



HAL
open science

Automates finis et équirépartition modulo un

Christian Mauduit

► **To cite this version:**

Christian Mauduit. Automates finis et équirépartition modulo un. Théorie des nombres [math.NT]. Université d'Aix-Marseille II, 1984. Français. NNT: . tel-02333471

HAL Id: tel-02333471

<https://hal.science/tel-02333471>

Submitted on 25 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE II
FACULTE DES SCIENCES
DE LUMINY

AUTOMATES FINIS ET EQUIREPARTITION MODULO UN.

THESE DE DOCTORAT DE 3^{ème} cycle
MATHÉMATIQUE PURE

Soutenue le 25 janvier 1984 par

M. MAUDUIT Christian

devant le jury composé de :

MM. Patrick DELORME

Président

André BLANCHARD

Jean-Marc DESHOUILLERS

Pierre LIARDET

Gérard RAUZY

Examinateurs

BIB CMI



NA08298-01

Monsieur DELORME , Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

*a bien voulu s'intéresser à mon travail et présider le jury,
je tiens à lui exprimer ici ma très respectueuse reconnaissance.*

Monsieur RAUZY , Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

*m'a fait l'honneur de diriger mes travaux de recherche et, par les
conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer, a toujours montré à mon égard une
bienveillante attention.*

Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et de ma profonde reconnaissance.

Je remercie particulièrement

Monsieur BLANCHARD , Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I

Monsieur DESHOUILLERS , Professeur à l'Université de Bordeaux I

Monsieur LIARDET , Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I

*qui ont bien voulu porter leur attention sur cette thèse et accepter de parti-
ciper au jury d'examen.*

Je tiens à remercier ici

Monsieur PLA , Professeur à l'École des Mines , *pour les encourage-
ments et les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer depuis mon entrée à
l'École et qui m'ont permis de m'orienter rapidement vers la recherche en
mathématique.*

Je remercie également

Monsieur COQUET , Professeur à l'Université de Valenciennes,
*pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour les indications qu'il a pu
me fournir.*

*Je remercie enfin Madame DIDRY, Secrétaire du Laboratoire de Mathématiques de
Marseille associé au CNRS, qui a mené à bien la réalisation matérielle de ce mé-
moire.*

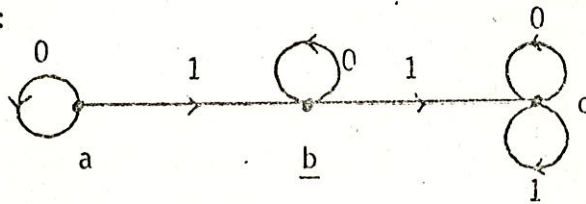
INTRODUCTION.

Considérons une suite d'entiers $u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots$ reconnaissable par un automate fini (la définition précise de la reconnaissabilité sera rappelée ultérieurement).

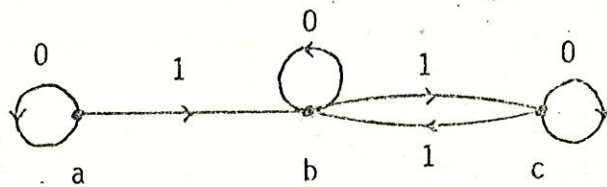
Le but de cette étude est de déterminer à quelles conditions on a équirépartition modulo 1 de la suite $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout ξ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Rappelons les trois exemples fondamentaux suivants de suite reconnaissable par un automate fini qui nous ont guidé au cours de nos recherches :

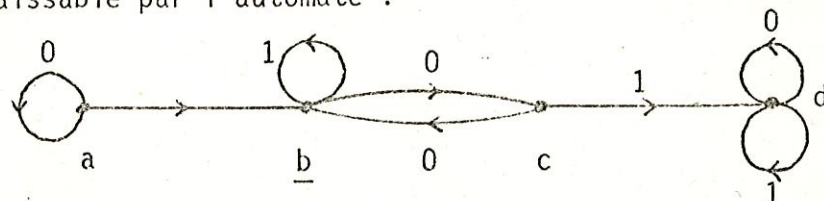
i) la suite $1 < 2 < 4 < 8 < 16 < \dots$ des puissances de 2, reconnaissable par l'automate :



ii) la suite $1 < 2 < 4 < 7 < 8 < \dots$ des entiers dont la somme des chiffres dans l'écriture en base 2 est impaire (suite de Morse), reconnaissable par l'automate :



iii) la suite $1 < 3 < 4 < 7 < 9 < \dots$ des entiers dont la représentation binaire ne contient aucune plage de 0 de longueur impaire (suite de Baum-Sweet), reconnaissable par l'automate :



D'après le théorème de Weyl, le problème revient à étudier le comportement de la somme $\sum_{n < N} e(u_n \cdot \xi)$ et de déterminer à quelles conditions on a, pour

tout ξ irrationnel $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(u_n \cdot \xi) = 0$:

(en posant $e(x) = e^{2i\pi x}$).

Résultats antérieurs :

- Kamae, dans un article non publié, avait donné une ébauche de démonstration dans le cas particulier où $u_n \in O(n)$ (par exemple, pour la suite de Morse).

- En 1983, Coquet a obtenu un résultat permettant de conclure pour certaines suites telles que $u_n \notin O(n)$. C'est le cas de la suite $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \dots$ des entiers dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 (cf [3]).

Mais cette méthode ne s'applique pas, par exemple, à la suite de Baum-Sweet qui vérifie $u_n \in O(\theta^{\log_2 n})$ avec $\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et dont on sait par ailleurs que l'ensemble normal est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Résultat obtenu :

Le théorème que nous donnons permet de conclure dans le cadre le plus général, en montrant qu'il suffit que pour tout $\gamma > 0$, $\gamma^n \notin O(u_n)$.

Cette condition, qui peut paraître artificielle, s'explique en fait très aisément sur le graphe associé à l'automate en disant qu'il suffit qu'au moins un des sommets qui reconnaît la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit précédé dans le graphe par un sommet possédant au moins deux chemins fermés distincts.

Quant à la nécessité de cette condition, nous ne la démontrons pas dans ce travail, mais elle a été vérifiée sur de nombreux contre-exemples.

NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Soit r un entier supérieur ou égal à 2 .

