HAL open science

Modélisation des fluctuations de la pression pariétale d'une couche limite turbulente pour des applications en vibro-acoustique

Sylvain Morilhat

▶ **To cite this version:**

Sylvain Morilhat. Modélisation des fluctuations de la pression pariétale d'une couche limite turbulente pour des applications en vibro-acoustique. Sciences de l'ingénieur [physics]. UNIVERSITE DE TOULOUSE, 2018. Français. NNT : . tel-02291078

HAL Id: tel-02291078

https://hal.science/tel-02291078v1

Submitted on 18 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par

Sylvain MORILHAT

Le 14 décembre 2018

Modélisation des fluctuations de la pression pariétale d'une couche limite turbulente pour des applications en vibro-acoustique

Ecole doctorale : **MEGEP - Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés**

Spécialité : **Dynamique des fluides**

Unité de recherche :
ISAE-ONERA EDyF Energétique et Dynamique des Fluides

Thèse dirigée par
Frank SIMON et Francois CHEDEVERGNE

Jury

M. Cedric MAURY, Rapporteur
M. Xavier GLOERFELT, Rapporteur
M. Pierre SAGAUT, Examinateur
M. Laurent DAVID, Examinateur
M. Julien CAILLET, Examinateur
Mme Helene PARISOT-DUPUIS, Examinateur
M. Frank SIMON, Directeur de thèse
M. François CHEDEVERGNE, Directeur de thèse

Résumé

Une couche limite turbulente se développant le long d'une paroi présente des fluctuations de vitesses et de pression importantes. Si la paroi du profil est suffisamment souple, les fluctuations de pression pariétale peuvent la faire rentrer en vibration ce qui induit un rayonnement acoustique de chaque côté de la paroi. Ce scenario est l'un des mécanismes de génération de bruit interne dans les aéronefs. Le but de cette thèse est de proposer un modèle de reconstruction des fluctuations de pression pariétale afin de prévoir in fine le bruit rayonné. Plutôt que de reposer sur une approche semi-empirique, les modèles développés dans cette thèse se basent sur la résolution analytique de l'équation de Poisson liant les fluctuations de pression aux fluctuations de vitesses. Ces dernières sont modélisées par exemple à l'aide des profils moyens de la couche limite obtenus grâce à un calcul RANS. La résolution de l'équation de Poisson dans ce contexte a déjà été entreprise en particulier par Lysak et Aupoix et leurs travaux sont le point de départ de cette thèse. Cependant, leur modèle ne donne qu'une description temporelle des fluctuations de pression pariétale alors que les aspects spatiaux sont nécessaires pour une application vibro-acoustique. L'apport de cette thèse consiste donc en une modification de leur modèle afin de pallier cette difficulté. En parallèle de ces travaux de modélisation, une expérience de validation en soufflerie a été élaborée et mise en place. Les fluctuations de vitesses ont été mesurées par vélocimétrie laser tandis que les fluctuations de pression pariétale ont été mesurées à l'aide de micro-tiges mobiles. Le modèle initialement développé à été affiné à l'aide de ces mesures. En particulier, une description anisotrope des fluctuations de vitesses a été développée, ce qui est plus cohérent pour un écoulement cisaillé que la description homogène isotrope utilisée jusqu'alors. Les modèles développés ont un large recoupement avec le modèle semi-empirique de Corcos qui est la référence utilisée pour les applications en vibro-acoustique. Cependant, des différences comportementales importantes aux hautes et basses fréquences ont été mises en évidence. Le modèle de Corcos peut donc être remis en question pour ces plages fréquentielles. Ces résultats théoriques doivent néanmoins être confortés par des mesures.

Mots clés : Turbulence, Couche limite Vibro-acoustique, Équation de Poisson, Soufflerie, LDV.

Modelling of the wall pressure fluctuations of a turbulent boundary layer for vibro-acoustics applications

Abstract

Large pressure and velocity fluctuations are present inside a turbulent boundary layer developing along a wall. A non-rigid wall can be excited by the wall pressure fluctuations and thus acoustic radiations will be emitted above and bellow the wall. This scenario is one the mechanism of intern noise generation inside aircraft. The aim of this thesis is to elaborate a turbulent wall pressure fluctuations model in order to compute the noise radiated by the vibrating wall at the end. Models developed during this thesis do not rely on an semi-empirical approach as they are based on the analytical resolution of Poisson's equation relating pressure and velocity fluctuations. This kind of approach has already been used by Lysak and Aupoix and their work was the starting point of this thesis. However, their model only gives a temporal description of the wall pressure fluctuations while a temporal and spatial description is needed for vibro-acoustics application. The major contribution of this thesis is to modify their model in order to overcome this incapacity. In parallel to this theoretical modelling, a wind-tunnel experimental campaign dedicated to validation was designed and implemented. Velocity fluctuations were measured using Laser Doppler Velocimetry while wall pressure fluctuations were measured using mobile wall-mounted microphones. The initial model was improved using these measurements. In particular, an anisotropic description of the velocity fluctuations was developed which is more consistent for a sheared flow than the homogeneous and isotropic description used by Lysak and Aupoix. For a large frequency range, the final model behaves similarly to Corcos' model which is the most used reference for vibro-acoustics applications. However, large differences were highlighted for low and high frequencies. Therefore the validity of Corcos' model is questionable for these frequency range. These theoretical results must still be confirmed by experimental data.

Keywords: Turbulence, Boundary layer Vibro-acoustics, Poisson's equation, Wind-tunnel, LDV.

Table des matières

Résumé i

Abstract v

Table des matières vii

Table des figures xi

Liste des tableaux xiii

Liste des algorithmes xiii

Introduction 5

I Bibliographie 9

1 Turbulence 11

1.1 Construction de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ . . . 11

1.1.1 Choix d'une entrée pour la vibro-acoustique . . . 11

1.1.2 Rappel sur les signaux aléatoires dans le cadre de la turbulence 12

1.1.3 Retour sur $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$ . . . 13

1.2 Mesures de spectres de fluctuations de pression . . . 13

1.2.1 Spectres fréquentiels . . . 14

1.2.1.1 Écoulements de plaque plane . . . 14

1.2.1.2 Écoulements ralentis . . . 16

1.2.2 Spectres fréquence-nombre d'onde . . . 19

1.2.2.1 Mesures directes par transformation de Fourier . . . 19

1.2.2.2 Mesures filtrées par antenne acoustique . . . 20

1.2.2.3 Mesures filtrées par plaques vibrantes . . . 21

1.2.2.4 Comparaisons des méthodes de mesures en nombre d'onde . . . 22

1.3 Modèles de fluctuations de pression . . . 22

1.3.1 Modèles reposant sur des paramètres de la couche limite . . . 23

1.3.1.1 Modélisation temporelle . . . 23

1.3.1.2 Modélisation spatiale . . . 27

1.3.2 Modèles reposant sur les profils de couche limite . . . 30

1.3.2.1 Résolution simplifiée . . . 30

1.3.2.2 Résolution dans le domaine pulsations-nombres d'ondes 32

1.3.2.3 Extension d'Aupoix . . . 34

1.3.2.4 Résolution dans le domaine temps-espace 35
1.4 Mesures de corrélations de fluctuations de vitesse turbulentes 36
1.4.1 Mesures par fils chauds 36
1.4.2 Mesures par PIV 37
1.4.3 Mesures par LDV 37

2 Vibro-acoustique 39
2.1 Vibration de structures 39
2.1.1 Vibration modale de poutres 39
2.1.2 Vibration modale de plaques minces rectangulaires 40
2.1.3 Prise en compte de l'amortissement 42
2.2 Bruit rayonné par une structure en vibration 43
2.2.1 Pression rayonnée par une plaque mince en vibration 43
2.2.2 Modèles d'impédance de rayonnement 44
2.2.3 Couplage structure acoustique d'une plaque mince excitée par onde plane et puissance acoustique rayonnée 46

3 Couplage de la turbulence et de la vibro-acoustique 49
3.1 Modèles de couplage 49
3.1.1 Couplages privilégiant le caractère ondulatoire 49
3.1.2 Couplages privilégiant le caractère stochastique 50
3.1.2.1 La vibration sous chargement aléatoire en mécanique des structures 51
3.1.2.2 La vibration sous chargement aléatoire en vibro-acoustique 51
3.2 Expériences mettant en œuvre le couplage de la turbulence et de la vibro-acoustique 53

II Travaux réalisés 55

4 Modélisation initiale 57
4.1 Construction du modèle pour $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ 57
4.1.1 Construction de la fonction de Green associée à l'équation de Poisson en espace semi-infini 58
4.1.2 Lien entre $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ et $\Phi_{qq}(\mathbf{k},\omega)$ 59
4.1.3 Interlude pour le calcul de transformée de Fourier 62
4.1.4 Assemblage final 63
4.1.5 Retour sur la modélisation fréquentielle 65
4.2 Calcul numérique des impédances de rayonnement 66
4.3 Article 68

5 Expériences en soufflerie 71
5.1 Mesures de pression 71
5.2 Vélocimétrie 73
5.3 Insonorisation acoustique 74
5.3.1 Comblement d'une cavité 76
5.3.2 Mise en place d'un tampon 76
5.3.3 Recouvrement du tuyau d'alimentation 77
5.3.4 Autres modifications envisagées 77
5.3.5 Bilan 78
5.4 Article 79

6 Modélisation corrigée **81**
6.1 Modification du modèle de Φ_{vv} 81
6.1.1 Modèle à trois longueurs caractéristiques M3L 83
6.1.2 Modèle à quatre longueurs caractéristiques M4L 84
6.1.3 Bilan 85
6.2 Application 86
6.2.1 Localisation des maxima 87
6.2.2 Évolution des amplitudes le long des branches 88
6.2.3 Largeur des pics du diagramme à quatre branches 89
6.3 Applicabilité des modèles développés 91

Conclusion **97**

Bibliographie **101**

Table des figures

1.2.1 Allure générale de $\Phi_{pp}(\omega)$ pour un écoulement de plaque plane . . . 15
1.3.1 Régions du plan des nombres d'onde $k = (k_x, k_z)$ 27

4.2.1 Domaines d'intégration pour Z_{mn} 67
4.2.2 Comparaison des méthodes de calculs pour Z_{52} d'une plaque rectangulaire. Z_a correspond au calcul exact d'une plaque appuyée, Z_e au calcul exact d'une plaque encastrée et Z_M au calcul asymptotique de Maidanik [Maidanik 62] d'une plaque appuyée 68

5.1.1 Système de déplacement des micros. Les trois microphones sont représentés par des × 72
5.1.2 Système de mesure de pression pariétale installé en veine 73
5.1.3 Système de mesure de pression pariétale 74
5.2.1 Veine de la soufflerie vue du dessus 75
5.3.1 "Boîte" et cadres en bois 76
5.3.2 Tuyau d'alimentation des souffleries 77
5.3.3 Tampon de mélamine 77
5.3.4 Pose de la mousse absorbante dans le conduit d'alimentation 78
5.3.5 Système de pales régulant la vitesse de fonctionnement de la soufflerie 78
5.3.6 Amélioration du ratio acoustique-turbulence 79

6.2.1 Définitions des longueurs caractéristiques de décorrélation l_x, l_{ym}, l_{yp} et l_z 87
6.2.2 Définition du temps caractéristique de décorrélation τ_S 87
6.2.3 Diagramme à quatre branches, comparaison des modèles Corcos, LMA, M1L et M4L, centré sur les branches Miroir et Bifurcation . 88
6.2.4 Diagramme à quatre branches, comparaison des modèles Corcos, LMA, M1L et M4L, centré sur les branches Advection, Supplémentaire et Bifurcation.Les extrémités des branches advections sont représentées par les symboles donnés à la table 6.1 89
6.2.5 Amplitude le long des quatre branches, comparaison du modèle LMA, représentation logarithmique. 90
6.2.6 Amplitude le long des quatre branches, comparaison des modèles LMA, M1L et M4L, représentation logarithmique 91
6.2.7 Amplitude le long des quatre branches, comparaison des modèles LMA, M1L et M4L, représentation semi-logarithmique. 92
6.2.8 Maxima et largeurs à mi-hauteur des branches miroir, advection et bifurcation, comparaison avec le modèle de Corcos. 93
6.2.9 Maxima et largeurs à mi-hauteur des branches advection et bifurcation et supplémentaire, comparaison avec le modèle de Corcos. 94

6.3.1 Iso-fréquences du modèle LMA 95
6.3.2 Bilan d'applicabilité du modèle LMA 95

Liste des tableaux

1.1 Comportement général de $\Phi_{pp}(\omega)$ pour un écoulement de plaque plane, proposé par Hwang *et al. [Hwang 09]* 15
1.2 Mesures de $\Phi_{pp}(\omega)$ en écoulement de plaque plane utilisées par Goody dans [Goody 04] 16
1.3 Mesures de $\Phi_{pp}(\omega)$ en écoulement ralenti 18

6.1 Code couleur pour les figures 6.2.3, 6.2.4, 6.2.6 et 6.2.7 88

Liste des symboles

LA	Modèle Lysak-Aupoix
LDV	Laser Doppler Velocimetry
LMA	Modèle Lysak-Aupoix-Morilhat
M1L	Modèle à une longueur
M3L	Modèle à trois longueurs
M4L	Modèle à quatre longueurs
PIV	Particule Image Velocimetry
$\langle\rangle$	Opérateur de moyenne
$\mathbb{E}_t$	Opérateur d'espérance temporelle
$f \star g$	Produit de convolution des fonctions f et g
$\mathcal{A}_{mn}$	Impédance de structure associée au mode (m, n)
$\mathcal{F}_\omega^{-1}[f]$	Transformation inverse de Fourier : $(2\pi)^{-1} \int f(\omega) e^{j\omega\tau} \mathrm{d}\omega$
$\mathcal{F}_\tau[f]$	Transformation de Fourier : $\int f(\tau) e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau$
$\mathcal{O}_r$	Opérateur spatial des plaques
$\mathcal{O}_t$	Opérateur temporel des plaques
$\mathcal{R}_x$	Nombre de Reynolds basé sur la longueur x
β_C	Paramètre de Clauser $\theta\tau_w \mathrm{d}P/\mathrm{d}x$
Δ	Laplacien
δ	Épaisseur de la couche limite $U(\delta) = 0.99U_e$
δ_1	Épaisseur de déplacement
ϵ	Dissipation turbulente
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ω	pulsation
ω_t	Taux de dissipation spécifique turbulente
Φ_{fg}	Interspectre des fonctions f et g
$\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$	Spectre des fluctuations de la pression pariétale dans le domaine pulsation/ nombre d'onde

$\Phi_{pp}(\omega)$ Densité spectrale de puissance des fluctuations de la pression pariétale

ρ densité

τ temps d'intercorrélation

τ_w Contrainte pariétale

θ Épaisseur de quantité de mouvement

$1/k_e$ Taille caractéristique des fluctuations turbulentes homogènes isotropes

(U, V, W) Vecteur vitesses moyennes

(u, v, w) Vecteur vitesses fluctuantes

$\mathbf{k}$ Vecteur d'onde

$\mathbf{r}, \mathbf{x}$ Vecteur position

a_{mn} Amplitude de déplacement modal associée au mode (m, n)

b_{mn} Amplitude de pression associée au mode (m, n)

c Vitesse du son

C_f Coefficient de frottement

H facteur de forme

k_m, k_n Nombres d'onde associés au mode (m, n)

k_t Énergie cinétique turbulente

l_x Taille caractéristique des fluctuations turbulentes dans la direction longitudinale

l_{ym} Taille caractéristique des fluctuations turbulentes dans la direction normale vers la paroi

l_{yp} Taille caractéristique des fluctuations turbulentes dans la direction normale vers l'extérieur de la couche limite

l_z Taille caractéristique des fluctuations turbulentes dans la direction transversale

P Pression moyenne

p Pression fluctuante

p_{mn} Champs de pression associé au mode (m, n)

q Terme source de l'équation de Poisson

q_e Pression dynamique à l'extérieur de la couche limite

S_{fg} Intercorrélation des fonctions f et g

t temps

u_τ Vitesse de frottement

U_c Vitesse d'advection

U_e Vitesse à l'extérieur de la couche limite

v_ϕ Vitesse de phase

w	Déplacement
w_{mn}	Déplacement modal associé au mode (m, n)
x	Direction longitudinale
y	Direction normale
z	Direction transversale
Z_{mn}	Impédance de rayonnement associée au mode (m, n)

Introduction

Le bruit interne dans les hélicoptères est créé par quatre types de sources : les rotors, les turbines, la boite de transmission principale et les bruits d'origine aérodynamique. Le bruit dû au passage des pales est très basse fréquence avec des fréquences inférieures à 100 Hz. Il constitue un bruit tonal en fonction de la vitesse de rotation des rotors. Les turbines créent également un bruit tonal localisé aux alentours de 10 kHz. Le bruit occasionné par la boîte de transmission principale se décompose en une dizaine de raies réparties entre 500 et 5 kHz.

Les bruits d'origine aérodynamique peuvent être classés en trois catégories : les bruits dus à des obstacles, les bruits dus aux fuites et les bruits dus à la turbulence. Les bruits d'obstacles sont créés typiquement par des excroissances sur le fuselage comme les trains d'atterrissage, les antennes et les sondes de mesure. Ces obstacles induisent des détachements tourbillonnaires en aval dont la fréquence peut être estimée à l'aide du nombre de Strouhal, fixe dans ce cas. Les cabines des hélicoptères ne sont pas pressurisées, il existe donc de nombreux points de communication entre l'extérieur et l'habitacle qui induisent des sifflements. Les bruits d'obstacles et de fuites sont uniquement dus à la géométrie de l'hélicoptère. Si cette dernière était lisse, convexe et parfaitement étanche, ces bruits devraient disparaître. Ce ne serait néanmoins toujours pas le cas des bruits engendrés par la turbulence. Les fluctuations de pression au sein de la couche limite se transmettent aux parois. Ces dernières ne sont pas infiniment rigides et se mettent donc à vibrer. Cela occasionne un rayonnement acoustique dans le cockpit de l'hélicoptère. A l'inverse de toutes les autres sources de bruit listées ci-avant, le bruit engendré par la turbulence s'étale sur une très large gamme de fréquences. Ce mécanisme de génération de bruit n'est pas propre aux hélicoptères et se retrouve sur tous les aéronefs. On retrouve également cette problématique de bruit induit par la turbulence sur les véhicules roulants ainsi que sur les navires et les sous-marins.

Pendant des décennies, les sources de bruit majoritaires des hélicoptères étaient les turbines et la boîte de transmission principale. Les effort se sont donc concentrés à les réduire en priorité. Sur une période plus récente, on peut citer le soin apporter aux pales avec notamment la pale Blue Edge développée conjointement par l'Onera, le DLR et Airbus entre 1994 et 2015. Cette nouvelle pale permet une réduction du bruit en conditions réelles de vol de l'ordre de 3 à 4 dB du futur hélicoptère d'Airbus H160.

Au fur et à mesure que ces bruits de motorisations sont réduits, ceux d'origine aérodynamique se révèlent être moins négligeables. Il faut donc être capable de les modéliser correctement afin de les réduire à leurs tours. Cette thèse se concentre ainsi sur le bruit aérodynamique engendré par la turbulence.

Le mécanisme de génération de bruit par une structure vibrante excitée par une couche limite turbulente fait appel à deux disciplines différentes de la mécanique des fluides : la modélisation de la turbulence et la vibro-acoustique. Ces deux disci-

plines se distinguent notamment par la nature temporelle des grandeurs physiques manipulées.

Les grandeurs turbulentes étant fortement instationnaires, seules des simulations de type LES ou DNS permettent d'en obtenir correctement l'évolution temporelle. L'un des objectifs de cette thèse est de développer des outils compatibles avec les moyens et les temps alloués aux avant-projets industriels. Il n'est donc pas envisageable de faire des simulations autres que des calculs RANS pour décrire la turbulence. Cela signifie que les grandeurs turbulentes devront être décrites à l'aide de leurs moments stochastiques. A l'inverse, la vibro-acoustique manipule principalement des signaux harmoniques en temps. Les outils disponibles en vibro-acoustique sont donc adaptés à ce type de signaux. Il est donc nécessaire d'établir un couplage entre les deux disciplines.

D'un point de vue de la modélisation de la turbulence, deux stratégies sont possibles pour décrire les fluctuations de pression pariétale : l'approche empirique basée sur des résultats expérimentaux et l'approche analytique basée sur la résolution de l'équation de Poisson. Cette dernière fait le lien entre les fluctuations de pression et les fluctuations de vitesse au sein d'une couche limite turbulente. La plupart des travaux empiriques se concentrent sur une description en un point des fluctuations de pression pariétale. Il est en effet plus facile de faire des mesures en un point puisque cela ne nécessite qu'un seul capteur. On peut citer en exemple les travaux de Goody[Goody 04] et Rozenberg[Rozenberg 12]. Néanmoins, les modèles issus de ces travaux sont insuffisants pour ensuite modéliser le bruit rayonné par une structure excitée par la turbulence car ils ne tiennent pas compte des aspects spatiaux. Les travaux de modélisation des fluctuations de pression pariétale tenant compte des aspects temporels et spatiaux sont beaucoup moins nombreux. Le premier modèle historique a été développé par Corcos[Corcos 64] dans les années 60 et est toujours largement utilisé actuellement pour prédire le bruit rayonné par des structures excitées par la turbulence. Des versions modifiées de ce modèle ont été proposées notamment par Efimtsov[Efimtsov 82, Efimtsov 84], Ffowcs Williams[Ffowcs-Williams 82] et Hwang et Geib[Hwang 84] mais sans apporter de changements majeurs. Le principal défaut de ces modèles est qu'ils ne prennent en compte les spécificités de la couche limite qu'au travers d'un nombre très réduit de paramètres comme la vitesse à l'extérieur de la couche limite et l'une des épaisseurs intégrales.

Afin de prendre en compte toute la richesse contenue dans les profils moyens de la couche limite turbulente, il est nécessaire de se tourner vers des méthodes analytiques plutôt qu'empirique. L'idée de résoudre l'équation de Poisson a été initialement proposée par Kraichnan[Kraichnan 56] dans les années 50 et reprise notamment par Panton et Linebarger[Panton 74] et Remmler et al.[Remmler 10]. Cependant, cette démarche ne peut aboutir sans une puissance de calcul qui n'était alors pas accessible à ces auteurs. Ce n'est que très récemment que ces idées ont été pleinement exploitées pour produire effectivement une description spatio-temporelle des fluctuations de pression pariétale avec les travaux de Peltier et Hambric[Peltier 07] et Slama et al.[Slama 18, Slama 17]. A coté de ces travaux, on peut citer ceux de Lee et al.[Lee 05, Lee 09], Remmler et al.[Remmler 10], Parchen[Parchen 98], Bertagnolio et al.[Bertagnolio 09, Bertagnolio 14], Lysak[Lysak 06] et Aupoix[Aupoix 15] qui se basent sur la résolution de l'équation de Poisson mais ne donnent qu'une description temporelle des fluctuations de pression.

Historiquement, l'ONERA/DMPE utilisait le modèle de Lysak[Lysak 06] qui a

été amélioré par Aupoix[Aupoix 15]. Le but de cette thèse est donc de repartir de ce modèle et de le modifier afin de prendre en compte les aspects spatiaux. Le modèle ainsi obtenu sera alors couplé aux outils de la vibro-acoustique pour *in fine* calculer le bruit rayonné par une structure excitée par une couche limite turbulente.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit se décompose de la manière suivante : le chapitre 1 donne un état de l'art sur les fluctuations de pression pariétale induites par une couche limite turbulente. Les modèles et les expériences disponibles dans la littérature sont conjointement exposés. Le modèle de Lysak[Lysak 06] et l'extension réalisée par Aupoix[Aupoix 15] sont particulièrement détaillés puisqu'ils sont le point de départ des travaux de modélisation de cette thèse. Le chapitre 2 présente les outils nécessaires pour étudier les vibrations et le rayonnement acoustique d'une plaque excitée par des ondes planes harmoniques. Le chapitre 3 expose les différentes stratégies de couplage disponibles dans la littérature permettant d'établir le lien entre la modélisation de la turbulence et la vibro-acoustique. Les chapitres suivants exposent les travaux réalisés durant la thèse.

Les modèles de Lysak et d'Aupoix ne permettent qu'une description fréquentielle des fluctuations de pression pariétale alors qu'il est nécessaire d'avoir une description intégrant les aspects spatiaux afin de pouvoir faire ensuite un couplage avec la vibro-acoustique. Cette incapacité à prendre en compte la dépendance spatiale est due à une utilisation trop forte de l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor pour les fluctuations de vitesse au sein de la couche limite turbulente. Le Chapitre 4 expose le modèle LMA (Lysak, Morilhat et Aupoix), basé sur les modèles de Lysak et d'Aupoix, mais permettant de décrire la dépendance spatiale. Ce nouveau modèle coïncide avec celui de Corcos pour une large gamme de fréquences. En revanche, des différences fondamentales surviennent aux hautes et basses fréquences, et sont analysées en détail. Ce modèle est ensuite couplé avec les outils de la vibro-acoustique afin d'étudier le rayonnement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ou encastrée sur ses bords. Les modèles de Lysak et d'Aupoix sont basés sur une résolution analytique de l'équation de Poisson. Néanmoins, un certain nombre d'hypothèses sont faites afin de faire aboutir cette démarche. On montre que l'équation de Poisson pouvait être résolue sans faire l'ensemble de ces hypothèses et que l'on retrouve les expressions de Lysak et Aupoix en faisant des hypothèses moins simplificatrices. Le modèle issu de cette résolution exacte de l'équation de Poisson est noté M1L.

