



**HAL**  
open science

## Substitutions et ensembles normaux

Christian Mauduit

► **To cite this version:**

Christian Mauduit. Substitutions et ensembles normaux. Théorie des nombres [math.NT]. Université Aix-Marseille II, 1989. tel-02333654

**HAL Id: tel-02333654**

**<https://hal.science/tel-02333654>**

Submitted on 25 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE II  
Faculté des Sciences de Luminy

*SUBSTITUTIONS ET ENSEMBLES NORMAUX*

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

soutenue par  
Christian MAUDUIT

le 30 janvier 1989, devant le jury composé de Messieurs les Professeurs

André	BLANCHARD
Patrick	DELORME
Jean-Marc	DESHOILLERS
Gilles	LACHAUD
Pierre	LIARDET
Michel	MENDES-FRANCE
Yves	MEYER
Gérard	RAUZY

BIB CMI



NA09786-01

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Gérard Rauzy, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II, qui a encouragé et dirigé mes travaux de recherche, et dont les nombreux conseils m'ont été d'un enseignement précieux.*

*Je remercie vivement Messieurs André Blanchard, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I, Patrick Delorme, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II, Gilles Lachaud, Directeur de Recherches au CNRS et Pierre Liardet, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I, qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail et accepter de participer au jury d'examen.*

*Je remercie particulièrement Messieurs Jean-Marc Deshouillers, Professeur à l'Université de Bordeaux I, Michel Mendès-France, Professeur à l'Université de Bordeaux I et Yves Meyer, Professeur à l'Université de Paris IX, qui ont bien voulu porter leur attention sur cet ouvrage et qui ont accepté d'en être rapporteurs.*

*Je remercie les participants au Séminaire de Théorie des Nombres et au Groupe de Travail en Théorie Ergodique des Nombres de Marseille pour tout l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches, ainsi que pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir.*

*Je remercie également tous ceux qui m'ont aidé à mener à bien la réalisation matérielle de ce travail pour leur patience et leur compétence.*

# SUBSTITUTIONS ET ENSEMBLES NORMAUX

## I.- QUELQUES EXEMPLES DE SUITES SUBSTITUTIVES

### 1) La suite de Morse

Afin de montrer l'existence de géodésiques récurrentes non périodiques sur certaines surfaces de courbure négative, M. Morse est amené en 1921 à construire dans [126] un mot infini  $m \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$  non périodique tel que tout sous-mot de  $m$  réapparaît avec des lacunes bornées. Indépendamment, K. Mahler introduit cette suite en 1927 dans [104] afin d'illustrer certaines propriétés spectrales étudiées par N. Wiener dans [169].

Il existe de nombreux procédés permettant de construire  $m$  (cf. [40]). L'un d'entre eux consiste à considérer l'application  $\Sigma$  définie sur  $A = \{a,b\}$  par  $\Sigma(a) = ab$  et  $\Sigma(b) = ba$ , prolongée par concaténation en une application de l'ensemble  $\mathcal{M}(A)$  des mots formés sur l'alphabet  $A$  vers lui-même. Il suffit alors de prendre pour  $m$  un quelconque des deux points fixes non vides de  $\Sigma$ , par exemple  $m = a b b a b a a b b a a b a b b a \dots$ .

En fait, il semble que le premier auteur à avoir introduit la suite de Morse soit E. Prouhet, qui en 1851 résoud dans [133] le problème suivant : si  $q$  et  $r$  sont deux nombres entiers quelconques, montrer qu'il existe une infinité de suites de  $q^r$  nombres susceptibles de se partager en  $q$  groupes de  $q^{r-1}$  termes et tels que, pour tout  $k < r$ , la somme des puissances  $k$ -ièmes des termes soit la même pour tous les groupes (pour plus de détails sur ce problème, on pourra se reporter au chapitre 24 de [46]).

Par exemple lorsque  $q = 2$ , on remarque que si l'on note  $N_a$  (resp.  $N_b$ ) l'ensemble des entiers  $n$  tels que la  $(n+1)$ -ème lettre de  $m$  soit  $a$  (resp.  $b$ ), alors pour tout  $k < r$  et pour tout

entier  $n_0$ , on a

$$\sum_{\substack{n \in n_0 + \mathbb{N}_a \\ n < 2^r}} n^k = \sum_{\substack{n \in n_0 + \mathbb{N}_b \\ n < 2^r}} n^k .$$

Pour obtenir ce résultat, l'idée de E. Prouhet consistait à classer les entiers en fonction du reste modulo  $q$  de la somme de leurs chiffres en base  $q$  (par exemple  $\mathbb{N}_a$  (resp.  $\mathbb{N}_b$ ) est l'ensemble des entiers dont la somme de chiffres en base 2 est paire (resp. impaire)).

A partir de 1948, R. Bellman et H. N. Shapiro, puis A. O. Guelfond, mettent en évidence dans [10, 61] les propriétés essentielles de la fonction "somme des chiffres en base  $q$ " ( $q$ -additivité,  $q$ -multiplicativité) et entreprennent l'étude statistique des ensembles d'entiers associés. Cette étude se développe alors grâce à l'utilisation de la théorie spectrale et de l'analyse harmonique, avec J. Bésineau, J. Coquet, H. Delange, T. Kamae, P. Liardet, M. Mendès-France, M. Queffélec, K. B. Stolarsky, etc... (cf. [14, 24, 28, 30, 34, 35, 44, 47, 50, 56, 60, 77, 78, 100-102, 114-116, 118, 125, 127-130, 134-136, 138, 162]).

Parallèlement, les propriétés ergodiques de la suite de Morse et de ses généralisations sont étudiées par de nombreux auteurs parmi lesquels A. del Junco, S. Kakutani, M. Keane, I. Kwiatkowski, M. Lemanczyk, J. C. Martin, etc... (cf. [23, 54, 55, 69, 73, 74, 82, 83, 86-95, 97, 108, 109, 131, 153]).

Pour une introduction à la théorie de la dynamique symbolique, développée à partir de 1938 par G. A. Hedlund et M. Morse (cf. [62, 63]), on peut se reporter à [58] et pour plus de renseignements sur l'analyse spectrale des systèmes dynamiques associés à ce type de mot infini, à [138].

La suite de Morse avait aussi été étudiée au début du siècle par A. Thue (cf. [164, 165]) qui cherchait, afin "d'ouvrir de nouvelles voies à la théorie des nombres" à construire des mots ne contenant aucun carré ou aucun cube. On vérifie en effet que  $m$  ne contient aucun cube et, plus précisément, que  $m$  ne contient aucun sous-mot de la forme  $\mu\mu\alpha$  avec  $\alpha \in A$  et  $\mu \in \alpha\mathcal{M}(A)$

(cette propriété est utilisée en 1938 dans [64] par G. A. Hedlund et M. Morse pour la résolution du problème des parties sans fin aux échecs).

En 1902, W. Burnside pose le problème suivant : Soit  $G$  un groupe de type fini tel qu'il existe un entier  $n$  vérifiant  $x^n = 1$  pour tout  $x$  dans  $G$  ;  $G$  est-il fini ?

W. Burnside donne une réponse positive à cette question en 1902 dans le cas  $n \leq 3$ , puis I. N. Sanov en 1940 dans le cas  $n = 4$  et M. Hall en 1957 dans le cas  $n = 6$ . Mais dans le cas général, S. I. Adian et P. S. Novikov montrent en 1968 que la réponse au problème de Burnside est négative (cf. [1]). Leur méthode, qui les conduit à montrer l'existence de contre-exemples pour tout entier  $n$  impair supérieur ou égal à 665, est fondée sur l'existence de mots infinis ne contenant pas de cube.

Depuis quelques années, M. P. Schützenberger et son équipe étudient les propriétés combinatoires des mots infinis, dont l'importance se révèle être fondamentale en informatique (on peut consulter [103] ainsi que les nombreuses publications du Laboratoire d'Informatique Théorique et de Programmation de Paris).

Par ailleurs, J. P. Allouche et M. Cosnard montrent dans [4, 36] que la suite de Morse constitue un invariant universel dans l'itération des fonctions continues unimodales.

## 2) La suite de Rudin-Shapiro

Si  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ , on remarque que

$$\sup_{\theta \in [0,1]} \left| \sum_{n < N} \varepsilon_n e(n\theta) \right| \geq \left( \int_0^1 \left| \sum_{n < N} \varepsilon_n e(n\theta) \right|^2 d\theta \right)^{1/2} = \sqrt{N} \quad (\text{on note } e(x) = e^{2i\pi x}).$$

R. Salem a posé en 1950 la question suivante, qui apparaît dans plusieurs problèmes d'analyse harmonique (cf. [70, 72]) : Trouver une suite  $\varepsilon \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$  pour laquelle il existe un réel  $C$

tel que

$$\sup_{\theta \in [0,1]} \left| \sum_{n < N} \varepsilon_n e(n\theta) \right| \leq C \sqrt{N} .$$

W. Rudin et H. S. Shapiro (cf. [155, 160] ) ont répondu indépendamment à cette question en exhibant une suite  $\varepsilon$  telle que

$$\sup_{\theta \in [0,1]} \left| \sum_{n < N} \varepsilon_n e(n\theta) \right| \leq (2 + \sqrt{2}) \sqrt{N} .$$

Leur construction peut se présenter comme suit :

Soit  $A = \{a, b, c, d\}$  et  $\Sigma$  définie sur l'ensemble des mots sur  $A$  par  $\Sigma(a) = ab$  ,  
 $\Sigma(b) = ac$  ,  $\Sigma(c) = db$  et  $\Sigma(d) = dc$  ;  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma^{(n)}(a) \in A^{\mathbb{N}}$  est un point fixe de  $\Sigma$  .

On obtient  $\varepsilon$  à partir de  $m = a b a c a b d b b a b a c d c \dots$  en posant  $\varepsilon_n = +1$  (resp.  $-1$ ) si la  $(n+1)$ -ème lettre de  $m$  est  $a$  ou  $b$  (resp.  $c$  ou  $d$ ) .

L'existence d'une transformation ergodique à spectre de Lebesgue de multiplicité finie  $\ell$  donnée est un problème ouvert, dont le cas  $\ell = 1$  semble être un problème très difficile attribué à S. Banach.

En 1984, M. Queffélec a montré dans [136-138] que la partie continue du spectre de la suite de Rudin-Shapiro est de type de Lebesgue de multiplicité 2 et très récemment M. Lemanczyk a obtenu dans [96] tous les types de Lebesgue de multiplicité paire à l'aide de suites plus générales.

Dans un tout autre domaine, J. P. Kahane a montré en 1981 dans [71] qu'il est possible de construire des quasi-hélices browniennes dans des espaces euclidiens de dimension finie (i.e. de construire des applications lipschitziennes  $F$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^d$  telles que, pour tous réels positifs

$x$  et  $y$ , on a  $1 - \alpha_d \leq \frac{\|F(x) - F(y)\|^2}{|x - y|} \leq 1 + \alpha_d$ , avec  $\lim_{d \rightarrow \infty} \alpha_d = 0$ ) de la façon suivante :

de même que  $\varepsilon_n = (-1)^{\sum_{i \geq 0} n_i n_{i+1}}$  si  $n = \sum_{i \geq 0} n_i 2^i$  ( $n_i \in \{0,1\}$  pour tout entier  $i$ ), on peut

considérer plus généralement pour tout entier  $v$ ,

$$\varepsilon_n^{(v)} = (-1)^{\sum_{i \geq 0} n_i n_{i+v}}$$

(suites de Rudin-Shapiro généralisées).

Alors, si l'on note  $(e_0, \dots, e_{d-1})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$  (avec  $d = 2^v$ ) et  $e_n = e_{n - d \lfloor n/d \rfloor}$  pour tout entier  $n$ , on définit  $F$  sur  $\mathbb{N}$  par

$$F(N) = \sum_{n < N} \varepsilon_n^{(v)} e_n$$

et on prolonge  $F$  à  $\mathbb{R}^+$  par continuité en posant  $F(d^2x) = d F(x)$ .

Signalons enfin que les propriétés harmoniques, spectrales et ergodiques de la suite de Rudin-Shapiro et de ses généralisations sont actuellement étudiées par J. P. Allouche, J. Brillhart, P. Erdős, T. Kamae, M. Keane, P. Liardet, M. Mendès-France, P. Morton, B. Saffari et G. Tenenbaum (cf. [5-7, 19, 20, 81, 119, 156, 157]).

### 3) La suite de Baum-Sweet

On sait que le développement en fraction continue d'un nombre algébrique irrationnel  $x$  est ultimement périodique si et seulement si  $x$  est quadratique (théorème de Lagrange), mais on ignore presque tout du développement d'un nombre irrationnel algébrique non quadratique. En particulier, le problème suivant semble être d'une extrême difficulté : existe-t-il un nombre algébrique de degré strictement supérieur à 2 admettant un développement en fraction continue borné ?

Le problème analogue obtenu en remplaçant  $\mathbb{R}$  par le corps  $\mathbb{F}_2((X^{-1}))$  des séries formelles en  $X^{-1}$  sur  $\mathbb{F}_2$  a été résolu en 1976 par L. E. Baum et M. M. Sweet, qui ont donné dans [9] un exemple d'élément algébrique de degré 3 dont le développement en fraction continue est borné :

Soit  $A = \{a, b, c, d\}$  et  $\Sigma$  définie sur l'ensemble des mots sur  $A$  par  $\Sigma(a) = ab$ ,  $\Sigma(b) = cb$ ,



$\Sigma(c) = bd$  et  $\Sigma(d) = dd$  ;  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma^n(a) = abcbbdcbcbddbd\dots$  est un point

fixe de  $\Sigma$ .

On considère  $f = \sum_{n \geq 0} f_n X^{-n}$  avec  $f_n = 1$  (resp. 0) si la  $(n+1)$ -ème lettre de  $m$  est  $a$  ou  $b$

(resp.  $c$  ou  $d$ ) ;  $f$  est un élément algébrique de degré 3 sur  $\mathbb{F}_2(X)$  ( $f$  est l'unique solution dans  $\mathbb{F}_2((X^{-1}))$  de l'équation  $Xf^3 + f + X = 0$ ) dont le développement en fraction continue n'est constitué que d'éléments de  $\mathbb{F}_2[X]$  de degré inférieur ou égal à 2 .

De plus, si l'on considère ce développement en fraction continue comme un mot infini sur l'alphabet  $A' = \{1, X, X + 1, X^2, X^2 + 1\}$  , on remarque qu'il est lui-même obtenu par itération d'un certain morphisme  $\Sigma'$  sur  $A'$  (cf. [3, 124], ces résultats y étant généralisés aux corps de caractéristique plus grande que 2) .

#### 4) La suite de Fibonacci

Soit  $A = \{a, b\}$  et  $m \in A^{\mathbb{N}}$  . Si l'on désigne par  $p(n)$  le nombre de sous-mots de longueur  $n$  de  $m$  , on peut montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes (cf. [37]) :

- (i)  $m$  est ultimement périodique,
- (ii)  $\exists C > 0$  ;  $\forall n \geq 1$   $p(n) \leq C$  ,
- (iii)  $\exists n \geq 1$  ;  $p(n) \leq n$  .

A partir de 1938, G. Hedlund et M. Morse, puis E. Coven, S. Kakutani et G. Rauzy (cf. [37, 62, 63, 74, 146-148]) ont étudié les mots infinis non périodiques de complexité minimale (c'est-à-dire tels que  $p(n) = n+1$ ) ainsi que les systèmes dynamiques symboliques qui leurs sont associés.

Un tel mot est dit sturmien ; la construction suivante en donne un exemple typique :

Soit  $\Sigma$  définie sur l'ensemble des mots sur  $A$  par  $\Sigma(a) = ab$  et  $\Sigma(b) = a$  . On vérifie

aisément que  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma^n(a) = ababaabababab\dots$  est un mot sturmien, appelé mot

de Fibonacci. Ce mot n'est autre que le codage de la trajectoire d'une particule lancée sur un billard carré de côté 1 depuis l'un des ses coins et selon l'angle  $\text{Arctg}((1 + \sqrt{5})/2)$ , obtenu en écrivant a (resp. b) pour chaque choc sur une paroi horizontale (resp. verticale).

Plus généralement, les mots sturmiens sont liés aux rotations irrationnelles du tore  $\mathbb{T} = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$  :

si  $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ,  $R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$

$$x \rightarrow R(x) = x + \alpha \pmod{1}$$

et  $\mu : \mathbb{T} \rightarrow A$

$$\begin{aligned} x \rightarrow \mu(x) &= a && \text{si } x \in [0, 1 - \alpha[ \\ &= b && \text{si } x \in [1 - \alpha, 1[ \end{aligned}$$

alors  $m = \mu(0) \mu(R(0)) \dots \mu(R^n(0)) \dots$  est un mot Sturmien, et réciproquement tout mot Sturmien peut être obtenu ainsi.

Récemment, N. G. de Bruijn et F. M. Dekking ont mis en évidence dans [21, 22, 42] les relations entre le mot de Fibonacci et les pavages non périodiques du plan (pavages de Penrose), et J. Berstel a montré dans [13] le rôle des mots sturmiens dans la résolution du problème du tracé de droite sur un écran.

## II.- SUBSTITUTIONS ET AUTOMATES FINIS ; DEFINITIONS.

Nous allons rapidement introduire les définitions dont nous aurons besoin par la suite. Pour plus de détails, on peut se reporter à [154] pour les notions relatives aux substitutions et à [53] pour celles relatives aux automates finis.

Soit  $g$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $A$  un alphabet à  $g$  lettres,  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$ .

On note  $A^* = \bigcup_{k \geq 0} A^k$  l'ensemble des mots finis sur  $A$  et  $\mathcal{M}(A) = A^* \cup A^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des mots sur  $A$ .

Soit  $\Sigma$  une application de  $A$  vers  $A^*$ , définie par

$$\forall i \in \{1, \dots, g\} \quad \Sigma(a_i) = a_{\sigma_i(1)} \dots a_{\sigma_i(\ell_i(1))}$$

où  $\ell_i(n)$  désigne, pour tout entier  $n$ , la longueur du mot  $\Sigma^n(a_i)$  et  $\sigma_i$  une application de  $\{1, \dots, \ell_i(1)\}$  vers  $\{1, \dots, g\}$ . Par concaténation,  $\Sigma$  se prolonge en une application de  $\mathcal{M}(A)$  vers lui-même en posant :

$$\begin{aligned} \forall (m', m'') \in A^{*2} \quad \Sigma(m'm'') &= \Sigma(m') \Sigma(m'') \\ \forall m \in A^{\mathbb{N}} \quad \Sigma(m) &= \Sigma(m_0) \dots \Sigma(m_n) \dots, \text{ si } m = m_0 \dots m_n \dots \end{aligned}$$

L'application  $\Sigma$  ainsi obtenue, qui est appelée *substitution* sur l'alphabet  $A$ , est continue sur  $A^{\mathbb{N}}$  ( $A^{\mathbb{N}}$  est muni de la métrique définie par  $d(m, m') = \exp(-\inf \{n \geq 0, m_n \neq m'_n\})$  si  $m = m_0 \dots m_n \dots$  et  $m' = m'_0 \dots m'_n \dots$ ).

Si  $m \in \mathcal{M}(A)$  et si  $t \in \{1, \dots, g\}$ , on appelle *support de  $m$  relatif à  $a_t$*  et on note  $[m]_t$ , la suite croissante des entiers  $n$  tels que la  $(n+1)$ -ème lettre du mot  $m$  soit  $a_t$ .

On dit qu'une suite d'entiers  $u$  est *engendrée par la substitution  $\Sigma$*  sur l'alphabet  $A$  s'il existe un mot  $m$  sur  $A$  point fixe de  $\Sigma$  tel que  $u$  soit le support de  $m$  relatif à une ou plusieurs lettres de  $A$ .

On associe à  $\Sigma$  la matrice  $M = (M_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, g\}}$  définie par

$$M_{ij} = \text{card}(\sigma_i^{-1}(\{j\})) .$$

$M$  est appelée  $\Sigma$ -matrice .

Si l'on pose  $L(n) = {}^t(\ell_1(n), \dots, \ell_g(n))$ , on remarque que  $L(n) = M^n L(0) = M^n {}^t(1, \dots, 1)$

(si  $u$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^g$ , on note  ${}^t u$  le vecteur transposé de  $u$ ).

On montre alors (cf. [112]) que pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$  il existe  $(d_i, r_i) \in \mathbb{N} \times [1, +\infty[$  tel que  $\ell_i(n) \approx n^{d_i} r_i^n$  (la notation  $f \approx g$  signifie " $f \in O(g)$  et  $g \in O(f)$ ") .

On dit que  $\Sigma$  est une substitution *irréductible* (resp. *primitive*) si  $M$  est irréductible (resp. primitive). On remarque que ces deux notions coïncident dès que  $\Sigma$  admet un point fixe non vide.

De même, on associe à  $\Sigma$  le graphe  $G = (A, U)$  défini par

$$U = \{(a_i, a_j) \in A^2 ; \Sigma(a_i) \text{ contient la lettre } a_j\} .$$

$G$  est un multigraphe orienté, appelé  $\Sigma$ -graphe, dont la matrice associée est égale à  $M$  (cf. [11]).

On dit que  $A$  (resp.  $U$ ) est l'ensemble des *sommets* (resp. des *arcs*) de  $G$ . De plus, on étiquette l'arc  $(a_i, a_j) \in U$  par l'entier  $n$  si  $a_j$  est la  $(n+1)$ -ème lettre du mot  $\Sigma(a_i)$ .

**exemple 1 :** si  $\Sigma$  est la substitution de Morse (cf. § I.1), alors

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \circ & \xrightarrow{1} & \circ \\ \uparrow & & \uparrow \\ \circ & \xrightarrow{1} & \circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & b \end{array} \end{array} .$$

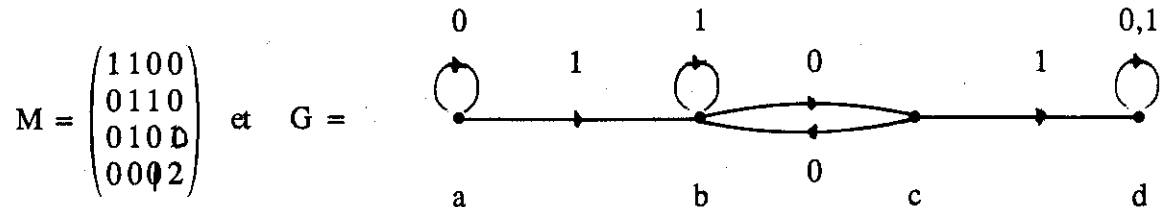
$\Sigma$  engendre par exemple la suite des entiers dont la somme des chiffres en base 2 est paire.

**exemple 2 :** Si  $\Sigma$  est la substitution de Rudin-Shapiro (cf. § I.2), alors

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & 0 \\ \circ & \xrightarrow{1} & \circ & \xrightarrow{1} & \circ & \xrightarrow{0} & \circ \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \circ & \xrightarrow{0} & \circ & \xrightarrow{1} & \circ & \xrightarrow{1} & \circ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & & b & & c & & d \end{array} \end{array} .$$

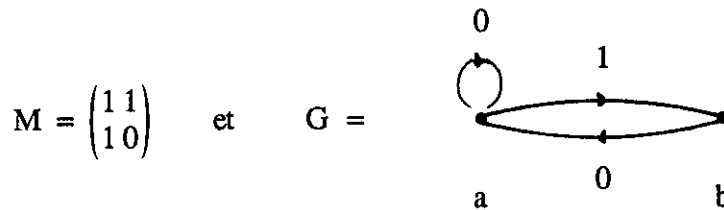
$\Sigma$  engendre par exemple la suite des entiers dont l'écriture en base 2 contient un nombre pair de blocs 11 .

**exemple 3 :** Si  $\Sigma$  est la substitution de Baum-Sweet (cf. § I.3), alors



$\Sigma$  engendre par exemple la suite des entiers dont l'écriture en base 2 ne contient pas de plage impaire de 0 .

**exemple 4 :** Si  $\Sigma$  est la substitution de Fibonacci (cf. § I.4), alors



$\Sigma$  engendre par exemple la suite des entiers dont l'écriture en base de Fibonacci se termine par 0 :

On rappelle que la relation  $\sim$ , définie sur  $G$  par  $a_i \sim a_j$  s'il existe un chemin dans  $G$  allant de  $a_i$  vers  $a_j$  et un chemin dans  $G$  allant de  $a_j$  vers  $a_i$  ou si  $i = j$ , est une relation d'équivalence. Par abus de langage, le graphe  $\Gamma$  obtenu par restriction de  $G$  à une composante fortement connexe est aussi appelé composante fortement connexe de  $G$ .

Si  $\Gamma$  est une composante fortement connexe de  $G$ , on note  $\gamma(\Gamma)$  le *nombre cyclomatique* de  $\Gamma$ , c'est-à-dire la dimension de l'espace des cycles de  $\Gamma$ . On vérifie que  $\gamma(\Gamma)$  est égal au nombre d'arcs de  $\Gamma$ , plus 1, moins le nombre de sommets de  $\Gamma$  (cf. [11]).

S'il existe  $\ell \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$   $\ell_i(1) = \ell$ , on dit que  $\Sigma$  est une *substitution*

de longueur constante  $\ell$  .

Quand une suite d'entiers est engendrée par une substitution  $\Sigma$  de longueur constante  $\ell$  , il est facile de vérifier qu'elle est reconnaissable par un automate fini en base  $\ell$  , dont le graphe est précisément le  $\Sigma$ -graphe  $G$  . A. Cobham montre dans [27] que les notions de suite engendrée par substitution de longueur constante et de suite reconnaissable par automate fini sont en fait équivalentes. Lorsque  $\ell$  est un nombre premier, G. Christol, T. Kamae, M. Mendès-France et G. Rauzy montrent dans [25] que l'on a de plus l'équivalence suivante :  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est engendrée par une substitution de longueur constante  $\ell$  si et seulement si la série formelle sur  $F_\ell$

$$\sum_{n \geq 0} X^{u_n} \text{ est algébrique sur } F_\ell(X) .$$

Intuitivement, la reconnaissabilité d'une suite  $u$  par un automate fini en base  $\ell$  signifie qu'il existe un algorithme simple (sans mémoire) permettant de décider si un entier  $n$  donné - écrit en base  $\ell$  - appartient à  $u$  . Cette dépendance vis à vis de  $\ell$  a pour conséquence le théorème de Cobham (cf. [26]) : si  $\ell$  et  $\ell'$  sont multiplicativement indépendants et si  $u$  est à la fois reconnaissable par un automate fini en base  $\ell$  et par un automate fini en base  $\ell'$  , alors  $u$  est ultimement périodique.

Par ailleurs, les interventions des automates finis dans la théorie des fractions continues (passage du développement de  $\alpha$  au développement de  $\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$  , développement de  $\sum_{n \geq 0} 2^{-2^n}$  , changement d'algorithme de développement en fractions continues, ...) sont décrites dans [8, 16, 85, 139, 158, 159, 167, 170]. J. P. Allouche donne dans [2] de nombreux autres exemples d'intervention des automates finis en théorie des nombres.

### III.- ENSEMBLES NORMAUX

Si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels, on appelle *ensemble normal relatif à u* l'ensemble, noté  $\mathcal{B}(u)$ , des nombres réels  $\alpha$  tels que la suite  $(u_n \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1.

D'après le critère de Weyl (cf. [144]),  $\mathcal{B}(u) = \{\alpha \in \mathbb{R} ; \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \sum_{n < N} e(k u_n \alpha) \in o(N)\}$ .

**exemple 1 :**  $u_n = \log(n+1)$  ;  $\mathcal{B}(u) = \emptyset$ .

**exemple 2 :**  $u_n = 2^n$  ;  $\mathcal{B}(u)$  est égal à l'ensemble  $B_2$  des nombres normaux en base 2.

**exemple 3 :**  $u_n = P(n)$  avec  $P \in \mathbb{Q}[X]$  ;  $\mathcal{B}(u) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**exemple 4** (cf. [168]) :  $u_n$  est le n-ème nombre premier ;  $\mathcal{B}(u) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**exemple 5 :**  $u_n = \sqrt{n}$ ,  $\mathcal{B}(u) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Lorsque les suites  $u$  sont suffisamment "régulières" (en divers sens, que nous ne précisons pas ici), les ensembles normaux associés dépendent, conformément à l'intuition, du type de croissance de  $u$  (cf. [17, 18, 48, 142, 143, 152]). Dans le cas général, la situation peut être plus confuse, comme le suggèrent les deux exemples suivants :

**exemple 6 :**  $u$  est la suite croissante formée des entiers de la forme  $2^{n_1} + 2^{n_2}$  avec  $n_2 < n_1$  et  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$  ;  $\mathcal{B}(u) = B_2$ .

**exemple 7 :**  $u$  est la suite croissante formée des entiers de la forme  $2^{n_1} + n_2$  avec  $n_2 < n_1$  et  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$  ;  $\mathcal{B}(u) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Réciproquement, on peut aussi se demander quelles parties de  $\mathbb{R}$  peuvent être obtenues comme ensembles normaux relatifs à des suites de nombres réels.

On dit qu'une partie  $B$  de  $\mathbb{R}$  est un *ensemble normal* s'il existe une suite de nombres réels  $u$  telle que  $B = \mathcal{B}(u)$ . Cette notion a été introduite en 1968 par M. Mendès-France, qui montre dans [117] que le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  de toute extension algébrique de degré fini de  $\mathbb{Q}$  est un ensemble normal.

Peu après, Y. Meyer montre dans [120] que l'ensemble des nombres transcendants est un ensemble normal (cf. aussi [171]), et développe dans [121] les rapports entre ce problème et celui de la synthèse spectrale.

En 1970, G. Rauzy donne dans [140] une caractérisation complète des ensembles normaux : une partie  $B$  de  $\mathbb{R}$  est un ensemble normal si et seulement si

$$(i) \ 0 \notin B ;$$

$$(ii) \ \forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \ q B \subset B ;$$

$$(iii) \ \text{il existe une suite de fonctions continues } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha) = 0$$

si et seulement si  $\alpha \in B$ .

Ceci permet de retrouver les résultats précédents ainsi que la normalité de  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  et la stabilité de la classe des ensembles normaux par intersection dénombrable (cf. [49, 141]).

On remarque que si l'on se restreint au cas des ensembles normaux relatifs à une suite d'entiers, il suffit de remplacer la condition (i) par

$$(i') \ 0 \notin B \text{ et } B + 1 = B .$$

Par contre on ne sait pas caractériser les ensembles normaux relatifs à une suite croissante d'entiers.



#### IV.- ENSEMBLES NORMAUX ET SUITES SUBSTITUTIVES

Le problème auquel nous nous intéressons dans cette thèse est le suivant : que peut-on dire de  $\mathcal{B}(u)$  lorsque  $u$  est une suite d'entiers engendrée par une substitution  $\Sigma$  sur un alphabet fini ?

Lorsque  $\Sigma$  est de longueur constante, c'est-à-dire lorsque  $u$  est reconnaissable par un automate fini, T. Kamae a montré en 1980 dans [80] que si  $u_n \in O(n)$  (i.e. si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(u)}{\log n} = 1$ )

alors  $\mathcal{B}(u) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Au même moment J. Coquet donne dans [29, 31, 32] des exemples de suites de densité nulle reconnaissables par un automate fini et telles que  $\mathcal{B}(u) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Il s'agit de suites constituées d'entiers dont l'écriture dans une certaine base évite un ensemble fini de blocs ; l'exemple suivant en est un cas typique.

**exemple 1** (suite de Coquet) :  $u$  est la suite croissante formée des entiers dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 1.

Dans [110] nous montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{B}(u)$  soit maximal (c'est-à-dire égal à  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) est que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(u)}{\log n} > 0 .$$

Cette condition se traduit sur le graphe de l'automate de la façon suivante : l'un au moins des sommets qui reconnaît la suite  $u$  est précédé (au sens large) dans le graphe de l'automate par un sommet dont la composante fortement connexe est de nombre cyclomatique au moins égal à 2.

Par exemple les suites de Morse, de Rudin-Shapiro, de Baum-Sweet et de Coquet ont un ensemble normal maximal.

Lorsque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(u)}{\log n} = 0$  nous montrons que  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u)$  a la puissance du continu ; c'est le cas des suites définies dans les exemples 2 et 6 du paragraphe III, ainsi que dans l'exemple suivant :

**exemple 2 :**  $u$  est la suite croissante formée des entiers de la forme  $2^{2n_1+3n_2+1} + 2^{3n_2}$ , avec  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ .

