



HAL
open science

Méthodes de projection pour des écoulements à seuil, incompressibles et à densité variable

Rénald Chalayer

► **To cite this version:**

Rénald Chalayer. Méthodes de projection pour des écoulements à seuil, incompressibles et à densité variable. Analyse numérique [math.NA]. Université Clermont-Auvergne, 2019. Français. NNT : . tel-02305553v1

HAL Id: tel-02305553

<https://hal.science/tel-02305553v1>

Submitted on 4 Oct 2019 (v1), last revised 9 Jul 2020 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE

École doctorale des sciences fondamentales

par Rénald CHALAYER

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

Spécialité : Mathématiques appliquées et applications des Mathématiques

Méthodes de projection pour des écoulements à seuil, incompressibles et à densité variable

Soutenue publiquement le : 23 septembre 2019

Devant le jury composé de :

M.	François Bouchut	DR – CNRS	Université Paris-Est - Marne-la-Vallée	Rapporteur
Mme.	Claire Chainais	Professeur	Université Lille 1	Examinatrice
M.	Laurent Chupin	Professeur	Université Clermont Auvergne	Directeur
M.	Thierry Dubois	CR – CNRS	Université Clermont Auvergne	Directeur
Mme.	Charlotte Perrin	CR – CNRS	Université d'Aix-Marseille	Examinatrice
M.	Paul Vigneaux	MC – HDR	ENS de Lyon	Rapporteur

Remerciements

Mes premières pensées sont tout d'abord destinées à mes directeurs de thèse, Laurent Chupin et Thierry Dubois, qui ont su m'accompagner depuis mon stage de master, puis au long de ces trois années de thèse. Je tiens à leur exprimer ma profonde gratitude pour leurs conseils, leur disponibilité et la conception de la recherche qu'ils ont su me transmettre au cours des nombreuses discussions que nous avons eues.

Je voudrais remercier sincèrement François Bouchut et Paul Vigneaux d'avoir consacré du temps à la lecture de ce manuscrit, et pour leurs remarques qui ont contribué à l'améliorer. Je remercie également Claire Chaïnais et Charlotte Perrin pour leur présence dans ce jury. Je suis honoré pour l'intérêt qu'elles ont porté à mes travaux.

L'environnement dans lequel j'ai été placé au LMBP a été essentiel au bon déroulement de ma thèse. J'en remercie chaleureusement l'ensemble des membres, le personnel du secrétariat, les bibliothécaires et les informaticiens pour avoir répondu à mes demandes avec gentillesse et efficacité.

Ces années de thèse auraient eu une saveur différente sans la présence des autres doctorants et post-doctorants du LMBP. Je pense en particulier à Arnaud, Chaoen et Sophie, avec qui j'ai commencé ma thèse la même année dans le bureau 1213.

Je voudrais aussi remercier mes anciens professeurs de l'université Jean Monnet, qui m'ont ouvert au monde des mathématiques, dont j'étais encore bien loin en sortant du lycée. Je pense notamment à Éric Canon, Sylvie Champier et Ilya Kostin.

Enfin, ces remerciements ne pourraient s'achever sans mentionner mes grands-parents, mes parents et Circée qui m'ont soutenu sans relâche depuis le début de mes études et m'ont aidé à surmonter bien des difficultés. Merci aussi à Sarah d'avoir été là pour cette aventure, et d'être là pour la prochaine.

Table des matières

1	Le modèle mathématique	9
1.1	Obtention des équations	9
1.2	Formulation faible, existence de solutions	15
1.2.1	Quelques espaces fonctionnels	15
1.2.2	Équations de Navier-Stokes avec rhéologie de Bingham	16
1.2.3	Équations de Navier-Stokes à densité variable	21
1.3	Tour de quelques méthodes numériques	27
1.3.1	Équation de conservation de la masse	27
1.3.2	Équation de conservation du moment	27
2	Le schéma numérique de semi-discrétisation en temps	33
2.1	L'algorithme de bi-projection	33
2.2	Résolution pratique de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement discrète	35
3	Analyse du schéma de semi-discrétisation en temps	39
3.1	Résultats préliminaires	40
3.1.1	Principe du maximum discret sur la densité	40
3.1.2	Convergence de l'algorithme de point fixe	45
3.2	Analyse de stabilité	48
3.3	Analyse de convergence	51
3.3.1	Estimation d'erreur préliminaire sur la densité	54
3.3.2	Estimation d'erreur finale	57
3.4	Remarques sur l'analyse du schéma	73
4	Discrétisation spatiale et implémentation	75
4.1	Modification du schéma de discrétisation en temps	75
4.2	Le schéma MAC	76
4.2.1	Équation de conservation de la masse	78
4.2.2	Étape de prédiction	82
4.2.3	Équation de Poisson sur l'incrément de pression	91

4.2.4	Étape de correction	92
4.3	Version Level Set	92
4.4	Implémentation	97
4.4.1	Initialisation de l'algorithme	97
4.4.2	Boucle en temps	97
5	Instabilité de Rayleigh-Taylor	101
5.1	Configuration de l'écoulement et adimensionnement des équations	101
5.2	Premières simulations	103
5.2.1	Cas newtonien	103
5.2.2	Convergence en temps	105
5.3	Suivi de l'interface et du taux de déformation	107
5.3.1	Mélange de deux fluides de Bingham	108
5.3.2	Mélange d'un fluide viscoplastique dans un fluide newtonien	111
6	Rupture de barrage	123
6.1	Configuration de l'écoulement et adimensionnement des équations	123
6.2	Approche asymptotique	126
6.3	Cas newtonien	127
6.3.1	Position du front	127
6.3.2	Profil de l'écoulement	130
6.4	Cas viscoplastique	130
6.4.1	Position du front	130
6.4.2	Profil de l'écoulement	133
	Bibliographie	141

Introduction

Les fluides viscoplastiques, aussi appelés fluides à seuil, sont présents dans notre quotidien avec par exemple le dentifrice que l'on utilise pour se brosser les dents, le beurre et la confiture que l'on utilise pour le petit déjeuner, les crèmes cosmétiques ou pommades pharmaceutiques pour la peau, mais aussi dans la nature ainsi que dans de nombreux procédés industriels. On les trouve dans l'industrie alimentaire avec notamment les produits laitiers, les confectons en chocolat, ou les suspensions de pulpe ; dans l'industrie du pétrole avec les boues de forage, les ciments, le pétrole brut cireux. Ils sont aussi présents dans divers phénomènes géophysiques tels que les coulées de boue, de débris et de lave.

Dans de nombreux cas, ces phénomènes font intervenir des mélanges de fluides avec différentes propriétés. Dans l'industrie alimentaire, le nettoyage des conduites contenant les fluides viscoplastiques est obtenu par la création de courant d'eau ou d'air afin de déplacer ces derniers. Aussi, dans le processus d'extraction du pétrole un flux de gaz, de vapeur ou même d'eau est utilisé pour pousser et transporter des fluides lourds et très visqueux. Du côté des phénomènes géophysiques, on peut aussi citer les écoulements pyroclastiques, situés à la base des nuées ardentes (voir Figure 2), qui sont formés d'un mélange de matière granulaire (roche, cendres,...) et de gaz. Ils représentent un risque majeur pour les populations vivant à proximité des volcans. Les coulées pyroclastiques peuvent parcourir les pentes d'un volcan sur de longues distances, ce qui représente des zones de plusieurs kilomètres carrés recouvertes par une couche épaisse de débris, comme par exemple lors de l'effondrement partiel du dôme du volcan de la Soufrière en 1997 (voir [57]). Un autre scénario possible est l'entrée d'une coulée pyroclastique dans l'eau générant un tsunami qui peut également être responsable de catastrophes (voir [92], [69]).

Les fluides viscoplastiques ne s'écoulent que lorsque la contrainte excède un certain seuil, appelé seuil de plasticité. En dessous de ce seuil, ils ne se déforment pas et se comportent comme des solides. Typiquement, un fluide viscoplastique présente à la fois des régions rigides et non-rigides. Les zones rigides, où le taux de déformation est nul, peuvent soit être des zones plugs se déplaçant tels des corps solides, soit être des zones mortes, c'est-à-dire des zones où le fluide est au repos (vitesse nulle).

Le modèle le plus communément utilisé pour prendre en compte ce comportement par-



FIGURE 1 – Quelques fluides viscoplastiques - Ovarlez [66]

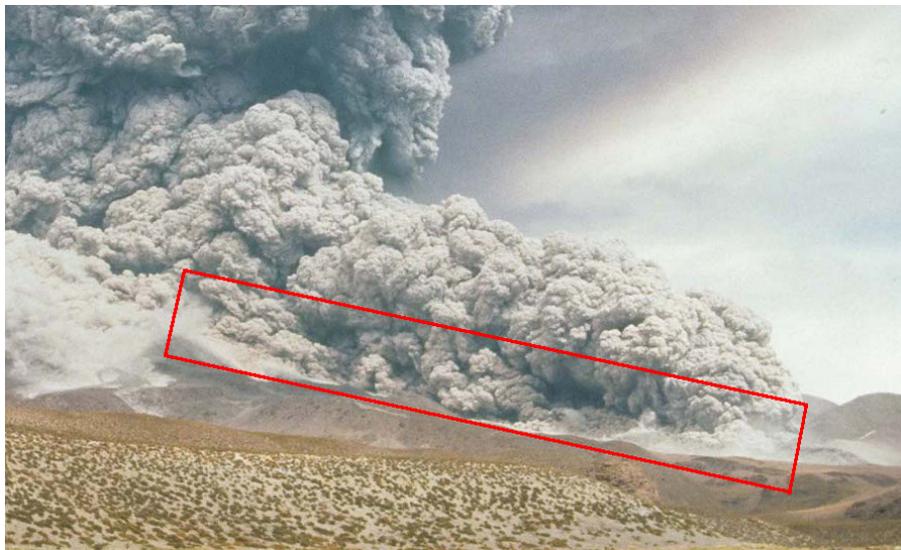


FIGURE 2 – Écoulement pyrochlastique - Jacques Guarinos - Lascar (Chili)

ticulier est le modèle de Bingham, qui porte le nom d'Eugène Bingham qui en a donné l'expression mathématique initiale dans [11] en 1916, pour des écoulements unidimensionnels. Plus tard, Prager [44], [72], [73] en a donné une généralisation avec une formulation tensorielle pour les écoulements multidimensionnels. Dans la loi constitutive, le tenseur des contraintes est prescrit seulement lorsque le seuil de plasticité est atteint. Au dessus de ce seuil, il s'exprime linéairement en fonction du tenseur des taux de déformation avec la viscosité plastique comme coefficient de proportionnalité. D'autres modèles plus complexes ont été proposés par la suite. Par exemple, dans le modèle d'Herschel-Bulkley [13], la viscosité dépend en loi puissance du taux de déformation. Dans cette thèse, nous utiliserons uniquement le modèle de Bingham. Même si en pratique la plupart des fluides ne suivent pas la loi de Bingham, elle permet d'avoir une bonne idée du comportement de ces derniers (voir [58]).

Ce changement singulier de rhéologie induit des difficultés mathématiques. Que ce soit du point de vue de l'analyse théorique du modèle ou du point de vue numérique, on peut distinguer deux types de méthodes principalement utilisées : les méthodes de régularisation et les méthodes d'optimisation.

D'un point de vue numérique, les méthodes de régularisation paraissent au premier abord plus attirantes : un *petit* paramètre est introduit pour que le tenseur des contraintes devienne dans toutes les zones du domaine proportionnel au tenseur des taux de déformation (voir [10] et [67] par exemple). Cependant, les méthodes de régularisation rencontrent des difficultés pour capter précisément la frontière entre les zones fluides et les zones rigides (voir [32], où une étude détaillée a été menée).

Les méthodes d'optimisation mènent quant à elles à un problème de point-selle, pouvant être résolu par des algorithmes de type Lagrangien augmenté (voir [79] pour une revue de ces méthodes). Ces algorithmes permettent un calcul précis des zones rigides mais sont coûteux en itérations (et nécessitent un temps de calcul élevé) pour obtenir leur convergence.

Une autre difficulté inhérente au type de modèle que nous allons considérer est liée à la notion de mélange de fluides, que l'on prendra en compte via les équations de Navier-Stokes à densité variable. A notre connaissance, si les premiers résultats généraux d'existence datent des années 90 avec les travaux de Simon [84] et Lions [53], peu de travaux aujourd'hui encore traitent de l'approximation numérique de ces équations.

L'approximation de ces équations peut être effectuée en résolvant le système couplé vitesse/pression. Ces algorithmes sont alors mis en oeuvre numériquement via des méthodes de type Lagrangien Augmenté ou de type Uzawa. Dans cette direction, Liu et Walkington montrent dans [54] la convergence d'un schéma discrétisé par la méthode de Galerkin discontinue.

Une autre approche, moins gourmande en calcul, consiste à découpler le calcul du couple vitesse/pression en utilisant des méthodes de type *pas de temps fractionné* encore appelées méthodes de *projection*. Le point de départ de ces méthodes remonte aux travaux de Chorin [19] et Temam [89], pour les écoulements monophasiques. Plusieurs développements ont

depuis tenté d'adapter ces travaux aux écoulements à densité variable, voir [9], [3] et [37]. Dans [38], [74] et [39], des schémas numériques dont la stabilité est démontrée sont présentés. Dans [40], Guermont et Salgado ont à notre connaissance proposé la première démonstration de convergence pour une méthode de projection pour les écoulements à densité variable.

Cette thèse s'articule en trois parties.

La première partie, composée des chapitres 1, 2 et 3, est consacrée à la présentation du modèle mathématique, à la construction du schéma numérique de semi-discrétisation en temps du modèle, ainsi qu'à l'analyse du schéma de semi-discrétisation en temps obtenu. Pour construire le schéma, nous avons adapté les schémas de type pas de temps fractionné existants pour les écoulements newtoniens au cas des écoulements à seuil. La difficulté liée à la non différentiabilité du tenseur des contraintes dans les zones rigides (*i.e.* quand le tenseur des taux de déformation s'annule) est surmontée en utilisant une formulation en terme de projection pour le tenseur des contraintes, et résolu par une méthode de type Uzawa pour les écoulements viscoplastiques. Un terme de relaxation est ajouté dans la projection de Bingham, ce qui assure une convergence géométrique de l'algorithme de point fixe. Nous démontrons mathématiquement la stabilité et la convergence du schéma. L'erreur induite par le terme de relaxation est contrôlée par un paramètre numérique, ce qui nous permet d'obtenir une estimation d'erreur en temps d'ordre un pour la vitesse, la densité, la viscosité ainsi que le seuil de plasticité. Ce travail a été publié dans [16].

La deuxième partie, composée du chapitre 4, est consacrée à la discrétisation en espace et à l'implémentation du schéma. La discrétisation en espace est effectuée à l'aide d'une méthode d'ordre deux de type volumes finis sur grilles décalées. La gestion de l'interface entre les deux phases de l'écoulement est gérée en utilisant la méthode Level Set. L'implémentation de l'algorithme a été réalisée à partir d'un code Fortran 90 validé pour les écoulements viscoplastiques monophasiques dans [20], et parallélisé et utilisant les bibliothèques Petsc et MPI. Il a été modifié via la formulation Level Set afin de prendre en compte les fluides biphasiques, ainsi que le nouveau schéma de type pas de temps fractionné utilisé pour résoudre l'équation de la conservation de la quantité de mouvement.

La dernière partie de cette thèse, composée des chapitres 5 et 6, est consacrée à la réalisation de simulations numériques à l'aide du code de calcul que l'on a ainsi construit. Ces simulations ont été réalisées sur le serveur de calcul du laboratoire de mathématiques Blaise Pascal, c'est-à-dire un cluster de 16 nœuds (2 processeurs XEON de 8 cœurs chacun) dont la gestion est pilotée par PBS. On commence par se placer dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans le chapitre 5. On retrouve numériquement l'ordre un démontré mathématiquement dans la première partie. On réalise ensuite des simulations en faisant varier le seuil de plasticité et en se focalisant sur la phénoménologie de l'écoulement. Nous décrivons l'évolution de l'interface entre les deux phases et la localisation des zones rigides. Une partie

de ce travail a été publiée dans [17]. On réalise enfin le même type de simulations dans la configuration de rupture de barrage (chapitre 6). Dans cette configuration, nous mettons en oeuvre les conditions aux limites de type *glissement à seuil*, plus réalistes physiquement que les conditions de Dirichlet. Les résultats obtenus à l'aide de notre nouveau schéma sont comparés à la littérature existante et nous obtenons une bonne correspondance. Un article présentant ces résultats est en cours de rédaction.

Chapitre 1

Le modèle mathématique

Ce chapitre a pour but d'introduire le modèle mathématique que l'on utilisera au cours de la thèse. Nous présenterons aussi quelques résultats d'existence et de régularité sur le modèle de Navier-Stokes avec rhéologie de Bingham, ainsi que sur le modèle de Navier-Stokes à densité variable. Nous présenterons ensuite quelques méthodes numériques pouvant être utilisées pour la simulation numérique des écoulements viscoplastiques, avant de présenter le schéma de semi-discrétisation en temps que l'on utilisera au cours de cette thèse.

1.1 Obtention des équations

Les lois de conservation. Nous nous intéressons aux équations régissant les écoulements de fluides visco-plastiques incompressibles et isothermes. Ces équations se déduisent de bilans sur des volumes de contrôle de grandeurs qui sont conservées au fil de l'écoulement : la masse, la quantité de mouvement (et énergie). Dans le cas des fluides isothermes, la conservation de la masse et de la quantité de mouvement seront suffisantes pour écrire un système fermé. Le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à [94] ou [14] pour plus de détails sur l'obtention de ces équations.

Nous nous plaçons dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^d avec $d = 2$ ou $d = 3$. On note $\partial\Omega$ le bord du domaine. Le temps d'observation ou de simulation de l'écoulement est noté $T > 0$. L'équation traduisant le principe de conservation de la masse, également appelée équation de continuité, est la suivante :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \quad (1.1)$$

avec ρ la densité et \mathbf{u} la vitesse du fluide. Par ailleurs, l'équation traduisant le principe de conservation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{P} = \rho \mathbf{f} \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \quad (1.2)$$

avec \mathbf{P} le tenseur des contraintes (qui est symétrique) et \mathbf{f} la densité massique de force, qui représente des forces extérieures subies par l'écoulement (et qui se réduira dans les simulations que l'on effectue par la suite à l'accélération de pesanteur). Lorsque le fluide est en mouvement, on sépare les effets de la pression p et les effets du mouvement en écrivant le tenseur des contraintes sous la forme

$$\mathbf{P} = \mathcal{T} - p\mathbf{Id},$$

avec $\text{tr } \mathcal{T} = 0$. Le nouveau tenseur \mathcal{T} (bien entendu symétrique) sera appelé *tenseur des contraintes viscoplastiques*. La contrainte d'incompressibilité se traduit par le fait que la dérivée particulaire (le long d'une trajectoire d'une particule de fluide) de la densité est nulle, c'est-à-dire

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega.$$

Combinée à l'équation de conservation de la masse (et en supposant $\rho > 0$), la contrainte d'incompressibilité se confond donc avec la relation d'isovolume et s'écrit

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega. \quad (1.3)$$

Le système d'équations (1.1)-(1.2)-(1.3) est complété par des conditions initiales sur la densité et la vitesse, qui lorsque $\rho > 0$ consistent à prescrire

$$\rho(t=0) = \rho_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{avec } \text{div } \mathbf{u}_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.4)$$

La description du comportement du fluide nécessite aussi une loi de comportement rhéologique, encore appelée équation constitutive. Nous utilisons le modèle de Bingham pour prendre en compte le caractère viscoplastique de l'écoulement que l'on souhaite modéliser. Ce modèle nous permettra de relier \mathcal{T} au tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}\mathbf{u}$ (défini comme la partie symétrique du gradient de la vitesse)

Fluides à seuil : modèle rhéologique de Bingham. Un fluide de Bingham ne se déforme que lorsque la contrainte dépasse un certain seuil $\alpha \geq 0$. Au delà de ce seuil, la déformation est alors proportionnelle à la contrainte. Cela se traduit mathématiquement par la relation (voir [12], [28], [29] par exemple)

$$\mathcal{T} = 2\mu\mathbf{D}\mathbf{u} + \alpha \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|}, \quad (1.5)$$

où $\mu > 0$ est appelé viscosité. La notation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ désigne le second invariant du tenseur des taux de déformation :

$$|\mathbf{D}\mathbf{u}| = \left(\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} |(\mathbf{D}\mathbf{u})_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.6)$$

Quand $\alpha > 0$, la définition du dessus n'a pas de sens dans les zones rigides, c'est-à-dire dans les sous-domaines de $(0, T) \times \Omega$ où le tenseur des taux de déformation s'annule. Pour remédier à cela, l'équation constitutive est reformulée comme suit (voir [76] par exemple)

$$\mathcal{T} = 2\mu \mathbf{D}\mathbf{u} + \alpha \boldsymbol{\Sigma}, \quad (1.7)$$

avec $\boldsymbol{\Sigma}$, la partie plastique du tenseur des contraintes, définie par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|} & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\Sigma}| \leq 1, \quad {}^T\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}, \quad \text{tr } \boldsymbol{\Sigma} = 0 & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Les coefficients variables. Dans tout ce qui suit, nous supposons que la densité initiale est comprise entre deux bornes positives presque partout (*p.p.*) dans Ω , *i.e.*,

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_0 \leq \rho_{\max}. \quad (1.9)$$

De plus, nous ferons l'hypothèse que la viscosité μ et le seuil de plasticité α dépendent uniquement de la densité, *i.e.* $\mu = \mu(\rho)$ et $\alpha = \alpha(\rho)$. On supposera de plus que ces fonctions sont positives et de classe \mathcal{C}^1 . Ce modèle est donc capable de rendre compte de l'écoulement de deux fluides non miscibles ayant des caractéristiques (densité, viscosité et seuil de plasticité) différentes, mais sans tension de surface.

Quelques notations. Avant d'énoncer les conditions au bord qui nous permettront de fermer le système, nous avons besoin d'introduire quelques notations, que nous utiliserons dans toute la suite de ce document. Pour tout vecteur \mathbf{v} et \mathbf{w} de \mathbb{R}^d , on note $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ leur produit scalaire :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{1 \leq i \leq d} v_i w_i,$$

et $|\cdot|$ la norme induite. Pour deux tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} dans $\mathbb{R}^{d \times d}$, on note $\mathbf{A}\mathbf{B}$ le produit matriciel usuel et $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ le produit tensoriel contracté (que l'on appellera encore, par abus de langage, produit scalaire) :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{1 \leq i, j \leq d} A_{ij} B_{ij}.$$

Rappelons que la norme tensorielle $|\cdot|$ définie par (1.6), appelée norme de Froebenius, n'est pas la norme induite par le produit scalaire ci-dessus, mais nous l'utiliserons par défaut car cette quantité se confond avec le second invariant lorsqu'un tenseur est symétrique et à trace nulle. On notera \mathbf{n} la normale unitaire sortante à la frontière. Pour tout vecteur \mathbf{w} , on notera $\mathbf{w}_t = \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ sa partie tangentielle et pour tout tenseur \mathbf{A} , on notera \mathbf{A}_{nt} la partie tangentielle du vecteur $\mathbf{A}\mathbf{n}$, *i.e.* $\mathbf{A}_{nt} = (\mathbf{A}\mathbf{n})_t$.

Conditions au bord. Pour fermer le système ainsi obtenu, il est nécessaire d'imposer des conditions au bord. Plusieurs types de conditions aux limites peuvent être choisies pour fermer le système. Pour formuler le modèle de façon la plus générale possible, on décompose la frontière $\partial\Omega$ en deux parties : Γ_ω sur laquelle on appliquera des conditions de glissement à seuil ; et le reste de la frontière, $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_\omega$ sur laquelle on appliquera des conditions de Dirichlet homogène :

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma_0.$$

Lorsque nous voudrions considérer des conditions de Dirichlet homogène sur la totalité de la frontière, nous choisirons simplement $\Gamma_\omega = \emptyset$.

On définit les conditions de glissement à seuil suivant la formulation de Roquet et Saramito [76] dans $(0, T) \times \Gamma_\omega$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_{\text{nt}} = -c_f \mathbf{u}_t - c_s \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.10)$$

où la partie additionnelle de la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\sigma}$ est définie par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{u}_t}{|\mathbf{u}_t|}, & \text{si } \mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq 1, & \text{si } \mathbf{u}_t = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.11)$$

avec \mathbf{u}_t la vitesse tangentielle et \mathcal{T}_{nt} la partie tangentielle de la contrainte. Le coefficient $c_f > 0$ est un coefficient de friction. Le coefficient c_s est le seuil de glissement. On observe que lorsque $c_s = 0$, on obtient les conditions de glissement de Navier [63]. Pour $c_s > 0$, des parties de la frontière où le fluide adhère peuvent être observées. Lorsque c_s augmente, ces régions se développent. Tout comme pour la viscosité μ et le seuil de plasticité α , nous supposons que les coefficients c_f et c_s dépendent uniquement de la densité, *i.e.* $c_f = c_f(\rho)$ et $c_s = c_s(\rho)$, et on supposera que ce sont des fonctions positives et de classe \mathcal{C}^1 .

Remarquons l'analogie entre la formulation de la partie plastique du tenseur des contraintes (1.7)-(1.8) et la formulation des conditions de glissement à seuil (1.10)-(1.11). Cela nous permettra par un raisonnement analogue de reformuler ces deux définitions en terme de projection, et ainsi d'obtenir de nouvelles caractérisations de $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ que nous utiliserons pour discrétiser le modèle. Cette reformulation est l'objet du paragraphe suivant.

Formulation sous forme de projection. Nous présentons tout d'abord la formulation sous forme de projection pour la partie plastique du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$.

Proposition 1. *Pour tout $\ell_c > 0$, la définition (1.8) est équivalente à la relation*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{D}\mathbf{u}), \quad (1.12)$$

où \mathbb{P}_Λ est l'opérateur de projection sur le convexe fermé défini par

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{d \times d}; \quad |\boldsymbol{\lambda}| \leq 1, \quad {}^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}, \quad \text{tr } \boldsymbol{\lambda} = 0\}.$$

Démonstration. La démonstration se fait ponctuellement. Cependant, pour simplifier l'écriture, on omettra la dépendance (t, \mathbf{x}) des variables tout au long de la démonstration.

Si $\mathbf{Du} = 0$, l'équivalence est évidente puisque on a $\boldsymbol{\Sigma} \in \Lambda$.

On suppose maintenant que $\mathbf{Du} \neq 0$. Pour tout tenseur $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, symétrique et à trace nulle, la projection sur Λ est donnée explicitement par :

$$\mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} & \text{if } |\boldsymbol{\lambda}| \leq 1, \\ \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|} & \text{if } |\boldsymbol{\lambda}| > 1. \end{cases} \quad (1.13)$$

Soit un réel $\ell_c > 0$. Si (1.8) est vérifiée, on a

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\mathbf{Du}}{|\mathbf{Du}|}.$$

Par conséquent,

$$|\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{Du}| = \left| \frac{\mathbf{Du}}{|\mathbf{Du}|} (1 + \ell_c |\mathbf{Du}|) \right| = 1 + \ell_c |\mathbf{Du}| > 1,$$

et donc, en utilisant (1.13), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{Du}) &= \frac{\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{Du}}{|\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{Du}|} \\ &= \frac{\frac{\mathbf{Du}}{|\mathbf{Du}|} (1 + \ell_c |\mathbf{Du}|)}{1 + \ell_c |\mathbf{Du}|} \\ &= \frac{\mathbf{Du}}{|\mathbf{Du}|} \\ &= \boldsymbol{\Sigma}, \end{aligned}$$

Par conséquent, (1.12) suit.

Supposons maintenant que (1.12) est vérifiée. On a nécessairement $|\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{Du}| > 1$ (sinon, en utilisant (1.13) et vu qu'on suppose $\mathbf{Du} \neq 0$, on aurait $\ell_c = 0$). Par conséquent, en utilisant la caractérisation (1.13), on a :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{Du}}{|\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{Du}|}. \quad (1.14)$$

On a donc d'une part $|\boldsymbol{\Sigma}| = 1$, et d'autre part, en factorisant par $\boldsymbol{\Sigma}$ la relation (1.14), on a

$$\boldsymbol{\Sigma} (|\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{Du}| - 1) = \ell_c \mathbf{Du},$$

et donc

$$|\mathbf{D}\mathbf{u}| = \frac{|\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{D}\mathbf{u}| - 1}{\ell_c}.$$

La relation (1.14) se réécrit donc

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|},$$

ce qui conclut la preuve. \square

Remarque 1. Les relations (1.8) et (1.12) étant des relations ponctuelles, c'est-à-dire satisfaites p.p. dans $(0, T) \times \Omega$, la démonstration précédente nous montre donc que ℓ_c peut dépendre de t et \mathbf{x} , et nous utiliserons cela lors de la discrétisation.

De façon analogue, $\boldsymbol{\sigma}$ peut être reformulé en terme de projection :

Proposition 2. Pour tout $r_c > 0$, la définition (1.11) est équivalente à la relation

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma} + r_c \mathbf{u}_t), \quad (1.15)$$

où $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ est l'opérateur de projection sur la boule unité de \mathbb{R}^d .

Cette proposition se démontre de façon parfaitement analogue à la Proposition 1.

Bilan. Le modèle mathématique que l'on utilisera est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \rho(t = 0) = \rho_0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\mu(\rho)\mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}(\alpha(\rho)\boldsymbol{\Sigma}) - \rho \mathbf{g}, \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{P}_{\Lambda}(\boldsymbol{\Sigma} + \ell_c \mathbf{D}\mathbf{u}), \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times \Gamma_{\omega}, \\ \mathcal{T}_{\mathbf{nt}} = -c_f(\rho)\mathbf{u}_t - c_s(\rho)\boldsymbol{\sigma}, \quad \text{dans } (0, T) \times \Gamma_{\omega}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma} + r_c \mathbf{u}_t), \quad \text{dans } (0, T) \times \Gamma_{\omega}, \\ \mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Remarque 2. *Nous avons formulé l'équation de conservation de la masse et le terme d'accélération dans l'équation de conservation du moment sous forme non conservative dans le système (1.16), car c'est sous cette forme que nous les discrétiserons par la suite. Il est important de garder en tête que la contrainte d'incompressibilité nous permet d'écrire de façon équivalente la forme conservative ou non.*

1.2 Formulation faible, existence de solutions

Le modèle que nous utilisons possède deux difficultés principales : d'une part l'utilisation de la loi rhéologique de Bingham dans la formulation du tenseur des contraintes et d'autre part la prise en compte de la densité variable, régie par l'équation de conservation de la masse, ainsi que des coefficients variables dépendant de la densité. A notre connaissance, ces deux difficultés n'ont encore jamais été traitées simultanément concernant la question d'existence de solution. Nous allons dans cette section présenter les résultats principaux portant sur le modèle de Navier-Stokes avec rhéologie de Bingham d'une part, ainsi que ceux sur le modèle de Navier-Stokes à densité variable d'autre part.

1.2.1 Quelques espaces fonctionnels

Nous utilisons les notations standard $L^p(\Omega)$ pour désigner les espaces de Lebesgue et $W^{m,p}(\Omega)$ pour désigner les espaces de Sobolev sur Ω :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq m, \quad \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\},$$

où pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ on note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f$. On munit les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ de leur norme naturelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } p < +\infty, \\ \|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \end{array} \right.$$

Lorsque $p = 2$, ces espaces sont en particulier des espaces de Hilbert et on utilisera la notation $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. On désigne par $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω , et on notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions, c'est-à-dire l'espace dual de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. On notera $W_0^{m,p}(\Omega)$, respectivement $H_0^m(\Omega)$, l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, respectivement $H^m(\Omega)$. La norme correspondant à $H^k(\Omega)$ sera notée $\|\cdot\|_k$. En particulier, nous noterons $\|\cdot\|$ la norme dans $L^2(\Omega)$. Nous serons aussi amenés à considérer d'autres espaces fonctionnels dans la suite. Dans ce cas, nous indiquerons toujours en indice l'espace correspondant : par exemple $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ désigne la norme associée à l'espace $L^\infty(\Omega)$. On notera (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Comme pour les normes, on indiquera en

indice l'espace correspondant quand on utilisera le produit scalaire d'autres espaces. On notera $L_0^2(\Omega)$ le sous espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions à moyenne nulle. Pour chacun des espaces ci-dessus, nous utiliserons des lettres grasses pour désigner leur analogue vectoriel ou tensoriel. Par exemple, $L^2(\Omega)^d$ sera noté $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

La contrainte d'incompressibilité nous amène à considérer l'ensemble \mathbf{V} des fonctions régulières à support compact dans Ω , dont la divergence est nulle

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}.$$

On note \mathbf{V} l'adhérence de \mathbf{V} dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et \mathbf{H} l'adhérence de \mathbf{V} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Les espaces \mathbf{V} et \mathbf{H} sont caractérisés de la façon suivante (voir [14], p.133)

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\},$$

et

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0\}.$$

1.2.2 Équations de Navier-Stokes avec rhéologie de Bingham

On commence par le problème de Navier-Stokes avec rhéologie de Bingham. Ce problème peut être vu comme un cas particulier de (1.16) avec ρ constant et $\Gamma_\omega = \emptyset$:

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mathbf{P}) + \mathbf{f}, & \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & & \text{dans } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.17)$$

avec

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{Id} + 2\mu\mathbf{D}\mathbf{u} + \alpha\boldsymbol{\Sigma}$$

et $\boldsymbol{\Sigma}$ défini par (1.8).

Formulation faible. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ une fonction test. En multipliant par $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ l'équation de la conservation de la quantité de mouvement de (1.17) et en intégrant sur Ω , il vient, après intégration par parties

$$\int_\Omega \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_\Omega 2\mu\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_\Omega \alpha\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

En utilisant la définition de $\boldsymbol{\Sigma}$ (1.8), on a $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}\mathbf{u} = 2|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ et $|\boldsymbol{\Sigma}| \leq 1$. En utilisant de plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) &\leq \int_\Omega \alpha(\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Sigma})^{1/2} (\mathbf{D}\mathbf{v} : \mathbf{D}\mathbf{v})^{1/2} - \int_\Omega 2\alpha|\mathbf{D}\mathbf{u}| \\ &\leq \int_\Omega 2\alpha|\mathbf{D}\mathbf{v}| - \int_\Omega 2\alpha|\mathbf{D}\mathbf{u}|. \end{aligned}$$

On a donc finalement en utilisant les deux équations précédentes

$$\int_{\Omega} \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mu a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \alpha j(\mathbf{v}) - \alpha j(\mathbf{u}) \geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

où

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2 \int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{v} : \mathbf{D}\mathbf{w} \quad \text{et} \quad j(\mathbf{v}) = 2 \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{v}|.$$

Ainsi nous avons obtenu le résultat suivant

Théorème 1. *Si $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ est une solution régulière de (1.17) alors*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{dans } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \mu a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + \alpha j(\mathbf{v}) - \alpha j(\mathbf{u}(t)) \\ \geq \int_{\Omega} \left(\mathbf{f} - \rho(\mathbf{u}'(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t)) \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)), & \forall t \in (0, T), \quad \forall \mathbf{v}, \end{cases} \quad (1.18)$$

où \mathbf{v} est un vecteur test tel que

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = 0, \quad \text{dans } \partial\Omega,$$

et complété par la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

Remarque 3. *Suivant [23], on peut aussi montrer l'existence d'un tenseur Σ tel que la formulation en terme d'inéquation variationnelle (1.18) implique (1.17)-(1.8). Montrons le formellement dans le cas où $\mathbf{D}\mathbf{u} \neq 0$.*

Lorsque $\mathbf{D}\mathbf{u} \neq 0$ – i.e. si la fonctionnelle $\mathbf{v} \rightarrow j(\mathbf{v})$ est dérivable en \mathbf{u} – la dernière équation de (1.18) équivaut à

$$\mu a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \alpha (j'(\mathbf{u}(t)), \mathbf{v}) = \left(\mathbf{f} - \rho(\mathbf{u}'(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t)), \mathbf{v} \right), \quad (1.19)$$

où

$$(j'(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \frac{d}{d\lambda} j(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \Big|_{\lambda=0} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{v}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|}.$$

En effet, en remplaçant \mathbf{v} par $\mathbf{u}(t) + \lambda \mathbf{v}$, $\lambda > 0$ dans (1.18), il vient

$$\mu a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \alpha \left(\frac{j(\mathbf{u}(t) + \lambda \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t))}{\lambda} \right) \geq \int_{\Omega} \left(\mathbf{f} - \rho(\mathbf{u}'(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t)) \right) \cdot \mathbf{v},$$

et en faisant tendre λ vers 0,

$$\mu a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \alpha (j'(\mathbf{u}(t)), \mathbf{v}) \geq \left(\mathbf{f} - \rho(\mathbf{u}'(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t)), \mathbf{v} \right),$$

d'où (1.19) en faisant le même raisonnement avec $-\mathbf{v}$ à la place de \mathbf{v} . D'autre part, (1.19) équivaut à

$$-2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{D}\mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{v} - \alpha \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{u}(t)}{|\mathbf{D}\mathbf{u}(t)|} \right) \cdot \mathbf{v} = \left(\mathbf{f} - \rho(\mathbf{u}'(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t)), \mathbf{v} \right), \quad (1.20)$$

pour tout \mathbf{v} vérifiant $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Or si \mathbf{F} est un vecteur orthogonal aux vecteurs à divergence nulle, i.e.

$$\int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v},$$

alors il existe p (défini à une constante additive près) tel que

$$\mathbf{F} = \nabla p.$$

Par conséquent, (1.20) équivaut à

$$\operatorname{div} \left(-2\mu \mathbf{D}\mathbf{u} - \alpha \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|} \right) = \mathbf{f} - \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nabla p.$$

Existence et régularité. On peut distinguer deux types de méthodes pour démontrer l'existence de solution pour le problème d'inéquation variationnelle (1.18) : Les méthodes non constructives se basant sur le Théorème de Hahn-Banach, et les méthodes constructives basées sur des procédures de régularisation. A notre connaissance, les premiers résultats généraux d'existence et de régularité sont issus de [28]. Il y est démontré le résultat suivant :

Théorème 2. Soit $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$. Il existe une fonction \mathbf{u} telle que

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}), \quad \partial_t \mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}'_{d/2}), \quad (1.21)$$

et vérifie (1.18), où on a noté $\mathbf{V}_{d/2}$ l'adhérence de \mathbf{V} dans $\mathbf{H}^{d/2}(\Omega)$.

De plus, \mathbf{u} est unique en dimension $d = 2$.

Le schéma de la démonstration a donné naissance à la classe de méthodes numériques de régularisation. Nous allons donner les grandes lignes de cette démonstration :

On approche la fonctionnelle j par une fonctionnelle différentiable. Dans [28], il est choisi

$$j_\epsilon(\mathbf{v}) = \frac{2}{1+\epsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D}\mathbf{v} : \mathbf{D}\mathbf{v} \right)^{\frac{1+\epsilon}{2}}, \quad \epsilon > 0,$$

mais d'autres choix sont possibles. On a alors

$$(j'_\epsilon(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \frac{d}{d\lambda} j_\epsilon(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \Big|_{\lambda=0} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D}\mathbf{v} : \mathbf{D}\mathbf{v} \right)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{v}.$$

Il est alors naturel (voir le raisonnement formel suivi dans la remarque 3) d'approcher l'inéquation variationnelle de (1.18) par l'équation

$$(\partial_t \mathbf{u}_\epsilon + \mathbf{u}_\epsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) + \mu a(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) + \alpha(j'_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad (1.22)$$

Il y a toutefois une difficulté technique dans la résolution de (1.22) si $d > 2$, qui conduit à introduire une deuxième régularisation par l'addition d'un terme de viscosité

$$\eta(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^{d/2}(\Omega)}, \quad \eta > 0.$$

On arrive donc à l'équation bi-régularisée

$$(\partial_t \mathbf{u}_{\epsilon\eta} + \mathbf{u}_{\epsilon\eta} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\epsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mu a(\mathbf{u}_{\epsilon\eta}, \mathbf{v}) + \eta(\mathbf{u}_{\epsilon\eta}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^{d/2}} + \alpha(j'_\epsilon(\mathbf{u}_{\epsilon\eta}), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \quad (1.23)$$

Le plan est alors le suivant :

- Construire des solutions approchées $\mathbf{u}_{\epsilon\eta m}$ de (1.23) par une méthode de type Galerkin,
- Montrer que $\mathbf{u}_{\epsilon\eta m}$ reste dans un borné de $L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H})$, montrer que $\eta^{1/2} \mathbf{u}_{\epsilon\eta m}$ reste dans un borné de $L^2(0, T; \mathbf{V}_{s/2})$ et montrer que $\partial_t \mathbf{u}_{\epsilon\eta m}$ reste dans un borné de $L^2(0, T; \mathbf{V}'_{s/2})$, où les bornés sont indépendants de m, ϵ et η ,
- Utiliser un raisonnement de compacité et de monotonie pour montrer que l'on peut extraire de $\mathbf{u}_{\epsilon\eta m}$ des sous suites faiblement convergentes :
 - $\mathbf{u}_{\epsilon\eta m} \rightharpoonup \mathbf{u}_{\epsilon\eta}$ dans $L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ faible étoile et $L^2(0, T; \mathbf{V})$ faible
 - $\partial_t \mathbf{u}_{\epsilon\eta m} \rightharpoonup \partial_t \mathbf{u}_{\epsilon\eta}$ dans $L^2(0, T; \mathbf{V}'_{s/2})$ faible
 - $\mathbf{u}_{\epsilon\eta m} \rightarrow \mathbf{u}_{\epsilon\eta}$ dans $L^2(0, T; \mathbf{H})$ fort
 - $u_{i\epsilon\eta m}$ (i -ème composante de $\mathbf{u}_{\epsilon\eta m}$) $\rightarrow u_{i\epsilon\eta}$ (i -ème composante de $\mathbf{u}_{\epsilon\eta}$) *p.p.* dans $(0, T) \times \Omega$
- de sorte que $\mathbf{u}_{\epsilon\eta}$ vérifie (1.23) et de plus :
 - $\mathbf{u}_{\epsilon\eta}$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H})$,
 - $\partial_t \mathbf{u}_{\epsilon\eta}$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; \mathbf{V}'_{s/2})$
 - $\eta^{1/2} \mathbf{u}_{\epsilon\eta}$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; \mathbf{V}_{s/2})$
- Passage à la limite sur ϵ et η à l'aide des bornes précédemment établies :
 - $\mathbf{u}_{\epsilon\eta} \rightarrow \mathbf{u}$ dans $L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ faible étoile et $L^2(0, T; \mathbf{V})$ faible,
 - $\partial_t \mathbf{u}_{\epsilon\eta} \rightharpoonup \partial_t \mathbf{u}$ dans $L^2(0, T; \mathbf{V}')$ faible,
- On montre enfin que \mathbf{u} vérifie bien (1.18).

Un autre résultat important montré dans [28] en dimension $d = 2$ est que la vitesse \mathbf{u} solution du problème de Bingham (1.18) (qui est alors unique) converge vers la vitesse solution du problème de Navier-Stokes lorsque le seuil de plasticité α tend vers 0.

Dans [8], les auteurs démontrent l'existence de solutions pour le problème de Bingham non homogène (mais avec une viscosité et un seuil de plasticité constant) pour un écoulement

bi-dimensionnel dans un domaine borné avec des conditions aux limites périodiques. Ils utilisent une méthode différente de celle employée dans [28], puisqu'ils considèrent le système d'inconnues $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{u}, \rho, p)$, et n'utilisent pas d'inéquation variationnelle : ils régularisent directement la loi constitutive en l'écrivant sous la forme

$$\left(2\mu + \frac{\alpha}{\sqrt{|\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 + \epsilon^2}}\right) \mathbf{D}\mathbf{u}$$

puis ils définissent les fluides de Bingham comme limite de fluides "non-linéaires" en faisant tendre ϵ vers 0. Ils obtiennent l'existence de solution de la classe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), & \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)) \\ \partial_t \mathbf{u} &\in \mathbf{L}^2(\Omega)((0, T) \times \Omega), & p &\in \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega), & \rho &\in L^\infty((0, T) \times \Omega). \end{aligned}$$

Retour au repos en temps fini. Une propriété importante vérifiée par les fluides de Bingham est la propriété de retour au repos en temps fini, même en présence de forces extérieures non nulles. Dans [26], il est montré sous certaines hypothèses sur les forces extérieures \mathbf{f} (dépendant de la vitesse initiale \mathbf{u}_0 et du seuil de plasticité α) l'existence d'un temps d'extinction T_e satisfaisant

$$\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}, \quad \forall t \geq T_e.$$

La démonstration de ce résultat se base sur une estimation d'énergie, en utilisant l'inégalité de Nirenberg-Strauss

$$\|\mathbf{v}\| \leq \frac{1}{C_N} \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (1.24)$$

(voir [85]) et l'inégalité de Poincaré (combinée à l'inégalité de Korn, voir proposition 3)

$$\|\mathbf{v}\| \leq C_P \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (1.25)$$

où C_N et C_P sont des constantes positives. En multipliant l'équation de la conservation de la quantité de mouvement du modèle de Bingham (1.17) par $\mathbf{u}(t)$, en intégrant sur Ω , en intégrant par parties et en utilisant $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités (1.24) et (1.25), on obtient

$$\frac{\rho}{2} \partial_t \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \mu C_N \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \alpha C_P^{-1} \|\mathbf{u}(t)\| \leq \|\mathbf{f}(t)\| \|\mathbf{u}(t)\|. \quad (1.26)$$

Ensuite, si on suppose que $\|\mathbf{u}(t)\| > 0$ pour tout $t \in [0, T]$, on obtient que $\|\mathbf{u}(t)\|$ est majorée par la solution $z(t)$ de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} z'(t) + \frac{\mu C_N}{\rho} z(t) = \frac{1}{\rho} \|\mathbf{f}(t)\| - \frac{\alpha}{C_P \rho}, \\ z(0) = \|\mathbf{u}_0\|. \end{cases}$$

On arrive alors à une contradiction en raisonnant sur le signe de $z(t)$, d'où l'existence d'un temps d'extinction T_e satisfaisant $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}, \quad \forall t \geq T_e$.

1.2.3 Équations de Navier-Stokes à densité variable

On présente maintenant quelques résultats d'existence et de régularité pour le problème de Navier-Stokes à densité et viscosité variables. Ce problème peut être vu comme un cas particulier de (1.16) avec $\alpha = 0$ et $\Gamma_\omega = \emptyset$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\mu(\rho)\mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f}, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.27)$$

Complété par les conditions initiales $\rho(t = 0) = \rho_0$, $\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0$ dans le cas où $\inf_\Omega(\rho_0) > 0$. Dans le cas plus général où $\inf_\Omega(\rho_0) \geq 0$ (*i.e.* dans le cas où l'on prend en compte les phénomènes avec du vide), les conditions initiales doivent alors porter sur le couple $(\rho, \rho\mathbf{v})$.

Dans [14], les auteurs montrent le résultat d'existence suivant pour le problème (1.27) :

Théorème 3. *Si la fonction μ donnant la viscosité en fonction de la densité est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie*

$$\exists \mu_1, \mu_2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_2, \quad \text{et } \mu' \text{ est bornée,}$$

si ρ_0 est une fonction positive de $L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ et $\mathbf{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathbf{L}^2(\Omega))$, alors il existe au moins un triplet (\mathbf{u}, ρ, p) satisfaisant

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.28)$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\mu(\rho)\mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.29)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.30)$$

au sens des distributions, ainsi que les différentes propriétés de régularité :

$$\begin{aligned} & \text{— } \mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}), \rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap N_2^{1/4}(0, T; \mathbf{W}^{-1,3}(\Omega)), \\ & \text{et } p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2_0(\Omega)), \end{aligned}$$

$$\text{— pour tout } \varphi \in \mathbf{V}, t \rightarrow \int_\Omega \rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \varphi \in \mathcal{C}^0([0, T]),$$

$$\text{— } \inf_\Omega \rho_0 \leq \rho \leq \sup_\Omega \rho_0, \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

$$\text{— } \rho \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, L^s(\omega)), \text{ pour tout } s \in [1, +\infty],$$

et enfin, les conditions initiales au sens faible suivant :

$$\begin{cases} \rho(t = 0) = \rho_0, \\ t \rightarrow \int_\Omega \rho(t = 0)\mathbf{v}(t = 0) \cdot \varphi = \int_\Omega \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}. \end{cases}$$

Si de plus on suppose que $\inf_{\Omega} \rho_0 > 0$, alors

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap N_2^{1/4}(0, T; \mathbf{H}).$$

Les espaces de Nikolskii $N_q^\sigma(0, T; E)$ sont définis de la façon suivante : Pour tout f dans $L^p(0, T; X)$, on note \tilde{f} le prolongement par 0 de f à \mathbb{R} tout entier puis, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on note $\tau_h f$ la translatée de \tilde{f} définie par

$$\tau_h f(\cdot) = \tilde{f}(\cdot + h).$$

La restriction de $\tau_h f$ à l'intervalle $(0, T)$ est bien entendu dans $L^p(0, T; X)$. On note alors

$$N_q^\sigma(0, T; E) = \left\{ f \in L^q(0, T; E), \quad \sup_{0 < h < T} \frac{\|\tau_h f - f\|_{L^q(0, T-h; E)}}{h^\sigma} < +\infty \right\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{N_q^\sigma(0, T; E)} = \left(\|f\|_{L^q(0, T; E)}^q + \sup_{0 < h < T} \left(\frac{1}{h^\sigma} \|\tau_h f - f\|_{L^q(0, T-h; E)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Intuitivement, cela revient à remplacer une condition sur la dérivée en temps de f par une condition de type Hölder, donc plus faible.

