Groupes, courbure négative et points fixes

Bruno Duchesne

▶ **To cite this version:**

Bruno Duchesne. Groupes, courbure négative et points fixes. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de lorraine, 2019. tel-02331407

HAL Id: tel-02331407
https://hal.science/tel-02331407

Submitted on 24 Oct 2019

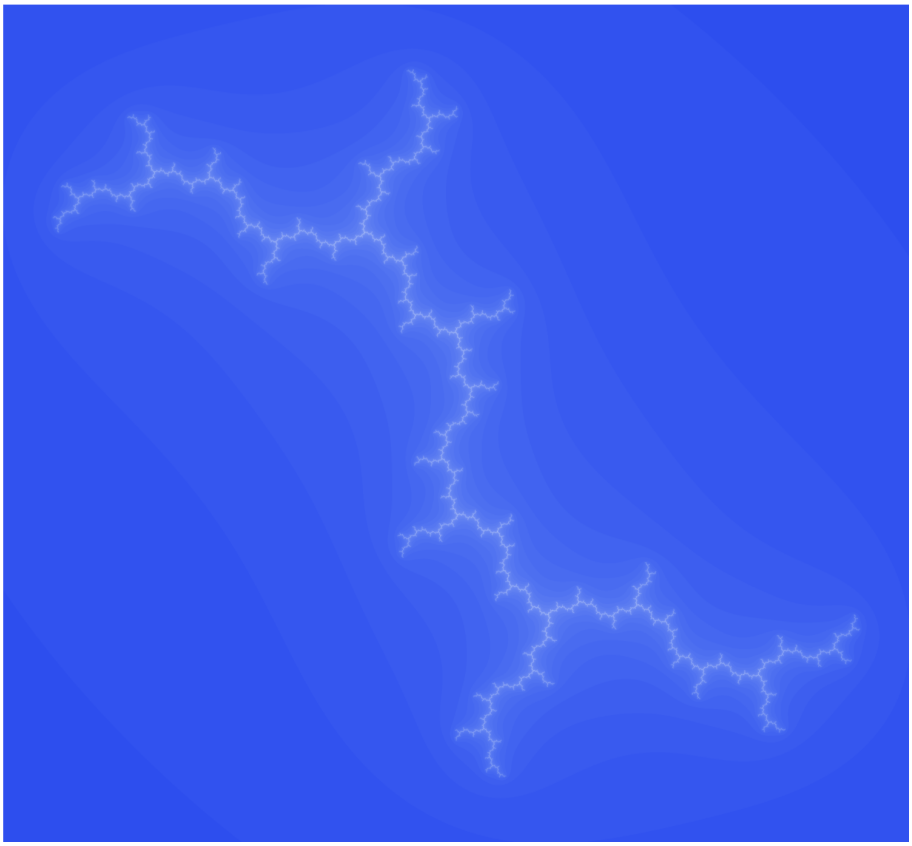
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Groupes, courbure négative et points fixes

Bruno Duchesne

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Section CNU 25
Université de Lorraine, 5 Juillet 2019



L'ensemble de Julia du polynôme $z^2 + i$, qui est aussi la dendrite de Ważewski D_3.

Rapporteurs : Yves Cornulier, Bertrand Rémy et Tatiana Smirnova-Nagnibeda.
Examinateurs : Pierre-Emmanuel Caprace, Alessandra Iozzi et Matei Toma.

À Marie, Grande aile et Petite aile.

Introduction

Conventions

Ce texte présente une synthèse de la plupart des travaux de recherche effectués depuis mon arrivée en tant que maître de conférences à l'Université de Lorraine en septembre 2012. Les travaux effectués pendant le doctorat ou l'année de post-doctorat qui a suivi, ne sont pas présentés. Certains travaux récents un peu éloignés du thème principal ne le sont pas non plus.

On utilise la convention suivante dans le texte : un énoncé formel sans attribution est démontré dans l'article dont la référence est accolée au nom de la section dans laquelle il se trouve. Pour les autres énoncés, une référence explicite est donnée.

Contexte des travaux

La mécanique quantique nous apprend que les particules sont sujettes à une *dualité onde-corpuscule*. Par analogie, on pourrait dire que les groupes sont sujets à une « dualité permutations-symétries ».

Historiquement, les groupes apparaissent sous la plume de Galois [1] comme groupe de permutations des racines d'un polynôme [Gal46]. Un célèbre résultat attribué à Cayley affirme que tout groupe est un sous-groupe du groupe des permutations d'un certain ensemble [Cay54, Cay78]. Avec ce point de vue, c'est à la structure des orbites et à des propriétés de transitivité que l'on s'intéresse en théorie des groupes.

L'autre point de vue est celui développé par Klein dans son *programme d'Erlangen* [Kle21]. Pour Klein, une géométrie est la donnée d'un ensemble muni d'une action de groupe et d'invariants. Dans ce point de vue, la notion d'invariant est essentielle et les éléments d'un groupe sont des symétries de cet objet géométrique. Par exemple, la géométrie projective est la donnée de l'espace projectif $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ avec comme invariant l'alignement. Le théorème fondamental de la géométrie projective affirme alors que le groupe qui préserve cet invariant est le groupe projectif $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{R})$ pour $n \geq 2$. Un autre exemple est donné par les géométries euclidienne, sphérique ou hyperbolique où l'espace

1. Les travaux de Galois viennent après les travaux fondateurs de Lagrange et Cauchy dans le domaine mais c'est Galois qui introduit le terme de groupe.

est respectivement $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{S}^n$ ou $\mathbf{H}^n$, l'invariant est la distance correspondante et le groupe celui des isométries.

La géométrie impose alors des contraintes sur la structure du groupe. Par exemple, un groupe qui agit librement sans inversion sur un arbre est un groupe libre.

Motivée par ce programme, une idée directrice pour comprendre les groupes est alors de faire apparaître, pour un groupe donné, un espace « géométrique » sur lequel le groupe agit en respectant cette géométrie. Un exemple de cette stratégie est le développement de la théorie des immeubles par Tits. Inspiré par la théorie des géométries d'incidence et des espaces symétriques, qui sont des outils précieux pour l'étude des groupes de Lie semi-simples, Tits puis Bruhat et Tits introduisent les immeubles [Tit57, BT72]. Ce sont des objets de nature combinatoire ou géométrique selon le point de vue. Le but est d'étudier les groupes algébriques sur d'autre corps que $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ via leurs actions sur les immeubles. Parfois, le « bon » espace géométrique est le groupe lui-même (et ainsi on se rapproche des idées du théorème de Cayley). Si G est un groupe de type fini, G est alors un groupe d'isométries de n'importe quel graphe de Cayley de ce groupe. Il s'agit de graphes dont les sommets sont les éléments du groupe lui-même.

Cette idée d'étudier les propriétés d'un groupe à partir de ses actions sur des espaces géométriques, s'appelle la *théorie géométrique des groupes*. Parfois les structures géométriques comme les distances ou l'alignement sont trop rigides et ce sont simplement des propriétés topologiques ou mesurables qui sont préservées. Dans ces cas, les groupes agissent par homéomorphismes, préservent une mesure ou seulement la classe d'une mesure.

Une classe d'exemples qui reviendra quasiment tout au long de ce mémoire est donnée par les réseaux des groupes de Lie semi-simples. Rappelons que si G est un groupe de Lie alors un réseau Γ est un sous-groupe discret de G tel que le quotient G/Γ possède une mesure borélienne finie invariante sous l'action $G \curvearrowright G/\Gamma$. Un exemple prototypique est donné par $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \leq G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Ces groupes sont très riches. Tout d'abord, ils proviennent de structures arithmétiques (au moins en rang supérieur à 2) comme $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ qui est le stabilisateur dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ du réseau des entiers $\mathbf{Z}^n \leq \mathbf{R}^n$, ils sont (à indice fini près) les groupes fondamentaux de variétés localement symétriques, ils agissent discrètement sur des espaces symétriques à courbure négative et ils fournissent une mesure de probabilité invariante pour G. Des propriétés de rigidité pour certaines actions géométriques de réseaux sont détaillées dans la suite du texte.

La dualité permutations–symétries est très présente dans la dernière partie du mémoire, les groupes d'homéomorphismes de dendrites que l'on y étudie apparaissent naturellement comme des groupes de symétries. Bien que ce ne soit que des groupes d'homéomorphismes, la planarité des dendrites [2] et leur proximité avec les arbres réels font que l'on peut penser aux groupes d'homéomorphismes de dendrites comme des groupes de symétries géométriques. En étudiant ces groupes, on se rend rapidement compte que ce sont

2. Les dendrites sont certains espaces compacts que l'on peut plonger dans le plan. Elles seront définies plus tard dans le texte.

aussi véritablement des groupes de permutations. En fait, ils agissent sur un ensemble dénombrable (les points de branchements) et si cet ensemble est dense alors cette représentation en tant que groupes de permutations est fidèle.

Pour conclure cette contextualisation, terminons avec un outil clé : *la moyennabilité*. De manière simplifiée, un groupe ou une action est moyennable s'il existe une moyenne invariante. L'existence de cette moyenne empêche les décompositions paradoxales comme celles qui apparaissent dans le paradoxe de Banach-Tarski [BT24]. Ce paradoxe affirme la possibilité de découper la sphère euclidienne en cinq morceaux, de les déplacer et les réassembler pour former deux sphères de même rayon que le rayon de la sphère initiale en utilisant seulement des isométries.

Même si les sujets peuvent varier au cours du mémoire, un thème général revient souvent. On veut étudier les actions d'un groupe G sur un espace X qui est à courbure négative dans un sens métrique ou topologique. Grâce à des propriétés de moyennabilité du groupe, ou d'une action moyennable de G sur un espace auxiliaire B, on peut en déduire l'existence d'un point fixe sur un certain espace associé à X, ou d'une application G-équivariante de B vers cet espace associé à X. La géométrie de X doit alors limiter les possibilités et permettre de mieux comprendre ces actions.

Rigidité d'actions en dimension infinie

La première partie de ce mémoire rassemble des résultats inspirés de la superrigidité de Margulis ou de ses techniques de preuve. Cette superrigidité concerne les réseaux dans les groupes algébriques semi-simples sur un corps local. Elle affirme essentiellement que les représentations linéaires non bornées de ces réseaux sont des restrictions des représentations continues du groupe ambiant.

Si Γ est un réseau dans un groupe algébrique G et $\rho\colon \Gamma \to H$ est une telle représentation, un passage clé de la preuve de la superrigidité est l'utilisation par une application de bords $G/P \to H/Q$ mesurable et ρ-équivariante où P et Q sont des sous-groupes paraboliques de G et H.

À un groupe H comme ci-dessus, on peut associer un espace symétrique de type non compact ou un immeuble euclidien selon que le corps local est archimédien ou non. Dans les deux cas, on obtient un espace métrique X à courbure négative (au sens CAT(0)) sur lequel H agit par isométries. C'est au bord à l'infini de X que l'on peut retrouver le quotient H/Q.

Dans un premier travail, on étend l'existence de cette application de bords à des representations $\Gamma \to H$ où H est le groupe d'isométries d'un espace CAT(0) X non nécessairement localement compact mais qui conserve une propriété de dimension finie à grande échelle. Plus précisément, X sera de *dimension télescopique finie*. Un outil important pour cette existence sera la notion récente d'*ergodicité isométrique* due à Bader et Furman.

Dans des travaux récents, Bader et Furman étendent la superrigidité de Margulis à des représentations $\Gamma \to H$ dans le cas où H est un groupe algébrique sur un corps quelconque. Pour cela, ils développent une machine dont

le carburant est la notion de *représentation algébrique d'action ergodique*. Le but du second travail présenté est de fournir le carburant nécessaire pour mettre la machine en route, c'est-à-dire construire une représentation algébrique pour une action donnée. Ceci est fortement lié à l'existence d'applications de bords car dans le cas où H est un groupe algébrique sur un corps local, une application de bords comme ci-dessus fournit automatiquement une représentation algébrique.

Les réseaux hyperboliques, c'est-à-dire les réseaux des groupes de Lie de rang 1 $\mathrm{SO}(1,n)$ et $\mathrm{SU}(1,n)$ ne sont pas sujets à la superrigidité de Margulis et la variété de leurs représentations est bien plus riche. Dans le cas complexe, $G = \mathrm{SU}(1,n)$, les réseaux possèdent une structure supplémentaire qui provient de la forme de Kähler sur l'espace hyperbolique complexe. Cette forme induit une classe de cohomologie bornée en degré 2 qui n'existe pas pour les réseaux des groupes de Lie simples non compacts dont l'espace symétrique associé n'est pas hermitien.

Pour des représentations de réseaux $\Gamma < \mathrm{SU}(1,n) \to H$ où H est un groupe de Lie simple hermitien, comme $\mathrm{PU}(p,q)$ par exemple, on peut définir un invariant appelé *invariant de Toledo*. Cet invariant se formule en cohomologie bornée et est majoré en valeur absolue par le rang réel de H, qui est le minimum de p et q dans le cas ci-dessus. Lorsque cette inégalité est une égalité, la représentation est dite *maximale*. En dimension $n \geq 2$, ces représentations commencent à être bien comprises et se révèlent être rigides.

On présente ici des résultats pour des représentations maximales dans le cas où H est le groupe des isométries d'un espace symétrique hermitien de dimension infinie. Essentiellement, on montre que ces représentations proviennent toujours de représentations de dimension finie pour $H = \mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$, groupe unitaire projectif associé à une forme hermitienne de signature (p,∞).

L'idée pour ces résultats est de se placer sur la bonne partie du bord à l'infini de l'espace symétrique de H et donc de montrer l'existence d'une application vers cette bonne partie du bord. Classiquement, c'est en se restreignant à des représentations Zariski-denses que l'on montre l'existence d'une telle application.

Dans notre cadre infini-dimensionnel, une topologie de Zariski n'existe pas et on développe une notion de sous-groupe algébrique standard du groupe des opérateurs inversibles de l'espace de Hilbert sous-jacent sans pour autant qu'une clôture de Zariski soit définie. Intuitivement, le choix d'une base hilbertienne permet de représenter un opérateur par une matrice infinie et l'idée est de définir un groupe algébrique par des équations polynomiales en les coefficients de ces matrices infinies.

Une fois l'existence de la bonne application de bords obtenue, c'est la géométrie des *chaînes* du bord à l'infini qui permet de conclure l'existence d'un sous-espace invariant de dimension finie.

Remarquons que l'on peut aussi construire des représentations maximales irréductibles en dimension infinie et rang 2. L'existence d'un sous-espace de dimension finie n'est donc pas automatique. On construit ainsi des représentations maximales irréductibles de certains groupes de surface à valeurs dans $\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$ qui est aussi un groupe hermitien.

Sous-groupes aléatoires invariants

Un sous-groupe aléatoire invariant (abrégé selon la dénomination anglophone en *IRS*) est une mesure de probabilité sur l'espace des sous-groupes fermés d'un groupe localement compact G, qui est invariante par l'action par conjugaison de G sur lui-même. Cette notion généralise les sous-groupes normaux, qui correspondent à des mesures de Dirac et les réseaux de G, pour lesquels la mesure est portée sur la classe de conjugaison du réseau.

Ce point de vue nouveau s'est avéré fructueux dans certaines situations en offrant une compactification agréable. En particulier, une suite d'IRS d'un groupe de lie simple non compact à centre trivial donne lieu à une suite de variétés localement symétriques munies d'une mesure de probabilité. On peut relier la convergence de l'IRS et la convergence de la suite de ces variétés localement symétriques au sens de Benjamini et Schramm. Cela permet aux auteurs de [ABB+17] de déduire des propriétés asymptotiques pour ces suites de variétés.

Ce point de vue pose aussi de nouvelles questions comme celle de savoir si les propriétés vraies pour les réseaux et les groupes normaux s'étendent aux sous-groupes aléatoires invariants.

Dans une première partie, on s'attache à étudier les sous-groupes aléatoires invariants dans le cadre où G agit sur un espace CAT(0). On montre alors un analogue du théorème de densité de Borel pour ces sous-groupes aléatoires invariants. Le résultat pour les sous-groupes normaux ou les réseaux était connu par les travaux de Caprace-Monod [CM09b, CM09a].

Dans une seconde partie, on s'intéresse à comprendre les sous-groupes aléatoires invariants supportés sur l'ensemble des sous-groupes moyennables. On montre qu'il n'en existe pas d'autres que ceux supportés par les sous-groupes du radical moyennable de G, c'est-à-dire le plus grand sous-groupe moyennable et normal de G. Remarquons qu'un groupe, comme un groupe de Lie simple non compact, peut avoir de nombreux sous-groupes moyennables bien qu'il ait un radical moyennable trivial. Le résultat montre que dans ce cas, le seul sous-groupe aléatoire invariant est la mesure de Dirac en le sous-groupe trivial.

Groupes d'homéomorphismes de dendrites

Les dendrites, comme celle présentée en couverture, sont des objets topologiques auxquels on peut penser comme des arbres compacts avec des branchements possiblement denses. Ces objets n'étant pas métriques, on ne peut pas parler a priori de courbure négative mais à trois points d'une dendrite, on peut associer de manière canonique un centre. C'est en ce sens que ces objets topologiques sont à courbure négative, on pourrait même dire à courbure $-\infty$.

Les actions de groupes sur des dendrites sont des actions par homéomorphismes et même si la topologie est métrisable, aucune distance n'est supposée invariante.

Une première question que l'on peut se poser est la suivante : Que reste-

t-il des propriétés des actions de groupes sur des arbres dans ce cadre purement topologique ? Certaines propriétés, comme par exemple une alternative de Tits, continuent d'être vraies mais d'autres ne le sont plus. Par exemple, nous montrons qu'il existe des groupes topologiques avec la propriété (T) qui agissent de manière non élémentaire sur des dendrites.

Le groupe des automorphismes d'un arbre est un groupe très intéressant. Pour les dendrites, c'est le groupe de tous les homéomorphismes que l'on peut considérer. Pour une dendrite générale, ce groupe peut être trivial mais pour certaines dendrites comme celles de Ważewski, ces groupes sont très riches. Les dendrites de Ważewski peuvent être vues comme des analogues dendritiques des arbres réguliers ou quasi-réguliers.

L'étude de ces groupes d'homéomorphismes permet d'exhiber une famille non dénombrable de groupes simples deux-à-deux non isomorphes. De plus, on comprend assez bien la structure algébrique de ces groupes.

Ces groupes d'homéomorphismes viennent avec une topologie de groupe naturelle qui est celle de la convergence uniforme sur la dendrite. Munis de cette topologie, ces groupes sont des groupes polonais, c'est-à-dire des groupes topologiques séparables et métrisables par une distance complète.

Les points de branchement d'une dendrite sont toujours en quantité dénombrable et le groupe d'homéomorphismes permute ces points de branchement. Si X est une dendrite avec une infinité de points de branchement, on obtient ainsi une représentation $\mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Sym}(\mathbf{N})$ et si les points de branchement forment une partie dense alors cette représentation est fidèle. Les groupes d'homéomorphismes de dendrites apparaissent alors comme des groupes de permutations et la topologie de la convergence ponctuelle pour les groupes de permutations donne une seconde topologie sur $\mathrm{Homeo}(X)$. En fait, ces deux topologies coïncident et font de $\mathrm{Homeo}(X)$ un groupe non archimédien, i.e. un sous-groupe fermé de $\mathcal{S}_\infty = \mathrm{Sym}(\mathbf{N})$, en particulier totalement discontinu.

Ce plongement $\mathrm{Homeo}(X) \to \mathcal{S}_\infty$ ouvre deux portes. La première consiste à considérer ces groupes comme des groupes de permutations et s'intéresser à des propriétés liées à la transitivité : double transitivité, primitivité, décomposition en produit en couronnes. En particulier, on introduit *les groupes kaléidoscopiques* qui donnent un foncteur $\Gamma \to \mathcal{K}(\Gamma)$ entre groupes de permutations sur des ensembles dénombrables. Les propriétés de l'action de Γ se reflétant à un ordre supérieur pour l'action de $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Pour certaines dendrites de Ważewski, ces groupes de permutations se révèlent être *oligomorphes*, c'est-à-dire que l'action diagonale $\mathrm{Homeo}(X) \curvearrowright \mathrm{Br}(X)^n$ n'a qu'un nombre fini d'orbites pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ce sont des groupes de permutations riches. Ces groupes oligomorphes forment un sujet d'étude en lui-même [Cam90] et cela permet de faire appel à la théorie des modèles et aux limites de Fraïssé. La théorie des modèles est une branche de la logique qui s'intéresse aux structures, c'est-à-dire la donnée d'un ensemble, de constantes, de relations et de fonctions sur cet ensemble. Par exemple, une structure qui nous intéressera fortement par la suite est donnée par l'ensemble des points de branchement $\mathrm{Br}(X)$ et la relation ternaire « y est entre x et z ».

La seconde porte ouverte par le plongement $\mathrm{Homeo}(X) \to \mathcal{S}_\infty$ est l'étude

de $\mathrm{Homeo}(X)$ en tant que groupe topologique non-archimédien et d'utiliser les résultats connus pour de tels groupes. Pour le groupe $\mathrm{Homeo}(D_\infty)$, où D_∞ est la dendrite de Ważewski universelle, on montre alors des propriétés topologiques comme l'existence d'une classe de conjugaison comaigre, la propriété de continuité automatique ou encore une caractérisation de la topologie polonaise comme l'unique topologie de groupe séparable et séparée.

Comme tout groupe d'homéomorphismes de dendrite, $\mathrm{Homeo}(D_\infty)$ est aussi un groupe d'origine dynamique puisqu'il arrive avec une action sur un espace compact. Pour ce groupe, on identifie son flot minimal universel, c'est-à-dire l'espace compact muni d'une action de $\mathrm{Homeo}(D_\infty)$ minimale tel que tous les autres espaces compacts munis d'une telle action sont des facteurs. Cela permet de manière un peu surprenante de montrer que les stabilisateurs de point sont des sous-groupes moyennables et d'en déduire le bord de Furstenberg de $\mathrm{Homeo}(D_\infty)$. On en donne même une description explicite.

Remerciements

Mes deux directeurs de thèse, Damien Gaboriau et Nicolas Monod m'ont toujours soutenu pendant et après la thèse. Je les en remercie.

J'ai eu la chance de trouver à Nancy un excellent cadre de travail grâce aux membres de l'Institut Élie Cartan et plus particulièrement les membres de l'équipe de géométrie. Merci à eux.

Je remercie les coauteur·es avec lesquel·les j'ai eu plaisir à travailler : Uri Bader, Yair Glasner, Nir Lazarovich, Jean Lécureux, Nicolas Monod, Beatrice Pozzetti, Robin Tucker-Drob et Phillip Wesolek.

Je remercie Marie pour son aide dans la finalisation de ce texte.

Ce texte, en particulier l'introduction, a été amélioré suite aux remarques bienveillantes d'Yves Cornulier. Je tiens à le remercier pour sa lecture rapide et ses remarques.

Je remercie Yves Cornulier, Bertrand Rémy et Tatiana Smirnova-Nagnibeda d'avoir accepté d'être rapporteur·es pour ce mémoire et Pierre-Emmanuel Caprace, Alessandra Iozzi et Matei Toma d'être membres du jury.

Travaux présentés

[BDL16a] Bader, Uri, Bruno Duchesne et Jean Lécureux: *Amenable invariant random subgroups*. Israel J. Math., 213(1) :399–422, 2016, ISSN 0021-2172. https://doi.org/10.1007/s11856-016-1324-7, With an appendix by Phillip Wesolek.

[BDL16b] Bader, Uri, Bruno Duchesne et Jean Lécureux: *Furstenberg maps for CAT(0) targets of finite telescopic dimension*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 36(6) :1723–1742, 2016, ISSN 0143-3857. https://doi.org/10.1017/etds.2014.147.

[BDL17] Bader, Uri, Bruno Duchesne et Jean Lécureux: *Almost algebraic actions of algebraic groups and applications to algebraic representations*. Groups Geom. Dyn., 11(2) :705–738, 2017, ISSN 1661-7207. https://doi.org/10.4171/GGD/413.

[DGLL15] Duchesne, Bruno, Yair Glasner, Nir Lazarovich et Jean Lécureux: *Geometric density for invariant random subgroups of groups acting on CAT(0) spaces*. Geom. Dedicata, 175 :249–256, 2015, ISSN 0046-5755. http://dx.doi.org/10.1007/s10711-014-0038-4.

[DLP18] Duchesne, Bruno, Jean Lecureux et Maria Beatrice Pozzetti: *Boundary maps and maximal representations on infinite dimensional Hermitian symmetric spaces*. arXiv preprint arXiv :1810.10208, 2018.

[DM18] Duchesne, Bruno et Nicolas Monod: *Group actions on dendrites and curves*. Annales de l'institut Fourier, 68(5) :2277–2309, 2018.

[DM19] Duchesne, Bruno et Nicolas Monod: *Structural properties of dendrite groups*. Transactions of the American Mathematical Society, (371) :1925–1949, 2019.

[DMW18] Duchesne, Bruno, Nicolas Monod et Phillip Wesolek: *Kaleidoscopic groups : permutation groups constructed from dendrite homeomorphisms*. arXiv preprint arXiv :1801.09787, 2018. A paraître à Fund. Math.