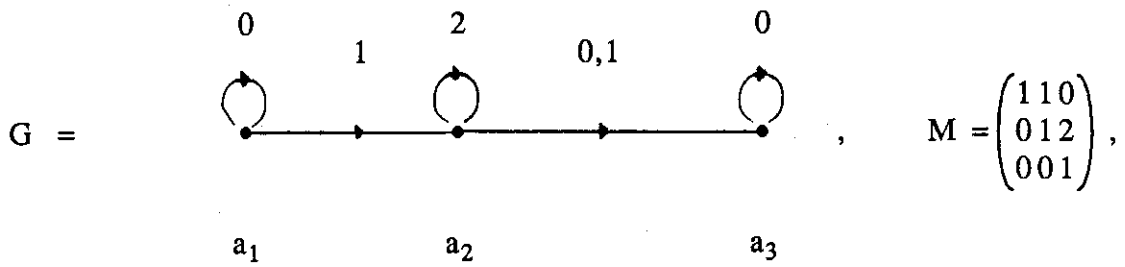
Nous conjecturons que l'ensemble normal relatif à cette suite est égal à  $B_2$  et, plus généralement, que l'ensemble normal relatif à une suite  $u$  reconnaissable par un automate fini en base  $r$  et telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(u)}{\log n} = 0$ , est égal à l'ensemble  $B_r$  des nombres normaux en base  $r$ .

Notre méthode se généralise au cas où  $\Sigma$  est une substitution de longueur quelconque dont la matrice associée a un rayon spectral strictement supérieur à 1.

Ainsi, nous montrons dans [112] que si  $u$  est une suite engendrée par une telle substitution vérifiant  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(u)}{\log n} > 0$ , alors  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u)$  est inclus dans une extension algébrique de degré fini de  $\mathbb{Q}$ . Cette condition de densité se traduit comme précédemment sur le graphe de la substitution à l'aide du nombre cyclomatique de ses composantes fortement connexes.

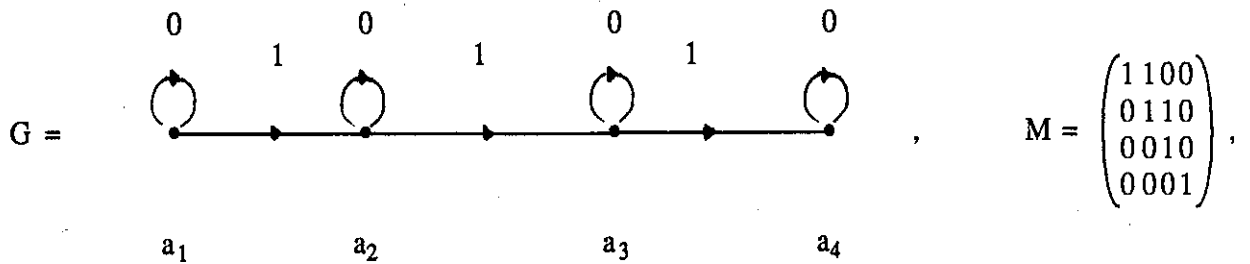
Lorsque  $\Sigma$  est une substitution de longueur quelconque dont la matrice associée a un rayon spectral égal à 1 ( $\Sigma$  est appelée dans ce cas *substitution unispectrale*), nous donnons dans [111] la forme exacte de toute suite  $u$  engendrée par  $\Sigma$ . En effet, on vérifie que  $\Sigma$  est une substitution unispectrale si et seulement si toute composante fortement connexe de son graphe associé a un nombre cyclomatique inférieur ou égal à 1. On en déduit que  $u(\mathbb{N})$  (ou  $\mathbb{N} \setminus u(\mathbb{N})$ ) est, comme dans les 2 exemples suivants, une réunion finie de "polynômes emboîtés" à coefficients rationnels. On montre alors que  $\mathcal{B}(u) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**exemple 3 :**  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$   $\Sigma(a_1) = a_1 a_2$ ,  $\Sigma(a_2) = a_3 a_3 a_2$  et  $\Sigma(a_3) = a_3$ .



Si l'on considère  $m = a_1 a_2 a_3 a_3 a_2 a_3 a_3 a_3 a_2 a_3 a_3 \dots$ , point fixe de  $\Sigma$ , et  $u = [m]_2$ , alors  $u(\mathbb{N}) = \{n^2, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ .

**exemple 4 :**  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,  $\Sigma(a_1) = a_1 a_2$ ,  $\Sigma(a_2) = a_2 a_3$ ,  $\Sigma(a_3) = a_3 a_4$  et  $\Sigma(a_4) = a_4$ .



Si l'on considère  $m = a_1 a_2 a_2 a_3 a_2 a_3 a_3 a_4 a_2 a_3 a_3 a_4 \dots$ , point fixe de  $\Sigma$ , et  $u = [m]_3$ , alors  $u(\mathbb{N}) = \left\{ \frac{1}{6}(n_1 + 1)(n_1^2 - n_1 + 6) + \frac{1}{2}n_2(n_2 + 1) + 1; n_2 < n_1, (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \right\}$ .

Par ailleurs, lorsque  $u$  est engendrée par une substitution  $\Sigma$  irréductible, nous montrons dans [113] que  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u)$  est une extension algébrique de degré fini de  $\mathbb{Q}$ . Cette extension ne dépend que de certaines propriétés arithmétiques des valeurs propres de la matrice associée à  $\Sigma$ , suggérées par l'exemple suivant :

**exemple 5 :**  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,  $\Sigma(a_1) = a_1 a_1 a_2 a_3 a_3 a_4 a_4 a_4 a_4$ ,  $\Sigma(a_2) = a_2 a_2 a_3$ ,  $\Sigma(a_3) = a_3 a_3 a_4 a_4 a_4 a_4$  et  $\Sigma(a_4) = a_1 a_1 a_1 a_1 a_1 a_4 a_4$ .

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  admet  $\theta_1 = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$  et  $\theta_2 = 2 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$  pour valeurs

propres de module supérieur à 1 .

Si l'on considère  $m = a_1 a_1 a_2 a_3 a_3 a_4 a_4 a_4 a_4 a_1 a_1 a_2 \dots$ , point fixe de  $\Sigma$ , et  $u = [m]_1$ , alors  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u) = \{\alpha \in \mathbb{R} ; \exists k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \lim_{n \rightarrow \infty} e(k \ell_i(n) \alpha) = 1\}$  est la partie de

$\mathbb{Q}(\theta_1) \cap \mathbb{Q}(\theta_2) = \mathbb{Q}(\theta_1) = \mathbb{Q}(\theta_2)$  formée des réels  $\alpha$  pour lesquels il existe  $P$  dans  $\mathbb{Q}[X]$  tel que  $\alpha = P(\theta_1) = P(\theta_2)$ . On en déduit que  $\mathcal{B}(u) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

Enfin, on dit qu'une partie  $B$  de  $\mathbb{R}$  est un *ensemble  $\Sigma$ -normal* s'il existe une suite  $u$  engendrée par une substitution irréductible telle que  $B = \mathcal{B}(u)$ . Nous montrons dans [113] que  $B$  est un ensemble  $\Sigma$ -normal si et seulement si  $\mathbb{R} \setminus B$  est une extension algébrique de degré fini de  $\mathbb{Q}$ .

## V.-PROPRIETES STATISTIQUES DES SUBSTITUTIONS

### 1) Systèmes dynamiques associés aux substitutions

Les problèmes que nous étudions dans cette thèse sont reliés à l'étude de certaines propriétés des systèmes dynamiques symboliques, étudiées par E. M. Coven, M. Dekking, W. H. Gottschalk, B. Host, T. Kamae, M. Keane, H. B. Keynes, M. Lemanczyk, P. Liardet, N. G. Markley, J. C. Martin, M. K. Mentzen, P. Michel, M. Queffélec et G. Rauzy dans [38, 39, 43, 57, 65, 75, 76, 84, 98, 100, 102, 105-107, 122, 123, 134-138, 147, 149-151] .

On rappelle que  $A^{\mathbb{N}}$ , muni de la métrique définie dans la partie II, est un espace métrique compact. Le décalage  $T$  défini par :

$$T : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$$

$$m \rightarrow T(m) = m_1 \dots m_{n+1} \dots \quad \text{si } m = m_0 \dots m_n \dots$$

est une application continue.

Si  $m \in A^{\mathbb{N}}$ , on note

$$\text{Orb}_T(m) = \{T^k(m), k \in \mathbb{N}\}$$

l'orbite de  $m$  sous l'action de  $T$  et

$$X(m) = \overline{\text{Orb}_T(m)}.$$

On dit que  $(X(m), T)$  est un *système dynamique topologique* (cf. [58, 138]).

**exemple 1** (cf. [59]) : Si  $m \in A^{\mathbb{N}}$  est un point fixe non vide de la substitution de Morse,  $X(m)$  est exactement l'ensemble des mots infinis ne contenant aucun sous-mot de la forme  $\mu\mu\alpha$ , avec  $\alpha \in A$  et  $\mu \in \alpha\mathcal{M}(A)$ .

Mais dans le cas général, même lorsque  $m$  est engendré par une substitution assez simple, il n'est pas facile de décrire aussi élégamment l'ensemble  $X(m)$  ...

Certaines propriétés ergodiques de  $(X(m), T)$  ont une traduction simple en termes de propriétés statistiques du mot  $m$ .

Par exemple, on dit que  $(X(m), T)$  est *minimal* si les seuls fermés de  $X(m)$  invariants par  $T$  sont l'ensemble vide et  $X(m)$ ;  $(X(m), T)$  est minimal si et seulement si tout sous-mot de  $m$  réapparaît avec des lacunes bornées. Si  $m$  est engendré par la substitution  $\Sigma$ , alors  $(X(m), T)$  est minimal si et seulement si  $\Sigma$  est primitive.

De même, s'il existe une unique mesure de probabilité borélienne invariante par  $T$ , on dit que  $(X(m), T)$  est *uniquement ergodique*;  $(X(m), T)$  est uniquement ergodique si et seulement si tout sous-mot de  $m$  réapparaît avec une fréquence uniforme. Si  $m$  est engendré par une substitution primitive  $\Sigma$  alors  $(X(m), T)$  est uniquement ergodique.

Lorsque  $m$  est un mot non périodique engendré par une substitution primitive  $\Sigma$  de longueur constante  $\ell$ , M. Dekking montre dans [39] que le spectre de  $(X(m), T)$  est égal à  $\mathbb{Z}(1/\ell) \times \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ , où  $h = \max \{n \leq \ell; (n, \ell) = 1 \text{ et } n \text{ divise } \text{pgcd} \{k; m_k = m_0\}\}$ ;  $h$  est appelé *hauteur* de  $\Sigma$ .

Ceci permet de donner une seconde démonstration du théorème de Cobham.

**exemple 2 :** Si  $m$  est un point fixe non vide de la substitution de Morse ou de la substitution de Rudin-Shapiro, le spectre de  $(X(m), T)$  est égal à  $\mathbb{Z}(1/2)$ .

L'étude du spectre du système dynamique topologique associé à une substitution primitive de longueur quelconque conduit à de nombreuses questions encore non résolues.

Les résultats les plus précis dans cette direction ont été obtenus par B. Host dans [65]. De même que lors de notre étude des ensembles normaux substitutifs dans [113], ces résultats sont liés à la description de l'ensemble des réels  $\alpha$  tels que  $(\ell_i(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  converge modulo 1 pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$  en fonction des propriétés arithmétiques de certaines valeurs propres de la matrice associée à la substitution.

## 2) Complexité d'un mot infini

Si  $m \in A^{\mathbb{N}}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note, comme dans la partie I.4,  $p(n)$  le nombre de sous-mots de  $m$  de longueur  $n$ . L'application  $p$ , qui à  $n$  associe  $p(n)$ , est appelée *complexité* du mot  $m$ . On a évidemment  $1 \leq p(n) \leq g^n$ , et le type de croissance de  $p(n)$  mesure le "non-déterminisme" du mot  $m$ . Par exemple si  $m$  est normal (au sens de Borel),  $p(n) = g^n$  est maximal ; à l'opposé, si  $p(n)$  a un comportement sous-polynomial, on dit que  $m$  est un mot "déterministe". Plus précisément, l'entropie topologique  $h$  du système dynamique  $(X(m), T)$  s'exprime directement au moyen de la complexité du mot  $m$  par la relation :

$$h = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log p(n)}{n} .$$

Lorsque  $m$  est point fixe d'une substitution  $\Sigma$  sur  $A$ , on a  $p(n) \in O(n^2)$  (cf. [15, 52]) et l'entropie topologique de  $(X(m), T)$  est nulle.

A. Ehrenfeucht, K. P. Lee et G. Rozenberg, puis J. J. Pansiot ont précisé dans [52, 132] le type de croissance de la complexité des points fixes non ultimement périodiques d'une substitution  $\Sigma$  en fonction de celui de  $L(n)$  :

Si  $\Sigma$  est croissante (i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_i(n) = +\infty$  pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ ) alors on se trouve, selon les

valeurs des  $(d_i, r_i)$ , dans l'un des 3 cas suivants (on note, comme dans la partie II,  $\ell_i(n) \approx n^{d_i} r_i^{n_i}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ ) :

(i)  $\exists r \in ]1, +\infty[ / \forall i \in \{1, \dots, g\} (d_i, r_i) = (0, r)$  ; alors  $p(n) \approx n$  .

(ii)  $\exists r \in ]1, +\infty[ / \forall i \in \{1, \dots, g\} r_i = r$  et  $\exists i \in \{1, \dots, g\} / d_i \neq 0$  ; alors

$$p(n) \approx n \log \log n .$$

(iii)  $\forall i \in \{1, \dots, g\} r_i \in ]1, +\infty[$  et  $\exists (i, j) \in \{1, \dots, g\}^2 / r_i \neq r_j$  ; alors  $p(n) \approx n \log n$  .

Par exemple, si  $m$  est le mot de Morse, de Rudin-Shapiro, de Baum-Sweet ou celui construit dans l'exemple 5 de la partie IV, on a  $p(n) \approx n$  .

**exemple 3 :**  $A = \{a_1, a_2\}$   $\Sigma(a_1) = a_1 a_1 a_2$  et  $\Sigma(a_2) = a_2 a_2$  ,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } L(n) = T_{(n2^{n-1} + 2^n, 2^n)} .$$

Donc, si  $m = a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 a_1 a_1 a_2 \dots$  , on a  $p(n) \approx n \log \log n$  .

**exemple 4 :**  $A = \{a_1, a_2\}$   $\Sigma(a_1) = a_1 a_1 a_1 a_2$  et  $\Sigma(a_2) = a_2 a_2$  ,

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } L(n) = T_{(3^{n+1} - 2^n, 2^n)} .$$

Donc, si  $m = a_1 a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 a_1 \dots$  , on a  $p(n) \approx n \log n$  .

Si  $\Sigma$  n'est pas croissante alors, soit  $m$  contient des sous-mots arbitrairement longs formés de lettres de  $\{a_i \in A ; (\ell_i(n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}$  , et alors  $p(n) \approx n^2$  , soit  $m$  est l'image du point-fixe d'une substitution croissante, et on est ramené à l'un des 3 cas précédents.

Par exemple si  $m$  est l'un des mots construits dans les exemples 3 et 4 de la partie IV, on a  $p(n) \approx n^2$  .

Le calcul exact de  $p(n)$  est un problème plus délicat. On peut montrer que lorsque  $\Sigma$  est une substitution de longueur constante  $\ell$  , minimale et injective sur les lettres, alors la suite  $(p(n+1) - p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est engendrée par un automate fini en base  $\ell$  (cf. [163]).

Par exemple, si  $\Sigma$  est la substitution de Morse, alors :

$$\begin{aligned} p(n+1) - p(n) &= 2 && \text{si } 3 \cdot 2^k < n \leq 4 \cdot 2^k \\ &= 4 && \text{sinon .} \end{aligned}$$

### 3) Propriétés fractales

L'algorithme de construction de mots infinis que nous avons décrit ici (substitution sur un alphabet fini) présente de nombreuses analogies avec les procédés de construction de fractals.

Par exemple, la substitution de Coquet (cf. § IV) définie sur l'alphabet  $\{a, b\}$  par  $\Sigma(a) = aba$  et  $\Sigma(b) = bbb$  correspond clairement au procédé habituel de construction de l'ensemble triadique de



Cantor  $C = \{ \alpha \in [0,1] ; \alpha = \sum_{i>0} \alpha_i 3^{-i}, \alpha_i \in \{0,2\} \}$  . On voit que cette correspondance

s'effectue ici modulo le "changement d'échelle" qui consiste à identifier le mot infini  $m = a b a b b b a b a \dots$  et l'intervalle  $[0,1]$  .

Dans le cas plus complexe où l'alphabet est muni d'une structure de groupe libre, M. Dekking utilise dans [41, 42] cette analogie pour étudier les propriétés topologiques de certains ensembles fractals.

D'autre part, la structure fractale des fonctions sommatoires associées à la "somme des chiffres" a été mise en évidence dès 1968 par J. R. Trollope puis par H. Delange dans [45, 166] . En 1983, J. Coquet montre dans [33] que, si  $s(n)$  désigne la somme des chiffres de  $n$  en base 2, il existe une fonction  $F$  continue nulle part dérivable sur  $[1, +\infty[$  telle que :

$$F(4x) = F(x) \quad \text{et}$$

$$\sum_{n < N} (-1)^{s(3n)} = N^{\log_4 3} F(N) \quad \text{mod } o(1) .$$

Indépendamment, J. Brillhart, P. Erdős et P. Morton montrent la même année dans [19] que, si  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite de Rudin-Shapiro, il existe une fonction  $G$  continue presque nulle part dérivable sur  $[1, +\infty[$  telle que

$$G(4x) = G(x) \quad \text{et}$$

$$\sum_{n < N} \varepsilon_n = \sqrt{N} G(N) \quad \text{mod } o(1) .$$

J. M. Dumont et A. Thomas ont récemment généralisé ces propriétés dans [51] en montrant le résultat suivant :

Soit  $m = m_0 \dots m_n \dots \in A^{\mathbb{N}}$  engendré par une substitution primitive  $\Sigma$  dont la  $\Sigma$ -matrice admet  $\theta$  pour valeur propre dominante,  $\theta' \in ]1, +\infty[$  pour seconde valeur propre et toutes les autres valeurs propres de module strictement inférieur à  $\theta'$  . Soit  $f$  une application de  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $(f(a_1), \dots, f(a_g))$  soit orthogonal à l'espace propre relatif à  $\theta$  . Alors il existe une fonction  $F$  continue nulle part dérivable sur  $]1, +\infty[$  (si  $F \neq 0$ ) telle que :

$$F(\theta x) = F(x) \quad \text{et}$$

$$\sum_{n < N} f(m_n) = (\log_{\theta} N)^{\alpha} N^{\log_{\theta} \theta'} F(N) \pmod{O(\psi(N))},$$

où  $\alpha+1$  est l'ordre de multiplicité de  $\theta'$ , et  $\psi(N) \in O((\log_{\theta} N)^{\alpha} N^{\log_{\theta} \theta'})$ .

Pour obtenir ce résultat, il est utile de construire un système de numération associé à la substitution  $\Sigma$ , comme nous l'avons fait dans [112, 113] lors de l'étude des sommes trigonométriques associées aux substitutions.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux obtenus par S. Ito et M. Mizutani, qui décrivent dans [66-68] la nature arithmétique des propriétés des systèmes dynamiques associés à certains domaines fractals.

Les travaux récents de G. Rauzy (cf. [145, 149-151]), qui mettent en évidence les connexions entre les propriétés des systèmes dynamiques associés aux substitutions, l'étude des systèmes de numération associés et certains problèmes d'approximation diophantienne, permettent de mieux comprendre l'ensemble de ces résultats.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. I. ADIAN : *The Burnside problem and identities in groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **95**, Springer-Verlag (1979).
- [2] J. P. ALLOUCHE : Automates finis en théorie des nombres, *Expo. Math.* **5** (1987), 239-266.
- [3] J. P. ALLOUCHE : Sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles, *C. R. Acad. Sc.* **307** (1988), 631-633.
- [4] J. P. ALLOUCHE et M. COSNARD : Itérations de fonctions unimodales et suites engendrées par automates, *C. R. Acad. Sc.* **296** (1983), 159-162.
- [5] J. P. ALLOUCHE et P. LIARDET : Generalized Rudin-Shapiro sequences (preprint).
- [6] J. P. ALLOUCHE et M. MENDES-FRANCE : Suite de Rudin-Shapiro et modèle d'Ising, *Bull. Soc. Math. France* **113** (1985), 273-283.
- [7] J. P. ALLOUCHE et M. MENDES-FRANCE : On an extremal property of the Rudin-Shapiro sequence, *Mathematika* **32** (1985), 33-38.
- [8] D. BARBOLOSI : *Fractions continues à quotients partiels impairs, propriétés arithmétiques et ergodiques*, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille I (1988).
- [9] L. E. BAUM et M. M. SWEET : Continued fractions of algebraic power series in characteristic 2, *Ann. of Math.* **103** (1976), 593-610.

- [10] R. BELLMAN et H. N. SHAPIRO : A problem in additive number theory, *Ann. of Math.* **49** (1948), 333-340.
- [11] C. BERGE : *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris (1973).
- [12] J. BERSTEL : Sur la construction de mots sans carré, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 1978-1979* **18**, Université de Bordeaux I (1979).
- [13] J. BERSTEL : Tracé des droites, fractions continues et morphismes itérés, *Publication du Laboratoire d'Informatique Théorique de Paris* **61**, Paris (1987).
- [14] J. BESINEAU : Indépendance statistique d'ensembles liés à la somme des chiffres, *Acta Arith.* **20** (1972), 401-416.
- [15] G. BLANC et N. BLEUZEN-GUERNALEC : Production en temps réel et complexité de structure de suites infinies, *RAIRO Info. Théor. et Applic.* **23** (1989), 1-22.
- [16] A. BLANCHARD et M. MENDES-FRANCE : Symétrie et transcendance, *Bull. Sc. Math.* **106** (1982), 325-335.
- [17] J. P. BOREL : Un problème d'équirépartition modulo 1 lié aux partitions, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), 229-250.
- [18] J. P. BOREL : Equirépartition modulo 1 des semi-groupes additifs de nombres réels, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1978-1979* **31**, Université de Paris VI (1980).
- [19] J. BRILLHART, P. ERDOS et P. MORTON : On sums of Rudin-Shapiro coefficients II,

- Pacific J. Math.* **107** (1983), 39-69.
- [20] J. BRILLHART et P. MORTON : Uber Summen von Rudin-Shapiro Koeffizienten, *Illinois J. Math.* **22** (1978), 126-148.
- [21] N. G. de BRUIJN : Sequences of zeros and ones generated by special production rules, *Indag. Math.* **84** (1981), 27-37.
- [22] N. G. de BRUIJN : Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane I, *Indag. Math.* **84** (1981), 39-66.
- [23] W. BULATEK : Topological conjugacy of Morse flows over finite abelian groups, *Studia Math.* **90** (1988), 1-14.
- [24] L. E. BUSH: An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers, *Amer. Math. Monthly* **47** (1940), 154-156.
- [25] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES-FRANCE et G. RAUZY : Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), 401-419.
- [26] A. COBHAM : On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata, *Math. Syst. Theory* **3** (1969), 186-192.
- [27] A. COBHAM : Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory* **6** (1972), 164-192.
- [28] J. COQUET : *Contribution à l'étude harmonique de suites arithmétiques*, Thèse d'Etat, Université de Paris XI (1978).

- [29] J. COQUET : On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences, *J. Number Theory* **10** (1978), 291-296.
- [30] J. COQUET : Répartition modulo 1 des suites q-additives, *Ann. Soc. Math. Polon. séries I : comm. Math.* **21** (1979), 23-42.
- [31] J. COQUET : On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences II, *J. Number Theory* **12** (1980), 244-250.
- [32] J. COQUET : Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition, *J. Number Theory* **16** (1983), 363-375.
- [33] J. COQUET : A summation formula related to binary digits, *Invent. Math.* **73** (1983), 107-115.
- [34] J. COQUET : Mesures spectrales de Walsh associées à certaines suites arithmétiques, *Ann. Inst. Fourier* **35** (1985) 1-12.
- [35] J. COQUET, T. KAMAE et M. MENDES-FRANCE : Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France* **105** (1977), 369-384.
- [36] M. COSNARD : Etude de la classification topologique des fonctions unimodales, *Ann. Inst. Fourier* **35** (1985), 59-77.
- [37] E. M. COVEN et G. A. HEDLUND : Sequences with minimal block growth, *Math. Systems Theory* **7** (1973), 138-153.

- [38] E. M. COVEN et M. KEANE : The structure of substitution minimal sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **162** (1971) 89-102.
- [39] F. M. DEKKING : The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length, *Z. Wahr. verw. Geb.* **41** (1978), 221-239.
- [40] F. M. DEKKING : *Combinatorial and statistical properties of sequences generated by substitutions*, Thèse de Doctorat, Katholieke Universiteit van Nijmegen (1980).
- [41] F. M. DEKKING : Replicating superfigures and endomorphisms of free groups, *J. Comb. Theory serie A* **32** (1982) 315-320.
- [42] F. M. DEKKING : Recurrent sets, *Advances in Math.* **44** (1982), 78-104.
- [43] F. M. DEKKING et M. KEANE : Mixing properties of substitutions, *Z. Wahr. verw. Geb.* **42** (1978), 23-43.
- [44] H. DELANGE : Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives, *Acta Arith.* **21** (1972), 285-298.
- [45] H. DELANGE : Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres", *Ens. Math.* **21** (1975), 31-47.
- [46] L. E. DICKSON : *History of the theory of numbers, vol II : Diophantine analysis*, Chelsea, New York (1952).
- [47] P. DRAZIN et J. S. GRIFFITH : On the decimal representation of integers, *Proc.*

*Cambridge Phil. soc.* **48** (1952), 555-565.

- [48] F. DRESS : Sur l'équirépartition de certaines suites  $(x\lambda_n)$ , *Acta Arith.* **14** (1968), 169-175.
- [49] F. DRESS : Intersection d'ensembles normaux, *J. Number Theory* **2** (1970), 352-362.
- [50] J. M. DUMONT : Discrédance des progressions arithmétiques dans la suite de Morse, *C. R. Acad. Sc. Paris série I* **297** (1983), 145-148.
- [51] J. M. DUMONT et A. THOMAS : Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions, *Colloquium on Arithmetics and Coding Systems, Luminy 1987, Theor. Comp. Sc.* (à paraître).
- [52] A. EHRENFEUCHT, K. P. LEE et G. ROZENBERG : Subword complexities of various classes of deterministic developmental languages without interactions, *Theor. Comp. Sc.* **1** (1975), 59-75.
- [53] S. EILENBERG : *Automata, languages and machines, vol. A*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York (1974).
- [54] S. FERENCZI : Propriétés de rang local de la suite de Morse (preprint).
- [55] I. FILIPOWICZ, J. KWIATOWSKI et M. LEMANCZYK : Approximation of  $Z_2$ -cocycles and shifts dynamical systems, *Publicacions Matemàtiques* **32** (1988), 91-110.



- [56] J. FINE : The distribution of the sum of digits (mod  $p$ ), *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1965), 651-652.
- [57] W. H. GOTTSCHALK : Substitution minimal sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **109** (1963), 467-491.
- [58] W. H. GOTTSCHALK et G. A. HEDLUND : *Topological dynamics*, American Mathematical Society Colloquium Publications **36** (1955).
- [59] W. H. GOTTSCHALK et G. A. HEDLUND : A characterization of the Morse minimal set, *Proc. Amer. Soc.* **15** (1964), 70-74.
- [60] G. R. GOODSON : Spectral properties of generalized Morse sequences over  $n$  symbols (preprint).
- [61] A. O. GUELFOND : Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arith.* **13** (1968), 259-265.
- [62] G. A. HEDLUND et M. MORSE : Symbolic dynamics, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 815-866.
- [63] G. A. HEDLUND et M. MORSE : Symbolic dynamics II, *Amer. J. Math.* **62** (1940), 1-42.
- [64] G. A. HEDLUND et M. MORSE : Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semigroups, *Duke Math. J.* **11** (1944), 1-7.

- [65] B. HOST : Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable, *Erg. Th. Dyn. Syst.* **6** (1986), 529-540.
- [66] S. ITO : On the fractal curves induced from complex radix expansions (preprint).
- [67] S. ITO et M. MIZUTANI : A new characterization of dragon and dynamical system, *Tokyo J. Math.* **9** (1986), 487-504.
- [68] S. ITO et M. MIZUTANI : Dynamical systems on dragon domains, *Japan J. Appl. Math.* (à paraître).
- [69] A. del JUNCO : A transformation with simple spectrum which is not rank one, *Can. J. Math.* **29** (1977), 655-663.
- [70] J. P. KAHANE : *Séries de Fourier absolument convergentes*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **50**, Springer-Verlag, Berlin (1970).
- [71] J. P. KAHANE : Hélices et quasi-hélices, *Math. Anal. Applic. part B : Adv. Math. Sup. Studies* **7B** (1981), 417-433.
- [72] J. P. KAHANE et R. SALEM : *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Actualités Scientifiques et Industrielles **1301**, Hermann, Paris (1963).
- [73] S. KAKUTANI : Ergodic theory of shift transformation, *Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 2*, University California Press, Berkeley (1967), 405-414.

- [74] S. KAKUTANI : Strictly ergodic symbolic dynamical systems, *Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 2*, University California Press, Berkeley (1972), 319-326.
- [75] T. KAMAE : Spectrum of a substitution minimal set, *J. Math. Soc. Japan* **22** (1970), 567-578.
- [76] T. KAMAE : A topological invariant of substitution minimal sets, *J. Math. Soc. Japan* **24** (1972) , 285-306.
- [77] T. KAMAE : Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures, *Osaka J. Math.* **15** (1978), 569-574.
- [78] T. KAMAE : Mutual singularity of spectra of dynamical systems given by sums of digits to different bases, *Systèmes dynamiques I - Varsovie*, Astérisque **49** (1978), 109-116.
- [79] T. KAMAE : A characterization of self-affine functions, *Japan J. Applied Math.* **3** (1986) 271-280.
- [80] T. KAMAE : Spectral properties of automaton generating sequences (preprint).
- [81] T. KAMAE et M. KEANE : A class of deterministic self-affine processes (preprint).
- [82] M. KEANE : Generalized Morse sequences, *Z. Wahr. verw. Geb.* **10** (1968), 335-353.
- [83] M. KEANE : Strongly mixing g-measures, *Invent. Math.* **16** (1972), 309-324.

- [84] H. B. KEYNES : The proximal relation in a class of substitution minimal sets, *Math Systems Theory* **1** (1967), 165-174.
- [85] G. KOHLER : Some more predictable continued fraction, *Monatsh. f. Math.* **89** (1980), 95-100.
- [86] J. KWIATKOWSKI : Spectral isomorphism of Morse dynamical systems, *Bull. Acad. Pol. Sc.* **29** (1981), 105-114.
- [87] J. KWIATKOWSKI : Isomorphism of regular Morse dynamical systems, *Studia Math.* **72** (1982), 59-89.
- [88] J. KWIATKOWSKI : Isomorphism of regular Morse dynamical systems induced by arbitrary blocks, *Studia Math.* **84** (1986), 219-246.
- [89] J. KWIATKOWSKI et T. ROJEK : The centralizer of Morse shifts induced by arbitrary blocks, *Studia Math.* **88** (1988), 165-181.
- [90] J. KWIATKOWSKI et A. SIKORSKI : Spectral properties of  $G$ -symbolic Morse shifts, *Bull. Soc. Math. France* **115** (1987), 19-33.
- [91] M. LEMANCZYK : *Ergodic properties of Morse sequences*, Thèse de Doctorat, Nicholas-Copernicus University, Torun (1985).
- [92] M. LEMANCZYK : The rank of regular Morse dynamical systems, *Z.Wahr. verw. Geb.* **70** (1985), 33-48.