Nous allons maintenant décrire les grandes lignes de la démonstration du théorème 3.

Étape 1 : Résolution de l'équation de transport. Soit $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ un champ de vecteur donné de $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ vérifiant $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ et $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy pour l'équation de transport :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \rho(t = 0) = \rho_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.31)$$

Supposons dans un premier temps \mathbf{u} et ρ_0 suffisamment régulières, disons $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \bar{\Omega})$, et $\rho_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec ρ_0 bornée. On peut alors résoudre le problème (1.31) par la méthode des caractéristiques. Celle-ci revient à constater que la solution, si elle existe, est constante le long des trajectoires du flot associé à \mathbf{u} . En introduisant la fonction $s \rightarrow \mathbf{X}(s, t, \mathbf{x})$, position d'une particule à l'instant s se trouvant en position \mathbf{x} à l'instant t , définie par

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \mathbf{X}(s, t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(s, \mathbf{X}(s, t, \mathbf{x})), \\ \mathbf{X}(t, t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \end{cases}$$

on a alors que le problème (1.31) possède une unique solution de classe \mathcal{C}^1 définie par

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{X}(0, t, \mathbf{x})).$$

En vue du couplage de l'équation de transport avec le reste du système, on ne peut cependant pas supposer la régularité sur \mathbf{u} nécessaire pour appliquer la méthode des caractéristiques. En effet, on ne peut espérer plus de régularité sur \mathbf{u} que dans le cas ρ constant, à savoir $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$. Il faut donc introduire la notion de *solution faible* de l'équation de transport :

Si $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\mathbf{u} \in L^1(0, T; \mathbf{W}^{1,1}(\Omega))$ avec $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$. On dit qu'une fonction $\rho \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$ est une solution faible de (1.31) si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ on a

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi) dt + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0) = 0. \quad (1.32)$$

Existence de solutions faibles : Montrer l'existence de solution faible pour l'équation (1.32) est assez aisé : on régularise les données et on utilise la méthode des caractéristiques, puis on raisonne par densité. On a alors l'existence d'au moins une solution faible $\rho \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$ de l'équation (1.32).

Unicité des solutions faibles et principe du maximum : Démontrer l'unicité des solutions faibles est une tâche plus difficile. En effet, la technique classique consistant à prendre comme fonction test la différence de deux solutions – qui revient à montrer que 0 est l'unique solution pour la donnée initiale nulle – nécessite plus de régularité que celle que l'on a à priori, cette différence étant dans $L^\infty([0, T])$. Il faut donc faire appel à la *méthode des solutions renormalisées*, introduite par R.Di Perna et P.L. Lions [27], afin d'obtenir plus de régularité sur la solution et de pouvoir justifier ce calcul. Précisément, les auteurs démontrent que si ρ_0 et \mathbf{u} vérifient les conditions requises dans la formulation faible (1.32) et si ρ est une solution faible alors :

- La fonction ρ est dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^p(\Omega))$ pour tout $p \in [1; +\infty[$, et de plus $\rho(0) = \rho_0$. Par ailleurs, pour tous $t_1, t_2 \in [0, T]$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \rho(\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi) dt + \int_\Omega \rho(t_1) \varphi(t_1) = \int_\Omega \rho(t_2) \varphi(t_2). \quad (1.33)$$

- Pour toute fonction numérique $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , la fonction $\beta(\rho)$ est une solution faible de l'équation (1.32) pour le champ de vecteur \mathbf{u} et la donnée initiale $\beta(\rho_0)$.

On démontre alors l'unicité de la façon suivante : Supposant $\rho \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$ une solution faible pour la donnée initiale nulle, on applique le résultat précédent avec $\beta(x) = x^2$, de sorte que ρ^2 est aussi une solution faible pour la donnée initiale nulle. Ainsi, en choisissant $t_1 = 0$ et $\varphi = 1$ dans (1.33), il vient que pour tout $t_2 \in [0, T]$,

$$\int_\Omega \rho^2(t_2) = 0,$$

de sorte que ρ est nulle. Pour démontrer le principe du maximum, on choisit maintenant une fonction positive β de classe \mathcal{C}^2 , telle que $\beta(x) = 0$ si et seulement si x est dans l'intervalle $[\inf_{\Omega} \rho_0, \sup_{\Omega} \rho_0]$. Par construction, $\beta(\rho_0)$ est identiquement nulle et donc $\beta(\rho)$ est la solution de l'équation de transport pour la donnée initiale nulle. On en déduit donc par unicité que $\beta(\rho)$ est identiquement nulle, et donc que ρ prend ces valeurs dans l'intervalle $[\inf_{\Omega} \rho_0, \sup_{\Omega} \rho_0]$.

La méthode des solutions renormalisées permet également d'obtenir un résultat de compacité sur les familles de solutions de l'équation de transport, qui sera fondamental lorsque l'on considérera le système d'équation complet (1.27) :

Sous les hypothèses $\rho_0^n \in L^\infty(\Omega)$, avec $(\rho_0^n)_0$ bornée dans $L^\infty(\Omega)$, et $\mathbf{u}_n \in L^1(0, T; \mathbf{W}^{1,1}(\Omega))$ avec $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$; Si $(\rho_0^n)_n$ converge dans $L^1(\Omega)$ vers une fonction ρ_0 et $(\mathbf{u}_n)_n$ converge dans $\mathbf{L}^1((0, T) \times \Omega)$ vers un champ de vecteurs $\mathbf{u} \in L^1(0, T; \mathbf{W}^{1,1}(\Omega))$, en notant ρ_n l'unique solution faible du problème de Cauchy pour l'équation de transport associé à (ρ_0^n, \mathbf{u}_n) , alors ρ_n converge fortement dans $L^p((0, T) \times \Omega)$, pour tout p fini vers ρ , l'unique solution faible du problème de Cauchy pour l'équation de transport associé à (ρ_0, \mathbf{u}) .

Étape 2 : Problème approché pour le système complet (1.27). On définit le problème approché suivant : On note $\bar{\rho}_0$ le prolongement de ρ_0 par 0 en dehors de Ω , puis on introduit la donnée initiale régularisée

$$\rho_0^k = (\eta_{\frac{1}{k}} \star \bar{\rho}_0) + \frac{1}{k},$$

où \star désigne le produit de convolution et η_ϵ est un noyau de régularisation, dont le support (radial) tend vers $\{\mathbf{0}\}$ lorsque ϵ tend vers 0. Ainsi, ρ_0^k est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , minorée par $\frac{1}{k}$ et dont la restriction à Ω converge vers ρ_0 dans $L^\infty(\Omega)$ faible étoile et dans $L^1(\Omega)$ fort. On pose $\mathbf{u}_0^k = \mathcal{P}_k(\mathbf{u}_0)$, où \mathcal{P}_k désigne la projection orthogonale dans \mathbf{H} sur \mathbf{V}_k , espace de dimension finie engendré par les k premières fonctions propres de l'opérateur de Stokes. Le problème approché est alors le suivant : trouver un couple $(\rho_k, \mathbf{u}_k) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \Omega) \times \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbf{V}_k)$ vérifiant l'équation de transport

$$\partial_t \rho_k + \mathbf{u}_k \cdot \nabla \rho_k = 0, \quad (1.34)$$

et pour tout $\psi_k \in \mathbf{V}_k$,

$$\int_{\Omega} \rho_k \left(\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{u}_k - \mathbf{f} \right) \cdot \psi_k + 2\mu(\rho_k) \mathbf{D}\mathbf{u}_k : \mathbf{D}\psi_k = 0, \quad (1.35)$$

avec les conditions initiales

$$\rho_k(t=0) = \rho_0^k, \quad \mathbf{u}_k(t=0) = \mathbf{u}_0^k. \quad (1.36)$$

On montre alors que le problème (1.34)-(1.36) possède une unique solution $(\rho_k, \mathbf{u}_k) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \Omega) \times \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbf{V}_k)$, à l'aide d'une technique de point fixe remplaçant la résolution de (1.34) et (1.35) par la résolution de deux équations linéaires. Cette étape n'est

pas triviale : même si la fonction $\mathbf{u}_k(t)$ est dans un espace de dimension finie, le problème précédent ne permet pas d'appliquer les théorèmes classiques pour les systèmes différentiels ordinaires car la solution d'une équation de transport est une fonction non locale du champ de vitesse \mathbf{u}_k .

Étape 3 : Estimations à priori. L'objectif est ensuite d'obtenir des estimations sur la solution du problème (1.34)-(1.36), indépendantes de k . Précisément, on montre d'une part que pour tout $t \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} + \inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho_k(t) \leq \frac{1}{k} + \sup_{\Omega} \rho_0, \quad p.p. \text{ dans } \Omega, \\ \|\sqrt{\rho_k} \mathbf{u}_k(t)\| \leq \|\sqrt{\rho_k} \mathbf{u}_k(0)\| + \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\| ds, \\ \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_k(s)\|^2 ds \leq C\left(t, \|\mathbf{f}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}, \|\sqrt{\rho_k} \mathbf{u}_k(0)\|\right). \end{array} \right.$$

D'autre part, on montre qu'il existe une constante $C(T) > 0$ indépendante de k , telle que pour tout $0 < h < T$,

$$\|\tau_h(\rho_k \mathbf{u}_k) - \rho_k \mathbf{u}_k\|_{L^2(0,T-h,W^{-1,3}(\Omega))} \leq C(T)h^{\frac{1}{4}}.$$

Ainsi, on a les estimations à priori suivantes

- $\frac{1}{k} + \inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho_k(t) \leq \frac{1}{k} + \sup_{\Omega} \rho_0$,
- $(\partial_t \rho_k)_k$ est bornée dans $L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega))$, car $(\rho_k \mathbf{u}_k)_k$ est bornée dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^6(\Omega))$,
- $(\sqrt{\rho_k} \mathbf{u}_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$,
- $(\mathbf{u}_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$,
- $(\rho_k \mathbf{u}_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap N_2^{\frac{1}{4}}(0, T; \mathbf{W}^{-1,3}(\Omega))$.

Étape 4 : Existence de solutions faibles. En utilisant les estimations de l'étape 3, les injections de Sobolev, on démontre les résultats de convergence suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_k \rightarrow \rho \quad \text{dans } L^\infty((0, T) \times \Omega) \text{ faible étoile,} \\ \partial_t \rho_k \rightarrow \partial_t \rho \quad \text{dans } L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega)) \text{ faible,} \\ \rho_k \rightarrow \rho \quad \text{dans } \mathcal{C}^0([0, T]; W^{-1,6}(\Omega)) \text{ fort.} \end{array} \right.$$

En utilisant en outre la continuité de l'application produit $(\rho, \mathbf{u}) \rightarrow \rho \mathbf{u}$ de $W^{-1,6}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}^{-1,3}(\Omega)$, on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)) \text{ faible,} \\ \rho_k \mathbf{u}_k \rightarrow \rho \mathbf{u} \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{W}^{-1,3}(\Omega)) \text{ faible,} \end{array} \right.$$

puis que

$$\rho_k \mathbf{u}_k \rightarrow \rho \mathbf{u} \quad \text{dans } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ faible étoile.}$$

D'autre part, pour tout $q < 6$, on a

$$\rho_k \mathbf{u}_k \rightarrow \rho \mathbf{u} \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{W}^{-1, q}(\Omega)) \text{ fort,}$$

et en utilisant la continuité de l'application produit $(\rho \mathbf{u}, \mathbf{u}) \rightarrow \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ de $\mathbf{W}^{-1, q}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1, 2}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}^{-1, \sigma}(\Omega)$ avec $\sigma = \frac{6q}{6+q}$, il vient pour tout $\sigma < 3$

$$\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \rightarrow \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad \text{dans } L^1(0, T; \mathbf{W}^{-1, \sigma}(\Omega)) \text{ faible,}$$

puis

$$\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \rightarrow \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \text{ faible.}$$

En utilisant la propriété de compacité obtenue à l'aide des solutions renormalisées et les convergences précédentes, par construction des données initiales approchées on conclut la convergence forte de $(\rho_k)_k$ vers ρ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$, et aussi à la convergence forte de $\rho_k(0)$ vers ρ_0 dans $L^q(\Omega)$, pour tout $q < +\infty$. Enfin, en utilisant les hypothèses faites sur la viscosité, on a la convergence forte

$$\mu(\rho_k) \rightarrow \mu(\rho) \quad \text{dans } L^q((0, T) \times \Omega).$$

On peut alors passer à la limite dans le système (1.34)-(1.36), ce qui conclut la démonstration du théorème 3.

Nous insistons sur le fait que le théorème 3 ne donne pas de résultat d'unicité des solutions, même en dimension 2. Pour obtenir un tel résultat, il faudrait construire des solutions plus régulières. Dans [48], il est montré sous l'hypothèse que la viscosité μ ne dépend pas de la densité ρ un résultat d'existence local et d'unicité avec la régularité suivante :

$$\begin{cases} \rho \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \bar{\Omega}), \\ \mathbf{u} \in L^s(0, T; \mathbf{W}^{2, s}(\Omega) \cap \mathbf{V}), \quad \partial_t \mathbf{u} \in \mathbf{L}^s([0, T] \times \bar{\Omega}), \end{cases} \quad (1.37)$$

où le réel s vérifie $s > 3$. Toujours sous cette hypothèse, d'autres résultats ont été établis dans [2], [25], [24], [53] et [84]. Dans [84], il est montré sous l'hypothèse $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$, $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2((0, T) \times \Omega)$, $\rho_0 \geq 0$ l'existence de solution forte locale. Plus précisément, il existe $T^* > 0$ tel que $\mathbf{u} \in L^2(0, T^*; \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{V})$ et $\rho \mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbf{W}^{-1, \infty}(\Omega))$.

D'autre part, le cas où $\inf_\Omega \rho_0 > 0$ est plus simple à traiter. Intuitivement, on peut diviser par ρ dans les estimations, ce qui rendra notamment plus simple un certain nombre de passages à la limite. On peut alors retrouver dans ce cas-là convergence forte de \mathbf{u}_k vers \mathbf{u} dans $L^2((0, T) \times \Omega)$, comme dans le théorème de Leray pour les écoulements homogènes (voir [49], [50]).

1.3 Tour de quelques méthodes numériques

Nous allons dans cette section nous intéresser à quelques méthodes numériques pour discrétiser les équations de Navier-Stokes incompressibles, à densité variable et avec rhéologie de Bingham, en mettant l'accent sur les différents couplages intervenant dans le système d'équations. Pour simplifier la présentation, on se place dans le cas de conditions au bord de type Dirichlet homogène dans tout le paragraphe.

Commençons par introduire quelques notations. Soit un entier positif $N > 0$. On considère une suite de temps $(t_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ discrétisant de façon uniforme l'intervalle $[0, T]$:

$$t_n = n\delta t, \quad \text{avec} \quad \delta t = \frac{T}{N}.$$

On notera ρ^n l'approximation de la densité au temps t_n , i.e. $\rho^n \approx \rho(t_n)$. De même pour les autres inconnues : $\mathbf{u}^n \approx \mathbf{u}(t_n)$ pour la vitesse, $p^n \approx p(t_n)$ pour la pression et $\Sigma^n \approx \Sigma(t_n)$ pour la partie plastique du tenseur des contraintes.

1.3.1 Équation de conservation de la masse

Usuellement, la gestion du couplage entre la densité et les autres variables s'effectue en traitant la vitesse de façon explicite dans l'équation de conservation de la masse. On distingue alors les discrétisations complètement explicites, de la forme

$$d_t(\rho) + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \rho^n = 0,$$

où $d_t(\rho)$ est une discrétisation de $\partial_t \rho(t_{n+1})$ pouvant être par exemple effectuée à l'aide d'un schéma de type Euler ou BDF2 (voir [22]) ; Les discrétisations semi-implicites de la forme

$$d_t(\rho) + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \rho^{n+1} = 0,$$

qui sont plus stables mais plus lourdes à implémenter, puisque leur résolution nécessite l'inversion d'une matrice ; et enfin des formes intermédiaires avec les schémas de type Runge-Kutta, qui consistent à introduire des sous-pas intermédiaires entre t_n et t_{n+1} et résoudre plusieurs équation de transport explicites sur ces pas de temps intermédiaires (voir par exemple (4.1) pour le schéma Runge-Kutta 3, avec trois sous-itérations).

1.3.2 Équation de conservation du moment

On s'intéresse dans cette section à l'équation de conservation du moment, complétée par la loi constitutive de Bingham et la contrainte d'incompressibilité. Pour simplifier la présentation des méthodes, on se place maintenant dans le cas où la densité est constante et on néglige le terme non linéaire dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement.

Cas newtonien : couplage vitesse/pression

Les méthodes de dualité. On se place dans un premier temps dans le cas newtonien afin de s'affranchir de la partie plastique du tenseur des contraintes. Une première approche consiste à traiter implicitement ces inconnues et à se ramener à un problème de minimisation que l'on peut résoudre avec des méthodes de dualités de type Lagrangien augmenté par exemple. En discrétisant la formulation variationnelle dans \mathbf{V} de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement on obtient une équation du type

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} + 2\delta t \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} : \mathbf{D}\mathbf{v} = \int_{\Omega} (\delta t \rho \mathbf{g} + \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v}, \quad (1.38)$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. En introduisant la fonctionnelle

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \delta t \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{v} : \mathbf{D}\mathbf{v} - \int_{\Omega} (\delta t \rho \mathbf{g} + \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

Le théorème de Lax-Milgram donne alors l'existence d'un unique $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{V}$ solution de (1.38), qui est caractérisé comme le minimum de la fonctionnelle $J(\mathbf{v})$ dans \mathbf{V} . La résolution de (1.38) se ramène donc au problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{V} \text{ tel que} \\ J(\mathbf{u}^{n+1}) \leq J(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{cases} \quad (1.39)$$

La contrainte d'incompressibilité imposée par construction de l'espace \mathbf{V} peut alors être traduite par un multiplicateur de Lagrange (voir [1], [34]). En introduisant pour $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $q \in L^2(\Omega)$ le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) = J(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v},$$

on transforme (1.39) en un problème de point-selle (voir [30]) :

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ et } p^{n+1} \in L^2(\Omega) \text{ vérifiant} \\ \mathcal{L}(\mathbf{u}^{n+1}, q) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, p^{n+1}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ et } q \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (1.40)$$

Suivant [43] et [71], on introduit le Lagrangien augmenté du paramètre $r > 0$

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{v}, q) = J(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{r}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2,$$

et on se ramène au problème

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ et } p^{n+1} \in L^2(\Omega) \text{ vérifiant} \\ \mathcal{L}_r(\mathbf{u}^{n+1}, q) \leq \mathcal{L}_r(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \leq \mathcal{L}_r(\mathbf{v}, p^{n+1}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ et } q \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (1.41)$$

avec $r > 0$. On peut montrer qu'un point selle de \mathcal{L} est nécessairement un point selle de \mathcal{L}_r et inversement. D'autre part, l'ajout du terme quadratique $\frac{r}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2$ augmente la performance des algorithmes utilisés pour résoudre le problème (1.41). Suivant [4], [35],[30] et [1], on peut résoudre le problème (1.40) avec un algorithme de type Uzawa :

- on commence avec $p^{n,k}$ arbitraire donné,
- on calcule $\mathbf{u}^{n,k+1}$ solution de

$$\begin{cases} \mathcal{L}_r(\mathbf{u}^{n,k+1}, p^{n,k}) \leq \mathcal{L}_r(\mathbf{v}, p^{n,k}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{u}^{n,k+1} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (1.42)$$

- on définit $p^{n,k+1}$ par

$$p^{n,k+1} = p^{n,k} + r_k \operatorname{div} \mathbf{u}^{n,k+1}, \quad (1.43)$$

avec le pas de descente

$$0 < r_0 \leq r_k \leq 2r. \quad (1.44)$$

Sous l'hypothèse (1.44), il est montré dans [34] que la solution de l'algorithme (1.42)-(1.3.2) converge vers la solution de (1.39). Le problème de minimisation (1.42) peut – dans le cas newtonien où la fonctionnelle J est différentiable – être résolu en utilisant des méthodes classiques de type gradient conjugué.

Les méthodes de splitting. Les méthodes de type *pas de temps fractionné*, aussi appelées méthodes de *projection* proposent un splitting pour découpler le calcul de la vitesse et celui de la pression. Ces méthodes ont pour origine les travaux de Chorin [19] et Temam [88], [89]. A chaque itération en temps, on résout un système du type

$$\begin{cases} \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n) - 2\mu \operatorname{div}(\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) + \nabla p^n = \rho \mathbf{g}, \\ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_{\operatorname{div}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}) + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^{n+1} = 0, \quad \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Le point clé est que la seconde étape peut être vue comme une projection de \mathbf{u}^{n+1} sur l'espace \mathbf{H} , afin d'obtenir une nouvelle approximation de la vitesse corrigée que l'on note $\mathbf{u}_{\operatorname{div}}^{n+1}$. D'autre part, en appliquant l'opérateur divergence à la seconde équation de système, on obtient que l'incrément de pression ($p^{n+1} - p^n$) peut être aisément calculé en résolvant l'équation de Poisson suivante

$$\begin{cases} \Delta(p^{n+1} - p^n) = \frac{\rho}{\delta t} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1}, \\ \nabla(p^{n+1} - p^n) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.46)$$

Ces méthodes ramènent donc la résolution du couplage vitesse pression à la résolution de deux problèmes elliptiques classiques. On peut démontrer la convergence de l'algorithme

(1.45)-(1.46) (voir par exemple [81]). Dans [82], une version d'ordre 2 est proposée et une analyse de stabilité et convergence est menée. Une revue de ces méthodes dans le cas homogène est présentée dans [41]. Des généralisations de ces méthodes pour les écoulements non-homogènes ont été proposées dans [9], [3] et [37]. Des analyses de stabilité ont été menées dans [38], [74], [39] et une estimation d'erreur a été menée dans [40].

Cas viscoplastique : couplage vitesse/pression/contrainte plastique

On se place maintenant dans le cas d'un fluide de Bingham, en gardant les mêmes hypothèses simplificatrices que dans la section précédente pour le reste. Nous avons donc une nouvelle variable : la partie plastique du tenseur des contraintes Σ , et une nouvelle équation : la loi de Bingham.

Les méthodes de régularisation. Cette classe de méthodes propose d'approcher la loi de Bingham par une loi de la forme

$$\mathcal{T}_\epsilon = 2\mu\mathbf{D}\mathbf{u} + \alpha f_\epsilon(\mathbf{D}\mathbf{u}), \quad (1.47)$$

avec $\epsilon > 0$ petit, et $f_\epsilon(\mathbf{D}\mathbf{u})$ une fonction régulière (au moins dérivable) satisfaisant $f_\epsilon(\mathbf{D}\mathbf{u}) \rightarrow \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|}$ lorsque ϵ tend vers 0. Différents types de fonctions f_ϵ peuvent être trouvés dans la littérature (voir par exemple [35], [64] et [68]). Quelque soit la forme de f_ϵ , l'idée est d'approcher le caractère "viscosité infinie" de la loi rhéologique de Bingham par une viscosité grande mais finie. Cette régularisation permet de s'affranchir de l'inconnue Σ – et donc de son couplage avec les autres inconnues dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement – puisque le nouveau tenseur des contraintes \mathcal{T}_ϵ peut ainsi être défini dans toutes les parties du domaine, même les zones (pseudo) plastiques par l'équation (1.47). On peut alors appliquer des méthodes de dualités analogues à celles utilisées dans le cas newtonien (la nouvelle fonctionnelle à minimiser étant encore différentiable) ou une méthode de type pas de temps fractionné pour résoudre le problème. Un inconvénient intrinsèque à cette méthode est l'identification des zones rigides puisque par définition, le modèle régularisé n'admet plus de vraies zones rigides, et ces pseudo zones rigides dépendent de ϵ . D'autre part (voir [23]) on perd la propriété de retour au repos en temps fini en l'absence de forces extérieures.

Les méthodes de dualité. Les méthodes de dualité permettent de traiter la rhéologie de Bingham (avec singularité) avec, comme dans le cas newtonien, un traitement implicite des inconnues. En discrétisant la formulation variationnelle dans \mathbf{V} de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement comme on l'a fait pour (1.38) (mais cette fois ci

en prenant aussi en compte la partie plastique du tenseur des contraintes Σ), on obtient une inéquation du type

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^{n+1}) + 2\delta t \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} : \mathbf{D}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^{n+1}) \\ + 2\delta t \alpha \int_{\Omega} (|\mathbf{D}\mathbf{v}| - |\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}|) \geq \int_{\Omega} (\delta t \rho \mathbf{g} + \mathbf{u}^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^{n+1}), \end{aligned} \quad (1.48)$$

dont la solution minimise la fonctionnelle

$$I(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \delta t \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{v} : \mathbf{D}\mathbf{v} + 2\delta t \alpha \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{v}| - \int_{\Omega} (\delta t \rho \mathbf{g} + \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Cette fonctionnelle est convexe mais, contrairement à la fonctionnelle J , on perd la différentiabilité dans les zones où $\mathbf{D}\mathbf{v} = 0$. L'idée est d'introduire une nouvelle variable $\gamma = \mathbf{D}\mathbf{v}$ et de se ramener au problème de minimisation sous contrainte

$$\min_{\gamma = \mathbf{D}\mathbf{v}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \delta t \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{v} : \mathbf{D}\mathbf{v} + \delta t \alpha \int_{\Omega} |\gamma| - \int_{\Omega} (\delta t \rho \mathbf{g} + \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (1.49)$$

que l'on peut reformuler comme un problème de point-selle pour le Lagrangien augmenté (voir [1], [78])

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{v}, \gamma, q, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \delta t \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{v} : \mathbf{D}\mathbf{v} + \delta t \alpha \int_{\Omega} |\gamma| - \int_{\Omega} (\delta t \rho \mathbf{g} + \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v} \\ - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda} : (\mathbf{D}\mathbf{v} - \gamma) + \frac{r}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \frac{s}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{v} - \gamma|^2, \end{aligned}$$

où \mathbf{v} et γ sont les inconnues primales, q est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ et $\boldsymbol{\lambda}$ est le multiplicateur associé à la contrainte $\mathbf{D}\mathbf{v} = \gamma$. On se ramène ainsi au problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \boldsymbol{\delta}^{n+1} \in \mathbf{L}^2(\Omega), p^{n+1} \in L^2(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ vérifiant} \\ \mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\delta}^{n+1}, q, \boldsymbol{\lambda}) \leq \mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\delta}^{n+1}, p^{n+1}, \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}) \leq \mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{v}, \gamma, p^{n+1}, \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}), \\ \text{pour tous } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \gamma \in \mathbf{L}^2(\Omega), q \in L^2(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \end{cases} \quad (1.50)$$

avec $r > 0$ et $s > 0$. On peut résoudre le problème (1.50) avec un algorithme de descente type Uzawa :

- on commence avec $\boldsymbol{\Sigma}^{n,k}$ arbitraire donné,
- on calcule $\mathbf{u}^{n,k+1}$, $\boldsymbol{\delta}^{n,k+1}$ et $p^{n,k+1}$ solutions de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{u}^{n,k+1}, \boldsymbol{\delta}^{n,k+1}, q, \boldsymbol{\Sigma}^{n,k}) \leq \mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{u}^{n,k+1}, \boldsymbol{\delta}^{n,k+1}, p^{n,k+1}, \boldsymbol{\Sigma}^{n,k}) \\ \leq \mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{v}, \gamma, p^{n,k+1}, \boldsymbol{\Sigma}^{n,k}), \end{aligned} \quad (1.51)$$

— on définit $\Sigma^{n,k+1}$ par

$$\Sigma^{n,k+1} = \Sigma^{n,k} + s_k(\mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1} - \gamma^{n,k+1}), \quad (1.52)$$

avec le pas de descente

$$0 < s_0 \leq s_k \leq 2s. \quad (1.53)$$

notons que l'étape de minimisation dans (1.51) est plus complexe que le cas newtonien, la fonctionnelle à minimiser n'étant pas différentiable.

La méthode de bi-projection. La méthode de bi-projection consiste à utiliser la formulation de la partie plastique du tenseur des contraintes en terme de projection (voir proposition 1) afin d'adapter les méthodes de type pas de temps fractionné aux fluides de Bingham. On se ramène ainsi à la résolution d'un système du type

$$\begin{cases} \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_{\text{div}}^n) - 2\mu \operatorname{div}(\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) + \nabla p^n = \operatorname{div} \Sigma^{n+1} + \rho \mathbf{g}, \\ \Sigma^{n+1} = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma^{n+1} + l\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}), \\ \Delta(p^{n+1} - p^n) = \frac{\rho}{\delta t} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1}, \quad \nabla(p^{n+1} - p^n) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \mathbf{u}_{\text{div}}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho} \nabla(p^{n+1} - p^n). \end{cases} \quad (1.54)$$

Ce système diffère du cas newtonien par la présence d'un couplage entre la vitesse \mathbf{u}^{n+1} et la partie plastique du tenseur des contraintes Σ^{n+1} dans l'équation de conservation de la masse discrète. Pour résoudre ce couplage, on utilise un algorithme de type Uzawa :

- on commence avec $\Sigma^{n,k}$ arbitraire donné,
- on calcule $\mathbf{u}^{n,k+1}$ solution de

$$\frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}^{n,k+1} - \mathbf{u}_{\text{div}}^n) - 2\mu \operatorname{div}(\mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1}) + \nabla p^n = \operatorname{div} \Sigma^{n,k} + \rho \mathbf{g},$$

- on met à jour $\Sigma^{n,k+1}$ avec l'équation

$$\Sigma^{n,k+1} = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma^{n,k} + l\mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1}).$$

Remarquons que dans la dernière étape, la projection est simplement une projection sur la boule unité et se calcule donc facilement par une formule explicite. Nous utiliserons cette méthode pour construire le schéma numérique et c'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Le schéma numérique de semi-discrétisation en temps

Nous allons dans ce chapitre présenter le schéma de semi-discrétisation en temps du modèle (1.16). Les idées principales pour la construction du schéma sont d'une part d'utiliser une méthode de type pas de temps fractionné pour les écoulements à densité variable afin de découpler le calcul de la vitesse et de la pression dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, et d'autre part d'utiliser une méthode de type Uzawa pour découpler le calcul de la vitesse et de la partie plastique du tenseur des contraintes dans cette même équation. D'autre part, la singularité du tenseur des contraintes est surmontée en utilisant la formulation en terme de projection de la partie plastique du tenseur des contraintes.

Nous utilisons les notations introduites dans la section 1.3 pour la discrétisation temporelle.

Pour initialiser l'algorithme, on utilise les données initiales du modèle que l'on a à disposition : on pose $\rho^0 = \rho_0$, où ρ_0 est la densité initiale prescrite dans le modèle mathématique. De même, on pose $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_{\text{div}}^0 = \mathbf{u}_0$. On choisit $q^0 = 0$, p^0 , Σ^0 et σ^0 arbitrairement.

2.1 L'algorithme de bi-projection

On présente maintenant l'algorithme itératif qui nous permet de calculer l'approximation de la solution au temps t_{n+1} connaissant l'approximation de la solution au temps t_n . Supposons ρ^n , \mathbf{u}^n , $\mathbf{u}_{\text{div}}^n$, q^n , p^n , Σ^n et σ^n connus. On commence par calculer ρ^{n+1} en résolvant :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho^{n+1} = 0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.1)$$

On calcule alors μ^{n+1} et α^{n+1} à l'aide de la viscosité plastique μ et du seuil de plasticité α prescrits dans le modèle :

$$\mu^{n+1} = \mu(\rho^{n+1}) \quad \text{et} \quad \alpha^{n+1} = \alpha(\rho^{n+1}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.2)$$

et les coefficients intervenant dans les conditions au bord c_f^{n+1} et c_s^{n+1} à l'aide du coefficient de friction c_f et du seuil de glissement c_s prescrits dans le modèle :

$$c_f^{n+1} = c_f(\rho^{n+1}), \quad \text{et} \quad c_s^{n+1} = c_s(\rho^{n+1}), \quad \text{dans } \Gamma_w. \quad (2.3)$$

Ensuite, on calcule \mathbf{u}^{n+1} , Σ^{n+1} et $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ en résolvant le système suivant, appelé étape de prédiction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2}(\rho^{n+1} + \rho^n) \mathbf{u}^{n+1} - \rho^n \mathbf{u}^n \right] + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n) \\ \quad - \operatorname{div}(2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) + \nabla(p^n + q^n) = \operatorname{div}(\alpha^{n+1} \Sigma^{n+1}) - \rho^{n+1} \mathbf{g}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \Sigma^{n+1} = \mathbb{P}_{\Lambda}(\Sigma^{n+1} + \ell \alpha^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n+1})), \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \text{dans } \Gamma_0, \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{dans } \Gamma_w \\ (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} \mathbf{n} + \alpha^{n+1} \Sigma^{n+1} \mathbf{n})_{\mathbf{t}} = -c_f^{n+1} \mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{n+1} - c_s^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \quad \text{dans } \Gamma_w, \\ \boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + r c_s^{n+1} \mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{n+1} + \theta(\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}^{n+1})), \quad \text{dans } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où les réels $\ell > 0$, $r > 0$ et $\theta > 0$ sont des paramètres numériques. Finalement, on calcule l'incrément de pression q^{n+1} en résolvant l'équation de Poisson :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta q^{n+1} = \frac{\rho_{\min}}{\delta t} \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}), \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} q^{n+1} = 0, \quad \text{dans } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

et on pose

$$p^{n+1} = p^n + q^{n+1}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}_{\text{div}}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho_{\min}} \nabla q^{n+1}. \quad (2.7)$$

Ce schéma numérique s'inspire de l'algorithme de splitting proposé dans le cadre des fluides newtoniens à densité variable par Guermond et Salgado dans [39], qui permet de découpler le calcul de la vitesse et de la pression en deux étapes distinctes. On calcule une première approximation de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} en traitant la pression de façon explicite à l'aide de la première équation de (2.4). On calcule ensuite l'incrément de pression q^{n+1} en résolvant

l'équation de Poisson (2.5). Remarquons que dans cette étape (2.5), seule la borne inférieure de la densité (initiale) ρ_{\min} intervient, ce qui permet de calculer q^{n+1} en résolvant une équation de Poisson à coefficient constant, contrairement par exemple au choix fait dans [38]. Remarquons aussi que à ce stade, ρ_{\min} désigne à priori seulement la borne inférieure de la densité initiale ρ^0 . Nous verrons par la suite que ρ_{\min} est en fait la borne inférieure de la densité en chaque temps discret ρ^n , ce qui sera essentiel à l'analyse du schéma.

A l'aide de l'incrément de pression q^{n+1} , on met à jour la pression en calculant p^{n+1} , puis on corrige la vitesse \mathbf{u}^{n+1} en calculant une nouvelle approximation de la vitesse $\mathbf{u}_{\text{div}}^{n+1}$, cette fois-ci à divergence nulle (cela s'observe aisément en appliquant l'opérateur divergence à la relation (2.7) et en utilisant l'équation (2.5)). L'utilisation de cette vitesse solénoïdale pour convecter la densité dans (2.1) sera essentielle pour établir un principe du maximum discret, et ainsi que ρ_{\min} soit la borne inférieure de la densité discrète ρ^n pour tout n .

2.2 Résolution pratique de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement discrète

Dans le système (2.4), le calcul de Σ^{n+1} (et σ^{n+1} au bord) est couplé à celui de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} (et $\mathbf{u}_{\text{t}}^{n+1}$ au bord). Nous utilisons un algorithme de point fixe pour résoudre ce système : on commence avec $\Sigma^{n,0} = \Sigma^n$ et $\sigma^{n,0} = \sigma^n$. Pour $k \geq 0$, on suppose $\Sigma^{n,k}$ et $\sigma^{n,k}$ connus et on calcule $\mathbf{u}^{n,k+1}$ en résolvant le problème elliptique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho^{n+1} + \rho^n) \mathbf{u}^{n,k+1} - \rho^n \mathbf{u}^n \right] + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n,k+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n,k+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n) \\ \quad - \operatorname{div}(2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1}) + \nabla(p^n + q^n) = \operatorname{div}(\alpha^{n+1} \Sigma^{n,k}) - \rho^{n+1} \mathbf{g}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n,k+1} = 0, \quad \text{dans } \Gamma_0, \\ \mathbf{u}^{n,k+1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{dans } \Gamma_w, \\ (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1} \mathbf{n} + \alpha^{n+1} \Sigma^{n,k} \mathbf{n})_{\text{t}} = -c_f^{n+1} \mathbf{u}_{\text{t}}^{n,k+1} - c_s^{n+1} \sigma^{n,k}, \quad \text{dans } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Puis on calcule $\Sigma^{n,k+1}$ et $\sigma^{n,k+1}$ par projection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^{n,k+1} = \mathbb{P}_{\Lambda}(\Sigma^{n,k} + \ell \alpha^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n,k})), \quad \text{dans } \Omega, \\ \sigma^{n,k+1} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(\sigma^{n,k} + r c_s^{n+1} \mathbf{u}_{\text{t}}^{n,k+1} + \theta(\sigma^n - \sigma^{n,k})), \quad \text{dans } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

On montrera que la suite $(\mathbf{u}^{n,k}, \Sigma^{n,k}, \sigma^{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution $(\mathbf{u}^{n+1}, \Sigma^{n+1}, \sigma^{n+1})$ du système (2.4) dans le chapitre suivant.

Pour augmenter la vitesse de convergence de cet algorithme de point fixe et suivant [20], le terme de relaxation $\theta(\Sigma^n - \Sigma^{n+1})$ est ajouté dans (2.4) et (2.9). On ajoute le terme analogue $\theta(\sigma^n - \sigma^{n+1})$ dans la discrétisation des conditions au bord. Dans le Théorème 5 du chapitre suivant, nous établissons une estimation de la vitesse de convergence de la

suite $(\mathbf{u}^{n,k}, \Sigma^{n,k}, \sigma^{n,k})$ en fonction du paramètre θ . Nous verrons qu'il est nécessaire que le paramètre θ contrôlant le terme de relaxation dans les deux projections (équations (2.9)) soit le même dans les deux équations pour des raisons de compatibilité. Dans le cas particulier où $\theta = 0$, la procédure (2.8)-(2.9) peut être vue comme une méthode à la Uzawa dans l'esprit de [15], pour laquelle seulement la convergence peut être prouvée, c'est-à-dire que l'on n'a pas d'estimation de la vitesse de convergence à disposition.

On verra lors de l'analyse du schéma que le choix du coefficient (dépendant du temps et de l'espace) $\ell\alpha^{n+1}$ devant le tenseur $\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}$ dans la projection dans (2.4) a pour but d'assurer une certaine compatibilité avec l'équation de la conservation de la quantité de mouvement discrète. Il en est de même pour le choix de rc_s^{n+1} .

Remarquons enfin que dans les formulations (1.12) et (1.15), les coefficients ℓ_c et r_c étaient strictement positifs, or ce n'est à priori pas toujours le cas pour α^{n+1} et c_s^{n+1} , et donc $\ell\alpha^{n+1}$ et rc_s^{n+1} . Cependant, dans les zones du domaine où α^{n+1} (respectivement c_s^{n+1}) s'annulent, il n'est pas nécessaire de définir Σ^{n+1} et σ^{n+1} .

Traitement du terme non linéaire. Dans le système (2.4), nous appellerons terme non linéaire le terme

$$\rho^{n+1}\mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1}\mathbf{u}_{\text{div}}^n).$$

En introduisant la forme bilinéaire \mathbf{B} et la forme trilinéaire b définies par

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (2.10)$$

et

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{w}, \quad (2.11)$$

on a alors

$$\rho^{n+1}\mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1}\mathbf{u}_{\text{div}}^n) = \mathbf{B}(\rho^{n+1}\mathbf{u}_{\text{div}}^n, \mathbf{u}^{n+1}).$$

Lors de l'analyse du schéma, nous serons amenés à plusieurs reprises à établir des estimations d'énergie. Le lemme suivant nous sera alors utile :

Lemme 1. *Pour toute fonction $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ telle que $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, et pour toute fonction $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on a l'égalité :*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Démonstration. Soient $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty$ avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, et $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^\infty$. On a

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{v}}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}.$$

2.2. RÉOLUTION PRATIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

En intégrant par parties et en utilisant $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, on a

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}.$$

Enfin, en utilisant la formule de dérivation d'un produit, on a

$$- \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v},$$

et donc $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. On obtient ensuite le résultat énoncé par densité. \square

Nous terminons ce chapitre en énonçant l'identité suivante, que nous serons amenés à utiliser à de nombreuses reprises lors de l'analyse du schéma : Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$2a(a - b) = a^2 - b^2 + (a - b)^2. \tag{2.12}$$

Chapitre 3

Analyse du schéma de semi-discrétisation en temps

L'objet de ce chapitre est l'analyse du schéma de semi-discrétisation en temps que l'on a construit dans le chapitre précédent. Ce travail a été publié dans [16], dans le cas des conditions au bord de type Dirichlet.

Cette analyse se décompose en trois parties : D'une part l'analyse de stabilité du schéma, qui est l'objet de la section 3.2, dans laquelle on montrera que la solution approchée que l'on calcule à l'aide du schéma (2.1)–(2.7) est bornée par des constantes indépendantes du pas de temps et proportionnelles aux données initiales du schéma.

D'autre part l'analyse de convergence, qu'on établit dans le cas des conditions au bord de type Dirichlet, et qui est l'objet de la section 3.2. On montre dans cette section que le champ des vitesses ainsi que les coefficients variables (la densité, la viscosité et le seuil de plasticité) discrets convergent – sous certaines hypothèses de régularité du modèle continu – vers leurs analogues continus, et on obtient une estimation d'ordre 1 pour la vitesse de convergence.

Avant cela, on établit quelques résultats préliminaires à l'analyse du schéma dans la section 3.1. On montre d'une part dans le théorème 3.3 le principe du maximum discret satisfait par la densité solution de (2.1). On démontrera ensuite dans le théorème 4 que la solution de l'algorithme de point fixe (2.8)–(2.9) utilisé pour résoudre en pratique l'étape de prédiction (2.4) converge géométriquement.

Dans tout ce chapitre, on se place dans le cas où la dimension $d = 3$, afin de simplifier l'analyse notamment lorsque nous utiliserons des injections de Sobolev. Le cas $d = 2$ se traite de façon analogue et avec des hypothèses de régularité un peu plus faibles sur la solution du modèle continu. Notons aussi que l'on ignorera le terme d'accélération de pesanteur $\rho^{n+1}\mathbf{g}$ afin de simplifier la présentation, car son traitement n'induit pas de difficulté supplémentaire. Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on notera

$$\delta a_n = a_n - a_{n-1}, \quad \text{et} \quad \delta^2 a_n = \delta(\delta a_n) = a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}. \quad (3.1)$$

3.1 Résultats préliminaires

3.1.1 Principe du maximum discret sur la densité

De part leurs définitions dans les équations (2.2)-(2.3), et les hypothèses faites sur μ , α , c_f et c_s dans le modèle mathématique (fonctions positives et \mathcal{C}^1), l'existence de bornes inférieures et supérieures positives sur la viscosité discrète (μ^n), le seuil de plasticité discret (α^n), le coefficient de friction discret (c_f^n), et le seuil de glissement discret (c_s^n) est directement assurée si la densité discrète (ρ^n) est bornée.

Après avoir défini en quel sens nous considérerons les solutions de l'équation (2.1) (solutions de viscosité), nous montrerons dans le théorème 4 sous quelles conditions la densité satisfait au principe du maximum discret.

Régularisation de l'équation de conservation de la masse Soit ϵ un paramètre de la forme $\frac{1}{k}$, avec $k \in \mathbb{N}$, destiné à tendre vers zéro. Pour définir une notion de solution de (2.1), on introduit l'équation régularisée suivante :

$$\begin{cases} \frac{\rho_\epsilon^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho_\epsilon^{n+1} - \epsilon \Delta \rho_\epsilon^{n+1} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \rho_\epsilon^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

La limite de ρ_ϵ^{n+1} lorsque ϵ tend vers zéro est appelée la solution de viscosité de (2.1). Dans la suite du document, ρ^{n+1} sera toujours utilisé pour noter la solution de viscosité de (2.1). Dans [21] et [31], les auteurs montrent l'existence et l'unicité de solutions de viscosité pour l'équation de Hamilton-Jacobi dans les cas stationnaires et instationnaires, sous certaines hypothèses sur la régularité du Hamiltonien.

Principe du maximum discret pour la densité

Théorème 4. *Si pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq N - 1$, $\mathbf{u}_{\text{div}}^n \in \mathbf{H} \cap \mathbf{L}^3(\Omega)$ et si $\rho_{\min} \leq \rho^0 \leq \rho_{\max}$, alors il existe une unique solution de viscosité satisfaisant (2.1) au sens des distributions. De plus, pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq N$, cette solution satisfait*

$$\rho_{\min} \leq \rho^n \leq \rho_{\max}, \quad p.p. \text{ dans } \Omega. \quad (3.3)$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence : On suppose que $\rho_{\min} \leq \rho^n \leq \rho_{\max}$. Montrons qu'il existe une unique solution de viscosité ρ^{n+1} satisfaisant (2.1) au sens des distributions et vérifiant $\rho_{\min} \leq \rho^{n+1} \leq \rho_{\max}$.

Étape 1 : Solution de l'équation régularisée. L'équation (3.2) nous amène à considérer le

problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \rho_\epsilon^{n+1} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ tel que, pour tout } \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ on a} \\ &\int_{\Omega} \rho_\epsilon^{n+1} \varphi - \delta t \int_{\Omega} \rho_\epsilon^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \varphi + \delta t \epsilon \int_{\Omega} \nabla \rho_\epsilon^{n+1} \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \rho^n \varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le problème variationnel précédent se reformule encore :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \rho_\epsilon^{n+1} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ tel que, pour tout } \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ on a} \\ &a(\rho_\epsilon^{n+1}, \varphi) = L(\varphi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec

$$\begin{aligned} a(\rho_\epsilon^{n+1}, \varphi) &= \int_{\Omega} \rho_\epsilon^{n+1} \varphi - \delta t \int_{\Omega} \rho_\epsilon^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \varphi + \delta t \epsilon \int_{\Omega} \nabla \rho_\epsilon^{n+1} \cdot \nabla \varphi, \\ L(\varphi) &= \int_{\Omega} \rho^n \varphi. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Lax-Milgram (en utilisant l'hypothèse $\mathbf{u}_{\text{div}}^n \in \mathbf{H} \cap \mathbf{L}^3(\Omega)$ pour montrer la $\mathbf{H}^1(\Omega)$ -ellipticité de la forme bilinéaire a), il existe une unique $\rho_\epsilon^{n+1} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ solution de (3.5). Par densité, on obtient finalement que cette solution satisfait (3.2) *p.p.* dans Ω et Γ .

