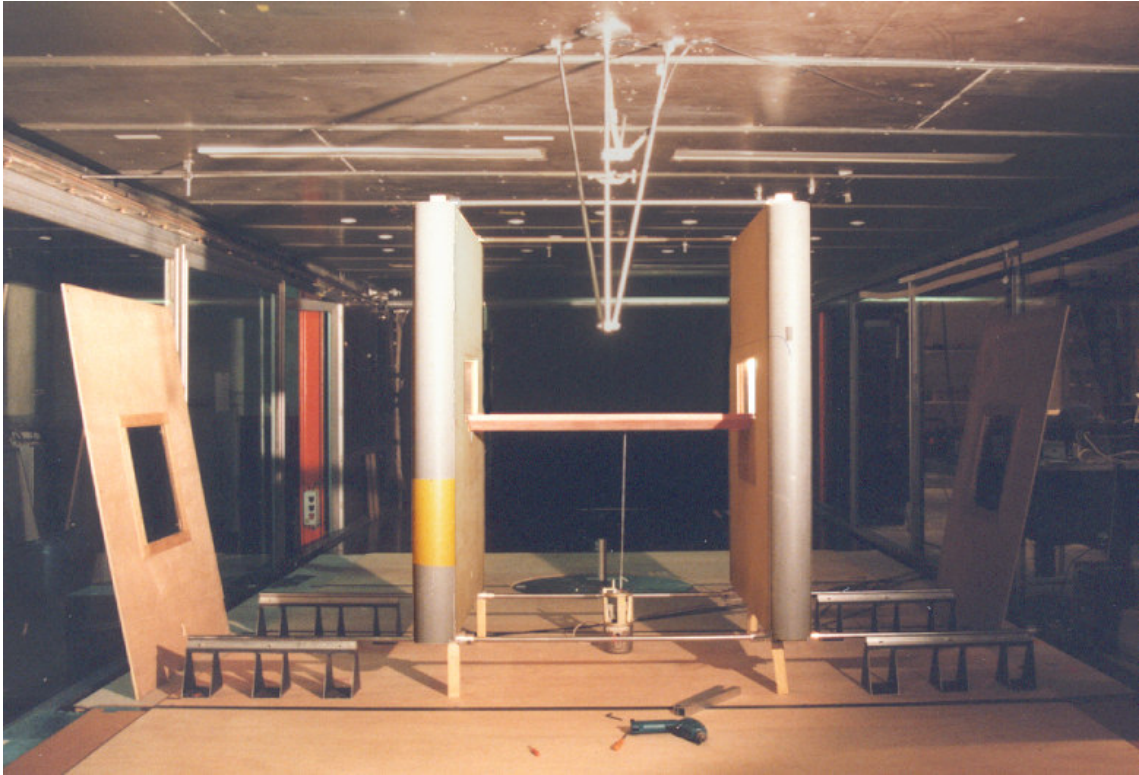


Figure 3.13 – Banc dynamique et exciteur électromagnétique

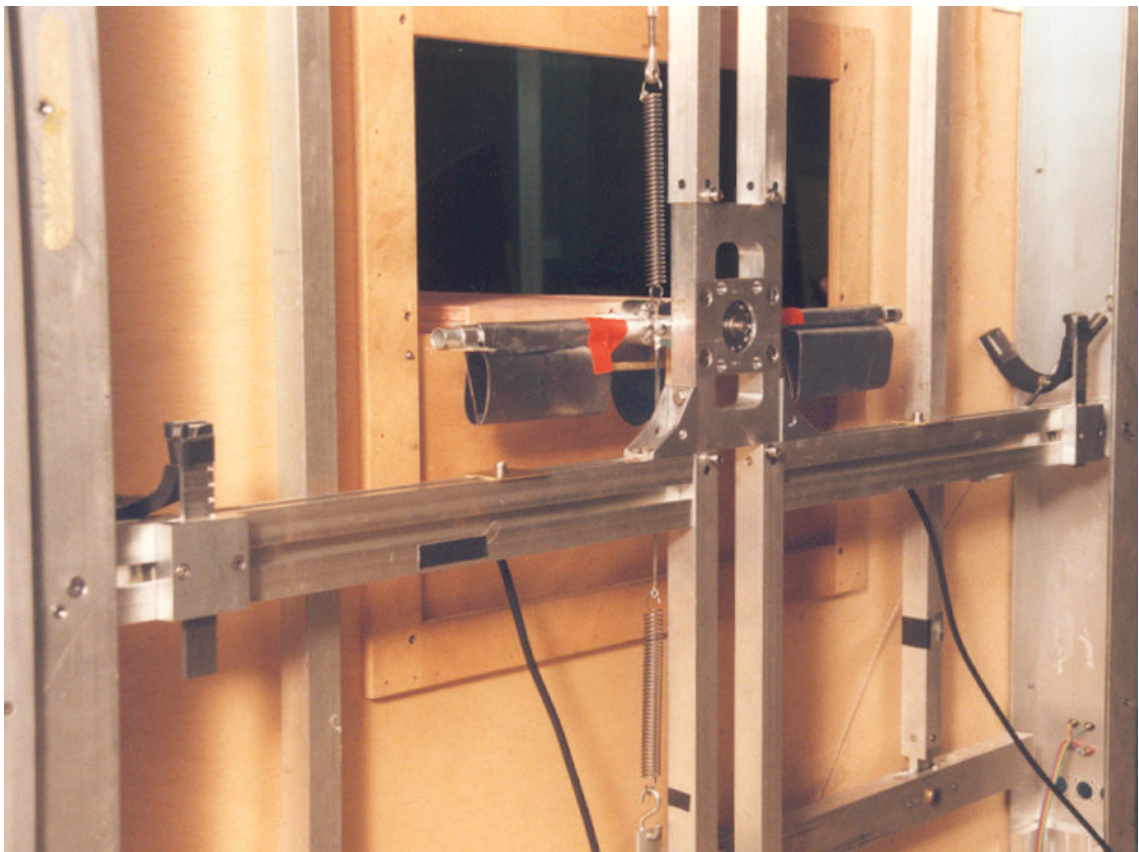


Figure 3.14 – Vue de l'intérieur d'un flasque du banc dynamique

Les courbes d'évolution des coefficients aéroélastiques en fonction de la vitesse réduite ( $U/fB$ ) peuvent théoriquement être obtenues en fixant une fréquence de vibration et en ne faisant varier que la vitesse du vent. Nous avons préféré faire varier ces deux paramètres afin d'estimer l'impact éventuel du nombre de Reynolds sur la valeur des coefficients aéroélastiques. Nous avons donc tracé, pour chaque fréquence de vibration, les courbes d'évolution des coefficients de Scanlan  $H_i^*$ ,  $A_i^*$  en fonction de la vitesse réduite. Précisons que cette vitesse réduite est définie à partir de la fréquence d'oscillation du système avec effets aéroélastiques ; cela est en effet souvent source d'ambiguïtés.

L'analyse des résultats obtenus ne permet pas réellement de conclure sur l'importance de l'influence du nombre de Reynolds. En effet, on n'observe pas d'évolution claire des courbes en fonction de la fréquence propre du système. On observe par contre une forte dispersion des points. Celle-ci est essentiellement imputable aux incertitudes de mesures, aux imperfections du système mécanique (variations des raideurs et amortissements mécaniques en fonction de l'amplitude) et, dans le cas des montages en flexion, à un comportement dynamique assez chaotique des maquettes pour les grandes vitesses de vent.

Ce dernier point s'explique par le fait qu'à partir d'une certaine vitesse réduite (environ cinq pour le profil trapézoïdal) l'écoulement de sillage autour du tablier (sa signature aérodynamique) devient fortement turbulent. Cette turbulence excite non seulement le mode de flexion qui nous intéresse mais également un mode de torsion autour de l'axe  $x$ , de fréquence légèrement supérieure. Les figures 3.15-18 montrent les signaux temporels (et transformés par ondelettes) obtenus pour le tablier rectangulaire en flexion et en torsion pour deux vitesses de vent .

Une autre source d'erreurs, intrinsèque à la méthode des oscillations libres, est l'évolution naturelle de l'incidence moyenne du tablier en fonction de la vitesse moyenne du vent. Ainsi, chaque série de points présentée figure 3.19-26 correspond non seulement à une vitesse moyenne différente mais également à une incidence de vent différente. En configuration de flexion, ce phénomène peut être minimisé en écartant au maximum les lignes de ressort et donc en augmentant la raideur en torsion. En outre, les tabliers symétriques sont a priori peu sujets à ce genre de problème. Par contre, dans le cas de tabliers asymétriques en torsion libre, le problème est réel.

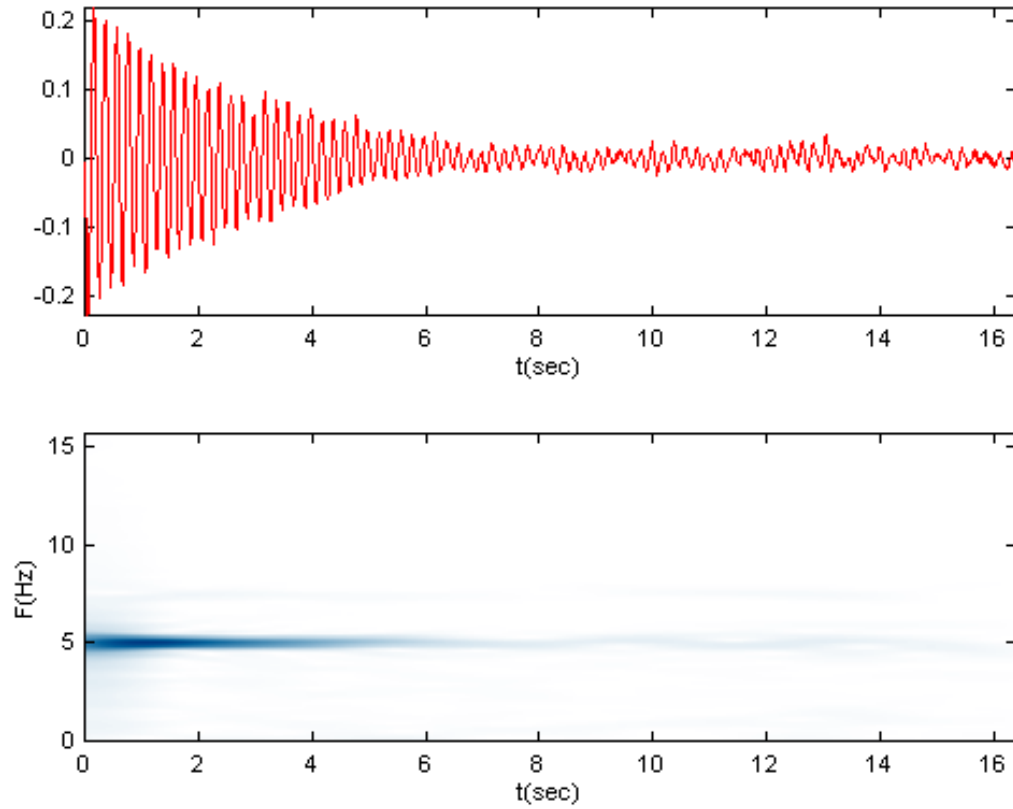


Figure 3.15 – Oscillations verticales du tablier rectangulaire de ratio 8 ( $U=5\text{m/s}$ )

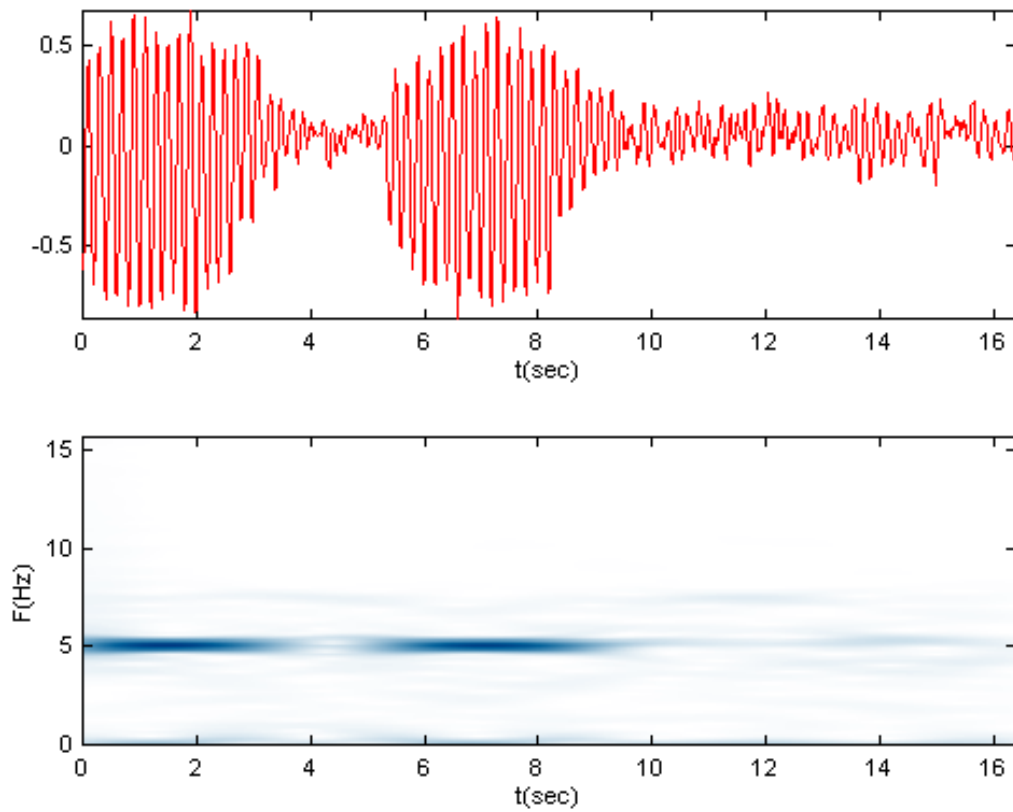


Figure 3.16– Oscillations verticales du tablier rectangulaire de ratio 8 ( $U=15\text{m/s}$ )

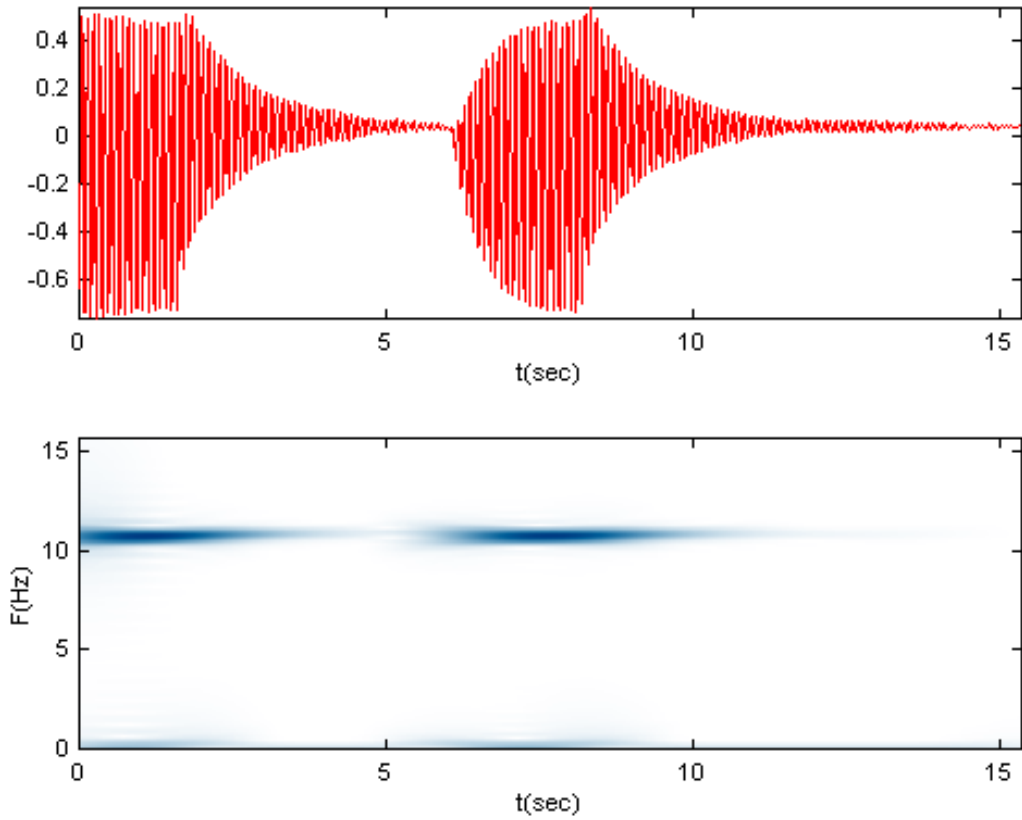


Figure 3.17 – Oscillations en torsion du tablier rectangulaire de ratio 8 ( $U=5\text{m/s}$ )

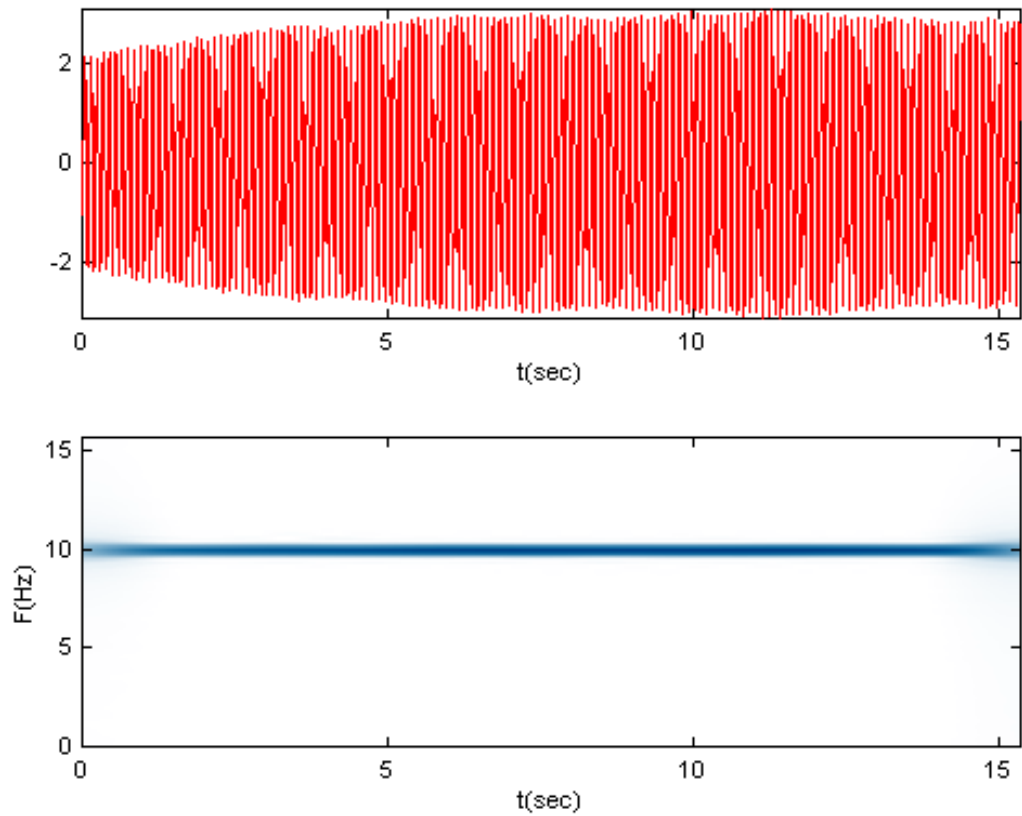


Figure 3.18 – Oscillations en torsion du tablier rectangulaire de ratio 8 ( $U=15\text{m/s}$ )

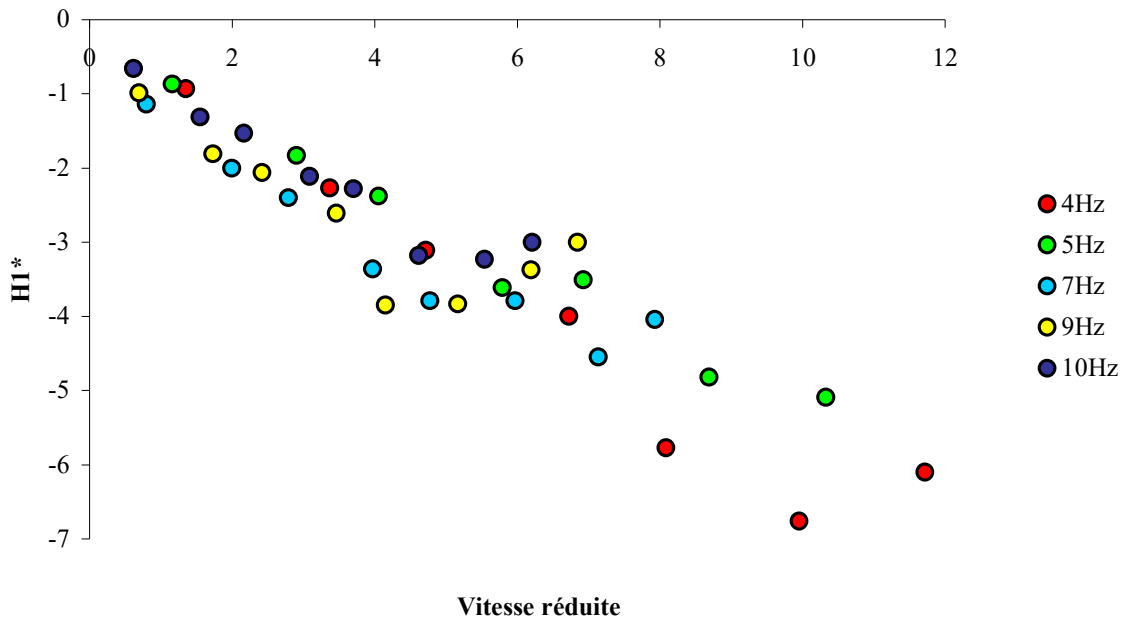


Figure 3.19 – Coefficient  $H_1$  du tablier trapézoïdal en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs fréquences d'oscillations

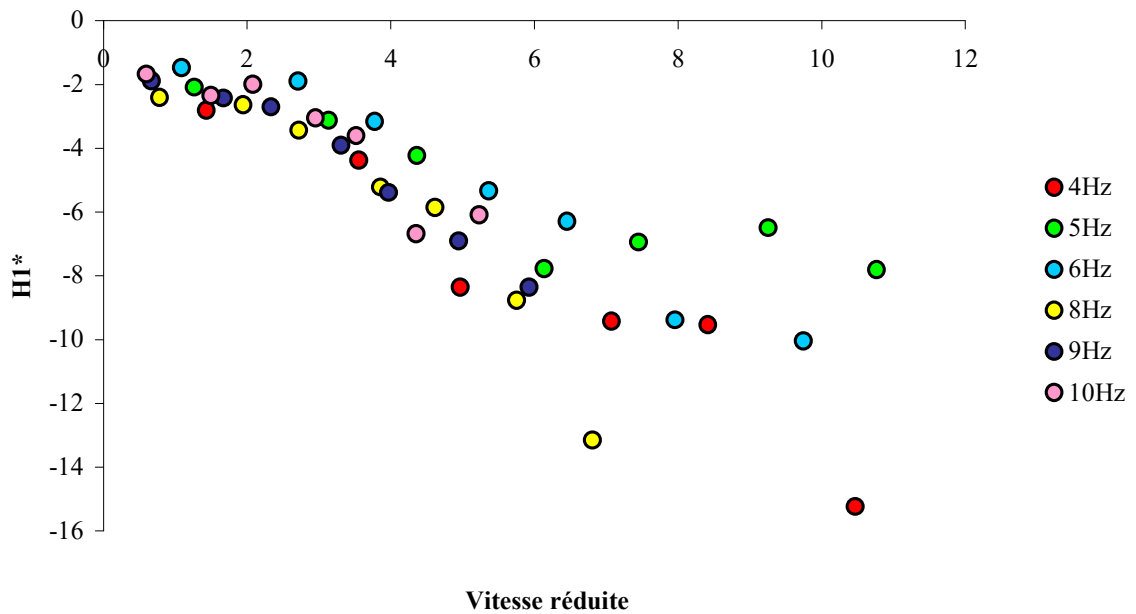


Figure 3.20 – Coefficient  $H_1$  du tablier rectangulaire en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs fréquences d'oscillations

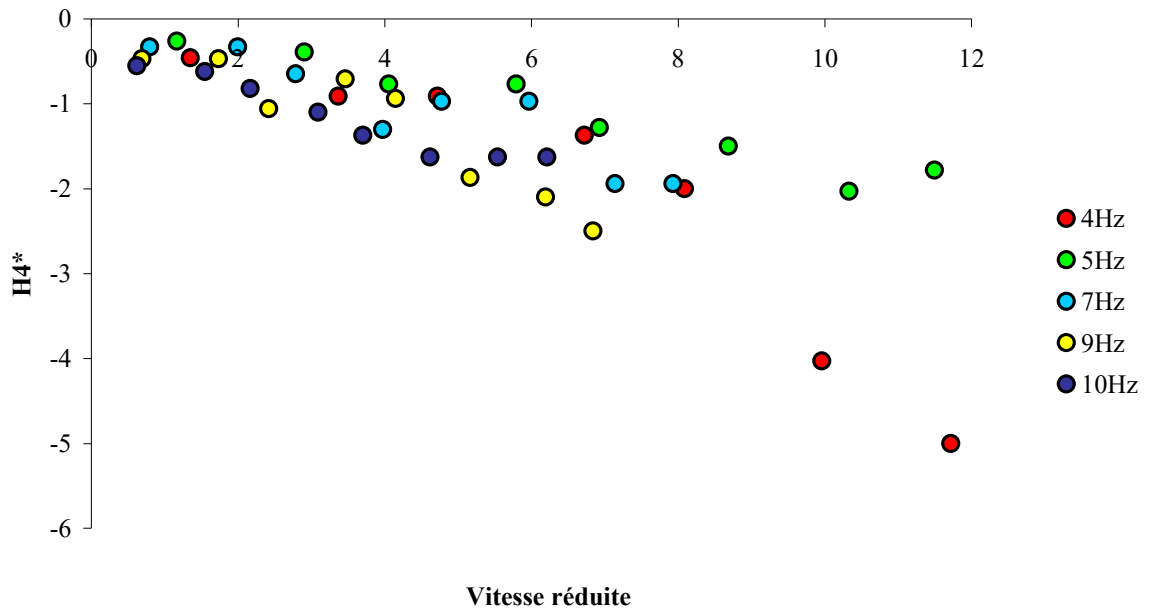


Figure 3.21 – Coefficient  $H_4$  du tablier trapézoïdal en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs fréquences d'oscillations

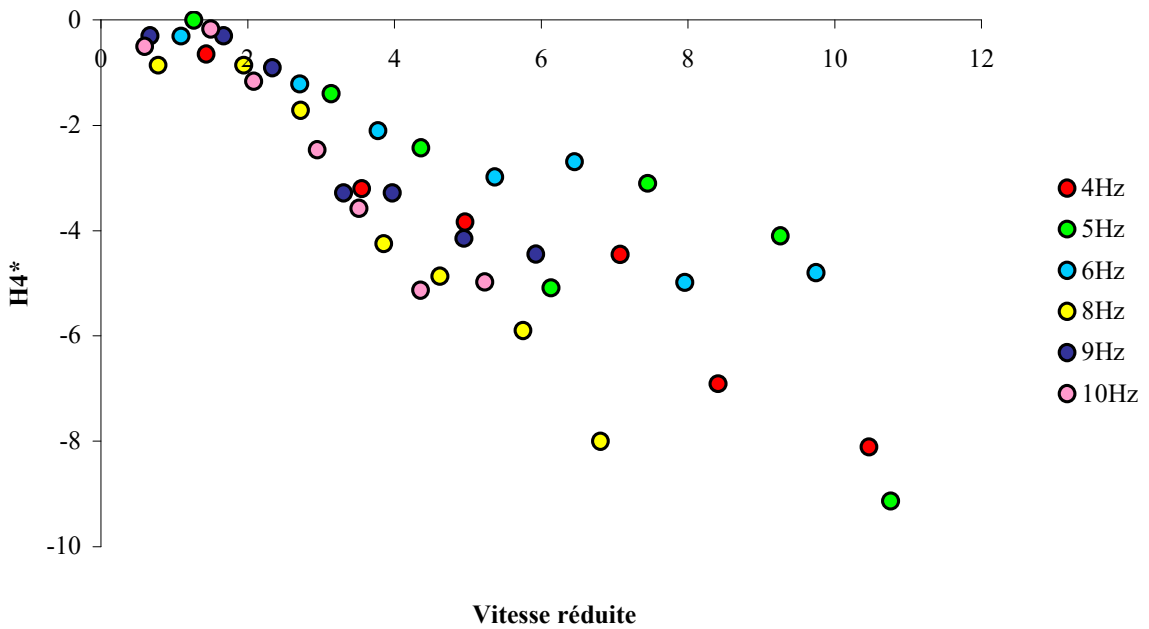


Figure 3.22 – Coefficient  $H_4$  du tablier rectangulaire en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs fréquences d'oscillations



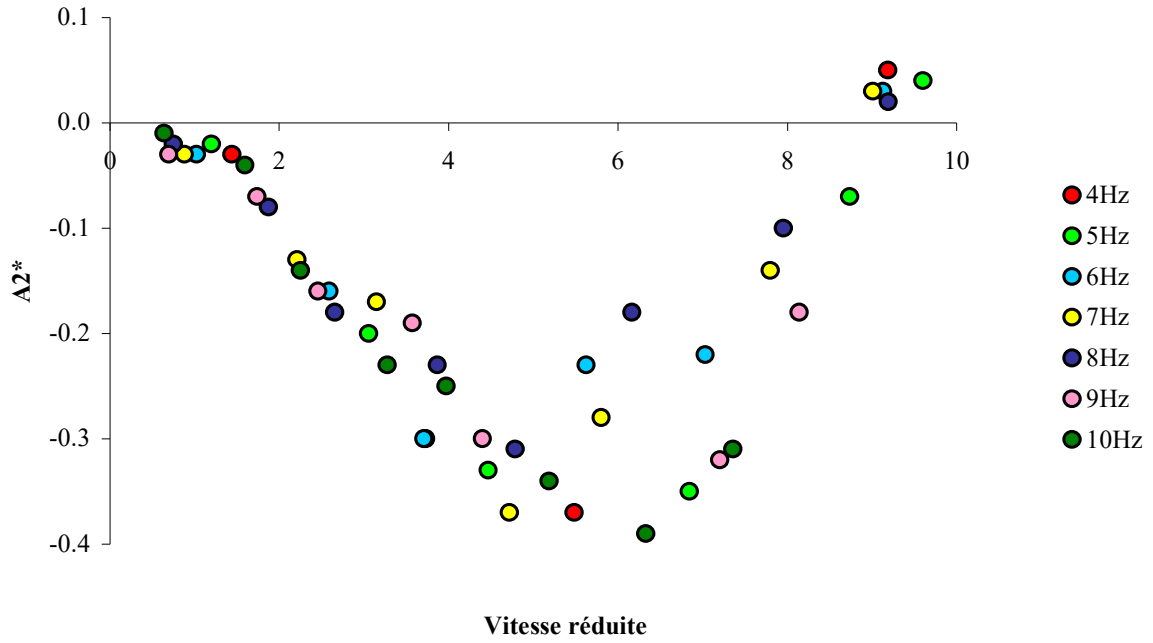


Figure 3.23 – Coefficient  $A_2$  du tablier trapézoïdal en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs fréquences d'oscillations

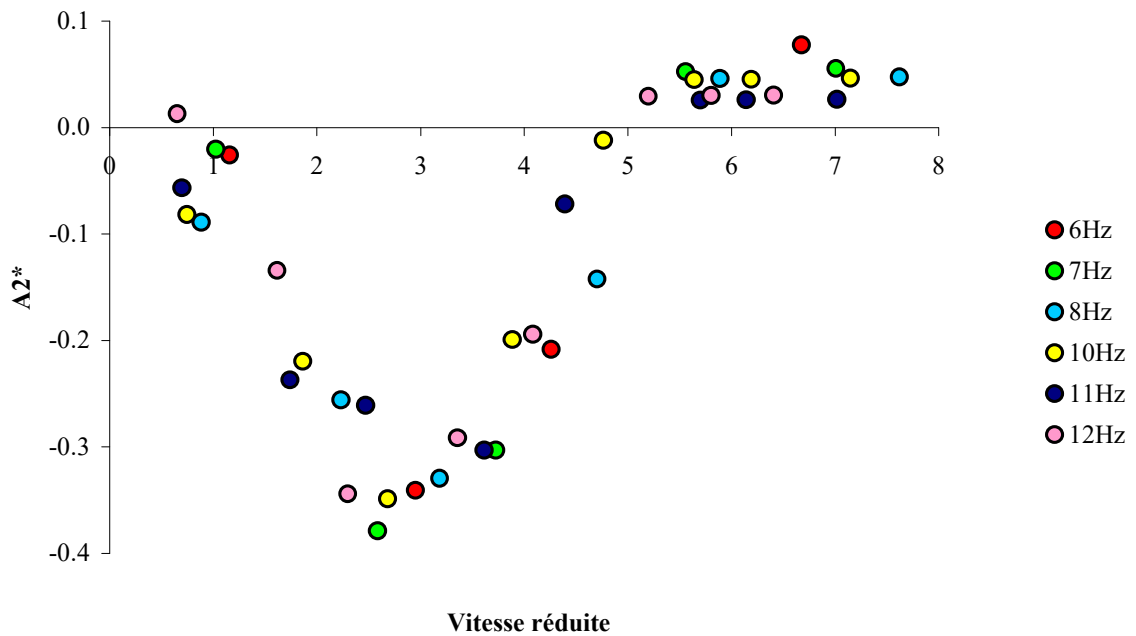


Figure 3.24 – Coefficient  $A_2$  du tablier rectangulaire en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs fréquences d'oscillations

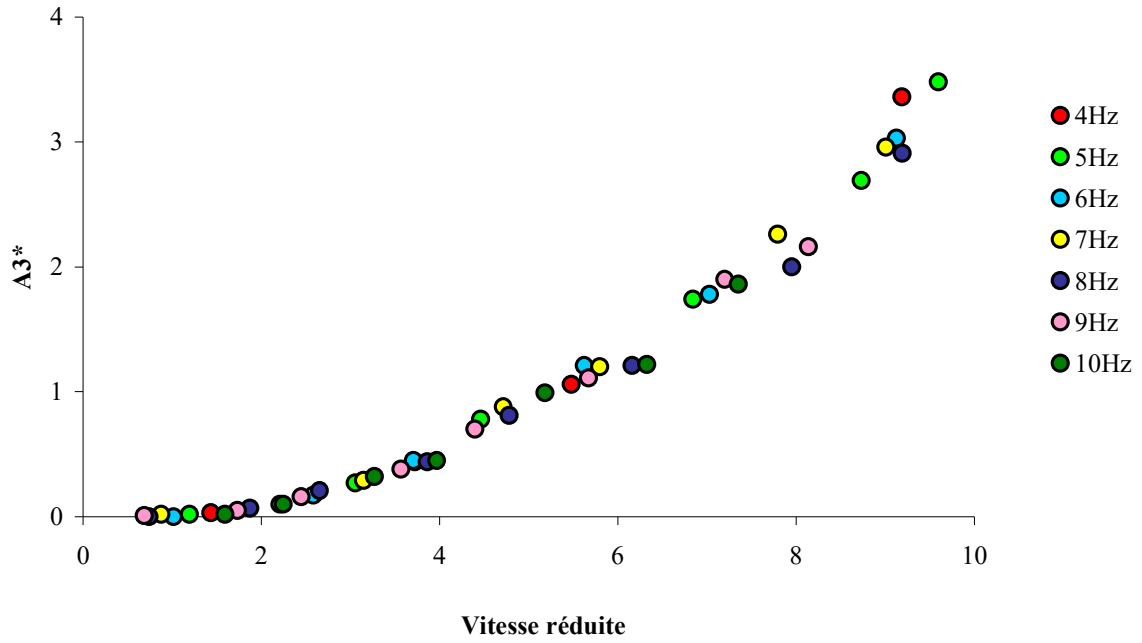


Figure 3.25 – Coefficient  $A_3$  du tablier trapézoïdal en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs fréquences d'oscillations

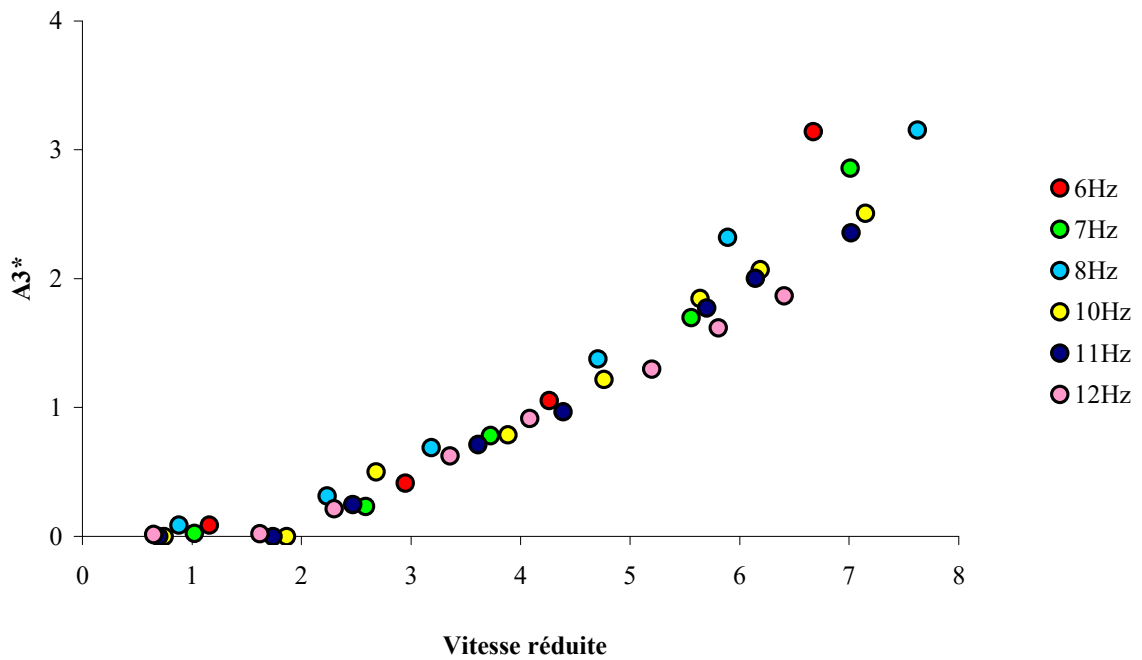


Figure 3.26 – Coefficient  $A_3$  du tablier rectangulaire en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs fréquences d'oscillations

### 3.4 Méthode des oscillations forcées

Contrairement à la méthode des oscillations libres, les forces aéroélastiques sont directement mesurées par des capteurs de pression et non déduites des équations de la dynamique. Cela permet de s'affranchir des caractéristiques mécaniques du système, qui occasionnaient des incertitudes supplémentaires. Un traitement conjoint des signaux de forces et de déplacements de la maquette sectionnelle permet de calculer les coefficients aéroélastiques des équations de Scanlan.

#### 3.4.1 Instrumentation de la maquette

Les maquettes utilisées sont celles des oscillations libres. Elle sont cependant équipées d'une couronne de 64 prises de pression reliées par des tubes de vinyle à deux boîtiers composés chacun de 32 membranes de silicone piézoélectriques. Chaque tube est équipé d'un « restricteur » chargé de filtrer les phénomènes de résonance pneumatique. Pour minimiser les effets d'accélération, les boîtiers sont fixés « couchés » à l'intérieur des maquettes sectionnelles. On verra que, malgré cette précaution, les capteurs sont assez sensibles à l'accélération.

La maquette sectionnelle est excitée sinusoïdalement, via un système articulé, par un moteur électrique à courant continu placé dans un des flasques du banc dynamique (voir figure 3.28). Trois types de mouvements peuvent être générés: flexion verticale, torsion, et les deux couplés à la même fréquence.

Différentes amplitudes d'oscillations peuvent être imposées dépendant de la position du bras sur le disque en sortie du moteur ; on peut ainsi en étudier l'influence sur l'allure du champ de pression. De plus, on peut faire varier la fréquence d'oscillation par simple réglage de l'alimentation du moteur, et ainsi balayer une large gamme de fréquences réduites pour une vitesse de vent donnée. Les déplacements sont mesurés par deux capteurs à triangulation lasers placés à l'intérieur des flasques du banc dynamique.

Les 2\*32 signaux analogiques de pression sont multiplexés à une cadence de 20 kHz et envoyés en rafales à une carte d'acquisition 16 bits à une cadence de 200 Hz. Les signaux analogiques issus du tube de Pitot et des capteurs de déplacements, filtrés électroniquement à 100 Hz, sont également multiplexés et placés à la suite des mesures de pressions avant d'être transmis à la carte d'acquisition, puis à une station de travail. Les données numériques sont « synchronisées » pendant la phase de traitement par des interpolations de type « Stirling ».

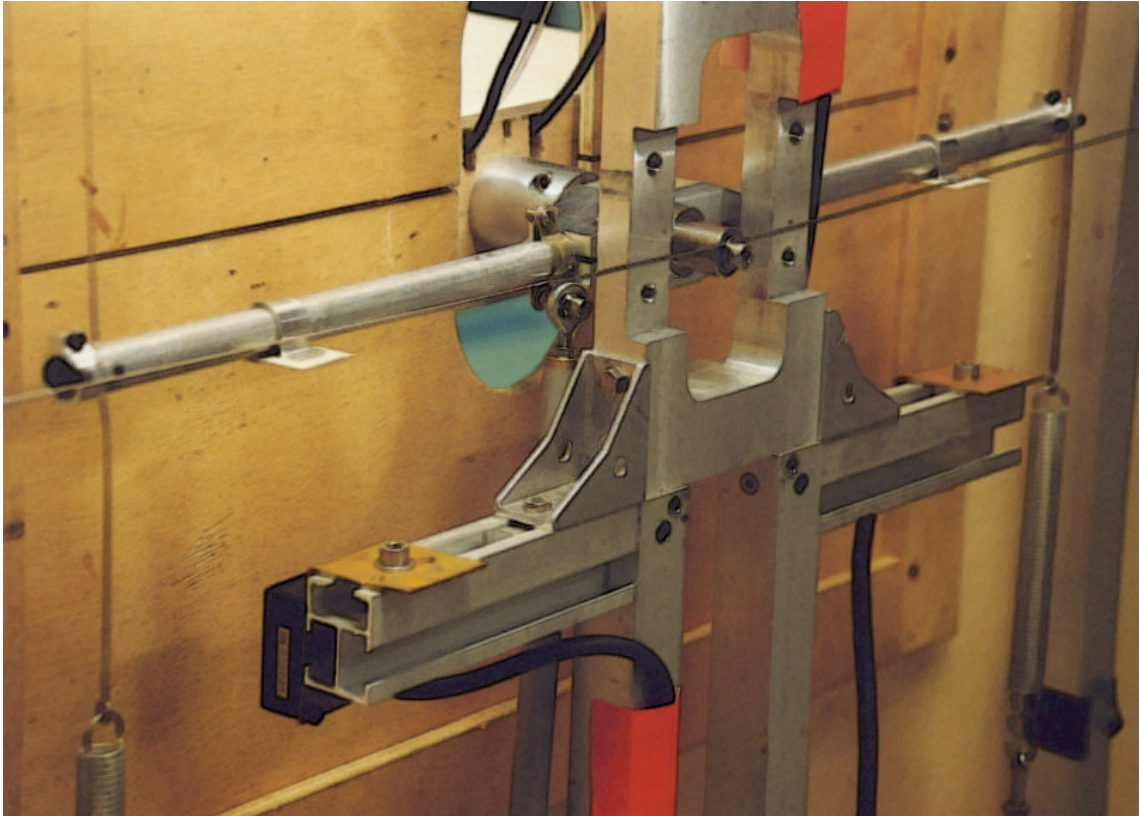


Figure 3.27– Partie haute du système articulé : bras de transmission, capteurs de déplacements...