- [93] M. LEMANCZYK : The sequence entropy for Morse shifts and some counterexamples, *Studia Math.* **82** (1985), 221-241.
- [94] M. LEMANCZYK : The centralizer of Morse shifts, *Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand II* **87** (1985), 43-56.
- [95] M. LEMANCZYK : Ergodic  $Z_2$ -extensions over rational pure point spectrum, category and homomorphisms, *Compositio Math.* **63** (1987), 63-81.
- [96] M. LEMANCZYK : Toeplitz  $Z_2$ -extensions, *Ann. IHP* **24** (1988), 1-43.
- [97] M. LEMANCZYK et M. K. MENTZEN : Generalized Morse sequences on  $n$ -symbols and  $m$ -symbols are not isomorphic, *Bull. Acad. Pol. Sc.* **33** (1985), 239-245.
- [98] M. LEMANCZYK et M. K. MENTZEN : On metric properties of substitutions, *Compositio Math.* **65** (1988), 241-263.
- [99] M. LEMANCZYK et A. SIKORSKI : A class of not local rank one automorphisms arising from continuous substitutions, *Proba. Th. Rel. Fields* **76** (1987), 421-428.
- [100] P. LIARDÉT : Regularities of distribution, *Compositio Math.* **61** (1987), 267-293.
- [101] P. LIARDET : Propriétés harmoniques de la numération suivant Jean Coquet, *Colloque de Théorie Analytique des Nombres "Jean Coquet"* , Publications Mathématiques d'Orsay 88-02, Orsay (1988).
- [102] P. LIARDET : Some metric properties of subsequences, *Acta Arith.* **55** (à paraître).

- [103] M. LOTHAIRE : *Combinatorics on words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **17**, Addison-Wesley (1983).
- [104] K. MALHER : On the translation properties of a simple class of arithmetical functions, *J.Math. Massachusetts* **6** (1927), 158-163.
- [105] N. G. MARKLEY : Substitution-like minimal sets, *Israel J. Math.* **22** (1975), 332-353.
- [106] J. C. MARTIN : Substitution minimal flows, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 503-526.
- [107] J. C. MARTIN : Minimal flows arising from substitutions of non-constant length, *Math. Syst. Th.* **7** (1973), 73-82.
- [108] J. C. MARTIN : Generalized Morse sequences on  $n$  symbols, *Proc. Amer. Math. Soc.* **54** (1976), 379-383.
- [109] J. C. MARTIN : The structure of generalized Morse minimal sets on  $n$  symbols, *Trans. Amer. Math. Soc.* **232** (1977), 343-355.
- [110] C. MAUDUIT : Automates finis et ensembles normaux, *Ann. Inst. Fourier* **36** (1986), 1-25.
- [111] C. MAUDUIT : Morphisme unispectraux, *Theor. Comp. Sc.* **46** (1986), 1-11.
- [112] C. MAUDUIT : Sur l'ensemble normal des substitutions de longueur quelconque, *J. Number Theory* **29** (1988), 235-250.

- [113] C. MAUDUIT : Caractérisation des ensembles normaux substitutifs, *Invent. Math.* **95** (1989), 133-147.
- [114] C. MAUDUIT et B. MOSSE : Etude spectrale de la multiplication  $q$ -adique, *Compositio Math.* **67** (1988), 129-147.
- [115] C. MAUDUIT et B. MOSSE : Suites de  $G_q$ -orbite finie (preprint).
- [116] M. MENDES-FRANCE : Nombres normaux. Application aux fonctions pseudo-aléatoires, *J. Anal. Math.* **20** (1967), 1-56.
- [117] M. MENDES-FRANCE : Nombres transcendants et ensembles normaux, *Acta Arith.* **15** (1969), 189-192.
- [118] M. MENDES-FRANCE : Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1, *J. Number Theory* **5** (1973), 1-15.
- [119] M. MENDES-FRANCE et G. TENENBAUM : Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, *Bull. Soc. Math. France* **109** (1981), 207-215.
- [120] Y. MEYER : Nombres algébriques, nombres transcendants et équirépartition modulo 1, *Acta Arith.* **16** (1970), 347-350.
- [121] Y. MEYER : *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Lecture Notes in Mathematics 117, Springer-Verlag, Berlin (1970).
- [122] P. MICHEL : Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitutions, *C. R. Acad. Sc.*

*Paris I* **278** (1974), 811-813.

- [123] P. MICHEL : Coïncidence value and spectra of substitutions, *Z. Wahr. verw. Geb.* **42** (1978), 205-227.
- [124] W. H. MILLS et D. P. ROBBINS : Continued fractions for certain algebraic power series, *J. Number Theory* **23** (1986) 388-404.
- [125] L. MIRSKY : A theorem on representations of integers in the scale of  $r$ , *Scripta Math.* **15** (1949), 11-12.
- [126] M. MORSE : Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **22** (1921), 84-100.
- [127] B. MOSSE : *Propriétés ergodiques de l'addition sans retenue*, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille I (1986).
- [128] B. MOSSE : q-adic spectral analysis of some arithmetic sequences, *Colloquium on Arithmetics and Coding Systems, Luminy 1987, Theor. Comp. Sc.* (à paraître).
- [129] D. J. NEWMAN : On the number of binary digits in a multiple of three, *Proc. Amer. Math. Soc.* **21** (1969), 719-721.
- [130] D. J. NEWMAN et M. SLATER : Binary digit distribution over naturally defined sequences, *Trans Amer. Math. Soc.* **213** (1975).
- [131] R. NURNBERG : All generalized Morse-sequences are loosely Bernoulli, *Math. Z.* **182**



(1983), 403-407.

- [132] J. J. PANSIOT : Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés, *Automata, languages and programming*, Lecture Notes in Computer Sciences 172, Springer-Verlag, Berlin (1984), 380-389.
- [133] E. PROUHET : Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres, *C. R. Acad. Sc. Paris* 33 (1851), 31.
- [134] M. QUEFFELEC : Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*. 107 (1979), 385-421.
- [135] M. QUEFFELEC : Sur la singularité des produits de Riesz et des mesures spectrales associées à la somme de chiffres, *Israel J. Math.* 34 (1979), 337-342.
- [136] M. QUEFFELEC : *Contribution à l'étude spectrale des suites arithmétiques*, Thèse d'Etat, Université de Paris XIII (1984).
- [137] M. QUEFFELEC : Une nouvelle propriété des suites de Rudin-Shapiro, *Ann. Inst. Fourier* 37 (1987), 115-138.
- [138] M. QUEFFELEC : *Substitution dynamical systems - Spectral analysis*, Lecture Notes in Mathematics 1294, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [139] G. N. RANEY : On continued fractions and finite automata, *Math. Ann.* 206 (1973), 265-283.

- [140] G. RAUZY : Caractérisation des ensembles normaux, *Bull. Soc. Math. France* **98** (1970), 401-414.
- [141] G. RAUZY : Normalité de  $\mathbb{Q}^*$ , *Acta Arith.* **19** (1971), 43-47.
- [142] G. RAUZY : Fonctions entières et répartition modulo 1, *Bull. Soc. Math. France* **100** (1972), 409-415.
- [143] G. RAUZY : Fonctions entières et répartition modulo 1 II, *Bull. Soc. Math. France* **101** (1973), 185-192.
- [144] G. RAUZY : *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, collection SUP, Presses Universitaires de France, Paris (1976).
- [145] G. RAUZY : Une généralisation du développement en fraction continue, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1976/77* **15**, Université de Paris VI (1977).
- [146] G. RAUZY : Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 147-178.
- [147] G. RAUZY : Suites à termes dans un alphabet fini, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 1982-1983* **25**, Université de Bordeaux I (1983).
- [148] G. RAUZY : Mots infinis en arithmétique, *Automata on infinite words*, Lecture Notes in Computer Sciences **192**, Springer-Verlag, Berlin (1985), 165-171.
- [149] G. RAUZY : Sequences defined by iterated morphisms, *Advanced International Workshop*

*on Sequences, Amalfi Coast 1988* (à paraître).

- [150] G. RAUZY : Rotations sur les groupes, nombres algébriques et substitutions *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 1988-1989*, Université de Bordeaux I (à paraître).
- [151] G. RAUZY : Structure des systèmes dynamiques définis par des substitutions (*en préparation*).
- [152] G. RHIN : Répartition modulo 1 de  $f(p_n)$  quand  $f$  est une série entière, Répartition modulo 1, Lecture Notes in Mathematics **475**, Springer-Verlag, Berlin (1975), 176-224.
- [153] T. ROJEK : On metric isomorphism of Morse dynamical systems, *Studia Math.* **84** (1986), 247-267.
- [154] G. ROZENBERG et A. SALOMAA : *The mathematical theory of L systems*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York (1980).
- [155] W. RUDIN : Some theorems on Fourier coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 855-859.
- [156] B. SAFFARI : Une fonction extrémale liée à la suite de Rudin-Shapiro, *C. R. Acad. Sc. Paris série I* **303** (1986), 97-100.
- [157] B. SAFFARI : Structure algébrique sur les couples de Rudin-Shapiro. Problème extrémal de Salem pour les polynômes à coefficients  $\pm 1$ , *C. R. Acad. Sc. Paris série I* **304** (1987), 127-130.

- [158] J. O. SHALLIT : Simple continued fractions for some irrational numbers, *J. Number Theory* **11** (1979) 209-217.
- [159] J. O. SHALLIT : Simple continued fractions for some irrational numbers II, *J. Number Theory* **14** (1982) 228-231.
- [160] H. S. SHAPIRO : *Extremal problems for polynomials and power series*, Thèse de Doctorat, M.I.T. (1951).
- [161] K. B. STOLARSKY : Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators, *Canad. Math. Bull.* **19** (1976), 473-482.
- [162] K. B. STOLARSKY : Integers whose multiples have anomalous digital frequencies, *Acta Arith.* **38** (1980), 117-128.
- [163] T. TABSOBA : *Complexité de suites automatiques*, Thèse de 3-ème cycle, Université d'Aix-Marseille II (1987).
- [164] A. THUE : *Über unendliche Zeichenreihen* (1906), *Selected mathematical papers of Axel Thue*, Universitetsforlaget (1977).
- [165] A. THUE : *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen* (1912), *Selected mathematical papers of Axel Thue*, Universitetsforlaget (1977).
- [166] J. R. TROLOPPE : An explicit expression for binary digital sums, *Math. Mag.* **41** (1968), 21-25.

- [167] A. J. VAN der POORTEN : *An introduction to continued fractions*, Diophantine analysis, London Mathematical Society Lecture Note Series 109, Cambridge University Press, Cambridge (1986).
- [168] I. M. VINOGRADOV : *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, Interscience Publishers, London (1954).
- [169] N. WIENER : The spectrum of an array and its application to the study of the translation properties of a simple class of arithmetical functions I : The spectrum of an array, *J. Math. Massachusetts* **6** (1927), 145-157.
- [170] T. WU : On the proof of continued fraction expansions for irrationals, *J. Number Theory* **23** (1986), 55-59.
- [171] A. ZAME : On normal sets of numbers, *Acta Arith.* **20** (1972), 147-154.

## AUTOMATES FINIS ET ENSEMBLES NORMAUX

par Christian MAUDUIT

### 1. Introduction.

Rappelons que l'on appelle ensemble normal associé à une suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des nombres réels  $\xi$  tels que la suite  $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbb{N}}$  soit équirépartie modulo un.

Le but de cette étude est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à une suite d'entiers  $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$  reconnaissable par un automate fini soit exactement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (la définition précise de la reconnaissabilité sera rappelée ultérieurement).

D'après le théorème de Weyl (cf [15] ou [20]) le problème revient à étudier le comportement de la somme  $\sum_{n < N} e(u_n \cdot \xi)$  et de déterminer à quelles conditions on a, pour tout  $\xi$  irrationnel  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(u_n \cdot \xi) = 0$  (en posant  $e(x) = e^{2\pi i x}$ ).

*Résultats antérieurs.* — En 1980, Kamae, dans un article non publié (cf [7]), avait donné une ébauche de démonstration dans le cas particulier où  $u_n \in O(n)$  (par exemple pour la suite de Morse (cf exemple 2)).

— En 1983, Coquet a obtenu un résultat permettant de conclure pour certaines suites telles que  $u_n \notin O(n)$  (cf. [9]). C'est le cas de la suite  $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \dots$  des entiers dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 (cf. exemple 3).

Mais aucune de ces deux méthodes ne s'applique, par exemple, au cas de la suite de Baum-Sweet (cf. exemple 4) qui vérifie  $u_n \in O(n^{\log_3 2})$  avec  $\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et dont on peut montrer par ailleurs que l'ensemble normal est  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

*Mots-clés :* Équirépartition modulo 1 - Automate fini - Ensemble normal - Nombre cyclomatique - Produit infini de matrices

*Résultat obtenu.* — Le théorème que nous donnons permet de conclure dans le cadre le plus général, en montrant qu'il suffit que la suite  $u$  n'ait pas une croissance de type exponentiel. En fait, cette condition s'exprime très aisément sur le graphe associé à l'automate en disant qu'il suffit qu'au moins un des sommets qui reconnaît la suite  $u$  soit précédé dans le graphe par un sommet possédant au moins deux circuits fermés distincts.

Ces résultats avaient été annoncés en 1984 dans une note aux C.R.A.S. (cf [17]). Par ailleurs, nous établissons (théorèmes 2 et 3) que ces conditions sont nécessaires.

## 2. Notations et définitions.

Soit  $r$  un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par  $[r]$  l'alphabet  $\{0, 1, \dots, r-1\}$  et par  $[r]^K$  l'ensemble des mots de longueur  $K \geq 1$ ,

$$[r]^0 = \{\emptyset\},$$

$$[r]^* = \bigcup_{K=0}^{+\infty} [r]^K.$$

Un  $r$ -automate  $\mathcal{A}$  est la donnée d'un quintuplet  $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$  avec :

- i)  $A$  alphabet  $A = \{a, b, c, \dots\}$ ,
- ii)  $\Xi$  alphabet,
- iii)  $a$  point initial de  $A$ ,
- iv)  $\varphi$  application  $\varphi : A \times [r] \rightarrow A$ ,
- v)  $\tau$  application  $\tau : A \rightarrow \Xi$ .

Pour tout  $(x, s)$  dans  $A \times [r]$  on pose  $\varphi(x, s) = s(x)$  ou plus simplement  $x.s$ . On prolonge alors  $\varphi : A \times [r] \rightarrow A$  en une application, encore notée  $\varphi$ ,  $\varphi : A \times [r]^* \rightarrow A$ .

Si  $n$  est un entier positif dont la représentation en base  $r$  est  $\varepsilon_g \varepsilon_{g-1} \dots \varepsilon_0$ , on pose pour tout  $x$  dans  $A$

$$\varphi(x, n) = x.n$$

$$= x.\varepsilon_g \varepsilon_{g-1} \dots \varepsilon_0$$

(à  $n=0$  on associe le mot vide, avec  $\varphi(x, \emptyset) = x$ ).

Ainsi, lorsque  $n$  parcourt  $\mathbb{N}$ ,  $a.n$  décrit une suite infinie d'éléments dans  $A$  et  $\tau(a.n)$  décrit une suite infinie d'éléments dans  $\Xi$ .

DÉFINITIONS FONDAMENTALES. — 1) On dit qu'une suite  $t \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$  est  $r$ -reconnaissable s'il existe un  $r$ -automate  $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$  tel que :

$$t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\tau(a.n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

2) On dit qu'une suite d'entiers  $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$  est  $r$ -reconnaissable si sa fonction indicatrice  $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  est  $r$ -reconnaissable.

D'autre part, notons  $G$  le graphe associé à l'automate  $\mathcal{A}$  et  $M$  la matrice associée au graphe  $G$  :

$$M = (M_{ij})_{(i,j) \in A^2} \quad \text{avec} \quad M_{ij} = \text{card} \{s \in [r]; i.s = j\}.$$

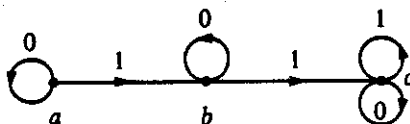
Si  $S$  désigne la matrice de l'action  $\xrightarrow{s}$  pour  $s$  dans  $[r]$ , on pose pour tout  $\xi$  dans  $\mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{s=0}^{r-1} e(s\xi) \cdot S \\ &= (M_{ij}(\xi))_{(i,j) \in A^2}. \end{aligned}$$

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on note  $M^{(n)}(\xi) = M(r^{n-1}\xi) \dots M(r\xi)M(\xi)$ . On a alors  $M^{(n)}(0) = M^n(0) = M^n$ .

De plus on remarque que, pour tout entier  $g \geq 1$  la suite  $t$  est  $r^g$ -reconnaissable par l'automate  $\mathcal{A}_g = (A, \Xi, a, \varphi_g, \tau)$  où  $\varphi_g$  est l'application associée à la matrice  $M^{(g)}(\xi)$ .

Exemple 1. — La suite  $1 < 2 < 4 < 8 < 16 < \dots$  des puissances de 2 est reconnaissable par l'automate :



$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (01101000100\dots)$$

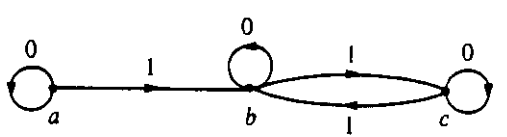
et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & 1 & e(\xi) \\ 0 & 0 & 1+e(\xi) \end{bmatrix}$$

Exemple 2. — La suite  $1 < 2 < 4 < 7 < 8 < \dots$  des entiers dont la somme des chiffres en base 2 est impaire (suite de Morse) est



reconnaisable par l'automate :

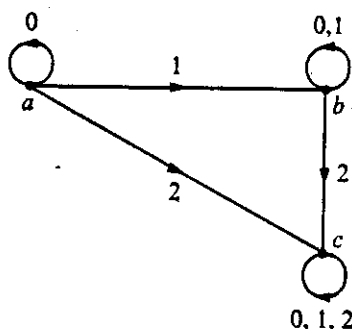


$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (01101001100\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & 1 & e(\xi) \\ 0 & e(\xi) & 1 \end{bmatrix}.$$

*Exemple 3.* — La suite  $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \dots$  des entiers non nuls dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 est reconnaissable par l'automate :

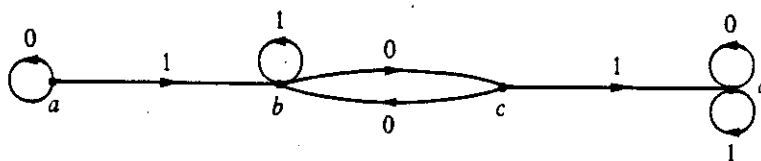


$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (01011000011\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & e(2\xi) \\ 0 & 1+e(\xi) & e(2\xi) \\ 0 & 0 & 1+e(\xi)+e(2\xi) \end{bmatrix}.$$

*Exemple 4.* — La suite  $1 < 3 < 4 < 7 < 9 < \dots$  des entiers dont la représentation binaire ne contient aucune plage de 0 de longueur impaire (suite de Baum-Sweet) est reconnaissable par l'automate :



$$\tau(a) = \tau(c) = \tau(d) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (01011001010\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & e(\xi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 1+e(\xi) \end{bmatrix}.$$

Soit  $\ell$  un sommet de  $G$ .

$G[\ell]$  est la restriction du graphe  $G$  à l'ensemble des sommets  $k$  tels qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_{k\ell}^n > 0$  (c'est-à-dire à l'ensemble des états à partir desquels on peut rejoindre l'état  $\ell$ ).

On dira que le sommet  $i$  de  $G$  précède (au sens large) le sommet  $j$  de  $G$  s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $M_{ij}^n > 0$ .

On note  $M(G[\ell])$  la matrice associée au graphe  $G[\ell]$ .

$a$  étant l'état initial de l'automate  $\mathcal{A}$ , on définit l'application  $v$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow A \\ n &\mapsto v(n) = \varphi(a, n) = a.n \end{aligned}$$

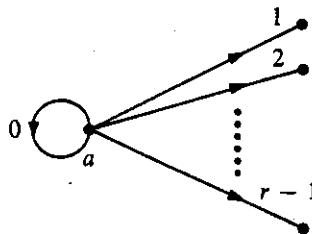
et on note, pour tout  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} e(n, \xi) \\ V(x, \ell) &= V(x, \ell, 0) = \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} 1. \end{aligned}$$

On a choisi l'automate de façon à ce que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad V(x, a, \xi) = 1$$

ce qui est toujours possible, quitte à rajouter un nouvel état initial à l'alphabet  $A$ :



Par ailleurs, si  $f(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions définies et positives pour  $x > x_0$ , la notation  $f \approx g$  ou  $f(x) \approx g(x)$  signifiera qu'il existe des

réels  $\alpha$  et  $\alpha'$  tels que pour tout  $x$  assez grand

$$0 < \alpha \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha'.$$

*N.B.* : Les définitions spécifiques aux automates se trouvent dans [6] et [12], celles spécifiques aux graphes se trouvent dans [2] et [14].

Rappelons que l'on peut définir sur le graphe  $G$  la relation d'équivalence de forte connexité entre les sommets :

$\ell \sim \ell'$  s'il existe dans  $G$  un chemin allant de  $\ell$  vers  $\ell'$  et un chemin allant de  $\ell'$  vers  $\ell$ .

On note  $G/\sim$  le graphe quotient ainsi obtenu et  $\tilde{\ell}$  la classe d'équivalence modulo  $\sim$  du sommet  $\ell$  de  $G$ .

$G/\sim$  est un graphe sans boucle. On peut donc définir sur  $G/\sim$  une numérotation  $v$  des sommets, avec  $v(\tilde{a}) = 0$  :

$$v: G/\sim \rightarrow \mathbf{N}.$$

On peut alors prolonger  $v$  en une application de  $G$  dans  $\mathbf{N}$ , encore notée  $v$ , en posant pour  $\ell \in G$  :

$$v(\ell) = v(\tilde{\ell}).$$

Ceci nous permet de définir un préordre sur  $G$  :

$$\begin{aligned} k \leq \ell & \text{ si } k \text{ précède } \ell \text{ dans } G \\ k < \ell & \text{ si } k \leq \ell \text{ et } v(k) < v(\ell). \end{aligned}$$

Si  $\Gamma$  est un sous-graphe de  $G$ , on notera  $\gamma(\Gamma)$  son nombre cyclomatique (c'est-à-dire le nombre d'arcs de  $\Gamma$ , plus le nombre de composantes connexes de  $\Gamma$ , moins le nombre de sommets de  $\Gamma$ .)

$\tilde{\ell}$  étant considérée comme un sous-graphe de  $G$ , on note  $M[\tilde{\ell}](\xi)$  la matrice extraite de la matrice  $M(\xi)$  obtenue par restriction à  $\tilde{\ell}$  du graphe  $G$ .

DÉFINITION 1. —

- $\tilde{\ell}$  est de type 0 si  $\gamma(\tilde{\ell}) = 0$ ,
- $\tilde{\ell}$  est de type 1 si  $\gamma(\tilde{\ell}) = 1$ ,
- $\tilde{\ell}$  est de type 2 si  $\gamma(\tilde{\ell}) \geq 2$ ,

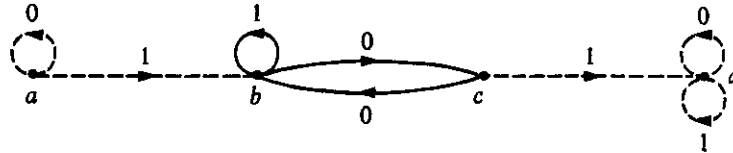
où  $\gamma$  désigne le nombre cyclomatique.

$\ell$  sera de type  $i$  lorsque  $\tilde{\ell}$  est de type  $i$  ( $i \in \{0,1,2\}$ ).

DÉFINITION 2. — Le poids de  $\ell$  est égal au maximum des types des sommets de  $G$  précédant le sommet  $\ell$ . On le note  $\pi(\ell)$ ,

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow \{0,1,2\} \\ \ell &\mapsto \pi(\ell). \end{aligned}$$

Exemple 5. — Dans le cas de la suite de Baum-Sweet,  $\vec{b}$  est représenté en trait plein :



par conséquent  $M[\vec{b}](\xi) = \begin{bmatrix} e(\xi) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\gamma(\vec{b}) = 2$ ,  $\pi(\vec{b}) = 2$ .

### 3. Étude asymptotique des sommes de Weyl.

Préliminaire. — Calcul de  $V(x, \ell, \xi)$ .

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} e(n\xi) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n < \frac{x-s}{r} \\ v(nr+s) = \ell}} e((nr+s)\xi) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(nr+s) = \ell}} e((nr+s)\xi) + B(x, \ell, \xi) \end{aligned}$$

avec  $|B(x, \ell, \xi)| \leq r - 1$ .

Remarquons maintenant que si l'on pose  $S = (S_{ij})_{(i,j) \in A^2}$

$$\sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(nr+s) = \ell}} e(nr\xi) = \sum_{k \in A} S_{k\ell} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(n) = k}} e(nr\xi)$$

et par conséquent

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k \in A} e(s\xi) S_{k\ell} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(n) = k}} e(nr\xi) + B(x, \ell, \xi)$$

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{k \in A} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, k, r\xi\right) + B(x, \ell, \xi).$$

On en déduit par récurrence, que pour tout entier  $N \geq 1$ , on a :

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{k \in A} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B_N(x, \ell, \xi)$$

avec  $|B_N(x, \ell, \xi)| \leq r^N - 1$ .

LEMME 1. — Pour tout sommet  $\ell$  de  $G$ , il existe  $(\beta, \theta)$  dans  $\mathbb{N} \times [0, 1]$  tel que  $V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta$ .

*Démonstration.* —

*Étape 1 :* Montrons ce lemme pour la suite  $x_n = r^n$ .  $V(r^n, \ell)$  est égal au nombre de chemins de longueur  $n$  joignant le sommet  $a$  au sommet  $\ell$  dans le graphe  $G[\ell]$ , c'est-à-dire au coefficient d'indice  $(a, \ell)$  de la matrice  $M(G[\ell])^n$ .

Pour estimer ce coefficient, mettons  $M(G[\ell])$  sous la forme de Jordan :

$$M(G[\ell]) = P(D + N)P^{-1}$$

avec  $D$  diagonale,  $N$  nilpotente et où  $D$  et  $N$  commutent. Ainsi

$$\begin{aligned} V(r^n, \ell) &= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P D^{n-i} N^i P^{-1} \right)_{a\ell} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{\lambda \in \Lambda} C_{\lambda i} \lambda^{n-i} \end{aligned}$$

où  $\Lambda$  désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $M(G[\ell])$ .

Soit  $\lambda_0$  une valeur propre de module maximum telle que les coefficients  $C_{\lambda_0 i}$  ne soient pas tous nuls.

$|\lambda_0| \geq 1$  et les éléments de  $\Lambda$  de module  $|\lambda_0|$  sont de la forme  $\lambda = \lambda_0 e(v)$  avec  $v \in \mathbb{Q}$  (cf [23]).

Si nous notons  $q$  le dénominateur commun de tous ces nombres rationnels, nous obtenons (si  $\beta \in \mathbb{N}$  désigne l'indice maximum tel que  $C_{\lambda_0 \beta} \neq 0$ ) :

$$V(r^n, \ell) = \binom{n}{\beta} \lambda_0^{n-\beta} \sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{nj}{q}\right) + W(r^n, \ell)$$

avec  $W(r^n, \ell) \in O(n^\beta |\lambda_0|^n)$  et où les  $H_j$  ne sont pas tous nuls. Choisissons

maintenant  $d$ ,  $d \in \{0, 1, \dots, q-1\}$  tel que  $\sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{dj}{q}\right) \neq 0$ . Pour un tel  $d$ , on a :

$$\begin{aligned} V(r^{qn+d}, \ell) &\approx n^\beta |\lambda_0|^n \\ &\approx (\log r^{qn+d})^{\beta r^{(qn+d)\theta}} \end{aligned}$$

où  $\theta = \frac{\log |\lambda_0|}{\log r} \in [0, 1]$  puisque  $M(G[\ell])$  est extraite de la matrice  $M$ , dont le rayon spectral est égal à  $r$ .

*Étape 2 :* Pour tout  $x$  assez grand, il existe un entier  $m$  tel que (avec les notations de l'étape 1) :

$$r^{mq+d} \leq x < r^{(m+1)q+d}.$$

Ainsi pour  $x$  assez grand, il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} V(x, \ell) &\geq V(r^{mq+d}, \ell) \\ &\geq \alpha (\log r^{mq+d})^{\beta r^{(mq+d)\theta}} \\ &\geq \alpha (\log r^{-q}x)^{\beta} (r^{-q}x)^{\theta} \\ &\geq \frac{\alpha}{2^{\beta} r^{\theta q}} (\log x)^{\beta} x^{\theta} \end{aligned}$$

et il existe  $\alpha' > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} V(x, \ell) &\leq V(r^{(m+1)q+d}, \ell) \\ &\leq \alpha' (\log r^{(m+1)q+d})^{\beta r^{((m+1)q+d)\theta}} \\ &\leq \alpha' (\log r^q x)^{\beta} (r^q x)^{\theta} \\ &\leq \alpha' 2^{\beta} r^{\theta q} (\log x)^{\beta} x^{\theta} \end{aligned}$$

d'où  $V(x, \ell) \approx (\log x)^{\beta} x^{\theta}$ .

C.Q.F.D.

*Remarques.* — 1) Si  $\rho(\tilde{\mathcal{L}})$  est le rayon spectral de la matrice  $M[\tilde{\mathcal{L}}](0)$ , alors  $\rho(\tilde{\mathcal{L}}) \leq r^{\theta}$ . En effet si  $N_n(\ell_1, \ell_2)$  désigne le nombre de chemins de longueur  $n$  reliant le sommet  $\ell_1 \in \tilde{\mathcal{L}}$  au sommet  $\ell_2 \in \tilde{\mathcal{L}}$ , on démontrerait comme précédemment que

$$N_n(\ell_1, \ell_2) \in O(n^{\beta} r^{\theta n}).$$

Or  $N_n = \sum_{\ell_1 \in \tilde{\mathcal{L}}} \sum_{\ell_2 \in \tilde{\mathcal{L}}} N_n(\ell_1, \ell_2)$ , qui désigne le nombre de chemins de longueur  $n$  dans le graphe fortement connexe  $\tilde{\mathcal{L}}$ , correspond à la valeur d'une norme matricielle en  $M[\tilde{\mathcal{L}}](0)^n$  :

$$N_n = \|M[\tilde{\mathcal{L}}](0)^n\|.$$

Cette norme étant équivalente à la norme spectrale, on en déduit, en posant  $\rho = \rho(\tilde{\ell})$  que

$$N_n \approx \rho^n$$

(cf [23], p. 65).

Donc  $\rho^n \in O(n^\beta r^{\theta n})$  et par suite  $\rho \leq r^\theta$ .

2) Le lemme 1 donne en particulier des conditions nécessaires pour qu'une suite soit reconnaissable par un automate fini.

En effet, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est reconnaissable, il existe  $(\beta, \theta)$  dans  $\mathbb{N} \times [0, 1]$  tel que

$$V(x) = \sum_{u_n < x} 1 = \sum_{\pi(\ell)=1} V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta.$$

On retrouve ainsi un résultat de A. Cobham (cf. [83]).

*Exemple 6.* — Les suites  $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(a^{(n^b)})_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $(a, b) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$ ,  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $p_n$  désigne le  $n^{\text{ième}}$  nombre premier ne sont pas reconnaissables par un automate fini. (Pour le dernier exemple, rappelons que  $V(x) \approx \frac{x}{\log x}$ ).

LEMME 2 (avec les notations du lemme 1). —

— Si  $\ell$  est de poids 1, alors  $\theta = 0$ .

— Si  $\ell$  est de poids 2, alors  $\theta \in ]0, 1]$ .

*Démonstration.* —

*Premier cas :*  $\pi(\ell) = 1$ ; on pose  $v(\ell) = v$ .

$G[\ell]$  est un graphe comprenant au plus  $(v+1)$  composantes fortement connexes, de type 0 ou 1 (simples sommets ou boucles).

Par conséquent

$$M(G[\ell]) = \begin{bmatrix} M_0 & \times & \dots & \times \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \times \\ 0 & \dots & 0 & M_v \end{bmatrix}$$

avec pour tout  $i \in \{0, \dots, v\}$   $M_i$  matrice associée à une composante fortement connexe de type 0 ou 1.

En particulier, on a soit  $M_i = 0$  soit  $M_i^{g_i} = I_{g_i}$  ( $g_i \neq 0$  désignant la longueur de la  $i^{\text{ème}}$  boucle).