Étape 2 : Bornes sur la solution régularisée. On veut démontrer que $\rho_{\min} \leq \rho_\epsilon^{n+1} \leq \rho_{\max}$, *p.p.* dans Ω . Choisisant $\varphi = (\rho_\epsilon^{n+1} - \rho_{\max})^+$ dans (3.5), qui est dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et où l'exposant $+$ désigne la partie positive (similairement, l'exposant $-$ désigne la partie négative), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \rho_\epsilon^{n+1} (\rho_\epsilon^{n+1} - \rho_{\max})^+ - \delta t \int_{\Omega} \rho_\epsilon^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla (\rho_\epsilon^{n+1} - \rho_{\max})^+ \\ &+ \delta t \epsilon \int_{\Omega} \nabla \rho_\epsilon^{n+1} \cdot \nabla (\rho_\epsilon^{n+1} - \rho_{\max})^+ = \int_{\Omega} \rho^n (\rho_\epsilon^{n+1} - \rho_{\max})^+. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le deuxième terme de l'égalité précédente est nul : en effet, il se reformule sous la forme

$$\delta t \int_{\Omega} (\rho_\epsilon^{n+1} - \rho_{\max})^+ \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla (\rho_\epsilon^{n+1} - \rho_{\max})^+,$$

qui s'annule puisque $\mathbf{u}_{\text{div}}^n$ est à divergence nulle et $\mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$. En reformulant le troisième terme de l'égalité précédente (3.6) sous la forme

$$\delta t \epsilon \int_{\Omega} |\nabla (\rho_\epsilon^{n+1} - \rho_{\max})^+|^2,$$

et en soustrayant $\int_{\Omega} \rho_{\max}(\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})^+$ de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})(\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})^+ + \delta t \epsilon \int_{\Omega} |\nabla(\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})^+|^2 \\ = \int_{\Omega} (\rho^n - \rho_{\max})(\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})^+. \end{aligned}$$

On observe que le membre de droite est négatif et que le deuxième terme du membre de gauche est positif. Par conséquent, on a

$$\int_{\Omega} (\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})(\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})^+ \leq 0.$$

D'autre part, xx^+ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$(\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})(\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\max})^+ = 0 \quad p.p. \text{ dans } \Omega,$$

et donc

$$\rho_{\epsilon}^{n+1} \leq \rho_{\max} \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

En choisissant $(\rho_{\epsilon}^{n+1} - \rho_{\min})^-$ dans (3.5), on obtient de façon similaire $\rho_{\epsilon}^{n+1} \geq \rho_{\min}$ *p.p.* dans Ω . Finalement, $\rho_{\epsilon}^{n+1} \in L^{\infty}(\Omega)$ et

$$\rho_{\min} \leq \rho_{\epsilon}^{n+1} \leq \rho_{\max}, \quad p.p. \text{ dans } \Omega. \quad (3.7)$$

Étape 3 : Passage à la limite sur ϵ et solution de viscosité. En choisissant $\varphi = \rho_{\epsilon}^{n+1}$ dans (3.5), on a

$$\int_{\Omega} |\rho_{\epsilon}^{n+1}|^2 + \delta t \epsilon \int_{\Omega} |\nabla \rho_{\epsilon}^{n+1}|^2 = \int_{\Omega} \rho^n \rho_{\epsilon}^{n+1}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\|\rho_{\epsilon}^{n+1}\|^2 + \delta t \|\sqrt{\epsilon} \nabla \rho_{\epsilon}^{n+1}\|^2 \leq \|\rho^n\| \|\rho_{\epsilon}^{n+1}\|.$$

Ensuite, à l'aide de l'inégalité de Young, on obtient

$$\|\rho_{\epsilon}^{n+1}\|^2 + 2\delta t \|\sqrt{\epsilon} \nabla \rho_{\epsilon}^{n+1}\|^2 \leq \|\rho^n\|^2. \quad (3.8)$$

En utilisant (3.7) et cette dernière inégalité, on déduit que $(\rho_{\epsilon}^{n+1})_{\epsilon}$, et $(\sqrt{\epsilon} \nabla \rho_{\epsilon}^{n+1})_{\epsilon}$, sont des suites bornées respectivement dans $L^{\infty}(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par conséquent, il existe des sous-suites – que l'on note encore $(\rho_{\epsilon}^{n+1})_{\epsilon}$ et $(\sqrt{\epsilon} \nabla \rho_{\epsilon}^{n+1})_{\epsilon}$ pour simplifier les notations – faiblement convergentes, et des limites $\rho^{n+1} \in L^{\infty}(\Omega)$ et $\psi \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ telles que

$$\rho_{\epsilon}^{n+1} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{*} \rho^{n+1} \quad \text{dans } L^{\infty}(\Omega), \quad \sqrt{\epsilon} \nabla \rho_{\epsilon}^{n+1} \rightharpoonup \psi \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (3.9)$$

En utilisant (3.7) et par conséquence de la convergence faible, on a

$$\rho_{\min} \leq \rho^{n+1} \leq \rho_{\max}, \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Finalement, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_\epsilon^{n+1} \varphi &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho^{n+1} \varphi, \\ -\delta t \int_{\Omega} \rho_\epsilon^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \varphi &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\delta t \int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \varphi, \\ \delta t \epsilon \int_{\Omega} \nabla \rho_\epsilon^{n+1} \cdot \nabla \varphi &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\Omega} \rho^{n+1} \varphi - \delta t \int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \rho^n \varphi,$$

c'est-à-dire que ρ^{n+1} satisfait l'équation de transport (2.1) au sens des distributions.

Étape 4 : Unicité de la solution de viscosité. Nous allons maintenant montrer que la suite de solutions régularisées $(\rho_\epsilon^{n+1})_\epsilon$ que l'on construit est de Cauchy, ce qui nous permettra de conclure que l'équation (2.1) possède une unique solution de viscosité. Pour cela, nous allons dans un premier temps expliciter la forme de ϵ , c'est-à-dire que l'on remplace le problème (3.4) par le problème suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \rho_k^{n+1} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ tel que, pour tout } \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ on a} \\ &\int_{\Omega} \rho_k^{n+1} \varphi - \delta t \int_{\Omega} \rho_k^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \varphi + \delta t \frac{1}{k} \int_{\Omega} \nabla \rho_k^{n+1} \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \rho^n \varphi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nous allons montrer que pour tout entier $r \geq 0$,

$$\|\rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}\|^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{k}} \nabla \rho_k^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{k+r}} \nabla \rho_{k+r}^{n+1} \right\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad (3.11)$$

ce qui nous permettra de conclure que les suites $(\rho_k^{n+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \nabla \rho_k^{n+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

En soustrayant l'équation (3.10) écrite au rang k et au rang $k+r$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}) \varphi - \delta t \int_{\Omega} (\rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}) \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \varphi \\ &\quad + \delta t \frac{1}{k} \int_{\Omega} \nabla \rho_k^{n+1} \cdot \nabla \varphi - \delta t \frac{1}{k+r} \int_{\Omega} \nabla \rho_{k+r}^{n+1} \cdot \nabla \varphi = 0. \end{aligned}$$

En choisissant $\varphi = \rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}$ dans l'équation précédente, il vient

$$\begin{aligned} \|\rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}\|^2 + \delta t \frac{1}{k} \int_{\Omega} \nabla \rho_k^{n+1} \cdot \nabla (\rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}) \\ - \delta t \frac{1}{k+r} \int_{\Omega} \nabla \rho_{k+r}^{n+1} \cdot \nabla (\rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}) = 0, \end{aligned}$$

qui se reformule

$$\begin{aligned} \|\rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}\|^2 + \delta t \left\| \frac{1}{\sqrt{k}} \nabla \rho_k^{n+1} \right\|^2 + \delta t \left\| \frac{1}{\sqrt{k+r}} \nabla \rho_{k+r}^{n+1} \right\|^2 \\ = \delta t \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+r} \right) \int_{\Omega} \nabla \rho_k^{n+1} \cdot \nabla \rho_{k+r}^{n+1}. \end{aligned}$$

En soustrayant le terme $\frac{2\delta t}{\sqrt{k(k+r)}} \int_{\Omega} \nabla \rho_k^{n+1} \cdot \nabla \rho_{k+r}^{n+1}$ de chaque coté dans l'équation précédente, il vient

$$\begin{aligned} \|\rho_k^{n+1} - \rho_{k+r}^{n+1}\|^2 + \delta t \left\| \frac{1}{\sqrt{k}} \nabla \rho_k^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{k+r}} \nabla \rho_{k+r}^{n+1} \right\|^2 \\ = \delta t \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+r} - \frac{2}{\sqrt{k(k+r)}} \right) \int_{\Omega} \nabla \rho_k^{n+1} \cdot \nabla \rho_{k+r}^{n+1} \\ \leq \delta t \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+r} - \frac{2}{\sqrt{k(k+r)}}}{\frac{1}{\sqrt{k(k+r)}}} \left\| \frac{1}{\sqrt{k}} \nabla \rho_k^{n+1} \right\| \left\| \frac{1}{\sqrt{k+r}} \nabla \rho_{k+r}^{n+1} \right\|. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.8) on obtient que les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \nabla \rho_k^{n+1} \right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{k+r}} \nabla \rho_{k+r}^{n+1} \right)$ sont bornées par des constantes indépendantes de k et r . D'autre part, pour tout entier $r \geq 0$, on a

$$\frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+r} - \frac{2}{\sqrt{k(k+r)}}}{\frac{1}{\sqrt{k(k+r)}}} = \sqrt{1 + \frac{r}{k}} + \sqrt{1 - \frac{r}{k}} - 2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui nous permet d'obtenir (3.11), et donc l'unicité de la solution de viscosité de l'équation (2.1). \square

Le théorème 4 nous indique donc que, si à chaque itération en temps la vitesse $\mathbf{u}_{\text{div}}^n$ utilisée pour convecter la densité possède la régularité $\mathbf{H} \cap \mathbf{L}^3(\Omega)$, alors la densité ρ^{n+1} calculée à l'aide de l'équation (2.1) satisfait le principe du maximum discret.

Dans le cas des conditions de Dirichlet homogène (*i.e.* lorsque $\Gamma_{\omega} = \emptyset$), il est montré dans [16] que si la vitesse initiale satisfait $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et est à divergence nulle (comme nous l'avons aussi supposé ici), alors pour tout n tel que $0 \leq n \leq N$, la vitesse $\mathbf{u}_{\text{div}}^n$ est dans $\mathbf{H} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$, et nous sommes donc sous les hypothèses du théorème 4.

Étendre ce résultat au cas des conditions de glissement à seuil m'a pas été réalisé au cours de cette thèse à cause des difficultés liées au couplage entre la vitesse et la partie plastique du tenseur des contraintes, inhérente à la formulation de ces conditions. Dans toute la suite, nous supposons que l'approximation de la densité satisfait (3.3). Notons qu'une hypothèse analogue est faite sur l'approximation de la densité dans [40], p. 921.

Notations pour les bornes des coefficients variables Maintenant que nous avons démontré le principe du maximum discret sur l'équation de conservation de la masse discrète (2.1), nous allons introduire les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\inf_{[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} \mu(x) = \mu_{\min} & \quad \text{et} \quad \sup_{[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} \mu(x) = \mu_{\max}, \\
\inf_{[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} \alpha(x) = \alpha_{\min} & \quad \text{et} \quad \sup_{[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} \alpha(x) = \alpha_{\max}, \\
\inf_{[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} c_f(x) = c_{f_{\min}} & \quad \text{et} \quad \sup_{[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} c_f(x) = c_{f_{\max}}, \\
\inf_{[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} c_s(x) = c_{s_{\min}} & \quad \text{et} \quad \sup_{[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} c_s(x) = c_{s_{\max}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Par construction on a donc, pour tout n tel que $0 \leq n \leq N$,

$$\mu_{\min} \leq \mu^n \leq \mu_{\max},$$

et de même pour les autres coefficients variables.

3.1.2 Convergence de l'algorithme de point fixe

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent, il y a un couplage des inconnues \mathbf{u}^{n+1} , Σ^{n+1} et σ^{n+1} dans le système (2.4). Nous allons démontrer dans le théorème 5 que la procédure de point fixe (2.8)-(2.9) décrite précédemment converge vers la solution du système (2.4).

Théorème 5. *Si les paramètres numériques r, ℓ et θ sont choisis tels que $4\theta + \ell \frac{(\alpha_{\max})^2}{\mu_{\min}} \leq 4$ et $rc_{s_{\max}}^2 < 2(1 - \theta)c_{f_{\min}}$, alors pour tout $0 \leq n \leq N - 1$, la suite $(\mathbf{u}^{n,k}, \Sigma^{n,k}, \sigma^{n,k})_k$ définie par (2.8)-(2.9) converge vers $(\mathbf{u}^{n+1}, \Sigma^{n+1}, \sigma^{n+1})$ solution de (2.4) lorsque k tend vers l'infini. De plus, la convergence est géométrique de raison $(1 - \theta)$.*

Démonstration. On note $\bar{\mathbf{u}}^k = \mathbf{u}^{n,k} - \mathbf{u}^{n+1}$, $\bar{\Sigma}^k = \Sigma^{n,k} - \Sigma^{n+1}$ et $\bar{\sigma}^k = \sigma^{n,k} - \sigma^{n+1}$. En

soustrayant les équations (2.8)-(2.9) au système (2.4), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\delta t}(\rho^{n+1} + \rho^n)\bar{\mathbf{u}}^{k+1} + \mathbf{B}(\rho^{n+1}\mathbf{u}_{\text{div}}^n, \bar{\mathbf{u}}^{k+1}) - \text{div}(2\mu^{n+1}\mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}) = \text{div}(\alpha^{n+1}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k), \quad \text{dans } \Omega, \\ \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{k+1} = \mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\Sigma}^{n,k} + \ell\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1} + \theta(\boldsymbol{\Sigma}^n - \boldsymbol{\Sigma}^{n,k})) \\ \quad - \mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} + \ell\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} + \theta(\boldsymbol{\Sigma}^n - \boldsymbol{\Sigma}^{n+1})), \quad \text{dans } \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}}^{k+1} = 0, \quad \text{dans } \Gamma_0, \\ \bar{\mathbf{u}}^{k+1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{dans } \Gamma_\omega, \\ (2\mu^{n+1}\mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1} \mathbf{n} + \alpha^{n+1}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k \mathbf{n})_{\mathbf{t}} = -c_f^{n+1}\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}}^{k+1} - c_s^{n+1}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^k, \quad \text{dans } \Gamma_\omega, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}^{n,k} + rc_s^{n+1}\mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{n,k+1} + \theta(\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}^{n,k})) \\ \quad - \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + rc_s^{n+1}\mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{n+1} + \theta(\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}^{n+1})), \quad \text{dans } \Gamma_\omega. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

On prend maintenant le produit scalaire de la première équation de (3.13) avec $\bar{\mathbf{u}}^{k+1}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. On observe en utilisant le lemme 1 que le terme non linéaire s'annule. En intégrant par parties et en utilisant $\bar{\mathbf{u}}^{k+1}|_{\Gamma_0} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \left\| \sqrt{\frac{\rho^{n+1} + \rho^n}{2}} \bar{\mathbf{u}}^{k+1} \right\|^2 + 2 \left\| \sqrt{2\mu^{n+1}} \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1} \right\|^2 - \int_{\Gamma_\omega} 2\mu^{n+1} \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{k+1} \\ = -(\alpha^{n+1} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k, \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}) + \int_{\Gamma_\omega} \alpha^{n+1} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{k+1}. \end{aligned}$$

En utilisant les quatrième et cinquième équations de (3.13), on a $\bar{\mathbf{u}}^{k+1} = \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}}^{k+1}$ dans Γ_ω , et on déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \left\| \sqrt{\frac{\rho^{n+1} + \rho^n}{2}} \bar{\mathbf{u}}^{k+1} \right\|^2 + 2 \left\| \sqrt{2\mu^{n+1}} \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1} \right\|^2 = -(\alpha^{n+1} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k, \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}) \\ - \left\| \sqrt{c_f^{n+1}} \bar{\mathbf{u}}^{k+1} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_\omega)}^2 - \int_{\Gamma_\omega} c_s^{n+1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^k \cdot \bar{\mathbf{u}}^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

On rappelle que l'on utilise la norme de Froebenius pour les tenseurs, qui n'est pas la norme découlant du produit scalaire usuelle et qui implique la présence d'un facteur 2. De la deuxième équation de (3.13) et comme \mathbb{P}_Λ est une projection, on a

$$|\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{k+1}| \leq |(1 - \theta)\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k + \ell\alpha^{n+1}\mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}|.$$

En prenant la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$, il vient

$$\|\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{k+1}\|^2 \leq (1 - \theta)^2 \|\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k\|^2 + \ell^2 \|\alpha^{n+1}\mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \ell(1 - \theta)(\alpha^{n+1}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k, \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}). \quad (3.15)$$

En combinant (3.14), (3.15) et en utilisant les bornes sur les coefficients variables $\alpha^{n+1} \leq \alpha_{\max}$, $\mu^{n+1} \geq \mu_{\min}$ et $\frac{\rho^{n+1} + \rho^n}{2} \geq \rho_{\min}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|\bar{\Sigma}^{k+1}\|^2 + \frac{\ell \rho_{\min}(1-\theta)}{\delta t} \|\bar{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \ell(4\mu_{\min}(1-\theta) - \ell\alpha_{\max}^2) \|\mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ & \leq (1-\theta)^2 \|\bar{\Sigma}^k\|^2 - \ell(1-\theta)c_{f\min} \|\bar{\mathbf{u}}^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 - \ell(1-\theta) \int_{\Gamma_\omega} c_s^{n+1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^k \cdot \bar{\mathbf{u}}^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

De la sixième équation de (3.13), comme $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ est une projection, on tire

$$|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}| \leq |(1-\theta)\bar{\boldsymbol{\sigma}}^k + rc_s^{n+1}\bar{\mathbf{u}}_t^{k+1}|.$$

En prenant la norme $L^2(\Gamma_\omega)$ et en utilisant que $\bar{\mathbf{u}}^{k+1} = \bar{\mathbf{u}}_t^{k+1}$ dans Γ_ω , il vient

$$\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 \leq (1-\theta)^2 \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^k\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 + r^2 \|c_s^{n+1}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 + 2r(1-\theta) \int_{\Gamma_\omega} c_s^{n+1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^k \cdot \bar{\mathbf{u}}^{k+1}. \quad (3.17)$$

En combinant (3.16), (3.17) et en utilisant les bornes $c_s^{n+1} \leq c_{s\max}$ et $c_f^{n+1} \geq c_{f\min}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|\bar{\Sigma}^{k+1}\|^2 + \frac{\ell}{2r} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 + \frac{\ell \rho_{\min}(1-\theta)}{\delta t} \|\bar{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \ell(4\mu_{\min}(1-\theta) - \ell\alpha_{\max}^2) \|\mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ & + \ell((1-\theta)c_{f\min} - \frac{r}{2}c_{s\max}^2) \|\bar{\mathbf{u}}^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 \leq (1-\theta)^2 \|\bar{\Sigma}^k\|^2 + (1-\theta)^2 \frac{\ell}{2r} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^k\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses $4\theta + \ell \frac{\alpha_{\max}^2}{\mu_{\min}} \leq 4$ et $rc_{s\max}^2 < 2(1-\theta)c_{f\min}$, il vient

$$\begin{aligned} & \sqrt{\|\bar{\Sigma}^k\|^2 + \frac{\ell}{2r} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^k\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2} \leq (1-\theta)^k \sqrt{\|\bar{\Sigma}^0\|^2 + \frac{\ell}{2r} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^0\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2}, \\ & \|\bar{\mathbf{u}}^k\| \leq \sqrt{\frac{\delta t(1-\theta)}{\ell \rho_{\min}}} (1-\theta)^k \sqrt{\|\bar{\Sigma}^0\|^2 + \frac{\ell}{2r} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^0\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2}, \\ & \|\bar{\mathbf{u}}^k\|_{L^2(\Gamma_\omega)} \leq \frac{(1-\theta)}{\sqrt{\ell((1-\theta)c_{f\min} - \frac{r}{2}c_{s\max}^2)}} (1-\theta)^k \sqrt{\|\bar{\Sigma}^0\|^2 + \frac{\ell}{2r} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^0\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

Remarque 4. Notons que, si $4\theta + \ell \frac{\alpha_{\max}^2}{\mu_{\min}} < 4$, on a aussi la convergence dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ pour la vitesse :

$$\|\mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}^k\| \leq \frac{1-\theta}{\sqrt{r(4\mu_{\min}(1-\theta) - r\alpha_{\max}^2)}} (1-\theta)^k \|\bar{\Sigma}^0\|.$$

3.2 Analyse de stabilité

Après avoir présenté le principe du maximum discret vérifié par la densité, nous allons maintenant établir un résultat de stabilité en norme \mathbf{L}^2 sur les autres variables du système :

Théorème 6. *Si les paramètres numériques r, ℓ et θ sont choisis tels que $\ell \leq \frac{\mu_{\min}}{\alpha_{\max}^2}$, $r \leq \frac{c_{f_{\min}}}{2c_{s_{\max}}}$ et $\theta \leq \frac{1}{2}$, alors, pour tout $1 \leq n \leq N$, on a*

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\rho^n} \mathbf{u}^n\|^2 + 2\delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|\sqrt{2\mu^{k+1}} \mathbf{D}\mathbf{u}^{k+1}\|^2 + \delta t c_{f_{\min}} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_\omega)}^2 \\ & + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla p^n\|^2 + \delta t \frac{\theta}{r} \|\boldsymbol{\sigma}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_\omega)}^2 + 2\delta t \frac{\theta}{\ell} \|\boldsymbol{\Sigma}^n\|^2 \\ & \leq \|\sqrt{\rho^0} \mathbf{u}^0\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla p^0\|^2 + \delta t \frac{\theta}{r} \|\boldsymbol{\sigma}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_\omega)}^2 + 2\delta t \frac{\theta}{\ell} \|\boldsymbol{\Sigma}^0\|^2 \end{aligned}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire de la première équation de (2.4) avec $2\delta t \mathbf{u}^{n+1}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En remarquant que l'on a l'égalité

$$\begin{aligned} & \left(2\mathbf{u}^{n+1}, \frac{1}{2}(\rho^{n+1} + \rho^n) \mathbf{u}^{n+1} - \rho^n \mathbf{u}^n \right) \\ & = \|\sqrt{\rho^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n} \mathbf{u}^n\|^2 + \|\sqrt{\rho^n} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

en utilisant le lemme 1 et en intégrant par parties, on déduit

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\rho^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n} \mathbf{u}^n\|^2 + \|\sqrt{\rho^n} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|^2 + 4\delta t \|\sqrt{2\mu^{n+1}} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ & = -2\delta t (\nabla(p^n + q^n), \mathbf{u}^{n+1}) - 2\delta t (\alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) \\ & + 2\delta t \int_{\Gamma_\omega} (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} \mathbf{n} + \alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il nous faut maintenant contrôler les trois termes du membre de droite de (3.19).

Terme $-2\delta t (\nabla(p^n + q^n), \mathbf{u}^{n+1})$. En rappelant que $p^n - p^{n-1} = q^n$ (voir (2.6)), on écrit

$$-2\delta t (\nabla(2p^n - p^{n-1}), \mathbf{u}^{n+1}) = 2\delta t (\nabla(p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}), \mathbf{u}^{n+1}) - 2\delta t (\nabla p^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}).$$

En prenant le produit scalaire de la première équation de (2.5) avec $\frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}} ((p^{n+1} - p^n) - (p^n - p^{n-1}))$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, en intégrant par parties et en utilisant $\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, ainsi que l'identité (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla(p^{n+1} - p^n)\|^2 - \|\nabla(p^n - p^{n-1})\|^2 + \|\nabla(p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1})\|^2 \right) \\ & = 2\delta t (\mathbf{u}^{n+1}, \nabla(p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1})). \end{aligned}$$

De façon analogue, en prenant cette fois-ci le produit scalaire de la première équation de (2.5) avec $-\frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}}p^{n+1}$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$-\frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla p^{n+1}\|^2 - \|\nabla p^n\|^2 + \|\nabla(p^{n+1} - p^n)\|^2 \right) = -2\delta t(\mathbf{u}^{n+1}, \nabla p^{n+1}).$$

En utilisant les trois précédentes égalités, on déduit

$$\begin{aligned} -2\delta t(\nabla(2p^n - p^{n-1}), \mathbf{u}^{n+1}) &= \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla(p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1})\|^2 \\ &+ \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left[-\|\nabla p^{n+1}\|^2 + \|\nabla p^n\|^2 - \|\nabla(p^n - p^{n-1})\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

D'autre part, en utilisant (2.5), et les mêmes arguments que précédemment, on a

$$\frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla(p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1})\|^2 \leq \|\sqrt{\rho^n}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|^2. \quad (3.21)$$

Combinant (3.19), (3.20) et (3.21), on obtient finalement

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{\rho^{n+1}}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n}\mathbf{u}^n\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left[\|\nabla p^{n+1}\|^2 - \|\nabla p^n\|^2 + \|\nabla(p^n - p^{n-1})\|^2 \right] \\ &+ 4\delta t \|\sqrt{2\mu^{n+1}}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ &= -2\delta t(\alpha^{n+1}\Sigma^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) + 2\delta t \int_{\Gamma_\omega} (2\mu^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\mathbf{n} + \alpha^{n+1}\Sigma^{n+1}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Terme $-2\delta t(\alpha^{n+1}\Sigma^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1})$. En utilisant la deuxième équation de (2.4), on a

$$|\Sigma^{n+1}| \leq |\Sigma^{n+1} + \ell\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n+1})|.$$

En élevant cette inégalité au carré, en utilisant l'identité $2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$, en intégrant sur Ω et en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on obtient

$$\begin{aligned} -2\delta t(\alpha^{n+1}\Sigma^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) &\leq 2\ell\delta t \frac{\alpha_{\max}^2}{\mu_{\min}} \|\sqrt{2\mu^{n+1}}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ &+ 2\delta t \frac{\theta(2\theta-1)}{\ell} \|\Sigma^n - \Sigma^{n+1}\|^2 - 2\delta t \frac{\theta}{\ell} \|\Sigma^{n+1}\|^2 + 2\delta t \frac{\theta}{\ell} \|\Sigma^n\|^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En combinant (3.22) et (3.23), on obtient

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{\rho^{n+1}}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n}\mathbf{u}^n\|^2 + 2\delta t \left(2 - \ell \frac{\alpha_{\max}^2}{\mu_{\min}} \right) \|\sqrt{2\mu^{n+1}}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ &+ \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left[\|\nabla p^{n+1}\|^2 - \|\nabla p^n\|^2 + \|\nabla(p^n - p^{n-1})\|^2 \right] \\ &+ 2\delta t \frac{\theta(1-2\theta)}{\ell} \|\Sigma^n - \Sigma^{n+1}\|^2 + 2\delta t \frac{\theta}{\ell} \|\Sigma^{n+1}\|^2 - 2\delta t \frac{\theta}{\ell} \|\Sigma^n\|^2 \\ &\leq 2\delta t \int_{\Gamma_\omega} (2\mu^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\mathbf{n} + \alpha^{n+1}\Sigma^{n+1}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Terme $2\delta t \int_{\Gamma_\omega} (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} \mathbf{n} + \alpha^{n+1} \Sigma^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1}$. En utilisant la cinquième équation de (2.4), l'égalité $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_t^{n+1}$ dans Γ_ω et les bornes sur c_f , on obtient

$$\begin{aligned} & 2\delta t \int_{\Gamma_\omega} (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} \mathbf{n} + \alpha^{n+1} \Sigma^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \\ &= 2\delta t \int_{\Gamma_\omega} (-c_f^{n+1} \mathbf{u}_t^{n+1} - c_s^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^{n+1}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \\ &\leq -2\delta t c_{f\min} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 - 2\delta t \int_{\Gamma_\omega} c_s^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En utilisant la dernière équation dans (2.4), on obtient dans Γ_ω

$$|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}| \leq |\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + r c_s^{n+1} \mathbf{u}_t^{n+1} + \theta(\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}^{n+1})|.$$

En prenant le carré de cette inégalité, en utilisant l'identité (2.12), en intégrant sur Γ_ω , en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, et en utilisant $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_t^{n+1}$ dans Γ_ω , il vient

$$\begin{aligned} -2\delta t \int_{\Gamma_\omega} c_s^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^{n+1} &\leq 2r\delta t c_{s\max}^2 \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 + \delta t(2\theta - 1) \frac{\theta}{r} \|\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^n\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 \\ &\quad - \delta t \frac{\theta}{r} \left(\|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 - \|\boldsymbol{\sigma}^n\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

En combinant (3.25) et (3.26),

$$\begin{aligned} 2\delta t \int_{\Gamma_\omega} (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} \mathbf{n} + \alpha^{n+1} \Sigma^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} &\leq -2\delta t (c_{f\min} - r c_{s\max}^2) \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 \\ &\quad + \delta t(2\theta - 1) \frac{\theta}{r} \|\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^n\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 - \delta t \frac{\theta}{r} \left(\|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 - \|\boldsymbol{\sigma}^n\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

En combinant (3.24) et (3.27),

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\rho^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n} \mathbf{u}^n\|^2 + 2\delta t \left(2 - \ell \frac{\alpha_{\max}^2}{\mu_{\min}} \right) \|\sqrt{2\mu^{n+1}} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ &+ 2\delta t (c_{f\min} - r c_{s\max}^2) \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 + \delta t(1 - 2\theta) \frac{\theta}{r} \|\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^n\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 \\ &+ \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left[\|\nabla p^{n+1}\|^2 - \|\nabla p^n\|^2 + \|\nabla(p^n - p^{n-1})\|^2 \right] + \delta t \frac{\theta}{r} \left[\|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 - \|\boldsymbol{\sigma}^n\|_{L^2(\Gamma_\omega)}^2 \right] \\ &+ 2\delta t \frac{\theta(1 - 2\theta)}{\ell} \|\Sigma^n - \Sigma^{n+1}\|^2 + 2\delta t \frac{\theta}{\ell} \|\Sigma^{n+1}\|^2 - 2\delta t \frac{\theta}{\ell} \|\Sigma^n\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

On conclut la preuve en utilisant les hypothèses $\ell \leq \frac{\mu_{\min}}{\alpha_{\max}^2}$, $r \leq \frac{c_{f\min}}{2c_{s\max}^2}$ et $\theta \leq \frac{1}{2}$, et en sommant la dernière inégalité. \square

Remarque 5. *Sous les hypothèses du théorème 4, on a*

$$4\theta + \ell \frac{(\alpha_{max})^2}{\mu_{min}} \leq 2 + 1,$$

et

$$\frac{rc_{smax}^2}{2(1-\theta)c_{fmin}} \leq \frac{1}{4(1-\theta)} \leq \frac{1}{2}.$$

Les hypothèses sur les paramètres numériques du théorème 4 sont donc plus restrictives que celles du théorème 5.

3.3 Analyse de convergence

Nous allons dans cette section démontrer la convergence du schéma de semi-discrétisation en temps (2.1)-(2.9) vers le modèle continu (1.16). on se restreindra dans cette section au cas de conditions de Dirichlet homogène, *i.e.* $\Gamma_\omega = \emptyset$.

Comme habituellement dans les analyses d'erreur de ce type (*c.f.* [40], [82]) la solution du modèle continu doit être suffisamment régulière. On supposera dans la suite que la solution $(\mathbf{u}, \rho, p, \Sigma)$ de (1.16) satisfait :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), & \nabla \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), & \partial_t \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^3(\Omega)), \\ \partial_{tt} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)), & \nabla \rho &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), & \partial_{tt} \rho &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \partial_t p &\in L^2(0, T, H^1(\Omega)), & \partial_t \Sigma &\in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Remarque 6. *Sous ces hypothèses de régularité sur \mathbf{u} (cf [14]), la solution ρ de l'équation de conservation de la masse (1.1) satisfait le principe du maximum :*

$$\rho_{min} \leq \rho(t, \mathbf{x}) \leq \rho_{max}, \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Nous allons maintenant introduire des notations pour les différentes erreurs (de consistance) que nous serons amenés à estimer dans cette section :

$$\begin{aligned} \varepsilon^n &= \rho(t_n) - \rho^n, & \mathbf{e}^n &= \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n, & \mathbf{e}_{div}^n &= \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_{div}^n, & r^n &= p(t_n) - p^n, \\ \mathbf{s}^n &= \Sigma(t_n) - \Sigma^n. \end{aligned}$$

De par leur construction, l'erreur sur la viscosité μ et le seuil de plasticité α peut être facilement contrôlée par l'erreur sur la densité ε . On note

$$\|\mu'\|_\infty = \sup_{x \in [\rho_{min}; \rho_{max}]} |\mu'(x)|$$

et

$$\|\alpha'\|_\infty = \sup_{x \in [\rho_{min}; \rho_{max}]} |\alpha'(x)|.$$

Comme μ et α sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , on obtient

$$\|\mu(\rho(t_n)) - \mu^n\| \leq \|\mu'\|_\infty \|\varepsilon^n\| \quad \text{et} \quad \|\alpha(\rho(t_n)) - \alpha^n\| \leq \|\alpha'\|_\infty \|\varepsilon^n\|. \quad (3.29)$$

Dans toute la suite, nous noterons C une constante arbitrairement grande et indépendante du pas de temps δt .

On supposera aussi que

$$\delta t < \min\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2C_5 + 4}\right), \quad (3.30)$$

avec C_5 définie par (3.53) et indépendante de δt .

Remarque 7. *En raison des deux approximations de la vitesse \mathbf{u}^n et \mathbf{u}_{div}^n que nous calculons dans le schéma, nous sommes amenés à considérer les deux erreurs correspondantes \mathbf{e}^n et \mathbf{e}_{div}^n . En utilisant la définition (2.7) de \mathbf{u}_{div}^n , on obtient*

$$\mathbf{e}^n = \mathbf{e}_{div}^n - \frac{\delta t}{\rho_{min}} \nabla q^n.$$

En utilisant $\text{div } \mathbf{e}_{div}^n = 0$ et $\mathbf{e}_{div}^n \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$, on déduit que \mathbf{e}_{div}^n peut être contrôlée par \mathbf{e}^n :

$$\|\mathbf{e}_{div}^n\|^2 \leq \|\mathbf{e}_{div}^n\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{min}^2} \|\nabla q^n\|^2 = \|\mathbf{e}^n\|^2.$$

Pour obtenir les estimations d'erreur de cette section, nous utiliserons à plusieurs reprises le lemme de Gronwall discret, que l'on énonce sous la forme suivante :

Lemme 2. *(Lemme de Gronwall discret) Soient $M \in \mathbb{N}^*$, τ , B et C des nombres positifs, $(y^n)_n, (h^n)_n, (g^n)_n$ et $(f^n)_n$ des suites de nombres positifs satisfaisant, pour tout m tel que $0 \leq m \leq M$,*

$$y^m + \tau \sum_{n=0}^m h^n \leq B + \tau \sum_{n=0}^m (g^n y^n + f^n), \quad \text{avec} \quad \tau \sum_{n=0}^M g^n \leq C.$$

Supposons que $\tau g^n < 1$ pour tout n tel que $0 \leq n \leq M$ et soit

$$\sigma_n = (1 - \tau g^n)^{-1}, \quad \sigma = \max_{0 \leq n \leq M} \sigma_n.$$

Alors, pour tout m tel que $0 \leq m \leq M$, on a

$$y^m + \tau \sum_{n=0}^m h^n \leq \exp(\sigma C) (B + \tau \sum_{n=0}^m f^n).$$

Démonstration. Soit $\delta_m \geq 0$ défini par l'équation

$$y^m + \tau \sum_{n=0}^m h^n + \delta_m = \tau \sum_{n=0}^m (g^n y^n + f^n) + B.$$

On pose

$$S_m := y^m + \tau \sum_{n=0}^m h^n + \delta_m.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{S_m - S_{m-1}}{\tau} &= \frac{\tau \sum_{n=0}^m (g^n y^n + f^n) + B - \tau \sum_{n=0}^{m-1} (g^n y^n + f^n) - B}{\tau} \\ &= g^m y^m + f^m \\ &\leq g^m S_m + f^m. \end{aligned}$$

De cette relation, on doit conclure

$$S_m \leq \exp\left(\tau \sum_{n=0}^m \sigma_n g^n\right) \left\{ \tau \sum_{n=0}^m f^n + B \right\}, \quad (3.31)$$

ce qui terminera la preuve vu que $\delta_n \geq 0$. On prouve (3.31) par récurrence. On a

$$S_0 = \tau(g^0 y^0 + f^0) + B \leq \tau(g^0 S_0 + f^0) + B,$$

donc $S_0(1 - \tau g^0) \leq \tau f^0 + B$, puis $S_0 \leq \sigma_0(\tau f^0 + B)$.

Ensuite $\sigma_0 \leq \exp(\tau \sigma_0 g^0)$ (car $\tau g^0 \sigma_0 = \sigma_0 - 1$ et $e^{x-1} \geq x$) donc

$$S_0 \leq \exp(\tau \sigma_0 g^0)(\tau f^0 + B).$$

Supposons que (3.31) soit vérifiée au rang m . On a

$$S_{m+1} \leq S_m + \tau(g^{m+1} S_{m+1} + f_{m+1})$$

donc

$$S_{m+1}(1 - \tau g^{m+1}) \leq S_m + \tau f^{m+1}$$

donc

$$S_{m+1} \leq \sigma_{m+1}(S_m + \tau f^{m+1}) = (1 + \tau g^{m+1} \sigma_{m+1})(S_m + \tau f^{m+1}).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} S_{m+1} &\leq (1 + \tau g^{m+1} \sigma_{m+1}) \left(\exp\left(\tau \sum_{n=0}^m \sigma_n g^n\right) \left\{ \tau \sum_{n=0}^m f^n + B \right\} + \tau f^{m+1} \right) \\ &\leq \exp\left(\tau \sum_{n=0}^{m+1} \sigma_n g^n\right) \left\{ \tau \sum_{n=0}^{m+1} f^n + B \right\}. \end{aligned}$$

□

Enfin, on utilisera à plusieurs reprises le résultat suivant, qui nous permettra pour toute fonction de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ d'obtenir l'équivalence entre les normes $\|\mathbf{D} \cdot\|$ et $\|\nabla \cdot\|$.

Proposition 3. *Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ alors on a l'inégalité*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}\| \leq \|\nabla\mathbf{u}\| \leq \sqrt{2}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|.$$

La première inégalité est une simple conséquence de l'inégalité triangulaire. L'inégalité de droite est un cas particulier d'une plus grande classe d'inégalités souvent appelées inégalités de Korn dans la littérature (c.f. [52]).

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}\| = \left\| \frac{{}^T\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}\|{}^T\nabla\mathbf{u}\| + \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}\| = \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}\| + \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}\| = \|\nabla\mathbf{u}\|,$$

d'où la première inégalité. D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{{}^T\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}}{2} : \frac{{}^T\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}}{2} \\ &= \frac{1}{8} \int_{\Omega} ({}^T\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}) : ({}^T\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2 + (\partial_z v)^2 + (\partial_y u)(\partial_x v) + (\partial_z u)(\partial_x w) \\ &\quad + (\partial_x v)(\partial_y u) + (\partial_z v)(\partial_y w) + (\partial_x w)(\partial_z u) + (\partial_y w)(\partial_z v). \end{aligned}$$

En effectuant une double intégration par parties sur chacun des doubles produits et en utilisant $\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0$, on obtient

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\partial_x u + \partial_y v + \partial_z v)^2.$$

Le dernier terme de l'inégalité précédente étant positif, on obtient

$$\sqrt{2}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\| \geq \|\nabla\mathbf{u}\|.$$

□

3.3.1 Estimation d'erreur préliminaire sur la densité

Comme pour l'étude de stabilité, on se focalise dans un premier temps sur l'équation de conservation de la masse (2.1). On démontre dans le théorème 7 que l'erreur sur la densité est contrôlée par l'erreur sur la vitesse et un terme d'ordre δt :

Théorème 7. *Sous les hypothèses de régularité (3.28), si \mathbf{u}_0 est dans $\mathbf{H} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ et si $\rho_{\min} \leq \rho_0 \leq \rho_{\max}$, alors pour tout n tel que $0 \leq n \leq N - 1$, on a l'estimation*

$$\delta t \sum_{k=0}^n \|\rho(t_{k+1}) - \rho^{k+1}\|^2 \leq C_1 \delta t^2 + C_2 \delta t \sum_{k=0}^n \|\mathbf{u}(t_{k+1}) - \mathbf{u}^{k+1}\|^2, \quad (3.32)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de δt définies par

$$\begin{aligned} C_1 &= T \exp(6T) \left(\|\partial_{tt}\rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^4(\Omega))}^2 \|\nabla \rho\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2 \right), \\ C_2 &= T \exp(6T) \|\nabla \rho\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Démonstration. La régularité $L^\infty(\Omega)$ de ρ^{n+1} n'est pas suffisante pour obtenir le résultat énoncé. Nous allons donc à nouveau travailler avec la solution $\rho_\epsilon^n \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ de l'équation régularisée (3.2).

On note $\varepsilon_\epsilon^n = \rho(t_n) - \rho_\epsilon^n$. En soustrayant la première équation de (1.16) évaluée au temps t_{n+1} à l'équation (3.2), on obtient l'équation d'erreur suivante

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_\epsilon^{n+1} - \varepsilon_\epsilon^n}{\delta t} &= \frac{\rho(t_{n+1}) - \rho(t_n)}{\delta t} - \partial_t \rho(t_{n+1}) - \mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \varepsilon_\epsilon^{n+1} \\ &\quad - \mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho(t_{n+1}) - \delta \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \rho(t_{n+1}) - \epsilon \Delta \rho_\epsilon^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

où on rappelle que pour toute suite l'incrément entre un terme et son précédent δ a été défini par (3.1) dans le chapitre 3. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on écrit

$$\frac{\rho(t_{n+1}) - \rho(t_n)}{\delta t} - \partial_t \rho(t_{n+1}) = \frac{1}{\delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t) \partial_{tt} \rho(t) dt.$$

En prenant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de l'équation d'erreur (3.33) avec $2\delta t \varepsilon_\epsilon^{n+1}$, en utilisant l'égalité précédente, en intégrant par parties le dernier terme et en utilisant $\nabla \rho_\epsilon^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0$ dans $\partial\Omega$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_\epsilon^{n+1}\|^2 - \|\varepsilon_\epsilon^n\|^2 + \|\varepsilon_\epsilon^{n+1} - \varepsilon_\epsilon^n\|^2 &= 2 \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t) \partial_{tt} \rho(t) dt, \varepsilon_\epsilon^{n+1} \right) \\ &\quad - 2\delta t \int_{\Omega} \varepsilon_\epsilon^{n+1} (\mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho(t_{n+1}) + \delta \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \rho(t_{n+1})) + 2\delta t \epsilon (\nabla \rho_\epsilon^{n+1}, \nabla \varepsilon_\epsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

En écrivant

$$2\delta t \epsilon (\nabla \rho_\epsilon^{n+1}, \nabla \varepsilon_\epsilon^{n+1}) = 2\delta t \epsilon (\nabla \rho_\epsilon^{n+1}, \nabla \rho(t_{n+1})) - 2\delta t \|\sqrt{\epsilon} \nabla \rho_\epsilon^{n+1}\|^2,$$

on réécrit l'égalité précédente sous la forme

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_\epsilon^{n+1}\|^2 - \|\varepsilon_\epsilon^n\|^2 + \|\varepsilon_\epsilon^{n+1} - \varepsilon_\epsilon^n\|^2 + 2\delta t \|\sqrt{\epsilon} \nabla \rho_\epsilon^{n+1}\|^2 \\ = 2 \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t) \partial_{tt} \rho(t) dt, \varepsilon_\epsilon^{n+1} \right) - 2\delta t \int_{\Omega} \mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho(t_{n+1}) \varepsilon_\epsilon^{n+1} \\ - 2\delta t \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \rho(t_{n+1}) \varepsilon_\epsilon^{n+1} + 2\delta t \epsilon (\nabla \rho_\epsilon^{n+1}, \nabla \rho(t_{n+1})). \end{aligned} \quad (3.34)$$

On fait maintenant tendre ϵ vers 0 dans (3.34). En utilisant les résultats de convergence faible sur ρ_ϵ^{n+1} et $\sqrt{\epsilon}\nabla\rho_\epsilon^{n+1}$ établis dans (3.9), et l'inégalité $\|\varepsilon^{n+1}\| \leq \liminf_\epsilon \|\varepsilon_\epsilon^{n+1}\|$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{n+1}\|^2 - \|\varepsilon^n\|^2 &\leq 2\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t)\partial_{tt}\rho(t)dt, \varepsilon^{n+1}\right) \\ &\quad - 2\delta t \int_{\Omega} \mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \nabla\rho(t_{n+1})\varepsilon^{n+1} - 2\delta t \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla\rho(t_{n+1})\varepsilon^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Il nous faut maintenant estimer les termes du membre de droite de l'inégalité précédente. Pour cela, on utilise les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young.

Premier terme :

$$\begin{aligned} 2\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t)\partial_{tt}\rho(t)dt, \varepsilon^{n+1}\right) &\leq 2\delta t \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_{tt}\rho(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon^{n+1}\|, \\ &\leq \delta t^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_{tt}\rho(t)\|^2 dt + \delta t \|\varepsilon^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Deuxième terme :

$$-2\delta t \int_{\Omega} \mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \nabla\rho(t_{n+1})\varepsilon^{n+1} \leq \delta t \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \|\mathbf{e}_{\text{div}}^n\|^2 + \delta t \|\varepsilon^{n+1}\|^2.$$

Troisième terme :

$$\begin{aligned} -2\delta t \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla\rho(t_{n+1})\varepsilon^{n+1} \\ \leq 2\delta t^{\frac{3}{2}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))} \|\varepsilon^{n+1}\| \\ \leq \delta t^2 \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 dt + \delta t \|\varepsilon^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

En reportant les inégalités précédentes dans (3.35) et en sommant n de 0 à j , avec $0 \leq j \leq N-1$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{j+1}\|^2 &\leq \delta t^2 (\|\partial_{tt}\rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^4(\Omega))}^2 \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2) \\ &\quad + 3\delta t \sum_{n=0}^j \|\varepsilon^{n+1}\|^2 + \delta t \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \sum_{n=0}^j \|\mathbf{e}_{\text{div}}^n\|^2. \end{aligned}$$

Cette configuration nous permet d'appliquer le lemme de Gronwall discret (lemme 2) en

choisissant :

$$\begin{aligned}
M &= N - 1, \\
m &= j, \\
\tau &= \delta t, \\
B &= \delta t^2 (\|\partial_{tt}\rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^4(\Omega))}^2 \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2), \\
y^m &= \|\varepsilon^{m+1}\|^2, \\
h^n &= 0, \\
g^n &= 3, \\
f^n &= \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \|\mathbf{e}_{\text{div}}^n\|^2, \\
C &= 3T, \\
\tau g^n &= \frac{1}{2} < 1 \quad (\text{en utilisant l'hypothèse (3.30)}), \\
\sigma &= 2.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon^{j+1}\|^2 &\leq \delta t^2 \exp(6T) \left(\|\partial_{tt}\rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^4(\Omega))}^2 \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2 \right) \\
&\quad + \delta t \exp(6T) \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \sum_{n=0}^j \|\mathbf{e}_{\text{div}}^n\|^2,
\end{aligned}$$

puis en utilisant la remarque 7 il vient

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon^{j+1}\|^2 &\leq \delta t^2 \exp(6T) \left(\|\partial_{tt}\rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^4(\Omega))}^2 \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2 \right) \\
&\quad + \delta t \exp(6T) \|\nabla\rho\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \sum_{n=0}^j \|\mathbf{e}^n\|^2.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

On conclut la démonstration en multipliant l'inégalité précédente par δt et en sommant sur j de 0 à k , avec $k \leq N - 1$. □

3.3.2 Estimation d'erreur finale

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de convergence suivant

Théorème 8. *Sous les hypothèses de régularité (3.28), si la vitesse initiale \mathbf{u}_0 est dans $\mathbf{H} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$, si $\rho_{\min} \leq \rho_0 \leq \rho_{\max}$, si les paramètres numériques sont choisis tels que $\theta < \frac{1}{2}$,*

$\delta t < 1/6$ et $\ell \leq \frac{\mu_{min}}{12\alpha_{max}^2}$, alors, pour tout n tel que $1 \leq n \leq N$, la vitesse discrète solution de (2.1)-(2.7) satisfait l'estimation d'erreur suivante

$$\|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n\|^2 + \delta t \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{u}(t_{k+1}) - \mathbf{u}^{k+1}\|_1^2 \leq C_8 \delta t (\delta t + \theta),$$

où la constante C_8 , indépendante de δt , est explicitée dans la démonstration.

Plan de la démonstration : La démonstration est découpée en trois étapes. On commence par écrire une équation d'erreur en soustrayant les équations du schéma de semi-discrétisation en temps (2.1)-(2.7) aux équations du modèle continu (1.16). A l'aide de cette équation d'erreur, on fait apparaître la norme de l'erreur sur la vitesse en prenant le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ avec l'erreur sur la vitesse. Après avoir effectué cela, nous obtenons une inéquation avec des termes signés, et des termes sans signe, qui sont sous la forme de produits scalaires dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. L'objet de la deuxième étape est de travailler sur ces termes, afin de les estimer et d'obtenir une inéquation ayant une forme globale permettant d'appliquer le lemme de Gronwall. Finalement, en appliquant le lemme de Gronwall, on obtient alors l'estimation du théorème 8.