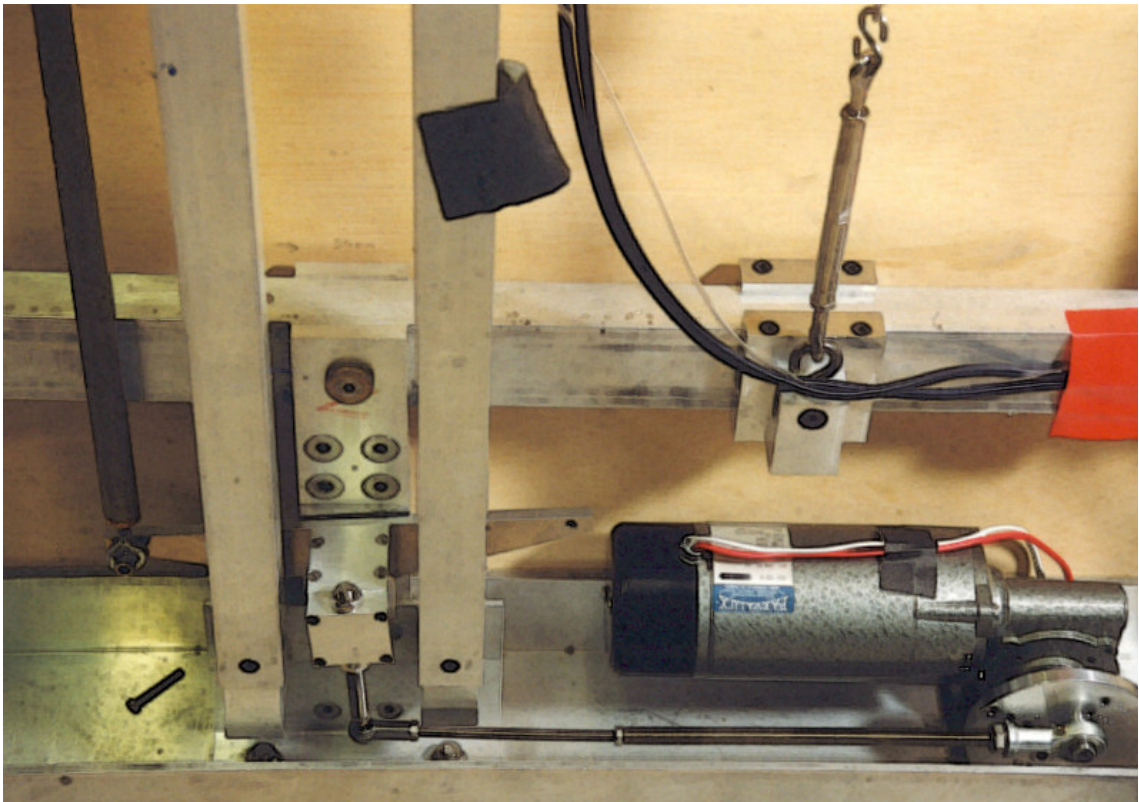


Figure 3.28 – Partie basse du système articulé : moteur électrique, excentrique...

### 3.4.2 Cas des oscillations pures

Contrairement à la méthode des oscillations libres, la méthode des oscillations forcées permet de mesurer tous les coefficients aéroélastiques, y compris les termes couplés, à partir d'oscillations pures. Si l'on prend le cas d'un mouvement de flexion verticale, l'équation (3.1) peut être réécrite sous la forme:

$$F \sin(\omega t + \varphi) = C_{H14} H_1^* H \cos(\omega t) + C_{H14} H_4^* H \sin(\omega t) \quad (3.16)$$

où  $F$  et  $H$  représentent respectivement les amplitudes des forces de portance et des déplacements verticaux et  $C_{H14} = \frac{1}{2} \rho B^2 \omega^2$ . On en déduit:

$$H_1^* = (F / C_{H14} H) \sin \varphi \quad (3.17)$$

$$H_4^* = (F / C_{H14} H) \cos \varphi \quad (3.18)$$

De la même façon, considérant l'équation (3.2), et prenant  $C_{A14} = \frac{1}{2} \rho B^3 \omega^2$ , on peut écrire:

$$A_1^* = (F / C_{A14} H) \sin \varphi \quad (3.19)$$

$$A_4^* = (F / C_{A14} H) \cos \varphi \quad (3.20)$$

Les quatre autres coefficients sont calculés de la même manière à partir des oscillations en torsion.  $H$  est remplacé par  $A$ , amplitude des oscillations en torsion. On introduit alors les paramètres  $C_{H23} = \frac{1}{2} \rho B^3 \omega^2$  et  $C_{A23} = \frac{1}{2} \rho B^4 \omega^2$ , respectivement pour les coefficients couplés et non couplés.

Les équations (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20) montrent que les calculs des coefficients aéroélastiques peuvent se résumer à des calculs de rapports d'amplitudes, de fréquences d'oscillations, et de déphasages.

On doit cependant penser à retirer des signaux de forces les composantes dues à l'accélération. Pour cela, on effectue des mesures sans vent pour les différentes amplitudes et fréquences d'oscillations. On déduit de l'analyse comparative des signaux de déplacements et de "forces", une fonction de transfert. En principe, cette fonction de transfert est un simple scalaire de la forme  $C \cdot \omega$  puisque les signaux de déplacements et d'accélération sont en phase. Par la suite, on retranchera simplement au signal de forces le signal de déplacement multiplié par le scalaire en question. La figure 3.28 montre des exemples de signaux de déplacements, accélération et forces de portance + accélérations pour une excitation à 5 Hz et un vent à 12 m/s.

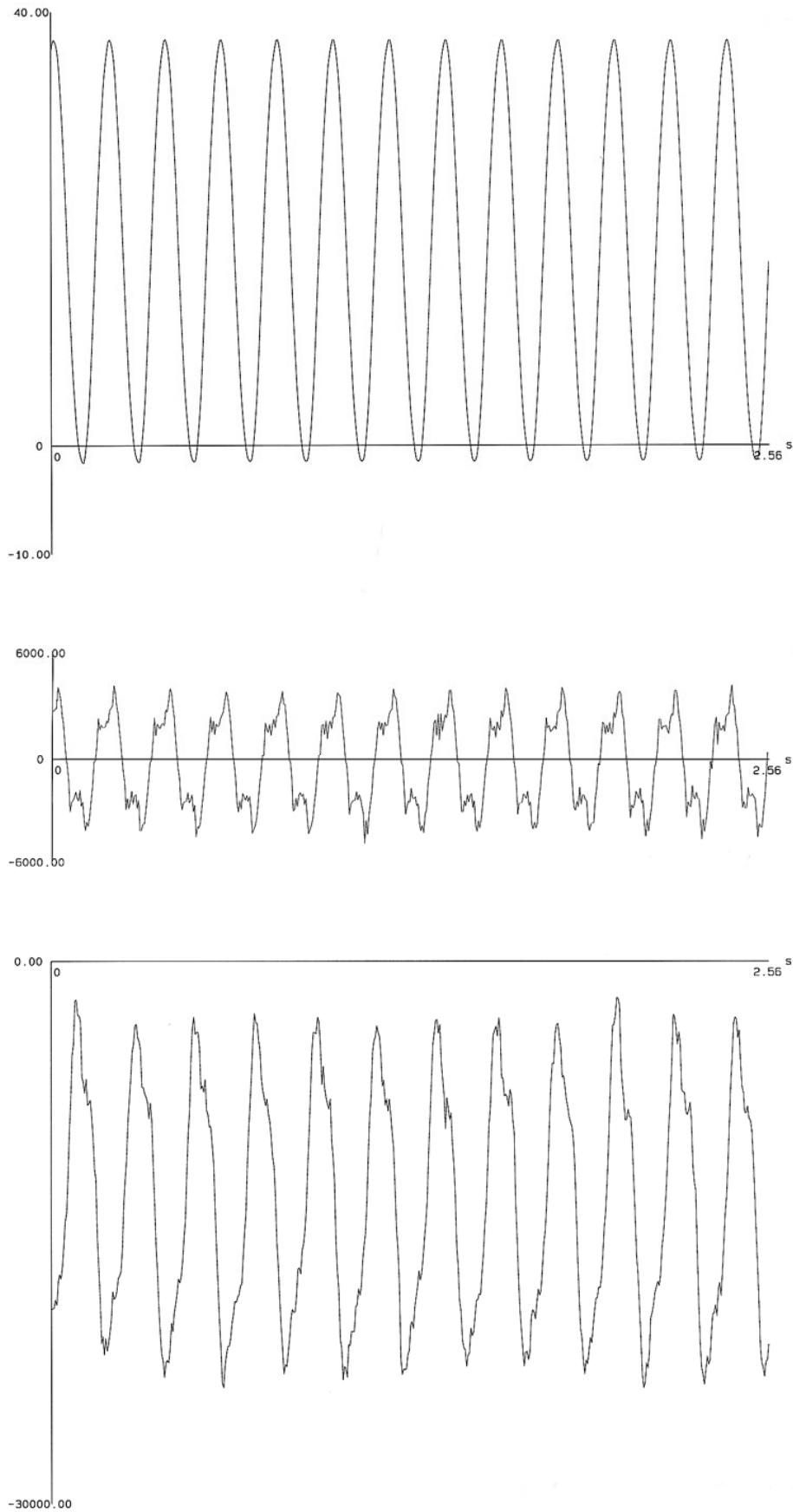


Figure 3.29 – Signaux de déplacements, accélération et portance pour une excitation à 5Hz

### 3.4.3 Mesure des rapports d'amplitudes, fréquences d'oscillations et déphasages

Avant de calculer les rapports d'amplitudes, les signaux de forces et de déplacements sont numériquement filtrés passe-bas. On a vérifié que ce filtre n'occasionnait pas de déphasage parasite. Puis, comme l'amplitude des oscillations varie légèrement avec le temps, à cause des imperfections du système mécanique, les rapports sont calculés période par période puis moyennés. Les fréquences et déphasages entre signaux sont estimés à partir du calcul de la fonction de densité interspectrale entre le signal des forces et celui des déplacements. Afin d'améliorer la précision des résultats, un spectre représentant la réponse d'un oscillateur linéaire non amorti à un degré de liberté est ajusté aux valeurs brutes par une méthode d'optimisation basée sur les moindres carrés.

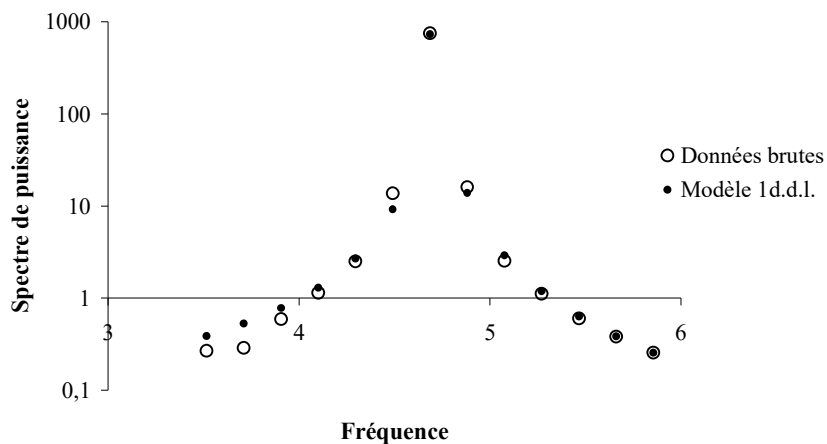


Figure 3.30 – Détermination de la fréquence d'un signal par ajustement d'un modèle d'oscillateur linéaire à 1 d.d.l. par une méthode moindres carrés

On peut quand même signaler que plus la fréquence d'oscillations augmente, moins les déphasages sont estimés avec précision ; tout d'abord parce que le nombre de points par période diminue, ensuite parce que les déphasages électroniques et mécaniques introduits par les différents maillons du système d'acquisition sont difficiles à caractériser.

### 3.4.4 Cas du mouvement couplé

Au moment du traitement des essais en flexion forcée, nous avons noté l'existence de légères oscillations en torsion, à la même fréquence que les oscillations en flexion. Les déplacements induits par ce mouvement de torsion en rive étaient de l'ordre de 10% des mouvements générés par le flexion verticale. On a donc dû traiter ce cas en tant que mouvement couplé en introduisant les coefficients mesurés pendant les oscillations en torsion pure. Notons au passage qu'il serait tout à fait envisageable et intéressant, après avoir amélioré le système mécanique du montage en flexion, de comparer les résultats issus des oscillations simples et ceux issus des oscillations couplées.

Donc, dans le cas où les oscillations en flexion sont couplées à des oscillations en torsion, à la même fréquence, l'équation (3.1) est réécrite sous la forme :

$$F \sin(\omega t + \varphi) = C_1 A [H_2^* \cos \omega t + H_3^* \sin \omega t] + C_2 H [H_1^* \cos(\omega t + \theta) + H_4^* \sin(\omega t + \theta)] \quad (3.21)$$

où  $C_1 = 1/2 \rho B^3 \omega^2$  et  $C_2 = 1/2 \rho B^2 \omega^2$ .

que l'on peut condenser en:

$$F \sin(\omega t + \varphi) = F_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + F_2 \sin(\omega t + \varphi_2 + \theta) \quad (3.22)$$

Supposant que nous connaissons les valeurs de  $H_2^*$  et  $H_3^*$  et que nous cherchons à calculer  $H_1^*$  et  $H_4^*$ , la procédure de calcul est la suivante :

- Calcul des rapports d'amplitudes des signaux :  $\frac{\alpha}{F}$  et  $\frac{F}{H}$
- $\frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{A} \times \frac{A}{F}$  avec  $\frac{F_1}{A} = C_1 \sqrt{H_2^{*2} + H_3^{*2}}$
- $\varphi_1 = a \tan(H_2^*/H_3^*)$
- $\frac{F_2}{F} = \sqrt{1 + \frac{F_1^2}{F^2} - 2 \frac{F_1}{F} \cos(\varphi - \varphi_1)}$
- $\varphi_2 = a \tan \left( \frac{\sin \varphi - \frac{F_1}{F} \sin \varphi_1}{\cos \varphi - \frac{F_1}{F} \cos \varphi_1} \right) - \theta$
- $H_1^* = \frac{F_2}{F} \times \frac{F}{H} \times \frac{1}{C_2} \sin \varphi_2$
- $H_4^* = \frac{F_2}{F} \times \frac{F}{H} \times \frac{1}{C_2} \cos \varphi_2$

Les autres paires de coefficients sont calculées de la même manière. Deux paires de coefficients doivent être préalablement estimées à partir d'un montage simple afin d'en calculer une autre issue d'un montage couplé.



### 3.4.5 Résultats

Trois maquettes sectionnelles ont été testées dans le cadre d'un partenariat avec le LCPC, l'INRIA et l'ENPC : deux profils rectangulaires de ratios 4 et 8 et le profil trapézoïdal (figures 3.31 et 3.32). Seuls les résultats du tablier trapézoïdal et du tablier rectangulaire de ratio 8 sont présentés ici, le tablier de ratio 4 n'étant pas étudié par la suite.

Les mesures ont été effectuées en vent uniforme pour deux vitesses de vent moyennes : 13 m/s et 18 m/s. Trois amplitudes d'oscillations ont été testées en torsion :  $8^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $2^\circ$ , deux en flexion : 13 mm et 30 mm de crête à crête. La gamme de fréquence d'oscillations était de 2 à 7 Hz. Les résultats sont présentés figures 3.33 à 3.36.

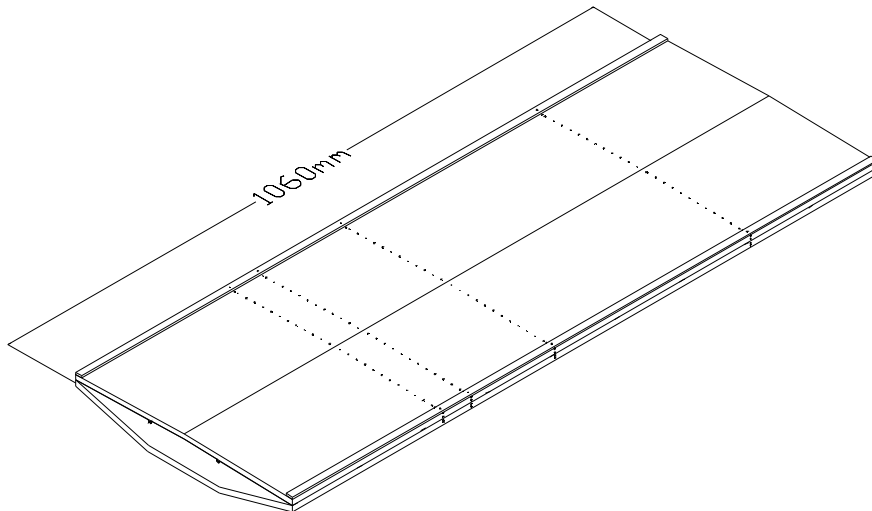


Figure 3.31 – Implantation des couronnes de pressions du tablier trapézoïdal

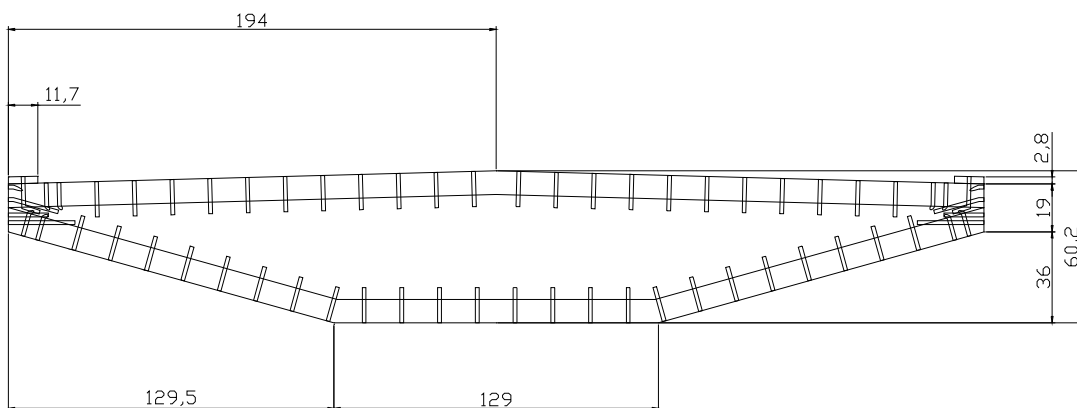


Figure 3.32 – Coupe sur une des couronnes de pressions du tablier trapézoïdal

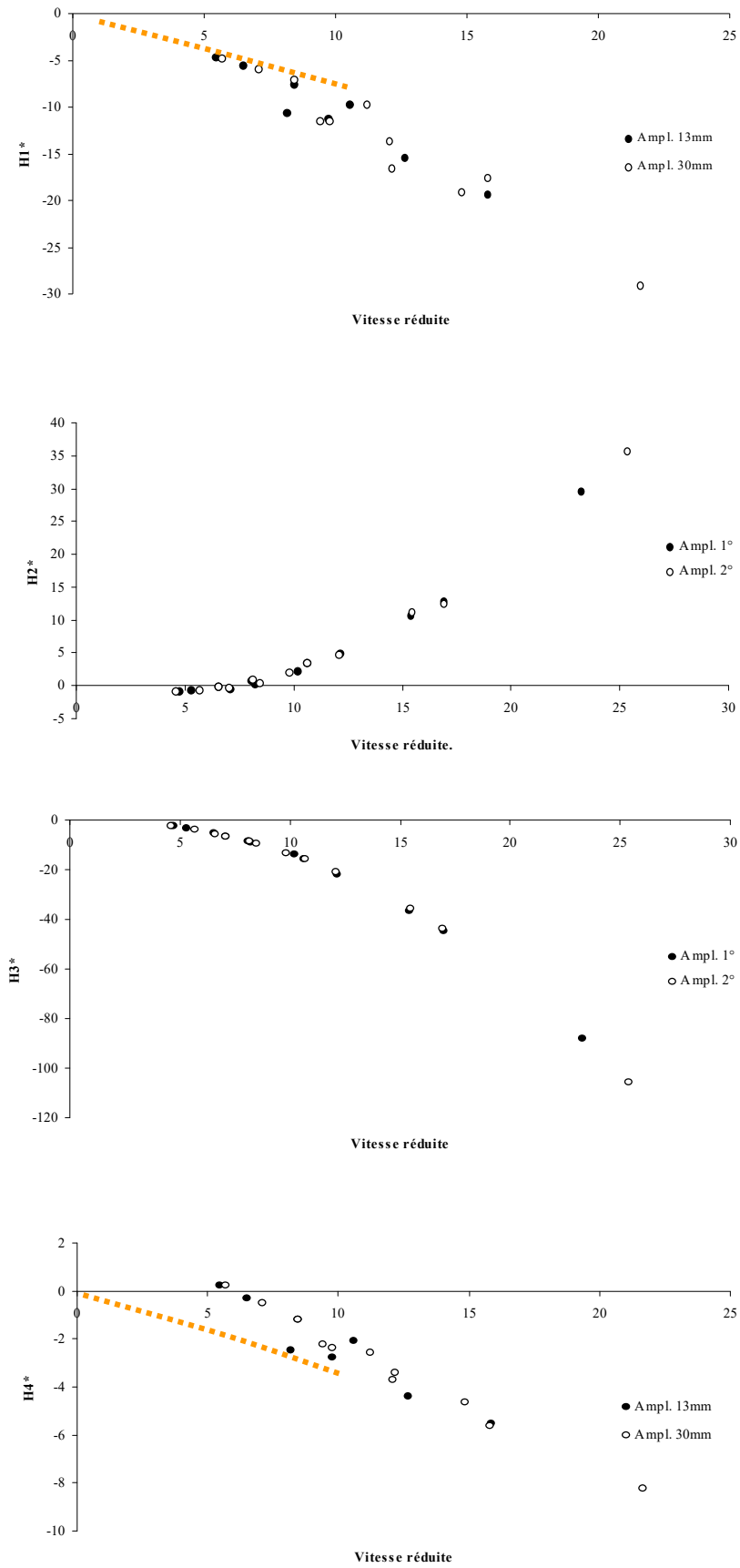


Figure 3.33 – Coefficients aérodynamiques de portance du tablier trapézoïdal obtenus par la méthode des oscillations forcées (en couleur les résultats issus des oscillations libres)

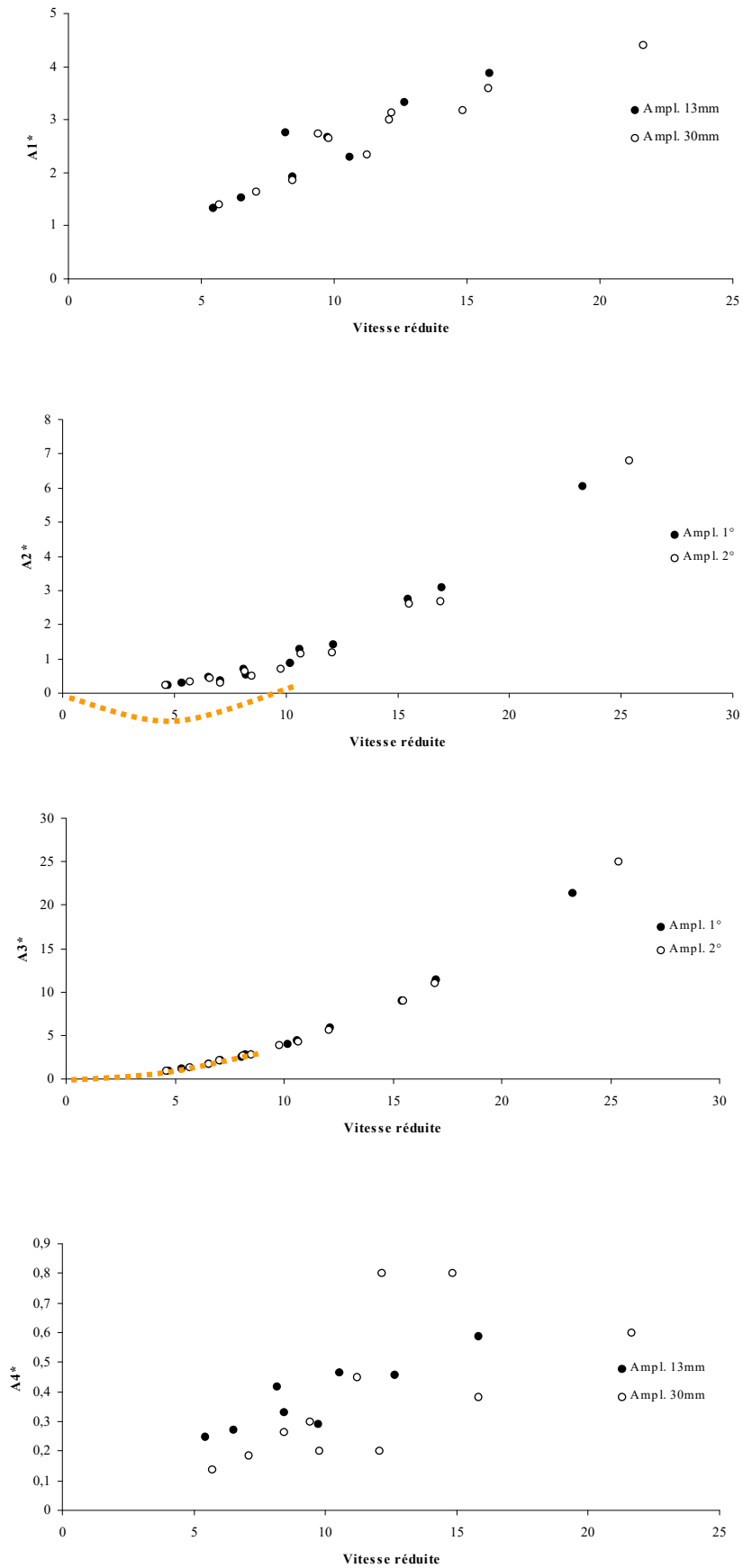


Figure 3.34 – Coefficients aéroélastiques de moment du tablier trapézoïdal obtenus par la méthode des oscillations forcées (en couleur les résultats obtenus par la méthode des oscillations libres)

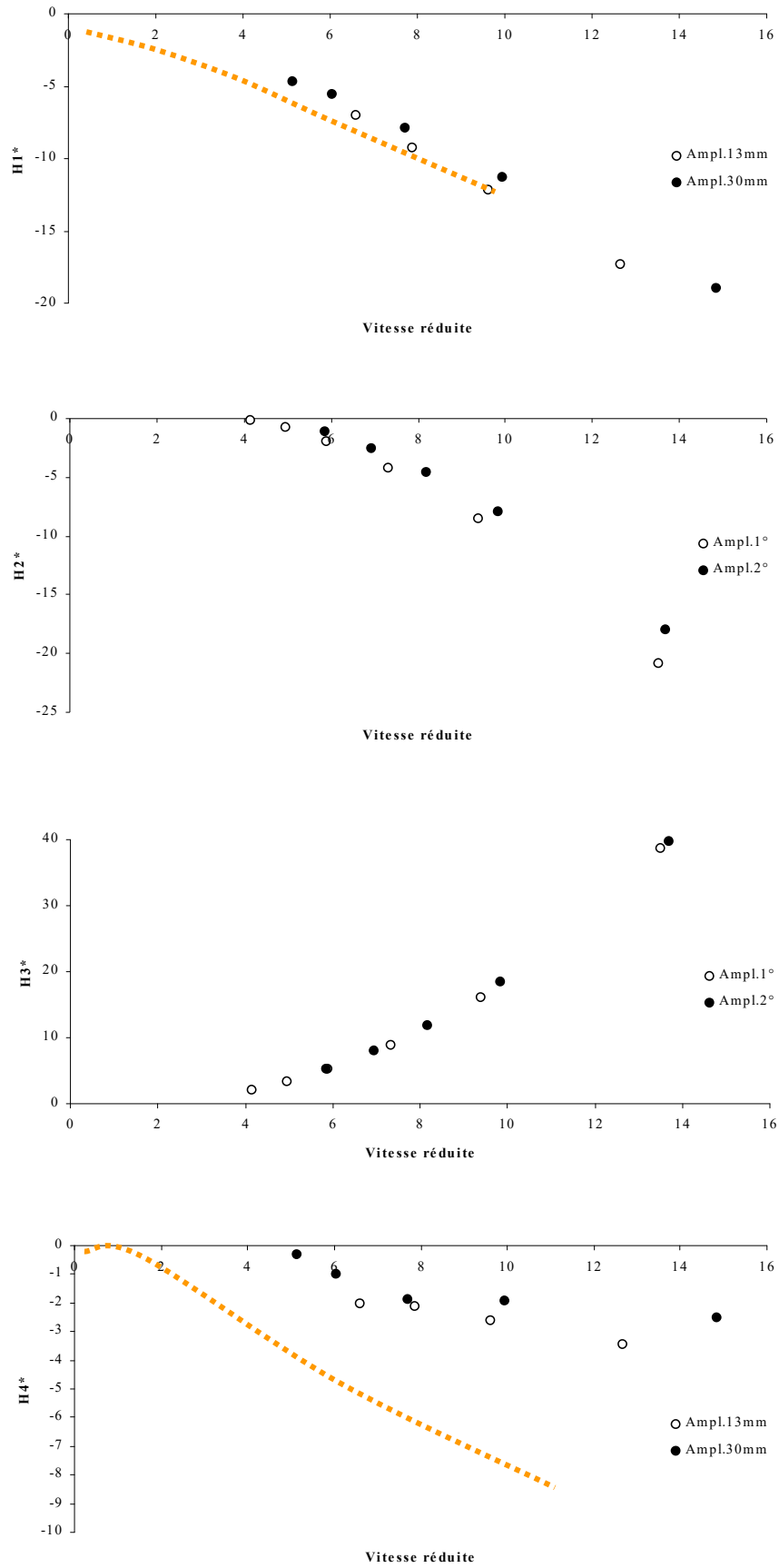


Figure 3.35 – Coefficients aéroélastiques de portance du tablier rectangulaire obtenus par la méthode des oscillations forcées (en couleur les résultats obtenus par la méthode des oscillations libres)

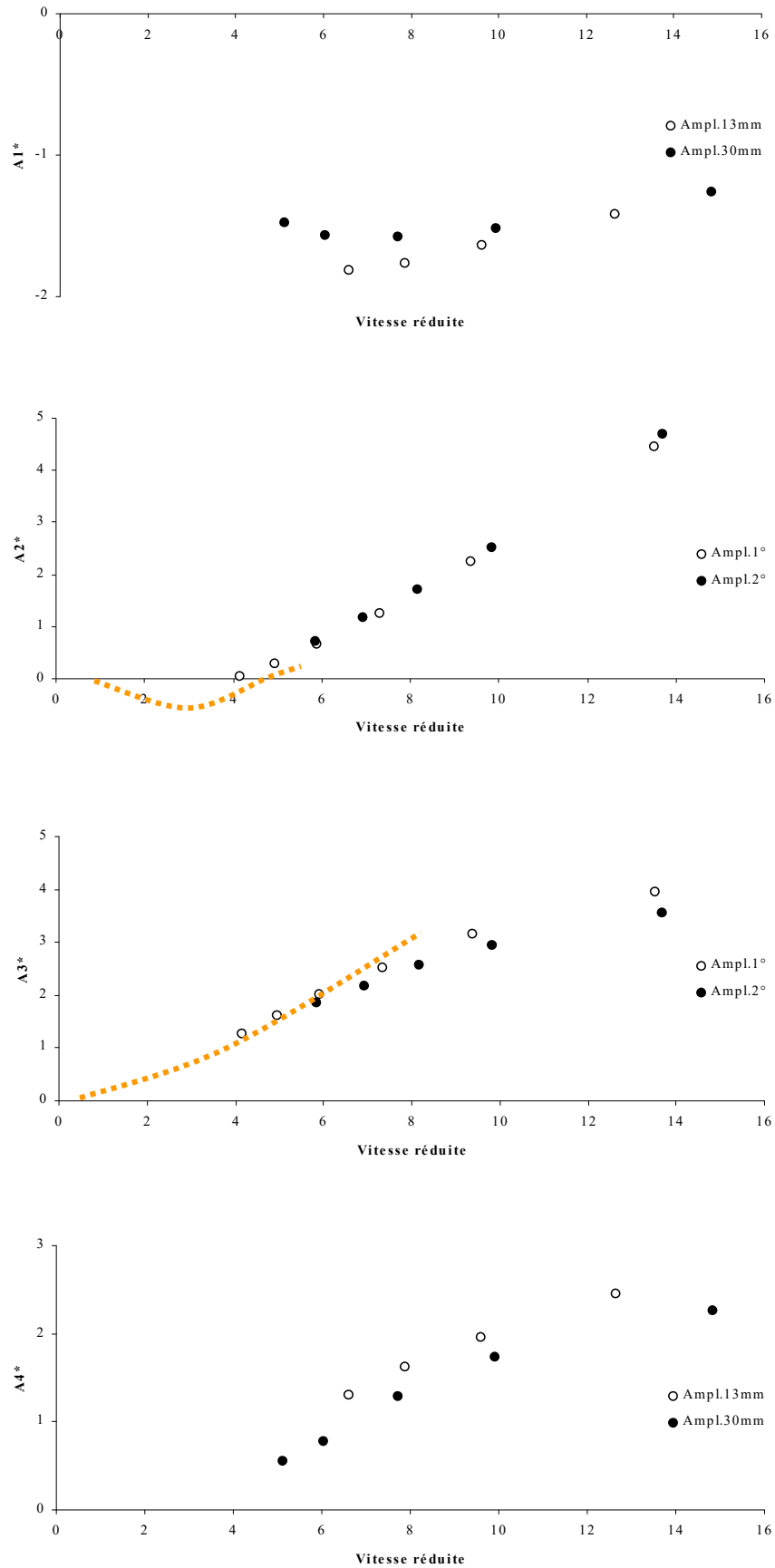


Figure 3.36 – Coefficients aéroélastiques de moment du tablier rectangulaire obtenus par la méthode des oscillations forcées (en couleur les résultats obtenus par la méthode des oscillations libres)

Si les coefficients aéroélastiques du tablier trapézoïdal semblent peu dépendants de l'amplitude des oscillations, cela n'est pas le cas pour le tablier rectangulaire. On peut donc en conclure que, pour ce dernier, les formulations de Scanlan perdent de leur pertinence pour des mouvements de grande amplitude. Au contraire, le tablier trapézoïdal semble plus influencé par le nombre de Reynolds que le tablier rectangulaire; cela est particulièrement net pour les coefficients  $H_1$ ,  $H_4$ ,  $A_1$ ,  $A_4$  et se traduit par deux séries de points légèrement décalées, correspondant aux deux vitesses de vent imposées.

Dans le cas des oscillations verticales, on observe une dispersion assez importante des résultats, en particulier du côté des coefficients couplés. Cela est partiellement imputable au mouvement de torsion parasite, dont l'évaluation s'est avérée peu précise.

La comparaison des résultats obtenus par les méthodes libre et forcée ne nous permet pas de tirer de conclusion bien franche. En effet, si les coefficients  $H_1$  et  $A_3$  sont peu sensibles à la méthode employée, l'estimation des coefficients  $H_4$  du tablier rectangulaire et  $A_2$  du tablier trapézoïdal est franchement différente selon la technique utilisée. La surestimation du  $H_4$  en oscillations libres peut être partiellement attribuée à l'influence de l'amplitude des oscillations, plus faibles qu'en forcé. Le coefficient  $A_2$ , lui, illustre bien quelques points faibles de la méthode des oscillations forcées : précision moyenne dans les hautes fréquences et, surtout, mauvaise appréhension des phénomènes physiques. En effet, une erreur absolue modérée peut induire un changement de signe sans qu'on puisse se rendre compte visuellement du caractère stable ou instable du profil.

N'oublions pas que les phénomènes observés par les deux méthodes ne sont pas totalement identiques : dans le cas des oscillations libres, la structure « s'adapte » sans arrêt à l'écoulement ; dans le cas des oscillations forcées c'est plutôt l'écoulement qui s'adapte aux mouvements de la structure. Notamment, le phénomène de « glissement en fréquence » n'est absolument pas reproduit.

Par ailleurs, les incidences du tablier ne sont pas les mêmes dans les deux méthodes. La méthode des oscillations forcées assure une incidence moyenne constante bien connue, en l'occurrence, ici,  $0^\circ$ . Avec la méthode des oscillations libres, l'écoulement moyen impose une incidence moyenne différente, a priori plus instable. Cela peut expliquer que le tablier trapézoïdal s'avère plus instable d'après cette méthode (incursion du coefficient  $A_2$  vers les ordonnées positives).

Enfin, il convient de ne pas opposer en bloc deux méthodes qui sont aussi complémentaires. La méthode des oscillations libres est en effet plus adaptée aux basses vitesses réduites pour lesquelles les amortissements aérodynamiques sont négatifs (pas de divergence) et relativement faibles en valeur absolue (bonne excitabilité et nombre significatif de périodes pendant la décroissance du signal). La

méthode des oscillations forcées est moins appropriée à faible vitesse (sensibilité des capteurs) mais tout à fait adaptée lorsque l'amortissement aérodynamique est élevé (l'amplitude des signaux a peu d'importance) ou devient positif (mouvement est contrôlé).

### **3.5 Conclusion**

Les techniques expérimentales présentées dans ce chapitre peuvent aujourd'hui encore être considérées comme les méthodes de référence de caractérisation aérodynamique des tabliers de pont. Les méthodes numériques, généralement basées sur la résolution des équations de Navier Stokes, sont en plein essor mais encore fortement limitées par la puissance des ordinateurs actuels. On peut imaginer qu'un jour viendra où celles-ci pourront se substituer, totalement ou partiellement, à l'expérimentation. Les avantages sont évidents : coûts réduits, souplesse d'utilisation, non-intrusivité, accès à de nombreuses données non accessibles expérimentalement,...

Nous avons consacré l'essentiel du chapitre à deux méthodes de mesure des coefficients aéroélastiques : la méthode des oscillations libres et la méthode des oscillations forcées. Elles ont été appliquées à deux profils de tablier de pont : un trapézoïdal et un rectangulaire de ratio 8. Seuls les résultats obtenus en oscillations libres seront utilisés dans le cadre de la procédure de validation présentée au chapitre 5. La raison est double :

- sens physique plus clair,
- gamme de vitesses réduites balayée plus appropriée.

## Chapitre 4

# Calcul de la réponse dynamique de l'ouvrage

Après avoir caractérisé les forces aérodynamiques s'exerçant sur une structure élancée, on se propose d'en calculer la réponse. Deux approches sont développées, basées sur une discrétisation en éléments finis de la structure.

La première consiste à raisonner de manière statistique en se plaçant dans l'espace des fréquences : on parle alors d'approche *spectrale*. Cette méthode présente comme intérêt majeur d'être économique en temps de calculs. Elle implique cependant de linéariser l'évolution des forces aérodynamiques en fonction de l'incidence du vent, ce qui peut parfois se révéler très hasardeux. Nous proposons néanmoins une méthode de "linéarisation équivalente" des coefficients aérodynamiques permettant de réduire ce problème. Enfin, la méthode spectrale, basée sur des hypothèses de stationnarité, ne permet pas d'étudier finement les problèmes d'instabilités aérodynamiques.

La seconde approche consiste à résoudre les équations de la mécanique dans le domaine temporel : on parle alors d'approche *temporelle*. Cette approche, plus gourmande en temps de calcul, permet néanmoins une meilleure modélisation des forces aérodynamiques. Contrairement à la méthode spectrale, elle permet de prendre en compte leur non-linéarité. En outre, elle permet mieux d'appréhender les phénomènes d'instabilités aérodynamiques.



## 4.1 Discrétisation en éléments finis

### 4.1.1 Généralités

La structure est modélisée selon la méthode des éléments finis. Son élancement lui permet d'être facilement discrétisée en éléments de type « poutre 3D ». La figure 4.1 montre, à gauche, une maquette du viaduc de Millau en phase de construction, à droite, sa modélisation en éléments poutres par la méthode des éléments finis.

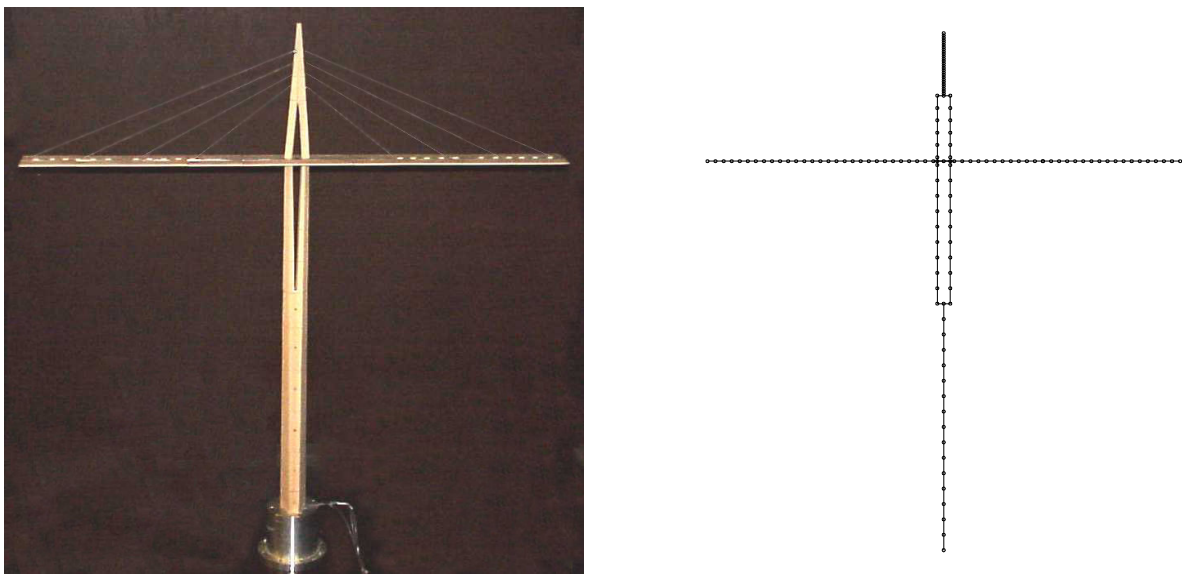


Figure 4.1 - Modélisation par les éléments finis du viaduc de Millau en phase de construction

Chaque élément poutre est défini par deux nœuds, soit 12 degrés de libertés (fig.4.2). Elle est en outre caractérisée par un certain nombre de propriétés mécaniques (masse, inertie, raideur, amortissement) et aérodynamiques (coefficients stationnaires et instationnaires).

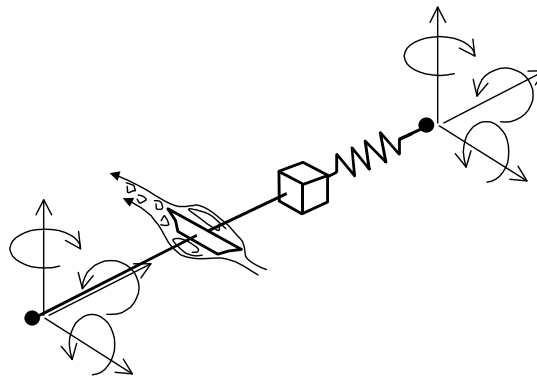


Figure 4.2 - Modélisation d'un élément poutre 3D

Il est alors possible d'appliquer à ce type de modèle les outils classiques de la mécanique des vibrations. Dans les quelques pages qui suivent nous rappelons brièvement la nature de ces outils. L'objectif n'est en aucun cas de proposer quelque chose de nouveau mais de préciser les notions et notations utilisées par la suite.

#### 4.1.2 Mise en équations

##### a) Cas d'un élément

Considérons un élément quelconque d'une structure. Notons  $\underline{x}$  le vecteur position d'un point de cet élément et  $\underline{x}_n$  le vecteur contenant les coordonnées de ses nœuds. On introduit alors une coordonnée paramétrique  $\psi$  liée à notre élément, et une fonction d'interpolation matricielle  $\underline{N}$  reliant les deux vecteurs :

$$\underline{x}(\psi) = \underline{N}(\psi) \underline{x}_n \quad \psi \in [0;1] \quad (4.1)$$

Si  $\underline{d}^p$  représente le vecteur déplacement en chaque point de l'élément et  $\underline{d}^n$  le vecteur contenant les coordonnées des déplacements des nœuds, une approximation dite « isoparamétrique » permet d'écrire, :

$$\underline{d}^p(\psi) = \underline{N}(\psi) \underline{d}^n \quad (4.2)$$

A la fonction matricielle d'interpolation  $\underline{N}(\psi)$ , on associe la matrice jacobienne  $\underline{J}(\psi)$  permettant d'effectuer le changement de variables, des coordonnées cartésiennes aux coordonnées paramétriques, au cours d'une intégration. Dans le cas d'un élément poutre, la matrice jacobienne est un scalaire égal à L, longueur de la poutre. Ainsi, pour une fonction quelconque  $f(x)$ , on écrit :

$$\int_{\text{élément}} \underline{f}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\text{élément}} \underline{J}(\psi) \underline{f}(\psi) d\psi \quad (4.3)$$

On introduit également la matrice  $\underline{X}$  reliant le vecteur des déformations  $\underline{\varepsilon}$  au vecteur  $\underline{d}^n$  :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{X} \underline{d}^n \quad (4.4)$$

Ainsi, on peut écrire le principe des travaux virtuels pour un élément poutre :

$$\int_{\text{élément}} \underline{\underline{\varepsilon}}^{*T} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\varepsilon}} \, dv + \int_{\text{élément}} \rho \underline{\underline{d}}^p \, {}^{*T} \ddot{\underline{\underline{d}}}^p \, dv + \int_{\text{élément}} c \underline{\underline{d}}^p \, {}^{*T} \dot{\underline{\underline{d}}}^p \, dv - \int_{\text{élément}} \underline{\underline{d}}^p \, {}^{*T} \underline{\underline{f}}_v \, dv - \int_{\text{élément}} \underline{\underline{d}}^p \, {}^{*T} \underline{\underline{f}}_s \, ds = 0 \quad (4.5)$$

où  $\underline{\underline{H}}$  est la matrice de rigidité,  $\rho$  la masse volumique,  $c$  le coefficient d'amortissement,  $\underline{\underline{f}}_s$  et  $\underline{\underline{f}}_v$  les vecteurs forces extérieures surfaciques et volumiques.