[Duc19] Duchesne, Bruno: *Topological properties of Ważewski dendrite groups*. arXiv preprint arXiv :1903.05380, 2019.

Travaux non présentés

[DTDW18] Duchesne, Bruno, Robin Tucker-Drob et Phillip Wesolek: *A new lattice invariant for lattices in totally disconnected locally compact groups*. arXiv preprint arXiv :1810.11512, 2018.

[DTDW19] Duchesne, Bruno, Robin Tucker-Drob et Phillip Wesolek: *CAT (0) cube complexes and inner amenability*. arXiv preprint arXiv :1903.01596, 2019.

[Duc13] Duchesne, Bruno: *Infinite-dimensional nonpositively curved symmetric spaces of finite rank*. Int. Math. Res. Not. IMRN, (7) :1578–1627, 2013, ISSN 1073-7928.

[Duc15a] Duchesne, Bruno: *Infinite-dimensional Riemannian symmetric spaces with fixed-sign curvature operator*. Annales de l'institut Fourier, 65(1) :211–244, 2015.

[Duc15b] Duchesne, Bruno: *Superrigidity in infinite dimension and finite rank via harmonic maps*. Groups Geom. Dyn., 9(1) :133–148, 2015, ISSN 1661-7207. http://dx.doi.org/10.4171/GGD/308.

[Duc18] Duchesne, Bruno: *Groups acting on spaces of non-positive curvature*. Dans *Handbook of Group Actions*, tome 40 de *Advanced lectures in mathematics*, pages 103–143. International Press, 2018.

Table des matières

Introduction **ii**
Conventions . . . ii
Contexte des travaux . . . ii
Rigidité d'actions en dimension infinie . . . iv
Sous-groupes aléatoires invariants . . . vi
Groupes d'homéomorphismes de dendrites . . . vi
Remerciements . . . viii

Travaux présentés **ix**

Travaux non présentés **x**

Table des matières **xi**

1 Rigidité d'actions en dimension infinie **1**
1.1 Applications de bords en dimension infinie [BDL16b] . . . 1
1.2 Représentations algébriques d'actions ergodiques [BDL17] . . . 7
1.3 Représentations maximales en dimension infinie [DLP18] . . . 11

2 Sous-groupes aléatoires invariants **21**
2.1 Densité géométrique pour les IRS agissant sur des espaces CAT(0) [DGLL15] . . . 23
2.2 Sous-groupes aléatoires invariants moyennables [BDL16a] . . . 24

3 Groupes d'homéomorphismes de dendrites **28**
3.1 Actions de groupes sur des dendrites [DM18] . . . 30
3.2 Dévissage de groupes de dendrites [DM19] . . . 33
3.3 Groupes kaléidoscopiques [DMW18] . . . 37
3.4 Topologie des groupes de dendrites [Duc19] . . . 42

Un projet de recherches futures **50**

Bibliographie **52**

Chapitre 1

Rigidité d'actions en dimension infinie

1.1 Applications de bords en dimension infinie [BDL16b]

Soit G un groupe localement compact. Un *réseau* de G est un sous-groupe discret tel que le quotient G/Γ possède une mesure borélienne, régulière et finie, invariante sous l'action par multiplications à gauche de G sur G/Γ. Les premiers exemples de réseaux sont donnés par les réseaux euclidiens comme $\mathbf{Z}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. L'existence de domaines de Siegel permet par exemple de montrer que le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ est un réseau du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

Soit Q une forme quadratique réelle définie sur $\mathbf{Q}$ et qui ne possède pas de vecteurs isotropes sur $\mathbf{Q}$. On note $G = \mathrm{SO}(Q)$ et $\Gamma = \mathrm{SO}(Q) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ alors Γ est un réseau cocompact de G (c'est-à-dire que G/Γ est compact).

Plus généralement, si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique semi-simple défini sur $\mathbf{Q}$ alors $\Gamma = \mathbf{G}(\mathbf{Z})$ est un réseau de $G = \mathbf{G}(\mathbf{R})$. Un réseau obtenu de manière analogue est appelé *réseau arithmétique*. Pour une définition précise on renvoie à [Mor15].

Pour démontrer l'arithméticité des réseaux des groupes algébriques semi-simples sur des corps locaux en rang supérieur, Margulis démontre son fameux théorème de superrigidité qui est un grand renforcement du théorème de rigidité de Mostow.

On donne ci-dessous un cas particulier, plus simple à énoncer, qui illustre l'idée générale et qui permet déjà d'obtenir le résultat d'arithméticité pour les réseaux des groupes algébriques réels. On renvoie à [Zim84, Theorem 5.1.2] pour des détails.

Théorème 1.1 (Théorème de superrigidité de Margulis)**.** *Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réel connexe semi-simple de rang réel au moins 2 et tel que G, la composante neutre de $\mathbf{G}(\mathbf{R})$, n'a pas de facteur compact. Soit Γ un réseau irréductible de G.*

Soit k un corps local de caractéristique nulle et $\mathbf{H}$ un groupe algébrique sur k connexe, presque simple sur k et de centre trivial. On note $H = \mathbf{H}(k)$.

Alors tout morphisme $\Gamma \to H$ dont l'image est non bornée et Zariski-dense s'étend

en un morphisme continu $G \to H$.

Au-delà de son importance pour l'arithméticité, ce théorème est très utile pour la compréhension des réseaux des groupes algébriques semi-simples sur des corps locaux et est aussi une grande source d'inspiration pour des généralisations ou des résultats analogues.

Selon que le corps local k est archimédien (i.e. $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) ou non archimédien (comme par exemple $\mathbf{Q}_p$), un groupe algébrique semi-simple sur k sans facteur compact possède un espace symétrique de type non compact ou un immeuble euclidien. De ces deux structures, on peut ne retenir que la propriété de courbure négative : ce sont des espaces CAT(0).

Espaces CAT(0) de dimension télescopique finie

Définition 1.2. Soit (X, d) un espace métrique complet et géodésique. On dit que X est CAT(0) si pour tout triplet de points $(x, y, z) \in X^3$ et m point milieu d'un segment géodésique $[y, z]$, on a l'inégalité

$$d(x, m)^2 \leq 1/2 \left(d(x, y)^2 + d(x, z)^2\right) - 1/4\, d(y, z)^2.$$

Le cas d'égalité correspond à l'égalité de la médiane dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Intuitivement, cette inégalité signifie que l'espace métrique X est plus courbé négativement que l'espace euclidien. Pour une variété riemannienne simplement connexe, cette inégalité pour tout triplet de points est équivalente à la négativité au sens large des courbures sectionnelles.

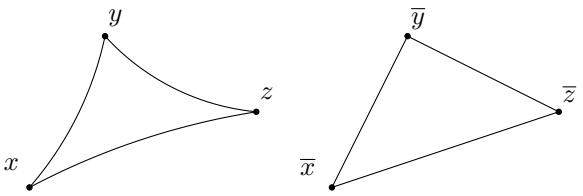


FIGURE 1.1 – Un triangle géodésique dans un espace CAT(0) est plus fin qu'un triangle euclidien avec des côtés de même longueurs.

Parmi les sous-espaces d'un espace CAT(0), certains jouent un rôle particulier, ce sont les sous-espaces *plats*, c'est-à-dire isométriques à un certain espace euclidien $\mathbf{R}^n$. La dimension maximale des sous-espaces plats est appelée *rang* de l'espace CAT(0). Dans le théorème de superrigidité de Margulis, c'est le rang de l'espace symétrique ou de l'immeuble euclidien associé à G qui intervient. Par exemple, pour le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, l'espace symétrique associé est l'ensemble des matrices définies positives de déterminant 1. Un plat correspond à un sous-espace de matrices simultanément diagonalisables. Par exemple, les matrices définies positives diagonales de déterminant 1 forment un tel sous-espace maximal et ainsi le rang de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est $n - 1$.

À un espace CAT(0) X, on peut associer un *bord à l'infini*, ∂X, qui est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques. Deux rayons géodésiques sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée l'un de l'autre. Un point à l'infini est pensé comme étant au bout de n'importe quel rayon géodésique dans la classe d'équivalence considérée. Par exemple, pour l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, on obtient une sphère $\mathbf{S}^{n-1}$.

Les espaces CAT(0) que nous considérons dans la suite, ne seront pas localement compacts pour la plupart d'entre eux. En ce sens, on peut les considérer comme étant de dimension infinie. Cependant, certains gardent une notion de dimension finie à grande échelle.

Définition 1.3 (Introduction de [CL10])**.** Soit (X, d) un espace CAT(0). On dit que X est de *dimension télescopique* n si n est le plus petit entier tel que tout cône asymptotique sur X est de dimension géométrique au plus n.

Ainsi un espace CAT(0) X est de dimension télescopique au plus n si tout compact de tout cône asymptotique de X est de dimension topologique au plus n. Comme la dimension géométrique, la dimension télescopique peut s'exprimer à l'aide d'une inégalité inspirée de celle de Jung. Pour une partie bornée Y d'un espace CAT(0), on note $\mathrm{diam}(Y)$ pour son diamètre et $\mathrm{rad}_X(Y)$ pour le rayon de la plus petite boule fermée de X contenant Y.

Proposition 1.4 (Théorème 1.3 de [CL10])**.** *Un espace* CAT(0) X*, est de dimension télescopique plus petite que* n *si et seulement si pour tout* $\delta > 0$*, il existe* $D > 0$ *tel que pour toute partie* $Y \subset X$ *de diamètre fini supérieur à* D*, on a l'inégalité*

$$\mathrm{rad}_X(Y) \leq \left(\delta + \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\right) \mathrm{diam}(Y).$$

Par exemple, un espace CAT(0) est Gromov-hyperbolique si et seulement s'il est de dimension télescopique 1.

Introduisons maintenant deux familles d'espaces CAT(0) qui joueront un rôle important dans la suite.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ de dimension infinie. On note $\mathrm{L}(\mathcal{H})$ pour l'algèbre de tous les opérateurs bornés $\mathbf{K}$-linéaires de $\mathcal{H}$ et $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ pour le groupe des opérateurs bornés $\mathbf{K}$-linéaires inversibles. En considérant l'espace de Hilbert réel sous-jacent $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$ de $\mathcal{H}$, on considère $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{H}_{\mathbf{R}})$. On note A^* pour l'adjoint de $A \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$.

Soit $p \in \mathbf{N}$. Fixons une base orthonormale $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}$, et considérons la forme hermitienne (quadratique si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$)

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} \overline{x}_i x_i - \sum_{i>p} \overline{x}_i x_i$$

où $x = \sum e_i x_i$. Le groupe d'isométries de cette forme de signature (p, ∞) est noté $\mathrm{O}(Q)$ ou encore $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p, \infty)$.

Remarque 1.5. La notation $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ n'est pas standard et on l'utilise pour avoir des énoncés uniformes sans avoir à faire des répétitions. Plus loin dans le texte, on étudiera des réseaux de groupes hyperboliques complexes et on utilisera la notation $\mathrm{SU}(1,n)$ plus classique en dimension finie et on n'étudiera pas de réseaux hyperboliques réels.

L'intersection de $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ et du groupe unitaire (ou orthgonal) de $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p) \times \mathrm{O}_{\mathbf{K}}(\infty)$ où $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p)$ (resp. $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(\infty)$) est le groupe unitaire (ou orthogonal) d'un espace de Hilbert de dimension p (resp. de dimension infinie).

Alors le quotient

$$\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty) = \mathrm{O}(p,\infty)/(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(\infty))$$

possède une structure d'espace symétrique riemannien de dimension infinie à courbure négative. C'est-à-dire qu'il s'agit d'une variété modelée sur un espace de Hilbert de dimension infinie et séparable, cet espace est muni d'une métrique riemannienne dont toutes les courbures sectionnelles sont négatives au sens large et en chaque point, il existe une isométrie fixant ce point et dont la différentielle est la symétrie centrale en l'origine. On peut aussi identifier $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ avec l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{V \leq \mathcal{H},\ \dim_{\mathbf{K}}(V) = p,\ Q|_V > 0\}.$$

En effet, le groupe $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ agit transitivement sur $\mathcal{V}$ (grâce au théorème de Witt) et le stabilisateur de l'espace vectoriel engendré par les p premiers vecteurs de base est $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p) \times \mathrm{O}_{\mathbf{K}}(\infty)$.

Observons que les homothéties agissent trivialement sur $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ et ainsi le groupe $\mathrm{PO}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ que l'on définit comme $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)/\{\lambda\,\mathrm{Id},\ |\lambda| = 1\}$ agit par isométries sur $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$. De plus, il s'agit exactement du groupe d'isométries de $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ [Duc13, Theorem 1.5]. Ces deux familles d'espaces (selon que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) donnent deux familles d'espaces CAT(0) non localement compacts mais de rang et de dimension télescopique exactement p [Duc13].

Ergodicité isométrique

Dans la suite, nous aurons besoin de notions venant de la théorie ergodique. Rappelons qu'un *espace polonais* est un espace topologique métrisable par une distance complète et de plus séparable. Si G est un groupe localement compact, un *G-espace de Lebesgue* est un espace borélien standard (c'est-à-dire un ensemble avec un σ-algèbre isomorphe à la tribu borélienne d'un espace polonais) muni d'une mesure de probabilité borélienne et d'une action de G mesurable qui préserve la classe de la mesure de probabilité. On note $\mathrm{Prob}(\Omega)$ pour l'espace des mesures de probabilité sur un espace borélien standard Ω. C'est un espace polonais pour la topologie faible-*, topologie provenant du dual des fonctions continues bornées sur Ω.

Définition 1.6. Soit Ω un G-espace de Lebesgue. L'action de G sur Ω est *isométriquement ergodique* si pour tout espace métrique séparable Z muni d'une ac-

tion par isométries de G, toute application G-équivariante mesurable $\Omega \to Z$ est essentiellement constante.

Cette définition est bien plus forte que l'ergodicité de $G \curvearrowright \Omega$. Cette ergodicité correspond au cas où l'action de G sur Z est triviale. Remarquons que si Ω est un G-espace de Lebesgue alors $\Omega \times \Omega$ l'est aussi pour l'action diagonale de G. De plus si l'action $G \curvearrowright \Omega \times \Omega$ est isométriquement ergodique alors l'action $G \curvearrowright \Omega$ l'est aussi. Il suffit de considérer la projection sur un des facteurs.

Définition 1.7. Soit Y et Z deux G-espaces boréliens et $p : Y \to Z$ une application G-équivariante borélienne. On note $Y \times_p Y$ pour le *produit fibré au-dessus* de p, qui est le sous-ensemble $\{(x, y) \in Y^2,\ p(x) = p(y)\}$ muni de la structure borélienne induite par Y^2.

On dit que l'action $G \curvearrowright Y$ est une *action isométrique fibre-à-fibre* s'il existe une application borélienne G-invariante $d : Y \times_p Y \to \mathbf{R}$ telle que toute fibre $Y' \subset Y$ de p munie de la restriction $d|_{Y' \times Y'}$ est un espace métrique séparable.

Définition 1.8. Soit A et B deux G-espaces de Lebesgue. Soit $\pi : A \to B$ une application G-équivariante. On dit que π est *relativement isométriquement ergodique* si pour toute application borélienne G-équivariante $p : Y \to Z$ entre G-espaces boréliens standards munie d'une action isométrique fibre-à-fibre, et pour toutes applications mesurables G-équivariantes $A \to Y$ et $B \to Z$ telles que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \longrightarrow & Z \end{array}$$

il existe une application mesurable G-équivariante $\phi\colon B \to Y$ qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \overset{\phi}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Remarque 1.9. Si B est un G-espace de Lebesgue tel que la première projection $\pi_1 : B \times B \to B$ est relativement isométriquement ergodique alors $G \curvearrowright B$ est isométriquement ergodique. En fait, si Y est un espace métrique séparable muni d'une action par isométries de G et $f : B \to Y$ est une application mesurable G-équivariante alors il suffit d'appliquer l'ergodicité isométrique relative à l'application $\tilde{f}\colon (b, b') \mapsto f(b')$ et la fibration triviale $Y \to \{*\}$.

$$\begin{array}{ccc} B \times B & \overset{\tilde{f}}{\longrightarrow} & Y \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & \overset{\phi}{\nearrow} & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

Plus précisément, l'ergodicité isométrique relative fournit alors une application $\phi\colon B \to Y$ telle que pour presque toute paire (b, b'), $\phi(b) = f(b')$ et ainsi f est essentiellement constante.

Soit B un G-espace de Lebesgue. Nous utilisons la notion de moyennabilité pour les actions introduite par Zimmer [Zim84, §4.3]. L'action $G \curvearrowright B$ est *moyennable* si pour tout espace compact métrisable M sur lequel G agit continûment, il existe une application mesurable G-équivariante $\phi\colon B \to \mathrm{Prob}(M)$.

Définition 1.10. Le G-espace de Lebesgue B est un *bord fort* de G si
— l'action de G sur B est moyennable et
— la première projection $\pi_1\colon B \times B \to B$ est relativement isométriquement ergodique.

Exemple 1.11. L'exemple le plus important pour nous est donné par [BF14a, Theorem 2.5]. Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple sans facteur compact et P un sous-groupe parabolique minimal. Alors G/P, muni de la classe de la mesure de Lebesgue, est un bord fort pour G. Si $\Gamma < G$ est un réseau alors G/P est aussi un bord fort pour Γ. Plus généralement, on a le même résultat si G est un groupe algébrique semi-simple sur un corps local.

L'exemple suivant montre que tout groupe dénombrable possède un bord fort.

Exemple 1.12. Soit Γ un groupe dénombrable, et $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ une mesure de probabilité dont le support engendre Γ. Soit B le bord de Poisson-Furstenberg associé à (Γ, μ). Alors B est un bord fort pour Γ [BF14a, Theorem 2.7].

Existence d'applications de bords

Si G agit sur un espace CAT(0) par isométries et B est un bord fort pour G, on appelle *application de bords* une application mesurable G-équivariante $B \to \partial X$. Par exemple, lorsque G est un groupe de Lie connexe semi-simple sans facteur compact, P un sous-groupe parabolique minimal de G, X est un espace symétrique de type non compact et de groupe d'isométries H (qui est un groupe algébrique réel) alors une application de bords $G/P \to \partial X$ induit une application mesurable $G/P \to H/Q$ où Q est un sous-groupe parabolique de H. Margulis montre alors que cette application est bien plus que mesurable, elle est en fait algébrique et ainsi, il en déduit son théorème de superrigidité.

Pour certains espaces CAT(0) de dimension télescopique finie, on connaissait l'existence d'applications de bords grâce à la géométrie très particulière à l'infini puisque, dans ces cas, il y a une structure d'immeuble sphérique à l'infini. Rappelons qu'une action $G \curvearrowright X$ par isométries sur un espace CAT(0) est *non élémentaire* s'il n'y a pas de point fixe à l'infini ni de sous-espace plat invariant.

Théorème 1.13 ([Duc13, Theorem 1.7])**.** *Soit Γ un groupe localement compact à base dénombrable, B un bord fort pour Γ et $p \in \mathbf{N}$. Pour toute action non élémentaire continue de Γ sur $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p, \infty)$, il existe une application mesurable Γ-équivariante $\phi : B \to \partial\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p, \infty)$.*

Ce théorème se généralise en fait à tous les espaces CAT(0) de dimension télescopique finie et c'est le résultat principal de [BDL16b].

Théorème 1.14. *Soit X un espace* CAT(0) *de dimension télescopique finie et G un groupe localement compact à base dénombrable agissant continûment par isométries*

sur X sans sous-espace plat invariant. Si B est un bord fort pour G alors il existe une application mesurable G-équivariante de B vers ∂X.

Donnons quelques idées de la preuve. Le Théorème d'Adams-Ballmann [AB98], et sa généralisation aux espaces CAT(0) de dimension télescopique finie [CL10], affirme qu'un groupe moyennable agissant par isométries sur un espace CAT(0) localement compact ou de dimension télescopique finie fixe un point à l'infini ou laisse invariant un sous-espace plat.

Pour une action moyennable, on a la version équivariante suivante :

Théorème 1.15 ([Duc13, Theorem 1.8])**.** *Soit G un groupe localement compact et B un G-espace de Lebesgue ergodique telle que l'action $G \curvearrowright B$ est moyennable. Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces* CAT(0) *de dimension télescopique finie.*

Si G agit par isométries sur $\mathbf{X}$ alors soit il existe une section G-invariante $B \to \partial\mathbf{X}$ soit il existe un sous-champ euclidien de $\mathbf{X}$ G-invariant.

À partir de cet énoncé, on utilise la géométrie des sous-espaces plats et de leurs positions relatives ainsi que l'ergodicité isométrique relative pour obtenir le Théorème 1.14.

Le papier [CL10] utilisait implicitement que le bord d'un espace CAT(0) de dimension télescopique finie avec une action minimale est non vide. Pour un espace CAT(0) propre non borné, c'est toujours le cas : la compacité locale de X montre que le bord n'est jamais vide.

Remarquons qu'en général, le bord d'un espace CAT(0) de dimension télescopique finie et non borné n'est pas toujours non vide. Un contre-exemple est fourni par un arbre donné par un sommet fixé d'où part un rayon de longueur n pour chaque $n \in \mathbf{N}$. Dans le cas où il n'y a pas de point fixe global pour toutes les isométries, on peut répondre à la question de la vacuité du bord à l'infini.

Théorème 1.16. *Soit X un espace* CAT(0) *de dimension télescopique finie. Si $\mathrm{Isom}(X)$ n'a pas de point fixe alors $\partial X \neq \emptyset$.*

De manière surprenante, cette non-vacuité utilise le Théorème 1.14 pour un certain groupe dénombrable Γ et un bord fort de Γ.

1.2 Représentations algébriques d'actions ergodiques [BDL17]

Récemment, Bader et Furman ont développé un cadre qui leur a permis d'étendre la superrigidité de Margulis au-delà des représentations dans des groupes algébriques sur des corps locaux. Plus précisément, ils arrivent à étendre cette superrigidité à des groupes algébriques sur des corps avec une valeur absolue non archimédienne.

Une *valeur absolue* sur un corps k est une application $|\cdot| \colon k \to \mathbf{R}_+$ telle que

— $|a| = 0 \iff a = 0$,
— $|ab| = |a| \cdot |b|$,
— $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Un corps muni d'une valeur absolue est appelé *corps valué*[1]. C'est un espace métrique pour la distance $d(a,b) = |a-b|$. Par exemple, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ munis de la valeur absolue usuelle ou du module sont des corps valués. Ces deux corps sont appelés *archimédiens* (ils vérifient la propriété d'Archimède). Si ν_p est la valuation p-adique pour p entier premier alors l'ensemble $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques est muni de la valeur absolue $|a| = p^{-\nu_p(a)}$.

Si la valeur absolue vérifie l'inégalité, $|a+b| \leq \max\{|a|,|b|\}$, le corps est dit *non archimédien*. C'est le cas pour $\mathbf{Q}_p$ par exemple. Un corps valué est dit *local* s'il est localement compact pour la distance associée. Il n'y a que peu d'exemples : $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ et les extensions finies de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{F}_p((t))$, le corps des séries de Laurent sur le corps fini $\mathbf{F}_p$.

Voici l'extension aux corps quelconques du théorème de superrigidité de Margulis par Bader et Furman.

Théorème 1.17 ([BF18a, Theorem 1.1])**.** *Soit l un corps local. Soit T l'ensemble des l-points d'un groupe algébrique d'un groupe connexe presque simple défini sur l. Supposons que le rang sur l de T est au moins 2. Soit $\Gamma < T$ un réseau.*

Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué. Supposons que k soit métriquement complet. Soit G l'ensemble des k-points d'un groupe algébrique adjoint simple défini sur k. Soit $\delta : \Gamma \to G$ un morphisme de groupes. Supposons que $\delta(\Gamma)$ soit Zariski-dense dans G et non borné. Alors il existe un morphisme continu $d : T \to G$ tel que $\delta = d|_\Gamma$.

La méthode derrière ce résultat a permis d'autres résultats [BF14b, BF18c, BF18b, BFMS19]. Elle repose sur la notion de *représentation algébrique d'action ergodique*. C'est ce que nous introduisons dans la suite.

On fixe un corps valué $(k, |\cdot|)$ que nous supposons complet et séparable en tant qu'espace métrique. Soit $\widehat{k}$, le complété de sa clôture algébrique muni de la valuation étendue. Le corps valué $\widehat{k}$ est aussi séparable complet et algébriquement clos. Par exemple, si on part de $\mathbf{Q}$ avec la valeur absolue usuelle, on obtient $\mathbf{C}$ et pour $\mathbf{Q}_p$, on obtient un corps analogue noté $\mathbf{C}_p$.

Dans la suite, on fixe un corps valué k complet séparable, on identifie les variétés algébriques sur k avec leur $\widehat{k}$-points et on notera en gras ces variétés et sans gras pour les k-points. Par exemple, fixons un groupe algébrique $\mathbf{G}$ et ces k-points $G = \mathbf{G}(k)$.

