



HAL
open science

Répartition modulo 1 des suites automatiques

Christian Mauduit

► **To cite this version:**

Christian Mauduit. Répartition modulo 1 des suites automatiques. Théorie des nombres [math.NT]. Université Aix-Marseille II, 1986. Français. NNT: . tel-02333526

HAL Id: tel-02333526

<https://hal.science/tel-02333526>

Submitted on 25 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L' UNIVERSITE D'AIX - MARSEILLE II - LUMINY

pour l'obtention du

DOCTORAT DE MATHEMATIQUE

*REPARTITION MODULO UN DES SUITES
AUTOMATIQUES*

soutenue par

Christian MAUDUIT

le 19 février 1986 , devant le jury composé de Messieurs les Professeurs

André	BLANCHARD
Patrick	DELORME
Jean-Marc	DESHOUILLERS
Pierre	LIARDET
Yves	MEYER
Gérard	RAUZY

Monsieur G. RAUZY, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

m'a fait l'honneur de diriger mes travaux de recherche et, par les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer, a toujours montré à mon égard une bienveillante attention.

Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et de ma profonde reconnaissance.

Monsieur A. BLANCHARD, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I

Monsieur P. DELORME, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

Monsieur Y. MEYER, Professeur à l'Ecole Polytechnique

ont bien voulu s'intéresser à mon travail et accepter de participer au jury d'examen.

Je tiens à leur exprimer ici ma très respectueuse reconnaissance.

Je remercie particulièrement

Monsieur J.M. DESHOUILLERS, Professeur à l'Université de Bordeaux I

Monsieur P. LIARDET, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I

qui ont bien voulu porter leur attention sur cette thèse et qui ont accepté d'en être rapporteurs.

Leurs précieux conseils m'ont été de la plus grande utilité.

Je remercie également tous ceux qui m'ont aidé à mener à bien la réalisation matérielle de cette thèse, et en particulier

Madame G. DIDRY, Secrétaire du Laboratoire L.A. 225 du CNRS

pour la patience et la compétence qu'elle n'a jamais cessé de manifester.

I. INTRODUCTION.

Le travail que nous présentons ici s'inscrit dans le cadre de l'étude des suites engendrées par un automate fini, qui constituent un exemple classique de suites de "faible complexité".

Ces suites ont fait l'objet de nombreux travaux récents:

- étude de leurs propriétés combinatoires (cf [3] [4] [8] [9] [12])
- étude de leurs propriétés arithmétiques (cf [1] [5] [10] [14] [21] [25] [28] [29])
- étude des systèmes dynamiques qui leur sont associés (cf [18] [19] [22] [26])

Pour notre part, nous nous intéressons aux propriétés statistiques de telles suites (cf [7] [11]).

Description du problème.

Rappelons que l'on appelle ensemble normal associé à une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{IN}$ l'ensemble des nombres réels ξ tels que la suite $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{IN}$ soit équirépartie modulo un.

Le but de cette étude est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à une suite d'entiers $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$ reconnaissable par un automate fini soit exactement $\mathbb{IR} \setminus \mathbb{Q}$ (la définition précise de la reconnaissabilité sera rappelée ultérieurement).

D'après le théorème de Weyl (cf [20] ou [27]) le problème revient à étudier le comportement de la somme $\sum_{n < N} e(u_n \cdot \xi)$ et de déterminer à quelles conditions on a, pour tout ξ irrationnel $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(u_n \cdot \xi) = 0$.

(en posant $e(x) = e^{2i\pi x}$).

Résultats antérieurs.

- En 1980, Kamae, dans un article non publié (cf [7]), avait donné une ébauche de démonstration dans le cas particulier où $u_n \in O(n)$ (par exemple pour la suite de Morse (cf exemple 2)).
- En 1983, Coquet a obtenu un résultat permettant de conclure pour certaines suites telles que $u_n \notin O(n)$ (cf [11]). C'est le cas de la suite $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \dots$ des entiers dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 (cf exemple 4).

Mais aucune de ces deux méthodes ne s'applique, par exemple, au cas de la suite de Baum - Sweet (cf exemple 5) qui vérifie $u_n \in O(n^{\log_{\theta} 2})$ avec $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et dont on peut montrer par ailleurs que l'ensemble normal est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Résultat obtenu :

Le théorème que nous donnons permet de conclure dans le cadre le plus général, en montrant qu'il suffit que la suite u n'ait pas une croissance de type exponentiel. En fait, cette condition s'exprime très aisément sur le graphe associé à l'automate en disant qu'il suffit qu'au moins un des sommets qui reconnaît la suite u soit précédé dans le graphe par un sommet possédant au moins deux circuits fermés distincts.

Ces résultats avaient été annoncés en 1984 dans une note aux C.R.A.S. (cf [23]) Par ailleurs, nous établissons (théorèmes 2 et 3) que ces conditions sont nécessaires (cf [24]).

II. NOTATIONS ET DEFINITIONS.

1. Soit r un entier supérieur ou égal à 2 .

On désigne par $[r]$ l'alphabet $\{0, 1, \dots, r-1\}$ et par $[r]^K$ l'ensemble des mots de longueur $K \geq 1$,

$$[r]^0 = \{\emptyset\},$$

$$[r]^* = \bigcup_{K=0}^{+\infty} [r]^K.$$

On rappelle que $[r]^*$ est muni de l'opération de concaténation en posant, si m_1, m_2, \dots, m_p sont des mots :

$$\bigcup_{i=1}^p m_i = m_1 m_2 \dots m_p \in [r]^*.$$

Un r -automate \mathcal{A} est la donnée d'un quintuplet $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ avec :

- i) A alphabet, $A = \{a, b, c, \dots\}$;
- ii) Ξ alphabet ;
- iii) a point initial de A ;
- iv) φ application, $\varphi : A \times [r] \rightarrow A$;
- v) τ application, $\tau : A \rightarrow \Xi$.

Pour tout (x, s) dans $A \times [r]$ on pose $\varphi(x, s) = s(x)$ ou plus simplement $x.s$

On prolonge alors $\varphi : A \times [r] \rightarrow A$ en une application, encore notée φ ,
 $\varphi : A \times [r]^* \rightarrow A$.

Si n est un entier positif dont la représentation en base r est

$\epsilon_g \epsilon_{g-1} \dots \epsilon_0$, on pose pour tout x dans A

$$\begin{aligned} \varphi(x, n) &= x.n \\ &= x.\epsilon_g \epsilon_{g-1} \dots \epsilon_0 \end{aligned}$$

(à $n = 0$ on associe le mot vide, avec $\varphi(x, \emptyset) = x$) .

Ainsi, lorsque n parcourt \mathbb{N} , $a.n$ décrit une suite infinie d'éléments dans A et $\tau(a.n)$ décrit une suite infinie d'éléments dans Ξ .

Nous avons adopté ici la définition des automates à lecture indirecte .

On rappelle que les automates à lecture directe définissent exactement les mêmes suites (cf [15]).

2. Définitions fondamentales :

1) On dit qu'une suite $t \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ est r -reconnaisable s'il existe un r -automate $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ tel que :

$$t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\tau(a \cdot n))_{n \in \mathbb{N}} .$$

2) On dit qu'une suite d'entiers $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$ est r -reconnaisable si sa fonction indicatrice $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est r -reconnaisable.

D'autre part, notons G le graphe associé à l'automate \mathcal{A} et M la matrice associée au graphe G :

$$M = (M_{ij})_{(i,j) \in A^2} \quad \text{avec } M_{ij} = \text{card} \{ s \in [r] / i \cdot s = j \} .$$

Si S désigne la matrice de l'action \xrightarrow{s} pour s dans $[r]$, on pose pour tout ξ dans \mathbb{R} :

$$M(\xi) = \sum_{s=0}^{r-1} e(s \xi) \cdot S$$

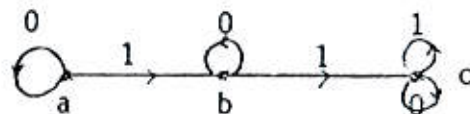
$$= (M_{ij}(\xi))_{(i,j) \in A^2} .$$

Pour tout n dans \mathbb{N} , on note $M^{(n)}(\xi) = M(r^{n-1}\xi) \dots M(r\xi)M(\xi)$

On a alors $M^{(n)}(0) = M^n(0) = M^n$.