En reportant (4.2) et (4.4) dans (4.5), on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\underline{\underline{m}} \ddot{\underline{\underline{d}}}^n + \underline{\underline{c}} \dot{\underline{\underline{d}}}^n + \underline{\underline{k}} \underline{\underline{d}}^n - \underline{\underline{f}}_n = 0 \quad (4.6)$$

avec  $\underline{\underline{m}} = \int_{\text{élément}} \rho \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} \, dv$  la matrice masse de l'élément, (4.7)

$$\underline{\underline{c}} = \int_{\text{élément}} c \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} \, dv \quad \text{la matrice amortissement,} \quad (4.8)$$

$$\underline{\underline{k}} = \int_{\text{élément}} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}} \, dv \quad \text{la matrice raideur,} \quad (4.9)$$

$$\underline{\underline{f}}_n = \int_{\text{élément}} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{f}}_v \, dv + \int_{\text{élément}} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{f}}_s \, ds \quad \text{le vecteur des forces équivalentes.} \quad (4.10)$$

### b) Assemblage

Il s'agit maintenant d'écrire l'équation matricielle régissant l'ensemble de la structure : c'est l'étape de l'assemblage. Ainsi, si on note  $\underline{\underline{d}}$  le vecteur contenant l'ensemble des degrés de liberté de la structure i.e. 6 fois le nombre de nœuds utilisés pour sa discrétisation, on peut écrire :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{d}}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{d}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{F}} = 0 \quad (4.11)$$

où  $M$ ,  $C$ ,  $K$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur de la structure discrétisée obtenues par assemblage des matrices  $m$ ,  $c$ ,  $k$  propres à chacun des élément.

La procédure d'assemblage des  $\underline{\underline{M}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$ ,  $\underline{\underline{K}}$  est la suivante :

Notons  $n_e$  le nombre d'éléments,  $ndlt$  le nombre de degrés de liberté total,  $\underline{\underline{m}}_j, \underline{\underline{c}}_j, \underline{\underline{k}}_j$  les matrices masse, amortissement et raideur associées à un élément  $j$  ( $j = 1, n_e$ ). Considérons maintenant les matrices carrées  $\underline{\underline{m}}_j', \underline{\underline{c}}_j', \underline{\underline{k}}_j'$  de dimensions  $ndlt$ , contenant les valeurs des matrices  $\underline{\underline{m}}_j, \underline{\underline{c}}_j, \underline{\underline{k}}_j$ , aux intersections entre lignes et colonnes correspondant à des degrés de liberté appartenant à l'élément  $i$ , et des 0 partout ailleurs. Alors, les matrices  $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{K}}$  peuvent être définies comme les sommes des matrices  $\underline{\underline{m}}_j', \underline{\underline{c}}_j', \underline{\underline{k}}_j'$  :

$$\underline{\underline{M}} = \sum_j \underline{\underline{m}}_j' \quad \underline{\underline{C}} = \sum_j \underline{\underline{c}}_j' \quad \underline{\underline{K}} = \sum_j \underline{\underline{k}}_j' \quad (4.12)$$

## 4.2 Calcul des modes propres de la structure

Reconsidérons l'équation (4.11) appliquée à un mouvement libre sans amortissement. On écrit alors :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{d}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{d}} = 0 \quad (4.13)$$

Par analogie avec un système à un degré de liberté, on cherche des solutions de la forme :

$$\underline{\underline{d}}(t) = \underline{\underline{Z}} e^{i\omega t} \quad (4.14)$$

où  $\underline{\underline{Z}}$  est un vecteur colonne constant.

On obtient ainsi l'équation suivante :

$$\left( -\underline{\underline{M}}\omega^2 + \underline{\underline{K}} \right) \underline{\underline{Z}} e^{i\omega t} = 0 \quad (4.15)$$

L'existence d'une solution non triviale implique :

$$\det\left(-\underline{\underline{M}}\omega^2 + \underline{\underline{K}}\right) = 0 \quad (4.16)$$

Il existe en général  $n$  valeurs distinctes  $\omega_j^2$  solutions de cette équation algébrique en  $\omega^2$ . Il reste à résoudre l'équation matricielle qui suit :

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{Z}}_j = \omega_j^2 \underline{\underline{M}} \underline{\underline{Z}}_j \quad (4.17)$$

On obtient ainsi  $n$  solutions à l'équation (4.15) caractérisées par les « vecteurs propres » (ou « déformées »)  $\underline{\underline{Z}}_j$  et les « valeurs propres » associées  $\omega_j^2$ . Ces  $n$  « modes propres » constituent une base de l'espace des solutions de (4.15).

Les  $\underline{\underline{Z}}_j$  étant définis à un facteur près, on les normalise généralement en fixant à 1 leur plus grande composante. On introduit alors les notions de matrices masse et raideur généralisées  $\hat{\underline{\underline{M}}}$  et  $\hat{\underline{\underline{K}}}$  :

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} = \hat{\underline{\underline{M}}} \quad (4.18)$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \hat{\underline{\underline{K}}} \quad (4.19)$$

où  $\underline{\underline{\Phi}}$  est une matrice dont les colonnes sont constituées des vecteurs propres  $\underline{\underline{Z}}_j$ .

Dans la pratique, un nombre limité des premiers modes propres suffit à représenter les vibrations d'une structure. On a alors intérêt à passer de la base nodale à une base modale réduite pour diminuer le rang des systèmes à résoudre et par conséquent les durées de calcul.

## 4.3 La méthode spectrale

Les premières applications de la théorie des vibrations aléatoires à l'étude des structures soumises à l'action de la turbulence du vent sont dues à Liepmann (1952). Elles concernaient particulièrement les ailes d'avion minces. C'est Davenport (1961) qui, le premier, étendit les travaux de Liepmann à l'étude des structures élastiques dans la couche limite atmosphérique. Un an plus tard, il utilisa ce nouvel outil pour l'analyse des effets du vent sur les ponts suspendus. Il ne s'intéressait alors qu'aux problèmes de turbulence. En 1974, Scanlan introduit les forces aéroélastiques dans le calcul spectral des ponts.

### 4.3.1 Principe

La méthode spectrale consiste à assimiler le mouvement de la structure étudiée à la superposition de modes propres significatifs, et à évaluer pour chacun d'eux la densité spectrale de puissance des déplacements. Chaque signal modal, supposé gaussien, peut alors être caractérisé par son écart-type, calculé par simple intégration de son spectre.

Les étapes principales de cette approche sont :

- Discrétisation de la structure en éléments finis (poutres à 12 ddl) et calcul des modes propres;
- Caractérisation aérodynamique de l'enveloppe de la structure ;
- Caractérisation probabiliste du vent par l'évaluation de la matrice de densité interspectrale de puissance de la composante turbulente ;
- Evaluation de la matrice densité spectrale de puissance des forces turbulentes par l'intermédiaire des coefficients aérodynamiques dans la base nodale ;
- Constitution de la matrice densité spectrale de puissance des forces turbulentes dans la base modale ;
- Résolution de l'équation fondamentale de la dynamique dans la base modale et déduction de la densité spectrale de puissance des oscillations pour chaque mode considéré ;
- Détermination des écarts-types des déplacements modaux par intégration des spectres ;
- Déduction des sollicitations extrêmes.

A partir de ce schéma de base, de nombreuses variations peuvent être envisagées, plus ou moins précises, plus ou moins économiques en temps de calcul. Elles interviennent essentiellement aux niveaux suivants:

- Problème du couplage lors de la résolution du système dans la base modale ;
- Prise en compte de la déformée statique ;
- Linéarisation des coefficients aérodynamiques ;
- Intégration du spectre des déplacements.

### 4.3.2 Définition des repères

Une base « locale » est associée à chaque élément poutre ; c'est dans cette base que sont exprimés les différents coefficients aérodynamiques dans le fichier d'entrée. Les axes x et y sont respectivement associés aux efforts de traînée et de portance tandis que l'axe z est dirigé dans l'axe de la barre. Cela correspond aux conventions généralement employées en soufflerie pour les maquettes sectionnelles. La première composante du vecteur x et la troisième composante du vecteur y sont choisies positives.

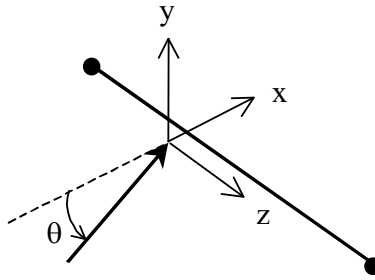


Figure 4.3 – Repère local associé à un élément poutre

On définit également une base associée au vent ; l'axe x est dans le sens et la direction du vecteur vitesse de vent moyen, tandis que les axes y et z sont respectivement associés aux fluctuations turbulentes v et w . Le repère vent, ainsi que les repères locaux, sont définis au sein d'un repère général par des matrices de transformation  $\underline{\underline{P}}_v$  et  $\underline{\underline{P}}_L$  :

$$\underline{\underline{P}}_v = \begin{bmatrix} \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} & \frac{-V}{\sqrt{U^2 + V^2}} & \frac{-UW}{\sqrt{U^2 + V^2}\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} \\ \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} & \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} & \frac{-VW}{\sqrt{U^2 + V^2}\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} \\ \frac{W}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} & 0 & \frac{U^2 + V^2}{\sqrt{U^2 + V^2}\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

où U, V, W représentent les trois composantes du vecteur vent moyen  $\vec{U}$  dans la base générale.

$$\underline{\underline{P}}_L = \begin{bmatrix} \frac{\text{signe}(\Delta Y) \times \Delta Y}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} & \frac{-\Delta X \Delta Z}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} & -\text{signe}(\Delta Y) \times \Delta X \\ -\frac{\text{signe}(\Delta Y) \times \Delta X}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} & \frac{-\Delta Y \Delta Z}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} & -\text{signe}(\Delta Y) \times \Delta Y \\ 0 & \frac{\Delta X \Delta Z}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} & -\text{signe}(\Delta Y) \times \Delta Z \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

où  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ , représentent les coordonnées du vecteur directeur de l'élément dans le repère général.

### 4.3.3 Calcul de la matrice de densité spectrale des forces turbulentes

La vitesse du vent agissant sur un élément est exprimée dans une base quelconque définie par sa matrice de passage  $\underline{\underline{P}}_V$ . Soit  $\underline{\underline{P}}_L$  la matrice de passage liée à la base locale. Alors, les composantes fluctuantes de la vitesse du vent s'expriment, dans la base locale:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \end{pmatrix} = \underline{\underline{P}}_L^T \underline{\underline{P}}_V \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$u, v, w$  étant définis dans la base liée au vent.

Exprimant (2.31) sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{C}}_\gamma = \underline{\underline{\Gamma}}^{\frac{1}{2}} \underline{\underline{C}}_{ad} \quad (4.23)$$

où  $\underline{\underline{C}}_{ad}$  est définie en (2.30) et  $\underline{\underline{\Gamma}}^{\frac{1}{2}}$  est une matrice diagonale contenant les termes  $\gamma_{F_X}, \gamma_{F_Y}, \gamma_{M_Z}$ , « racines carrées » des fonctions d'admittance aérodynamique liées aux forces de traînée, portance et moment, on déduit que le vecteur des forces par unité de longueur de l'élément s'écrit, dans la base locale :

$$\underline{\underline{f}}_t^e = \underline{\underline{C}}_\gamma \underline{\underline{P}}_L^T \underline{\underline{P}}_V \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Les coefficients aérodynamiques et leurs dérivées par rapport à l'incidence du vent sont recalculés pour chaque élément en fonction de la direction du vent et de la déformée moyenne de la structure. Pour cela, les coefficients et leurs dérivées sont entrés sous forme de polynômes du 4<sup>ème</sup> degré, fonctions de l'incidence relative du vent.

Ces polynômes sont obtenus par optimisation non linéaire par les moindres carrés autour des valeurs discrètes calculés par le programme de linéarisation équivalente des coefficients aérodynamiques. Nous reviendrons sur les principes de cette méthode à la fin du chapitre. Les méthodes de calcul basées sur une discrétisation en éléments finis nécessitent une formulation des efforts aux nœuds de la structure et non



sur ses éléments. On introduit donc une nouvelle base de projection, de dimension 12, associée aux degrés de liberté des deux noeuds de l'élément poutre. Ainsi, le vecteur représentant les déplacements de l'élément s'écrit sous la forme suivante:

$$\underline{\underline{d}}^n = (x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad r_{x1} \quad r_{y1} \quad r_{z1} \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad r_{x2} \quad r_{y2} \quad r_{z2})^T \quad (4.25)$$

Le vecteur des déplacements en un point quelconque de l'élément, défini par sa coordonnée paramétrique  $\psi \in [0;1]$ , est alors égal à  $\underline{\underline{N}}(\psi) \underline{\underline{d}}^n$ .

Le vecteur des forces élémentaires exprimé dans la base nodale de l'élément, s'exprime donc :

$$\underline{\underline{f}}_t^{ne} = \int_e \underline{\underline{N}}(\psi)^T \underline{\underline{C}}_\gamma \underline{\underline{P}}_L^T \underline{\underline{P}}_V \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix} J(\psi) d\psi \quad (4.26)$$

ce qui donne, dans la base générale :

$$\underline{\underline{f}}_t^{ng} = \int_e \underline{\underline{P}}_{12}^T \underline{\underline{N}}(\psi)^T \underline{\underline{C}}_\gamma \underline{\underline{P}}_L^T \underline{\underline{P}}_V \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix} J(\psi) d\psi \quad (4.27)$$

où  $\underline{\underline{P}}_{12}$  est la matrice de changement de base général  $\rightarrow$  local pour un vecteur à 12 composantes:

$$\underline{\underline{P}}_{12} = \begin{bmatrix} [\underline{P}_L]^T & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [\underline{P}_L]^T & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [\underline{P}_L]^T & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [\underline{P}_L]^T \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

En optant pour un schéma d'intégration linéaire, on écrit :

$$\underline{\underline{N}}(\psi) = \begin{bmatrix} 1-\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

ce qui permet de réécrire (4.27) sous la forme :

$$\underline{f}_t^{ng} = L \times \underline{P}_{12}^T \underline{N}(l/2)^T \underline{C}_\gamma \underline{P}_L^T \underline{P}_V \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

L étant la longueur de l'élément poutre.

Remarquons bien que le vecteur des forces élémentaires agissant sur l'élément est une transformation linéaire des composantes turbulentes agissant sur l'élément. On peut maintenant construire le vecteur des forces global  $\underline{F}_t^n$  par assemblage des vecteurs  $\underline{f}_t^{ng}$ . La  $j^{\text{ème}}$  coordonnée du vecteur  $\underline{F}_t^n$  s'exprime de la façon suivante :

$$\underline{F}_t^n(j) = \sum_{e/iee} \underline{f}_t^{ng}(n(j,e)) \quad (4.31)$$

Pour tous les éléments e auquel appartient le degré de liberté j, on ajoute à la composante n(j,e) (numéro local dans l'élément e du degré de liberté de numéro global j du vecteur) . C'est la procédure classique d'assemblage.

Ce vecteur peut à présent être exprimé dans la base modale. Si l'on note  $\underline{Z}_j$  le vecteur propre du  $j^{\text{ème}}$  mode, la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée du vecteur des forces généralisées s'écrit :

$$\underline{F}_t^m(j) = \underline{Z}_j \underline{F}_t^n \quad (4.32)$$

On a donc exprimé le vecteur des forces généralisées comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ .

Les vecteurs  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$  étant aléatoires centrés stationnaires, ils admettent une matrice de densité spectrale

$\underline{S}_v(\omega)$ . Le vecteur F admet par conséquent une matrice de densité spectrale, fonction quadratique des matrices  $\underline{S}_v(\omega)$ .

On peut réécrire plus simplement (4.27) sous la forme:

$$\underline{f}_t^{ng} = \int_{\text{élément}} \underline{C}_e(\psi) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} J(\psi) d\psi \quad (4.33)$$

Soit  $S_V^{e,e'}(\omega)$  la densité inter-spectrale des composantes turbulentes (u,v,w) exprimée dans le repère vent et agissant sur e, et (u', v', w') exprimée dans le repère vent et agissant sur e' (celle ci est directement donnée par le modèle de vent). On écrit alors :

$$\underline{S}_{f_t^{ng}, f_t^{n'g}}(\omega) = \int_e \int_{e'} \underline{C}_e(\psi) \underline{S}_V^{e,e'}(\omega) \underline{C}_{e'}(\psi')^* J(\psi) J(\psi') d\psi d\psi' \quad (4.34)$$

De manière analogue au cas vectoriel, la matrice de densité spectrale globale  $\underline{S}_{F_t}(\omega)$  s'obtient par assemblage des  $\underline{S}_{f_t^{ng}, f_t^{n'g}}(\omega)$  :

$$\underline{S}_{F_t}(\omega)(j, j') = \sum_{e/j \in e} \sum_{e'/j' \in e'} \underline{S}_{f_t^{ng}, f_t^{n'g}}(\omega)(n(j, e), n(j', e')) \quad (4.35)$$

La matrice de densité spectrale des forces généralisée s'obtient alors en multipliant à gauche et à droite par la matrice des déformées modales  $\underline{\Phi}$  :

$$\underline{S}_{F_t}(\omega) = \underline{\Phi} \underline{S}_{F_t}(\omega) \underline{\Phi}^T \quad (4.36)$$

#### 4.3.4 Calcul de la matrice de densité spectrale des forces aéroélastiques

Considérons encore un élément poutre défini en chacun de ses points par sa coordonnée paramétrique  $\psi$ . Le vecteur des forces aéroélastiques exprimé dans un repère local vaut, à l'instant t :

$$\underline{f}_{ac}^e(\psi, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{ac}^e(\psi, t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_{ac}^e(\psi, t) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

avec:

$$l_{ac}^e(\psi, t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left( \frac{K}{U} H_1^* \dot{h}(\psi, t) + \frac{KB}{U} H_2^* \dot{\alpha}(\psi, t) + K^2 H_3^* \alpha(\psi, t) + \frac{K^2}{B} H_4^* h(\psi, t) \right) \quad (4.38)$$

$$m_{ac}^e(\psi, t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B^2 \left( \frac{K}{U} A_1^* \dot{h}(\psi, t) + \frac{KB}{U} A_2^* \dot{\alpha}(\psi, t) + K^2 A_3^* \alpha(\psi, t) + \frac{K^2}{B} A_4^* h(\psi, t) \right) \quad (4.39)$$

Les équations (4.38) et (4.39) peuvent être réécrites sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{f}_{ac}^e(\psi, t) = \underline{C}_{ac}^e(\omega) \underline{\dot{d}}^e(\psi, t) + \underline{K}_{ac}^e(\omega) \underline{d}^e(\psi, t) \quad (4.40)$$

avec

$$\underline{C}_{ac}^e = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{U} H_1^* & 0 & 0 & 0 & \frac{KB}{U} H_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{KB}{U} A_1^* & 0 & 0 & 0 & \frac{KB^2}{U} A_2^* \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\underline{K}_{ac}^e = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^2 B H_2^* & 0 & 0 & 0 & K^2 H_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^2 A_4^* & 0 & 0 & 0 & K^2 B A_3^* \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

On écrit alors, dans la base nodale :

$$\underline{f}_{ac}^{en}(t) = \left[ \int_c \underline{N}(\psi)^T \underline{C}_{ac}^e \underline{N}(\psi) J(\psi) d\psi \right] \underline{\dot{d}}^n + \left[ \int_c \underline{N}(\psi)^T \underline{K}_{ac}^e \underline{N}(\psi) J(\psi) d\psi \right] \underline{d}^n \quad (4.43)$$

On en déduit l'expression de deux nouvelles matrices raideur et amortissement dans le repère général :

$$\underline{C}_{ac}^{ng} = \underline{P}_{12}^T \left[ \int_c \underline{N}(\psi)^T \underline{C}_{ac}^e \underline{N}(\psi) J(\psi) d\psi \right] \underline{P}_{12} \quad (4.44)$$

$$\underline{\underline{K}}_{ac}^{ng} = \underline{\underline{P}}_{12}^T \left[ \int_e \underline{\underline{N}}(\psi)^T \underline{\underline{K}}_{ac}^e \underline{\underline{N}}(\psi) J(\psi) d\psi \right] \underline{\underline{P}}_{12} \quad (4.45)$$

que l'on assemble suivant la procédure classique :

$$\underline{\underline{C}}_{ac}(\omega) = \sum_e \underline{\underline{C}}_{ac}^{ng}(\omega) \quad (4.46)$$

$$\underline{\underline{K}}_{ac}(\omega) = \sum_e \underline{\underline{K}}_{ac}^{ng}(\omega) \quad (4.47)$$

### 4.3.5 Mise en équations

Les déplacements d'une structure soumise à l'action turbulente du vent sont donc régis dans le temps par l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{d}}}(t) + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{d}}}(t) + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{d}}(t) = \underline{\underline{F}}_{ae}(\bar{\underline{\underline{U}}}, \dot{\underline{\underline{d}}}, \underline{\underline{d}}, t) + \underline{\underline{F}}_t(\bar{\underline{\underline{U}}}, V, t) \quad (4.48)$$

avec

- $\underline{\underline{M}}$  : matrice des masses
- $\underline{\underline{C}}$  : matrice d'amortissement
- $\underline{\underline{K}}$  : matrice de raideur
- $\underline{\underline{d}}$  : vecteur des déplacements
- $\underline{\underline{F}}_{ae}$  : vecteur des forces aéroélastiques
- $\underline{\underline{F}}_t$  : vecteur des forces turbulentes

Dans le domaine fréquentiel, l'équation peut être développée sous la forme suivante ( $i^2 = -1$ ) :

$$(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + i\omega \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}}) \underline{\underline{d}}(\omega) = \left[ i\omega \underline{\underline{C}}_{ae}(\bar{\underline{\underline{U}}}, \omega) + \underline{\underline{K}}_{ae}(\bar{\underline{\underline{U}}}, \omega) \right] \underline{\underline{d}}(\omega) + \underline{\underline{F}}_t(\bar{\underline{\underline{U}}}, V, \omega) \quad (4.49)$$

Ce système de rang n, où n est le nombre de degrés de liberté de la structure i.e. 6 fois le nombre de nœuds peut être ramené à un système de rang inférieur m en effectuant une projection sur une base constituée des m premiers vecteurs propres.

Introduisant  $\underline{\Phi}$  la matrice de dimension  $n \times m$  composée des  $m$  premiers vecteurs propres disposés en colonnes, on peut alors écrire :

$$\underline{d}(\omega) = \underline{\Phi} \underline{q}(\omega) \quad (4.50)$$

où  $\underline{q}$  est le vecteur des coordonnées généralisées.

En insérant l'équation (4.50) dans l'équation (4.49) et en multipliant à gauche tous les termes par  $\underline{\Phi}^T$ , on obtient l'équation suivante:

$$(-\omega^2 \underline{\hat{M}} + i\omega \underline{\hat{C}} + \underline{\hat{K}}) \underline{q}(\omega) = \left[ i\omega \underline{\hat{C}}_{ae}(U, \omega) + \underline{\hat{K}}_{ae}(U, \omega) \right] \underline{q}(\omega) + \underline{\Phi}^T \underline{F}_t(\omega) \quad (4.51)$$

avec  $\underline{\hat{M}} = \underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi}$  matrice des masses généralisée (diagonale)

$\underline{\hat{C}} = \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi}$  matrice d'amortissement généralisée (non diagonale)

$\underline{\hat{K}} = \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi}$  matrice des raideurs généralisée (diagonale)

$\underline{\hat{C}}_{ae}(U, \omega) = \underline{\Phi}^T \underline{C}_{ae}(U, \omega) \underline{\Phi}$  matrice d'amortissement aérodynamique (non diagonale)

$\underline{\hat{K}}_{ae}(U, \omega) = \underline{\Phi}^T \underline{K}_{ae}(U, \omega) \underline{\Phi}$  matrice des raideurs aérodynamique (non diagonale)

#### 4.3.6 Analyse de la stabilité

Avant de chercher à déterminer la réponse de notre structure à l'action turbulente du vent, il convient d'en vérifier la stabilité. On constate dans la pratique que les phénomènes d'instabilité se développent d'autant plus facilement que le taux de turbulence est faible. C'est pourquoi, dans le cadre d'une approche sécuritaire, l'étude de la stabilité d'un tablier de pont, qu'elle soit expérimentale ou numérique, doit être effectuée en vent uniforme.

Le caractère instable d'un tablier est essentiellement caractérisé par sa *vitesse critique de flottement*, vitesse au-delà de laquelle les oscillations de la structure prennent un caractère divergent. Il convient cependant de bien distinguer deux aspects du phénomène d'instabilité : son développement proprement dit, mais également son initiation. En effet, toute instabilité doit être initiée par une impulsion suffisamment puissante pour pouvoir ensuite se développer. Dans la nature, un minimum de turbulence

(ou éventuellement un détachement tourbillonnaire) est donc nécessaire pour observer un comportement divergent.

Ce qui nous intéresse, c'est de savoir à quel moment la structure sera potentiellement susceptible d'adopter un comportement divergent. La question de l'initiation de cette divergence ne nous intéresse donc pas ici.

Reprenant l'équation (4.40), et imposant  $\underline{F}_t(\omega) = \underline{0}$ , l'instabilité se définit mathématiquement comme le moment, où, pour une vitesse donnée  $U$ , il existe une valeur de  $\omega$  annulant la matrice  $G(\omega)$  définie par:

$$\underline{\underline{G}}(\omega) = -\omega^2 \underline{\underline{M}} + i\omega \left( \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}_{ae}(\bar{U}, \omega) \right) + \left( \underline{\underline{K}} - \underline{\underline{K}}_{ae}(\bar{U}, \omega) \right) \quad (4.52)$$

La vitesse la plus faible, permettant de satisfaire le critère d'instabilité, sera supposée correspondre à la vitesse critique de flottement. La méthode la plus appropriée pour déterminer cette vitesse est une méthode du type « point fixe » nommée pK-F. Elle a été développée par Namini (1992). Supposant que les  $m$  pulsations  $\omega_j$  des  $m$  premiers modes ont été calculées, on peut suivre l'algorithme proposé par Patron Solares (1998):

On recherche des solutions de la forme  $s = (\delta+i)\omega$  à l'équation :

$$\left| \underline{\underline{G}}(s) \right| = \left| -s^2 \underline{\underline{M}} + s \left( \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}_{ae}(\text{Im}(s)) \right) + \left( \underline{\underline{K}} - \underline{\underline{K}}_{ae}(\text{Im}(s)) \right) \right| = 0 \quad (4.53)$$

La procédure qui suit est réalisée pour des vitesses croissantes  $U_k$ , ( $k=0, \dots, f$ ) :

1. Calcul de deux valeurs initiales de  $s$  :

$$s_{j1}(\bar{U}_k) = -0,01\omega_j + i\omega_j \quad (4.54)$$

$$s_{j2}(\bar{U}_k) = i\omega_j \quad (4.55)$$

2. Calcul des coefficients instationnaires de Scanlan correspondant aux fréquences réduites :

$$K_{j1} = \frac{B \text{Im}(s_{j1})}{\bar{U}_k} \quad (4.56)$$

$$K_{j2} = \frac{B \operatorname{Im}(s_{j2})}{\bar{U}_k} \quad (4.57)$$

3. Calcul du déterminant de  $G(s)$  correspondant à chaque valeur de  $s_{j1}(\bar{U}_k)$  et  $s_{j2}(\bar{U}_k)$
4. Définition d'une nouvelle valeur de  $s$  en utilisant un schéma linéaire d'interpolation :

$$s_{j3}(\bar{U}_k) = \frac{s_{j2}(\bar{U}_k) |G(s_{j1})| - s_{j1}(\bar{U}_k) |G(s_{j2})|}{|G(s_{j1})| - |G(s_{j2})|} \quad (4.58)$$

5. Répétition des étapes 3-4 jusqu'à satisfaction du critère de convergence :

$$|G(s_{j2})| \leq \text{tolérance 1}$$

Pour chaque nouvelle itération,  $s_{j1}(\bar{U}_k) = s_{j2}(\bar{U}_k)$  et  $s_{j2}(\bar{U}_k) = s_{j3}(\bar{U}_k)$

6. Lorsque le test de l'étape 5 est vérifié, la réponse oscillatoire aéroélastiquement modifiée a été trouvée. En outre, si la condition :

$$|\operatorname{Re}(s_{j2})| \leq \text{tolérance 2}$$

est vérifiée, le flottement intervient pour la pulsation  $|\operatorname{Im}(s_{j2})|$  et la vitesse  $U_k$  est une vitesse critique de flottement.

« tolérance 1 » et « tolérance 2 » sont des seuils de convergence à définir.

### 4.3.7 Résolution complète

On cherche maintenant à calculer la réponse d'une structure élançée soumise à l'action turbulente du vent. L'équation (4.51) permet, pour une pulsation  $\omega$  donnée, de déterminer la réponse de la structure étudiée dans la base modale :

$$\underline{q}(\omega) = \underline{H}(\omega) \underline{\Phi}^T \underline{F}_t(\omega) \quad (4.59)$$



où  $\underline{\underline{H}}(\omega)$  est la matrice de transfert du système définie par :

$$\underline{\underline{H}}(\omega) = \left[ -\omega^2 \underline{\underline{M}} + i\omega \left( \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}_{ac}(\bar{U}, \omega) \right) + \left( \underline{\underline{K}} - \underline{\underline{K}}_{ac}(\bar{U}, \omega) \right) \right]^{-1} \quad (4.60)$$

Dans le cas général, la matrice  $H(\omega)$  n'est pas diagonale ; son inversion pour différentes valeurs de  $\omega$  représente donc des temps de calcul relativement importants. C'est néanmoins la seule façon de faire intervenir l'intégralité des phénomènes aéroélastiques dans le domaine spectral.

La densité spectrale de puissance de chaque coordonnée généralisée s'obtient en multipliant à droite l'équation (4.59) par son expression adjointe :

$$\underline{\underline{S}}_q(\omega) = \underline{\underline{H}}(\omega) \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{S}}_{F_t}(\omega) \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{H}}(\omega)^{T*} \quad (4.61)$$

Une fois connue la matrice de densité spectrale des déplacements modaux, on peut retourner dans le domaine temporel et estimer leurs variances :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{q_1 q_1}^2 & \cdots & \sigma_{q_1 q_m}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{q_m q_1}^2 & \cdots & \sigma_{q_m q_m}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \underline{\underline{S}}_q(\omega) d\omega \quad (4.62)$$

La matrice variance des déplacements nodaux peut alors être calculée de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{d_1 d_1}^2 & \cdots & \sigma_{d_1 d_n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{d_n d_1}^2 & \cdots & \sigma_{d_n d_n}^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Phi}} \begin{bmatrix} \sigma_{q_1 q_1}^2 & \cdots & \sigma_{q_1 q_m}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{q_m q_1}^2 & \cdots & \sigma_{q_m q_m}^2 \end{bmatrix} \underline{\underline{\Phi}}^T \quad (4.63)$$

Les termes diagonaux représentent les carrés des écarts-types de chaque degré de liberté de la structure ; les autres termes représentent les termes de covariance des différentes paires de degrés de liberté.

### 4.3.8 Résolution simplifiée

Le principe consiste à reprendre l'équation matricielle (4.51) et à en éliminer les termes non diagonaux. Cela revient à éliminer tout phénomène de couplage structurel et aérodynamique entre les différents

modes de la structure. En ce qui concerne l'amortissement structural, cette simplification ne change en réalité pas grand chose dans la mesure où les termes couplés sont très difficiles à calculer et donc très mal connus. Par contre, les termes aéroélastiques n'apparaissent plus que sous forme d'amortissement modal ajouté à l'amortissement structural et un glissement en fréquence.

Cette simplification est tout à fait justifiée dans le cas où les fréquences des différents modes sont bien détachées. Dans le cas de ponts suspendus ou à haubans "vraie grandeur", lorsque les fréquences des modes significatifs sont proche, les termes de couplage peuvent prendre un rôle plus important, et l'hypothèse simplificatrice perdre de sa pertinence.

Le système matriciel (4.51) se résume donc à  $m$  systèmes indépendants à un degré de liberté :

$$(-\omega^2 m_g + i \omega c_g + k_g) q(\omega) = f_{tg}(\omega) \quad (4.64)$$

où  $m_g, c_g, k_g, f_{tg}$  sont respectivement les masse, amortissement, raideur et force généralisées.

On réécrit sous forme normalisée :

$$(-\omega^2 + 2i \omega \omega_f \xi_f + \omega_f^2) q(\omega) = h(\omega) q(\omega) = \frac{f_{tg}(\omega)}{m_g} \quad (4.65)$$

$$\text{avec } \omega_f = \omega_0 + \Delta\omega \text{ et } \xi_f = \xi_s + \xi_a$$

Deux solutions s'offrent maintenant à nous. La première consiste à calculer  $S_q(\omega)$  pour  $\omega$  variant de « 0 à  $\infty$  » puis à estimer l'écart-type des déplacements modaux par l'intégration classique :

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_q(\omega) d\omega \quad (4.66)$$

La seconde consiste à considérer la solution  $q$  comme la somme d'une contribution quasi-statique (excitations de basses fréquences) et d'une contribution dynamique (excitation à la fréquence de résonance).

La contribution dynamique est calculée en remplaçant l'excitation réelle par un bruit blanc d'intensité égale à la densité de puissance spectrale de l'excitation à la fréquence naturelle du système. Cela donne (Preumont, 1990):

$$\sigma_q^{\text{dyn}^2} = \frac{\pi S_f(\omega_f)}{2\xi m_g^2 \omega_f^3} \quad (4.67)$$

Les conditions sous lesquelles l'approximation se justifie sont :

- Les valeurs de  $S_f(\omega)$  sont telles que la contribution dominante de l'intégrale provient du proche voisinage de  $\omega_f$  ;
- $S_f(\omega)$  varie lentement autour de la pulsation naturelle  $\omega_f$ .

La contribution quasi-statique est calculée en assimilant l'ensemble du spectre des sollicitations à une sollicitation statique, c'est-à-dire associé à une admittance mécanique unitaire.

$$\sigma_q^{\text{qs}^2} = \frac{\sigma_f^2}{m_g \omega_f^2} \quad (4.68)$$

Cette approximation est a priori beaucoup plus grossière que la précédente ; en outre une partie de la contribution quasi statique est déjà incluse dans la contribution dynamique. Mais cela n'a pas de répercussions fâcheuses sur la précision des résultats. En effet, l'importance de la contribution quasi-statique par rapport à la contribution dynamique est généralement faible.

Un schéma de principe de la méthode spectrale simplifiée est présenté figure 4.4.

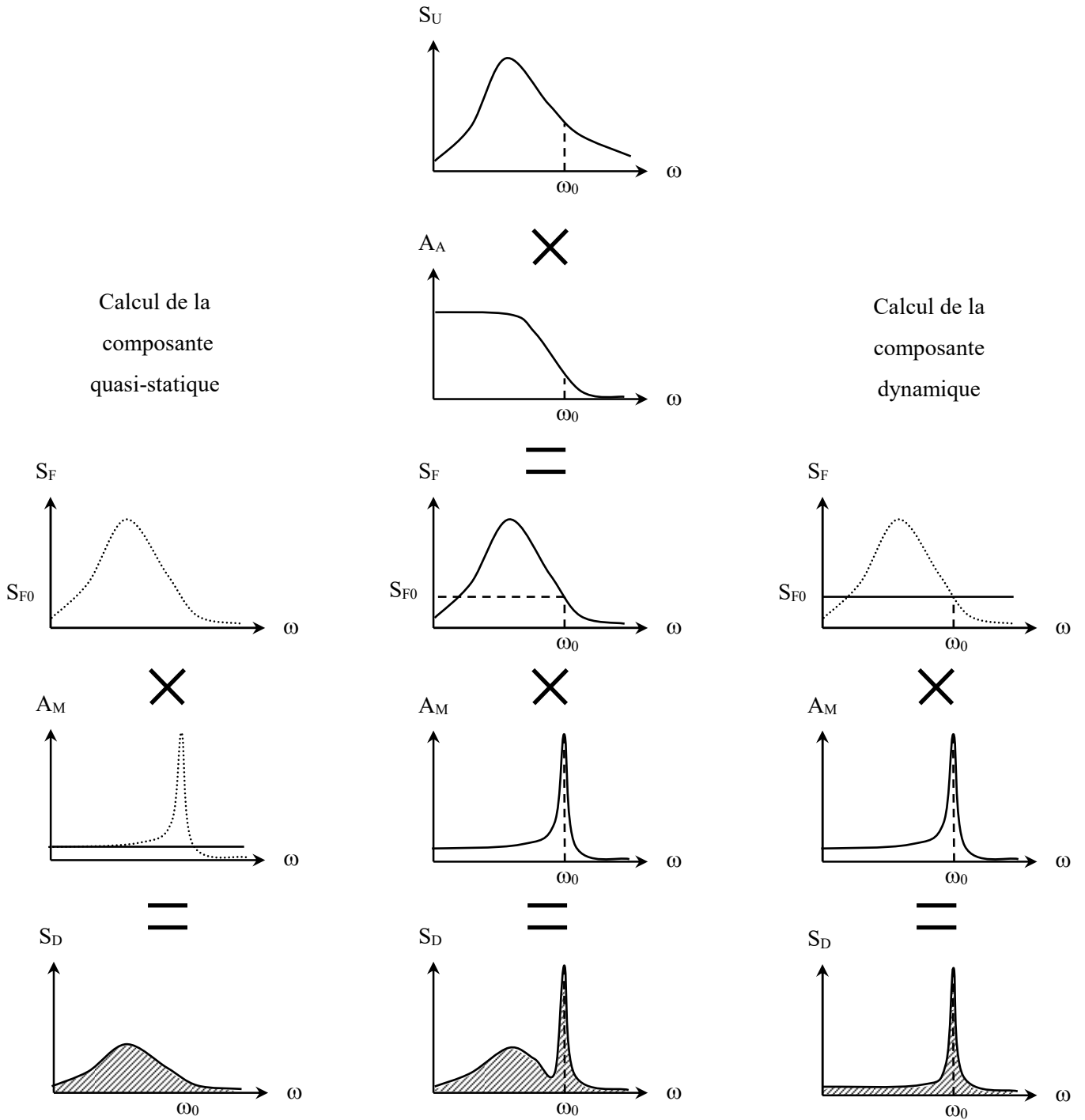


Figure 4.4 – Schéma de principe de la méthode spectrale : calcul des écarts-types des composantes dynamique et quasi-statique des déplacements modaux

$S_U$  : densité spectrale de puissance du vent

$S_F$  : densité spectrale de puissance des forces

$S_D$  : densité spectrale de puissance des déplacements

$A_A$  : admittance aérodynamique  $A_M$  : admittance mécanique

$\omega_0$  : pulsation de résonance du mode considéré

## 4.4 Simulation numérique d'un signal de vent tridimensionnel spatialement corrélé

Le calcul temporel de la réponse d'une structure élancée sous l'action du vent nécessite une formulation temporelle des forces aérodynamiques. En particulier, on doit pouvoir imposer, sur chaque élément de la structure, un signal de forces turbulentes respectant des propriétés statistiques bien précises. Cela nous amène à générer un signal temporel tridimensionnel de vent dont les propriétés sont exprimées dans le domaine fréquentiel sous forme de matrices de densité spectrale.

Trois raisons nous amènent à insérer ce sujet entre la présentation de la méthode spectrale et la présentation de la méthode temporelle :

- Tout d'abord, il ne s'agit pas de calcul temporel au sens où nous l'entendons mais plutôt de génération de conditions d'entrée à destination du calcul temporel ;
- ensuite, il nous semble que ce sujet constitue une véritable transition entre les approches spectrales et temporelles ;
- enfin, la portée des méthodes présentées par la suite dépasse largement le cadre des structures souples. Les applications sont multiples : génération de vents traversiers pour le calcul de la tenue au vent des trains, étude du comportement dynamique des grues à tour, génération de conditions limites pour des calculs C.F.D. type L.E.S ou D.N.S., ...

De nombreuses méthodes numériques existent permettant de générer des signaux multidimensionnels spatialement corrélés. La plus utilisée dans le domaine du « wind engineering » est celle développée par Shinozuka et Lin en 1972. Cette méthode présente surtout l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et peu coûteuse en temps de calculs. Néanmoins ses performances sont un peu décevantes dans le domaine des basses fréquences.

C'est pourquoi nous proposons également une autre méthode de simulation, plus récente, aux fondements théoriques plus solides, mais également plus lourde en terme de temps de calculs. Cette méthode, dite de « simulation conditionnelle », est basée sur l'algorithme proposé par Jin, Lutes et Sarkani (1997).

#### 4.4.1 Méthode de Shinozuka

Cette méthode permet de générer en  $n$  points de l'espace  $n$  processus corrélés  $u_k$  avec, en entrée, un pas de temps  $\Delta t$ , une durée de simulation  $T$ , et les variables permettant de définir les spectres et interspectres entre chacun des signaux. Dans notre cas, il s'agit de la vitesse moyenne du vent, des écart-types et échelles de la turbulence, et des coefficients de la cohérence.

Dans un premier temps, on détermine la fréquence de coupure  $f_c$  telle que la quasi-totalité de l'énergie du processus  $u(t)$  soit localisée dans la bande fréquentielle  $[-f_c, +f_c]$  i.e. telle que

$$\int_{-f_c}^{+f_c} S_u(f) df = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(f) df \quad (4.69)$$

avec  $\alpha$  suffisamment grand. Pour un vent moyen vraie grandeur, une valeur de 0,95 pour  $\alpha$  donne une fréquence de coupure égale à environ 3Hz. Dans la pratique, un autre critère permettant de définir la fréquence de coupure est la fréquence du dernier mode de la structure considéré. Dans le cas d'un pont comme celui de Rion-Antirion, la gamme de fréquence des 20 premiers modes considérés est incluse dans l'intervalle  $[0,1\text{Hz}, 0,5\text{Hz}]$ . Autant dire que bien avant 3 Hz il ne se passera plus rien dynamiquement parlant.

La fréquence de Nyquist définie par

$$f_N = \frac{1}{2 \Delta t} \quad (4.70)$$

doit, d'après la règle d'échantillonnage de Shannon, vérifier l'inégalité suivante :

$$f_N \geq f_c \quad (4.71)$$

Bien entendu, plus  $f_N$  est élevé plus  $\Delta t$  est petit et donc, pour une durée de simulation donnée, plus le nombre de points à simuler sera élevé. Dans la pratique, le compromis généralement fait consiste à transformer (4.71) en égalité, ce qui permet d'écrire :

$$\Delta t = \frac{1}{2 f_c} \quad (4.72)$$

L'espace des fréquences  $[-f_c + f_c]$  est alors discrétisé suivant le pas :

$$\Delta f = \frac{2f_c}{n} \quad (4.73)$$

Pour chaque pas en fréquence on calcule la matrice de densité spectrale du vent turbulent  $\underline{\underline{S}}(i\Delta f)$  d'après les équations (1.13). Cette matrice étant réelle et symétrique, on peut lui appliquer la décomposition de Cholesky :

$$\underline{\underline{S}}(i\Delta f) = \underline{\underline{H}}(i\Delta f) \underline{\underline{H}}(i\Delta f)^T \quad (4.74)$$

où  $\underline{\underline{H}}(i\Delta f)$  est une matrice triangulaire inférieure.