On s'intéresse aux systèmes dynamiques de nature algébrique, c'est-à-dire aux actions $G \times V \to V$ où V est l'ensemble des k-points d'une variété algébrique $\mathbf{V}$, G est comme ci-dessus et $\mathbf{G}$ agit k-algébriquement sur $\mathbf{V}$. On appelle une telle action, *action algébrique*. On sait alors que les stabilisateurs de points sont des sous-groupes algébriques de G et par un théorème de Bernstein-Zelevinski, les orbites sont localement fermées [BZ76].

L'action $G \times V \to V$ définie aussi un *système dynamique polonais*, c'est-à-dire une action continue d'un groupe polonais sur un espace polonais. Rappelons qu'un espace topologique est polonais s'il est métrisable par une distance complète et séparable. Un groupe topologique est polonais si sa topologie l'est.

1. Tout corps qui n'est pas une extension algébrique d'un corps fini possède une valeur absolue non triviale.

Après des travaux de Furstenberg et Moore, Zimmer a trouvé un résultat a priori surprenant : si G et V sont algébriques définis sur $\mathbf{R}$ alors l'action induite de G sur $\mathrm{Prob}(V)$ l'espace des mesures de Probabilité sur V possède des stabilisateurs algébriques et les orbites sont aussi localement fermées. L'espace $\mathrm{Prob}(V)$ est un espace polonais pour la topologie faible-* quand on l'identifie à une partie du dual de l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur V. Si V est compact alors $\mathrm{Prob}(V)$ aussi.

Le résultat de Zimmer ne s'étend pas aux autres corps locaux (en particulier parce que les groupes linéaires compacts n'ont pas de raison d'être algébriques) et on introduit la définition suivante.

Définition 1.18. Un groupe fermé de $L < G$ est *presque algébrique* s'il existe un groupe algébrique sur k, $\mathbf{H} < \mathbf{G}$ tel que H est un sous-groupe normal cocompact de L.

Une action continue de G sur un espace polonais V est *presque algébrique* si les stabilisateurs de points sont des sous-groupes presque algébriques et les ouverts G-invariants de V séparent les orbites (i.e. l'espace G/V est T_0, pour toute paire de points distincts du quotient, il existe un ouvert qui contient l'un mais pas l'autre.)

Remarque 1.19. La dernière condition de cette définition est équivalente au fait que les orbites soient localement fermées dans le cas où k (et donc G) est localement compact. C'est une conséquence du Théorème 2.6 de [Eff65].

Un résultat clé de [BDL17] est le suivant et généralise le résultat de Zimmer pour les corps k complets et séparables.

Théorème 1.20. *Si l'action continue $G \curvearrowright V$ sur l'espace polonais V est presque algébrique alors il en est de même pour l'action $G \curvearrowright \mathrm{Prob}(V)$.*

Le cas qui nous intéressera plus particulièrement est le corollaire suivant (connu de Zimmer dans le cas où k est un corps local de caractéristique nulle et $\mathbf{V}$ est homogène [Zim84, Chapter 3]).

Corollaire 1.21. *Supposons que $\mathbf{G}$ agisse k-algébriquement sur une k-variété $\mathbf{V}$ alors l'action induite $G \curvearrowright \mathrm{Prob}(V)$ est presque algébrique.*

En réalité, dans le cas où V est les k-points d'une variété algébrique, la preuve donne plus d'informations.

Proposition 1.22. *Soit $L < G$ un sous-groupe fermé. Alors il existe un sous-groupe algébrique sur k, $\mathbf{H}_0 < \mathbf{G}$ normalisé par L tel que L a une image relativement compacte dans le groupe polonais $(N_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}_0)/\mathbf{H}_0)(k)$ et tel que pour toute variété $\mathbf{V}$ algébrique sur k munie d'une action k-algébrique de $\mathbf{G}$, toute mesure finie L-invariante sur $V = \mathbf{V}(k)$ est supportée sur l'ensemble des points $\mathbf{H}_0$-invariants.*

Cette proposition généralise un des résultats principaux de [Sha99] qui considère le cas où k est un corps local et $L = G$. Dans le cas où $L = G$, on obtient le fait plus marquant suivant.

Corollaire 1.23. *Si pour tout sous-groupe strict algébrique sur k, $\mathbf{H} < \mathbf{G}$, G/H est non compact, alors toute mesure G-invariante sur une k-variété munie d'une action k-algébrique de $\mathbf{G}$, est supportée sur l'ensemble des points fixes de $\mathbf{G}$.*

De ce corollaire, on peut déduire un analogue du théorème de densité de Borel (qui affirme la Zariski-densité des sous-groupes fermés de covolume fini dans les groupes de Lie semi-simples connexes sans facteur compact).

Théorème 1.24. *Soit Γ un sous-groupe fermé de G tel que G/Γ possède une mesure de probabilité G-invariante. Si pour tout sous-groupe k-algébrique normal $\mathbf{H} \triangleleft \mathbf{G}$, G/H est non compact alors Γ est Zariski-dense dans $\mathbf{G}$.*

À partir du corollaire précédent, ce résultat se démontre assez facilement.

Démonstration. Soit $\mathbf{H}$ la clôture de Zariski de Γ. En poussant la mesure de probabilité invariante sur G/Γ via $G/\Gamma \to G/H$, on doit obtenir une mesure supportée sur l'ensemble des points $\mathbf{G}$-fixes, ce qui n'est possible que si $\mathbf{H} = \mathbf{G}$, autrement dit Γ est Zariski-dense. □

Dans le cadre de la théorie ergodique, la propriété de séparations des orbites (l'espace $G\backslash V$ est T_0 comme dans le cas d'une action presque algébrique) a des implications fortes. Soit L un groupe qui agit par homéomorphismes sur un espace polonais V. La *classe* d'une mesure borélienne μ est l'ensemble des mesures boréliennes qui ont exactement les mêmes ensembles de mesure nulle que μ. On dit que la mesure μ est *quasi-invariante* si pour tout $g \in L$, μ et $g_*\mu$ sont dans la même classe. Une mesure quasi-invariante est *L-ergodique* si tout ensemble mesurable L-invariant est soit de mesure nulle soit son complémentaire est de mesure nulle. On a en particulier la proportion classique suivante.

Proposition 1.25. *Soit V un espace polonais muni d'une action continue de G telle que les orbites soient séparées. Soit $L \leq G$ un sous-groupe et μ une mesure L-ergodique quasi-invariante sur V. Alors μ est supportée sur une unique G-orbite.*

En particulier, cela ramène à étudier des systèmes homogènes. Dans notre cadre de variété algébrique sur k, en combinant avec le Théorème 1.20, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.26. *Soit $\mathbf{V}$ une variété algébrique sur k munie d'une action k-algébrique de $\mathbf{G}$. On note $V = \mathbf{V}(k)$. Soit $L \leq G$ un sous-groupe et ν une mesure L-ergodique quasi-invariante sur $\mathrm{Prob}(V)$. Alors il existe $\mu \in \mathrm{Prob}(V)$ telle que ν est supportée sur la G-orbite de μ.*

Énonçons maintenant une version simplifiée du résultat de [BDL17] utile pour mettre en route la machine de [BF18a]. La version générale fait appel à des cocycles et cela rend l'énoncé plus technique (mais aussi plus général).

Théorème 1.27. *Soit R un groupe localement compact à base dénombrable et Y un R-espace de Lebesgue ergodique et moyennable. Supposons que $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique défini sur k, simple et adjoint. Considérons un morphisme $R \to G$. Alors*

— *Il existe un espace métrique complet et séparable V sur lequel G agit par isométries avec des stabilisateurs bornés et une application mesurable R-équivariante $Y \to V$*
— *ou il existe un sous-groupe algébrique propre $\mathbf{H}$ défini sur k et une application R-équivariante mesurable $Y \to \mathbf{G}/\mathbf{H}(k)$.*

C'est le second point qui est utile à [BF18a] et qui justifie la dénomination de représentation algébrique utilisée dans ce paragraphe 1.2. L'action ergodique $R \curvearrowright Y$ se « représente » dans l'action algébrique $G \curvearrowright \mathbf{G}/\mathbf{H}(k)$.

Cet énoncé a un lien fort avec la section précédente sur l'existence d'application de bords. Si G est défini sur un corps local et G n'est pas compact alors on peut penser à V comme étant l'espace symétrique ou l'immeuble euclidien associé à G et $\mathbf{H}$ sera un groupe parabolique, G/H s'identifiant à une partie du bord à l'infini de V.

1.3 Représentations maximales en dimension infinie [DLP18]

Le théorème de superrigidité de Margulis nous apprend que les représentations linéaires non bornées des réseaux irréductibles des groupes de Lie semi-simples sans facteur compact de rang réel supérieur à 2 sont régies par les représentations continues du groupe de Lie ambiant. En particulier, ces représentations induisent un morphisme d'algèbres de Lie et la compréhension de ces morphismes est alors une question d'algèbre linéaire.

En rang 1, la superrigidité ne s'applique pas pour les réseaux des groupes $\mathrm{SO}(1,n)$ et $\mathrm{SU}(1,n)$. Par exemple, si Σ est un tore de dimension 2 auquel on a retiré un point, on peut munir Σ d'une métrique hyperbolique de volume fini et alors le groupe fondamental Γ_Σ se réalise comme un réseau du groupe $\mathrm{PO}(1,2)$. Ce groupe fondamental est un groupe libre à deux générateurs et pour créer une représentation de Γ_Σ, il suffit de choisir l'image des deux générateurs de ce groupe libre. On peut donc trouver de nombreuses représentations de Γ_Σ qui ne proviennent pas de représentations de $\mathrm{PO}(1,2)$.

Au-delà des représentations linéaires de dimension finie, certaines représentations de dimension infinie sont aussi très intéressantes. Il y a bien sûr les représentations unitaires mais il en existe d'autres qui préservent une forme quadratique dont l'indice (la dimension maximale des sous-espaces isotropes) est fini. Par exemple, les travaux [DP12, MP14] exhibent et étudient des représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{O}_{\mathbf{R}}(1,\infty)$ qui sont *exotiques* dans le sens où elles ne préservent pas de sous-espace totalement géodésique de dimension finie. De telles représentations exotiques existent aussi dans le cas complexe [Mon18].

Les réseaux des groupes hyperboliques complexes $\Gamma \leq \mathrm{SU}(1,n)$ ne sont pas superrigides et la variété de leurs représentations est bien plus grande. Par rapport aux réseaux hyperboliques réels, il possède une structure supplémentaire fournit par la forme de Kähler de l'espace hyperbolique complexe. Pour les représentations à valeurs dans des groupes de Lie semi-simples et hermitiens, on peut espérer que pour les représentations qui se comportent bien pour la forme de Kähler alors il reste une forme de superrigidité. C'est ce que nous détaillons dans la suite, en particulier dans le cas hermitien en dimension infinie.

Nous allons étudier les représentations à valeurs dans les groupes de Lie de dimension infinie $\mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ et $\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$ qui sont les groupes d'isométrie des *espaces symétriques hermitiens* $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ et $\mathcal{X}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$. Dire que ces espaces sont hermitiens signifie qu'il existe une structure complexe J, qui est un tenseur de type (1,1), qui munit chaque espace tangent d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Ce tenseur est de plus invariant sous l'action de la composante neutre du groupe d'isométries. Si g est la métrique sur l'espace symétrique, on définit la forme de Kähler associée ω par la relation $\omega(X,Y) = g(X,JY)$. Il s'agit d'une 2-forme alternée.

Cette forme de Kähler ω permet de définir un cocycle de degré 2 sur les groupes $G = \mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ et $\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$ en intégrant cette forme ω sur une surface bordant le triangle géodésique $\Delta(g_0x, g_1x, g_2x)$ dont les sommets sont dans l'orbite d'un point base x fixé :

$$C^x_\omega(g_0,g_1,g_2) = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta(g_0x,g_1x,g_2x)} \omega.$$

L'intégration se fait sur n'importe quelle surface à bord dont le bord est exactement le triangle géodésique $\Delta(g_0x, g_1x, g_2x)$. La forme ω étant fermée, la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de cette surface.

Cette construction fonctionne pour tout espace symétrique hermitien. Dans le cas du disque de Poincaré, qui est aussi la droite hyperbolique complexe, $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(1,1)$ avec les notations précédentes, l'intégrale calculée est exactement l'aire orientée du triangle $\Delta(g_0x, g_1x, g_2x)$. Cette aire est majorée en valeur absolue par π et donc le cocycle est borné en valeur absolue par 1.

Voyons maintenant comment cela définit un invariant en cohomologie bornée.

Cohomologie bornée

La *cohomologie bornée* $\mathrm{H}^n_b(G,\mathbf{R})$ d'un groupe G est la cohomologie du complexe

$$\mathrm{C}^n_b(G,\mathbf{R})^G = \left\{ f : G^{n+1} \to \mathbf{R} \middle|\ f \text{ est } G\text{-invariante et } ||f||_\infty < \infty \right\}$$

où l'opérateur de cobord est défini par

$$df(g_0,\dots,g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_{n+1}).$$

La cohomologie bornée d'un groupe discret a été introduite par Gromov [Gro82] qui a montré, en particulier, que c'était un outil utile pour obtenir des résultats de rigidité en combinaison avec des applications de bords. On exploitera aussi cette idée plus tard.

Bien qu'en général la cohomologie bornée soit assez sauvage (par exemple, le troisième groupe de cohomologie d'un groupe libre est de dimension infinie alors que la cohomologie usuelle est triviale en degré 3), il existe un morphisme naturel

$$c : \mathrm{H}^n_b(G,\mathbf{R}) \to \mathrm{H}^n(G,\mathbf{R}),$$

appelé *application de comparaison*, induite par l'inclusion des cochaînes bornées dans les cochaînes usuelles.

Un avantage de la cohomologie bornée par rapport à la cohomologie usuelle est l'existence de la norme ℓ^∞sur l'espace des cochaines $\mathrm{C}_b^n(G,\mathbf{R})$ et que cette norme induit la *norme de Gromov* en cohomologie bornée :

$$\|\kappa\|_\infty := \inf_{[f]=\kappa} \sup_{(g_0,\dots,g_n)\in G^n} |f(g_0,\dots,g_n)|.$$

Quand G est un groupe localement compact, Burger et Monod [BM99] ont introduit la *cohomologie bornée continue* $\mathrm{H}_{cb}^n(G,\mathbf{R})$ de G (on demande que les cochaînes soient de plus continues) et ont montré qu'en degré 2, l'application de comparaison $c : \mathrm{H}_{cb}^2(G,\mathbf{R}) \to \mathrm{H}_c^2(G,\mathbf{R})$ est un isomorphisme. Ici $\mathrm{H}_c^2(G,\mathbf{R})$ est la cohomologie continue de G. L'étude de Burger et Monod permet une description complète de $\mathrm{H}_{cb}^2(G,\mathbf{R})$ dans le cas des groupes de Lie semi-simples sans facteur compact et à centre trivial (i.e. les groupes d'isométries des espaces symétriques de type non compact) : On peut identifier la cohomologie continue en degré 2, $\mathrm{H}_c^2(G,\mathbf{R})$, avec l'espace des 2-formes G-invariantes $\Omega^2(\mathcal{X},\mathbf{R})^G$ où $\mathcal{X}$ est l'espace symétrique associé à G. En particulier, pour un groupe de Lie simple G à centre trivial et non compact , la cohomologie continue en degré 2, $\mathrm{H}_{cb}^2(G,\mathbf{R})$, est égale à $\mathbf{R}\kappa_G^{cb}$ si $\mathcal{X}$ est hermitien (et κ_G^{cb} est la classe du cocycle provenant de la forme de Kähler), et est triviale si $\mathcal{X}$ n'est pas hermitien.

Pour les groupe $\mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ et $\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$ le cocycle C_ω^x est en fait majoré par le rang de l'espace symétrique (c'est-à-dire p ou 2) et on peut alors définir une classe de cohomologie bornée. Cette majoration provient essentiellement du fait que tout nombre fini de points de $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ est contenu dans une copie totalement géodésique et holomorphe d'un espace symétrique hermitien de dimension finie et on peut alors utiliser les résultats connus en dimension finie.

Définition 1.28. La *classe de Kähler bornée* des groupes $G = \mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ et $G = \mathrm{PO}_{\mathbf{R}}^+(2,\infty)$ est la classe $\kappa_G^b \in \mathrm{H}_b^2(G,\mathbf{R})$ définie par le cocycle

$$C_\omega^x(g_0,g_1,g_2) = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta(g_0x,g_1x,g_2x)} \omega$$

où x est n'importe quel point base de l'espace symétrique correspondant $\mathcal{X}$ et $\Delta(g_0x,g_1x,g_2x)$ est le triangle géodésique de sommets (g_0x,g_1x,g_2x) et ω est la forme de Kähler normalisée de sorte que le minimum des courbures sectionnelles holomorphes soit -1.

Soit $\Gamma \leq \mathrm{SU}(1,n)$ un réseau. Lorsque $n=1$, Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann. On note

$$T_b^* : \mathrm{H}_b^2(\Gamma,\mathbf{R}) \to \mathrm{H}_{cb}^2(\mathrm{SU}(1,n),\mathbf{R})$$

l'application de transfert [BI09, §2.7.2] qui est un inverse à gauche de l'application de restriction $i^* : \mathrm{H}_{cb}^2(\mathrm{SU}(1,n),\mathbf{R}) \to \mathrm{H}_b^2(\Gamma,\mathbf{R})$ et qui est de norme 1. Rappellons que $\mathrm{H}_{cb}^2(\mathrm{SU}(1,n),\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$ qui est engendré par la classe de Kähler bornée du groupe $\mathrm{SU}(1,n)$ [BM99, Lemma 6.1]. Notons κ_n^{cb} cette classe de Kähler.

Définition 1.29. Soit $G = \mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$ ou $\mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)\}$ et $\rho : \Gamma \to G$ une représentation. L'*invariant de Toledo* de ρ est le réel i_ρ tel que

$$T_b^* \rho^* \kappa_G^b = i_\rho \kappa_n^{cb}$$

Observons que la valeur absolue $|i_\rho|$ de l'invariant de Toledo est bornée par le rang de G puisque l'application de transfert et le tiré en arrière n'augmentent pas la norme. L'inégalité $|i_\rho| \leq p$ est appelée *inégalité de Milnor-Wood généralisée*. Par analogie avec [BI09] on définit la maximalité d'une telle représentation.

Définition 1.30. La représentation ρ est *maximale* si $|i_\rho| = p$.

En dimension finie, les représentations maximales sont maintenant comprises dans la plupart des cas [BI08, BIW10, Poz15, KM17]. Ces résultats vont des représentations de groupes de surfaces (réseaux de $\mathrm{SU}(1,1)$) dans $\mathrm{PU}(1,1)$ vers des représentations de réseaux de $\mathrm{SU}(1,n)$ avec $n \geq 2$ dans des groupes hermitiens de rang supérieur à 2. Dans ce dernier cas, elles sont alors rigides dans le sens où la représentation s'étend à $\mathrm{SU}(1,n)$.

Pour étendre ces résultats en dimension infinie, outre l'existence possible de représentations exotiques, on se trouve confronté à deux types de difficultés.

— L'absence de topologie de Zariski. Nous développons pour cela une notion de *sous-groupe algébrique standard*.
— L'absence de compacité locale. Les compactifications usuelles des espaces symétriques ne donnent plus des espaces compacts. C'est la dimension télescopique finie qui permet alors de retrouver une forme faible de compacité.

Énoncés des résultats sur les représentations maximales en dimension infinie

Énonçons les résultats obtenus en dimension infinie. Les deux premiers concernent les groupes fondamentaux Γ_Σ de surface Σ (i.e. les réseaux de $\mathrm{SU}(1,1)$). Le premier est un résultat de rigidité et le second de flexibilité. Le troisième résultat concerne les réseaux hyperboliques complexes en dimension supérieure à 2.

La notion de Zariski-densité dans ce cadre ainsi que la comparaison avec la densité géométrique sont détaillées par la suite.

Théorème 1.31. *Soit Γ_Σ un réseau de $\mathrm{SU}(1,1)$ et $\rho\colon \Gamma_\Sigma \to \mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ une représentation maximale. Si $p \leq 2$ alors il existe un sous-espace totalement géodésique de dimension finie $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,p) \subset \mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ Γ_Σ-invariant. De plus, la représentation induite $\rho\colon \Gamma_\Sigma \to \mathrm{PU}(p,p)$ est maximale.*

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbf{N}$, il n'existe pas de représentation maximale et Zariski-dense $\rho\colon \Gamma_\Sigma \to \mathrm{PO}_C(p,\infty)$.

Pour le théorème suivant, considérons la surface hyperbolique Σ obtenue en épointant un tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Son groupe fondamental Γ_Σ est alors un groupe libre à deux générateurs.

Théorème 1.32. *Il existe des représentations géométriquement denses et maximales* $\rho : \Gamma_\Sigma \to \mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$.

Ces deux théorèmes font apparaître la nature totalement différente des espaces symétriques hermitiens $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ et $\mathcal{X}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$, les premiers ne sont pas de type tube alors que le second est de type tube. On renvoie à [DLP18, §2.4] pour plus de détails.

Théorème 1.33. *Soit* $n \geq 2$, $\Gamma < \mathrm{SU}(1,n)$ *un réseau hyperbolique complexe et soit* $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ *une représentation maximale. Si* $p \leq 2$ *alors il existe un sous-espace totalement géodésique de dimension finie* $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ *qui est invariant par* Γ. *De plus, la représentation induite* $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathcal{Y})$ *est maximale.*

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbf{N}$, *il n'y a pas de représentation maximale et Zariski-dense* $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$.

Les Théorèmes 1.31 et 1.33 donnent des énoncés différents pour $p \leq 2$ et $p > 2$ avec des notions de densité différentes. Expliquons ces différences avant d'expliquer la stratégie des preuves.

Deux notions de densité pour les sous-groupes

Commençons avec la définition la plus simple à formuler et qui est inspirée de [CM09a].

Définition 1.34. Un sous-groupe de $\mathrm{O}(p,\infty)$ est *géométriquement-dense* s'il ne fixe pas de point à l'infini ni ne préserve de sous-espace totalement géodésique propre.

Si G est le groupe d'isométries d'un espace symétrique de type non compact irréductible alors cette notion de densité géométrique de G est en fait équivalente à la Zariski-densité.

En dimension finie, les sous-groupes algébriques de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ sont donnés par des équations polynomiales en les coefficients des matrices. On généralise cette notion aux sous-groupes de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$.

Définition 1.35. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel. Un *coefficient matriciel* est une application linéaire $f\colon \mathrm{L}(\mathcal{H}) \to \mathbf{R}$ telle qu'il existe $x, y \in \mathcal{H}$ avec $f(L) = \langle Lx, y\rangle$ pour tout $L \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$. Une application $P\colon \mathrm{L}(\mathcal{H}) \to \mathbf{R}$ est dite *polynomiale homogène standard de degré* d s'il existe une base orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}$, une famille de coefficients réels $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}^{2d}}$, tels que pour tout $M \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$, $P(M)$ peut s'écrire comme une série absolument convergente

$$P(M) = \sum_{i\in\mathbf{N}^{2d}} \lambda_i P_i(M)$$

avec $P_i(M) = \prod_{k=0}^{d-1} \langle M e_{i_{2k}}, e_{i_{2k+1}}\rangle$ pour $i \in \mathbf{N}^{2m}$.

Une *application polynomiale standard* est une somme finie d'applications polynomiales homogènes standards. Son degré est le maximum des degrés des applications qui la composent. Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ est un *sous-groupe algébrique standard* s'il est défini par une famille quelconque d'applications polynomiales standards dont les degrés sont tous inférieurs à un certain $d \in \mathbf{N}$.

Remarque 1.36. La définition est faite pour être indépendante de la base choisie.

Exemples 1.37.

1. Le groupe $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ est un sous-groupe algébrique standard. Soit $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$ adaptée à la décomposition orthogonale $\mathcal{H} = V \oplus W$ où V est défini positif de dimension p et W défini négatif. L'élément $\langle I_{p,\infty}$ est l'application qui est l'identité sur V et l'opposé de l'identité sur W. Un élément de $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ est dans $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ si et seulement si $\langle I_{p,\infty} ge_i, ge_j\rangle = \langle I_{p,\infty} e_i, e_j\rangle$ pour tous $i,j \in \mathbf{N}$. Puisque $\langle I_{p,\infty} ge_i, ge_j\rangle = \sum_{k\in\mathbf{N}} \langle ge_i, I_{p,\infty} e_k\rangle\langle ge_j, e_k\rangle$ et le coefficient $\langle ge_i, I_{p,\infty} e_k\rangle$ est $\varepsilon_k\langle ge_i, e_k\rangle$ avec $\varepsilon_k = -1$ pour $k \leq p$ et $\varepsilon_k = 1$ pour $k > p$, on voit que $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ est un sous-groupe algébrique standard.
2. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel et $V < \mathcal{H}$ un sous-espace fermé. Alors $H = \mathrm{Stab}(V)$ est un sous-groupe algébrique standard de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$. En fait,
$$H = \left\{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H}),\ \langle gx, y\rangle = 0,\ \forall x \in V, y \in V^{\perp}\right\}$$
et ainsi H est un sous-groupe algébrique standard de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$.
3. Un résultat classique de Chevalley affirme qu'un groupe algébrique linéaire est le stabilisateur d'un sous-espace vectoriel dans un certain produit extérieur.
En dimension infinie, le stabilisateur d'un sous-espace fermé non trivial $V \leq \wedge^k\mathcal{H}$ pour $k \in \mathbf{N}$ est aussi un sous-groupe algébrique standard [DLP18, Lemma 3.10].