De plus on remarque que, pour tout entier $g \geq 1$ la suite t est r^g -reconnaisable par l'automate $\mathcal{A}_g = (A, \Xi, a, \varphi_g, \tau)$ où φ_g est l'application associée à la matrice $M^{(g)}(\xi)$.

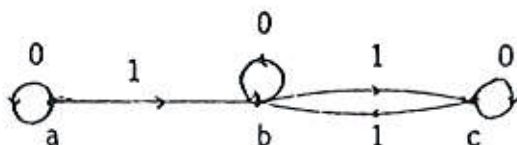
Exemple 1 : La suite $1 < 2 < 4 < 8 < 16 < \dots$ des puissances de 2 est reconnaissable par l'automate :



$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots)$$

$$\text{et on a } M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & 1 & e(\xi) \\ 0 & 0 & 1+e(\xi) \end{bmatrix} .$$

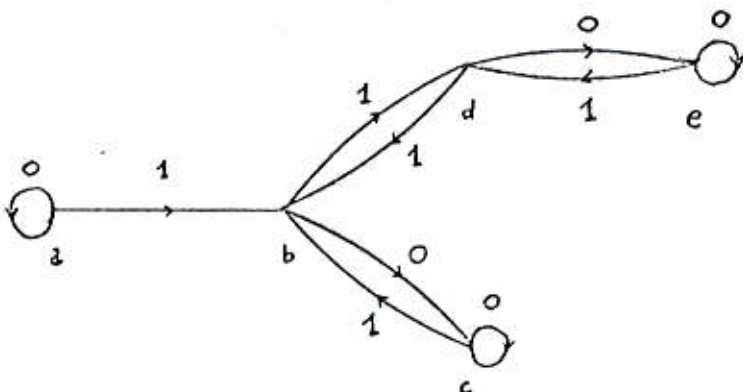
Exemple 2 : La suite $1 < 2 < 4 < 7 < 8 < \dots$ des entiers dont la somme des chiffres en base 2 est impaire (suite de Morse) est reconnaissable par l'automate



$$\tau(a) = \tau(c) = 0 \quad \tau(b) = 1 \quad t = (01101001100\dots)$$

et on a
$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & 1 & e(\xi) \\ 0 & e(\xi) & 1 \end{bmatrix} .$$

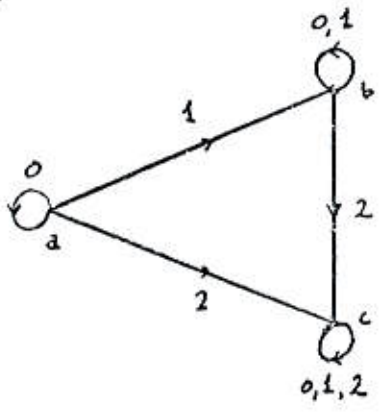
Exemple 3 : La suite $1 < 2 < 4 < 5 < 7 < \dots$ des entiers non nuls dont la représentation binaire contient un nombre pair de blocs 11 (suite de Rudin-Shapiro) est reconnaissable par l'automate :



$$\tau(a) = \tau(d) = \tau(e) = 0, \tau(b) = \tau(c) = 1, t = (01101101111\dots)$$

et on a
$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & e(\xi) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e(\xi) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & e(\xi) & 1 \end{bmatrix} .$$

Exemple 4 : La suite $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \dots$ des entiers non nuls dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 (suite de Coquet) est reconnaissable par l'automate :

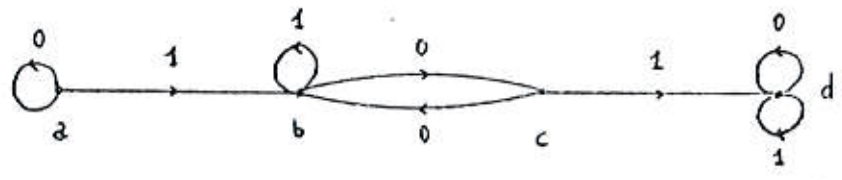


$$\tau(a) = \tau(c) = 0 \quad , \quad \tau(b) = 1 \quad , \quad t = (01011000011\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & e(2\xi) \\ 0 & 1+e(\xi) & e(2\xi) \\ 0 & 0 & 1+e(\xi) + e(2\xi) \end{bmatrix}$$

Exemple 5 : La suite $1 < 3 < 4 < 7 < 9 < \dots$ des entiers dont la représentation binaire ne contient aucune plage de 0 de longueur impaire (suite de Baum-Sweet) est reconnaissable par l'automate :



$$\tau(a) = \tau(c) = \tau(d) = 0 \quad , \quad \tau(b) = 1 \quad , \quad t = (01011001010\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & e(\xi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 1+e(\xi) \end{bmatrix}$$

3) Soit ℓ un sommet de G .

$G[\ell]$ est la restriction du graphe G à l'ensemble des sommets k tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $M_{k\ell}^n > 0$ (c'est-à-dire à l'ensemble des états à partir desquels on peut rejoindre l'état ℓ).

On dira que le sommet i de G précède (au sens large) le sommet j de G s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_{ji}^n > 0$.

On note $M(G[\ell])$ la matrice associée au graphe $G[\ell]$

4) a étant l'état initial de l'automate \mathcal{A} , on définit l'application v :

$$\mathbb{N} \rightarrow A$$

$$n \mapsto v(n) = \varphi(a, n) = a \cdot n$$

et on note, pour tout $x > 0$:

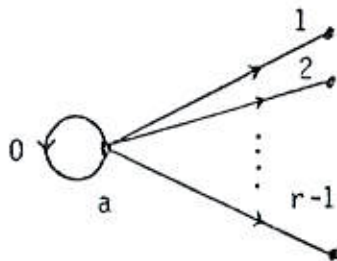
$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} e(n, \xi)$$

$$\begin{aligned} V(x, \ell) &= V(x, \ell, 0) \\ &= \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} 1 \end{aligned}$$

On a choisi l'automate de façon à ce que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad V(x, a, \xi) = 1$$

ce qui est toujours possible, quitte à rajouter un nouvel état initial à l'alphabet A tel que a ne porte qu'une boucle, celle de $\xrightarrow{0}$:



5) Par ailleurs, si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions définies et positives pour $x > x_0$, la notation $f \approx g$ ou $f(x) \approx g(x)$ signifiera qu'il existe des réels α et α' tels que pour tout x assez grand

$$0 < \alpha \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha'$$

N.B. : Les définitions spécifiques aux automates se trouvent dans [15] et [30], celles spécifiques aux graphes se trouvent dans [2] et [17].

Rappelons que l'on peut définir sur le graphe G la relation d'équivalence de forte connexité \sim entre les sommets, à savoir :

$\lambda \sim \lambda'$ s'il existe dans G un chemin allant de λ vers λ' et un chemin allant de λ' vers λ .

On note G/\sim le graphe quotient ainsi obtenu.

G/\sim est un graphe sans boucle. On peut donc définir sur G/\sim une numérotation ν des sommets :

$$\nu : G/\sim \rightarrow \mathbb{N}^*$$

On note $\tilde{\lambda}$ la classe d'équivalence modulo \sim du sommet λ de G .

On peut alors prolonger ν en une application de G dans \mathbb{N} , encore notée ν , en posant pour $\lambda \in G$:

$$\nu(\lambda) = \nu(\tilde{\lambda}) \quad \text{et} \quad \nu(a) = 0$$

Ceci nous permet de définir un préordre sur G :

$$\begin{aligned} k \leq \lambda & \quad \text{si } k \text{ précède } \lambda \text{ dans } G \\ k < \lambda & \quad \text{si } k \leq \lambda \text{ et } \nu(k) < \nu(\lambda) \end{aligned}$$

Si Γ est un sous-graphe de G , on notera $\gamma(\Gamma)$ son nombre cyclomatique (c'est-à-dire le nombre d'arcs de Γ , plus le nombre de composantes connexes de Γ , moins le nombre de sommets de Γ).

$\tilde{\lambda}$ étant considérée comme un sous-graphe de G , On note $M[\tilde{\lambda}](\xi)$ la matrice extraite de la matrice $M(\xi)$ obtenue par restriction à $\tilde{\lambda}$ du graphe G .

Nous avons été amenés à poser les deux définitions suivantes, qui ne sont pas classiques :

Définition 1 :

- $\tilde{\lambda}$ est de type 0 si $\gamma(\tilde{\lambda}) = 0$;
- $\tilde{\lambda}$ est de type 1 si $\gamma(\tilde{\lambda}) = 1$;
- $\tilde{\lambda}$ est de type 2 si $\gamma(\tilde{\lambda}) \geq 2$;

où γ désigne le nombre cyclomatique.