Démonstration. Étape 1 : Équation d'erreur. La première étape de cette démonstration consiste à écrire une équation faisant apparaître les différentes erreurs que l'on cherche à contrôler à l'aide de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement discrète dans (2.4) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho^{n+1} + \rho^n) (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}(t_{n+1})) - \rho^n (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t_n)) \right] \\ & - \operatorname{div} \left(2\mu^{n+1} (\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1})) \right) + \nabla \cdot ((p^n + q^n) - p(t_{n+1})) \\ & = \operatorname{div} (\alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} - \alpha(\rho(t_{n+1})) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1})) \\ & - \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div} (\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n) \\ & - \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho^{n+1} + \rho^n) (\mathbf{u}(t_{n+1})) - \rho^n (\mathbf{u}(t_n)) \right] + \operatorname{div} \left(2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) \\ & - \nabla p(t_{n+1}) + \operatorname{div} (\alpha(t_{n+1}) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1})). \end{aligned} \tag{3.37}$$

En écrivant

$$\operatorname{div} \left(2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) = \operatorname{div} \left(2(\mu^{n+1} - \mu(\rho(t_{n+1}))) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) + \operatorname{div} \left(2\mu(\rho(t_{n+1})) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right),$$

et en multipliant l'équation d'erreur (3.37) par -1 , on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho^{n+1} + \rho^n) \mathbf{e}^{n+1} - \rho^n \mathbf{e}^n \right] - \operatorname{div} (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}) \\
& + \nabla (p(t_{n+1}) - (p^n + q^n)) = \operatorname{div} (\alpha(\rho(t_{n+1})) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1}) - \alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}) \\
& + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div} (\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n) \\
& + \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho^{n+1} + \rho^n) \mathbf{u}(t_{n+1}) - \rho^n \mathbf{u}(t_n) \right] + \operatorname{div} \left(2(\mu(\rho(t_{n+1})) - \mu^{n+1}) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1})) \right) \\
& - \operatorname{div} \left(2\mu(\rho(t_{n+1})) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) + \nabla p(t_{n+1}) - \operatorname{div} (\alpha(t_{n+1}) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1})).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

On utilise maintenant les équations du modèle continu pour faire apparaître explicitement les restes dus aux erreurs de troncature.

Comme $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, l'équation de conservation de la masse de (1.16) nous permet d'obtenir l'équation

$$\frac{\mathbf{u}(t_{n+1})}{2} \left(\partial_t \rho(t_{n+1}) + \operatorname{div} (\rho(t_{n+1}) \mathbf{u}(t_{n+1})) \right) = 0.$$

En reformulant le quatrième terme du membre de droite de (3.38) et en utilisant l'équation précédente, l'équation (3.38) se reformule

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho^{n+1} + \rho^n) \mathbf{e}^{n+1} - \rho^n \mathbf{e}^n \right] - \operatorname{div} (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}) \\
& + \nabla (p(t_{n+1}) - (p^n + q^n)) = \operatorname{div} (\alpha(\rho(t_{n+1})) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1}) - \alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}) \\
& + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div} (\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n) - \frac{1}{2} \mathbf{u}(t_{n+1}) \operatorname{div} (\mathbf{u}(t_{n+1}) \rho(t_{n+1})) \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{u}(t_{n+1}) \left(\frac{(\rho^{n+1} - \rho^n)}{\delta t} - \partial_t \rho(t_{n+1}) \right) + \rho^n \frac{\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)}{\delta t} \\
& + \operatorname{div} \left(2(\mu(\rho(t_{n+1})) - \mu^{n+1}) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) \\
& - \operatorname{div} \left(2\mu(\rho(t_{n+1})) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) + \nabla p(t_{n+1}) - \operatorname{div} (\alpha(t_{n+1}) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1})).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

L'équation de conservation du moment de (1.16) nous permet d'obtenir l'équation

$$\begin{aligned}
& \rho(t_{n+1}) \partial_t \mathbf{u}(t_{n+1}) + \rho(t_{n+1}) \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t_{n+1}) \\
& - \operatorname{div} (2\mu(\rho(t_{n+1})) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1})) + \nabla p(t_{n+1}) - \operatorname{div} (\alpha(\rho(t_{n+1})) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1})) = 0.
\end{aligned}$$

En combinant cette dernière équation à (3.39), plusieurs termes se compensent et on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho^{n+1} + \rho^n) \mathbf{e}^{n+1} - \rho^n \mathbf{e}^n \right] - \operatorname{div} (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}) \\
& + \nabla (p(t_{n+1}) - (p^n + q^n)) = \operatorname{div} (\alpha(\rho(t_{n+1})) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1}) - \alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}) \\
& + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} - \rho(t_{n+1}) \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t_{n+1}) \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n) - \frac{1}{2} \mathbf{u}(t_{n+1}) \operatorname{div}(\mathbf{u}(t_{n+1}) \rho(t_{n+1})) \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{u}(t_{n+1}) \left(\frac{(\rho^{n+1} - \rho^n)}{\delta t} - \partial_t \rho(t_{n+1}) \right) + \rho^n \frac{\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)}{\delta t} - \rho(t_{n+1}) \partial_t \mathbf{u}(t_{n+1}) \\
& + \operatorname{div} \left(2(\mu(\rho(t_{n+1})) - \mu^{n+1}) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right),
\end{aligned}$$

que l'on reformule

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho^{n+1} + \rho^n) \mathbf{e}^{n+1} - \rho^n \mathbf{e}^n \right] - \operatorname{div} (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}) \\
& + \nabla (p(t_{n+1}) - (p^n + q^n)) = \operatorname{div} (\alpha(\rho(t_{n+1})) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1}) - \alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}) \\
& + \operatorname{div} \left(2(\mu(\rho(t_{n+1})) - \mu^{n+1}) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) + \mathbf{R}_1^{n+1} + \mathbf{R}_2^{n+1} + \mathbf{R}_3^{n+1} + \mathbf{R}_4^{n+1},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

où les différents restes dus aux erreurs de troncature sont dénotés par

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^{n+1} &= \rho^n \frac{\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)}{\delta t} - \rho(t_{n+1}) \partial_t \mathbf{u}(t_{n+1}), \\
\mathbf{R}_2^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}(t_{n+1}) \left(\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} - \partial_t \rho(t_{n+1}) \right), \\
\mathbf{R}_3^{n+1} &= \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} - \rho(t_{n+1}) \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t_{n+1}), \\
\mathbf{R}_4^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n) - \frac{1}{2} \mathbf{u}(t_{n+1}) \operatorname{div}(\mathbf{u}(t_{n+1}) \rho(t_{n+1})).
\end{aligned}$$

On prend maintenant le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de (3.40) avec $2\delta t \mathbf{e}^{n+1}$. On observe que le premier terme du membre de gauche se traite comme on l'a fait précédemment dans l'analyse de stabilité (*c.f.* (3.18)). En intégrant par parties, en utilisant $\mathbf{e}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ et $\mu_{\min} \leq \mu^{n+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho^{n+1}} \mathbf{e}^{n+1}\|^2 + \|\sqrt{\rho^n} (\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n)\|^2 - \|\sqrt{\rho^n} \mathbf{e}^n\|^2 + 4\mu_{\min} \delta t \|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\
& \leq -2\delta t \left(\nabla (p(t_{n+1}) - (p^n + q^n)), \mathbf{e}^{n+1} \right) \\
& \quad - 2\delta t (\alpha(\rho(t_{n+1})) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1}) - \alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}) \\
& \quad - 4\delta t \left((\mu(\rho(t_{n+1})) - \mu^{n+1}) \mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1} \right) + 2\delta t \left(\mathbf{R}_1^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1} \right) \\
& \quad + 2\delta t \left(\mathbf{R}_2^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1} \right) + 2\delta t \left(\mathbf{R}_3^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1} \right) + 2\delta t \left(\mathbf{R}_4^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1} \right).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Étape 2 : Estimation des termes sans signe. Les étapes suivantes de la démonstration consistent maintenant à obtenir des estimations sur les différents termes du membre de droite de l'égalité précédente (3.41). On les traite dans l'ordre dans lequel ils apparaissent dans (3.41).

Premier terme. On commence par reformuler l'expression $\nabla(p(t_{n+1}) - (p^n + q^n))$, l'idée étant de traiter ce terme en utilisant principalement l'équation sur la pression (2.5). On écrit

$$\begin{aligned}\nabla(p(t_{n+1}) - (p^n + q^n)) &= \nabla(p(t_{n+1}) - 2p^n + p^{n-1}) \\ &= \nabla(2r^n - r^{n-1} + \delta^2 p(t_{n+1})),\end{aligned}\tag{3.42}$$

où on rappelle que $p^{-1} = p^0$. On doit donc estimer le terme

$$-2\delta t \left(\nabla(2r^n - r^{n-1} + \delta^2 p(t_{n+1})), \mathbf{e}^{n+1} \right).$$

La formulation variationnelle de (2.5) nous donne, pour tout $g \in H^1(\Omega)$,

$$-(\nabla(p^{n+1} - p^n), \nabla g) = -\frac{\rho_{\min}}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1}, \nabla g).$$

En ajoutant le terme $(\nabla \delta p(t_{n+1}), \nabla g)$ de part et d'autre de l'égalité précédente, et en utilisant $\operatorname{div} \mathbf{u}(t_{n+1}) = 0$, on obtient, pour tout $g \in H^1(\Omega)$ l'équation d'erreur sur la pression :

$$(\nabla(r^{n+1} - r^n), \nabla g) = \frac{\rho_{\min}}{\delta t}(\mathbf{e}^{n+1}, \nabla g) + (\nabla \delta p(t_{n+1}), \nabla g).\tag{3.43}$$

D'une part, en prenant $g = -\frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}}\delta^2 r^{n+1}$ dans (3.43), en utilisant l'identité (2.12), on a

$$\begin{aligned}-\frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla(r^{n+1} - r^n)\|^2 - \|\nabla(r^n - r^{n-1})\|^2 + \|\nabla \delta^2 r^{n+1}\|^2 \right) \\ = -2\delta t(\mathbf{e}^{n+1}, \nabla \delta^2 r^{n+1}) - \frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}}(\nabla \delta p(t_{n+1}), \nabla \delta^2 r^{n+1}).\end{aligned}$$

D'autre part, en prenant cette fois ci $g = \frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}}r^{n+1}$ dans (3.43) et en utilisant une nouvelle fois (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla r^{n+1}\|^2 - \|\nabla r^n\|^2 + \|\nabla \delta r^{n+1}\|^2 \right) \\ = 2\delta t(\mathbf{e}^{n+1}, \nabla r^{n+1}) + \frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}}(\nabla \delta p(t_{n+1}), \nabla r^{n+1}).\end{aligned}\tag{3.44}$$

En sommant les deux précédentes égalités, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla r^{n+1}\|^2 - \|\nabla r^n\|^2 + \|\nabla \delta r^n\|^2 \right) - \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla \delta^2 r^{n+1}\|^2 \\ &= 2\delta t (\mathbf{e}^{n+1}, \nabla(2r^n - r^{n-1})) + \frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}} (\nabla \delta p(t_{n+1}), \nabla(2r^n - r^{n-1})). \end{aligned} \quad (3.45)$$

En repartant de l'équation d'erreur sur la pression (3.43), on écrit maintenant une équation d'erreur sur les incréments : Pour tout $g \in H^1(\Omega)$,

$$(\nabla \delta^2 r^{n+1}, \nabla g) = \frac{\rho_{\min}}{\delta t} (\delta \mathbf{e}^{n+1}, \nabla g) + (\nabla \delta^2 p(t_{n+1}), \nabla g).$$

En choisissant $g = \frac{\delta t}{\sqrt{\rho_{\min}}} \delta^2 r^{n+1}$ dans la relation précédente, on obtient

$$\frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla \delta^2 r^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{\rho_{\min}} \|\rho_{\min} \delta \mathbf{e}^{n+1} + \delta t \nabla \delta^2 p(t_{n+1})\|^2,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla \delta^2 r^{n+1}\|^2 &\leq \|\sqrt{\rho^n} \delta \mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\ &+ \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla \delta^2 p(t_{n+1})\|^2 + 2\delta t (\delta \mathbf{e}^{n+1}, \nabla \delta^2 p(t_{n+1})). \end{aligned} \quad (3.46)$$

En sommant (3.45) et (3.46), on déduit

$$\begin{aligned} & \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla r^{n+1}\|^2 - \|\nabla r^n\|^2 + \|\nabla \delta r^n\|^2 \right) \leq 2\delta t (\mathbf{e}^{n+1}, \nabla(2r^n - r^{n-1})) \\ &+ \frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}} (\delta p(t_{n+1}), \nabla(2r^n - r^{n-1})) + \|\sqrt{\rho^n} \delta \mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\ &+ \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla \delta^2 p(t_{n+1})\|^2 + 2\delta t (\delta \mathbf{e}^{n+1}, \nabla \delta^2 p(t_{n+1})). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} & -2\delta t (\mathbf{e}^{n+1}, \nabla(2r^n - r^{n-1})) - 2\delta t (\delta \mathbf{e}^{n+1}, \nabla \delta^2 p(t_{n+1})) - 2\delta t (\mathbf{e}^n, \nabla \delta^2 p(t_{n+1})) \\ &\leq -2\delta t (\mathbf{e}^n, \nabla \delta^2 p(t_{n+1})) - \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla r^{n+1}\|^2 - \|\nabla r^n\|^2 + \|\nabla \delta r^n\|^2 \right) \\ &+ \frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}} (\delta p(t_{n+1}), \nabla(2r^n - r^{n-1})) + \|\sqrt{\rho^n} \delta \mathbf{e}^{n+1}\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla \delta^2 p(t_{n+1})\|^2, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
& -2\delta t \left(\mathbf{e}^{n+1}, \nabla(2r^n - r^{n-1} + \delta^2 p(t_{n+1})) \right) \\
& \leq \underbrace{-2\delta t \left(\mathbf{e}^n, \nabla \delta^2 p(t_{n+1}) \right)}_{a_1} - \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla r^{n+1}\|^2 - \|\nabla r^n\|^2 + \|\nabla \delta r^n\|^2 \right) \\
& \quad + \underbrace{\frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\delta p(t_{n+1}), \nabla(2r^n - r^{n-1}) \right)}_{a_3} + \|\sqrt{\rho^n} \delta \mathbf{e}^{n+1}\|^2 + \underbrace{\frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla \delta^2 p(t_{n+1})\|^2}_{a_5}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

On note a_1 le premier terme du membre de droite, a_3 le troisième et a_5 le dernier. Il nous reste à estimer ces trois termes pour terminer. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral et les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on obtient les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
a_1 & \leq \delta t \|\mathbf{e}^n\|^2 + 2\delta t^2 \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \|\partial_t p(s)\|_1^2 ds, \\
a_3 & = \frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}} \left((\delta p(t_{n+1}), \nabla r^n) + (\delta p(t_{n+1}), \nabla \delta r^n) \right) \\
& \leq \frac{2\delta t^2}{\rho_{\min}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t p(s)\|^2 ds + \frac{\delta t^3}{\rho_{\min}} \|\nabla r^n\|^2 + \frac{\delta t^3}{\rho_{\min}} \|\nabla \delta r^n\|^2, \\
a_5 & \leq \frac{2\delta t^3}{\rho_{\min}} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \|\partial_t p(s)\|_1^2 ds.
\end{aligned}$$

En reportant ces estimations dans (3.47) et en rappelant (3.42), on obtient finalement

$$\begin{aligned}
& -2\delta t \left(\nabla(p(t_{n+1}) - (p^n + q^n)), \mathbf{e}^{n+1} \right) \leq -\frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \left(\|\nabla r^{n+1}\|^2 - \|\nabla r^n\|^2 \right) + \frac{\delta t^3}{\rho_{\min}} \|\nabla r^n\|^2 \\
& \quad + \|\sqrt{\rho^n} \delta \mathbf{e}^{n+1}\|^2 + 2\delta t^2 \left(\frac{1 + \delta t}{\rho_{\min}} + 1 \right) \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \|\partial_t p(s)\|_1^2 ds + \delta t \|\mathbf{e}^n\|^2.
\end{aligned}$$

Deuxième terme. On commence par reformuler ce terme :

$$\begin{aligned}
& -2\delta t \left(\alpha(\rho(t_{n+1})) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1}) - \alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1} \right) \\
& = -2\delta t \left((\alpha(\rho(t_{n+1})) - \alpha^{n+1}) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1}), \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1} \right) - 2\delta t (\alpha^{n+1} \mathbf{s}^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

En utilisant la régularité de α (c.f (3.29)), en rappelant que par construction $|\boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1})| \leq 1$ p.p. dans Ω , et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}
& -2\delta t \left((\alpha(\rho(t_{n+1})) - \alpha^{n+1}) \boldsymbol{\Sigma}(t_{n+1}), \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1} \right) - 2\delta t (\alpha^{n+1} \mathbf{s}^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}) \\
& \leq \delta t \frac{\mu_{\min}}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 + \delta t \frac{2\|\alpha'\|_{\infty}^2}{\mu_{\min}} \|\varepsilon^{n+1}\|^2 - 2\delta t (\mathbf{s}^{n+1}, \alpha^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Pour traiter le dernier terme du membre de droite de (3.48), on utilise la relation (1.12) sur Σ évaluée en t_{n+1} et en choisissant $\ell_c = \ell\alpha^{n+1}$ (voir remarque 1) :

$$\Sigma(t_{n+1}) = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma(t_{n+1}) + \ell\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1})).$$

En utilisant la deuxième équation du système (2.4), on obtient

$$\mathbf{s}^{n+1} = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma(t_{n+1}) + \ell\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1})) - \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma^{n+1} + \ell\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n+1})).$$

Comme \mathbb{P}_Λ est une projection, on a l'inégalité

$$|\mathbf{s}^{n+1}| \leq |\mathbf{s}^{n+1} + \ell\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1} + \theta(\mathbf{s}^n - \mathbf{s}^{n+1}) + \theta\delta\Sigma(t_{n+1})|.$$

En prenant le carré de cette dernière inégalité, il vient

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}^{n+1}|^2 &\leq |\mathbf{s}^{n+1}|^2 + \ell^2(\alpha^{n+1})^2|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}|^2 + \theta^2|\mathbf{s}^n - \mathbf{s}^{n+1}|^2 + \theta^2|\delta\Sigma(t_{n+1})|^2 \\ &\quad + \ell\mathbf{s}^{n+1} : \alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1} + \theta\mathbf{s}^{n+1} : (\mathbf{s}^n - \mathbf{s}^{n+1}) + \theta\mathbf{s}^{n+1} : \delta\Sigma(t_{n+1}) \\ &\quad + \ell\theta\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1} : (\mathbf{s}^n - \mathbf{s}^{n+1}) + \ell\theta\alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1} : \delta\Sigma(t_{n+1}) \\ &\quad + \theta^2(\mathbf{s}^n - \mathbf{s}^{n+1}) : \delta\Sigma(t_{n+1}). \end{aligned}$$

En utilisant $\alpha^{n+1} \leq \alpha_{\max}$, l'identité (2.12), en intégrant sur Ω , en multipliant par $\frac{2\delta t}{\ell}$ et en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient

$$\begin{aligned} -2\delta t(\mathbf{s}^{n+1}, \alpha^{n+1}\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}) &\leq 6\delta t\ell\alpha_{\max}^2\|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 + \frac{2\theta}{\ell}(3\theta\delta t + 1)\|\delta\Sigma(t_{n+1})\|^2 \\ &\quad - \frac{2\theta}{\ell}\delta t(1 - \delta t)\|\mathbf{s}^{n+1}\|^2 + \frac{2\theta}{\ell}\delta t\|\mathbf{s}^n\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral sur le terme $\delta\Sigma(t_{n+1})$, et en reportant cette dernière inégalité et (3.49) dans (3.48), on déduit

$$\begin{aligned} &-2\delta t(\alpha(\rho(t_{n+1}))\Sigma(t_{n+1}) - \alpha^{n+1}\Sigma^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}) \\ &\leq \left(\frac{\mu_{\min}}{2} + 6\ell\alpha_{\max}^2\right)\delta t\|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 + \delta t\frac{2\|\alpha'\|_\infty^2}{\mu_{\min}}\|\varepsilon^{n+1}\|^2 \\ &\quad + \delta t\frac{2\theta(3\theta\delta t + 1)}{\ell}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_t\Sigma(s)\|^2 ds - \frac{2\delta t\theta}{\ell}\left((1 - \delta t)\|\mathbf{s}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{s}^n\|^2\right). \end{aligned}$$

Troisième terme. En utilisant la régularité de μ (c.f (3.29)), les hypothèses de régularité sur la solution du modèle continu (3.28) et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, le troisième terme de (3.41) est borné comme suit

$$\begin{aligned} &-4\delta t\left((\mu(\rho(t_{n+1})) - \mu^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\right) \\ &\leq \delta t\frac{8\|\mu'\|_\infty^2}{\mu_{\min}}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\|\varepsilon^{n+1}\|^2 + \delta t\frac{\mu_{\min}}{2}\|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Quatrième terme. On commence par reformuler ce terme :

$$2\delta t(\mathbf{R}_1^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) = 2\delta t \left(\rho^n \left(\frac{\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)}{\delta t} - \partial_t \mathbf{u}(t_{n+1}) \right) + \partial_t \mathbf{u}(t_{n+1})(\rho^n - \rho(t_n)) \right. \\ \left. + \partial_t \mathbf{u}(t_{n+1})(\rho(t_n) - \rho(t_{n+1})), \mathbf{e}^{n+1} \right).$$

En utilisant les hypothèses de régularité sur la solution du modèle continu (3.28), la formule de Taylor avec reste intégral, et les inégalités de Hölder, Cauchy-Schwarz et de Young, le troisième terme de (3.41) est borné comme suit

$$2\delta t(\mathbf{R}_1^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) \leq \frac{12C_S}{\mu_{\min}} \delta t \|\varepsilon^n\|^2 \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \delta t \frac{\mu_{\min}}{4C_S} \|\mathbf{e}^{n+1}\|_{L^6(\Omega)}^2 \\ + \frac{12C_S}{\mu_{\min}} \delta t^2 \left(\rho_{\max}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_{tt} \mathbf{u}(s)\|_{L^{6/5}(\Omega)}^2 ds + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t \rho(s)\|^2 ds \right),$$

où on a noté C_S la constante de continuité de l'injection de Sobolev de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^6(\Omega)$, c'est-à-dire telle que, pour tout $f \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on ait $\|f\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq C_S \|f\|_1^2$.

En utilisant l'injection de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$ et la proposition 3 ($\mathbf{e}^{n+1} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$), on déduit de l'inégalité précédente :

$$2\delta t(\mathbf{R}_1^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) \leq \frac{12C_S}{\mu_{\min}} \delta t \|\varepsilon^n\|^2 \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \delta t \frac{\mu_{\min}}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\ + \frac{12C_S}{\mu_{\min}} \delta t^2 \left(\rho_{\max}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_{tt} \mathbf{u}(s)\|_{L^{6/5}(\Omega)}^2 ds + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t \rho(s)\|^2 ds \right).$$

Cinquième terme. On commence par reformuler le terme \mathbf{R}_2^{n+1} . En utilisant (2.1) et la première équation de (1.16), on écrit

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} - \partial_t \rho(t_{n+1}) = -\mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho^{n+1} + \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \rho(t_{n+1}) \\ = \mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho^{n+1} + \delta \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \rho(t_{n+1}) + \mathbf{u}(t_n) \cdot \nabla \varepsilon^{n+1}.$$

En utilisant que \mathbf{u} et $\mathbf{e}_{\text{div}}^n$ sont des champs de vecteurs à divergence nulle, on obtient

$$\mathbf{R}_2^{n+1} = \frac{1}{2} \mathbf{u}(t_{n+1}) \operatorname{div} \left(\mathbf{e}_{\text{div}}^n \rho^{n+1} + \delta \mathbf{u}(t_{n+1}) \rho(t_{n+1}) + \mathbf{u}(t_n) \varepsilon^{n+1} \right).$$

Ainsi, en intégrant par parties le terme que l'on cherche à estimer, en utilisant $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, et en utilisant l'identité $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = {}^T \nabla \mathbf{u} \mathbf{v} + {}^T \nabla \mathbf{v} \mathbf{u}$, pour tout \mathbf{u} et \mathbf{v} dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ (où ${}^T \nabla \mathbf{u} \mathbf{v}$

et ${}^T\nabla\mathbf{v}\mathbf{u}$ désignant le produit usuel d'une matrice par un vecteur), il vient

$$\begin{aligned} 2\delta t(\mathbf{R}_2^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) &= -\delta t \left(\int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \left({}^T\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\mathbf{e}^{n+1} + {}^T\nabla\mathbf{e}^{n+1}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) \right. \\ &\quad + \int_{\Omega} \varepsilon^{n+1} \mathbf{u}(t_n) \cdot \left({}^T\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\mathbf{e}^{n+1} + {}^T\nabla\mathbf{e}^{n+1}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \rho(t_{n+1}) \delta\mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \left({}^T\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\mathbf{e}^{n+1} + {}^T\nabla\mathbf{e}^{n+1}\mathbf{u}(t_{n+1}) \right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses de régularité (3.28), $0 < \rho^{n+1} \leq \rho_{\max}$ et l'inégalité de Hölder, il vient

$$\begin{aligned} 2\delta t(\mathbf{R}_2^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) &\leq \sqrt{2}\delta t \left(\rho_{\max} \|\mathbf{e}_{\text{div}}^n\| \|\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^3(\Omega)} \|\mathbf{e}^{n+1}\|_{L^6(\Omega)} \right. \\ &\quad + \rho_{\max} \|\mathbf{e}_{\text{div}}^n\| \|\nabla\mathbf{e}^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \|\varepsilon^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^3(\Omega)} \|\mathbf{e}^{n+1}\|_{L^6(\Omega)} \\ &\quad + \|\varepsilon^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\mathbf{e}^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \rho_{\max} \|\delta\mathbf{u}(t_{n+1})\| \|\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^3(\Omega)} \|\mathbf{e}^{n+1}\|_{L^6(\Omega)} \\ &\quad \left. + \rho_{\max} \|\delta\mathbf{u}(t_{n+1})\| \|\nabla\mathbf{e}^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, la remarque 7 et $\rho_{\min} \leq \rho^n$ on obtient

$$\begin{aligned} 2\delta t(\mathbf{R}_2^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) &\leq \delta t \frac{\mu_{\min}}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\ &\quad + \delta t \|\sqrt{\rho^n} \mathbf{e}^n\|^2 \left(\frac{12\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}\rho_{\min}} \left(C_S \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \right) \\ &\quad + \delta t \|\varepsilon^{n+1}\|^2 \frac{12\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2}{\mu_{\min}} \left(1 + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + \delta t^2 \frac{12\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}} \left(C_S \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t \mathbf{u}(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Sixième et septième termes. En utilisant la forme trilinéaire b définie par (2.11), on écrit

$$\begin{aligned} 2\delta t(\mathbf{R}_3^{n+1} + \mathbf{R}_4^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) \\ = 2\delta t \left(b(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) - b(\rho(t_{n+1}) \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{e}^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1, on le reformule comme suit

$$\begin{aligned} & 2\delta t(\mathbf{R}_3^{n+1} + \mathbf{R}_4^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) \\ &= -2\delta t\left(b(\rho^{n+1} \mathbf{e}_{\text{div}}^n, \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{e}^{n+1}) + b(\rho(t_{n+1})\delta\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{e}^{n+1})\right. \\ &\quad \left.+ b(\varepsilon^{n+1}\mathbf{u}(t_n), \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{e}^{n+1})\right), \end{aligned}$$

puis, en intégrant par parties, en utilisant $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ et les identités

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = {}^T\nabla\mathbf{u}\mathbf{v} + {}^T\nabla\mathbf{v}\mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot ({}^T\nabla\mathbf{v}\mathbf{e}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e},$$

il vient

$$\begin{aligned} & 2\delta t(\mathbf{R}_3^{n+1} + \mathbf{R}_4^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) \\ &= -\delta t(\rho^{n+1} \mathbf{e}_{\text{div}}^n \cdot \nabla\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{e}^{n+1}) + \delta t(\rho^{n+1} \mathbf{e}_{\text{div}}^n, {}^T\nabla\mathbf{e}^{n+1}\mathbf{u}(t_{n+1})) \\ &\quad - \delta t(\rho(t_{n+1})\delta\mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{e}^{n+1}) + \delta t(\rho(t_{n+1})\delta\mathbf{u}(t_{n+1}), {}^T\nabla\mathbf{e}^{n+1}\mathbf{u}(t_{n+1})) \\ &\quad - \delta t(\varepsilon^{n+1}\mathbf{u}(t_n) \cdot \nabla\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{e}^{n+1}) + \varepsilon^{n+1}\delta t(\mathbf{u}(t_{n+1}), {}^T\nabla\mathbf{e}^{n+1}\mathbf{u}(t_{n+1})). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, les hypothèses de régularité (3.28) et $0 < \rho^{n+1} \leq \rho_{\max}$, on en tire

$$\begin{aligned} & 2\delta t(\mathbf{R}_3^{n+1} + \mathbf{R}_4^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) \\ &\leq \sqrt{2}\delta t\left(\rho_{\max}\|\mathbf{e}_{\text{div}}^n\| \|\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^3(\Omega)} \|\mathbf{e}^{n+1}\|_{L^6(\Omega)}\right. \\ &\quad + \rho_{\max}\|\mathbf{e}_{\text{div}}^n\| \|\nabla\mathbf{e}^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \rho_{\max}\|\delta\mathbf{u}(t_{n+1})\| \|\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^3(\Omega)} \|\mathbf{e}^{n+1}\|_{L^6(\Omega)} \\ &\quad + \rho_{\max}\|\delta\mathbf{u}(t_{n+1})\| \|\nabla\mathbf{e}^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \|\varepsilon^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^3(\Omega)} \|\mathbf{e}^{n+1}\|_{L^6(\Omega)} \\ &\quad \left.+ \|\varepsilon^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\mathbf{e}^{n+1}\| \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

puis, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, l'injection de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$, la proposition 3 ($\mathbf{e}^{n+1} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$), la remarque 7 et $\rho_{\min} \leq \rho^n$, on obtient

$$\begin{aligned} & 2\delta t(\mathbf{R}_3^{n+1} + \mathbf{R}_4^{n+1}, \mathbf{e}^{n+1}) \leq \delta t \frac{\mu_{\min}}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\ &+ \delta t \frac{12\rho_{\max}^2}{\rho_{\min}\mu_{\min}} \left(C_S \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \|\sqrt{\rho^n}\mathbf{e}^n\|^2 \\ &+ \delta t^2 \frac{12\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}} \left(C_S \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t\mathbf{u}(s)\|^2 ds \\ &+ \delta t \frac{12}{\mu_{\min}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \left(C_S \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \|\varepsilon^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Étape 3 : Estimation finale d'erreur. L'estimation finale s'obtient en injectant les différentes estimations obtenues dans l'étape 2 dans l'inéquation (3.41) que l'on a obtenue dans l'étape 1, afin d'appliquer le lemme de Gronwall 2 pour conclure.

Avant cela, il nous faut cependant traiter le cas $n = 0$ de façon distincte car l'estimation du terme $-2\delta t \left(\nabla(p(t_{n+1}) - (p^n + q^n)), \mathbf{e}^{n+1} \right)$ que l'on a établie précédemment n'est pas valide dans ce cas-là.

En reprenant les estimations de l'étape 2 valides pour $n = 0$, en utilisant $\mathbf{e}^0 = 0$, $\varepsilon^0 = 0$, $\|\varepsilon^1\|^2 \leq \frac{C_1}{T} \delta t^2$ (se déduit de (3.36) avec $j = 0$), $\delta t \leq 1/6$, $|\Sigma| \leq 1$ p.p. dans Ω , et en utilisant l'hypothèse $r \leq \frac{\mu_{\min}}{12\alpha_{\max}^2}$, il vient

$$\begin{aligned}
& 2\|\sqrt{\rho^1} \mathbf{e}^1\|^2 + \delta t \frac{\mu_{\min}}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{e}^1\|^2 + \frac{2\delta t \theta}{\ell} \|\mathbf{s}^1\|^2 \\
& \leq -2\delta t \left(\nabla(p(t_1) - p^0), \mathbf{e}^1 \right) \\
& + \delta t^2 \left(\frac{C_1 \|\alpha'\|_{\infty}^2}{3T\mu_{\min}} + \frac{4C_1 \|\mu'\|_{\infty}^2}{3T\mu_{\min}} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(0,T,L^{\infty}(\Omega))}^2 \right) \\
& + \delta t^2 \frac{12C_S}{\mu_{\min}} \left(\rho_{\max}^2 \|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^{6/5}(\Omega))}^2 + \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(0,T,L^3(\Omega))}^2 \|\partial_t\rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \right) \\
& + \delta t^2 \frac{2C_1}{T\mu_{\min}} \|\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(0,T,L^{\infty}(\Omega))}^2 \left(1 + (1 + C_S) \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(0,T,L^{\infty}(\Omega))}^2 \right) \\
& + \delta t^2 \frac{24\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}} \left(C_S \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(0,T,L^{\infty}(\Omega))}^2 \right) \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \delta t \theta \left(\frac{6\theta\delta t + 2}{\ell} \|\partial_t\Sigma\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{4}{3\ell} + \frac{2}{\ell} \|\mathbf{s}^0\|^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

En écrivant (3.44) avec $n = 0$, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young et les hypothèses de régularité (3.28), il vient

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta t^2}{2\rho_{\min}} \|\nabla r^1\|^2 - 2\delta t \left(\nabla(p(t_1) - p^0), \mathbf{e}^1 \right) \\
& \leq \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla r^0\|^2 + \frac{3}{2} \|\sqrt{\rho^1} \mathbf{e}^1\|^2 + \delta t^2 \frac{2}{3\rho_{\min}} \|\partial_t p\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

En combinant (3.50) et (3.51), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho^1 e^1}\|^2 + \delta t \frac{\mu_{\min}}{2} \|\mathbf{D}e^1\|^2 + \frac{2\delta t\theta}{\ell} \|\mathbf{s}^1\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla r^1\|^2 \\
& \leq \delta t^2 \left(\frac{2C_1 \|\alpha'\|_\infty^2}{3T\mu_{\min}} + \frac{8C_1 \|\mu'\|_\infty^2}{3T\mu_{\min}} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{3\rho_{\min}} \|\partial_t p\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 + \frac{2}{\rho_{\min}} \|\nabla r^0\|^2 \right) \\
& + \delta t^2 \frac{24C_S}{\mu_{\min}} \left(\rho_{\max}^2 \|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^{6/5}(\Omega))}^2 + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \|\partial_t \rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \right) \\
& + \delta t^2 \frac{4C_1}{T\mu_{\min}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \left(1 + (1 + C_S) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \\
& + \delta t^2 \frac{48\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}} \left(C_S \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \delta t\theta \left(\frac{12\theta\delta t + 4}{\ell} \|\partial_t \Sigma\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{8}{3\ell} + \frac{4}{\ell} \|\mathbf{s}^0\|^2 \right).
\end{aligned}$$

En notant

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{2C_1 \|\alpha'\|_\infty^2}{3T\mu_{\min}} + \frac{8C_1 \|\mu'\|_\infty^2}{3T\mu_{\min}} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 + \frac{4}{3\rho_{\min}} \|\partial_t p\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 + \frac{2}{\rho_{\min}} \|\nabla r^0\|^2 \\
& + \frac{24C_S}{\mu_{\min}} \left(\rho_{\max}^2 \|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^{6/5}(\Omega))}^2 + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \|\partial_t \rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \right) \\
& + \frac{4C_1}{T\mu_{\min}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \left(1 + (1 + C_S) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \\
& + \frac{48\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}} \left(C_S \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2,
\end{aligned}$$

et

$$C_4 = \frac{5}{\ell} \|\partial_t \Sigma\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{8}{3\ell} + \frac{4}{\ell} \|\mathbf{s}^0\|^2$$

on a alors

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho^1 e^1}\|^2 + \delta t \frac{\mu_{\min}}{2} \|\mathbf{D}e^1\|^2 + \frac{2\delta t\theta}{\ell} \|\mathbf{s}^1\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla r^1\|^2 \\
& \leq \delta t^2 C_3 + \delta t\theta C_4.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

On écrit maintenant l'estimation d'erreur générale en utilisant les estimations de l'étape 2

dans (3.41). On obtient

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho^{n+1}}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n}\mathbf{e}^n\|^2 + \delta t(\mu_{\min} - 6\ell\alpha_{\max}^2)\|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\
& \quad + \frac{2\delta t\theta}{r}\left(\|\mathbf{s}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{s}^n\|^2\right) + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}}\left(\|\nabla r^{n+1}\|^2 - \|\nabla r^n\|^2\right) \\
& \leq \frac{2\theta\delta t^2}{\ell}\|\mathbf{s}^{n+1}\|^2 + \frac{\delta t^3}{\rho_{\min}}\|\nabla r^n\|^2 \\
& \quad + \delta t\left(\frac{1}{\rho_{\min}} + \frac{24\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}\rho_{\min}}\left(C_S\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right)\right)\|\sqrt{\rho^n}\mathbf{e}^n\|^2 \\
& \quad + \delta t\left(\frac{2\|\alpha'\|_\infty^2}{\mu_{\min}} + \frac{8\|\mu'\|_\infty^2}{\mu_{\min}}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{12}{\mu_{\min}}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\left(1 + (1 + C_S)\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right)\right)\|\varepsilon^{n+1}\|^2 \\
& \quad + \delta t\frac{12C_S}{\mu_{\min}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2\|\varepsilon^n\|^2 \\
& \quad + \delta t\frac{2\theta(3\theta\delta t + 1)}{\ell}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_t\boldsymbol{\Sigma}(s)\|^2 ds + \delta t^2\left(2 + \frac{2 + 2\delta t}{\rho_{\min}}\right)\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|\partial_t p(s)\|_1^2 \\
& \quad + \delta t^2\frac{24\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}}\left(C_S\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right)\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}(s)\|^2 ds \\
& \quad + \delta t^2\frac{12C_S}{\mu_{\min}}\left(\rho_{\max}^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_{tt}\mathbf{u}(s)\|_{L^{6/5}(\Omega)}^2 ds + \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_t\rho(s)\|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

On somme cette dernière équation sur n allant de 1 à k avec $0 \leq k \leq N - 1$. En utilisant

l'hypothèse $\ell \leq \frac{\mu_{\min}}{12\alpha_{\max}^2}$, le théorème 7 et le cas $n = 0$ (3.52), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho^{k+1}}\mathbf{e}^{k+1}\|^2 + \frac{2\delta t\theta}{\ell}\|\mathbf{s}^{k+1}\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}}\|\nabla r^{k+1}\|^2 + \delta t\frac{\mu_{\min}}{2}\sum_{n=0}^k\|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\
& \leq \frac{2\theta\delta t^2}{\ell}\sum_{n=1}^k\|\mathbf{s}^{n+1}\|^2 + \frac{\delta t^3}{\rho_{\min}}\sum_{n=1}^k\|\nabla r^n\|^2 \\
& + \delta t\left(\frac{1}{\rho_{\min}} + \frac{24\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}\rho_{\min}}\left(C_S\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right)\right)\sum_{n=0}^k\|\sqrt{\rho^{n+1}}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\
& + \delta t^2C_1\left(\frac{2\|\alpha'\|_\infty^2}{\mu_{\min}} + \frac{8\|\mu'\|_\infty^2}{\mu_{\min}}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right. \\
& \quad \left. + \frac{12}{\mu_{\min}}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\left(1 + (1 + C_S)\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right)\right) \\
& + \delta t\frac{C_2}{\rho_{\min}}\left(\frac{2\|\alpha'\|_\infty^2}{\mu_{\min}} + \frac{8\|\mu'\|_\infty^2}{\mu_{\min}}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right. \\
& \quad \left. + \frac{12}{\mu_{\min}}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\left(1 + (1 + C_S)\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right)\right)\sum_{n=0}^k\|\sqrt{\rho^{n+1}}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\
& + \delta t^2C_1\frac{12C_S}{\mu_{\min}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \\
& + \delta t\frac{12C_S C_2}{\mu_{\min}\rho_{\min}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2\sum_{n=0}^k\|\sqrt{\rho^{n+1}}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\
& + \delta t\theta\left(\frac{6\theta\delta t + 2}{\ell}\|\partial_t\boldsymbol{\Sigma}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + C_4\right) + \delta t^2\left(\left(4 + \frac{4 + 4\delta t}{\rho_{\min}}\right)\|\partial_t p(s)\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 + C_3\right) \\
& + \delta t^2\frac{24\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}}\left(C_S\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2\right)\|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \delta t^2\frac{12C_S}{\mu_{\min}}\left(\rho_{\max}^2\|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^{6/5}(\Omega))}^2 + \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2\|\partial_t\rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2\right).
\end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned}
C_5 = & \frac{1}{\rho_{\min}} + \frac{24\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}\rho_{\min}} \left(C_S \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \\
& + \frac{C_2}{\rho_{\min}} \left(\frac{2\|\alpha'\|_\infty^2}{\mu_{\min}} + \frac{8\|\mu'\|_\infty^2}{\mu_{\min}} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right. \\
& \left. + \frac{12}{\mu_{\min}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \left(1 + (1 + C_S) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \right) \\
& + \frac{12C_S C_2}{\mu_{\min}\rho_{\min}} \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
C_6 = & C_1 \left(\frac{2\|\alpha'\|_\infty^2}{\mu_{\min}} + \frac{8\|\mu'\|_\infty^2}{\mu_{\min}} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right. \\
& \left. + \frac{12}{\mu_{\min}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \left(1 + (1 + C_S) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \right) \\
& + C_1 \frac{12C_S}{\mu_{\min}} \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \left(4 + \frac{4 + 4\delta t}{\rho_{\min}} \right) \|\partial_t p(s)\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 + C_3 \\
& + \frac{24\rho_{\max}^2}{\mu_{\min}} \left(C_S \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 \right) \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \frac{12C_S}{\mu_{\min}} \left(\rho_{\max}^2 \|\partial_{tt} \mathbf{u}\|_{L^2(0,T,L^{6/5}(\Omega))}^2 + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \|\partial_t \rho\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \right),
\end{aligned}$$

$$C_7 = \frac{\delta t + 2}{\ell} \|\partial_t \Sigma\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + C_4.$$

En appliquant le lemme 2 avec

$$\begin{aligned}
M &= N - 1, \\
m &= k, \\
\tau &= \delta t, \\
B &= \delta t^2 C_6 + \delta t \theta C_7, \\
y^m &= \|\sqrt{\rho^{m+1}} \mathbf{e}^{m+1}\|^2 + \frac{2\delta t \theta}{\ell} \|\mathbf{s}^{m+1}\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla r^{m+1}\|^2, \\
h^n &= \frac{\mu_{\min}}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2, \\
g^n &= C_5 + 2, \\
f^n &= 0, \\
C &= (C_5 + 2)T, \\
\tau g^n &< 1 \quad (\text{en utilisant l'hypothèse (3.30)}), \\
\sigma &< 2,
\end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\rho^{k+1}} \mathbf{e}^{k+1}\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_{\min}} \|\nabla r^{k+1}\|^2 + \frac{2\theta \delta t}{\ell} \|s^{k+1}\|^2 + \delta t \frac{\mu_{\min}}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \|\mathbf{D}\mathbf{e}^{n+1}\|^2 \\
&\leq \exp(2T(C_5 + 2)) (\delta t^2 C_6 + \delta t \theta C_7),
\end{aligned} \tag{3.54}$$

pour tout k tel que $0 \leq k \leq N - 1$. En posant

$$C_8 = \frac{\exp(2T(C_5 + 2)) (C_6 + C_7)}{\min(\rho_{\min}, \frac{\mu_{\min}}{2})},$$

on conclut la preuve du théorème 8. \square

3.4 Remarques sur l'analyse du schéma

Un résultat de stabilité supplémentaire sur la pression. En repartant de la dernière équation (3.54) de la preuve du théorème 8, on obtient en particulier que pour tout n tel que $0 \leq n \leq N - 1$,

$$\delta t^2 \|\nabla r^{n+1}\|^2 \leq \rho_{\min} \exp(2T(C_5 + 2)) (\delta t^2 C_6 + \delta t \theta C_7).$$

En choisissant $\theta = \delta t$, on obtient alors pour tout n tel que $0 \leq n \leq N - 1$, le résultat de stabilité suivant pour le gradient de la pression :

$$\|\nabla p^{n+1}\| \leq \|\nabla p\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \sqrt{\rho_{\min} \exp(2T(C_5 + 2)) (C_6 + C_7)}.$$

Choix des données initiales non prescrites dans le modèle continu. Comme $p|_{t=0}$ n'est pas prescrit dans les conditions initiales du modèle, on ne peut pas choisir $p^0 = p|_{t=0}$, et donc $r^0 \neq 0$. Il en est de même pour la partie plastique du tenseur des contraintes et \mathbf{s}^0 . Cependant, l'analyse d'erreur nous montre que l'erreur faite dans ces approximations pour initialiser le schéma se répercute de façon "cachée" dans la taille de la constante de l'estimation du théorème 8 à travers les constantes C_3 et C_4 .

Paramètres numériques θ et ℓ . Pour que le schéma de semi-discrétisation en temps que l'on a construit soit d'ordre 1, il est nécessaire de choisir $\theta = C\delta t$. Cependant, lorsque l'on résout l'étape de prédiction (2.4) la vitesse de convergence de l'algorithme de point fixe (2.8)-(2.9) est géométrique de raison $1 - \theta$, et est donc plus rapide lorsque θ est proche de 1. On choisira donc en pratique $\theta \in]1, \delta t]$, avec θ proche de 1 si on souhaite privilégier la vitesse de calcul ou θ proche de δt si on souhaite privilégier la précision.

Dans tout le chapitre, les hypothèses que l'on a faites sur le paramètre ℓ consistent à le fixer suffisamment petit. Cependant, la quantité $\frac{1}{\ell}$ intervient dans l'estimation d'erreur à travers la constante C_7 (et la constante C_4). Il est donc important pour la précision du schéma de ne pas non plus le choisir "trop" petit.

Chapitre 4

Discrétisation spatiale et implémentation

Ce chapitre a pour but de présenter la façon dont on obtient le schéma complètement discrétisé à partir du schéma de semi-discrétisation en temps, puis son implémentation. On se placera dans le cas $d = 2$ ou $d = 1$ afin de simplifier la rédaction mais étant donné qu'on se place dans le cas de maillage cartésien, il n'y a pas de difficulté supplémentaire pour étendre les formules au cas $d = 3$.

4.1 Modification du schéma de discrétisation en temps

Le schéma de semi-discrétisation en temps que nous allons discrétiser en espace diffère de (2.1)-(2.7). Essentiellement, nous modifions l'équation de conservation de la masse afin de traiter explicitement le terme de convection, et l'équation de conservation du moment afin de traiter explicitement le terme non linéaire. Ces modifications ont pour but de réduire le nombre de matrices à inverser et de simplifier leur forme lors de la résolution du schéma complètement discrétisé.

Modification de l'équation de conservation de la masse. Afin de remplacer le schéma d'Euler implicite (2.1) par un schéma explicite, on utilise le schéma RK3 TVD (Total Variation Diminishing) introduit par Shu et Osher en 1988 [83] (voir aussi [36]). Ce schéma permet de calculer la nouvelle densité ρ^{n+1} à l'aide de trois sous-étapes explicites :

$$\begin{cases} \frac{\rho^{n,1} - \rho^n}{\delta t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \rho^n) = 0, \\ \rho^{n,2} = \frac{3}{4}\rho^n + \frac{1}{4}\rho^{n,1} - \frac{\delta t}{4} \operatorname{div}(\mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \rho^{n,1}), \\ \frac{\rho^{n,3} - \rho^{n,2}}{\delta t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \rho^{n,2}) = 0, \\ \rho^{n+1} = \frac{1}{3}\rho^n + \frac{2}{3}\rho^{n,3}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Modification de l'équation de conservation du moment. Dans toute la suite, nous prendrons à nouveau en compte le terme d'accélération de pesanteur $\rho^{n+1}\mathbf{g}$. Comme nous l'avons vu dans l'analyse d'erreur du schéma dans le chapitre précédent, la discrétisation de l'équation de conservation de la masse et celle du terme d'accélération dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement sont liées. Ainsi, le choix de traiter l'équation de conservation de la masse et le terme non linéaire de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement en explicite nous amène à utiliser la forme suivante pour l'équation de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} \right) + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \text{div} \left(2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} \right) \\ + \nabla (2p^n - p^{n-1}) = \text{div}(\alpha^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}) - \rho^{n+1} \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Bilan. Le schéma de semi-discrétisation en temps que l'on utilisera est le suivant :

1. Calcul de la densité à l'aide de l'équation (4.1),
2. Calcul des paramètres physiques dépendant de la densité à l'aide de (2.2)-(2.3),
3. Calcul de la première approximation de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , du seuil de plasticité $\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}$ et du seuil de glissement $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ en utilisant le système de l'étape de prédiction (2.4), où on a remplacé la première équation du système par (4.2),
4. Calcul de l'incrément de pression en résolvant (2.5),
5. Calcul de la pression et de la vitesse corrigée à l'aide de (2.6)-(2.7).