On désigne par $[r]$ l'alphabet $\{0, 1, \dots, r-1\}$ et par $[r]^K$ l'ensemble des mots de longueur $K \geq 1$.

$$[r]^0 = \{\emptyset\}$$

$$[r]^* = \bigcup_{K=0}^{+\infty} [r]^K$$

On rappelle que $[r]^*$ est muni de l'opération de concaténation en posant, si m_1, m_2, \dots, m_p sont des mots :

$$\bigcup_{i=1}^p m_i = m_1 m_2 \dots m_p \in [r]^*$$

Un r -automate \mathcal{A} est la donnée d'un quintuplet $\mathcal{A} = (A, \Xi, \alpha, \varphi, \tau)$ avec :

- i) A alphabet $A = \{a, b, c, \dots\}$
- ii) Ξ alphabet $\Xi = \{0, 1\}$
- iii) α point initial de A
- iv) φ application $\varphi : A \times [r] \rightarrow A$
- v) τ application $\tau : A \rightarrow \Xi$

Pour tout (x, j) dans $A \times [r]$ on pose $\varphi(x, j) = j(x)$ ou plus simplement $x.j$

On prolonge alors $\varphi : A \times [r] \rightarrow A$ en une application, encore notée φ , $A \times [r]^* \rightarrow A$.

Si n est un entier positif dont la représentation en base r est $e_\ell e_{\ell-1} \dots e_0$ on pose pour tout x dans A

$$\begin{aligned} \varphi(x, n) &= x.n \\ &= x.e_\ell e_{\ell-1} \dots e_0 \end{aligned}$$

(à $n = 0$ on associe le mot vide, avec $\varphi(x, \emptyset) = x$) .

Ainsi, lorsque n parcourt \mathbb{N} , $a.n$ décrit une suite infinie d'éléments dans A et $\tau(a.n)$ décrit une suite infinie d'éléments dans Ξ .

Définition fondamentale : On dit qu'une suite $t \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est r -reconnaissable s'il existe un r -automate

$\mathcal{A} = (A, \mathbb{E}, \alpha, \varphi, \tau)$ tel que :

$$t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\tau(a \cdot n))_{n \in \mathbb{N}}$$

D'autre part, notons G le graphe associé à l'automate \mathcal{A} et M la matrice associée au graphe G .

$$M = (M_{ij})_{(i,j) \in A^2}$$

Si $0, 1, 2, \dots$ désignent les matrices des actions respectives de

$\xrightarrow{0}, \xrightarrow{1}, \dots, \xrightarrow{r-1}$, on pose pour ξ dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{s=0}^{r-1} e(s \cdot \xi) \cdot S \\ &= (M_{ij}(\xi))_{(i,j) \in A^2} \end{aligned}$$

Pour tout n dans \mathbb{N} , on note $M^n(\xi) = (M_{ij}^{(n)}(\xi))_{(i,j) \in A^2}$.

Soit ℓ un sommet de G .

$G[\ell]$ est la restriction du graphe G à l'ensemble des sommets k tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $M_k^{(n)} > 0$ (c'est-à-dire à l'ensemble des états capables de rejoindre l'état ℓ).

On dira que le sommet i de G précède le sommet j de G s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M_{ij}^{(n)} > 0$.

On note $M(G[\ell])$ la matrice associée au graphe $G[\ell]$.

Désignons par $\tilde{\mathcal{G}}$ la composante fortement connexe du sommet ℓ dans G .

$\tilde{\mathcal{G}}$ sera considérée comme un sous-graphe de G . On note $M[\tilde{\mathcal{G}}](\xi)$ la matrice extraite de la matrice $M(\xi)$ obtenue par restriction à $\tilde{\mathcal{G}}$ du graphe G .

Si Γ est un sous-graphe de G , on notera $v(\Gamma)$ son nombre cyclomatique (c'est-à-dire le nombre d'arcs de Γ , plus le nombre de composantes connexes de Γ , moins le nombre de sommets de Γ).

a étant l'état initial de l'automate \mathcal{A} , on définit l'application v :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow A \\ n &\mapsto v(n) = \varphi(a, n) = a \cdot n \end{aligned}$$

et on note, pour tout x réel :

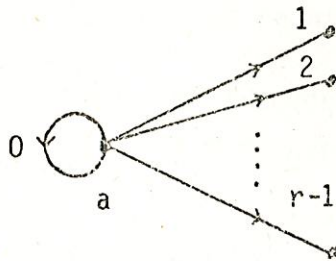
$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} e(n, \xi)$$

$$\begin{aligned} V(x, \ell) &= V(x, \ell, 0) \\ &= \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} 1 \end{aligned}$$

On a choisi l'automate de façon à ce que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \quad V(x, a, \xi) = 0$$

ce qui est toujours possible, quitte à rajouter un nouvel état initial à l'alphabet A .



On rappelle les notations suivantes :

$$\text{Si } u \in \mathbb{R}^m \quad \|u\|_1 = \sum_{i=1}^m |u_i|$$

$$\|u\|_\infty = \sup_{i=1 \dots m} |u_i|$$

ainsi que les normes matricielles associées :

$$\|M\|_1 = \sup_{j=1 \dots m} \sum_{i=1}^m |M_{ij}|$$

$$\|M\|_\infty = \sup_{i=1 \dots m} \sum_{j=1}^m |M_{ij}|$$

N.B. : Les définitions spécifiques aux automates se trouvent dans [2] et [4], celles spécifiques aux graphes se trouvent dans [1] et [9].

De plus, nous avons été amenés au cours de notre étude à poser les deux définitions suivantes, qui ne sont pas classiques :

Rappelons tout d'abord que l'on peut définir sur le graphe G la relation d'équivalence de forte connexité entre les sommets :

$\ell \sim \ell'$ ssi - il existe un chemin dans G allant de ℓ vers ℓ'
 - et il existe un chemin dans G allant de ℓ' vers ℓ .

On note G/\sim le graphe quotient ainsi obtenu.

G/\sim est un graphe sans boucle. On peut donc définir sur G/\sim une numérotation n des sommets (cf [9] p. 2-28)

$$n : G/\sim \rightarrow \mathbb{N}^*$$

On note $\tilde{\ell}$ la classe d'équivalence modulo \sim du sommet ℓ de G .