En parallèle des travaux théoriques exposés dans le chapitre 4, une expérience en soufflerie a été réalisée. Le chapitre 5 décrit donc sa conception, sa mise en place et les données acquises. Cette expérience a pour but de valider et/ou d'améliorer les modèles théoriques. Ces derniers reposent sur l'équation de Poisson faisant le lien entre les fluctuations de vitesse et les fluctuations de pression pariétale. La soufflerie est donc équipée des outils de métrologie permettant de mesurer ces deux grandeurs. Les fluctuations de vitesse sont mesurées par anémométrie laser doppler tandis que les fluctuations de pression sont mesurées à l'aide de micros-tiges montés au ras de la paroi de la veine de la soufflerie.

Les expériences en soufflerie ont montré que l'utilisation du modèle de turbulence homogène isotrope de Von Kàrmàn pour décrire les fluctuations de vitesse au sein

de la couche limite turbulente n'était pas justifiée. En effet, il existe une anisotropie dont on peut tenir compte en utilisant des échelles de longueurs caractéristiques distinctes dans les différentes directions de l'espace. Le chapitre 6 expose le modèle M4L permettant de prendre en compte ces différentes longueurs. Les modèles LMA, M1L et M4L sont ensuite comparés et analysés sur différents aspects.

Ce manuscrit se termine par un bilan de cette étude ainsi que des perspectives générales pour la poursuite des travaux dans cette thématique.

Première partie

Bibliographie

Chapitre 1

Turbulence

Cette première partie a pour objectif de présenter les enjeux de la modélisation de la turbulence dans cette thèse. Le lien avec la vibro-acoustique se fait au moyen de la pression pariétale. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, il ne s'agit pas de calculer les fluctuations instationnaires mais d'être capable d'exhiber une grandeur contenant les effets des fluctuations de pression et étant accessible par un faible coût de calcul. Il s'agit, en l'occurrence, du spectre de l'intercorrélation des fluctuations de la pression pariétale dans le domaine fréquence-nombre d'onde. Toute la partie relative à la turbulence sera dédiée à sa modélisation. Pour plus de concision, il sera par la suite nommé par son symbole mathématique $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$.

Cette présentation est décomposée en trois points :

1. Le $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ est une grandeur peu commune, nous allons tout d'abord la présenter sommairement ;
2. Nous présenterons les expériences dédiées à la mesure de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$. Ces mesures mettent en évidence les grandes tendances du comportement de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$;
3. Nous terminerons cette partie en exposant les modèles disponibles dans la littérature pour $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$.

1.1 Construction de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$

1.1.1 Choix d'une entrée pour la vibro-acoustique

Avant de se demander quelles grandeurs peuvent être obtenues par la modélisation de la turbulence, nous allons d'abord analyser les besoins de la vibro-acoustique. Le but final de notre modèle est d'évaluer la puissance acoustique rayonnée par une structure. Comme nous ne traitons pas la propagation des ondes sonores à l'intérieur de l'aéronef, cela revient à étudier dans le milieu interne le produit $I = p_{ai}\dot{w}$, avec p_{ai} la pression acoustique pariétale et $\dot{w}$ la vitesse de vibration de la structure. I correspond à la puissance rayonnée par unité de surface ou intensité acoustique. Plus précisément, nous voulons connaitre cette grandeur d'un point de vue fréquentiel. Comme l'excitation turbulente est aléatoire, p_{ai} et w le sont aussi. L'outil adapté à l'étude fréquentielle de I est donc la densité inter-spectrale de puissance. Nous rappelons que, via le théorème de Wiener-Kintchine, il s'agit de la transformation de Fourier de l'inter-corrélation :

$$\begin{aligned} \Phi_{fg}(\omega) &= \mathcal{F}_\tau\left[S_{fg}(\tau)\right] \\ S_{fg}(\tau) &= \mathbb{E}_t\left(f(t)\, g(t+\tau)\right) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

avec f, g deux signaux aléatoires et $\mathbb{E}$ l'espérance statistique. Cette grandeur permet de quantifier l'énergie contenue dans la bande fréquentielle de largeur $\mathrm{d}\omega$ et centrée en ω.

Si l'on se place dans le cadre très simplifié des systèmes linéaires avec une entrée e et une sortie s, caractérisée par une fonction de transfert $H(\omega)$, on peut montrer que les densités spectrales de l'entrée et de la sortie sont reliées par

$$\Phi_{ss}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{ee}(\omega) \tag{1.1.2}$$

On peut assimiler la partie vibro-acoustique du mécanisme comme un système ayant pour entrée la pression pariétale turbulente p_t et pour sorties w et p_{ai}. De même que dans l'exemple précédent, on peut relier $\Phi_{p_{ai}w}(\omega)$ et $\Phi_{pp}(\omega)$ par des produits de fonctions de transfert. L'entrée de la partie vibro-acoustique pourrait donc être $\Phi_{pp}(\omega)$.

Nous avons néanmoins parlé de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ et non pas de $\Phi_{pp}(\omega)$. La turbulence est à la fois aléatoire dans le temps et dans l'espace. Le raisonnement précédent n'est donc valide que pour une plaque de dimension infinitésimale. Pour prendre en compte à la fois les effets spatiaux et fréquentiels de la turbulence, il faut un objet plus complet : le spectre de l'intercorrélation des fluctuations de la pression pariétale dans le domaine fréquence-nombre d'onde.

1.1.2 Rappel sur les signaux aléatoires dans le cadre de la turbulence

Tout au long de cette thèse nous allons être amenés à manipuler des outils de traitement du signal. Comme les notations peuvent être ambigües au premier abord, nous allons détailler notre formalisme afin d'éviter toute confusion par la suite. L'objet le plus général que l'on puisse considérer est l'intercorrélation en deux points deux temps de deux signaux :

$$S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r_1}, t_1, \boldsymbol{r}_2, t_2) = \mathbb{E}_t\left(s_1(\boldsymbol{r}_1, t + t_1)\, s_2(\boldsymbol{r}_2, t + t_2)\right) \tag{1.1.3}$$

où l'on observe le signal s_1 situé en $\mathbf{r_1}$ et le signal s_2 situé en $\mathbf{r_2}$. On compare ensuite ces deux signaux en les décalant dans le temps, de t_1 pour s_1 et t_2 pour s_2 en utilisant l'espérance par rapport au temps $\mathbb{E}_t$. Cette fonction dépend de quatre variables qui peuvent être réduites à trois en faisant une hypothèse de stationnarité stipulant que $S_{s_1 s_2}(r_1, t_1, r_2, t_2)$ ne dépend que de $t_2 - t_1$. Cela revient à dire que l'environnement (la partie moyenne) qui va être la cause de s_1 et s_2 ne va pas évoluer dans le temps. Pour les fluctuations de pression pariétale, cela signifie que les conditions extérieures et les profils moyens de vitesses de la couche limite restent invariants au cours du temps. On notera l'intercorrélation de ce type de signaux sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) &= \mathbb{E}_t\left(s_1(\boldsymbol{r}_1, t)\, s_2(\boldsymbol{r}_2, t + \tau)\right) \\ \tau &= t_2 - t_1 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Comme nous l'avons déjà vu, on peut passer de l'intercorrélation temporelle à la densité interspectrale de puissance par transformation de Fourier vis à vis du temps :

$$\Phi_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \omega) = \mathcal{F}_\tau\left[S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)\right] \tag{1.1.5}$$

Le traitement de l'espace est plus complexe que celui du temps car l'équivalent pour l'espace de l'hypothèse de stationnarité ne peut pas toujours être faite. On

parlera d'homogénéité lorsque $\Phi_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \omega)$ ou $S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$ ne dépendent que de $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. On notera alors :

$$\begin{aligned} S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \tau) &= \mathbb{E}_t\left(s_1(0,t)\, s_2(\boldsymbol{r}, t+\tau)\right) \\ \Phi_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \omega) &= \mathcal{F}_\tau\left[S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \tau)\right] \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Tout comme on a utilisé la transformation de Fourier pour le temps, il peut être intéressant de prendre la transformée de Fourier par rapport à l'espace. On parlera alors d'inter-spectre en fréquence-nombre d'onde :

$$\Phi_{s_1 s_2}(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathcal{F}_{\boldsymbol{r}}\left[\Phi_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \omega)\right] \tag{1.1.7}$$

Nous avons abouti à une notation permettant la représentation de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ en tant que spectre de l'intercorrélation des fluctuations de la pression pariétale dans le domaine fréquence-nombre d'onde.

L'hypothèse d'homogénéité n'est pas valable en présence d'un gradient de pression externe. Si la couche limite n'évolue pas dans le temps, elle se modifie lorsqu'on la parcourt le long de la direction x. En plus des outils que sont $S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$ et $\Phi_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \omega)$, nous serons amenés à travailler avec :

$$\begin{aligned} S\left[\boldsymbol{r}_1\right]_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \tau) &\mathbb{E}_t\left(s_1(\boldsymbol{r}_1, t)\, s_2(\boldsymbol{r}_1 + \mathbf{r}, t+\tau)\right) \\ &= S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}, \tau) \\ \Phi\left[\boldsymbol{r}_1\right]_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \omega) &= \mathcal{F}_\tau\left[S(\boldsymbol{r}_1)_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \tau)\right] \\ \Phi\left[\boldsymbol{r}_1\right]_{s_1 s_2}(\boldsymbol{k}, \omega) &= \mathcal{F}_{\boldsymbol{r}}\left[\Phi(\boldsymbol{r}_1)_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \omega)\right] \\ S\left[\boldsymbol{r}_1\right]_{s_1 s_2}(\boldsymbol{k}, \tau) &= \mathcal{F}_{\boldsymbol{r}}\left[S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}, \tau)\right] \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Ces outils supplémentaires sont plus utiles que $S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$ et $\Phi_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \omega)$ car ils ressemblent fortement à ceux utilisés dans le cadre de l'hypothèse d'homogénéité. La couche limite évolue lentement par rapport aux distances nécessaires pour que deux signaux turbulents soient décorrélés. On pourra donc faire une hypothèse d'homogénéité locale : si on reste au voisinage de $\boldsymbol{r}_1$ d'une couche limite non homogène, on peut assimiler $S\left[\boldsymbol{r}_1\right]_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \tau)$ à $S_{s_1 s_2}(\boldsymbol{r}, \tau)$, obtenue pour une couche limite homogène ayant les même propriétés que la couche non homogène en $\boldsymbol{r}_1$.

Nous avons définis ainsi dix objets dont les définitions sont très proches les unes des autres.

1.1.3 Retour sur $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$

Pourquoi avoir introduit $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$ comme étant la grandeur à transmettre à la vibro-acoustique alors que $\Phi\left[r\right]_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$ semble offrir des informations plus précises ? L'intérêt pour $\Phi\left[r\right]_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$ est très récent par rapport aux premières études sur $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$ qui remontent aux années 1960. Malgré cela, les progrès réalisés pour le décrire furent assez lents. Ainsi, une grande majorité des auteurs de la littérature ont fait le lien entre la turbulence et la vibro-acoustique via $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$ et nous nous inscrivons dans la continuité de ces études.

1.2 Mesures de spectres de fluctuations de pression

Maintenant que nous cernons mieux ce que représente $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$, nous allons établir quelques règles quantitatives de son comportement. Pour cela, nous allons

nous appuyer sur les résultats obtenus expérimentalement. Il existe deux classes de montages expérimentaux. La première ne s'intéresse qu'à la partie fréquentielle de $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega)$, tandis que la seconde étudie à la fois le comportement spatial et le comportement fréquentiel. La revue de ces deux classes permettra de recenser les conditions expérimentales dans lesquelles les mesures de $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega)$ ont étés faites. Ainsi, le montage expérimental réalisé durant la thèse peut être comparé à ce qui existe dans la littérature.

1.2.1 Spectres fréquentiels

On va systématiquement étudier des écoulements bidimensionnels sur plaque plane avec x la direction longitudinale, y la direction normale et z la direction transversale. $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega)$ est une fonction de trois variables (k_x, k_z, ω). Pour pouvoir y accéder expérimentalement, il faut être en mesure de mettre en œuvre un réseau de capteurs répartis sur la plaque. Les premières études n'utilisaient qu'un seul capteur donc seul $\Phi_{pp}(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0},\omega)$ était accessible. Comme on a :

$$\Phi_{pp}(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0},\omega) = \int \Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega)\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{1.2.1}$$

Avec un seul capteur, toutes les longueurs d'onde de $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega)$ sont intégrées. Il ne reste donc plus que la dépendance fréquentielle, d'où l'appellation de "spectres temporel". Cette séparation du temps et de l'espace a naturellement conduit à décomposer $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega)$ en deux termes :

$$\begin{cases} \Phi_{pp}(k_x,k_z,\omega) & = \Phi_{pp}(\omega)\,\Phi_{pp}(k_x,k_z) \\ \Phi_{pp}(\omega) & = \iint \Phi_{pp}(k_x,k_z,\omega)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_z \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Les spectres qui vont être présentés ici seront donc des spectres fréquentiels $\Phi_{pp}(\omega)$. Nous présenterons d'abord ceux obtenus avec des écoulements de plaque plane sans gradient de pression puis ceux obtenus avec des écoulements ralentis.

1.2.1.1 Écoulements de plaque plane

Les études expérimentales de spectres fréquentiels pour un écoulement de plaque plane sont pléthores et leurs résultats se recoupent avec un bon accord. On peut donc facilement en tirer les tendances quantitatives de $\Phi_{pp}(\omega)$. Hwang *et al.* [Hwang 09] ont réalisé une synthèse du comportement de $\Phi_{pp}(\omega)$ en compilant les résultats obtenus par Blake [Blake 86b, Blake 86a], Farabee et Casarella [Farabee 91], Keith *et al.* [Keith 92], Bull [Bull 96], Smol'yakov [Smol'yakov 00] et Goody [Goody 04]. Le domaine fréquentiel peut être décomposé en quatre parties :

1. une partie composée des basses fréquences,
2. une partie composée des moyennes fréquences,
3. une partie composée des hautes fréquences,
4. une partie de recouvrement entre les moyennes et hautes fréquences. D'après Smol'yakov [Smol'yakov 00], cette région n'existe que pour les couches limites respectant $\mathrm{Re}_\theta \geq 3500$.

Pour chacune de ces partie, Hwang *et al.* proposent des échelles de pression et de temps pour adimensionner $\Phi_{pp}(\omega)$ et ω afin d'obtenir un comportement indépendant des caractéristiques de la couche limite. Cette synthèse est résumée dans la table 1.1 et représentée sur la figure 1.2.1.

	Basses fréquences	Moyennes fréquences	Recouvrement	Hautes fréquences
Échelle de pression	q_e ou τ_w	τ_w	τ_w	τ_w
Échelle de temps	δ_1/U_e	δ/u_τ	δ/u_τ ou ν/u_τ^2	ν/u_τ^2
Comportement de $\Phi_{pp}(\omega)$	$\sim \omega^2$	Atteint son maximum pour $\omega\delta/u_\tau = 50$	$\sim \omega^{-1}$ ou entre $\omega^{-0.7}$ et $\omega^{-1.11}$	Entre ω^{-5} et ω^{-7}
Bornes fréquentielles	$\omega\delta_1/U_e \leq 0.03$ $\omega\delta/u_\tau \leq 5$	$5 \leq \omega\delta/u_\tau \leq 100$	$\omega\nu/u_\tau^2 \leq 0.3$ $100 \leq \omega\delta/u_\tau$	$0.3 \leq \omega\nu/u_\tau^2$

TABLE 1.1 – Comportement général de $\Phi_{pp}(\omega)$ pour un écoulement de plaque plane, proposé par Hwang *et al.* *[Hwang 09]*

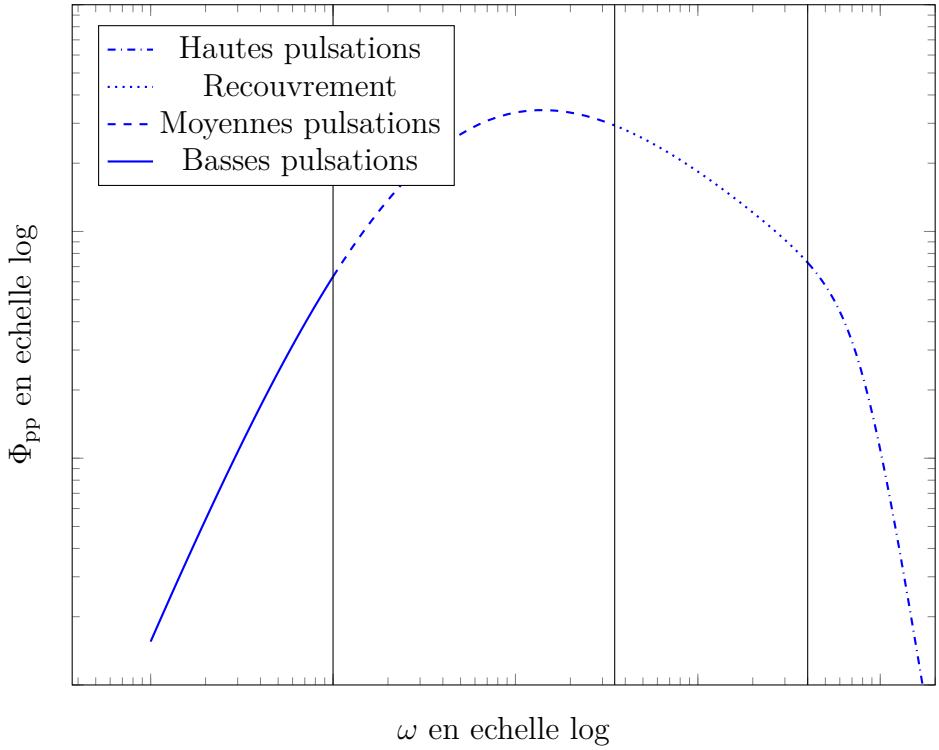


FIGURE 1.2.1 – Allure générale de $\Phi_{pp}(\omega)$ pour un écoulement de plaque plane

Les grandeurs utilisées pour l'adimensionnement sont l'épaisseur de couche limite δ, l'épaisseur de déplacement δ_1, la contrainte pariétale τ_w, la vitesse de frottement u_τ, la vitesse à l'extérieur de la couche limite U_e et la pression dynamique associée $q_e = \rho U_e^2/2$.

La plupart des expériences disponibles dans la littérature confirment ces comportements. L'objectif ici n'est donc pas de comparer ces spectres mais d'avoir un panorama des conditions expérimentales qui ont été testées. Pour cela, on s'appuie sur les travaux de Goody [Goody 04] qui a développé un modèle de $\Phi_{pp}(\omega)$ à l'aide de dix-neuf spectres mesurés dans des conditions expérimentales différentes et issus de sept publications. Les conditions expérimentales de ces essais sont détaillées dans la table 1.2. Nous avons, de plus, ajouté trois paramètres technologiques :

— le diamètre de la surface de mesure du microphone utilisé qui est inférieur au millimètre,

— la plage fréquentielle étudiée qui se situe en moyenne entre 40 et 20 kHz, ce

qui correspond au domaine audible.
Ces valeurs nous seront utiles pour dimensionner notre montage expérimental.

Auteur	Référence	U_e (ms^{-1})	Re_θ	$\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ (Pa)	Diamètre micro	$f_{\min}$ (Hz)	$f_{\max}$ (kHz)
Blake	[Blake 70]	$22,25$	8210	$3,06$	$0,8$ mm	85	12
		$28,77$	10200	$4,75$		44	18
		$37,95$	13200	$7,38$		57	19
		50	17000	$11,52$		71	4
Farabee *et al.*	[Farabee 91]	$15,5$	3386	$4,42$	$0,8$ mm	1	$10,2$
		$21,3$	4487	$3,39$			$17,1$
		$28,3$	6025	$2,71$			$24,4$
Gravante *et al.*	[Gravante 98]	$15,7$	4972	$\approx 1,2$	$0,7$ mm	35	25
		$15,7$	6241		$0,3$ mm		
		$15,3$	7076		$0,15$ mm		
Goody *et al.*	[Goody 00]	27.1	7300	3.53	0.5 mm	≈ 30	67
		31.3	23400	5.03			
McGrath *et al.*	[McGrath 87]	22.34	7010	2.81	1.4; 0.51 mm	≈ 80	≈ 10
		32.48	18820	5.3			
Olivero *et al.*	[Bally 90]		4261				
			5586				
	[Olivero-Bally 93]		8700				
			21400				
Schewe	[Schewe 83]	6.3	1400	0.23	1 mm	18	$1,2$

TABLE 1.2 – Mesures de $\Phi_{pp}(\omega)$ en écoulement de plaque plane utilisées par Goody dans [GOODY 04]

1.2.1.2 Écoulements ralentis

Nous allons maintenant présenter les expériences de mesures de fluctuations de pression pariétale en écoulement ralenti, en procédant en deux temps. Comme ces configurations sont technologiquement plus complexes que celles des écoulements de plaque plane, nous allons tout d'abord décrire chacun des montages puis nous comparerons les caractéristiques des couches limites étudiées. Comme pour les écoulements de plaque plane, nous avons repris une compilation d'expériences utilisées pour calibrer un modèle de fluctuations de pression. Il s'agit, en l'occurrence, de celles étudiées par Rozenberg *et al.* [Rozenberg 12] et Aupoix [Aupoix 15]. Ce type d'expérience peut être réalisé à partir de deux montages différents :

— le gradient de pression est généré par un profil d'aile placé dans la veine de la soufflerie,
— le gradient de pression est généré par les variations de section de la veine de la soufflerie.

Nous allons présenter des exemples de ces deux cas.

Expérience sur profil CD

Moreau et Roger [Moreau 05] ont utilisé la soufflerie acoustique de l'École Centrale de Lyon. Cette installation consiste en une veine carrée de 50 cm de côté et de 4 m de longueur et dont la sortie débouche dans une chambre anéchoïque. Pour étudier les fluctuations de pression pariétale sur un profil d'aile. Le profil testé est une aube de turbine fortement cambrée appelée CD (Controlled Diffusion) développée par la société Valeo. Il a une corde de 135, 6 mm, une envergure de 300 mm et une épaisseur maximale de 7 mm. Le profil n'est pas monté dans une veine fermée mais simplement enserré entre deux plans. Le jet ainsi créé débouche ensuite dans la chambre anéchoïque. Comme Moreau et Roger s'intéressent particulièrement au bruit de bord de fuite, leurs mesures de fluctuations de pression se font très près de ce dernier, à 95 % de longueur de corde. Il existe d'autres prises de pression sur le profil à l'extrados comme à l'intrados, mais elles sont beaucoup moins documentées que celles près du bord de fuite (et ne sont donc pas étudiées par Rozenberg *et al.* [Rozenberg 12] pour leur étude numérique du profil CD).

Expérience de Schloemer

Schloemer [Schloemer 67] présente l'expérience qu'il a réalisée dans la soufflerie de type Eiffel à bas taux de turbulence de l'Institut de Technologie Stevens. La veine a une section carrée de 30 cm de côté. Schloemer l'obstrue partiellement avec un profil monté sur la paroi supérieure afin de générer un gradient de pression. Il s'agit d'un profil NACA 0015 de 1, 21 m de corde et de 11, 3 cm d'épaisseur maximale. Les mesures de pression pariétale ne sont pas réalisées sur le fond inférieur de la soufflerie mais sur une plaque plane située au tiers inférieur de la veine. Schloemer n'étudie les fluctuations de pression qu'à un seul endroit qui est situé sur le dernier tiers du profil. Dans cette partie, le gradient de pression est constant.

Expérience sur profil ENABLE

Rozenberg *et al.* [Rozenberg 12] présentent une expérience de mesures de fluctuations de pression pariétale en présence d'un gradient de pression également réalisée dans la soufflerie acoustique de l'École Centrale de Lyon. Le gradient de pression est crée par un profil utilisé comme contre-forme. Il s'agit ici du profil Enable (Environmental Noise Associated with Turbulent Boundary Layer Excitation). Rozenberg *et al.* [Rozenberg 12] ne donnent pas de détails sur la forme de ce profil et se contentent de fournir une courbe de C_p pour le caractériser et d'indiquer sa corde qui est de 4 m. Le profil occupe donc la totalité de la longueur de la veine. Les fluctuations de pression sont mesurées dans la partie ralentie de l'écoulement, à 2, 5 m du bord d'attaque.