Remarque 1.38. L'introduction de sous-groupes algébriques en dimension infinie est due à Harris et Kaup [HK77]. Leur définition est plus générale que celle ci-dessus. L'objectif principal de [HK77] est de montrer qu'un sous-groupe algébrique est un groupe de Lie-Banach. La condition sur les degrés uniformément bornés est alors cruciale.

L'ajout de l'adjectif standard provient du fait qu'en dimension finie, les sous-groupes algébriques sont définis par des équations polynomiales en les coefficients des matrices. En dimension infinie, toutes les applications polynomales sur l'algèbre des opérateurs ne sont pas standards. Par exemple, il existe (par le théorème de Hahn-Banach) une forme linéaire non nullle qui s'annule sur tous les opérateurs compacts mais qui ne peut être donnée par des coefficients matriciels.

Définition 1.39. Un sous-groupe de $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ est *Zariski-dense* s'il n'est pas inclus dans un sous-groupe algébrique standard propre. Une représentation $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PO}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ est Zariski-dense si la préimage de $\rho(\Gamma)$ dans $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ est Zariski-dense.

Remarque 1.40. On ne définit pas de topologie de Zariski dans $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$. En particulier parce qu'une intersection infinie de sous-groupes algébriques standards n'est pas nécessairement un sous-groupe algébrique (à cause de la condition sur les degrés). La propriété de Noether n'est pas vérifiée dans ce cadre.

Proposition 1.41. *Soit $p \in \mathbf{N}$. Les stabilisateurs de sous-variétés totalement géodésiques de $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ et les stabilisateurs de points dans $\partial\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ sont des sous-groupes algébriques standards de $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$.*

En particulier, tout sous-groupe Zariski-dense de $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ *est géométriquement dense.*

Bien entendu, en ayant en tête l'équivalence en dimension finie, la question de la réciproque se pose.

Question 1.42. Est-il vrai qu'un sous-groupe géométriquement dense de $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ est aussi Zariski-dense ?

Si jamais un groupe contient des perturbations de rang fini de l'identité, on sait montrer que ces deux notions de densité coïncident.

Remarque 1.43. Ces deux conditions de densité ont chacune leurs avantages et leurs défauts. La densité géométrique est agréable car on peut s'y ramener si l'action du sous-groupe n'est pas élémentaire mais cette densité n'est, a priori, pas assez forte pour ce que nous voulons faire par la suite.

La Zariski-densité est, elle, assez forte mais l'absence de clôture de Zariski bien définie et d'approximations par des perturbations de rang fini de l'identité empêche d'avoir une méthode pour se ramener au cas Zariski-dense.

Applications de bords

La première étape de la stratégie de la preuve des Théorèmes 1.31 et 1.33 repose sur l'existence d'une application de bords, vers le bon bord plus précisément. Le bord de l'espace $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ possède une structure d'*immeuble sphérique* dont les cellules sont en correspondance avec les drapeaux isotropes. Rappelons qu'un drapeau isotrope est une suite (nécessairement de longueur au plus p) $V_1,\dots,V_k$ avec $V_i \subset V_{i+1}$ et $Q|_{V_i}=0$. La dimension de la cellule correspondante est la longueur du drapeau, i.e. k ci-dessus. En particulier, les sommets de l'immeuble sphérique sont les drapeaux réduits à un seul espace isotrope. Il y a exactement p types différents de sommets, correspondant à la dimension du sous-espace.

Le bord qui nous intéressera (pour $\mathbf{K}=\mathbf{C}$) est

$$\mathcal{I}_p = \{V \leq \mathcal{H};\ \dim(V)=p, \mathbf{Q}|_V = 0\}$$

qui correspond donc à un type de sommet de l'immeuble sphérique à l'infini. En géométrie complexe en dimension finie, ce bord est l'analogue du *bord de Shilov* du domaine symétrique borné correspondant à l'espace symétrique hermitien.

Pour un bord fort B d'un groupe discret Γ agissant non élémentairement sur $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$, le Théorème 1.14 donne l'existence d'une application mesurable Γ-équivariante de B vers un certain type de drapeaux mais ne permet pas de garantir l'existence d'une application $B \to \mathcal{I}_p$ dont nous aurons besoin par la suite.

En dimension finie, pour une représentation $\Gamma \to H$, après les travaux de Furstenberg et Margulis et sous l'hypothèse de Zariski-densité, l'existence de l'application de bords $B \to \mathcal{I}_p$ est classique et n'est pas très difficile. La cocompacité du sous-groupe parabolique minimal de H jouant un rôle crucial.

En dimension infinie, on obtient le résultat suivant sous l'une des deux hypothèses de densité. C'est uniquement ici que cette différence joue un rôle. Dans le cas, $p \leq 2$, c'est la géométrie beaucoup plus simple du bord à l'infini qui est utilisée.

Théorème 1.44. *Soit Γ un groupe dénombrable avec un bord fort B et $p \in \mathbf{N}$.*

Si Γ agit de manière géométriquement dense sur $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ avec $p \leq 2$, alors il existe une application mesurable Γ-équivariante $\phi\colon B \to \mathcal{I}_p$. De plus, pour presque toute paire $(b,b') \in B^2$, $\phi(b)$ et $\phi(b')$ sont transverses.

Si $\Gamma \to \mathrm{PO}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ est une representation d'image Zariski-dense alors il existe une application mesurable Γ-équivariante $\phi\colon B \to \mathcal{I}_p$. De plus, pour presque toute paire $(b,b') \in B^2$, $\phi(b)$ et $\phi(b')$ sont transverses.

Donnons une idée de la preuve sous l'hypothèse de Zariski-densité. Par le Théorème 1.14, on obtient une application mesurable Γ-équivariante $B \to \partial\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ et on en déduit une application $\varphi\colon B \to \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est une variété de drapeaux d'un type fixé. Deux sous-espaces isotropes V, V' de même dimension sont *opposés* si $V^\perp \cap V' \neq \{0\}$, c'est-à-dire $V + V'$ est non dégénéré. Remarquons que si V et V' ont dimension p, c'est équivalent à la transversalité, i.e. l'intersection est triviale. Deux drapeaux $(V_1,\dots,V_k)$ et $(V'_1,\dots,V'_k)$ sont opposés s'ils sont de même type (la suite des dimensions est la même) et les sous-espaces de même dimension sont opposés.

En utilisant l'ergodicité métrique relative de $B \times B \to B$ (voir la Définition 1.10), si $\varphi(b)$ et $\varphi(b')$ ne sont pas opposés presque sûrement, nous créons un sous-espace espace Γ-invariant dans $\wedge^k\mathcal{H}$. Ce qui contredit la Zariski-densité par le troisième point des Exemples 1.37.

Une fois l'opposition de l'application de bord obtenue (pour presque tous b, b', $\varphi(b)$ et $\varphi(b')$ sont opposés), on peut utiliser des perspectivités entre espaces symétriques à l'infini et s'il n'existe pas d'application $\phi\colon B \to \mathcal{I}_p$ alors de nouveau, nous créons un sous-espace espace Γ-invariant dans $\wedge^k\mathcal{H}$.

Une fois l'existence de l'application de bords obtenue, on va pouvoir liér la maximalité de la représentation à cette application de bords.

Le *cocycle de Bergmann* (ou indice de Maslov généralisé) étudié dans [Cle02, Cle07] pour le groupe $\mathrm{PU}(p,q)$ s'étend en une application

$$\beta_{\mathbf{C}} : \mathcal{I}_p^3 \to [-p,p]$$

qui est un cocycle pour le groupe $\mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$. La raison de cette extension est le fait que pour tout triplet $(V_1,V_2,V_3) \in \mathcal{I}_p^3$, il existe $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ totalement géodésique qui est homolomorphiquement isométrique à l'espace symétrique de $\mathrm{PU}(p,q)$ pour un certain q et tel que $V_i \in \partial\mathcal{Y}$ pour tout $i = 1,2,3$.

La propriété importante pour nous, est le fait que si $|\beta_{\mathbf{C}}(V_1,V_2,V_3)| = p$ alors ces trois sous-espaces sont deux-à-deux transverses et contenus dans un sous-espace de $\mathcal{H}$ de dimension $2p$ et dont la restriction de Q est de signature (p,p). Ce cocycle est aussi relié à la classe de Kähler de l'espace symétrique $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$.

Lemme 1.45. *Pour tout $V \in \mathcal{I}_p$, le cocycle C_β^V défini par*

$$C_\beta^V(g_0,g_1,g_2) = \beta_{\mathbf{C}}(g_0V, g_1V, g_2V)$$

represente la classe de Kähler bornée κ_G^b.

Lorsque Γ est un réseau de $\mathrm{SU}(1,n)$, un bord fort est donné par le bord à l'infini $\partial\mathcal{X}_C(1,n)$ de l'espace hyperbolique complexe $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(1,n)$. Ce bord s'identifie aussi avec $\mathcal{I}_1(1,n)$, l'espace des droites isotropes de $\mathbf{C}^{1+n}$ avec une forme hermitienne de signature $(1,n)$. Il est de la forme G/P où $G = \mathrm{SU}(1,n)$ et P est un parabolique strict (nécessairement minimal) comme dans l'Exemple 1.12.

Dans ce cas particulier, le cocycle de Bergmann $\beta_{\mathcal{I}_1(1,n)}(V_1,V_2,V_3)$ est l'invariant angulaire de Cartan [Car32] [2] (au facteur $\pi/2$ près) des trois droites isotropes V_1,V_2,V_3. Cet invariant, majoré en valeur absolue par 1, est maximal si et seulement si les trois points sont dans le bord d'une *chaîne* qui est par définition le bord d'une géodésique complexe, c'est-à-dire une copie isométrique de $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(1,1)$.

Par analogie, on définit une *chaîne* de $\partial\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ comme étant le bord d'une copie isométrique de $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}(p,p)$. Le cocycle de Bergmann $\beta_{\mathbf{C}}(V_1,V_2,V_3)$ est alors maximal, c'est-à-dire vaut $\pm p$, si et seulement si les trois points V_1,V_2,V_3 appartiennent à une chaîne, qui est alors nécessairement unique.

En analogie avec la formule bien pratique en cohomologie bornée de [BI09], on peut calculer la classe de cohomologie de $\mathrm{SU}(1,n)$ associée à une représentation $\Gamma \to \mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ où Γ est un réseau hyperbolique complexe.

Proposition 1.46. *Soit* $\rho : \Gamma \to \mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(p,\infty)$ *une représentation maximale. S'il existe une application* ρ*-equivariante* $\phi : \mathcal{I}_1(1,n) \to \mathcal{I}_p$*, alors pour tout triplet de points distincts* $(x,y,z) \in \mathcal{I}_1(1,n)$*, on a*

$$p \cdot \beta_{\mathcal{I}_1(1,n)}(x,y,z) = \int_{\Gamma\backslash \mathrm{SU}(1,n)} \beta(\phi(gx),\phi(gy),\phi(gz))\mathrm{d}\mu(g)$$

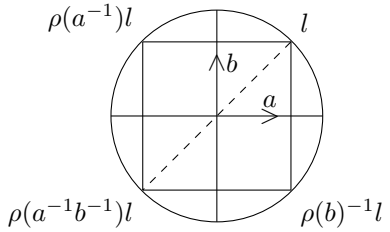
où μ *est la seule mesure de probabilité sur* $\Gamma\backslash\mathrm{SU}(1,n)$ *invariante par* $\mathrm{SU}(1,n)$.

À partir de cette proposition, avec des arguments de type Fubini, on peut montrer que l'application de bord ϕ, vérifie la propriété suivante : presque sûrement l'image d'une chaîne de $\mathcal{X}_C(1,n)$ est incluse dans une chaîne de $\mathcal{X}_C(p,\infty)$. Dans le cas où Γ est un groupe de surface, il n'y a qu'une seule chaîne donc son image essentielle est incluse dans une chaîne de $\mathcal{X}_C(p,\infty)$ et on en déduit qu'il existe un sous-espace $\mathcal{X}_C(p,p)$ totalement géodésique invariant. Ce qui prouve le Théorème 1.31.

En dimension supérieure à 1, l'idée repose sur le fait que l'on peut retrouver tout le bord $\mathcal{X}_C(1,n)$ à partir de n chaînes. Pour cela, on construit de manière itérative des chaînes à partir des points que l'on a déjà construits (rappelons que deux points distincts de $\mathcal{X}_C(1,n)$ définissent une unique chaîne). Comme l'application de bords préserve les chaînes, on obtient que son image essentielle est incluse dans l'espace vectoriel engendré par n chaînes et ainsi, on montre qu'il existe un sous-espace totalement géodésique isométrique à $\mathcal{X}(p,np)$ qui est Γ-invariant et cela conclut la preuve du Théorème 1.33.

2. C'est le seul endroit où le nom d'Élie Cartan apparaît dans ce mémoire bien que ces travaux soient une source immense d'inspiration pour mes travaux en courbure négative.

Le Théorème 1.32 qui affirme l'existence de représentations maximales géométriquement denses d'un groupe de surface Γ à valeurs dans $\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$ est obtenu grossièrement de la manière suivante. Le groupe Γ est un groupe libre engendré par deux éléments a, b. On choisit pour image par la représentation ρ de a et b deux éléments hyperboliques avec des droites isotropes attractives et répulsives. Ceci se traduit aussi par l'existence d'une valeur propre réelle de module différent de 1 et de multiplicité 1. Ensuite, si on choisit suffisamment bien $\rho(a)$ et $\rho(b)$, on peut garantir que ρ ne préserve pas de sous-espace de dimension finie et que le commutateur $\rho([a,b])$ possède une droite isotrope attractive l. Si $\beta_{\mathbf{R}}$ est le cocycle de Bergmann associé à $\mathcal{X}_{\mathbf{R}}(2,\infty)$ alors l'invariant de Toledo i_ρ peut se calculer de la manière suivante



$$\begin{aligned} 2i_\rho =& \beta_{\mathbf{R}}(l, \rho(a^{-1})l, \rho(ba)^{-1}l) \\ &+ \beta_{\mathbf{R}}(\rho(ba)^{-1}l, \rho(b^{-1})l, l). \end{aligned}$$

En garantissant de plus que

$$\beta_{\mathbf{R}}(l, \rho(a^{-1})l, \rho(ba)^{-1}l) = \beta_{\mathbf{R}}(\rho(ba)^{-1}l, \rho(b^{-1})l, l) = 2,$$

ce qui signifie que ces triplets de droites engendrent un sous-espace non dégénéré et qu'ils sont orientés dans le bon sens, on obtient $i_\rho = 2$ et ainsi la représentation est maximale. Comme il n'y a pas de sous-espace de dimension finie invariant, on peut se ramener à une représentation géométriquement dense et qui est toujours maximale.

Chapitre 2

Sous-groupes aléatoires invariants

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, on note $\mathcal{S}(G)$ l'espace des sous-groupes fermés de G. Cet espace est naturellement muni d'une topologie qui en fait un espace compact. Pour $K \subseteq G$ compact et $U \subseteq G$ ouvert, on définit les deux ensembles de $\mathcal{S}(G)$

$$O^K = \{H \in \mathcal{S}(G);\ H \cap K \neq \emptyset\} \text{ and } O_U = \{H \in \mathcal{S}(G);\ H \cap U = \emptyset\}.$$

La *topologie de Chabauty* sur $\mathcal{S}(G)$ est alors la topologie la plus grossière telle que tous les O^K et O_U pour K compact et U ouvert soient des ouverts de $\mathcal{S}(G)$. Muni de cette topologie, $\mathcal{S}(G)$ est alors un espace compact métrisable et on peut décrire la convergence des suites de sous-groupes de la manière suivante. Soit (H_n) une suite de sous-groupes fermés et $H \in \mathcal{S}(G)$. La suite converge vers H si et seulement si ces deux propriétés ont lieu.

— Pour tout $h \in H$ et $n \in \mathbf{N}$, il existe $h_n \in H_n$ tel que la suite (h_n) converge vers h dans G.
— Pour toute suite (h_n) de G telle que $h_n \in H_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, la limite éventuelle de toute sous-suite de (h_n) appartient à H.

Par exemple, si on fixe une distance compatible sur le groupe G, une suite (H_n) de sous-groupe converge vers le groupe trivial si pour tout $R > 0$ et n assez grand, l'intersection $H_n \cap B(e, R) = \{e\}$ où e est l'élément neutre de G. D'autre part, si G est un groupe dénombrable discret alors cette topologie correspond à la topologie de la convergence ponctuelle.

Le groupe G agit continûment par homéomorphismes sur $\mathcal{S}(G)$ via la conjugaison. On note $\mathrm{Prob}(\mathcal{S}(G))$, l'espace des mesures de probabilité sur $\mathcal{S}(G)$. Puisque $\mathcal{S}(G)$ est compact métrisable, $\mathrm{Prob}(\mathcal{S}(G))$ est aussi compact et métrisable pour la topologie faible-$*$. L'action de G sur $\mathcal{S}(G)$ induit alors une action sur $\mathrm{Prob}(\mathcal{S}(G))$. Un *sous-groupe aléatoire invariant* est un point fixe pour cette dernière action, c'est-à-dire une mesure de probabilité invariante sous l'action de G par conjugaison sur les sous-groupes fermés.

L'idée derrière ce nom est la vision probabiliste, on ne pense pas à la mesure de probabilité mais à un sous-groupe générique pour cette mesure. En particulier, ce sous-groupe générique n'a aucune raison a priori d'être invariant (c'est-à-dire normal dans ce cas précis).

En conservant ce point de vue, on dira qu'un IRS μ vérifie une propriété de sous-groupe $\mathcal{P}$ si μ-presque sûrement $H \in \mathcal{S}(G)$ satisfait la propriété $\mathcal{P}$.

Dans la suite, on utilisera l'acronyme anglais pour un sous-groupe aléatoire invariant et on parlera d'*IRS* pour invariant random subgroup. On notera $\mathrm{IRS}(G)$ l'ensemble des IRS de G et de nouveau, il s'agit d'un sous-espace compact de $\mathrm{Prob}(\mathcal{S}(G))$.

Exemples 2.1.

1. Si H est un sous-groupe normal de G alors la mesure de Dirac en H, δ_H est un IRS. Ainsi, on voit que $\mathrm{IRS}(G)$ contient toujours l'intervalle $[\delta_{\{1\}}, \delta_G]$ donné par les combinaisons $\lambda\delta_{\{1\}} + (1-\lambda)\delta_G$ avec $\lambda \in [0,1]$.
2. Si H est sous-groupe de covolume fini (i.e. il existe une mesure de probabilité invariante pour l'action $G \curvearrowright G/H$ alors la mesure image par l'application

$$\begin{aligned} G/H &\to \mathcal{S}(G) \\ gH &\mapsto gHg^{-1} \end{aligned}$$

fournit un IRS de G qui ne dépend que de la classe de conjugaison de H. Cela s'applique en particulier pour les réseaux.

Ainsi, on peut penser aux IRS comme des généralisations des sous-groupes normaux et des réseaux. En particulier, on peut s'attendre à ce que des propriétés vraies pour les sous-groupes normaux et les réseaux soient encore vraies pour les IRS.

Dans le cas où G est un groupe de Lie simple connexe non compact, K un sous-groupe compact et Γ un réseau, l'espace $K\backslash G/\Gamma$ est une variété localement symétrique avec un volume riemannien intimement lié à la mesure de probabilité invariante sur G/Γ. Cela permet de compactifier, dans un sens à préciser, l'espace des variétés localement symétriques de volume fini associées à G. Ce point de vue a été utilisé de manière très fructueuse dans [ABB+17]. Pour un survol et un historique, on pourra consulter [Gel18].

Le second exemple ci-dessus se généralise de la manière suivante. Supposons que G agisse sur un espace probabilisé (X, μ) en préservant la mesure μ. Alors pour presque tout x, le fixateur G_x de x est un sous-groupe fermé de G. On peut alors considérer la mesure image de μ par l'application mesurable suivante

$$\begin{aligned} X &\to \mathcal{S}(G) \\ x &\mapsto G_x. \end{aligned}$$

Grâce à l'invariance de μ, la mesure obtenue est aussi invariante et on obtient ainsi un nouvel IRS. En fait, tout IRS peut s'obtenir de cette manière là [ABB+17, Theorem 2.6].

Cette autre manière de penser aux IRS donne un autre point de vue. En théorie ergodique, on considère souvent des actions de groupes sur des espaces probabilisés sous l'hypothèse de liberté, c'est-à-dire que presque sûrement tout point possède un stabilisateur trivial. Quand l'action est libre, c'est la structure des orbites qui est étudiée. Pour les IRS (différents de $\delta_{\{e\}}$), c'est au contraire la structure des stabilisateurs qui est étudiée.

2.1 Densité géométrique pour les IRS agissant sur des espaces CAT(0) [DGLL15]

Le théorème de densité de Borel implique que les réseaux irréductibles des groupes de Lie semi-simples sans facteur compact sont Zariski-denses. En considérant l'action des groupes algébriques sur des corps locaux, sur l'espace symétrique ou l'immeuble euclidien associé, on peut généraliser cet énoncé aux groupes agissant sur des espaces CAT(0). C'est ce qui est fait dans [CM09a].

Soit X un espace CAT(0) et $H \leq \mathrm{Isom}(X)$ un sous-groupe. On dit que H est *géométriquement dense* s'il n'existe pas de point fixe à l'infini ni de sous-espace convexe fermé strict invariant.

Dans le cas où X est l'espace symétrique ou l'immeuble associé à un k-groupe algébrique $\mathbf{G}$ sans facteur anisotrope sur un corps k alors un sous-groupe $H \leq \mathbf{G}(k)$ dont l'action sur X est géométriquement dense est Zariski-dense [CM09a, Proposition 2.8]. La réciproque est vraie pour les corps non archimédiens et les groupes de rang supérieur. En rang 1, il faudrait remplacer sous-espace convexe fermé strict invariant par sous-espace totalement géodésique strict invariant (comme cela a été fait dans le premier chapitre).

Ayant en tête que les IRS généralisent à la fois les sous-groupes normaux et les sous-groupes de covolume fini, on étend les résultats obtenus pour ces deux catégories de sous-groupes [CM09a, Theorem 1.1] et [CM09b, Theorem 1.10] aux cas des IRS. On traite d'abord le cas irréductible puis dans le cas produit (auquel on peut se ramener par une décomposition à la de Rham [CM09b, Theorem 1.9] et [CL10, Proposition 6.1]).

Théorème 2.2. *Soit X un espace* CAT(0) *de dimension télescopique finie ou propre avec un bord de Tits de dimension finie. Supposons de plus que X est irréductible et X n'est pas isométrique à $\mathbf{R}$. Si G agit fidèlement, continûment et géométriquement densément sur X alors tout IRS non trivial de G agit aussi de manière géométriquement dense sur X.*

Par la suite, un énoncé analogue a été donné par Osin dans le cadre des groupes agissant sur un espace métrique (X, d) Gromov-hyperbolique [Osi17].

Théorème 2.3. *Soit $n \geq 2$ et $G_1, \ldots, G_n$ des groupes localement compacts à base dénombrable qui agissent de manière fidèle, continue et géométriquement dense sur un espace* CAT(0) *irréductible ($\neq \mathbf{R}$) de dimension télescopique ou propre avec un bord de Tits de dimension finie. Considérons l'action produit de $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ sur $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Soit $\mu \in \mathrm{IRS}(G)$ et $\mu_i \in \mathrm{IRS}(G_i)$ la projection sur chacun des G_i.*

Si pour chaque i, μ_i est non trivial alors l'IRS μ est aussi géométriquement dense.

Grâce au théorème d'Adams-Ballmann [AB98] et son extension au cas de la dimension télescopique finie par Caprace et Lytchak [CL10], on peut en déduire des informations sur le radical moyennable (plus grand sous-groupe normal moyennable) de G. C'est un cas particulier (celui des groupes agissant sur les espaces CAT(0)) de l'étude des IRS moyennables qui se fera dans la section suivante.

Corollaire 2.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, tout IRS de G avec des projections non triviales a un radical moyennable trivial.*

Appliquons le Théroème 2.2 pour les groupes algébriques semi-simples. Soit k un corps local et $G = \mathbf{G}(k)$ est l'ensemble des k-points d'un groupe algébrique sur k connexe semi-simple $\mathbf{G}$. Alors il existe un groupe adjoint défini sur k, $\overline{\mathbf{G}}$ qui se décompose comme produit $\mathbf{G}_1 \times \cdots \times \mathbf{G}_n$ où chaque $\mathbf{G}_i$ est algébrique sur k et adjoint. De plus, il existe une k-isogénie $\overline{p}\colon \mathbf{G} \to \overline{\mathbf{G}}$. Un sous-groupe H de G est Zariski-dense dès que $\overline{p}(H)$ est Zariski-dense. On note $\pi_i\colon \overline{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}_i$ la projection sur le i-ème facteur.

Définition 2.5. Soit H un sous-groupe de G. On dit que H a des projections non triviales si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la projection $\pi_i(\overline{p}(H))$ n'est pas triviale. Un IRS de G a des projections non triviales si presque sûrement $H \in \mathcal{S}(G)$ a des projections non triviales.