Ainsi, si  $g = \text{p.p.c.m. } g_i$  on a  $M(G[\ell])^g = D + N$  avec  $N$  nilpotente et  $D$  diagonale formée uniquement de 0 et de 1.

Donc  $|\lambda_0| = 1$  dans le lemme 1 et  $\theta = 0$ .

*Second cas* :  $\pi(\ell) = 2$ .

Soit  $k$  un sommet de type 2 précédant  $\ell$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $V(r^p, k) \geq 1$ .

Soit  $p' \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad V(r^{n+p'}, \ell) \geq V(r^n, k)$  (par exemple  $p' = |\text{longueur du plus court chemin reliant } k \text{ à } \ell \text{ dans } G|$ ,  $k$  étant de type 2, il existe au moins 2 chemins distincts (de longueurs  $f_1$  et  $f_2$ ) joignant  $k$  à  $k$ ).

Posons  $f = f_1 f_2$ .

On a alors pour tout entier  $n$  :

$$V(r^{p+nf}, k) \geq 2^n V(r^p, k).$$

Or  $\forall m \in \mathbb{N}, \exists ! n \in \mathbb{N}, p + p' + nf \leq m < p + p' + (n+1)f$ .

Pour ce couple  $(m, n)$  on a  $V(r^m, \ell) \geq 2^n$  et

$$\frac{\log V(r^m, \ell)}{m} \geq \frac{n \log 2}{m} \geq \frac{m - p - p' - f}{mf} \log 2$$

d'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log V(r^m, \ell)}{m} \geq \frac{\log 2}{f} > 0$$

ce qui implique  $\theta > 0$  dans le lemme 1.

C.Q.F.D.

*Remarque.* —  $\frac{1}{r} \cdot M$  étant une matrice stochastique, on en déduit que la CNS pour que  $\theta = 1$  est que  $\ell$  soit un état récurrent de l'automate (cf. [13], p. 19). En particulier, si  $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$  est la suite d'entiers que l'on étudie, la CNS pour que  $u_n \in O(n)$  est que l'un au moins des états qui reconnaît  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit récurrent.

LEMME 3 (avec les notations du lemme 1). — Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux sommets de  $G$ . Si  $\ell \sim \ell'$  alors  $\beta(\ell) = \beta(\ell')$  et  $\theta(\ell) = \theta(\ell')$ .



*Démonstration.* — Puisque  $\ell \sim \ell'$ , il existe un chemin de longueur  $p$  (resp.  $p'$ ) reliant  $\ell$  à  $\ell'$  (resp.  $\ell'$  à  $\ell$ ).

Il existe donc des réels  $\alpha(\ell)$ ,  $\alpha'(\ell)$ ,  $\alpha(\ell')$ ,  $\alpha'(\ell')$  tels que pour  $n$  assez grand

$$0 \leq \alpha(\ell) n^{\beta(\ell)} r^{n\theta(\ell)} \leq V(r^n, \ell) \leq V(r^{n+p}, \ell') \leq \alpha'(\ell')(n+p)^{\beta(\ell')} r^{(n+p)\theta(\ell')}$$

$$0 \leq \alpha(\ell') n^{\beta(\ell')} r^{n\theta(\ell')} \leq V(r^n, \ell') \leq V(r^{n+p'}, \ell) \leq \alpha'(\ell)(n+p')^{\beta(\ell)} r^{(n+p')\theta(\ell)}.$$

D'où en faisant tendre  $n$  vers l'infini  $\theta(\ell) = \theta(\ell')$  puis  $\beta(\ell) = \beta(\ell')$ .  
C.Q.F.D.

*Remarque.* — De la même façon on démontre que, si  $\ell \leq \ell'$  alors  $\theta(\ell) \leq \theta(\ell')$ , et si de plus  $\theta(\ell) = \theta(\ell')$ , alors  $\beta(\ell) \leq \beta(\ell')$ .

**THÉORÈME 1.** — Soit  $\ell$  un sommet de  $G$  de poids 2.

Alors pour tout  $\xi$  irrationnel, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x, \ell, \xi)}{V(x, \ell)} = 0.$$

*Démonstration.* — Nous allons démontrer ce théorème par récurrence sur  $v(\ell) \in \mathbb{N}^*$ .

*Étape 1 :*  $v(\ell) = 1$ .

D'après le calcul préliminaire, on a pour tout entier  $N$  :

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{k \in A} M_{\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B_N(x, \ell, \xi) \\ &= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B'_N(x, \ell, \xi) \end{aligned}$$

avec  $|B'_N(x, \ell, \xi)| \leq 2(r^N - 1)$ .

Considérons maintenant  $(\beta, \theta)$  tel que pour tout sommet  $k$  de  $\mathcal{I}$ ,  $V(x, k) \approx (\log x)^\beta x^\theta$  (cf lemmes 1 et 3) et posons

$$\begin{aligned} W(x, k, \xi) &= \frac{V(x, k, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta} \\ W(x, k) &= W(x, k, 0). \end{aligned}$$

On obtient, pour tout entier  $N$  :

$$W(x, \ell, \xi) = \left( \frac{\log \frac{x}{r^N}}{\log x} \right)^\beta \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} \frac{M_{k'}^{(N)}(\xi)}{r^{N\theta}} W\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + \frac{B'_N(x, \ell, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta}.$$

Soit  $\alpha$  tel que pour  $x$  assez grand

$$\sup_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} W\left(\frac{x}{r^N}, k\right) \leq \alpha.$$

Alors, pour tout entier  $N$  et pour  $x$  assez grand :

$$|W(x, \ell, \xi)| \leq \alpha \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} \left| \frac{M_{k'}^{(N)}(\xi)}{r^{N\theta}} \right| + \frac{2r^N}{(\log x)^\beta x^\theta}$$

d'où, en posant  $W(\ell, \xi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |W(x, \ell, \xi)|$ ,

$$A(\xi) = \frac{M[\mathcal{J}](\xi)}{r^\theta},$$

et pour tout entier  $n$

$$A^{(n)}(\xi) = A(\xi) A(r\xi) \dots A(r^{n-1}\xi).$$

Pour tout entier  $N$  :

$$\begin{aligned} w(\ell, \xi) &\leq \alpha \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} |A_{k'}^{(N)}(\xi)| \\ &\leq \alpha \|A^{(N)}(\xi)\|_\infty. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer que si  $\pi(\ell) = 2$  et  $\xi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$   $\lim_{N \rightarrow \infty} A^{(N)}(\xi) = 0$ , ce qui nous permettra d'achever notre démonstration pour le cas  $v(\ell) = 1$ .

Pour tout  $x$  réel, posons :

$$\begin{aligned} A(x) &= (a_{ij}(x))_{(i,j) \in \mathcal{I}^2} \\ A^{(n)}(x) &= (a_{ij}^{(n)}(x))_{(i,j) \in \mathcal{I}^2} \end{aligned}$$

avec, comme d'habitude :

$$a_{ij}(0) = a_{ij} \quad \text{et} \quad a_{ij}^{(n)}(0) = a_{ij}^{(n)}.$$

Comme  $\gamma(\mathcal{Z}) \geq 2$ , il existe au moins deux circuits fermés sur le sommet  $\ell$ . Soit  $g$  le p.p.c.m. des longueurs de ces boucles. Quitte à travailler sur le  $r^g$ -automate  $\mathcal{A}_g$ , on peut supposer que  $g = 1$ .

On a donc

$$M_{\ell\ell}(\xi) = e(p_1\xi) + \dots + e(p_t\xi)$$

avec  $t \geq 2$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, t\}$   $p_i \in \mathbf{N}$  et  $p_1 \neq p_2$ .

$\xi$  étant irrationnel, il existe alors un  $\delta$  dans  $]0,1[$  et une suite  $(N_k)_{k \in \mathbf{N}}$  d'entiers tels que :

$$|e(p_1 \cdot r^{N_k} \cdot \xi) + \dots + e(p_t \cdot r^{N_k} \cdot \xi)| \leq (1-\delta)t$$

c'est-à-dire tels que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad 0 < |a_{\ell\ell}(r^{N_k} \cdot \xi)| \leq (1-\delta)a_{\ell\ell}.$$

Pour tout sommet  $i$  de  $\mathcal{Z}$  il existe un chemin de longueur  $\zeta(i)$  allant de  $\ell$  à  $i$  et un chemin de longueur  $\eta(i)$  allant de  $i$  à  $\ell$ .

Ainsi, quitte à rajouter à ces chemins des boucles (de longueur 1) sur le sommet  $\ell$ , il existe  $(\zeta, \eta)$  indépendant de  $i$  tel qu'il existe :

- un chemin de longueur  $\zeta$  allant de  $\ell$  à  $i$ ,
- un chemin de longueur  $\eta$  allant de  $i$  à  $\ell$ .

Posons  $\kappa = \zeta + \eta + 1$ . On a, pour tout entier  $k$  et pour tout  $(i,j)$  dans  $\mathcal{Z}^2$  :

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta\xi}) &= [A^{(\eta)}(r^{N_k - \eta\xi})A(r^{N_k\xi})A^{(\zeta)}(r^{N_k + 1\xi})]_{ij} \\ &= a_{\ell\ell}^{(\eta)}(r^{N_k - \eta\xi})a_{\ell\ell}(r^{N_k\xi})a_{ij}^{(\zeta)}(r^{N_k + 1\xi}) \\ &\quad + \sum_{(\lambda, \mu) \neq (\ell, \ell)} a_{i\lambda}^{(\eta)}(r^{N_k - \eta\xi})a_{\lambda\mu}(r^{N_k\xi})a_{\mu j}^{(\zeta)}(r^{N_k + 1\xi}). \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad |a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta\xi})| \leq a_{ij}^{(\kappa)} - \delta a_{\ell\ell}^{(\eta)} a_{\ell\ell}^{(\zeta)},$$

$$\text{or} \quad r^{\theta} a_{\ell\ell} \geq 1, \quad r^{\eta\theta} a_{\ell\ell}^{(\eta)} \geq 1, \quad r^{\zeta\theta} a_{\ell\ell}^{(\zeta)} \geq 1,$$

et par conséquent

$$|a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta\xi})| \leq a_{ij}^{(\kappa)} - \frac{\delta}{r^{\kappa\theta}} \leq C \cdot a_{ij}^{(\kappa)}$$

où  $C \in ]0,1[$ .

On en déduit, par récurrence sur  $n$ , qu'il existe un entier strictement positif  $\kappa$  et qu'il existe  $C$  dans  $]0,1[$  tels que pour tout  $n \geq \kappa$  et pour tout  $(i,j)$  dans  $\mathcal{Z}^2$ , on a :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad |a_{ij}^{(n)}(r^{N_k - \eta\xi})| \leq C \cdot a_{ij}^{(n)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , on peut supposer que pour tout entier  $k$ , on a

$$\begin{aligned} N_{k+1} - N_k &\geq \kappa. \\ N_0 &\geq \eta. \end{aligned}$$

On a alors pour tout  $(i, j)$  dans  $\mathcal{Z}^2$  et pour tout entier  $k$  :

$$\begin{aligned} |a_{ij}^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi})| &\leq \sum_{\substack{i_1 \in \mathcal{Z} \\ \vdots \\ i_{k-1} \in \mathcal{Z}}} |a_{ii_1}^{(N_1 - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi})| \dots |a_{i_{k-1}j}^{(N_k - N_{k-1})}(r^{N_{k-1} - \eta\xi})| \\ &\leq C^k \cdot a_{ij}^{(N_k - N_0)}. \end{aligned}$$

D'après la remarque 1 du lemme 1,  $A(0)$  est une matrice irréductible de rayon spectral inférieur à 1, et par conséquent il existe  $a > 0$  tel que pour tout entier  $n$ ,  $\|A^n(0)\|_\infty \leq a$ .

D'autre part, on vient de voir que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N} / \|A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi})\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

Donc pour  $N \geq N_k - \eta$ ,

$$A^{(N)}(\xi) = A^{(N_0 - \eta)}(\xi) A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi}) A^{(N_k - \eta\xi)} \dots A^{(N - N_k + \eta\xi)}$$

et

$$\begin{aligned} \|A^{(N)}(\xi)\|_\infty &\leq \|A^{(N_0 - \eta)}(0)\|_\infty \|A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi})\|_\infty \|A^{(N - N_k + \eta)}(0)\|_\infty \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

*Étape 2 :* Supposons le théorème démontré pour tout sommet  $k$  tel que  $v(k) < v$  et donnons-nous un sommet  $\ell$  tel que  $v(\ell) = v$  :

$$V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta \quad \text{avec} \quad (\beta, \theta) \in \mathbb{N} \times ]0, 1].$$

On a pour tout entier  $N$  :

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell \\ \pi(k)=1}} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \\ &+ \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell \\ \pi(k)=2}} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \\ &+ \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \\ &+ B'_N(x, \ell, \xi), \quad \text{avec} \quad |B'_N(x, \ell, \xi)| \leq 2(r^N - 1). \end{aligned}$$

Or, on remarque que :

– si  $k < \ell$  et  $\pi(k) = 1$

$$\left| V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \right| \leq V\left(\frac{x}{r^N}, k\right) \leq V(x, k) \in o((\log x)^\beta x^\theta)$$

car d'après le lemme 2,  $\theta(k) = 0$ ,

– si  $k < \ell$  et  $\pi(k) = 2$ ,

alors, par hypothèse de récurrence,

$$V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \in o((\log x)^{\beta(k)} x^{\theta(k)}).$$

Mais d'après la remarque du lemme 3, on a

$$o((\log x)^{\beta(k)} x^{\theta(k)}) \subset o((\log x)^\beta x^\theta).$$

D'où pour tout entier  $N$  :

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \quad \text{mod } o((\log x)^\beta x^\theta).$$

Si  $\gamma(\ell) \geq 2$ , on procède comme pour l'étape 1.

Si  $\gamma(\ell) = 1$ , soit  $g$  la longueur de la boucle sur le sommet  $\ell$

$$V(x, \ell, \xi) = M_{\ell}^{(g)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^g}, \ell, r^g \xi\right) \quad \text{mod } o((\log x)^\beta x^\theta).$$

On a donc

$$\left| \frac{V(x, \ell, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta} \right| \leq \frac{\left| V\left(\frac{x}{r^g}, \ell, r^g \xi\right) \right|}{\left( \log \frac{x}{r^g} \right)^\beta \left( \frac{x}{r^g} \right)^\theta} \left( \frac{\log \frac{x}{r^g}}{\log x} \right)^\beta \frac{1}{r^{\theta g}} \quad \text{mod } o(1)$$

et par conséquent, en posant

$$w(\ell, \xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x, \ell, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta}$$

on obtient  $w(\ell, \xi) \leq \frac{w(\ell, \xi)}{r^{\theta g}}$  d'où  $w(\ell, \xi) = 0$  puisque  $\theta > 0$ .

C.Q.F.D.

*Remarques.* — 1) Si  $x \in \mathbb{Q}$ , la suite  $(u_n \cdot x)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est évidemment pas équirépartie modulo un.

2) Si  $\text{Card} \{\ell; \tau(\ell)=1\} > 1$  (c'est-à-dire si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est reconnue par plusieurs états de  $\mathcal{A}$ ) alors l'étude précédente nous montre que si

$$L = \{\ell; \tau(\ell)=1, \pi(\ell)=2\}, \quad \theta = \sup_{\ell \in L} \theta(\ell) \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{\substack{\ell \in L \\ \theta(\ell)=\theta}} \beta(\ell)$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\tau(\ell)=1} V(x, \ell, \xi)}{\sum_{\tau(\ell)=1} V(x, \ell)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\ell \in L} V(x, \ell, \xi)}{x^\theta (\log x)^\beta} = 0.$$

On en déduit le résultat suivant :

**COROLLAIRE.** — Pour que l'ensemble normal associé à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reconnaissable par l'automate  $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$  soit exactement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , il suffit qu'il existe  $\ell$  dans  $A$  tel que  $\tau(\ell) = 1$  et  $\pi(\ell) = 2$ .

*Exemple 7.* — Les suites de Morse et de Baum-Sweet ont pour ensemble normal  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

#### 4. Théorème réciproque.

Nous allons maintenant démontrer que cette condition est en fait nécessaire, ce qui nous permettra d'énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reconnaissable par l'automate  $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$  soit exactement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est qu'il existe  $\ell$  dans  $A$  tel que  $\tau(\ell) = 1$  et  $\pi(\ell) = 2$ .

Ce théorème va découler des deux propositions suivantes.

**PROPOSITION 1.** — Si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite reconnaissable par un  $r$ -automate  $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$  telle que

$$(\forall \ell \in A), \quad (\tau(\ell) = 1 \Rightarrow \pi(\ell) < 2)$$

alors  $u$  est réunion d'un nombre fini  $P$  de suites  $u^p$   $p \in \{1, \dots, P\}$  de la forme

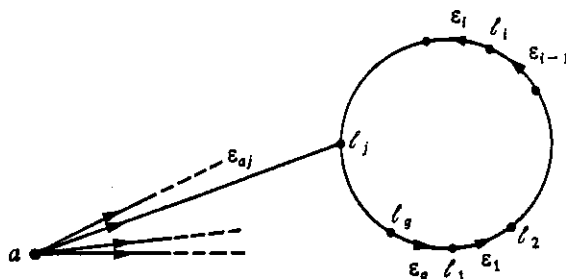
$$\{q_1^p r^{(N_1 g_1^p + \dots + N_v g_v^p + v - 1)} + \dots + q_v^p r^{N_v g_v^p} + q_{v+1}, \quad (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v\}$$

où  $v \in \mathbb{N}^*$ ,  $(g_1^p, \dots, g_v^p) \in \mathbb{N}^v$  et  $(q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbb{Q}^{v+1}$ .

*Démonstration.* — Nous allons démontrer cette proposition par récurrence sur  $v = \sup_{\tau(\ell)=1} v(\ell)$ .

*Étape 1 :*  $v = 1$ .

On a donc à examiner le cas d'une boucle  $(\ell_1, \dots, \ell_g)$  du type suivant :



Posons

$$I = \{i \in \{1, \dots, g\}; \tau(\ell_i) = 1\}$$

et

$$J = \{j \in \{1, \dots, g\}; M_{a, j} \neq 0\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des  $j$  tels qu'existe une relation du type

$$a \xrightarrow{\varepsilon_{aj}} \ell_j.$$

Les mots qui nous permettent de passer de l'état  $a$  à un état  $\ell_i$ ,  $i \in I$  sont les suivants (les indices étant définis modulo  $g$ ):

$$\{\varepsilon_{aj} \varepsilon_j \dots \varepsilon_{i-1} \overbrace{\varepsilon_i \dots \varepsilon_{i-1}}^{N_1 \text{ fois}}, N_1 \in \mathbf{N}, (i, j) \in I \times J\}.$$

Posons maintenant pour tout  $(i, j) \in I \times J$ :

$$\begin{aligned} t_i &= r^{g-1} \varepsilon_i + \dots + \varepsilon_{i-1} \\ d = d(i, j) &= i - j \quad \text{si } j \leq i \\ &= g - (j - i) \quad \text{si } j > i \\ s_{i, j} &= r^d \varepsilon_{aj} + r^{d-1} \varepsilon_j + \dots + \varepsilon_{i-1}. \end{aligned}$$

Alors les mots précédents correspondent aux entiers

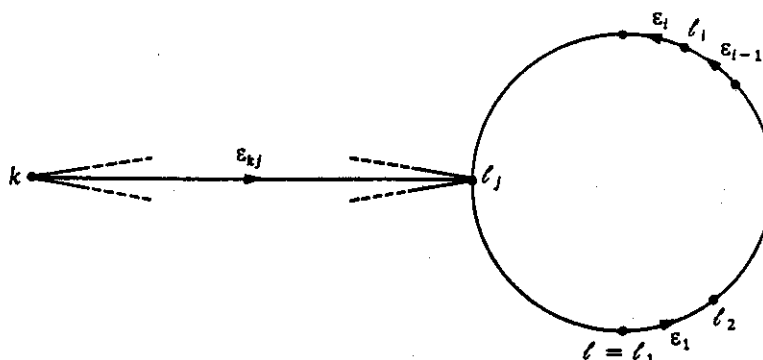
$$\left\{ r^{N_1 g} s_{i, j} + \frac{r^{N_1 g} - 1}{r^g - 1} t_i, N_1 \in \mathbf{N}, (i, j) \in I \times J \right\}.$$

On en déduit, en procédant de même pour les autres boucles éventuelles

telles que  $v(\mathcal{L}) = 1$ , que  $u$  est réunion d'un nombre fini  $P$  de suites  $u^p$   $p \in \{1, \dots, P\}$  de la forme

$$\{q_1^p r^{N_1 s^p} + q_2^p, N_1 \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad (q_1^p, q_2^p) \in \mathbb{Q}^2.$$

*Étape 2 :* Supposons la proposition démontrée jusqu'à l'ordre  $(v-1)$  et considérons une boucle  $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_g\}$  telle que  $v(\mathcal{L}) = v$ .



Posons  $I = \{i \in \{1, \dots, g\}, \tau(\ell_i) = 1\}$ .

Soit  $k$  un sommet précédant  $\ell$  dans  $G$  (c'est-à-dire tel que  $k < \ell$ ).

Notons  $J(k) = \{j \in \{1, \dots, g\}, M_{kj} \neq 0\}$  l'ensemble des  $j$  tels qu'existe une relation du type

$$k \xrightarrow{\varepsilon_{kj}} \ell_j.$$

L'ensemble  $E$  des mots qui permettent de passer à l'état  $a$  à un état  $\ell_i$ ,  $i \in I$ , s'exprime en fonction de l'ensemble des mots  $m(a,k)$  qui permettent de passer de l'état  $a$  à un état  $k$ ,  $k < \ell$ , de la façon suivante :

$$E = \bigcup_{k < \ell} \{m(a,k) \varepsilon_{kj} \varepsilon_j \dots \varepsilon_{i-1} \overbrace{\varepsilon_i \dots \varepsilon_{i-1}}^{N_v \text{ fois}}, \\ N_v \in \mathbb{N}, (i,j) \in I \times J(k), \varphi(a.m(a,k)) = k\}.$$

Posons maintenant pour tout  $(i,j) \in I \times J(k)$  :

$$t_i = r^{g-1} \varepsilon_i + \dots + \varepsilon_{i-1} \\ d = d(i,j) = i - j \quad \text{si } j \leq i \\ \quad \quad \quad = g - (j-1) \quad \text{si } j > i \\ s_{ij}^k = r^d \varepsilon_{kj} + r^{d-1} \varepsilon_j + \dots + \varepsilon_{i-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, les mots  $m(a,k)$  correspondent à la réunion



d'un nombre fini  $P_1$  de suites d'entiers  $v^p$ ,  $p \in \{1, \dots, P_1\}$  :

$$\{q_1^p r^{(N_1 s_1^p + \dots + N_{v-1} s_{v-1}^p + v - 2)} + \dots \\ + q_{v-1}^p r^{N_{v-1} s_{v-1}^p} + q_v^p, \quad (N_1, \dots, N_{v-1}) \in \mathbb{N}^{v-1}\}.$$

On en déduit que l'ensemble  $E$  correspond à la réunion d'un nombre fini  $P_2$  de suites d'entiers  $u^p$ ,  $p \in \{1, \dots, P_2\}$  :

$$\{q_1^p r^{(N_1 s_1^p + \dots + N_{v-1} s_{v-1}^p + N_v s_v^p + v - 1)} + \dots \\ + \left( q_v^p r^{d+1} + s_{ij}^k + \frac{t_i}{r^{s^p} - 1} \right) r^{N_v s_v^p} - \frac{t_i}{r^{s^p} - 1}, \quad (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v\}.$$

On procède de même pour les autres boucles telles que  $v(\ell) = v$ . Enfin, en complétant les  $P_3$  suites  $u^p$  ainsi obtenues par les suites obtenues sur les sommets  $\ell$  tels que  $v(\ell) < v$ , on en déduit que  $u$  est réunion d'un nombre fini  $P$  de suites  $u^p$   $p \in \{1, \dots, P\}$  de la forme

$$\{q_1^p r^{(N_1 s_1^p + \dots + N_v s_v^p + v - 1)} + \dots + q_v^p r^{N_v s_v^p} + q_{v+1}^p, (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v\}$$

avec  $(q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbb{Q}^{v+1}$ , et la proposition 1 est ainsi démontrée par récurrence.

C.Q.F.D.

**PROPOSITION 2.** — *Si  $u$  est de la forme indiquée par la proposition 1, alors l'ensemble des  $\xi \in \mathbb{R}$  tels que  $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas équirépartie modulo un  $a$  la puissance du continu.*

*Démonstration.* — Quitte à remplacer pour tout  $p \in \{1, \dots, P\}$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, v\}$   $g_i^p$  par  $\frac{g_i^p}{\text{pgcd}(g_1^p, \dots, g_v^p)}$  et à poser  $r_p = r^{\text{pgcd}(g_1^p, \dots, g_v^p)}$ , on peut supposer que  $u$  est réunion de  $P$  suites  $u^p$  de la forme

$$\{q_1^p r^{v-1} r_p^{(s_1^p N_1 + \dots + s_v^p N_v)} + \dots + q_v^p r_p^{s_v^p N_v} + q_{v+1}^p, (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v\}$$

où  $v \in \mathbb{N}^*$ ,  $(q_1^p, \dots, q_v^p) \in \mathbb{N}^v$  et  $(q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbb{Q}^{v+1}$  avec  $q_1^p \neq 0$  (quitte à modifier la numérotation des suites  $u^p$ ) et  $q_{v+1}^p = 0$  (quitte à opérer une translation sur  $\mathbb{R}$ ) et pour tout  $p \in \{1, \dots, P\}$   $\text{pgcd}(g_1^p, \dots, g_v^p) = 1$ .

Posons  $q = v \cdot \sup_i |q_i^1 r^{v-i}|$  et pour tout  $h \in \mathbb{N}^*$  :

$$H = \{\xi \in \mathbb{R}; \xi = \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon_i}{r^{ih}}, \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}.$$

Nous allons montrer que pour  $h$  assez grand, l'ensemble  $H$  (qui a la puissance du continu) est inclus dans l'ensemble des  $\xi \in \mathbf{R}$  tels que  $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbf{N}}$  ne soit pas équirépartie modulo un.

Cela va résulter des quatre remarques suivantes :

1) Si  $\{x\}$  désigne la partie fractionnaire de  $x$ , on a pour tout  $(h, \xi)$  dans  $\mathbf{N}^* \times H$  :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \{r_1^{nh} \cdot \xi\} \leq r^{1-h}.$$

On a en effet en posant  $d = \frac{\log r_1}{\log r}$

$$\begin{aligned} \{r_1^{nh} \cdot \xi\} &= \left\{ r^{dnh} \cdot \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon_i}{r^{ih}} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i > dn} \frac{\varepsilon_i}{r^{(i-dn)h}} \right\} \leq \sum_{i \geq 1} \frac{1}{r^{ih}} = \frac{1}{r^h - 1}. \end{aligned}$$

On en déduit, en posant  $\chi = 1_{[0, q \cdot r^{1-h}]}$  fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, q \cdot r^{1-h}]$ , pour tout  $(h, \xi)$  dans  $\mathbf{N}^* \times H$  :

$$\begin{aligned} \forall (N_1, \dots, N_v) \in \mathbf{N}^v, \\ \chi(\{(q_1^1 r^{v-1} r_1^{g_1^1 N_1 + \dots + g_v^1 N_v} h + \dots + q_v^1 r_1^{g_v^1 N_v} h) \cdot \xi\}) = 1. \end{aligned}$$

2) Pour tout  $p$  dans  $\{1, \dots, P\}$  désignons par  $\varphi_p(n)$  le nombre de solutions dans  $\mathbf{N}^v$  de l'équation  $g_1^p N_1 + \dots + g_v^p N_v = n$ .

De même désignons par  $\psi_p(n)$  le nombre de solutions dans  $\mathbf{N}^v$  de l'inéquation  $g_1^p N_1 + \dots + g_v^p N_v < n$ .

Le développement en série entière de

$$\sum_{n \geq 0} \varphi_p(n) X^n = (1 - X^{g_1^p})^{-1} \dots (1 - X^{g_v^p})^{-1} \quad \text{pour } |X| < 1$$

nous montre que

$$\varphi_p(n) \sim \frac{n^{v-1}}{g_1^p \dots g_v^p (v-1)!},$$

on en déduit que

$$\psi_p(n) \sim \frac{n^v}{g_1^p \dots g_v^p \cdot v!}.$$

Considérons maintenant l'entier  $Q(n)$  tel que

$$u_{Q(n)} = q_1^1 r^{v-1} r_1^n + q_2^1 r^{v-2} + \dots + q_v^1$$

et soit  $(a,b) \in \mathbb{N}^2$  tel que pour tout  $p$  dans  $\{1, \dots, P\}$  :

$$u_{Q(n)} \leq q_1^p r^{v-1} r_p^{an+b} + q_2^p r^{v-2} + \dots + q_v^p.$$

On a alors  $Q(n) \leq \psi(an+b)$  avec  $\psi(n) = \sum_{p=1}^P \psi_p(n)$ .

D'autre part, soit  $c \in \mathbb{N}$  tel que

$$q_1^1 r^{v-1} r_1^c \geq q_1^1 r^{v-1} + \dots + q_v^1,$$

alors pour tout  $h$  dans  $\mathbb{N}^*$

$$u_{Q(hn+c)} \geq q_1^1 r^{v-1} r_1^{hn} + \dots + q_v^1 r_1^{hn}$$

et d'après la première remarque

$$\sum_{m < Q(hn+c)} \chi(\{u_m \cdot \xi\}) \geq \sum_{m < n} \varphi_1(m) = \psi_1(n).$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Q(hn+c)} \sum_{m < Q(hn+c)} \chi(\{u_m \cdot \xi\}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(n)}{\psi(ahn+ac+b)} = \frac{1}{C \cdot h^v}$$

$$\text{avec } C = g_1^1 \dots g_v^1 a^v \sum_{p=1}^P \frac{1}{g_1^p \dots g_v^p} \in \mathbb{R}^{+*}.$$

4) Si  $(u_n, \xi)$  était équirépartie modulo un, on aurait

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \chi(\{u_n \cdot \xi\}) = q \cdot r^{1-h}.$$

et il suffit donc de choisir  $h$  assez grand pour que  $\frac{1}{C \cdot h^v} > q \cdot r^{1-h}$  de façon à aboutir à une contradiction.

C.Q.F.D.

Pour toute suite  $u$  reconnaissable par un automate fini, posons

$$V(N) = \text{Card} \{n < N; n \in u\}.$$

Les lemmes 1 et 2 nous permettent de déduire du théorème 2 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à la suite  $u$  soit exactement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est que :

$$V(N) \approx (\log N)^{\beta} N^{\theta} \quad \text{avec } (\beta, \theta) \in \mathbb{N} \times ]0, 1].$$

THÉORÈME 3. — Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à une suite reconnaissable par un automate fini soit exactement  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  est que cette suite n'ait pas une croissance de type exponentiel.

Exemple 8. — Soit  $m_0 < m_1 < \dots < m_n < \dots$  la suite de Morse et soit  $b_0 < b_1 < \dots < b_n < \dots$  la suite de Baum-Sweet. Alors l'ensemble normal associé à la suite  $(m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}}$  est exactement  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .

En effet soit

$$f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} X^{m_{b_n}} \text{ la série formelle associée à la suite } (m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}};$$

on a

$$f(X) = \sum_{v(\text{rg}(n))=b} \chi(n) X^n$$

où  $\chi$  fonction indicatrice de la suite de Morse vérifie pour tout entier  $n$

$$\begin{aligned} \chi(2n) &= \chi(n) & \text{si } n > 0 \\ \chi(2n+1) &= 1 - \chi(n) & \text{si } n \geq 0 \\ \chi(0) &= 0 \end{aligned}$$

et où

$$\text{rg}(n) = \sum_{p \leq n} \chi(p) - 1$$

en particulier on a  $\text{rg}(2n) = n + \chi(n) - 1$  et  $\text{rg}(2n+1) = n$  ce qui nous montre que

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{v(n)=b} \chi(n) X^{2n} + X \sum_{v(n)=b} (1 - \chi(n)) X^{2n} \\ &= f_1(X^2) + X f_2(X^2) \end{aligned}$$

où  $f_1(X)$  (resp.  $f_2(X)$ ) est la série formelle associée à la suite croissante des entiers qui font partie à la fois de la suite de Baum-Sweet et de la suite de Morse (resp. qui font partie de la suite de Baum-Sweet, mais pas de la suite de Morse).