On peut alors prolonger n en une application de G dans \mathbb{N} , encore notée n , en posant pour $\ell \in G$:

$$n(\ell) = n(\tilde{\ell}) \quad (\text{indépendant du choix de } \ell \text{ dans } \tilde{\ell})$$

Ceci nous permet de définir une relation d'ordre sur G :

$$\begin{aligned} k \leq \ell & \quad \text{ssi } k \text{ précède } \ell \text{ dans } G \\ k < \ell & \quad \text{ssi } k \leq \ell \text{ et } n(k) < n(\ell) \end{aligned}$$

Définition 1 :

- $\tilde{\ell}$ est de type 0 si $v(\tilde{\ell}) = 0$
- $\tilde{\ell}$ est de type 1 si $v(\tilde{\ell}) = 1$
- $\tilde{\ell}$ est de type 2 si $v(\tilde{\ell}) \geq 2$

où v désigne le nombre cyclomatique.

ℓ sera de type i lorsque $\tilde{\ell}$ est de type i ($i \in \{0,1,2\}$)

Définition 2 :

Le poids de ℓ est égal au maximum des types des sommets de G précédant le sommet ℓ .

On le note $\pi(\ell)$.

$$\begin{aligned} \pi : G & \rightarrow \{0,1,2\} \\ \ell & \mapsto \pi(\ell) \end{aligned}$$

Préliminaire : calcul de $V(x,\ell,\xi)$

$$\begin{aligned} V(x,\ell,\xi) &= \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} e(n\xi) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{n < \frac{x-\ell}{r}} e((nr+s)\xi) \\ & \quad v(nr+s) = \ell \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(nr+s) = \ell}} e((nr+s)\xi) + B(x, \ell, \xi)$$

avec $|B(x, \ell, \xi)| \leq r-1$

Remarquons maintenant que si l'on pose $S = (S_{ij})_{(i,j) \in A^2}$

$$\sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(nr+s) = \ell}} e(nr\xi) = \sum_{k \in A} S_{k\ell} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(n) = k}} e(nr\xi)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k \in A} e(s\xi) S_{k\ell} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ v(n) = k}} e(nr\xi) + B(x, \ell, \xi) \\ &= \sum_{k \in A} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, \ell, r\xi\right) + B(x, \ell, \xi) \end{aligned}$$

SCHEMA DE LA DEMONSTRATION.

Il s'agit de démontrer que pour tout sommet ℓ de poids 2, on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x, \ell, \xi)}{V(x, \ell)} = 0$$

Le lemme fondamental est le lemme 1 : Pour une suite extraite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$V(x_n, \ell) \sim (\alpha(\ln x_n))^\beta x_n^\theta$$

où $(\alpha, \beta, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{N} \times [0, 1]$

De plus, on remarque :

- θ relié au rayon spectral de $M[\tilde{\ell}](0)$:

$$\rho(\tilde{\ell}) \leq r^\theta$$

- (β, θ) ne dépend que du sommet ℓ .

Au lemme 2, on établit l'équivalence suivante :

$$\ell \text{ de poids 2} \iff \theta \in]0, 1[$$

qui nous permettra de négliger l'influence des sommets de poids 1.

Au lemme 3 , on montre que (β, θ) est constant sur toute composante fortement connexe de G .

On démontre enfin le théorème par récurrence sur $n(\mathcal{L})$, grâce à une numérotation n des sommets du graphe quotient.

Le point essentiel de la démonstration consiste alors à étudier le comportement asymptotique d'une suite $(B_N(\xi))_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices.

LEMME 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers.

Soit ℓ un sommet de G .

Alors, on peut toujours extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle qu'il existe (α, β, θ) dans $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{N} \times [0, 1]$ tel que :

$$V(x_{n_k}, \ell) \sim \alpha \cdot (\ln x_{n_k})^\beta x_{n_k}^\theta$$

DEMONSTRATION :

Etape 1 : Montrons ce lemme pour la suite $x_n = r^n$.

$V(r^n, \ell)$ est égal au nombre de chemins de longueur n joignant le sommet a au sommet ℓ dans le graphe $G[\ell]$, c'est-à-dire au coefficient d'indice (a, ℓ) de la matrice $M(G[\ell])^n$.

Pour estimer ce coefficient, mettons $M(G[\ell])$ sous la forme de Jordan :

$$M(G[\ell]) = P J P^{-1}$$

avec

$$P = (P_{ij})_{(i,j) \in A^2}$$

$$P^{-1} = (P'_{ij})_{(i,j) \in A^2}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_s \end{bmatrix} \quad (s \text{ blocs de Jordan})$$

Soit $k \in A$. Soit J_j le bloc de Jordan correspondant à la ligne k de J .

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_j \end{bmatrix} \quad \text{de taille } t_j \times t_j$$

Soit u_k l'entier tel que la $k^{\text{ième}}$ ligne de J soit la $u_k^{\text{ième}}$ ligne de J_j ($1 \leq u_k \leq t_j$). Alors, le coefficient d'indice (k, ℓ) de la matrice $J^n P^{-1}$ est de la forme :

$$\lambda_j^n P'_{j\ell} + \binom{n}{1} \lambda_j^{n-1} P'_{j+1, \ell} + \dots + \binom{n}{t_j - u_k} \lambda_j^{n-t_j+u_k} P'_{j+t_j-u_k, \ell}$$

où l'on suppose A muni de l'ordre lexicographique et où l'on définit pour tout j choisi parmi les $|A|-1$ premiers éléments de A :

$$(j+1) = \text{le suivant de } j \text{ dans } A.$$

On en déduit alors l'expression de $V(r^n, \ell)$:

$$\begin{aligned} V(r^n, \ell) &= (M(G[\ell]))^n_{a, \ell} \\ &= \sum_{k \in A} P_{ak} \lambda_j^n P'_{j, \ell} + \sum_{k \in A} \binom{n}{1} P_{ak} \lambda_j^{n-1} P'_{j+1, \ell} + \\ &+ \dots + \sum_{k \in A} \binom{n}{t_j - u_k} P_{ak} \lambda_j^{n-t_j+u_k} P'_{j+t_j-u_k, \ell} \end{aligned}$$

Considérons une valeur propre λ_j de $M(G[\ell])$ telle qu'un de ces t_j sommes soit non identiquement nulle, et choisissons λ_j de module maximal avec cette propriété.

Posons $|\lambda_j| = \lambda$.