Expérience de Simpson

L'expérience de Simpson est intéressante car il s'agit d'un des rares cas où il y a plusieurs capteurs sur un montage. En effet, les expériences précédentes mettaient en œuvre un seul microphone et faisaient varier les conditions amont afin de réaliser plusieurs mesures tandis que Simpson effectue plusieurs mesures au sein d'une même couche limite. Les mesures de fluctuations sont présentées dans [Simpson 87] tandis que le montage expérimental et les autres mesures réalisées sont détaillés

dans [Simpson 81a, Simpson 81b, Shiloh 81]. La soufflerie utilisée a une longueur de veine de 8 m et une section carrée de 1 m de côté. Le plafond supérieur possède une contre-forme afin de générer un gradient de pression. La contre-forme est en trois tronçons de telle sorte que la veine ainsi formée soit successivement : une tuyère courbe, un plan divergent puis un plan convergent. Les mesures de fluctuations de pression sont toutes réalisées dans la partie ralentie de l'écoulement et réparties en 5 stations.

En plus des fluctuations de pression, Simpson a mesuré des profils de vitesse à la fois par fil chaud et par vélocimétrie laser tandis que le coefficient de frottement a été mesuré par des tubes de Preston et des films chauds.

Caractéristiques des couches limites mesurées

On a rassemblé dans la table 1.3 les caractéristiques des expériences décrites ci-dessus. On retrouve les mêmes valeurs pour U_e, Re_θ et les paramètres technologiques. Le gradient de pression est caractérisé par le paramètre de Clauser $\beta_C = {}^{\theta}/_{\tau_w}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ qui est de l'ordre de l'unité pour les cas présentés hormis celui du profil CD.

Expérience	U_e (ms^{-1})	Re_θ	β_C	$\sqrt{\langle p^2\rangle}$ (Pa)	Diamètre micro	$f_{\min}$ (Hz)	$f_{\max}$ (kHz)
Schloemer	$43,6$	9180	$2,07$	$8,7$	$0,7$ mm	160	20
ENABLE	$75,9$	17170	$1,11$		$0,5$ mm	350	16
CD	$16,9$	982	$20,9$		$0,5$ mm	160	≤ 10
Simpson	$21,8$	2900	$0,12$	$2,23$	$0,74$ mm	1	16
	$21,3$	3669	$0,21$	$2,33$			
	$20,4$	5201	$0,3$	$2,42$			
	$18,8$	8616	$0,43$	$2,56$			
	$17,0$	9888	$0,45$	$2,97$			

TABLE 1.3 – Mesures de $\Phi_{pp}(\omega)$ en écoulement ralenti

L'une des caractéristiques essentielles de ce type d'expérience est qu'il doit être possible de simuler avec précision les conditions générant les fluctuations de pression. Cela signifie ici être capable de retrouver les grandeurs moyennes de l'écoulement au sein de la couche limite à partir d'un calcul RANS. Avec cette contrainte, les montages avec une section variable de veine sont plus intéressants que ceux avec un profil d'aile pour trois raisons.

Premièrement, la gestion de la transition laminaire turbulent sera plus aisée pour la veine variable puisque la couche limite se développe le long de la paroi de la soufflerie qui est beaucoup plus longue que la corde d'un profil mis en veine. La turbulence sera donc pleinement développée sur une plus grande distance ce qui facilitera le calcul.

Deuxièmement, les bords de fuite et d'attaque d'un profil sont des zones délicates à simuler car des décollements peuvent y survenir. Ces phénomènes peuvent également apparaître sur une couche limite de fond de veine mais on peut les éviter en utilisant des critères semi-empiriques de décollement et modifier la contre-forme en conséquence.

Troisièmement, l'écoulement vu par un profil en soufflerie n'est pas le même que celui en atmosphère libre car les parois créent des interactions. On ne peut plus se

contenter de calculer l'écoulement autour du profil et il faut simuler l'ensemble de la veine de la soufflerie. Ce calcul est plus complexe et donc il est donc plus difficile d'en extraire des résultats précis.

C'est pourquoi nous donnons notre préférence aux montages utilisant une veine à section variable par rapport à ceux utilisant un profil d'aile complet.

1.2.2 Spectres fréquence-nombre d'onde

Maintenant que nous avons vu comment mesurer expérimentalement la partie fréquentielle de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$, nous allons aborder la mesure de la dépendance en espace. Nous allons présenter tout d'abord le rôle de chacune des variables $\boldsymbol{k}$ et ω. $\Phi_{pp}(\omega)$ permet de quantifier pour une pulsation ω donnée l'énergie fournie par la turbulence à la plaque. $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ permet de répartir cette énergie sur les nombres d'onde $\boldsymbol{k}$. Le mécanisme vibro-acoustique peut être vu comme un filtre vis-à-vis des nombres d'onde. Connaitre $\Phi_{pp}(\omega)$ avec précision est donc insuffisant car il faut être capable de comparer les nombres d'onde porteurs d'énergie avec les nombres d'ondes qui sont les plus récepteurs de la plaque pour faire une estimation correcte du bruit rayonné.

La mesure des spectres fréquence-nombre d'onde est plus complexe que la mesure des spectres uniquement fréquentiels car elle nécessite d'employer plusieurs capteurs. Nous allons présenter les différents systèmes de mesure qui ont déjà été utilisés. Cette revue s'appuie en partie sur le travail de synthèse de Bull [Bull 96]. La plupart des écoulements qui vont être abordés par la suite sont sans gradient de pression. Comme ce type d'écoulement a déjà été exposé, on ne s'attachera pas à décrire les conditions aérodynamiques, pour se focaliser sur les solutions technologiques utilisées afin de mesurer les spectres en fréquence-nombre d'onde. Nous allons présenter trois méthodes de mesure différentes :

— mesures directes par transformation de Fourier ;
— mesures filtrées par antenne acoustique ;
— mesures filtrées par plaques vibrantes.

Cette comparaison des techniques expérimentales nous permettra de choisir celle que nous emploierons pour notre montage.

1.2.2.1 Mesures directes par transformation de Fourier

Pour obtenir le spectre en fréquence-nombre d'onde, un moyen simple consiste à mesurer les inter-corrélations de pression pariétale en deux points deux temps et à calculer ensuite leur transformation de Fourier. *A priori* le plus simple consiste à "mailler" la paroi avec des microphones. Cette technique a, par exemple, été utilisée par Abraham et Keith alors qu'ils travaillaient sur un tunnel hydrodynamique. On trouve dans Abraham et Keith [Abraham 98] une description de leur montage expérimental. Comme ils ne s'intéressent qu'à la mesure de la partie longitudinale du spectre, leur maillage de microphones est en fait une ligne de 48 microphones, chacun ayant un diamètre de $3,81$ mm et étant espacés de $4,22$ mm les uns des autres. Ces microphones ont un diamètre plus important que ceux utilisés pour mesurer les spectres fréquentiels présentés en section 1.2.1. De même, l'interdistance semble importante vis-à-vis des longueurs de corrélations turbulentes dont l'ordre de grandeur peut être inférieur au millimètre.

Hormis ces problèmes dimensionnels, cette méthode possède quatre inconvénients :

— Il faut être capable d'acquérir simultanément des mesures provenant d'un très grand nombre de capteurs ;

— Ces capteurs doivent tous être parfaitement appairés en phase ;
— La taille, le nombre et l'espacement des microphones limitent la résolution en nombre d'onde en raison du théorème de Shannon ;
— Du repliement spectral est alors à craindre, c'est à dire que des grands nombres d'ondes non résolus viennent augmenter artificiellement la contribution des petits nombres d'onde.

Ces inconvénients ont été contournés par Ibars [Ibars 90] dans sa thèse. Il compare plusieurs dispositifs de mesure de spectres et propose de déplacer les microphones plutôt que de les laisser à des emplacements pré-déterminés. À l'aide de deux disques emboités l'un dans l'autre, il peut mesurer à l'aide de deux microphones des intercorrélations en deux points deux temps. En faisant balayer la surface à l'un des microphones, il peut ainsi obtenir le spectre en fréquence-nombre d'onde en s'affranchissant des contraintes évoquées précédemment. Cela a néanmoins un coût : le temps nécessaire à la mesure du spectre complet est considérablement plus long puisqu'il faut répéter la mesure pour chaque nouveau couple de points. Au lieu de quelques secondes avec un réseau de microphones, chaque spectre d'Ibars prend une dizaine d'heures. Il faut alors s'assurer que les caractéristiques de l'écoulement restent constantes durant toute la durée de l'acquisition.

Une solution intermédiaire entre un réseau de microphones fixes et un couple de microphones mobiles a été proposée par Robin *et al.* [Robin 13]. 56 microphones sont répartis en six spirales sur un disque et un microphone est placé au centre du disque. La disposition est telle que les distances entre le microphone central et les autres sont toutes distinctes deux à deux. Le disque peut tourner sur lui même afin de changer angulairement les corrélations mesurées. A même nombre de microphones donnés, cette méthode possède une bien meilleure résolution spectrale que celle Abraham et Keith et l'acquisition est considérablement réduite en temps par rapport à celle d'Ibars puisque 56 corrélations sont mesurées à chaque position du disque. Néanmoins, les problématiques d'acquisition, de synchronisation et de calibration d'un très grand nombre de capteurs perdurent.

1.2.2.2 Mesures filtrées par antenne acoustique

Afin de supprimer les phénomènes de repliement spectral, les expérimentateurs ont voulu filtrer les spectres. Ce filtrage peut être obtenu en utilisant de nouveau un réseau de capteurs appelé dans ce contexte antenne acoustique. La théorie du filtrage en nombre d'onde par antenne mono et bidimensionnelle a été établi par Maidanik [Maidanik 67a].

Comme cette technique ne sera pas employée dans le cadre de cette thèse, nous n'entrerons pas dans le détail des équations et nous allons simplement en donner l'idée générale. On considère une ligne de microphones régulièrement espacés avec laquelle on veut mesurer un phénomène de longueur d'onde a. Chaque signal est ensuite pondéré par un coefficient qui dépend de la position au sein de la ligne : il s'agira d'une sinusoïde de période spatiale a. Ainsi on privilégiera les phénomènes de longueur d'onde proche de a et on filtrera les autres. Le principe est le même pour un réseau bidimensionnel.

Cette technique a été employée à plusieurs reprises sous sa forme monodimensionnelle, par exemple par Manoha [Manoha 93] et Ibars [Ibars 90]. Il semble que Sherman [Sherman 90] soit le seul a l'avoir mis en œuvre pour un cas bidimensionnel. Il utilise deux antennes de 11×11 capteurs, car une seule antenne ne peut mesurer tout le domaine spectral. L'antenne de petite dimension et avec des capteurs très res-

serrés lui permet de mesurer une grande plage de longueurs d'onde sans repliement mais avec une faible résolution spectrale. À l'inverse, l'antenne de grande dimension a une bonne résolution spectrale mais ne peut faire des mesures que dans une toute petite gamme de nombres d'onde. La méthode des antennes acoustiques nécessite donc de connaitre avec précision les domaines spectraux que l'on souhaite mesurer afin de dimensionner correctement les antennes. De plus, en bidimensionnel, un très grand nombre de microphones est nécessaire, ce qui limite son utilisation.

Maidanik et Jorgensen [Maidanik 67b] ont imaginé un moyen de faire une mesure bidimensionnelle à l'aide d'une ligne de microphones. Pour cela, ils proposent de monter cette ligne sur un disque tournant et de répéter les acquisitions pour chaque position. Ils combinent alors les spectres monodimensionnels ainsi obtenus pour avoir un spectre bidimensionnel. Ils ne mettent pas cette méthode en application car les capteurs dont ils disposaient en 1967 étaient beaucoup trop gros pour obtenir une résolution spectrale suffisante. Elle a été reprise par Arguillat [Arguillat 06] dans sa thèse. Si deux antennes sont nécessaires pour couvrir correctement l'ensemble du domaine spectral, le nombre de microphones est réduit par rapport à l'expérience de Sherman ainsi que le temps d'acquisition par rapport à l'expérience d'Ibars puisqu'il n'y a qu'un seul degré de liberté à explorer.

1.2.2.3 Mesures filtrées par plaques vibrantes

Une autre piste de filtrage a également été testée. On remplace la paroi par de très minces plaques qui vont se mettre à vibrer sous l'excitation de la turbulence. La vibration des plaques pourra se décomposer en modes propres, chacun étant caractérisé par une longueur d'onde. Une plaque vibrante filtrera donc naturellement le spectre des fluctuations de pression et n'en conservera qu'une partie discrète associée à ses longueurs d'ondes propres. Cette technique a été mise en œuvre par Manoha [Manoha 93] dans sa thèse.

Si l'idée semble intéressante en théorie, sa mise en pratique est beaucoup plus délicate. Les modes propres d'une plaque dépendent directement de ses conditions aux limites et Manoha rapporte qu'il était très difficile d'obtenir les mêmes modes propres sur l'ensemble de ses plaques. De plus, dans les expériences de Manoha, les plaques interagissaient entres elles via le plancher de la soufflerie, ce qui dégradait les mesures. Enfin, pour reconstituer le spectre de fluctuation de pression via les vibrations, il faut être capable de mesurer les déplacements des plaques. Cela a été fait à l'aide d'accéléromètres collés sur les plaques. L'ajout de ces masses ponctuelles modifiait les fréquences propres, ce qui complexifiait encore plus le problème.

Même sans ces difficultés pratiques liées aux modes propres, cette technique restait malgré tout limitée pour mesurer un spectre complet à cause de son caractère discret. Chaque plaque permettait au mieux de mesurer une dizaine de points. Au début de sa thèse, Manoha envisageait de tester cette méthode sur une géométrie plus complexe en l'installant sur une ogive. Mais devant l'ensemble des difficultés rencontrées, cette solution fut abandonnée au profit des antennes acoustiques.

Cette méthode a aussi été testée par Robert [Robert 84] dans sa thèse mais il y donne moins de détails que Manoha [Manoha 93]. Elle a été utilisée plus récemment par DeJong *et al.* [DeJong 18] pour mesurer spécifiquement le spectre dans la région des petits nombres d'onde. Elle a également été utilisée sous une forme légèrement différente par Martin et Leehey [Martin 77]. Au lieu de faire vibrer des plaques, ils ont utilisé des membranes dont la physique de vibration n'est pas exactement la même que celles des plaques. Cela est dû au fait que la membrane peut être

tendue. La membrane étant une structure plus fine que la plaque, il sera plus facile de l'exciter. En revanche, son utilisation est plus délicate car son comportement modal dépend de sa tension. Martin et Leehey concluent en indiquant qu'ils ont des différences importantes avec ce qui a pu être mesuré par antenne acoustique ou bien en se comparant au modèle développé par Corcos [Corcos 64].

1.2.2.4 Comparaisons des méthodes de mesures en nombre d'onde

Nous allons à présent comparer les différentes solutions exposées ci-avant.

La mesure directe par transformation de Fourier reposant sur un maillage bidimensionnel de microphones ne peut pas être envisagée d'un point de vue matériel car trop de capteurs sont nécessaires. De plus, la résolution spectrale n'est pas assez fine par rapport aux échelles caractéristiques de la turbulence.

Les nombreuses difficultés techniques rencontrées par Manoha [Manoha 93] nous conduisent à ne pas retenir la mesure par plaques vibrantes.

Il ne reste donc plus que la mesure par antennes acoustiques ou bien le montage imaginé par Ibars [Ibars 90] et qui repose sur la transformation de Fourier. La comparaison de ces deux méthodes a été réalisée par Ibars [Ibars 90] en les testant sur le même écoulement. Il en ressort que l'antenne acoustique permet d'explorer un domaine fréquence-nombre d'onde plus restreint et avec une moins bonne résolution. Son seul avantage par rapport au montage d'Ibars est que le temps nécessaire à la mesure est bien plus court. Ibars indique cependant que si l'acquisition est automatisée et que les conditions d'opération de la soufflerie sont contrôlées, la durée n'est pas un problème.

C'est donc cette solution technologique que nous emploierons pour notre montage expérimental.

1.3 Modèles de fluctuations de pression

Nous avons donné une première idée de la forme de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ en nous appuyant sur des mesures expérimentales. Nous allons maintenant la décrire plus finement en présentant les modèles de spectres $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ disponibles dans la littérature. Cette section a pour but de montrer l'évolution de ces modèles ; passant de simples ordres de grandeurs à une description relativement fine de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$.

Comme les fluctuations de pression sont générées au sein d'une couche limite, leurs corrélations (et leur spectre) vont dépendre des caractéristiques de cette dernière. Les modèles les plus simples sont basés sur quelques paramètres de la couche limite comme les grandeurs extérieures, les épaisseurs intégrales, le frottement et les nombres adimensionnés qui leur sont associés. Cependant, l'étude du mécanisme de formation des fluctuations montre que chaque altitude de la couche limite contribue au comportement pariétal. Une modélisation plus fine doit donc reposer sur les profils de la couche limite et non uniquement sur quelques paramètres.

Nous allons présenter successivement ces deux grandes classes de modèles en clôturant par l'une des modélisations les plus abouties et que nous utiliserons dans cette thèse.

1.3.1 Modèles reposant sur des paramètres de la couche limite

Nous avons vu en 1.2 la différence entre la dépendance spatiale et la dépendance fréquentielle $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$. La plupart des modèles de fluctuations de pression séparant

temps et espace seront donc de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k}) &= \Phi_{pp}(\omega)\,\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}) \\ \Phi_{pp}(\omega) &= \iint \Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

La partie temporelle est la plus facile à obtenir expérimentalement puisqu'il suffit d'un seul capteur. C'est sur cette dernière que les efforts se sont le plus concentrés et où l'on trouve le plus de modèles. La partie spatiale est plus délicate à traiter et les travaux sont plus rares que ce soit en expérimental comme en modélisation. Nous allons présenter successivement ces deux types de modèles. Pour la partie fréquentielle, nous comparerons les modèles avec les comportements généraux observés pour la plaque plane et réunis dans la table 1.1.

1.3.1.1 Modélisation temporelle

Il existe bon nombre de modèles de spectres temporels de fluctuations de pression pariétale. Pratiquement chaque expérimentateur a essayé d'accoler une fonction normalisée à ses données. Nous ne citerons que des modèles ayant été éprouvés sur un nombre significatif de données expérimentales.

Modèles d'Efimtsov

Efimtsov [Efimtsov 82] a développé un modèle semi-empirique en s'appuyant sur des essais en vol pour des nombres de Mach entre $0,4$ et 2 et des nombres de Reynolds entre $0,5.10^8$ et $4.85.10^8$:

$$\frac{\Phi_{pp}(\omega)\,U_\mathrm{e}}{\tau_\mathrm{w}^2\delta} = \frac{0.5 \times 0,01}{1 + 0,02\left(\frac{\omega\delta}{u_\tau}\right)^{2/3}}\frac{U_\mathrm{e}}{u_\tau} \tag{1.3.2}$$

Efimtsov [Efimtsov 84] a ensuite amélioré son modèle à partir d'essais en soufflerie pour des nombres de Mach entre $0,015$ et 4 et des nombres de Reynolds entre 600 et $1,5\,10^5$.

$$\frac{\Phi_{pp}(\omega)}{\rho^2\delta U_\mathrm{e}^3} = \frac{0,5 \times 0,01\beta}{\left(1 + 8,10^{-6}\left(\frac{\omega\delta}{u_\tau}\right)^2\right)^{1/3} + 0,01\beta Re_\tau\left(\frac{\frac{\omega\delta}{u_\tau}}{Re_\tau}\right)^{10/3}}\left(\frac{u_\tau}{U_\mathrm{e}}\right)^3 \tag{1.3.3}$$

avec

$$\begin{aligned} Re_\tau &= \delta^+\left[1 + 0,89\frac{\gamma - 1}{2}M^2\right]^{-0,905-1} \\ \beta &= \left[1 + \left(\frac{3000}{Re_\tau}\right)^3\right]^{1/3} \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Ces deux modèles font partie des premiers développés pour décrire $\Phi_{pp}(\omega)$. Il est donc normal de ne pas retrouver les tendances exposées dans la table 1.1 et qui correspondent à des mesures faites postérieurement. Le premier modèle a pour but de décrire le maximum du spectre et un début de décroissance pour les hautes fréquences avec une évolution en $\omega^{-2/3}$. Cette pente est trop faible par rapport aux valeurs données par la table 1.1 pour les régions de recouvrement et des hautes fréquences. Le deuxième modèle propose deux évolutions pour les hautes fréquences : $\omega^{-2/3}$ puis $\omega^{-10/3}$, ce qui est plus conforme à ce que l'on peut observer. Le paramètre β permet de déterminer la limite entre ces deux évolutions.

Modèle de Goody

Goody [Goody 04] a développé un modèle semi-empirique en se basant sur dix-neuf sources expérimentales différentes.

$$\frac{\Phi_{pp}(\omega)\,U_{\mathrm{e}}}{\tau_{\mathrm{w}}^2\delta} = \frac{1,5\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)^2}{\left[\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)^{0,75}+0,5\right]^{3.7}+\left[1.1\,(R_T)^{-0,57}\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)\right]^7} \tag{1.3.5}$$

Avec R_T le rapport des temps caractéristiques des parties interne et externe de la couche limite :

$$R_T = \frac{\left(\frac{\delta}{U_e}\right)}{\left(\frac{\nu}{u_\tau^2}\right)} = \frac{u_\tau^2\delta}{U_e\nu} \tag{1.3.6}$$

Le modèle est applicable pour une couche limite respectant

$$1,4\times10^3 < \mathrm{Re}_\theta < 2,34\times10^4 \tag{1.3.7}$$

ce qui correspond aux couches limites utilisées par Goody pour calibrer le modèle.

Ce modèle s'articule autour de trois termes :

1. Le numérateur $1,5\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)^2$ décrit le spectre pour les basses fréquences. On retrouve une évolution en ω^2 ;
2. Le terme $\left[1,1\,(R_T)^{-0,57}\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)\right]^7$ décrit le spectre pour les hautes fréquences. En le combinant avec le numérateur, on obtient une évolution en ω^{-5} ;
3. Le terme $\left[\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)^{0,75}+0.5\right]^{3,7}$ décrit le spectre dans la région de recouvrement. En le combinant avec le numérateur, on obtient une évolution en $\omega^{-0,7}$.

Le rapport des temps caractéristiques R_T sert à fixer la limite entre la région de recouvrement et la région des hautes fréquences. Cette limite est atteinte lorsque les deux termes du dénominateur sont du même ordre de grandeur.

Ces trois pentes sont conformes avec ce qui a été observé dans la table 1.1. Le modèle de Goody permet donc de décrire correctement $\Phi_{pp}(\omega)$ pour une couche limite sans gradient de pression.

Modèle de Catlett *et al.*

Comme le modèle de Goody décrit correctement le cas de l'écoulement de plaque plane, certains auteurs ont voulu l'adapter pour des écoulements ralentis. C'est le cas de Catlett *et al.* [Catlett 14] qui ont repris la forme du modèle de Goody en remplaçant ses constantes par des fonctions dépendant des grandeurs de la couche limite.

$$\frac{\Phi_{pp}(\omega)\,U_{\mathrm{e}}}{\tau_{\mathrm{w}}^2\delta} = \frac{a\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)^b}{\left[\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)^c+d\right]^e+\left[f\,(R_T)^g\left(\frac{\omega\delta}{U_{\mathrm{e}}}\right)\right]^h} \tag{1.3.8}$$

Les fonctions a, b, c, d, e, f, g, h sont déterminées à l'aide de données expérimentales. Ils considèrent l'écoulement sur la partie arrière d'un profil symétrique à pente constante et en faisant varier la vitesse d'écoulement et l'angle du profil (et donc le

gradient de pression subit par la couche limite) ils obtiennent leur base données. Les fonctions sont données par rapport aux valeurs de Goody :

$$\begin{aligned}
\ln(a-1,5) &= 4,735\left(\beta_\Delta Re_\Delta^{0,35}\right)^{0.162} - 5,379 \\
b-2 &= 0 \\
c-0,75 &= 2,210\left(\beta_\delta\right)^{0,559} - 0,069 \\
d-0,5 &= 0.072\left(\beta_\Delta Re_\Delta^{0,35}\right)^{0,552} + 0,103 \\
e-3,7 &= -0.138\left(\beta_\Delta Re_\Delta^{0,35}\right)^{0,310} + 0,155 \\
f-1,1 &= 8,862\left(HRe_\Delta^{0,35}\right)^{-1.414} - 1,241 \\
g+0,57 &= 1,103\left(\beta_\delta\right)^{0.690} + 0,038 \\
h-7 &= 0,959\left(\beta_\Delta Re_\Delta^{0,35}\right)^{0,052} + 0,207
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Δ est le paramètre de Rotta-Clauser défini par $\Delta = \delta_1\sqrt{\dfrac{2}{C_f}}$. $\beta_\delta = \dfrac{\delta}{q}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ et $\beta_\Delta = \dfrac{\Delta}{q}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ sont deux paramètres de Clauser définis avec deux longueurs différentes. $Re_\Delta = \dfrac{\Delta U_\mathrm{e}}{\nu}$ est le nombre de Reynolds basé sur Δ. Enfin H est le facteur de forme.