Ces deux suites étant 2-reconnaissables  $f_1(X)$  et  $f_2(X)$  sont deux éléments de  $\mathbf{F}_2[[X]]$  algébriques sur  $\mathbf{F}_2(X)$  (cf [6]) et par conséquent  $f(X) = (f_1(X))^2 + X(f_2(X))^2$  est algébrique sur  $\mathbf{F}_2(X)$ .

La suite  $(m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}}$  est donc 2-reconnaissable et comme de plus  $m_{b_n} \in O(n^{\log_2 \theta^2})$  avec  $\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , son ensemble normal est  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .

De la même façon, on a plus généralement :

**COROLLAIRE :** — Soit  $m_0 < m_1 < \dots < m_n < \dots$  la suite de Morse et soit  $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$  une suite reconnaissable par un 2-automate. Alors l'ensemble normal associé à la suite extraite  $(m_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est exactement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  si et seulement si la suite  $u$  n'a pas une croissance de type exponentiel.

D'autre part, le théorème 3 nous montre que les exemples suivants constituent les cas typiques de suites reconnaissables par un automate fini dont l'ensemble normal est strictement inclus dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  :

*Exemple 9 :* La suite croissante des entiers de la forme  $3^n$  ou  $2 \cdot 3^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

*Exemple 10 :* La suite croissante des entiers de la forme

$$2^{n_1+n_2+1} + 2^{n_2} \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2.$$

*Exemple 11 :* La suite croissante des entiers de la forme

$$2 \cdot 4^{n_1} 8^{n_2} + 8^{n_2} \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Par ailleurs, il est facile de montrer que l'ensemble normal associé à la suite de l'exemple 9 (resp. exemple 10) est l'ensemble des nombres normaux en base 3 (resp. en base 2).

Ceci nous conduit à poser la conjecture suivante :

*Conjecture.* — L'ensemble normal associé à une suite reconnaissable par un  $r$ -automate est soit  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  soit l'ensemble des nombres normaux en base  $r$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. P. ALLOUCHE, *Théorie des nombres et automates*, Thèse d'État, 1983, Université de Bordeaux I.
- [2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, 1973, Dunod.
- [3] J. BERSTEL, Sur les mots sans carré définis par un morphisme, *Springer Lecture Notes in Computer Science*, 71 (1979), 16-25.
- [4] J. BERSTEL, *Mots infinis. Théorie des langages et complexité des algorithmes*, Journées d'Avignon, oct. 1983.
- [5] G. CHRISTOL, Ensembles presque-périodiques  $k$ -reconnaissables, *Theoretical Computer Science*, 9 (1979), 141-145.

- [6] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, 108 (1980), 401-418.
- [7] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE et G. RAUZY, Spectral properties of automaton-generating sequences (communication privée).
- [8] A. COBHAM, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory*, vol. 6, n° 2 (1972), 164-192.
- [9] J. COQUET, Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition, *Journ. of Number Theory*, vol. 16, n° 3 (1983), 363-375.
- [10] J. COQUET et P. LIARDET, A metric study involving independent sequences (à paraître).
- [11] F. M. DEKKING, Regularity and irregularity of sequences generated by automata. Séminaire de théorie des nombres, 1979-80, Université de Bordeaux I.
- [12] S. EILENBERG, *Automata, languages and machines*, vol. A, 1974, Academic Press.
- [13] D. FREEDMAN, *Markov chains*, 1971, Holden-Day.
- [14] F. HARARY, *Graph theory*, 1969, Addison-Wesley.
- [15] L. KUIPERS et N. NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, 1974, John Wiley and Sons.
- [16] J. H. LOXTON et A. J. VAN DER POORTEN, Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations. *J. Reine und Angew. Math.*, t. 330 (1982), 159-172.
- [17] C. MAUDUIT, Automates finis et équirépartition modulo un, *C.R. A. S.*, Paris, t. 299, série I, n° 5 (1984), 121-123.
- [18] M. MENDÈS-FRANCE et A. J. VAN DER POORTEN, Arithmetic and analytic properties of paper folding sequences, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 24 (1981), 123-131.
- [19] M. QUEFFELEC, *Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques*, Thèse d'État, 1984, Université de Paris-Nord.
- [20] G. RAUZY, *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, 1976, Presses Universitaires de France.
- [21] G. RAUZY, *Des mots en arithmétique. Théorie des langages et complexité des algorithmes*, Journées d'Avignon, oct. 1983.
- [22] R. C. READ, *Graph theory and computing*. 1972, Academic Press.
- [23] R. S. VARGA, *Matrix iterative analysis*. 1962, Prentice-Hall.

Manuscrit reçu le 12 février 1985  
révisé le 16 avril 1985.

Christian MAUDUIT,  
Université d'Aix-Marseille II  
U.E.R. Mathématique-Informatique  
70, route Léon-Lachamp, Luminy  
13288 Marseille Cedex 2.

## MORPHISMES UNISPECTRAUX

Christian MAUDUIT

*Centre Scientifique IBM France, 75116 Paris, France, and UER Mathématiques Informatique,  
Université d'Aix-Marseille II, 13228 Marseille Cedex 2, France*

Communicated by D. Perrin

Received July 1985

Revised March 1986

**Résumé.** Le but de cette étude est de déterminer le support des morphismes sur un alphabet  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$  dont le rayon spectral de la matrice associée vaut 1. On caractérise tout d'abord ces morphismes (appelés unispectraux) à l'aide de leur graphe, puis on démontre que si  $s$  est point fixe d'un tel morphisme, alors le support de  $s$  (ou le complémentaire dans  $\mathbb{N}$  de celui-ci) est une réunion finie d'ensembles de la forme  $\{P_{g-1}^0(n) + P_{g-1}(n_1) + \dots + P_{g-i+1}(n_{i-1}) \mid n_{i-1} < \dots < n_1 < n, n \in \mathbb{N}\}$ , où  $i \geq 2$  et  $\forall j \in \{1, \dots, i-1\}$ :  $P_{g-1}^0$  (respectivement  $P_{g-j}$ ) est un polynôme à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à  $g-1$  (respectivement  $g-j$ ). On en déduit que l'ensemble normal associé au support d'un point fixe d'un morphisme unispectral est exactement  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ .

### Introduction

Issue de la théorie des langages formels (cf. [1, 8, 9, 13, 19, 26, 27, 28, 29]), la notion de morphisme ou de substitution, sous-jacente à celles de pavage et de fractal (cf. [5, 7, 18, 23]) est au centre d'un grand nombre de recherches dans différents domaines des mathématiques, de l'informatique et de la physique.

Citons par exemple l'étude des systèmes dynamiques associés aux substitutions (cf. [6, 10, 11, 12, 15, 16, 20, 21]), ainsi que l'étude des propriétés arithmétiques des suites d'entiers engendrées par des automates finis ou par des substitutions de longueur non constante (cf. [2, 3, 4, 14, 17, 22, 23, 24, 25]).

Dans [17] nous avons étudié les propriétés statistiques des points fixes des morphismes de longueur constante et nous nous intéressons maintenant au cas des morphismes de longueur non constante.

Dans ce travail, on caractérise les morphismes, appelés 'unispectraux', dont le rayon spectral de la matrice associée vaut exactement 1, et qui sont donc en un certain sens minimaux.

En particulier, nous montrons que si un morphisme unispectral sur un alphabet  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$  admet un point fixe  $s$ , alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, g-1\}$ , l'ensemble des rangs d'apparition de la lettre  $a_i$  dans le mot infini  $s$  est une réunion finie d'ensembles de la forme

$$\{P_{g-1}^0(n) + P_{g-1}(n_1) + \dots + P_{g-i+1}(n_{i-1}) \mid n_{i-1} < \dots < n_1 < n, n \in \mathbb{N}\},$$

où  $P_{g-1}^0$  (respectivement  $P_{g-j}$ ) est un polynôme à coefficients rationnels de degré inférieur à  $g-1$  (respectivement  $g-j$ ).

### 1. Définitions et notations

Dans toute cette étude,  $g$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et  $A$  un alphabet à  $g$  lettres  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$ . Si  $k \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $A^k$  l'ensemble des mots de longueur  $k$  et on pose  $A^* = \bigcup_{k \geq 0} A^k$ . Si  $m \in A^*$  et si  $i \in \{1, \dots, g\}$ , on note  $|m|_i$  le nombre d'apparitions de la lettre  $a_i$  dans le mot  $m$ . En particulier,  $|m| = \sum_{i=1}^g |m|_i$  désigne la longueur du mot  $m$ .

**Définition 1.1** (*Morphisme  $h$  sur  $A$* ). Soit  $h$  un morphisme sur  $A$ .  $g = \text{card } A$  sera appelé largeur du morphisme. Nous supposons que, pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ ,  $|h(a_i)| \geq 1$ . Le morphisme  $h$  peut s'écrire comme suit:

$$\forall i \in \{1, \dots, g\}: \quad h(a_i) = a_{\sigma_i(1)} \dots a_{\sigma_i(|h(a_i)|)},$$

où  $\sigma_i$  est une application de  $\{1, \dots, |h(a_i)|\}$  dans  $\{1, \dots, g\}$ .

**Définition 1.2.** Soit

$$M = (M_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2} = (|h(a_i)|_j)_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}.$$

$M$  est appelée *matrice associée au morphisme  $h$* , ou  *$h$ -matrice* (cf. [26, p. 31]).

Le morphisme  $h$  permet de définir  $g$  suites de mots  $(s_n^i)_{n \in \mathbb{N}} = (h^n(a_i))_{n \in \mathbb{N}}$ , pour  $i \in \{1, \dots, g\}$ .

On a alors, si  $|s_n| = {}^T(|s_n^1|, \dots, |s_n^g|) \in \mathbb{N}^g$ ,  $|s_n| = M^n |s_0|$  avec  $|s_0| = {}^T(1, \dots, 1)$ . Et, en posant  $M^n = (M_{ij}^{(n)})_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}$ ,

$$\forall i \in \{1, \dots, g\}: |s_n^i| = \sum_{j=1}^g M_{ij}^{(n)}.$$

Le problème que nous étudions ne présentant un intérêt que dans le cas où il existe  $i \in \{1, \dots, g\}$  tel que  $\lim_n |s_n^i| = \infty$ , nous supposons dans tout ce qui suit que le rayon spectral  $\rho(M)$  de la  $h$ -matrice  $M$  est supérieur ou égal à 1.

**Définition 1.3.** On dit que le morphisme  $h$  est *unispectral* si le rayon spectral de la  $h$ -matrice est égal à 1.

**Définition 1.4.**  $M$  étant une matrice à coefficients entiers positifs, on considère  $G$ , le graphe associé à  $M$ . L'ensemble des sommets de  $G$  est  $\{a_1, \dots, a_g\}$ , le nombre de flèches allant de  $a_i$  vers  $a_j$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$  étant égal à  $M_{ij}$ .  $G$  est appelé *graphe associé au morphisme  $h$* , ou  *$h$ -graphe*.

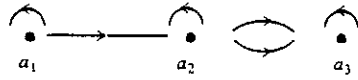
Si  $\Gamma$  est un sous-graphe de  $G$ , on rappelle que son nombre cyclomatique  $\gamma(\Gamma)$  est égal au nombre d'arcs de  $\Gamma$  plus 1 moins le nombre de sommets de  $\Gamma$ .



**Exemple 1.5.** Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  et  $h(a_1) = a_1 a_2$ ,  $h(a_2) = a_3 a_3 a_2$ ,  $h(a_3) = a_3$ . Alors, la  $h$ -matrice  $M$  est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le  $h$ -graphe  $G$  est représenté par



avec  $\gamma(\tilde{a}_1) = \gamma(\tilde{a}_2) = \gamma(\tilde{a}_3) = 1$ .

## 2. Caractérisation des morphismes unispectraux

**Proposition 2.1.**  $h$  est un morphisme unispectral si et seulement si toute composante fortement connexe du  $h$ -graphe a un nombre cyclomatique égal à 0 ou 1.

**Démonstration.** En effet, supposons qu'il existe  $i \in \{1, \dots, g\}$  tel que  $\gamma(\tilde{a}_i) \geq 2$  ( $\tilde{a}_i$  désigne la composante fortement connexe du sommet  $a_i$  dans  $G$ ). Il existe donc  $h \in \mathbb{N}$  tel que  $M_{ii}^{(h)} \geq 2$ , et on en déduit par récurrence sur  $n$  que  $\forall n > 0: M_{ii}^{(nh)} \geq 2^n$ , ce qui implique  $\rho(M) > 1$  (cf. [30, p. 65]).

Réciproquement, supposons que, pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ ,  $\gamma(\tilde{a}_i) \in \{0, 1\}$  et considérons  $\nu$  une numérotation des composantes fortement connexes de  $G$  (prolongement à  $G$  d'une numérotation du graphe quotient sans boucle  $G/\sim$  où  $\sim$  désigne la relation de forte connexité). Cette numérotation des sommets de  $G$  nous permet de réordonner  $A$  de façon à ce que

$$\nu(a_1) = 1, \quad i < j \Rightarrow \nu(a_i) \leq \nu(a_j).$$

On a ainsi

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & M_p \end{pmatrix}$$

avec, pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $M_i$  matrice associée à une composante fortement connexe de nombre cyclomatique égal à 0 ou 1 (c'est-à-dire simple sommet ou boucle). En particulier, on a soit  $M_i = 0$ , soit  $M_i^{l_i} = I_{l_i}$  ( $l_i$  désignant la longueur de la boucle) et, par conséquent, si  $l = \text{ppcm}_i(l_i)$ ,  $M^l = D + N$  avec  $N$  nilpotente et  $D$  diagonale formée uniquement de 0 et de 1; donc,  $\rho(M) \leq 1$ .  $\square$

On voit de plus que si  $h$  est un morphisme unispectral, les valeurs propres de la  $h$ -matrice  $M$  appartiennent à  $\mathbb{U} \cup \{0\}$  ( $\mathbb{U}$  désignant l'ensemble des nombres complexes de module 1).

**Proposition 2.2.**  *$h$  est un morphisme unispectral si et seulement si ses valeurs propres appartiennent à  $\mathbb{U} \cup \{0\}$ .*

La démonstration précédente nous montre au passage que, quitte à remplacer  $h$  par  $h^l$ , on peut supposer que la  $h$ -matrice  $M$  est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux égaux à 0 ou 1, ce que nous ferons désormais. On a donc, pour  $i \in \{1, \dots, g\}$ ,

$$h(a_i) = a_{\sigma_i(1)} \cdots a_{\sigma_i(|s_i^l|)},$$

avec  $\forall k \in \{1, \dots, |s_i^l|\}$ ,  $\sigma_i(k) \geq i$  et  $M_{ii} \in \{0, 1\}$ .

On remarque alors que, pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ , la restriction de  $h$  à l'alphabet  $\{a_i, \dots, a_g\}$  est un morphisme unispectral de largeur  $(g-i+1)$  sur  $\{a_i, \dots, a_g\}$ . Nous noterons  $h|_{\{a_i, \dots, a_g\}}$  ce morphisme obtenu à partir de  $h$ .

### 2.1 Etudes des supports associés à un morphisme unispectral

Si  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{Q}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et à coefficients rationnels.

**Lemme 2.3.** *Pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ , il existe  $l^i \in \mathbb{Q}_{g-i}[X]$  tel que  $\forall n \geq g: |s_n^l| = l^i(n)$ .*

**Démonstration.** Mettons  $M$  sous la forme de Jordan

$$M = P(D + N)P^{-1},$$

avec  $P \in GL(g, \mathbb{Q})$ ,  $D$  diagonale formée uniquement de 0 et de 1,  $N$  nilpotente et où  $D$  et  $N$  commutent.

$$\forall n \in \mathbb{N}: M^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P D^{n-k} N^k P^{-1}.$$

Or,  $N^g = 0$ , et si  $0 \leq k < n$ ,  $D^{n-k} = D$ ; donc si  $n \geq g$ ,

$$M^n = \sum_{k=0}^{g-1} \binom{n}{k} P D N^k P^{-1}.$$

Soit, en posant pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, g-1\}$

$$b_k = \sum_{j=1}^g (P D N^k P^{-1})_{1j} \in \mathbb{Q}, \quad |s_n^l| = \sum_{j=1}^g M_{1j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{g-1} b_k \binom{n}{k} = l^i(n),$$

où

$$l^i(X) = \sum_{k=0}^{g-1} b_k \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}_{g-1}[X].$$

Le lemme est donc montré pour  $i = 1$ , et pour  $i \in \{1, \dots, g\}$ , il suffit d'appliquer ce résultat au morphisme  $h|_{\{a_i, \dots, a_g\}}$  pour obtenir le résultat énoncé.  $\square$

**Définition 2.4.** Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$  tel que  $M_{ij} \geq 1$ , notons  $r_j^i(1), \dots, r_j^i(M_{ij})$  les rangs d'apparition de la lettre  $a_j$  dans le mot  $h(a_i)$ :

$$a_i \rightarrow h(a_i) = \dots a_j \dots a_j \dots a_j \dots$$

$$\dots r_j^i(1) \dots r_j^i(2) \dots r_j^i(M_{ij}).$$

A tout  $r \in \{1, \dots, M_{ij}\}$  on associe alors le polynôme  $\lambda^{i,j,r}$

$$\lambda^{i,j,r} = \sum_{k < r_j^i(r)} l^{\sigma_i(k)}$$

(si  $M_{ij} = 0$ ,  $\lambda^{i,j,r}$  désignera, pour tout entier  $r$ , le polynôme nul). Si  $i = j$ , on posera  $r_i^i(1) = r_i$  et  $\lambda^{i,i,1} = \lambda^i$ .

**Exemple 2.5.** Si  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  et  $h(a_1) = a_2 a_1 a_2 a_3 a_2$ ,  $h(a_2) = a_3 a_3 a_2$ ,  $h(a_3) = a_3$ , alors  $l^1(X) = 3X^2 + X + 1$ ,  $l^2(X) = 2X + 1$ ,  $l^3(X) = 1$  et

$$\lambda^1(X) = 2X + 1, \quad \lambda^{1,2,1}(X) = 0, \quad \lambda^{1,2,2}(X) = 3X^2 + 3X + 2,$$

$$\lambda^{1,2,3}(X) = 3X^2 + 5X + 4, \quad \lambda^{1,3,1}(X) = 3X^2 + 5X + 3,$$

$$\lambda^2(X) = 2, \quad \lambda^{2,3,1}(X) = 0, \quad \lambda^{2,3,2}(X) = 1, \quad \lambda^3(X) = 0.$$

**Définition 2.6.** Considérons  $s_n^i(a_j)$  l'élément de  $\{0, 1\}^*$  obtenu en remplaçant, pour tout  $k \in \{1, \dots, g\}$ ,  $a_k$  par  $\delta_{kj}$  (symbole de Kronecker) dans  $s_n^i$ .  $s_n^i(a_j)$  est donc un mot de longueur  $|s_n^i|$  formé de 0 et de 1.

On note alors  $[s_n^i(a_j)]$  le support de  $s_n^i(a_j)$ , c'est-à-dire l'ensemble des entiers  $N$  tels que la  $(N+1)$ ième lettre du mot  $s_n^i(a_j)$  soit 1 (si  $M_{ij} = 0$ ,  $[s_n^i(a_j)] = \emptyset$ ).

Par exemple, si  $s_n^1(a_j) = 101101010$ ,  $[s_n^1(a_j)] = \{0, 2, 3, 5, 7\}$ .

On rappelle que si  $\lambda \in \mathbb{N}$  et  $S \subset \mathbb{N}$ ,  $\lambda + S = \{\lambda + s, s \in S\}$ .

**Proposition H<sub>g</sub>.** Pour tout alphabet à  $g$  lettres  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$  et pour tout morphisme unispectral  $h$  de largeur  $g$  sur  $A$ , on a, pour tout  $n \geq g$ ,

(i) si  $[s_n^1(a_1)] \neq \emptyset$ , alors il existe  $P_{g-1} \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$  tel que, pour tout  $n \geq g$ ,  $[s_n^1(a_1)] = \{P_{g-1}(n)\}$ ,

(ii) si  $1 < i < g$  et si  $[s_n^1(a_i)] \neq \emptyset$ , alors il existe  $K \in \mathbb{N} - \{0\}$ , et pour tout  $(k, j) \in \{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, i-1\}$ , il existe  $P_{g-1}^0 \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$  et  $P_{g-j}^k \in \mathbb{Q}_{g-j}[X]$  tels que, pour tout  $n \geq g$ ,

$$[s_n^1(a_i)] = \bigcup_{k=1}^K \{P_{g-1}^0(n) + P_{g-1}^k(n_1) + \dots + P_{g-i+1}^k(n_{i-1}) \mid n_{i-1} < \dots < n_1 < n\}.$$

**Démonstration.** Montrons tout d'abord que, pour tout  $g \geq 2$ ,  $H_g(i)$  est vraie. En effet, si  $M_{11} = 0$ ,  $[s_n^1(a_1)] = \emptyset$  et si  $M_{11} \neq 0$ , on a, pour tout  $n \geq g$ ,

$$[s_{n+1}^1(a_1)] = \lambda^1(n) + [s_n^1(a_1)], \quad [s_g^1(a_1)] = \{\lambda_g^1\},$$

où

$$\lambda_g^1 = \sum_{k < g} \sum_{k < r_1} |s_h^{\sigma_1(k)}| \in \mathbb{N}.$$

Donc, pour tout  $n \geq g$ ,  $[s_n^1(a_1)] = \{\lambda_g^1 + \lambda^1(g) + \dots + \lambda^1(n-1)\}$ .

$\lambda^1$  étant combinaison linéaire des polynômes  $l^i$  avec  $i \geq 2$ , on a, d'après le Lemme 2.3,  $\lambda^1 \in \mathbb{Q}_{g-2}[X]$  et, par conséquent, si l'on pose pour tout  $n \geq g$

$$P_{g-1}(n) = \lambda_g^1 + \lambda^1(g) + \dots + \lambda^1(n-1) \quad \text{si } n \geq g+1$$

$$P_{g-1}(g) = \lambda_g^1,$$

l'application  $n \rightarrow P_{g-1}(n)$  est la restriction d'une application polynômiale associée à un polynôme  $P_{g-1} \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$ .

Nous avons ainsi montré  $H_g(i)$  et donc que  $H_2$  est vraie. Nous allons maintenant montrer  $H_g$  par récurrence sur  $g$  en montrant que si  $g \geq 3$  et si  $H_2, \dots, H_{g-1}$  sont vraies, alors  $H_g$  est vraie.

Considérons donc  $i \in \{2, \dots, g-1\}$  et écrivons pour tout  $n \geq g$

$$[s_{n+1}^1(a_i)] = (\lambda^1(n) + [s_n^1(a_i)]) \cup \bigcup_{j=2}^i \bigcup_{r=1}^{M_{1j}} (\lambda^{1,j,r}(n) + [s_n^j(a_i)]).$$

Pour tout  $j \in \{2, \dots, i\}$ , la Proposition  $H_{g-j+1}$  appliquée au morphisme de largeur  $(g-j+1)h|_{\{a_j, \dots, a_g\}}$  nous montre que

$$[s_n^j(a_i)] = \begin{cases} \{P_{g-i}(n)\}, \\ \emptyset, \end{cases}$$

avec  $P_{g-i} \in \mathbb{Q}_{g-i}[X]$ , et que si  $j \in \{2, \dots, i-1\}$ ,

$$[s_n^j(a_i)] = \bigcup_{k=1}^{K_j} \{P_{g-j}^j(n) + P_{g-j}^{j,k}(n_1) + \dots + P_{g-i+1}^{j,k}(n_{i-j}) \mid n_{i-j} < \dots < n_1 < n\},$$

avec  $\forall (k, \eta) \in \{1, \dots, K_j\} \times \{j, \dots, i-1\}$ :  $P_{g-j}^j \in \mathbb{Q}_{g-j}[X]$  et  $P_{g-\eta}^{j,k} \in \mathbb{Q}_{g-\eta}[X]$ . On en déduit que, pour tout  $n \geq g$ ,

$$\begin{aligned} [s_{n+1}^1(a_i)] &= (\lambda^1(n) + [s_n^1(a_i)]) \\ &\cup \bigcup_{j=2}^i \bigcup_{r=1}^{M_{1j}} \bigcup_{k=1}^{K_j} \{\lambda^{1,j,r}(n) + P_{g-j}^j(n) \\ &\quad + P_{g-j}^{j,k}(n_1) + \dots + P_{g-i+1}^{j,k}(n_{i-j}) \mid n_{i-j} < \dots < n_1 < n\} \end{aligned}$$

et qu'il existe (puisque  $\forall j \geq 2, \forall r \geq 1: \lambda^{1,j,r} \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$ ) un entier  $\bar{K}$  et des polynômes  $(\bar{P}_{g-1}^k)_{k \in \{1, \dots, \bar{K}\}}$  et  $(P_{g-j}^k)_{(k,j) \in \{1, \dots, \bar{K}\} \times \{2, \dots, i-1\}}$  avec  $\forall (k, j) \in \{1, \dots, \bar{K}\} \times \{2, \dots, i-1\}$ :  $\bar{P}_{g-1}^k \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$  et  $P_{g-j}^k \in \mathbb{Q}_{g-j}[X]$  tels que

$$\begin{aligned} [s_{n+1}^1(a_i)] &= (\lambda^1(n) + [s_n^1(a_i)]) \\ &\cup \bigcup_{k=1}^{\bar{K}} \{\bar{P}_{g-1}^k(n) + P_{g-2}^k(n_1) + \dots + P_{g-i+1}^k(n_{i-2}) \mid n_{i-2} < \dots < n_1 < n\} \end{aligned}$$

pour tout  $n \geq g$ .

Si l'on pose  $P_{g-1}^0(n) = \lambda^1(g) + \dots + \lambda^1(n-1)$  si  $n \geq g+1$ ,  $P_{g-1}^0(g) = 0$  et

$$\forall k \in \{1, \dots, \bar{K}\}: P_{g-1}^k(n) = \bar{P}_{g-1}^k(n) - P_{g-1}^0(n+1),$$

on a alors

$$\begin{aligned} [s_n^1(a_i)] &= (P_{g-1}^0(n) + [s_g^1(a_i)]) \\ &\cup \bigcup_{n_0=g}^{n-1} \bigcup_{k=1}^{\bar{K}} \{P_{g-1}^0(n) + P_{g-1}^k(n_0) \\ &\quad + \dots + P_{g-i+1}^k(n_{i-2}) \mid n_{i-2} < \dots < n_1 < n_0\} \end{aligned}$$

avec  $\forall k \in \{0, \dots, K\}: P_{g-1}^k \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$ .

Il existe donc un entier  $K = \bar{K} + \text{card}[s_g^1(a_i)]$  et des polynômes  $P_{g-1}^0$  et  $(P_{g-j}^k)_{(k,j) \in \{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, i-1\}}$  avec  $P_{g-1}^0 \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$  et  $\forall (k, j) \in \{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, i-1\}: P_{g-j}^k \in \mathbb{Q}_{g-j}[X]$  tels que, pour tout  $n \geq g$ ,

$$[s_n^1(a_i)] = \bigcup_{k=1}^K \{P_{g-1}^0(n) + P_{g-1}^k(n_0) + \dots + P_{g-i+1}^k(n_{i-2}) \mid n_{i-2} < \dots < n_0 < n\},$$

ce qui démontre notre proposition.  $\square$

**Définition 2.7.** Supposons maintenant que  $h(a_i) \in a_i A^*$ . On rappelle que dans ce cas  $(s_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $A^{\mathbb{N}}$  vers  $s^1$ , point fixe de  $h$  (cf. [3]). Considérons alors pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$

$$s^1(a_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^1(a_i) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

et  $[s^1(a_i)]$  le *support du point fixe*  $s^1(a_i)$ , c'est-à-dire l'ensemble des entiers  $N$  tels que la  $(N+1)$ ième lettre du mot  $s^1(a_i)$  soit 1 (on suppose  $[s^1(a_i)] \neq \emptyset$ ).

Si  $g = 2$ , on a  $[s^1(a_1)] = \{0\}$  et  $[s^1(a_2)] = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , et si  $g \geq 3$ , la Proposition  $H_g$  nous montre le théorème suivant.

**Théorème 2.8.** (i) Si  $i = 1$ ,  $[s^1(a_1)] = \{0\}$ .

(ii) Si  $i \in \{2, \dots, g-1\}$ ,  $[s^1(a_i)]$  est réunion finie d'ensembles de la forme

$$\{P_{g-1}^0(n) + P_{g-1}^k(n_1) + \dots + P_{g-i+1}^k(n_{i-1}) \mid n_{i-1} < \dots < n_1 < n, n \in \mathbb{N}\},$$

avec  $\forall j \in \{1, \dots, i-1\}: P_{g-1}^0 \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$  et  $P_{g-j}^k \in \mathbb{Q}_{g-j}[X]$ .

(iii) Si  $i = g$ ,  $[s^1(a_g)]$  est le complémentaire dans  $\mathbb{N}$  d'une réunion finie d'ensembles de la forme précédemment indiquée.

**Exemple 2.9.** Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  et  $h(a_1) = a_1 a_2$ ,  $h(a_2) = a_2 a_3$ ,  $h(a_3) = a_3 a_4$ ,  $h(a_4) = a_4$ . Alors,

$$[s^1(a_1)] = \{0\}, \quad [s^1(a_2)] = \{\frac{1}{6}(n+1)(n^2 - n + 6) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$[s^1(a_3)] = \{\frac{1}{6}(n+1)(n^2 - n + 6) + \frac{1}{2}n_1(n_1 + 1) + 1 \mid n_1 < n, n \in \mathbb{N}\}.$$

### 3. Propriétés statistique du support d'un point fixe de $h$

On suppose maintenant  $g \geq 3$  et on considère pour tout  $i \in \{2, \dots, g\}$  la suite  $u^i$ :  $u_0^i < u_1^i < \dots < u_n^i < \dots$  des éléments de  $[s^1(a_i)]$ . Alors, si l'on pose, pour tout entier  $N$ ,  $D_i(N) = \text{Card}\{n < N \mid n \in u^i\}$ , on a le résultat suivant concernant la densité de  $u^i$ .

**Lemme 3.1.** Si  $i \in \{2, \dots, g-1\}$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} D_i(N) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} D_g(N) = 1.$$

**Démonstration.** La démonstration du Lemme 2.3 nous a montré que, pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ , il existe  $M_i \in \mathbb{Q}_{g-1}[X]$  tel que  $\forall n \geq g$ :  $M_{1i}^{(n)} = M_i(n)$ . Posons  $\deg(M_g) = d \leq g-1$ . Alors  $\deg(l^1) = d$ , et si  $i \in \{1, \dots, g-1\}$ , on a  $\deg(M_i) < d$ . En effet,  $\forall n \geq g$ :  $M_g(n+1) = \sum_{i=1}^g M_i(n) M_{ig}$ , avec  $\forall i \in \{1, \dots, g\}$ :  $M_{ig} \geq 0$  et  $M_{gg} = 1$ . Donc  $\forall n \geq g$ :  $M_g(n+1) - M_g(n) = \sum_{i=1}^{g-1} M_{ig} M_i(n)$ , ce qui implique que, pour tout  $i \in \{1, \dots, g-1\}$ ,  $\deg(M_i) < d$  et, puisque  $l^1 = \sum_{i=1}^g M_i$ ,  $\deg(l^1) = d$ .