On dit qu'un IRS de G est Zariski-dense si pour presque tout $H \in \mathcal{S}(G)$, H est Zariski-dense.

Théorème 2.6. *Soit k un corps local et G l'ensemble des k-points d'un groupe algébrique semi-simple k-isotrope et défini sur k. Alors tout IRS de G avec des projections non triviales est Zariski-dense.*

2.2 Sous-groupes aléatoires invariants moyennables [BDL16a]

Dans cette partie, on considère des IRS d'un groupe localement compact à base dénombrable G. Dans leur généralisation du théorème de Kesten pour les sous-groupes normaux moyennables vers les IRS, les auteurs de [AGV14] sont amenés à étudier les IRS supportés sur les sous-groupes moyennables. Notons $\mathcal{S}_a(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés moyennables de G. C'est une question ouverte de savoir si $\mathcal{S}_a(G)$ est fermé dans $\mathcal{S}(G)$ [CM14] mais on sait au moins que c'est un sous-ensemble borélien [BDL16a, Appendix A].

Définition 2.7. Un IRS μ est *moyennable* si $\mu(\mathcal{S}_a(G)) = 1$.

Parmi les sous-groupes moyennables normaux, il en existe un unique maximal qui contient tous les autres, c'est le *radical moyennable* de G que l'on notera $\mathrm{R_a}(G)$. Dans [AGV14], les auteurs s'interrogent sur la structure des IRS moyennables et posent la question de savoir si un IRS moyennable peut être supporté en dehors du radical moyennable. Remarquons qu'il existe en général de nombreux sous-groupes moyennables (mais pas normaux) qui ne sont pas inclus dans le radical moyennable. Le théorème suivant affirme que la réponse est négative.

Théorème 2.8. *Tout IRS moyennable de G est supporté sur les sous-groupes inclus dans $\mathrm{R_a}(G)$. En particulier, si $\mathrm{R_a}(G)$ est trivial alors le seul IRS moyennable de G est $\delta_{\{e\}}$.*

Les grandes lignes de la preuve de ce théorème sont les suivantes. On commence par se ramener à un cas minimal, celui où l'IRS est générateur. Ensuite, on utilise la caractérisation suivante de la moyennabilité.

Définition 2.9. Un groupe topologique G est moyennable si toute action continue par transformations affines sur un convexe compact C dans un espace localement convexe possède un point fixe dans C.

L'idée maintenant est de considérer un tel convexe compact C avec une action affine de G. Si μ est un IRS de G, pour presque $H \in \mathcal{S}(G)$, H fixe au moins un point et par un procédé d'intégration, on peut trouver un point fixe pour G. Ce qui montre que G est moyennable.

Une difficulté technique dans cette démarche est le fait que chaque sous-groupe H peut posséder un ensemble de points fixes non réduits à un point et alors le procédé d'intégration n'est pas clair du tout. En passant à un autre convexe compact, on peut se ramener à la situation où chaque H fixe un unique point.

Détaillons un peu les étapes en commençant par l'étape de minimalité.

Lemme 2.10. *Soit $\mu \in$ IRS. Il existe un unique sous-groupe fermé minimal $N \leq G$ tel que $\mu(\mathcal{S}(N)) = 1$. De plus, ce groupe est normal.*

Ce sous-groupe N est appelé la *clôture normale* de μ et lorsque $N = G$, on dit que l'IRS μ est *générateur*. Remarquons qu'un IRS de G est aussi un IRS de sa clôture normale.

Pour un IRS moyennable, si on montre que la clôture normale est moyennable alors le Théorème 2.8 sera acquis. Il suffit de se restreindre au cas générateur et dans ce cas de montrer que G est moyennable.

Dans la Définition 2.9, on peut en fait restreindre la classe des sous-espaces convexes compacts C à considérer. On peut en fait supposer qu'il existe un espace de Banach E séparable sur lequel G agit continûment par isométries et C est un convexe compact G-invariant dans la boule unité E_1^* du dual E^* de E muni de la topologie faible-$*$ (qui sera la seule topologie considérée sur E^*).

Dans la suite, on fixe un tel G-espace convexe compact C et on note $\mathcal{C}(C)$ l'espace des convexes fermés de E^* inclus dans C. On va construire un nouvel espace localement convexe $\mathcal{E}$ avec un action de G et une application de $\mathcal{C}$, l'ensemble de tous les convexes compacts de E^*, vers $\mathcal{E}$. L'idée est donc de transformer les convexes compacts en des points d'un nouvel espace.

L'ensemble $\mathcal{C}$ forme un *cône abstrait* avec l'addition de Minkowski $A+B = \{a+b;\ a \in A,\ b \in B\}$ et la multiplication par un scalaire positif $\lambda \geq 0$, $\lambda A = \{\lambda a,\ a \in A\}$. Ce cône abstrait se réalise comme un véritable cône dans un espace localement convexe. Pour $C \in \mathcal{C}$ et $b \in E_1$ (boule unité de E), on note $b^+(C) = \max(b(C))$ et $b^-(C) = \min(b(C))$.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel produit $\prod_{b\in E_1} \mathbf{R}_b$ muni de la topologie produit τ. C'est un espace localement convexe séparé et par le théorème d'Hahn-Banach, on a une application injective

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathcal{C} & \to & \mathcal{E} \\ & C & \mapsto & (b^+(C))_{b\in E_1}. \end{array}$$

Observons que $b^+(C + C') = b^+(C) + b^+(C')$, $b^+(\lambda C)$=$\lambda b^+(C)$ pour $\lambda \geq 0$ et $b^+(\{-c;\ c \in C)\} = -b^-(C)$. Cela signifie que les opérations définies sur

$\mathcal{C}$ sont les mêmes que dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$: le cône abstrait $\mathcal{C}$ se réalise comme un cône dans $\mathcal{E}$. En particulier, $\mathcal{C}$ est un sous-espace convexe de $\mathcal{E}$.

On munit $\mathcal{C}$ de la topologie induite, qui est exactement la topologie la plus grossière telle que toutes les applications b^+ soient continues. De plus, G agit par homéomorphismes sur $\mathcal{C}$. Plus précisément, pour $g \in G$ et $b \in E_1$, l'application $C \mapsto b^+(gC)$ est $(bg)^+$.

Pour $C \in \mathcal{C}$, on définit $\mathcal{C}(C) = \{C' \in \mathcal{C};\ C' \subseteq C\}$ et $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(E_1^*)$. Le lemme suivant résume les propriétés topologiques des $\mathcal{C}(C)$.

Lemme 2.11. *Si $C' \subseteq C$ alors $\mathcal{C}(C')$ est un convexe fermé de $\mathcal{C}(C)$ et C est un point extrémal de $\mathcal{C}(C)$. De plus, $\mathcal{C}_1$ est un compact métrisable.*

Le lemme suivant est obtenu grâce à la théorie de l'intégration dans les espaces localement convexes.

Lemme 2.12. *Si $C \in \mathcal{C}_1$ est G-invariant et minimal alors la seule mesure de probabilité G-invariante sur $\mathcal{C}(C)$ est δ_C.*

L'idée de ce lemme est assez simple. À une telle mesure de probabilité μ, on peut associer un barycentre $C_0 \in \mathcal{E}$ qui est automatiquement G-invariant. Par convexité, ce barycentre appartient à $\mathcal{C}(C)$. Par minimalité de C, $C_0 = C$. Comme C est un point extrémal de $\mathcal{C}(C)$, nécessairement $\mu = \delta_C$.

Tous les ingrédients sont alors en place pour démontrer le Théorème 2.8. On se place dans le cas où l'IRS μ est générateur. On se donne un convexe compact C G-invariant dans la boule unité du dual d'un G-espace de Banach séparable. Par le lemme de Zorn, on peut supposer C minimal. Pour presque tout $H \in \mathcal{S}(G)$, H est moyennable et possède donc un ensemble de points fixes $C_H \subset$ convexe et compact. On peut alors pousser la mesure μ via l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(G) &\to \mathcal{C}(C) \\ H &\mapsto C_H \end{aligned}$$

et on obtient une mesure invariante sur $\mathcal{C}(C)$. Par le Lemme 2.12, cette mesure image est δ_C. Ce qui signifie que presque sûrement $C_H = C$. Autrement dit, presque tout $H \in \mathcal{S}(G)$ est dans le noyau de l'action $G \curvearrowright C$. Comme on a supposé que l'IRS est générateur, ce noyau coïncide avec G et donc l'action est triviale. Ainsi G a un point fixe. Ce qui montre que G est moyennable comme on voulait le montrer.

Énonçons deux conséquences du Théorème 2.8. La première permet de répondre aux questions 7.2, 7.4 & 7.5 de [TD12] et grâce au Théorème 1.5 de [TD12], on peut conclure l'énoncé suivant.

Théorème 2.13. *Soit Γ un groupe dénombrable avec un radical moyennable trivial. Toute action (non triviale) préservant une mesure de probabilité de Γ qui est faiblement contenue dans le décalage de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright [0,1]^\Gamma$, est libre.*

On pourra se reporter à la Figure 1 de [TD12] pour des détails.

Une autre propriété qui est opposée à la moyennabilité mais qui peut aussi se formuler en termes de points fixes est la propriété (T) de Kazhdan [BdlHV08]. Pour les groupes dénombrables discrets, la propriété (T) est équivalente à la propriété (FH) qui est la propriété d'avoir des points fixes pour toute action par isométries sur un espace de Hilbert.

Pour un sous-groupe $H \in \mathcal{S}(G)$, il existe une notion *relative* de propriété (T). Donnons une caractérisation pour les groupes localement compacts à base dénombrable [Jol05]. Une paire (G, H) avec $H \in \mathcal{S}(G)$ a la *propriété (T) relative* si pour toute action continue de G par isométries sur un espace de Hilbert, H possède un point fixe. Avec cette caractérisation, on obtient alors le théorème suivant.

Théorème 2.14. *Supposons que G est de type fini. Si G possède un IRS générateur avec la propriété (T) relative alors G a la propriété (T).*

Si on retire l'hypothèse d'engendrement fini, alors le résultat ne tient plus [BDL16a, Remarks 1.12].

Chapitre 3

Groupes d'homéomorphismes de dendrites

Les dendrites sont des objets topologiques relativement simples et connus depuis le début du vingtième siècle. Les groupes agissant par homéomorphismes sur des dendrites ou plus généralement leurs groupes d'homéomorphismes n'ont été que peu étudiés. Le but de ce chapitre est de présenter quelques résultats dans ce domaine issus de [DM18, DM19, DMW18, Duc19].

On appelle *arc* une image de l'intervalle $[0,1]$ par une application continue injective.

Définition 3.1. Une *dendrite* est un espace compact métrisable connexe, localement connexe tel que deux points sont joints par un unique arc.

Donnons quelques exemples de dendrites.

Exemples 3.2.
- les arbres finis,
- la compactification par les bouts des arbres de valence dénombrable,
- certains ensembles de Julia comme pour le polynôme $z \mapsto z^2 + i$ (c'est l'image en couverture),
- la droite projective de Berkovich sur $\mathbf{C}_p$, le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ pour un nombre premier p (Figure 3).

Nous verrons aussi que ce dernier exemple est homéomorphe à la dendrite universelle de Ważewski que nous introduirons plus tard.

Il est naturel de se demander à quel point les dendrites sont proches de compactifications d'arbre. Rappelons qu'un *arbre réel* est un espace métrique géodésique et 0-hyperbolique. Cette dernière condition signifie que tout triangle géodésique est isométrique à un tripode. Un arbre réel possède une topologie qui provient de la distance mais aussi une topologie plus faible, appelée *topologie de l'observateur* dans [CHL07] ou *topologie convexe* dans [Mon06]. Cette topologie peut se définir de la manière suivante, c'est la plus petite topologie telle que les composantes connexes des complémentaires de points soient ouvertes. Si X est un arbre réel et ∂X est son bord de Gromov alors cette topologie s'étend à $X \cup \partial X$ pour en faire un espace compact.

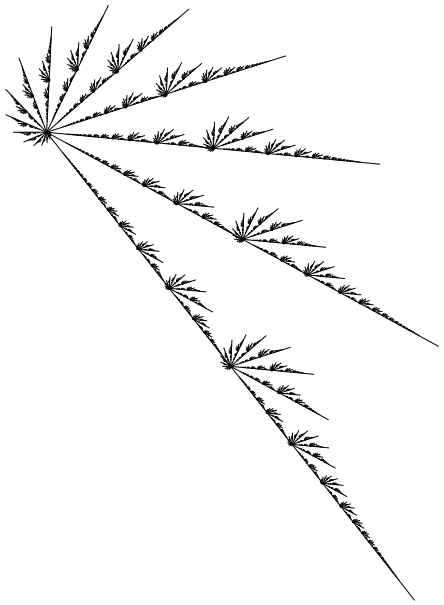


FIGURE 3.1 – La droite projective de Berkovich sur $\mathbf{C}_p$. Image extraite de [HLP14].

Proposition 3.3 ([CHL07]). *Soit (X, d) un arbre réel séparable alors $X \cup \partial X$ muni de la topologie de l'observateur est une dendrite.*

Réciproquement, si X est une dendrite alors il existe une distance d compatible avec la topologie telle que (X, d) est un arbre réel.

Cette proposition a l'avantage pour les géomètres de retrouver les objets connus que sont les arbres réels avec leur bord de Gromov mais dans la suite, nous considérons essentiellement des actions pour lesquelles il n'y a pas de distance invariante.

Tout continuum, c'est-à-dire tout espace compact connexe métrisable, possède un quotient qui est une dendrite et qui reflète la structure de ses points de branchement. Bowditch a fait un usage remarquable de ce quotient dendritique qui lui a permis de démontrer la conjecture des points de coupure pour les bords des groupes hyperboliques. Les dendrites qui apparaissent dans cette preuve se souviennent de la la géométrie du groupe et cela permet à Bowditch de retrouver en fait une action par isométries sur un arbre.

Soit X une dendrite, on appelle *ordre* d'un point $x \in X$, le nombre de composantes connexes de $X \setminus \{x\}$. On appellera *branche* autour de x, une telle composante connexe. Dans la suite, on ne considère que des dendrites non réduites à un point. Ce qui fait que cet ordre est au moins 1.

Définition 3.4. Soit x un point d'une dendrite X.
— Si l'ordre de x est 1, on dit que x est un *bout* de X,
— si l'ordre de x est 2, on dit que x est un *point régulier* de X,

— si l'ordre de x est au moins 3, on dit que x est un *point de branchement* de X.

On démontre facilement grâce à la compacité et à la métrisabilité que l'ordre d'un point de branchement est au plus dénombrable et que les points de branchement sont eux aussi en quantité dénombrable.

Pour une dendrite X et deux points $x, y \in X$, on note $[x, y]$ l'unique arc entre x et y. Une partie $Y \subset X$ est *convexe* si pour tous $x, y \in Y$, $[x, y] \subset Y$. Pour trois points x, y, z, l'intersection $[x, y] \cap [y, z] \cap [z, x]$ est toujours réduite à un unique point, appelé *centre* de x, y et z. On note ce centre $\kappa(x, y, z)$ qui est symétrique en x, y, z.

Dans la suite, on dira simplement qu'un groupe agit sur une dendrite pour parler d'une action par homéomorphismes sur une dendrite.

3.1 Actions de groupes sur des dendrites [DM18]

Le but de cette partie est de montrer que les actions par homéomorphismes sur des dendrites sont à la fois proches des actions par isométries sur des arbres et peuvent aussi s'en éloigner.

Définition 3.5. Une action d'un groupe sur une dendrite est *élémentaire* s'il existe un sous-ensemble invariant avec un ou deux éléments.

Dans le cas d'une action élémentaire, il y a donc un point fixe ou un arc invariant (l'unique arc reliant la paire de points invariante). Dans le premier cas, on ne peut tirer véritablement d'enseignement de la présence d'un point fixe (tout groupe dénombrable possède une action sur une dendrite avec un unique point fixe). Dans le second cas, les actions par homéomorphismes sur $[0, 1]$ sont bien entendu intéressantes mais pas du point de vue dendritique puisqu'il n'y pas de point de branchement.

La première remarque à faire est sûrement le fait que tout homéomorphisme d'une dendrite possède un point fixe. Cela suit de la propriété de Helly pour pour les dendrites : toute intersection de convexes fermés dont les intersections deux-à-deux sont non vides est non vide.

Commençons par détailler un peu la dichotomie entre élémentarité et non-élémentarité. Les deux premiers résultats sont similaires aux actions par isométries sur des arbres.

Proposition 3.6 ([SY16])**.** *Soit G un groupe moyennable. Tout action continue de G par homéomorphismes est élémentaire.*

Comme pour les groupes agissant sur les arbres, on obtient une alternative similaire à celle de Tits, entre élémentarité et existence d'un sous-groupe libre.

Théorème 3.7. *Soit G un groupe agissant sur une dendrite. Alors G contient un sous-groupe libre à deux générateurs ou l'action est élémentaire.*

Pour les deux résultats précédents, les preuves sont des adaptations des preuves classiques. Voyons maintenant un énoncé qui semble être une géné-

ralisation du cas des actions par isométries sur les arbres mais dont la preuve est différente. L'absence de distance invariante étant un point crucial ici.

Théorème 3.8. *Soit Γ un réseau dans un groupe algébrique simple sur un corps local de rang au moins 2 alors toute action de G sur une dendrite est élémentaire.*

Ce théorème est en fait un corollaire d'un énoncé plus général concernant l'existence d'un groupe de cohomologie borné non trivial.

Théorème 3.9. *Soit G un groupe agissant non élémentairement sur une dendrite X. Alors il existe une représentation unitaire canonique V de G sans vecteur unitaire invariant et un élément canonique non nul dans $H_b^2(G, V)$.*

Nous ne rentrerons pas dans la preuve du théorème mais expliquons comment cette représentation et cette classe de cohomologie sont construites. Soit X une dendrite non réduite à un point et $x \in X$. On note $\mathcal{C}_x$ l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus \{x\}$, l'espace des branches autour de x. Le *fibré fondamental* est alors $\mathrm{Bund}(X) = \{(x, c),\ x \in X,\ c \in \mathcal{C}_x\}$. D'un point de vue imagé, ce fibré est l'espace des directions auquel on peut penser comme fibré unitaire tangent du géomètre différentiel. Le *fibré fondamental double* $\mathrm{Bund}^2(X)$ est alors le produit fibré de deux copies de $\mathrm{Bund}(X)$ au-dessus de X (via la projection selon la première coordonnée). On peut penser $\mathrm{Bund}^2(X)$ comme les paires de branches autour d'un même point.

Pour deux points $p, q \in X$, on définit la fonction $\alpha(p, q)\colon \mathrm{Bund}^2(X) \to \mathbf{Z}$ par

$$\alpha(p,q)(x,c,c') = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in c, q \in c' \text{ et } c \neq c', \\ -1 & \text{si } p \in c', q \in c \text{ et } c \neq c', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, si $\alpha(p, q)(x, c, c') \neq 0$ alors $x \in]p, q[$. Remarquons que α est antisymétrique en (p, q) et (c, c'). De plus α est invariante sous l'action du groupe des homéomorphismes. À α, on associe le cocycle

$$\omega(p, q, r) = \alpha(p, q) + \alpha(q, r) + \alpha(r, p).$$

Cette fonction détecte le fait que les points p, q, r sont alignés ou pas. En effet, $\omega(p, q, r)(x, c, c') \neq 0$ si et seulement p, q, r ne sont pas inclus dans un arc commun, $x = \kappa(p, q, r)$ et c, c' sont des branches distinctes qui contiennent un des points p, q, r.

Si on restreint le fibré fondamental double à l'ensemble des points de branchement, on obtient un nouveau fibré $\Lambda(X)$ qui est un ensemble dénombrable puisque les points de branchement sont en quantité dénombrable et l'ordre d'un point aussi. Ce fibré est naturellement muni d'une action de $\mathrm{Homeo}(X)$ donnée par

$$g(x, c, c') = (gx, gc, gc').$$

On peut alors considérer l'espace de Hilbert $V = \ell^2(\Lambda(X))$ avec la représentation isométrique induite par l'action de $\mathrm{Homeo}(X)$ sur $\Lambda(X)$.

En restreignant $\omega(p,q,r)$ à $\Lambda(X)$, on obtient alors

$$\omega\colon X^3 \to \ell^2(\Lambda(X))$$

qui est un cocycle alterné borné. Soit G agissant sur X.

Pour en déduire un élément de $H_b^2(G,V)$, on utilise l'existence d'une application mesurable G-équivariante $\varphi\colon B \to X$, un équivalent des *applications de bords* du premier chapitre.

À partir de ce point, on utilise la machinerie de cohomologie bornée mise en place par Burger et Monod. À partir du cocycle $\varphi_*\omega\colon B^3 \to \ell^2(\Lambda(X))$ et de sa classe de cohomologie $[\varphi_*\omega]$, on en déduit un élément du second groupe de cohomologie borné $H_b^2(G,V)$ qui est non nul si et seulement l'action n'est pas élémentaire. Pour les groupes dénombrables dont on connaît suffisamment bien la cohomologie bornée en degré 2, on peut en déduire des résultats d'élémentarité pour les actions sur des dendrites. En voici un exemple pour les réseaux irréductibles dans des produits.

Soit Γ un réseau d'un produit $G_1 \times \cdots \times G_n$ de groupes localement compacts. Le réseau Γ est dit *irréductible* si la projection sur chacun des facteurs est dense.

Théorème 3.10. *Soit Γ un réseau irréductible d'un produit d'au moins deux groupes localement compacts connexes. Alors toute action de Γ sur une dendrite est élémentaire.*

Dans le cas des actions sur les arbres, le Théorème 3.8 est une conséquence de la propriété (T) de Kazhdan et la question des actions de groupes avec la propriété (T) reste ouverte et intrigante.

Question 3.11. Existe-t-il un groupe dénombrable avec la propriété (T) de Kazhdan qui agisse non élémentairement sur une dendrite ?

Nous verrons un peu plus loin une réponse positive à cette question pour des groupes topologiques non discrets.

Théorème 3.12. *Toute action sur une dendrite du groupe de Thompson F est élémentaire.*

C'est un problème ouvert célèbre de déterminer si le groupe de Thompson F est moyennable ou non. Ce théorème ne découle donc pas de la Proposition 3.6 mais de l'existence de deux sous-groupes co-moyennables et commutants l'un avec l'autre. Cela répond au Problème 6 de [SY16].

Rappelons que si G est un groupe topologique et X un espace compact muni d'une G-action continue alors X est appelé un *G-flot*. C'est un objet très classique en dynamique topologique et l'étude des G-flots est reliée aux propriétés de moyennabilité de G. Un G-flot est *minimal* si toute orbite est dense, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de fermé invariant non vide autre que X lui-même. Une action continue sur une dendrite donne donc un G-flot et on peut distinguer deux notions de minimalité, la première au sens des flots qui est celle ci-dessus et la seconde au sens des dendrites. On dit que l'action de G sur une dendrite est *dendro-minimale* si toute sous-dendrite, i.e fermé convexe

non vide, invariante est X elle-même. Il est clair que la dendro-minimalité est une conséquence de la minimalité mais la réciproque est fausse. L'action du groupe $\mathrm{Homeo}([0,1])$ sur $[0,1]$ est dendro-minimale mais pas minimale. Par le lemme de Zorn, on a toujours l'existence d'un fermé invariant minimal et aussi d'une sous-dendrite invariante minimale.

Remarquons que lorsque l'action est non élémentaire, ces deux ensembles minimaux sont uniques et la seconde est l'enveloppe convexe du premier [DM18, Lemma 4.1].

Voyons maintenant, une propriété dynamique forte des actions de groupes sur des dendrites. Si X est un G-flot, on dit que l'action est *fortement proximale* si toute mesure de probabilité sur X contient une mesure de Dirac dans l'adhérence de sa G-orbite dans $\mathrm{Prob}(X)$. Dans ce cas, on dit parfois que X est un *bord de Furstenberg* pour G (à ne confondre avec un bord de Poisson-Furstenberg).

Théorème 3.13. *Soit G un groupe agissant sur une dendrite X. Si l'action est non élémentaire et dendro-minimale alors l'action de G sur X est fortement proximale.*

3.2 Dévissage de groupes de dendrites [DM19]

La partie précédente était destinée aux groupes agissant sur une dendrite. Le groupe de tous les homéomorphismes en est un particulier. Nous allons nous attacher à comprendre leur structure algébrique et nous verrons qu'une structure de produit en couronne apparaît naturellement.

On comprend mieux cette structure de produit en couronne en voyant $\mathrm{Homeo}(X)$ comme un *groupe de permutations*, c'est-à-dire agissant sur un ensemble dénombrable. La trichotomie point terminal/ point régulier/ point de branchement est invariante sous l'action de $\mathrm{Homeo}(X)$ et donc en on déduit une première action sur $\mathrm{Br}(X)$, l'ensemble des points de branchement de X qui est dénombrable. Ce qui donne une première représentation :

$$\mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Sym}(\mathrm{Br}(X)).$$

Dès lors que les points de branchement sont denses, cette représentation est fidèle. Faisons une remarque sur cette densité des points de branchement. On dit qu'une partie Y d'une dendrite est *dense par arcs* si elle rencontre l'intérieur relatif de tout arc non trivial.