λ sera de type i lorsque $\tilde{\lambda}$ est de type i ($i \in \{0,1,2\}$) .

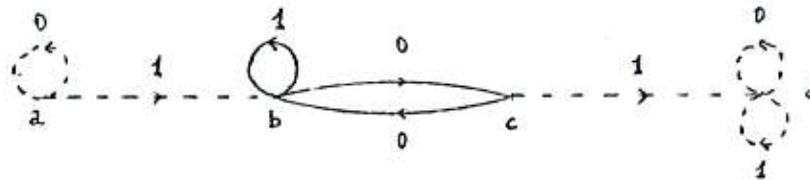
Définition 2 :

Le poids de λ est égal au maximum des types des sommets de G précédant le sommet λ .

On le note $\pi(\lambda)$

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow \{0,1,2\} \\ \lambda &\mapsto \pi(\lambda) \end{aligned}$$

Exemple : Dans le cas de la suite de Baum - Sweet, \tilde{b} est représenté en trait plein :



par conséquent $M[\tilde{b}](\xi) = \begin{bmatrix} e(\xi) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\gamma(\tilde{b}) = 2$, $\pi(\tilde{b}) = 2$.

3. Préliminaire : calcul de $V(x, \lambda, \xi)$

$$\begin{aligned} V(x, \lambda, \xi) &= \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \lambda}} e(n \xi) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n < \frac{x-s}{r} \\ v(nr+s) = \lambda}} e((nr+s)\xi) \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(nr+s) = \ell}} e((nr+s)\xi) + B(x, \ell, \xi)$$

avec $|B(x, \ell, \xi)| \leq r-1$.

Remarquons maintenant que si l'on pose $S = (S_{ij})_{(i,j) \in A^2}$,

$$\sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(nr+s) = \ell}} e(nr\xi) = \sum_{k \in A} S_{k\ell} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(n) = k}} e(nr\xi)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k \in A} e(s\xi) S_{k\ell} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(n) = k}} e(nr\xi) + B(x, \ell, \xi) \\ &= \sum_{k \in A} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, k, r\xi\right) + B(x, \ell, \xi) \end{aligned}$$

On en déduit, par récurrence, que pour tout entier $N \geq 1$, on a :

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{k \in A} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B_N(x, \ell, \xi)$$

avec $|B_N(x, \ell, \xi)| \leq r^{N-1}$.

Nous serons amenés à évaluer des normes de matrices opérant sur $\mathbb{C}^{\text{Card } A}$.
Nous rappelons les notations usuelles suivantes :

$$\text{si } M \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \|M\|_2 = \sqrt{\rho({}^t M M)} \quad \text{et} \quad \|M\|_\infty = \sup_{i=1 \dots m} \sum_{j=1}^m |M_{ij}|$$

où ρ désigne le rayon spectral.

III. ETUDE ASYMPTOTIQUE DES SOMMES DE WEYL $V(x, \ell, \xi)$.

Nous commençons par l'étude de $V(x, \ell)$ où l'on retrouve en particulier un résultat de A.Cobham -cf. [9]- (lemme 1) .

Nous montrons ensuite que le comportement asymptotique de $V(x, \ell)$ dépend essentiellement du poids du sommet ℓ (lemmes 2 et 3).

LEMME 1 : Pour tout sommet ℓ de G , il existe (β, θ) dans $\mathbb{N} \times [0, 1]$ tel que $V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta$

DEMONSTRATION :

Etape 1 : Montrons ce lemme pour la suite $x_n = r^n$.

$V(r^n, \ell)$ est égal au nombre de chemins de longueur n joignant le sommet a au sommet ℓ dans le graphe $G[\ell]$, c'est-à-dire au coefficient d'indice (a, ℓ) de la matrice $M(G[\ell])^n$.

Pour estimer ce coefficient, mettons $M(G[\ell])$ sous la forme de Jordan :

$$M(G[\ell]) = P(D+N)P^{-1}$$

avec D diagonale , N nilpotente et où D et N commutent .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } V(r^n, \ell) &= \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P D^{n-i} N^i P^{-1} \right)_{a\ell} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_{\lambda i} \lambda^{n-i} \end{aligned}$$

où Λ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(G[\ell])$.

Soit λ_0 une valeur propre de module maximum telle que les coefficients $c_{\lambda_0 i}$ ne soient pas tous nuls.

$|\lambda_0| > 1$ et les éléments de Λ de module $|\lambda_0|$ sont de la forme $\lambda = \lambda_0 e(v)$ avec $v \in \mathbb{Q}$ (cf [23]).

Si nous notons q le dénominateur commun de tous ces nombres rationnels , nous obtenons (si $\beta \in \mathbb{N}$ désigne l'indice maximum tel que $c_{\lambda_0 \beta} \neq 0$):

$$V(r^n, \ell) = \binom{n}{\beta} \lambda_0^{n-\beta} \sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{n \cdot j}{q}\right) + W(r^n, \ell) \quad (\beta < \text{card } A) .$$

avec $W(r^n, \ell) \in o(n^\beta |\lambda_0|^n)$ et où les H_j ne sont pas tous nuls.

Choisissons maintenant d , $d \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ tel que $\sum_{j=0}^{q-1} H_j e^{(\frac{dj}{q})} \neq 0$.
 Pour un tel d , on a :

$$\begin{aligned} V(r^{qn+d}, \ell) &\approx n^\beta |\lambda_d|^{nq} \\ &\approx (\log r^{qn+d})^\beta r^{(qn+d)\theta} \end{aligned}$$

où $\theta = \frac{\log |\lambda_d|}{\log r} \in [0, 1]$ puisque $M(G[\ell])$ est extraite de la matrice M , dont le rayon spectral est égal à r .

Etape 2 : Pour tout x assez grand, il existe un entier m tel que (avec les notations de l'étape 1) :

$$r^{mq+d} \leq x < r^{(m+1)q+d}$$

Ainsi pour x assez grand, il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} V(x, \ell) &\geq V(r^{mq+d}, \ell) \\ &\geq \alpha (\log r^{mq+d})^\beta r^{(mq+d)\theta} \\ &\geq \alpha (\log r^{-q} x)^\beta (r^{-q} x)^\theta \\ &\geq \frac{\alpha}{2^\beta r^{\theta q}} (\log x)^\beta x^\theta \end{aligned}$$

et aussi un $\alpha' > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} V(x, \ell) &\leq V(r^{(m+1)q+d}, \ell) \\ &\leq \alpha' (\log r^{(m+1)q+d})^\beta r^{((m+1)q+d)\theta} \\ &\leq \alpha' (\log r^q x)^\beta (r^q x)^\theta \\ &\leq \alpha' 2^\beta r^{\theta q} (\log x)^\beta x^\theta \end{aligned}$$

d'où $V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta$

REMARQUES :

1) Si $\rho(\tilde{\mathcal{L}})$ est le rayon spectral de la matrice $M[\tilde{\mathcal{L}}](0)$, alors $\rho(\tilde{\mathcal{L}}) \leq r^\theta$.

En effet si $N_n(\lambda_1, \lambda_2)$ désigne le nombre de chemins de longueur n reliant le sommet $\lambda_1 \in \tilde{\mathcal{L}}$ au sommet $\lambda_2 \in \tilde{\mathcal{L}}$, on démontrerait comme précédemment que

$$N_n(\lambda_1, \lambda_2) \in O(n^\beta r^{\theta n})$$

Or $N_n = \sum_{\lambda_1 \in \tilde{\mathcal{L}}} \sum_{\lambda_2 \in \tilde{\mathcal{L}}} N_n(\lambda_1, \lambda_2)$, qui désigne le nombre de chemins de

longueur n dans le graphe fortement connexe $\tilde{\mathcal{L}}$, correspond à la valeur d'une norme matricielle en $M[\tilde{\mathcal{L}}](0)^n$:

$$N_n = \|M[\tilde{\mathcal{L}}](0)^n\|$$

Cette norme étant équivalente à la norme spectrale, on en déduit, en posant $\rho = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ que

$$N_n \approx \rho^n$$

(cf [31] p. 65).

Donc $\rho^n \in O(n^\beta r^{\theta n})$ et par suite $\rho \leq r^\theta$.

2) Le lemme 1 donne en particulier des conditions nécessaires pour qu'une suite soit reconnaissable par un automate fini.