Le modèle est applicable pour les couches limites vérifiant :

$$\begin{aligned}
4\times10^3 <& Re_\theta < 2\times10^4 \\
10 <& R_T < 150 \\
0,5 <& \frac{\omega\delta}{U_\mathrm{e}} < 200
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

La forme des fonctions a, b, c, d, e, f, g, h a été déterminée de telle sorte que les mesures soient convenablement reproduites. Cette démarche repose sur une analyse mathématique plutôt que physique. À défaut d'avoir d'autres cas de validation pour éprouver ce modèle, on retiendra principalement les paramètres qu'il utilise : $\Delta, \beta_\Delta, \beta_\delta, \mathrm{Re}_\Delta, H$.

Modèle de Rozenberg, Robert et Moreau

Rozenberg *et al.* [Rozenberg 12] ont également construit un modèle pour $\Phi_{pp}(\omega)$ par transformation de celui de Goody. D'une part, δ est systématiquement remplacé par l'épaisseur de déplacement $\delta^\star$ car cette grandeur est jugée plus pertinente pour l'étude des couches limites turbulentes. D'autre part, les constantes du modèle de Goody sont remplacées par des fonctions prenant en compte le gradient de pression. Il a été élaboré à partir de 19 expériences de couches limites ralenties.

$$\frac{\Phi_{pp}(\omega)\,U_\mathrm{e}}{\tau_{\max}^2\delta^\star} = \frac{0,5\left[2,82\Delta^2\left(6,13\Delta^{-0,75}+F_1\right)^{A_1}\right]\left[4,2\frac{\Pi}{\Delta}+1\right]\left(\frac{\omega\delta^\star}{U_\mathrm{e}}\right)^2}{\left[4,76\left(\frac{\omega\delta^\star}{U_\mathrm{e}}\right)^{0.75}+F_1\right]^{A_1}+\left[8,8\left(R_T\right)^{-0,57}\left(\frac{\omega\delta^\star}{U_\mathrm{e}}\right)\right]^{A_2}} \tag{1.3.11}$$

avec respectivement

$$\begin{aligned} A_1 &= 3,7 + 1,5\beta_C \\ A_2 &= \min\left(3,19\left(R_T\right)^{-0,5}\right) + 7 \\ F_1 &= 4,76\left(\frac{1,4}{\Delta}\right)^{0,75}\left[0,375A_1 - 1\right] \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

$\Delta = \dfrac{\delta}{\delta^\star}$ est un paramètre de forme tandis que Π est le paramètre de sillage de Coles. Il intervient dans le profil de vitesse de couche limite turbulente, dans la région de sillage où il caractérise l'écart par rapport à la loi log :

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + C^+ + \frac{\Pi}{\kappa}2\sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \\ \kappa &= 0,41 \\ C^+ &= 5,1 \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Π est déterminé à l'aide de l'équation suivante :

$$2\Pi - \ln\left(1+\Pi\right) = \kappa\frac{U_e}{u_\tau} - \ln\left(\frac{U_e\delta^\star}{\nu}\right) - \kappa C^+ - \ln\left(\kappa\right) \tag{1.3.14}$$

Pour plus de détails, se reporter à Coles [Coles 56].
Le modèle de Rozenberg *et al.* est applicable aux couches limites respectant

$$5,6\times10^2 < Re_\theta < 1,72\times10^4 \tag{1.3.15}$$

De même que le modèle de Catlett *et al.* [Catlett 14] ce travail repose sur une approche mathématique. On note néanmoins que les paramètres utilisés sont différents. Catlett *et al.* basent leur analyse principalement sur des grandeurs extérieures à la couche limite tandis que Rozenberg, Robert et Moreau cherche à caractériser la forme du profil des vitesses.

Conclusion

L'exposé de ces modèles de $\Phi_{pp}\left(\omega\right)$ reposant sur des paramètres de la couche limite permet de faire deux constats. Ils fournissent un bon ordre de grandeur puisqu'ils décrivent correctement le cas de l'écoulement de plaque plane. En revanche, ils ne sont pas adaptés pour décrire des écoulement en présence de gradients de pression quelconques car les démarches mises en œuvre consistent à interpoler des données expérimentales. Des modèles construits de cette manière ne sont donc valides que pour décrire les cas à partir desquels ils sont construits. Nous ne pouvons donc pas nous restreindre à ces derniers. Une validation supplémentaire est nécessaire avant de connaitre l'étendue réelle de ces modèles

1.3.1.2 Modélisation spatiale

Après avoir traité la partie fréquentielle de la modélisation de $\Phi_{pp}\left(\omega,\boldsymbol{k}\right)$, nous allons voir les modèles de la partie spatiale. Avant cela, nous allons introduire quelques notions de vocabulaire du plan d'onde (k_x, k_z). Pour cela, nous nous appuierons sur la figure 1.3.1 qui met en évidence trois zones pour une pulsation ω donnée :

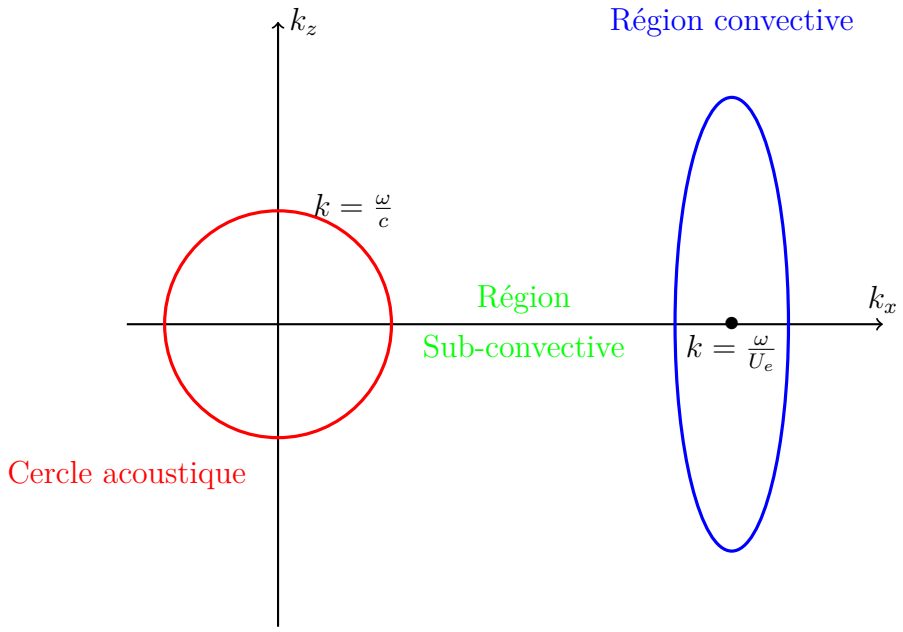


FIGURE 1.3.1 – Régions du plan des nombres d'onde $k = (k_x, k_z)$

1. Le cercle $\left(c\sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \omega\right)$ et le disque $\left(c\sqrt{k_x^2 + k_z^2} \leq \omega\right)$ acoustiques. Les nombres d'ondes sur le cercle correspondent aux ondes acoustiques. De même, les fluctuations de pression liées aux nombres d'ondes à l'intérieur du disque sont dues à l'acoustique et non à la turbulence. Les modèles pour $\Phi_{pp}(\omega)$ n'auront donc pas besoin de décrire cette zone avec précision ;
2. La région convective centrée autour du point $(k_x, k_z) = (\omega/U_e, 0)$ qui correspond aux ondes transportées à la célérité de l'écoulement. C'est dans cette région que $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ atteint son maximum ;
3. La région sub-convective qui est située entre les deux précédentes. Cette région possède des niveaux pour $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ plus faibles que dans la région convective. Cependant, le rôle de la turbulence n'y est pas négligeable devant l'acoustique comme dans le disque acoustique.

Comme nous l'avons évoqué précédemment, il ne faut pas se contenter de décrire la région convective où $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ concentre ses plus hauts niveaux. En raison du filtrage en nombre d'onde réalisé par la vibro-acoustique, la région sub-convective peut contribuer significativement au bruit rayonné.

Modèle de turbulence gelée

L'un des tous premiers modèles de fluctuations de vitesse au sein d'une couche limite turbulente a été réalisé par Taylor [Taylor 38]. Ce modèle repose sur le concept de turbulence gelée où l'on suppose que seule la convection est à prendre en compte pour le transport des fluctuations. Pour une pulsation ω donnée, le spectre est concentré sur le point convectif $(k_x, k_z) = (\omega/U_e, 0)$. Ce modèle développé pour décrire les fluctuations de vitesse est correct si l'on s'intéresse à des corrélations longitudinales et que la taille caractéristique des structures étudiées n'est pas affectée par la viscosité, c'est à dire uniquement les plus grosses structures de l'écoulement.

Les inconvénients de cette modélisation ont été étudiés par Manoha [Manoha 93]. Par définition de ce modèle, l'intercorrélation entre deux points de la plaque ne tend

pas vers 0 lorsque les points sont écartés. Cette absence de décorrélation rend impossible tout application vibro-acoustique réaliste. De plus, la région subconvective est totalement négligée. Ce modèle ne peut donc pas convenir pour le cadre de notre étude.

Modèle de Corcos

Afin de palier ce problème de décorrélation, Corcos [Corcos 64] a conçu un autre modèle. À partir de données expérimentales, il a constaté que la pression se décorrélait exponentiellement dans la direction transversale et en suivant une sinusoïde exponentiellement amortie dans la direction longitudinale. Il a alors proposé le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}\left(x, z, x+\delta x, z+\delta z, \omega\right) &= \Phi_{pp}\left(\omega\right) \exp\left(-\alpha\left|\frac{\omega\delta x}{U_c}\right| - \beta\left|\frac{\omega\delta z}{U_c}\right| - j\frac{\omega\delta x}{U_c}\right) \\ U_c &= 0,7U_e \\ \alpha &= 0,116 \\ \beta &= 0,7 \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Une fois transporté dans le domaine des nombres d'ondes, il obtient la formulation suivante :

$$\Phi_{pp}\left(k_x, k_z, \omega\right) = \Phi_{pp}\left(\omega\right) \frac{\alpha}{\pi k_c\left[\alpha^2 + \left(k_x/k_c + 1\right)^2\right]} \frac{\beta}{\pi k_c\left[\alpha^2 + \left(k_z/k_c\right)^2\right]}, \quad k_c = \omega/U_c \tag{1.3.17}$$

Ce modèle est correct pour les nombres d'ondes de la région convective. Il est en revanche plus imprécis dans la région acoustique et la région subconvective car il y donne des niveaux trop importants.

Corcos a appliqué son modèle dans [Corcos 63]. Les capteurs de pression ayant une surface de mesure qui n'est pas ponctuelle, il existe donc une taille limite de structure mesurable. Les échelles spatiales et temporelles étant en première approche reliées par la vitesse de convection, cette limite spatiale implique une limite fréquentielle. Corcos propose donc d'utiliser son modèle pour corriger les mesures où la résolution spectrale est insuffisante. Ce faisant, il augmente artificiellement le domaine de mesure du capteur.

Ce modèle peut être considéré comme une référence et il est à la base de la plupart des modélisations $\Phi_{pp}\left(\omega, \boldsymbol{k}\right)$ utilisées en vibro-acoustique.

Modèles d'Efimtsov

Le modèle de Corcos a ensuite été décliné en de nombreuses versions, les différences portant sur les coefficients $\alpha, \beta, U_c/U_e$. Nous n'allons pas tous les lister mais en présenter un qui, de nouveau, s'appuie sur de nombreux essais et a le mérite de prendre en compte des grandeurs de la couche limite pour caractériser la décorrélation des fluctuations : le modèle d'Efimtsov [Efimtsov 82]. Il propose les deux longueurs de corrélation :

$$\Lambda_x = \frac{U_c}{\omega\alpha} = \delta\left[\left(a_1 \mathrm{Sh}\frac{u_\tau}{U_c}\right)^2 + \frac{a_2^2}{\mathrm{Sh}^2 + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2}\right]^{-1/2}$$
$$\Lambda_z = \frac{U_c}{\omega\beta} = \begin{cases} \delta\left[\left(a_4 \mathrm{Sh}\frac{u_\tau}{U_c}\right)^2 + \frac{a_5^2}{\mathrm{Sh}^2+\left(\frac{a_5}{a_6}\right)^2}\right]^{-1/2} & , M_e < 0,75 \\ \delta\left[\left(a_4 \mathrm{Sh}\frac{u_\tau}{U_c}\right)^2 + a_7^2\right]^{-1/2} & , M_e > 0,9 \end{cases} \tag{1.3.18}$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,1 \quad \mathrm{Sh} = \omega\delta/u_\tau \\ a_3 &= 1,54 \quad a_2 = 72,8 \\ a_5 &= 548 \quad a_4 = 0,77 \\ a_7 &= 5,66 \quad a_6 = 13,5 \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

Bien que ce modèle constitue une amélioration par rapport au modèle de Corcos en reproduisant plus fidèlement les cas de validation expérimentaux, les zones subconvective et acoustique ne sont toujours pas décrites correctement. De plus, les modifications apportées concernent le régime transsonique, ce qui est en dehors de notre cadre d'étude. Ce modèle n'est donc pas plus pertinent pour notre étude que le modèle de Corcos.

Modèles de Ffowcs Williams, Hwang et Geib

Ffowcs Williams [Ffowcs-Williams 82] a construit un modèle en partant de l'analogie de Lighthill. Le but de la démarche est de mieux caractériser les régions acoustiques et subconvectives. La formulation contient de nombreuses constantes et fonctions à calibrer expérimentalement. On ne trouve qu'une partie de ces fonctions dans Ffowcs Williams [Ffowcs-Williams 82].

Hwang et Geib [Hwang 84] ont repris ces travaux. Leur apport consiste à simplifier mathématiquement la formulation de Ffowcs Williams en déterminant des expressions approchant sa formulation mais beaucoup moins lourdes à calculer. Ils aboutissent au résultat suivant, qui est en fait très proche de la formulation de Corcos :

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}(k_x, k_z) &= \left(\frac{k_x}{k_c}\right)^2 \Phi_{pp,\mathrm{Corcos}}(k_x, k_z) \\ k_c &= \frac{\omega}{U_c} \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Ce modèle sous-estime moins les niveaux des régions acoustiques et subconvectives que les modèles précédents mais sans pour autant les décrire correctement. Il souffre en revanche de deux inconvénients. D'une part, la normalisation n'est plus assurée : $\iint \Phi_{pp}(k_1, k_3)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_z \neq 1$, et d'autre part, la région au delà de la région de convection est moins bien décrite par la correction qui améliore les régions à petits nombres d'ondes.

Ce modèle repose sur moins de données expérimentales que les précédents. Il est néanmoins intéressant car c'est l'un des premiers qui essaie de décrire la dépendance en nombre d'onde au delà de la zone convective.

1.3.2 Modèles reposant sur les profils de couche limite

Nous avons vu les limitations des modèles reposant uniquement sur des paramètres de la couche limite. Afin de les pallier, il faut comprendre plus en détail le mécanisme de formation des fluctuations de pression pariétale. On peut montrer qu'elles sont régies par une équation de Poisson :

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(2U_i u_j + u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle\right) \tag{1.3.21}$$

Deux termes sources apparaissent :

— $-2\rho \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U_i u_j$ correspond aux interactions de la turbulence avec l'écoulement moyen,

— $-\rho \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle\right)$ correspond aux interactions de la turbulence avec elle même.

Comme seuls des écoulement stationnaires sont étudiés, l'hypothèse d'ergodicité peut être faite permettant d'assimiler les moyennes temporelles et d'ensembles. Les intercorrélations au même point et même temps seront notées par $\langle\rangle$ plutôt que de faire appel à l'opérateur $\mathbb{E}_t$ ou aux notations d'intercorrélations S.

Les fluctuations de vitesse peuvent donc être vues comme des sources pour les fluctuations de pression pariétale. Sans une bonne connaissance des caractéristiques des premières, on ne peut espérer prévoir correctement les secondes. Quantifier précisément ces sources ne peut se faire en se basant uniquement sur quelques grandeurs caractéristiques de la couche limite. La précision peut être améliorée si la caractérisation de ces sources repose sur les champs moyens de la couche limite. La philosophie des modèles qui vont être présentés par la suite sera donc d'extraire des informations d'un calcul RANS afin de modéliser ces sources et *in fine* les fluctuations de pression pariétale.

Trois types d'approche de la résolution de l'équation de Poisson vont être présentées :

1. Résolution simplifiée ;
2. Résolution dans le domaine pulsations-nombres d'ondes ;
3. Résolution dans le domaine temps-espace.

1.3.2.1 Résolution simplifiée

Modèle de Smol'yakov

Smol'yakov [Smol'yakov 00] a développé un modèle en partant d'une modélisation de $\Phi_{pp}(\omega, \boldsymbol{k})$ proposée par Blake [Blake 86a] :

$$\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega) \propto \rho \frac{k_1}{|\boldsymbol{k}|} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} \Phi(y)_{vv}(\boldsymbol{k}, \omega) \exp\left(-|\boldsymbol{k}|\, y\right) \mathrm{d}y \tag{1.3.22}$$

L'idée principale est de calculer $\Phi_{pp}(k_1, k_3, \omega)$ à l'aide d'une formule simplifiée et non via sa définition :

$$\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega) \propto \rho^2 \left(\frac{k_1}{|\boldsymbol{k}|}\right)^2 \int_0^\infty G(\boldsymbol{k}, \omega, y) \exp\left(-2\,|\boldsymbol{k}|\, y\right) \mathrm{d}y \tag{1.3.23}$$

G correspond à une distribution de sources situées à la distance y de la paroi. Sa partie fréquentielle est résolue à l'aide de l'hypothèse de turbulence figée de Taylor :

$$G\left(\boldsymbol{k},\omega,y\right)=B\left(\mathbf{k},y\right)\delta^{0}\left(k_{x}-\frac{\omega}{U}\right) \tag{1.3.24}$$

B est choisie de façon à respecter deux tendances observées expérimentalement :
— Au voisinage de $\boldsymbol{k}=0$, $G\left(\boldsymbol{k},\omega,y\right)$ se comporte comme $\left|\boldsymbol{k}\right|^{2}$;
— $G\left(\boldsymbol{k},\omega,y\right)$ tend vers 0 quand $\left|\boldsymbol{k}\right|\rightarrow\infty$.
La fonction retenue est la suivante :

$$B\left(\boldsymbol{k},y\right)=vl^{5}\left(k_{x}^{2}+\beta^{2}k_{z}^{2}\right)\exp\left(\frac{l}{\pi}\left[\left|\boldsymbol{k}\right|+\left|k_{x}\right|\left(\beta-1\right)\right]\right) \tag{1.3.25}$$

où v et l sont reliées aux grandeurs moyennes de l'écoulement :

$$\begin{aligned} v&=\sqrt{-\left\langle uv\right\rangle}\\ l&=\sqrt{-\left\langle uv\right\rangle}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}^{-1}\end{aligned} \tag{1.3.26}$$

Cependant, Smol'yakov n'est pas allé jusqu'à coupler cette formulation avec un code de calcul RANS. En utilisant des profils de U et $\langle uv\rangle$ d'une plaque plane, il en a déduit un modèle paramétrique pour $\Phi_{pp}\left(\omega\right)$. Si ce modèle ne présente pas d'intérêt nouveau par rapport aux modèles à paramètres présentés précédemment, sa démarche de modélisation pour $\Phi_{pp}\left(\boldsymbol{k},\omega\right)$ est intéressante.

Modèles de Chase

La même démarche a été suivi par Chase [Chase 80]. A partir d'une résolution théorique de l'équation de Poisson, il a déduit le modèle semi-empirique suivant :

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}\left(\mathbf{k},\omega\right)&=\rho^{2}u_{\tau}^{3}\left(c_{M}k_{x}^{2}K_{M}^{-5}+c_{T}\mathbf{k}^{2}K_{M}^{-5}\right)\\ K_{i}^{2}&=\frac{\left(\omega-U_{c}k_{x}\right)^{2}}{h_{i}^{2}u_{\tau}^{2}}+\mathbf{k}^{2}+\left(b_{i}\delta\right)^{-2},i=M,T\end{aligned} \tag{1.3.27}$$

Les termes indicés par $i=M$ correspondent aux sources mouvement moyen/turbulence et les termes indicés par $i=T$ correspondent aux termes turbulence/turbulence de l'équation de Poisson 1.3.21. Le but de ce modèle est se proposer une description plus fine de la région sub-convective par rapport au modèle de Corcos qui se concentre uniquement sur la région convective. On pourra se référer à la figure 1.3.1 pour la localisation des différentes régions du plan (k_x,k_z). Son modèle dépend de six constantes empiriques C_i,b_i et h_i pour $i=M,T$. Chase constate qu'il n'existe pas de valeurs universelles pour ces constantes car il obtient de grandes disparités en fonction des données expérimentale qu'il utilise.

Il propose une version amélioré de son modèle décrivant plus finement les termes turbulence/turbulence et en tenant compte des contributions acoustiques pour les petits nombres d'onde. La formulation obtenue dans [Chase 87] est la suivante :

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}\left(\mathbf{k},\omega\right)&=\frac{\rho^{2}u_{\tau}^{3}}{\left[K_{+}^{2}+\left(b\delta\right)^{-2}\right]^{5/2}}\left(c_{T}\mathbf{k}^{2}\left[\frac{K_{+}^{2}+\left(b\delta\right)^{-2}}{\mathbf{k}^{2}+\left(b\delta\right)^{-2}}\right]+c_{M}k_{x}^{2}\right)\\ K_{+}^{2}&=\frac{\left(\omega-U_{c}k_{x}\right)^{2}}{h^{2}u_{\tau}^{2}}+\mathbf{k}^{2}\end{aligned} \tag{1.3.28}$$

1.3.2.2 Résolution dans le domaine pulsations-nombres d'ondes

L'équation de Poisson peut être résolue à l'aide d'une fonction de Green, ce qui a été initialement proposé par Kraichnan [Kraichnan 56]. Cependant, il n'a traité que les écoulements uniformes et à cisaillement constant car les profils moyens d'une couche limite turbulente ne lui étaient pas accessibles. De plus, la résolution par fonction de Green nécessite des calculs d'intégrales ne pouvant être résolues analytiquement et doivent être évaluées numériquement ce qui était également inaccessible à Kraichnan. Ce n'est que vingt ans plus tard que les idées de Kraichnan ont pu partiellement être mises en pratique par Panton et Linebarger [Panton 74] grâce aux progrès informatiques. Cependant, les profils moyens utilisés étaient semi-analytiques et non encore extraits de calculs RANS. Cette étape fut alors franchie par Lee *et al.* [Lee 05, Lee 09], Remmler *et al.* [Remmler 10], Parchen [Parchen 98] et Bertagnolio *et al.* [Bertagnolio 09, Bertagnolio 14] qui utilisèrent la démarche proposée par Kraichnan pour calculer uniquement le spectre fréquentiel des fluctuations de pression pariétal et non pas dans le cas général donnant à la fois les aspects spatiaux et temporels.

C'est également le cas du modèle développé par Lysak [Lysak 06]. Malgré son caractère partiel, une attention particulière va être apportée à ce modèle car il s'agit d'un des points de départ principaux de notre travail. Lysak cherche à modéliser les fluctuations de pression pariétale dans un écoulement turbulent de conduite circulaire. Il part de l'équation de Poisson régissant les fluctuations de pression :

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(2U_i u_j + u_i u_j - \overline{u_i u_j}\right) \tag{1.3.29}$$

Lysak ne retient que le premier terme source car il est à la fois plus facile à modéliser et prépondérant devant les deux autres. Cette hypothèse a été avancée par Kraichnan [Kraichnan 56] et rapportée par Willmarth [Willmarth 75]. Une synthèse des discussions a été réalisée par Bull [Bull 96]. En supposant que l'écoulement moyen est de la forme $(U, V, W) = (U(y), 0, 0)$, il ne reste plus que :

$$\nabla^2 p = -2\rho \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = q(x, y, z, t) \tag{1.3.30}$$

Pour avoir un exposé clair de l'emploi des fonctions de Green pour résoudre les EDP en 3D, nous recommandons l'ouvrage d'Angel *et al.* [Angel 12]. En l'occurrence, la solution en espace semi-infini conduit à la pression pariétale suivante :

$$p_w(x, 0, z, t) = \int_0^\infty \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{q(\xi_x, \xi_y, \xi_z, t)}{2\pi\sqrt{(x-\xi_x)^2 + \xi_y^2 + (z-\xi_z)^2}} \mathrm{d}\xi \tag{1.3.31}$$

Lysak prend alors la transformée de Fourier spatio-temporelle de l'expression (1.3.31), en supposant qu'il y a homogénéité dans les plans parallèles à la paroi et en intervertissant l'ordre des intégrations il obtient :

$$\begin{aligned} p_w(\boldsymbol{k}, \omega) &= \int_0^\infty |\boldsymbol{k}|^{-1} \, exp\left(-|\boldsymbol{k}| \, y\right) q(k, \omega, y) \, \mathrm{d}y \\ q(\boldsymbol{k}, \omega, y) &= \iiint q(x, y, z, t) \exp\left(-j\left(k_x x + k_z z + \omega t\right)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

Cette expression est ensuite transformée pour faire apparaitre les inter-corrélations de p_w et q :

$$\begin{aligned}
\Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega) &= \int_0^\infty |\mathbf{k}|^{-1}\exp(-2|\mathbf{k}|y)\int_{-y}^\infty |k|^{-1}\exp(-|\boldsymbol{k}|\delta y)\,\Phi_{qq}(\boldsymbol{k},\omega,y,y+\delta y)\,\mathrm{d}\delta y\mathrm{d}y \\
\Phi_{qq}(\boldsymbol{k},\omega,y,y+\delta y) &= \iiint \Phi_{qq}(x,y,z,t,x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z,t+\delta t) \\
&\quad \times \exp(-j(k_x\delta x+k_z\delta z+\omega\delta t))\,\mathrm{d}\delta x\mathrm{d}\delta z\mathrm{d}\delta t
\end{aligned} \tag{1.3.33}$$

Lysak fait trois hypothèses sur Φ_{qq} afin de supprimer une intégrale :

— Φ_{qq} décroit très vite avec δy si bien que l'on peut étendre la deuxième intégrale de $[-y;\infty]$ à $\mathbb{R}$;

— Sur le domaine où Φ_{qq} n'est pas négligeable, $\exp(-|\boldsymbol{k}|\delta y)$ peut être approché par $1-|\boldsymbol{k}|\delta y$;

— Φ_{qq} est supposée symétrique vis-à-vis de δy.