4.2 Le schéma MAC

On introduit les notations

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_3 \\ \Sigma_3 & \Sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, nous nous restreignons au cas où le domaine Ω est rectangulaire :

$$\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y).$$

Lorsque nous souhaiterons prendre en compte des conditions de glissement à seuil au bord du domaine, c'est-à-dire lorsque $\Gamma_\omega \neq \emptyset$, on se restreint au cas $\Gamma_\omega = (0, L_x) \times \{0\}$. Dans la configuration de rupture de barrage (la configuration dans laquelle nous utiliserons de telles conditions), cela correspond à la zone de la frontière sur laquelle la colonne du fluide le plus dense s'effondre.

Réécriture des condition aux limites Dans le cas dans lequel nous nous sommes placés, la normale extérieure à Γ_ω est $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sur cette partie de la frontière, les conditions aux limites du système (2.4) se lisent donc :

$$\begin{cases} v^{n+1} = 0, \\ \mu^{n+1} \partial_y u^{n+1} + \alpha^{n+1} \Sigma_3^{n+1} = c_f^{n+1} u^{n+1} + c_s^{n+1} \sigma^{n+1}, \\ \sigma^{n+1} = \mathbb{P}(\sigma^{n+1} + r c_s^{n+1} u^{n+1} + \theta(\sigma^n - \sigma^{n+1})). \end{cases} \quad (4.3)$$

Discrétisation du domaine. Soient $N_x + 1$ et $N_y + 1$ le nombre de points du maillage dans la direction horizontale et verticale. On définit les pas d'espace dans chaque direction

$$h_x = \frac{L_x}{N_x} \quad \text{et} \quad h_y = \frac{L_y}{N_y},$$

puis les points de la grille par

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)h_x && \text{pour } i = 1, \dots, N_x + 1, \\ y_j &= (j-1)h_y && \text{pour } j = 1, \dots, N_y + 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i) && \text{pour } i = 1, \dots, N_x, \\ y_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(y_{j+1} + y_j) && \text{pour } j = 1, \dots, N_y. \end{aligned}$$

Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq N_x$ et $1 \leq j \leq N_y$, on définit la cellule principale

$$K_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

et les cellule décalées

$$K_{i,j}^u = K_{i-\frac{1}{2},j} \quad \text{et} \quad K_{i,j}^v = K_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

Positionnement des inconnues. Comme dans le schéma MAC classique pour les équations de Navier-Stokes incompressibles (voir [42]), les inconnues discrètes de la vitesse $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ sont calculées au centre des cellules décalées $K_{i,j}^u$ et $K_{i,j}^v$: $u_{i,j} \approx u(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$ et $v_{i,j} \approx v(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$. La pression discrète $p_{i,j}$ est calculée au centre de la cellule $K_{i,j}$: $p_{i,j} \approx p(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$. La densité $\rho_{i,j}$, la viscosité $\mu_{i,j}$, le seuil de plasticité $\alpha_{i,j}$ et les composantes de la partie plastique du tenseur des contraintes $\Sigma_{k|i,j}$, $k \in \{1, 2, 3\}$ seront calculés de la même façon. Sur les cellules $K_{i,1}$ contenant la frontière Γ_ω , on approxime le coefficient de friction c_f , le seuil de glissement c_s et la partie additionnelle de la contrainte tangentielle σ sur les noeuds : $c_{f_i} \approx c_f(x_i, 0)$, $c_{s_i} \approx c_s(x_i, 0)$ et $\sigma_i \approx \sigma(x_i, 0)$. Ce choix, qui est arbitraire,

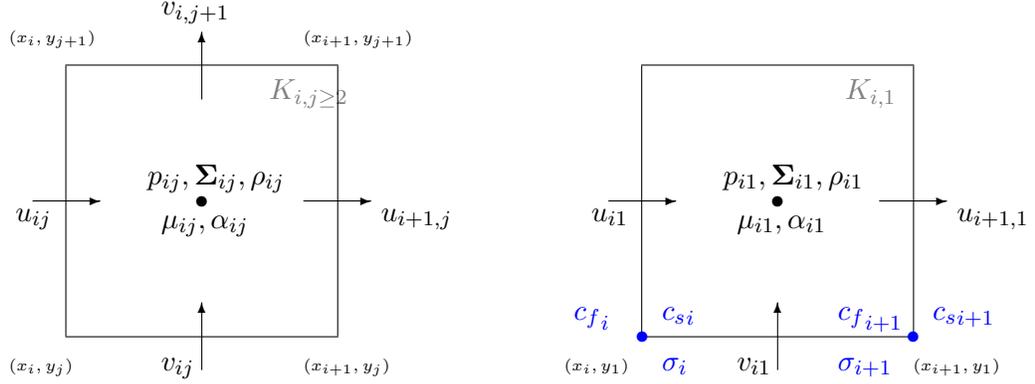


FIGURE 4.1 – Disposition des inconnues pour le schéma MAC sur une maille $K_{i,j}$ avec $j \geq 2$ à gauche et cas particulier des mailles $K_{i,1}$ à droite

permet de calculer toutes les composantes de Σ et σ à l'aide des équations de projection du système (2.4). Un choix de positionnement différent a par exemple été fait dans [61], [62]. La Figure 4.1 résume le placement des inconnues.

Nous devons aussi introduire des valeurs fantômes, c'est-à-dire des inconnues supplémentaires situées à l'extérieur du domaine, afin de pouvoir écrire les formules de dérivation dans tout le domaine. On relie les valeurs fantômes aux inconnues principales soit en utilisant les conditions au bord lorsqu'elles sont prescrites dans le modèle (c'est le cas pour la vitesse et l'incrément de pression), soit par extrapolation (pour les autres inconnues). Considérons par exemple le cas de la composante horizontale de la vitesse u . Si on ne considère que les inconnues dans $\bar{\Omega} = [0, L_x] \times [0, L_y]$, c'est-à-dire les $u_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq N_x + 1$ et $1 \leq j \leq N_y$, nous n'aurons aucune inconnue située sur les bords $[0, L_x] \times \{0\}$ et $[0, L_x] \times \{L_y\}$, et nous ne pourrons donc pas écrire les formules de dérivation suivant la variable y sur ces deux parties de la frontière du domaine. On introduit donc des valeurs fantômes $u_{i,0}$ pour $1 \leq i \leq N_x + 1$ et u_{i,N_y+1} pour $1 \leq i \leq N_x + 1$. Dans le cas de la condition aux limites de Dirichlet homogène, on relie ces nouvelles inconnues aux inconnues principales par la relation $u_{i,0} = -u_{i,1}$ sur $[0, L_x] \times \{0\}$. De façon plus générale, le choix de la condition au bord nous permettra d'écrire $u_{i,0}$ en fonction d'autres inconnues principales. La figure 4.2 illustre le placement des valeurs fantômes (lignes pointillées) et des inconnues principales (lignes continues).

4.2.1 Équation de conservation de la masse

La discrétisation sur le maillage cartésien que l'on considère revient à traiter successivement et indépendamment les d directions de l'espace. On se restreint dans cette section au cas

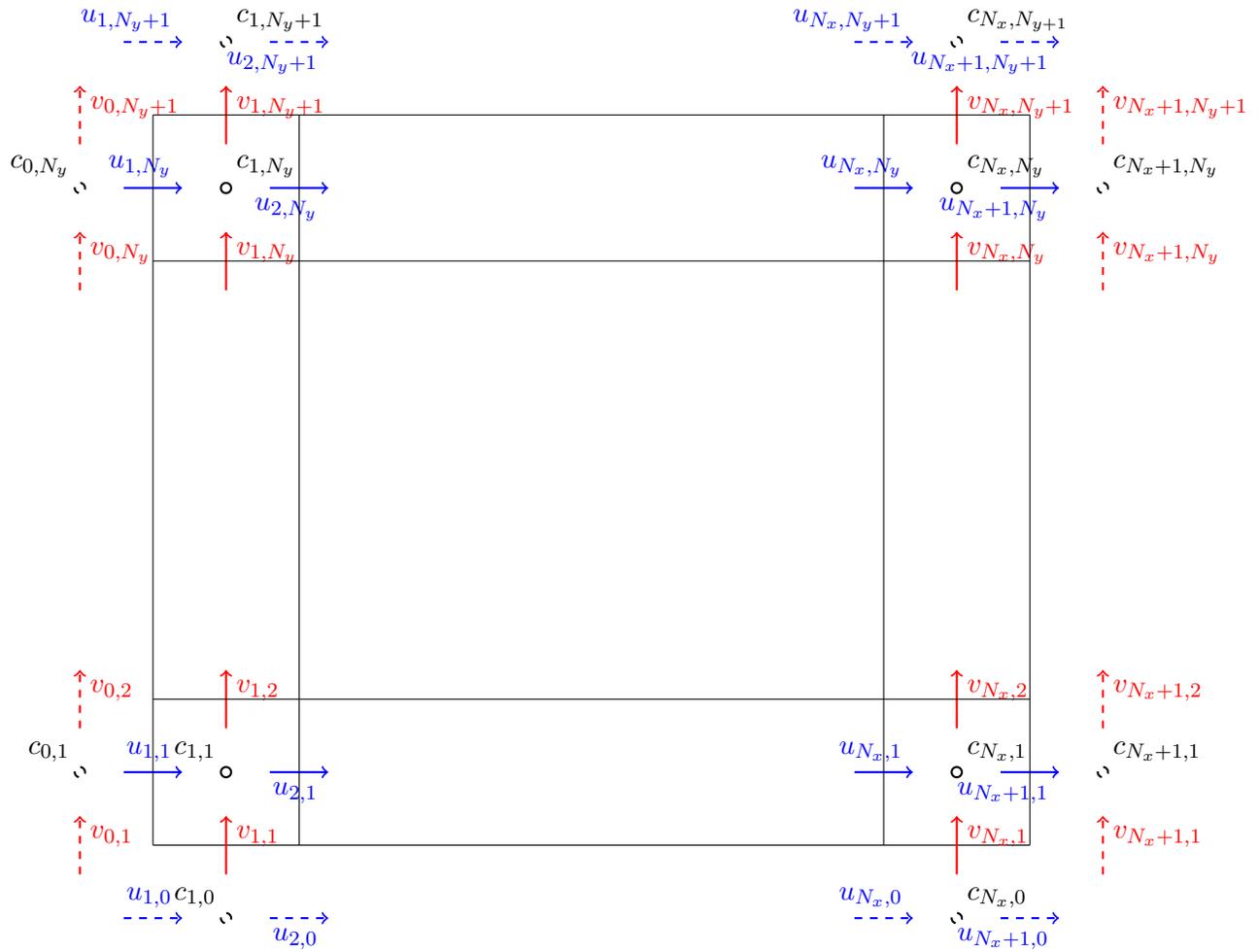


FIGURE 4.2 – Position des valeurs fantômes pour les différentes inconnues (lignes pointillées) et position des inconnues principales (lignes pleines)

de la dimension $d = 1$, c'est-à-dire que l'on considère l'équation

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + u^n \frac{\partial \rho^n}{\partial x} = 0. \quad (4.4)$$

On utilise toujours les notations du maillage décalé. Dans le cas particulier de cette section où $d = 1$ on note $u_i^n \approx u(x_i, t_n)$ et $\rho_i^n \approx \rho(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)$.

Schéma décentré amont. Le schéma décentré pour approcher (4.4) s'écrit

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\delta t} + u_{i+\frac{1}{2}}^n (\rho_x)_i^n = 0, \quad (4.5)$$

où

$$(\rho_x)_i^n = \begin{cases} \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{h_x} & \text{si } u_{i+\frac{1}{2}}^n > 0, \\ \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{h_x} & \text{si } u_{i+\frac{1}{2}}^n < 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

et $u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n)$. On peut réécrire (4.6) sous la forme

$$(\rho_x)_i^n = \begin{cases} (\rho_x^-)_i^n & \text{si } u_{i+1/2}^n > 0, \\ (\rho_x^+)_i^n & \text{si } u_{i+1/2}^n < 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

avec $(\rho_x^-)_i^n = D_i^1 \rho^n$ et $(\rho_x^+)_i^n = D_{i+1}^1 \rho^n$ où

$$D_i^1 \rho^n := \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{h_x}.$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial \rho^n}{\partial x}(x_{i+1/2})$ par $D_i^1 \rho^n$ étant d'ordre 1, le schéma décentré (4.5) est d'ordre 1, c'est-à-dire avec une erreur en $O(h_x)$. On peut améliorer l'ordre du schéma (4.5) en augmentant l'ordre d'approximation des quantités $(\rho_x^\pm)_i^n$ dans (4.7), par exemple en utilisant des approximations ENO [83],[65] et WENO [46].

Schémas ENO et WENO. Le schéma ENO d'ordre 3 pour approcher $(\rho_x^-)_i$, basé sur le stencil $\{x_{k+1/2}, k = i-3, \dots, i+2\}$, consiste à choisir l'une des approximations suivantes

$$\begin{cases} (\rho_x^-)_i^0 = \frac{1}{3} D_{i-2}^1 \rho - \frac{7}{6} D_{i-1}^1 \rho + \frac{11}{6} D_i^1 \rho, \\ (\rho_x^-)_i^1 = -\frac{1}{6} D_{i-1}^1 \rho + \frac{5}{6} D_i^1 \rho + \frac{1}{3} D_{i+1}^1 \rho, \\ (\rho_x^-)_i^2 = \frac{1}{3} D_i^1 \rho + \frac{5}{6} D_{i+1}^1 \rho - \frac{1}{6} D_{i+2}^1 \rho, \end{cases} \quad (4.8)$$

où $(\rho_x^-)_i^j$ est l'approximation ENO d'ordre 3 de $(\rho_x^-)_i$ basée sur le sous-stencil $\{x_{k+1/2}, k = i+j-3, \dots, i+j\}$ pour $j = 0, 1, 2$. Le choix entre ces trois interpolants est basé sur la *régularité* de ρ au voisinage de $x_{i+1/2}$. Plus précisément on a

$$(\rho_x^-)_i = \begin{cases} (\rho_x^-)_i^0 & \text{si } |D_{i-1/2}^2 \rho| \leq |D_{i+1/2}^2 \rho| \quad \text{et} \quad |D_{i-1}^3 \rho| \leq |D_i^3 \rho|, \\ (\rho_x^-)_i^2 & \text{si } |D_{i-1/2}^2 \rho| > |D_{i+1/2}^2 \rho| \quad \text{et} \quad |D_i^3 \rho| > |D_{i+1}^3 \rho|, \\ (\rho_x^-)_i^1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.9)$$

où

$$D_{i+1/2}^2 \rho = \frac{D_{i+1}^1 \rho - D_i^1 \rho}{2h_x} \quad \text{et} \quad D_i^3 \rho = \frac{D_{i+1/2}^2 \rho - D_{i-1/2}^2 \rho}{3h_x}.$$

Au lieu de choisir entre ces trois approximations, le schéma WENO d'ordre 5 approche $(\rho_x^-)_i$ par une combinaison convexe de $(\rho_x^-)_i^j, j = 0, 1, 2$, c'est-à-dire

$$(\rho_x^-)_i = \omega_0 (\rho_x^-)_i^0 + \omega_1 (\rho_x^-)_i^1 + \omega_2 (\rho_x^-)_i^2$$

où les poids $\omega_j > 0$ vérifient $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1$. L'idée est de choisir ces poids de sorte que la combinaison convexe $\omega_0 (\rho_x^-)_i^0 + \omega_1 (\rho_x^-)_i^1 + \omega_2 (\rho_x^-)_i^2$ soit une approximation d'ordre 5 dans les zones régulières et d'ordre 3 ailleurs. On calcule les poids pour le schéma WENO suivant [46]. On définit les quantités S_0, S_1 et S_2 par

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{13}{12} (D_{i-2}^1 \rho - 2D_{i-1}^1 \rho + 3D_i^1 \rho)^2 + \frac{1}{4} (D_{i-2}^1 \rho - 4D_{i-1}^1 \rho + 3D_i^1 \rho)^2, \\ S_1 &= \frac{13}{12} (D_{i-1}^1 \rho - 2D_i^1 \rho + 3D_{i+1}^1 \rho)^2 + \frac{1}{4} (D_{i-1}^1 \rho - D_{i+1}^1 \rho)^2, \\ S_2 &= \frac{13}{12} (D_i^1 \rho - 2D_{i+1}^1 \rho + 3D_{i+2}^1 \rho)^2 + \frac{1}{4} (D_i^1 \rho - 4D_{i+1}^1 \rho + 3D_{i+2}^1 \rho)^2. \end{aligned}$$

Soit $\gamma = 10^{-6}$, on calcule les quantités a_0, a_1 et a_2 par

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{(S_0 + \gamma)^2}, \\ a_1 &= \frac{1}{(S_1 + \gamma)^2}, \\ a_2 &= \frac{1}{(S_2 + \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Alors les poids optimaux sont définis par

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{a_0}{a_0 + a_1 + a_2}, \\ \omega_1 &= \frac{a_1}{a_0 + a_1 + a_2}, \\ \omega_2 &= \frac{a_2}{a_0 + a_1 + a_2}. \end{aligned}$$

De manière similaire, le schéma ENO d'ordre 3 pour approcher $(\rho_x^+)_i$, basé sur le stencil $\{x_{k+1/2}, k = i - 2, \dots, i + 3\}$, consiste à choisir l'une des approximations suivantes

$$\begin{cases} (\rho_x^+)_i^0 = -\frac{1}{6}D_{i-1}^1\rho + \frac{5}{6}D_i^1\rho + \frac{1}{3}D_{i+1}^1\rho, \\ (\rho_x^+)_i^1 = \frac{1}{3}D_i^1\rho + \frac{5}{6}D_{i+1}^1\rho - \frac{1}{6}D_{i+2}^1\rho, \\ (\rho_x^+)_i^2 = \frac{11}{6}D_{i+1}^1\rho - \frac{7}{6}D_{i+2}^1\rho + \frac{1}{3}D_{i+3}^1\rho, \end{cases} \quad (4.10)$$

c'est-à-dire

$$(\rho_x^+)_i = \begin{cases} (\rho_x^+)_i^0 & \text{si } |D_{i+1/2}^2\rho| \leq |D_{i+3/2}^2\rho| \text{ et } |D_i^3\rho| \leq |D_{i+1}^3\rho|, \\ (\rho_x^+)_i^2 & \text{si } |D_{i+1/2}^2\rho| > |D_{i+3/2}^2\rho| \text{ et } |D_{i+1}^3\rho| > |D_{i+2}^3\rho|, \\ (\rho_x^+)_i^1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.11)$$

et, de façon analogue, le schéma WENO approche $(\rho_x^+)_i$ par une combinaison convexe de $(\rho_x^+)_i^j, j = 0, 1, 2$, c'est-à-dire

$$(\rho_x^+)_i = \omega_0(\rho_x^+)_i^0 + \omega_1(\rho_x^+)_i^1 + \omega_2(\rho_x^+)_i^2$$

où les poids $\omega_j > 0$ vérifient $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1$. On se place à nouveau dans le cas $d = 2$ pour la suite du chapitre.

4.2.2 Étape de prédiction

Obtention des équations. Pour discrétiser l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (4.2), on intègre la première composante (respectivement la seconde composante) sur la cellule $K_{i,j}^u$ (respectivement sur la cellule $K_{i,j}^v$). La première composante de (4.2) s'écrit

$$\begin{aligned} & \rho^{n+1}u^{n+1} - \delta t \operatorname{div} \left(2\mu^{n+1}\partial_x u^{n+1}, \mu^{n+1}(\partial_y u^{n+1} + \partial_x v^{n+1}) \right) \\ & = \rho^{n+1}u^n - \delta t \rho^{n+1} (u_{\operatorname{div}}^n \partial_x u^n + v_{\operatorname{div}}^n \partial_y u^n) - \delta t \partial_x (2p^n - p^{n-1}) + \delta t \operatorname{div} (\alpha^{n+1} (\Sigma_1^{n+1}, \Sigma_3^{n+1})). \end{aligned} \quad (4.12)$$

En intégrant cette équation sur $K_{i,j}^u$, on obtient pour chacun des termes

$$\int_{K_{i,j}^u} \rho^{n+1}u^{n+1} \approx h_x h_y \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2} \right) u_{i,j}^{n+1},$$

$$\begin{aligned}
& \delta t \int_{K_{i,j}^u} \operatorname{div} \left(2\mu^{n+1} \partial_x u^{n+1}, \mu^{n+1} (\partial_y u^{n+1} + \partial_x v^{n+1}) \right) \\
&= \delta t \int_{\partial K_{i,j}^u} \left(2\mu^{n+1} \partial_x u^{n+1}, \mu^{n+1} (\partial_y u^{n+1} + \partial_x v^{n+1}) \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \\
&\approx 2\delta t h_y \mu_{i,j}^{n+1} \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_x} - 2\delta t h_y \mu_{i-1,j}^{n+1} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x} \\
&\quad + \delta t h_x \bar{\mu}_{i,j+1}^{n+1} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_y} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i-1,j+1}^{n+1}}{h_x} \right) \\
&\quad - \delta t h_x \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} + \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{h_x} \right),
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \bar{\mu}_{i,j} = \frac{1}{4} (\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j-1} + \mu_{i,j-1}).$$

$$\begin{aligned}
& \delta t \int_{K_{i,j}^u} \rho^{n+1} (u_{\operatorname{div}}^n \partial_x u^n + v_{\operatorname{div}}^n \partial_y u^n) \approx \delta t h_y \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2} \right) \left(u_{\operatorname{div}i,j}^n \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2} \right) \right) \\
&+ \delta t h_x \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\left(\frac{v_{\operatorname{div}i,j}^n + v_{\operatorname{div}i,j+1}^n + v_{\operatorname{div}i-1,j}^n + v_{\operatorname{div}i-1,j+1}^n}{4} \right) \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta t \int_{K_{i,j}^u} \partial_x (2p^n - p^{n-1}) &= \delta t \int_{\partial K_{i,j}^u} (2p^n - p^{n-1}) \cdot n_x \\
&\approx \delta t h_y \left((2p_{i,j}^n - p_{i,j}^{n-1}) - (2p_{i-1,j}^n - p_{i-1,j}^{n-1}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta t \int_{K_{i,j}^u} \operatorname{div} (\alpha^{n+1} \Sigma_1^{n+1}, \alpha^{n+1} \Sigma_3^{n+1}) &\approx \delta t h_y (\alpha_{i,j}^{n+1} \Sigma_{1\ i,j}^{n+1} - \alpha_{i-1,j}^{n+1} \Sigma_{1\ i-1,j}^{n+1}) \\
&\quad + \delta t h_x \left(\bar{\alpha}_{i,j+1}^{n+1} \bar{\Sigma}_{3\ i,j+1}^{n+1} - \bar{\alpha}_{i,j}^{n+1} \bar{\Sigma}_{3\ i,j}^{n+1} \right),
\end{aligned}$$

avec $\bar{\Sigma}_{i,j} = \frac{1}{4}(\Sigma_{i,j} + \Sigma_{i-1,j} + \Sigma_{i-1,j-1} + \Sigma_{i,j-1})$.

Ainsi, la discrétisation en espace de la première composante de l'équation (4.2) nous donne :

$$\begin{aligned}
& u_{i,j-1}^{n+1} \left[\delta t \frac{h_x}{h_y} \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} \right] + u_{i-1,j}^{n+1} \left[2\delta t \frac{h_y}{h_x} \mu_{i-1,j}^{n+1} \right] \\
& + u_{i,j}^{n+1} \left[h_x h_y \frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2} - \delta t \frac{h_x}{h_y} \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} - 2\delta t \frac{h_y}{h_x} \mu_{i-1,j}^{n+1} - 2\delta t \frac{h_y}{h_x} \mu_{i,j}^{n+1} - \delta t \frac{h_x}{h_y} \bar{\mu}_{i,j+1}^{n+1} \right] \\
& + u_{i+1,j}^{n+1} \left[2\delta t \frac{h_y}{h_x} \mu_{i,j}^{n+1} \right] + u_{i,j+1}^{n+1} \left[\delta t \frac{h_x}{h_y} \bar{\mu}_{i,j+1}^{n+1} \right] \\
& + v_{i-1,j}^{n+1} \left[\delta t \frac{h_x}{h_y} \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} \right] + v_{i,j}^{n+1} \left[-\delta t \frac{h_x}{h_y} \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} \right] + v_{i-1,j+1}^{n+1} \left[-\delta t \frac{h_x}{h_y} \bar{\mu}_{i,j+1}^{n+1} \right] + v_{i,j+1}^{n+1} \left[\delta t \frac{h_x}{h_y} \bar{\mu}_{i,j+1}^{n+1} \right] \\
& = \delta t h_y \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2} \right) \left(u_{\text{div}i,j}^n \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2} \right) \right) \\
& + \delta t h_x \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\left(\frac{v_{\text{div}i,j}^n + v_{\text{div}i,j+1}^n + v_{\text{div}i-1,j}^n + v_{\text{div}i-1,j+1}^n}{4} \right) \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2} \right) \right) \\
& + \delta t h_y \left((2p_{i,j}^n - p_{i,j}^{n-1}) - (2p_{i-1,j}^n - p_{i-1,j}^{n-1}) \right) \\
& + \delta t h_y \left(\alpha_{i,j}^{n+1} \Sigma_1^{n+1}{}_{i,j} - \alpha_{i-1,j}^{n+1} \Sigma_1^{n+1}{}_{i-1,j} \right) + \delta t h_x \left(\bar{\alpha}_{i,j+1}^{n+1} \bar{\Sigma}_3^{n+1}{}_{i,j+1} - \bar{\alpha}_{i,j}^{n+1} \bar{\Sigma}_3^{n+1}{}_{i,j} \right), \tag{4.13}
\end{aligned}$$

pour $i = 2, \dots, N_x$ et $j = 1, \dots, N_y$. La seconde composante de (4.2) s'écrit

$$\begin{aligned}
& \rho^{n+1} v^{n+1} - \delta t \operatorname{div} \left(\mu^{n+1} (\partial_y u^{n+1} + \partial_x v^{n+1}), 2\mu^{n+1} \partial_y v^{n+1} \right) \\
& = \rho^{n+1} v^n - \delta t \rho^{n+1} (u_{\text{div}}^n \partial_x v^n + v_{\text{div}}^n \partial_y v^n) - \delta t \partial_y (2p^n - p^{n-1}) \\
& + \delta t \operatorname{div} (\alpha^{n+1} (\Sigma_3^{n+1}, \Sigma_2^{n+1})) - \delta t \rho^{n+1}.
\end{aligned}$$

En intégrant cette équation sur $K_{i,j}^v$, on obtient pour chacun des termes

$$\int_{K_{i,j}^v} \rho^{n+1} v^{n+1} \approx h_x h_y \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right) v_{i,j}^{n+1},$$

$$\begin{aligned}
& \delta t \int_{K_{i,j}^v} \operatorname{div} \left(\mu^{n+1} (\partial_y u^{n+1} + \partial_x v^{n+1}), 2\mu^{n+1} \partial_y v^{n+1} \right) \\
&= \delta t \int_{\partial K_{i,j}^v} \left(\mu^{n+1} (\partial_y u^{n+1} + \partial_x v^{n+1}), 2\mu^{n+1} \partial_y v^{n+1} \right) \cdot \mathbf{n} dS \\
&\approx 2\delta t h_x \mu_{i,j}^{n+1} \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{h_y} - 2\delta t h_x \mu_{i,j-1}^{n+1} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} \\
&\quad + \delta t h_y \bar{\mu}_{i+1,j}^{n+1} \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{h_x} + \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1}}{h_y} \right) \\
&\quad - \delta t h_y \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{h_x} + \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta t \int_{K_{i,j}^v} \rho^{n+1} (v_{\operatorname{div}}^n \partial_y v^n + u_{\operatorname{div}}^n \partial_x v^n) \approx \delta t h_x \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right) \left(v_{\operatorname{div},i,j}^n \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2} \right) \right) \\
&+ \delta t h_y \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right) \left(\left(\frac{u_{\operatorname{div},i,j}^n + u_{\operatorname{div},i+1,j}^n + u_{\operatorname{div},i,j-1}^n + u_{\operatorname{div},i+1,j-1}^n}{4} \right) \left(\frac{v_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta t \int_{K_{i,j}^v} \partial_y (2p^n - p^{n-1}) = \delta t \int_{\partial K_{i,j}^v} (2p^n - p^{n-1}) \cdot n_y \\
&\approx \delta t h_x \left((2p_{i,j}^n - p_{i,j}^{n-1}) - (2p_{i,j-1}^n - p_{i,j-1}^{n-1}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta t \int_{K_{i,j}^v} \operatorname{div} (\alpha^{n+1} \Sigma_3^{n+1}, \alpha^{n+1} \Sigma_2^{n+1}) \approx \delta t h_y \left(\bar{\alpha}_{i+1,j}^{n+1} \bar{\Sigma}_{3,i+1,j}^{n+1} - \bar{\alpha}_{i,j}^{n+1} \bar{\Sigma}_{3,i,j}^{n+1} \right) \\
&\quad + \delta t h_x \left(\alpha_{i,j}^{n+1} \Sigma_{2,i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j-1}^{n+1} \Sigma_{2,i,j-1}^{n+1} \right).
\end{aligned}$$

$$\delta t \int_{K_{i,j}^v} \rho^{n+1} \approx \delta t h_x h_y \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right)$$

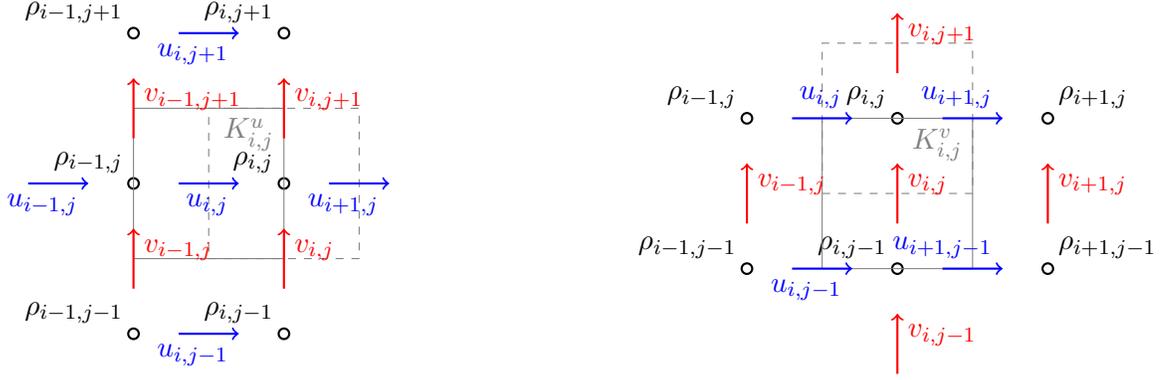


FIGURE 4.3 – Stencil des inconnues pour la première composante (gauche) et la seconde composante (droite) de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement.

Ainsi, la discrétisation en espace de la seconde composante de l'équation (4.2) nous donne :

$$\begin{aligned}
& v_{i-1,j}^{n+1} \left[\delta t \frac{h_y}{h_x} \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} \right] + v_{i,j-1}^{n+1} \left[2\delta t \frac{h_x}{h_y} \mu_{i,j-1}^{n+1} \right] \\
& + v_{i,j}^{n+1} \left[h_x h_y \frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2} - \delta t \frac{h_y}{h_x} \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} - 2\delta t \frac{h_x}{h_y} \mu_{i,j-1}^{n+1} - 2\delta t \frac{h_x}{h_y} \mu_{i,j}^{n+1} - \delta t \frac{h_y}{h_x} \bar{\mu}_{i+1,j}^{n+1} \right] \\
& + v_{i,j+1}^{n+1} \left[2\delta t \frac{h_x}{h_y} \mu_{i,j}^{n+1} \right] + v_{i+1,j}^{n+1} \left[\delta t \frac{h_y}{h_x} \bar{\mu}_{i+1,j}^{n+1} \right] \\
& + u_{i,j-1}^{n+1} \left[\delta t \frac{h_y}{h_x} \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} \right] + u_{i,j}^{n+1} \left[-\delta t \frac{h_y}{h_x} \bar{\mu}_{i,j}^{n+1} \right] + u_{i+1,j-1}^{n+1} \left[-\delta t \frac{h_y}{h_x} \bar{\mu}_{i+1,j}^{n+1} \right] + u_{i+1,j}^{n+1} \left[\delta t \frac{h_y}{h_x} \bar{\mu}_{i+1,j}^{n+1} \right] \\
& = \delta t h_x \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right) \left(v_{\text{div}i,j}^n \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2} \right) \right) \\
& + \delta t h_y \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right) \left(\left(\frac{u_{\text{div}i,j}^n + u_{\text{div}i+1,j}^n + u_{\text{div}i,j-1}^n + u_{\text{div}i+1,j-1}^n}{4} \right) \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2} \right) \right) \\
& + \delta t h_x \left((2p_{i,j}^n - p_{i,j}^{n-1}) - (2p_{i,j-1}^n - p_{i,j-1}^{n-1}) \right) \\
& + \delta t h_y \left(\bar{\alpha}_{i+1,j}^{n+1} \bar{\Sigma}_3^{n+1}{}_{i+1,j} - \bar{\alpha}_{i,j}^{n+1} \bar{\Sigma}_3^{n+1}{}_{i,j} \right) + \delta t h_x \left(\alpha_{i,j}^{n+1} \Sigma_2^{n+1}{}_{i,j} - \alpha_{i,j-1}^{n+1} \Sigma_2^{n+1}{}_{i,j-1} \right) \\
& + \delta t h_x h_y \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

pour $i = 1, \dots, N_x$ et $j = 2, \dots, N_y$. Les stencils des deux composantes de l'équation discrète du moment sont représentés en figure 4.3.

Pour avoir autant d'équations que d'inconnues, il nous faut également discrétiser les conditions aux limites de l'étape de prédiction, c'est-à-dire les conditions de Dirichlet homogène

sur Γ_0 et les conditions de glissement à seuil données par (4.3) sur Γ_ω . On obtient, sur $[0; L_x] \times \{L_y\}$:

$$\begin{aligned} u_{i, N_y+1}^{n+1} &= -u_{i, N_y}^{n+1}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N_x + 1, \\ v_{i, N_y+1}^{n+1} &= 0, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N_x. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sur $\{0\} \times [0, L_y]$:

$$\begin{aligned} v_{0, j}^{n+1} &= -v_{1, j}^{n+1}, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N_y + 1, \\ u_{1, j}^{n+1} &= 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N_y. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sur $\{L_x\} \times [0, L_y]$:

$$\begin{aligned} v_{N_x+1, j}^{n+1} &= -u_{N_x, j}^{n+1}, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N_y + 1, \\ u_{N_x+1, j}^{n+1} &= 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N_y. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sur $[0; L_x] \times \{0\}$, on discrétise la deuxième équation de (4.3) ponctuellement en chaque $(x_i, 0)$, $1 \leq i \leq N_x + 1$:

$$\bar{\mu}_{i,1}^{n+1} \left(\frac{u_{i,1}^{n+1} - u_{i,0}^{n+1}}{h_y} \right) + \bar{\alpha}_{i,1}^{n+1} \bar{\Sigma}_3^{n+1}{}_{i,1} = c_{f_i}^{n+1} \left(\frac{u_{i,1}^{n+1} + u_{i,0}^{n+1}}{2} \right) + c_{s_i}^{n+1} \sigma_i^{n+1}.$$

On obtient donc :

$$u_{i,0}^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{\bar{\mu}_{i,1}^{n+1}}{h_y} + \frac{c_{f_i}^{n+1}}{2} \right)} \left(u_{i,1}^{n+1} \left(\frac{\bar{\mu}_{i,1}^{n+1}}{h_y} - \frac{c_{f_i}^{n+1}}{2} \right) + \bar{\alpha}_{i,1}^{n+1} \bar{\Sigma}_3^{n+1}{}_{i,1} - c_{s_i}^{n+1} \sigma_i^{n+1} \right), \quad (4.18)$$

pour $1 \leq i \leq N_x + 1$,

$$v_{i,1}^{n+1} = 0, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N_x.$$

Résolution matricielle. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement n'étant pas explicite (présence de \mathbf{u}^{n+1} dans le terme visqueux) sa résolution nécessite l'inversion d'un système linéaire, que l'on écrit sous forme matricielle. Contrairement au cas où la viscosité est constante, les composantes horizontales u et verticales v de la vitesse apparaissent toutes les deux dans chacune des deux composantes de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement. Il en résulte que l'on ne peut pas résoudre indépendamment chacune des composantes de l'équation de conservation du moment. Ainsi, on inversera un système de la forme

$$\mathbf{A} \vec{w} = \vec{b}, \quad (4.19)$$

où le vecteur \vec{w} est la concaténation des composantes horizontales et verticales de la vitesse. Précisément, la matrice \mathbf{A} est une matrice carrée de taille $(N_y(N_x + 1) + (N_y + 1)N_x)^2$.

Ces lignes sont obtenues à l'aide des $(N_y(N_x + 1) + (N_y + 1)N_x)$ termes de gauche des équations suivantes :

- $u_{1,j} = 0$, pour $1 \leq j \leq N_y$,
- les équations (4.13), pour $2 \leq i \leq N_x$ et $1 \leq j \leq N_y$,
- $u_{N_x+1,j} = 0$, pour $1 \leq j \leq N_y$,
- $v_{i,1} = 0$, pour $1 \leq i \leq N_x$,
- les équations (4.14), pour $1 \leq i \leq N_x$ et $2 \leq j \leq N_y$,
- $v_{i,N_y+1} = 0$, pour $1 \leq i \leq N_x$,

et complétées par (4.15)-(4.16)-(4.17)-(4.18) pour écrire les inconnues fantômes en fonction des inconnues principales lorsqu'elles interviennent dans les équations.

Le vecteur \vec{w} est donné par

$$\vec{w} = {}^T(\vec{u} \mid \vec{v}),$$

avec

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{N_x+1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{N_x+1,2} \\ \vdots \\ u_{1,N_y} \\ u_{2,N_y} \\ \vdots \\ u_{N_x+1,N_y} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{N_x,1} \\ v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{N_x,2} \\ \vdots \\ v_{1,N_y+1} \\ v_{2,N_y+1} \\ \vdots \\ v_{N_x,N_y+1} \end{pmatrix}.$$

Enfin, le vecteur \vec{b} est obtenu avec le terme de droite des mêmes équations utilisées pour construire la matrice.

Ainsi, le système matriciel (4.19) s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_{uv} \\ \mathbf{A}_{vu} & \mathbf{A}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \vec{b}.$$

En écrivant l'équation (4.13) sous la forme synthétique

$$au_{i,j-1} + bu_{i-1,j} + cu_{i,j} + du_{i+1,j} + eu_{i,j+1} + \alpha v_{i-1,j} + \beta v_{i,j} + \gamma v_{i-1,j+1} + \delta v_{i,j+1} = (\text{RHS}_u)_{i,j},$$

(pour $2 \leq i \leq N_x$ et $1 \leq j \leq N_y$), et l'équation (4.14) sous la forme

$$fv_{i,j-1} + gv_{i-1,j} + hv_{i,j} + rv_{i+1,j} + sv_{i,j+1} + \epsilon u_{i,j-1} + \lambda u_{i+1,j-1} + \chi u_{i,j} + \psi u_{i+1,j} = (\text{RHS}_v)_{i,j},$$

(pour $1 \leq i \leq N_x$ et $2 \leq j \leq N_y$), on va préciser la structure des matrices \mathbf{A}_u , \mathbf{A}_{uv} , \mathbf{A}_{vu} et \mathbf{A}_v :

$$\mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_u & \mathbf{D}_u & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_u & \mathbf{D}_u & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{D}_u & \mathbf{T}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{D}_u & \mathbf{T}_u \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{T}_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & c & d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & c & d & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b & c & d & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & c & d \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_u = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & e & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & e & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_{uv} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{uv} & \tilde{\mathbf{B}}_{uv} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{uv} & \tilde{\mathbf{B}}_{uv} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{uv} & \tilde{\mathbf{B}}_{uv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{uv} & \tilde{\mathbf{B}}_{uv} \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{B}_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & \beta & \ddots & & \vdots \\ 0 & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha & \beta & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma & \delta & \ddots & & \vdots \\ 0 & \gamma & \delta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \gamma & \delta & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \gamma & \delta \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_{vu} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{vu} & \tilde{\mathbf{B}}_{vu} & \ddots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{vu} & \tilde{\mathbf{B}}_{vu} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{B}_{vu} & \tilde{\mathbf{B}}_{vu} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{B}_{vu} & \tilde{\mathbf{B}}_{vu} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{B}_{vu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \epsilon & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \epsilon & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \epsilon & \lambda & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \epsilon & \lambda \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{vu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \chi & \gamma & \ddots & & \vdots \\ 0 & \chi & \gamma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \chi & \gamma & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \chi & \gamma \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\mathbf{A}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_v & \mathbf{T}_v & \ddots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_v & \mathbf{T}_v & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{D}_v & \mathbf{T}_v & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{D}_v & \mathbf{T}_v \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Id} \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{D}_v = \begin{pmatrix} f & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} h & r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g & h & r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g & h & r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g & h & r & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & g & h & r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}.$$

4.2.3 Équation de Poisson sur l'incrément de pression

L'équation (2.5) permettant de mettre à jour l'incrément de pression est une équation de Poisson classique. En écrivant cette équation sous la forme

$$\begin{cases} \operatorname{div} \nabla q^{n+1} = \frac{\rho_{\min}}{\delta t} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1}, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} q^{n+1} = 0, & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

et en intégrant sur la maille $K_{i,j}$ les membres de gauche et droite, on obtient respectivement

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}} \operatorname{div} \nabla q^{n+1} &= \int_{\partial K_{i,j}} \nabla q^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &\approx q_{i,j-1}^{n+1} \left(\frac{h_x}{h_y} \right) + q_{i-1,j}^{n+1} \left(\frac{h_y}{h_x} \right) \\ &\quad + q_{i,j}^{n+1} \left(-2 \frac{h_x}{h_y} - 2 \frac{h_y}{h_x} \right) \\ &\quad + q_{i+1,j}^{n+1} \left(\frac{h_y}{h_x} \right) + q_{i,j+1}^{n+1} \left(\frac{h_x}{h_y} \right), \end{aligned}$$

et

$$\int_{K_{i,j}} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \approx h_y (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) + h_x (v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}).$$

Ainsi, on obtient l'équation discrète, pour $1 \leq i \leq N_x$ et $1 \leq j \leq N_y$:

$$\begin{aligned} q_{i,j-1}^{n+1} \left(\frac{h_x}{h_y} \right) + q_{i-1,j}^{n+1} \left(\frac{h_y}{h_x} \right) + q_{i,j}^{n+1} \left(-2 \frac{h_x}{h_y} - 2 \frac{h_y}{h_x} \right) + q_{i+1,j}^{n+1} \left(\frac{h_y}{h_x} \right) + q_{i,j+1}^{n+1} \left(\frac{h_x}{h_y} \right) \\ = h_y (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) + h_x (v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Comme pour la discrétisation de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, les valeurs fantômes sont écrites en fonction des inconnues principales à l'aide des conditions

aux limites :

$$\begin{aligned} q_{i,0} &= q_{i,1}, & \text{pour } 1 \leq i \leq N_x, \\ q_{i,N_x+1} &= q_{i,N_x}, & \text{pour } 1 \leq i \leq N_x, \\ q_{0,j} &= q_{1,j}, & \text{pour } 1 \leq j \leq N_y, \\ q_{N_x+1,j} &= q_{N_x,j}, & \text{pour } 1 \leq j \leq N_y. \end{aligned}$$

La résolution du système discret (4.20) pour mettre à jour l'incrément de pression s'effectue donc en inversant une matrice penta-diagonale.

4.2.4 Étape de correction

Cette dernière étape est complètement explicite. l'équation (2.6) donne, pour $1 \leq i \leq N_x$ et $1 \leq j \leq N_y$:

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + q_{i,j}^n.$$

La première équation (2.7) donne, pour $1 \leq i \leq N_x + 1$ et $0 \leq j \leq N_y + 1$:

$$u_{\text{div } i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho_{\min}} \left(\frac{q_{i,j}^{n+1} - q_{i-1,j}^{n+1}}{h_x} \right).$$

La seconde équation (2.7) donne, pour $0 \leq i \leq N_x + 1$ et $1 \leq j \leq N_y + 1$:

$$v_{\text{div } i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho_{\min}} \left(\frac{q_{i,j}^{n+1} - q_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} \right).$$

Les valeurs fantômes sont écrites en fonction des inconnues principales en utilisant les mêmes relations que pour le calcul de l'incrément de pression.

4.3 Version Level Set

Motivation. Dans les simulations numériques que nous effectuons dans les chapitres suivants, nous considérerons un écoulement composé de deux fluides de densité, viscosité et seuil de plasticité différents que nous supposerons non miscibles.

On souhaiterait donc transporter avec la vitesse de l'écoulement une densité initialement définie par

$$\rho(x, y, t = 0) = \begin{cases} \rho_{\min}, & \text{dans le fluide le moins dense,} \\ \rho_{\max}, & \text{dans le fluide le plus dense.} \end{cases}$$

Cependant, cela induit des discontinuités le long de l'interface dans l'équation de conservation du moment, qui sont difficiles à traiter en particulier lorsque l'on utilise des méthodes de type *pas de temps fractionné* ou *projection*. Pour remédier à ce problème, deux approches sont possibles :

- ✓ introduire une régularisation des paramètres tels que la densité et la viscosité (voir [87, 18, 86]),
- ✓ prendre en compte les sauts de la pression et de la viscosité à l'interface dans la discrétisation des opérateurs (voir [51, 47]).

Nous choisirons dans la suite l'approche de régularisation. Une première façon de procéder consiste à transporter (à l'aide des schémas pour l'équation de transport présentés dans la section 4.2.1) une densité initialement régularisée, par exemple de la forme

$$\rho(x, y, t = 0) = \left(\frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2} \right) + \left(\frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{2} \right) \tanh \left(\frac{y - \eta(x)}{0.01L} \right),$$

où L est une longueur de référence et $\eta(x)$ désigne l'ordonnée initiale de l'interface. Pour $t \geq 0$ on peut alors définir l'interface par

$$\Gamma(t) = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega; \rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2} \right\},$$

et définir les coefficients variables (viscosité, seuil de plasticité, coefficient de friction et seuil de glissement) dans chaque phase à partir de cela. Notons que là encore, on peut régulariser ou non les coefficients variables de part et d'autre de l'interface – ce que nous ferons lorsque l'on définira ainsi l'interface – et que la nature des deux approches est très différente.

Une autre façon de procéder (que nous privilégions par la suite) consiste à transporter – toujours avec les mêmes schémas pour l'équation de transport présentés dans 4.2.1 – une nouvelle variable, la fonction Level Set ϕ , que l'on initialise par $\phi > 0$ dans l'une des phases et $\phi < 0$ dans l'autre, et de définir l'interface par

$$\Gamma(t) = \{ \mathbf{x} \in \Omega; \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \}.$$

On définit alors directement

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= \rho_{\min} + (\rho_{\max} - \rho_{\min})H_\epsilon(\phi), \\ \mu(\phi) &= \mu_{\min} + (\mu_{\max} - \mu_{\min})H_\epsilon(\phi), \\ \alpha(\phi) &= \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})H_\epsilon(\phi), \end{aligned} \tag{4.21}$$

et dans le cas où $\Gamma_\omega \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} c_f(\phi) &= c_{f_1} + (c_{f_2} - c_{f_1})H_\epsilon(\phi), \\ c_s(\phi) &= c_{s_{\min}} + (c_{s_{\max}} - c_{s_{\min}})H_\epsilon(\phi), \end{aligned} \tag{4.22}$$

où ρ_{\min} est la densité du fluide le moins dense, ρ_{\max} celle du fluide le plus dense et de même pour la viscosité et le seuil de plasticité; c_{f_1} est le coefficient de friction sur le bord Γ_ω en contact avec le fluide le moins dense, c_{f_2} est le coefficient de friction sur le bord Γ_ω en contact avec le fluide le plus dense; $c_{s_{\min}}$ est le coefficient de friction sur le bord Γ_ω en

contact avec le fluide le moins dense, et $c_{s\max}$ celui en contact avec le fluide le plus dense. La fonction $H_\epsilon(\phi)$ est une régularisation de la fonction de Heaviside, c'est-à-dire

$$H_\epsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi < -\epsilon, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon}\right) \right) & \text{si } -\epsilon \leq \phi \leq \epsilon, \\ 1 & \text{si } \phi > \epsilon. \end{cases}$$

Notons que cette approche est aussi utilisée dans la méthode des frontières immergées due à Peskin [70] pour les problèmes d'interaction fluide-structure. L'utilisation de la fonction $H_\epsilon(\phi)$ étale l'interface sur un voisinage de taille de l'ordre de

$$\frac{2\epsilon}{|\nabla\phi|}.$$

De manière à avoir une interface de taille fixe au cours du temps, on utilise une fonction Level Set ϕ telle que

$$|\nabla\phi| = 1.$$

Une telle fonction est une fonction distance. On utilisera pour ϕ la fonction distance signée à l'interface Γ . Si la Level Set est une fonction distance, la taille de l'interface induite par $H_\epsilon(\phi)$ est 2ϵ .