En effet, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est reconnaissable, il existe (β, θ) dans $\mathbb{N} \times [0, 1]$ tel que

$$V(x) = \sum_{u_n < x} 1 = \sum_{z(\ell)=1} V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta$$

Exemples : Les suites $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(a^{(n^b)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$(a, b) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où P_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier ne sont pas reconnaissables par un automate fini (Pour le dernier exemple, rappelons que $V(x) \approx \frac{x}{\log x}$).

APPLICATION:

Déterminons la valeur de (β, θ) pour les 5 exemples cités précédemment .

-cas de l'exemple 1 :

$$V(2^n, b) = n \text{ donc } (\beta, \theta) = (1, 0) \text{ et } V(x, b) \approx \log x .$$

-cas de l'exemple 2 :

$$V(2^n, b) = 2^{n-1} \text{ donc } (\beta, \theta) = (0, 1) \text{ et } V(x, b) \approx x .$$

-cas de l'exemple 3 :

$$V(2^n, b) + V(2^n, c) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx 2^n$$

$$\text{donc } (\beta, \theta) = (0, 1) \text{ et } V(x, b) + V(x, c) \approx x .$$

-cas de l'exemple 4 :

$$V(3^n, b) = 2^n \text{ donc } (\beta, \theta) = (0, \log_3 2) \text{ et } V(x, b) \approx x^{\log_3 2} .$$

-cas de l'exemple 5 :

$$V(2^n, b) = (1 \ 0) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ donc } (\beta, \theta) = \left(0, \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

et $V(x, b) \approx x^{\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

LEMME 2 : (avec les notations du lemme 1)

- Si ℓ est de poids 1 , alors $\theta = 0$.
- Si ℓ est de poids 2 , alors $\theta \in]0, 1[$.

DEMONSTRATION :

Premier cas : $\pi(\ell) = 1$, on pose $v(\ell) = \nu$.

$G[\ell]$ est un graphe comprenant au plus $(\nu+1)$ composantes fortement connexes , de type 0 ou 1 (simples sommets ou boucles).

$$\text{Par conséquent } M(G[\ell]) = \begin{pmatrix} M_0 & x & \dots & \dots & x \\ 0 & \cdot & & & \cdot \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M_\nu \end{pmatrix}$$

avec pour tout $i \in \{0, \dots, \nu\}$ M_i matrice associée à une composante fortement connexe de type 0 ou 1 .

En particulier , on a soit $M_i = 0$ soit $M_i^{g_i} = I_{g_i}$ ($g_i \neq 0$ désignant la longueur de la $i^{\text{ème}}$ boucle).

Ainsi , si $g = \text{ppcm}_{i=0, \dots, \nu} g_i$ on a $M(G \setminus \{l\})^g = D + N$ avec N nilpotente et D diagonale formée uniquement de 0 et de 1 .

Donc $|\lambda_s| = 1$ dans le lemme 1 et $\theta = 0$.

Second cas : $\pi(l) = 2$.

Soit k un sommet de type 2 précédent l .

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $V(r^p, k) \geq 1$.

Soit $p' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad V(r^{n+p'}, l) \geq V(r^n, k)$

(par exemple $p' =$ longueur du plus court chemin reliant k à l dans G) .

k étant de type 2 , il existe au moins 2 chemins distincts (de longueurs f_1 et f_2) joignant k à k .

Posons $f = f_1 f_2$.

On a alors pour tout entier n :

$$V(r^{p+nf}, k) \geq 2^n V(r^p, k)$$

Or $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists ! n \in \mathbb{N}$, $p + p' + nf \leq m < p + p' + (n+1)f$

Pour ce couple (m, n) on a $V(r^m, l) \geq 2^n$

$$\text{et } \frac{\log V(r^m, l)}{m} \geq \frac{n \log 2}{m} \geq \frac{m - p - p' - f}{m f} \log 2$$

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log V(r^m, l)}{m} \geq \frac{\log 2}{f} > 0$$

ce qui implique $\theta > 0$ dans le lemme 1 .

REMARQUE :

$\frac{1}{r}$. M étant une matrice stochastique, on en déduit que la CNS pour que $\theta = 1$ est que ℓ soit un état récurrent de l'automate (cf [15] p. 19). En particulier, si $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$ est la suite d'entiers que l'on étudie, la CNS pour que $u_n \in O(n)$ est que l'un au moins des états qui reconnaît $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit récurrent. C'est en particulier le cas des suites de Morse et de Rudin-Shapiro.

LEMME 3 : (avec les notations du lemme 1)

Soient ℓ et ℓ' deux sommets de G .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \ell \sim \ell' \Rightarrow \quad & \beta(\ell) = \beta(\ell') \\ & \theta(\ell) = \theta(\ell') \end{aligned}$$

DEMONSTRATION :

Puisque $\ell \sim \ell'$, il existe un chemin de longueur p (resp. p') reliant ℓ à ℓ' (resp. ℓ' à ℓ).

Il existe donc des réels $\alpha(\ell)$, $\alpha'(\ell)$, $\alpha(\ell')$, $\alpha'(\ell')$ tels que pour n assez grand

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha(\ell) n^{\beta(\ell)} r^{n\theta(\ell)} &\leq V(r^n, \ell) \leq V(r^{n+p}, \ell') \leq \alpha'(\ell') (n+p)^{\beta(\ell')} r^{(n+p)\theta(\ell')} \quad , \\ 0 \leq \alpha(\ell') n^{\beta(\ell')} r^{n\theta(\ell')} &\leq V(r^n, \ell') \leq V(r^{n+p'}, \ell) \leq \alpha'(\ell) (n+p)^{\beta(\ell)} r^{(n+p)\theta(\ell)} \quad . \end{aligned}$$

D'où en faisant tendre n vers l'infini

$$\theta(\ell) = \theta(\ell') \quad \text{puis} \quad \beta(\ell) = \beta(\ell') \quad .$$

REMARQUE :

De la même façon, on démontre que si $\ell \leq \ell'$ alors $\theta(\ell) \leq \theta(\ell')$, et si de plus $\theta(\ell) = \theta(\ell')$ alors $\beta(\ell) \leq \beta(\ell')$.

THEOREME 1: Soit ℓ un sommet de G de poids 2 .

Alors pour tout ξ irrationnel, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x, \ell, \xi)}{V(x, \ell)} = 0 .$$

DEMONSTRATION :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence sur $v(\ell) \in \mathbb{N}^*$.

Etape 1 : $v(\ell) = 1$,

D'après le calcul préliminaire, on a pour tout entier N :

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{k \in A} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B_N(x, \ell, \xi) \\ &= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + M_{a\ell}^{(N)}(\xi) + B_N(x, \ell, \xi) \\ &= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B'_N(x, \ell, \xi) \end{aligned}$$

avec $|B'_N(x, \ell, \xi)| \leq 2(r^N - 1)$.

Considérons maintenant (β, θ) tel que pour tout sommet k de \mathcal{X} ,
 $V(x, k) \approx (\log x)^\beta x^\theta$ (cf. lemmes 1 et 3) et posons

$$W(x, k, \xi) = \frac{V(x, k, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta} ,$$

$$W(x, k) = W(x, k, 0) .$$

On obtient, pour tout entier N :

$$W(x, \ell, \xi) = \left(\frac{\log \frac{x}{r^N}}{\log x}\right)^\beta \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} \frac{M_{k\ell}^{(N)}(\xi)}{r^{N\theta}} W\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + \frac{B'_N(x, \ell, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta} .$$

Soit α tel que pour x assez grand

$$\sup_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} W\left(\frac{x}{r^N}, k\right) \leq \alpha .$$

Alors, pour tout entier N et pour x assez grand :

$$|W(x, \ell, \xi)| \leq \alpha \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} \left| \frac{M_{k\ell}^{(N)}(\xi)}{r^{N\theta}} \right| + \frac{2 r^N}{(\ln x)^\beta x^\theta}$$

d'où, en posant $w(\ell, \xi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |W(x, \ell, \xi)|$,

$$A(\xi) = \frac{t_{M[\tilde{\ell}]}(\xi)}{r^\theta}, \text{ et pour tout entier } n$$

$$A^{(n)}(\xi) = A(\xi) A(r\xi) \dots A(r^{n-1}\xi)$$

Pour tout entier N :

$$\begin{aligned} w(\ell, \xi) &\leq \alpha \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} |A_{\ell k}^{(N)}(\xi)| \\ &\leq \alpha \|A^{(N)}(\xi)\|_\infty \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer que si $\pi(\ell) = 2$ et $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors

$\lim_{N \rightarrow \infty} A^{(N)}(\xi) = 0$, ce qui nous permettra d'achever notre démonstration pour

le cas $\nu(\ell) = 1$.