Ces hypothèses permettent d'aboutir à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega) &\approx \int_0^\infty \boldsymbol{k}^2\exp(-2|\boldsymbol{k}|y)\,\Phi_{qq}(k_x,k_z,k_y=0,y,\omega)\,\mathrm{d}y \\
\Phi_{qq}(k_x,k_z,k_y,y,\omega) &= \iiiint \Phi_{qq}(x,y,z,t,x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z,t+\delta t) \\
&\quad \exp(-j(k_x\delta x+k_z\delta z+k_y\delta y+\omega\delta t))\,\mathrm{d}\delta x\mathrm{d}\delta z\mathrm{d}\delta y\mathrm{d}\delta t
\end{aligned} \tag{1.3.34}$$

Il s'agit à présent de modéliser Φ_{qq}. La partie temporelle est obtenue en utilisant l'hypothèse de Taylor sous forme spectrale. Comme $q=-2\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, modéliser Φ_{qq} revient à modéliser Φ_{vv} puisque dans le domaine spectral on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{qq}(k_x,k_z,k_y,y,\omega) &= 4\rho^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 k_x^2\Phi_{vv}(k_x,k_z,k_y,y,\omega) \\
&= 4\rho^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}(y)\right)^2 k_x^2\Phi_{vv}(k_x,k_z,k_y,y)\,\delta(\omega-U(y)k_x)
\end{aligned} \tag{1.3.35}$$

Lysak choisit d'utiliser pour Φ_{vv} le modèle développé par Von Kàrmàn [Von Karman 48]. Il justifie ce choix dans [Lysak 03]. Le modèle de Von Kàrmàn est construit à partir d'un spectre isotrope des fluctuations de la vitesse turbulente. Pour plus de détails sur la construction de ce modèle, on pourra consulter les cours de Jacquin [Jacquin 06] et le livre de Pope [Pope 00]. Il s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned}
\Phi_{vv}(\mathbf{k}) &= \frac{3}{8\pi}\frac{\langle v^2\rangle}{k_e^3}\frac{(k_x^2+k_z^2)/k_e^2}{[1+\mathbf{k}^2/k_e^2]^{17/6}} \\
\left\langle v^2\right\rangle &= \mathbb{E}\left(v^2\right) \\
&k_e \text{ est la taille caractéristique des tourbillons à l'altitude } y
\end{aligned} \tag{1.3.36}$$

En réinjectant ce modèle de Φ_{vv} dans l'expression (1.3.34), Lysak obtient :

$$\Phi_{pp}(\boldsymbol{k},\omega) \approx 3\rho^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 \frac{\langle v^2\rangle}{k_e^5} k_x^2 \exp\left(-2\left|\mathbf{k}\right| y\right)\left[1+{}^{\boldsymbol{k}^2}/_{k_e^2}\right]^{-17/6} \delta\left(\omega - U(y)\, k_x\right) \mathrm{d}y$$
$$\Phi_{pp}(\omega) \approx 3\rho^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 \left\langle v^2\right\rangle \omega^2 U^{-3} k_e^{-4} I\left(\frac{\omega}{Uk_e}, k_e y\right) \mathrm{d}y$$
$$I(\xi,\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2\alpha\sqrt{\xi^2+\zeta^2}\right)\left(1+\xi^2+\zeta^2\right)^{-17/6} \mathrm{d}\zeta \tag{1.3.37}$$

Par la suite, Lysak ne s'occupe plus de la dépendance spatiale de Φ_{pp} et étudie uniquement $\Phi_{pp}(\omega)$. Il ne reste plus qu'à fournir un modèle pour $U, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}, k_e, \langle v^2\rangle$ en fonction de y. Comme Lysak travaille avec des écoulements de conduite et que nous n'étudions pas cette configuration, nous indiquerons

simplement qu'ils reposent sur des formules analytiques valides uniquement pour ce type d'écoulements.

De même on ne détaillera pas la validation du modèle à l'aide de données expérimentales. Le modèle est capable de reproduire correctement $\Phi_{pp}(\omega)$ pour des nombres de Reynolds $U_\tau D/\nu$ compris entre 570 et 46000. Pour plus de précisions, on pourra se reporter directement à Lysak [Lysak 06].

1.3.2.3 Extension d'Aupoix

Aupoix [Aupoix 15] a repris le travail développé par Lysak afin de le rendre applicable à un cadre plus général que les écoulements de conduite. Aupoix propose deux extensions possibles au modèle. D'une part, il montre que l'on peut étendre la démarche aux couches limites tri-dimensionnelles sans ajouter de difficultés supplémentaires. D'autre part, il remplace les formules analytiques de Lysak utilisées pour obtenir $U, \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}, k_e, \left\langle v^2\right\rangle$ par un couplage avec un résultat de calcul RANS. Les profils de $U, \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}$ en sont directement extraits. Il utilise la même formule que Lysak [Lysak 06] pour évaluer k_e à l'aide des grandeurs RANS :

$$k_e = 1,9\frac{\epsilon}{k_t^{3/2}} \tag{1.3.38}$$

Alors que Lysak se contentait de prendre $\langle v^2\rangle = -\langle uv\rangle$, en se basant sur des DNS, Aupoix propose d'utiliser la corrélation suivante :

$$\left\langle v^2\right\rangle = -1,3\,\langle uv\rangle \tag{1.3.39}$$

D'un point de vue pratique, Aupoix donne plus de détails sur l'évaluation numérique des expressions (1.3.37) tandis que Lysak ne présente pas les méthodes qu'il utilise. Aupoix propose d'évaluer l'intégrale $I(\xi,\alpha)$ à l'aide de la quadrature de Gauss-Laguerre qui permet de remplacer le calcul d'intégrale par une somme de 12 termes. Pour plus de détails sur cette quadrature, on pourra consulter l'ouvrage Abramowitz [Abramowitz 64].

Le modèle a d'abord été testé sur des couches limites sans gradient de pression. Pour cela, Aupoix s'est servi des travaux expérimentaux de Gravante *et al.* et Farabee *et al.* [Gravante 98, Farabee 91]. La couche limite de la première expérience est caractérisée par un nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_\theta = 7076$ et le modèle d'Aupoix donne un bon accord sur toute la plage fréquentielle. La couche limite de la seconde expérience

est caractérisée par un nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_\theta = 6025$. L'accord entre modèle et expérience est moins bon, en particulier pour les basses fréquences. Aupoix attribue cette différence à la turbulence extérieure à la couche limite qui ne peut être capturée par le calcul RANS qui est restreint à la couche limite.

Ces deux cas permettent donc de valider l'intérêt de cette méthode. Il faut néanmoins que cette méthode soit capable d'aller au delà des écoulements de plaque plane pour lesquels il existe déjà des formules semi-empiriques comme on l'a montré en section 1.3.1. Aupoix teste donc sa méthode sur une couche limite ralentie. Il utilise pour cela les travaux de Simpson [Simpson 87]. S'il arrive à reproduire correctement l'écoulement moyen, la prévision des fluctuations de pression est beaucoup moins satisfaisante que pour les écoulements de plaque plane évoqués précédemment. En particulier le niveau de $\langle p'^2 \rangle$ augmente le long de la couche limite de Simpson alors que le modèle prédit une diminution. Plusieurs modèles de turbulence sont testés pour réaliser le calcul RANS mais aucun ne parvient à inverser la tendance. Comme le soulève Aupoix, il est difficile de trouver un autre cas de validation car ceux qui sont disponibles dans la littérature sont en général trop peu documentés pour être reproduits avec précision. C'est pourquoi il se restreint à l'expérience de Simpson sur laquelle son modèle ne fonctionne pas.

Cette extension d'Aupoix est le point de départ de cette thèse. En particulier, l'un des objectifs est de l'étendre afin de décrire les fluctuations de pression turbulentes d'un point de vue spatial et pas uniquement temporel.

1.3.2.4 Résolution dans le domaine temps-espace

Nous terminons cette revue des modèles de fluctuations de pression basés sur les profils moyens de la couche limite en présentant les travaux de Peltier et Hambric [Peltier 07]. Le point intéressant de leur démarche est qu'ils veulent modéliser les interactions turbulence-turbulence de l'équation (1.3.21). En dehors de ce point, leur approche est différente de celle de Lysak car ils ne se placent dans le domaine spectral qu'au dernier moment. Ils construisent en effet une expression de l'intercorrélation en deux points deux temps de la pression pariétale à l'aide de fonctions de Green. C'est la forme finale de cette expression qui est ensuite envoyée dans le domaine fréquence-nombre d'onde par transformation de Fourier. Cette dernière étape ne peut être réalisée analytiquement et doit donc être effectuée par transformation de Fourier discrète (TFD). Il est à noter que pour envisager un couplage entre la turbulence et la vibro-acoustique, il est préférable de disposer d'une description de la pression pariétale dans le domaine pulsation-nombre d'onde plutôt que dans le domaine temps-espace. L'emploi final de la TFD dans les approches dans le domaine temps-espace les rend donc a priori moins intéressantes par rapport aux approches formulées directement dans le domaine pulsation-nombre d'onde.

Le traitement des termes d'interaction turbulence-turbulence fait apparaître des corrélations triples et quadruples de la vitesse. En utilisant l'hypothèse développée par Townsend [Townsend 80] selon laquelle la vitesse fluctuante peut être approchée par une distribution Gaussienne, les corrélations triples sont nulles et les corrélations quadruples s'expriment comme des produits de corrélations doubles. Nous ne présenterons pas les calculs de Peltier et Hambric car, d'une part, ce modèle ne sera pas repris dans ce travail, et d'autre part, il y a des incohérences dans les calculs tensoriels utilisant la notation d'Einstein présentés dans Peltier et Hambric [Peltier 07].

Le modèle de fluctuations de vitesse utilisé est le modèle SAM (Simplified Ani-

sotropic Model) développé par Gavin [Gavin 02]. L'idée générale de ce modèle est de partir d'un spectre de turbulence homogène isotrope respectant l'hypothèse de Taylor pour la partie temporelle et dont on va modifier les axes par rotation et dilatation pour obtenir un spectre représentatif d'une turbulence non homogène et anisotrope. Cette transformation repose sur de nombreuses constantes d'ajustement que Peltier et Hambric [Peltier 07] ne détaillent pas et il n'a malheureusement pas été possible de consulter le travail original de Gavin [Gavin 02].

Nous retiendrons du travail de Peltier et Hambric un ordre de grandeur tiré de leurs spectres fréquentiels. La contribution des interactions turbulence-turbulence peut valoir jusqu'à un tiers de celle des interactions turbulence-écoulement moyen.

Ces travaux ont été repris par Slama *et al.* [Slama 18, Slama 17] en proposant le modèle EAM (Extended Anisotropic Model) décrivant plus finement les fluctuations de vitesses. Ce modèle a été établit en se basant sur les calculs DNS effectués par Sillero *et al.* [Sillero 14]. Ces modifications permettent d'améliorer le modèle car Slama et al. obtiennent de meilleurs résultats en se comparant aux modèles semi-empiriques disponibles dans la littérature que Peltier *et al.*.

1.4 Mesures de corrélations de fluctuations de vitesse turbulentes

Nous avons montré précédemment que le calcul des fluctuations de pression pariétale reposait sur la résolution de l'équation de Poisson avec les fluctuations de vitesses turbulentes comme termes sources. Il est donc nécessaire d'avoir une connaissance fine de ces dernières afin de modéliser les fluctuations de pressions. Il a également été montré que parmi les termes sources, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ était prépondérant. On s'intéressera donc principalement aux fluctuations de la composante verticale de la vitesse.

Les corrélations de fluctuations de vitesses peuvent être obtenues expérimentalement à l'aide de trois instruments de mesures distincts : mesure par fils chauds, mesure par vélocimétrie laser (LDV) et mesure par vélocimétrie par image de particules (PIV).

1.4.1 Mesures par fils chauds

La mesure par fils chauds est la première technique employée historiquement pour mesurer des corrélations de fluctuations de vitesses turbulentes. La méthode consiste à utiliser un couple de deux sondes placées dans l'écoulement dont la position relative peut être modifiée.

Cette technique a été mise en œuvre par Favre *et al.* [Favre 57, Favre 65] et Tritton [Tritton 67] pour un écoulement sur plaque plane sans gradient de pression et par Grant [Grant 58] qui a étudié le sillage derrière un cylindre, des jets, des couches limites sur plaque plane et de la turbulence de grille. Ces deux auteurs ont mesuré neuf corrélations : $S_{uu}(\boldsymbol{r})$, $S_{vv}(\boldsymbol{r})$ et $S_{ww}(\boldsymbol{r})$ avec $\boldsymbol{r} \in \left\{ \begin{pmatrix} r_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_z \end{pmatrix} \right\}$. Néanmoins leur attention s'est principalement focalisée sur les fluctuations longitudinales et S_{uu}. Leurs mesures de S_{vv} pour les couches limites sur plaques planes sont donc limitées et ne peuvent donc suffire à élaborer un modèle de spectre des fluctuations de vitesse. Il faut également noter que si les fils chauds sont faciles d'utilisation

et permettent une description temporelle fine grâce à leur dynamique rapide, leur caractère intrusif limite leur utilisation pour la mesure de corrélations de vitesse. Dans le cas de corrélations longitudinale, le sillage de la sonde placée en amont impacte directement la sonde placée en aval tandis que dans les deux autres directions les portes-sondes perturbent la mesure. Les portes-sondes interdisent également la mesure en simultané de fluctuations de pression à cause des sifflements qu'ils induisent et qui biaiserait les mesures acoustiques. Il convient donc de se tourner vers des mesures non-intrusives utilisant des techniques optiques.

1.4.2 Mesures par PIV

Il existe deux familles de techniques de mesures laser : la PIV et la LDV. Nous allons d'abord présenter succinctement les mesures de corrélations de vitesse par PIV avant de décrire plus en détail celles par LDV car elles seront mise en œuvre dans cette thèse. Le principal avantage de cette technique est l'acquisition d'un champ de vitesse contenu dans un plan. Pour chaque doublet image il est donc possible d'acquérir un nombre important de corrélations et ce avec une bonne résolution spatiale. Cependant, la résolution temporelle des systèmes PIV, qui est liée à celle des caméras, est assez réduite. C'est pourquoi les études présentes dans la littérature tels que Kähler [Kähler 04] , Ganapathisubramani *et al.* [Ganapathisubramani 05] et Adrian *et al.* [Adrian 00] se concentrent sur les corrélations spatiales plutôt que sur les aspects temporels. La cadence d'acquisition peut être améliorée en utilisant la PIV résolue en temps qui peut atteindre des fréquences d'acquisition de plusieurs dizaines de kHz, ce qui est donc suffisant pour étudier la turbulence, mais qui se fait au détriment de la résolution spatiale. Mais le principal inconvénient de la PIV pour les mesures de corrélations est que les mesures doivent être réalisées dans un plan dont la direction est fixe. Supposons que la nappe laser soit dans le plan (x, y). Il est donc aisé de mesurer $S_{vv}(x, y, 0)$. En revanche, les mesures dans la direction z sont inaccessibles à moins de faire tourner la nappe laser, ce qui est plus complexe qu'une simple translation puisque l'ensemble du montage optique doit également subir la rotation.

Cette difficulté peut être résolue en utilisant de la PIV tomographique qui permet des mesures dans un volume. Sa version haute cadence d'acquisition est en revanche limitée au kHz [Violato 11], ce qui est encore trop faible pour étudier correctement la turbulence.

1.4.3 Mesures par LDV

La LDV ne possède pas les limitations temporelles de la PIV mais, en revanche, le fait qu'il s'agisse de mesures ponctuelles accroit considérablement le temps total d'acquisition. On peut distinguer deux catégories de méthodes utilisant la LDV pour mesurer des corrélations en fonction du nombre de vélocimètres utilisés.

Les techniques nécessitant le moins de matériel utilisent un unique vélocimètre. Belmabrouk et Michard [Belmabrouk 98] utilisent un vélocimètre à deux composantes et, à l'aide de deux miroirs rotatifs, font varier la position relative des deux volumes de mesure. La précision spatiale de cette méthode est assez réduite. Les volumes de mesures sont placés à environ 50 cm du système de miroir ce qui nécessite une précision angulaire extrême pour pouvoir atteindre les $0,1$ mm que l'on peut avoir avec un banc de déplacement de LDV. Neumann *et al.* [Neumann 09] et Fraser *et al.* [Fraser 86] utilisent un jeu de lentilles ayant de longues focales afin d'allon-

ger le volume de mesure. L'inter-frange n'est donc plus constant dans le volume de mesure. En utilisant deux têtes de réception focalisées aux extrémités de ce volume de mesure, il est possible de mesurer des corrélations spatiales. Cette technique ne peut néanmoins mesurer des corrélations qu'avec une étendue spatiale limitée et ce dans une unique direction. De plus, la déformation du volume de mesure induit un biais difficile à quantifier.

Ces deux techniques n'utilisant qu'un seul vélocimètre mettent en œuvre des idées astucieuses pour pouvoir faire des mesures en deux points distincts mais cela se fait inévitablement au prix d'une précision spatiale amoindrie. Ce problème peut être contourné en utilisant deux vélocimètres motorisés de manière indépendante. Les montages expérimentaux nécessitent alors plus de matériel et sont plus complexes à mettre en œuvre car les deux vélocimètres doivent pouvoir évoluer sans entrer en collision. Cette technique a été mise en œuvre par Bech *et al.* [Bech 95] pour étudier l'écoulement de Couette, par Benedict *et al.* [Benedict 99] et Furuichi *et al.* [Furuichi 04] pour étudier le décollement derrière une marche descendante et par Trimis et Melling [Trimis 95] pour étudier un jet turbulent.

Cette technique sera reprise dans les expériences menées pour cette thèse.

Chapitre 2

Vibro-acoustique

Cette partie a pour objectif de présenter les outils de la vibro-acoustique qui permettent de faire le lien entre les efforts appliqués à une structure et le bruit qui en résulte.

2.1 Vibration de structures

On va présenter les régimes modaux en vibration de deux types de structures minces : les poutres et les plaques. On ne s'intéresse ici qu'aux ondes de flexion et non celles de compression ou bien de membrane.

2.1.1 Vibration modale de poutres

Le cas de la poutre vibrante ne sera pas rencontré concrètement dans ce travail. Cependant, les résultats monodimensionnels issus de cette théorie sont souvent utilisés pour construire des solutions approchées en bidimensionnel. Un bref rappel des éléments utilisés par la suite va donc être fait. On notera au passage que la poutre vibrante a été déjà utilisée expérimentalement pour caractériser des fluctuations de pression pariétales causées par un écoulement turbulent [Manoha 93].

La théorie des poutres est traitée dans de nombreux ouvrages. Pour en avoir une introduction détaillée, on pourra se référer au cours de Timoshenko [Timoshenko 53]. On se place ici dans le cadre des poutres d'Euler-Bernoulli qui néglige l'influence du cisaillement. On considère une poutre de section constante de longueur L, de module d'Young E, de masse linéique μ_S et de moment quadratique I. Le déplacement libre de type flexion est régi par l'équation suivante :

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu_S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1.1}$$

En cherchant des solutions modales, on trouve la forme générique de la partie spatiale. Sa détermination complète dépend des conditions aux limites. On considère les deux cas les plus courants qui sont la poutre appuyée et la poutre encastrée. La décomposition est la suivante :

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \sum_n w_n(x)\cos(\omega_n t) \\
w_n(x) &= A\cos(k_n x) + B\sin(k_n x) + C\cosh(k_n x) + D\sinh(k_n x) \\
w_{n,\text{appuyée}}(x) &= A\sin(kx) \\
w_{n,\text{encastrée}}(x) &= A\left[\cos(k_n x) - \cosh(k_n x) - \frac{\sin(k_n L)+\sinh(k_n L)}{\cosh(k_n L)-\cos(k_n L)}\left(\sin(k_n x) - \sinh(k_n x)\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.1.2}
$$

La constante A est déterminée par normalisation en utilisant le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^L fg\mathrm{d}x$. On note au passage que pour les deux types de conditions limites, les modes forment une base orthonormale. On trouve :

$$
\begin{aligned}
A_{\text{appuyée}} &= \sqrt{\frac{2}{L}} \\
A_{\text{encastrée}} &= \sqrt{\frac{1}{L}}
\end{aligned}
\tag{2.1.3}
$$

Le nombre d'onde k est déterminé par une condition de compatibilité (déterminant nul du système) :

$$
\begin{aligned}
\sin(k_{n,\text{appuyée}}L) &= 0 \\
\cos(k_{n,\text{encastrée}}L)\cosh(k_{n,\text{encastrée}}L) &= 1 \\
k_{n,\text{appuyée}} &= \frac{n\pi}{L} \\
k_{0,\text{encastrée}} &\approx 4.730 \\
k_{1,\text{encastrée}} &\approx 7.85320 \\
k_{n\geq 2,\text{encastrée}} &\approx \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{L} - \frac{(-1)^m}{L\cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

On déduit ensuite les pulsations propres à l'aide de l'équation des déplacements libres (2.1.1) :

$$
\omega_n = k_n^2\sqrt{\frac{EI}{\mu_S}} \tag{2.1.5}
$$

2.1.2 Vibration modale de plaques minces rectangulaires

On se restreint au cadre de plaques rectangulaires et minces au sens de Kirchhoff–Love. Cette théorie est développée dans le cours de Timoshenko [Timoshenko 53] avec un point de vue mécanique et dans Love [Love 13, Love 88] avec une approche beaucoup plus mathématique. Avant d'en donner les résultats, on va rappeler les hypothèses de cette théorie :

— Les dimensions longitudinale et transversale sont grandes par rapport à l'épaisseur ;
— Les déplacements et les rotations de la fibre moyenne sont faibles ;
— Le matériau est constitué de couches homogènes, isotropes et est utilisé dans son domaine d'élasticité linéaire ;

— Les normales à la fibre moyenne au repos restent droites sous chargement et le cisaillement est négligé ;
— Les déplacements se font uniquement dans le sens de l'épaisseur ;
— La fibre moyenne reste plane ;
— Les contraintes normales à la fibre moyenne sont négligées.

On considère une plaque rectangulaire de longueur l_x, de largeur l_z, d'épaisseur h, de densité ρ_s, de module d'Young E et de coefficient de Poisson σ. Le déplacement vertical libre de la plaque est alors régit par l'équation suivante à laquelle il faut ajouter une condition limite sur chaque bord (appuyé ou encastré) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + 12\frac{\rho_s\left(1-\sigma^2\right)}{Eh^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\
\left[\mathcal{O}_r + \mathcal{O}_t\right](w) &= 0 \\
12\frac{\rho_s\left(1-\sigma^2\right)}{Eh^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mathcal{O}_t(w) \\
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} &= \mathcal{O}_r(w)
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Dans le cadre d'une approche modale, cette équation n'admet une solution analytique que dans le cas où la plaque est appuyée sur ses quatre bords. On constate *a posteriori* que la solution trouvée correspond au produit de deux modes de poutres de longueur l_x et l_z. À l'aide de ce constat et d'observations expérimentales, la partie spatiale des modes sera à présent supposée à variables séparables :

$$\begin{aligned}
w(x,z,t) &= \sum_{m,n} w_{m,n}(x,z)\cos\left(\omega_{m,n}t\right) \\
&= \sum_{m,n} w_m(x)\, w_n(z)\cos\left(\omega_{m,n}t\right)
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Sous cette hypothèse, on peut utiliser un produit de modes de poutres pour toutes les configurations de conditions limites. En revanche, la détermination des fréquences propres devient plus complexe. La solution ne respectant plus l'équation (2.1.6), on ne peut s'en servir pour déterminer les fréquences propres comme dans le cas des poutres. Seul le cas appuyé sur ses quatre bords peut être calculé de cette manière. Les fréquences propres peuvent néanmoins être obtenues en utilisant des considérations énergétiques et, en particulier, la méthode de Rayleigh-Ritz. Cette méthode est présentée de manière détaillée dans l'article original de Ritz [Ritz 09]. Le développement mathématique complet de cette méthode a été réalisé par Weinstock [Weinstock 74]. Son application aux cas des plaques en vibration a été effectué par Warburton [Warburton 54] où 15 cas avec des conditions aux limites différentes ont été étudiés.