Les autres valeurs propres de $M(G[\ell])$ de module λ sont de la forme $\lambda \cdot e(v)$ avec $v \in \mathbb{Q}$ (cf [11] p. 35)

On peut supposer, quitte à réordonner l'ensemble A , que les valeurs propres de module λ de $M(G[\ell])$ sont

$$\lambda_a = \lambda \cdot e(v_a), \lambda_b = \lambda \cdot e(v_b), \dots, \lambda_g = \lambda \cdot e(v_g)$$

Supposons maintenant que la $(i+1)$ ième somme soit non nulle ($0 \leq i < t_a$) :

$$\sum_{k \in A} \binom{n}{i} P_{a, k} \lambda_a^{n-i} P'_{j+i, \ell} \neq 0$$

On a alors :

$$V(r^n, \ell) = \binom{n}{i} (h_a e(v_a) + \dots + h_g e(v_g)) \lambda^{n-i} + W(r^n, \ell)$$

où les h_j ne dépendent que des t_j , $P_{a, j}$ et $P'_{j+i, \ell}$.

De plus, les λ_j étant de module maximal, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W(r^n, \ell)}{\lambda^n} = 0$$

Quitte à rajouter des h_j nuls, on peut écrire pour tout entier n :

$$h_a e(nv_a) + \dots + h_g e(nv_g) = \sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{nj}{q}\right)$$

choisissons maintenant d , $d \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ tel que $\sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{dj}{q}\right) \neq 0$.

Cela est possible, car sinon on aurait

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e\left(\frac{1}{q}\right) & \dots & e\left(\frac{q-1}{q}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i & e\left(\frac{q-1}{q}\right) & \dots & e\left(\frac{q-1}{q}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ \vdots \\ H_1 \\ \vdots \\ H_{q-1} \end{bmatrix} = 0$$

d'où $H_0 = \dots = H_{q-1} = 0$ ce qui serait contraire au choix de i tel que les h_j , $j \in \{a, b, \dots, g\}$ ne soient pas tous nuls.

Pour un tel d , estimons $V(r^{qn+d}, \ell)$:

$$V(r^{qn+d}, \ell) = \binom{qn+d}{i} \left(\sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{dj}{q}\right) \right) \lambda^{qn+d-i} + W(r^{qn+d}, \ell)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(r^{qn+d}, \ell)}{\lambda^{qn} \cdot n^i} = \frac{\lambda^{d-i} \cdot q^i}{i!} \sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{dj}{q}\right)$$

et le lemme est démontré en extrayant la sous-suite $(r^{qn+d})_{n \in \mathbb{N}}$ et en posant

$$\alpha = \frac{1}{(\ell n r)^i \cdot \lambda^i \cdot i!} \sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{dj}{q}\right) \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\beta = i \in \mathbb{N}$$

$$\theta = \frac{\ell n \lambda}{\ell n r} \in [0, 1]$$

$$V(r^{nq+d}, \ell) \sim \alpha (\ell n r^{nq+d})^\beta r^{(nq+d)\theta}$$

Remarque importante :

Si $\rho(\tilde{\mathcal{L}})$ est le rayon spectral de la matrice $M[\tilde{\mathcal{L}}](0)$, alors $\rho(\tilde{\mathcal{L}}) \leq r^\theta$.

En effet si $N_n(\ell_1, \ell_2)$ désigne le nombre de chemins de longueur n reliant le sommet $\ell_1 \in \tilde{\mathcal{L}}$ au sommet $\ell_2 \in \tilde{\mathcal{L}}$, on démontrerait comme précédemment que pour tout $\varepsilon > 0$

$$N_n(\ell_1, \ell_2) \in O(r^{(1+\varepsilon)\theta n})$$

Or $N_n = \sum_{\ell_1 \in \tilde{\mathcal{L}}} \sum_{\ell_2 \in \tilde{\mathcal{L}}} N_n(\ell_1, \ell_2)$, qui désigne le nombre de chemins de

longueur n dans le graphe fortement connexe $\tilde{\mathcal{L}}$, correspond à la valeur d'une norme matricielle en $M[\tilde{\mathcal{L}}](0)^n$:

$$N_n = \| M[\tilde{\mathcal{L}}](0)^n \|$$

Cette norme étant équivalente à la norme spectrale, on en déduit, en posant $\rho = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ que

$$N_n \in o(\rho^n) \quad N_n \notin o(\rho^n)$$

(cf [11] p. 65) .

Alors $\rho > r^\theta \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / \rho = r^{(1+\varepsilon)\theta}$

$$\Rightarrow \forall (\ell_1, \ell_2) \in \tilde{\mathcal{L}}^2 \quad N_n(\ell_1, \ell_2) \in o(\rho^n)$$

$$\Rightarrow N_n \in o(\rho^n)$$

ce qui est faux. donc $\rho \leq r^\theta$.

Etape 2 : Soit maintenant $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! m \in \mathbb{N}, m \in \{nq+d, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{tel que}$$

(avec les notations de l'étape 1)

$$r^m \leq x_n < r^{m+q}$$

Aussi a-t-on, en posant :

$$U(x_n, \ell) = \frac{V(x_n, \ell)}{(\ln x_n)^\beta x_n^\theta}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U(x_n, \ell) \leq \frac{V(r^{m+q}, \ell)}{(\ln r^m)^\beta r^{m\theta}}$$

D'autre part, d'après l'étape 1

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0 \quad \frac{\alpha}{2} \leq \frac{V(r^m, \ell)}{(\ln r^m)^\beta r^{m\theta}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} U(x_n, \ell) &\geq \frac{V(r^m, \ell)}{(\ln r^{m+q})^\beta r^{\theta(m+q)}} \\ &\geq \frac{\alpha}{2 r^{\theta q}} \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{m}\right)^\beta} \end{aligned}$$

Et par conséquent, il existe un entier N_0 tel que

$$n \geq N_0 \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2^{\beta+1} r^{\theta q}} \leq U(x_n, \ell) \leq \frac{V(r^{m+q}, \ell)}{(\ln r^m)^\beta r^{m\theta}}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(r^{m+q}, \ell)}{(\ln r^m)^\beta r^{m\theta}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha r^\theta \left(\frac{m+q}{m} \right)^\beta \\ &= \alpha r^\theta \end{aligned}$$

Donc $(U(x_n, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dont on peut extraire une sous-suite $(U(x_{n_k}, \ell))_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers une limite α' non nulle.

On a donc extrait de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle qu'il existe $(\alpha', \beta, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{N} \times [0, 1]$ tel que $V(x_{n_k}, \ell) \sim \alpha' (\ln x_{n_k})^\beta x_{n_k}^\theta$

Remarque :

En particulier, on remarquera que (β, θ) est indépendant du choix de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers.

(β, θ) ne dépend donc que du sommet ℓ considéré.

On écrira parfois $\beta(\ell)$ et $\theta(\ell)$.