Pour tout x réel, posons :

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{(i,j) \in \tilde{\ell}^2}$$

$$A^{(n)}(x) = (a_{ij}^{(n)}(x))_{(i,j) \in \tilde{\ell}^2}$$

avec, comme d'habitude :

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$$

et $a_{ij}^{(n)}(0) = a_{ij}^{(n)}$.

Comme $\gamma(\ell) \geq 2$, il existe au moins deux circuits fermés sur le sommet ℓ .

Soit g le ppcm des longueurs de ces circuits. Quitte à travailler sur le r^g -automate \mathcal{A}_g , on peut supposer que $g = 1$ et t boucles sur ℓ , on a donc

$$M_{\ell\ell}(\xi) = e(p_1 \xi) + \dots + e(p_t \xi)$$

avec $t \geq 2$, $\forall i \in \{1, \dots, t\}$ $p_i \in \mathbb{N}$ et $p_1 \neq p_2$.

ξ étant irrationnel, il existe alors un δ dans $]0, 1[$ et une suite

$(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers tels que :

$$|e(p_1 \cdot r^{N_k} \cdot \xi) + \dots + e(p_t \cdot r^{N_k} \cdot \xi)| \leq (1 - \delta) t$$

c'est-à-dire tels que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < |a_{\ell\ell}(r^{N_k} \cdot \xi)| \leq (1 - \delta) \cdot a_{\ell\ell}.$$

Pour tout sommet i de $\tilde{\mathcal{L}}$ il existe un chemin de longueur $\zeta(i)$ allant de ℓ à i et un chemin de longueur $\eta(i)$ allant de i à ℓ .

Ainsi, quitte à rajouter à ces chemins des boucles (de longueur 1) sur le sommet ℓ , il existe (ζ, η) indépendant de i tel qu'il existe :

- un chemin de longueur ζ allant de ℓ à i .
- un chemin de longueur η allant de i à ℓ .

Posons $\kappa = \zeta + \eta + 1$. On a, pour tout entier k et pour tout (i, j) dans $\tilde{\mathcal{L}}^2$:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta} \xi) &= [A^{(\eta)}(r^{N_k - \eta} \xi) A(r^{N_k} \xi) A^{(\zeta)}(r^{N_k + 1} \xi)]_{ij} \\ &= a_{i\ell}^{(\eta)}(r^{N_k - \eta} \xi) a_{\ell\ell}(r^{N_k} \xi) a_{\ell j}^{(\zeta)}(r^{N_k + 1} \xi) + \\ &\quad + \sum_{(\lambda, \mu) \neq (\ell, \ell)} a_{i\lambda}^{(\eta)}(r^{N_k - \eta} \xi) a_{\lambda\mu}(r^{N_k} \xi) a_{\mu j}^{(\zeta)}(r^{N_k + 1} \xi). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } |a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta} \xi)| \leq a_{ij}^{(\kappa)} - \delta a_{i\ell}^{(\eta)} a_{\ell\ell} a_{\ell j}^{(\zeta)}$$

or $r^\theta a_{\ell\ell} \geq 1$, $r^{\eta\theta} a_{i\ell}^{(\eta)} \geq 1$, $r^{\zeta\theta} a_{\ell j}^{(\zeta)} \geq 1$ (entiers non nuls).

et par conséquent

$$|a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta} \xi)| \leq a_{ij}^{(\kappa)} - \frac{\delta}{r^{\kappa \theta}} \leq C \cdot a_{ij}^{(\kappa)}$$

où $C \in]0, 1[$.

On en déduit, par récurrence sur n qu'il existe un entier strictement positif κ et qu'il existe C dans $]0, 1[$ tels que pour tout $n \geq \kappa$ et pour tout (i, j) dans $\tilde{\mathcal{X}}^2$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |a_{ij}^{(n)}(r^{N_k - \eta} \xi)| \leq C \cdot a_{ij}^{(n)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on peut supposer que pour tout entier k , on a

$$N_{k+1} - N_k \geq \kappa \quad \text{et} \quad N_0 \geq \eta.$$

On a alors pour tout (i, j) dans $\tilde{\mathcal{X}}^2$ et pour tout entier k :

$$\begin{aligned} |a_{ij}^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta} \xi)| &\leq \prod_{\substack{i_1 \in \tilde{\mathcal{X}} \\ \vdots \\ i_{k-1} \in \tilde{\mathcal{X}}}} |a_{i_1 i_1}^{(N_1 - N_0)}(r^{N_0 - \eta} \xi)| \dots |a_{i_{k-1} j}^{(N_k - N_{k-1})}(r^{N_{k-1} - \eta} \xi)| \\ &\leq C^k \cdot a_{ij}^{(N_k - N_0)}. \end{aligned}$$

D'après la remarque 1 du lemme 1, $A(0)$ est une matrice irréductible de rayon spectral inférieur à 1, et par conséquent il existe $a > 0$ tel que pour tout entier n , $\|A^n(0)\|_\infty \leq a$.

D'autre part, on vient de voir que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} / \|A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta} \xi)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

Donc pour $N \geq N_k - \eta$,

$$A^{(N)}(\xi) = A^{(N_0 - \eta)}(\xi) A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta} \xi) A^{(N_k - \eta)}(r^{N_k - \eta} \xi) \dots A^{(N-1)}(r \xi)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \|A^{(N)}(\xi)\|_\infty &\leq \|A^{(N_0 - \eta)}(0)\|_\infty \|A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta} \xi)\|_\infty \|A^{(N - N_k + \eta)}(0)\|_\infty \\ &\leq a \cdot \frac{\varepsilon}{a^2} \cdot a = \varepsilon. \end{aligned}$$

Etape 2 : Supposons le théorème démontré pour tout sommet k tel que $v(k) < v$ et donnons-nous un sommet ℓ tel que $v(\ell) = v$.

$$V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta \text{ avec } (\beta, \theta) \in \mathbb{N} \times]0, 1]$$

On a pour tout entier N :

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell \\ \pi(k) = 1}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell \\ \pi(k) = 2}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) +$$

$$+ B'_N(x, \ell, \xi) ,$$

avec $|B'_N(x, \ell, \xi)| \leq 2(r^N - 1)$.

Or, on remarque que :

- si $k < \ell$ et $\pi(k) = 1$

$$|V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right)| \leq V\left(\frac{x}{r^N}, k\right) \leq V(x, k) \in o((\log x)^\beta x^\theta)$$

car d'après le lemme 2 $\theta(k) = 0$

- si $k < \ell$ et $\pi(k) = 2$

Alors, par hypothèse de récurrence,

$$V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \in o((\log x)^{\beta(k)} x^{\theta(k)}) .$$

Mais d'après la remarque du lemme 3 , on a

$$o((\log x)^{\beta(k)} x^{\theta(k)}) \subset o((\log x)^{\beta} x^{\theta}) .$$

D'où pour tout entier N fixé :

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \quad \text{mod } o((\log x)^{\beta} x^{\theta}) .$$

Si $\gamma(\ell) \geq 2$, on procède comme pour l'étape 1 ,

Si $\gamma(\ell) = 1$, soit g la longueur de la boucle sur le sommet ℓ ,

$$V(x, \ell, \xi) = M_{\ell\ell}^{(g)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^g}, \ell, r^g \xi\right) \quad \text{mod } o((\log x)^{\beta} x^{\theta}) .$$

On a donc

$$\left| \frac{V(x, \ell, \xi)}{(\log x)^{\beta} x^{\theta}} \right| \leq \frac{|V(\frac{x}{r^g}, r^g \xi)|}{(\log \frac{x}{r^g})^{\beta} (\frac{x}{r^g})^{\theta}} \left(\frac{\log \frac{x}{r^g}}{\log x} \right)^{\beta} \frac{1}{r^{\theta g}} \quad \text{mod } o(1)$$

et par conséquent , en posant

$$w(\ell, \xi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x, \ell, \xi)}{(\log x)^{\beta} x^{\theta}}$$

on obtient $w(\ell, \xi) \leq \frac{w(\ell, \xi)}{r^{\theta g}}$ d'où $w(\ell, \xi) = 0$ puisque $\theta > 0$.

C.Q.F.D.