Les grandes lignes de cette méthode reposent sur le principe de Rayleigh publié dans son ouvrage de référence [Rayleigh 45]. Il stipule que pour une structure en vibration, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle atteignent au cours d'un cycle le même maximum par conservation de l'énergie totale. Cela est appliqué pour chaque mode, sachant que ces énergies peuvent être calculées à partir de la partie spatiale des modes et que l'énergie cinétique est proportionnelle au carré de la fréquence propre :

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{p,max},m,n} &= \frac{1}{2}\frac{Eh^3}{12\left(1-\sigma^2\right)}\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial z^2}\right)^2+2\left(1-\sigma\right)\left(\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial z\partial z}\right)^2+2\sigma\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial z^2}\right] \\
E_{\mathrm{c,max},m,n} &= \frac{1}{2}\rho_s h\omega_{m,n}^2\iint w_{mn}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\rho_s h\omega_{m,n}^2 \\
\omega_{m,n} &= \sqrt{\frac{E_{p,\max,m,n}}{\frac{1}{2}\rho_s h}}
\end{aligned}
\tag{2.1.8}
$$

Warburton [Warburton 54] explique que ce procédé basé sur une déformée modale incorrecte, puisque supposée à variables séparables, donne cependant de très bons résultats lorsqu'elle est comparée à l'expérience. De plus, l'erreur commise est de signe constant : les fréquences propres calculées sont toujours supérieures à celles mesurées. Cela est dû au fait qu'utiliser des déformées fausses revient à ajouter des contraintes au système ce qui le rigidifie et décale ses fréquences propres vers le haut.

Deux cas vont nous intéresser ici : celui de la plaque appuyée partout, car il a une solution analytique et celui de la plaque encastrée partout, puisqu'il s'agit de la configuration que l'on étudiera expérimentalement. On trouve :

$$
\begin{aligned}
\omega_{m,n,\text{appuyée}} &= \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho_s\left(1-\sigma^2\right)}}\left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{l_z}\right)^2\right] \\
\omega_{m,n,\text{encastrée}} &= \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho_s\left(1-\sigma^2\right)}}\sqrt{\left(\frac{k_m}{\pi}\right)^4+\left(\frac{k_n}{\pi}\right)^4+2\left(\frac{k_m}{\pi}\frac{k_n}{\pi}\right)^2\left(1-\frac{2}{k_m l_x}\right)\left(1-\frac{2}{k_n l_z}\right)}
\end{aligned}
\tag{2.1.9}
$$

avec k_m le nombre d'onde du mode m d'une poutre encastrée de longueur l_x et k_n le nombre d'onde du mode n d'une poutre encastrée de longueur l_z.

2.1.3 Prise en compte de l'amortissement

Afin de prendre en compte l'amortissement de la structure, on peut ajouter ce terme à l'équation (2.1.6) :

$$
\frac{\partial\theta}{\partial t}\underset{t}{\star}\mathcal{O}_r \tag{2.1.10}
$$

$\star$ représentant le produit de convolution vis à vis du temps.

La fonction θ permet de prendre en compte un amortissement structural de type hystérétique. La modélisation la plus simple de θ et la plus couramment employée en vibro-acoustique est la suivante dans le domaine fréquentiel :

$$
\mathcal{F}\left(\theta\right) = \frac{\eta}{|\omega|} \tag{2.1.11}
$$

On a alors

$$
\frac{\partial\theta}{\partial t}\underset{t}{\star}\mathcal{O}_r = j\eta\mathcal{O}_r \tag{2.1.12}
$$

La prise en compte de l'amortissement revient donc à multiplier les fréquences propres par $1+j\eta$. Si ce modèle est très simple à mettre en œuvre il souffre néanmoins d'un défaut majeur : on peut montrer qu'il n'est pas causal. Cela a en particulier été fait par Crandall [Crandall 70]. Certains auteurs comme Muravskii et

Pavlou [Muravskii 07, Pavlou 99] ont essayé de construire des modèles d'amortissement hystérétique respectant strictement la causalité. On trouve chez les deux auteurs le modèle de Biot [Biot 58] qui semble être la base de tous les modèles causaux développés par la suite. Si la causalité est bien respectée, tous ces modèles complexifient énormément le problème. Comme le modèle non causal donne finalement de bons résultats par rapport à l'expérience, on continuera de l'utiliser plutôt que de recourir à ces modèles qui relèvent plutôt de la dynamique des structures que de la vibro-acoustique.

2.2 Bruit rayonné par une structure en vibration

2.2.1 Pression rayonnée par une plaque mince en vibration

Toute structure en vibration mettra en mouvement les couches d'air qui la bordent engendrant de ce fait des ondes de pression. Ces ondes peuvent également être décomposées sur la même base modale que les vibrations. Ce type de démarche a été utilisé par de nombreux auteurs et, en particulier, les ouvrages de Lesueur *et al.* [Lesueur 88] et de Bergassoli *et al.* [Filippi 98]. On considère une plaque rectangulaire de dimensions finies $l_x \times l_z$ contenue dans le plan (x, z). Cette structure est libre de vibrer et ses bords sont soit simplement appuyés soit encastrée. Cette structure est prolongée par un baffle rigide infini contenu dans le plan (x, z). Cela signifie que l'on pourra définir la fonction $\mathbf{r} \to w(\mathbf{r})$ sur $\mathbb{R}^2$ mais que sont support sera bien restreint au rectangle de dimensions finies $l_x \times l_z$.

L'évolution de la pression rayonnée est régie par l'équation de d'Alembert. En se plaçant en régime harmonique, cette dernière se simplifie en l'équation de Helmholtz :

$$\begin{aligned} \left[\Delta + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] p(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}\left(x, 0^-, z\right) = \omega^2 \rho w(x, z) \\ \text{avec} \lim_{|r| \to \infty} |r| \left[\frac{\partial}{\partial |r|} - i\left(\frac{\omega}{c}\right)\right] p(r) = 0 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

La condition limite assure que seule la structure en vibration émet des ondes et qu'il n'en provient pas de l'infini. Elle porte le nom de "condition de radiation de Sommerfeld [Sommerfeld 10]".

Les conditions limites traduisent le couplage mécanique entre la plaque et le fluide, d'une part, et le fait que les ondes acoustiques proviennent de la plaque et non de l'infini, d'autre part. La méthode pour résoudre cette équation de Helmholtz, consiste à la transformer à l'aide d'une transformation de Fourier spatiale dans le plan (x, z) :

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] \widetilde{p}(k_x, y, k_z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{p}\left(k_x, 0^-, k_z\right) = \omega^2 \rho \widetilde{w}(k_x, k_z) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Vis-à-vis de y, on obtient une EDO avec conditions initiales dont la solution est :

$$\widetilde{p}(k_x, y, k_z) = \frac{j\rho\omega^2 \widetilde{w}(k_x, k_z)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2}} \exp\left[-jy\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2}\right] \tag{2.2.3}$$

La pression spatiale est alors retrouvée par transformation de Fourier spatiale inverse :

$$p(x,y,z) = \frac{j\rho\omega^2}{(2\pi)^2}\int\int \frac{\widetilde{w}(k_x,k_z)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2}} \exp\left(-j\left[y\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2} - (xk_x + zk_z)\right]\right) \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_z \tag{2.2.4}$$

En particulier, la pression pariétale vaut :

$$p\left(x,0^-,z\right) = \frac{j\rho\omega^2}{(2\pi)^2}\int\int \frac{\widetilde{w}(k_x,k_z)\exp\left(j\left(k_x x + k_z z\right)\right)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2}} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_z \tag{2.2.5}$$

La pression pariétale peut donc se décomposer sur la base des modes propres des vibrations :

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}) &= \sum_{mn} a_{mn} w_{mn}(\mathbf{r}) \\ p(\mathbf{r}) &= \sum_{mn} b_{mn} w_{mn}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Il faut à présent donner le lien entre a_{mn} et b_{mn}. Pour cela, on multiplie la pression pariétale par $w_{pq}(r)$ et on intègre sur la surface de la plaque en rappelant que les modes de vibration sont orthonormaux :

$$\begin{aligned} \int p(\boldsymbol{r})\, w_{pq}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}r &= \frac{j\rho\omega^2}{(2\pi)^2}\int\int \frac{\widetilde{w}(k)\exp(j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \boldsymbol{k}^2}} \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, w_{pq}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ b_{pq} &= \frac{j\rho\omega^2}{(2\pi)^2}\int \frac{\widetilde{w}(k)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \boldsymbol{k}^2}} \left[\int \exp(j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\, w_{pq}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] \mathrm{d}\boldsymbol{k} \\ &= \frac{j\rho\omega^2}{(2\pi)^2}\int \frac{\widetilde{w}(k)\,\widetilde{w}_{pq}(-k)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \boldsymbol{k}^2}} \mathrm{d}\boldsymbol{k} \\ &= j\omega\sum_{mn} a_{mn}\left[\frac{\rho\omega}{(2\pi)^2}\int \frac{\widetilde{w}_{mn}(\boldsymbol{k})\,\widetilde{w}_{pq}(-\boldsymbol{k})}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \boldsymbol{k}^2}} \mathrm{d}\boldsymbol{k}\right] \\ &= j\omega\sum_{mn} a_{mn} Z_{mnpq} \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Et finalement on obtient la pression pariétale décomposée dans la base des modes propres des vibrations

$$p(\boldsymbol{r}) = j\omega\sum_{mnpq} a_{mn} Z_{mnpq} w_{pq}(r) \tag{2.2.8}$$

2.2.2 Modèles d'impédance de rayonnement

On voit donc que déterminer la pression rayonnée par une structure en vibration se ramène à des calculs d'intégrales. En pratique, seul les termes Z_{mnmn} sont prépondérants si on utilise l'hypothèse de fluide léger et que les différentes fréquences propres des modes sont bien séparées. Un fluide est dit léger si on peut négliger son

inertie. On peut alors considérer que les modes de pression rayonnée n'interagissent pas entre eux. C'est en particulier le cas de la vibro-acoustique dans l'air. Ce cas a en particulier été étudié par Habault et Filippi [Habault 98]. Les intégrales à calculer sont donc les suivantes :

$$Z_{mnmn}(\omega) = \frac{\rho\omega}{(2\pi)^2} \int \frac{|\widetilde{w}_{mn}(\boldsymbol{k})|^2}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \boldsymbol{k}^2}} \mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{2.2.9}$$

Malgré la simplification opérée, il est impossible de calculer analytiquement cette intégrale, même pour la plaque appuyée qui possède la forme de $\widetilde{w}_{mn}(k)$ la plus simple. Numériquement, l'évaluation de cette intégrale reste délicate car elle est impropre. D'une part, elle s'étend sur $\mathbb{R}^2$, d'autre part, l'intégrande possède deux types de discontinuités. La première est la coïncidence acoustique $k = \frac{\omega}{c}$ et la seconde est la coïncidence structurale ($k = k_{mn}$). La position de ces discontinuités dans $\mathbb{R}^2$ dépend de la géométrie de la plaque, du mode considéré et de la pulsation étudiée. Il y a alors 6 configurations différentes à étudier, ce qui complexifie une fois de plus le problème. Cependant, il existe des méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées pour certaines plages de ω.

Le travail le plus ancien et le plus cité celui de Maidanik [Maidanik 62]. Il propose des expressions approchées pour la configuration appuyée partout. Il ne calcule que $\Re(Z_{mnmn}(\omega))$ car la partie imaginaire est négligeable devant la partie réelle en première approche et n'est utilisée que pour le calcul du module de $Z_{mnmn}(\omega)$. Maidanik ne donne pas la méthode qu'il utilise en détails mais son formalisme suggère qu'il utilise des développements limités de l'intégrande sur chaque zone où l'intégrande est continue. Ses expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
k_c < k_{mn}, k_z < k_c < k_x, \frac{Z_{mnmn}}{\rho c} &= \frac{k\left(k_x^2 + k_{mn}^2 - k_c^2\right)}{l_x k_x \left(k_{mn}^2 - k_c^2\right)^{3/2}} \\
k_c > k_{mn}, \frac{Z_{mnmn}}{\rho c} &= \frac{k}{\sqrt{\left(k_c^2 - k_{mn}^2\right)}} \\
k_c < k_{mn}, k_x < k_c < k_z, \frac{Z_{mnmn}}{\rho c} &= \frac{k\left(k_z^2 + k_{mn}^2 - k_c^2\right)}{l_z k_z \left(k_{mn}^2 - k_c^2\right)^{3/2}} \\
k_c = k_{mn}, \frac{Z_{mnmn}}{\rho c} &= \frac{k_c}{3\pi}\left(\frac{l_x}{\sqrt{m}} + \frac{l_z}{\sqrt{n}}\right) \\
k_c < k_{mn}, k_c < k_x, k_c < k_z, \frac{Z_{mnmn}}{\rho c} &= \frac{8k_c^2}{l_x l_z \pi k_x^2 k_z^2} \times \left(1 - (-1)^m \frac{\sin(k_c l_x)}{k_c l_x} - (-1)^n \frac{\sin(k_c l_z)}{k l_z}\right. \\
&\left. + (-1)^{m+n} \frac{\sin\left(k\sqrt{l_x^2 + l_z^2}\right)}{k_c\sqrt{l_x^2 + l_z^2}}\right) \\
k_c < k_{mn}, k_c > k_x, k_c > k_z, \frac{Z_{mnmn}}{\rho c} &= k\left[\frac{k_x^2 + k_{mn}^2 - k_c^2}{l_x k_x \left(k_{mn}^2 - k_c^2\right)^{3/2}} + \frac{k_z^2 + k_{mn}^2 - k_c^2}{l_z k_z \left(k_{mn}^2 - k_c^2\right)^{3/2}}\right]
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

avec $k_c = \omega/c$ et $k_{mn}\sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_z}\right)^2}$.

Si ces formules ont l'avantage de couvrir toute la gamme fréquentielle, elles ont néanmoins le défaut d'être discontinues et non bornées. Pour un mode et une géométrie donnée, lorsque la fréquence d'étude passe par la fréquence propre du mode de vibration, l'impédance de rayonnement tend vers l'infini. Or c'est au voisinage

de cette fréquence que la plaque est susceptible de rayonner le plus. Cette zone sera donc critique pour déterminer le bruit rayonné par une structure et elle n'est pas correctement décrite ici. Les zones parfaitement décrites sont les très basses fréquences où l'impédance est très faible devant ce qui se passe à la résonance et aux hautes fréquences où l'on a $Z_{mnmn} \approx \rho c$.

Wallace [Wallace 72b] a repris et a amélioré les travaux de Maidanik. Il s'est d'abord intéressé à l'impédance de rayonnement d'une poutre appuyée dans [Wallace 72a] puis à celle d'une plaque appuyée. Wallace ne calcule pas l'impédance en utilisant la définition (2.2.9) mais repart d'un résultat équivalent de Rayleigh [Rayleigh 45]. Cet artéfact mathématique lui permet de supprimer la singularité créée par la coïncidence acoustique mais lui impose une nouvelle discussion basée sur la parité de m et n. Son apport par rapport aux travaux de Maidanik est qu'il pousse les développements limités plus loin et gagne donc en précision. En revanche, ces expressions ont un cadre d'application plus restreint car elles ne sont valides que pour des fréquences petites devant la fréquence propre du mode considéré. En particulier, il n'y a pas de gain de précision dans la zone critique.

Sandman [Sandman 75] est l'un des premiers à prendre en compte le couplage intermodal et à ne plus utiliser l'hypothèse de fluide léger dans les calculs de pression rayonnée. Il va en particulier comparer Z_{1111} et Z_{1113} en partie réelle et imaginaire, alors que jusqu'alors les efforts se concentraient principalement sur la partie réelle. Alors qu'il étudie une configuration avec l'eau comme fluide, il montre que l'on a encore $Z_{1111} \gg Z_{1113}$, ce qui justifie pleinement l'approche fluide léger pour l'air qui est 10^3 fois moins lourd que l'eau. L'autre originalité de Sandman est qu'il ne cherche plus à simplifier les intégrales pour les évaluer mais les calcule numériquement. Sa méthode consiste simplement à mailler $\mathbb{R}^2$ de manière uniforme. En revanche, il ne précise pas comment il traite les endroits où l'intégrande est singulière.

Ces travaux concernent tous la plaque appuyée partout. Le cas de la plaque encastrée partout est plus complexe car il revient à faire la somme de 16 intégrales du même type que celle du cas appuyé. On peut citer les études de Gomperts, Nikiforov et Nilsson [Gomperts 74, Nikiforov 64, Nilsson 72a, Nilsson 72b]. Ces trois auteurs évaluent numériquement les impédances de rayonnement de plaques encastrées et les comparent à celles de plaques appuyées ayant les mêmes caractéristiques. Ils s'accordent pour dire qu'au voisinage de la fréquence propre d'un mode on a en première approximation $Z_{\text{encastrée}} \approx 2Z_{\text{appuyée}}$. Cette approximation est suffisante s'il l'on ne souhaite obtenir qu'un ordre de grandeur de la pression rayonnée.

2.2.3 Couplage structure acoustique d'une plaque mince excitée par onde plane et puissance acoustique rayonnée

Maintenant que nous avons présenté les deux points principaux du problème que sont la vibration et le rayonnement, nous allons pouvoir fermer le problème en les reliant à la pression excitatrice. Pour cela, on se place dans un premier temps dans le cadre le plus simple d'excitation de la structure, celui par ondes planes harmoniques. Ce type de raisonnement peut être trouvé dans les références [Lesueur 88, Filippi 98].

La plaque sera soumise sur une face à la pression turbulente et sur les deux faces à la pression rayonnée. On suppose que ses déplacements gardent la même forme que les déplacements libres (ou *in vacuo*), ce qui traduit un couplage faible entre le fluide et la structure. On note :

$$\begin{aligned} p_{\text{exci}}(x,z,t) &= p_{\text{exci}}(x,z)\cos(\omega t) \\ \mathcal{O}(w) &= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + 12\frac{\rho_s(1-\sigma^2)}{Eh^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ F_{rs} &= \int p_{\text{exci}}(r)\, w_{rs}(r)\,\mathrm{d}r \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

L'équilibre de la plaque s'écrit :

$$\mathcal{O}(w) = p_{\text{exci}} + 2p_{\text{ray}}. \tag{2.2.12}$$

On passe cette équation en régime harmonique et on utilise la décomposition modale de la pression et du déplacement. On multiplie alors par w_{rs} et on intègre sur la surface de la plaque. L'orthogonalité des modes donne finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{mn} a_{mn}(\omega)\,\rho h\left[\omega_{mn}^2(1+j\eta)-\omega^2\right] w_{mn}(\boldsymbol{r}) &= p_{\text{exci}}(\boldsymbol{r}) + 2j\omega\sum_{mnpq} a_{mn}(\omega)\, Z_{mnpq}(\omega)\, w_{pq}(r) \\ a_{rs}(\omega)\,\rho h\left[\omega_{rs}^2(1+j\eta)-\omega^2\right] &= \int p_{\text{exci}}(\boldsymbol{r})\, w_{rs}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + +j\omega\sum_{mn} a_{mn}(\omega)\, 2Z_{mnrs}(\omega) \\ a_{rs}(\omega)\,\rho h\left[\omega_{rs}^2(1+j\eta)-\omega^2\right] &= F_{rs} + +j\omega\sum_{mn} a_{mn}(\omega)\, 2Z_{mnrs}(\omega) \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

On utilise alors l'hypothèse d'absence de couplage entre les modes :

$$\begin{aligned} a_{rs}(\omega)\,\rho h\left[\omega_{rs}^2(1+j\eta)-\omega^2\right] &= F_{rs} + j\omega a_{rs}(\omega)\, 2Z_{rsrs}(\omega) \\ \mathcal{A}_{rs}(\omega) &= \left(\rho h\left[\omega_{rs}^2(1+j\eta)-\omega^2\right] - j\omega 2Z_{rsrs}(\omega)\right) \\ a_{rs}(\omega) &= \frac{F_{rs}}{\mathcal{A}_{rs}(\omega)} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Le champs vibratoire de la plaque est donc :

$$\begin{aligned} w(r) &= \sum_{mn} a_{mn}(\omega)\, w_{mn}(r) \\ &= \sum_{mn}\left[\mathcal{A}_{mn}^{-1}(\omega)\, F_{mn}\right] w_{mn}(r) \\ &= \sum_{mn}\left[\frac{F_{mn}}{\rho h\left[\omega_{mn}^2(1+j\eta)-\omega^2\right] - j\omega 2Z_{mnmn}}\right] w_{mn}(r) \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Tandis que le champs rayonné sera :

$$p(r) = j\omega\sum_{mn}\frac{F_{mn}Z_{mnmn}}{\rho h\left[\omega_{mn}^2(1+j\eta)-\omega^2\right] - j\omega 2Z_{mnmn}} w_{mn}(r) \tag{2.2.16}$$

La puissance acoustique rayonnée correspond à la moyenne de $p\dot{w}$ intégrée sur la surface de la plaque. Dans le cadre du régime harmonique, cela s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\text{ray}} &= \frac{\omega^2}{2} \iint \Re \left[p\left(r\right) \left(j\omega w\left(\boldsymbol{r}\right)\right)^{\star} \right] \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \frac{\omega^2}{2} \iint \Re \left[j\omega \sum_{rs} \frac{F_{rs} Z_{rsrs}}{\rho h \left[\omega_{rs}^2 \left(1 + j\eta\right) - \omega^2\right] - j\omega 2 Z_{rsrs}} w_{rs}\left(r\right) \left(j\omega \sum_{mn} \left[\mathcal{A}_{mn}^{-1}\left(\omega\right) F_{mn} \right] w_{mn}\left(\boldsymbol{r}\right) \right)^{\star} \right] \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \frac{\omega^4}{2} \Re \left[\sum_{mn} \frac{\left|F_{mn}\right|^2}{\left|\mathcal{A}_{mn}\left(\omega\right)\right|^2} Z_{mnmn} \right] \\
&= \frac{\omega^4}{2} \sum_{mn} \frac{\left|F_{mn}\right|^2}{\left|\mathcal{A}_{mn}\left(\omega\right)\right|^2} \Re \left[Z_{mnmn} \right]
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

Chapitre 3

Couplage de la turbulence et de la vibro-acoustique

Les deux parties précédentes ont présenté les travaux réalisés dans les deux disciplines bien distinctes que sont la turbulence, d'une part, et la vibro-acoustique, d'autre part. Néanmoins, le problème ne peut être fermé tant que les deux ne sont pas reliées. La pierre d'achoppement de ce couplage se situe dans la nature des grandeurs physiques.

Du point de vue de la turbulence, toutes les grandeurs fluctuantes sont aléatoires et ne peuvent être connues qu'au moyen de leurs moments stochastiques. Le spectre des fluctuations de pression pariétale $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$ en est un exemple et, en aucun cas, il ne permet de remonter à l'évolution temporelle de la pression.

En vibro-acoustique, c'est l'approche modale qui prédomine car elle permet de simplifier considérablement les équations. Cependant cette démarche n'est valide que si toutes les grandeurs peuvent être décomposées en grandeurs harmoniques. Ce n'est, en particulier, pas le cas de la pression pariétale en raison de son caractère aléatoire dû à la turbulence.

Les deux mondes ne sont heureusement pas hermétiquement incompatibles. Cette partie a pour objectif de présenter les approches de couplage qui ont été envisagées. Il ne s'agit pas de détailler les calculs de chacune des démarches mais d'exposer les principes de ces différentes méthodes. On clôturera enfin cette partie en présentant les montages expérimentaux "complets" qui mesurent le bruit produit par une structure en vibration excitée par une couche limite turbulence.

3.1 Modèles de couplage

3.1.1 Couplages privilégiant le caractère ondulatoire

Le formalisme modal étant plus facile à manipuler que le formalisme stochastique, l'approche la plus simple consiste à considérer que toutes les grandeurs sont harmoniques. Cela revient à assimiler la pression pariétale à une somme infinie d'ondes planes dont l'amplitude est obtenue à partir de $\Phi_{pp}(\boldsymbol{k}, \omega)$.