LEMME 2 : (avec les notations du lemme 1)

- Si ℓ est de poids 1, alors $\theta = 0$
- Si ℓ est de poids 2, alors $\theta \in]0,1[$

DEMONSTRATION :

Premier cas : $\pi(\ell) = 1$.

Nous allons démontrer par récurrence sur $n(\ell) \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall \varepsilon > 1 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(r^m, \ell)}{\varepsilon^m} = 0$$

On en déduira, pour le couple (q,d) défini dans l'étape 1 du lemme 1

$$\frac{V(r^{mq+d}, \ell)}{\varepsilon^{mq+d}} \sim \alpha (\ln r^{mq+d})^\varepsilon \left(\frac{r^\theta}{\varepsilon}\right)^{mq+d}$$

ce qui implique

$$\forall \varepsilon > 1 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{r^\theta}{\varepsilon}\right)^{mq} = 0$$

d'où $\forall \varepsilon > 1 \quad r^\theta < \varepsilon$

c'est-à-dire $\theta = 0$.

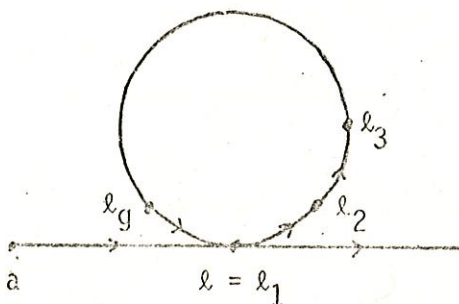
Etape 1 : $n(\ell) = 1$

Pour tout m dans \mathbb{N} , on a

$$\begin{aligned} V(r^m, \ell) &= \sum_{k \in A} M_{k\ell} V(r^{m-1}, k) + B(r^m, \ell) \\ &= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell} V(r^{m-1}, k) + B(r^m, \ell) \end{aligned}$$

car pour $k = a \quad V(r^{m-1}, a) = 0$

Soit, en notant $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_g$ les sommets de la boucle $\tilde{\ell}$



Et en posant $V(m) = (V(r^m, \ell))_{\ell \in \tilde{\mathcal{L}}}$ $\in \mathbb{R}^{|\tilde{\mathcal{L}}|}$
 $B(m) = (B(r^m, \ell))_{\ell \in \tilde{\mathcal{L}}}$ $\in \mathbb{R}^{|\tilde{\mathcal{L}}|}$

$$\begin{aligned} V(m) &= {}^t M[\tilde{\mathcal{L}}](0) \cdot V(m-1) + B(m) \\ &= ({}^t M[\tilde{\mathcal{L}}](0))^m \cdot V(0) + \\ &+ (B(m) + \dots + ({}^t M[\tilde{\mathcal{L}}](0))^{m-1} B(1)) \end{aligned}$$

avec ${}^t M[\tilde{\mathcal{L}}](0) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \cdot & & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Donc $V(r^m, \ell) \leq \|V(m)\|_\infty$
 $\leq \|{}^t M[\tilde{\mathcal{L}}](0)\|_1^m \|V(0)\|_\infty + m(r-1)$
 $\leq \|V(0)\|_\infty + m(r-1)$

et par conséquent pour tout $\varepsilon > 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(r^m, \ell)}{\varepsilon^m} = 0$$

Etape 2 : Supposons le lemme démontré pour tout sommet k de poids 1 tel que $n(k) < n$ et donnons-nous un sommet ℓ tel que $\pi(\ell) = 1$ et $n(\ell) = n$.

Pour tout m dans \mathbb{N}^* , on a

$$V(r^m, \ell) = \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell}} M_{k\ell} V(r^{m-1}, k) + \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell} V(r^{m-1}, k) + B(r^m, \ell)$$

Et comme précédemment

$$V(r^m, \ell) \leq \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell}} M_{k\ell} V(r^{m-1}, k) + \|V(0)\|_\infty + m(r-1)$$

Mais puisque l'on a, par hypothèse de récurrence

$$\forall \varepsilon > 1, \forall k \in A \quad k < \ell \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(r^{m-1}, k)}{\varepsilon^m} = 0$$

on en déduit

$$\forall \varepsilon > 1 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(r^m, \ell)}{\varepsilon^m} = 0$$

Second cas : $\pi(\ell) = 2$

Soit k un sommet de type 2 précédent ℓ .

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $V(r^p, k) \geq 1$

Soit $p' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad V(r^{n+p'}, \ell) \geq V(r^n, k)$

(par exemple $p' =$ longueur du plus court chemin reliant k à ℓ dans G).

k étant de type 2, il existe au moins 2 chemins distincts (de longueurs ω_1 et ω_2) joignant k à k .

Posons $\omega = \omega_1 \omega_2$.

On a alors pour tout entier n :

$$V(r^{p+n\omega}, k) \geq 2^n V(r^p, k)$$

Or $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists ! n \in \mathbb{N}$, $p+p'+n\omega \leq m < p+p'+(n+1)\omega$

Pour ce couple (m, n) on a $V(r^m, \ell) \geq 2^n$

$$\text{et } \frac{\ln V(r^m, \ell)}{m} \geq \frac{n \ln 2}{m} \geq \frac{m-p-p'-\omega}{m} \ln 2$$

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln V(r^m, \ell)}{m} \geq \frac{\ln 2}{\omega} > 0$$

ce qui implique $\theta > 0$ dans le lemme 1.

Remarque :

$\frac{1}{r}$. A étant une matrice stochastique, on en déduit que la CNS pour que $\theta = 1$ est que ℓ soit un état récurrent de l'automate (cf [5] p. 19).

En particulier, si $u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots$ est la suite d'entiers que l'on étudie, la CNS pour que $u_n \in O(n)$ est que l'un au moins des états de qui reconnaît $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit récurrent.

8298-01

LEMME 3 : (avec les notations du lemme 1)

Soient ℓ et ℓ' deux sommets de G .

$$\text{Alors } \ell \sim \ell' \Rightarrow \begin{aligned} \beta(\ell) &= \beta(\ell') \\ \theta(\ell) &= \theta(\ell') \end{aligned}$$

DEMONSTRATION :

Soit $(r^{nq+d})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite extraite (cf étape 1 du lemme 1) telle que

$$V(r^{nq+d}, \ell) \sim \alpha (\ln r^{nq+d})^\beta r^{\theta(nq+d)}$$

Soient p et p' entiers tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V(r^{n-p}, \ell') \leq V(r^n, \ell)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V(r^{n-p'}, \ell) \leq V(r^n, \ell')$$

(par exemple p (resp. p') = longueur du plus court chemin reliant ℓ' à ℓ (resp. ℓ à ℓ') dans G).