Pour tout  $N \geq l^1(g)$ , considérons maintenant l'unique couple  $(N_0, n_0)$  tel que

$$\begin{cases} N = l^1(n_0) + n_0, \\ 0 \leq n_0 < l^1(N_0 + 1) - l^1(N_0). \end{cases}$$

Pour tout  $i \in \{2, \dots, g-1\}$ ,

$$\frac{1}{N} D_i(N) \leq \frac{D_i(l^1(N_0)) + n_0}{l^1(N_0)} \leq \frac{M_i(N_0) + l^1(N_0 + 1) - l^1(N_0)}{l^1(N_0)}.$$

Pour  $n \geq g$ , l'application  $n \rightarrow M_i(n) + l^1(n+1) - l^1(n)$  étant une application polynômiale de degré  $< d$ , on en déduit que  $\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) D_i(N) = 0$ . D'autre part, si  $i = g$ ,

$$\frac{1}{N} D_g(N) \geq \frac{D_g(l^1(N_0))}{l^1(N_0 + 1)} = \frac{M_g(N_0)}{l^1(N_0 + 1)}$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} D_g(N) \geq \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{M_g(N_0)}{l^1(N_0 + 1)} = 1. \quad \square$$

Nous allons maintenant montrer que, pour tout  $i \in \{2, \dots, g\}$  tel que la suite  $u^i$  soit infinie, l'ensemble normal associé à la suite  $u^i$  est exactement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , c'est-à-dire, que la suite  $(u_n^i \cdot \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1 si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Théorème 3.2.** *L'ensemble normal associé au support infini d'un point fixe d'un morphisme unispectral est exactement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .*

**Démonstration.** L'examen des densités des suites  $(u_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $i \in \{2, \dots, g-1\}$  et  $i = g$  nous montre qu'il suffit de vérifier que, si  $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$  désigne la suite ordonnée des éléments de

$$\{P_{g-1}^0(n) + P_{g-1}(n_1) + \dots + P_{g-i+1}(n_{i-1}) \mid n_{i-1} < \dots < n_1 < n, n \in \mathbb{N}\}$$

(avec  $P_{g-i+1}$  non constant), on a, pour tout irrationnel  $\alpha$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(u_n \alpha) = 0 \quad (\text{en posant } e(x) = e^{2i\pi x}),$$

le théorème découlant alors du critère de Weyl (cf. [22, p. 16]).

Posons

$$S_N(\alpha) = \sum_{n < N} \sum_{n_{i-1} < \dots < n_1 < n} e((P_{g-1}^0(n) + P_{g-1}(n_1) + \dots + P_{g-i+1}(n_{i-1}))\alpha),$$

$$|S_N(\alpha)| \leq \sum_{n_{i-2} < \dots < n < N} n_{i-2} |S_{n_{i-2}}(\alpha)|,$$

où  $S_{n_{i-2}}(\alpha) = (1/n_{i-2}) \sum_{n_{i-1} < n_{i-2}} e(P_{g-i+1}(n_{i-1})\alpha)$ .  $\alpha$  étant irrationnel  $\lim_{n_{i-1} \rightarrow \infty} S_{n_{i-2}}(\alpha) = 0$  (cf [22, p. 47]) et puisque

$$\sum_{n_{i-2} < \dots < n < N} n_{i-2} = S_N(0) = \binom{N}{i},$$

on a  $\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N(\alpha)/S_N(0)| = 0$ .

Pour tout entier  $N$ , considérons maintenant  $V_N(\alpha) = \sum_{n < N} e(u_n \alpha)$  et l'unique couple  $(N_0, n_0)$  tel que

$$\begin{cases} N = \binom{N_0}{i} + n_0, \\ 0 \leq n_0 < \binom{N_0}{i-1}. \end{cases}$$

On a

$$V_N(\alpha) = S_{N_0}(\alpha) + \sum_{n = \binom{N_0}{i}}^{\binom{N_0}{i} + n_0 - 1} e(u_n \alpha),$$

d'où

$$\frac{1}{N}|V_N(\alpha)| \leq \frac{1}{N}|S_{N_0}(\alpha)| + \frac{1}{N} \binom{N_0}{i-1} \leq \binom{N_0}{i}^{-1} |S_{N_0}(\alpha)| + \frac{\binom{N_0}{i-1}}{\binom{N_0}{i}}$$

et donc  $\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N)|V_N(\alpha)| = 0$ .  $\square$

## Bibliographie

- [1] J. Berstel, Mots infinis, Théorie des langages et complexité des algorithmes, *Journées d'Avignon*, October, 1983.
- [2] A. Blanchard et M. Mendès-France, Symétrie et transcendance, *Bull. Sci. Math. (2)* **106** (1982) 325-335.
- [3] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès-France et G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980) 401-418.
- [4] F.M. Dekking, Regularity and irregularity of sequences generated by automata, Séminaire de Théorie des Nombres, 1979-80, Université de Bordeaux I.
- [5] F.M. Dekking, Recurrent sets, *Adv. in Math.* **44** (1982) 78-104.
- [6] F.M. Dekking et M. Keane, Mixing properties of substitutions, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **42** (1978) 23-33.
- [7] F.M. Dekking et M. Mendès-France, Uniform distribution modulo one: A geometrical viewpoint *J. Reine Angew. Math.* **329** (1981) 143-153.
- [8] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines, Vol. A* (Academic Press, New York/London, 1974).
- [9] S. Ginsburg, *The Mathematical Theory of Context-free Language* (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [10] B. Host, Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable, *J. Ergodic Theory*, à paraître.
- [11] T. Kamae, Spectrum of a substitution minimal set, *J. Math. Soc. Japan* **22**(4) (1970) 567-578.
- [12] T. Kamae, A topological invariant of substitution minimal sets, *J. Math. Soc. Japan* **24**(2) (1972) 285-306.
- [13] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **17** (Addison-Wesley, Reading, MA, 1983).
- [14] J.H. Loxton, et A.J. van der Poorten, Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations, *J. Reine Angew. Math.* **330** (1982) 159-172.
- [15] J.C. Martin, Substitution minimal flows, *Amer. J. Math.* **93** (1971) 503-526.
- [16] J.C. Martin, Minimal flows arising from substitutions of non-current length, *Math. Systems Theory* **7**(1) (1973) 73-82.
- [17] C. Mauduit, Automates finis et ensembles normaux, *Ann. Inst. Fourier* **36** (1986) à paraître.
- [18] M. Mendès-France et G. Tenenbaum, Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, *Bull. Soc. Math. France* **109** (1981) 207-215.
- [19] M. Minsky, *Computation, Finite and Infinite Machines* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967).
- [20] M. Queffelec, Systèmes dynamiques associés à une substitution, Prépublication No. 46, C.S.P., Villetaneuse, 1983.
- [21] M. Queffelec, Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques, Thèse d'Etat, 1984, Université Paris XIII.
- [22] G. Rauzy, Propriétés statistiques de suites arithmétiques (Presses Universitaires de France, Collection SUP **15**, 1976).
- [23] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982) 147-178.
- [24] G. Rauzy, Suites à termes dans un alphabet fini, Séminaire de Théorie des Nombres, 1982-83, Université de Bordeaux I.



- [25] G. Rauzy, Des mots en arithmétique, théorie des langages et complexité des algorithmes, *Journées d'Avignon*, October, 1983.
- [26] G. Rozenberg et A. Salomaa, *The Mathematical Theory of L Systems* (Academic Press, New York/London, 1980).
- [27] A. Salomaa, *Formal Languages* (Academic Press, New York/London, 1973).
- [28] A. Salomaa, *Jewels of Formal Language Theory* (Computer Science Press, Rockville, MD, 1981).
- [29] A. Salomaa et M. Steinby, *Automata, Languages and Programming*, Lecture Notes in Computer Science **52** (Springer, Berlin, 1977).
- [30] R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962).

## Sur l'ensemble normal des substitutions de longueur quelconque

CHRISTIAN MAUDUIT

UA 225 C.N.R.S., Université d'Aix-Marseille II,  
Département de Mathématique-Informatique,  
70, route Léon Lachamp, 13288 Marseille Cedex 9, France

Communicated by M. Waldschmidt

Received May 23, 1986; November 9, 1987

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers point fixe d'une substitution de longueur quelconque. On note  $\mathcal{B}(u)$  l'ensemble normal associé à  $u$ , c'est-à-dire l'ensemble des réels  $\alpha$  tels que la suite  $(u_n \cdot \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  soit équirépartie modulo 1. Nous montrons que si  $u$  n'est pas trop "lacunaire,"  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u)$  est inclus dans une extension de degré fini de  $\mathbb{Q}$ . © 1988 Academic Press, Inc.

### INTRODUCTION

Ce travail se situe dans le cadre de l'étude des propriétés statistiques des mots infinis engendrés par des algorithmes simples.

Le problème de la répartition des suites automatiques, déjà abordé par J. Coquet (cf. [4]), a été résolu dans [8]. Nous nous intéressons maintenant au cas plus général des suites points fixes de substitutions de longueur quelconque.

Notre étude est liée à celle des systèmes dynamiques associés aux suites substitutives, qui ont fait récemment l'objet d'études en longueur non constante (cf. [5, 6, 7, 11, 13]).

### I. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Dans toute cette étude,  $g$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et  $A$  un alphabet à  $g$  lettres  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$ .

Si  $k \in \mathbb{N}$  on désigne par  $A^k$  l'ensemble des mots de longueur  $k$  et on pose  $A^* = \bigcup_{k \geq 0} A^k$ .

Soit  $\Sigma$  une substitution sur  $A$ , c'est-à-dire une application de  $A$  dans  $A^*$ ;  $g = \text{card } A$  sera appelé largeur de la substitution.

Cette application se prolonge par concaténation en une application de  $A^* \cup A^{\mathbb{N}}$  vers  $A^* \cup A^{\mathbb{N}}$ , notée encore  $\Sigma$ .

Notons pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $l_i(n)$  la longueur du mot  $\Sigma^n(a_i)$ .

La substitution  $\Sigma$  peut s'écrire comme suit:

$$\forall i \in \{1, \dots, g\} \quad \Sigma(a_i) = a_{\sigma_i(1)} \cdots a_{\sigma_i(l_i(1))},$$

où  $\sigma_i$  est une application de  $\{1, \dots, l_i(1)\}$  dans  $\{1, \dots, g\}$ .

DÉFINITION 1. ( $\Sigma$ -matrice  $M$ ).

Soit  $M = (M_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}$  la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, g\}^2 \quad M_{ij} = \text{Card}(\sigma_i^{-1}(\{j\})).$$

$M$  est appelée matrice associée à la substitution  $\Sigma$ , ou  $\Sigma$ -matrice (cf. [14]).

La substitution  $\Sigma$  permet de définir les  $g$  suites de mots  $\Sigma^n(a_i)$ , pour  $i \in \{1, \dots, g\}$ .

Si l'on note  $L(n) = {}^T(l_1(n), \dots, l_g(n))$ , alors  $L(n) = M^n L(0)$  avec  $L(0) = {}^T(1, \dots, 1)$ .

Pour tout entier  $n$ , on pose:  $M^n = (M_{ij}^{(n)})_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}$ .

DÉFINITION 2 ( $\Sigma(\alpha, n)$ -matrice  $M(\alpha, n)$ ).

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, g\}^2 \quad M_{ij}(\alpha, n) = \sum_{k \in \sigma_i^{-1}(\{j\})} e\left(\sum_{k' < k} l_{\sigma_i(k')}(n) \cdot \alpha\right)$$

(on pose  $e(x) = e^{2inx}$ ).  $M(\alpha, n)$  est appelée  $(\Sigma, \alpha, n)$ -matrice, et on remarque que pour tout entier  $n$ ,  $M(0, n)$  est égale à la  $\Sigma$ -matrice  $M$ .

Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$  tel que  $\sigma_i^{-1}(\{j\}) \neq \emptyset$  on note  $k_1, \dots, k_{M_{ij}}$  la suite croissante de ses éléments. Pour tout  $\kappa \in \{1, \dots, M_{ij}\}$  on pose:

$$\lambda_{ij}^{(\kappa)} = \sum_{k' < k_{\kappa}} l_{\sigma_i(k')},$$

$$A_{ij} = \{\lambda_{ij}^{(\kappa)}, \kappa \in \{1, \dots, M_{ij}\}\} \setminus \{0\},$$

et

$$A = \bigcup_{i,j=1}^g A_{ij}.$$

On désigne par  $\Theta$  l'ensemble des valeurs propres de  $M$  qui interviennent dans l'écriture des éléments de  $A$  en fonction de  $n$ .

EXEMPLE 1 (Substitution de Baum-Sweet).

$$\begin{aligned}
 A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, & \Sigma(a_1) &= a_1 a_2, \\
 & & \Sigma(a_2) &= a_3 a_2, \\
 & & \Sigma(a_3) &= a_2 a_4, \\
 & & \Sigma(a_4) &= a_4 a_4, \\
 M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & A &= \{\lambda\} \text{ avec } \lambda(n) = 2^n \text{ et } \Theta = \{2\}.
 \end{aligned}$$

EXEMPLE 2.

$$\begin{aligned}
 A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, & \Sigma(a_1) &= a_1 a_2 a_3, \\
 & & \Sigma(a_2) &= a_1, \\
 & & \Sigma(a_3) &= a_3 a_4 a_4, \\
 & & \Sigma(a_4) &= a_3 a_4, \\
 M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & A &= \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(n) &= \frac{1}{2} ((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}), \\
 \lambda_2(n) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} ((1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}), \\
 \lambda_3(n) &= \frac{1}{2} \lambda_2(n+1) \quad \text{et} \quad \Theta = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}.
 \end{aligned}$$

DÉFINITION 3 (Support d'un mot relatif à une lettre).

Si  $m \in A^* \cup A^{\mathbb{N}}$  et si  $t \in \{1, \dots, g\}$ , le support  $[m]_t$  de  $m$  relatif à  $a_t$  est la suite ordonnée croissante des entiers  $n$  tels que la  $(n+1)$ ième lettre du mot  $m$  soit  $a_t$ . Par exemple, si  $m = a_1 a_2 a_1 a_1 a_2 a_1 a_2 a_2$ ,  $[m]_2 = \{1, 4, 6, 7\}$ .

DÉFINITION 4 (*Ensemble normal associé à un mot infini*).

Si  $m \in A^{\mathbb{N}}$  et si  $t \in \{1, \dots, g\}$ , on note  $\mathcal{B}([m]_t)$  l'ensemble des nombres réels  $\alpha$  tels que la suite  $(n \cdot \alpha)_{n \in [m]_t}$ , soit équirépartie modulo 1.  $\mathcal{B}([m]_t)$  est appelé ensemble normal associé au mot infini  $[m]_t$ , et d'après le critère de Weyl (cf. [12]), on a:

$$\mathcal{B}([m]_t) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} / \forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{\substack{n \in [m]_t \\ n < N}} e(kn) \in o \left( \sum_{\substack{n \in [m]_t \\ n < N}} 1 \right) \right\}.$$

DÉFINITION 5 ( $\Sigma$ -graphe  $G$ ).

$M$  étant une matrice à coefficients entiers positifs, on considère  $G$ , le graphe associé à  $M$ . L'ensemble des sommets de  $G$  est  $\{a_1, \dots, a_g\}$ , le nombre de flèches allant de  $a_i$  vers  $a_j$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$  étant égal à  $M_{ij}$ .  $G$  est appelé graphe associé à la substitution  $\Sigma$ , ou  $\Sigma$ -graphe.

D'autre part, on dira que le sommet  $a_i$  de  $G$  précède (au sens large) le sommet  $a_j$  de  $G$  s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $M_{ij}^{(n)} > 0$ , et on écrira  $a_i \leq a_j$ .

On rappelle que l'on peut alors définir sur  $G$  la relation d'équivalence de forte connexité  $\sim$  entre les sommets:

$$a_i \sim a_j \quad \text{si} \quad (a_i \leq a_j \quad \text{et} \quad a_j \leq a_i).$$

On note  $\tilde{a}_i$  la classe d'équivalence modulo  $\sim$  du sommet  $a_i$ . Enfin, si  $\Gamma$  est un sous-graphe de  $G$ , on rappelle que son nombre cyclomatique  $\gamma(\Gamma)$  est égal au nombre d'arcs de  $\Gamma$  plus 1 moins le nombre de sommets de  $\Gamma$  (cf. [1]).

EXEMPLE 3. (Fig. 1).

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \Sigma(a_1) = a_1 a_2,$$

$$\Sigma(a_2) = a_1 a_3,$$

$$\Sigma(a_3) = a_3,$$

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2, \quad a_1 \leq a_3, \quad \gamma(\tilde{a}_1) = 2 \quad \text{et} \quad \gamma(\tilde{a}_3) = 1.$$

Si  $M \in \mathcal{M}(g, \mathbb{C})$  et si  $w \in \mathbb{C}^n$ , on note pour tout  $I$  et pour tout  $J$  inclus dans  $\{1, \dots, g\}$ :

$$M^{I \times J} = (M_{ij})_{(i,j) \in I \times J}, \quad M^I = M^{I \times I} \quad \text{et} \quad w^I = (x_i)_{i \in I}.$$

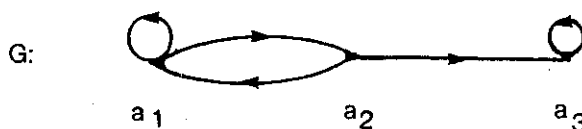


FIGURE 1

De même, on désigne par  $G'$  la restriction du graphe  $G$  aux sommets  $a_i$  tels que  $i \in I$ .

Par ailleurs, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies et positives pour  $x > x_0$ , la notation  $f \approx g$  signifiera qu'il existe des réels  $\beta$  et  $\beta'$  tels que pour tout  $x$  assez grand:

$$0 < \beta \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \beta'.$$

Le problème que nous étudions ne présentant un intérêt que dans le cas où il existe  $i \in \{1, \dots, g\}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_i(n) = \infty$ , nous supposons que le rayon spectral  $\rho(M)$  de la  $\Sigma$ -matrice  $M$  est toujours supérieur ou égal à 1.

**DÉFINITION 6** (*Substitution unispectrale*).

On dit que la substitution  $\Sigma$  est unispectrale si le rayon spectral de la  $\Sigma$ -matrice est égal à 1.

Rappelons que  $\Sigma$  est une substitution unispectrale si et seulement si toute composante fortement connexe du  $\Sigma$ -graphe a un nombre cyclomatique égal à 0 ou 1 (cf. [9, Proposition 2.1]).

Nous avons montré dans [9] que si  $m$  est pont-fixe d'une substitution unispectrale, alors pour tout  $t \in \{1, \dots, g\}$  tel que  $[m]_t$  soit infini,  $\mathcal{B}([m]_t) = R \setminus Q$ . Nous nous intéressons maintenant au cas des substitutions non unispectrales, c'est-à-dire au cas  $\rho(M) > 1$ .

*Remarque.* Puisque nous étudions les mots infinis points fixes d'une substitution  $\Sigma$ , nous pouvons supposer, quitte à itérer  $\Sigma$ , que toute composante fortement connexe de  $\Sigma$  de nombre cyclomatique non nul contient au moins une boucle.

## II. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES COEFFICIENTS DE $M^n$

Si  $a_i$  est fixé dans  $A$  ("état terminal" de la substitution), on note  $I(t)$ , ou plus simplement  $I$  si aucune confusion n'est à craindre, l'ensemble des entiers  $i \in \{1, \dots, g\}$  tels que  $a_i \leq a_t$ .

*Remarque.* Si  $\gamma(\tilde{a}_i) = 0$ , on prendra soin d'exclure de  $I$  les  $i$  tels que  $(\gamma(\tilde{a}_i) = 0 \text{ et } \forall a \in G, a_i \leq a \leq a_t \Rightarrow \gamma(\tilde{a}) = 0)$ . On peut alors supposer, quitte à itérer  $\Sigma$  que pour tout  $i \in I$   $M_{ii} > 0$ .

$I$  s'écrit comme réunion disjointe de  $c \geq 1$  sous-ensembles associés à chacune des  $c$  composantes fortement connexes de  $G^I$ :  $I = I_1 \cup \dots \cup I_c$ . La relation de préordre sur les sommets de  $G$  induit une relation d'ordre (pas nécessairement total) sur l'ensemble  $\{I_1, \dots, I_c\}$ :

$$I_i \leq I_{i'} \quad \text{si} \quad \forall (a, a') \in G^{I_i} \times G^{I_{i'}} \quad a \leq a'.$$

DÉFINITION 7 (Type d'une composante fortement connexe).

$h \in \{1, \dots, c\}$  est le type 1 (resp. de type 2) s'il existe  $h' \in \{1, \dots, c\}$  tel que  $I_h \leq I_{h'}$  et  $\gamma(G^{I_h}) \geq 2$  (resp. si  $I_h \leq I_{h'}$  implique  $\gamma(G^{I_h}) < 2$ ) (fig. 2).

LEMME 1.  $\forall (h_1, h_2) \in \{1, \dots, c\}^2$  tel que  $I_{h_1} \leq I_{h_2}$ , on a si  $r$  désigne le rayon spectral supposé non nul de  $M^{I_{h_1} \cup \dots \cup I_{h_2}}$  et  $(d+1)$  l'ordre maximal des blocs de Jordan associés aux valeurs propres de module  $r$  de cette matrice:

$$\forall (i, j) \in I_{h_1} \times I_{h_2}, \quad M_{ij}^{(n)} \approx n^d r^n.$$

Démonstration. Remarquons que

$$r = \rho(M^{I_{h_1} \cup \dots \cup I_{h_2}}) = \sup_{h_1 \leq h \leq h_2} \rho(M^{I_h}) \geq 1.$$

Soit  $h_0 \in \{1, \dots, c\}$  tels que  $I_{h_1} \leq I_{h_0} \leq I_{h_2}$  et  $r = \rho(M^{I_{h_0}})$  avec  $M^{I_{h_0}}$  contenant le bloc de Jordan d'ordre maximal parmi ceux associés aux valeurs propres de module  $r$ . Si  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme spectrale, on a d'après [16, p. 65]:

$$\|(M^{I_{h_0}})^n\|_2 \approx n^d r^n.$$

Cette norme étant équivalente à la norme du sup on en déduit que  $\sup_{(i,j) \in I_{h_0}^2} |M_{ij}^{(n)}| \approx n^d r^n$ .

Or, il existe  $i_0 \in I_{h_0}$  tel que  $M_{i_0 i_0} \geq 1$  (cf. §1, remarque), et par conséquent il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $(i, j) \in I_{h_0}^2$   $M_{ij}^{(p)} \geq 1$ .

Pour tout  $(i, j, i', j') \in I_{h_0}^4$  on peut donc construire à partir de tout chemin de longueur  $n$  allant de  $a_i$  à  $a_j$ , au moins un chemin de longueur  $(n + 2p)$  allant de  $a_{i'}$  à  $a_{j'}$ .

Ainsi, pour tout entier  $n$   $M_{ij}^{(n)} \leq M_{i'j'}^{(n+2p)}$ . De même:  $\forall n \geq 2p, M_{i'j'}^{(n-2p)} \leq M_{ij}^{(n)} \leq M_{i'j'}^{(n+2p)}$ . On en déduit que:  $\forall (i, j) \in I_{h_0}^2, M_{ij}^{(n)} \approx \sup_{(i,j) \in I_{h_0}^2} M_{ij}^{(n)} \approx n^d r^n$ .

Soit alors  $(i_0, j_0) \in I_{h_0}^2$  tel que  $M_{i_0 j_0}^{(n)} \approx n^d r^n$ . Pour tout  $(i, j) \in I_{h_1} \times I_{h_2}$  notons

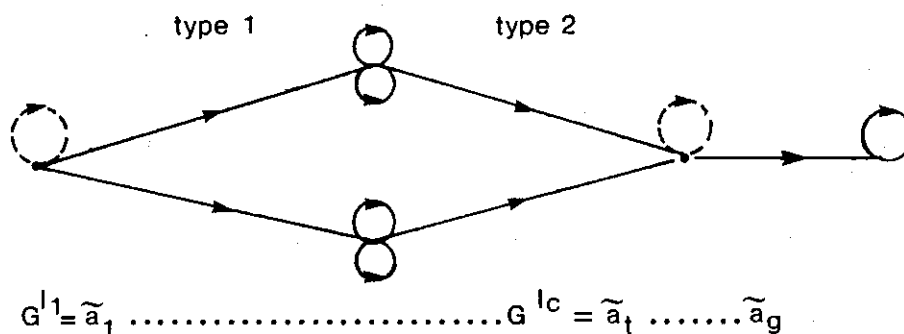


FIGURE 2

$p_0$  (resp.  $q_0$ ) la longueur du plus court chemin allant de  $a_i$  à  $a_{i_0}$  (resp. de  $a_{j_0}$  à  $a_j$ ):

$$\begin{array}{ccccccc} \times & \xrightarrow{(p_0)} & \times & \xrightarrow{(n)} & \times & \xrightarrow{(q_0)} & \times \\ a_i & & a_{i_0} & & a_{j_0} & & a_j \\ G^{I_{h_1}} & & & & G^{I_{h_0}} & & G^{I_{h_2}} \end{array}$$

A partir de tout chemin de longueur  $n$  allant de  $a_{i_0}$  à  $a_{j_0}$  on peut construire au moins un chemin de longueur  $(n + p_0 + q_0)$  allant de  $a_i$  à  $a_j$ . En particulier  $M_{ij}^{(n+p_0+q_0)} \geq M_{i_0j_0}^{(n)}$  et par conséquent il existe  $\beta_1 > 0$  tel que pour  $n$  assez grand  $M_{ij}^{(n)} \geq \beta_1 n^d r^n$ .

Comme d'autre part la mise sous forme de Jordan pour le calcul de  $(M^{I_{h_1} \cup \dots \cup I_{h_2}})^n$  montre, par définition de  $r$  et  $d$ , l'existence de  $\beta_2 > 0$  tel que  $\forall (i, j) \in I_{h_1} \times I_{h_2}$ ,  $M_{ij}^{(n)} \leq \beta_2 n^d r^n$ , on en déduit le résultat annoncé. ■

### III. ÉTUDE DE LA DENSITÉ DE $[m]_t$

Si  $m \in A^{\mathbb{N}}$  est point fixe de la substitution  $\Sigma$  (on peut supposer  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma^n(a_1)$ ), nous allons préciser le comportement de  $D_t(N) = \text{Card}\{n \in \mathbb{N}, n < N; n \in [m]_t\}$  en fonction des paramètres suivants:

$r = \rho(M)$ ,  $d+1 =$  ordre maximal des blocs de Jordan associés aux valeurs de module  $r$  de  $M$ .

$r_t = \rho(M^t)$ ,  $d_t+1 =$  ordre maximal des blocs de Jordan associés aux valeurs propres de module  $r_t$  de  $M^t$ .

PROPOSITION 1. — si  $r = 1$  ( $\Sigma$  unispectrale):

$$D_t(N) \approx N^{d_t/d},$$

— si  $r > 1$ :

$$D_t(N) \approx (\log N)^{d_t - d \log_r r_t} \cdot N^{\log_r r_t}.$$

Démonstration. D'après le lemme 1,  $l_1(n) = \sum_{j=1}^g M_{ij}^{(n)} \approx n^d r^n$  et  $D_t(l_1(n)) = L_{it}(n) \approx n^{d_t} r_t^n$ .

— si  $r = 1$ ,  $D_t(l_1(n)) \approx n^{d_t} \approx (l_1(n))^{d_t/d}$ .

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  considérons l'unique  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $l_1(n) \leq N < l_1(n+1)$ . Comme  $N \approx l_1(n) \approx l_1(n+1)$ , on a  $D_t(N) \geq D_t(l_1(n)) \approx N^{d_t/d}$  et  $D_t(N) \leq D_t(l_1(n+1)) \approx N^{d_t/d}$ .

— si  $r > 1$ ,  $\log l_1(n) \approx n$  et donc

$$\begin{aligned} D_t(l_1(n)) &\approx \log(l_1(n))^{d_t} r^{n \log_r r_t} \\ &\approx \log(l_1(n))^{d_t - d \log_r r_t} (l_1(n))^{\log_r r_t}. \end{aligned}$$



Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  considérons l'unique  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $l_1(n) \leq N < l_1(n+1)$ . Comme  $N \approx l_1(n) \approx l_1(n+1)$ , on a

$$D_i(N) \geq D_i(l_1(n)) \approx (\log N)^{d_i - d \log_r r_i} N^{\log_r r_i} \quad \text{et}$$

$$D_i(N) \leq D_i(l_1(n+1)) \approx (\log N)^{d_i - d \log_r r_i} N^{\log_r r_i},$$

ce qui achève la démonstration de notre proposition. ■

La proposition 1 donne en particulier des conditions nécessaires pour qu'une suite d'entiers soit engendrée par une substitution:

**COROLLAIRE 1.** *Si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est engendrée par une substitution, il existe  $(\phi, \psi)$  dans  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  tel que*

$$\sum_{u_n < N} 1 \approx (\log N)^\phi N^\psi \quad \text{avec } \phi \in \mathbb{Z}(\psi).$$

**EXEMPLE 4.** Les suites  $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(a^{(n^h)})_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $(a, b) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$  ne sont pas engendrées par une substitution.

Si  $\Sigma$  est une substitution de longueur constante (i.e., un automate fini) ou une substitution irréductible, alors  $d=0$ . On en déduit:

**COROLLAIRE 2.** *Si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est engendrée par un automate fini ou par une substitution irréductible, il existe  $(\phi, \psi) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$  tel que*

$$\sum_{u_n < N} 1 \approx (\log N)^\phi N^\psi.$$

**EXEMPLE 5.** La suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $p_n$  désigne le  $n$ ième nombre premier n'est engendrée ni par un automate fini ni par une substitution irréductible.

D'autre part, on peut montrer aisément (cf. [9, proposition 2.1]) qu'une CNS pour que  $\rho(M^{1h}) > 1$  est que  $\gamma(G^{1h}) \geq 2$ . On en déduit qu'une CNS pour que  $r_i > 1$  est qu'il existe  $i$  dans  $I$  tel que  $\gamma(\tilde{a}_i) \geq 2$ .

**PROPOSITION 2.** *Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers engendrée par une substitution. Alors il existe  $(\phi, \psi)$  dans  $\mathbb{R} \times ]0, 1]$  tel que  $\sum_{u_n < N} 1 \approx (\log N)^\phi N^\psi$  si et seulement si il existe  $i$  dans  $I$  tel que  $\gamma(\tilde{a}_i) \geq 2$ .*

**DÉFINITION 8 (Hypothèse (H)).**

On dira que  $t \in \{1, \dots, g\}$  vérifie l'hypothèse (H) s'il existe  $i \in I$  tel que  $\gamma(\tilde{a}_i) \geq 2$ .

## IV. THÉORÈME PRINCIPAL

Pour tout  $i \in I$  et pour tout entier  $N$ , posons  $n(i) = \inf\{n \in \mathbb{N} / N \leq l_i(n)\}$  et

$$V_N^i(\alpha) = \sum_{\substack{k \in [\Sigma^{n(i)}]_i \\ k < N}} e(k\alpha).$$

THÉORÈME. Si  $t$  vérifie l'hypothèse (H) et si  $\alpha \in R \setminus (\bigcup_{\theta \in \Theta} \mathbb{Q}(\theta))$ , alors  $\lim_{N \rightarrow \infty} V_N^i(\alpha) / V_N^i(0) = 0$ .

D'après le critère de Weyl, ce théorème signifie que si  $t$  vérifie l'hypothèse (H), alors la suite  $(n\alpha)_{n \in [m]_i}$  est équirépartie modulo 1 pour tout  $\alpha \in R \setminus (\bigcup_{\theta \in \Theta} \mathbb{Q}(\theta))$ , c'est-à-dire que  $R \setminus \mathcal{B}([m]_i) \subset \bigcup_{\theta \in \Theta} \mathbb{Q}(\theta)$ .

Étape 1. Pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$S_n^i(\alpha) = \sum_{k \in [\Sigma^n(a_i)]_i} e(k\alpha) = V_{l_i(n)}^i(\alpha).$$

On remarque que  $\forall i \in I \forall n \geq 1 S_n^i(0) = M_{ii}^{(n)} > 0$ .

Cette première étape va consister à démontrer, par récurrence sur  $c$  que, si  $t$  vérifie l'hypothèse (H), alors pour tout  $i \in I \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^i(\alpha) / S_n^i(0) = 0$ . Remarquons que si  $S_n(\alpha) = (S_n^i(\alpha))_{i \in I}$ , on a  $S_{n+1}(\alpha) = M^I(\alpha, n) S_n(\alpha)$ . Si de plus on pose pour tout  $i \in I$  et pour tout  $n \geq 1$

$$w_n^i(\alpha) = \frac{S_n^i(\alpha)}{S_n^i(0)}, \quad w_n(\alpha) = (w_n^i(\alpha))_{i \in I}, \quad w_0(\alpha) = {}^T(0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$$

↑  
tième rang

et

$$A(\alpha, n) = \left( \frac{S_n^j(0)}{S_{n+1}^i(0)} M_{ij}(\alpha, n) \right)_{(i,j) \in I^2},$$

on a:

$$w_{n+1}(\alpha) = A(\alpha, n) w_n(\alpha).$$

Pour tout  $(n, n') \in \mathbb{N}^2$  tel que  $n' \leq n$ , on pose  $B(\alpha, n, n') = A(\alpha, n) \cdots A(\alpha, n')$  et  $B(\alpha, n) = B(\alpha, n, 0)$ ; on a ainsi pour tout  $n$

$$w_{n+1}(\alpha) = B(\alpha, n) w_0(\alpha).$$

On remarquera que  $\forall (i, j) \in I^2: B_{ij}(0, n, n') = (S_n^j(0)/S_{n+1}^i(0)) M_{ij}^{(n-n'+1)}$ , et en particulier que  $B(0, n, n')$  est une matrice stochastique.