Lemme 3.14. *Soit X une dendrite telle que $\mathrm{Br}(X)$ est dense alors $\mathrm{Br}(X)$ est dense par arcs.*

Si les points de branchement ne forment pas une partie dense, il y a donc des *arcs libres*, c'est-à-dire des arcs dont l'intérieur relatif ne contient pas de point de branchement. On a donc équivalence entre $\mathrm{Br}(X)$ est dense et X n'a pas d'arc libre.

Le groupe $\mathrm{Homeo}(X)$ est naturellement muni d'une topologie qui en fait un groupe polonais, c'est-à-dire muni d'une topologie de groupe complètement métrisable et séparable. Cette topologie est la topologie de la convergence uniforme sur X. Le caractère polonais de cette topologie provient du

fait que X est compact métrisable. S'il n'y a pas d'arc libre alors l'énoncé suivant montre que le groupe topologique $\mathrm{Homeo}(X)$ se réalise comme groupe *non archimédien*, c'est-à-dire un sous groupe fermé de $\mathcal{S}_\infty$, le groupe de toutes les permutations de $\mathbf{N}$ muni de la convergence ponctuelle. C'est un groupe polonais dont une base de voisinages symétriques de l'identité est donnée par les fixateurs de partie finie.

Proposition 3.15. *Si X est une dendrite sans arc libre alors le morphisme*

$$\mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Sym}(\mathrm{Br}(X))$$

est un homéomorphisme sur son image.

En particulier, $\mathrm{Homeo}(X)$ *se plonge comme sous-groupe fermé de* $\mathcal{S}_\infty$.

Cette proposition marque tout de suite une différence entre les groupes d'homéomorphismes de dendrites et un autre groupe d'homéomorphismes d'une courbe, i.e. un continuum de dimension un, qui est le cercle $\mathbf{S}^1$. En effet, $\mathrm{Homeo}(\mathbf{S}^1)$ muni de la topologie de convergence uniforme est connexe par arcs alors que $\mathrm{Homeo}(X)$ est totalement discontinu si les points de branchement sont denses.

S'il y a des arcs libres, on peut considérer les arcs libres maximaux pour l'inclusion. On note $\mathrm{Lib}(X)$ l'ensemble des arcs libres maximaux. Chacun de ces arcs libres est homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$ et ainsi on obtient un plongement de $\mathrm{Homeo}_+([0,1])$ pour chacun de ces arcs libres. Le groupe correspondant agissant trivialement sur le complémentaire de l'arc.

Il n'est pas très difficile de voir que les arcs libres maximaux sont en quantité dénombrable car au moins une de leurs extrémités est un point de branchement (sauf si $X \simeq [0,1]$) et $\mathrm{Homeo}(X)$ permute ces arcs libres maximaux. Ceci donne une seconde représentation

$$\mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Sym}(\mathrm{Lib}(X))$$

et on note $\mathrm{Aut}(\mathrm{Lib}(X))$ l'image de cette représentation.

Proposition 3.16. *Soit X une dendrite telle que* $\mathrm{Homeo}(X)$ *agisse dendro-minimalement. Supposons que X possède un arc libre mais ne soit pas réduite à un arc libre alors*

$$\mathrm{Homeo}(X) \simeq \prod_{I \in \mathrm{Lib}(X)} \mathrm{Homeo}_+(I) \rtimes \mathrm{Aut}(\mathrm{Lib}(X)).$$

Comme chaque arc libre est homéomorphe à $[0,1]$, on obtient une identification (non canonique) de $\mathrm{Homeo}_+(I)$ avec $\mathrm{Homeo}_+([0,1])$ et ainsi la décomposition en produit en couronne permutationnel

$$\mathrm{Homeo}(X) \simeq \mathrm{Homeo}_+([0,1]) \wr_{\mathrm{Lib}(X)} \mathrm{Aut}(\mathrm{Lib}(X)).$$

Fixons une dendrite X et notons pour simplifier G son groupe d'homéomorphismes. On note respectivement G_{Ter} et G_{Br} les sous-groupes engendrés par les fixateurs de points terminaux et les fixateurs de points de branchement. Par construction, ce sont des sous-groupes normaux.

Théorème 3.17. *Supposons que G agisse dendro-minimalement et X possède au moins un point de branchement. Alors $G = G_{\mathrm{Ter}}$.*

De plus, tout sous-groupe de G normalisé par G_{Br} contient G_{Br} ou fixe tous les points terminaux.

On déduit de ce théorème un résultat de simplicité pour G_{Br} et dans le cas où il y a des arcs libres, on obtient un résultat de simplicité un peu plus faible : un certain quotient est simple.

Corollaire 3.18. *Supposons que G agisse dendro-minimalement et X possède au moins un point de branchement.*

Si X est sans arc libre alors G_{Br} est simple. Sinon, l'image du groupe G_{Br} dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{Lib}(X))$ est un groupe simple.

Dans la suite, nous allons appliquer ces résultats de simplicité à une famille de dendrites particulières. En 1923, dans sa thèse [Waż23a, Waż23b], Ważewski introduit une dendrite universelle dans le sens où toute dendrite se plonge continûment dans la dendrite de Ważewski. Cette dendrite se réalise comme ensemble compact du plan et donc on obtient que toute dendrite est planaire, c'est-à-dire homéomorphe à une partie du plan. On peut penser à cette dendrite comme la dendrite où les points de branchement sont denses et tous d'ordre infini. On note $\overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$ l'ensemble $\{3, 4, 5, \ldots, \infty\}$. Pour définir les dendrites (généralisées) de Ważewski, on va donner une caractérisation à homéomorphisme près. Il faut montrer que de telles dendrites existent et on renvoie à [Nad92, 10.37] pour un processus de construction et [CD94, Theorem 6.2] pour l'unicité à homéomorphisme près.

Définition 3.19. Soit S une partie non vide de $\overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$, la dendrite de Ważewski D_S est la dendrite telle que

- tout point de branchement de D_S possède un ordre dans S,
- pour tout $n \in S$, les points de branchement d'ordre n forment une partie dense par arcs.

Avec cette définition, on peut penser que ces dendrites ressemblent à des fractales comme la dendrite en couverture de ce mémoire. Plus précisément, il découle de la caractérisation de la dendrite D_S que l'adhérence de toute partie connexe ouverte de D_S est homéomorphe à D_S elle-même. Si S est réduite au singleton $\{n\}$, on notera simplement D_n la dendrite associée. En particulier, la dendrite universelle introduite par Ważewski est D_∞.

Remarque 3.20. On peut déduire de [Smi13, §2.2] que l'ensemble de Julia du polynôme $z^2 + i$ (la dendrite en couverture de ce mémoire) ne possède que des points de branchement d'ordre 3 et que ces points de branchement sont denses. Ce qui dans ce cas, implique qu'ils sont de plus denses par arcs. Ainsi, cette dendrite est exactement D_3.

Le lemme suivant sera un outil clé pour construire des homéomorphismes de dendrites à partir d'homéomorphismes partiels.

Lemme 3.21 (Lemme du patchwork)**.** *On considère $\mathcal{U}$ famille disjointe d'ouverts connexes d'une dendrite X et soit $(f_U)_{U\in\mathcal{U}}$ une famille d'homéomorphismes avec*

$f_U \in \mathrm{Homeo}(U)$. Supposons que chaque f_U s'étende continûment à $\overline{U}$ en étant l'identité sur $\overline{U} \setminus U$.

Alors il existe $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ dont la restriction à chaque U est f_U.

Pour les dendrites de Wazèwski, on en déduit la proposition suivante qui montre à quel point ces dendrites sont homogènes.

À un ensemble fini F d'une dendrite X, on peut associer un graphe étiqueté de la manière suivante. L'enveloppe convexe de $[F]$ (ou sous-dendrite engendrée par F), est topologiquement un graphe dont les feuilles appartiennent à F. On ajoute aux sommets de ce graphe les éléments de F et on étiquette ces sommets par leur ordre dans X. On obtient alors un graphe étiqueté $\langle F \rangle$.

Proposition 3.22. *Soit $S \subset \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$ non vide, F, F' deux parties finies de D_S. Tout isomorphisme de graphes étiquetés $\langle F \rangle \to \langle F' \rangle$ s'étend en un homéomorphisme de D_S.*

De cette proposition, on en déduit tout de suite des propriétés de transitivité.

Corollaire 3.23. *L'action de G_S sur $\mathrm{Ter}(D_S)$, $\mathrm{Reg}(D_S)$ et les points de branchement d'ordre fixé est doublement transitive.*

Rappelons qu'une action d'une group $G \curvearrowright X$ est *oligomorphe* si pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'action diagonale $G \curvearrowright X^n$ possède un nombre fini d'orbites. Par exemple, l'action de $\mathcal{S}_\infty$ sur $\mathbf{N}$ est oligomorphe.

Corollaire 3.24. *L'action $G_S \curvearrowright \mathrm{Br}(D_S)$ est oligomorphe si et seulement si S est fini.*

Voyons maintenant comment ces groupes répondent à la question 3.11. Un groupe G à la *propriété de Bergman* [1] si toute action sur un espace métrique par isométries possède des orbites bornées. Remarquons que cette propriété s'oppose à la compacité locale (sauf pour les groupes compacts) puisque tout groupe localement compact possède une action propre sur un espace métrique par isométries.

Cette propriété de Bergman implique l'existence de point fixe pour les actions sur les espaces où l'on peut associer canoniquement un centre aux orbites bornées. Par exemple, elle implique la propriété (FA) de Serre qui donne l'existence de point fixe pour tout action sur un arbre. Elle implique aussi la propriété (FH) de point fixe pour les actions par isométries sur les espaces de Hilbert.

Un groupe topologique possède la propriété (T) forte s'il possède un ensemble de Kazhdan fini.

1. Un groupe topologique dont toute continue action sur un espace métrique par isométries possède des orbites bornées a la *propriété (OB)*. Ainsi, un groupe qui a la propriété de Bergman a la propriété (OB) pour la topologie discrète. Dans [Ros17], Rosendal parle de groupes *grossièrement bornés* pour les groupes topologiques qui ont la propriété (OB) et justifie ce choix dans l'introduction.

Théorème 3.25. *Soit $S \subset \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$ non vide.*

Si S est fini alors le groupe topologique G_S a la propriété (T) forte de Kazhdan.

Dans tous les cas, le groupe G_S a la propriété de Bergman.

On peut appliquer les résultats de structure généraux à ces groupes G_S et on obtient alors.

Théorème 3.26. *Soit $S \subset \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$ non vide. Le groupe G_S est simple.*

En utilisant la structure de produit en couronne du stabilisateur d'un point de branchement, on peut retrouver S à partir des stabilisateurs de point de G_S qui sont toujours des sous-groupes propres maximaux. Cela permet de distinguer les groupes de dendrites de Wazewski distinctes.

Théorème 3.27. *Soit $S, S' \subset \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$ non vide.*

Pour tout isomorphisme $\Phi \colon G_S \to G_{S'}$, il existe un homéomorphisme $\varphi \colon D_S \to D_{S'}$ Φ-équivariant.

On obtient alors les deux corollaires suivants.

Corollaire 3.28. *La famille (G_S) est une famille non dénombrable de groupes simples deux-à-deux non isomorphes.*

Rapellons qu'un autormorphisme d'un groupe G est *intérieur* s'il est réalisé par la conjugaison par un certain élément $g \in G$.

Corollaire 3.29. *Tout automorphisme du groupe G_S est intérieur.*

3.3 Groupes kaléidoscopiques [DMW18]

Dans un article célèbre Burger et Mozes introduisent des groupes « universels » agissant sur un arbre régulier de valence $n \in \mathbf{N}_{\geq 3}$ avec action locale prescrite [BM00]. Rappelons la construction de ces groupes universels. Soit $n \geq 3$ et notons A_n l'arbre régulier de valence n. On note aussi $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Un *coloriage* de A_n est une application $c : V(A_n) \to [n]$, où $V(A_n)$ est l'ensemble des sommets de A_n, telle que pour tout sommet x, c restreint à l'ensemble $V(x)$ des voisins de x est une bijection. Il est facile de voir qu'il n'y a essentiellement qu'un seul coloriage : Pour toute paire de coloriages (c, d), il existe $g \in \mathrm{Aut}(A_n)$ tel que $d = c \circ g$. Il suffit pour cela de trouver des sommets x, y tels que $c(y) = d(x)$ puis de définir $g(x) = y$. Ensuite, en s'intéressant aux sphères autour de x, on voit que g est déterminé de manière unique par la condition $d = c \circ g$.

Si $g \in \mathrm{Aut}(A_n)$, on définit l'action locale $\sigma_c(g, x) \in \mathrm{Sym}([n])$ de g au sommet x par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{\sigma_c(g,x)} & [n] \\ {\scriptstyle c}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle c} \\ V(x) & \xrightarrow{g} & V(gx) \end{array}$$

Maintenant, si $\Gamma \curvearrowright [n]$ est un groupe de permutations, on définit le *groupe universel* de Burger-Mozes avec action locale $\Gamma \leq \mathrm{Sym}([n])$, le groupe

$$\mathcal{U}_c(\Gamma) = \{g \in \mathrm{Aut}(A_n),\ \sigma_c(g,x) \in \Gamma,\ \forall x \in V(A_n)\}.$$

Si n est fini, ces groupes sont naturellement des groupes localement compacts et le but de l'introduction de ces groupes était de construire des réseaux simples, sans torsion et de présentation finie dans $\mathrm{Aut}(A_n) \times \mathrm{Aut}(A_n)$ avec donc une action sur un produit d'arbres.

Voyant les dendrites de Ważewski D_n comme des analogues indiscrets des arbres, il devient intriguant de savoir si on peut transcrire le foncteur

$$\Gamma \to \mathcal{U}_c(\Gamma)$$

des groupes de permutations vers les groupes agissant sur des arbres, dans le cadre des dendrites et ainsi obtenir de nouveaux groupes intéressants. La première idée est que pour comprendre l'action locale du stabilisateur d'un point de branchement x dans la dendrite D_n, ce n'est pas les points de branchement qu'il faut colorier car la notion de voisin n'a plus de sens. Ce qu'il est naturel de colorier, ce sont les branches autour de x. La notion de coloriage et de groupe universel, se généralise alors naturellement mais le processus qui consiste à construire un automorphisme d'arbres de proche en proche à partir d'un sommet ne fonctionne plus du tout pour les dendrites. Et s'il est clair que l'on peut définir un groupe universel pour les dendrites, il n'est pas clair du tout que ce groupe n'est pas trivial !

Nous verrons qu'en mélangeant suffisamment les couleurs, on arrive à dépasser cette difficulté. Soit $n \in \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$ (possiblement infini) et $\Gamma \leq \mathrm{Sym}(n)$ un groupe de permutations. À partir de cette donnée, nous construisons un groupe de permutations $\mathcal{K}(\Gamma)$ sur un ensemble dénombrable infini. Cet ensemble sera donné par l'ensemble des points de branchement d'une dendrite que nous expliciterons plus tard. Attachons-nous pour l'instant au foncteur $\Gamma \mapsto \mathcal{K}(\Gamma)$ qui vérifie les propriétés suivantes.

Théorème 3.30. *1. Le groupe (abstrait) $\mathcal{K}(\Gamma)$ est simple et uniformément parfait.*

2. Le groupe de permutations $\mathcal{K}(\Gamma)$ est toujours primitif. Il est doublement transitif si et seulement si Γ est transitif.

3. Le groupe de permutations $\mathcal{K}(\Gamma)$ n'est jamais doublement primitif : les stabilisateurs de points admettent un système d'imprimitivité isomorphe à Γ et se décompose en produit en couronne au-dessus de Γ.

Rappelons le vocabulaire utilisé dans ce théorème. Un groupe est *simple* s'il ne possède pas de sous-groupe distingué propre non trivial et il est *parfait* s'il coïncide avec son groupe dérivé, c'est-à-dire le groupe engendré par les commutateurs. Il est *uniformément parfait*, s'il existe une constante $k \in \mathbf{N}$ tel que tout élément s'écrive comme produit d'au plus k commutateurs.

On distingue le *groupe abstrait* $\mathcal{K}(\Gamma)$ du *groupe de permutations* $\mathcal{K}(\Gamma) \leq \mathcal{S}_\infty$ de la manière suivante. Dans le premier cas, seule la structure algébrique est retenue (on considère donc la classe de groupes à isomorphismes de groupes près) et dans le second, on retient la donnée du groupe et de son action sur

l'ensemble dénombrable infini (on considère donc la classe de conjugaison de $\mathcal{K}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}_\infty$). Une action $G \curvearrowright X$ sur un ensemble à au moins 2 éléments est *primitive* si les seules relations d'équivalences stables (i.e. $x \sim y \implies gx \sim gy$) par G sont la relation triviale avec une unique classe d'équivalence et la relation d'égalité. Comme la relation d'équivalence « être dans la même orbite » est toujours invariante, la primitivité implique la transitivité. On peut reformuler la primitivité de la manière suivante : une action est primitive si et seulement si elle est transitive et les stabilisateurs de point sont des sous-groupes propres maximaux.

Une action $G \curvearrowright X$ est imprimitive (ou non primitive) s'il existe une partition non triviale $X = \sqcup X_i$ *invariante* dans le sens où la relation d'équivalence $x \sim y \iff \exists i,\ x, y \in X_i$, est stable par G. Une telle collection est appelée *système d'imprimitivité* et dans ce cas, le groupe G agit en permutant les éléments de cette partition. On dit que le système d'imprimitivé est isomorphe à une action $G \curvearrowright Y$ si l'action sur la partition est isomorphe à cette action $G \curvearrowright Y$.

Une action $G \curvearrowright X$ est *doublement transitive* si l'action diagonale sur les paires de points distincts $G \curvearrowright X^{(2)}$ est transitive et elle est *doublement primitive* si l'action $G \curvearrowright X^{(2)}$ est primitive.

Une question naturelle est de se demander comment $\mathcal{K}(\Gamma)$ dépend de Γ. Cette question peut-être posée à plusieurs niveaux : au niveau des groupes abstraits ou au niveau des groupes de permutations. Un niveau intermédiaire est de se poser la question au niveau des groupes polonais (pour la topologie de la convergence ponctuelle). Nous obtenons la réponse la plus forte possible sous une hypothèse de discrétude (qui est automatique si n et n' sont finis).

Théorème 3.31. *Soit $n, n' \in \overline{N}_{\geq 3}$. Supposons que les groupes $\Gamma \leq \mathrm{Sym}(n)$ et $\Gamma' \leq \mathrm{Sym}(n')$ soient discrets alors les groupes $\mathcal{K}(\Gamma)$ et $\mathcal{K}(\Gamma')$ sont abstraitement isomorphes si et seulement si $n = n'$ et Γ et Γ' sont isomorphes en tant que groupes de permutations.*

Comme nous allons le voir, ces groupes de permutations $\mathcal{K}(\Gamma)$ sont obtenus comme groupes d'homéomorphismes de la dendrite D_n et on les voit comme groupes de permutations de l'ensemble des points de branchement, qui rappelons-le, est dénombrable.

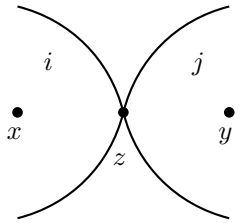
Dans la suite, il sera utile de noter $\mathcal{C}^n$ pour l'ensemble de toutes les branches de D_n, c'est-à-dire la réunion disjointe des $\mathcal{C}_b$ pour tous les points de branchement b.

Définition 3.32. Un *coloriage* est une application $c \colon \mathcal{C}^n \to [n]$ telle que la restriction de c à chaque $\mathcal{C}_b$ pour $b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$ réalise une bijection avec $[n]$.

Pour $b \in \mathrm{Br}(D_n)$, on note $c_b \colon D_n \setminus \{b\} \to [n]$, l'application donnée par $c_b(x) = c(C_b(x))$ où $C_x(b)$ est la branche autour de b qui contient x.

L'ensemble $[n]^{\mathcal{C}^n}$ est un produit dénombrable d'espaces dénombrables munis de la topologie discrète, ainsi cet ensemble muni de la topologie produit est un espace polonais. Parmi ce produit, le sous-ensemble des coloriages est un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts) et sa topologie est donc polonaise [Kec95, Theorem 3.11].

Définition 3.33. Un coloriage est *kaléidoscopique* si pour toute paire $x \neq y \in \mathrm{Br}(D_n)$, et $i, j \in [n]$, il existe $z \in]x, y[$ point de branchement tel que $c\left(C_z(x)\right) = i$ et $c\left(C_z(y)\right) = j$.



L'idée derrière ce nom est la suivante, en partant de x et en allant vers y, toutes les couleurs vont défiler devant nos yeux comme si nous faisions tourner un kaléidoscope.

Prima facie, il n'est pas évident qu'un coloriage kaléidoscopique existe. En fait, ce sont les coloriages génériques puisqu'ils forment un sous-ensemble comaigre de l'ensemble des coloriages.

Lemme 3.34. *Pour $n \in \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$, l'ensemble des coloriages kaléidoscopiques est un G_δ dense.*

Par un argument de va-et-vient, on peut montrer qu'il existe essentiellement un seul coloriage kaléidoscopique.

Théorème 3.35. *Soit c, d deux coloriages kaléidoscopiques de la dendrite D_n alors il existe $h \in \mathrm{Homeo}(D_n)$ tel que $d = c \circ h$.*

De plus si x, y sont deux points de branchement, on peut assurer que $h(x) = y$.

Ainsi, sous l'action de $\mathrm{Homeo}(D_n)$, l'ensemble des coloriages kaléidoscopiques est l'unique orbite comaigre parmi l'ensemble de tous les coloriages.

On peut maintenant définir l'action locale et les groupes kaléidoscopiques.

Définition 3.36. Soit c un coloriage de la dendrite D_n. L'*action locale* d'un élément $g \in \mathrm{Homeo}(D_n)$ en $x \in \mathrm{Br}(D_n)$ est l'élément $\sigma_c(g, x) \in \mathrm{Sym}([n])$ donné par le cocycle

$$\sigma_c \colon \mathrm{Homeo}(D_n) \times \mathrm{Br}(D_n) \longrightarrow \mathrm{Sym}([n]), \quad \sigma_c(g, x) := c_{g(x)} \circ g \circ c_x^{-1}.$$

Définition 3.37. Soit c un coloriage de la dendrite D_n et $\Gamma < \mathrm{Sym}([n])$. On définit *le groupe avec action locale* Γ

$$\mathcal{K}_c(\Gamma) = \{g \in \mathrm{Homeo}(D_n) : \forall x \in \mathrm{Br}(D_n),\ \sigma_c(g, x) \in \Gamma\}.$$

Lorsque c est kaléidoscopique, on dit que $\mathcal{K}_c(\Gamma)$ est le groupe kaléidoscopique avec action locale Γ.

Comme nous l'avons vu, il existe essentiellement un seul coloriage kaléidoscopique et si le choix du coloriage kaléidoscopique c n'a pas d'importance on omet c en indice et on note simplement $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Commençons par remarquer que même si Γ est trivial, $\mathcal{K}_c(\Gamma)$ est loin de l'être. Par définition, il s'agit du groupe qui laisse invariant le coloriage kaléidoscopique c et par le Théorème 3.35, ce groupe agit transitivement sur les points de branchement de la dendrite. À l'opposé, lorsque $\Gamma = \mathrm{Sym}([n])$, $\mathcal{K}(\Gamma)$ n'est rien d'autre que $\mathrm{Homeo}(D_n)$.

Simplement en faisant varier la valeurs de n, le Théorème 3.31 montre que les groupes $\mathcal{K}(\{1\})$ forment une famille dénombrable de groupes polonais non dénombrables simples deux-à-deux non isomorphes et en faisant varier le groupe de permutations Γ, on obtient une famille non dénombrable de groupes polonais non dénombrables simples deux-à-deux non isomorphes.

Étudions maintenant un peu plus le foncteur entre groupes de permutations

$$\Gamma \mapsto \mathcal{K}(\Gamma) \leq \mathrm{Sym}(\mathrm{Br}(D_n)).$$

Rappelons qu'un groupe de permutations $\Gamma \curvearrowright X$ est oligomorphe si pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'action diagonale $\Gamma \curvearrowright X^k$ possède un nombre fini d'orbites. Remarquons que si X est fini, l'action $\Gamma \curvearrowright X$ est automatiquement oligomorphique. Par contre pour les groupes de permutations d'ensembles infinis, c'est une propriété très intéressante [Cam90].

Théorème 3.38. *Le groupe $\mathcal{K}(\Gamma)$ est oligomorphe si et seulement si Γ est oligomorphique.*

En particulier, pour n fini, le groupe $\mathcal{K}(\Gamma)$ est oligomorphe, c'est donc vraiment un « gros » groupe. Cela s'applique à $\mathcal{K}(\{1\})$ pour n fini.