Soit m le plus petit entier tel que $mq + p' - p \geq 0$

On a alors d'une part

$$\frac{V(r^{nq+d-p}, \ell')}{(\ln r^{nq+d-p})^\beta r^{\theta(nq+d-p)}} \leq \frac{V(r^{nq+d}, \ell)}{(\ln r^{nq+d-p})^\beta r^{\theta(nq+d-p)}}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{V(r^{nq+d-p}, \ell')}{(\ln r^{nq+d-p})^\beta r^{\theta(nq+d-p)}} &\geq \frac{V(r^{nq+d-p+p'}, \ell)}{(\ln r^{nq+d-p})^\beta r^{\theta(nq+d-p)}} \\ &\geq \frac{V(r^{(n-m)q+d}, \ell)}{(\ln r^{nq+d-p})^\beta r^{\theta(nq+d-p)}} \\ &\geq \frac{1}{2} \alpha r^{\theta(p-mq)} > 0 \end{aligned}$$

pour n assez grand.

$$\text{De plus } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(r^{nq+d}, \ell)}{(\ln r^{nq+d-p})^\beta r^{\theta(nq+d-p)}} = \alpha r^{\theta p}$$

et par conséquent on peut extraire de la suite $(nq+d)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite

$(n_k q + d)_k \in \mathbb{N}$ telle que la suite $\left(\frac{V(r^{n_k q + d - p}, \ell')}{(\ln r^{n_k q + d - p})^\beta \theta(n_k q + d - p)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$

converge vers une limite α' non nulle, c'est-à-dire

$$V(r^{n_k q + d - p}, \ell') \sim \alpha' (\ln r^{n_k q + d - p})^\beta \theta(n_k q + d - p)$$

ce qui signifie que $\beta(\ell') = \beta$ et $\theta(\ell') = \theta$.

THEOREME : Soit ℓ un sommet de G de poids 2 .

Alors pour tout ξ irrationnel, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x, \ell, \xi)}{V(x, \ell)} = 0$$

DEMONSTRATION :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence sur $n(\ell) \in \mathbb{N}^*$.

Etape 1 : $n(\ell) = 1$

Supposons qu'il existe un irrationnel ξ tel que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{V(x, \ell, \xi)}{V(x, \ell)} \right| > 0$$

Soit alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(x_n, \ell, \xi)}{V(x_n, \ell)} = \omega(\ell, \xi) \quad \text{avec} \quad |\omega(\ell, \xi)| > 0$$

Quitte à extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer qu'il existe (α, β, θ) dans $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{N} \times]0, 1]$ tel que

$$V(x_n, \ell) \sim \alpha \cdot (\ln x_n)^\beta \cdot x_n^\theta$$

(cf lemmes 1 et 2) .

On a, pour tout x positif :

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{k \in A} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, k, r\xi\right) + B(x, \ell, \xi) \\ &= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, k, r\xi\right) + B(x, \ell, \xi) \end{aligned}$$

car pour $k = a$, on a $V\left(\frac{x}{r}, a, r\xi\right) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } \omega(\ell, \xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(x_n, \ell, \xi)}{V(x_n, \ell)} \\ &= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}(\xi) \cdot \omega(k, r\xi) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k\right)}{V(x_n, \ell)} \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 3, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k\right)}{V(x_n, \ell)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, \ell\right)}{V(x_n, \ell)}$$

et d'après les lemmes 1 et 2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, \ell\right)}{V(x_n, \ell)} = \frac{1}{r^\theta}$$

$$\text{Ainsi } \omega(\ell, \xi) = \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} \frac{M_{k\ell}(\xi)}{r^\theta} \cdot \omega(k, r\xi)$$

et de même pour tout $\ell' \in \tilde{\ell}$.

On obtient donc, en posant

$$\omega(\xi) = (\omega(\ell, \xi))_{\ell \in \tilde{\ell}} \in \mathbb{R}^{|\tilde{\ell}|}$$

$$\omega(\xi) = \frac{{}^t M[\tilde{\ell}](\xi)}{r^\theta} \omega(r\xi)$$

$$\text{D'où en posant } A(\xi) = \frac{{}^t M[\tilde{\ell}](\xi)}{r^\theta}$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \omega(\xi) = A(\xi) \cdot A(r\xi) \dots \dots A(r^N \xi) \omega(r^{N+1} \xi)$$

et, puisque $\|\omega(r^{N+1} \xi)\|_\infty \leq 1$:

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \|\omega(\xi)\|_\infty \leq \|A(\xi) \dots A(r^N \xi)\|_1$$

Posons $B_N(\xi) = A(\xi) \dots A(r^{N-1} \xi)$

Si l'on montre que $\lim_{N \rightarrow \infty} B_N(\xi) = 0$, on en déduira que $\|\omega(\xi)\|_\infty = 0$

d'où la contradiction qui montrera que le théorème est vrai pour $n(\xi) = 1$.

Pour tout x réel, posons :

$$A(x) = (a_{ij}(x)) \quad \begin{array}{l} i = 1 \dots |\tilde{\ell}| \\ j = 1 \dots |\tilde{\ell}| \end{array}$$

$$B_N(x) = (b_{ij}^N(x)) \quad \begin{array}{l} i = 1 \dots |\tilde{\ell}| \\ j = 1 \dots |\tilde{\ell}| \end{array}$$

avec, comme d'habitude :

$$a_{ij}(0) = a_{ij}$$

et
$$b_{ij}^N(0) = b_{ij}^N = a_{ij}^{(N)}$$

$\tilde{\ell}$ étant de poids 2, il existe un couple (i, j) tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$r^n \cdot b_{ij}^n(\xi) = e(p_1 \xi) + \dots + e(p_t \xi)$$

avec $t \geq 2$, $\forall i \in \{1, \dots, t\}$ $p_i \in \mathbb{Q}$ et $p_1 \neq p_2$.