Les éléments de la matrice  $\underline{\underline{H}}(i\Delta f)$  peuvent être considérés comme les coefficients d'une combinaison linéaire dans une base de  $n$  processus unitaires et uniformément distribués (bruit blanc par exemple). Ce processus unitaire peut être écrit, pour chaque fréquence  $i\Delta f$  sous la forme d'un vecteur colonne  $\underline{\underline{X}}(i\Delta f)$  de dimension  $n$  :

$$\underline{\underline{X}}(i\Delta f) = \begin{bmatrix} e^{i\theta_{1i}} \\ \vdots \\ e^{i\theta_{ki}} \\ \vdots \\ e^{i\theta_{ni}} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$\theta_{ki}$  est la phase associée au point  $k$  pour la  $i^{\text{ème}}$  fréquence  $i\Delta f$ . C'est une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0 \ 2\pi]$ . Ceci nous assure la convergence du processus simulé  $u$  vers un processus gaussien quand  $n$  tend vers l'infini.

Soit  $\underline{\underline{Y}}(i\Delta f)$  le vecteur colonne défini par :

$$\underline{\underline{Y}}(i\Delta f) = \underline{\underline{H}}(i\Delta f) \underline{\underline{X}}(i\Delta f) \quad (4.76)$$

Le processus temporel  $u_k$  est alors défini par la transformée de Fourier inverse de  $\underline{\underline{Y}}_k(i\Delta f)$ .

Afin d'améliorer l'aspect des processus ainsi générés, on peut multiplier préalablement chaque matrice  $\underline{\underline{S}}(i\Delta f)$  par une variable aléatoire  $\varkappa_i$  admettant une répartition gaussienne, unitaire et centrée.

#### 4.4.2 Méthode de Jin, Lutes et Sarkani (1997)

Cette méthode de simulation appartient à la famille des simulations « conditionnelles » ; elle consiste à générer un nouveau signal temporel dont on connaît les propriétés statistiques intrinsèques ainsi que le degré de corrélation avec une série de signaux temporels existants ; ces signaux existants pouvant eux-mêmes être synthétiques ou issus de données expérimentales.

##### a) Hypothèses et notations

Supposons connus  $n-1$  processus temporels tridimensionnels en  $n-1$  points de l'espace. Il s'agit maintenant d'en générer un  $n^{\text{ième}}$ ; notons  $\{\underline{u}^n(t)\} = \{u_1^n(t), u_2^n(t), u_3^n(t)\}^T$  ce nouveau processus vectoriel et  $\underline{u}^n(t) = (u_1^n(t), u_2^n(t), u_3^n(t))^T$  la valeur prise à l'instant  $t$  par ce processus; on suppose également connues ses fonctions densité spectrale et interspectrales de puissance que l'on note respectivement  $S^n(\omega)$  et  $S^{nm}(\omega)$ ,  $m$  variant de 1 à  $n-1$ .

La composante  $\{u_1^n(t)\}$  est simulée en premier, à partir de la connaissance des signaux existants  $\{u^m(t)\}$  ; on génère ensuite  $\{u_2^n(t)\}$  à partir de  $\{u_1^n(t)\}$  et des  $\{u^m(t)\}$ , et enfin  $\{u_3^n(t)\}$  à partir de  $\{u_1^n(t)\}$ ,  $\{u_2^n(t)\}$ , et des  $\{u^m(t)\}$ .

Les processus simulés étant supposés gaussiens, la distribution conditionnelle<sup>5</sup> de chaque variable aléatoire  $u_r^n(t)$  est connue si sa moyenne et sa variance conditionnelles sont connues. L'ensemble du processus  $\{u_r^n(t)\}$ , lui, est entièrement défini par sa moyenne conditionnelle et sa fonction de covariance conditionnelle (ou sa fonction densité spectrale de puissance conditionnelle si l'on raisonne dans le domaine fréquentiel).

Rappelons également que, dans le cas de processus gaussiens corrélés, la moyenne d'ensemble conditionnelle d'une variable aléatoire, représentant la valeur prise par un processus à un instant  $t$ , peut être considérée comme une combinaison linéaire des valeurs prises par les autres processus, mais que la covariance conditionnelle de cette même variable ne doit obéir qu'à la fonction de covariance conditionnelle propre au processus considéré et ne dépendant pas des valeurs prises par les autres processus.

---

<sup>5</sup> On parle de distribution conditionnelle d'un processus (resp. d'une variable aléatoire) lorsque la valeur prise par ce processus à un instant  $t$  (resp. cette variable lors d'un tirage  $t$ ) est dépendante des valeurs prises par d'autres processus resp. variables) à cet instant  $t$  (resp. lors de ce tirage  $t$ ).



On peut ainsi écrire la composante  $u_r^n(t)$  sous la forme suivante :

$$u_r^n(t) = g_r^n(t) + Y_r^n(t) \quad (4.77)$$

où  $g_r^n(t)$  représente la moyenne conditionnelle et  $Y_r^n(t)$  une variable gaussienne centrée indépendante des composantes précédentes.

La relation (4.77) peut être réécrite dans le domaine spectral par simple transformée de Fourier :

$$\hat{u}_r^n(\omega) = \hat{g}_r^n(\omega) + \hat{Y}_r^n(\omega) \quad (4.78)$$

### b) Evaluation de la moyenne conditionnelle dans le cas général

La moyenne conditionnelle du vecteur  $\underline{u}^n(t)$  peut être formulée ainsi :

$$\underline{g}^n(t) = (g_1^n(t), g_2^n(t), g_3^n(t))^T = \begin{pmatrix} E[u_1^n(t) | \{u^1(t)\}, \{u^2(t)\}, \dots, \{u^{n-1}(t)\}] \\ E[u_2^n(t) | \{u^1(t)\}, \{u^2(t)\}, \dots, \{u^{n-1}(t)\}, \{u_1^n(t)\}] \\ E[u_3^n(t) | \{u^1(t)\}, \{u^2(t)\}, \dots, \{u^{n-1}(t)\}, \{u_1^n(t)\}, \{u_2^n(t)\}] \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Sa dépendance linéaire par rapport aux signaux déjà simulés peut s'exprimer sous la forme générale suivante:

$$\underline{g}^n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{W}}^{nm}(\alpha) \underline{u}^m(t - \alpha) d\alpha \quad (4.80)$$

Les  $\underline{\underline{W}}^{nm}(\alpha)$  sont les matrices de pondération  $3 \times 3$ , pleines pour  $m < n$  ; les termes de  $\underline{\underline{W}}^{nn}(\alpha)$ , eux, sont nuls, excepté sous la diagonale.

Il s'agit maintenant de déterminer les valeurs des  $9 \times (n - 1) + 3$  fonctions de pondération  $\underline{\underline{W}}_{jk}^{nl}(\alpha)$ . Pour cela, on développe les fonctions de corrélation entre  $g_r^n(t)$  et les différents signaux générés précédemment :

$$R_{rk}^{np} d(\tau) = E \left[ g_r^n(t) u_k^p(t - \tau) \right] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} W_{ij}^{nm}(\alpha) R_{jk}^{mp}(\tau - \alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{r-1} \int_{-\infty}^{\infty} W_{ij}^{nn}(\alpha) R_{jk}^{np}(\tau - \alpha) d\alpha \quad (4.81)$$

avec pour  $p = 1, \dots, n-1$   $k = 1, 2, 3$   
 pour  $p = n$   $k = 1, \dots, r-1$

On applique la transformée de Fourier à l'équation (4.81), ce qui conduit à la formulation algébrique suivante :

$$S_{rk}^{np}(\omega) = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^3 \hat{W}_{ij}^{nm}(\omega) S_{jk}^{mp}(\omega) + \sum_{j=1}^{r-1} \hat{W}_{ij}^{nn}(\omega) S_{jk}^{np}(\omega) \quad (4.82)$$

avec pour  $p = 1, \dots, n-1$   $k = 1, 2, 3$   
 pour  $p = n$   $k = 1, \dots, r-1$

On se retrouve ainsi, pour une valeur de  $\omega$  donnée avec un système linéaire à  $3 \times (n-1) + r-1$  équations et autant d'inconnues  $\hat{W}_{ij}^{nm}(\omega)$  et  $\hat{W}_{ij}^{nn}(\omega)$ . Sous forme matricielle, cela donne :

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{11} & S_{21}^{11} & S_{31}^{11} & \cdots & \cdots & S_{11}^{n-1,1} & S_{21}^{n-1,1} & S_{31}^{n-1,1} & S_{11}^{n,1} & \cdots & S_{r-1,1}^{n,1} \\ S_{12}^{11} & S_{22}^{11} & S_{32}^{11} & \cdots & \cdots & S_{12}^{n-1,1} & S_{22}^{n-1,1} & S_{32}^{n-1,1} & S_{12}^{n,1} & \cdots & S_{r-1,2}^{n,1} \\ S_{13}^{11} & S_{23}^{11} & S_{33}^{11} & \cdots & \cdots & S_{13}^{n-1,1} & S_{23}^{n-1,1} & S_{33}^{n-1,1} & S_{13}^{n,1} & \cdots & S_{r-1,3}^{n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{11}^{1, n-1} & S_{21}^{1, n-1} & S_{31}^{1, n-1} & \cdots & \cdots & S_{11}^{n-1, n-1} & S_{21}^{n-1, n-1} & S_{31}^{n-1, n-1} & S_{11}^{n, n-1} & \cdots & S_{r-1,1}^{n, n-1} \\ S_{12}^{1, n-1} & S_{22}^{1, n-1} & S_{32}^{1, n-1} & \cdots & \cdots & S_{12}^{n-1, n-1} & S_{22}^{n-1, n-1} & S_{32}^{n-1, n-1} & S_{12}^{n, n-1} & \cdots & S_{r-1,2}^{n, n-1} \\ S_{13}^{1, n-1} & S_{23}^{1, n-1} & S_{33}^{1, n-1} & \cdots & \cdots & S_{13}^{n-1, n-1} & S_{23}^{n-1, n-1} & S_{33}^{n-1, n-1} & S_{13}^{n, n-1} & \cdots & S_{r-1,3}^{n, n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{11}^{1, n} & S_{21}^{1, n} & S_{31}^{1, n} & \cdots & \cdots & S_{11}^{n-1, n} & S_{21}^{n-1, n} & S_{31}^{n-1, n} & S_{11}^{n, n} & \cdots & S_{r-1,1}^{n, n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1, r-1}^{1, n} & S_{2, r-1}^{1, n} & S_{3, r-1}^{1, n} & \cdots & \cdots & S_{1, r-1}^{n-1, n} & S_{2, r-1}^{n-1, n} & S_{3, r-1}^{n-1, n} & S_{1, r-1}^{n, n} & \cdots & S_{r-1, r-1}^{n, n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{W}_{r,1}^{n,1} \\ \hat{W}_{r,2}^{n,1} \\ \hat{W}_{r,3}^{n,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{W}_{r,1}^{n, n-1} \\ \hat{W}_{r,2}^{n, n-1} \\ \hat{W}_{r,3}^{n, n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{W}_{r,1}^{n, n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{W}_{r, r-1}^{n, n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{r,1}^{n,1} \\ S_{r,2}^{n,1} \\ S_{r,3}^{n,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{r,1}^{n, n-1} \\ S_{r,2}^{n, n-1} \\ S_{r,3}^{n, n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{r,1}^{n, n} \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{r, r-1}^{n, n} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Une fois ce système résolu, on calcule aisément la moyenne conditionnelle dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{g}^n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \hat{W}^{nm}(\omega) \hat{u}^m(\omega) \quad (4.84)$$

Une simple transformée de Fourier inverse permet de remonter au signal temporel  $\underline{g}^n(t)$ .

**c) Evaluation de la variable aléatoire Y**

Les termes  $\hat{Y}_r^n(\omega)$  peuvent alors être calculés en insérant (4.84) dans (4.78) :

$$\hat{Y}_r^n(\omega) = \hat{u}_r^n(\omega) - \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^3 \hat{W}_{rk}^{nm}(\omega) \hat{u}_{kr}^{mn}(\omega) \quad (4.85)$$

En multipliant chaque membre de l'équation par son conjugué, puis en appliquant une moyenne d'ensemble, on obtient l'expression de la densité spectrale de puissance de  $Y_r^n(t)$  :

$$E\left[\hat{Y}_r^n(\omega)\hat{Y}_r^{n*}(\omega)\right] = \frac{T}{2\pi} \left[ S_{rr}^{nn}(\omega) - \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^3 \hat{W}_{rk}^{nm}(\omega) S_{kr}^{mn}(\omega) \right] \quad (4.86)$$

Il nous reste à générer un signal aléatoire respectant la fonction densité spectrale de puissance déduite de (4.86) ; pour cela, on choisi d'utiliser la forme suivante (Lutes et al. 1996):

$$\hat{Y}_r^n(\omega) = B_r e^{j\theta_r} \quad r = 1, 2, 3 \quad (4.87)$$

où  $\theta_r$  est une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0, 2\pi]$  et  $B_r$  une variable aléatoire, indépendante de  $\theta_r$  suivant une distribution de Rayleigh avec :

$$E\left[B_r^2\right] = E\left[\hat{Y}_r^n(\omega)\hat{Y}_r^{n*}(\omega)\right] \quad (4.88)$$

**d) Algorithme de résolution**

On comprend bien que la résolution du système (4.83) va occuper l'essentiel du temps de calcul. C'est donc à ce niveau qu'il nous faut chercher à optimiser la procédure algorithmique.

Le système (4.83) peut s'écrire sous la forme synthétique suivante :

$$\underline{\underline{A}}_{[j]}^T(\omega) \underline{\underline{X}}_{[j]}(\omega) = \underline{\underline{a}}_{[j]}(\omega) \quad (4.89)$$

où  $J$  représente le rang du système matriciel ; si  $N$  représente le nombre total de points,  $J$  varie de 1 à  $3N-1$ . Si l'on considère que la complexité de résolution du système (4.89) est de l'ordre de  $J^3$ , la complexité de la résolution de l'ensemble des systèmes, pour  $J$  variant de 1 à  $3N-1$ , est a priori de l'ordre de  $(3N)^4$ . Cependant, les auteurs proposent un algorithme tirant partie de la spécificité du problème et permettant de ramener l'ordre de la complexité à  $(3N)^2$ .

L'astuce consiste à profiter de la relation existant entre les matrices  $\underline{\underline{A}}_{[j]}^T(\omega)$  et les vecteurs  $\underline{a}_{[j]}(\omega)$  pour différentes valeurs de  $J$ . En particulier,  $\underline{\underline{A}}_{[j+1]}^T(\omega)$  se déduit de  $\underline{\underline{A}}_{[j]}^T(\omega)$  par l'adjonction d'une ligne et d'une colonne dont les  $J$  premiers éléments sont issus de  $\underline{a}_{[j]}(\omega)$  (conjugués pour la colonne). En fait, seul un nouveau scalaire est rajouté :

$$\underline{\underline{A}}_{[j+1]}^T(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{[j]}(\omega) & \underline{a}_{[j]}(\omega) \\ \underline{a}_{[j]}^{*T}(\omega) & \underline{a}_{[j+1]}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Pour résoudre (4.90), on commence par appliquer une décomposition de Cholesky à la matrice  $\underline{\underline{A}}_{[j]}^T(\omega)$  (qui est hermitienne) :

$$\underline{\underline{A}}_{[j]}^T(\omega) = \underline{\underline{L}}_{[j]}(\omega)\underline{\underline{L}}_{[j]}^{*T}(\omega) \quad (4.91)$$

où  $\underline{\underline{L}}_{[j]}(\omega)$  est une matrice triangulaire inférieure.

Le système (4.91) peut ainsi être décomposé en deux sous-systèmes triangulaires résolus successivement :

$$\underline{\underline{L}}_{[j]}(\omega)\underline{\underline{Z}}_{[j]}(\omega) = \underline{a}_{[j]}(\omega) \quad (4.92)$$

$$\underline{\underline{L}}_{[j]}^{*T}(\omega)\underline{\underline{X}}_{[j]}(\omega) = \underline{\underline{Z}}_{[j]}(\omega) \quad (4.93)$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

- La matrice  $\underline{\underline{L}}_{[j+1]}(\omega)$  se déduit de  $\underline{\underline{L}}_{[j]}(\omega)$  par adjonction d'une nouvelle ligne,
- Les  $J$  premiers éléments de cette nouvelle ligne sont ceux de  $\underline{\underline{Z}}_{[j]}^{*T}(\omega)$ .

Ainsi, connaissant  $\underline{L}_{[j]}(\omega)$ , on peut déduire  $\underline{L}_{[j+1]}(\omega)$  par la formulation qui suit :

$$\underline{L}_{[j+1]}(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{L}_{[j]}(\omega) & 0 \\ \underline{Z}_{[j]}^{*T}(\omega) & l_{[j+1]}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Reste à calculer le terme  $l_{[j+1]}(\omega)$ . Pour cela on écrit la matrice  $\underline{A}_{[j+1]}^T(\omega)$  en combinant (4.91) et (4.94).

Cela donne :

$$\underline{A}_{[j+1]}^t(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{L}_{[j]}(\omega)\underline{L}_{[j]}^{*t}(\omega) & \underline{L}_{[j]}(\omega)\underline{Z}_{[j]}(\omega) \\ \underline{Z}_{[j]}^{*t}(\omega)\underline{L}_{[j]}^{*t}(\omega) & \underline{Z}_{[j]}^{*t}(\omega)\underline{Z}_{[j]}(\omega) + |l_{[j+1]}(\omega)|^2 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

En comparant (4.95) et (4.90), on déduit  $l_{[j+1]}(\omega)$  :

$$l_{j+1}(\omega) = \left| \underline{a}_{j+1}(\omega) - \underline{Z}_{[j]}^{*T}(\omega)\underline{Z}_{[j]}(\omega) \right|^{\frac{1}{2}} \quad (4.96)$$

On peut ainsi décomposer la procédure numérique, pour une valeur de  $\omega$  donnée, comme suit :

- On applique la décomposition de Cholesky à  $\underline{A}_{[2]}^T(\omega)$  puis on calcule  $\underline{Z}_{[2]}(\omega)$  et  $\underline{X}_{[2]}(\omega)$  ;
- Pour J variant de 3 à 3N-1 :  
on utilise (4.94) et (4.96) pour calculer  $\underline{L}_{[j]}^T(\omega)$  d'après  $\underline{L}_{[j-1]}^T(\omega)$ ,  $\underline{Z}_{[j-1]}(\omega)$ , et  $l_{[j]}(\omega)$  ;  
on en déduit  $\underline{Z}_{[j]}(\omega)$  et  $\underline{X}_{[j]}(\omega)$  i.e. les fonctions de pondération  $W(\omega)$  ;
- Pour r variant de 2 à 3, on utilise (4.84) pour générer  $\hat{g}_r^1(\omega)$  ;  
On calcule ensuite  $\hat{Y}_r^1(\omega)$  d'après (4.87) ;  
On en déduit  $\hat{u}_r^1(\omega)$  à partir de (4.78) ;
- Pour n variant de 2 à N, et r variant de 1 à 3, on utilise (4.84) pour générer  $\hat{g}_r^n(\omega)$  ;

On calcule ensuite  $\hat{Y}_r^n(\omega)$  d'après (4.87) pour  $r = 1$  à 3;

On en déduit  $\hat{u}_r^n(\omega)$  à partir de (4.78).

On réitère l'ensemble de cette procédure sur une plage de pulsation jugée nécessaire et suffisante pour le cas étudié. La problématique est évidemment la même que pour la méthode de Shinozuka. On obtient ainsi  $3N$  processus dans le domaine spectral. Par simples transformées de Fourier inverses, on en déduit les  $3N$  processus dans le domaine temporel.

#### 4.4.3 Comparaison entre les deux méthodes

Afin de justifier pleinement l'utilisation de l'algorithme de Sarkani au détriment de celui de Shinozuka, il convient de réaliser un test comparatif entre les deux méthodes. La configuration utilisée pour cette comparaison est la suivante:

- Deux points situés à la même altitude avec un écartement variable dans la direction transversale;
- Vitesse moyenne du vent  $\bar{U} = 10 \text{ m/s}$  ;
- Echelle longitudinales de la turbulence  $L_u^x = 0,5 \text{ m}$  ,  $L_w^x = 0,1 \text{ m}$  ;
- Coefficients de la cohérence  $C_u^y = 10$  ,  $C_w^y = 10$  ;
- Ecart types de la turbulence  $\sigma_u = 1,5 \text{ m/s}$  ,  $\sigma_w = 1 \text{ m/s}$

On compare d'une part les courbes de densité spectrale obtenues à l'aide des méthodes de Shinozuka et Sarkani avec les courbes théoriques issues des formulations de Karman, d'autre part la fonction de cohérence entre les deux signaux avec la fonction de cohérence théorique de Davenport. Les résultats présentés figure (4.5) et (4.6) correspondent à deux signaux de composante longitudinale de vent espacés de 0,4 m. Ils sont tout à fait représentatifs de l'ensemble des résultats obtenus.

En ce qui concerne la fidélité aux conditions spectrales imposées, on constate que l'algorithme de Sarkani est légèrement plus performant que celui de Shinozuka ; cependant la différence n'est pas frappante. Par contre, la fonction de cohérence est très bien simulée par la méthode de Sarkani alors que celle de Shinozuka la sous-estime très largement.

Notons que la performance de la méthode de Sarkani n'est pas très surprenante, étant donné que la base "déterministe" de chaque signal est construite d'après les contraintes en terme d'interspectres avec les autres signaux.

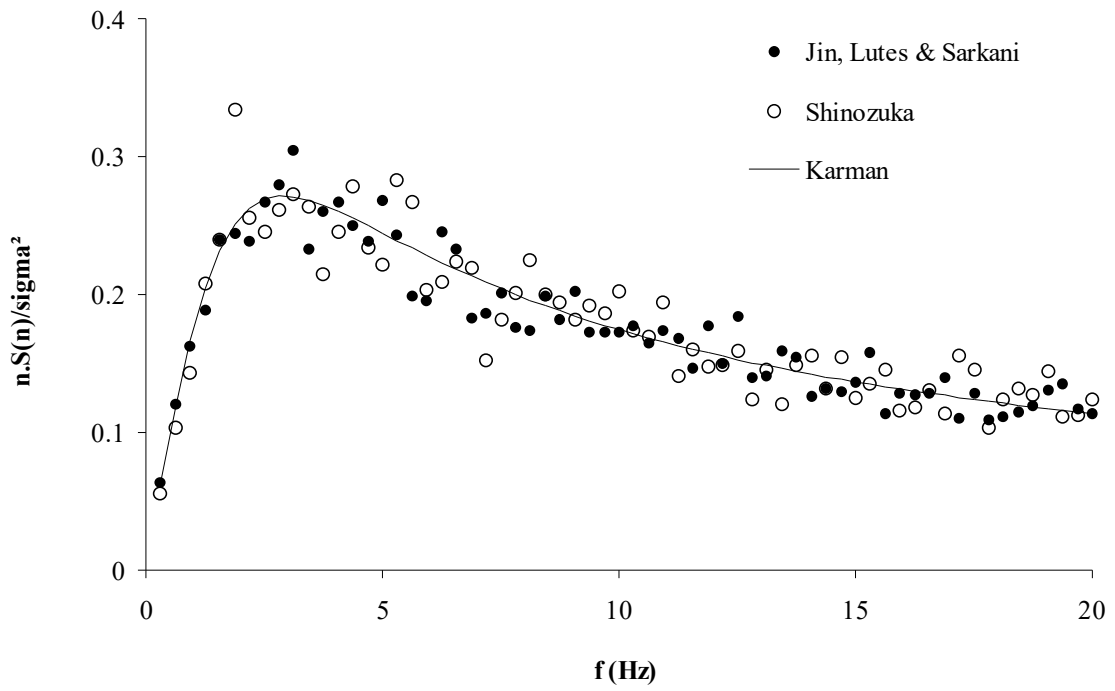


Figure 4.5 – Comparaison des spectres obtenus à partir des méthodes de Shinozuka et Sarkani

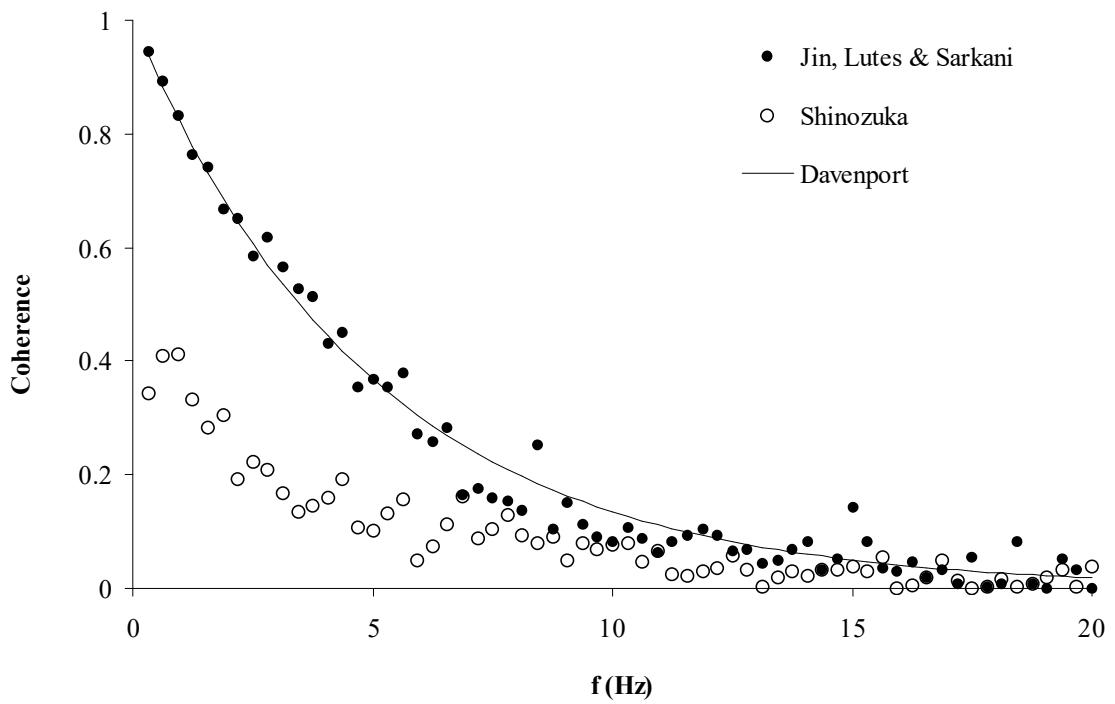


Figure 4.6 – Comparaison des cohérences obtenues à partir des méthodes de Shinozuka et Sarkani

## 4.5 La méthode temporelle

### 4.5.1 Mise en équation

#### a) Formulation des forces turbulentes

La formulation des forces turbulentes s'exprime directement à partir de la connaissance du signal de vent tridimensionnel précédemment calculé. On a vu que la linéarisation des forces aérodynamiques était peu pertinente pour certains profils de tabliers. Mais si cette approximation était nécessaire pour la méthode spectrale, il n'en est plus de même pour la méthode temporelle. On peut en effet, à chaque instant, et pour chaque élément, calculer l'incidence du vent dans le repère local et assigner de nouvelles valeurs aux coefficients aérodynamiques.

Pour cela, on approche les courbes d'évolutions des coefficients stationnaires par des fonctions polynomiales du 4<sup>ème</sup> degré. Nos trois coefficients stationnaires s'écrivent donc sous la forme :

$$C_X(\theta) = C_{1X} + C_{2X} \theta + C_{3X} \theta^2 + C_{4X} \theta^3 + C_{5X} \theta^4 \quad (4.97)$$

$$C_Y(\theta) = C_{1Y} + C_{2Y} \theta + C_{3Y} \theta^2 + C_{4Y} \theta^3 + C_{5Y} \theta^4 \quad (4.98)$$

$$C_M(\theta) = C_{1M} + C_{2M} \theta + C_{3M} \theta^2 + C_{4M} \theta^3 + C_{5M} \theta^4 \quad (4.99)$$

Le vecteur buffeting forces instantané s'écrit donc :

$$\underline{f}_t^e(t) = \frac{1}{2} \rho B \tilde{U}^2 \underline{C}_{12345} \underline{\Theta}(t) \quad (4.100)$$

avec 
$$\underline{\Theta}(t) = (1 \quad \theta \quad \theta^2 \quad \theta^3 \quad \theta^4)^T \quad (4.101)$$

et 
$$\underline{C}_{12345} = \begin{bmatrix} C_{1X} & C_{2X} & C_{3X} & C_{4X} & C_{5X} \\ C_{1Y} & C_{2Y} & C_{3Y} & C_{4Y} & C_{5Y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1M} & C_{2M} & C_{3M} & C_{4M} & C_{5M} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$



On exprime alors ce vecteur dans le repère général et la base nodale de l'élément :

$$\underline{f}_t^{ng}(t) = L \times \underline{P}_{12}^T \underline{N} \left( \frac{1}{2} \right)^T \underline{f}_t^e(t) \quad (4.103)$$

Dans l'absolu, la fonction d'admittance aérodynamique devrait intervenir ici sous forme de produits de convolution. On préfère cependant, dans un soucis d'économie de temps de calcul, la faire intervenir mode par mode, sous forme fréquentielle. Ainsi, pour chaque mode  $k$ , on réécrit l'équation (4.103) sous la forme :

$$\underline{f}_{tk}^{ng}(t) = L \times \underline{P}_{12}^T \underline{N} \left( \frac{1}{2} \right)^T \underline{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(\bar{U}, B, \omega_k) \underline{f}_t^e(t) \quad (4.104)$$

où  $\underline{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(\bar{U}, B, \omega_k)$  est une matrice diagonale (3\*3) contenant les racines carrées des admittances aérodynamiques mesurées pour les forces de trainée, portance, et moment. On obtient alors chacune des forces généralisées en multipliant à gauche par la transposée du vecteur propre correspondant :

$$\underline{f}_{tk}(t) = \underline{Z}_k^T \underline{f}_{tk}^{ng}(t) \quad (4.105)$$

### b) Formulation des forces aéroélastiques

Considérons dans un premier temps le cas de l'élément poutre. En un point de cet élément d'abscisse  $\psi$ , les déplacements verticaux et angulaires peuvent s'écrire sous la forme :

$$h(\psi, t) = y(\psi) \times h(t) \quad (4.106)$$

$$\alpha(\psi, t) = r_z(\psi) \times \alpha(t) \quad (4.107)$$

Le vecteur des forces aéroélastiques s'exerçant sur l'élément s'écrit alors, d'après (2.65-68) :

$$\underline{f}_{ac}^e(t) = (0 \quad L_{ac}(t) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad M_{ac}(t))^T \quad (4.108)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 L_{ae}(t) &= \int_e (\text{Lh}(t) + \text{L}\alpha(t)) J(\psi) d\psi = \\
 & \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left( \frac{C_{\text{Lh}1}}{B} \text{h}(t) + \frac{C_{\text{Lh}2}}{\bar{U}} \dot{\text{h}}(t) \right) \left( \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi \right) + \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left( \frac{C_{\text{L}\alpha 1}}{B} \alpha(t) + \frac{C_{\text{L}\alpha 2}}{B} \dot{\alpha}(t) \right) \left( \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi \right) \\
 & + \int_e (\text{Lh}_3(t) + \text{Lh}_4(t)) J(\psi) d\psi + \int_e (\text{L}\alpha_3(t) + \text{L}\alpha_4(t)) J(\psi) d\psi \quad (4.109)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{ae}(t) &= \int_e (\text{Mh}(t) + \text{M}\alpha(t)) J(\psi) d\psi = \\
 & \frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left( C_{\text{M}\alpha 1} \alpha(t) + \frac{BC_{\text{M}\alpha 1}}{\bar{U}} \dot{\alpha}(t) \right) \left( \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi \right) + \frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left( \frac{C_{\text{Mh}1}}{B} \text{h}(t) + \frac{C_{\text{Mh}2}}{\bar{U}} \dot{\text{h}}(t) \right) \left( \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi \right) \\
 & + \int_e (\text{Mh}_3(t) + \text{Mh}_4(t)) J(\psi) d\psi + \int_e (\text{M}\alpha_3(t) + \text{M}\alpha_4(t)) J(\psi) d\psi \quad (4.110)
 \end{aligned}$$

où les  $\int_e \text{Lh}_k(t) J(\psi) d\psi$ ,  $\int_e \text{L}\alpha_k(t) J(\psi) d\psi$ ,  $\int_e \text{Mh}_k(t) J(\psi) d\psi$ ,  $\int_e \text{M}\alpha_k(t) J(\psi) d\psi$  vérifient les relations :

$$\left( \int_e \dot{\text{Lh}}_k(t) J(\psi) d\psi \right) = -d_{\text{Lhk}} \frac{\bar{U}}{B} \int_e \text{Lh}_k(t) J(\psi) d\psi + \frac{C_{\text{Lhk}}}{B} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi \dot{\text{h}}(t) \quad (4.111)$$

$$\left( \int_e \dot{\text{L}\alpha}_k(t) J(\psi) d\psi \right) = -d_{\text{L}\alpha k} \frac{\bar{U}}{B} \int_e \text{L}\alpha_k(t) J(\psi) d\psi + C_{\text{L}\alpha k} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi \dot{\alpha}(t) \quad (4.112)$$

$$\left( \int_e \dot{\text{Mh}}_k(t) J(\psi) d\psi \right) = -d_{\text{Mhk}} \frac{\bar{U}}{B} \int_e \text{Mh}_k(t) J(\psi) d\psi + \frac{C_{\text{Mhk}}}{B} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi \dot{\text{h}}(t) \quad (4.113)$$

$$\left( \int_e \dot{\text{M}\alpha}_k(t) J(\psi) d\psi \right) = -d_{\text{M}\alpha k} \frac{\bar{U}}{B} \int_e \text{M}\alpha_k(t) J(\psi) d\psi + C_{\text{M}\alpha k} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi \dot{\alpha}(t) \quad (4.114)$$

On obtient ainsi la formulation vectorielle suivante, en introduisant le vecteur des déplacements  $\underline{d}$  dans un repère lié à l'élément:

$$\underline{f}_{ae}^e(t) = \underline{C}_{ae}^e \underline{\dot{d}} + \underline{K}_{ae}^e \underline{d} + \underline{A}_{ae}^e \underline{\zeta}^e \quad (4.115)$$

$$\underline{\dot{\zeta}}^e = \underline{D}_{ae}^e \underline{\zeta}^e + \underline{B}_{ae}^e \underline{\dot{d}} \quad (4.116)$$

avec :

$$\underline{d}(t) = (d_1(t) \quad h(t) \quad d_3(t) \quad d_4(t) \quad d_5(t) \quad \alpha(t))^T \quad (4.117)$$

$$\underline{\phi}^e = \begin{pmatrix} \int_e Lh_3(t) J(\psi) d\psi \\ \int_e Lh_4(t) J(\psi) d\psi \\ \int_e L\alpha_3(t) J(\psi) d\psi \\ \int_e L\alpha_4(t) J(\psi) d\psi \\ \int_e Mh_3(t) J(\psi) d\psi \\ \int_e Mh_4(t) J(\psi) d\psi \\ \int_e M\alpha_3(t) J(\psi) d\psi \\ \int_e M\alpha_4(t) J(\psi) d\psi \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

$$\underline{C}_{ae}^e = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Lh2}}{\bar{U}} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{L\alpha2} B}{\bar{U}} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Mh2} B}{\bar{U}} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{M\alpha2} B^2}{\bar{U}} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

$$\underline{K}_{ae}^e = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Lh1}}{B} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 & 0 & C_{L\alpha1} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{Mh1} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 & 0 & C_{M\alpha1} B \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

$$\underline{\underline{A}}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

$$\underline{\underline{D}}^e = -\frac{\bar{U}}{B} \begin{bmatrix} d_{Lh3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{Lh4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{La3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{La4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{Mh3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{Mh4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{Ma3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{Ma4} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

$$\underline{\underline{B}}^e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_{Lh3}}{B} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Lh4}}{B} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{La3} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{La4} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Mh3}}{B} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Mh4}}{B} \int_e y(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{Ma3} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{Ma4} \int_e r_z(\psi) J(\psi) d\psi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

On peut maintenant exprimer nos équations dans la base nodale de l'élément et le repère général en introduisant les matrices bien connues  $\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{P}}_{12}$  et en intégrant par la méthode du point milieu.  $\underline{\underline{d}}^{ng}$  devient le vecteur colonne (12\*1) contenant les déplacements aux deux nœuds de l'élément dans le repère général,  $\underline{\underline{\zeta}}^e$  est inchangé :

$$\underline{\underline{f}}_{ac}^{ng}(t) = \underline{\underline{C}}_{ac}^{ng} \dot{\underline{\underline{d}}}^{ng} + \underline{\underline{K}}_{ac}^{ng} \underline{\underline{d}}^{ng} + \underline{\underline{A}}_{ac}^{ng} \underline{\underline{\zeta}}^e \quad (4.124)$$

$$\underline{\underline{\zeta}}^e = \underline{\underline{D}}^{ng} \underline{\underline{\zeta}}^e + \underline{\underline{B}}^{ng} \dot{\underline{\underline{d}}}^{ng} \quad (4.125)$$

avec :

$$\underline{\underline{C}}_{ae}^{ng} = \underline{\underline{P}}_{12}^T \left( \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{N}} \left( \frac{1}{2} \right)^T \frac{1}{2} \rho \overline{\underline{\underline{B}}} \overline{\underline{\underline{U}}}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Lh2}}{\overline{\underline{\underline{U}}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{L\alpha2} \underline{\underline{B}}}{\overline{\underline{\underline{U}}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Mh2} \underline{\underline{B}}}{\overline{\underline{\underline{U}}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{M\alpha2} \underline{\underline{B}}^2}{\overline{\underline{\underline{U}}}} \end{bmatrix} \underline{\underline{N}} \left( \frac{1}{2} \right) \underline{\underline{P}}_{12} \right) \quad (4.126)$$

$$\underline{\underline{K}}_{ae}^{ng} = \underline{\underline{P}}_{12}^T \left( \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{N}} \left( \frac{1}{2} \right)^T \frac{1}{2} \rho \overline{\underline{\underline{B}}} \overline{\underline{\underline{U}}}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Lh1}}{\overline{\underline{\underline{U}}}} & 0 & 0 & 0 & C_{L\alpha1} \\ 0 & \underline{\underline{B}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{Mh1} & 0 & 0 & 0 & C_{M\alpha1} \underline{\underline{B}} \end{bmatrix} \underline{\underline{N}} \left( \frac{1}{2} \right) \underline{\underline{P}}_{12} \right) \quad (4.127)$$

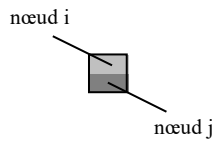
$$\underline{\underline{A}}^{ng} = \underline{\underline{P}}_{12} \underline{\underline{N}} \left( \frac{1}{2} \right)^T \underline{\underline{A}}^e \quad (4.128)$$

$$\underline{\underline{B}}^{ng} = \underline{\underline{L}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_{Lh3}}{\underline{\underline{B}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Lh4}}{\underline{\underline{B}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{L\alpha3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{L\alpha4} \\ 0 & \frac{C_{Mh3}}{\underline{\underline{B}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{Mh4}}{\underline{\underline{B}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{M\alpha3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{M\alpha4} \end{bmatrix} \underline{\underline{N}} \left( \frac{1}{2} \right) \underline{\underline{P}}_{12}^T \quad (4.129)$$

$$\underline{\underline{D}}^{ng} = \underline{\underline{D}}^e \quad (4.130)$$

Il nous reste maintenant à assembler les matrices élémentaires. Les matrices  $\underline{\underline{C}}_{ae}$  et  $\underline{\underline{K}}_{ae}$  sont assemblées suivant la procédure habituelle. Les matrices  $\underline{\underline{A}}^g$  et  $\underline{\underline{B}}^g$ , de dimensions respectives  $(ndlt, 8*n_e)$  et  $(8*n_e, ndlt)$ , sont assemblées suivant la procédure décrite figures (4.7) et (4.8). La matrice, de dimension  $(8*n_e, 8*n_e)$ , est composée des matrices élémentaires  $\underline{\underline{D}}^{ng}$  positionnées sur sa diagonale principale.

Matrice  $\underline{\underline{A}}^{ng}$  (12, 8) de l'élément k :



Matrice globale A (ndlt, 8\*nel) :

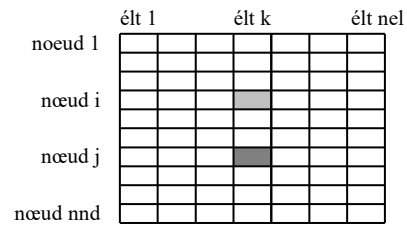
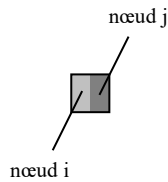


Figure 4.7 – Procédure d'assemblage de la matrice A

Matrice  $\underline{\underline{B}}^{ng}$  (8,12) de l'élément k :



Matrice globale B (8\*nel, ndlt) :

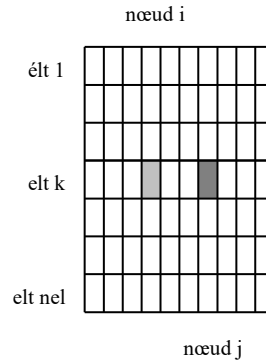


Figure 4.8 – Procédure d'assemblage de la matrice B

On obtient alors la formulation matricielle suivante :

$$\underline{\underline{F}}_{ae}(t) = \underline{\underline{C}}_{ae} \dot{\underline{\underline{d}}} + \underline{\underline{K}}_{ae} \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\zeta}} \quad (4.131)$$

$$\dot{\underline{\underline{\zeta}}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\zeta}} + \underline{\underline{B}} \dot{\underline{\underline{d}}} \quad (4.132)$$

### c) Formulation simplifiée des forces aéroélastiques

La formulation précédente n'a en fait d'intérêt que lorsque les fréquences de vibration des différents modes propres de l'ouvrage sont proches ou lorsque la résolution des équations de la dynamique sont effectuées dans la base nodale. En outre, si les coefficients des fonctions indicielles sont mal estimés, on peut assister à des problèmes d'instabilités numériques. Dans le cas où les fréquences des modes sont bien détachées et la résolution effectuées dans la base modale, on peut se contenter de la détermination d'une matrice raideur et d'une matrice amortissement aéroélastiques diagonales similaires à celles définies en (4.51), à ceci près que chaque terme est associé à sa pulsation modale. C'est cette méthode que nous utilisons dans le cadre de notre procédure de validation.

### d) Mise en équation

Les équations du mouvement s'écrivent donc, dans la base nodale, en tenant compte des forces turbulentes et aéroélastiques :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{d}}(t) + \left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}_{ae}\right)\dot{\underline{d}}(t) + \left(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{K}}_{ae}\right)\underline{d}(t) = \underline{\underline{A}}\underline{\zeta} + \underline{\underline{F}}_t(t) \quad (4.133)$$

$$\dot{\underline{\zeta}}(t) = \underline{\underline{D}}\underline{\zeta}(t) + \underline{\underline{B}}\dot{\underline{d}}(t) \quad (4.134)$$

et, dans la base modale :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{q}}(t) + \left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}_{ae}\right)\dot{\underline{q}}(t) + \left(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{K}}_{ae}\right)\underline{q}(t) = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{A}}\underline{\zeta} + \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{F}}_t(t) \quad (4.135)$$

$$\dot{\underline{\zeta}}(t) = \underline{\underline{D}}\underline{\zeta}(t) + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{\Phi}}\dot{\underline{q}}(t) \quad (4.136)$$

Dans le cas d'une formulation simplifiée des forces aéroélastiques, on écrit simplement :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{q}}(t) + \left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}_{ae}\right)\dot{\underline{q}}(t) + \left(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{K}}_{ae}\right)\underline{q}(t) = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{F}}_t(t) \quad (4.137)$$

où  $\underline{\underline{C}}_{ae}$  et  $\underline{\underline{K}}_{ae}$  sont les matrices amortissement et raideur aéroélastiques définies en c). Elles n'ont donc rien à voir avec celles intervenant en (4.135).