*Etape 1.1.*  $c = 1$ . Comme  $\gamma(\tilde{a}_1) \geq 2$ , il existe au moins deux circuits fermés distincts passant par  $a_1$ . Soit  $l$  le ppcm des longueurs de ces circuits. Quitte à travailler sur la substitution  $\Sigma^l$ , on peut supposer que  $l = 1$ .

Par ailleurs, il est facile de montrer en utilisant la méthode de Pisot-Vijayaraghavan (cf. [10, 15, 17]), que pour tout

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\theta \in \Theta} \mathbb{Q}(\theta) \text{ et pour tout } \lambda \in \Lambda, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(n)\alpha \neq 0 \pmod{1}.$$

Comme  $M_{11} \geq 2$ , il existe alors  $\delta \in ]0, 1]$  et une suite strictement croissante d'entiers  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tels que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < |M_{11}(\alpha, N_k)| \leq (1 - \delta) M_{11},$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < |A_{11}(\alpha, N_k)| \leq (1 - \delta) A_{11}(0, N_k).$$

Pour tout  $i \in I$ , il existe un chemin de longueur  $p(i)$  allant de  $a_i$  à  $a_1$  et un chemin de longueur  $q(i)$  allant de  $a_1$  à  $a_i$ . Ainsi, quitte à rajouter à ces chemins des boucles sur le sommet  $a_1$ , il existe  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$  indépendant de  $i$  tel qu'il existe un chemin de longueur  $p$  allant de  $a_i$  à  $a_1$  et un chemin de longueur  $q$  allant de  $a_1$  à  $a_i$ .

En particulier,  $\forall i \in I, M_{ii}^{(p)} \geq 1$  et  $M_{ii}^{(q)} \geq 1$ .

Quitte à extraire une sous-suite de la suite  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  on peut supposer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $N_{k+1} - N_k > p + q + 1$  et  $N_0 > q$ . On a alors pour tout  $(i, j) \in I^2$ :

$$\begin{aligned} B_{ij}(\alpha, N_k + p, N_k - q) &= B_{i1}(\alpha, N_k + p, N_k + 1) A_{11}(\alpha, N_k) \\ &\quad \times B_{1j}(\alpha, N_k - 1, N_k - q) \\ &\quad + \sum_{(\lambda, \mu) \neq (1, 1)} B_{i\lambda}(\alpha, N_k + p, N_k + 1) \\ &\quad \times A_{\lambda\mu}(\alpha, N_k) B_{\mu j}(\alpha, N_k - 1, N_k - q). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |B_{ij}(\alpha, N_k + p, N_k - q)| &\leq B_{ij}(0, N_k + p, N_k - q) \\ &\quad - \delta B_{i1}(0, N_k + p, N_k + 1) A_{11}(0, N_k) \\ &\quad \times B_{1j}(0, N_k - 1, N_k - q). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & B_{ii}(0, N_k + p, N_k + 1) A_{11}(0, N_k) B_{ij}(0, N_k - 1, N_k - q) \\ &= \frac{S_{N_k - q}^j(0)}{S_{N_k + p + 1}^i(0)} M_{ii}^{(p)} M_{11} M_{ij}^{(q)} \\ &= \frac{M_{ji}^{(N_k - q)}}{M_{ii}^{(N_k + p + 1)}} M_{ii}^{(p)} M_{11} M_{ij}^{(q)} \geq \frac{M_{ji}^{(N_k - q)}}{M_{ii}^{(N_k + p + 1)}}. \end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 1, si  $r = \rho(M^I)$ , il existe  $\beta_2 \geq \beta_1 > 0$  tels que

$$\frac{M_{ji}^{(N_k - q)}}{M_{ii}^{(N_k + p + 1)}} \geq \frac{\beta_1}{\beta_2 r^{p+q+1}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |B_{ij}(\alpha, N_k + p, N_k - q)| &\leq B_{ij}(0, N_k + p, N_k - q) - \frac{\delta \beta_1}{\beta_2 r^{p+q+1}} \\ &\leq C \cdot B_{ij}(0, N_k + p, N_k - q), \end{aligned}$$

où  $C \in ]0, 1]$  car  $B_{ij}(0, N_k + p, N_k - q) \leq 1$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , choisissons  $k$  tel que  $C^{k+1} \leq \varepsilon$ . Alors, si  $n \geq N_k + p + 1$  on a:

$$\begin{aligned} B(\alpha, n) = B(\alpha, n, n_0) &= B(\alpha, n, N_k + p + 1) B(\alpha, N_k + p, N_k - q) \\ &\quad \dots B(\alpha, N_0 - q - 1, n_0) \end{aligned}$$

et

$$\|B(\alpha, n)\|_\infty \leq C^{k+1} \|B(0, n)\|_\infty \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\|w_n(\alpha)\|_\infty \leq \|B(\alpha, n)\|_\infty \|w_{n'}(\alpha)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

*Etape 1.2.* Supposons notre propriété démontrée jusqu'à l'ordre  $(c-1)$ .

**LEMME 2.** Soit  $(h_1, h_2) \in \{1 \dots c\}^2$  tel que  $I_{h_1} \leq I_{h_2}$ . Si  $h_1$  est de type 1 et  $h_2$  de type 2, alors

$$\forall (i, j) \in I_{h_1} \times I_{h_2}, \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} B_{ij}(0, n, n') = 0.$$

*Démonstration.* On a, avec les notations du lemme 1, pour les couples

$(i, j)$  et  $(i, t)$ :  $M_{ij}^{(n)} \approx M_{it}^{(n)} \approx n^d r^n$  avec  $r = \rho(M^{I_{h_0}}) > 1$  et  $h_0 \in \{1, \dots, c\}$ . De même pour le couple  $(j, t)$ :  $M_{ji}^{(n)} \approx P(n)$  où  $P$  est un polynôme. D'autre part

$$\begin{aligned} B_{ij}(0, n, n') &= \frac{S_{n'}^j(0)}{S_{n+1}^i(0)} M_{ij}^{(n-n'+1)} \\ &= \frac{M_{ji}^{(n')}}{M_{it}^{(n+1)}} M_{ij}^{(n-n'+1)} \approx \frac{P(n')(n-n'+1)^d}{r^{n'}(n+1)^d} \leq \frac{P(n')}{r^{n'}}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. ■

Posons maintenant pour tout  $n \geq n' \geq n_0$

$$E(\alpha, n, n') = \sum_{h=2}^c B^{I_1 \times I_h}(\alpha, n, n') w_n^{I_h}(\alpha).$$

LEMME 3.  $\lim_{n' \rightarrow \infty} E(\alpha, n, n') = 0$ .

*Démonstration.* — Si  $h$  est de type 1, on a  $\lim_{n' \rightarrow \infty} w_n^{I_h}(\alpha) = 0$  en appliquant l'hypothèse de récurrence à la substitution obtenue en restreignant  $\Sigma$  aux lettres  $a_i$  telles que  $i \in \bigcup_{I_h \leq I_{h'}} I_{h'}$ .

— Si  $h$  est de type 2, on a d'après le lemme 2  $\lim_{n' \rightarrow \infty} B^{I_1 \times I_h}(0, n, n') = 0$ . ■

Nous allons maintenant démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n^{I_1}(\alpha) = 0$ .

*Cas 1.*  $\gamma(G^{I_1}) \geq 2$ . On montre comme pour l'étape 1.1 l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $N_0 > q$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $N_{k+1} - N_k > p + q + 1$  et  $\|B^{I_1}(\alpha, N_k + p, N_k - q)\|_\infty \leq C$  (avec  $p$  et  $q$  entiers fixés et  $C \in ]0, 1[$ ).

Posons alors

$$v_k(\alpha) = \|w_{N_k - q}^{I_1}(\alpha)\|_\infty \quad \text{et} \quad \varepsilon_k(\alpha) = \|E(\alpha, N_{k+1} - q - 1, N_k - q)\|_\infty;$$

on a

$$\begin{aligned} w_{N_{k+1} - q}^{I_1}(\alpha) &= B^{I_1}(\alpha, N_{k+1} - q - 1, N_k - q) w_{N_k - q}^{I_1}(\alpha) + E(\alpha, N_{k+1} - q - 1, N_k - q), \end{aligned}$$

et on en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ :

$$v_{k+1}(\alpha) C \cdot v_k(\alpha) + \varepsilon_k(\alpha) \leq C^{k+1} v_0(\alpha) + \sum_{i=0}^k C^{k-i} \varepsilon_i(\alpha),$$

avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k(\alpha) = 0$  d'après le lemme 3. Donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(\alpha) = 0$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , considérons  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $v_k(\alpha) \leq \varepsilon/2$  et  $\forall n > N_k - q$ ,  $E(\alpha, n - 1, N_k - q) \leq \varepsilon/2$  (cf lemme 3).

Pour tout  $n > N_k - q$ , on a

$$w_n^{i_1}(\alpha) = B^{i_1}(\alpha, n-1, N_k - q) w_{N_k - q}^{i_1}(\alpha) + E(\alpha, n-1, N_k - q),$$

et donc  $\|w_n^{i_1}(\alpha)\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Cas 2.  $\gamma(G^{i_1}) \leq 1$ . Le cas  $\gamma(G^{i_1}) = 0$  étant trivial, supposons que  $\gamma(G^{i_1}) = 1$ . On a pour tout  $n \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} w_{n+1}^{i_1}(\alpha) &= w_{n+1}^1(\alpha) = \frac{S_n^1(0)}{S_{n+1}^1(0)} M_{11}(\alpha, n) w_n^1(\alpha) + E(\alpha, n, n) \\ &= \frac{M_{1i}^{(n)}}{M_{1i}^{(n+1)}} M_{11}(\alpha, n) w_n^1(\alpha) + E(\alpha, n, n). \end{aligned}$$

L'existence d'une boucle sur le sommet  $a_1$  nous montre que, si  $p_0$  désigne la longueur du plus court chemin allant de  $a_1$  à  $a_i$ , alors pour tout  $n \geq p_0$  il existe au moins un chemin de longueur  $n$  allant de  $a_1$  à  $a_i$ , soit:  $\forall n \geq p_0$ ,  $M_{1i}^{(n)} \geq 1$ .

De plus, quitte à itérer  $\Sigma$ , on peut supposer qu'il existe  $a_i$ , appartenant à une composante fortement connexe de nombre cyclomatique supérieur ou égal à 2 située entre  $G^{i_1}$  et  $G^{i_c}$ , tel que  $M_{ii} \geq 2$ .

A partir de tout chemin de longueur  $n \geq p_0$  allant de  $a_1$  à  $a_i$ , on peut donc construire au moins 2 chemins de longueur  $(n+1)$  allant de  $a_1$  à  $a_i$ , (en rajoutant une boucle au choix sur  $a_i$ ).

On en déduit que:  $\forall n \geq p_0$ ,  $M_{1i}^{(n+1)} \geq 2M_{1i}^{(n)}$ . Donc si  $n \geq p_0$

$$\|w_{n+1}^{i_1}(\alpha)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|w_n^{i_1}(\alpha)\|_\infty + \|E(\alpha, n, n)\|_\infty,$$

ce qui entraîne, grâce au lemme 3, que  $\lim w_n^{i_1}(\alpha) = 0$ .

Etape 2. Nous allons maintenant montrer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} V_N^1(\alpha)/V_N^1(0) = 0$ , ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Pour cela, nous allons décomposer tout entier  $N$  dans une échelle naturellement associée à la substitution  $\Sigma$  comme suit:

A tout  $(N, i) \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, g\}$  on peut associer un unique  $(N', i') \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, g\}$  tel qu'il existe un unique  $(n, p) \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, l_i(1) - 1\}$  vérifiant

$$N = l_{\sigma_i(1)}(n) + \dots + l_{\sigma_i(p)}(n) + N'$$

avec

$$i' = \sigma_i(p+1) \quad \text{et} \quad 0 \leq N' < l_{i'}(n).$$

En particulier, cette décomposition conduit à la majoration

$$\begin{aligned} |V_N^i(\alpha)| &\leq |S_n^{\sigma_i(1)}(\alpha)| + \dots + |S_n^{\sigma_i(p)}(\alpha)| + |V_{N'}^{i'}(\alpha)| \\ &\leq l \sum_{j=1}^g |S_n^j(\alpha)| + |V_{N'}^{i'}(\alpha)| \end{aligned}$$

avec  $N' < N$  (en posant  $l = \|L(1)\|_\infty$ ). On obtient ainsi en partant de  $(N, 1)$  et en itérant un nombre fini de fois:

$$\begin{aligned} |V_N^1(\alpha)| &\leq l \sum_{j=1}^g \sum_{k < n} |S_k^j(\alpha)| \\ &\leq l \sum_{i \in I} \sum_{k < n} |S_k^i(\alpha)| \end{aligned}$$

car  $S_k^j(\alpha) = 0$  pour  $j \notin I$ . On en déduit, puisque  $V_N^1(0) \geq S_{n-1}^1(0)$ ,

$$\frac{|V_N^1(\alpha)|}{V_N^1(0)} \leq l \sum_{i \in I} \frac{1}{S_{n-1}^i(0)} \sum_{k < n} |S_k^i(\alpha)|.$$

Il nous suffit donc de vérifier que pour tout  $i \in I$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n-1}^i(0)} \sum_{k < n} |S_k^i(\alpha)| = 0.$$

Considérons  $(d, r) \in \mathbb{N} \times [1, +\infty[$  tel que  $M_{it}^{(n)} \approx n^d r^n$  (cf. lemme 1). D'après la proposition 2,  $r = \sup_{\tau(h)=1} \rho(M^{(h)}) > 1$  (en notant  $\tau(h)$  le type de  $h$ ), et il existe  $\beta_1 > 0$  tel que pour tout  $n$  assez grand:

$$S_{n-1}^i(0) = M_{it}^{(n-1)} \geq \beta_1 (n-1)^d r^{n-1}.$$

— Si  $i \in I_h$  avec  $h$  the type 1, il existe  $\beta_2 > 0$  et  $k_0 \in \mathbb{N}$  d'après le lemme 1, tels que  $\forall k \geq k_0$ ,  $S_k^i(0) = M_{it}^{(k)} \leq \beta_2 k^d r^k$ . On a donc pour tout  $n$  assez grand

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_{n-1}^i(0)} \sum_{k < n} |S_k^i(\alpha)| &\leq \frac{1}{\beta_1 (n-1)^d r^{n-1}} \sum_{k < n} S_k^i(0) |w_k^i(\alpha)| \\ &\leq \frac{1}{\beta_1 (n-1)^d r^{n-1}} \sum_{k < k_0} S_k^i(0) \\ &\quad + \frac{\beta_2}{\beta_1 r^{n-1}} \sum_{k_0 \leq k < n} r^k |w_k^i(\alpha)| \end{aligned}$$

avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k^i(\alpha) = 0$  d'après l'étape 1, d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n-1}^i(0)} \sum_{k < n} |S_k^i(\alpha)| = 0.$$

— Si  $i \in I_h$  avec  $h$  de type 2,  $\rho(M^{\cup_{\tau(h)=2^h}}) \in \{0, 1\}$  et par conséquent il existe un polynôme  $P$  tel que pour tout  $n$  assez grand

$$\frac{1}{S_{n-1}^i(0)} \sum_{k < n} |S_k^i(\alpha)| \leq \frac{1}{S_{n-1}^i(0)} \sum_{k < n} M_{it}^{(k)} \leq \frac{P(n)}{(n-1)^d r^{n-1}},$$

et on a encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n-1}^1(0)} \sum_{k < n} |S_k^i(\alpha)| = 0. \quad \blacksquare$$

Si  $m \in A^{\mathbb{N}}$  est engendrée par un automate fini,  $m$  est point-fixe d'une substitution de longueur constante  $l$  (cf. [2]). Dans ce cas,  $\Theta = \{l\}$  et on retrouve le résultat de [8]:

**COROLLAIRE 3.** *Si  $m$  est engendré par un automate fini et si  $l$  vérifie l'hypothèse (H), alors  $\mathcal{B}([m]_l) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .*

D'après la proposition 1, le théorème que nous venons de démontrer signifie qu'il suffit que  $u$  ne soit pas trop "lacunaire" pour que  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u)$  soit inclus dans une extension de degré fini de  $\mathbb{Q}$ :

**COROLLAIRE 4.** *Si  $u$  est une suite substitutive d'entiers telle que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \log \text{Card}\{n < N, n \in u\} > 0,$$

*alors  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u) \subset \bigcup_{\theta \in \Theta} \mathbb{Q}(\theta)$ .*

L'hypothèse (H) sert à écarter les suites trop "lacunaires," telles que  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dont l'ensemble normal n'est certainement pas de complémentaire dénombrable.

Dans [8] nous avons montré que si  $\Sigma$  est une substitution de longueur constante, alors l'hypothèse (H) est une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u)$  soit dénombrable.

Il serait intéressant de généraliser ce résultat au cas des substitutions de longueur quelconque, un exemple typique de suite ne vérifiant pas l'hypothèse (H) étant (fig. 3):

**EXEMPLE 6.**

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, & \Sigma(a_1) &= a_1 a_2, \\ & & \Sigma(a_2) &= a_2 a_3, \\ & & \Sigma(a_3) &= a_3 a_4 a_4, \\ & & \Sigma(a_4) &= a_4 a_4, \end{aligned}$$

$$m = a_1 a_2 a_2 a_3 a_2 a_3 a_3 a_4 a_4 a_2 a_3 \dots$$

$[m]_3$  est la suite croissante des entiers de la forme

$$2^{n_1 + n_2} + 2^{n_1} - \frac{1}{2} n_1 (n_1 + 1) - \frac{1}{2} (n_2 - 1) n_2 - n_1 n_2 - 1, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^{*2}.$$



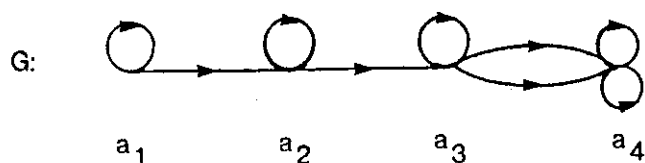


FIGURE 3

CONJECTURE. Si  $u$  est une suite substitutive d'entiers telle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} (1/\log N) \log \text{Card}\{n < N, n \in u\} = 0$ , alors  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}(u)$  a la puissance du continu.

## BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, Graphes et hypergraphes, Dunod, 1973.
2. G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE, ET G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), 401–418.
3. A. COBHAM, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory* **6**, No. 2 (1972), 164–192.
4. J. COQUET, Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition, *J. Number Theory* **16**, No. 3 (1983), 363–375.
5. F. M. DEKKING AND M. KEANE, Mixing properties of substitutions, *Z. Wahr. Verw. Geb.* **42** (1978), 23–33.
6. B. HOST, Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable, *J. Ergodic Theory*.
7. J. C. MARTIN, Minimal flows arising from substitutions of non-constant length, *Math. Syst. Theory* **7**, No. 1 (1973), 73–82.
8. C. MAUDUIT, Automates finis et ensembles normaux, *Ann. Inst. Fourier*, **36**, fasc. 2 (1986), 1–25.
9. C. MAUDUIT, Morphismes unispectraux, *Theor. Comp. Sci.* **46** (1986), 1–11.
10. C. PISOT, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **7** (1938), 205–248.
11. M. QUEFFELEC, Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques, Thèse d'état, Université Paris XIII, 1984.
12. G. RAUZY, Propriétés statistiques de suites arithmétiques, Presses Universitaires de France, 1976.
13. G. RAUZY, Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 147–178.
14. G. ROZENBERG ET A. SALOMAA, The mathematical theory of  $L$  systems, Academic Press, New York, 1980.
15. R. SALEM, Algebraic numbers and Fourier analysis, Heath mathematical monographs, 1963.
16. R. S. VARGA, Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, NJ, 1962.
17. T. VIJAYARAGHAVAN, On the fractional parts of the powers of a number. II, *Proc. Cambridge. Philos. Soc.* **37** (1941), 349–357.

## Caractérisation des ensembles normaux substitutifs

Christian Mauduit

CNRS UA 225, Université d' Aix-Marseille II, Département Mathématique-Informatique,  
70, route Léon-Lachamp, F-13288 Marseille Cedex 9, France

**Résumé.** Nous montrons qu'une partie  $B$  de  $\mathbf{R}$  est l'ensemble normal d'une suite d'entiers engendrée par une substitution irréductible si et seulement si  $\mathbf{R} \setminus B$  est une extension algébrique de degré fini de  $\mathbf{Q}$ .

### I. Introduction

Si  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite d'entiers, on note  $\mathcal{B}(u)$  l'ensemble normal associé à  $u$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels  $\alpha$  tels que la suite  $(u_n \alpha)_{n \in \mathbf{N}}$  est équirépartie modulo 1;  $B \subset \mathbf{R}$  est dit normal s'il existe une suite  $u$  telle que  $B = \mathcal{B}(u)$  (cette notion a été introduite par M. Mendès-France dans [11]).

Dans [14], G. Rauzy a donné une caractérisation complète des ensembles normaux:  $B$  est normal si et seulement si (i)  $0 \notin B$ ,  $B + 1 = B$ ; (ii)  $\forall q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ ,  $qB \subset B$ ; (iii) il existe une suite de fonctions réelles continues  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha) = 0$  si et seulement si  $\alpha \in B$ .

Par contre, on ne sait pas caractériser les ensembles normaux  $B$  pour lesquels il existe une suite croissante d'entiers  $u$  telle que  $B = \mathcal{B}(u)$ , et ce problème semble être d'une très grande difficulté.

Dans cet article, nous nous intéressons au cas des suites croissantes d'entiers engendrées par une substitution irréductible  $\Sigma$  sur un alphabet fini. On dit que  $B \subset \mathbf{R}$  est un ensemble normal substitutif (ou  $\Sigma$ -normal), s'il existe une telle suite  $u$  vérifiant  $B = \mathcal{B}(u)$ . Nous donnons la caractérisation suivante des ensembles  $\Sigma$ -normaux:  $B$  est  $\Sigma$ -normal si et seulement si  $\mathbf{R} \setminus B$  est une extension algébrique de degré fini de  $\mathbf{Q}$ . Le problème que nous étudions ici se situe dans le cadre de l'étude des propriétés statistiques des suites d'entiers engendrées par un algorithme simple (c. [1, 3, 5, 6, 8–10]) et est relié à l'étude des propriétés des systèmes dynamiques associés aux substitutions de longueur quelconque (cf. [2, 4, 5, 7, 13, 16]).

### II. Rappel sur les familles de Pisot

L'objet de cette partie (lemme 2) est de préciser un résultat classique de C. Pisot et R. Salem (cf. [12, 18]).

**Lemme 1.** (i) Si  $d \in \mathbf{N}$ , alors

$$\sum_{n \geq 0} n^d z^n = \frac{\Pi_d(z)}{(1-z)^{d+1}} \text{ avec } \Pi_d \in \mathbf{Z}[X], \deg(\Pi_d) = d \text{ et } \Pi_d(1) \neq 0.$$

(ii) Si  $P \in \mathbf{Z}[X]$  avec  $\deg(P) = d$ , alors

$$\sum_{n \geq 0} P(n) z^n = \frac{\Pi(z)}{(1-z)^{d+1}} \text{ avec } \Pi \in \mathbf{Z}[X], \deg(\Pi) = d \text{ et } \Pi(1) \neq 0.$$

*Démonstration.* (i) résulte trivialement de la récurrence

$$\begin{aligned} \Pi_0(z) &= 1, \\ \Pi_{d+1}(z) &= (d+1)z\Pi_d(z) + (1-z)z\Pi'_d(z). \end{aligned}$$

On en déduit (ii) en remarquant que si

$$P(z) = \sum_{i=0}^d p_i z^i,$$

alors

$$\sum_{n \geq 0} P(n) z^n = \frac{\Pi(z)}{(1-z)^{d+1}} \quad \text{où} \quad \Pi(z) = \sum_{i=0}^d p_i (1-z)^{d-i} \Pi_i(z). \quad \square$$

**Lemme 2.** Soient  $\theta_1, \dots, \theta_r$  des nombres algébriques distincts de module supérieur ou égal à 1 tels qu'il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbf{R} \setminus \{0\})^r$  et  $(P_1, \dots, P_r) \in (\mathbf{Z}[X] \setminus \{0\})^r$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i(n) \theta_i^n \right) = 1,$$

où  $e(x) = e^{2i\pi x}$ .

Alors,

(i)  $\theta_1, \dots, \theta_r$  sont des entiers algébriques tels que, si  $\theta$  est conjugué à l'un d'entre eux et  $\theta \notin \{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ , alors  $|\theta| < 1$ .

(ii) pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\alpha_i \in \mathbf{Q}(\theta_i)$ .

*Démonstration.* Posons  $\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i(n) \theta_i^n = c_n + \varepsilon_n$  où  $c_n$  est un entier,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n.$$

● Montrons d'abord que  $f(z)$  est une fraction rationnelle.

Notons  $d_i = \deg(P_i)$ ,  $d = \sup_{i \in \{1, \dots, r\}} d_i$ , et considérons  $(\gamma_0, \dots, \gamma_k) \in \mathbf{Z}^{k+1}$  tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$\sum_{j=0}^k \gamma_j \theta_i^j = \sum_{j=0}^k j \gamma_j \theta_i^j = \dots = \sum_{j=0}^k j^d \gamma_j \theta_i^j = 0$$

(on peut prendre par exemple pour  $(\gamma_0, \dots, \gamma_k)$  les coefficients du polynôme obtenu en élevant à la puissance  $(d+1)$  le produit des polynômes minimaux des  $\theta_i$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ ). On a alors:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^k \alpha_i P_i(n+j) \gamma_j \theta_i^{n+j} \\ &= \sum_{j=0}^k (\gamma_j c_{n+j} + \gamma_j \varepsilon_{n+j}), \end{aligned}$$

ce qui implique, puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^k \gamma_j c_{n+j} \in \mathbf{Z},$$

que pour  $n \geq n_0$  on a

$$\sum_{j=0}^k \gamma_j c_{n+j} = 0.$$

Il s'ensuit que  $f(z)$  est une fraction rationnelle, que l'on notera

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{avec} \quad (P, Q) \in \mathbf{Z}[X]^2 \quad \text{et} \quad Q(0) = 1 \quad (\text{cf. lemme de Fatou}).$$

• Posons  $g(z) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n z^n$ . On a

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i(n) \theta_i^n z^n - \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^r \frac{\alpha_i \Pi_i(\theta_i z)}{(1 - \theta_i z)^{d_i+1}} - \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\Pi_i \in \mathbf{Z}[X]$  et  $\Pi_i(1) \neq 0$  (cf. lemme 1). Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ , le rayon de convergence de  $g(z)$  est supérieur ou égal à 1 et  $g(z)$  n'a pas de pôle de module 1. On en déduit que pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\frac{1}{\theta_i}$  est racine de  $Q(z) = 1 + q_1 z + \dots + q_k z^k$  avec la multiplicité  $(d_i + 1)$  et que toutes les autres racines de  $Q$  sont de module supérieur à 1. Ceci nous montre que le polynôme à coefficients entiers  $z^k + q_1 z^{k-1} + \dots + q_k$  admet  $\theta_1, \dots, \theta_r$  pour racines, toutes ses autres racines étant de module strictement inférieur à 1, ce qui démontre la partie (i) du lemme.

Enfin, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$  on a

$$(1 - \theta_i z)^{d_i+1} g(z) = \alpha_i \Pi_i(\theta_i z) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \alpha_j \Pi_j(\theta_j z) \frac{(1 - \theta_i z)^{d_i+1}}{(1 - \theta_j z)^{d_i+1}} - \frac{P(z)}{Q(z)} (1 - \theta_i z)^{d_i+1},$$

et en faisant tendre  $z$  vers  $\frac{1}{\theta_i}$ :

$$\alpha_i = \frac{(-1)^{d_i+1} P(1/\theta_i)}{\Pi_i(1) Q^{(d_i)}(1/\theta_i)} \theta_i^{d_i+1} \in \mathbf{Q}(\theta_i). \quad \square$$

### III. Ensemble normal associé à une suite substitutive

Dans cette partie,  $g$  désigne un entier  $\geq 2$ ,  $A$  un alphabet à  $g$  lettres, et  $\Sigma$  une substitution sur  $A$  (c'est-à-dire une application de  $A$  dans  $A^*$  l'ensemble des mots finis sur  $A$ , prolongée à  $A^* \cup A^{\mathbf{N}}$  par concaténation).

On notera  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ ,

$$\Sigma(a_i) = a_{\sigma_i(1)} \dots a_{\sigma_i(l_i(1))},$$

où  $l_i(n)$  désigne, pour tout entier  $n$ , la longueur du mot  $\Sigma^n(a_i)$  et où  $\sigma_i$  est une application de  $\{1, \dots, l_i(1)\}$  dans  $\{1, \dots, g\}$  (on suppose  $\sigma_i(1) = 1$ ).

Nous supposons enfin  $\Sigma$  irréductible, c'est-à-dire que pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$  il existe un entier  $n$  tel que le mot  $\Sigma^n(a_i)$  contienne la lettre  $a_j$ .

**Définition 1.** Soit  $M = (M_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}$  la matrice définie par:

$$M_{ij} = \text{card}(\sigma_i^{-1}(\{j\})) \text{ pour tout } (i, j).$$

On dit que  $M$  est la matrice associée à la substitution  $\Sigma$ , ou  $\Sigma$ -matrice (cf. [17]).

Pour tout  $u \in \mathbf{R}^g$ , on note  ${}^T u$  le vecteur transposé de  $u$ .

On remarque que si  $L(n) = ({}^T l_1(n), \dots, {}^T l_g(n))$  alors  $L(n) = M^n L(0) = M^n ({}^T 1, \dots, {}^T 1)$ .

Pour tout entier  $n$ , on pose:

$$M^n = (M_{ij}^{(n)})_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}.$$

**Lemme 3.** Soit  $\rho$  le rayon spectral de  $M$ . Il existe  $(\beta_1, \beta_2) \in (\mathbf{R}^+ \setminus \{0\})^2$  tel que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, g\}^2, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \beta_1 \rho^n \leq M_{ij}^{(n)} \leq \beta_2 \rho^n.$$

*Démonstration.* En effet,  $M$  étant une matrice primitive à coefficients entiers positifs on a, en désignant par  $\|M^n\|$  la norme spectrale de  $M^n$  (cf. [19]):

$$\exists (\beta_1, \beta_2) \in (\mathbf{R}^+ \setminus \{0\})^2 \forall n \in \mathbf{N}, \quad \beta_1 \rho^n \leq \|M^n\| \leq \beta_2 \rho^n.$$

Donc si

$$M_{i_0 j_0}^{(n)} = \sup_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2} |M_{ij}^{(n)}|, \quad \text{on a } \beta_1 \rho^n \leq M_{i_0 j_0}^{(n)} \leq \beta_2 \rho^n,$$

et on conclut en remarquant que  $M_{i_0 j_0}^{(n-2)} \leq M_{ij}^{(n)} \leq M_{i_0 j_0}^{(n+2)}$  pour tout  $(i, j)$ .  $\square$

**Définition 2.** Si  $m \in A^* \cup A^{\mathbb{N}}$  et si  $t \in \{1, \dots, g\}$ , considérons la suite croissante  $[m]_t$  des entiers  $n$  tels que la  $(n+1)^{\text{ième}}$  lettre du mot  $m$  soit  $a_t$ . On dit que  $[m]_t$  est le support de  $m$  relatif à  $a_t$ .