Nous avons vu dans le Théorème 3.30 que le groupe $\mathcal{K}(\Gamma)$ est toujours un groupe parfait. De manière équivalente, cela signifie que l'abélianisé de $\mathcal{K}(\Gamma)$ est trivial ou encore que le groupe d'homologie $H_1(\mathcal{K}(\Gamma), \mathbf{Z})$ est trivial. On peut alors se demander ce qu'il en est des groupes d'homologie de degré supérieur. En fait, la réponse dépend du groupe Γ. Par exemple, pour $\Gamma = \mathcal{S}_\infty$ agissant sur $[\infty]$, on obtient $\mathcal{K}(\Gamma) = \mathrm{Homeo}(D_\infty)$.

Théorème 3.39. *Le groupe $\mathrm{Homeo}(D_\infty)$ est acyclique, c'est-à-dire que les groupes d'homologie $H_n(\mathrm{Homeo}(D_\infty), \mathbf{Z})$ sont tous triviaux pour tout $n > 0$.*

Au contraire, pour certains groupes Γ, on peut prouver que le multiplicateur de Schur de $\mathcal{K}(\Gamma)$, c'est-à-dire $H_2(\mathcal{K}(\Gamma), \mathbf{Z})$, est non trivial. On passe pour cela par la non-annulation de la cohomologie en degré 2. Suivant P. Neumann [Neu75], une action $\Gamma \curvearrowright X$ est *généreusement transitive* si pour tout $x, y \in X$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) = y$ et $\gamma(y) = x$. L'action est *semi-généreusement transitive* si elle se décompose en deux orbites $X = X_1 \sqcup X_2$ sur lesquelles l'action est généreuse et de plus l'action diagonale induite sur $X_1 \times X_2$ est transitive.

Théorème 3.40. *Supposons que le groupe de permutations Γ n'est ni généreusement ni semi-généreusement transitif alors $\mathcal{K}(\Gamma)$ admet un cocycle qui donne une classe de cohomologie non nulle dans $H^2(\mathcal{K}(\Gamma), \mathbf{Z})$ et dans $H^2_b(\mathcal{K}(\Gamma), \mathbf{Z})$.*

Corollaire 3.41. *Supposons que le groupe de permutations Γ n'est ni généreusement ni semi-généreusement transitif. Alors le multiplicateur de Schur $H_2(\mathcal{K}(\Gamma), \mathbf{Z})$ est non trivial.*

Le groupe kaléidoscopique $\mathcal{K}(\Gamma)$ apparaît avec la topologie induite par l'inclusion dans $\mathrm{Sym}(\mathrm{Br}(D_\infty))$ et il est naturel de se demander si cette topologie est polonaise. Dans ce cas, c'est équivalent à se demander si le groupe $\mathcal{K}(\Gamma)$ est fermé dans $\mathrm{Sym}(\mathrm{Br}(D_\infty))$.

Théorème 3.42. *Le groupe $\mathcal{K}(\Gamma)$ est fermé dans $\mathrm{Sym}(\mathrm{Br}(D_\infty))$ si et seulement si Γ est fermé dans $\mathrm{Sym}(n)$.*

Bien entendu si n est fini alors tout sous-groupe de $\mathrm{Sym}(n)$ est fermé. Lorsque que le groupe $\mathcal{K}(\Gamma)$ est polonais, on peut de plus voir que cette topologie est caractéristique sous une hypothèse de discrétude supplémentaire.

Théorème 3.43. *Si Γ est discret dans $\mathrm{Sym}(n)$ alors $\mathcal{K}(\Gamma)$ possède une unique topologie qui en fasse un groupe polonais.*

Au-delà du cas où n est fini, il y a une famille de cardinal $2^{\aleph_0}$ de groupes de permutations discrets non isomorphes. C'est le cas par exemple pour l'action par multiplication à gauche d'un groupe dénombrable sur lui même $\Gamma \curvearrowright \Gamma$.

Nous verrons dans la partie suivante que dans le cas $\Gamma = \mathcal{S}_\infty$, on pourra caractériser la topologie polonaise sur $\mathcal{K}(\Gamma) = \mathrm{Homeo}(D_\infty)$ comme étant l'unique qui soit séparable et séparée.

Les groupes de Burger-Mozes sont universels dans le sens suivant si H est un sous-groupe transitif de $\mathrm{Aut}(A_n)$ avec action locale $\Gamma \curvearrowright [n]$ (comme l'action est transitive, l'action locale est bien définie sans avoir à préciser de coloriage) alors $H < \mathcal{U}_c(\Gamma)$ pour un certain coloriage c.

Nous obtenons un énoncé similaire dans le cadre des dendrites de Ważewski, sous l'hypothèse plus forte mais nécessaire de double transitivité.

Théorème 3.44. *Soit $n \in \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$. Soit $G \leq \mathrm{Homeo}(D_\infty)$ qui agit transitivement sur les points de branchement et tel que l'action locale est isomorphe à $\Gamma \curvearrowright [n]$. Si de plus G est doublement transitif sur les points de branchement alors il existe un coloriage kaléidoscopique tel que $G \leq \mathcal{K}(\Gamma)$.*

3.4 Topologie des groupes de dendrites [Duc19]

Nous avons vu que les groupes de dendrites de Ważewski possèdent des propriétés de groupes topologiques qui les éloignent des groupes localement compacts comme la propriété (T) ou encore la propriété de Bergman. L'idée de [Duc19] est de mener une étude un peu exhaustive des propriétés topologiques de ces groupes polonais.

Rappelons que la topologie sur le groupe de Ważewski G_S est celle de la convergence uniforme sur la dendrite et que cette topologie coïncide avec la topologie de convergence ponctuelle pour l'action sur les points de branchement. C'est-à-dire qu'une base de voisinages symétriques de l'identité est donnée par les fixateurs d'ensembles finis de points de branchement.

Mettons tout de suite en avant une idée clé : le groupe G_S est un assemblage des groupes $\mathrm{Sym}(n)$ pour $n \in S$ et du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$. Le groupe $\mathrm{Sym}(n)$ apparaît en considérant l'action du stabilisateur d'un point de branchement d'ordre n sur les branches autour de ce point. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$

apparaît de la manière suivante. Si I est un arc non trivial de D_S, I s'identifie avec l'intervalle unité $[0,1]$ et possède donc un ordre naturel $<$. Avec cet ordre, l'ensemble des points de branchement de l'intérieur relatif de I est dénombrable et la densité des points de branchement permet d'appliquer le théorème de Cantor [Can97] : Tout ensemble totalement ordonné dense sans minimum ni maximum est isomorphe à $(\mathbf{Q}, <)$. Ainsi le stabilisateur de deux points distincts dans D_S possède un morphisme vers $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$ en regardant l'action sur les points de branchement entre ces deux points.

La première propriété topologique considérée est l'existence d'une classe de conjugaison dense. Cette première propriété mettra en avant que le groupe de la dendrite universelle D_∞ est particulier.

Proposition 3.45. *Soit $S \subset \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$ non vide. Le groupe topologique G_S possède une classe de conjugaison dense si et seulement si $S = \{\infty\}$.*

Il est assez simple de voir pourquoi l'existence d'un point de branchement d'ordre fini empêche l'existence d'une classe de conjugaison dense. Supposons que b est un point de branchement d'ordre n fini. Choisissons un point dans chaque branche autour de b et un homéomorphisme φ permutant cycliquement ces points. Par construction φ ne possède qu'un seul point fixe, qui est b. Tous ses conjugués ont de même un unique point fixe et donc l'adhérence de la classe de conjugaison de φ ne peut contenir d'éléments avec au moins deux points fixes.

Pour un groupe polonais, une propriété plus forte que celle de contenir une classe de conjugaison dense est de posséder une classe de conjugaison comaigre, c'est-à-dire qui contient un G_δ dense. Les éléments d'une telle classe de conjugaison sont alors appelés *génériques* et on dit alors que G contient des éléments génériques.

Le groupe $\mathcal{S}_\infty$ possède des éléments génériques qui ne sont pas difficiles à décrire. Un élément g de $\mathcal{S}_\infty$ est générique si sa décomposition en produit de cycles disjoints ne contient que des cycles de longueur finie et pour chaque longueur $n \in \mathbf{N}$, il existe une infinité de cycles de longueur n.

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$ possède aussi des éléments génériques pour lesquels une description explicite n'est pas très difficile.

Théorème 3.46. *Le groupe topologique G_∞ possède des éléments génériques.*

Pour obtenir ce résultat, on utilise des outils de théorie des modèles. En particulier, le fait que $\mathrm{Br}(D_\infty)$ puisse être vu comme une *limite de Fraïssé* et G_∞ comme le groupe d'automorphismes de cette limite de Fraïssé.

Suivant les idées de [KPT05, KR07], on démontre que les isomorphismes partiels satisfont les deux propriétés suivantes : la *propriété de plongement joint* et la *propriété d'amalgamation faible* pour obtenir le Théorème 3.46.

Remarque 3.47. On pourrait chercher une description explicite des éléments génériques de G_∞. Si une telle description semble possible, elle semble sensiblement plus compliquée que pour les groupes $\mathcal{S}_\infty$ et $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$, groupes pour lesquels une telle description est connue.

Une autre propriété remarquable de ces groupes polonais de dimension infinie, i.e. non localement compacts, est la propriété de *continuité automatique*. Un groupe topologique G possède la propriété de continuité automatique si tout morphisme (abstrait) à valeurs dans un groupe topologique séparable est automatiquement continu.

Illustrons cette propriété par des contre-exemples. Les groupes $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{R}^2, +)$ sont isomorphes. En effet, ce sont deux $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels avec des bases de cardinal la puissance du continu. Par contre, aucun tel automorphisme ne peut-être continu pour les topologies usuelles, pour des questions de dimension par exemple.

Soit σ un automorphisme *sauvage* (i.e. non continu) du corps $\mathbf{C}$. En appliquant σ, coefficient par coefficient à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, on obtient un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui n'est pas continu.

Par l'étude [Ste10] due à Steinitz, les corps algébriquement clos de cardinal la puissance du continu sont isomorphes à la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ ou de $\mathbf{F}_p((X))$. En particulier, on peut les munir d'une valuation non archimédienne à valeurs rationnelles. La topologie associée est séparable et totalement discontinue. Ceci donne par exemple, une topologie séparable totalement discontinue sur $\mathbf{C}$.

En exploitant cette idée, Kallman [Kal00], montre que si k est un corps infini de cardinal inférieur à $2^{\aleph_0}$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{GL}_n(k)$ se plonge dans $\mathcal{S}_\infty$, résultat démontré aussi indépendamment par Thomas. Pour cela, on munit k d'une valuation non archimédienne à image dénombrable. Son anneau des entiers $A = \{x \in, |x| \leq 1\}$ est ouvert et $\mathrm{SL}_m(A)$ est d'indice dénombrable dans $\mathrm{SL}_m(k)$. On peut alors plonger $\mathrm{GL}_n(k)$ dans $\mathrm{SL}_{n+2}(k)$ de sorte que l'intersection avec le centre soit triviale et ainsi l'action $\mathrm{SL}_{n+2}(k) \curvearrowright \mathrm{SL}_{n+2}(k)/\mathrm{SL}_{n+2}(A)$ fournit le plongement $\mathrm{GL}_n(k) \to \mathcal{S}_\infty$.

À l'opposé, les groupes polonais de dimension infinie, $\mathcal{S}_\infty, \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <), U(\ell^2)$, le groupe des homéomorphismes du cube de Hilbert, de $\mathbf{R}$ ou encore d'une variété compacte satisfont la propriété de continuité automatique. On pourra consulter [Ros09] pour un survol sur le sujet.

Théorème 3.48. *Le groupe topologique G_∞ possède la propriété de continuité automatique.*

De façon générale, on connaît essentiellement deux techniques pour prouver des résultats de ce type, la première repose sur l'existence d'amples génériques, c'est-à-dire pour chaque $n \in \mathbf{N}$, de l'existence d'une orbite comaigre pour l'action diagonale par conjugaison $G \curvearrowright G^n$. L'autre technique repose sur la *propriété de Steinhaus* : Un groupe topologique G a la propriété de Steinhaus s'il existe une constante $k \in \mathbf{N}$ telle que pour tout $W \subset G$ symétrique et telle qu'une quantité dénombrable de translatés à gauche recouvre G, W^k est d'intérieur non vide. Cette propriété de Steinhaus entraîne la continuité automatique. Le groupe G_∞ ne possède pas d'ample générique [Duc19, Proposition 1.9]— essentiellement parce que $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$ n'en possède pas non plus — mais possède la propriété de Steinhaus [Duc19, Theorem 1.4].

La continuité automatique entraîne par exemple l'unicité de la topologie polonaise sur G_∞. On peut chercher quelles sont les propriétés les plus

faibles qui permettent de caractériser la topologie polonaise sur G_∞. Observons qu'un groupe possède toujours une topologie grossière (qui n'est pas séparée) et une topologie discrète (qui n'est pas séparable). Si on cherche des topologies intéressantes sur G_∞, il est naturel de chercher des topologies séparées et séparables. Une topologie séparée est *universellement minimale* si elle est plus grossière que toute topologie séparée.

Théorème 3.49. *Pour $S \subset \overline{\mathbf{N}}_{\geq 3}$, le groupe polonais G_S est universellement minimal.*

Grâce aux théorèmes 3.48 et 3.49, on peut alors caractériser très fortement la topologie polonaise sur G_∞.

Corollaire 3.50. *Le groupe G_∞ possède une unique topologie séparable et séparée.*

Ce corollaire donne l'idée que la topologie est régie par la structure algébrique du groupe. L'énoncé suivant montre que la topologie peut se retrouver à partir des groupes de petit indice. On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe polonais est de *petit indice* si $[H : G] < 2^{\aleph_0}$. Par exemple, les stabilisateurs de parties finies forment une base d'ouverts de l'identité et tous ces sous-groupes sont exactement d'indice dénombrable. Un groupe polonais G possède la *propriété de petit indice* si tout sous-groupe de petit indice est ouvert. Remarquons que l'hypothèse du continu n'est pas utilisée ici.

Théorème 3.51. *Le groupe polonais G_∞ possède la propriété de petit indice.*

Cela donne une classification des sous-groupes de G_∞. Comme G_∞ est simple, il ne possède pas de sous-groupe d'indice fini. Un sous-groupe de petit indice est ouvert, il contient donc le fixateur d'une partie finie et a donc un indice dénombrable. Les autres sous-groupes ont tous un indice qui est la puissance du continu.

Le groupe G_∞ est, par définition, un groupe issu de la dynamique topologique puisqu'il s'agit du groupe d'homéomorphismes de la dendrite de Ważewksi universelle D_∞. En dynamique topologique, un objet d'étude classique consiste en l'étude des G-flots. Si G est un groupe topologique, rappelons qu'un *G-flot* est un espace compact X muni d'une action continue de G. La continuité de l'action signifiant ici que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

est continue.

Parmi tous les G-flots, on peut distinguer ceux qui sont *minimaux*, c'est-à-dire non vide et dont toute orbite est dense. Par compacité, tout G-flot contient un sous flot minimal. Il existe un G-flot minimal universel construit par Ellis [Ell60]. Ce flot est *universel* dans le sens où tout autre G-flot minimal est une image continue et G-équivariante de ce flot.

Par un résultat de Veech [Vee77], tout groupe localement compact non compact possède une action continue libre sur un espace compact, ce qui sous-entend que le flot minimal universel est gros. Plus précisément, on peut montrer que pour tout groupe localement compact, le flot minimal universel est

énorme dans le sens où il est non métrisable et une description explicite n'est pas envisageable.

Pour certains groupes polonais, de manière remarquable, on peut donner une description explicite de ce flot minimal universel. C'est le cas de $\mathcal{S}_\infty$ qui admet comme flot minimal universel, l'ensemble de tous les ordres totaux sur un ensemble dénombrable $\mathbf{N}$. Cet ensemble s'identifie à un sous-ensemble fermé du compact métrisable totalement discontinu

$$\prod_{(x,y)\in\mathbf{N}^2 x\neq y} \{\pm\}.$$

Pour identifier un ordre total $<$ à un élément de ce produit, on associe $+$ à la paire (x, y) si $x < y$ et $-$ si $x > y$. Avec la topologie produit, l'ensemble des ordres est alors un fermé sur lequel $\mathcal{S}_\infty$ agit continûment.

De manière surprenante, si on a en tête le cas des groupes localement compacts, il existe des groupes avec des flots universels minimaux aussi petits que possible, c'est-à-dire réduits à un point. Un tel groupe est appelé *extrême moyennable*. C'est le cas par exemple de $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$ [Pes98] ou encore du groupe unitaire d'un espace de Hilbert séparable [GM83]. Le travail de synthèse [KPT05] fait le lien entre extrême moyennabilité et théorie de Ramsey.

Pour le groupe G_∞, l'essentiel du travail est d'identifier un sous-groupe extrêmement moyennable grâce à un théorème de Ramsey et [KPT05]. Décrivons maintenant ce flot minimal universel. Sur l'ordre des points de branchement, on considère les ordres totaux $<$ tels que pour tout $x, y, z \in \mathrm{Br}(D_\infty)$ avec $z \in]x, y[$, $z < x$ ou $z < y$. Un tel ordre est appelé *radial*. La raison de cette dénomination est simple. Pour un tel ordre, il existe un point $r \in D_\infty$ tel que toute suite minimisante converge vers r. Ce point r est appelé *racine* de l'ordre radial. De plus, si $x \in]r, y[$ et $x, y \in \mathrm{Br}(D_\infty)$ alors $x < y$.

Un ordre radial de racine r est dit *convexe* si pour tous points $a, b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$ avec $c = \kappa(a, b, r)$ et $a' \in]c, a[$, $b' \in]c, b[$,

$$a < b \implies a' < b'.$$

La signification de cette propriété est en fait la suivante : sur l'ensemble des branches autour d'un point de branchement, qui ne contiennent pas la racine, l'ordre $<$ induit aussi un ordre défini de la manière suivante. Soit C, C' deux branches autour de c ne contenant la racine. On définit $C < C'$ si pour tous $a \in C$ et $b \in C'$, $a < b$. La propriété de convexité montre que cette définition est cohérente.

Il n'est pas difficile de voir que parmi tous les ordres totaux sur $\mathrm{Br}(D_\infty)$, l'ensemble des ordres radiaux et convexes forment un sous-ensemble fermé et G_∞-invariant. C'est en fait exactement le flot minimal universel.

Théorème 3.52. *Le flot minimal universel de G_∞ est l'espace des ordres totaux convexes et radiaux sur l'ensemble des points de branchement.*

Si on fixe un point terminal ξ, on peut alors retrouver par le même argument, le flot minimal universel du stabilisateur de ξ, G_ξ.

Théorème 3.53. *Soit ξ un point terminal de D_∞. Le flot minimal universel de G_ξ est l'espace des ordres totaux convexes et radiaux de racine ξ.*

De manière un peu surprenante (on ne montre pas souvent qu'un groupe non extrêmement moyennable est moyennable en identifiant son flot minimal universel), ce théorème permet de démontrer la moyennabilité des stabilisateurs de points terminaux. Rappelons la définition de moyennabilité pour un groupe topologique général.

Définition 3.54. Un groupe topologique G est *moyennable* si pour tout G-flot, il existe une mesure de probabilité invariante.

Pour montrer la moyennabilité de G_ξ où $\xi \in \mathrm{Ter}(D_\infty)$, il suffit de construire une mesure de probabilité invariante sur son flot minimal universel. En effet, la propriété universelle de ce flot implique que tout autre flot possède une mesure invariante qui est simplement la mesure image de celle du flot universel. On utilise pour cela la structure du groupe G_ξ et la moyennabilité du groupe $\mathcal{S}_\infty$. En particulier, ce dernier groupe fixe une mesure de probabilité sur l'ensemble compact de tous les ordres totaux sur un ensemble dénombrable.

Théorème 3.55. *Pour tout $x \in D_\infty$, le groupe topologique G_x est moyennable.*

L'idée essentielle de ce théorème pour $x = \xi \in \mathrm{Ter}(D_\infty)$ est de décomposer l'ensemble $\mathrm{CCLO}(D_\infty)_\xi$ des ordres radiaux convexes de racine $\xi \in \mathrm{Ter}(D_\infty)$. On a vu qu'un tel ordre induit un ordre total sur $\mathcal{C}_{b,\xi}$ l'ensemble des branches qui ne contiennent pas ξ autour de $b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$. Réciproquement, la donnée d'un ordre total sur $\mathcal{C}_{b,\xi}$ pour chaque $b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$, permet de reconstruire un élément de $\mathrm{CCLO}(D_\infty)_\xi$. Si on note $\mathrm{LO}(\mathcal{C}_{b,\xi})$, on a alors l'homéomorphisme

$$\mathrm{CCLO}(D_\infty)_\xi \simeq \prod_{b \in \mathrm{Br}(D_\infty)} \mathrm{LO}(\mathcal{C}_{b,\xi})$$

Comme $\mathcal{C}_{b,\xi}$ est dénombrable, on peut trouver une bijection $\mathcal{C}_{b,\xi} \to \mathbf{N}$ qui induit un homéomorphisme $\varphi_b \colon \mathrm{LO}(\mathcal{C}_{b,\xi}) \to \mathrm{LO}(\mathbf{N})$ et si μ_0 est une mesure de probabilité $\mathcal{S}_\infty$-invariante sur $\mathrm{LO}(\mathbf{N})$, on note μ_b la mesure $\varphi_b^* \mu_0$. La mesure produit $\otimes_{b \in \mathrm{Br}(D_\infty)} \mu_b$ sur $\mathrm{CCLO}(D_\infty)_\xi \simeq \prod_{b \in \mathrm{Br}(D_\infty)} \mathrm{LO}(\mathcal{C}_{b,\xi})$ est alors la mesure de probabilité G_ξ-invariante désirée.

Pour obtenir le Théorème 3.55 pour tout $x \in \mathrm{Br}(D_\infty)$, on utilise la structure de produit en couronne

$$G_x = G_\xi \wr \mathrm{Sym}(\mathcal{C}_x)$$

qui donne la moyennabilité de G_x comme extension d'un groupe moyennable par un autre groupe moyennable.

Une caractérisation de la moyennabilité d'un groupe topologique G est la suivante : tout G-flot fortement proximal contient un point fixe. Autrement dit, tout G-flot fortement proximal et minimal est réduit à un point. Rappelons qu'un G-flot X est *fortement proximal* si toute mesure de probabilité contient une mesure de Dirac dans l'adhérence de son orbite (pour la topologie faible-$*$). Pour plus de détails, on pourra se référer à [Gla76].

De même que pour les G-flots minimaux, il existe un unique flot fortement proximal minimal universel. Ce flot est appelé *bord de Furstenberg* de G. Dans le cas classique où G est un groupe de Lie simple connexe non compact et P un sous-groupe parabolique minimal alors ce bord de Furstenberg est l'espace compact G/P [Fur63].

D'une manière générale, ce bord de Furstenberg n'est pas identifiable. Récemment, pour les groupes non archimédiens, c'est-à-dire les sous-groupes fermés de $\mathcal{S}_\infty$ comme G_∞, la compréhension des flots minimaux et des bords de Furstenberg s'est améliorée et, souvent, ils s'obtiennent sur la forme $\widehat{G/H}$ qui est la complétion pour une structure uniforme du quotient G/H pour H un certain sous-groupe fermé [BYMT17, MNVTT16, Zuc19]. Cette structure uniforme est obtenue de la manière suivante. Sur G, la *structure uniforme droite* est celle pour laquelle un système fondamental d'entourages est donné par les $U_V = \{(g,h) \in G^2,\ gh^{-1} \in U\}$ où U est un voisinage symétrique de l'identité. La structure uniforme considérée sur G/H est alors la structure uniforme quotient.

Pour le groupe G_∞, on obtient l'identification suivante.

Théorème 3.56. *Le bord de Furstenberg universel de G_∞ est $\widehat{G_\infty/G_\xi}$.*

Puisque G agit transitivement sur les points terminaux de D_∞, G_∞/G_ξ s'identifie à $\mathrm{Ter}(D_\infty)$ qui est dense dans D_∞ et on pourrait croire que $\widehat{G_\infty/G_\xi}$ s'identifie à la dendrite D_∞ elle-même. Ce n'est pas le cas. On peut cependant donner une description explicite de ce bord de Furstenberg.

Chaque ensemble $\mathcal{C}_b$, des branches autour de $b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$, est dénombrable discret. On note $\overline{\mathcal{C}}_b$ son compactifié d'Alexandrov, obtenu en ajoutant un point noté C_b^∞. On considère alors le produit

$$\prod_{b\in \mathrm{Br}(D_\infty)} \overline{\mathcal{C}}_b$$

qui est un espace compact métrisable totalement discontinu pour la topologie produit. Le groupe G_∞ agit sur ce produit de la manière suivante : pour $g \in G_\infty$ et $C = (C_b)$, $(gC)_b = gC_{g^{-1}b}$ pour tout $b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$. On utilise la convention que pour tout b, $gC_b^\infty = C_{gb}^\infty$.