ξ étant irrationnel, il existe alors un ε dans $]0, 1[$ et une suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers tels que :

$$|e(p_1 \cdot r^{N_k} \cdot \xi) + \dots + e(p_t \cdot r^{N_k} \cdot \xi)| \leq (1 - \varepsilon) t$$

c'est-à-dire tels que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < |b_{ij}^n(r^{N_k} \cdot \xi)| \leq (1 - \varepsilon) b_{ij}^n$$

De plus, quitte à étudier $B'_N(\xi) = A'(\xi) \dots A'(s^{N-1} \xi)$ avec

$A'(\xi) = A(\xi) \dots A(r^{n-1} \xi)$ et $s = r^n$, on voit que l'on peut supposer $n = 1$.

Enfin, quitte à effectuer des permutations sur les lignes et les colonnes de la matrice $A(\xi)$, on voit que l'on peut supposer $i = j = 1$.

Il nous reste donc à démontrer que sous l'hypothèse (H) suivante, on a
 $\lim_{N \rightarrow \infty} B_N(\xi) = 0$:

$$(H) \quad \exists \varepsilon \in]0, 1[, \exists (N_k)_{k \in \mathbb{N}} / \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < |a_{11}(r^{N_k} \xi)| \leq (1 - \varepsilon) a_{11}$$

La démonstration va découler des cinq remarques suivantes : (on identifie la matrice $A(0)$ avec le graphe qui lui est associé).

1) $a_{11} \neq 0$. En particulier, il y a au moins une boucle au sommet 1 .
 $A(0)$ étant irréductible, son graphe est fortement connexe et par conséquent si $(i, j) \in \{1, \dots, |\tilde{\mathcal{X}}|\}^2$ il existe un chemin de longueur $\alpha(j) + 1$ allant de 1 à j et un chemin de longueur $\beta(i) + 1$ allant de i à 1 .
 Ainsi, quitte à rajouter des boucles sur le sommet 1 à ces chemins, il existe (α, β) indépendant de (i, j) tel qu'il existe :

- un chemin de longueur $(\alpha + 1)$ allant de 1 à j .
- un chemin de longueur $(\beta + 1)$ allant de i à 1 .

2) On peut supposer $N_0 - \beta - 1 \geq 0$

Posons $\gamma = \alpha + \beta + 3$. On a, pour tout réel x et pour tout (i, j) dans $\{1, \dots, |\tilde{\mathcal{X}}|\}^2$:

$$b_{ij}^\gamma(x) = a_{11}(r^{\beta+1} x) C_{11}^{ij}(x) + \sum_{(\lambda, \mu) \neq (1, 1)} a_{\lambda\mu}(r^{\beta+1} x) \cdot C_{\lambda\mu}^{ij}(x)$$

où l'on a posé :

$$C_{11}^{ij}(x) = \sum_{\ell_1 \dots \ell_\beta} a_{1\ell_1}(x) \dots a_{\ell_\beta 1}(x) \sum_{\ell_{\beta+3} \dots \ell_{\gamma-1}} a_{1\ell_{\beta+3}}(r^{\beta+2} x) \dots a_{\ell_{\gamma-1} j}(r^{\gamma-1} x)$$

Donc, pour tout k dans \mathbb{N} :

$$b_{ij}^\gamma(r^{N_k - \beta - 1} \xi) = a_{11}(r^{N_k} \xi) C_{11}^{ij}(r^{N_k - \beta - 1} \xi) + \\ + \sum_{(\lambda, \mu) \neq (1, 1)} a_{\lambda\mu}(r^{N_k} \xi) C_{\lambda\mu}^{ij}(r^{N_k - \beta - 1} \xi)$$

$$|b_{ij}^\gamma(r^{N_k - \beta - 1} \xi)| \leq (1 - \varepsilon) a_{11} \cdot C_{11}^{ij} + b_{ij}^\gamma - a_{11} C_{11}^{ij} \\ \leq b_{ij}^\gamma - \varepsilon \cdot a_{11} \cdot C_{11}^{ij}$$

en posant $c_{11}^{ij} = c_{11}^{ij}(0)$
 $= b_{i1}^{\beta+1} \cdot b_{1j}^{\alpha+1}$

avec, par définition de (α, β) $c_{11}^{ij} \geq \frac{1}{r^{\alpha+\beta+2}}$

d'où puisque $a_{11} \geq \frac{1}{r}$ l'existence de C ,

$0 < \frac{1}{r^\gamma} \leq C < 1$ tel que pour tout k et pour tout (i, j) :

$$|b_{ij}^\gamma (r^{N_k - \beta - 1} \xi)| \leq b_{ij}^\gamma - \varepsilon \cdot C$$

$$\leq (1 - \varepsilon C) b_{ij}^\gamma$$

puisque $b_{ij}^\gamma \leq 1$

D'où en posant $K = (1 - \varepsilon C) \in]0, 1[$:

$\exists \gamma \in \mathbb{N}^*$, $\exists K \in]0, 1[$, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, |\tilde{\mathcal{L}}|\}$
 $\forall k \in \mathbb{N}$ $|b_{ij}^\gamma (r^{N_k - \beta - 1} \xi)| \leq K \cdot b_{ij}^\gamma$

3) On en déduit, par récurrence sur n qu'il existe un entier strictement positif γ et qu'il existe K dans $]0, 1[$ tels que pour tout $n \geq \gamma$ et pour tout (i, j) dans $\{1, \dots, |\tilde{\mathcal{L}}|\}^2$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |b_{ij}^n (r^{N_k - \beta - 1} \xi)| \leq K \cdot b_{ij}^n$$

4) Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on peut supposer que pour tout entier k , on a

$$N_{k+1} - N_k \geq \gamma$$

On a alors $|b_{ij}^{N_2 - N_1} (r^{N_1 - \beta - 1} \xi)| \leq K \cdot b_{ij}^{N_2 - N_1}$

Supposons que pour $k \geq 2$ on ait

$$|b_{ij}^{N_k - N_1} (r^{N_1 - \beta - 1} \xi)| \leq K^{k-1} b_{ij}^{N_k - N_1}$$

Alors
$$b_{ij}^{N_{k+1}-N_1} (r^{N_1-\beta-1} \cdot \xi) = \sum_{m=1}^{|\tilde{\mathcal{L}}|} b_{im}^{N_k-N_1} (r^{N_1-\beta-1} \cdot \xi) b_{mj}^{N_{k+1}-N_k} (r^{N_k-\beta-1} \cdot \xi)$$

et
$$|b_{ij}^{N_{k+1}-N_1} (r^{N_1-\beta-1} \cdot \xi)| \leq \sum_{m=1}^{|\tilde{\mathcal{L}}|} K^k b_{im}^{N_k-N_1} \cdot b_{mj}^{N_{k+1}-N_k} \\ \leq K^k b_{ij}^{N_{k+1}-N_1}$$