Remarque 8. *la normale unitaire à l'interface et la courbure de l'interface s'obtiennent directement par*

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \Big|_\Gamma \quad \text{et} \quad \text{div} \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right) \Big|_\Gamma.$$

Réinitialisation de la fonction Level Set Si la fonction Level Set est initialisée comme étant la fonction distance signée, rien ne garantit qu'elle le restera. Connaissant ϕ^n , il est nécessaire de la réinitialiser, c'est-à-dire de résoudre l'équation eikonale suivante :

$$\text{Chercher } \phi \text{ telle que } \begin{cases} |\nabla\phi| = 1 & \forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \Omega; |\phi(\mathbf{x})| \leq \epsilon\}, \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_n, \end{cases}$$

où $\Gamma_n = \{\mathbf{x} \in \Omega; \phi^n(\mathbf{x}) = 0\}$. Sussman *et al* dans [87] ont introduit l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \text{sign}(\phi^n)(|\nabla\phi| - 1) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \phi(\mathbf{x}, \tau = 0) = \phi^n(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (4.23)$$

où τ est un temps fictif; (4.23) est une équation de Hamilton-Jacobi dont l'Hamiltonien est $H(\nabla\phi) = \text{sign}(\phi^n)(|\nabla\phi| - 1)$. On peut réécrire (4.23) sous la forme d'une équation hyperbolique

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \mathbf{w} \cdot \nabla\phi = \text{sign}(\phi^n)$$

où $\mathbf{w} = \text{sign}(\phi^n) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ est un vecteur unitaire, normal à l'interface de la fonction Level Set.

Pour approcher numériquement (4.23), on utilise un schéma de Runge-Kutta TVD d'ordre 2 ou 3. Si on note $\delta\tau$ le pas de temps fictif et si on approche l'Hamiltonien par un schéma de Godunov, on est amené à chaque sous-pas des schémas Runge-Kutta à résoudre un problème du type

$$\phi_{i,j}^{n,k+1} = \phi_{i,j}^{n,k} - \delta\tau S_\epsilon(\phi_{i,j}^n) H_G\left((\phi_x^-)_{i,j}^{n,k}, (\phi_x^+)_{i,j}^{n,k}, (\phi_y^-)_{i,j}^{n,k}, (\phi_y^+)_{i,j}^{n,k}\right)$$

où $\phi_{i,j} \approx \phi(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$, S_ϵ est une régularisation de la fonction signe définie par

$$S_\epsilon(\phi) = \phi / \sqrt{\epsilon^2 + \phi^2}$$

et H_G , le flux de Godunov (voir [45]), est défini par

$$H_G(a, b, c, d) = \begin{cases} \sqrt{\max(a^+, b^-)^2 + \max(c^+, d^-)^2} - 1 & \text{si } \phi_{i,j}^n > 0, \\ \sqrt{\max(a^-, b^+)^2 + \max(c^-, d^+)^2} - 1 & \text{si } \phi_{i,j}^n < 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

où a^+ et a^- désignent respectivement les parties positives et négatives de a . Les dérivées $(\phi_x^\pm)_{i,j}^{n,k}$, $(\phi_y^\pm)_{i,j}^{n,k}$ peuvent être calculées à l'aide des schémas ENO d'ordre 2 ou 3.

Dans [77], les auteurs ont mis en évidence le fait que de telles discrétisations, qui ne prennent pas en compte la position de l'interface, entraînent un déplacement de cette dernière à l'intérieur des mailles de calcul, plus précisément, l'interface a tendance à se rapprocher au cours des itérations en k vers le point du maillage le plus proche. Il en résulte une perte de précision au voisinage de l'interface. Pour remédier à ce problème, ils ont proposé de localiser l'interface. Si $\phi_{i-1,j}^n \phi_{i,j}^n < 0$ alors l'interface $\Gamma(t_n)$ intersecte le segment $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times \{y_{j+\frac{1}{2}}\}$. Il existe donc un point $x_\Gamma \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ où la fonction Level Set s'annule. On peut déterminer la position de ce point en approchant la fonction Level Set dans un voisinage de x_Γ , par exemple :

$$\text{On cherche } x_\Gamma \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \text{ tel que } P_{\phi^n}(x_\Gamma) = 0$$

où $P_{\phi^n}(x)$ est un polynôme d'interpolation ENO d'ordre 2 aux valeurs $\{\phi_{i-2,j}^n, \dots, \phi_{i+1,j}^n\}$, c'est-à-dire

$$P_{\phi^n}(x) = \phi_{i-1,j}^n + (x - x_{i-\frac{1}{2}}) D_x \phi_{i,j}^n + (x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \begin{cases} D_{xx} \phi_{i-1,j}^n & \text{si } |D_{xx} \phi_{i-1,j}^n| \leq |D_{xx} \phi_{i+1,j}^n|, \\ D_{xx} \phi_{i+1,j}^n & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$D_x \phi_{i,j}^n = \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{h_x},$$

et

$$D_{xx}\phi_{i,j}^n = \frac{\phi_{i+1,j}^{n,k} - 2\phi_{i,j}^{n,k} + \phi_{i-1,j}^{n,k}}{2h_x^2}.$$

L'idée introduite dans [77] est alors de modifier le calcul des dérivées $(\phi_x^\pm)_{i,j}^{n,k}$ en utilisant la position de l'interface x_Γ . Des évolutions ont ensuite été proposées dans [60, 59]. Elles sont basées sur des approximations ENO d'ordre 2 de $(\phi_x^\pm)_{i,j}^{n,k}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} (\phi_x^+)_{i,j}^{n,k} = \frac{\phi_{i+1,j}^{n,k} - \phi_{i,j}^{n,k}}{h_x} - h_x \min\text{mod}(D_{xx}\phi_{i,j}^{n,k}, D_{xx}\phi_{i+1,j}^{n,k}), \\ (\phi_x^-)_{i,j}^{n,k} = \frac{\phi_{i,j}^{n,k} - \phi_{i-1,j}^{n,k}}{h_x} + h_x \min\text{mod}(D_{xx}\phi_{i,j}^{n,k}, D_{xx}\phi_{i-1,j}^{n,k}), \end{cases}$$

où

$$\min\text{mod}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } ab \leq 0, \\ a & \text{si } |a| \leq |b| \text{ et } ab > 0, \\ b & \text{si } |a| > |b| \text{ et } ab > 0. \end{cases}$$

Ces formules sont modifiées au voisinage de l'interface de manière à imposer que $\phi^{n,k} = 0$ là où $\phi^n = 0$. Considérons dans un premier temps le cas où $\phi_{i,j}^n \phi_{i+1,j}^n < 0$. A l'aide du polynôme d'interpolation ENO d'ordre 2 associé aux valeurs $\{\phi_{i-1,j}^n, \phi_{i,j}^n, \phi_{i+1,j}^n, \phi_{i+2,j}^n\}$, on trouve

$$h_x^+ = \begin{cases} h_x \left(\frac{1}{2} + \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i+1,j}^n - \text{sign}(\phi_{i,j}^n - \phi_{i+1,j}^n) \sqrt{D}}{D_{xx}\phi^n} \right) & \text{si } |D_{xx}\phi^n| > \varepsilon, \\ h_x \frac{\phi_{i,j}^n}{\phi_{i,j}^n - \phi_{i+1,j}^n} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $D_{xx}\phi^n = \min\text{mod}(\phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i+1,j}^n, \phi_{i,j}^n - 2\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i+2,j}^n)$, $D = (D_{xx}\phi^n/2 - \phi_{i,j}^n - \phi_{i+1,j}^n)^2 - 4\phi_{i,j}^n\phi_{i+1,j}^n$ et $\varepsilon = 10^{-6}$. La dérivée $(\phi_x^+)_{i,j}^{n,k}$ est alors calculée en prenant en compte la position de l'interface en $x_{i+\frac{1}{2}} + h_x^+$, c'est-à-dire

$$(\phi_x^+)_{i,j}^{n,k} = \frac{0 - \phi_{i,j}^{n,k}}{h_x^+} - h_x^+ \min\text{mod}(D_{xx}\phi_{i,j}^{n,k}, D_{xx}\phi_{i+1,j}^{n,k}).$$

De la même manière, dans le cas où $\phi_{i,j}^n \phi_{i-1,j}^n < 0$, on a

$$h_x^- = \begin{cases} h_x \left(\frac{1}{2} + \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n - \text{sign}(\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \sqrt{D}}{D_{xx}\phi^n} \right) & \text{si } |D_{xx}\phi^n| > \varepsilon, \\ h_x \frac{\phi_{i,j}^n}{\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $D_{xx}\phi^n = \min\text{mod}(\phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i+1,j}^n, \phi_{i-2,j}^n - 2\phi_{i-1,j}^n + \phi_{i,j}^n)$ et $D = (D_{xx}\phi^n/2 - \phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n)^2 - 4\phi_{i,j}^n\phi_{i-1,j}^n$. La dérivée $(\phi_x^-)_{i,j}^{n,k}$ est alors calculée en prenant en compte la position de l'interface en $x_{i+\frac{1}{2}} - h_x^-$, c'est-à-dire

$$(\phi_x^-)_{i,j}^{n,k} = \frac{\phi_{i,j}^{n,k} - 0}{h_x^-} + h_x^- \min\text{mod}(D_{xx}\phi_{i,j}^{n,k}, D_{xx}\phi_{i-1,j}^{n,k}).$$

Dans [59], plusieurs schémas en temps différents sont testés et comparés. Une revue des méthodes Level Set et de leurs applications a récemment été publiée dans [33].

4.4 Implémentation

Le schéma numérique que nous venons de présenter a été implémenté dans un code Fortran 90, parallélisé en utilisant la bibliothèque MPI et utilisant la bibliothèque PETSc pour la gestion des systèmes linéaires.

Cette section a pour vocation de décrire sa structure. On se place dans la configuration la plus riche, utilisant la fonction Level Set. On peut grossièrement découper l'algorithme en deux parties : une première partie consacrée à l'initialisation, et une seconde partie comprenant la boucle en temps permettant de calculer par récurrence les approximations successives de la solution.

4.4.1 Initialisation de l'algorithme

L'initialisation du code commence par la lecture d'informations d'entrée que l'on fournit dans un fichier annexe. Ces informations portent sur le domaine (taille, nombre de points, etc), le choix des conditions au bord, la valeur des paramètres physiques (densité de la phase la plus lourde, densité de la phase la moins lourde, etc), ou encore sur la valeur des paramètres numériques (nombre de processeurs alloués pour le calcul, seuil de tolérance pour la résolution de l'algorithme de point fixe (2.8)-(2.9), etc).

En utilisant ces informations, on construit alors les tableaux et les grilles pour les différentes inconnues, ainsi que leur découpage pour la parallélisation des calculs, à l'aide des fonctions fournies par les bibliothèques PETSc et MPI.

Finalement, les tableaux contenant les différentes inconnues sont initialisés, soit en utilisant les données initiales du modèle lorsque nous les avons à disposition, soit de façon arbitraire.

4.4.2 Boucle en temps

La boucle en temps permet de calculer par récurrence les approximations successives de la solution. Elle représente la partie la plus importante du code. Nous présentons les différentes étapes qui la composent avant de détailler ces dernières :

- calcul de la fonction Level Set,
- (réinitialisation de la fonction Level Set),
- calcul des paramètres physiques variables : densité, viscosité et seuil de plasticité,
- résolution de l'étape de prédiction,
- résolution de l'étape de correction.

Calcul de la fonction Level Set. Le calcul de la fonction Level Set ϕ^{n+1} est fait en utilisant le schéma Runge Kutta 3 (RK3) (4.1), et par conséquent en 3 étapes nécessitant

chacune la résolution d'une équation de transport explicite. La structure de la routine est la suivante :

- Première étape RK3 :
 - calcul des $(\phi_x^\pm)_{i,j}$ avec le schéma WENO5,
 - résolution de la première étape RK3,
 - mise à jour des valeurs fantômes à l'extérieur du domaine par extrapolation.
- Deuxième étape RK3 : analogue à la première étape.
- Troisième étape RK3 : analogue à la première étape.

Réinitialisation de la fonction Level Set. La réinitialisation de la fonction Level Set est effectuée si le résidu $||\nabla\phi| - 1|$ au voisinage de l'interface (3 mailles) est supérieur à une certaine valeur de tolérance que l'on a fixé. Si ce critère est déclenché, la réinitialisation s'effectue de la façon suivante :

- Première étape RK2 :
 - calcul des $(\phi_x^\pm)_{i,j}$ avec un schéma ENO2,
 - calcul des flux de Godunov en utilisant (4.24),
 - résolution de la première étape RK2,
 - mise à jour des valeurs fantômes à l'extérieur du domaine par extrapolation.
- Seconde étape RK2 : analogue à la première étape.

Calcul des paramètres physiques variables : densité, viscosité et seuil de plasticité. Cette étape s'effectue directement en utilisant les définitions (4.21) et la fonction Level Set, avec $\epsilon = \frac{3}{2} \min(h_x, h_y)$.

Résolution de l'étape de prédiction. L'étape de prédiction permet de calculer \mathbf{u}^{n+1} , Σ^{n+1} et σ^{n+1} . Pour cela, on utilise l'algorithme de point fixe (2.8)-(2.9), qui avec la nouvelle forme de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (4.2) s'écrit :

i) Calcul de $\mathbf{u}^{n,k+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{n+1} \left(\frac{\mathbf{u}^{n,k+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} \right) + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \text{div}(2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1}) \\ \quad + \nabla(p^n + q^n) = \text{div}(\alpha^{n+1} \Sigma^{n,k}) - \rho^{n+1} \mathbf{g}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n,k+1} = 0, \quad \text{dans } \Gamma_0, \\ \mathbf{u}^{n,k+1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{dans } \Gamma_w, \\ (2\mu^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1} \mathbf{n} + \alpha^{n+1} \Sigma^{n,k} \mathbf{n})_{\mathbf{t}} = -c_f^{n+1} \mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{n,k+1} - c_s^{n+1} \sigma^{n,k}, \quad \text{dans } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

ii) Calcul $\Sigma^{n,k+1}$ et $\sigma^{n,k+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^{n,k+1} = \mathbb{P}_{\mathbf{A}}(\Sigma^{n,k} + \ell \alpha^{n+1} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n,k+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n,k})), \quad \text{dans } \Omega, \\ \sigma^{n,k+1} = \mathbb{P}_{\mathbf{B}}(\sigma^{n,k} + r c_s^{n+1} \mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{n,k+1} + \theta(\sigma^n - \sigma^{n,k})), \quad \text{dans } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

On considère que l'algorithme de point fixe a convergé lorsque le test

$$\|\mathbf{u}^{n,k+1} - \mathbf{u}^{n,k}\| + \|\boldsymbol{\Sigma}^{n,k+1} - \boldsymbol{\Sigma}^{n,k}\| + \|\boldsymbol{\sigma}^{n,k+1} - \boldsymbol{\sigma}^{n,k}\| \leq Tol \quad (4.27)$$

est vérifié, où le paramètre numérique Tol est une certaine tolérance, que l'on fixe en pratique entre 10^{-4} et 10^{-6} . La structure du sous-programme de l'étape de prédiction est la suivante :

- Calcul des termes indépendants de la boucle de point fixe (boucle en k) :
 - calcul des termes du membre de droite \vec{b} indépendant de k : terme non linéaire, accélération de pesanteur, gradient de pression,
 - Calcul de la matrice \mathbf{A} .
- Boucle de point fixe en k pour obtenir \mathbf{u}^{n+1} , $\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$:

Tant que (4.27) n'est pas vérifiée, faire

 - calcul du membre de droite \vec{b} : ajout des contributions de la partie plastique du tenseur des contraintes $\text{div}(\alpha^{n+1}\boldsymbol{\Sigma}^{n,k})$ et des contributions des termes indépendants de k calculés précédemment,
 - résolution du système linéaire découlant de (4.25) sous la forme $\mathbf{A}\vec{w}^{n,k+1} = \vec{b}^{n,k}$ pour obtenir $\mathbf{u}^{n,k+1}$,
 - résolution des équations de projection (4.26) pour obtenir $\boldsymbol{\Sigma}^{n,k+1}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{n,k+1}$.

Résolution de l'étape de correction. Le sous-programme de l'étape de correction se découpe en trois parties : la formulation matricielle de l'équation (2.5) et sa résolution afin de calculer l'incrément de pression q^{n+1} , puis la mise à jour de la pression et la correction de la vitesse en utilisant les formules (2.6) et (2.7).

Chapitre 5

Instabilité de Rayleigh-Taylor

Les chapitres suivants sont consacrés à la mise en oeuvre du code de calcul que l'on a présenté dans le chapitre précédent. Dans les simulations numériques que nous allons réaliser, nous considérerons deux types de configuration : l'instabilité de Rayleigh-Taylor et la rupture de barrage. Nous commençons par la configuration de l'instabilité de Rayleigh-Taylor car cette dernière nous permettra de mettre en oeuvre le code en utilisant des conditions aux limites de type adhérence et symétrie, qui sont plus simples que la condition de glissement à seuil que nous utiliserons dans la configuration de rupture de barrage.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est une instabilité de l'interface qui sépare deux fluides de densités différentes qui résulte de la poussée du fluide le plus lourd sur le fluide le plus léger sous l'action de la gravité (voir [75], [80]). Dans tout ce chapitre, on se restreint au cas où la viscosité μ est constante.

Ce chapitre est un développement du travail publié dans [17].

5.1 Configuration de l'écoulement et adimensionnement des équations

Configuration de l'écoulement. On considère un domaine rectangulaire

$$\Omega = (-L/2, L/2) \times (-2L, 2L).$$

On notera ρ_{\max} et α_{\max} la densité et le seuil de plasticité du fluide le plus lourd, respectivement ρ_{\min} et α_{\min} la densité et le seuil de plasticité du fluide le moins lourd. En suivant la définition de Tryggvason [91], on introduit le nombre de Atwood,

$$A_t = (\rho_{\max} - \rho_{\min}) / (\rho_{\max} + \rho_{\min}),$$

relié à l'écart de densité et qui permet de caractériser l'écoulement. La position initiale de l'interface est

$$\eta(x) = -\kappa L \cos(2\pi x/L),$$

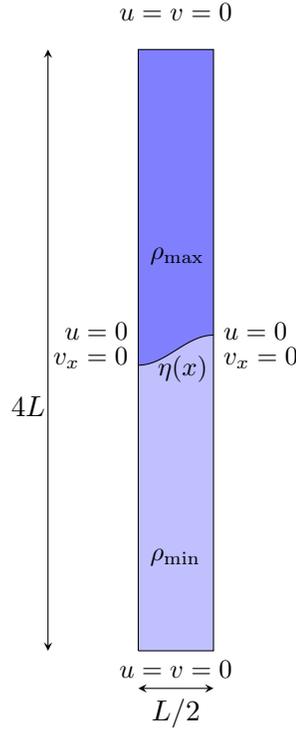


FIGURE 5.1 – Schéma de la configuration initiale

où le paramètre κ , lié à l'amplitude de l'interface initiale, sera ajusté en fonction de l'écart de densité considéré. Nous supposons que la symétrie des conditions initiales est maintenue durant toute la durée de la simulation de sorte que le domaine de calcul peut se restreindre à $(0, L/2) \times (-2L, 2L)$. Pour $t > 0$, le système évolue sous l'action d'un champ de gravité vertical et orienté vers le bas d'intensité g . On impose des conditions de Dirichlet homogène sur les parois du bas et du haut, et des conditions de symétrie sur les parois verticales. La configuration initiale est schématisée en figure 5.1.

Adimensionnement des équations. Afin d'écrire le système (1.16) en forme adimensionnée, on utilise la longueur caractéristique L et les paramètres physiques du fluide le plus lourd comme quantité de référence : ρ_{\max} et α_{\max} . On utilise \sqrt{gL} comme vitesse de référence de sorte que le temps de référence correspondant est $\sqrt{\frac{L}{g}}$ et la pression de référence est $\rho_{\max}gL$. En redimensionnant les variables avec ces quantités de référence, le système

s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\rho) = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) - \frac{2}{\Re \mathbf{e}} \operatorname{div}(\mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla p = -\rho \mathbf{e}_2 + \frac{\mathfrak{Bi}}{\Re \mathbf{e}} \operatorname{div}(\alpha(\rho)\boldsymbol{\Sigma}), \\ \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\Sigma} + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}), \ell > 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

où les nombres sans dimension de Reynolds et Bingham sont respectivement définis par

$$\Re \mathbf{e} = \frac{\rho_{\max} \sqrt{gL^3}}{\mu} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Bi} = \frac{\alpha_{\max} \sqrt{L}}{\mu \sqrt{g}}.$$

5.2 Premières simulations

5.2.1 Cas newtonien

On commence par calculer le développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans le cas newtonien reporté dans [39]. Dans cette configuration, nous n'utiliserons pas la fonction Level Set afin d'initialiser la densité de la même façon que le cas test auquel on souhaite comparer les simulations. La densité est initialisée par

$$\rho(x, y, t = 0) = \left(\frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2} \right) + \left(\frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{2} \right) \tanh \left(\frac{y - \eta(x)}{0.01L} \right). \quad (5.2)$$

Les deux fluides en jeu étant newtoniens, on aura dans toute cette section $\alpha(\rho) = \alpha_{\min} = \alpha_{\max} = 0$, et $\mathfrak{Bi} = 0$.

Faible nombre de Atwood. Dans cette configuration, le rapport de densité est de 3, de sorte que $A_t = 0.5$. Dans l'adimensionnement du modèle, nous avons choisi ρ_{\max} comme densité de référence et le nombre de Reynolds correspondant à cette configuration est donc $\Re \mathbf{e} = 3000$. Pour un tel nombre de Atwood et suivant [39], on choisit $\kappa = 0.1$ de sorte que la position initiale de l'interface est donnée par

$$\eta(x) = -0.1L \cos(2\pi x/L). \quad (5.3)$$

Le schéma de discrétisation en temps que nous utilisons est très proche de celui utilisé dans [39] dans le cas newtonien. Cependant, le schéma de discrétisation de la densité ainsi que la méthode de discrétisation en espace (différences finies) que nous utilisons diffèrent. La figure 5.2 nous montre l'évolution du champ de densité aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.5, 1.75, 2, 2.25$ et 2.5 dans l'échelle de temps de Tryggvason, qui est reliée à la notre par la relation $t_{\text{Tryg}} = t\sqrt{A_t}$. Nous avons utilisé une grille de 256×2048 points, de sorte que $h_x \approx h_y \approx 2 \times 10^{-3}$. Les

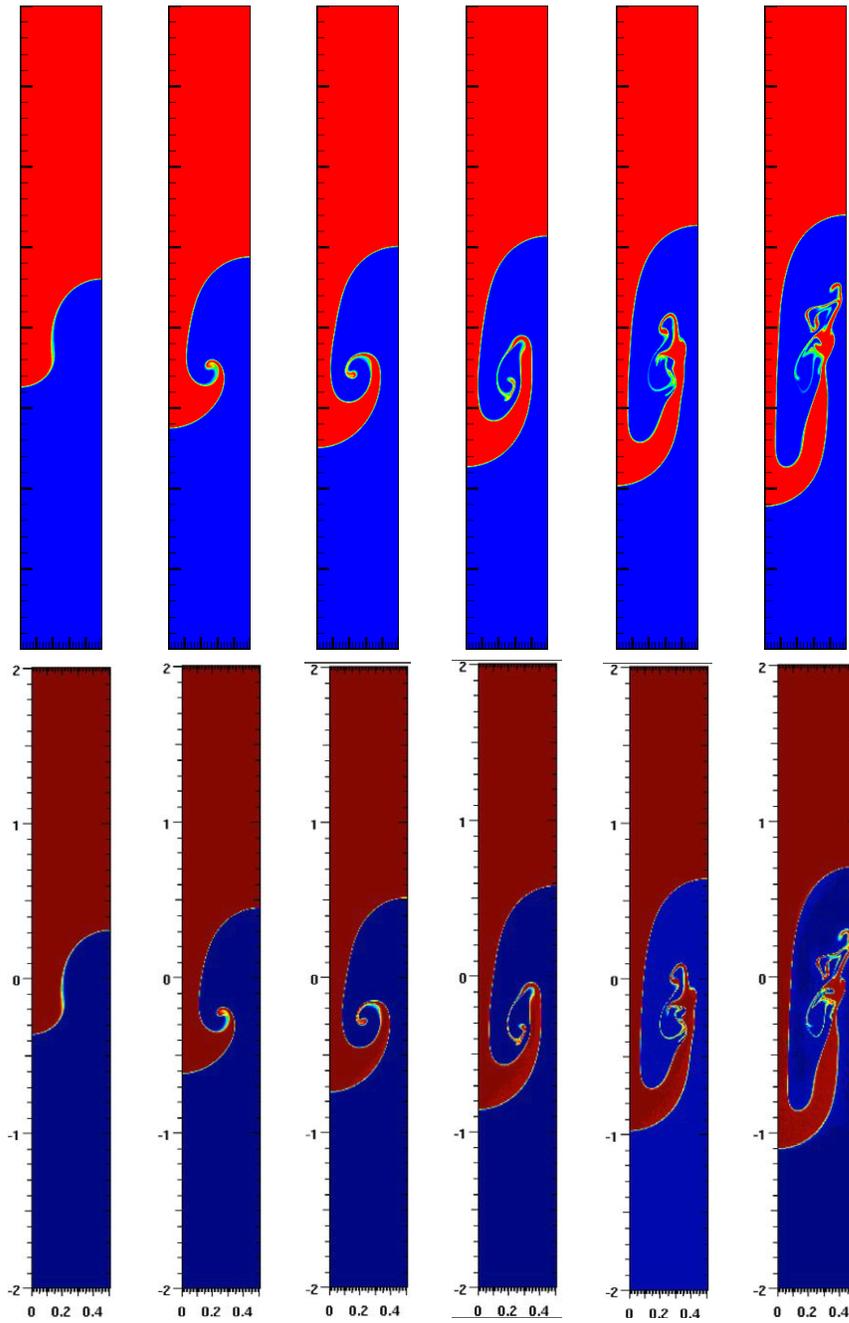


FIGURE 5.2 – Suivi du champ de densité aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.5, 1.75, 2, 2.25$ et 2.5 . $\mathfrak{Re} = 3000$; $\mathfrak{Bi} = 0$; rapport de densité 3. Le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge. Résultats de Guermond et Salgado [39] en seconde ligne.

simulations que l'on a réalisées sont sur la première ligne et nous avons reporté les résultats de [39] sur la seconde ligne. Dans [39], la discrétisation en espace est effectuée avec une méthode de type éléments finis sur maillage adaptatif triangulaire. Leur grille est composée de 232552 triangles et le pas d'espace est de l'ordre de 2.5×10^{-2} dans les régions les plus fines

Grand nombre de Atwood. On choisit maintenant un rapport de densité de 7, de sorte que $A_t = 0.75$. Avec l'adimensionnement que l'on a effectué, le nombre de Reynolds correspondant est $\mathfrak{Re} = 7000$. Dans cette configuration, on prend $\kappa = 0.01$ de sorte que la position initiale de l'interface est donnée par

$$\eta(x) = -0.01L \cos(2\pi x/L). \quad (5.4)$$

La figure 5.3 nous montre l'évolution du champ de densité aux temps $t = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$ et 3.75 dans l'échelle de temps adimensionnée (en utilisant $L^{1/2}/g^{1/2}$ comme temps de référence). Nous avons utilisé une grille de 256×2048 points, de sorte que $h_x \approx h_y \approx 2 \times 10^{-3}$. Les simulations que l'on a réalisées sont sur la première ligne et nous avons reporté les résultats de [39] sur la seconde ligne. Dans [39], le maillage est le même que dans le cas du faible nombre de Atwood.

Nos résultats sont en accord avec les travaux de référence de [90] ainsi que les travaux plus récents de [39]. On observe une bonne correspondance au niveau de la position des vortex aussi bien dans le cas $A_t = 0.5$ que le cas $A_t = 0.75$. La correspondance concernant les structures plus fines de l'écoulement est elle aussi satisfaisante, bien que l'on observe des différences un peu plus marquées dans le cas plus turbulent $A_t = 0.75$.

5.2.2 Convergence en temps

Nous allons dans cette section estimer numériquement le taux de convergence de notre schéma vis à vis de la variable temporelle. On effectue les simulations avec $\alpha_{\min} = 0$, $\alpha_{\max} = 1$, $\mathfrak{Bi} = 1$ et $\mathfrak{Re} = 3000$. Le rapport de densité est de 3, de sorte que $A_t = 0.5$ et la position initiale de l'interface est donnée par (5.3). On choisit r de sorte que la condition du théorème 8 soit satisfaite et $\theta = \delta t$.

L'interface est suivie en utilisant la fonction Level Set ϕ , initialisée comme la distance signée à l'interface et la densité et le seuil de plasticité sont calculés en utilisant la première et la troisième équation de (4.21). Le paramètre numérique ϵ est défini par $\epsilon = \frac{3}{2} \min(h_x, h_y)$. La vitesse initiale est $\mathbf{u}^0 = 0$ et Σ^0 et q^0 sont choisis arbitrairement. Avec ces paramètres, une simulation a été réalisée jusqu'au temps (adimensionnel) $t = 1.8$, sur une grille de 256×2048 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 2 \times 10^{-3}$, et avec un pas de temps $\delta t = 5 \times 10^{-5}$. On notera \mathbf{u}_{ref} , p_{ref} et ρ_{ref} les champs de vitesse, pression et densité correspondants. Notons

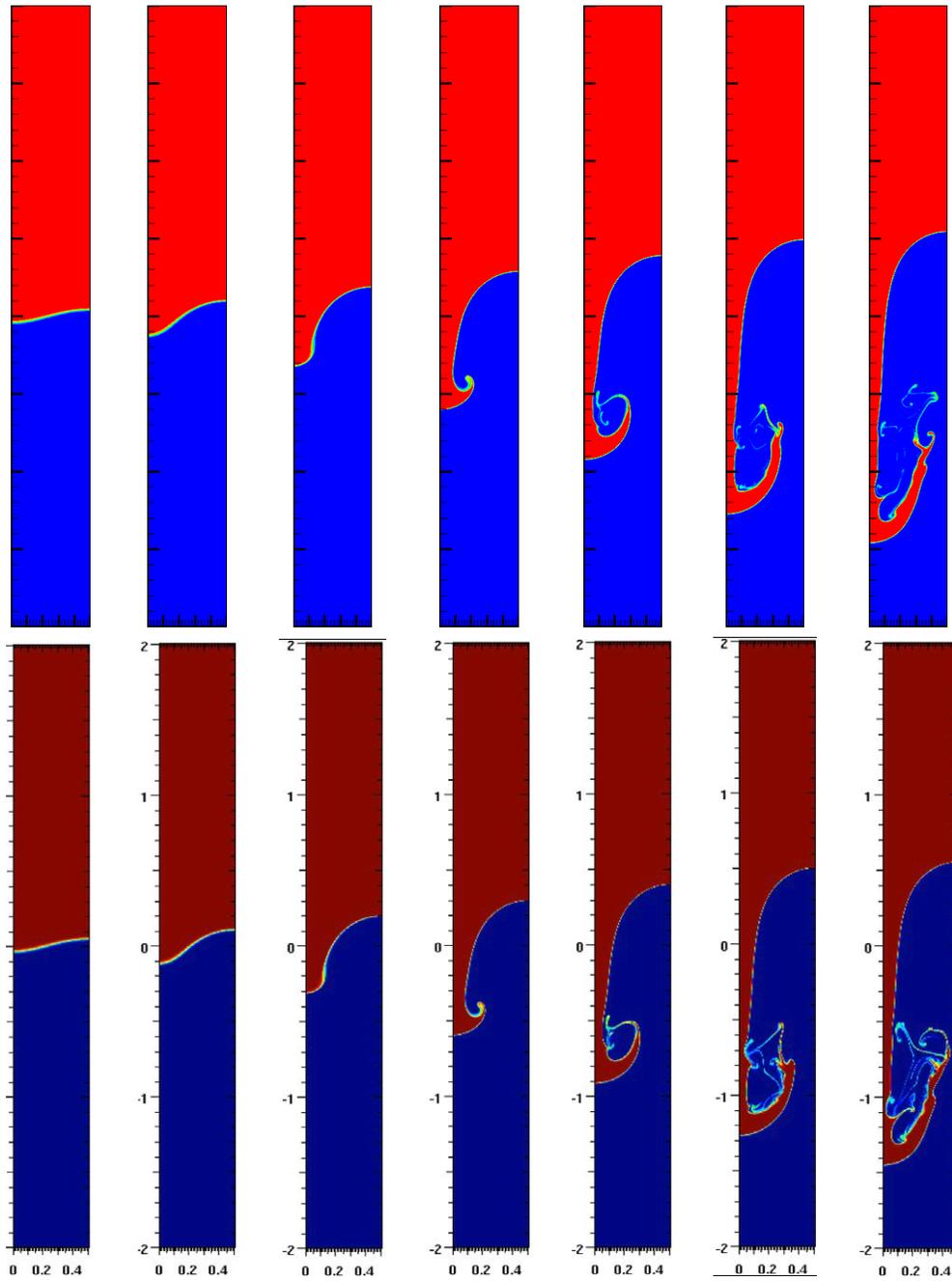


FIGURE 5.3 – Suivi du champ de densité aux temps $t = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$ et 3.75 . $\mathfrak{Re} = 7000$; $\mathfrak{Bi} = 0$; rapport de densité 7. Le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge. Résultats de Guermond et Salgado [39] en seconde ligne.

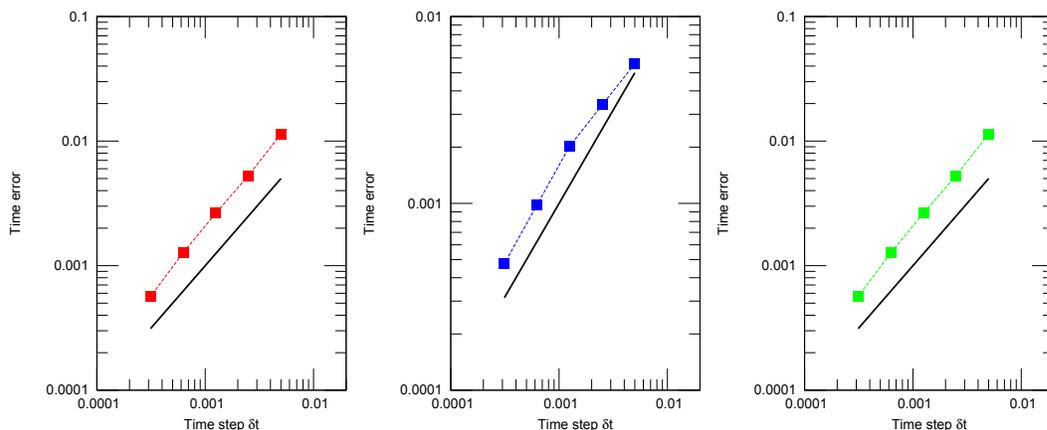


FIGURE 5.4 – Erreur sur la vitesse (rouge), la pression (bleu) et la densité (vert) en norme $L^2(\Omega)$. La ligne noire de pente 1 correspond à une erreur d'ordre $O(\delta t)$.

que l'écoulement n'est pas au repos à $t = 1.8$. En effet, l'amplitude de la vague est d'ordre $2.5L$.

Remarque 9. Lorsque l'on se trouve suffisamment loin de l'interface, le schéma de discrétisation en espace utilisé est formellement d'ordre 2. Dans ces parties du domaine, en négligeant les éventuelles constantes présentes devant les pas de discrétisation, l'erreur associée à la discrétisation spatiale est donc d'ordre $h_x^2 \approx 4 \times 10^{-6}$ et est petite face à l'erreur induite par la discrétisation en temps qui est d'ordre $\delta t = 5 \times 10^{-5}$.

Pour estimer numériquement l'erreur induite par le schéma de discrétisation en temps, nous avons tracé sur la figure 5.4 la norme $L^2(\Omega)$ de la différence entre $\mathbf{u}_{\text{ref}}, p_{\text{ref}}, \rho_{\text{ref}}$ et $\mathbf{u}_{\delta t}, p_{\delta t}, \rho_{\delta t}$, calculés sur la même grille avec des pas de temps croissants $\delta t = 3.125 \times 10^{-4}$, $\delta t = 6.25 \times 10^{-4}$, ..., $\delta t = 5 \times 10^{-3}$. Pour mettre en valeur le taux de convergence, l'échelle logarithmique est utilisée et une ligne noire de pente 1, correspondant à une erreur d'ordre $O(\delta t)$ a été ajoutée. Dans cette configuration particulière, on retrouve l'ordre un du schéma démontré dans le théorème 8.

5.3 Suivi de l'interface et du taux de déformation

Dans le reste de ce chapitre, on se focalise sur l'évolution au cours du temps de l'interface entre les deux phases d'une part, ainsi que sur l'évolution du taux de déformation de l'écoulement d'autre part.

L'interface est suivie en utilisant la fonction Level Set ϕ , initialisée comme la distance signée à l'interface et la densité est calculée en utilisant la première relation de (4.21), avec $\epsilon = \frac{3}{2} \min(h_x, h_y)$.

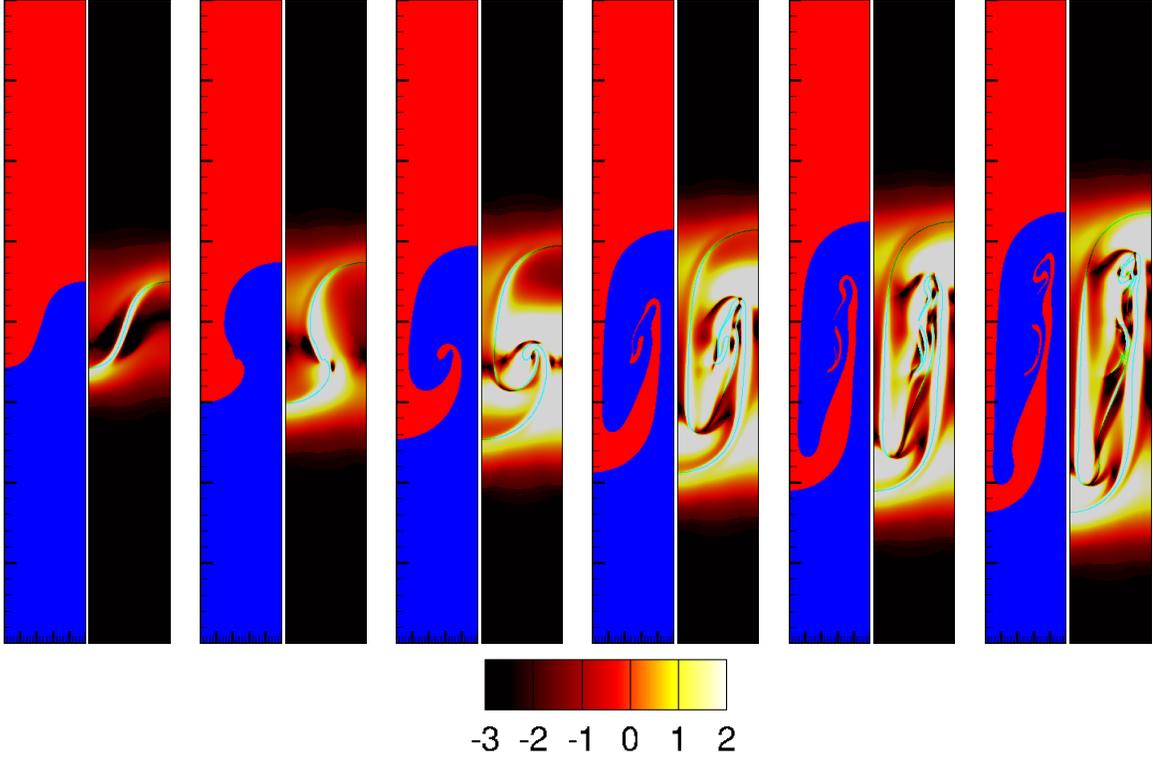


FIGURE 5.5 – Suivi de l’interface $\phi = 0$ à gauche (le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge) et du taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ à droite, aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.75$ et 3 . $\Re = 3000$; $\mathfrak{Bi} = 10$; rapport de densité 3 . Echelle logarithmique de la colormap de $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ en seconde ligne.

La vitesse initiale est $\mathbf{u}^0 = 0$ et Σ^0 et q^0 sont choisis arbitrairement.

5.3.1 Mélange de deux fluides de Bingham

Nous allons dans cette première section considérer la configuration où les deux fluides sont viscoplastiques, *i.e.* $\alpha_{\min} = \alpha_{\max} = 1$, en faisant varier le nombre de Bingham. Pour les autres paramètres, nous gardons les mêmes que dans la section 5.2.2 sur la convergence en temps : $\Re = 3000$, rapport de densité 3 , $A_t = 0.5$, position initiale de l’interface définie par (5.3), paramètre ℓ de sorte que la condition du théorème 8 soit satisfaite et $\theta = \delta t$. La figure 5.5 montre l’évolution de l’interface (*i.e.* la position de la ligne de niveau $\phi = 0$) à gauche et le taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ à droite, pour un nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 10$, aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.75$ et 3 . Ici et dans toute la suite du chapitre, l’échelle logarithmique est utilisée pour afficher les valeurs de $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$. Les zones noires sont les zones où $|\mathbf{D}\mathbf{u}| \leq 10^{-3}$

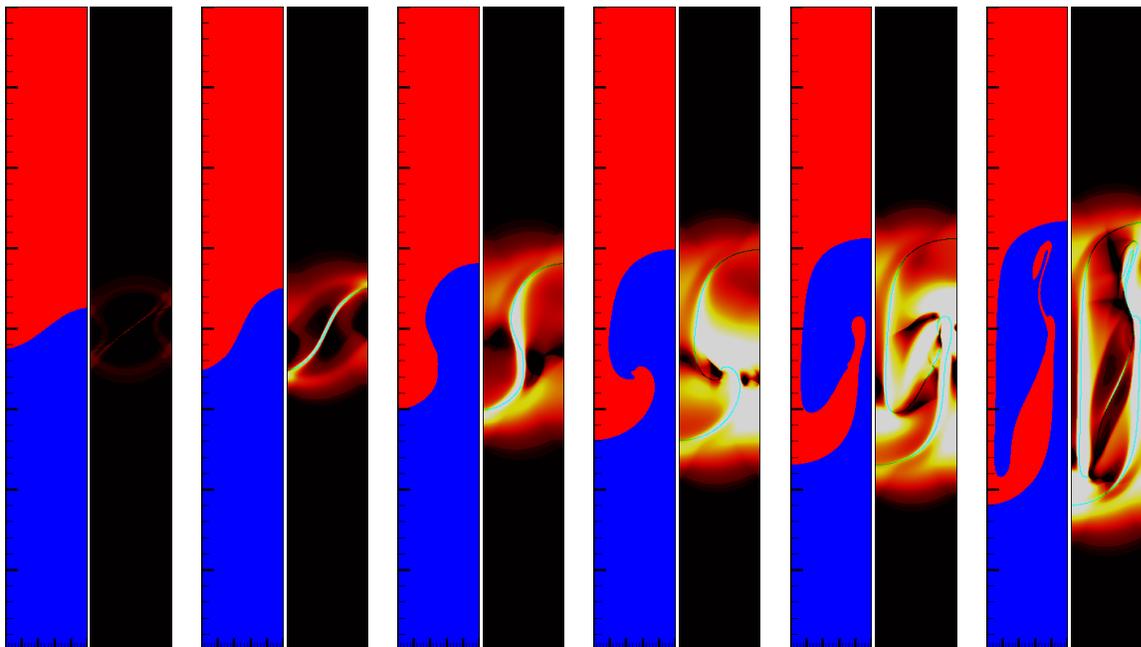


FIGURE 5.6 – Suivi de l'interface $\phi = 0$ à gauche (le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge) et du taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ à droite, aux temps $t_{\text{Tryg}} = 2, 3, 3.75, 4.25, 4.75$ et 5.5 . $\mathfrak{Re} = 3000$; $\mathfrak{Bi} = 30$; rapport de densité 3.

et les zones blanches sont les zones où $|\mathbf{D}\mathbf{u}| \geq 10^2$. À nombre de Reynolds et à nombre de Atwood égaux, l'écoulement est un peu moins rapide dans le cas viscoplastique, c'est-à-dire qu'à un temps donné, l'amplitude de la vague est toujours faible dans le cas viscoplastique. On observe aussi qu'il y a moins de structures fines que dans le cas newtonien.

La figure 5.6 montre l'évolution de l'interface à gauche et le taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ à droite, pour un nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 30$, aux temps $t_{\text{Tryg}} = 2, 3, 3.75, 4.25, 4.75$ et 5.5 . On utilise la même échelle que dans la figure 5.5 pour le champ du taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$. On observe que l'écoulement est plus lent que dans le cas $\mathfrak{Bi} = 10$, et également qu'il y a moins de structures fines que dans le cas $\mathfrak{Bi} = 10$.

Position des vortex. La figure 5.7 montre l'évolution de la position la plus haute de l'interface en rouge et de la position la plus basse de l'interface en bleu en fonction du temps, pour les nombres de Bingham $\mathfrak{Bi} = 0$ (lignes pointillées), $\mathfrak{Bi} = 10$, $\mathfrak{Bi} = 30$, et $\mathfrak{Bi} = 50$. L'intervalle de temps est $[0; 4]$ dans l'échelle de Tryggvason, ce qui correspond environ à $[0; 5.66]$ dans notre échelle. On observe que plus le nombre de Bingham est élevé et plus l'écoulement est lent. Pour $\mathfrak{Bi} = 50$, l'écoulement reste complètement figé.

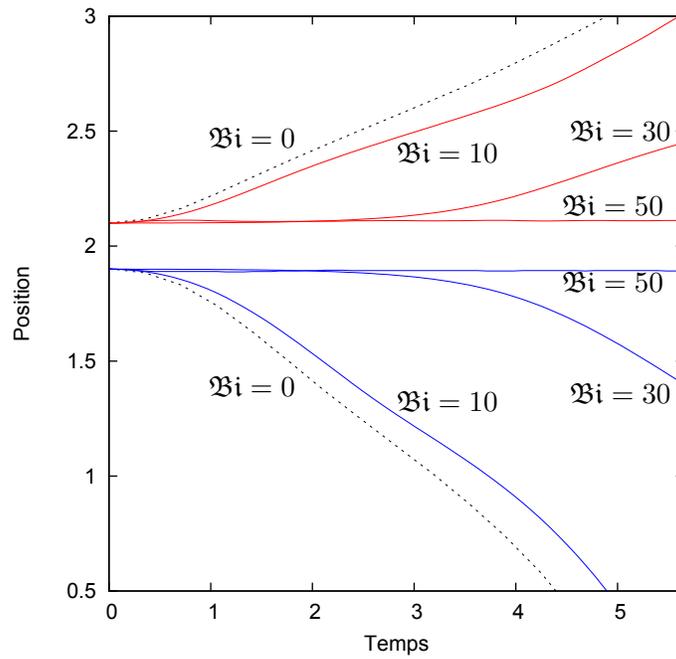


FIGURE 5.7 – Position la plus haute de l'interface (rouge) et position la plus basse de l'interface (bleu) en fonction du temps. Le temps final est $T_{\text{Tryg}} = 4$; $\mathfrak{Re} = 3000$; rapport de densité 3; valeurs de \mathfrak{Bi} indiquées.

5.3.2 Mélange d'un fluide viscoplastique dans un fluide newtonien

Nous allons maintenant réaliser des simulations dans le cas où seul le fluide le plus lourd est viscoplastique, *i.e.* $\alpha_{\min} = 0$ et $\alpha_{\max} = 1$. Nous considérerons d'une part le cas où le rapport de densité est 3 (faible nombre de Atwood) et d'autre part le cas où le rapport de densité est de 7 (grand nombre de Atwood). Le seuil de plasticité, qui est maintenant variable, est calculé en utilisant la dernière équation de (4.21), avec $\epsilon = \frac{3}{2}h_x$.

Faible nombre de Atwood

Position de l'interface et des zones rigides. On commence par le cas du rapport de densité 3, de sorte que $A_t = 0.5$. La position initiale de l'interface est dans ce cas-là donnée par (5.3).

La figure 5.8 montre l'évolution de l'interface (gauche) et le taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ dans la phase viscoplastique (droite), pour un nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 10$, aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.5, 1.75, 2, 2.25$ et 2.5 . On observe que l'écoulement est un peu plus rapide que dans le cas où les deux phases sont viscoplastiques (Figure 5.5), tout en restant plus lent que dans le cas complètement newtonien (Figure 5.2). On observe aussi la présence de structures plus fines que dans la cas où les deux phases sont viscoplastiques.