#### 4.5.2 Résolution du système dans la base modale

L'intégration du système d'équations différentielles (4.135-136) est effectuée à l'aide d'un schéma temporel implicite de Newmark pour les termes de déplacements et un schéma explicite pour le terme  $\zeta$ . Ces schémas permettent d'écrire les équations reliant les valeurs des variables à l'instant  $t$  aux valeurs des variables à l'instant  $t+\Delta t$  :

$$\underline{q}(t + \Delta t) = \underline{q}(t) + \Delta t \dot{\underline{q}}(t) + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{\underline{q}}(t) + \ddot{\underline{q}}(t + \Delta t)) \quad (4.138)$$

$$\dot{\underline{q}}(t + \Delta t) = \dot{\underline{q}}(t) + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\underline{q}}(t) + \ddot{\underline{q}}(t + \Delta t)) \quad (4.139)$$

$$\zeta(t + \Delta t) = \zeta(t) + \Delta t \dot{\zeta}(t) \quad (4.140)$$

En injectant ces équations dans le système d'équations (4.135-136), on trouve :

$$\begin{aligned} \left( \frac{4}{\Delta t^2} \underline{\hat{M}} + \frac{2}{\Delta t} (\underline{\hat{C}} - \underline{\hat{C}}_{ac}) + (\underline{\hat{K}} - \underline{\hat{K}}_{ac}) \right) \underline{q}(t + \Delta t) = & \left( \frac{4}{\Delta t^2} \underline{\hat{M}} + \frac{2}{\Delta t} (\underline{\hat{C}} - \underline{\hat{C}}_{ac}) \right) \underline{q}(t) + \\ \left( \frac{4}{\Delta t} \underline{\hat{M}} + (\underline{\hat{C}} - \underline{\hat{C}}_{ac}) \right) \dot{\underline{q}}(t) + \underline{\hat{M}} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\Phi}^T \underline{F}_t(t + \Delta t) + \underline{\Phi}^T \underline{A} (\zeta(t) + \Delta t \underline{D} \dot{\zeta}(t) + \Delta t \underline{B} \underline{\Phi} \dot{\underline{q}}(t)) & \quad (4.141) \end{aligned}$$

Une fois calculé  $\zeta(t + \Delta t)$ , on calcule  $\underline{q}(t + \Delta t)$ , puis  $\ddot{\underline{q}}(t + \Delta t)$  à partir de (4.138), et enfin  $\dot{\underline{q}}(t + \Delta t)$  à partir de (4.139). On réitère cette procédure le nombre de pas de temps désiré.

Dans le cas où la formulation simplifiée des forces aéroélastiques est employée, la procédure d'intégration temporelle est strictement la même, à ceci près que les termes  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{D}, \underline{\zeta}$  n'interviennent plus.



## 4.6 Introduction de simulations temporelles dans le calcul spectral

L'objectif est d'introduire des procédures de calcul temporel dans le module de calcul spectral afin d'améliorer les performances de ce dernier. Bien entendu, ces apports ne restent intéressants que dans la mesure où ils n'occasionnent pas de surcoûts significatifs en terme de temps de calcul. Deux procédures sont ainsi introduites. La première permet d'optimiser la linéarisation des courbes d'évolution des coefficients stationnaires en fonction de l'incidence du vent. La seconde permet de combiner les déplacements modaux extrêmes afin d'en déduire les déplacements nodaux extrêmes.

### 4.6.1 Méthode de « linéarisation équivalente » des coefficients aérodynamiques

On a vu que l'une des faiblesses majeures de l'approche spectrale était l'obligation de représenter l'évolution des coefficients aérodynamiques en fonction de l'incidence du vent par des droites affines. Nous proposons ici une méthode permettant d'optimiser cette linéarisation. Le but est de trouver une expression linéaire de l'évolution des coefficients aérodynamiques *équivalente* à l'évolution réelle des coefficients en terme de densité spectrale des déplacements résultante.

Supposons qu'on s'intéresse au calcul spectral des déplacements d'un tablier de pont projetés sur un mode  $k$  caractérisé par sa masse généralisée  $M_k$ , sa pulsation  $\omega_k$ , et son amortissement  $\xi_k$ . On considère alors le cas d'une maquette sectionnelle virtuelle à un degré de liberté et de caractéristiques mécaniques équivalentes.

On simule alors une trajectoire de vent unidimensionnelle  $\begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$  respectant une distribution spectrale appropriée. A partir de ce signal, on peut construire un signal de forces (portance, traînée, ou moment).

Pour cela, il suffit, pour chaque série  $\begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ , de calculer l'angle d'incidence instantané du vent, puis de se reporter à la courbe d'évolution de la force en question en fonction de l'angle d'incidence. On obtient ainsi un signal de forces réaliste car non linéarisé. Ce signal n'est donc a priori plus gaussien !

On peut alors calculer la densité spectrale de puissance du signal de forces, puis, à l'aide de la fonction de transfert simplifiée (4.142), la variance des déplacements résultants :

$$\sigma_k^2 = \frac{\pi S_{Ftemp.}(\omega_k)}{2\xi_k \omega_k^3} \quad (4.142)$$

Il nous reste maintenant à trouver une formulation linéaire de l'évolution des forces aérodynamiques en fonction de l'incidence du vent c'est-à-dire un couple  $(\kappa, \lambda)$  tel que la relation suivante :

$$F(t) = \rho B \kappa (\bar{U}u(t) + \bar{V}v(t)) + \frac{1}{2} \rho B \lambda (\bar{U}v(t) - \bar{V}u(t)) \quad (4.143)$$

fournisse un signal de forces générant le même écart type de déplacements. En fait, on voit bien que seule la valeur  $S_F(\omega_k)$  a besoin d'être reproduite.

Si on écrit l'expression de la densité spectrales des forces à partir de (4.143) :

$$S_F(\omega_k) = x S_u(\omega_k) + y S_v(\omega_k) \quad (4.144)$$

avec

$$x = \left[ \rho B \left( \kappa \bar{U} - \frac{1}{2} \lambda \bar{V} \right) \right]^2 \quad (4.145)$$

$$y = \left[ \rho B \left( \kappa \bar{V} + \frac{1}{2} \lambda \bar{U} \right) \right]^2 \quad (4.146)$$

Il reste à estimer par une méthode d'optimisation linéaire les valeurs de  $x$  et  $y$ , dont on déduit  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\kappa = \frac{\bar{U}\sqrt{x} + \bar{V}\sqrt{y}}{\rho B(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)} \quad (4.147)$$

$$\lambda = \frac{\bar{U}\sqrt{y} - \bar{V}\sqrt{x}}{1/2 \rho B(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)} \quad (4.148)$$

Les figures (4.9) et (4.10) montrent les résultats obtenus pour les tabliers trapézoïdal et rectangulaire. L'incidence de vent moyenne est de  $3^\circ$ . A gauche, figurent les signaux temporels aléatoires simulés et leurs spectres respectifs. A droite, sont représentés les courbes d'évolution des coefficients aérodynamiques en fonction de l'incidence. Les courbes noires correspondent aux coefficients réels, tandis que les courbes en couleur représentent les coefficients linéarisés.

Les résultats sont logiquement très dépendants du type de vent et de la gamme de fréquences utilisée pour l'optimisation. Aussi il convient de se placer dans les mêmes conditions que celles qui seront imposées dans le calcul spectral. Dans le cas présent, les caractéristiques du vent sont de 8%, 5%, 0,5 m, 0,1 m, respectivement pour les écarts types et les échelles de la turbulence. La gamme de fréquence est de 5 à 10 Hz

Précisons que pour chaque couple  $(C_k, dC_k/d\theta)$  le nombre de solutions est infini, y compris les plus saugrenues d'un point de vue physique. On s'arrange pour ne conserver que les solutions physiquement acceptables.

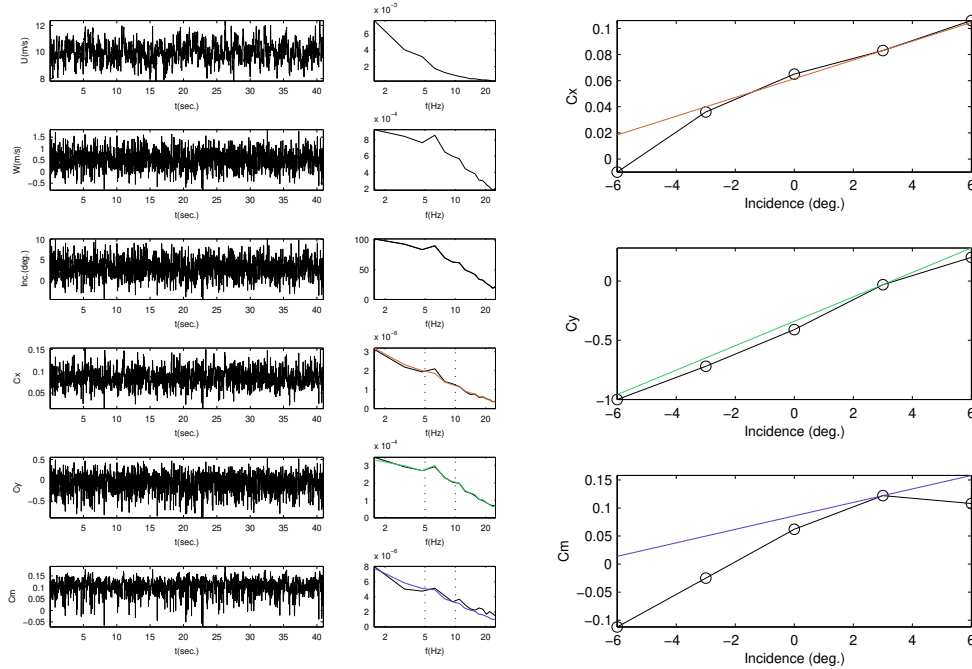


Figure 4.9 – Linéarisation des coefficients aérodynamiques du tablier trapézoïdal pour une incidence de vent moyenne de  $3^\circ$

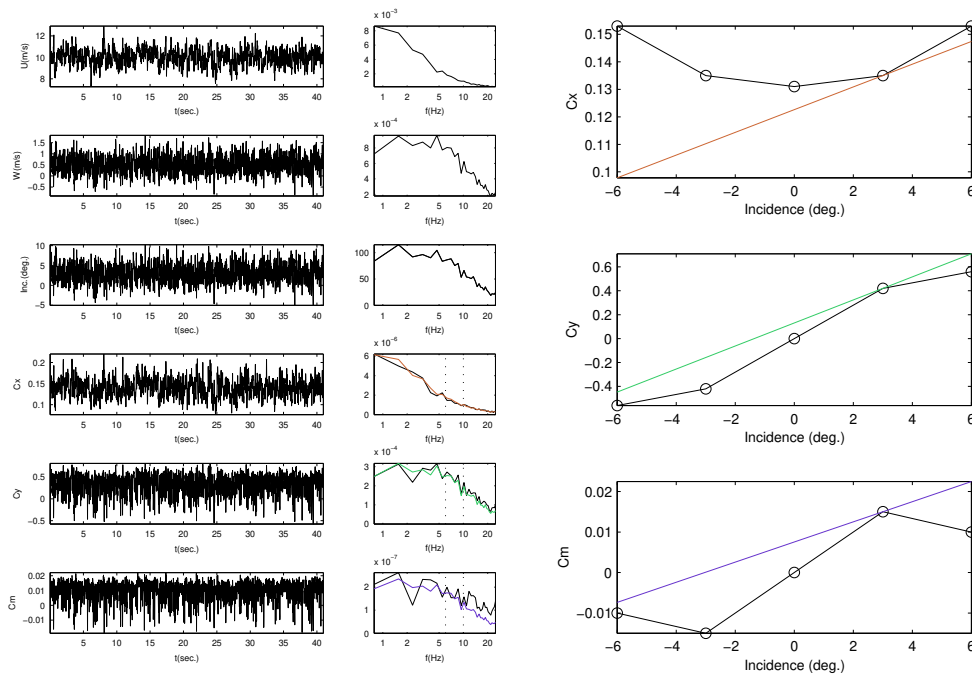


Figure 4.10 – Linéarisation des coefficients aérodynamiques du tablier rectangulaire pour une incidence de vent moyenne de  $3^\circ$

#### 4.6.2 Combinaison des charges modales extrêmes en cas de charges statiques équivalents

La stricte connaissance des déplacements modaux extrêmes induits par le vent ne présente un intérêt que dans l'optique d'une évaluation du confort des usagers de l'ouvrage étudié. Ce qui, dans l'absolu, intéresse les bureaux d'études chargés de dimensionner les structures, c'est de connaître les contraintes extrêmes sollicitant les matériaux occasionnées par les vibrations de l'ouvrage. Dans la pratique, il est plus commode pour ces bureaux d'études de travailler avec des cas de charges statiques équivalents qui seront combinés avec les autres cas de charges : poids propre, exploitation, neige, ... dans le cadre de dimensionnements ELU ou ELS.

C'est dans cette optique que nous proposons une méthode permettant, à partir de la connaissance des densités spectrales de puissance des déplacements modaux issus de calculs spectraux ou temporels, de déterminer une série de charges statiques fictives qui seraient un reflet fidèle des charges dynamiques réelles.

La validité d'un certain nombre d'outils de R.D.M. utilisés par la suite est théoriquement limitée à des études statiques. On suppose néanmoins que les fréquences de vibration propres aux ouvrages d'arts tels que les ponts suspendus ou à haubans (0,1-0,5 Hz) sont suffisamment basses pour que les approximations effectuées ne soient pas trop grossières.

On introduit les vecteurs  $\underline{E}$ ,  $\underline{G}$ ,  $\underline{S}$ ,  $\underline{I}_x$ ,  $\underline{I}_y$ ,  $\underline{I}_z$  contenant respectivement les modules d'Young, modules de cisaillement, sections, inertie suivant l'axe x, inertie suivant l'axe y et inertie suivant l'axe z en chaque nœud de la structure discrétisée. On introduit également les coordonnées curvilignes  $s_k$  associées à chacune des parties clés composant l'ouvrage (tablier, pile, ...); on définit alors, pour chaque mode propre considéré, le vecteur  $\underline{Z}_i'$  ( $i=1,n$ ) qui est la dérivée du vecteur propre  $\underline{Z}_i$  par rapport aux coordonnées curvilignes définissant la structure (fig. 4.11).

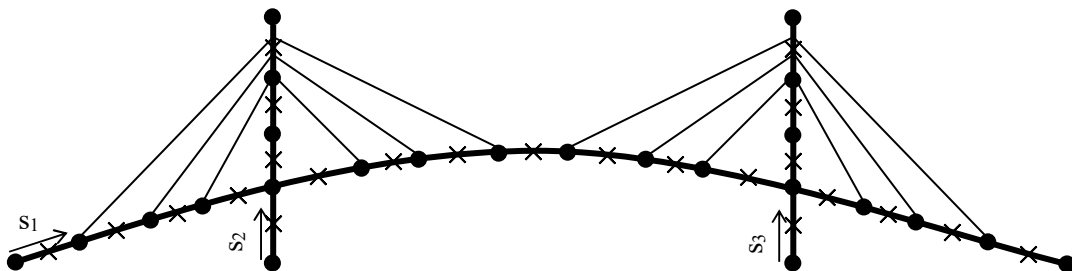


Figure 4.11 – Définition des coordonnées curvilignes

Pour chaque élément e de la structure on définit le vecteur élémentaire  $\underline{Z}_i^{e'}$  par la relation suivante :

$$\underline{Z}_i^{e'} = \frac{\underline{Z}_i^{e1} \underline{P}_L^T - \underline{Z}_i^{e2} \underline{P}_L^T}{L} \quad (4.149)$$

$\underline{Z}_i^{e1}$  et  $\underline{Z}_i^{e2}$  sont des vecteurs colonnes de dimension 6 extraits du vecteur  $\underline{Z}_i$  et contenant les déformées des deux nœuds de l'élément e ;  $\underline{P}_L$  est la matrice de changement de repère local général et L la longueur de l'élément e. Le vecteur  $\underline{Z}_i^{e'}$  est obtenu par assemblage des  $\underline{Z}_i^{e'}$ . Contrairement au vecteur  $\underline{Z}_i$ , il n'est pas défini au niveau des nœuds de la structure mais au niveau du milieu de ses éléments (croix fig. 4.11). La raison est double : d'abord, les caractéristiques mécaniques de la structure discrétisée sont définies élément par élément ; ensuite, la définition d'un repère local est immédiate.

A partir de  $\underline{Z}_i^{e'}$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{G}$ ,  $\underline{S}$ ,  $\underline{I}_X$ ,  $\underline{I}_Y$ ,  $\underline{I}_Z$ , on peut calculer les vecteurs  $\underline{N}_i$ ,  $\underline{M}_{Xi}$ ,  $\underline{M}_{Yi}$ ,  $\underline{M}_{Zi}$ ,  $\underline{T}_{Xi}$ ,  $\underline{T}_{Yi}$ , de dimension  $n_e$ , contenant respectivement les efforts normaux, moments de flexion suivant x, moments de flexion suivant y, moments de torsion suivant z et efforts tranchants en chaque élément pour un déplacement généralisé i unitaire. Les vecteurs  $\underline{N}_i$ ,  $\underline{M}_{Xi}$ ,  $\underline{M}_{Yi}$ ,  $\underline{M}_{Zi}$ ,  $\underline{T}_{Xi}$ ,  $\underline{T}_{Yi}$ , contiennent des termes de la forme :

$$\underline{N}_i(e) = \underline{E}(e) \times \underline{Z}_i^{e'} (6 \times (e - 1) + 3) \quad (4.150)$$

$$\underline{T}_{Xi}(e) = \underline{G}(e) \underline{S}(e) \times \underline{Z}_i^{e'} (6 \times (e - 1) + 1) \quad (4.151)$$

$$\underline{T}_{Yi}(e) = \underline{G}(e) \underline{S}(e) \times \underline{Z}_i^{e'} (6 \times (e - 1) + 2) \quad (4.152)$$

$$\underline{M}_{Xi}(e) = \underline{E}(e) \underline{I}_X(e) \times \underline{Z}_i^{e'} (6 \times (e - 1) + 4) \quad (4.153)$$

$$\underline{M}_{Yi}(e) = \underline{E}(e) \underline{I}_Y(e) \times \underline{Z}_i^{e'} (6 \times (e - 1) + 5) \quad (4.154)$$

$$\underline{M}_{Zi}(e) = \underline{G}(e) \underline{I}_Z(e) \times \underline{Z}_i^{e'} (6 \times (e - 1) + 6) \quad (4.155)$$

Remarquons que les efforts tranchants sont définis à un facteur près, fonction de la géométrie de la section. Cela n'a aucune importance dans la mesure où notre but n'est pas de calculer les efforts en chaque point de la structure mais uniquement de les « maximiser ».

On cherche alors à construire des signaux temporels réalistes  $\underline{N}_i(t)$ ,  $\underline{M}_{Y_i}(t)$ ,  $\underline{M}_{Z_i}(t)$ ,  $\underline{M}_{X_i}(t)$ ,  $\underline{T}_{X_i}$ ,  $\underline{T}_{Y_i}$ , représentant les fluctuations des différents efforts sous les sollicitations du vent. Pour cela, on a uniquement besoin de signaux temporels réalistes des déplacements modaux  $q_i(t)$ .

Dans le cas où un calcul temporel a été effectué, il suffit de réutiliser les signaux enregistrés. Dans le cas où seul un calcul spectral a été effectué, il s'agit de reproduire artificiellement le comportement dynamique de l'ouvrage à partir de la connaissance des écarts types, pulsation et amortissement de chaque mode de vibration. On génère donc les signaux aléatoires  $q_i(t)$  à partir de la fonction densité spectrale de puissance d'un oscillateur linéaire à 1 degré de liberté (figure 4.12) :

$$S_i(\omega) = \frac{2\xi_i \omega_i^3 \sigma_i^2 / \pi}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_i^2 \omega^2 \omega_i^2} \quad (4.156)$$

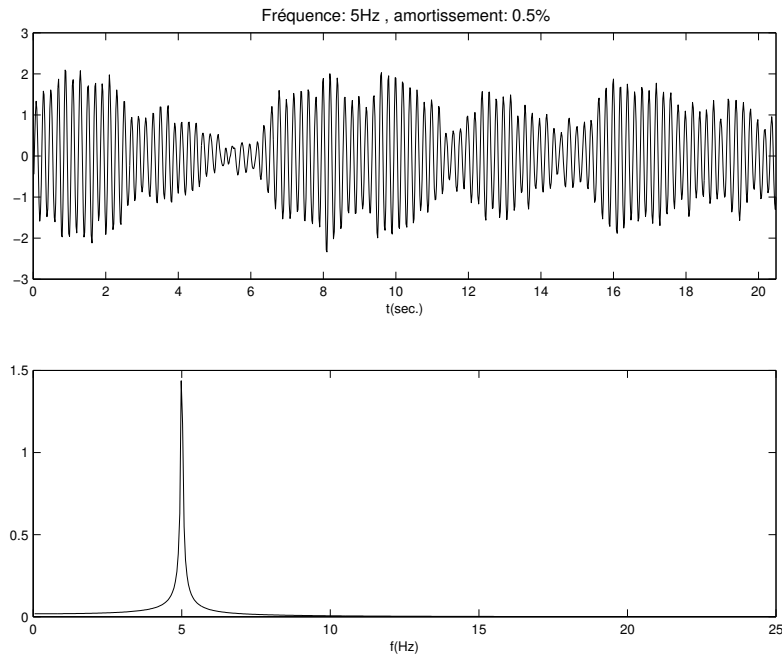


Figure 4.12 - Signal aléatoire respectant la fonction densité spectrale de puissance d'un oscillateur linéaire à un degré de liberté amorti

On combine alors les  $\underline{N}_i$ ,  $\underline{M}_{Y_i}$ ,  $\underline{M}_{Z_i}$ ,  $\underline{M}_{X_i}$ ,  $\underline{T}_{X_i}$ ,  $\underline{T}_{Y_i}$ , avec les  $q_i(t)$  pour obtenir des signaux temporels  $\underline{N}(t)$ ,  $\underline{M}_Y(t)$ ,  $\underline{M}_Z(t)$ ,  $\underline{M}_X(t)$ ,  $\underline{T}_X(t)$ ,  $\underline{T}_Y(t)$  :

$$\underline{N}(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \underline{N}_i \quad (4.157)$$

$$\underline{M}_X(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \underline{M}_{X_i} \quad (4.158)$$

$$\underline{M}_Y(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \underline{M}_{Y_i} \quad (4.159)$$

$$\underline{M}_Z(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \underline{M}_{Z_i} \quad (4.160)$$

$$\underline{T}_X(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \underline{T}_{X_i} \quad (4.161)$$

$$\underline{T}_Y(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \underline{T}_{Y_i} \quad (4.162)$$

Généralement, le dimensionnement des ouvrages d'art est effectué sur la base d'une vitesse de vent cinquantennale, correspondant à la valeur, moyennée sur 10 minutes, susceptible d'être atteinte sur une période de 1 an avec une probabilité égale à 2 %. On effectue donc un nombre  $n_t$  de simulations d'une durée de 10 minutes.

Pour chaque simulation  $s$ , on identifie les valeurs maximales prises par chacun des efforts  $F$  ( $F = N, M_X, M_Y, M_Z, T_X, T_Y$ ), en un nombre  $n_{ec}$  d'éléments clés  $e_c$  et les instants  $t_{Fs}^{ec}$  correspondants. On moyenne alors les valeurs maximales obtenues sur les  $n_t$  simulations. On construit alors des vecteurs « cas de charges extrêmes »  $\underline{\chi}_{N}^{ec}, \underline{\chi}_{T_X}^{ec}, \underline{\chi}_{T_Y}^{ec}, \underline{\chi}_{M_X}^{ec}, \underline{\chi}_{M_Y}^{ec}, \underline{\chi}_{M_Z}^{ec}$ , par combinaison linéaire des forces d'inerties modales à des instants  $t_{Fs}^{ec}$  correspondant à des valeurs extrêmes proches des moyennes calculées:

$$\underline{\chi}_{N}^{ec} = \underline{m}_{ddl} \otimes \sum_{i=1}^n q_i(t_{Ns}^{ec}) \underline{Z}_i \omega_i^2 \quad (4.163)$$

$$\underline{\chi}_{T_X}^{ec} = \underline{m}_{ddl} \otimes \sum_{i=1}^n q_i(t_{T_Xs}^{ec}) \underline{Z}_i \omega_i^2 \quad (4.164)$$

$$\underline{\chi}_{T_Y}^{ec} = \underline{m}_{ddl} \otimes \sum_{i=1}^n q_i(t_{T_Ys}^{ec}) \underline{Z}_i \omega_i^2 \quad (4.165)$$

$$\underline{\chi}_{M_X}^{ec} = \underline{m}_{ddl} \otimes \sum_{i=1}^n q_i(t_{M_Xs}^{ec}) \underline{Z}_i \omega_i^2 \quad (4.166)$$

$$\underline{\chi}_{M_Y}^{ec} = \underline{m}_{ddl} \otimes \sum_{i=1}^n q_i(t_{M_Ys}^{ec}) \underline{Z}_i \omega_i^2 \quad (4.167)$$

$$\underline{\chi}_{M_Z}^{ec} = \underline{m}_{ddl} \otimes \sum_{i=1}^n q_i(t_{M_Zs}^{ec}) \underline{Z}_i \omega_i^2 \quad (4.168)$$

où  $\underline{m}_{ddl}$  représente le vecteur colonne contenant les masses et inerties massiques ponctuelles affectées à chaque degré de liberté et  $\otimes$  symbolise la multiplication vectorielle terme à terme.

On obtient donc, en théorie,  $6 \cdot n_{ec}$  cas de charges équivalents. Dans la pratique, le nombre de cas de charges associés à chaque élément clé sera inférieur à 6 ; par exemple, l'effort tranchant ne présente d'intérêt qu'au niveau des liaisons ; l'effort normal pourra lui être supposé marginal à côté des efforts de flexion ... Ces cas de charges peuvent alors être intégrés, un par un, dans le cadre de dimensionnements ELU ou ELS avec les coefficients de sécurité appropriés.

## 4.7 Conclusion

Ce chapitre constitue le cœur de notre travail. Nous y avons exposé les principes fondamentaux permettant de développer des codes de calcul basés sur les approches spectrale et temporelle. Il convient de rappeler que le calcul numérique ne constitue que le maillon central dans le dimensionnement au vent d'une structure élancée.

Le premier maillon, consistant à caractériser expérimentalement les propriétés aérodynamiques de l'ouvrage, a fait l'objet du troisième chapitre. Il pourrait néanmoins, à terme, être intégré à un code de calcul temporel sous forme de module C.F.D. résolvant les équations de Navier Stokes pas de temps par pas de temps. Cela n'est cependant pas encore envisageable avant plusieurs années.

Le dernier maillon concerne la détermination de cas de charges statiques équivalents utilisables par les bureaux d'études, à partir de la connaissance des réponses modales. Nous avons, dans ce chapitre, proposé une méthode basée sur la simulation temporelle des efforts dynamiques s'exerçant au sein de la structure. Les cas de charges ainsi déterminés peuvent alors être affectés de coefficients de sécurité, et combinés séparément aux autres cas de charges classiques (exploitation, neige, ...) dans le cadre de dimensionnements ELS ou ELU.



# Validation expérimentale

Après avoir présenté les principes théoriques utilisés pour l'élaboration de notre code de calcul, il s'agit d'en vérifier la pertinence. Nous avons donc mis en place une procédure de validation expérimentale basée sur le passage en soufflerie atmosphérique de deux maquettes aéroélastiques représentant des travées centrales de tabliers de ponts. Les deux profils de tabliers étudiés sont ceux déjà présentés chapitre 3 : un profil trapézoïdal et un profil rectangulaire de ratio largeur/épaisseur égal à 8.

Le premier est représentatif de la famille des tabliers « profilés » : vitesse critique de flottement élevée et évolutions des coefficients aérodynamiques en fonction de l'incidence relativement linéaire. Le second, bien qu'atypique du point de vue géométrique, représente bien le comportement aérodynamique d'un tablier mal profilé : vitesse critique faible et coefficients aérodynamiques fortement non linéaires.

Deux configurations de vent sont étudiées : turbulente et uniforme. La première est a priori favorable à la prévision de la réponse aux buffeting forces mais moins fiable en ce qui concerne l'appréhension des forces aéroélastiques ; au contraire, la seconde doit théoriquement bien se prêter à la prédiction du comportement instable de la structure mais être plus dure à modéliser en matière de « buffeting forces » en raison du rôle non négligeable du sillage.

Le principe de la procédure consiste, on l'aura deviné, à mesurer la réponse de nos deux maquettes au vent de la soufflerie, effectuer les calculs correspondants avec les approches spectrale et temporelle, et comparer les résultats obtenus.

## 5.1 Présentation des maquettes

L'objectif était de fabriquer des maquettes représentant le comportement dynamique de travées centrales « fictives » de tabliers de ponts. L'utilisation de la technologie « taut-tube » était envisageable mais ne fut pas retenue. En effet, l'intérêt majeur de ce genre de maquettes est de pouvoir régler avec précision les fréquences de vibrations des deux premiers modes de flexion et de torsion. Cela est fort appréciable, dans le cadre d'une étude, lorsqu'il s'agit de reproduire le comportement dynamique d'une structure réelle : les fréquences de vibrations à échelle réduite sont alors imposées.

Cela n'étant pas notre cas, nous avons opté pour une technologie moins sophistiquée, mais beaucoup plus facile à réaliser et économique, basée sur l'utilisation d'un profilé standard du commerce. Un avantage non négligeable lié à ce procédé est de pouvoir reproduire des modes de torsion excentrés, plus représentatifs du comportement mécanique réel des tabliers de pont que les modes habituellement représentés par les maquettes de type taut-tube.

Notre cahier des charges était le suivant :

- Echelle de la maquette comprise entre le 100<sup>ème</sup> et le 200<sup>ème</sup> pour s'accorder aux échelles des structures tourbillonnaires reproductibles par la soufflerie en configuration turbulente,
- Fréquences de vibration des premiers modes comprises entre 2 et 10 Hz pour que la gamme de vitesses soufflerie (0 - 20 m/s) corresponde à une gamme de vitesses réduites raisonnable, compte-tenu de l'échelle de la maquette,
- Premiers modes de flexion verticale et de torsion aussi proches que possible en fréquence, pour éviter que l'un des deux soit marginalisé par l'autre,
- Masses généralisées et amortissements modaux réalistes par rapport à la vraie grandeur,
- Flèche statique minimale,
- Longueur maximale.

Un profilé ouvert était nécessaire pour garantir une fréquence en torsion raisonnable. Le U s'est imposé face au T pour des raisons de facilités de montage des éléments. Un U « plat » aurait été idéal pour rapprocher au maximum les modes de torsion et de flexion. Cependant, pour minimiser la flèche statique, nous avons opté pour un U « carré ».

Les deux maquettes sont donc basées sur le même principe structurel : un profilé U 30\*30\*3 mm en aluminium de longueur totale 295 cm encastré de chaque côté sur une paire de poteaux de sections

carrées en aluminium de 30\*30 mm hauts de 50 cm. La longueur libre entre les deux encastremets est égale à 249 mm. Chaque paire de poteaux est fixée au sol en bois de la soufflerie par 6 vis via une platine en aluminium de 3 cm d'épaisseur. Des nervures et des tirants assurent les rigidités longitudinales et transversales des poteaux.

Quinze éléments de tabliers à l'échelle du centième sont fixés sur le profilé U. Seuls onze d'entre eux participent réellement au comportement dynamique de la maquette ; les quatre autres sont fixes et ont pour unique fonction d'assurer la continuité aérodynamique et minimiser les effets de bouts. Ces éléments, larges de 19,5 cm et espacés de 1 mm, sont en résine polyuréthane de densité 0,5. Outre sa densité, cette résine présente l'avantage de garantir un bon aspect de surface et une bonne usinabilité. La liaison avec le profilé est assurée par une paire de vis et des cales en aluminium de 2 cm de large posées sur les trois faces extérieures du U. On peut donc considérer cette liaison comme quasi linéaire et interférant peu sur la raideur de l'ensemble.

Les éléments de résine, fabriqués « ouverts » sont refermés sur leur face inférieure par des plaques d'aluminium. Pour rapprocher d'avantage les modes de torsion et de flexion, des barres d'acier ont été fixées sur la face supérieure des plaques d'aluminium, à l'intérieur du U, et des trous circulaires ont été percés aux extrémités du profil rectangulaire.

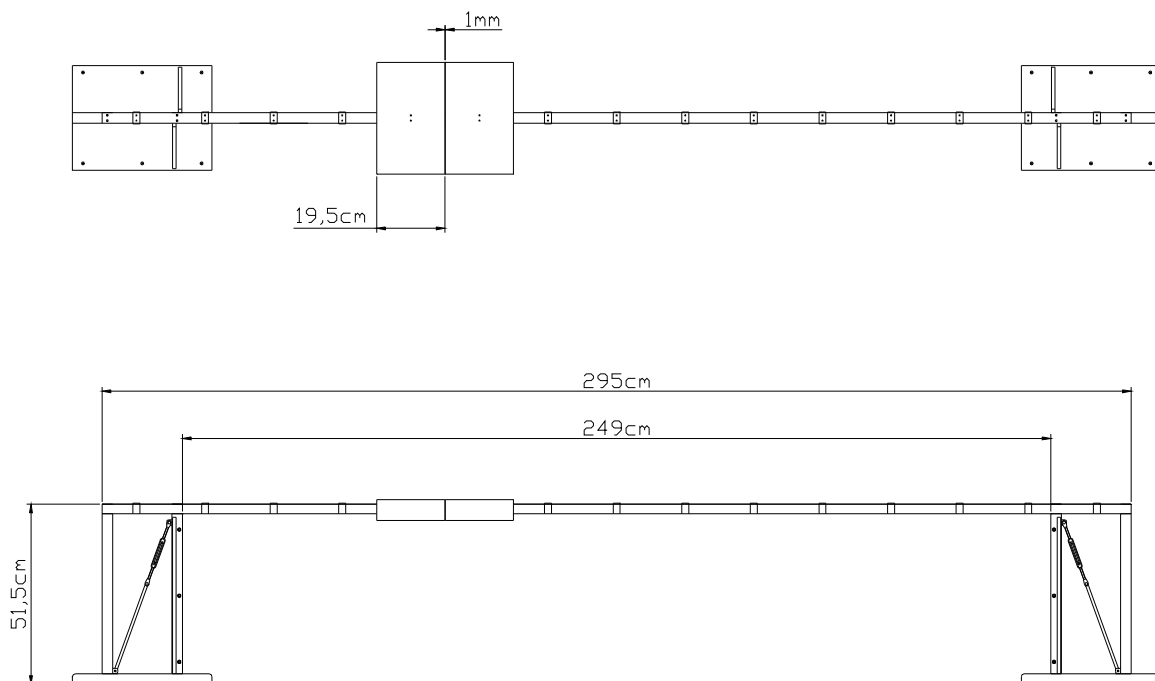


Figure 5.1 – Vues de dessus et face de l'ossature de la maquette aéroélastique avec deux éléments de tablier

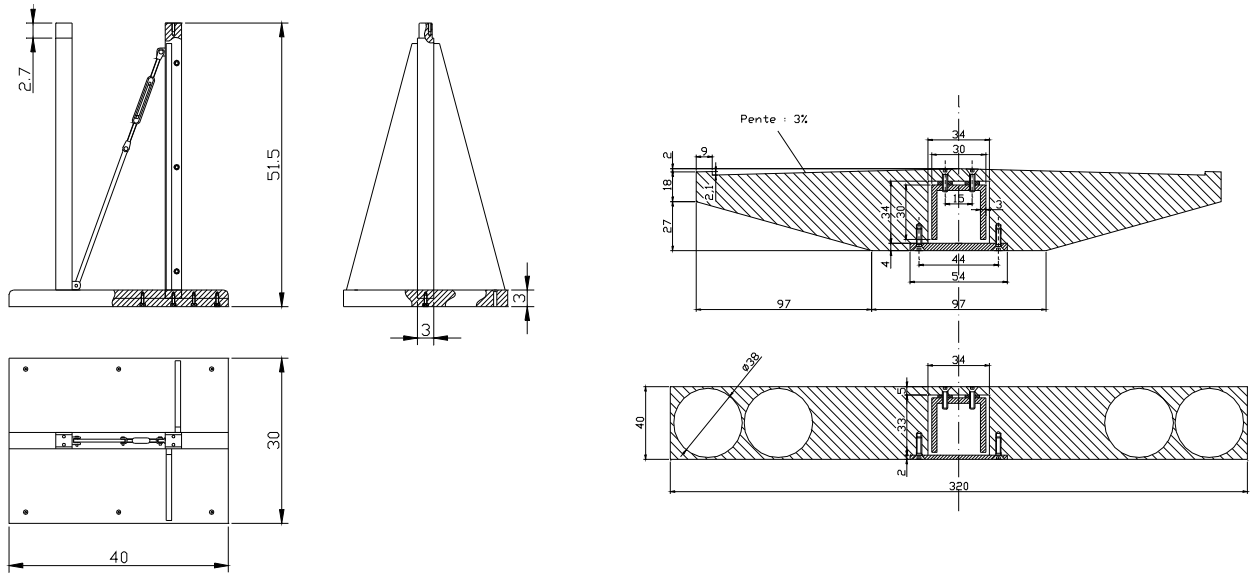


Figure 5.2 – Vues de dessus, face et coté d'un pied de maquette et coupes sur les éléments de tabliers

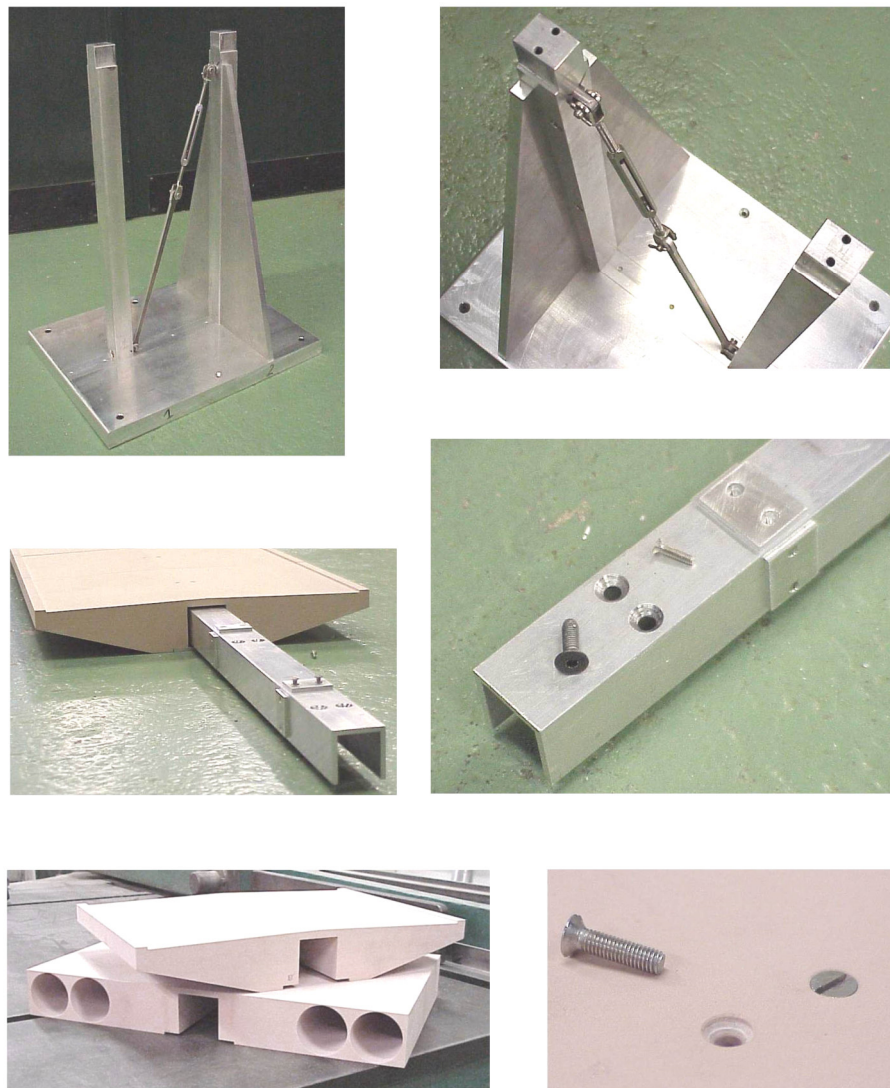


Figure 5.3 – Eléments de maquettes aérodynamiques pendant la phase de fabrication

## 5.2 Caractérisation mécanique des maquettes

Pour caractériser les modes propres de la maquette, on a opté pour une double approche numérique/expérimentale. L'intérêt était surtout de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes, les mesures faisant office de référence.

On s'est arrangé pour que les masses et inerties linéiques des deux profils soient aussi proches que possible. Ainsi, le calcul des modes propres, mesure des déformées et mesure des masses généralisées sont uniquement effectués pour le profil rectangulaire, plus facile à manipuler. Seuls les fréquences et amortissements sont mesurés dans les deux cas. Supposant les déformées des deux maquettes identiques, on estime les masses généralisées du tablier trapézoïdal à partir de celles du tablier rectangulaire et des fréquences mesurées.

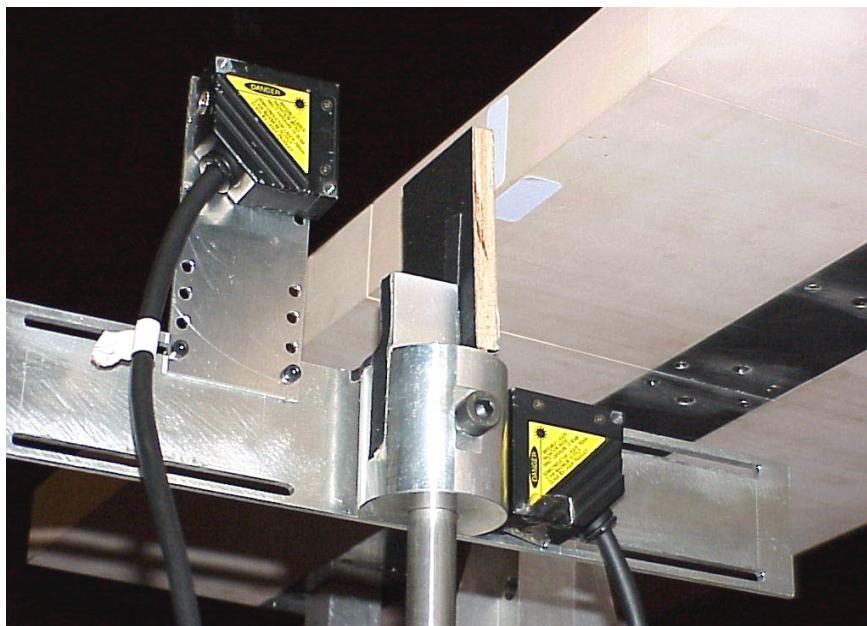
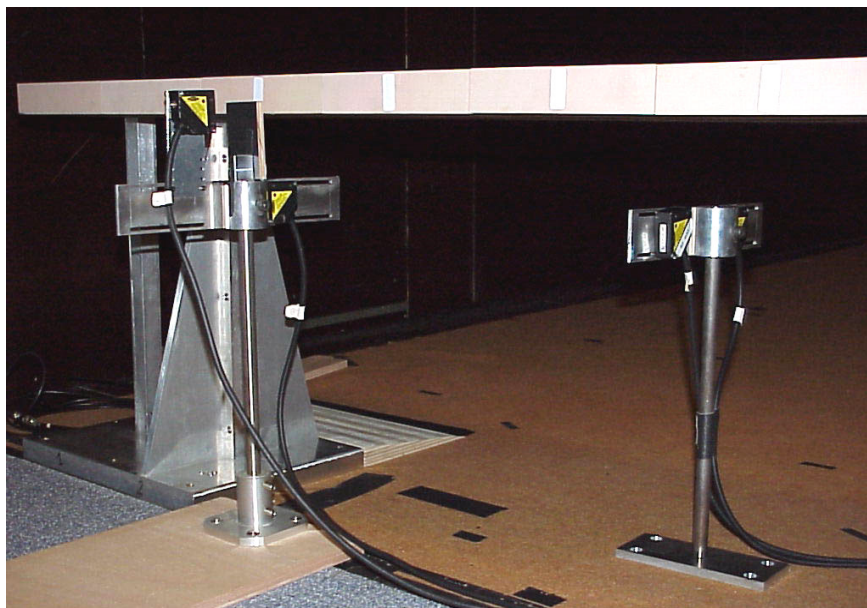
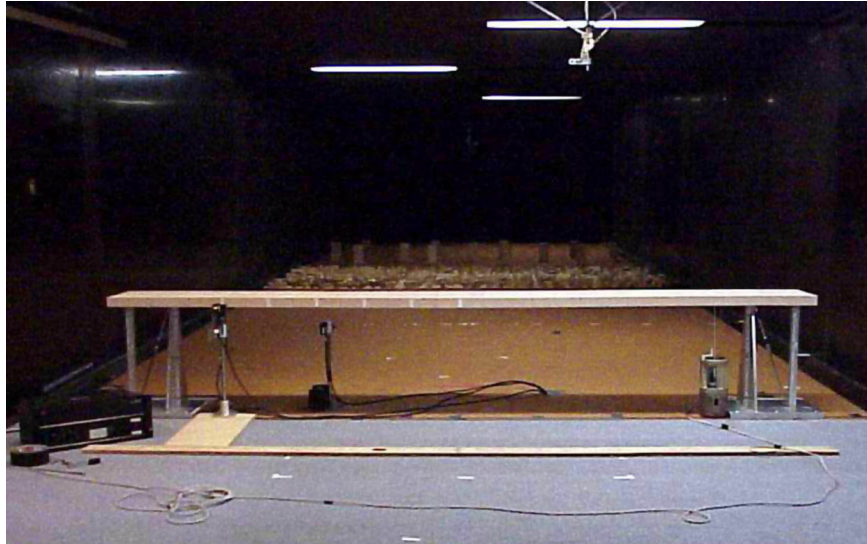
### 5.2.1 Mesure des fréquences, amortissements et masses généralisées

Les signaux de déplacements sont capturés à l'aide de capteurs de déplacements à triangulation laser. Les mesures des fréquences et amortissements modaux sont issus de traitements des signaux dans le domaine temporel. On a ainsi pu caractériser l'évolution de ceux-ci en fonction de l'amplitude de vibration. Celle-ci s'avère d'ailleurs fortement linéaire. Les résultats sont représentés figure 5.15.