Remarques :

1) Si $x \in \mathbb{Q}$, la suite $(u_n \cdot x)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est évidemment pas équirépartie modulo un.

2) Si $\text{Card} \{ \ell, \tau(\ell) = 1 \} > 1$ (c'est-à-dire si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est reconnue par plusieurs états de A) alors l'étude précédente nous montre que si

$$L = \{ \ell; \tau(\ell) = 1 \text{ et } \pi(\ell) = 2 \} , \quad \theta = \sup_{\ell \in L} \theta(\ell) \text{ et } \beta = \sup_{\ell \in L} \beta(\ell) ; \quad \theta(\ell) = \theta$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{\tau(\ell)=1} V(x, \ell, \xi)}{\sum_{\tau(\ell)=1} V(x, \ell)} \right| = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{\ell \in L} V(x, \ell, \xi)}{x^{\theta} (\ln x)^{\beta}} \right| = 0 .$$

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire : Pour que l'ensemble normal associé à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reconnaissable par l'automate $\mathcal{A} = (A, \Sigma, a, \varphi, \tau)$ soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il suffit qu'il existe ℓ dans A tel que $\tau(\ell) = 1$ et $\pi(\ell) = 2$.

Exemples : Les suites de Morse, de Rudin-Shapiro, de Coquet et de Baum-Sweet ont pour ensemble normal $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

IV. THEOREMES RECIPROQUES ET APPLICATIONS .

Nous allons maintenant démontrer que la condition du théorème 1 est en fait nécessaire, ce qui nous permettra d'énoncer le théorème suivant :

THEOREME 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reconnaissable par l'automate $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est qu'il existe λ dans A tel que $\tau(\lambda) = 1$ et $\pi(\lambda) = 2$.

Ce théorème va découler des deux propositions suivantes.

Proposition 1 : Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite reconnaissable par un r -automate $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ telle que

$$(\forall \lambda \in A) \{ \tau(\lambda) = 1 \Rightarrow \pi(\lambda) < 2 \}$$

alors u est réunion d'un nombre fini P de suites $u^p, p \in \{1, \dots, P\}$ de la forme

$$\{ q_1^p r^{(N_1 g_1^p + \dots + N_v g_v^p + v - 1)} + \dots + q_v^p r^{N_v g_v^p} + q_{v+1}, (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v \}$$

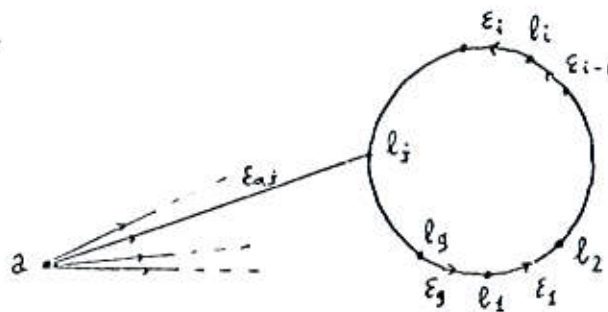
$$\text{où } v \in \mathbb{N}^* (g_1^p, \dots, g_v^p) \in \mathbb{N}^v \quad \text{et } (q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbb{Q}^{v+1}$$

Démonstration :

Nous allons démontrer cette proposition par récurrence sur $v = \sup_{\tau(\lambda)=1} v(\lambda)$.

Etape 1 : $v = 1$.

On a donc à examiner le cas d'une boucle $(\lambda_1, \dots, \lambda_g)$ du type suivant :



Posons $I = \{ i \in \{1, \dots, g\} \mid \tau(\lambda_i) = 1 \}$

et $J = \{ j \in \{1, \dots, g\} \mid M_a \lambda_j \neq 0 \}$ c'est-à-dire l'ensemble des j tels qu'existe une relation du type $a \xrightarrow{\epsilon_{aj}} \lambda_j$.

Les mots qui nous permettent de passer de l'état a à un état l_j , $i \in I$ sont les suivants (les indices de a étant définis modulo g) :

$$\{\varepsilon_{aj} \quad \varepsilon_j \quad \dots \quad \varepsilon_{i-1} \quad \overbrace{\varepsilon_i \quad \dots \quad \varepsilon_{i-1}}^{N_1 \text{ fois}}, \quad N_1 \in \mathbb{N}, \quad (i,j) \in I \times J\}$$

Posons maintenant pour tout $(i,j) \in I \times J$:

$$t_i = r^{g-1} \varepsilon_i + \dots + \varepsilon_{i-1},$$

$$d = d(i,j) = \begin{cases} i - j & \text{si } j \leq i \\ g - (j - i) & \text{si } j > i \end{cases},$$

$$s_{i,j} = r^d \varepsilon_{aj} + r^{d-1} \varepsilon_j + \dots + \varepsilon_{i-1}.$$

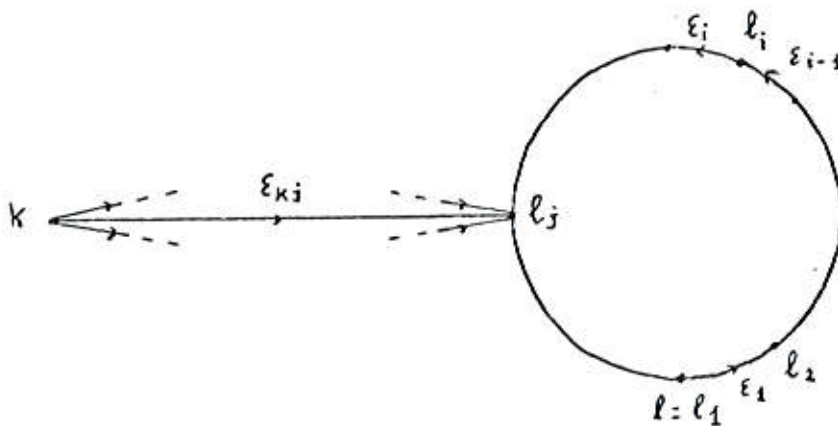
Alors les mots précédents correspondent aux entiers

$$\left\{ r^{N_1 g} s_{i,j} + \frac{r^{N_1 g} - 1}{r^g - 1} t_i, \quad N_1 \in \mathbb{N}, \quad (i,j) \in I \times J \right\}$$

On en déduit, en procédant de même pour les autres boucles éventuelles telles que $v(\tilde{\alpha}) = 1$, que u est réunion d'un nombre fini P de suites u^p

$p \in \{1, \dots, P\}$ de la forme $\{q_1^p r^{N_1 g^p} + q_2^p, \quad N_1 \in \mathbb{N}\}$ avec $(q_1^p, q_2^p) \in \mathbb{Q}^2$.

Etape 2 : Supposons la proposition démontrée jusqu'à l'ordre $(v-1)$ et considérons une boucle $\tilde{\alpha} = (l_1, \dots, l_g)$ telle que $v(\tilde{\alpha}) = v$.



Posons $I = \{i \in \{1, \dots, g\}, \quad \tau(l_i) = 1\}$.

Soit k un sommet précédant l dans G (c'est-à-dire tel que $k < l$)

Notons $J(k) = \{j \in \{1, \dots, g\}, \quad N_{k l_j} \neq 0\}$ l'ensemble des j tels qu'existe

une relation du type $k \xrightarrow{\varepsilon_{kj}} l_j$.

L'ensemble E des mots qui permettent de passer de l'état a à un état λ_i , $i \in I$ s'exprime en fonction de l'ensemble des mots $m(a,k)$ qui permettent de passer de l'état a à un état k , $k < \lambda$ de la façon suivante :

$$E = \bigcup_{k < \lambda} \{ m(a,k) \varepsilon_{kj} \varepsilon_j \dots \varepsilon_{i-1} \frac{N_j \text{ fois}}{\varepsilon_i \dots \varepsilon_{i-1}}, N_j \in \mathbb{N}, (i,j) \in I \times J(k), \varphi(a.m(a,k)) = k \}$$

Posons maintenant pour tout $(i,j) \in I \times J(k)$

$$\begin{aligned} t_i &= r^{g-1} \varepsilon_i + \dots + \varepsilon_{i-1} \\ d &= d(i,j) = i-j \quad \text{si } j \leq i \\ &= g - (j-1) \quad \text{si } j > i \\ s_{ij}^k &= r^d \varepsilon_{kj} + r^{d-1} \varepsilon_j + \dots + \varepsilon_{i-1} \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, les mots $m(a,k)$ correspondent à la réunion d'un nombre fini P_1 de suites d'entiers v^p , $p \in \{1, \dots, P_1\}$:

$$q_1^p r^{(N_1 g_1^p + \dots + N_{v-1} g_{v-1}^p + v - 2)} + \dots + q_{v-1}^p r^{N_{v-1} g_{v-1}^p + v - 1} + q_v^p, (N_1, \dots, N_{v-1}) \in \mathbb{N}^{v-1}$$

On en déduit que l'ensemble E correspond à la réunion d'un nombre fini P_2 de suites d'entiers u^p , $p \in \{1, \dots, P_2\}$:

$$\left\{ q_1^p r^d r^{(N_1 g_1^p + \dots + N_{v-1} g_{v-1}^p + N_v g^p + v - 1)} + \dots + \left(q_v^p r^{d+1} + s_{ij}^k + \frac{t_i}{r^{g^p - 1}} \right) r^{N_v g^p} - \frac{t_i}{r^{g^p - 1}}, \right. \\ \left. (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v \right\} .$$

On procède de même pour les autres boucles telles que $v(\lambda) = v$.