On observe toujours la même tendance pour les cas $\mathfrak{Bi} = 50$ (figure 5.9) et $\mathfrak{Bi} = 75$ (figure 5.10) : l'écoulement est plus lent quand le nombre de Bingham augmente. On observe aussi que le fluide le moins dense a plus de difficulté à pénétrer le fluide le plus dense : à partir de $\mathfrak{Bi} = 50$, une zone plastique se forme sur la partie la plus à droite de l'interface. Cette zone plastique force le fluide le moins dense à pénétrer le fluide le plus dense en dehors de cette zone, et ainsi, on observe que la position la plus haute de l'interface n'est plus située sur le bord droit comme précédemment mais plus au centre du domaine.

Position des vortex. La figure 5.11 montre l'évolution de la position la plus haute de l'interface (rouge) et de la position la plus basse (bleu) en fonction du temps. De haut en bas, les courbes rouges correspondent aux valeurs $\mathfrak{Bi} = 1, \mathfrak{Bi} = 10, \mathfrak{Bi} = 30, \mathfrak{Bi} = 75$ et $\mathfrak{Bi} = 100$, et inversement pour les courbes bleues. Comme dans le cas complètement viscoplastique (figure 5.7), on observe que plus le nombre de Bingham est élevé, plus l'écoulement est lent. Pour $\mathfrak{Bi} = 100$, l'écoulement reste complètement figé. Ainsi, le nombre de Bingham à partir duquel l'écoulement reste figé est plus élevé dans le cas mixte que dans le cas où les deux fluides sont viscoplastiques.

Grand nombre de Atwood

Position de l'interface et des zones rigides. On se place maintenant dans le cas du rapport de densité 7, de sorte que $A_t = 0.75$. La position initiale de l'interface est

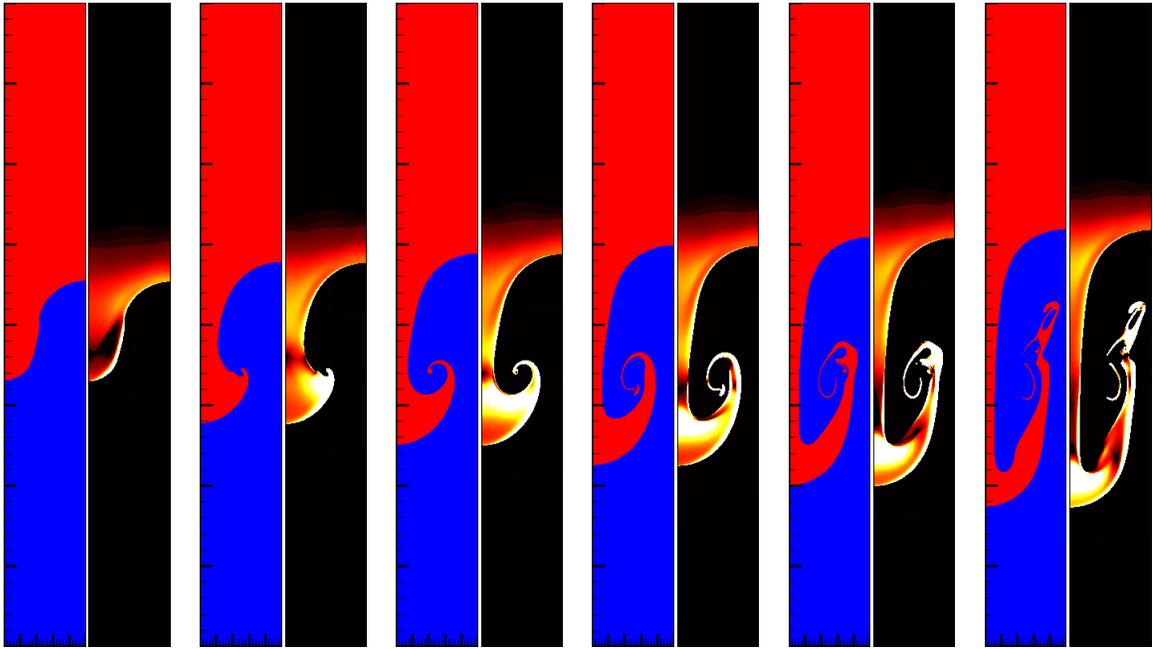


FIGURE 5.8 – Suivi de l'interface $\phi = 0$ à gauche (le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge) et du taux de déformation $|\mathbf{D}u|$ à droite (uniquement dans la zone occupée par le fluide viscoplastique), aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.5, 1.75, 2, 2.25$ et 2.5 . $\mathfrak{Re} = 3000$; $\mathfrak{Bi} = 10$; $\alpha_{\min} = 0$; $\alpha_{\max} = 1$; rapport de densité 3.

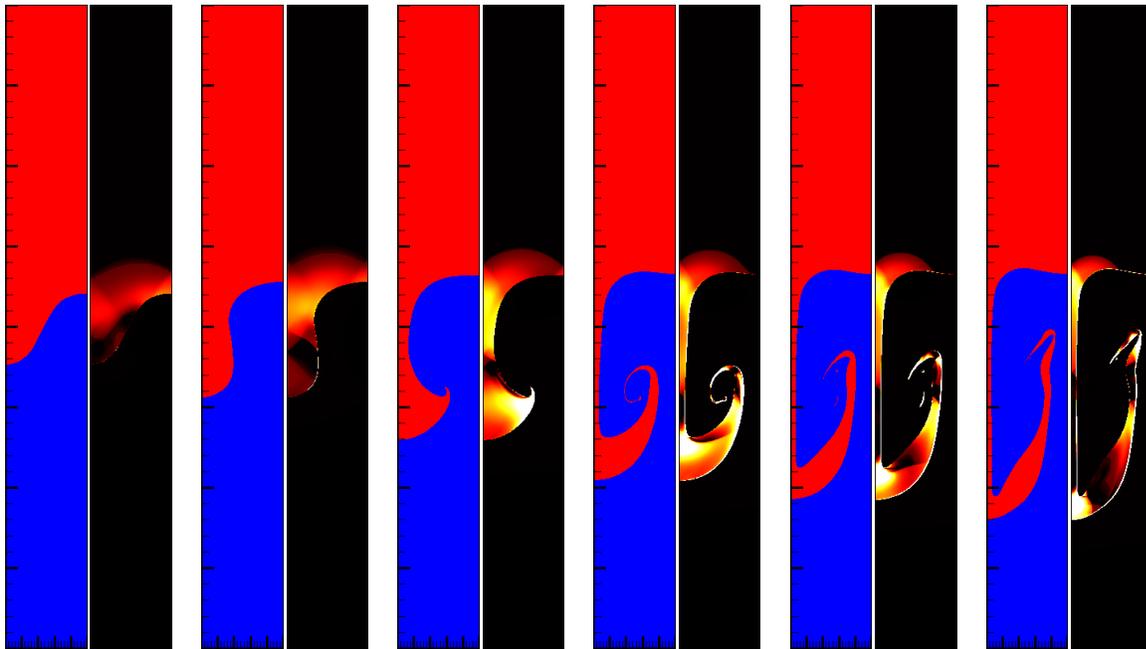


FIGURE 5.9 – Suivi de l'interface $\phi = 0$ à gauche (le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge) et du taux de déformation $|\mathbf{D}u|$ à droite (uniquement dans la zone occupée par le fluide viscoplastique), aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.75$ et 3 . $\mathfrak{Re} = 3000$; $\mathfrak{Bi} = 50$; $\alpha_{\min} = 0$; $\alpha_{\max} = 1$; rapport de densité 3 .

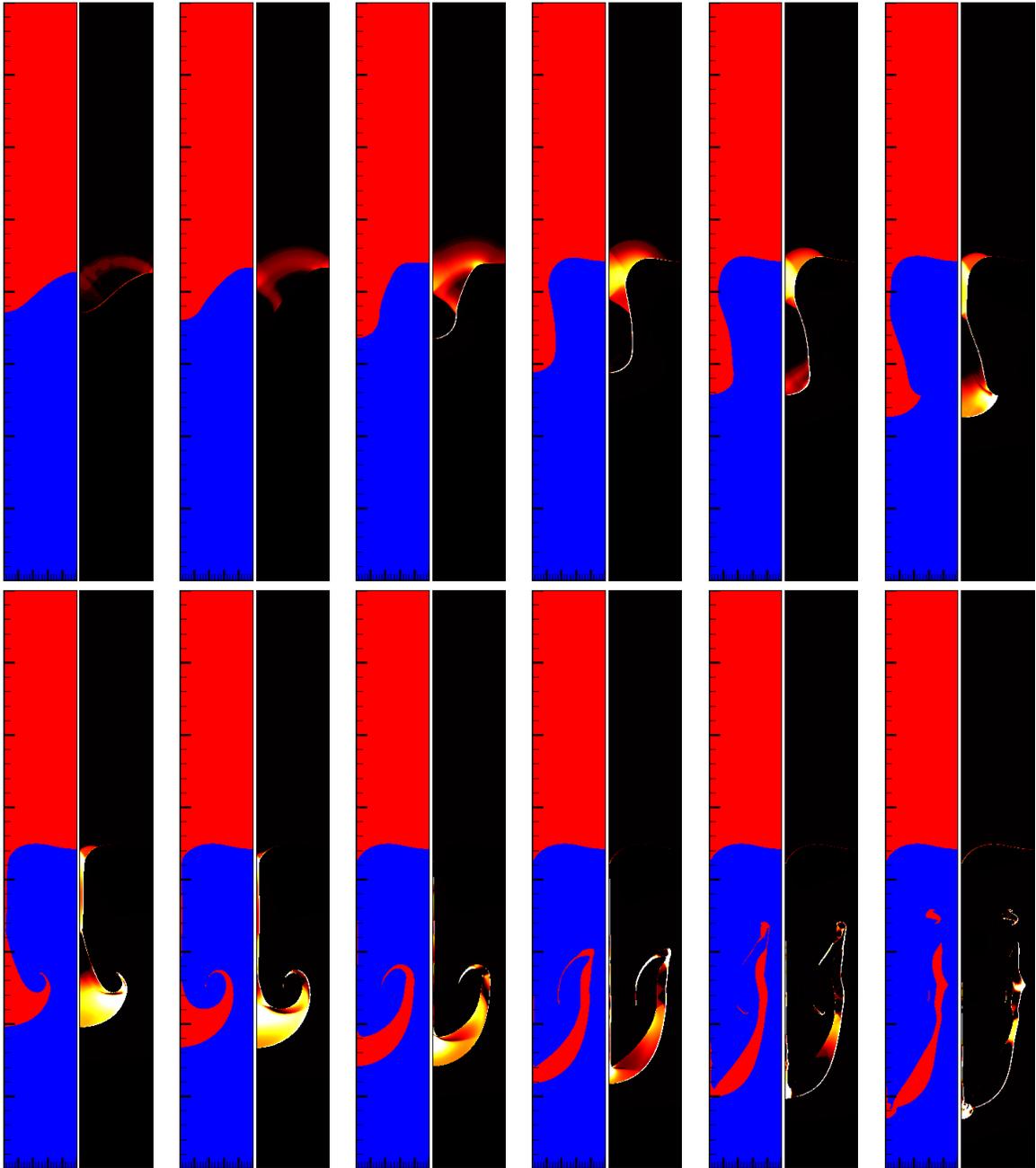


FIGURE 5.10 – Suivi de l'interface $\phi = 0$ à gauche (le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge) et du taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ à droite (uniquement dans la zone occupée par le fluide viscoplastique), aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.75, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4, 4.25$ et 4.5 . $\mathfrak{Re} = 3000$; $\mathfrak{Bi} = 75$; $\alpha_{\min} = 0$; $\alpha_{\max} = 1$; rapport de densité 3.

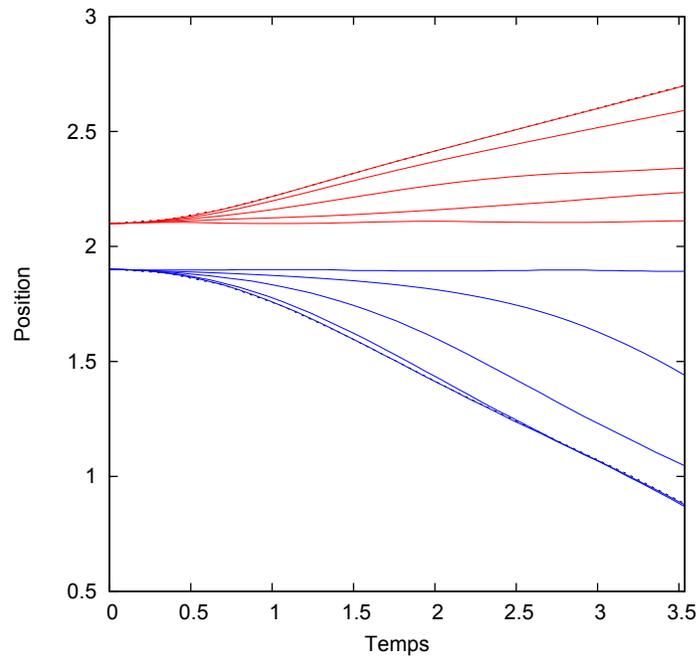


FIGURE 5.11 – Position la plus haute de l'interface (rouge) et position la plus basse de l'interface (bleu) en fonction du temps. Le temps final est $T_{\text{Tryg}} = 2.5$; $\mathfrak{Re} = 3000$; rapport de densité 3; De haut en bas, les courbes rouges correspondent aux valeurs $\mathfrak{Bi} = 1$, $\mathfrak{Bi} = 10$, $\mathfrak{Bi} = 30$, $\mathfrak{Bi} = 75$ et $\mathfrak{Bi} = 100$, et inversement pour les courbes bleues. Les lignes pointillées correspondent au cas $\mathfrak{Bi} = 0$.

dans ce cas-là donnée par (5.4). La figure 5.12 montre l'évolution de l'interface (gauche) et du taux de déformation $|\mathbf{Du}|$ dans la phase viscoplastique (droite), pour un nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 50$, aux temps $t = 2, 2.4, 2.8, 3, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 4$ et 4.2 , dans l'échelle de temps adimensionnée. Le comportement global de l'écoulement est comparable au cas $A_t = 0.5$: la phase la plus dense commence par pénétrer la phase la moins dense en formant une digitation, qui à partir de $t = 3.2$ va s'enrouler sur lui-même. Les zones rigides sont par contre significativement plus petites que dans le cas $A_t = 0.5$. La figure 5.13 montre l'évolution de l'interface (gauche) et du taux de déformation $|\mathbf{Du}|$ dans la phase viscoplastique (droite), pour un nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 100$, aux temps $t = 3, 3.4, 3.8, 4.2, 4.6, 5, 5.2, 5.4, 5.8$ et 6.2 , dans l'échelle de temps adimensionnée.

Position des vortex. La figure 5.14 montre l'évolution de la position la plus haute de l'interface (rouge) et de la position la plus basse (bleu) en fonction du temps, pour des nombres de Bingham $\mathfrak{Bi} = 0$ (lignes pointillées), $\mathfrak{Bi} = 10$, $\mathfrak{Bi} = 50$, $\mathfrak{Bi} = 100$ et $\mathfrak{Bi} = 200$. En comparant cette figure à celle réalisée dans la même configuration mais avec un rapport de densité 3, on observe toujours la présence d'un nombre de Bingham au-delà duquel l'écoulement reste figé mais il est cette fois-ci plus élevé.

Influence de certains paramètres numériques sur le calcul des zones rigides

Dans la dernière section de ce chapitre, on s'intéresse à la précision du calcul des zones rigides lorsque l'on raffine certains paramètres numériques. Dans toute cette section, on se place dans la même configuration que celle de la figure 5.9 pour les paramètres physiques, *i.e.* $\mathfrak{Re} = 3000$, $\mathfrak{Bi} = 50$, $\alpha_{\max} = 1$, $\alpha_{\min} = 0$ et rapport de densité 3. Nous avons observé que lorsque l'ordre de grandeur de la fourchette dans laquelle on affiche les valeurs de $|\mathbf{Du}|$ est trop grande par rapport à l'ordre de grandeur du paramètre numérique Tol (défini par l'équation (4.27), qui est le seuil de tolérance que l'on accepte dans l'algorithme de point fixe pour la résolution du système (2.8)-(2.9)), les zones rigides sont moins bien calculées. Pour rappel, dans les simulations précédentes de ce chapitre, on a affiché des valeurs de $|\mathbf{Du}|$ entre 10^{-3} et 10^2 , ce qui correspond à un écart relatif de 10^5 . La figure 5.15 montre l'évolution de $|\mathbf{Du}|$ aux temps $t_{\text{Tryg}} = 1, 1.25, 1.5, 1.75$ et 2 , avec une échelle différente : les zones noires correspondent à des valeurs de $|\mathbf{Du}|$ inférieures à 10^{-5} , tandis que les zones blanches correspondent à des valeurs de $|\mathbf{Du}|$ supérieures à 10^2 . Cette nouvelle échelle permet de mettre en évidence la présence de stries dans certaines zones où $|\mathbf{Du}| \leq 10^{-5}$, synonyme d'un manque de précision dans le calcul de ces zones.

Dans la figure 5.16, nous avons gardé la même échelle pour les valeurs de $|\mathbf{Du}|$, mais cette fois ci en ce focalisant sur l'instant $T_{\text{Tryg}} = 1$, et sur le sous-domaine $(0, 0.5) \times (-0.5, 0.5)$. Les images de gauche correspondent à un paramètre $Tol = 10^{-4}$ tandis que les images de droite correspondent à un paramètre $Tol = 10^{-5}$, et la première ligne correspond à une grille de 256×2048 points tandis que la seconde ligne correspond à une grille de 512×4096 points. Le raffinement du maillage, ainsi que le choix d'un paramètre Tol plus petit accroissent tous

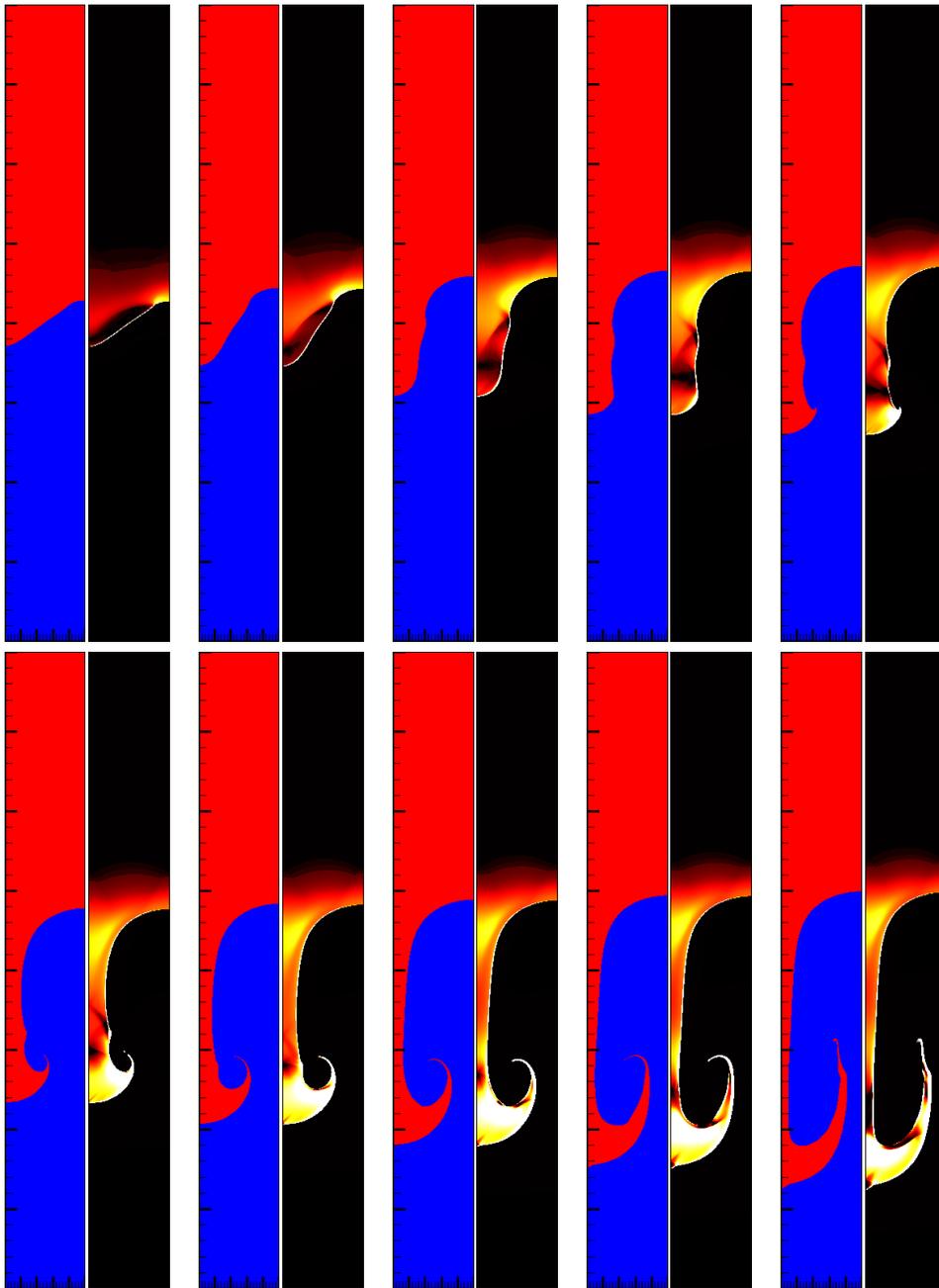


FIGURE 5.12 – Suivi de l'interface $\phi = 0$ à gauche (le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge) et du taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ à droite (uniquement dans la zone occupée par le fluide viscoplastique), aux temps $t = 2, 2.4, 2.8, 3, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 4$ et 4.2 . $\mathfrak{Re} = 3000$; $\mathfrak{Bi} = 50$; $\alpha_{\min} = 0$; $\alpha_{\max} = 1$; rapport de densité 7.

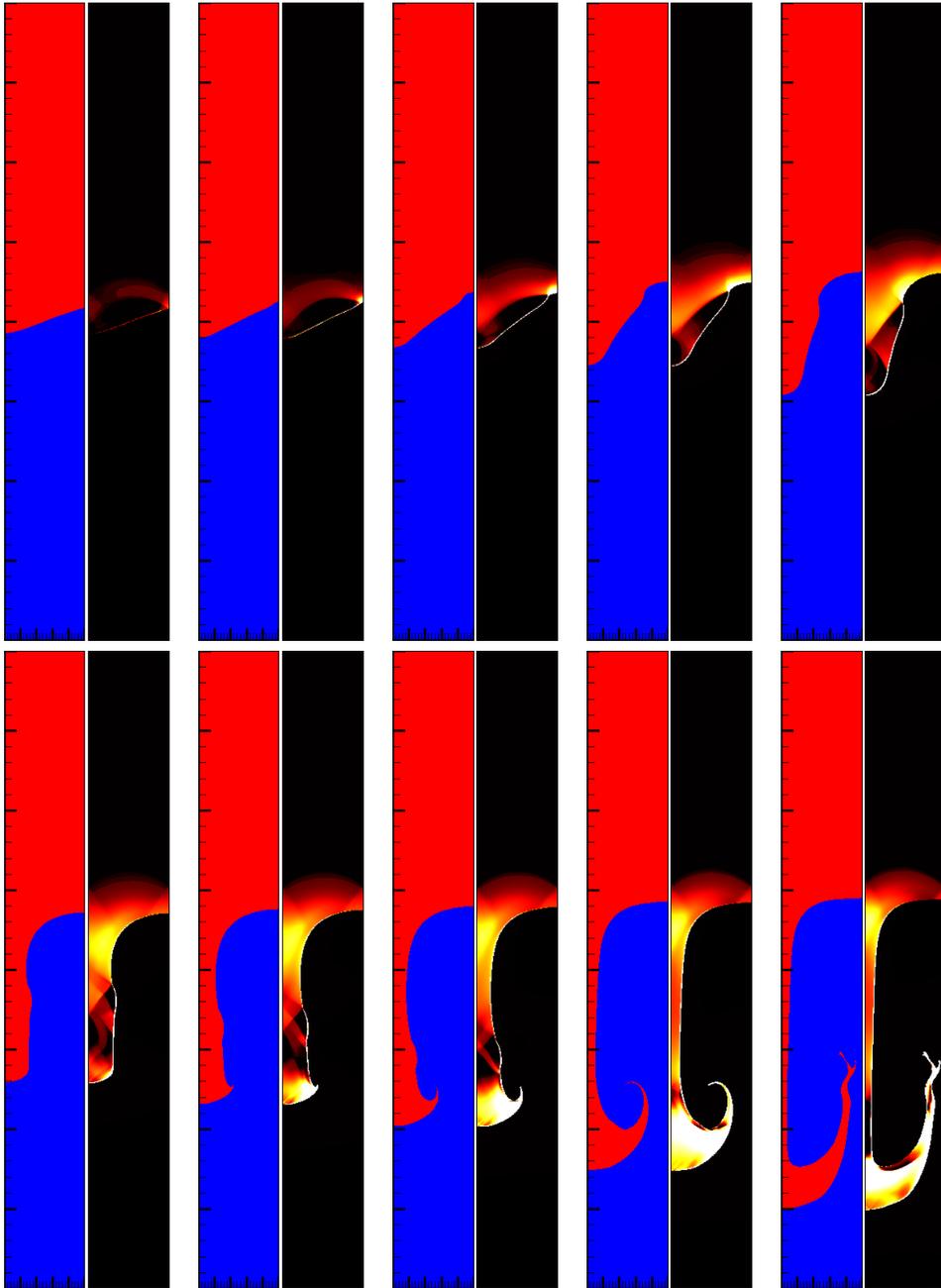


FIGURE 5.13 – Suivi de l'interface $\phi = 0$ à gauche (le fluide le plus lourd correspond à la zone rouge) et du taux de déformation $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ à droite (uniquement dans la zone occupée par le fluide viscoplastique), aux temps $t = 3, 3.4, 3.8, 4.2, 4.6, 5, 5.2, 5.4, 5.8$ et 6.2 . $\Re\epsilon = 3000$; $\mathfrak{B}i = 100$; $\alpha_{\min} = 0$; $\alpha_{\max} = 1$; rapport de densité 7.

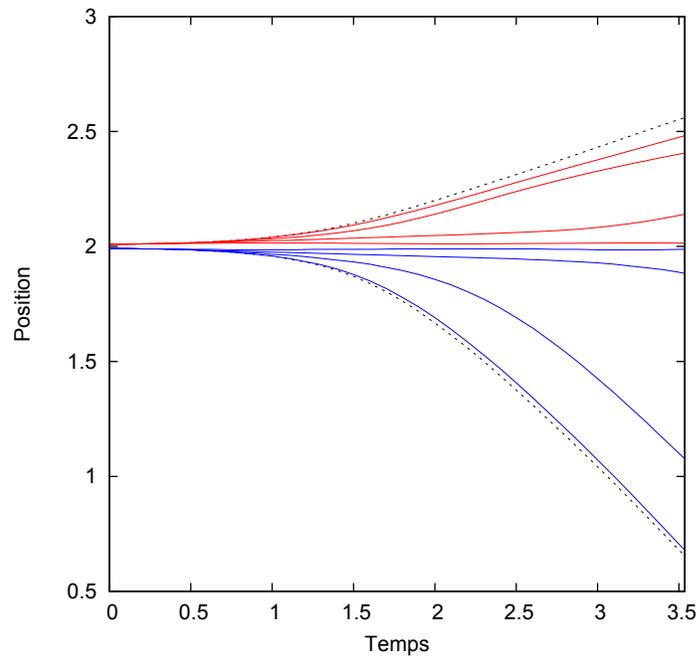


FIGURE 5.14 – Position la plus haute de l'interface (rouge) et position la plus basse de l'interface (bleu) en fonction du temps. Le temps final est $T = 4$; $\mathfrak{Re} = 3000$; rapport de densité 7; De haut en bas, les courbes rouges correspondent aux valeurs $\mathfrak{B}_i = 10$, $\mathfrak{B}_i = 50$, $\mathfrak{B}_i = 100$ et $\mathfrak{B}_i = 200$, et inversement pour les courbes bleues. Les lignes pointillées correspondent au cas $\mathfrak{B}_i = 0$.

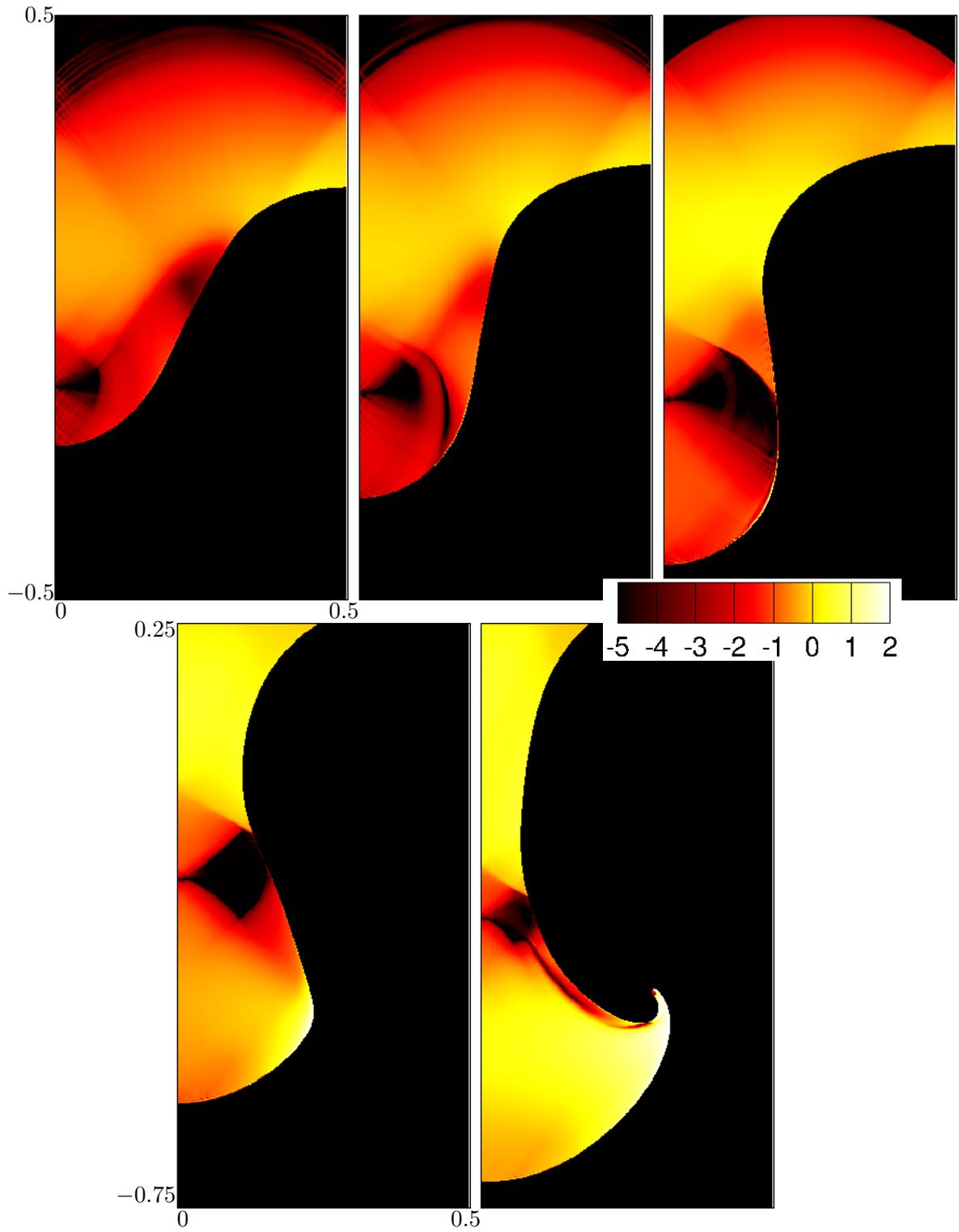


FIGURE 5.15 – Evolution de $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ (dans la phase viscoplastique) aux temps $t_{\text{Tryg}}=1; 1.25; 1.5; 1.75$ et 2 . Bi50, Dr3, Re3000.

les deux la précision du calcul des zones rigides.

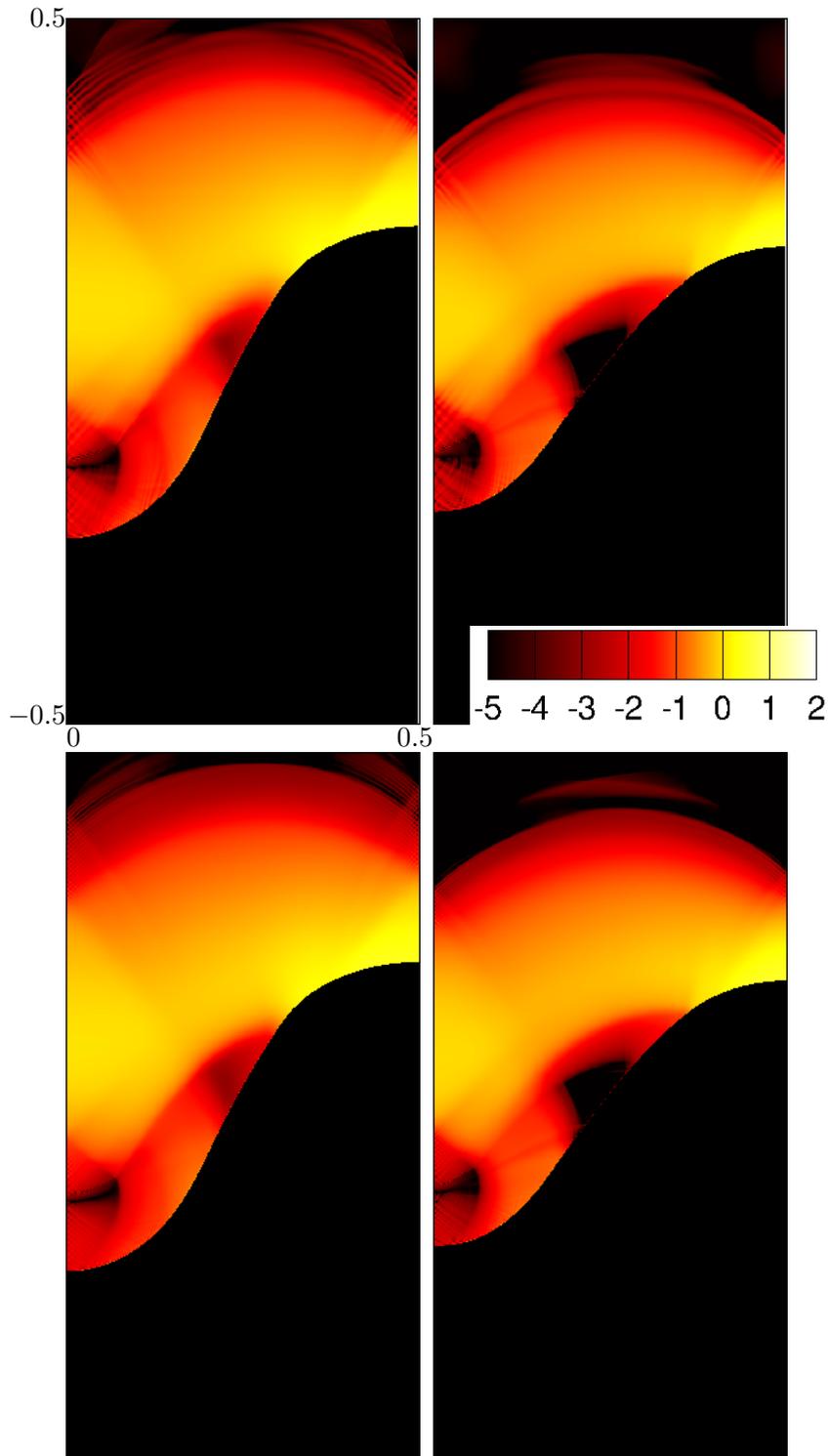


FIGURE 5.16 – Valeurs de $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$ (dans la phase viscoplastique) au temps $t_{\text{Tryg}} = 1$. Tol=1e-04 (gauche), Tol=1e-05 (droite), grille de 256×2048 points (première ligne), grille de 512×4096 points (deuxième ligne). Bi50, Dr3, Re3000.

Chapitre 6

Rupture de barrage

On se place maintenant dans la deuxième configuration que nous considérons : la rupture de barrage. Pour se fixer les idées, on peut imaginer une colonne d'un fluide dense, plongée dans un fluide ambiant moins dense, et maintenu par une porte virtuelle qui est ôtée instantanément au temps $t = 0$. On observe alors l'écroulement de la colonne formée du fluide plus dense dans le fluide le moins dense sous l'effet de la gravité.

6.1 Configuration de l'écoulement et adimensionnement des équations

Configuration de l'écoulement. On considère un domaine rectangulaire

$$\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y),$$

et une colonne de ratio unitaire (longueur sur largeur), placée à l'origine du domaine. On notera ρ_{\max} , μ_{\max} , α_{\max} , c_{f_2} et $c_{s_{\max}}$ la densité, la viscosité, le seuil de plasticité, le coefficient de friction et le seuil de glissement du fluide le plus lourd, respectivement ρ_{\min} , μ_{\min} , α_{\min} , c_{f_1} et $c_{s_{\min}}$ la densité, la viscosité, le seuil de plasticité, le coefficient de friction et le seuil de glissement du fluide le moins lourd. Dans tout ce chapitre, seul le fluide le plus lourd pourra être viscoplastique, de sorte que l'on aura toujours $\alpha_{\min} = c_{s_{\min}} = 0$.

On impose des conditions de symétrie sur les parois verticales, une condition de Dirichlet homogène en haut et soit une condition de Dirichlet homogène, soit une condition de glissement à seuil sur le sol $\Gamma_\omega = (0, L_x) \times \{0\}$. Dans tout ce chapitre, nous utiliserons la fonction Level Set ϕ pour suivre l'interface. Comme précédemment, elle est initialisée en définissant $\phi(t = 0)$ comme la distance signée à l'interface. Les coefficients variables ρ , μ , α , c_f et c_s sont calculés à partir de la fonction Level Set en utilisant les relations (4.21)-(4.22), avec $\epsilon = \frac{3}{2} \min(h_x, h_y)$. La configuration initiale est schématisée en figure 6.1.

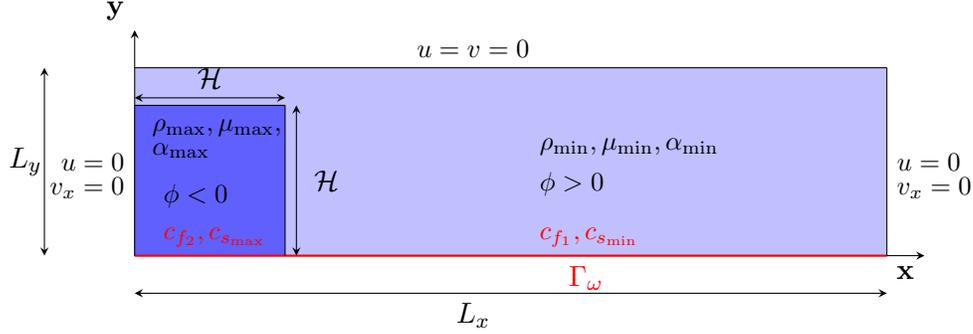


FIGURE 6.1 – Schéma de la configuration initiale de rupture de barrage

Adaptation des schémas proche du sol $\Gamma_\omega = (0, L_x) \times \{0\}$. En utilisant les schémas numériques tels que nous les avons énoncés dans le chapitre 4 pour le calcul de la fonction Level Set (schéma WENO5), pour sa réinitialisation (schéma ENO2) et pour le calcul des valeurs fantômes par extrapolation lorsque le stencil des formules sort du domaine Ω , nous avons observé l'apparition d'artefacts numériques, avec notamment l'apparition de "bulles" constituées du fluide le moins dense sous le fluide le plus dense, qui modifient complètement le comportement de l'écoulement.

Pour atténuer ces artefacts, nous faisons en sorte de ne pas avoir à extrapoler les valeurs de la fonction Level Set ϕ au-delà de Γ_ω , d'une part en réduisant l'ordre des schémas numériques lorsque l'on se rapproche de Γ_ω et d'autre part en utilisant des formules de dérivation décentrées vers l'intérieur du domaine lorsque l'on se rapproche de Γ_ω .

adimensionnement des équations. Afin d'écrire le système (1.16) sous forme adimensionnée, on utilise la longueur caractéristique \mathcal{H} et les paramètres physiques du fluide le plus lourd comme quantité de référence : ρ_{\max} , μ_{\max} , α_{\max} , c_{f_2} et $c_{s_{\max}}$. On utilise une vitesse caractéristique $\mathcal{V} = \rho_{\max} g \mathcal{H}^2 / \mu_{\max}$ de sorte qu'un temps caractéristique naturel est donné par \mathcal{H}/\mathcal{V} et une pression caractéristique est donnée par $\rho_{\max} g \mathcal{H}$ (où on a noté $g = |\mathbf{g}|$ la norme du vecteur accélération de pesanteur). Notons que l'adimensionnement que l'on a effectué ici est différent de celui effectué dans le chapitre 5 (nous avons choisi une vitesse caractéristique différente), dans le but de comparer nos simulations à celles de [56]. En toute généralité, lorsque la vitesse caractéristique ne dépend pas des autres paramètres, un autre nombre sans dimension intervient devant le gradient de pression et devant les forces extérieures : le nombre de Froude. Le choix du chapitre 5 revient au cas particulier où le nombre de Froude vaut 1, tandis que le choix de ce chapitre revient au cas particulier où le nombre de Froude est égal au nombre de Reynolds. En redimensionnant les variables avec ces quantités de référence, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

alors

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \frac{1}{\Re} \operatorname{div}(2\mu \mathbf{D}\mathbf{u}) + \frac{1}{\Re} \nabla p = \frac{\mathfrak{Bi}}{\Re} \operatorname{div}(\alpha \Sigma) - \frac{1}{\Re} \rho \mathbf{e}_2, \quad (6.1)$$

avec

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}), \quad (6.2)$$

où les nombres de Reynolds et Bingham sont définis par

$$\Re = \frac{\rho_{\max} \mathcal{V} \mathcal{H}}{\mu_{\max}} \quad \text{and} \quad \mathfrak{Bi} = \frac{\alpha_{\max} \mathcal{H}}{\mu_{\max} \mathcal{V}}.$$

La condition de glissement à seuil s'écrit en forme adimensionnée

$$(2\mu \mathbf{D}\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathfrak{Bi} \alpha \Sigma \mathbf{n})_{\mathbf{t}} = -\mathfrak{C}_f c_f \mathbf{u}_{\mathbf{t}} - \mathfrak{C}_s c_s \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.3)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}_\mathcal{B}(\boldsymbol{\sigma} + r \mathbf{u}_{\mathbf{t}}), \quad (6.4)$$

où les nombres sans dimension \mathfrak{C}_f et \mathfrak{C}_s sont respectivement définis par

$$\mathfrak{C}_f = \frac{c_{f2} \mathcal{H}}{\mu_{\max}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}_s = \frac{c_{s\max} \mathcal{H}}{\mu_{\max} \mathcal{V}}.$$

En conclusion, le système adimensionné s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \rho(\phi) (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \frac{1}{\Re} \operatorname{div}(2\mu(\phi) \mathbf{D}\mathbf{u}) \\ \quad + \frac{1}{\Re} \nabla p = \frac{\mathfrak{Bi}}{\Re} \operatorname{div}(\alpha(\phi) \Sigma) - \frac{1}{\Re} \rho \mathbf{e}_2, \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \Sigma = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}), \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times \Gamma_\omega, \\ (2\mu(\phi) \mathbf{D}\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathfrak{Bi} \alpha(\phi) \Sigma \mathbf{n})_{\mathbf{t}} = -\mathfrak{C}_f c_f(\phi) \mathbf{u}_{\mathbf{t}} - \mathfrak{C}_s c_s(\phi) \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{dans } (0, T) \times \Gamma_\omega, \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}_\mathcal{B}(\boldsymbol{\sigma} + r \mathbf{u}_{\mathbf{t}}), \quad \text{dans } (0, T) \times \Gamma_\omega. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Les paramètres adimensionnés que l'on fera varier au cours des simulations sont le nombre de Bingham et, dans les cas des conditions de glissement à seuil, le coefficient de friction et le seuil de glissement. Dans toute la suite, on fixe :

$$L_x = 5\mathcal{H}, \quad L_y = 1.25\mathcal{H}, \quad \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} = \Re = 10^{-3}.$$

6.2 Approche asymptotique

Dans la configuration que nous avons choisie, l'écoulement est peu profond : notant $h(x, t)$ la hauteur de l'écoulement, on a $|\partial h/\partial x| \ll 1$. La théorie asymptotique fournit donc une approche complémentaire au problème (lorsque $\mathfrak{Bi} \ll 1$) et à laquelle nous comparerons nos simulations. Dans [5] et [6], des simulations d'écoulement viscoplastiques ont été réalisées via cette approche. Nous allons dans cette section présenter succinctement la dérivation du modèle asymptotique en nous basant sur la littérature existante [55], [7].

Obtention des équations. Lorsque l'écoulement est peu profond, la pression devient principalement hydrostatique et la contrainte de cisaillement domine. On a alors

$$p = h - z \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_3 = -\partial_x h (h - z),$$

où $z = h(x, t)$ est la position de la surface libre et \mathcal{T}_3 désigne la composante anti-diagonale du tenseur des contraintes viscoplastiques (1.5). La vitesse est alors donnée par

$$u = -\frac{1}{2} \partial_x h \times \begin{cases} (2Y - z)z, & \text{si } 0 \leq z \leq Y \\ Y^2, & \text{si } Y \leq z \leq h, \end{cases}$$

où $z \leq Y$ est la zone où l'approximation de premier ordre de la contrainte de cisaillement devient inférieure à \mathfrak{Bi} , et où on a noté $Y = h + \frac{\mathfrak{Bi}}{\partial_x h}$ (avec $\partial_x h < 0$). En moyennant l'équation de conservation de la masse sur la hauteur et sous l'hypothèse $\mathfrak{Bi} \ll 1$, on obtient l'équation de couche mince suivante pour la hauteur de l'écoulement :

$$\partial_t h = \frac{1}{6} \partial_x \left((3h - Y) Y^2 \partial_x h \right), \quad (6.6)$$

où Y est reformulé $Y = \max \left(h + \frac{\mathfrak{Bi}}{\partial_x h}, 0 \right)$, afin que le modèle soit correctement défini lorsque $Y < 0$, zones où la contrainte est trop faible pour que le fluide se déforme.

Discrétisation du modèle. Dans notre configuration de rupture de barrage, on obtient suivant le paragraphe précédent que la hauteur h de l'écoulement satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h = \frac{1}{6} \partial_x \left((3h - Y) Y^2 \partial_x h \right), & \text{dans } (0, T) \times (0, L_x) \\ h(t = 0) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x), \\ \partial_x h(x = 0) = 0, \quad \text{et} \quad h(x = L_x) = 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

avec $Y = \max \left(h + \frac{\mathfrak{Bi}}{\partial_x h}, 0 \right)$. On utilise un schéma de type Euler explicite pour la discrétisation en temps et un schéma de type volume fini d'ordre 2 sur grilles décalées pour la

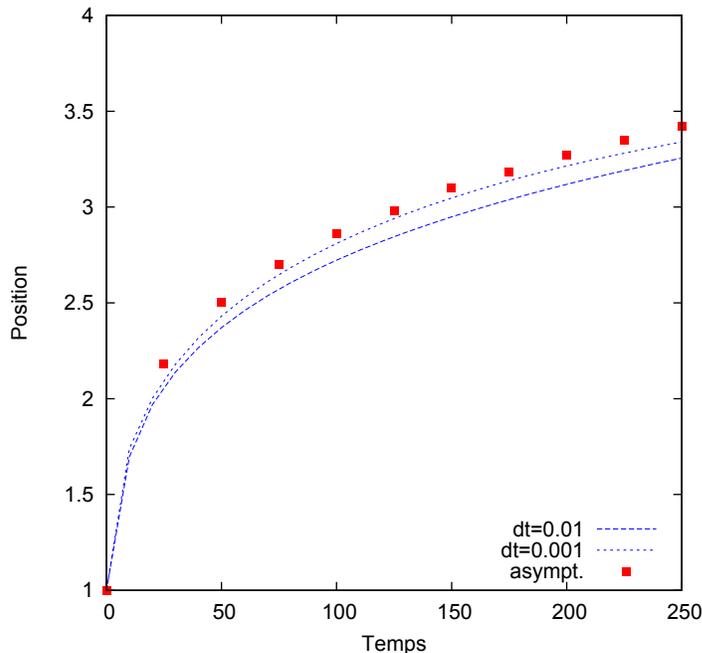


FIGURE 6.2 – Suivi de la position du front sur l’intervalle de temps $[0, 250]$ pour les pas de temps $\delta t = 0.01$ et $\delta t = 0.001$. Grille 640×160 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 7.8 \times 10^{-3}$. Conditions au bord de type Dirichlet homogène. Asymptotique en rouge.

discrétisation en espace. Pour chacun des différents nombres de Bingham que l’on a été amené à utiliser, les simulations ont été réalisées avec un pas de temps $\delta t = 4 \times 10^{-5}$ et un pas d’espace $h_x = 5 \times 10^{-4}$.