L'estimation des masses généralisées est effectuée par ajouts successifs de masses aux points de déformées maximales et mesure des fréquences d'oscillations correspondantes (fig. 5.14). La justesse des résultats résulte d'un bon compromis dans le dosage de ces masses : suffisamment élevées pour que les mesures soient précises mais assez discrètes pour ne pas modifier l'allure des déformées modales.

### 5.2.2 Mesure des déformées modales

Le tablier est excité verticalement à une de ses extrémités par un moteur linéaire alimenté par un générateur de fréquence amplifié. Chaque mode est passé en revue par simple ajustement de la fréquence d'excitation. Les mesures sont effectuées par des capteurs de déplacements à triangulation laser sur la partie opposée du tablier. Un capteur fixe, mesurant les déplacements verticaux en quart de travée, fournit les signaux de référence. On s'affranchit ainsi des problèmes de variation d'intensité de l'excitation au cours du temps. Deux autres capteurs, montés sur un support mobile, mesurent respectivement les déplacements horizontaux et verticaux (figures 5.4-5.6). Les amplitudes des déformées sont alors déduites des écarts types des déplacements mesurés rapportés à la mesure de référence.



Figures 5.4, 5.5, 5.6 – Dispositif de mesure des déformées modales



### 5.2.3 Calcul des déformées

Dans un premier temps, le calcul des modes propres a été effectué à partir d'un logiciel commercial éléments finis, en modélisant le profilé U par une série d'éléments poutres. Les trois premiers modes obtenus étaient alors :

- un mode de pure torsion aux alentours de 5,8 Hz ;
- un mode de pure flexion verticale vers 7,9 Hz ;
- un mode de pure flexion horizontale à 10,0 Hz.

Des mesures effectuées sur la vraie maquette ont pourtant vite montré que les déformées des modes réels de la structure étaient plus complexes que ceux calculés. Ainsi, le premier et le troisième mode ressemblaient plutôt à deux modes de torsion dont les centres étaient situés respectivement au-dessus et au-dessous du tablier. Le problème venait probablement du fait que le calcul ne tient pas compte de l'excentrement du centre de cisaillement du profil U par rapport à son centre d'inertie.

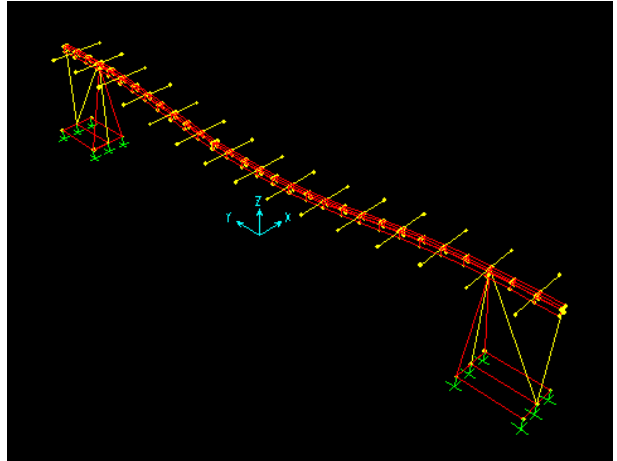
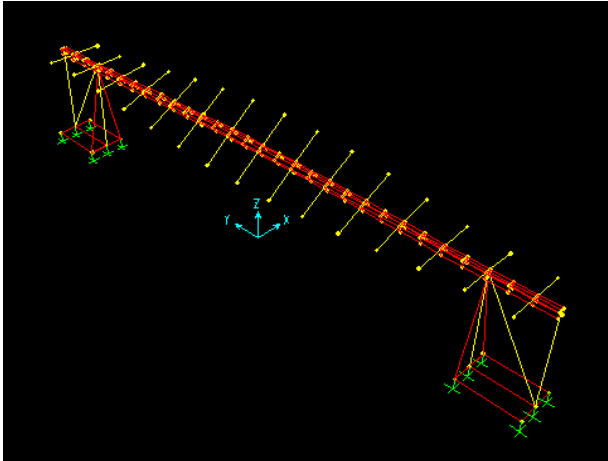
On a donc modélisé le profil U par 15\*3 plaques planes solidaires. Les résultats (fig. 5.7-5.12 et 5.13) se sont avérés nettement meilleurs bien que non exactement conformes aux mesures, en particulier en ce qui concerne les composantes horizontales des déformées des modes de torsion. On a quand même pu obtenir des informations non accessibles par la mesure comme, par exemple, les composantes en torsion autour de l'axe x du mode de flexion verticale.

### 5.2.4 Récapitulatif des fréquences, amortissements et masses généralisées utilisés pour le calcul numérique

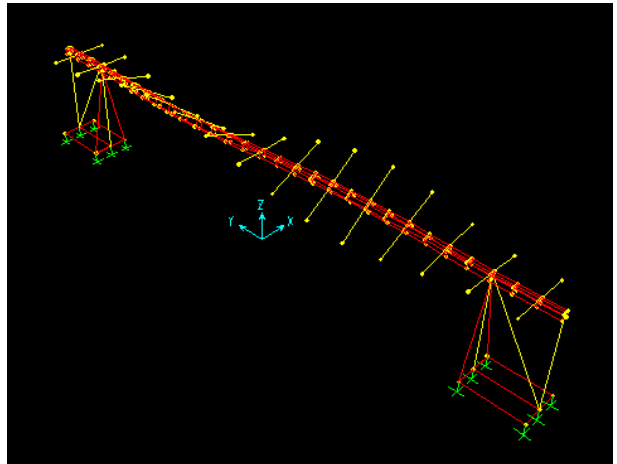
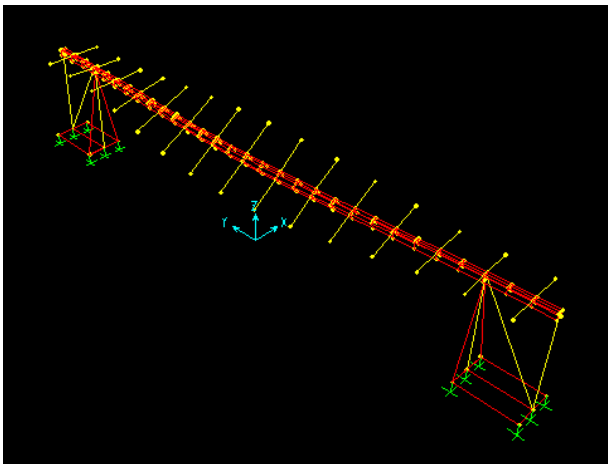
On rappelle que les masses généralisées du tablier trapézoïdal n'ont pas été directement mesurées mais déduites de celles du tablier rectangulaire. Les valeurs des fréquences propres et amortissements (rapportés au critique) correspondent à des oscillations de faibles amplitudes (0,5-2mm).

	Tablier rectangulaire			Tablier trapézoïdal		
	F(Hz)	$\xi$ (%)	$M_g$ (kg.m <sup>2</sup> )	F(Hz)	$\xi$ (%)	$M_g$ (kg.m <sup>2</sup> )
Mode de torsion 1	5,79	0,25	1,76	5,5	0,25	1,95
Mode de flexion verticale	7,94	0,20	7,69	7,41	0,20	8,82
Mode de torsion 1bis	10,08	0,35	2,18	9,57	0,35	2,42
Mode de torsion 2	12,25	0,20	1,51	11,63	0,20	1,67

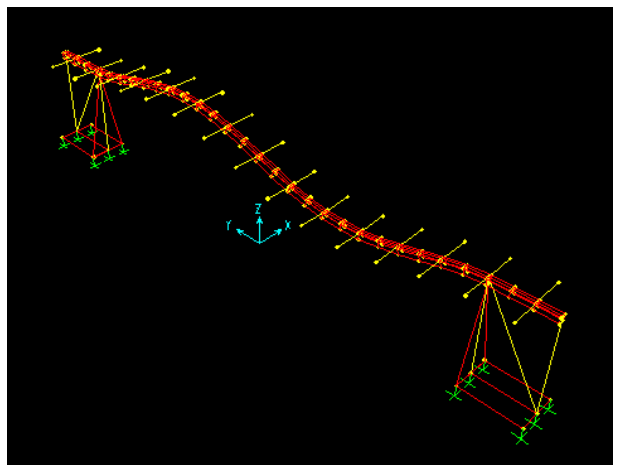
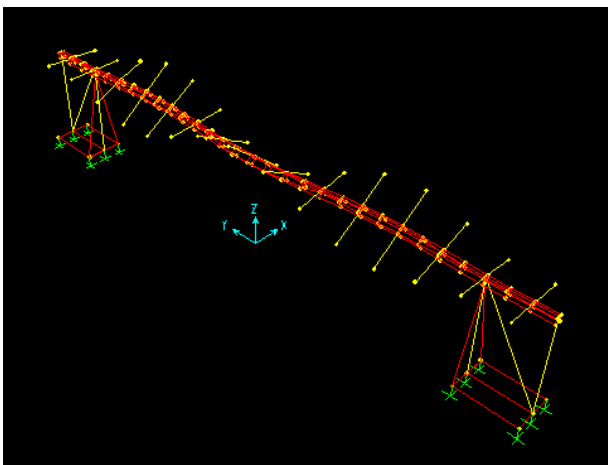
Tableau 5.1 – Fréquences propres, amortissements et masses généralisées utilisées pour le calcul



Figures 5.7 et 5.8 – Déformées des modes de vibration 1 et 2 obtenues par le calcul



Figures 5.9 et 5.10 – Déformées des modes de vibration 3 et 4 obtenues par le calcul



Figures 5.11 et 5.12 – Déformées des modes de vibration 5 et 6 obtenues par le calcul



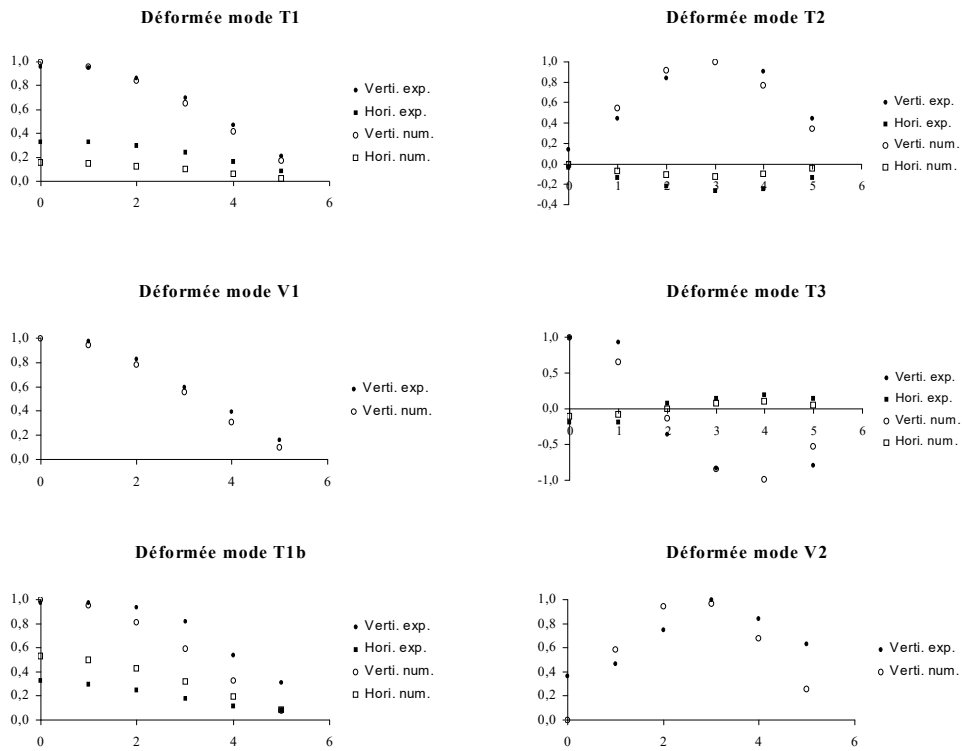


Figure 5.13 – Comparaison des déformées modales expérimentales et numériques du tablier rectangulaire (moitié de travée)

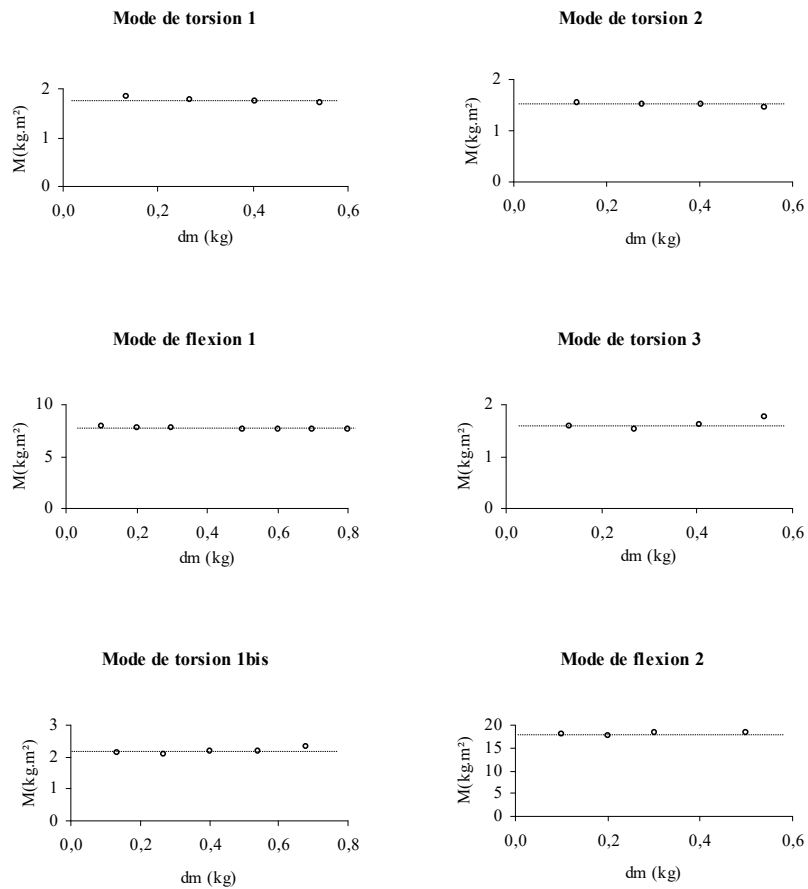


Figure 5.14 - Détermination des masses généralisées du tablier rectangulaire

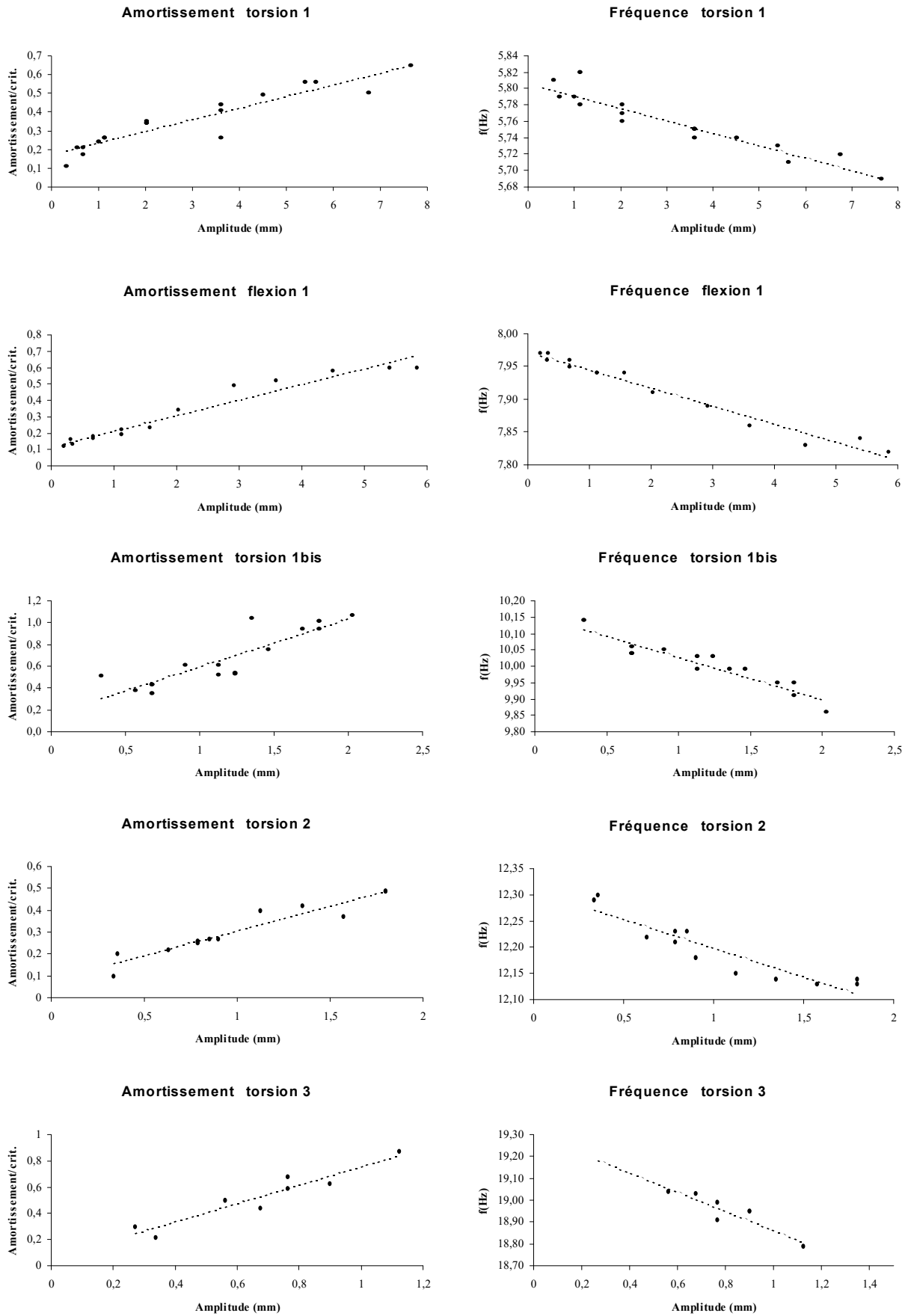


Figure 5.15 – Evolution de l'amortissement et de la fréquence des 5 premiers modes propres en fonction de l'amplitude des oscillations pour le tablier rectangulaire

## 5.3 Caractérisation du vent de la soufflerie

### 5.3.1 Dispositif expérimental

Les calculs dynamiques requièrent une connaissance fine de l'écoulement aérouliqu au voisinage des maquettes étudiées. Outre le profil de vitesse moyenne le long des tabliers, il nous faut mesurer les intensités de turbulence, les échelles caractéristiques, et les coefficients de cohérence pour les composantes horizontale et verticale du vent.

On caractérise donc le vent de la soufflerie atmosphérique à l'aide de deux sondes à fils chauds 2 composantes. Ces sondes sont fixées à 50 cm du sol sur des supports orientés dans l'axe de la veine sur une ligne correspondant au bord d'attaque des maquettes aéroulastiques. Une sonde est placée au milieu de la veine, en un point « 0 », l'autre est déplacée successivement en 12 points espacés de 20 cm, numérotés de 1 à 6 et 1' à 6' de part et d'autre de l'axe de la veine. Par la suite, on parlera respectivement de points « à gauche » et « à droite » de l'axe central. Chacun des points correspond au milieu du bord d'attaque d'un élément de tablier.

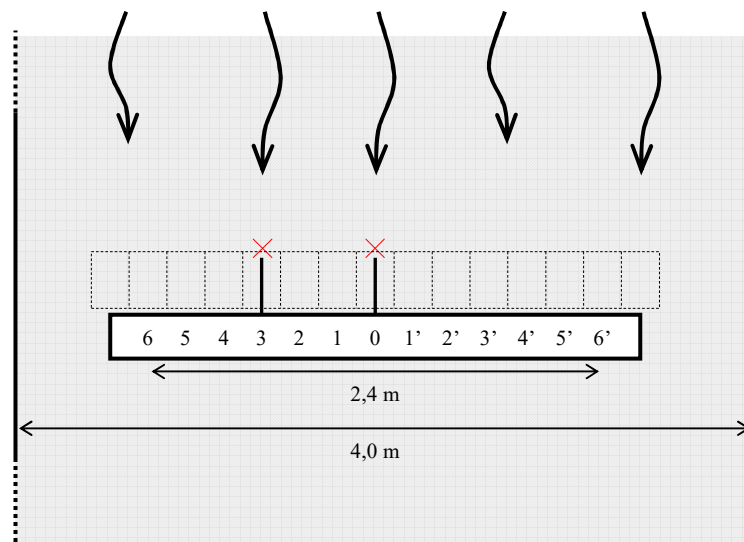
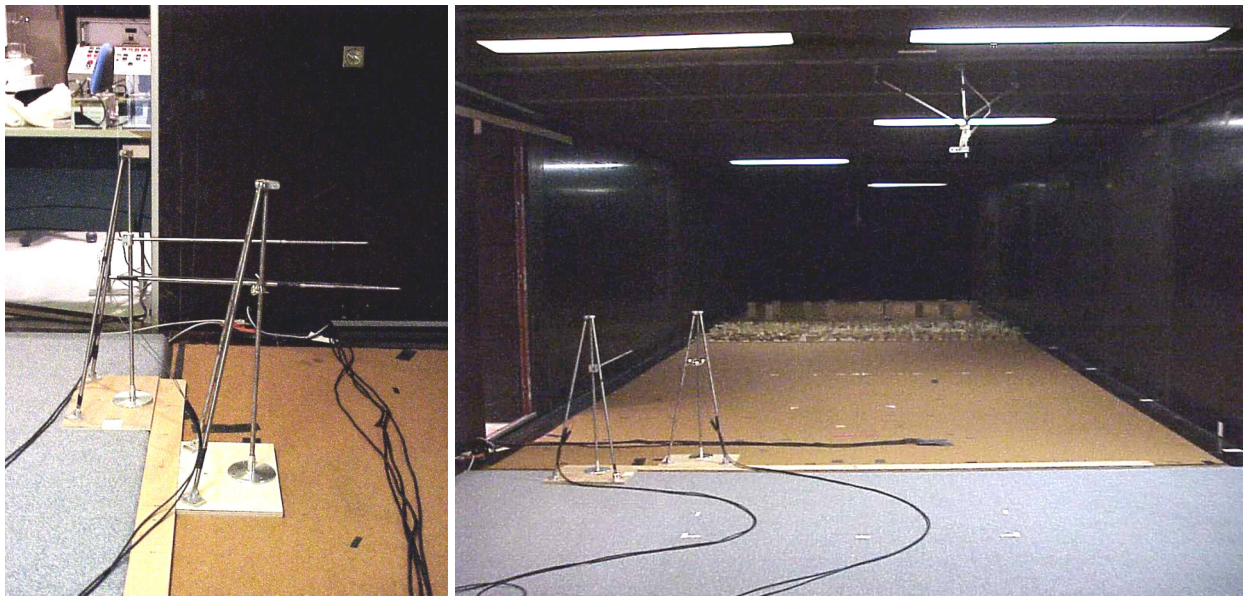


Figure 5.16 – Vue en plan du montage fil chaud dans la veine atmosphérique

Un tube de Pitot, positionné légèrement en amont à 1,5 m du sol permet de mesurer la pression dynamique de référence et le coefficient de recalage associé, utilisés au cours des manipulations ultérieures.

Deux configurations sont étudiées :

- configuration turbulente : les rugosités placées en amont génèrent un taux de turbulence de l'ordre de 10 % longitudinalement et 6 % verticalement ; 4 vitesses moyennes de vent sont imposées : 6 m/s, 8 m/s, 10 m/s, 12 m/s ;
- configuration « laminaire » : la veine est vide et le taux de turbulence est inférieur à 2 % ; les vitesses de vent générées sont de 6 m/s et 10 m/s.



Figures 5.17 et 5.18 - Supports et sondes à fils chauds dans la soufflerie en configuration turbulente

## 5.3.2 Résultats

### a) Profils de vitesse moyenne et de turbulence

Les résultats en terme de gradients latéraux de vitesses moyennes et de taux de turbulence, dans les deux configurations, sont présentés figures 5.19 à 5.24.

En configuration turbulente, les gradient de vitesse moyenne présentent des écarts maximaux de l'ordre de  $\pm 7\%$ . Les gradients de turbulence s'inscrivent eux dans des fourchettes de l'ordre de  $(8\pm 3)\%$  et  $(6\pm 1,5)\%$ , respectivement pour les composantes  $u$  et  $w$ , i.e.  $\pm 37\%$  et  $\pm 25\%$  autour des valeurs moyennes. L'importance des écarts nous amène à identifier cinq zones distinctes délimitées en rouge sur les figures 5.19 à 5.24. L'allure particulière des courbes ne permet pas réellement de réduire ce nombre.

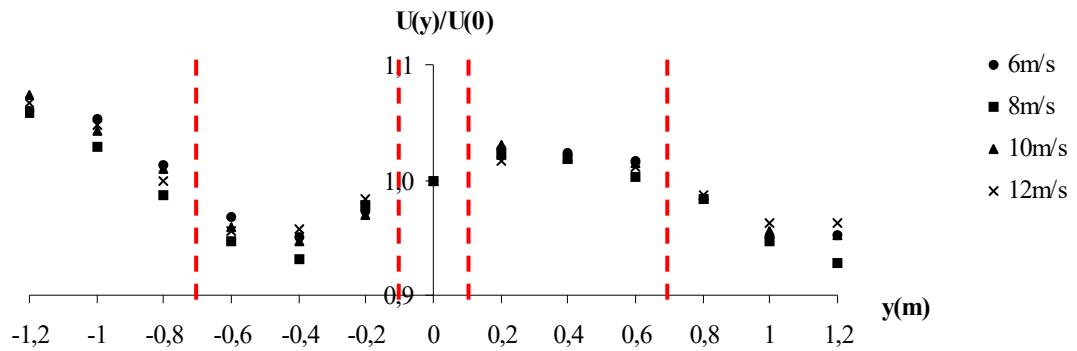


Figure 5.19 – Gradient latéral de vitesse moyenne en vent turbulent

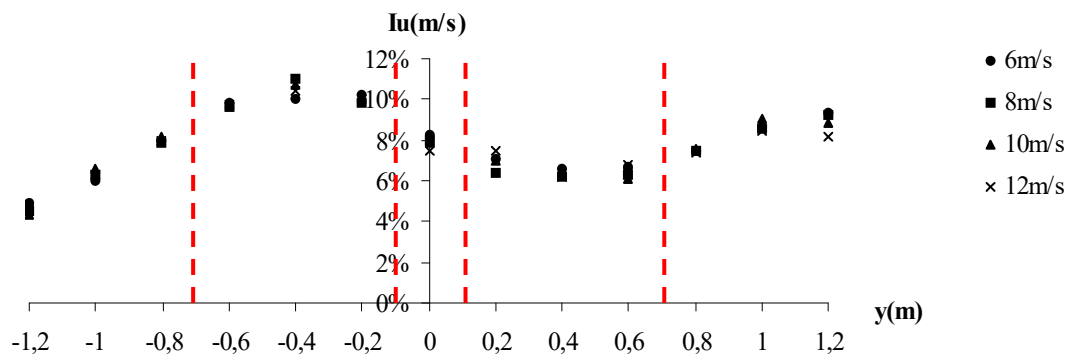


Figure 5.20 – Gradient latéral d'intensité de turbulence  $I_u$  en vent turbulent

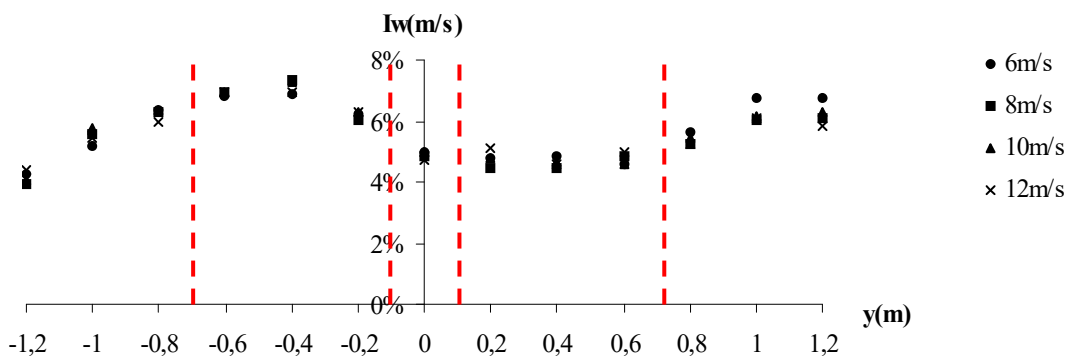


Figure 5.21 – Gradient latéral d'intensité de turbulence  $I_w$  en vent turbulent

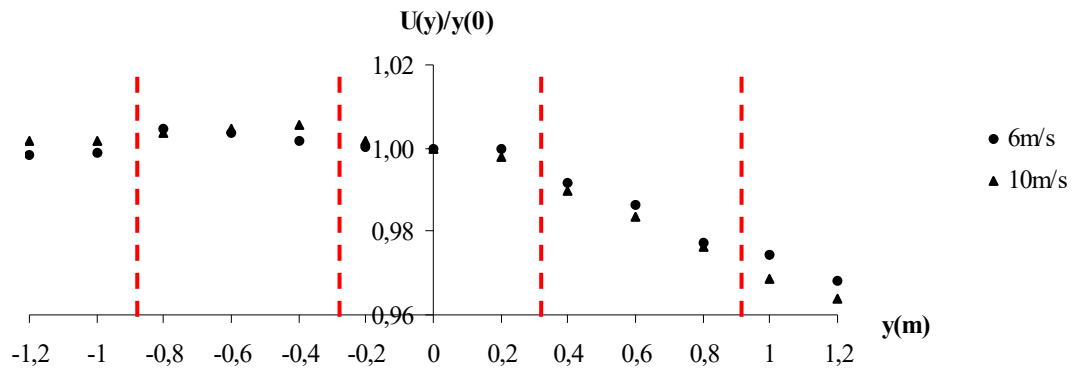


Figure 5.22 – Gradient latéral de vitesse moyenne en vent laminaire

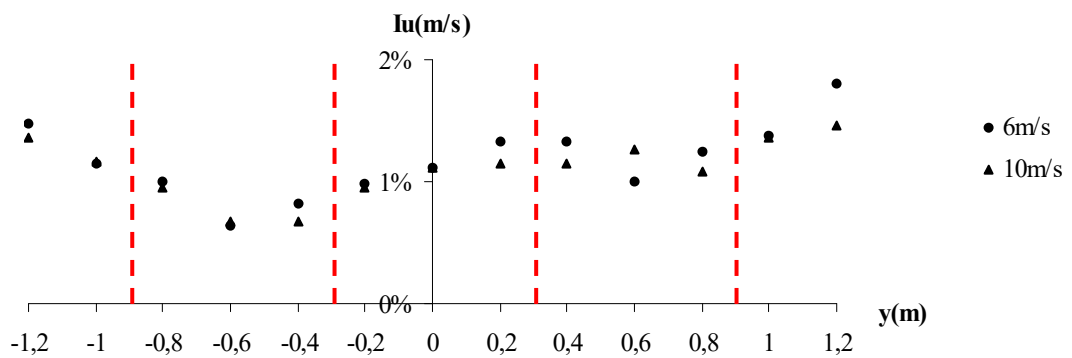


Figure 5.23 – Gradient latéral d'intensité de turbulence  $I_u$  en vent laminaire

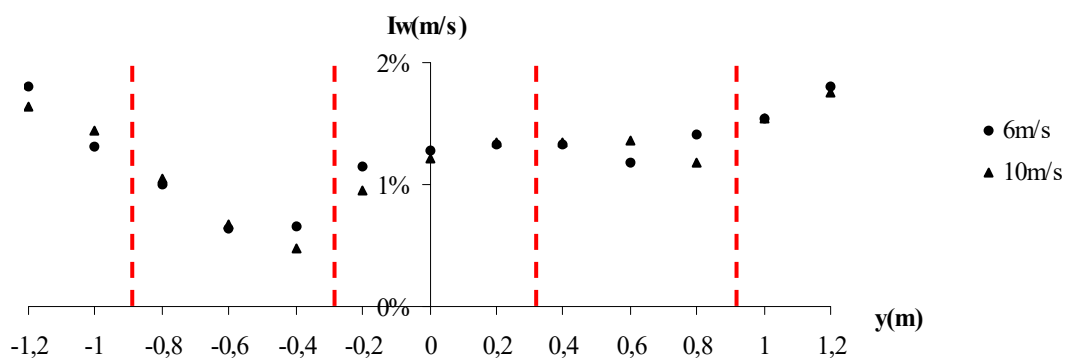


Figure 5.24 – Gradient latéral d'intensité de turbulence  $I_w$  en vent laminaire

En configuration uniforme, les gradients de vitesse moyenne et d'intensité de turbulence sont beaucoup plus faibles qu'en configuration turbulente. On peut donc raisonnablement admettre qu'une unique zone suffit à représenter les caractéristiques statistiques du vent sur toute la largeur de la veine. On a toutefois indiqué en rouge une possibilité de partition en cinq zones.

### b) Echelles de turbulence et coefficients de cohérence

Les mesures effectuées permettent en outre d'estimer les fonctions densités spectrales et interspectrales des composantes  $u$  et  $w$  pour les paires de points suivantes : (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,1'), (0,2'), (0,3'), (0,4'), (0,5'), (0,6'). Il s'agit alors d'approcher ces fonctions par les modèles analytiques inclus dans notre code de calcul : Karman et Davenport, respectivement pour les densités spectrales et interspectrales (cf. chapitre 1). Ces fonctions sont paramétrées par un certain nombre de variables qu'il faut donc déterminer : échelles de turbulences  $L_u^y, L_w^y$  pour les spectres et coefficients de cohérence  $C_u^y, C_w^y$  pour les interspectres (ou, plus précisément, les fonctions de cohérence).

La détermination des échelles de turbulence ne pose pas de problème majeur. On s'arrange toutefois pour que les courbes théoriques soient particulièrement bien ajustées pour la gamme de fréquences 2 - 15 Hz contenant l'essentiel de l'énergie susceptible d'exciter nos maquettes.

En configuration turbulente, les valeurs de  $L_u^y$  oscillent entre 0,4 et 0,6 m au point 0. On constate donc que le vent de la soufflerie n'est pas, selon nos mesures, parfaitement stationnaire. On adoptera néanmoins, sans trop de regrets, la valeur de 0,5 m, soit 500 m vraie grandeur. Ces valeurs diminuent symétriquement et linéairement à mesure que l'on s'éloigne de l'axe central de la veine. On peut ainsi estimer à 0,4 m les échelles de turbulence à 0,6 m de l'axe et 0,3 m à 1,2 m. On assigne donc les valeurs 0,5, 0,4, 0,3 m respectivement aux zones centrale, intermédiaires et extrêmes définies en 5.1.2a). Pour la même configuration, les valeurs de  $L_w^y$  varient de 0,075 m à 0,1 m. On ne constate pas de variations significatives en fonction de la position par rapport à l'axe central.

En configuration uniforme, les valeurs de  $L_u^y$  sont toujours proches de 0,1 m. On observe toutefois de légères variations de chaque côté de l'axe : entre 0,1 m et 0,15 m à gauche et entre 0,075 m et 0,1 m à droite. On attribue aux cinq zones, en partant de la gauche, les valeurs 0,125, 0,125, 0,1, 0,075, 0,1. Les valeurs de  $L_w^y$  oscillent entre 0,075 m et 0,1 m. En réalité, l'allure des signaux ne se prête pas assez à l'ajustement de fonctions de Karman pour que se dégage une vraie tendance. On assigne donc la valeur moyenne de 0,09 m à toutes les zones.

La détermination des coefficients de cohérence se révèle plus délicate. Autant les formulations de Karman semblent particulièrement appropriées pour modéliser le spectre d'un vent en soufflerie, autant les formulations de Davenport semblent inefficaces. La détermination du coefficient optimum pour un écart  $\Delta y$  donné est déjà assez hasardeuse : on est en effet obligé de surestimer les degrés de corrélations dans les basses fréquences et de les sous-estimer dans les hautes fréquences. Ces coefficients se révèlent surtout totalement obsolètes lorsqu'on doit les appliquer à un écart  $\Delta y$  différent.

C'est la raison pour laquelle nous avons introduit un nouveau modèle, directement inspiré de celui de Davenport, mais plus adapté à notre cas. Ce modèle n'a, en aucun cas, la prétention d'être universel mais simplement de transférer efficacement des données expérimentales bien précises vers notre code de calcul. Deux modifications ont été apportées à la fonction de cohérence de Davenport, dont on rappelle la formulation appliquée à notre étude :

$$\gamma_i^2(\Delta y, n) = \exp\left(\frac{-n\|\Delta y\|C_i^y}{\bar{U}}\right) \quad i=u, v \quad (5.1)$$

La première modification consiste à « diminuer » l'influence du terme  $\|\Delta y\|$  en le remplaçant par  $\sqrt{\|\Delta y\|}$ . La seconde consiste à introduire deux fonctions « limites » de la forme (5.1), représentant, l'une les basses fréquences, l'autre les hautes fréquences. La nouvelle fonction de cohérence résulte d'une moyenne pondérée entre ces deux fonctions limites, dont le coefficient varie en fonction de la fréquence. On introduit un terme supplémentaire  $n_c$ , fréquence caractéristique pour laquelle les deux fonctions limites ont le même poids. On écrit ainsi :

$$\gamma_i^2(\Delta y, n) = 0,5^{n/n_c} \exp\left(\frac{-n\sqrt{\|\Delta y\|}C_{1i}^y}{\bar{U}}\right) + \left(1 - 0,5^{n/n_c}\right) \exp\left(\frac{-n\sqrt{\|\Delta y\|}C_{2i}^y}{\bar{U}}\right) \quad (5.2)$$

Remarquons que cette nouvelle fonction tend bien vers 1 quand  $n\Delta y$  tend vers 0 et vers 0 quand  $n\Delta y$  tend vers l'infini. Le problème est que les termes situés dans les exponentielles ne sont pas adimensionnels. Cela peut être artificiellement résolu en ajoutant au dénominateur un terme homogène à la racine carrée d'une distance : dimension caractéristique de la soufflerie, échelle de turbulence... En fait, le sens physique de ce terme n'a d'importance que dans l'optique d'une généralisation de notre formulation... ce qui n'est pas le cas... On laisse donc l'expression (5.2) telle quelle.

En configuration turbulente, on estime les couples de coefficients à (5, 25) et (4, 20), respectivement pour les composantes u et w. Notons que les interspectres liés à w sont plus faibles donc plus bruités et plus difficiles à modéliser. En configuration laminaire, on trouve les couples de coefficients (6, 25) et (7, 28) respectivement pour les composantes u et w.



c) Récapitulatif des résultats

En configuration turbulente :

Zones	$\bar{U}/\bar{U}_{ref}$	$I_u$ (%)	$I_w$ (%)	$L_u^y$ (m)	$L_w^y$ (m)	$C_{1u}^y$	$C_{2u}^y$	$C_{1w}^y$	$C_{2w}^y$
1	1,04	6,5	5,5	0,3	0,09	5	25	4	20
2	0,97	10	6,5	0,4	0,09	5	25	4	20
3	1	8	5	0,5	0,09	5	25	4	20
4	1,02	6,5	4,5	0,4	0,09	5	25	4	20
5	0,97	8	5,5	0,3	0,09	5	25	4	20

Tableau 5.2 – Modélisation du vent en configuration turbulente

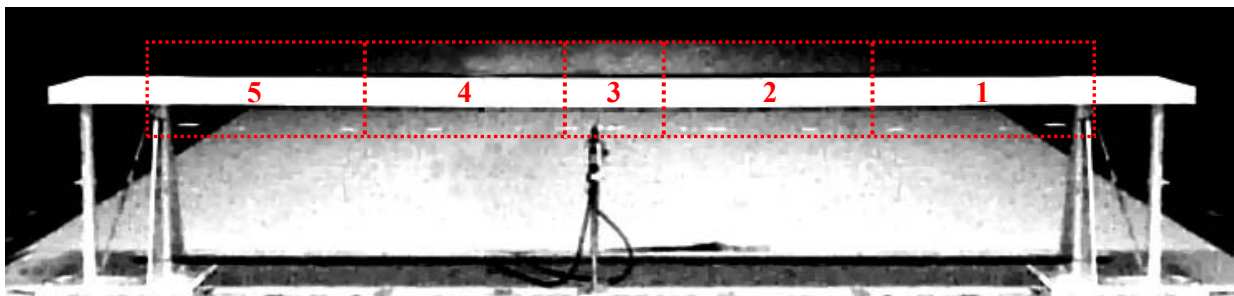


Figure 5.25 – Localisation des zones de vent en configuration turbulente

En configuration uniforme :

Zones	$\bar{U}/\bar{U}_{ref}$	$I_u$ (%)	$I_w$ (%)	$L_u^y$ (m)	$L_w^y$ (m)	$C_{1u}^y$	$C_{2u}^y$	$C_{1w}^y$	$C_{2w}^y$
1	1	1,3	1,5	0,125	0,09	6	25	7	28
2	1,005	0,8	0,75	0,125	0,09	6	25	7	28
3	1	1,1	1,25	0,1	0,09	6	25	7	28
4	0,985	1,1	1,25	0,075	0,09	6	25	7	28
5	0,97	1,5	1,5	0,1	0,09	6	25	7	28

Tableau 5.3 – Modélisation du vent en configuration laminaire

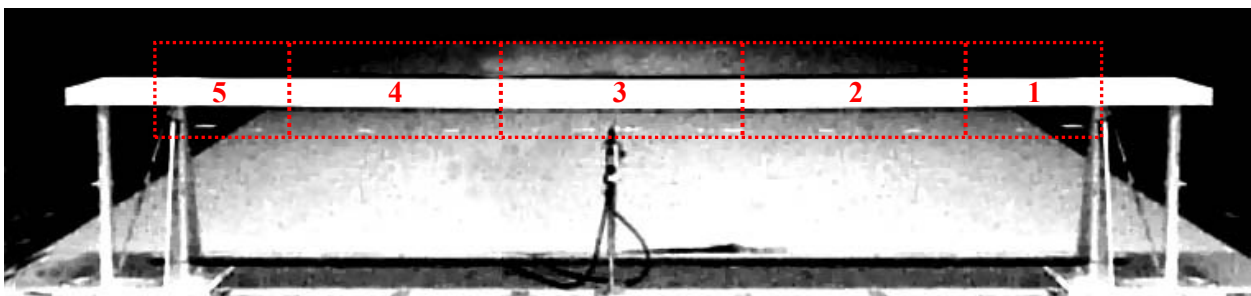


Figure 5.26 – Localisation des zones de vent en configuration uniforme

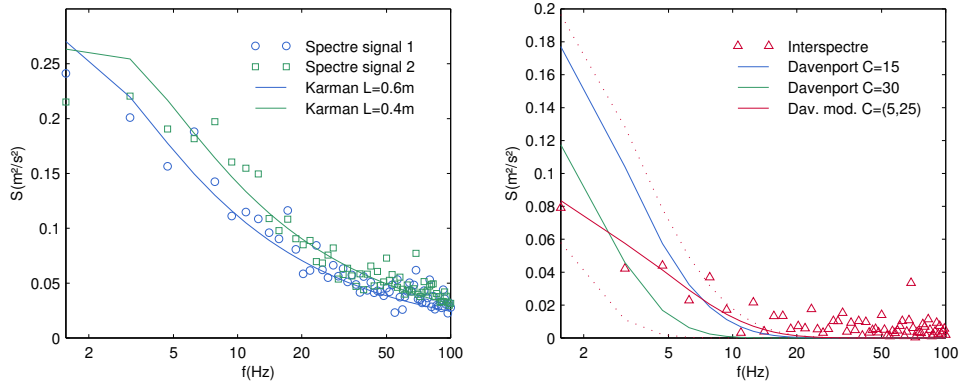


Figure 5.27 – Traitement de la composante  $u$  aux points 0 et 1 pour  $U=6\text{m/s}$  en vent turbulent

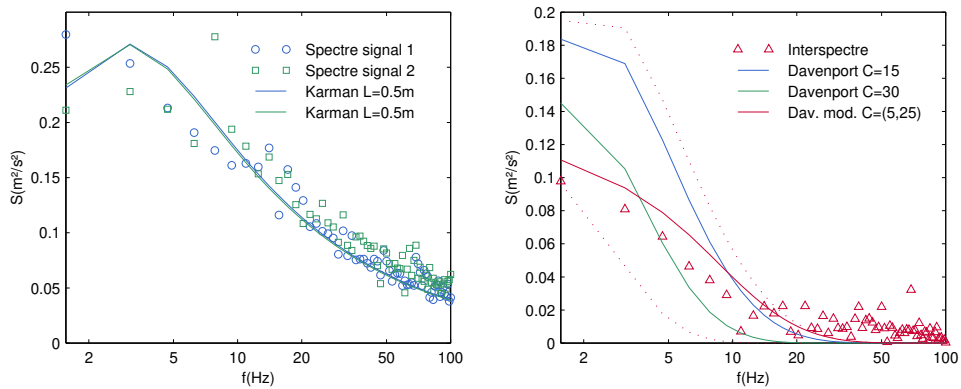


Figure 5.28 – Traitement de la composante  $u$  aux points 0 et 1 pour  $U=10\text{m/s}$  en vent turbulent

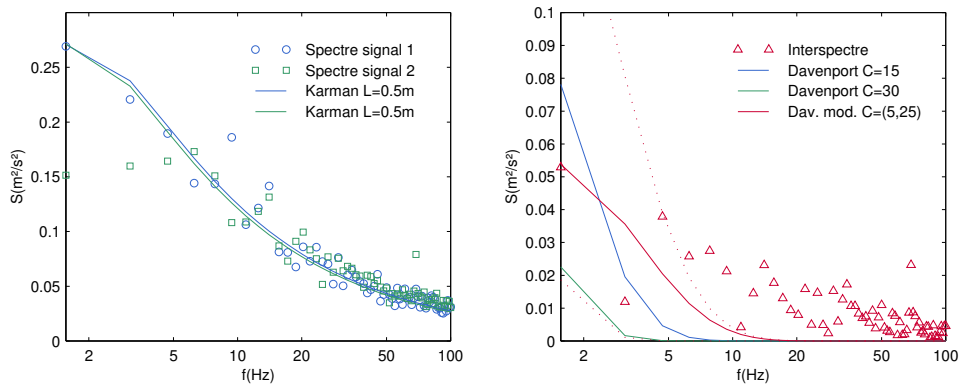


Figure 5.29 – Traitement de la composante  $u$  aux points 0 et 3 pour  $U=6\text{m/s}$  en vent turbulent

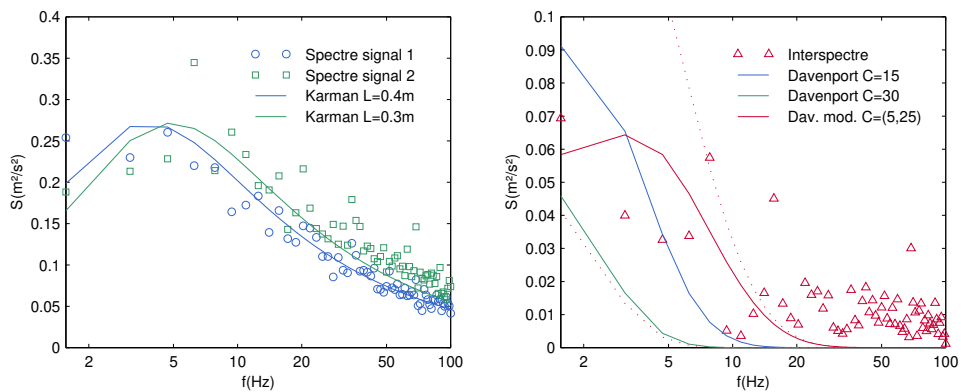


Figure 5.30 – Traitement de la composante  $u$  aux points 0 et 3 pour  $U=10\text{m/s}$  en vent turbulent

## 5.4 Caractérisation aérodynamique des tabliers

Les valeurs des coefficients aérodynamiques stationnaires et instationnaires ont déjà été présentés au chapitre 3. Il s'agit à présent de les modéliser en vue du calcul numérique.