Enfin, en complétant les P_3 suites u^p ainsi obtenues par les suites obtenues sur les sommets λ tels que $v(\lambda) < v$, on en déduit que u est réunion d'un nombre fini P de suites u^p , $p \in \{1, \dots, P\}$ de la forme

$$\left\{ q_1^p r^{(N_1 g_1^p + \dots + N_v g_v^p + v - 1)} + \dots + q_{v+1}^p r^{N_v g_v^p} + q_{v+1}^p, (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v \right\}$$

avec $(q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbb{Q}^{v+1}$, et la proposition 1 est ainsi démontrée par récurrence.

Proposition 2 : Si u est de la forme indiquée par la proposition 1, alors l'ensemble des $\xi \in \mathbb{R}$ tels que $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équirépartie modulo un à la puissance du continu.

Démonstration :

Quitte à remplacer pour tout $p \in \{1, \dots, P\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, v\}$

g_i^p par $\frac{g_i^p}{\text{pgcd}(g_1^p, \dots, g_v^p)}$ et à poser $r_p = r^{\text{pgcd}(g_1^p, \dots, g_v^p)}$, on peut sup-

poser que u est réunion de P suites u^p de la forme

$$\{q_1^p r^{v-1} r_p (g_1^p N_1 + \dots + g_v^p N_v) + \dots + q_v^p r_p g_v^p N_v + q_{v+1}^p ; (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v\}$$

où $v \in \mathbb{N}^*$, $(q_1^p, \dots, q_v^p) \in \mathbb{N}^v$ et $(q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbb{Q}^{v+1}$ avec $q_1^1 \neq 0$

(quitte à modifier la numérotation des suites u^p) et $q_{v+1}^1 = 0$ (quitte à opérer une translation sur \mathbb{R}) et pour tout $p \in \{1, \dots, P\}$ $\text{pgcd}(g_1^p \dots g_v^p) = 1$.

Posons $q = v \cdot \sup_i |q_i^1 r^{v-i}|$ et pour tout $h \in \mathbb{N}^*$ posons :

$$H = \{ \xi \in \mathbb{R} , \xi = \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon_i}{r^{ih}} , \epsilon_i \in \{0, 1\} \} .$$

Nous allons montrer que pour h assez grand, l'ensemble H (qui a la puissance du continu) est inclus dans l'ensemble des $\xi \in \mathbb{R}$ tels que $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas équirépartie modulo un.

Cela va résulter des quatre remarques suivantes :

1) Si $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x , on a pour tout (h, ξ) dans $\mathbb{N}^* \times H$:

$$\forall n \in \mathbb{N} , \{r_1^{nh} \cdot \xi\} \leq r^{1-h} .$$

On a en effet en posant $d = \frac{\log r_1}{\log r}$

$$\{r_1^{nh} \cdot \xi\} = \{r^{dnh} \cdot \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon_i}{r^{ih}}\}$$

$$= \{ \sum_{i > dn} \frac{\epsilon_i}{r^{(i-dn)h}} \} < \sum_{i \geq 1} \frac{1}{r^{ih}} = \frac{1}{r^h - 1} .$$

On en déduit, en posant $\chi = \mathbf{1}_{[0, q.r^{1-h}]}$ fonction indicatrice de l'intervalle $[0, q.r^{1-h}]$, pour tout (h, ξ) dans $\mathbb{N}^* \times H$:

$$\forall (N_1, \dots, N_\nu) \in \mathbb{N}^\nu, \chi(\{(q_1^1 r^{\nu-1} r_1^{(g_1^1 N_1 + \dots + g_\nu^1 N_\nu)h} + \dots + q_\nu^1 r_1^{g_\nu^1 N_\nu h}) \cdot \xi\}) = 1 .$$

2) Pour tout p dans $\{1, \dots, P\}$ désignons par $\varphi_p(n)$ le nombre de solutions dans \mathbb{N}^ν de l'équation $g_1^p N_1 + \dots + g_\nu^p N_\nu = n$ (avec $\text{pgcd}(g_1^p \dots g_\nu^p) = 1$) . De même désignons par $\psi_p(n)$ le nombre de solutions dans \mathbb{N}^ν de l'inéquation $g_1^p N_1 + \dots + g_\nu^p N_\nu < n$.

Le développement en série entière de

$$\sum_{n \geq 0} \varphi_p(n) X^n = (1 - X^{g_1^p})^{-1} \dots (1 - X^{g_\nu^p})^{-1} \quad \text{pour } |X| < 1$$

nous montre que
$$\varphi_p(n) \sim \frac{n^{\nu-1}}{g_1^p \dots g_\nu^p (\nu-1)!}$$

on en déduit que
$$\psi_p(n) \sim \frac{n^\nu}{g_1^p \dots g_\nu^p \cdot \nu!}$$

Considérons maintenant l'entier $Q(n)$ tel que

$$u_{Q(n)} = q_1^1 r^{\nu-1} r_1^n + q_2^1 r^{\nu-2} + \dots + q_\nu^1$$

et soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que pour tout p dans $\{1, \dots, P\}$:

$$u_{Q(n)} \leq q_1^p r^{\nu-1} r_p^{an+b} + q_2^p r^{\nu-2} + \dots + q_{\nu+1}^p .$$

on a alors $Q(n) \leq \psi(an+b)$ avec $\psi(n) = \sum_{p=1}^P \psi_p(n)$.

D'autre part, soit $c \in \mathbb{N}$ tel que

$$q_1^1 r^{\nu-1} r_1^c \geq q_1^1 r^{\nu-1} + \dots + q_\nu^1 ,$$

alors pour tout h dans \mathbb{N}^*

$$u_{Q(hn+c)} \geq q_1^1 r^{\nu-1} r_1^{hn} + \dots + q_\nu^1 r_1^{hn} ,$$

et d'après la première remarque

$$\sum_{m < Q(hn+c)} \chi(\{u_m, \xi\}) \geq \sum_{m < n} \varphi_1(m) = \psi_1(n)$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Q(hn+c)} \sum_{m < Q(hn+c)} \chi(\{u_m, \xi\}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(n)}{\psi(ahn+ac+b)} = \frac{1}{C.h^v}$$

avec $C = g_1^1 \dots g_v^1 a^v \prod_{p=1}^p \frac{1}{g_1^p \dots g_v^p} \in \mathbb{R}^{+*}$.

4) Si (u_n, ξ) était équirépartie modulo un, on aurait

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \chi(\{u_n, \xi\}) = q.r^{1-h}$$

et il suffit donc de choisir h assez grand pour que $\frac{1}{C.h^v} > q.r^{1-h}$
de façon à aboutir à une contradiction.

C.Q.F.D.

Pour toute suite u reconnaissable par un automate fini, posons

$$V(N) = \text{Card} \{n < N, n \in u\}$$

Les lemmes 1 et 2 nous permettent de déduire du théorème 2 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à la suite u soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est que :

$$V(N) \approx (\ln N)^\beta N^\theta \quad \text{avec } \{ \beta, \theta \} \in \mathbb{N} \times]0,1]$$

THEOREME 3 : Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à une suite reconnaissable par un automate fini soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est que cette suite n'ait pas une croissance de type exponentiel (i.e. $\theta > 0$).