On a donc montré par récurrence sur k qu'il existe K dans $]0,1[$ tel que pour tout (i,j) dans $\{1, \dots, |\tilde{\mathcal{L}}|\}^2$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |b_{ij}^{N_k-N_1} (r^{N_1-\beta-1} \cdot \xi)| \leq K^{k-1} b_{ij}^{N_k-N_1}$$

5) Comme pour tout n dans \mathbb{N} $\|A^n(0)\|_\infty \leq 1$, on a :

$$\forall \eta > 0 \quad , \quad \exists M / k \geq M \Rightarrow \|B_{N_k-N_1}^{N_1-\beta-1} (r^{N_1-\beta-1} \cdot \xi)\|_\infty \leq \eta$$

D'autre part,

$$\exists N_\infty / N \geq N_\infty \Rightarrow \exists k \geq M / N_k - \beta - 1 \leq N \leq N_{k+1} - \beta$$

et, puisque

$$B_N(\xi) = A(\xi) \dots A(r^{N_1-\beta-2} \xi) B_{N_k-N_1}^{N_1-\beta-1} (r^{N_1-\beta-1} \xi) A(r^{N_k-\beta-1} \xi) \dots A(r^{N_k} \xi)$$

On en déduit :

$$\forall \eta > 0 \quad , \quad \exists N_\infty / N \geq N_\infty$$

$$\Rightarrow \|B_N(\xi)\| \leq \eta \cdot \|A(\xi) \dots A(r^{N_1-\beta-2} \xi)\|_\infty \cdot \|A(r^{N_k-\beta-1} \xi) \dots A(r^{N_k} \xi)\|_\infty \\ \leq \eta$$

C.Q.F.D.

Etape 2 : Supposons le théorème démontré pour tout sommet k tel que $n(k) < n$ et donnons-nous un sommet ℓ tel que $n(\ell) = n$.
Supposons qu'il existe un irrationnel ξ tel que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{V(x, \ell, \xi)}{V(x, \ell)} \right| > 0$$

et considérons comme précédemment une suite d'entiers strictement croissante $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(x_n, \ell, \xi)}{V(x_n, \ell)} = \omega(\ell, \xi).$$

$$\omega(\ell, \xi) > 0$$

$$V(x_n, \ell) \sim \alpha \cdot (\ln x_n)^\beta x_n^\theta$$

$$(\alpha, \beta, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{N} \times]0, 1[$$

On a pour tout x positif :

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) = & \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell \\ \pi(k) = 1}} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, k, r\xi\right) + \\ & + \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell \\ \pi(k) = 1}} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, k, r\xi\right) + \\ & + \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, k, r\xi\right) + \\ & + B(x, \ell, \xi) \end{aligned}$$

Or, on remarque que :

- si $k < \ell$ et $\pi(k) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k, r\xi\right)}{V(x_n, \ell)} \right| & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k\right)}{V(x_n, \ell)} \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(x_n, k)}{V(x_n, \ell)} \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(x_n, k)}{V(x_n, \ell)} = 0 \quad \text{d'après le lemme 2 .}$$

- si $k < \ell$ et $\pi(k) \geq 2$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad V(x_n, \ell) \leq V(r^q \cdot x_n, \ell)$

(par exemple $q =$ longueur du plus court chemin reliant k à ℓ dans G) .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k, r\xi\right)}{V(x_n, \ell)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k, r\xi\right)}{V\left(\frac{x_n}{r}, k\right)} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k\right)}{V(x_n, \ell)} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k, r\xi\right)}{V\left(\frac{x_n}{r}, k\right)} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(r^{q-1} x_n, \ell)}{V(x_n, \ell)} \\ &\leq r^{(q-1)\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k, r\xi\right)}{V\left(\frac{x_n}{r}, k\right)} \right| \end{aligned}$$

et, par hypothèse de récurrence, on a pour le sommet k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V\left(\frac{x_n}{r}, k, r\xi\right)}{V\left(\frac{x_n}{r}, k\right)} \right| = 0$$

Finalement, on obtient, comme pour l'étape 1 :

$$\begin{aligned} \omega(\ell, \xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(x_n, \ell, \xi)}{V(x_n, \ell)} \\ &= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} \frac{M_{k\ell}(\xi)}{r^\theta} \cdot \omega(k, r\xi) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant encore

$$\omega(\xi) = (\omega(\ell, \xi))_{\ell \in \tilde{\ell}} \in \mathbb{R}^{|\tilde{\ell}|}$$

$$\omega(\xi) = \frac{{}^t M[\tilde{\ell}](\xi)}{r^\theta} \cdot \omega(r\xi)$$

et on conclut comme dans l'étape 1 .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BERGE : Graphes et hypergraphes. 1973, Dunod.
- [2] CHRISTOL, KAMAE, MENDES-FRANCE et RAUZY : Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. Math. France t. 108, 1980, p. 401 - 418.
- [3] COQUET : Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition, Journ. of Number Theory, vol. 16, n° 3, juin 1983, p. 363 - 375.
- [4] EILENBERG : Automata, languages and machines, vol. A, 1974, Academic Press.
- [5] FREEDMAN : Markov chains. 1971, Holden-Day.
- [6] GANTMACHER : Théorie des matrices, tome 2 . 1966 , Dunod.
- [7] HALMOS : Lectures on ergodic theory. 1956, Chelsea Publishing Company.
- [8] KUIPERS et NIEDERREITER : Uniform distribution of sequences. 1974, John Wiley & Sons.
- [9] PLA : Elements de théorie des graphes. Cours de l'Ecole des Mines. 1981 .
- [10] RAUZY : Propriétés statistiques de suites arithmétiques . 1976 , Presses Universitaires de France.
- [11] VARGA : Matrix iterative analysis . 1962 , Prentice-Hall.

*
* * *

RESUME DE LA THESE.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers reconnaissable par un automate fini.

Le but de cette étude est de démontrer qu'une condition suffisante pour que l'ensemble normal de u soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est que l'un au moins des sommets qui reconnaît la suite u soit précédé dans le graphe de l'automate par un sommet possédant au moins deux chemins fermés.

Cette condition peut se traduire quantitativement en disant que la suite u doit être plus "dense" que toute suite exponentielle.

MOTS - CLES :

Equirépartition modulo un - Automates finis - Ensemble normal - Graphes orientés - Matrices non-négatives -