Les coefficients aérodynamiques stationnaires sont linéarisés autour des incidences  $-5^\circ$ ,  $-4^\circ$ ,  $-3^\circ$ ,  $-2^\circ$ ,  $-1^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $5^\circ$ , puis approchés par des polynômes du quatrième degré. Les résultats, obtenus en vent uniforme et turbulent, sont présentés figures 5.31 et 5.32.

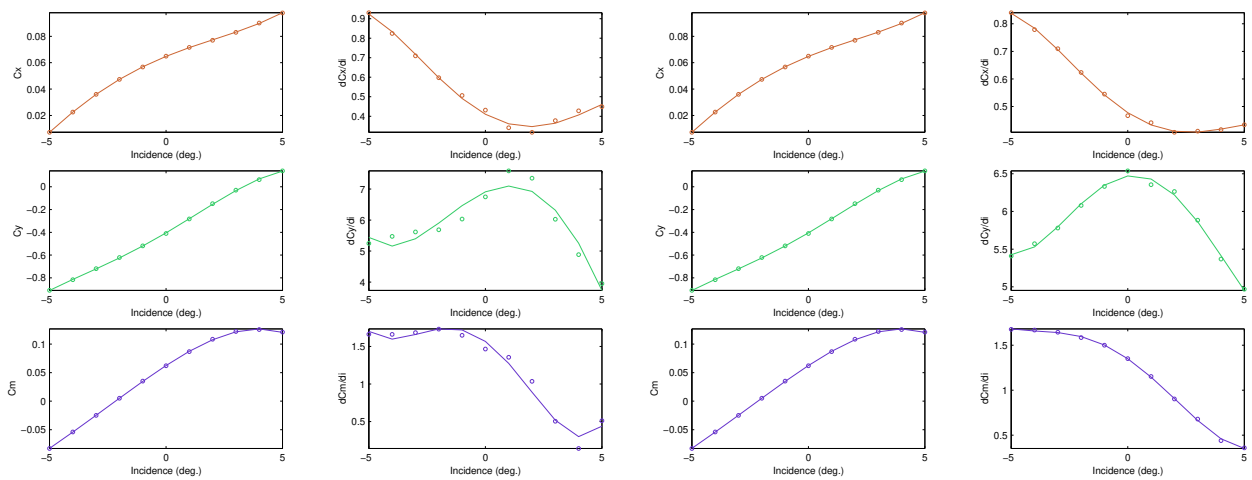


Figure 5.31 – Linéarisation des coefficients aérodynamiques du tablier trapézoïdal

A gauche : vent uniforme ; à droite : vent turbulent

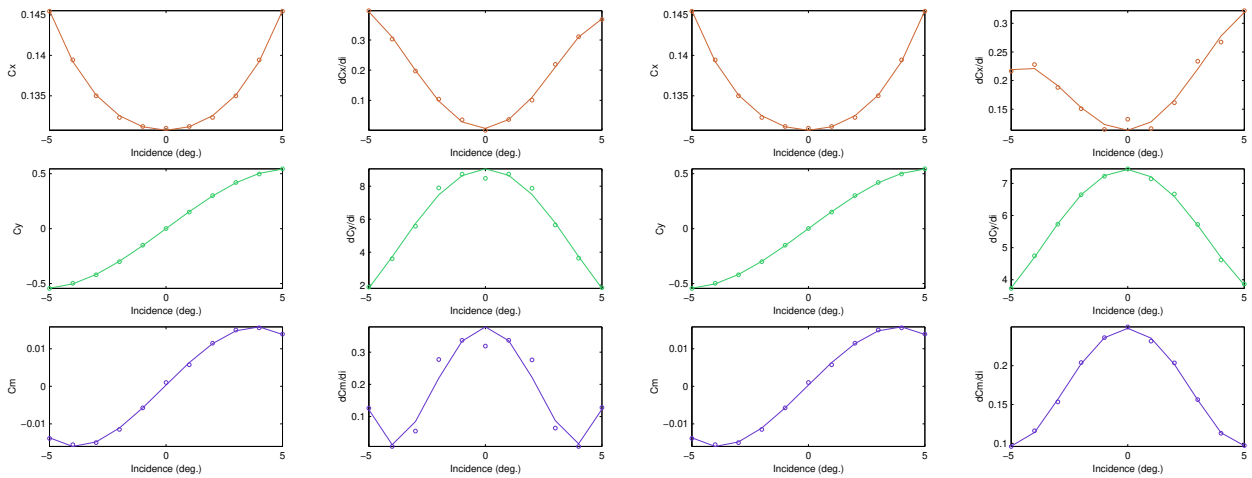


Figure 5.32 – Linéarisation des coefficients aérodynamiques du tablier rectangulaire

A gauche : vent uniforme ; à droite : vent turbulent

Les coefficients instationnaires de Scanlan sont eux approchés par les fonctions indicielles présentées chapitre 2. Ces fonctions sont ajustées autour des données issues des essais en oscillations libres (figures 5.33 et 5.34).

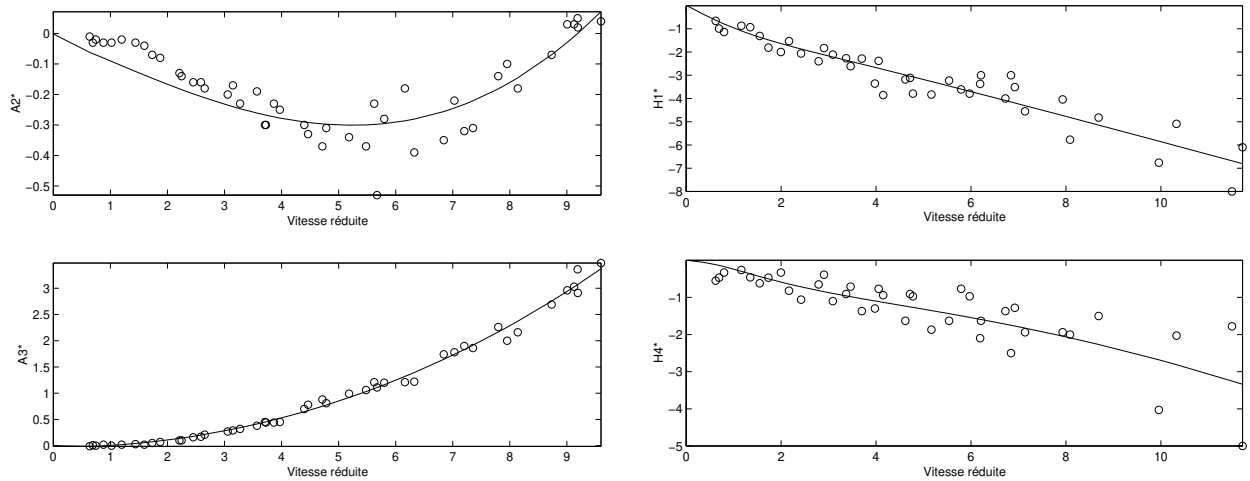


Figure 5.33 – Fonctions indicielles caractérisant le tablier trapézoïdal

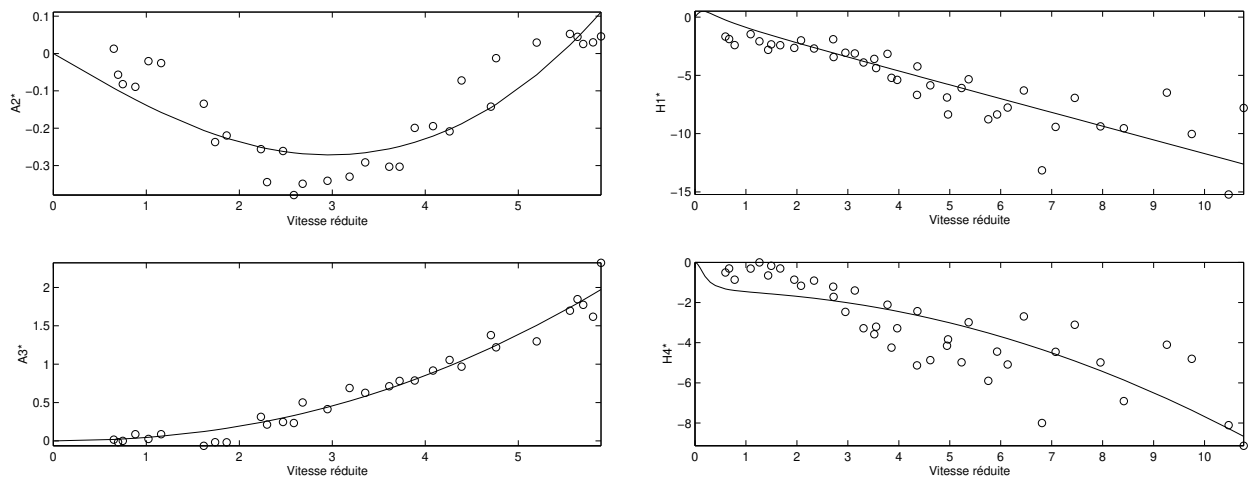


Figure 5.34 – Fonctions indicielles caractérisant le tablier rectangulaire

## 5.5 Mesure des déplacements

Les déplacements sont mesurés en quatre points : deux à mi-travée et deux à quart-de-travée (figures 5.35 et 5.36). Les écarts types des déplacements modaux sont obtenus par combinaison linéaire des quatre voies, analyse spectrale et ajustement de spectres d'oscillateurs linéaires à 1 d.d.l. par les moindres carrés. On en déduit également fréquences et amortissements modaux.



Figures 5.35 et 5.36 – Capteurs de déplacements et étiquettes de visée

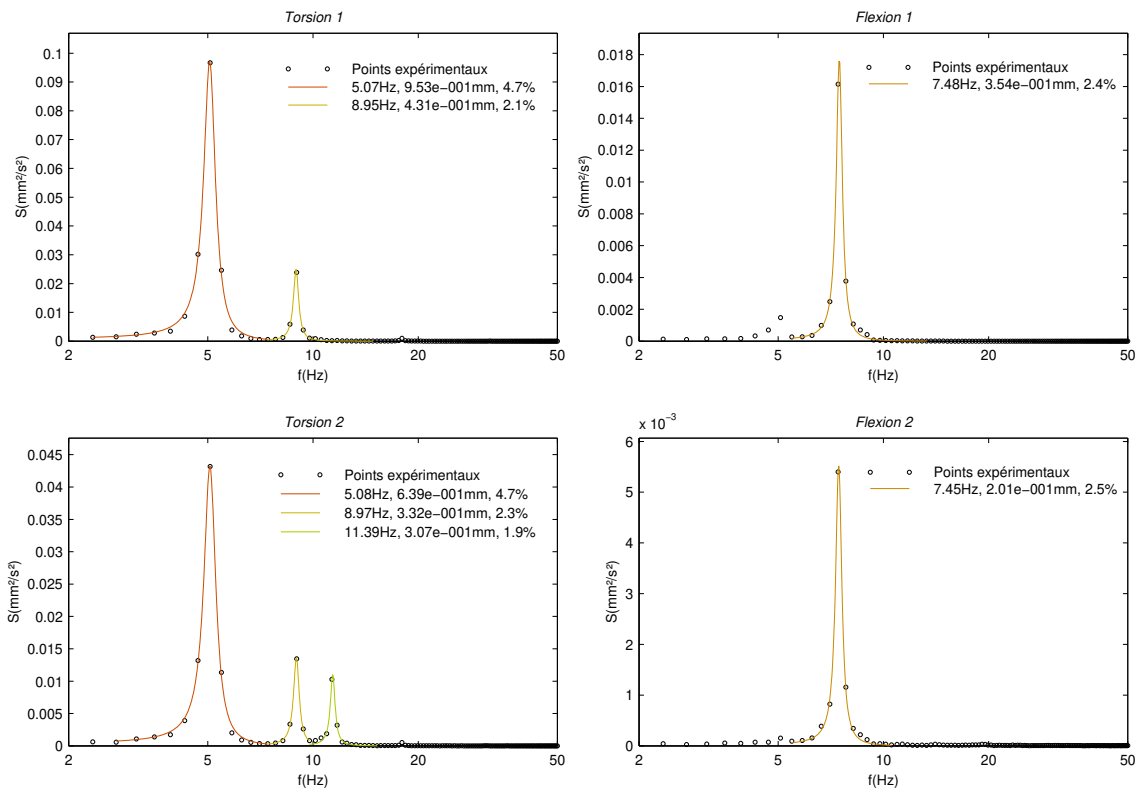


Figure 5.37 – Analyse spectrale des déplacements modaux : tablier trapézoïdal en vent turbulent à 10m/s

La figure 5.38 montre le développement d'une instabilité en torsion pure du tablier trapézoïdal en vent uniforme à une vitesse de 20 m/s. Cela correspond, d'après les échelles de similitude (1/100 en distance et 25/1 en fréquence), à une vitesse vraie grandeur de l'ordre de 80 m/s.

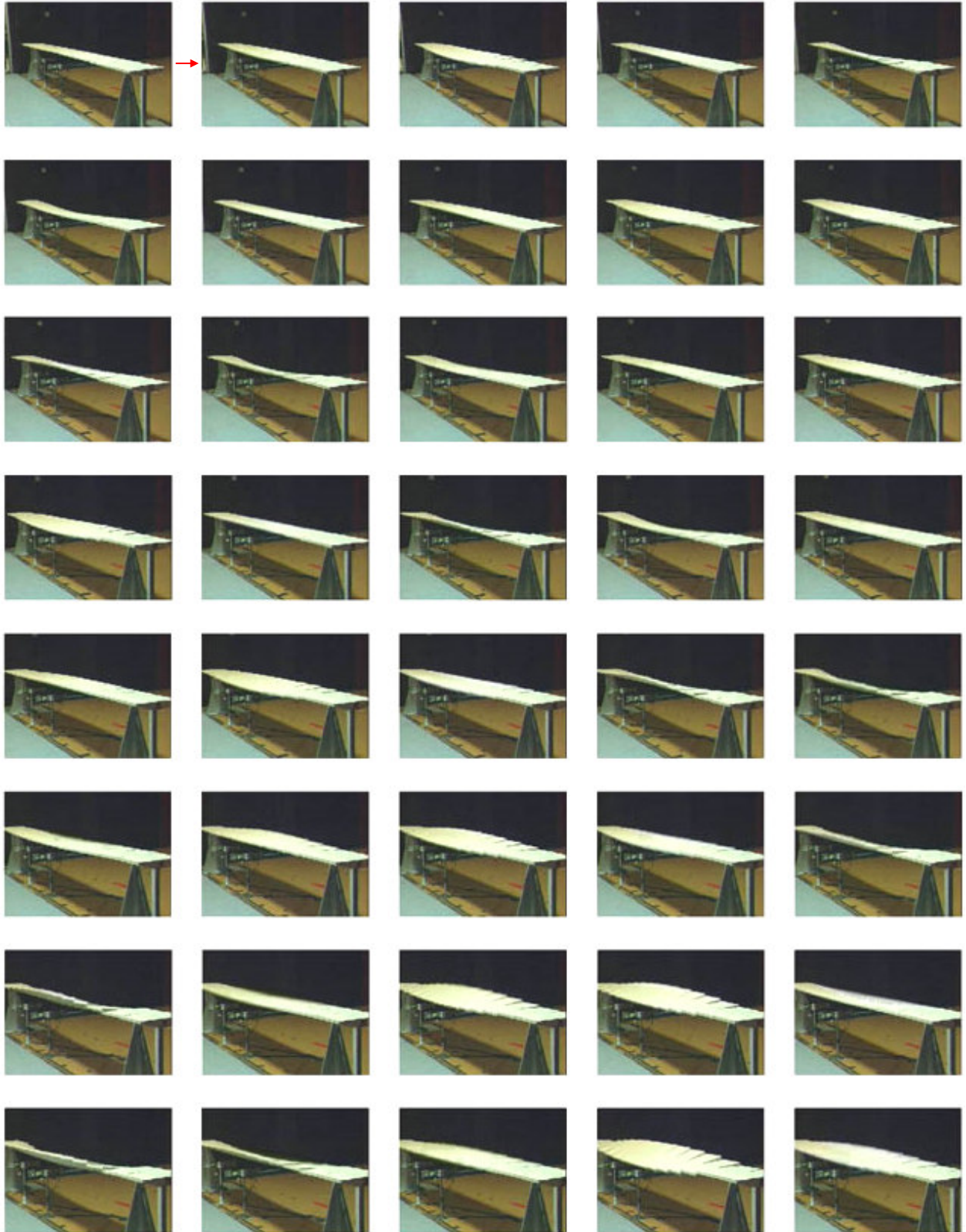


Figure 5.38 – Instabilité en torsion pure du tablier de Millau à 20m/s (24 images/seconde)



## 5.6 Résultats

### 5.6.1 Considérations sur les incertitudes de calcul

Avant de porter un jugement sur la comparaison entre résultats numériques et expérimentaux, il convient d'avoir une idée des incertitudes entachant les uns et les autres. Les premiers sont liées aux erreurs d'estimation des différents paramètres utilisés pour le calcul. Les seconds concernent simplement la précision de la mesure des déplacements par les capteurs lasers.

En se référant à la formulation (4.67), on peut proposer une estimation de l'incertitude relative concernant l'estimation numérique de l'amplitude des déplacements. On écrit ainsi :

$$\frac{\Delta\sigma_q}{\sigma_q} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S_F(\omega)}{S_F(\omega)} + \frac{1}{2} \frac{\Delta\xi}{\xi} + \frac{\Delta m_g}{m_g} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega} \quad (5.3)$$

l'incertitude relative de la densité spectrales des buffeting forces pouvant être décomposée comme suit :

$$\frac{\Delta S_F(\omega)}{S_F(\omega)} = 2 \frac{\Delta C_{ad}}{C_{ad}} + \frac{\Delta S_u}{S_u} + 2 \frac{\Delta \bar{U}}{\bar{U}} \quad (5.4)$$

où  $C_{ad}$  représente « l'ensemble » des coefficients aérodynamiques.

Le tableau 5.4 rassemble les incertitudes relatives estimées « à la louche » des différents paramètres.

L'incertitude concernant les coefficients aérodynamiques est estimée essentiellement à partir des écarts obtenus entre mesures par balances et mesures par prises de pression (figures 3.5-3.6). Elle ne prend en compte ni l'incertitude liée à la détermination de l'admittance aérodynamique, ni les problèmes spécifiques liés à la détermination des coefficients de moment du tablier rectangulaire, ni les effets de Reynolds.

L'incertitude dans la détermination du spectre du vent est estimée d'après les figures 5.27-30. L'incertitude liée à l'amortissement ne prend en compte que l'amortissement aérodynamique qui est prépondérant sur l'essentiel de la gamme de vitesses ; elle est estimée d'une part d'après les « impressions » ressenties pendant les mesures et traitements des coefficients aéroélastiques, d'autre part d'après l'évaluation de la pertinence des fonctions indicielles (figures 5.33 et 5.34).

Les incertitudes concernant masses généralisées et pulsations proviennent de l'analyse des nuages de points expérimentaux (figures 5.14 et 5.15).

Paramètre	$C_{ad}$	$S_u$	$U$	$\xi$	$m_g$	$\omega$
$\Delta P/P$	5%	5%	1%	20%	5%	0,5%

Tableau 5.4 – Incertitudes relatives des paramètres utilisés par les calculs spectraux et temporels

Des expressions (5.3) et (5.4), on estime l'incertitude relative dans l'estimation des déplacements, liée aux erreurs expérimentales, à 25% environ.

Si l'on estime l'incertitude entachant la mesure des déplacements (détermination des gains, position du faisceau laser) à 5%, on arrive à une incertitude relative totale de 30%, uniquement liée à l'ensemble des mesures effectuées pendant l'ensemble de la procédure de validation.

## 5.6.2 Calcul spectral

Les calculs par la méthode spectrale ont été effectués pour les deux tabliers et les deux types de vent, soit quatre configurations. Pour chacune d'elles, les réponses des quatre premiers modes de vibration sont présentées figures 5.39 à 5.42. On y trouve :

- les résultats issus des essais expérimentaux;
- les résultats obtenus par le calcul spectral "complet", c'est à dire avec prise en compte des forces aéroélastiques et de l'admittance aérodynamique;
- les résultats obtenus sans prise en compte de l'admittance aérodynamique;
- les résultats obtenus par le calcul spectral "quasi statique", c'est à dire sans tenir compte ni de l'admittance aérodynamique, ni des forces aéroélastiques.

Les résultats expérimentaux sont représentés sous forme de cercles dont le rayon, dans la représentation en échelle logarithmique, correspond à une incertitude de 20%.



### a) Cas du tablier trapézoïdal

Les réponses des maquettes sont globalement sous-estimées pour les faibles vitesses de vent et surestimées pour les hautes vitesses. Cela est partiellement imputable à l'évolution de l'amortissement structurel en fonction de l'amplitude des déplacements: l'amortissement structurel retenu pour les calcul est surévalué pour les petites amplitudes et sous-évalué pour les grandes amplitudes. Cela est surtout vrai à faibles vitesse et amplitude lorsque l'amortissement aérodynamique est faible par rapport à l'amortissement structurel. Ajoutons qu'à faible vitesse les mesures peuvent être surestimées du fait de l'importance relative croissante des oscillations générées par les vibrations du sol de la soufflerie.

Les résultats obtenus en vent uniforme ne sont pas plus mauvais que ceux obtenus en vent turbulent. On aurait pu s'attendre à une sous-estimation des réponses en vent laminaire du fait de la non prise en compte des effets de sillage. On peut en conclure que ces effets ne sont pas trop importants.

La vitesse critique de flottement est significativement sous-estimée en vent uniforme et très largement sous estimée en vent turbulent. La première explication réside dans la mauvaise prédiction des phénomènes aéroélastiques. Rappelons en effet que les coefficients de Scanlan ont été déterminés dans des conditions où le taux de turbulence était de l'ordre de 0,5%. Ici, les taux de turbulence pour la composante longitudinale du vent sont de 1,5% et 8% respectivement pour les configurations uniformes et turbulentes. Or, les phénomènes d'instabilité aérodynamique ont d'autant plus de mal à se développer que le taux de turbulence est fort, même s'ils sont également plus facilement initiés. Cela n'est absolument pas pris en compte dans nos calculs, ce qui explique la sous-estimation des vitesses critiques de flottement. Ajoutons que la superposition de différents modes de vibration ne peut que gêner le développement de phénomènes aérodynamiques organisés. Cela non plus n'est pas pris en compte dans nos calculs. La seconde explication réside dans la sous-estimation de l'amortissement structurel du premier mode pour les grandes amplitudes. La vitesse permettant d'annuler l'amortissement total est donc sous-estimée.

Les résultats obtenus par une approximation "quasi statique" montrent bien l'importance des forces aéroélastiques et admittance aérodynamique. En particulier, l'amortissement aérodynamique joue ici un grand rôle du fait de la faiblesse relative des amortissements structurels.

### b) Cas du tablier rectangulaire

Le comportement des modes de torsion est globalement mal simulé par le calcul : les déplacements sont généralement sous-estimés. L'effet du sillage est sans doute ici plus important que dans le cas du tablier trapézoïdal ; on constate notamment le rôle essentiel joué par le détachement tourbillonnaires. Rappelons

surtout les difficultés rencontrées lors de la détermination expérimentale des coefficients de moment. L'introduction d'une admittance aérodynamique "fourre-tout" permet certes de corriger partiellement la mauvaise connaissance des moments s'exerçant tout au long du tablier. Néanmoins, ce terme correctif n'est strictement valable que dans le cas d'un tablier d'un mètre de long. On a en effet pu voir l'importance des effets tridimensionnels liés à ce type de profil.

La réponse du mode de flexion est, par contre, bien prédite par le calcul. Cela peut être mis au crédit de la plus forte prédominance des forces aéroélastiques par rapport au tablier trapézoïdal (fig. 3.19 et 3.20) qui réduit le problème lié à la mauvaise estimation de l'amortissement structurel.

La vitesse critique de flottement en vent uniforme est également correctement prédite. Une explication, sans doute insuffisante, est que les forces de traînée, jouent ici un rôle majeur. Le premier mode, dont la déformée horizontale est très importante, est donc favorisé et moins perturbé par les autres modes. En vent turbulent, la vitesse critique de flottement est par contre logiquement sous-estimée.

### c) Conclusion

Compte tenu des considérations énoncées en 5.5.1 et des difficultés rencontrées autour de la détermination du moment du tablier rectangulaire, on peut affirmer que les résultats obtenus par la méthode spectrale sont tout à fait satisfaisant dans une gamme de vitesse « intermédiaire ». A basse vitesse, les calculs sont globalement nettement surestimés, spécialement en vent uniforme. On peut avancer deux hypothèses :

- Les effets de Reynolds deviennent importants : on a déjà observé des effets non négligeables lors de l'étude paramétrique des coefficients de moments (figure 3.8) ;
- La turbulence du vent est mal modélisée à faible vitesse : les mesures de turbulence, faites pour des vitesses comprises entre 6 m/s et 12 m/s, ont été appliquées brutalement à l'ensemble de la gamme de vitesses .

Enfin, les instabilités sont assez mal prédites. Les raisons principales sont :

- la non prise en compte de l'impact de la turbulence sur les coefficients aéroélastiques ;
- l'absence de modélisation de la cohérence latérale des forces aéroélastiques ;
- les limites du principe de superposition des modes.

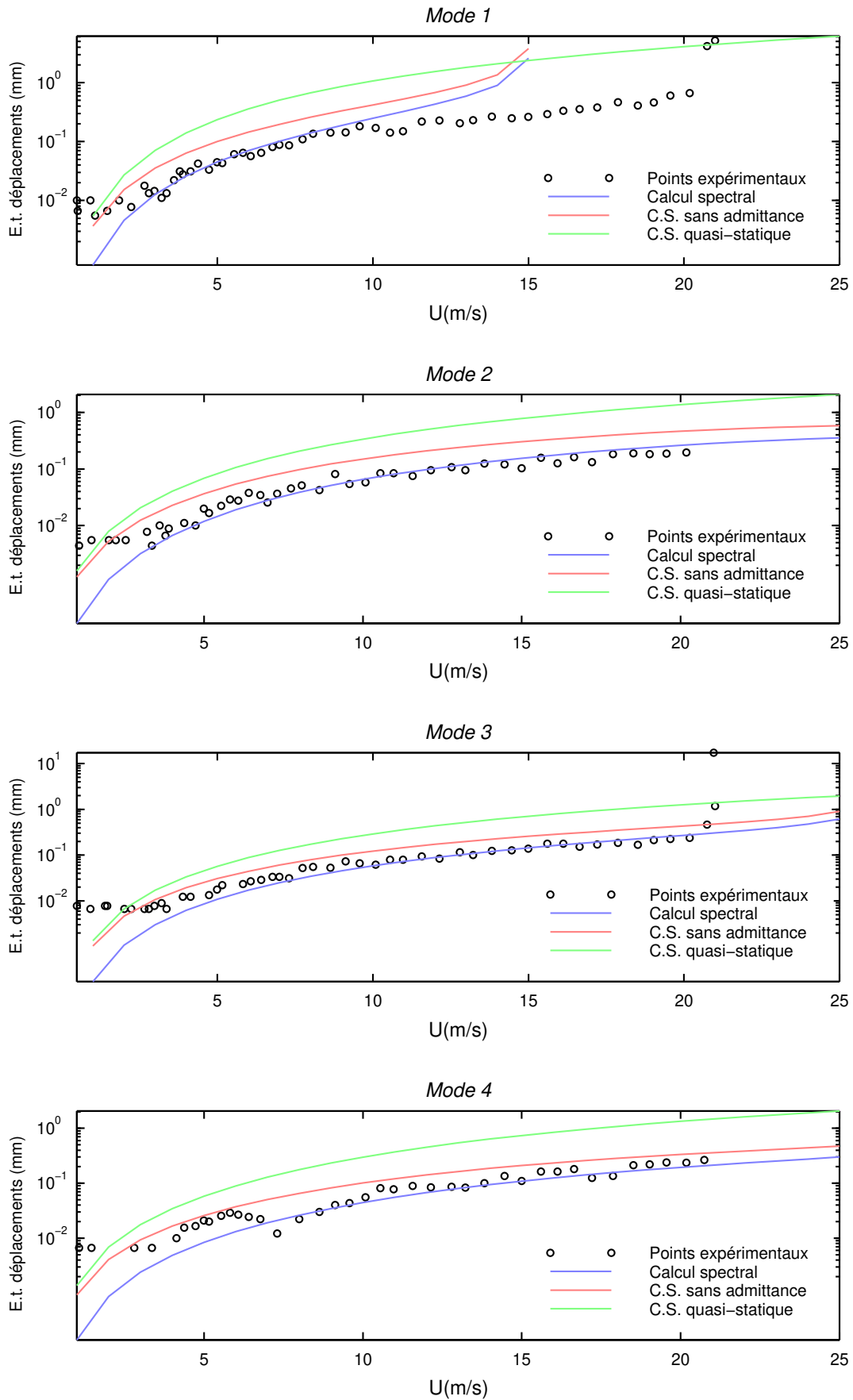


Figure 5.39 – Résultats calculs spectraux : tablier trapézoïdal en vent uniforme

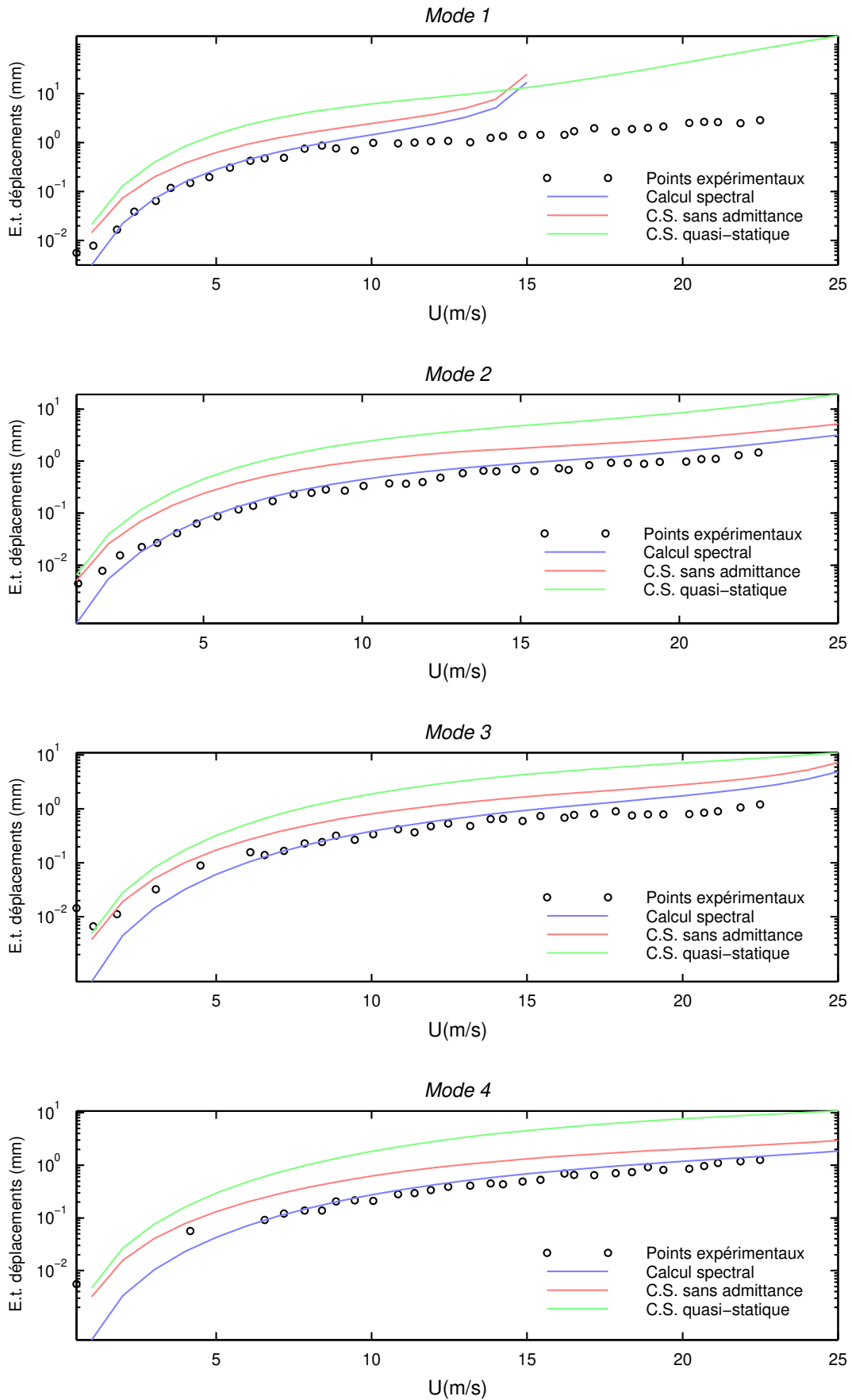


Figure 5.40 – Résultats calculs spectraux : tablier trapézoïdal en vent turbulent

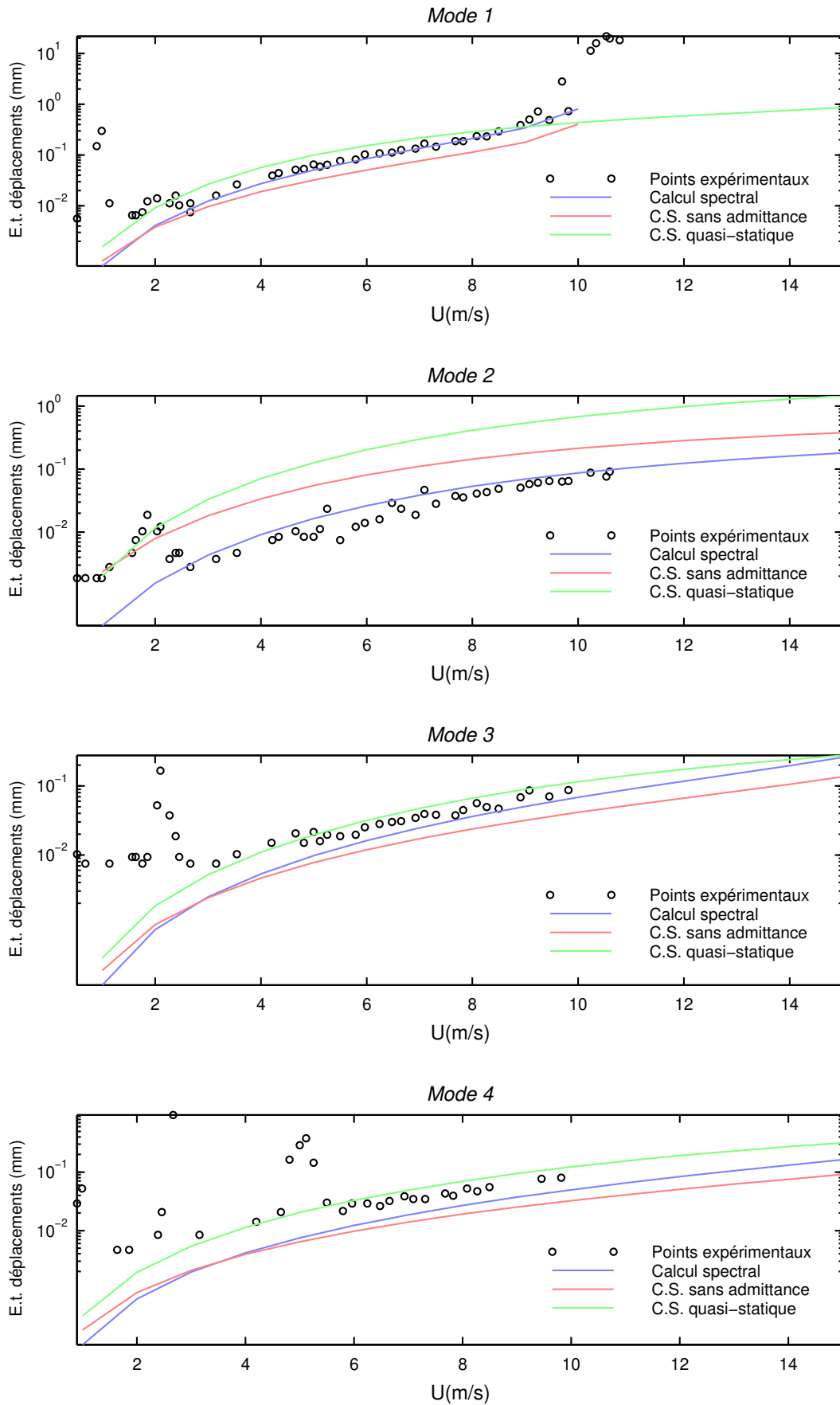


Figure 5.41 – Résultats calculs spectraux : tablier rectangulaire en vent uniforme

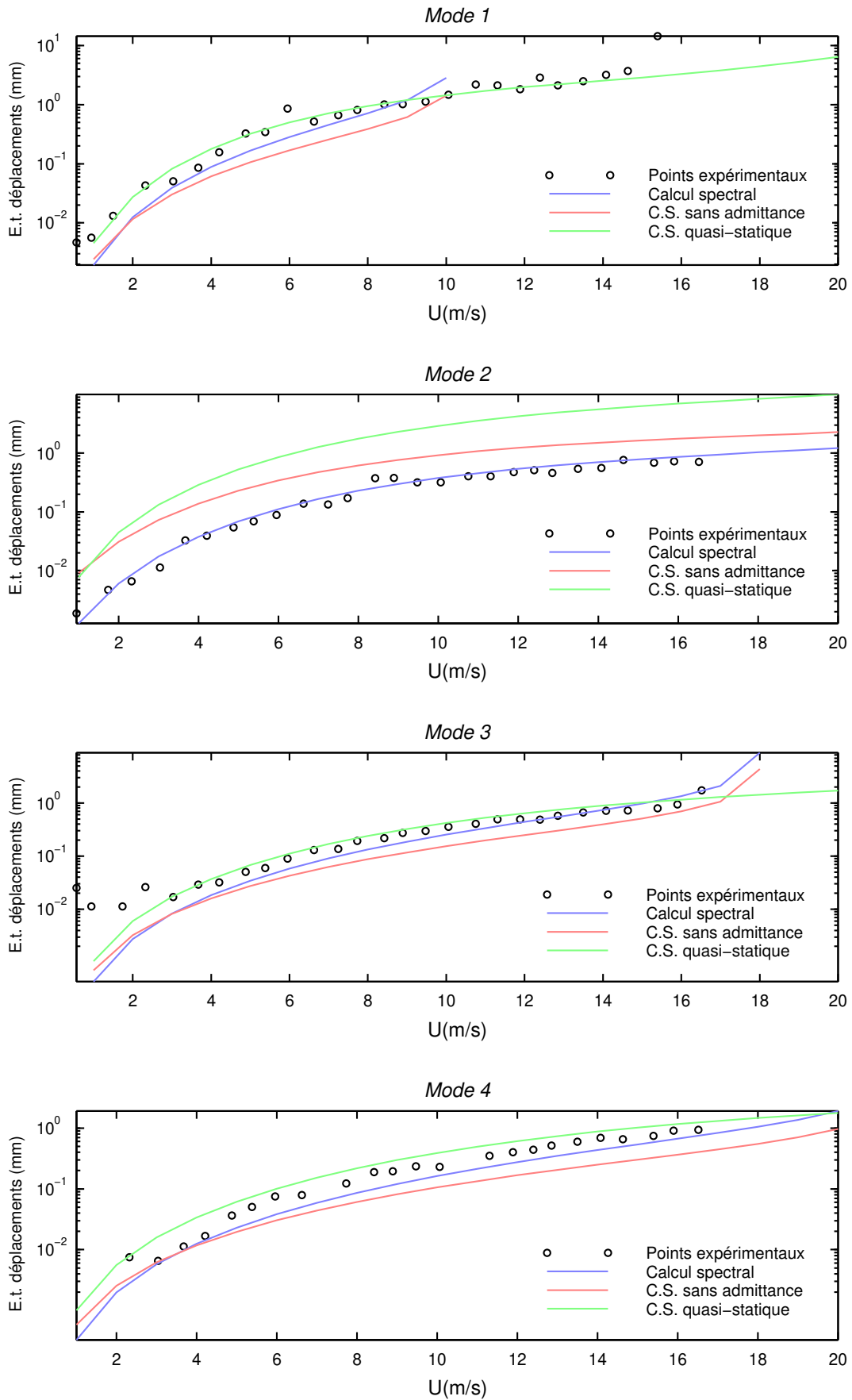


Figure 5.42 – Résultats calculs spectraux : tablier rectangulaire en vent turbulent

### 5.6.3 Calcul temporel

Pour le calcul temporel, on a généré une série de signaux de vent, en 24 points de l'espace, pour différentes valeurs de vitesses moyennes de référence comprises entre 1 et 25 m/s. Chaque signal est composé de 8192 points espacés de  $1/100^e$  de seconde. Chaque période du quatrième mode est ainsi représentée par environ 8 points. Deux signaux de la composante longitudinale d'un vent turbulent sont représentés figure 5.43. On a également représenté leurs spectres et interspectres, réels et imposés en condition d'entrée.