Pour $x \in D_\infty \setminus \mathrm{Br}(D_\infty)$ et $b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$, on note $C_b(x)$ la branche autour de b qui contient x. Ainsi on note $C(x)$ l'élément $(C_b(x))_{b\in \mathrm{Br}(D_\infty)}$ du produit ci-dessus. Il s'agit de la collection des branches qui contiennent x. D'autre part, on énumère les branches autour de b en notant $\mathcal{C}_b = \{C_b^n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Pour $b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$ et $n \in \overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on note $C^n(b)$ l'élément C de $\prod_{b\in \mathrm{Br}(D_\infty)} \overline{\mathcal{C}}_b$ donné par $C_{b'} = C_{b'}(b)$ (la branche autour de b' qui contient b) pour $b' \neq b$ et $C_b = C_b^n$.

Définissons

$$K = \left\{ (C_b) \in \prod_{b\in \mathrm{Br}(D_\infty)} \overline{\mathcal{C}_b},\ \forall b, b',\ b' \notin C_b \implies C_{b'} = C_{b'}(b) \right\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace fermé G_∞-invariant. On peut donner la liste des éléments de K.

Lemme 3.57. *Pour tout $C \in K$, il existe $x \in D_\infty \setminus \mathrm{Br}(D_\infty)$ tel que $C = C(x)$ ou il existe $(b, n) \in \mathrm{Br}(D_\infty) \times \overline{\mathbf{N}}$ tel que $C = C^n(b)$.*

On peut maintenant montrer qu'il s'agit d'une description du bord de Furstenberg. L'idée est que l'application $gG_\xi \mapsto C(g\xi)$ de G_∞/G_ξ vers K s'étend en un homéomorphisme G_∞-équivariant.

Proposition 3.58. *Les espaces K et $\widehat{G_\infty/G_\xi}$ sont des G-flots isomorphes. En particulier, G_∞ possède un bord de Furstenberg avec 4 orbites.*

L'énoncé sur le nombre dénombrable d'orbites est assez simple. En effet, tout élément $C \in K$ s'écrit $C = C(x)$ avec x régulier ou x terminal, ce qui donne 2 orbites ou $C = C^n(b)$ avec $n \in \overline{\mathbf{N}}$ et $b \in \mathrm{Br}(D_\infty)$ ce qui donne de nouveaux 2 orbites : une pour n fini et une pour $n = \infty$.

Un projet de recherches futures

Parmi les différents sujets de recherches futures, en voici un qui se trouve dans la continuité de différentes parties de ce mémoire.

Les groupes d'isométries des espaces symétriques irréductibles à courbure négative de dimension infinie dénombrable et de rang fini, c'est-à-dire essentiellement, les groupes $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ pour $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, sont des groupes de Lie de dimension infinie. Ils possèdent aussi une topologie qui en fait des groupes polonais. Il s'agit de la topologie la plus grossière qui rend l'action

$$\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)\times\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)\to\mathcal{X}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$$

continue.

C'est un fait général que les groupes d'isométries d'espaces métriques séparables sont des groupes polonais [Kec95, §9.B.9)]. À la fois ces groupes $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ doivent ressembler à des groupes de Lie simples non compacts et en même temps la dimension infinie peut faire apparaître des propriétés surprenantes. Un projet de recherches est donc d'*étudier ces groupes comme groupes polonais et de comprendre leurs propriétés topologiques.*

Par exemple, Tsankov a montré que le groupe orthogonal ou unitaire d'un espace de Hilbert réel ou complexe séparable possède la propriété de continuité automatique [Tsa13]. Tout morphisme à valeurs dans un groupe topologique séparable est continu.

Question 3.59. Les groupes polonais $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ possèdent-ils la propriété de continuité automatique ? La topologie polonaise ci-dessus est-elle l'unique topologie polonaise ? Est-ce l'unique topologie de groupe séparée et séparable ?

Cette question de la continuité automatique est explicitement posée dans l'introduction [MP18] pour $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ et $p=1$. Dans cet article, il est par exemple montré que tout morphisme $\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(1,\infty)\to\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(1,\infty)$ est continu. En rang 1, les méthodes semblent plus simples (par exemple, l'action sur le bord à l'infini de $\mathcal{X}_{\mathbf{R}}(1,\infty)$ est transitive). On peut se demander si cela a des conséquences sur la topologie ou si on peut obtenir des résultats analogues avec des méthodes plus compliquées.

Question 3.60. La dichotomie rang 1 et rang supérieur à 2, donne-t-elle des différences drastiques sur ces groupes polonais et leurs dynamiques ?

Si G est le groupe des isométries d'un espace symétrique irréductible de type non compact, Furstenberg avait identifié son flot minimal fortement proximal universel (appelé désormais bord de Furstenberg). Il s'agit de l'espace quotient G/P où P est un sous-groupe parabolique minimal de G. On peut se demander si on peut obtenir une description simple du bord de Furstenberg pour les groupes $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$. Remarquons qu'en dimension infinie, la sphère Hilbertienne n'est pas compacte (même pour la topologie faible) donc le bord à l'infini (même en rang 1) ne sera pas un flot pour ces groupes. Par contre, sur $\mathcal{X}_{\mathbf{R}}(1,\infty)\cup\partial\mathcal{X}_{\mathbf{R}}(1,\infty)$, la topologie $\mathcal{T}_c$ de [Mon06], par exemple, en fait un espace compact métrisable, homéomorphe à la boule unité fermé de l'espace de Hilbert avec la topologie faible, et donc un flot minimal pour $\mathrm{O}_{\mathbf{R}}(1,\infty)$.

Question 3.61. Peut-on identifier le bord de Furstenberg de $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$?

Pour les groupes de dimension finie $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,q)$, le bord de Furstenberg est connu (c'est l'ensemble des drapeaux isotropes maximaux) et on peut se demander si l'intuition géométrique qui provient de l'action sur l'espace symétrique $\mathcal{X}_{\mathbf{R}}(p,\infty)$ peut aider pour répondre à cette question.

Le groupe orthogonal d'un espace de Hilbert possède une propriété de moyennabilité très forte : Toute action continue sur un espace compact possède un point fixe. On dit que ce groupe est *extrêmement moyennable*. C'est une propriété qui ne peut être vraie que pour des groupes non localement compacts puisque tout groupe localement compact possède une action continue libre sur un espace compact.

Cette extrême moyennabilité s'obtient grâce à la *concentration de la mesure* [GM83]. Donnons un exemple de cette concentration de la mesure. Soit $\mathbf{S}^n$ la sphère n-dimensionnelle de rayon 1 avec sa mesure sphérique normalisée μ_n et E_n un équateur de $\mathbf{S}^n$. Alors pour tout $\varepsilon>0$, $\mu_n((E_n)_\varepsilon)\to 1$ où $(E_n)_\varepsilon$ est le ε-voisinage de E_n. La mesure se concentre autour de l'équateur en grande dimension.

Question 3.62. Peut-on obtenir des propriétés de concentration de la mesure pour le bord à l'infini et en déduire des résultats de moyennabilité ?

Les représentations exotiques de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(1,\infty)$, de $\mathrm{PO}_{\mathbf{R}}(1,\infty)$ dans lui-même ou de $\mathrm{PO}_{\mathbf{C}}(1,\infty)$ dans lui-même ont été classifiées et une classification des représentations des groupes hyperboliques réels ou complexes à valeurs dans des groupes $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)$ avec $p\geq 2$ (mais fini) est en cours. Si le rang au départ est supérieur à 2, il est attendu qu'il n'existe pas de représentation exotique à cause de la superrigidité démontrée dans [Duc15]. On peut donc espérer une classification complète lorsque le rang de la source est supérieur à 2.

Question 3.63. Quelle est la classification des représentations $\mathrm{O}_{\mathbf{K}}(p,\infty)\to\mathrm{O}_{\mathbf{K}'}(p',\infty)$ pour $p\geq 2$?

Bibliographie

[AB98] Adams, Scot et Werner Ballmann: *Amenable isometry groups of Hadamard spaces*. Math. Ann., 312(1) :183–195, 1998, ISSN 0025-5831. http://dx.doi.org/10.1007/s002080050218.

[ABB+17] Abert, Miklos, Nicolas Bergeron, Ian Biringer, Tsachik Gelander, Nikolay Nikolov, Jean Raimbault et Iddo Samet: *On the growth of L^2-invariants for sequences of lattices in Lie groups*. Ann. of Math. (2), 185(3) :711–790, 2017, ISSN 0003-486X. https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.1.

[AGV14] Abért, Miklós, Yair Glasner et Bálint Virág: *Kesten's theorem for invariant random subgroups*. Duke Math. J., 163(3) :465–488, 2014, ISSN 0012-7094. https://doi.org/10.1215/00127094-2410064.

[BDL16a] Bader, Uri, Bruno Duchesne et Jean Lécureux: *Amenable invariant random subgroups*. Israel J. Math., 213(1) :399–422, 2016, ISSN 0021-2172. https://doi.org/10.1007/s11856-016-1324-7, With an appendix by Phillip Wesolek.

[BDL16b] Bader, Uri, Bruno Duchesne et Jean Lécureux: *Furstenberg maps for CAT(0) targets of finite telescopic dimension*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 36(6) :1723–1742, 2016, ISSN 0143-3857. https://doi.org/10.1017/etds.2014.147.

[BDL17] Bader, Uri, Bruno Duchesne et Jean Lécureux: *Almost algebraic actions of algebraic groups and applications to algebraic representations*. Groups Geom. Dyn., 11(2) :705–738, 2017, ISSN 1661-7207. https://doi.org/10.4171/GGD/413.

[BdlHV08] Bekka, Bachir, Pierre de la Harpe et Alain Valette: *Kazhdan's property (T)*, tome 11 de *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008, ISBN 978-0-521-88720-5.

[BF14a] Bader, Uri et Alex Furman: *Boundaries, rigidity of representations, and Lyapunov exponents*. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. III*, pages 71–96. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[BF14b] Bader, Uri et Alex Furman: *Boundaries, rigidity of representations, and Lyapunov exponents*. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. III*, pages 71–96. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[BF18a] Bader, Uri et Alex Furman: *An extension of Margulis' Super-Rigidity Theorem*. arXiv preprint arXiv :1810.01607, 2018.

[BF18b] Bader, Uri et Alex Furman: *Margulis' Super-Rigidity Theorem for non-lattice*. arXiv preprint arXiv :1810.01608, 2018.

[BF18c] Bader, Uri et Alex Furman: *Super-Rigidity and non-linearity for lattices in products*. arXiv preprint arXiv :1802.09931, 2018.

[BFMS19] Bader, Uri, David Fisher, Nick Miller et Matthew Stover: *Arithmeticity, Superrigidity, and Totally Geodesic Submanifolds*. arXiv preprint arXiv :1903.08467, 2019.

[BI08] Burger, Marc et Alessandra Iozzi: *A measurable Cartan theorem and applications to deformation rigidity in complex hyperbolic geometry*. Pure Appl. Math. Q., 4(1, Special Issue : In honor of Grigory Margulis. Part 2) :181–202, 2008, ISSN 1558-8599. https://doi.org/10.4310/PAMQ.2008.v4.n1.a8.

[BI09] Burger, Marc et Alessandra Iozzi: *A useful formula from bounded cohomology*. Dans *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, tome 18 de *Sémin. Congr.*, pages 243–292. Soc. Math. France, Paris, 2009.

[BIW10] Burger, Marc, Alessandra Iozzi et Anna Wienhard: *Surface group representations with maximal Toledo invariant*. Ann. of Math. (2), 172(1) :517–566, 2010, ISSN 0003-486X. https://doi.org/10.4007/annals.2010.172.517.

[BM99] Burger, M. et N. Monod: *Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 1(2) :199–235, 1999, ISSN 1435-9855. https://doi.org/10.1007/s100970050007.

[BM00] Burger, Marc et Shahar Mozes: *Groups acting on trees : from local to global structure*. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 92(1) :113–150, 2000.

[BT24] Banach, St. et A. Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* Fund. math. 6, 244-277 (1924)., 1924.

[BT72] Bruhat, F. et J. Tits: *Groupes réductifs sur un corps local*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (41) :5–251, 1972, ISSN 0073-8301. http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1972__41__5_0.

[BYMT17] Ben Yaacov, Itaï, Julien Melleray et Todor Tsankov: *Metrizable universal minimal flows of Polish groups have a comeagre orbit*. Geom. Funct. Anal., 27(1) :67–77, 2017, ISSN 1016-443X. https://doi.org/10.1007/s00039-017-0398-7.

[BZ76] Bernšteĭn, I. N. et A. V. Zelevinskiĭ: *Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field*. Uspehi Mat. Nauk, 31(3(189)) :5–70, 1976, ISSN 0042-1316.

[Cam90] Cameron, Peter J.: *Oligomorphic permutation groups*, tome 152 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990, ISBN 0-521-38836-8. https://doi.org/10.1017/CBO9780511549809.

[Can97] Cantor, Georg: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Math. Ann., 49(2) :207–246, 1897, ISSN 0025-5831. https://doi.org/10.1007/BF01444205.

[Car32] Cartan, Elie: *Sur le groupe de la géométrie hypersphérique*. Comment. Math. Helv., 4(1) :158–171, 1932, ISSN 0010-2571. https://doi.org/10.1007/BF01202713.

[Cay54] Cayley, A: *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$, 1854.

[Cay78] Cayley, Professor: *Desiderata and Suggestions : No. 1. The Theory of Groups*. American Journal of Mathematics, 1(1) :50–52, 1878, ISSN 00029327, 10806377. http://www.jstor.org/stable/2369433.

[CD94] Charatonik, Włodzimierz Jan et Anne Marie Dilks: *On self-homeomorphic spaces*. Topology Appl., 55(3) :215–238, 1994, ISSN 0166-8641.

[CHL07] Coulbois, Thierry, Arnaud Hilion et Martin Lustig: *Non-unique ergodicity, observers' topology and the dual algebraic lamination for* $\mathbb{R}$*-trees*. Illinois J. Math., 51(3) :897–911, 2007, ISSN 0019-2082.

[CL10] Caprace, Pierre Emmanuel et Alexander Lytchak: *At infinity of finite-dimensional CAT(0) spaces*. Math. Ann., 346(1) :1–21, 2010, ISSN 0025-5831. http://dx.doi.org/10.1007/s00208-009-0381-1.

[Cle02] Clerc, Jean Louis: *A triple ratio on the Silov boundary of a bounded symmetric domain*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., 13(3-4) :209–217, 2002, ISSN 1120-6330. Harmonic analysis on complex homogeneous domains and Lie groups (Rome, 2001).

[Cle07] Clerc, Jean Louis: *An invariant for triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain*. Comm. Anal. Geom., 15(1) :147–173, 2007, ISSN 1019-8385. http://projecteuclid.org/euclid.cag/1175790907.

[CM09a] Caprace, Pierre Emmanuel et Nicolas Monod: *Isometry groups of non-positively curved spaces : discrete subgroups*. J. Topol., 2(4) :701–746, 2009, ISSN 1753-8416. http://dx.doi.org/10.1112/jtopol/jtp027.

[CM09b] Caprace, Pierre Emmanuel et Nicolas Monod: *Isometry groups of non-positively curved spaces : structure theory*. J. Topol., 2(4) :661–700, 2009, ISSN 1753-8416. http://dx.doi.org/10.1112/jtopol/jtp026.

[CM14] Caprace, Pierre Emmanuel et Nicolas Monod: *Relative amenability*. Groups Geom. Dyn., 8(3) :747–774, 2014, ISSN 1661-7207. http://dx.doi.org/10.4171/GGD/246.

[DGLL15] Duchesne, Bruno, Yair Glasner, Nir Lazarovich et Jean Lécureux: *Geometric density for invariant random subgroups of groups acting on CAT(0) spaces*. Geom. Dedicata, 175 :249–256, 2015, ISSN 0046-5755. http://dx.doi.org/10.1007/s10711-014-0038-4.

[DLP18] Duchesne, Bruno, Jean Lecureux et Maria Beatrice Pozzetti: *Boundary maps and maximal representations on infinite dimensional Hermitian symmetric spaces*. arXiv preprint arXiv :1810.10208, 2018.

[DM18] Duchesne, Bruno et Nicolas Monod: *Group actions on dendrites and curves*. Annales de l'institut Fourier, 68(5) :2277–2309, 2018.

[DM19] Duchesne, Bruno et Nicolas Monod: *Structural properties of dendrite groups*. Transactions of the American Mathematical Society, (371) :1925–1949, 2019.

[DMW18] Duchesne, Bruno, Nicolas Monod et Phillip Wesolek: *Kaleidoscopic groups : permutation groups constructed from dendrite homeomorphisms*. arXiv preprint arXiv :1801.09787, 2018. A paraître à Fund. Math.

[DP12] Delzant, Thomas et Pierre Py: *Kähler groups, real hyperbolic spaces and the Cremona group*. Compos. Math., 148(1) :153–184, 2012, ISSN 0010-437X. https://doi.org/10.1112/S0010437X11007068.

[Duc13] Duchesne, Bruno: *Infinite-dimensional nonpositively curved symmetric spaces of finite rank*. Int. Math. Res. Not. IMRN, (7) :1578–1627, 2013, ISSN 1073-7928.

[Duc15] Duchesne, Bruno: *Superrigidity in infinite dimension and finite rank via harmonic maps*. Groups Geom. Dyn., 9(1) :133–148, 2015, ISSN 1661-7207. http://dx.doi.org/10.4171/GGD/308.

[Duc19] Duchesne, Bruno: *Topological properties of Ważewski dendrite groups*. arXiv preprint arXiv :1903.05380, 2019.

[Eff65] Effros, Edward G.: *Transformation groups and C^*-algebras*. Ann. of Math. (2), 81 :38–55, 1965, ISSN 0003-486X. https://doi.org/10.2307/1970381.

[Ell60] Ellis, Robert: *Universal minimal sets*. Proc. Amer. Math. Soc., 11 :540–543, 1960, ISSN 0002-9939. https://doi.org/10.2307/2034707.

[Fur63] Furstenberg, Harry: *A Poisson formula for semi-simple Lie groups*. Ann. of Math. (2), 77 :335–386, 1963, ISSN 0003-486X.

[Gal46] Galois, E: *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 11 :417–444, 1846.

[Gel18] Gelander, Tsachik: *A view on Invariant Random Subgroups and Lattices*. arXiv preprint arXiv :1807.06979, 2018.

[Gla76] Glasner, Shmuel: *Proximal flows*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 517. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[GM83] Gromov, M. et V. D. and Milman: *A topological application of the isoperimetric inequality*. Amer. J. Math., 105(4) :843–854, 1983, ISSN 0002-9327. https://doi.org/10.2307/2374298.

[Gro82] Gromov, Michael: *Volume and bounded cohomology*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (56) :5–99 (1983), 1982, ISSN 0073-8301. http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1982__56__5_0.

[HK77] Harris, L. A. et W. Kaup: *Linear algebraic groups in infinite dimensions*. Illinois J. Math., 21(3) :666–674, 1977, ISSN 0019-2082.

[HLP14] Hrushovski, Ehud, François Loeser et Bjorn Poonen: *Berkovich spaces embed in Euclidean spaces*. Enseign. Math., 60(3-4) :273–292, 2014, ISSN 0013-8584. http://dx.doi.org/10.4171/LEM/60-3/4-4.

[Jol05] Jolissaint, Paul: *On property (T) for pairs of topological groups*. Enseign. Math. (2), 51(1-2) :31–45, 2005, ISSN 0013-8584.

[Kal00] Kallman, Robert R.: *Every reasonably sized matrix group is a subgroup of S_∞*. Fund. Math., 164(1) :35–40, 2000, ISSN 0016-2736. https://doi.org/10.4064/fm-164-1-35-40.

[Kec95] Kechris, Alexander S.: *Classical descriptive set theory*, tome 156 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995, ISBN 0-387-94374-9. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-4190-4.

[Kle21] Klein, F.: *Gesammelte mathematische Abhandlungen. Erster Band : Liniengeometrie. Grundlegung der Geometrie. Zum Erlanger Programm. Herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit einem Bildnis Kleins.* Berlin : J. Springer, XII u. 612 S. 8° (1922) (1921)., 1921.

[KM17] Koziarz, Vincent et Julien Maubon: *Maximal representations of uniform complex hyperbolic lattices*. Ann. of Math. (2), 185(2) :493–540, 2017, ISSN 0003-486X. https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.2.3.

[KPT05] Kechris, A. S., V. G. Pestov et S. Todorcevic: *Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups*. Geom. Funct. Anal., 15(1) :106–189, 2005, ISSN 1016-443X. https://doi.org/10.1007/s00039-005-0503-1.

[KR07] Kechris, Alexander S. et Christian Rosendal: *Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures*. Proc. Lond. Math. Soc. (3), 94(2) :302–350, 2007, ISSN 0024-6115. https://doi.org/10.1112/plms/pdl007.

[MNVTT16] Melleray, Julien, Lionel Nguyen Van Thé et Todor Tsankov: *Polish groups with metrizable universal minimal flows*. Int. Math. Res. Not. IMRN, (5) :1285–1307, 2016, ISSN 1073-7928. https://doi.org/10.1093/imrn/rnv171.

[Mon06] Monod, Nicolas: *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting*. J. Amer. Math. Soc., 19(4) :781–814, 2006, ISSN 0894-0347. http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-06-00525-X.

[Mon18] Monod, Nicolas: *Notes on functions of hyperbolic type*. arXiv preprint arXiv :1807.04157, 2018.

[Mor15] Morris, Dave Witte: *Introduction to arithmetic groups*. Deductive Press, [place of publication not identified], 2015, ISBN 978-0-9865716-0-2 ; 978-0-9865716-1-9.

[MP14] Monod, Nicolas et Pierre Py: *An exotic deformation of the hyperbolic space*. Amer. J. Math., 136(5) :1249–1299, 2014, ISSN 0002-9327. http://dx.doi.org/10.1353/ajm.2014.0036.

[MP18] Monod, Nicolas et Pierre Py: *Self-representations of the Moebius group*. arXiv preprint arXiv :1805.12479, 2018.

[Nad92] Nadler, Jr., Sam Bernard: *Continuum theory*, tome 158 de *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992, ISBN 0-8247-8659-9. An introduction.

[Neu75] Neumann, Peter M.: *Generosity and characters of multiply transitive permutation groups*. Proc. London Math. Soc. (3), 31(4) :457–481, 1975, ISSN 0024-6115. https://doi.org/10.1112/plms/s3-31.4.457.

[Osi17] Osin, D.: *Invariant random subgroups of groups acting on hyperbolic spaces*. Proc. Amer. Math. Soc., 145(8) :3279–3288, 2017, ISSN 0002-9939. https://doi.org/10.1090/proc/13469.

[Pes98] Pestov, Vladimir G.: *On free actions, minimal flows, and a problem by Ellis*. Trans. Amer. Math. Soc., 350(10) :4149–4165, 1998, ISSN 0002-9947. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-98-02329-0.

[Poz15] Pozzetti, Maria Beatrice: *Maximal representations of complex hyperbolic lattices into* $\mathrm{SU}(M, N)$. Geom. Funct. Anal., 25(4) :1290–1332, 2015, ISSN 1016-443X. http://dx.doi.org/10.1007/s00039-015-0338-3.

[Ros09] Rosendal, Christian: *Automatic continuity of group homomorphisms*. Bull. Symbolic Logic, 15(2) :184–214, 2009, ISSN 1079-8986. https://doi.org/10.2178/bsl/1243948486.

[Ros17] Rosendal, Christian: *Coarse geometry of topological groups*. preprint, 2017.

[Sha99] Shalom, Yehuda: *Invariant measures for algebraic actions, Zariski dense subgroups and Kazhdan's property (T)*. Trans. Amer. Math. Soc., 351(8) :3387–3412, 1999, ISSN 0002-9947. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02363-6.

[Smi13] Smith, William Timothy: *Thompson-Like Groups for Dendrite Julia Sets*. 2013.

[Ste10] Steinitz, Ernst: *Algebraische Theorie der Körper*. J. Reine Angew. Math., 137 :167–309, 1910, ISSN 0075-4102. https://doi.org/10.1515/crll.1910.137.167.

[SY16] Shi, Enhui et Xiangdong Ye: *Periodic points for amenable group actions on dendrites*. Proc. Amer. Math. Soc., 2016.

[TD12] Tucker-Drob, Robin D.: *Shift-minimal groups, fixed price 1, and the unique trace property*. novembre 2012. http://arxiv.org/abs/1211.6395.

[Tit57] Tits, J.: *Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes*. Dans *Colloque d'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956*, Centre Belge de Recherches Mathématiques, pages 261–289. Établissements Ceuterick, Louvain ; Librairie Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[Tsa13] Tsankov, Todor: *Automatic continuity for the unitary group*. Proc. Amer. Math. Soc., 141(10) :3673–3680, 2013, ISSN 0002-9939. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2013-11666-7.

[Vee77] Veech, William A.: *Topological dynamics*. Bull. Amer. Math. Soc., 83(5) :775–830, 1977, ISSN 0002-9904. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1977-14319-X.

[Waż23a] Ważewski, Tadeusz: *Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan*. Thèse de doctorat, Université de Paris/Cracovie, 1923.

[Waż23b] Ważewski, Tadeusz: *Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan*. Ann. Soc. Polon. Math., 2 :49–170, 1923.

[Zim84] Zimmer, Robert J.: *Ergodic theory and semisimple groups*, tome 81 de *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984, ISBN 3-7643-3184-4.

[Zuc19] Zucker, Andy: *A note on minimal models for pmp actions*. arXiv preprint arXiv :1903.02251, 2019.