D'après le critère de Weyl (cf. [15]), l'ensemble normal associé à la suite  $[m]_t$  est égal à :

$$\mathcal{B}([m]_t) = \{ \alpha \in \mathbf{R}; \forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \sum_{\substack{n \in [m]_t \\ n < N}} e(kn\alpha) \in o(\sum_{\substack{n \in [m]_t \\ n < N}} 1) \}.$$

**Définition 3.** Pour tout réel  $\alpha$  et pour tout entier  $n$ , considérons  $M(\alpha, n) = (M_{ij}(\alpha, n))_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}$  la matrice définie par :

$$M_{ij}(\alpha, n) = \sum_{k \in \sigma_i^{-1}(\{j\})} e(\sum_{k' < k} l_{\sigma_i(k')} \cdot \alpha).$$

On remarque que pour tout entier  $n$ ,  $M(0, n)$  est égale à la  $\Sigma$ -matrice  $M$ .

Nous allons maintenant définir les fonctions  $\lambda$  associées à la substitution  $\Sigma$ , qui sont au centre de notre étude.

**Définition 4.** Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$  tel que  $\sigma_i^{-1}(\{j\})$  soit non vide, notons  $k_1, \dots, k_{M_{ij}}$  la suite croissante de ses éléments.

Pour tout  $\kappa \in \{1, \dots, M_{ij}\}$ , on pose  $\lambda_{ij}^{(\kappa)} = \sum_{k' < k_\kappa} l_{\sigma_i(k')}$ ,

$$A_{ij} = \{ \lambda_{ij}^{(\kappa)}, \kappa \in \{1, \dots, M_{ij}\} \} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad A = \bigcup_{i,j=1}^g A_{ij}.$$

On remarque en particulier que si  $\Sigma$  est une substitution de longueur constante  $r$  (i.e. un  $r$ -automate fini), alors  $A = \{ \lambda \}$  où  $\lambda$  est définie par  $\lambda(n) = r^n$  pour tout entier  $n$ .

*Exemple 1.* Soit  $\Sigma$  la substitution sur  $A = \{a_1, a_2\}$  définie par  $\Sigma(a_1) = a_1 a_2 a_2$  et  $\Sigma(a_2) = a_2 a_1$ .

Alors

$$M(\alpha, n) = \begin{pmatrix} 1 & e(l_1(n)\alpha) + e((l_1(n) + l_2(n))\alpha) \\ e(l_2(n)\alpha) & 1 \end{pmatrix}$$

et  $A_{11} = A_{22} = \emptyset$ ,  $A_{12} = \{l_1, l_1 + l_2\}$ ,  $A_{21} = \{l_2\}$ , avec

$$l_1(n) = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1})$$

et

$$l_2(n) = \frac{\sqrt{2}}{4} ((1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}).$$

Soit maintenant

$$E = \{\alpha \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \lim_{n \rightarrow \infty} e(k\lambda(n)\alpha) = 1 \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda\}.$$

**Proposition 1.**  $E = \{\alpha \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \lim_{n \rightarrow \infty} e(kl_i(n)\alpha) = 1 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, g\}\}.$

*Démonstration.* En effet, s'il existe  $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(kl_i(n)\alpha) = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ , on en déduit, puisque tout élément  $\lambda$  de  $\Lambda$  est combinaison linéaire d'un certain nombre de  $l_i$ , que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(k\lambda(n)\alpha) = 1$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , c'est-à-dire  $\alpha \in E$ .

Réciproquement, soit  $\alpha \in E$  et  $i \in \{1, \dots, g\}$ . On peut supposer, quitte à itérer  $\Sigma$  qu'il existe  $j \in \{1, \dots, g\}$  tel que  $\Sigma(a_i) = \dots a_i a_j \dots$ . Ainsi, il existe  $(\lambda, \lambda') \in (\Lambda_{1,i} \cup \{0\}) \times \Lambda_{1,j}$  tel que  $\lambda' = \lambda + l_i$  et on en déduit qu'il existe  $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(kl_i(n)\alpha) = 1$ .  $\square$

*Remarque.* L'ensemble  $E$  ne dépend que de  $M$ . En particulier  $E$  ne dépend pas de l'ordre dans lequel apparaissent les lettres dans  $\Sigma(a_i)$  ( $i \in \{1, \dots, g\}$ ).

Posons pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ ,  $E_i = \{\alpha \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \lim_{n \rightarrow \infty} e(kl_i(n)\alpha) = 1\}.$

Désignons par  $\Theta_i$  l'ensemble des valeurs propres de  $M$  qui interviennent dans l'écriture de  $l_i(n)$  et par  $c$  le nombre des classes de conjugaison, notées  $\Theta_{i,\gamma}$  ( $\gamma \in \{1, \dots, c\}$ ), qui composent  $\Theta_i$ . On note  $\Theta_{i,\gamma}^+ = \{\theta \in \Theta_{i,\gamma}, |\theta| \geq 1\}$ ,  $\Theta_{i,\gamma}^- = \{\theta \in \Theta_{i,\gamma}; |\theta| < 1\}$ ,  $\Theta_i^+ = \bigcup_{\gamma=1}^c \Theta_{i,\gamma}^+$  et  $\Theta_i^- = \bigcup_{\gamma=1}^c \Theta_{i,\gamma}^-$ .

**Proposition 2.** Pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ , on a:

$$E_i = \{\alpha \in \mathbf{R}; \forall \gamma \in \{1, \dots, c\}, \exists R_\gamma \in \mathbf{Q}[X] / \alpha = R_\gamma(\theta) \text{ pour tout } \theta \in \Theta_{i,\gamma}^+\}.$$

*Démonstration.* Notons  $l_i(n) = \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\theta \in \Theta_{i,\gamma}} P_\gamma(n) \theta^n$  avec, pour tout  $\gamma \in \{1, \dots, c\}$ ,  $P_\gamma \in \mathbf{Q}[X] \setminus \{0\}$ .

Fixons maintenant  $\gamma_0 \in \{1, \dots, c\}$  et  $\theta_0 \in \Theta_{i,\gamma_0}^+$ . D'après la seconde partie du lemme 2, on a  $E_i \subset \bigcap_{\theta \in \Theta_i^+} \mathbf{Q}(\theta)$  et donc, si  $\alpha \in E_i$  il existe  $R_{\gamma_0} \in \mathbf{Q}[X]$  tel que  $\alpha = R_{\gamma_0}(\theta_0)$ .

De la même façon, pour tout  $\theta \in \Theta_i^+$ , il existe  $R^\theta \in \mathbf{Q}[X]$  tel que  $\alpha = R^\theta(\theta)$  (avec  $R^{\theta_0} = R_{\gamma_0}$ ). Soit  $d \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  tel que  $d \cdot R_{\gamma_0} \in \mathbf{Z}[X]$  et  $d \cdot P_\gamma \in \mathbf{Z}[X]$  pour tout  $\gamma \in \{1, \dots, c\}$ .

Pour tout  $\gamma \in \{1, \dots, c\}$ ,  $\sum_{\theta \in \Theta_{i,\gamma}} \theta^n$  est un entier et donc

$$d \sum_{\theta \in \Theta_{i,\gamma}} R_{\gamma_0}(\theta) \theta^n \quad \text{et} \quad d^2 \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\theta \in \Theta_{i,\gamma}} P_\gamma(n) R_{\gamma_0}(\theta) \theta^n$$

sont des entiers. Ceci nous montre que

$$\alpha d^2 l_i(n) - d^2 \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\theta \in \Theta_{i,\gamma}} P_\gamma(n) R_{\gamma_0}(\theta) \theta^n = d^2 \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\theta \in \Theta_{i,\gamma}} P_\gamma(n) (R_{\gamma_0}(\theta_0) - R_{\gamma_0}(\theta)) \theta^n$$

converge vers 0 modulo 1.

Il en est donc de même de

$$\begin{aligned} & d^2 \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\theta \in \Theta_{i,\gamma}} P_\gamma(n) (R_{\gamma_0}(\theta_0) - R_{\gamma_0}(\theta)) \theta^n \\ &= d^2 \sum_{\substack{\theta \in \Theta_{i,\gamma_0} \\ \theta \neq \theta_0}} P_{\gamma_0}(n) (R^\theta(\theta) - R_{\gamma_0}(\theta)) \theta^n + d^2 \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \gamma_0}}^c \sum_{\theta \in \Theta_{i,\gamma}} P_\gamma(n) (R^\theta(\theta) - R_{\gamma_0}(\theta)) \theta^n. \end{aligned}$$

On en déduit, en appliquant la première partie du lemme 2 la famille  $\Theta_i^+ \setminus \{\theta_0\}$ , que pour tout  $\theta \in \Theta_{i,\gamma_0}^+$ ,  $R^\theta(\theta) = R_{\gamma_0}(\theta)$ .  $\square$

*Remarque.* En particulier,  $E_i$  est une extension algébrique de degré fini de  $\mathbf{Q}$ . On remarquera que  $E_i$  est en fait le corps associé, par la correspondance de Galois, au sous-groupe formé des permutations qui laissent stable chacune des classes de conjugaison  $\Theta_{i,\gamma}^+$  ( $\gamma \in \{1, \dots, c\}$ ).

On vérifie aisément que  $E = \bigcap_{i=1}^g E_i$ . Ceci nous permet d'énoncer:

**Proposition 3.** *E est une extension algébrique de degré fini de  $\mathbf{Q}$ .*

Nous allons maintenant montrer les propositions 4 et 5 qui constituent le théorème suivant:

**Théorème 1.** *Si m est un point fixe de la substitution irréductible  $\Sigma$ , alors*

$$\mathcal{B}([m]_t) = \mathbf{R} \setminus E \quad \text{pour tout } t \in \{1, \dots, g\}.$$

On peut supposer que  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma^n(a_1)$  et, quitte à itérer  $\Sigma$ , que  $M > 0$ .

**Proposition 4.**  $\mathcal{B}([m]_t) \supset \mathbf{R} \setminus E$ .



*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus E$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$  et pour tout entier  $N$ , on pose

$$n(i) = \inf \{n \in \mathbf{N}; N \leq l_i(n)\} \quad \text{et} \quad V_N^i(\alpha) = \sum_{\substack{p \in [\Sigma^{n(i)}(a_i)]_k \\ p < N}} e(p\alpha).$$

Nous allons montrer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V_N^i(\alpha)}{V_N^i(0)} = 0$ , ce qui nous permettra d'affirmer que  $\alpha \in \mathcal{B}([m]_i)$ . Pour cela, considérons

$$S_n^i(\alpha) = V_{l_i(n)}^i(\alpha) = \sum_{p \in [\Sigma^n(a_i)]_k} e(p\alpha),$$

$$w_n^i(\alpha) = \frac{S_n^i(\alpha)}{S_n^i(0)}, \quad S_n(\alpha) = (S_n^i(\alpha))_{i \in \{1, \dots, g\}} \quad \text{et} \quad w_n(\alpha) = (w_n^i(\alpha))_{i \in \{1, \dots, g\}}.$$

On a, en posant

$$A(\alpha, n) = \left( \frac{S_n^j(0)}{S_{n+1}^i(0)} M_{ij}(\alpha, n) \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2},$$

$B(\alpha, n, n') = A(\alpha, n) \dots A(\alpha, n')$  pour  $n' \leq n$  et  $B(\alpha, n) = B(\alpha, n, 0)$ :

$$w_{n+1}(\alpha) = B(\alpha, n) w_0(\alpha).$$

On remarque que

$$B(0, n, n') = \left( \frac{S_{n'}^j(0)}{S_{n+1}^i(0)} M_{ij}^{(n-n'+1)} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}$$

est une matrice stochastique.

Soit  $\lambda_0 \in \mathcal{A}$  tel que  $e(\lambda(n) \cdot \alpha)$  ne converge pas vers 1; on note  $\lambda_0 \in A_{i_0 j_0}$ . Il existe  $\delta \in ]0, 1[$  et une suite strictement croissante d'entiers  $(N_k)_{k \in \mathbf{N}}$  tels que

- $N_0 \geq 1$ ,
  - $\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, N_{k+1} - N_k \geq 3$  et
  - $\forall k \in \mathbf{N}, 0 < |M_{i_0 j_0}(\alpha, N_k)| \leq (1 - \delta) M_{i_0 j_0}$ ,
- cette dernière condition pouvant s'écrire

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad 0 < |A_{i_0 j_0}(\alpha, N_k)| \leq (1 - \delta) A_{i_0 j_0}(0, N_k).$$

Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$ , on a:

$$B_{ij}(\alpha, N_k + 1, N_k - 1) = A_{i i_0}(\alpha, N_k + 1) A_{i_0 j_0}(\alpha, N_k) A_{j_0 j}(\alpha, N_k - 1) \\ + \sum_{(\lambda, \mu) \neq (i_0, j_0)} A_{i \lambda}(\alpha, N_k + 1) A_{\lambda \mu}(\alpha, N_k) A_{\mu j}(\alpha, N_k - 1),$$

et donc

$$\begin{aligned} & |B_{ij}(\alpha, N_k + 1, N_k - 1)| \\ & \leq B_{ij}(0, N_k + 1, N_k - 1) - \delta A_{i i_0}(0, N_k + 1) A_{i_0 j_0}(0, N_k) A_{j_0 j}(0, N_k - 1) \\ & \leq \left(1 - \frac{\beta_1 \delta}{\beta_2 \rho^3}\right) B_{ij}(0, N_k + 1, N_k - 1), \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} A_{i i_0}(0, N_k + 1) A_{i_0 j_0}(0, N_k) A_{j_0 j}(0, N_k - 1) &= \frac{S_{N_k-1}^j}{S_{N_k+2}^i} M_{i i_0} M_{i_0 j_0} M_{i_0 j} \\ &\geq \frac{S_{N_k-1}^j}{S_{N_k+2}^i} = \frac{M_{j i}^{(N_k-1)}}{M_{i i}^{(N_k+2)}} \geq \frac{\beta_1}{\beta_2 \rho^3} \text{ (avec les notations du lemme 3).} \end{aligned}$$

On a donc, en posant

$$C = 1 - \frac{\beta_1 \delta}{\beta_2 \rho^3} \in ]0, 1[ , \|B(\alpha, N_{k+1}, N_{k-1})\|_\infty \leq C \|B(0, N_k + 1, N_k - 1)\|_\infty$$

pour tout entier  $k$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , choisissons  $k$  tel que  $C^{k+1} \leq \varepsilon$ . Alors, si  $n \geq N_k + 2$ ,  $B(\alpha, n) = B(\alpha, n, N_k + 2) B(\alpha, N_k + 1, N_k - 1) \dots B(\alpha, N_0 - 1, 0)$  et  $\|B(\alpha, n)\|_\infty \leq C^{k+1} \leq \varepsilon$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} B(\alpha, n) = 0$  et donc que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\alpha) = 0$ .

Pour montrer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V_N^1(\alpha)}{V_N^1(0)} = 0$ , nous allons écrire tout entier naturel  $N$

dans une "base" naturellement associée à la substitution  $\Sigma$ :

A tout  $(N, i) \in \mathbf{N} \times \{1, \dots, g\}$  on peut associer un unique  $(N', i') \in \mathbf{N} \times \{1, \dots, g\}$  tel qu'il existe un unique  $(n, p) \in \mathbf{N} \times \{1, \dots, l_i(1) - 1\}$  tel que  $N = l_{\sigma_i(1)}(n) + \dots + l_{\sigma_i(p)}(n) + N'$  avec  $i' = \sigma_i(p+1)$  et  $0 \leq N' < l_{i'}(n)$ .

Cette décomposition conduit à la majoration

$$\begin{aligned} |V_N^i(\alpha)| &\leq |S_n^{\sigma_i(1)}(\alpha)| + \dots + |S_n^{\sigma_i(p)}(\alpha)| + V_{N'}^{i'}(\alpha) \\ &\leq l \sum_{j=1}^g |S_n^j(\alpha)| + |V_{N'}^{i'}(\alpha)|, \end{aligned}$$

avec  $N' < N$  (en posant  $l = \|L(1)\|_\infty$ ).

On obtient ainsi en partant de  $(N, 1)$  et en itérant un nombre fini de fois:

$$|V_N^1(\alpha)| \leq l \sum_{i=1}^g \sum_{k < n} |S_k^i(\alpha)|$$

(en posant  $n = n(1) = \inf\{m \in \mathbf{N}; N \leq l_1(m)\}$ ).

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{|V_N^1(\alpha)|}{V_N^1(0)} &\leq l \sum_{i=1}^g \frac{1}{S_{n-1}^i(0)} \sum_{k < n} S_k^i(0) |w_k^i(\alpha)| \\ &\leq \frac{l\beta_2}{\beta_1} \sum_{i=1}^g \frac{1}{\rho^{n-1}} \sum_{k < n} \rho^k |w_k^i(\alpha)| \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 3 à  $S_{n-1}^i(0) = M_{1i}^{(n-1)}$  et  $S_k^i(0) = M_{1i}^{(k)}$ .

Comme, pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} |w_k^i(\alpha)| = 0$ , on en déduit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|V_N^1(\alpha)|}{V_N^1(0)} = 0. \quad \square$$

**Proposition 5.**  $\mathcal{B}([m]_i) \subset \mathbf{R} \setminus E$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in E$  et  $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(kl_i(n)\alpha) = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ .

Nous allons montrer que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} |w_n^1(k\alpha)| \neq 0$ , ce qui assurera, d'après le critère

de Weyl, que  $\alpha \notin \mathcal{B}([m]_i)$ . Quitte à poser  $\alpha' = k\alpha$ , nous pourrions prendre  $k = 1$  pour la suite.

Considérons  $K \in ]0, 1[$  tel que pour tout entier  $n$ ,  $|1 - e(\lambda(n)\alpha)| \leq K^n$  (par exemple,  $K = \sup_{\theta \in \Theta^-} \sqrt{|\theta|}$ ).

On en déduit que pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$  et pour tout entier  $n$ ,

$$|A_{ij}(\alpha, n) - A_{ij}(0, n)| \leq \frac{S_n^j(0)}{S_{n+1}^i(0)} |M_{ij}(\alpha, n) - M_{ij}| \leq K^n,$$

Pour tout  $\varepsilon$  donné dans  $]0, 1[$ , on peut supposer, quitte à itérer  $\Sigma$ , que  $K \leq \frac{\varepsilon}{g + \varepsilon}$ .

Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2$ , posons

$$A_{ij}(\alpha, n) = A_{ij}(0, n) + \varepsilon_{ij}(\alpha, n)$$

avec  $|\varepsilon_{ij}(\alpha, n)| \leq K^n$ ,

$$B_{ij}(\alpha, n) = B_{ij}(0, n) + E_{ij}(\alpha, n)$$

et

$$e(\alpha, n) = \sup_{(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2} |E_{ij}(\alpha, n)|.$$

On a alors

$$\begin{aligned} B_{ij}(\alpha, n+1) &= \sum_{k=1}^g A_{ik}(\alpha, n+1) B_{kj}(\alpha, n) \\ &= \sum_{k=1}^g (A_{ik}(0, n+1) + \varepsilon_{ik}(\alpha, n+1)) (B_{kj}(0, n) + E_{kj}(\alpha, n)) \\ &= B_{ij}(0, n+1) + E_{ij}(\alpha, n+1), \end{aligned}$$

avec

$$E_{ij}(\alpha, n+1) = \sum_{k=1}^g \varepsilon_{ik}(\alpha, n+1) B_{kj}(\alpha, n) + \sum_{k=1}^g A_{ik}(\alpha, n+1) E_{kj}(\alpha, n).$$

Donc

$$|E_{ij}(\alpha, n+1)| \leq K^{n+1} \sum_{k=1}^g |B_{kj}(0, n)| + e(\alpha, n) \sum_{k=1}^g |A_{ik}(\alpha, n+1)| \leq g \cdot K^{n+1} + e(\alpha, n)$$

et  $e(\alpha, n+1) \leq e(\alpha, n) + gK^{n+1}$ , d'où, pour tout entier  $n$ ,  $e(\alpha, n) \leq \frac{gK}{1-K} \leq \varepsilon$ .

On a donc, en posant  $E(\alpha, n) = (E_{ij}(\alpha, n))_{(i, j) \in \{1, \dots, g\}^2}$ :

$$\begin{aligned} w_{n+1}(\alpha) &= B(\alpha, n) w_0(\alpha) \\ &= B(0, n) w_0(\alpha) + E(\alpha, n) w_0(\alpha) \\ &= w_{n+1}(0) + E(\alpha, n) w_0(\alpha), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque  $w_{n+1}(0) = {}^T(1, \dots, 1)$  et

$$w_0(\alpha) = {}^T(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad w_{n+1}^1(\alpha) = 1 + E_{1t}(\alpha, n)$$

rang  $t$

et donc pour tout entier  $n$ ,  $|w_n^1(\alpha) - 1| \leq \varepsilon$ , d'où  $\liminf_{n \rightarrow \infty} |w_n^1(\alpha)| \geq 1 - \varepsilon > 0$ .  $\square$

*Exemple 2.* Si  $\Sigma$  est la substitution définie dans l'exemple 1 et

$$m = a_1 a_2 a_2 a_2 a_1 a_2 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2 \dots, \quad \text{alors } \mathcal{B}([m]_1) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$

car

$$E = \{\alpha \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \lim_{n \rightarrow \infty} e(k(1 + \sqrt{2})^n \alpha) = 1\} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

*Exemple 3.* Si  $\Sigma$  la substitution sur  $A = \{a_1 a_2 a_3 a_4\}$  définie par

$$\begin{aligned} \Sigma(a_1) &= a_1 a_1 a_2 a_3 a_3 a_4 a_4 a_4 a_4, & \Sigma(a_2) &= a_2 a_2 a_3, \\ \Sigma(a_3) &= a_3 a_3 a_4 a_4 a_4 a_4 & \text{et } \Sigma(a_4) &= a_1 a_1 a_1 a_1 a_1 a_4 a_4, \end{aligned}$$

on a

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$   $\Theta_i^+ = \{\theta_1, \theta_2\}$  et  $\Theta_i^- = \{\theta_3, \theta_4\}$ , avec

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, & \theta_2 &= 2 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, \\ \theta_3 &= 2 - \sqrt{5} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} & \text{et } \theta_4 &= 2 - \sqrt{5} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$\mathbf{Q}(\theta_1) = \mathbf{Q}(\theta_2)$  est une extension de  $\mathbf{Q}$  de degré 4 et  $E = \{\alpha \in \mathbf{R}; \exists R \in \mathbf{Q}[X], \alpha = R(\theta_1) = R(\theta_2)\}$  est l'extension de  $\mathbf{Q}$  degré 2 égale à  $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ . Pour tout  $m \in A^{\mathbf{N}}$  tel que  $\Sigma(m) = m$  et pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  on a donc:

$$\mathcal{B}([m]_i) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}(\sqrt{5}).$$

#### IV. Théorème réciproque

**Lemme 4.** Soit  $\theta$  un nombre de Pisot de degré  $g$ . Alors, il existe un entier  $\nu$  et une matrice irréductible  $M$  de taille  $g \times g$  à coefficients entiers non négatifs tels que l'ensemble des valeurs propres de  $M$  soit constitué exactement de  $\theta^\nu$  et de ses conjugués.

*Démonstration.* Notons  $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_g$  les conjugués de  $\theta$  et,  $\nu$  étant un entier fixé tel que

$$\theta^\nu > 3g + 1 \quad \text{et} \quad \sup_{i \in \{1, \dots, g\}} |\theta_i|^\nu \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2^{1-g}} - 1,$$

considérons pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$ ,  $\varphi_i = \theta_i^\nu - 1$ .

Les nombres  $\varphi_1, \dots, \varphi_g$  sont les solutions de l'équation  $x^g - s_1 x^{g-1} + \dots + (-1)^g s_g = 0$  où pour tout  $k \in \{1, \dots, g\}$ , on pose

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g} \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k} \in \mathbf{Z}.$$

On a donc pour tout  $k \in \{1, \dots, g\}$   $s_k = \varphi \cdot \psi_{k-1} + \psi_k$  avec  $\varphi = \varphi_1$ ,

$$\psi_0 = 1 \quad \text{et} \quad \psi_k = \sum_{1 < i_1 < \dots < i_k \leq g} \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k} \in \mathbf{R}$$

(on remarque que  $\psi_g = 0$ ).

Montrons par récurrence sur  $k$  que la propriété  $(H_k)$  suivante est vraie pour tout  $k \in \{1, \dots, g\}$ :

$$(H_k) \quad \forall i \in \{1, \dots, g-k\} \quad \sum_{i < i_1 < \dots < i_k \leq g} \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k} = (-1)^k C_{g-i}^k (1 + \varepsilon_k(i)),$$

avec  $|\varepsilon_k(i)| < (\frac{3}{2})^{2^{k-s}} - 1$ .

En effet  $(H_1)$  est vraie, et si l'on suppose  $i \in \{1, \dots, g-k-1\}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i < i_1 < \dots < i_{k+1} \leq g} \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_{k+1}} &= \sum_{i < i_1 \leq g-k} \varphi_{i_1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1} \leq g} \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_{k+1}} \\ &= \sum_{i < i_1 \leq g-k} (-1 + \theta_{i_1}^v) (-1)^k C_{g-i_1}^k (1 + \varepsilon_k(i_1)) \\ &= (-1)^{k+1} C_{g-i}^{k+1} + (-1)^k \sum_{i < i_1 \leq g-k} C_{g-i_1}^k (\theta_{i_1}^v + \theta_{i_1}^v \varepsilon_k(i_1) - \varepsilon_k(i_1)) \\ &= (-1)^{k+1} C_{g-i}^{k+1} (1 + \varepsilon_{k+1}(i)), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}(i)| &\leq \frac{1}{C_{g-i}^{k+1}} \sum_{i < i_1 \leq g-k} C_{g-i_1}^k [(\frac{3}{2})^{2^{1-s}} - 1 + ((\frac{3}{2})^{2^{1-s}} - 1)((\frac{3}{2})^{2^{k-s}} - 1) + ((\frac{3}{2})^{2^{k-s}} - 1)] \\ &\leq (\frac{3}{2})^{2^{1-s} + 2^{k-s}} - 1 \leq (\frac{3}{2})^{2^{k+1-s}} - 1, \end{aligned}$$

ce qui démontre  $(H_{k+1})$ .

En particulier, on a pour tout  $k \in \{1, \dots, g\}$ ,

$$\psi_k = (-1)^k C_{g-1}^k (1 + \varepsilon_k) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_k| \leq (\frac{3}{2})^{2^{k-s}} - 1$$

et

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} s_k &= (\varphi C_{g-1}^{k-1} (1 + \varepsilon_{k-1}) - C_{g-1}^k (1 + \varepsilon_k)) \\ &= C_{g-1}^{k-1} (1 + \varepsilon_{k-1}) \left( \varphi - \frac{g-k+1}{k} \frac{1 + \varepsilon_k}{1 + \varepsilon_{k-1}} \right) > 0, \end{aligned}$$

car

$$\frac{g-k+1}{k} \frac{1 + \varepsilon_k}{1 + \varepsilon_{k-1}} \leq 3g \quad \text{et} \quad \varphi = \theta^v - 1 > 3g.$$

Considérons alors la matrice irréductible à coefficients entiers non négatifs  $\mu = (\mu_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}$  définie par

$$\begin{aligned} \mu_{i1} &= (-1)^{i+1} s_i & \text{si } i \in \{1, \dots, g\} \\ \mu_{ii+1} &= 1 & \text{si } i \in \{1, \dots, g-1\} \\ \mu_{ij} &= 0 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

On vérifie aisément que les valeurs propres de  $\mu$  sont  $\varphi_1, \dots, \varphi_g$  et par suite  $\theta_1^v, \dots, \theta_g^v$  sont les valeurs propres de  $M = \mu + I$ .  $\square$

**Théorème 2.**  $B \subset \mathbf{R}$  est un ensemble  $\Sigma$ -normal si et seulement si  $\mathbf{R} \setminus B$  est une extension algébrique de degré fini de  $\mathbf{Q}$ .

*Démonstration.* Nous avons vu (théorème 1) que si  $B$  est un ensemble  $\Sigma$ -normal, alors  $\mathbf{R} \setminus B$  est une extension algébrique de degré fini de  $\mathbf{Q}$ .

Réciproquement, soit  $F$  une extension algébrique réelle de degré  $g$  de  $\mathbf{Q}$  et soit  $\theta$  un nombre de Pisot tel que  $F = \mathbf{Q}(\theta)$  (cf. [18]).

Considérons, avec les notations du lemme 4, la matrice  $M = (M_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, g\}^2}$  associée à  $\theta$  et la substitution  $\Sigma$  définie sur  $A = \{a_1, \dots, a_g\}$  par:

$$\Sigma(a_i) = a_1^{M_{i1}} \dots a_j^{M_{ij}} \dots a_g^{M_{ig}} \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, g\}.$$

Alors, si  $m$  est le point fixe de  $\Sigma$  commençant par  $a_1$  et  $u = [m]_1$  la suite d'entiers engendrée par  $m$  et  $a_1$ , il résulte du théorème 1 que  $\mathcal{B}(u) = \mathbf{R} \setminus E$ , où

$$E = \{\alpha \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \lim e(k\theta^v \alpha) = 1\} = \mathbf{Q}(\theta^v).$$

De plus,  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(\theta^{vn} \cdot \theta) = 1$  ce qui implique  $\theta \in \mathbf{Q}(\theta^v)$  (cf. lemme 2) et donc  $\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\theta^v)$ .

Par conséquent,  $\mathcal{B}(u) = \mathbf{R} \setminus E = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{R} \setminus F$  et  $\mathbf{R} \setminus F$  est un ensemble  $\Sigma$ -normal.  $\square$

*Remerciements.* je tiens à remercier Pierre Liardet et Gérard Rauzy pour tout l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail ainsi que pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir.

## Références

1. Coquet, J.: Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition. *J. Number Theory*, 16, 363–375 (1983)
2. Dekking, F.M., Keane, M.: Mixing properties of substitutions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* 42 23–33 (1978)
3. Dumont, J.M., Thomas, A.: Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions. Colloque Arithmétique des Systèmes Codés, Luminy 1987, *Theor. Comput. Sci.* (à paraître)
4. Host, B.: Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* 6, 529–540 (1986)
5. Liardet, P.: Propriétés harmoniques de la numération suivant Jean Coquet, Colloque de Théorie Analytique des Nombres "Jean Coquet", Luminy 1985, Publications Mathématiques d'Orsay n° 88-02, Orsay 1988
6. Lothaire, M.: Combinatorics on words. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* vol. 17. Addison-Wesley: Reading, MA 1983

7. Martin, J.C.: Minimal flows arising from substitutions of non-constant length. *Math. Syst. Theory*, **7**, 73–82 (1973)
8. Mauduit, C.: Automates finis et ensembles normaux. *Ann. Inst. Fourier* **36**, 1–25 (1986)
9. Mauduit, C.: Morphismes unispectraux. *Theor. Comput. Sci.* **46**, 1–11 (1986)
10. Mauduit, C.: Sur l'ensemble normal des substitutions de longueur quelconque, *J. Number Theory* **29**, 235–250 (1988)
11. Mendès-France, M.: Nombres transcendants et ensembles normaux. *Acta Arith.* **15**, 189–192 (1968/69)
12. Pisot, C.: La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, IV. Ser. 205–248 (1938)
13. Queffélec, M.: Substitution dynamical systems-Spectral analysis. (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1294) Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1987
14. Rauzy, G.: Caractérisation des ensembles normaux. *Bull. Soc. Math. France* **98**, 401–414 (1970)
15. Rauzy, G.: Propriétés statistiques de suites arithmétiques, Presses Universitaires de France, collection SUP, Paris 1976
16. Rauzy, G.: Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France* **110**, 147–178 (1982)
17. Rozenberg, G., Salomaa, A.: The mathematical theory of  $L$  systems. New York: Academic Press 1980
18. Salem, R.: Algebraic numbers and Fourier analysis. Boston: Heath Mathematical Monographs 1963
19. Varga, R.S.: Matrix iterative analysis. Englewood cliffs: Prentice-Hall 1962

Oblatum 30-III-1988



Résumé : Si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'entiers engendrée par une substitution sur un alphabet fini, nous étudions l'ensemble des réels  $\alpha$  tels que la suite  $(u_n \cdot \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  soit équirépartie modulo 1. Ce travail est relié à l'étude des systèmes dynamiques associés aux mots infinis engendrés par des substitutions.

Mots clefs : Equirépartition modulo 1, ensemble normal, substitution sur un alphabet fini, automate fini, famille de Pisot, produit infini de matrices, extension algébrique de degré fini de  $\mathbb{Q}$ , graphe orienté.