Travaux de Davies

Cette approche a été employée, développée et formalisée pour la première fois par Davies [Davies 71]. Ses efforts portent principalement sur la partie vibro-acoustique,

en particulier sur les impédances de rayonnement. Il utilise le modèle de Corcos pour la partie spatiale des fluctuations de pression mais ne précise pas ce qu'il utilise pour la partie fréquentielle. Il n'en a d'ailleurs pas besoin puisqu'il étudie plutôt la transmission fréquence par fréquence que le bruit réellement rayonné. La connaissance de $\Phi_{pp}(\omega)$ ne lui est donc pas utile.

Travaux de Aupperle et Lambert

Aupperle et Lambert [Aupperle 73] ont développé une démarche qui se revendique "globalement identique" à celle exposée par Davies [Davies 71]. Si les formulations finales sont les mêmes, le formalisme employé est différent. Alors que Davies transforme directement l'équation d'équilibre de la plaque dans le domaine harmonique, Aupperle et Lambert le font plus progressivement en utilisant des fonctions de Green et des grandeurs stochastiques pour caractériser le déplacement de la plaque. Un premier pas entre le stochastique et le modal a donc été franchi.

L'apport théorique de Aupperle et Lambert l'est surtout d'un point de vue numérique. La démarche de Davies comporte de nombreuses intégrations qui sont couteuses pour l'époque. Aupperle et Lambert remarquent que l'on peut réduire les domaines d'intégration car bien souvent les intégrandes ne sont non négligeables que sur de petits domaines. Ils utilisent ici la propriété de filtrage des longueurs d'onde par la structure déjà exposée à la sous section 1.2.2. Ils vont également plus loin dans l'étude de l'impact du modèle de turbulence en faisant varier les paramètres du modèle de Corcos.

3.1.2 Couplages privilégiant le caractère stochastique

Les publications exposant de manière détaillée un couplage correct entre la turbulence et la vibro-acoustique sont bien plus rares, et cela pour trois raisons :

1. Sous certaines hypothèses sur le champ turbulent, les approches ondulatoire et stochastique conduisent *in fine* à la même expression pour la puissance de bruit rayonnée. C'est en particulier le cas pour une inter-corrélation de la pression pariétale homogène $S_{pp}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}, t+\tau) = S_{pp}(\boldsymbol{r}, \tau)$. Cela revient à ne traiter que des couches limites bidimensionnelles qui n'évoluent pas longitudinalement. Tant que la communauté de la turbulence était incapable de fournir un modèle d'inter-corrélation de la pression pariétale non homogène correct pour des écoulements avec gradient de pression, il était inutile d'investir dans un modèle vibro-acoustique encore plus complexe dont on ne pourrait pas exploiter les nouvelles possibilités ;

2. L'approche ondulatoire est beaucoup plus légère et simple à expliquer. Il est naturel de la privilégier dans les articles face à l'approche stochastique si elle donne les mêmes résultats ;

3. Le problème de la vibration sous chargement aléatoire a initialement été traité par la communauté des structures. Elle a ensuite été adaptée pour la vibro-acoustique. Cependant, cette adaptation n'est que rarement présentée en détails chez les acousticiens qui renvoient aux publications traitant uniquement de structure.

3.1.2.1 La vibration sous chargement aléatoire en mécanique des structures

Les meilleures présentations de ce type de couplage se trouverent donc dans les ouvrages spécialisés. On peut se reporter par exemple aux travaux de Blake [Blake 86b, Blake 86a]. Bien que ce soient des ouvrages parmi les plus complets sur ce sujet, la compréhension en détail de la démarche ne peut pas se faire sans se référer à des ouvrages de mécanique des structures et plus particulièrement de vibrations aléatoires.

Ces méthodes seront exposées plus tard lorsque nous les étendrons pour des modèles d'inter-corrélation de la pression pariétale non-homogène. Nous allons néanmoins indiquer dès à présent les références sur lesquelles cette réflexion s'est construite. La vibration sous chargement aléatoire peut se décomposer en une série de problèmes de complexité croissante.

Le cas le plus simple est celui du système à un degré de liberté masse-ressort-amortisseur. On retrouve ce cas dans la plupart des ouvrages de vibrations aléatoires mais il est exposé de manière particulièrement didactique par Crandal et Mark [Crandall 14].

Le cas suivant est celui du système avec un nombre fini de degrés de liberté. De même que le système masse-ressort-amortisseur, ce cas a été traité par de nombreux auteurs, dont en particulier Newland [Newland 12].

On peut alors passer au dernier cas qui est celui d'une structure continue. Il se décompose lui même en deux catégories en fonction du type d'excitation. La première correspond à une densité de forces aléatoires ponctuelles, chacune étant indépendante des autres. Ce cas est à nouveau très bien expliqué par Newland [Newland 12]. La deuxième correspond à une densité de forces liées entres elles et caractérisées par des intercorrélations. C'est ce cas qui nous intéresse puisqu'il correspond à la description que l'on possède de la pression pariétale. On citera pour ce cas Lin [Lin 67] qui est recommandé par Blake [Blake 86b, Blake 86a].

Nous finirons cette liste d'ouvrages de mécanique des structures par le livre de Preumont [Preumont 13] qui constitue un complément intéressant par rapport aux autres références citées car la partie purement mathématique des probabilités est exposée de manière plus détaillée.

3.1.2.2 La vibration sous chargement aléatoire en vibro-acoustique

Les travaux réalisés dans les références qui vont être citées à présent peuvent sembler très similaires du point de vue du couplage entre la turbulence et la vibro-acoustique à ceux cités dans la section 3.1.1. À l'aide des progrès réalisés en structure, le couplage n'est plus un problème et on peut donc concentrer les efforts sur l'influence de la modélisation de la pression pariétale sur le bruit rayonné.

Travaux de Hwang et Maidanik

L'un des premiers travaux et le plus souvent cité est celui de Hwang et Maidanik [Hwang 90]. Ils étudient la contribution de chaque région (convective, subconvective et acoustique) du spectre en nombre d'onde des fluctuations de la pression pariétale. Pour cela ils se servent du modèle de Hwang et Geib [Hwang 84] plutôt que du modèle de Corcos qui était jusqu'alors presque systématiquement utilisé. On rappelle que le modèle de Corcos n'est pas réaliste pour les petits nombres d'onde et que c'est dans l'optique de mieux décrire cette région que le modèle de Hwang et Geib a été

développé. Hwang et Maidanik montrent qu'en terme de transmission, les rôles sont inversés puisque la région convective est celle qui contribue le moins alors qu'elle dominait le spectre de la pression pariétale. Ce résultat montre l'importance de modéliser correctement la région des petits nombres d'onde de ce spectre et de ne pas se restreindre à la modélisation de Corcos.

Travaux de Borisyuk et Grinchenko

Le même type d'étude a également été entrepris par Borisyuk et Grinchenko [Borisyuk 97]. La différence avec les travaux de Hwang et Maidanik est double. D'une part, ils n'étudient pas la transmission mais le bruit réellement rayonné. D'autre part, ils se comparent à des données expérimentales, en l'occurrence celles obtenues par Martin *et al.* [Martin 77]. Leur conclusions sont différentes de celles de Hwang et Maidanik puisqu'ils montrent le rôle primordial de la région convective en tant que contributrice au bruit rayonné par la structure. Ces différentes conclusions ne sont pas paradoxales puisque ce ne sont pas les mêmes grandeurs qui sont comparées.

Travaux de Maury *et al.*

Le travail de Maury *et al.* [Maury 02a, Maury 02b] est intéressant car c'est l'un des rares articles de vibro-acousticiens à exposer le couplage stochastique dans son intégralité et à faire le parallèle avec le couplage ondulatoire. Leur approche est néanmoins légèrement différente des travaux réalisés en structure. Ils transforment toutes les variables d'espace en nombres d'onde dès qu'ils le peuvent. Ce faisant, ils perdent la possibilité de traiter des champs de pression pariétale non homogènes.

Travaux d'Habault et Filippi

Habault et Filippi [Habault 98] proposent de revenir sur les hypothèses de fluide léger et d'indépendance des modes entre eux dans le cadre d'un couplage stochastique. Leur approche consiste à utiliser une méthode perturbative. Pour cela, ils font un développement de Taylor des équations en utilisant le rapport de la masse volumique de l'air et de densité surfacique de la structure comme petit paramètre. Dans un contexte aéronautique, on considèrera des structures millimétriques en aluminium. On aura donc $\dfrac{\rho_{\text{air}}}{h_{\text{structure}}\rho_{\text{structure}}} \leq 0.5$, ce qui licite cette approche dans notre cas. En revanche, il ne sera pas possible de traiter des structures plus fines en utilisant l'approximation fluide léger.

La configuration étudiée par Habault et Filippi est légèrement différente de la nôtre. La surface de la plaque vibrante qui ne voit pas l'écoulement est en fait enfermée dans une cavité afin d'augmenter les effets de couplage entres les modes par réverbération sur la cavité. Il est néanmoins peu probable que sans cette cavité les contributions supplémentaires obtenues via le développement de Taylor soient plus importantes. On peut en conclure par extrapolation au cas de notre montage, que ces contributions supplémentaires seront également négligeables.

Travaux technologiques

Toutes les études précédentes concernent le cas académique de la plaque plane rectangulaire en vibration. Cependant, certains auteurs ont étudié des formes plus complexes. Comme notre étude n'est pas concernée par ces géométries, nous n'allons citer que quelques exemples sans être exhaustif :

— Vibrations d'une plaque circulaire par Hwang et Maidanik [Hwang 90].
— Vibrations d'un cylindre rond par Manning et Maidanik [Manning 64].
— Vibrations d'une sphère et d'un ellipsoïde par Chertock [Chertock 61].
— Vibrations d'une surface de révolution par Chertock [Chertock 64].

Nous terminons cette revue en citant les travaux de Graham [Graham 96a, Graham 96b] et Bravo *et al.* [Bravo 17] qui souhaitent simuler une configuration plus réaliste d'un point de vue industriel. Graham étudie le cas d'une plaque vibrante qui est excitée d'un côté par une couche limite turbulente ; l'autre face étant recouverte par une série de couches d'absorbants acoustiques et de plaques rigides. Ce type d'assemblage est représentatif de ce qui se fait dans les aéronefs. Bravo, Maury et Pinhède étudient le cas d'une structure multi-couches micro-perforée en vibration sous excitée par une couche limite turbulente. Leurs travaux consistent à la fois en une étude théorique en utilisant le modèle de Corcos pour décrire les fluctuations de pression turbulente et une étude expérimentale en soufflerie.

3.2 Expériences mettant en œuvre le couplage de la turbulence et de la vibro-acoustique

Il est assez aisé de trouver des expériences "partielles" de couplage entre une couche limite turbulente et une structure vibrante. Elles sont incomplètes au sens où toutes les grandeurs ne sont pas mesurées. Nous avons évoqué à la section 1.2 les expériences mesurant uniquement les fluctuations de pression pariétales. Nous pouvons citer le cas des thèses de Manoha [Manoha 93] et Robert [Robert 84] où à la fois la pression pariétale et les vibrations ont été mesurées mais pas le bruit rayonné. Les expériences "complètes" sont plus rares et correspondent principalement à des écoulement sans gradients de pression. Nous allons présenter deux d'entre elles qui diffèrent de par les solutions technologiques employées.

Travaux de Baroudi *et al.*

L'expérience réalisée par Baroudi *et al.* [El Baroudi 63] est l'une des premières du genre. Pour se replacer dans le contexte historique, la référence [El Baroudi 63] date de 1963, soit un an avant que Corcos [Corcos 64] ne publie son modèle. Il leur est donc difficile de comparer leurs mesures à des modèles puisque très peu existaient à ce moment là.

L'étude fut conduite dans la soufflerie Utia de l'Université de Toronto. Il s'agit d'une soufflerie de type Eiffel possédant une section carrée de $20,54\,\mathrm{cm}$ de côté qui a été opérée entre $15\,\mathrm{ms}^{-1}$ et $60\,\mathrm{m.s}^{-1}$. La plaque vibrante est montée à la place du plafond de la soufflerie et affleure aussi bien que possible le reste de la veine. Par dessus cette plaque, à l'extérieur de la veine, deux équipements peuvent être montés. Une cavité réverbérante destinée à mesurer le bruit total rayonné par la plaque et un banc de déplacement sur lequel sont montées des sondes à capacité pour mesurer le déplacement vibratoire de la plaque. La plaque vibrante peut également être

remplacée par une plaque rigide munie de microphones affleurant afin de mesurer les fluctuations de pression pariétale.

D'un point de vue expérimental, nous retiendrons deux avertissements de Baroudi, Ludwig et Ribner. D'une part, il semble très délicat de faire affleurer exactement la plaque vibrante avec la veine de la soufflerie. Ils ont testé plusieurs plaques d'épaisseurs différentes et l'assemblage n'était pas de la même qualité d'un cas à l'autre. Le défaut de surface induit par ce non alignement semble influer sur les résultats. D'autre part, ils notent que les conditions atmosphériques peuvent faire varier leurs résultats d'un jour sur l'autre. Ces variations sont importantes puisqu'ils relèvent jusqu'à 1.5 dB d'écart sur le bruit rayonné.

Travaux de Grosveld

L'expérience réalisée par Grosveld [Grosveld 92] est constituée différemment. Au lieu de mettre la plaque vibrante sur l'une des parois de la veine, elle est montée sur une plaque plane rigide située à mi-veine. Une cavité est ensuite construite sous la plaque vibrante afin de faire des mesures. Cette cavité pose deux types de problèmes :

— acoustique : il faut qu'elle soit étanche afin de ne recevoir que le bruit rayonné par la plaque et non celui de la veine ;
— aérodynamique : cette cavité fait obstruction à l'écoulement et induit donc des gradients de pression alors que c'est un écoulement uniforme qui est recherché.

Grosveld ne précise pas quelle soufflerie il utilise si ce n'est qu'elle a une veine de taille 38 cm × 38 cm × 3 m et que l'écoulement au-dessus de la plaque vibrante est mesuré ponctuellement à $18\,\mathrm{ms}^{-1}$.

Les mesures de bruit rayonné sont réalisées à l'aide d'un microphone placé dans la cavité tandis que les vibrations de la plaques sont mesurées avec un accéléromètre monté sur cette dernière.

Deuxième partie

Travaux réalisés

Chapitre 4

Modélisation initiale

Ce chapitre a pour but de présenter les modèles développés au cours de la thèse. Il se compose principalement d'un article [Morilhat 19] publié dans le Journal of Fluids Engineering. Cet article est décomposé en quatre parties. Premièrement, les travaux de Lysak [Lysak 06] et d'Aupoix [Aupoix 15], qui fournissent un modèle pour $\Phi_{pp}(\omega)$, sont étendus afin de prendre en compte une dépendance spatiale et aboutissent à un modèle pour $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$. Deuxièmement, le couplage entre ce modèle et les outils classiques de la vibro-acoustique est réalisé. La formulation finale obtenue du bruit rayonné par une structure excitée par un écoulement turbulent ne peut être utilisée directement car son évaluation numérique requiert des ressources informatiques trop importantes. Cependant, cette formulation peut être simplifiée car il s'agit d'une somme dont seule une petite minorité de termes sont prépondérants. Il est donc possible d'évaluer numériquement le bruit rayonné avec un coût de calcul extrêmement réduit en ne considérant que ces derniers. Néanmoins, la répartition de ces termes prépondérants parmi l'ensemble des termes de la somme est *a priori* inconnu. Une stratégie de recherche de ces termes a donc été élaborée et implémentée dans la troisième partie. Quatrièmement, le modèle final ainsi obtenu a été testé et comparé avec les résultats obtenus avec le modèle de Corcos [Corcos 64] qui est le modèle quasi-systématiquement utilisé dans la littérature. Il a, en particulier, été montré que pour une couche limite donnée, le modèle de Corcos ne devrait être utilisé que dans une certaine plage fréquentielle. Les bornes de cette plage peuvent être déterminées à l'aide des grandeurs intégrales de la couche limite.

Ce papier sera complété ici afin d'expliciter certaines de ses parties. D'un point de vue modélisation de la turbulence, la construction mathématique du modèle pour $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ sera détaillée, l'article étant plutôt centré sur l'analyse du modèle obtenu. Du point de vue de la vibro-acoustique, le calcul numérique des impédances de rayonnement sera exposé.

4.1 Construction du modèle pour $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$

L'approche suivie par Lysak [Lysak 06] et reprise par la suite par Aupoix [Aupoix 15] n'est pas construite mathématiquement de manière strictement rigoureuse puisque sont manipulées des transformées de Fourier de signaux turbulents. En raison de leur nature stochastique, ces signaux doivent être manipulés au travers de leurs moments ou bien de leurs fonctions d'inter-corrélation. Nous proposons donc de réécrire la démarche de Lysak dans un formalisme respectant cette contrainte. De plus, Lysak fait un certain nombre d'hypothèses sur les fluctuations de vitesses turbulentes au

sein de la couche limite afin de pouvoir faire aboutir sa démarche. Nous montrerons qu'il est possible d'aboutir à un modèle pour $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ sans effectuer ces hypothèses simplificatrices et que la formulation de Lysak peut être retrouvée en effectuant un développement limité à l'ordre 0 de notre formulation.

La construction du modèle peut être décomposée en trois étapes :

1. construction de la fonction de Green associée à l'équation de Poisson en espace semi-infini ;
2. établissement d'une relation entre les spectres dans le domaine pulsation-nombre d'onde des fluctuations de pression et de vitesses turbulentes ;
3. réinjection des fonctions de Green obtenues dans l'expression de $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$.

4.1.1 Construction de la fonction de Green associée à l'équation de Poisson en espace semi-infini

Nous rappelons que les fluctuations de pression turbulente sont régies par une équation de Poisson qui les lie aux fluctuations de vitesses :

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(2U_i u_j + u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle\right) \tag{4.1.1}$$

Cette équation sera résolue dans un demi-espace tridimensionnel défini par $y \geq 0$ et avec des conditions limites de Neumann homogènes.

Tout comme Lysak et Aupoix, nous ne gardons que les termes sources linéaires $-\rho \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(2U_i u_j)$; l'équation de Poisson peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= -q \\ q &= 2\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(2U_i u_j) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

p et q sont liés par une équation différentielle linéaire. Il existe donc une fonction de Green g_P telle que l'on ait :

$$p(\mathbf{r},t) = \int q(\mathbf{r}',t)\, g_P(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{d}\mathbf{r}' \tag{4.1.3}$$

Comme il n'y a pas de dérivée temporelle dans l'équation de Poisson, seule une convolution spatiale est nécessaire puisque la fonction de Green temporelle est simplement la distribution de Dirac δ^0.

La construction de $g_P(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ est extrêmement classique et peut être trouvée, par exemple, dans Angel *et al.* [Angel 12]. Afin d'avoir un ensemble cohérent et complet, nous allons expliciter cette construction.

Avant de s'attaquer au problème en espace semi-infini, intéressons nous à la fonction de Green G_∞ du Laplacien 3D en espace infini définie par $-\Delta G_\infty(\mathbf{r}) = \delta^0(\mathbf{r})$. Par transformation de Fourier, on montre que $G_\infty(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^{-2}$. Par transformation de Fourier inverse on aboutit alors à $G_\infty(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi|\mathbf{r}|}$. A l'aide de la méthode des images, on peut montrer que la fonction de Green associée à l'équation de Poisson dans un demi-espace avec des conditions limites de Neumann homogènes s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} g_P(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= G_\infty(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + G_\infty\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}''\right) \\ \mathbf{r}' &= (x,y,z) \\ \mathbf{r}'' &= (x,-y,z) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Dans le cas particulier où l'on s'intéresse uniquement au plan séparateur, *i.e.* $y=0$ et $\mathbf{r}'=\mathbf{r}''$ on a :

$$\begin{aligned} g_P(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= 2G_\infty(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

On note en particulier que la fonction de Green ainsi obtenue ne dépend que de $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ et sera donc notée par la suite avec une seule variable : $g_P(\mathbf{r},\mathbf{r}') = g_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. On note également que g_P est paire vis-à-vis de chacune des composantes de sa variable.

4.1.2 Lien entre $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ et $\Phi_{qq}(\mathbf{k},\omega)$

Nous pouvons à présent exprimer l'intercorrélation des fluctuations de pression à l'aide de l'intercorrélation de la source q et de la fonction de Green introduite :

$$\begin{aligned} S_{pp}[\mathbf{x}](\mathbf{r},\tau) &= \mathbb{E}_t\left[p(\mathbf{x},t)\,p(x+\mathbf{r},\tau)\right] \\ &= \mathbb{E}_t\left[\int q(\mathbf{r}_1,t)\,g_P(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_1 \int q(\mathbf{r}_2,t+\tau)\,g_P(\mathbf{x}+\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_2\right] \\ &= \iint \mathbb{E}_t\left[q(\mathbf{r}_1,t)\int q(\mathbf{r}_2,t+\tau)\right] g_P(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_1 g_P(\mathbf{x}+\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \\ &= \iint S_{qq}[\mathbf{r}_1](\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\tau)\,g_P(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_1 g_P(\mathbf{x}+\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Les intégrations vis-à-vis de $r_{1x}, r_{1z}, r_{2x}, r_{2z}$ sont sur $\mathbb{R}$. Deux choix sont possibles pour les variables dans la direction normale.

- $(r_{1y}, r_{2y}) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ et dans ce cas là, on autorise d'avoir $S_{qq}[\mathbf{r}_1](\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\tau) \neq 0$ pour $r_{1y} < r_{2y} - r_{1y}$. Cela n'a pas de sens physique car cela revient à dire qu'il y des fluctuations de vitesse sous le plan $y=0$. Néanmoins, ces fluctuations fictives ne contribuerons pas à $S_{pp}[\mathbf{x}](\mathbf{r},\tau)$.
- $(r_{1y}, r_{2y}) \in (\mathbb{R})^2$ et dans ce cas, on doit avoir $S_{qq}[\mathbf{r}_1](\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\tau) = 0$ pour $r_{1y} < r_{2y} - r_{1y}$ afin de ne pas comptabiliser des contributions fictives lors du calcul de $S_{pp}[\mathbf{x}](\mathbf{r},\tau)$.

Nous pouvons d'ores et déjà anticiper le fait qu'il n'existe aucune configuration pour laquelle on possède un modèle analytique de S_{qq}. On utilisera donc des modélisations semi-empiriques. De tels modèles sont fréquemment élaborés directement dans le domaine des nombres d'onde en considérant des points situés loin des parois par rapport à la distance caractéristique de décorrélation de la turbulence. Il est est donc peu probable que lorsque l'on en prend la transformée de Fourier inverse pour obtenir l'intercorrélation, on ait identiquement $S_{pp}[\mathbf{x}],(\mathbf{r},\tau) = 0$ pour $y - r_y \leq 0$. Par conséquent, nous choisirons la première convention, $(r_{1y}, r_{2y}) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$.

On calcule ensuite la transformation de Fourier vis-à-vis de τ et r afin d'obtenir des spectres dans le domaine pulsation-nombre d'onde :

$$\Phi_{pp}\left[\mathbf{x}\right]\left(\mathbf{k},\omega\right)=\iiint\Phi_{qq}\left[\mathbf{r}_1\right]\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega\right)g_P\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1\right)g_P\left(\mathbf{x}+\mathbf{r}-\mathbf{r}_2\right)\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}\mathbf{r}_2e^{-j\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{4.1.7}$$

Nous rappelons à ce stade que nous nous intéressons uniquement à la pression pariétale donc $\mathbf{r},\mathbf{x}$ et $\mathbf{k}$ sont contenus dans le plan (x,z) et nous introduisons la notation suivante :

$$f\begin{pmatrix}k_x\\y\\k_z\end{pmatrix}=\mathcal{F}_{x,z}\left[f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right] \tag{4.1.8}$$

Nous commençons par effectuer l'intégration suivant $\mathbf{r}$ dans l'équation (4.1.7) afin de faire apparaitre la transformée de Fourier de g_P dans le plan (x,z).