Exemple 6 : Soit $m_0 < m_1 < \dots < m_n < \dots$ la suite de Morse et soit $b_0 < b_1 < \dots < b_n < \dots$ la suite de Baum-Sweet. Alors l'ensemble normal associé à la suite $(m_{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En effet soit $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} X^{m_{b_n}}$ la série formelle associée à la suite

$(m_{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{On a } f(X) = \sum_{v(\text{rg}(n))=b} \chi(n) X^n$$

où χ , fonction indicatrice de la suite de Morse, vérifie pour tout entier n

$$\begin{cases} \chi(2n) = \chi(n) & \text{si } n > 0 \\ \chi(2n+1) = 1 - \chi(n) & \text{si } n > 0 \\ \chi(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{et où } \text{rg}(n) = \sum_{p \leq n} \chi(n) - 1.$$

en particulier on a $\text{rg}(2n) = n + \chi(n) - 1$ et $\text{rg}(2n+1) = n$
ce qui nous montre que

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{v(n)=b} \chi(n) X^{2n} + X \sum_{v(n)=b} (1 - \chi(n)) X^{2n} \\ &= f_1(X^2) + X f_2(X^2) \end{aligned}$$

où $f_1(X)$ (resp. $f_2(X)$) est la série formelle associée à la suite croissante des entiers qui font partie à la fois de la suite de Baum-Sweet et de la suite de Morse (resp. qui font partie de la suite de Baum-Sweet, mais pas de la suite de Morse).

Ces deux suites étant 2-reconnaissables $f_1(X)$ et $f_2(X)$ sont deux éléments de $\mathbb{F}_2[[X]]$ algébriques sur $\mathbb{F}_2(X)$ (cf [6]) et par conséquent

$$f(X) = (f_1(X))^2 + X(f_2(X))^2 \text{ est algébrique sur } \mathbb{F}_2(X).$$

La suite $(m_{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc 2-reconnaissable et comme de plus $m_{b_n} \in O(n^{\log_2 2})$
avec $\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ son ensemble normal est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

De la même façon, on a plus généralement :

Corollaire : Soit $m_0 < m_1 < \dots < m_n < \dots$ la suite de Morse et soit $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$ une suite reconnaissable par un 2-automate. Alors l'ensemble normal associé à la suite extraite $(m_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si et seulement si la suite u n'a pas une croissance de type exponentiel.

Définition : Si $\Xi = \{t_1, \dots, t_s\} \subset \mathbb{C}$, on appelle spectre de Fourier-Bohr de $t \in \Xi^{\mathbb{N}}$ l'ensemble $S(t)$ des nombres réels tels que

$$\overline{\lim} \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} t(n) e(-n\xi) \right| > 0 ,$$

Si t est reconnaissable, posons pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$V_N(\xi) = \sum_{n < N} t(n) e(n\xi)$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$

$$V_N^i(\xi) = t_i \sum_{\substack{n < N \\ t(n) = t_i}} e(n\xi) ,$$

D'après le théorème 3 , si $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V_N^i(0) > 0$,

alors pour tout $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V_N^i(\xi) = 0$.

Donc, si $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| V_N(-\xi) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^s V_N^i(-\xi) \right| = 0 .$$

On a donc démontré le résultat suivant :

Théorème 4 : Si t est reconnaissable par un automate fini alors $S(t) \subset \mathbb{Q}$.

D'autre part, le théorème 3 nous montre que les exemples suivants constituent les cas typiques de suites reconnaissables par un automate fini dont l'ensemble normal est strictement inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

exemple 7 : La suite croissante des entiers de la forme 3^n ou $2 \cdot 3^n$ ($n \in \mathbb{N}$) .

exemple 8 : La suite croissante des entiers de la forme $2^{n_1+n_2+1} + 2^{n_2}$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}^2$)

exemple 9 : La suite croissante des entiers de la forme $2 \cdot 4^{n_1} 8^{n_2} + 8^{n_2}$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$)

Par ailleurs, il est facile de montrer que l'ensemble normal associé à la suite de l'exemple 7 (resp. exemple 8) est l'ensemble des nombres normaux en base 3 (resp. en base 2) .

Ceci nous conduit à poser la conjecture suivante :

Conjecture : L'ensemble normal associé à une suite reconnaissable par un r -automate est soit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ soit l'ensemble des nombres normaux en base r .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J.P. ALLOUCHE Théorie des nombres et automates.
Thèse d'Etat, 1983, Université de Bordeaux I .
- [2] C. BERGE Graphes et hypergraphes. 1973, Dunod.
- [3] J. BERSTEL Sur les mots sans carré définis par un morphisme.
Springer Lecture Notes in Computer Science 71, 1979, p. 16-25
- [4] J. BERSTEL Mots infinis. Théorie des langages et complexité des algo-
rithmes. Journées d'Avignon, oct. 1983.
- [5] A. BLANCHARD et M. MENDES-FRANCE
Symétrie et transcendance, Bull. Sc. Math., 2ème série,
t. 106, 1982 ; p. 325-335 .
- [6] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES-FRANCE et G. RAUZY
Suites algébriques, automates et substitutions,
Bull. Soc. Math. France t. 108, 1980; p. 401-418.
- [7] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES-FRANCE et G. RAUZY
Spectral properties of automaton-generating sequences (com-
munication privée).
- [8] A. COBHAM On the base-dependence of sets of numbers recognizable by
finite automata, Math. Syst. Theory, vol. 3, n° 2, 1969;
p. 186-192 .
- [9] A. COBHAM Uniform tag sequences, Math. Syst. Theory, vol. 6, n° 2,
1972; p. 164-192 .
- [10] J. COQUET A summation formula related to the binary digits, Invent. Math.
vol. 73, 1983; p. 107-115 .
- [11] J. COQUET Graphes connexes, représentation des entiers et équirépar-
tition, Journ. of Number Theory, vol. 16, n° 3, juin 1983,
p. 363-375.

- [12] F.M. DEKKING Regularity and irregularity of sequences generated by automata. Séminaire de théorie des nombres, 1979-80, Université de Bordeaux I .
- [13] F.M. DEKKING et M. MENDES-FRANCE
Uniform distribution modulo one : a geometrical viewpoint, Journ. für die Reine und Ang. Math., vol. 329, 1981; p.143-153
- [14] J.M. DUMONT Discrépance des progressions arithmétiques dans la suite de Morse, C.R. Acad. Sc. Paris t. 297, série I, n° 9, 1983; p. 145-148 .
- [15] S. EILENBERG Automata, languages and machines, vol. A, 1974, Academic Press.
- [16] D. FREEDMAN Markov chains. 1971, Holden-Day.
- [17] F. HARARY Graph theory. 1969, Addison-Wesley.
- [18] T. KAMAE Spectrum of a substitution minimal set, J. Math. Soc. Japan, vol. 22, n° 4, 1970; p. 567-578 .
- [19] T. KAMAE A topological invariant of substitution minimal sets, J. Math. Soc. Japan, vol. 24, n° 2, 1972; p. 285-306 .
- [20] L. KUIPERS et N. NIEDERREITER Uniform distribution of sequences. 1974, John Wiley & Sons.
- [21] J. H. LOXTON, A.J. VAN DER POORTEN Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations. J. Reine und Angew. Math. t. 330, 1982, p. 159-172.
- [22] J.C. MARTIN Substitution minimal flows, Amer. J. Math. t. 93, 1971; p. 503-526 .
- [23] C. MAUDUIT Automates finis et équirépartition modulo un. C.R. Acad. Sc. Paris t. 299, série I, n° 5, 1984, p. 121-123.
- [24] C. MAUDUIT Automates finis et ensembles normaux, Ann. Inst. Fourier, t. 36, 1986; à paraître .

- [25] M. MENDES-FRANCE, A.J. VAN DER POORTEN Arithmetic and analytic properties of paper folding sequences.
Bull. Austral. Math. Soc. 24, 1981, p. 123-131.
- [26] M. QUEFFELEC Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques.
Thèse d'Etat, 1984, Université de Paris-Nord.
- [27] G. RAUZY Propriétés statistiques de suites arithmétiques. 1976,
Presses Universitaires de France.
- [28] G. RAUZY Suites à termes dans un alphabet fini. Séminaire de théorie
des nombres, 1982-83, Université de Bordeaux I .
- [29] G. RAUZY Des mots en arithmétique. Théorie des langages et complexité
des algorithmes. Journées d'Avignon, oct. 1983.
- [30] A. SALOMAA Computation and automata . Encyclopedia of mathematics and its
applications, vol. 25, 1985, Cambridge University Press .
- [31] R.S. VARGA Matrix iterative analysis. 1962, Prentice-Hall.

*
* * *