6.3 Cas newtonien

On commence par réaliser les simulations dans le cas newtonien, *i.e.* avec le modèle (6.1) dans le cas particulier $\mathfrak{Bi} = \mathfrak{C}_s = 0$.

6.3.1 Position du front

La figure 6.2 montre l’évolution de la position du front de l’écoulement sur l’intervalle de temps $[0, 250]$ pour les pas de temps $\delta t = 0.01$ et $\delta t = 0.001$, avec des conditions au bord de type Dirichlet homogène. Nous avons utilisé une grille de 640×160 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 7.8 \times 10^{-3}$. Les carrés rouges représentent l’évolution de la position du front calculé à l’aide du modèle asymptotique (6.7). La figure 6.3 montre l’évolution de la position du front de l’écoulement sur l’intervalle de temps $[0, 250]$ sur des grilles

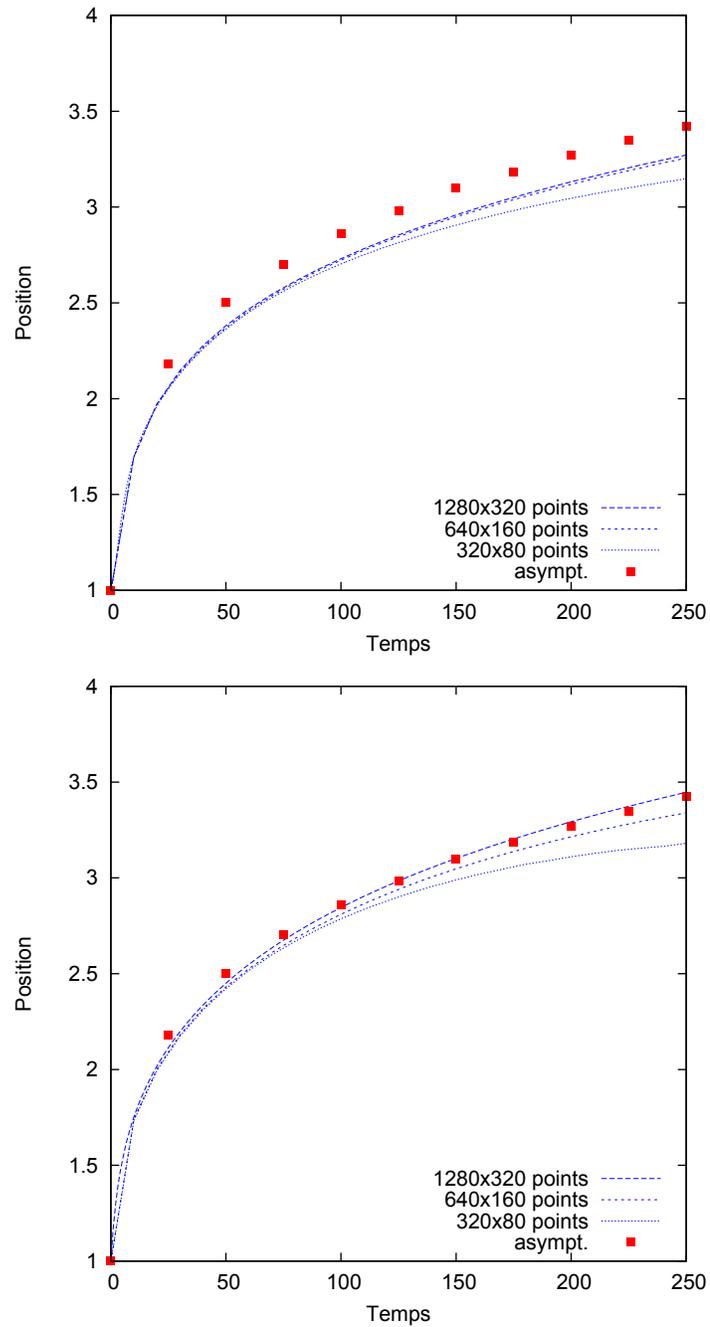


FIGURE 6.3 – Suivi de la position du front sur l'intervalle $[0, 250]$ pour les grilles 320×80 points, 640×160 points et 1280×320 points. Pas de temps $\delta t = 0.01$ (haut) et $\delta t = 0.001$ (bas). Conditions au bord de type Dirichlet homogène. Asymptotique en rouge.

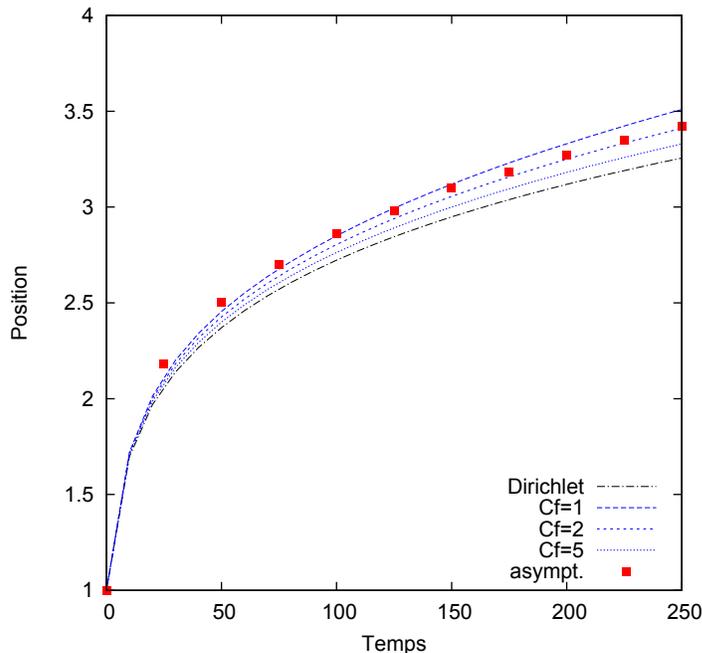


FIGURE 6.4 – Suivi de la position du front sur l'intervalle $[0, 250]$ pour des conditions de type Dirichlet homogène et Navier, avec $c_{f_2} = c_{f_1} = 1$ et $\mathfrak{C}_f = 1, 2$ et 5 . Pas de temps $\delta t = 0.01$. Grille 640×160 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 7.8 \times 10^{-3}$. Asymptotique en rouge.

de 320×80 points, 640×160 points et 1280×320 points, avec des conditions au bord de type Dirichlet homogène. Le pas de temps est $\delta t = 0.01$ en haut et $\delta t = 0.001$ en bas. Comme précédemment, les carrés rouges représentent l'évolution de la position du front calculé à l'aide du modèle asymptotique (6.7). La figure 6.4 montre l'évolution de la position du front de l'écoulement sur l'intervalle de temps $[0, 250]$ pour différents type de conditions au bord. Le pas de temps est $\delta t = 0.01$, nous avons utilisé une grille de 640×160 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 7.8 \times 10^{-3}$. Les carrés rouges sont obtenus par le modèle asymptotique (6.7). Pour les autres courbes, de haut en bas on a : conditions de type Navier avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = \mathfrak{C}_f c_{f_2} = 1$, conditions de type Navier avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = \mathfrak{C}_f c_{f_2} = 2$, conditions de type Navier avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = \mathfrak{C}_f c_{f_2} = 5$, et conditions de type Dirichlet homogène. Comme attendu, on observe que le comportement des conditions de type Navier se rapproche du comportement des conditions de Dirichlet homogène lorsque \mathfrak{C}_f augmente. On obtient la meilleure correspondance avec le modèle asymptotique pour les conditions de type Navier avec $\mathfrak{C}_f = 2$.

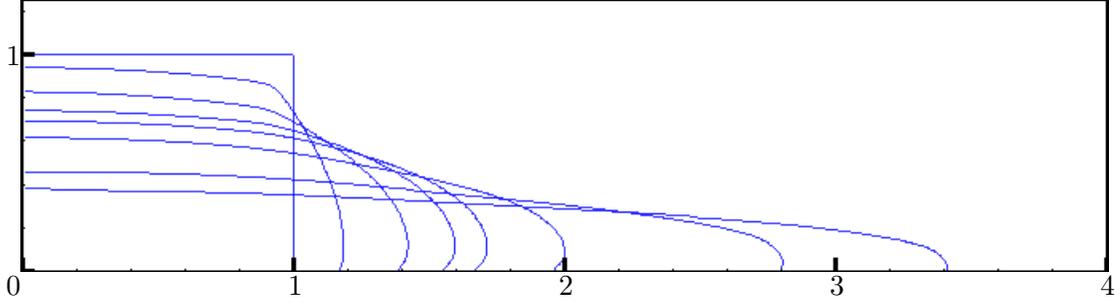


FIGURE 6.5 – Suivi de l'interface $\phi = 0$ aux temps $t = 0, 2.5, 5, 7.5, 10, 20, 100$ et 250 . Pas de temps $\delta t = 0.01$; grille 640×160 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 7.8 \times 10^{-3}$. Conditions au bord de type Navier avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = \mathfrak{C}_f c_{f_2} = 2$.

6.3.2 Profil de l'écoulement

On s'intéresse maintenant au profil global de l'écoulement. La figure 6.5 montre l'évolution de la position de l'interface aux temps $t = 0, 2.5, 5, 7.5, 10, 20, 100$ et 250 , avec des conditions au bord de Navier avec $\mathfrak{C}_f = 2$. Le pas de temps est $\delta t = 0.01$, et nous avons utilisé une grille de 640×160 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 7.8 \times 10^{-3}$.

6.4 Cas viscoplastique

On se place dans cette dernière section dans le cas où le fluide composant la colonne est viscoplastique, *i.e.* $\alpha_{\max} = 1$.

6.4.1 Position du front

Nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 0.01$. La figure 6.6 montre l'évolution de la position du front de l'écoulement sur l'intervalle de temps $[0, 100]$ pour des conditions au bord de type Dirichlet, de type glissement et de type glissement à seuil, avec $\mathfrak{Bi} = 0.01$. Pour les conditions type de glissement, on a choisi le même coefficient de friction dans les deux fluides : $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = \mathfrak{C}_f c_{f_2} = 2$. Pour les conditions type de glissement à seuil, on a choisi pour la courbe "Seuil¹" $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$ (ceci dans le but de tendre vers une condition de Dirichlet homogène sur la partie de la frontière Γ_ω en contact avec le fluide le moins lourd), $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 1$ (coefficient de friction sur la partie de Γ_ω en contact avec le fluide le plus lourd), $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.01$ (seuil de glissement sur la partie de Γ_ω en contact avec le fluide le plus lourd), $\mathfrak{C}_s c_{s_{\min}} = 0$ (seuil de glissement sur la partie de Γ_ω en contact avec le fluide le moins lourd). On a choisi pour la courbe "Seuil²" $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = \mathfrak{C}_f c_{f_2} = 2$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.001$ et $\mathfrak{C}_s c_{s_{\min}} = 0$. Le pas de temps est $\delta t = 0.01$, nous avons utilisé une grille de 640×160 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 7.8 \times 10^{-3}$. Les carrés rouges sont obtenus par le modèle asymptotique (6.7) et les ronds noirs représentent les résultats obtenus dans la même configuration par Balmforth et

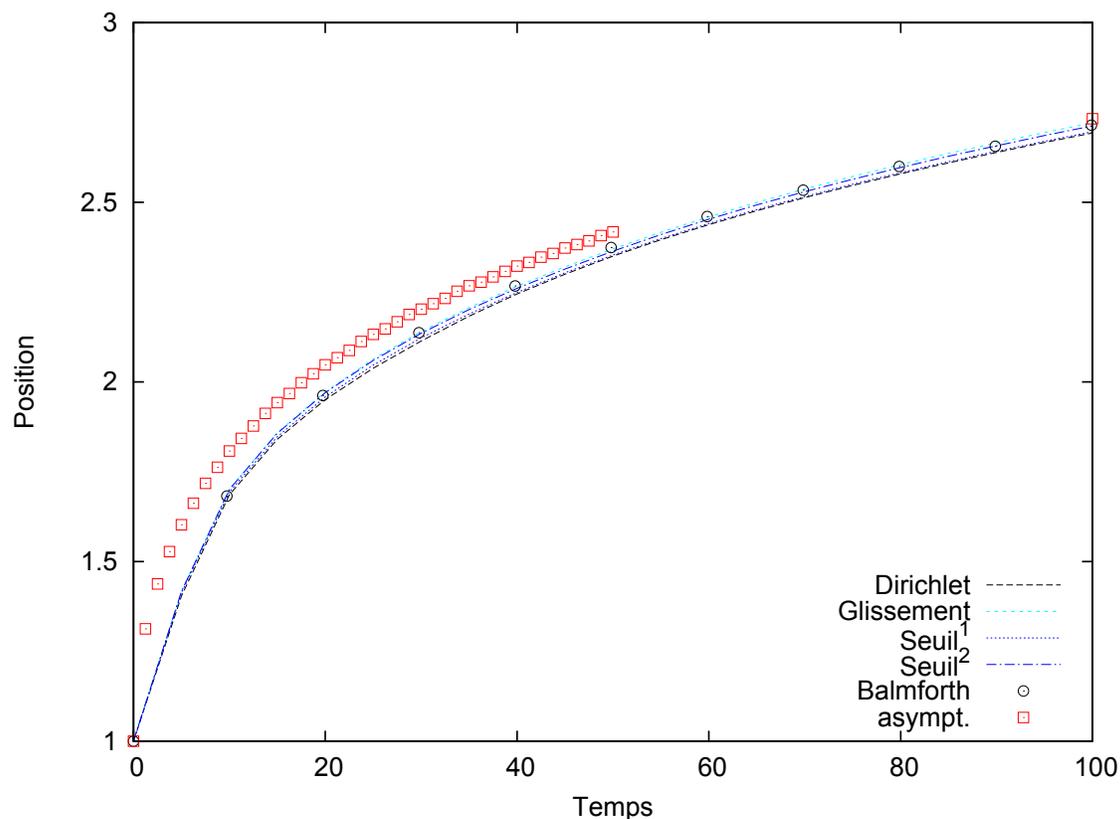


FIGURE 6.6 – Suivi de la position du front sur l'intervalle de temps $[0, 100]$ pour des conditions au bord de type Dirichlet homogène (courbe "Dirichlet"), pour des conditions au bord de type glissement avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = \mathfrak{C}_f c_{f_2} = 2$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = \mathfrak{C}_s c_{s_{\min}} = 0$ (courbe "Glissement"), pour des conditions au bord de type glissement à seuil avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$, $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 1$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.01$ (courbe "Seuil¹"), et $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = \mathfrak{C}_f c_{f_2} = 2$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.001$ (courbe "Seuil²"). Nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 0.01$; pas de temps $\delta t = 0.01$; grille 640×160 points. Asymptotique en rouge et résultats de [56] en noir.

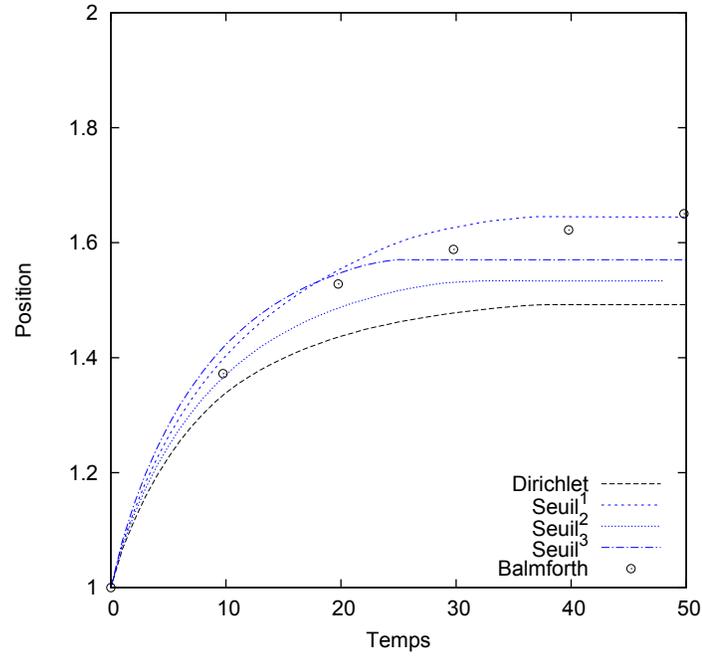


FIGURE 6.7 – Suivi de la position du front sur l'intervalle $[0, 50]$ pour des conditions au bord de type Dirichlet homogène (courbe "Dirichlet"), pour des conditions au bord de type glissement à seuil avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$, $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 10$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.01$ (courbe "Seuil¹"), avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$, $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 10$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.1$ (courbe "Seuil²"), et avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$, $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 1$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.1$ (courbe "Seuil³"). Nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 0.1$; pas de temps $\delta t = 0.0001$; grille 320×80 points. les cercles noirs désignent les résultats de [56], Figure 4.

al. [56], Figure 4. Nous observons que l'influence des conditions au bord dans la configuration de la figure 6.6 est moins marquée que pour la configuration de la figure 6.4. L'influence des paramètres des conditions au bord est conforme à ce à quoi nous nous attendons : le front avance le moins loin quand on prescrit des conditions de Dirichlet homogène (adhérence à la paroi) et le front avance le plus loin quand on prescrit des conditions de glissement pure. Le comportement des conditions de glissement à seuil se situe à l'intermédiaire entre les deux conditions précédentes, et le front avance plus loin lorsque le seuil de glissement est plus faible.

Nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 0.1$. La figure 6.7 montre l'évolution de la position du front de l'écoulement sur l'intervalle de temps $[0, 50]$ pour des conditions au bord de type Dirichlet et de type glissement à seuil, avec $\mathfrak{Bi} = 0.1$. Pour les conditions de glissement à seuil, on a choisi pour la courbe "Seuil¹" $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 10$ et $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$ (ceci dans le but de tendre vers une condition de Dirichlet homogène sur la partie de la frontière Γ_ω en contact avec le fluide le moins lourd) et $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.01$. On a choisi pour la courbe "Seuil²" $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$, $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 10$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.1$. On a choisi pour la courbe "Seuil³" $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$, $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 1$, $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.1$. Le pas de temps est $\delta t = 0.0001$ et nous avons utilisé une grille de 320×80 points, de sorte que $h_x = h_y \approx 1.6 \times 10^{-2}$. Nous observons que l'influence des conditions au bord dans la configuration de la figure 6.7 est plus marquée que pour la configuration de la figure 6.6, ce qui peut s'expliquer par le fait que l'on a choisi un maillage plus grossier dans la configuration de la figure 6.7. On observe d'une part que l'écoulement avance plus loin dans le cas des conditions de glissement à seuil que dans le cas des conditions de type Dirichlet, et que d'autre part l'écoulement s'arrête plus tôt dans le cas des conditions de glissement à seuil : on observe une cassure aux alentours de $t = 23$ pour la courbe "Seuil³", une cassure aux alentours de $t = 30$ pour la courbe "Seuil²" et une cassure aux alentours de $t = 36$ pour la courbe "Seuil¹". Ces deux phénomènes illustrent bien le comportement de glissement d'une part et d'adhérence à la paroi d'autre part induits respectivement le coefficient de friction et le seuil de plasticité. En se focalisant maintenant sur le comportement des simulations effectuées avec des conditions de glissement à seuil, on observe que l'écoulement s'arrête plus tôt pour la courbe "Seuil²" que pour la courbe "Seuil¹", ce qui s'explique par le plus fort seuil de glissement choisit pour la courbe "Seuil²" (10^{-1} contre 10^{-2}). D'autre part, on observe que le front avance moins loin pour la courbe "Seuil²" que pour la courbe "Seuil³", ce qui s'explique par le plus fort coefficient de friction choisi pour la courbe "Seuil²" (10 contre 1).

6.4.2 Profil de l'écoulement

La figure 6.8 montre l'évolution de la position de l'interface aux temps $t = 0, 10, 30, 50, 75, 100, 200$ et 400 , pour un nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 0.1$, avec des conditions au bord de type glissement à seuil où $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$, $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 1$ et $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.1$. Le pas de temps est $\delta t = 0.0001$, et nous avons utilisé une grille de 640×160 points. La différence majeure sur

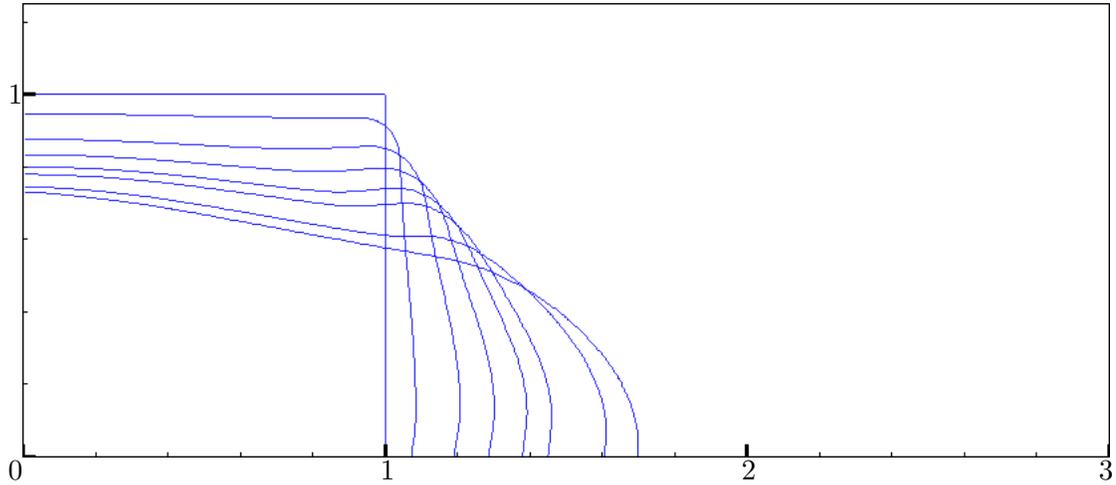


FIGURE 6.8 – Suivi de l'interface $\phi = 0$ aux temps $t = 0, 10, 30, 50, 75, 100, 200$ et 400 . Nombre de Bingham $\mathfrak{Bi} = 0.1$; pas de temps $\delta t = 0.0001$; grille 640×160 points. Conditions au bord de type glissement à seuil, avec $\mathfrak{C}_f c_{f_1} = 10^{16}$, $\mathfrak{C}_f c_{f_2} = 1$ et $\mathfrak{C}_s c_{s_{\max}} = 0.1$.

le profil de l'écoulement par rapport au cas newtonien est située sur la zone en haut à droite de la colonne : on observe un point d'inflexion sur le profil de l'écoulement, caractéristique d'un comportement viscoplastique.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Cette thèse est consacrée à la construction, l'analyse et la mise en oeuvre d'un schéma numérique pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, avec une rhéologie de Bingham et avec densité, viscosité et seuil de plasticité variables. Le modèle est complété par des conditions aux limites de type Dirichlet ou glissement à seuil.

Après avoir énoncé le modèle mathématique ainsi que quelques-unes de ses propriétés dans le chapitre 1, nous avons introduit le schéma numérique de semi-discrétisation en temps pour ce modèle dans le chapitre 2. Nous avons utilisé une méthode de type pas de temps fractionné pour découpler le calcul de la vitesse et de la pression dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, ainsi qu'une méthode de type Uzawa pour découpler le calcul de la vitesse et de la partie plastique du tenseur des contraintes dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement. Concernant la loi de Bingham, nous avons discrétisé la formulation en terme de projection de la partie plastique du tenseur des contraintes, ce qui nous a permis d'une part de surmonter la difficulté liée à la non différentiabilité de la loi et d'autre part d'avoir une même et unique formulation (implicite) de la partie plastique du tenseur des contraintes, que l'on se trouve dans une zone plastique ou non. Lors de la discrétisation de la formulation en terme de projection de la partie plastique du tenseur des contraintes, nous avons ajouté un terme de relaxation contrôlé par un paramètre numérique $\theta \in (0, 1)$ afin d'augmenter la vitesse de convergence de l'algorithme d'Uzawa. Après avoir observé la construction similaire de la loi rhéologique de Bingham et de la condition au bord de type glissement à seuil, nous avons utilisé une méthode analogue pour discrétiser cette dernière.

Dans le chapitre 3, nous avons analysé le schéma numérique de semi-discrétisation temporelle ainsi construit. Nous avons tout d'abord démontré un principe du maximum discret satisfait par la densité, lorsque la vitesse utilisée pour convecter la densité dans l'équation de conservation de la masse possède la régularité $\mathbf{H} \cap \mathbf{L}^3(\Omega)$. Cette propriété est fondamentale pour toute l'analyse du schéma que nous avons menée. Nous avons ensuite démontré la convergence de l'algorithme d'Uzawa introduit pour résoudre le couplage entre la vitesse et

la partie plastique du tenseur des contraintes. Cette convergence est géométrique de raison $(1 - \theta)$. Nous avons enfin démontré la stabilité et la convergence du schéma. Nous avons obtenu une estimation d'erreur de type $O(\delta t + \theta)$ – où δt est le pas de discrétisation en temps – c'est-à-dire une estimation d'erreur d'ordre 1 dans le cas où l'on choisit $\theta = \delta t$. Au vu de cette analyse, on choisira dans la pratique θ proche de 1 pour augmenter la rapidité de l'algorithme et θ proche de δt pour gagner en précision.

Dans le chapitre 4, nous avons présenté la discrétisation spatiale et l'implémentation de l'algorithme. Nous avons utilisé des schémas de type différences finies sur grilles décalées pour la discrétisation spatiale. Pour gérer la densité, la viscosité et le seuil de plasticité variable de l'écoulement, on se place dans le cas particulier d'un écoulement biphasique, qui sera le cadre dans lequel on effectuera les simulations numériques. On utilise une formulation Level Set pour suivre l'interface entre les deux phases, et on reconstruit les paramètres variables à l'aide de la fonction Level Set et de fonctions de Heavyside régularisées. L'implémentation de l'algorithme a été réalisée dans un code Fortran validé numériquement pour les fluides de Bingham homogènes. La bibliothèque PETSc est utilisée pour la gestion des systèmes linéaires et le code est parallélisé en utilisant la bibliothèque MPI.

Nous avons enfin réalisé des simulations numériques dans deux configurations différentes. Dans le chapitre 5, nous nous sommes placés dans la configuration de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Après avoir comparé dans le cas newtonien nos résultats à ceux de Guermond et Salgado [39], nous avons réalisé des simulations en faisant varier le nombre de Atwood, caractérisant le rapport de densité entre les deux phases, et le nombre de Bingham, caractérisant le caractère viscoplastique de l'écoulement. Dans ces simulations, nous nous sommes focalisés sur l'évolution de l'interface et sur l'évolution des zones rigides au cours du temps. Dans le chapitre 6, nous nous sommes placés dans la configuration de rupture de barrage. Nous nous sommes intéressés à l'influence des différents types de conditions aux limites sur la dynamique de l'écoulement et nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus par Balmforth et *al.* dans [56].

Perspectives

Cette thèse ouvre la porte à de nombreuses questions et perspectives de travaux. Concernant le schéma de semi-discrétisation en temps, on peut tout d'abord se demander si l'analyse d'erreur que l'on a menée dans le cas des conditions au bord de type Dirichlet peut s'étendre aux conditions au bord de type glissement à seuil, comme nous l'avons fait pour la convergence de l'algorithme d'Uzawa et l'analyse de stabilité. Même si on a de bonnes raisons d'être optimiste sur cette question, il faudrait prendre le temps d'analyser les nouveaux termes d'erreur introduits par cette nouvelle condition.

Un autre prolongement du travail que l'on a effectué serait de mener une étude de stabilité

et de convergence sur le schéma numérique complètement discrétisé. Une telle étude a été menée dans [40], pour un schéma de type pas de temps fractionnés pour les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable en utilisant une discrétisation spatiale de type éléments finis. Une étude similaire a été menée dans [93], pour un schéma de type pas de temps fractionnés pour les écoulements homogènes, en utilisant une discrétisation en espace de type différences finies sur grilles décalées analogue à celle que nous avons utilisée dans cette thèse.

Il pourrait également être intéressant de proposer une extension de notre schéma numérique à la loi de comportement d'Herschel-Bulkley. Si la partie plastique du tenseur des contraintes dans la loi rhéologique semble elle aussi pouvoir se reformuler en termes de projection, le fait que la viscosité dépende du tenseur des taux de déformation introduit une nouvelle non linéarité, induisant des difficultés aussi bien théoriques que numériques.

Du côté des simulations numériques, nous avons tout d'abord le cas de la configuration de rupture de barrage à approfondir. Nous avons observé que le choix du coefficient de friction et du seuil de plasticité ont une influence sur le comportement de l'écoulement. Cependant, lorsque l'on raffine le maillage, il semble d'une part que l'influence de ces coefficients sur l'écoulement soit plus faible, et d'autre part qu'il soit parfois nécessaire de modifier la valeur de ces paramètres pour avoir un comportement similaire.

Enfin, il pourrait également être intéressant d'implémenter une version tridimensionnelle de notre code de calcul, afin de pouvoir simuler une plus grande variété de configurations d'une part et aussi de pouvoir observer une plus grande variété de phénomènes physiques d'autre part.

Table des notations

Symbole	Désignation	Première apparition
Ω	domaine d'étude	page 9
d	dimension du domaine	page 9
$\partial\Omega$	frontière du domaine	page 9
T	temps d'observation de l'écoulement	page 9
ρ	densité	page 9
\mathbf{u}	champ de vitesse	page 9
\mathbf{P}	tenseur des contraintes	page 10
\mathbf{f}	densité massique de force	page 10
\mathcal{T}	tenseur des contraintes viscoplastiques	page 10
p	pression	page 10
$\mathbf{D}\mathbf{u}$	tenseur des taux de déformation $(\frac{\nabla\mathbf{u}+\mathbf{T}\nabla\mathbf{u}}{2})$	page 10
$ \mathbf{D}\mathbf{u} $	second invariant du tenseur des taux de déformation	page 10
μ	viscosité	page 10
α	seuil de plasticité	page 10
Σ	partie plastique du tenseur des contraintes	page 11
\mathbf{n}	normale unitaire sortante à la frontière	page 11
$\cdot_{\mathbf{t}}$	partie tangentielle d'un vecteur	page 11
$\cdot_{\mathbf{nt}}$	partie tangentielle de la composante normale d'un tenseur	page 11
Γ_{ω}	partie de la frontière sur laquelle sont appliquées les conditions de glissement à seuil	page 12
Γ_0	partie de la frontière sur laquelle sont appliquées les conditions de Dirichlet homogène	page 12
σ	partie additionnelle de la contrainte tangentielle	page 12
c_f	coefficient de friction	page 12
c_s	seuil de glissement	page 12
\mathbb{P}_{Λ}	opérateur de projection sur l'espace Λ	page 12
$\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$	opérateur de projection sur l'espace \mathcal{B}	page 14

Symbole	Désignation	Première apparition
ℓ_c	degré de liberté donné dans la définition de la partie plastique du tenseur des contraintes (modèle continu)	page 12
r_c	degré de liberté donné dans la définition de la partie additionnelle de la contrainte tangentielle σ (modèle continu)	page 14
N	$N + 1$ est le nombre de points de la discretisation de l'intervalle de temps $[0; T]$.	page 27
δt	pas de temps discret	page 27
ℓ	paramètre numérique utilisé pour discrétiser la formulation (sous forme de projection) de Σ	page 34
r	paramètre numérique utilisé pour discrétiser la formulation (sous forme de projection) de σ	page 34
θ	paramètre numérique contrôlant le terme de relaxation ajouté dans la discrétisation de Σ et σ	page 34
δ	incrément entre le n -ième et le $n + 1$ -ième terme d'une même suite	page 39

Bibliographie

- [1] Edited by. In Michel Fortin and Roland Glowinski, editors, *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*, volume 15 of *Studies in Mathematics and Its Applications*, page iii. Elsevier, 1983.
- [2] Edited by. In S.N. Antontsev, A.V. Kazhikhov, and V.N. Monakhov, editors, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, volume 22 of *Studies in Mathematics and Its Applications*, pages ii – iii. Elsevier, 1990.
- [3] Ann S. Almgren, John B. Bell, Phillip Colella, Louis H. Howell, and Michael L. Welcome. A conservative adaptive projection method for the variable density incompressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 142(1) :1 – 46, 1998.
- [4] K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa. *Studies in Linear and Nonlinear Programming*. Stanford University Press, Palo Alto, 1958.
- [5] Neil J. Balmforth, Richard V. Craster, Alison C. Rust, and Roberto Sassi. Viscoplastic flow over an inclined surface. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 142(1) :219 – 243, 2007. Viscoplastic fluids : From theory to application.
- [6] Neil J. Balmforth, Neville Dubash, and Anja C. Slim. Extensional dynamics of viscoplastic filaments : Ii. drips and bridges. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(19) :1147 – 1160, 2010.
- [7] N.J. Balmforth and R.V. Craster. A consistent thin-layer theory for bingham plastics. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 84(1) :65 – 81, 1999.
- [8] I.V. Basov and V.V. Shelukhin. Nonhomogeneous incompressible bingham viscoplastic as a limit of nonlinear fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 142(1) :95 – 103, 2007. Viscoplastic fluids : From theory to application.
- [9] John B Bell and Daniel L Marcus. A second-order projection method for variable-density flows. *Journal of Computational Physics*, 101(2) :334 – 348, 1992.
- [10] Michel Bercovier and Michael Engelman. A finite-element method for incompressible non-newtonian flows. *Journal of Computational Physics*, 36(3) :313 – 326, 1980.
- [11] E.C. Bingham. *An Investigation of the laws of plastic flow*. Washington : Government printing Office, 1916.

- [12] E.C. Bingham. *Fluidity and Plasticity*. McGraw-Hill, New York, 1922.
- [13] R.B. Bird, G.C. Dai, and B.J. Yarusso. The rheology and flow of viscoplastic materials. *Reviews in Chemical Engineering*, 1(1) :1–70, 1983.
- [14] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [15] J. Céa and R. Glowinski. Méthodes numériques pour l'écoulement laminaire d'un fluide rigide viscoplastique incompressible. *Internat. J. Comput. Math.*, 3 :225–255, 1972.
- [16] R. Chalayer, L. Chupin, and T. Dubois. A bi-projection method for incompressible Bingham flows with variable density, viscosity, and yield stress. *SIAM J. Numer. Anal.*, 56(4) :2461–2483, 2018.
- [17] R. Chalayer and T. Dubois. A first-order bi-projection scheme for incompressible two-phase Bingham flows. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 28(1) :155–169, 2019.
- [18] Y.C. Chang, T.Y. Hou, B. Merriman, and S. Osher. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 124, 1996.
- [19] A.J. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.
- [20] L. Chupin and T. Dubois. A bi-projection method for Bingham type flows. *Comput. Math. Appl.*, 72(5) :1263–1286, 2016.
- [21] M.G. Crandall and P.L. Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1) :1–42, 1983.
- [22] C. F. Curtiss and J. O. Hirschfelder. Integration of stiff equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38(3) :235–243, 1952.
- [23] E.J. Dean, R. Glowinski, and G. Guidoboni. On the numerical simulation of bingham viscoplastic flow : old and new results. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 142 :36–62, 2007.
- [24] Benoit Desjardins. Linear transport equations with initial values in sobolev spaces and application to the navier-stokes equations. *Differential Integral Equations*, 10(3) :577–586, 1997.
- [25] Benoît Desjardins. Global existence results for the incompressible density-dependent navier-stokes equations in the whole space. *Differential Integral Equations*, 10(3) :587–598, 1997.
- [26] Jesús Ildefonso Díaz, Roland Glowinski, Giovanna GuIDoboni, and Taebeom Kim. Qualitative properties and approximation of solutions of bingham flows : On the stabilization for large time and the geometry of the support. *RACSAM - Revista de*

- la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 104(1) :153–196, Mar 2010.
- [27] R. J. DiPerna and P. L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 98(3) :511–547, Oct 1989.
- [28] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [29] J.D. Edward, R. Glowinski, and G. Guidoboni. On the numerical simulation of bingham visco-plastic flow : Old and new results. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 142(1–3) :36 – 62, 2007. Viscoplastic fluids : From theory to application.
- [30] I. Ekeland and R. Temam. *Convex Analysis and Variational Problems*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [31] L.C. Evans. On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods. *Israel J. Math.*, 36(3) :225–247, 1980.
- [32] I.A. Frigaard and C. Nouar. On the usage of viscosity regularisation methods for viscoplastic fluid flow computation. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 127(1) :1 – 26, 2005.
- [33] Frederic Gibou, Ronald Fedkiw, and Stanley Osher. A review of level-set methods and some recent applications. *Journal of Computational Physics*, 353 :82 – 109, 2018.
- [34] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
- [35] R. Glowinsky, J.-L. Lions, and R. Tremolieres. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [36] S. Gottlieb and C.-W. Shu. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Math. Comp.*, 67(221) :73–85, 1998.
- [37] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. A projection fem for variable density incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 165(1) :167 – 188, 2000.
- [38] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. A projection FEM for variable density incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 165(1) :167–188, 2000.
- [39] J.-L. Guermond and A.J. Salgado. A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure Poisson equation. *J. Comput. Phys.*, 228(8) :2834–2846, 2009.
- [40] J.-L. Guermond and A.J. Salgado. Error analysis of a fractional time-stepping technique for incompressible flows with variable density. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(3) :917–944, 2011.
- [41] J.L. Guermond, P. Minev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(44-47) :6011–6045, 2006.
- [42] Francis H. Harlow and J. Eddie Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8(12) :2182–2189, 1965.

- [43] Magnus R. Hestenes. Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4(5) :303–320, Nov 1969.
- [44] K. Hohenemser and W. Prager. Über die ansätze der mechanik isotroper kontinua. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 12(4) :216–226, 1932.
- [45] G.-S. Jiang and D. Peng. Weighted eno schemes for hamilton-jacobi equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(6), 2000.
- [46] G.S. Jiang and D. Peng. Weighted eno schemes for hamilton-jacobi equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(6) :2126–2143, 2000.
- [47] M. Kang, R.P. Fedkiw, and X.-D. Liu. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow. *J. Sci. Comput.*, 15(3) :323–360, 2000.
- [48] O. Ladyzhenskaya and V.A. Solonnikov. Unique solvability of an initial- and boundary-value problem for viscous incompressible nonhomogeneous fluids. *J. ZSoviet. Math.*, 9, 1978.
- [49] J. Leray. Essai sur les mouvements plans d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.*, 13 :193–248, 1934.
- [50] J. Leray. Essai sur les mouvements plans d’un liquide visqueux que limitent des parois. *J. Math. Pures Appl.*, 63 :331–418, 1934.
- [51] R.J. LeVeque and Z. Li. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. on Numer. Anal.*, 31(4) :1019–1044, 1994.
- [52] M. Lewicka and S. Müller. On the optimal constants in Korn’s and geometric rigidity estimates, in bounded and unbounded domains, under Neumann boundary conditions. *Indiana Univ. Math. J.*, 65(2) :377–397, 2016.
- [53] P.L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics : Volume 1 : Incompressible Models*. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Oxford University Press, Incorporated, 1996.
- [54] Chun Liu and Noel J. Walkington. Convergence of numerical approximations of the incompressible navier-stokes equations with variable density and viscosity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3) :1287–1304, 2007.
- [55] K. F. Liu and C. C. Mei. Approximate equations for the slow spreading of a thin sheet of Bingham plastic fluid. *Physics of Fluids A*, 2 :30–36, January 1990.
- [56] Y. Liu, N.J. Balmforth, S. Hormozi, and D.R. Hewitt. Two-dimensional viscoplastic dambreaks. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 238 :65 – 79, 2016. *Viscoplastic Fluids From Theory to Application 2015 (VPF6)*.
- [57] S. C. Loughlin, E. S. Calder, A. Clarke, P. D. Cole, R. Lockett, M. T. Mangan, D. M. Pyle, R. S. J. Sparks, B. Voight, and R. B. Watts. Pyroclastic flows and surges generated by the 25 june 1997 dome collapse, soufrière hills volcano, montserrat. *Geological Society, London, Memoirs*, 21(1) :191–209, 2002.

- [58] Arthur Marly and Paul Vigneaux. Augmented Lagrangian simulations study of yield-stress fluid flows in expansion-contraction and comparisons with physical experiments. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 239 :35 – 52, January 2017. 32 pages, 29 figures.
- [59] C. Min. On reinitializing level set functions. *Journal of Computational Physics*, 229(8) :2764 – 2772, 2010.
- [60] C. Min and F. Gibou. A second order accurate level set method on non-graded adaptive cartesian grids. *J. Comput. Phys.*, 225(1) :300–321, July 2007.
- [61] Larisa Muravleva. Uzawa-like methods for numerical modeling of unsteady viscoplastic bingham medium flows. *Applied Numerical Mathematics*, 93 :140 – 149, 2015. International Conference Difference Schemes and Applications in Honor of the 90-th Birthday of Professor V. S. Ryaben’kii.
- [62] Larisa Muravleva and Ekaterina Muravleva. Uzawa method on semi-staggered grids for unsteady bingham media flows. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling - RUSS J NUMER ANAL MATH MODEL*, 24 :543–563, 12 2009.
- [63] C.L.M.H. Navier. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. Mémoire de l’Académie Royale des sciences de l’Institut de France, 1823.
- [64] E.J. O’Donovan and R.I. Tanner. Numerical study of the bingham squeeze film problem. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 15(1) :75 – 83, 1984.
- [65] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, volume 153 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New-York, 2003.
- [66] Guillaume Ovarlez. Yielding to stress : Recent developments in viscoplastic fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 46 :121–146, 01 2014.
- [67] Tasos C. Papanastasiou. Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*, 31(5) :385–404, 1987.
- [68] T.C. Papanastasiou. Flows of materials with yield. *J. Rheol.*, 31(5) :385–404, 1987.
- [69] R. Paris. Source mechanics of volcanic tsunamis. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 373 :20140380, 2015.
- [70] C. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comput. Phys.*, 25 :250–252, 1977.
- [71] M. J. D. Powell. Algorithms for nonlinear constraints that use lagrangian functions. *Mathematical Programming*, 14(1) :224–248, Dec 1978.
- [72] W. Prager. *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique*. Gauthier-Villars, 1937.
- [73] W. Prager. *On slow visco-plastic flow*. Technical report 84, Graduate Division of Applied Mathematics. Brown University., Providence, R.I., 1952.

- [74] Jae-Hong Pyo and Jie Shen. Gauge-uzawa methods for incompressible flows with variable density. *Journal of Computational Physics - J COMPUT PHYS*, 221, 08 2006.
- [75] J. W. S. Rayleigh. *Scientific Papers*, volume ii. Cambridge, 1900.
- [76] N. Roquet and P. Saramito. An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192(31-32) :3317–3341, 2003.
- [77] G. Russo and P. Smereka. A remark on computing distance functions. *Journal of Computational Physics*, 163(1) :51 – 67, 2000.
- [78] P. Saramito. *Complex fluids : modeling and algorithms*. Mathématiques et applications. Springer, Cham, 2016.
- [79] P. Saramito and A. Wachs. Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows. *Rheologica Acta*, 56(3) :211–230, 2017.
- [80] D.H. Sharp. An overview of rayleigh-taylor instability. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 12(1) :3 – 18, 1984.
- [81] Jie Shen. On error estimates of projection methods for navier–stokes equations : First-order schemes. *Siam Journal on Numerical Analysis - SIAM J NUMER ANAL*, 29, 02 1992.
- [82] Jie Shen. On error estimates of the projection methods for the Navier-Stokes equations : second-order schemes. *Math. Comp.*, 65(215) :1039–1065, 1996.
- [83] C.-W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77(2) :439–471, 1988.
- [84] J. Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids : Existence of velocity, density, and pressure. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 21(5) :1093–1117, 1990.
- [85] Monty Strauss. Variations of korn’s and sobolev’s equalities. 01 1973.
- [86] M. Sussman, E. Fatemi, P. Smereka, and S. Osher. An improved level set method for incompressible two-phase flows. *Comp. Fluids*, 27(5-6), 1998.
- [87] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 114, 1994.
- [88] R. Temam. Sur l’approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires. II. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33 :377–385, 1969.
- [89] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.
- [90] G. Tryggvason. Numerical simulations of the rayleigh-taylor instability. *J. Comput. Phys.*, 75(2) :253–282, April 1988.

- [91] Grétar Tryggvason. Numerical simulations of the rayleigh-taylor instability. *Journal of Computational Physics*, 75(2) :253 – 282, 1988.
- [92] P. Watts and C. F. Waythomas. Theoretical analysis of tsunami generation by pyroclastic flows. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 108(B12), 2003.
- [93] E Weinan and Jian-guo Liu. Projection method iii : Spatial discretization on the staggered grid. *Math. Comput.*, 71 :27–47, 01 2002.
- [94] Pieter Wesseling. *Principles of computational fluid dynamics*, volume 29 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

Méthodes de projection pour des écoulements à seuil, incompressibles et à densité variable.

Résumé : Cette thèse traite de l'utilisation de méthodes de projection pour la simulation de fluides à seuil, incompressibles et à densité variable. Elle se découpe en trois parties. La première partie est consacrée à la présentation du modèle mathématique, à la construction du schéma de semi-discrétisation en temps du modèle, ainsi qu'à l'analyse du schéma ainsi obtenu. Pour construire le schéma, nous avons d'une part adapté un schéma de type pas de temps fractionné existant pour les écoulements newtoniens au cas des écoulements à seuil et d'autre part, nous avons utilisé une formulation en terme de projection pour le tenseur des contraintes qui nous permet de résoudre le couplage entre la vitesse et la contrainte dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement avec une méthode de type Uzawa. Nous démontrons mathématiquement la stabilité et la convergence du schéma, et on obtient une estimation d'erreur en temps d'ordre un pour la vitesse, la densité, la viscosité ainsi que le seuil de plasticité. La deuxième partie est consacrée à la discrétisation en espace et à l'implémentation du schéma. La discrétisation en espace est effectuée à l'aide d'une méthode de type volumes finis sur grilles décalées. L'implémentation de l'algorithme a été réalisée à partir d'un code Fortran 90 parallélisé et utilisant les bibliothèques Petsc et MPI. La dernière partie de cette thèse est consacrée à la réalisation de simulations numériques à l'aide du code de calcul que l'on a ainsi construit. Dans la configuration de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, on réalise des simulations en faisant varier le seuil de plasticité, en décrivant l'évolution de la position des deux phases et la localisation des zones rigides. Dans la configuration de rupture de barrage, nous mettons en oeuvre les conditions aux limites de type glissement à seuil, plus réalistes physiquement que les conditions de Dirichlet, et nous comparons les résultats obtenus à l'aide de notre nouveau schéma à la littérature existante.

Mots-clés : Fluides à seuil, Rhéologie de Bingham, Densité variable, Conditions au bord de glissement à seuil, Méthodes de pas de temps fractionnés, Méthodes de projection, Analyse de stabilité, Analyse d'erreur, Simulations numériques, Instabilité de Rayleigh-Taylor, Rupture de barrage.

Projection methods for incompressible viscoplastic flows with variable density.

Abstract : This thesis deal with the use of projection methods for incompressible viscoplastic flows with a variable density. This manuscript is organized following three main lines. The first part is devoted to the mathematical model, the time-discretization of the model and the analysis of the numerical scheme. To construct the numerical scheme, on one side we adapt a time-stepping method already used for newtonian flows to viscoplastic flows and on the other side, we use a projection formulation of the stress tensor to solve the coupling between the velocity and the plastic part of the stress tensor in the momentum equation with an Uzawa-like method. Stability and error analysis of the numerical scheme are provided and a first-order estimate of the time error is derived for the velocity field, the density, the viscosity and the yield stress. The second part is devoted to the space discretization and the implementation of the scheme. A second-order cell-centred finite volume scheme on staggered grids is applied for the spatial discretization. The implementation of the numerical scheme has been performed using a Fortran 90 code and using the Petsc and MPI library. The last part of the manuscript is devoted to numerical simulations. In the Rayleigh-Taylor instability configuration, we perform simulations by varying the yield stress, and describing the evolution of the interface and the localization of the rigid zones. In the dambreak configuration, we use Stick-Slip boundary conditions and we compare our results to the existing literature.

Key-words : Viscoplastic medium, Bingham flows, Variable density, Stick-Slip boundary conditions Fractional time-stepping method, Projection method, Stability and error analysis Numerical simulation, Rayleigh-Taylor instability, Dambreak.