Les résultats issus du calcul temporel sont présentés figures 5.47 à 5.50. On y a représenté :

- les résultats issus des essais expérimentaux;
- les résultats obtenus par le calcul temporel "complet", c'est à dire avec prise en compte des forces aéroélastiques et de l'admittance aéroélastique;
- les résultats obtenus sans prise en compte des forces aéroélastiques;
- un rappel des résultats obtenus auparavant par le calcul spectral.

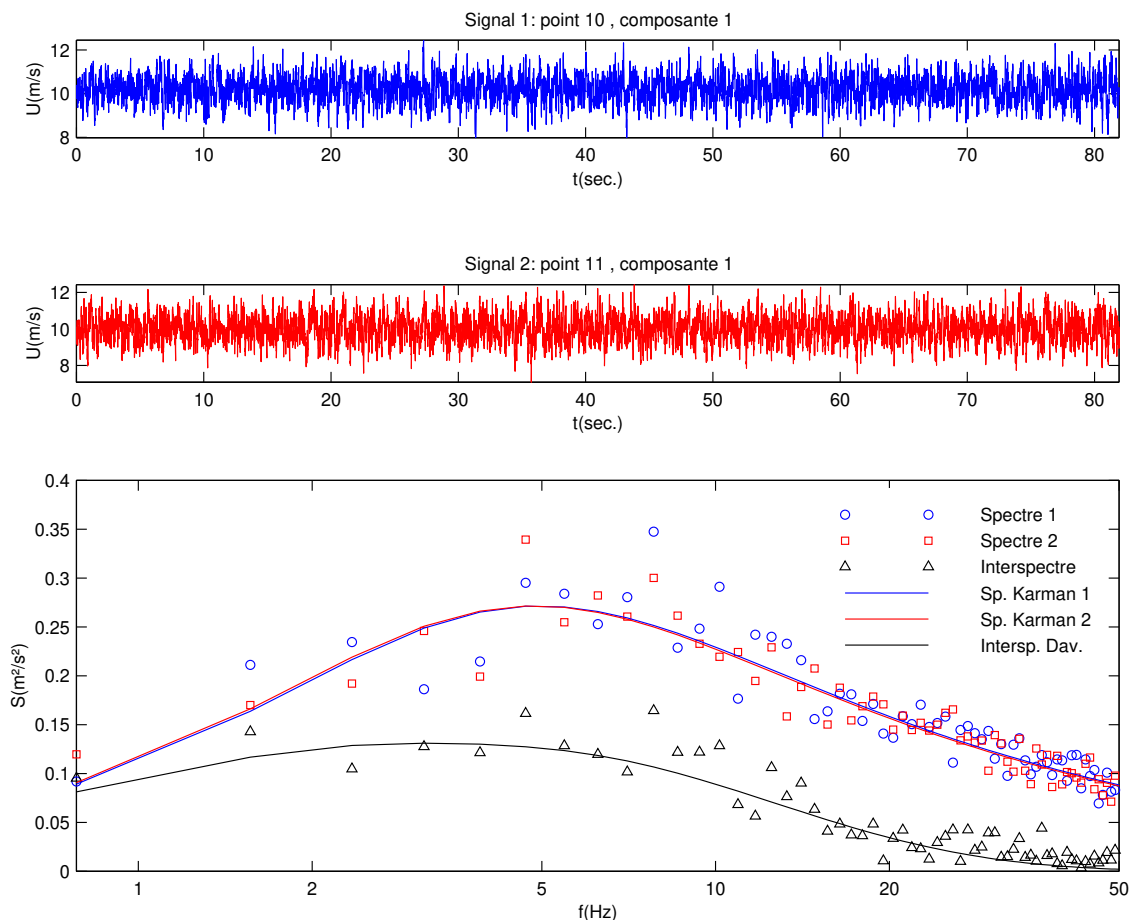


Figure 5.43 – Signaux de vent turbulent générés en deux points distants de 20 cm

Une bonne partie des commentaires formulés à propos du calcul spectral sont applicables au calcul temporel. On peut cependant apporter deux nuances.

Tout d'abord les déplacements à faible vitesse sont moins sous-estimés. Cela relativise (sans toutefois les contredire) les analyses proposées à ce sujet à propos du calcul spectral puisque les arguments invoqués alors sont toujours valables ici. A vrai dire, ne pouvant expliquer ce fait, il nous est difficile de prétendre que le calcul temporel est plus précis à faible vitesse que le calcul spectral. Les raisons, inconnues, sont peut-être de mauvaises...

Par contre la meilleure prédiction du comportement instable des tabliers peut en partie être mise au crédit d'une meilleure prise en compte de l'impact de la turbulence sur les phénomènes aéroélastiques. On voit notamment sur la figure 5.44, représentant les signaux obtenus avec et sans prise en compte des effets aéroélastiques que l'apport de ces derniers ne se résume pas à un simple changement d'échelle. On pourrait presque parler de « mélange intime » entre les buffeting forces et les forces aéroélastiques, représentatifs d'une « partie de la réalité ». Si l'on s'intéresse maintenant aux figures 5.45 et 5.46, représentant les oscillations des deux premiers modes à 2, 10 et 19 m/s en configurations laminaire et turbulente, on s'aperçoit que dans le premier cas l'instabilité à 19 m/s est immédiate, alors que dans le second cas les buffeting forces semblent retarder l'apparition de cette même instabilité. Le fait que les vitesses critiques obtenues en vent laminaire et en vent turbulent soient similaires provient uniquement du fait que les temps de simulations sont suffisamment longs pour que, quelque soit le degré de turbulence, les instabilités potentielles se muent en instabilités réelles. Cependant, on peut très bien imaginer qu'avec un taux de turbulence supérieur et une durée de simulation égale, la vitesse de 19 m/s soit déclarée inférieure à la vitesse critique de flottement.

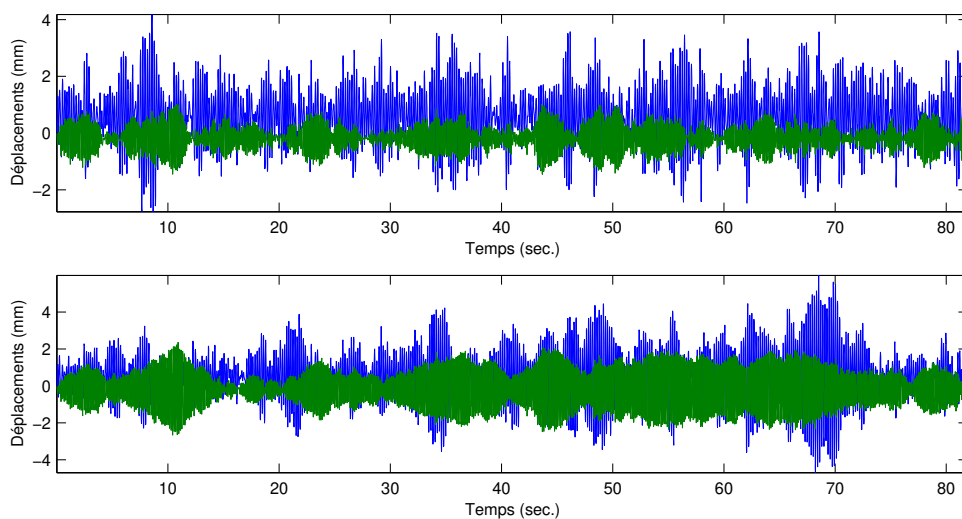


Figure 5.44 – Signaux de déplacement des deux premiers mode du tablier trapézoïdal (mode 1 en bleu, mode 2 en vert) en vent turbulent pour une vitesse de 10 m/s avec et sans effets aéroélastiques



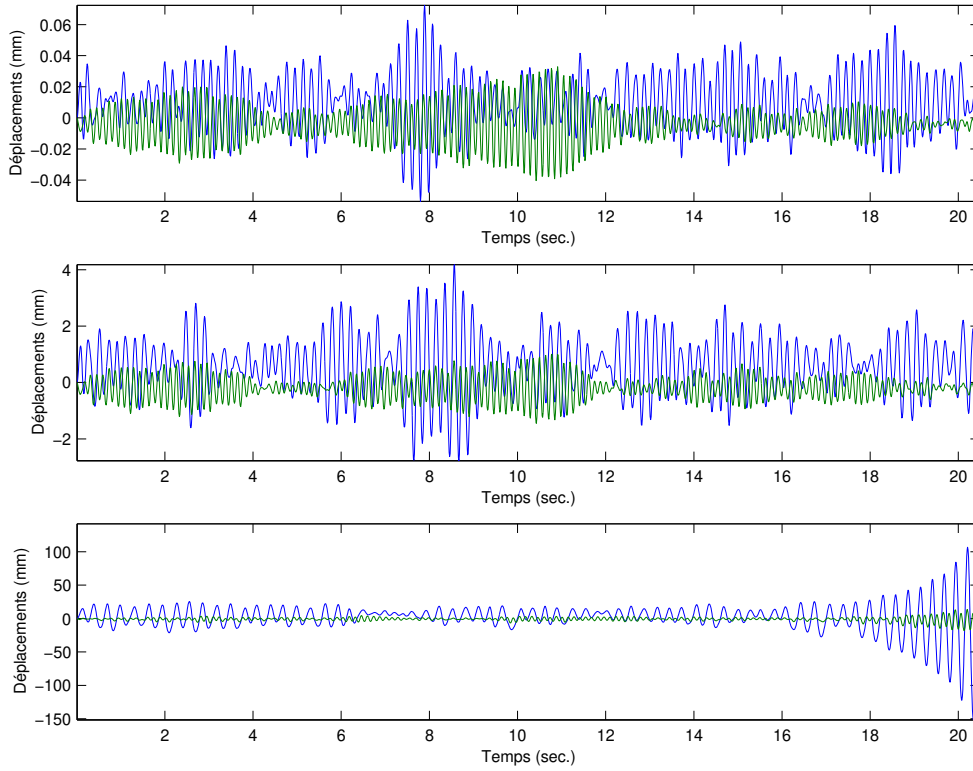


Figure 5.45 – Signaux de déplacement des deux premiers mode du tablier trapézoïdal en vent turbulent pour 2 m/s, 10 m/s, 19 m/s

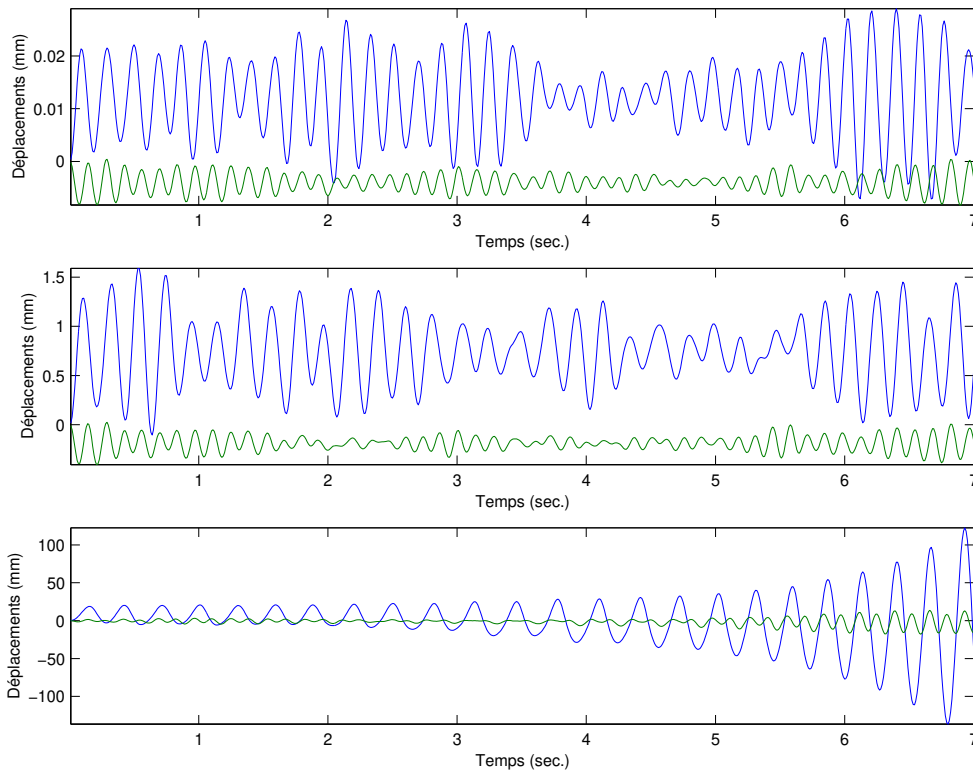


Figure 5.46 – Signaux de déplacement des deux premiers mode du tablier trapézoïdal en vent uniforme pour 2 m/s, 10 m/s, 19 m/s

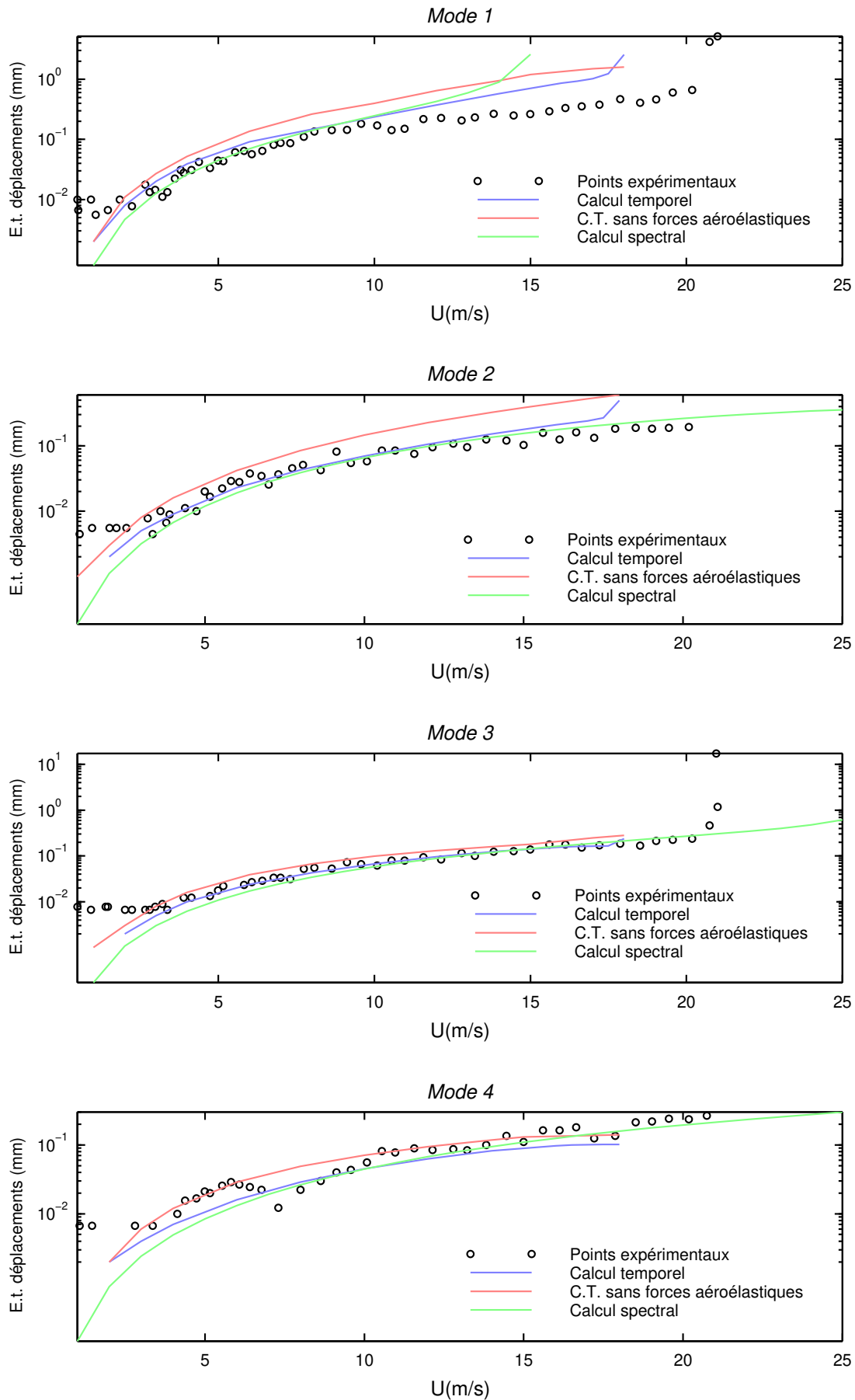


Figure 5. 47 – Résultats calculs temporels : tablier trapézoïdal en vent uniforme

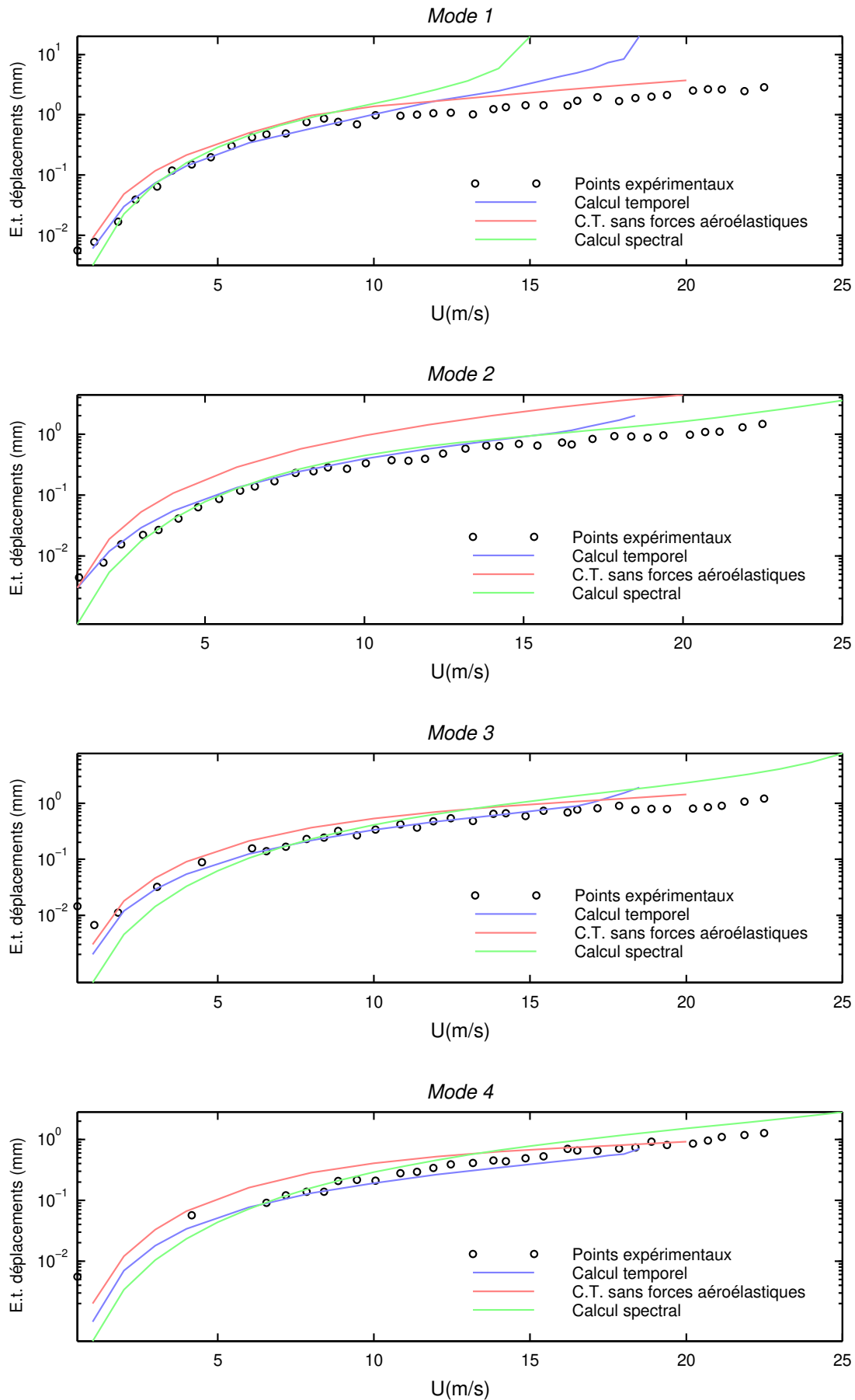


Figure 5.48 – Résultats calculs temporels : tablier trapézoïdal en vent turbulent

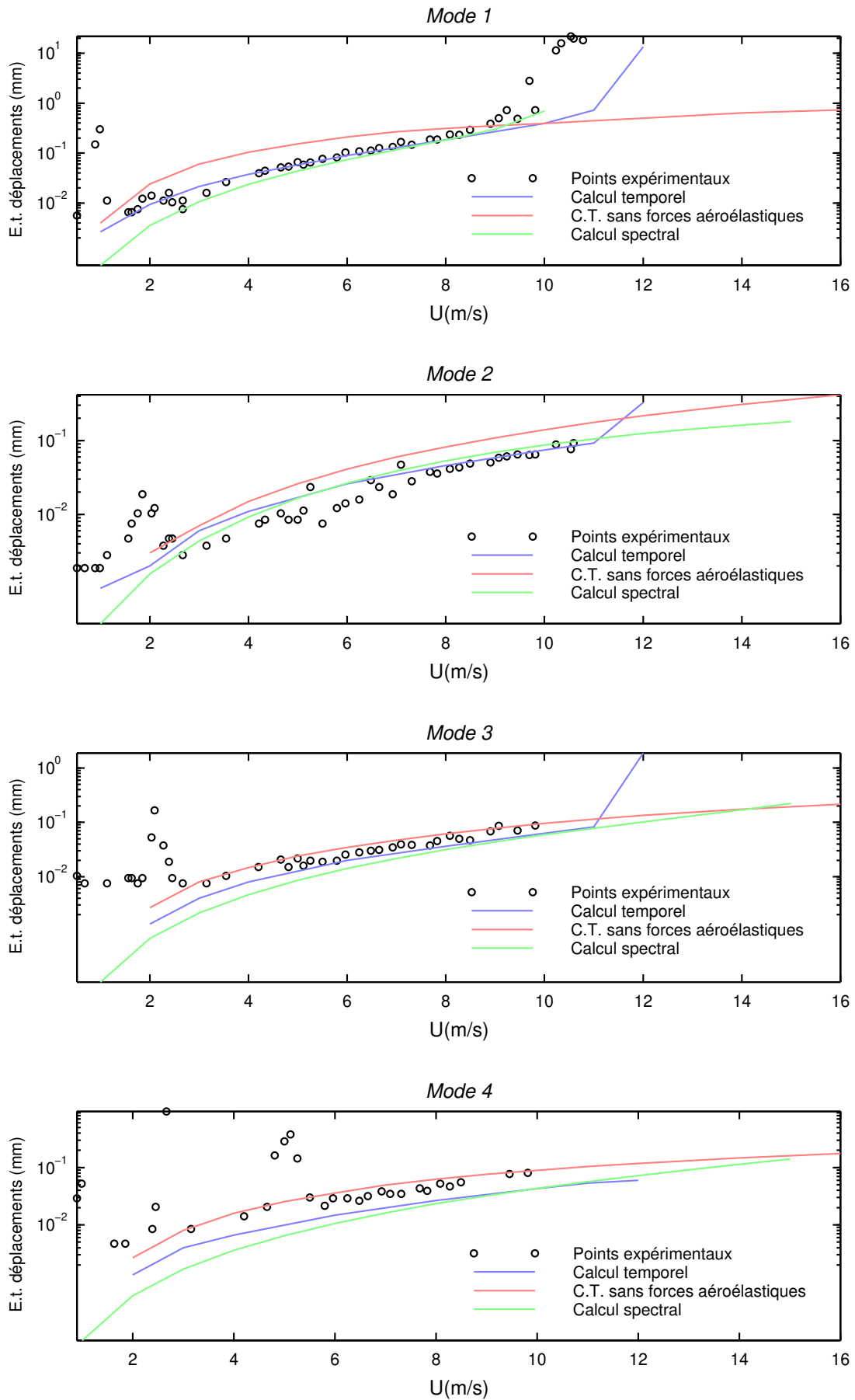


Figure 5.49 – Résultats calculs temporels : tablier rectangulaire en vent uniforme

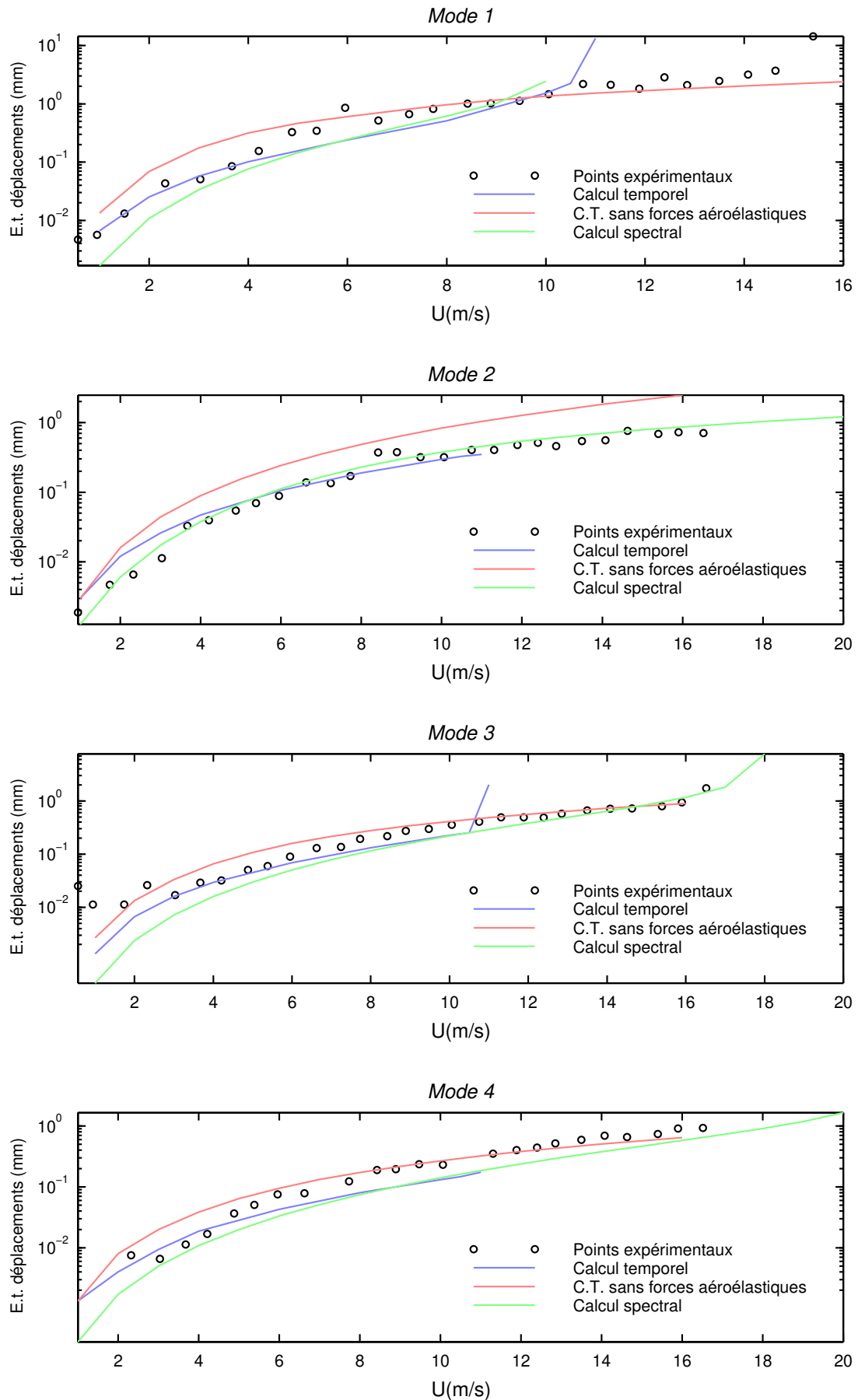


Figure 5.50 – Résultats calculs temporels : tablier rectangulaire en vent turbulent

## 5.7 Conclusion

Ce chapitre, consacré à la procédure de validation expérimentale des codes développés, était basé sur le passage en soufflerie atmosphérique de deux maquettes aéroélastiques représentant des travées centrales de tabliers de ponts. Les déplacements expérimentaux ont été comparés aux déplacements calculés par les approches spectrales et temporelles. Compte tenu des incertitudes liées à la détermination des différents paramètres d'entrée, les résultats se sont avérés tout à fait satisfaisants.

Des études complémentaires permettraient cependant de mieux définir les limites des approches spectrales et temporelles. Des maquettes de type taut-tube pourraient notamment être employées pour étudier les phénomènes de couplage flexion-torsion. On pourrait ensuite envisager l'étude de structures plus complexes comme un pont en phase de construction (figure 4.1).

# *Conclusion*

L'objectif de ce travail était de développer deux outils de calcul permettant d'estimer la réponse des structures élancées aux sollicitations turbulentes du vent : le premier basé sur une approche spectrale, le second basé sur une approche temporelle.

Pour cela, nous avons d'abord réalisé une synthèse bibliographique des différents modèles disponibles aujourd'hui pour représenter, d'une part le vent naturel dans la couche limite atmosphérique, d'autre part les forces aérodynamiques s'exerçant sur les ouvrages d'art. C'était l'objet des deux premiers chapitres.

Puis, nous avons présenté différentes méthodes expérimentales permettant d'estimer les efforts aérodynamiques s'exerçant sur des maquettes sectionnelles. Nous nous sommes particulièrement intéressé aux deux principales techniques permettant de mesurer les forces aéroélastiques sur les tabliers de pont : la technique des oscillations libres et la technique des oscillations forcées. L'ensemble des méthodes expérimentales présentées ont été appliquées à deux types de sections utilisées ensuite lors de la procédure de validation du code.

Nous avons ensuite exposé les bases théoriques des approches spectrale et temporelle. Les deux sont basées sur une discrétisation de la structure en éléments de type poutre et l'utilisation d'outils issus de la mécanique des vibrations.

Dans le cas de l'approche spectrale, le vent et les forces aérodynamiques sont utilisées sous forme de densités spectrales de puissance. Les forces aéroélastiques, elles, interviennent sous forme de matrices raideur et amortissement aérodynamiques. On aboutit à un système matriciel exprimé dans la base modale, dans lequel des termes de couplage aérodynamique peuvent intervenir. Ajoutons que la déformée statique de la structure ainsi que l'incidence moyenne du vent sont désormais parfaitement pris en compte.

L'approche temporelle repose elle sur la génération d'un signal de vent aléatoire tridimensionnel respectant certaines conditions de corrélations spatio-temporelles. On a pour cela développé un nouveau module de calcul basé sur l'algorithme de Jin et al., remplaçant l'ancien module basé sur l'algorithme de Shinozuka.

Les forces aéroélastiques interviennent sous forme de fonctions indicielles. Celles-ci sont à l'origine d'un système de deux équations matricielles couplées : l'une étant l'équation classique de la mécanique, l'autre reliant une partie des forces aéroélastiques aux déplacements de l'ouvrage. Ce système est résolu pas de temps par pas de temps à l'aide d'un schéma implicite de Newmark pour la première équation, d'un schéma explicite pour la seconde.

Une méthode d'optimisation de la linéarisation des coefficients aérodynamiques, à destination des calculs spectraux et basée sur des simulations temporelles, a été introduite. On a également proposé une méthode de combinaison des charges modales extrêmes et conversion en charges statiques équivalentes, à destination des bureaux d'études chargés du dimensionnement des ouvrages. Enfin les caractéristiques statistiques du vent peuvent désormais être définies de façon zonale.

Nous avons mis en place une procédure de validation des deux approches, basée sur le passage en soufflerie de deux maquettes aéroélastiques représentant des travées centrales de tabliers de ponts. Les résultats numériques se révèlent globalement en bon accord avec les données expérimentales, compte tenu des incertitudes liées à la détermination expérimentales des caractéristiques mécaniques et aérodynamiques de nos maquettes. On a toutefois noté une sous-estimation des déplacements pour les faibles vitesses de vent, vraisemblablement due à des effets de Reynolds et à une mauvaise modélisation de la turbulence. Les vitesses critiques de flottement s'avèrent également sous-évaluées : sont en cause le principe de superposition des phénomènes aéroélastiques modaux, l'évolution de l'amortissement structurel en fonction de l'amplitude, la mauvaise prise en compte de l'impact de la turbulence sur le développement de phénomènes aéroélastiques et, enfin, l'absence de modélisation de la cohérence latérale des forces aéroélastiques. On a cependant pu noter que l'impact de la turbulence sur le développement des instabilités aérodynamiques était mieux appréhendé par la méthode temporelle.



# *Perspectives*

L'objectif de ce travail était non seulement de développer un outil de calcul, mais également de situer ce dernier dans son contexte expérimental. Ainsi, on a vu qu'une bonne partie des écarts entre l'estimation numérique des déplacements et leur détermination expérimentale pouvaient être attribuée aux erreurs de mesure des différents paramètres d'entrée. L'amélioration de l'outil numérique passe d'abord par l'amélioration de la détermination de ces paramètres d'entrée.

En particulier, il serait souhaitable d'améliorer la mesure des amortissements structurels et aérodynamiques, de bien caractériser leur évolution en fonction de l'amplitude des oscillations, et, pour le second, en fonction du nombre de Reynolds et du taux de turbulence. On améliorerait ainsi d'une part la prévision de la réponse à la turbulence, d'autre part la prévision des instabilités aérodynamiques.

Il serait également utile de développer la mesure des coefficients aéroélastiques en oscillations couplées : soit sur des maquettes sectionnelles (un mode de flexion et un mode de torsion) soit sur des maquettes souples (plusieurs modes de flexion et de torsion). Cela permettrait de réduire les erreurs liées au principe de superposition des effets aéroélastiques modaux.

L'influence du Reynolds et de la turbulence sur les coefficients aérodynamiques stationnaires mériterait aussi aujourd'hui d'être mieux caractérisée. La fonction d'admittance aérodynamique permet certes de prendre en compte l'impact relatif des différentes échelles de la turbulence mais rien ne dit que celle-ci n'évolue pas avec l'allure du spectre de la turbulence (i.e. de la vitesse moyenne et des intensités et échelles de turbulence).

Un point important, qui n'a pas été abordé dans ce mémoire, concerne la caractérisation de la cohérence latérale des forces aérodynamiques. L'expérience montre en effet que celle-ci est souvent plus importante que celle du vent. La non prise en compte de l'accroissement de la cohérence latérale conduit à une sous-estimation de la réponse des modes primaires.

L'ensemble des améliorations effectuées sur le plan expérimental doivent naturellement être accompagnées de modèles mathématiques permettant leur prise en compte dans le cadre d'un calcul numérique. Ceux-ci sont a priori plus faciles à définir dans l'optique de calculs spectraux,

l'expérimentation se ramenant souvent à des concepts statistiques. Il nous semble cependant primordial de les appliquer également au calcul temporel, seul à pouvoir appréhender réellement le développement des instabilités aérodynamiques.

En ce qui concerne l'évaluation des coefficients aérodynamiques stationnaires et instationnaires, de nombreux outils numériques existent pouvant potentiellement remplacer tout ou partie des essais en soufflerie. Les plus courants sont basés sur la résolution des équations de Navier-Stokes.

Les codes de calculs de type  $k-\varepsilon$  sont conçus pour appréhender les phénomènes aérodynamiques moyens ; les fluctuations liées à la turbulence ne sont pas calculées mais modélisées par un terme unique. Ces outils présentent l'intérêt d'être économiques en temps de calcul ; cependant, ils manquent cruellement de précision pour prédire les décollements et recollement des écoulements, du fait d'une surproduction d'énergie cinétique aux points d'impacts. Or la connaissance de ces phénomènes est primordiale pour l'estimation des coefficients aérodynamiques stationnaires.

Les codes de type L.E.S.(Large Eddy Simulation), calculant l'histoire des structures turbulentes jusqu'à de très petites échelles, permettent d'appréhender les phénomènes aérodynamiques instationnaires. Cependant, on est souvent obligé de se ramener à des calculs bidimensionnels pour limiter les temps de calcul. La turbulence, de nature tridimensionnelle, est alors forcément moins bien appréhendée. En outre l'analyse des couplages fluide-structure nécessitent l'emploi de maillages mobiles, sources de difficultés supplémentaires.

De nouvelles techniques de calcul des écoulements sont apparues il y a quelques années pour répondre aux besoins spécifiques du Wind Engineering, regroupées sous l'appellation de Discret Vortex Method. Celles-ci sont basées sur un certain nombre de simplifications (écoulement bidimensionnel, non visqueux) permettant notamment de réduire le nombre de variables à un seul terme: la vorticité. En outre, elles ne nécessitent aucun maillage, ce qui facilite l'étude des couplages fluide-structure. Ces méthodes simplifiées peuvent constituer un compromis intéressant entre précision et rapidité des calculs.

L'utilisation de la C.F.D. dans des calculs complets de couplage fluide-structure semble, à terme, inéluctable. La L.E.S. constituera probablement, un jour, la meilleure solution. La Discret Vortex Method semble cependant être, à moyen terme, l'approche la plus adaptée. On peut en effet d'ores et déjà envisager d'appliquer à chacun des éléments de la structure un calcul DVM bidimensionnel. Il s'agirait alors d'introduire des « degrés de couplage » appropriés entre ces calculs parallèles.

# ***Bibliographie***

Attou M. (1994) – *Réponse dynamique des structures élancées à la turbulence du vent*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.

Attou M., Grillaud G. (1993) – *Dynamic response of structures to wind turbulence*. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> European Conference on structural Dynamics, Trondheim, Norway, pp. 1035-1042.

Barré C. et Brebion H. (1990) – *Coefficients aérodynamiques du tablier du pont de Saint-Nazaire*. Rapport CSTB, Réf. EN-AS90.6C.

Barré C. (1996) – *Coefficients aérodynamiques des versions béton et mixte du tablier et des piles du viaduc de Verrières*. Rapport CSTB, Réf. EN-ECA96. 7C.

Barré C. (1998) – *A75 – Grand viaduc de Millau – Coefficients aérodynamiques du tablier et des piles*. Rapport CSTB, Réf. EN-AEC98.37C.

Biétry J., Sacré C., Simiu E. (1978) – *Mean wind profiles and change of terrain roughness*. ASCE, Vol. 104, n° ST10

Biétry J. et Grillaud G. (1984) – *Wind studies for the Normandy bridge*. Actes de la conférence de l'AFPC sur les ponts suspendus et à haubans, Deauville, France, Vol.2, pp. 29-44.

Bisplinghoff R.L. and Ashley H. (1962) - *Principles of Aeroelasticity*. John Wilwy and sons, Inc., New York, USA.

Bleich F. (1948) – *Dynamic instability of truss-stiffened suspension bridges under wind action*. Proc., ASCE, Vol. 74, No.8, pp. 1269-1314.

Bucher C.G., Lin Y.K. (1988) – *Stochastic stability of bridges considering coupled modes*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 114, n° 12, pp. 2055-2071.

Davenport A. G. (1961a) – *The application of statistical concepts to wind loading of structures*. Proceedings of Institution of Civil Engineers, 19, pp. 449-472.

Davenport A. G. (1961b) – *The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high winds*. Journal of the Royal Meteorology Society, 87, pp. 194-211.

Davenport A. G. (1962) – *The buffeting response of a suspension bridge by storm winds*. Journal of the Structural Division, ASCE, 88, pp. 233-268.

De La Foye A., Flamand O. and Grillaud G. (2000) – *Measurement of aerodynamic derivatives with the forced oscillation technique*. Abstract for BBAA IV congress, Bochum.

De La Foye A. and Flamand O. (2001) – *Time domain simulation of vibrating bridge deck under wind action*. Abstract for EAWE congress, Eindhoven.

Delaunay D. (1994) – *Les caractéristiques du vent sur le site du grand viaduc de Millau*. Rapport CSTB, Réf. EN-CLI 94.16 C

Dubigeon S. (1993) – *Mécanique des vibrations, systèmes à plusieurs degrés de liberté*. Cours de l'Ecole Centrale de Nantes.

Flamand O. et Grillaud G. (1998) – *Viaduc de Millau : comportement au vent de la pili P2 en phase de construction*. Rapport CSTB, Réf. EN-AEC98.89C.

Flamand O. and De La Foye A., (2001) – *The forced oscillation technique and L.E.S. simulation*. Abstract for EAWE congress, Eindhoven.

Gandemer J. (1981) – *Aérodynamique*. Sciences du bâtiment, Vol. 2. Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, France.

Gibert R.J. (1988) – *Vibrations des structures. Interactions avec les fluides, sources d'excitation aléatoires*. Editions Eyrolles.

Grillaud G., Bourcier P., Barré C., Flamand O. (1997) – *Wind action on the Vasco da Gama cable stayed bridge*. 2<sup>nd</sup> European and African Conference on Wind Engineering, Genova, Italy, Vol. 2, pp. 1449-1456.

Grillaud G., Flamand O., Barré C. (1991) – *Comportement au vent du pont de Normandie :étude en soufflerie sur maquette aéroélastique à échelle 1/200<sup>e</sup>*. Rapport CSTB, Réf. EN-AS 91.5C.

Holmes J. D. (1975) – *Prediction of the response of a cable-stayed bridge to turbulence*. 4<sup>th</sup> Conference of wind effects on buildings and structures, Heathrow, England, pp. 187-197.

Jin S., Lutes L.D. and Sarkani S. (1997) – *Efficient simulation of Multidimensional Random Fields*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 123, No.10, pp. 1082-1089.

Kaimal J. C., Wyngaard J., Izumi Y., et Cote O. R. (1972) – *Spectral characteristics of surface-layer turbulence*. Journal of the Royal Meteorology Society, 98, pp. 563-589.

Larsen A. et al. (1992) – *Aerodynamics of large Bridges*. Larsen Editor, Balkema.

Liepmann H. W. (1952) – *On the application of statistical concepts to the buffeting problem*. Journal of Aeronautical Science, Vol. 19, No. 12, pp. 793-800.

Lin Y. K. and Yang J. N. (1983) – *Multimode bridge response to wind excitations*. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, No.4, pp. 657-672.

Loiseau H. and Szechenyi E. (1973) – *Etude du comportement aéroélastique du tablier d'un pont à haubans*. Document ONERA, Châtillon.

Morgenthal G. (2000) – *Comparison of Numerical Methods for Bridge-Deck Aerodynamics*. Master of Philosophy, University of Cambridge.

Namini A., Albrecht P., Bosch H. (1992) - *Finite element-based flutter analysis of cable-suspended bridges*. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 118, No. 6, pp. 1509-1526.

- Patron-Solares A. (1998) – *Modélisation numérique de la tenue au vent des ponts souples*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Preumont A. (1990) – *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Scanlan R.H. (1984) – Role of indicial functions in buffeting analysis of bridges. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 110, n° 7, pp. 1433-1446.
- Scanlan R. H. and Tomko J. J. (1971) – *Airfoil and bridge flutter derivatives*. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 109, No. 2, pp. 586-603.
- Scanlan R. H. , Béliveau J. G., and Budlong K. S. (1974) – *Indicial aerodynamic functions for bridge decks*. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 100, No. 4, pp. 657-672.
- Simiu E. (1974) – *Wind spectra and dynamic alongwind response*. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 119, No. 2, pp. 365-382.
- Shinozuka M. (1971) – *Simulation of multivariate and multidimensional random processes*. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 49, No. 1, Part.2 , pp. 357-367.
- Shinozuka M. , Jan C.M. (1972) – *Digital simulation of random process and its applications*. *Journal of Sounds and Vibrations*, Vol. 25, No. 1, pp. 111-128.
- Vaussy P. (1993) – *Résistance des matériaux*. Cours de l'Ecole Centrale de Nantes, Tome 2.
- Virlogeux M. (1992) – *Wind design and analysis for the Normandy Bridge*. *Aerodynamics of Large Bridges*, A. Larsen (ed.), pp.183-215.
- Von Karman T. (1948) – *Progress in the statistical theory of turbulence*. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Washington, D.C.,88, pp. 530-539.