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}\left[x\right]\left(\mathbf{k},\omega\right)&=\iint\limits_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\Phi_{qq}\left[\mathbf{r}_1\right]\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega\right)g_P\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1\right)e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{k}}\\&\times\left[\int g_P\left(\mathbf{x}+\mathbf{r}-\mathbf{r}_2\right)e^{-j(\mathbf{x}+\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{k}}\mathrm{d}\mathbf{r}\right]\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}\mathbf{r}_2\\&=\iint\limits_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\Phi_{qq}\left[\mathbf{r}_1\right]\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega\right)g_P\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1\right)e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{k}}g_P\begin{pmatrix}k_x\\-r_{2y}\\k_z\end{pmatrix}\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}\mathbf{r}_2\\&=\iint\limits_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\Phi_{qq}\left[\mathbf{r}_1\right]\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega\right)g_P\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1\right)e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{k}}g_P\begin{pmatrix}k_x\\r_{2y}\\k_z\end{pmatrix}\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}\mathbf{r}_2\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

La dernière étape est obtenue grâce à la parité de g_P. On effectue alors les intégrations vis-à-vis de r_{2x} et r_{2z}, afin d'obtenir la transformée de Fourier de Φ_{qq} dans le plan (x,z) :

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}\left[x\right]\left(\mathbf{k},\omega\right)&=\iint\limits_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\Phi_{qq}\left[\mathbf{r}_1\right]\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega\right)g_P\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1\right)e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{k}}g_P\begin{pmatrix}k_x\\r_{2y}\\k_z\end{pmatrix}\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}\mathbf{r}_2\\&=\iint\limits_{\mathbf{r}_1,r_{2y}}g_P\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1\right)e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{k}}g_P\begin{pmatrix}k_x\\r_{2y}\\k_z\end{pmatrix}\\&\times\left[\iint\limits_{r_{2x},r_{2z}}\Phi_{qq}\left[\mathbf{r}_1\right]\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega\right)e^{-j(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{k}}\mathrm{d}r_{2x}\mathrm{d}r_{2z}\right]\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}r_{2y}\\&=\iint\limits_{\mathbf{r}_1,r_{2y}}\Phi_{qq}\left[\mathbf{r}_1\right]\begin{pmatrix}k_x\\r_{2y}-r_{1y}\ ,\omega\\k_z\end{pmatrix}g_P\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1\right)e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{k}}g_P\begin{pmatrix}k_x\\r_{2y}\\k_z\end{pmatrix}\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}r_{2y}\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

On fini de faire apparaître le spectre $\Phi_{qq}\left[\mathbf{r}_1\right]\left(\mathbf{k},\omega\right)$ à l'aide d'une transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}[x](\mathbf{k},\omega) &= \iint\limits_{\mathbf{r}_1,r_{2y}} \Phi_{qq}[\mathbf{r}_1]\begin{pmatrix} k_x \\ r_{2y}-r_{1y} \\ k_z \end{pmatrix},\omega\, g_P(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\, e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{k}} g_P\begin{pmatrix} k_x \\ r_{2y} \\ k_z \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \mathrm{d}r_{2y} \\ &= \iint\limits_{\mathbf{r}_1,r_{2y}} \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{k_y} \Phi_{qq}[\mathbf{r}_1]\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix},\omega\, e^{jk_y(r_{2y}-r_{1y})}\mathrm{d}k_y\right] \\ &\times g_P(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\, e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{k}} g_P\begin{pmatrix} k_x \\ r_{2y} \\ k_z \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \mathrm{d}r_{2y}\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Afin d'alléger les notations, nous noterons $\mathbf{k}_3 = (k_x, k_y, k_z)$ afin de le différencier de $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$. Nous rappelons que $r_{2y} \in \mathbb{R}^+$ et intégrons par rapport à cette variable. Cela va faire apparaitre la transformée de Fourier monolatère de g_P notée :

$$g_{Pm}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} g_P(\mathbf{r})\, e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}r_x\mathrm{d}r_y\mathrm{d}r_z \tag{4.1.12}$$

Nous aurons donc :

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}[x](\mathbf{k},\omega) &= \iint\limits_{\mathbf{r}_1,k_y} \frac{1}{2\pi}\int \Phi_{qq}[\mathbf{r}_1](\mathbf{k}_3,\omega)\, e^{-jk_y r_{1y}}\mathrm{d}k_y g_P(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\, e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{k}} \\ &\times \left[\iint\limits_{r_{2y}} g_P\begin{pmatrix} k_x \\ r_{2y} \\ k_z \end{pmatrix} e^{jk_y r_{2y}}\mathrm{d}r_{2y}\right]\mathrm{d}\mathbf{r}_1 \\ &= \iint\limits_{\mathbf{r}_1,k_y} \frac{1}{2\pi}\int \Phi_{qq}[\mathbf{r}_1](\mathbf{k}_3,\omega)\, e^{-jk_y r_{1y}}\mathrm{d}k_y g_P(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\, e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{k}} g_{Pm}\begin{pmatrix} k_x \\ -k_y \\ k_z \end{pmatrix}\mathrm{d}\mathbf{r}_1\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

On rappelle que dans le cas d'une couche limite bidimensionnelle, $\Phi_{qq}[\mathbf{r}](\mathbf{x},\omega)$ est indépendant de r_z. On supposera de plus que les effets non parallèles sont négligeables afin d'être également indépendants vis à vis de r_x. On aura donc $\Phi_{qq}[\mathbf{r}](\mathbf{x},\omega) = \Phi_{qq}[r_y](\mathbf{x},\omega)$ rendant ainsi possible les intégrations vis-à-vis de r_{1x} et r_{1z} en faisant apparaître la transformée de Fourier de g_P dans le plan (x, z) :

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}[x](\mathbf{k},\omega) &= \iint\limits_{k_y,r_{1y}} \frac{1}{2\pi}\int \Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k}_3,\omega)\, e^{-jk_y r_{1y}}\mathrm{d}k_y \\ &\times \left[\iint\limits_{r_{1x},r_{1z}} g_P(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\, e^{j(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{k}}\mathrm{d}r_{1x}\mathrm{d}r_{1z}\right] g_{Pm}\begin{pmatrix} k_x \\ -k_y \\ k_z \end{pmatrix}\mathrm{d}r_{1y} \\ &= \iint\limits_{r_{1y},k_y} \frac{1}{2\pi}\Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k}_3,\omega)\, e^{-jk_y r_{1y}} g_P\begin{pmatrix} -k_x \\ -r_{1y} \\ -k_z \end{pmatrix} g_{Pm}\begin{pmatrix} k_x \\ -k_y \\ k_z \end{pmatrix}\mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Nous rappelons que $g_P(\mathbf{r})$ est paire. Étant de plus réelle, sa transformée de Fourier vis à vis de chacune de ses variables est également réelle et paire. Ainsi, $g_P(-k_x, -r_{1y}, -k_z) = g_P(k_x, r_{1y}, k_z)$. Nous obtenons donc :

$$\Phi_{pp}\left[x\right]\left(\mathbf{k},\omega\right)=\iint\limits_{r_{1y},k_y}\frac{1}{2\pi}\Phi_{qq}\left[r_{1y}\right]\left(\mathbf{k}_3,\omega\right)e^{-jk_yr_{1y}}g_P\begin{pmatrix}k_x\\r_{1y}\\k_z\end{pmatrix}g_{Pm}\begin{pmatrix}k_x\\-k_y\\k_z\end{pmatrix}\mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y \tag{4.1.15}$$

Ce calcul ne peut être avancé plus avant sans connaitre explicitement g_P et g_{Pm}.

4.1.3 Interlude pour le calcul de transformée de Fourier

Nous allons calculer dans cette sous-section les fonctions $g_p\left(k_x,r_y,k_z\right)$ et $g_{Pm}\left(k_x,k_y,k_z\right)$. Nous rappelons que $g_P\left(\mathbf{r}\right)$ est une fonction polaire vis-à-vis de $\sqrt{r_x^2+r_z^2}$.

$$\begin{aligned}g_P\begin{pmatrix}k_x\\r_y\\k_z\end{pmatrix}&=\mathcal{F}_{2D_{xz}}\left(g\begin{pmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{pmatrix}\right)\left[k_x,k_z\right]\\&=2\pi\int_0^\infty r\mathrm{J}_0\left(r\sqrt{k_x^2+k_z^2}\right)\frac{1}{2\pi\sqrt{r^2+r_y^2}}\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

avec J_0 la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0. On utilise alors l'intégrale de Weber-Lipchitz que l'on peut trouver dans Abramowitz *et al.* [Abramowitz 64], $\int_0^\infty e^{-|\xi_2|t}\mathrm{J}_0\left(rt\right)\mathrm{D}t=\frac{1}{\sqrt{r^2+\xi_2^2}}$ et on rappelle que les fonctions J_0 sont une base orthogonale pour le produit scalaire suivant :

$$\left\langle f,g\right\rangle=\int_0^{+\infty}xf\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{4.1.17}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}g_P\begin{pmatrix}k_x\\r_y\\k_z\end{pmatrix}&=2\pi\int_0^\infty r\mathrm{J}_0\left(r\sqrt{k_x^2+k_z^2}\right)\frac{1}{2\pi\sqrt{r^2+r_y^2}}\mathrm{d}r\\&=\int_0^\infty r\mathrm{J}_0\left(r\sqrt{k_x^2+k_z^2}\right)\left[\int_0^\infty e^{-|r_y|t}\mathrm{J}_0\left(rt\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}r\\&=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty r\mathrm{J}_0\left(r\sqrt{k_x^2+k_z^2}\right)\mathrm{J}_0\left(rt\right)\mathrm{d}r\right]e^{-|r_y|t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\frac{\delta^0\left(t-\sqrt{k_x^2+k_z^2}\right)}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}}e^{-|r_y|t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\exp\left[-\left|r_y\right|\sqrt{k_x^2+k_z^2}\right]}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}}\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Passons à $g_{Pm}\left(k_x,k_y,k_z\right)$:

$$\begin{aligned} g_{Pm}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} &= \int_0^\infty e^{-jk_y r_y} g_P \begin{pmatrix} k_x \\ r_y \\ k_z \end{pmatrix} \mathrm{d}r_y \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-r_y\left(\sqrt{k_x^2+k_z^2}+jk_y\right)}}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \mathrm{d}r_y \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}+jk_y} \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Nous avons finalement

$$\begin{aligned} g_p(k_x, r_y, k_z) &= \frac{\exp\left[-|r_y|\sqrt{k_x^2+k_z^2}\right]}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \\ g_{pm}(k_x, k_y, k_z) &= \frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}+jk_y} \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

4.1.4 Assemblage final

Nous allons à présent réinjecter les résultats de l'équation (4.1.20) dans l'équation (4.1.15) :

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}[x](\mathbf{k},\omega) &= \iint \frac{1}{2\pi}\Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k}_3,\omega)\, e^{-jk_y r_{1y}} g_P \begin{pmatrix} k_x \\ r_{1y} \\ k_z \end{pmatrix} g_{Pm}\begin{pmatrix} k_x \\ -k_y \\ k_z \end{pmatrix} \mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y \\ &= \iint \frac{1}{2\pi}\Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k}_3,\omega)\, e^{-jk_y r_{1y}} \frac{e^{-r_{1y}\sqrt{k_x^2+k_z^2}}}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}-jk_y} \mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y \\ &= \iint \frac{1}{2\pi}\Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k}_3,\omega)\, \frac{e^{-r_{1y}(|\mathbf{k}|+jk_y)}}{\mathbf{k}^2} \frac{1}{|\mathbf{k}|-jk_y} \mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu par Lysak. En faisant les trois hypothèses suivantes :

— $r_y \to \Phi_{qq}[\mathbf{x}](k_x, r_y, k_z, \omega)$ décroit rapidement de telle sorte que

$$\int_{-\infty}^{-y} e^{-r_y\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \Phi_{qq}[\mathbf{x}](k_x, r_y, k_z, \omega)\, \mathrm{d}r_y$$

est négligeable devant

$$\int_{-y}^{\infty} e^{-r_y\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \Phi_{qq}[\mathbf{x}](k_x, r_y, k_z, \omega)\, \mathrm{d}r_y$$

ce qui revient à négliger des contributions fictives dues à fluctuations sous la paroi $y = 0$.

— $r_y \to \Phi_{qq}[\mathbf{x}](k_x, r_y, k_z, \omega)$ décroit rapidement de telle sorte que

$$e^{-r_y\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \Phi_{qq}[\mathbf{x}](k_x, r_y, k_z, \omega) \approx \left[1 - r_y\sqrt{k_x^2+k_z^2}\right] \Phi_{qq}[\mathbf{x}](k_x, r_y, k_z\omega)$$

Il doit exister une partie du plan d'onde (k_x, k_z) telle que cette approximation est justifiée et dont les bornes doivent s'exprimer en fonction de l'échelle caractéristique de la turbulence et l'altitude y dans la couche limite. Lysak ne spécifie pas ces bornes et utilise ce résultat pour l'ensemble du plan d'onde.

— $r_y \to \Phi_{qq}[\mathbf{x}](k_x, r_y, k_z, \omega)$ est supposée paire de telle sorte que le terme $-r_y\sqrt{k_x^2+k_z^2}$ est supprimé lors de l'intégration vis-à-vis de r_y. Cette hypothèse est réaliste pour de la turbulence homogène isotrope mais non au sein d'un écoulement cisaillé comme une couche limite comme le rapporte Aupoix [Aupoix 15]. On a :

$$\Phi_{pp,\text{Lysak}}[x](\mathbf{k},\omega) = \int \Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k},\omega)\frac{e^{-2r_{1y}|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}^2}\mathrm{d}r_{1y} \tag{4.1.22}$$

Montrons que nous pouvons retrouver le résultat de Lysak en tant que cas simplifié de notre modèle. Pour cela, nous allons faire un développement limité $k_y \to \Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k}_3,\omega)$ à l'ordre 0, *i.e.* $\Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k}_3,\omega) \approx \Phi_{qq}[r_{1y}](k_x,0,k_z,\omega)$. A l'aide cette hypothèse, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}[x](\mathbf{k},\omega) &\approx \int \frac{e^{-2r_{1y}|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}^2}\Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k},\omega)\left[\int \frac{1}{2\pi}\frac{e^{r_{1y}(|\mathbf{k}|-jk_y)}}{|\mathbf{k}|-jk_y}\mathrm{d}k_y\right]\mathrm{d}r_{1y}\\ &\approx \int \frac{e^{-2r_{1y}|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}^2}\Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k},\omega)\times[1]\,\mathrm{d}r_{1y}\\ &\approx \Phi_{pp,\text{Lysak}}[x](\mathbf{k},\omega)\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

On retrouve le résultat de Lysak avec une seule hypothèse. Cela signifie que les trois siennes sont sans doute trop fortes pour obtenir ce résultat, notamment celle imposant la parité.

Le calcul ne peut être poursuivi sans spécifier la forme de Φ_{qq}. Suivant Lysak, nous prenons le modèle de Von Kàrmàn de turbulence homogène isotrope, sans spécifier la dépendance fréquentielle qui n'intervient pas dans l'intégration suivant k_y :

$$\begin{aligned}\Phi_{qq}(r_y)(\mathbf{k}_3,\omega) &= 4\rho^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 k_x^2\Phi_{vv}(r_y)(\mathbf{k}_3)\times f(\omega)\\ \Phi_{vv}(r_y)(\mathbf{k}_3) &= (2\pi)^3\frac{3}{8\pi}\frac{v^2}{k_e^3}\frac{k_x^2+k_z^2}{k_e^2}\left[1+\frac{\mathbf{k}_3^2}{k_e^2}\right]^{-17/6}\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

L'utilisation de ce modèle conduit à :

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}[x](\mathbf{k},\omega) &= \iint \frac{1}{2\pi}\Phi_{qq}[r_{1y}](\mathbf{k}_3,\omega)\frac{e^{-r_{1y}(|\mathbf{k}|+jk_y)}}{\mathbf{k}^2}\frac{1}{|\mathbf{k}|-jk_y}\mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y\\ &= \iint \frac{1}{2\pi}\left[4\rho^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 k_x^2 f(\omega)(2\pi)^3\frac{3}{8\pi}\frac{v^2}{k_e^3}\frac{k_x^2+k_z^2}{k_e^2}\left[1+\frac{\mathbf{k}_3^2}{k_e^2}\right]^{-17/6}\right]\\ &\times\frac{e^{-r_{1y}(|\mathbf{k}|+jk_y)}}{\mathbf{k}^2(|\mathbf{k}|-jk_y)}\mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y\\ &= 3(2\pi)\int \rho^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 k_x^2 f(\omega)\frac{v^2}{k_e^5}e^{-r_{1y}|\mathbf{k}|}\left[\int\left[1+\frac{\mathbf{k}_3^2}{k_e^2}\right]^{-17/6}\frac{e^{-r_{1y}jk_y}}{|\mathbf{k}|-jk_y}\mathrm{d}k_y\right]\mathrm{d}r_{1y}\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

Cette dernière expression doit être rapprochée de celle obtenue par Lysak :

$$\Phi_{pp}[x](\mathbf{k},\omega) = 3(2\pi)^2\rho^2\int\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 f(\omega)\,k_x^2\frac{v^2}{k_e^5}e^{-r_{1y}\sqrt{k_x^2+k_z^2}}\left[\frac{e^{-r_{1y}\sqrt{k_x^2+k_z^2}}}{\left[1+\frac{k_x^2+k_z^2}{k_e^2}\right]^{17/6}}\right]\mathrm{d}r_{1y} \tag{4.1.26}$$

Malheureusement, tout les essais de calculs analytiques de l'intégrale en k_y se sont révélés infructueux à cause de la puissance non-entière $-17/6$ et du terme en $\mathbf{k}_3$. Cette intégrale doit donc être évaluée numériquement. Ceci est délicat puisqu'il s'agit en réalité d'une transformée de Fourier dont la convergente est lente à cause du terme oscillant. Le modèle résultant de cette résolution exacte de l'équation de Poisson sera noté M1L. Il sera comparé au modèle LMA dans le chapitre 6.

4.1.5 Retour sur la modélisation fréquentielle

Nous allons terminer la construction du modèle pour $\Phi_{pp}[x](\mathbf{k},\omega)$ en précisant la dépendance fréquentielle représentée par $f(\omega)$. Lysak se sert de l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor qui suppose que les fluctuations de vitesses turbulentes sont advectées à la vitesse de l'écoulement moyen ce qui numériquement se traduit par :

$$\begin{aligned}
S_{vv}(y)(\mathbf{r},\tau) &= S_{vv}(y)\left(\begin{pmatrix} r_x - U(y)\tau \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, 0\right) \\
\Phi_{vv}(y)(\mathbf{k}_3,\omega) &= \iint S_{vv}(y)\left(\begin{pmatrix} r_x - U(y)\tau \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, 0\right) e^{-j(\mathbf{k_3}\cdot\mathbf{r}+\omega\tau)}\mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\tau \\
&= \iint S_{vv}(y)\left(\begin{pmatrix} r_x - U(y)\tau \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, 0\right) e^{-j(k_x(r_x-U(y)\tau)+(\omega+Uk_x)\tau)}\mathrm{d}r_x\mathrm{d}\tau \\
&= \int \Phi_{vv}(y)(\mathbf{k}_3)\, e^{-j(\omega+U(y)k_x)\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \Phi_{vv}(y)(\mathbf{k}_3)\, 2\pi\delta^0(\omega + U(y)k_x)
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

On retrouve donc $f(\omega) = 2\pi\delta^0(\omega + U(y)k_x)$ utilisé par Lysak. Intéressons nous à présent à la dépendance spatiale dans la direction longitudinale de Φ_{pp} :

$$\begin{aligned}
\Phi_{pp}[x](r_x,k_z,\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int \Phi_{pp}[x](k_x,k_z,\omega)\, e^{jk_xr_x}\mathrm{d}k_x \\
&= \int g(k_x,k_z)\,\delta^0(\omega + U(y)k_x)\, e^{jk_xr_x}\mathrm{d}k_x \\
&= \frac{1}{U(y)} g\left(\frac{-\omega}{U(y)}, k_z\right) e^{j\frac{-\omega}{U}r_x}
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

Il y a un comportement oscillant vis-à-vis de r_x ce qui signifie en particulier que l'on n'a pas :

$$\lim_{|r_x|\to\infty} \Phi_{pp}[x](r_x,k_z,\omega) = 0 \tag{4.1.29}$$

Ce résultat est connu et énoncé par Lysak et est uniquement dû à l'utilisation de l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor. Afin de pallier ce comportement non-physique, nous proposons d'ajouter un mécanisme de décorrélation temporelle de type exponentiel à l'hypothèse de Taylor. Cela se traduit numériquement par :

$$
\begin{aligned}
S_{vv}(y)(\mathbf{r},\tau) &= S_{vv}(y)\left(\begin{pmatrix} r_x - U(y)\tau \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, 0\right)\exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_s}\right) \\
\Phi_{vv}(y)(\mathbf{k}_3,\omega) &= \iint S_{vv}(y)\left(\begin{pmatrix} r_x - U(y)\tau \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, 0\right) e^{-j(\mathbf{k_3}\cdot\mathbf{r}+\omega\tau)-\frac{|\tau|}{\tau_s}}\mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\tau \\
&= \iint S_{vv}(y)\left(\begin{pmatrix} r_x - U(y)\tau \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, 0\right) e^{-j(k_x(r_x-U(y)\tau)+(\omega+Uk_x)\tau)-\frac{|\tau|}{\tau_s}}\mathrm{d}r_x\mathrm{d}\tau \\
&= \int \Phi_{vv}(y)(\mathbf{k}_3)\, e^{-j(\omega+U(y)k_x)\tau-\frac{|\tau|}{\tau_s}}\mathrm{d}\tau \\
&= \Phi_{vv}(y)(\mathbf{k}_3)\, 2\pi\frac{\tau_s/\pi}{1+([\omega+k_xU(y)]\,\tau_s)^2}
\end{aligned}
\tag{4.1.30}
$$

Nous obtenons donc $f(\omega) = 2\pi\dfrac{\tau_s/\pi}{1+([\omega+k_xU(y)]\,\tau_s)^2}$. On constate que cette fonction qui est une distribution de Cauchy redonne bien la distribution de Dirac lorsque $\tau_S \to \infty$ ce qui correspond à l'absence de décorrélation temporelle.

La construction de notre modèle pour Φ_{pp} est ainsi achevée ; l'analyse détaillée peut en être trouvée dans l'article ci-après.

4.2 Calcul numérique des impédances de rayonnement

L'une des étapes nécessaires au calcul de bruit rayonné par une structure excitée par une couche limite turbulente est celle de la modélisation des impédances de rayonnement de la structure Z_{mn}. Cette impédance traduit le couplage entre la pression et la vitesse acoustique. Si on se place dans une décomposition modale et que l'on suppose que les modes n'interfèrent pas entres eux comme cela a été détaillé dans la partie bibliographique, alors l'impédance de rayonnement pour chaque mode (r,s) peut être calculée par :

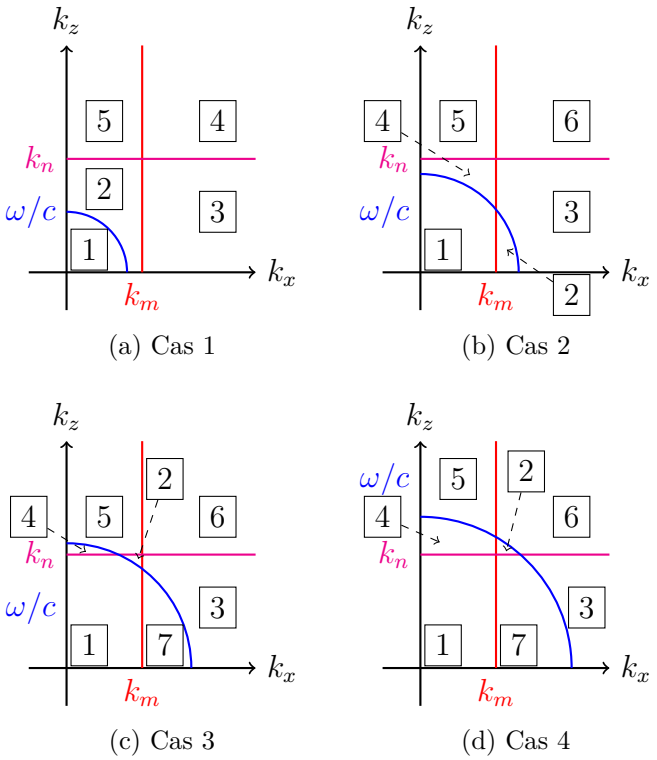
$$
Z_{rs}(\omega) = \frac{\rho\omega}{(2\pi)^2}\int |w_{rs}(\mathbf{k})|^2\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mathbf{k}^2\right]^{-1/2}\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{4.2.1}
$$

avec ω la pulsation, $\mathbf{k}$ le nombre d'onde dans le plan (x,z), c la célérité du son, et $w_{rs}(\mathbf{k})$ la transformée de Fourier spatiale de la fonction modale $w_{rs}(\mathbf{r})$ du mode (r,s).

Même dans le cas le plus simple, la plaque appuyée sur ses quatre bords, cette intégrale ne peut être calculée analytiquement. Son évaluation numérique est délicate pour cinq raisons :

- son domaine d'intégration est bidimensionnel ;
- son domaine d'intégration est non borné ;
- les fonctions $w_{rs}(\mathbf{k})$ comportent des exponentielles oscillantes ce qui ralentit la convergence ;
- l'intégrande est singulière pour $\mathbf{k^2} = (\omega/c)^2$;
- dans le cadre de plaques rectangulaires de dimensions $l_x \times l_z$, l'intégrande est singulière pour $k_x = \pm r\pi/l_x$ et $k_z = \pm s\pi/l_z$.

Dans le plan (k_x, k_z), ces singularités sont représentées par un cercle centré en l'origine et de rayon ω/c, deux droites verticales d'équations $k_x = \pm r\pi/l_x$ et deux droites horizontales d'équations $k_z = \pm s\pi/l_z$. La difficulté du problème d'intégration est que la position relative de ces supports de singularité évolue avec les paramètres ω, r et s. En remarquant que l'intégration peut être limitée au quart de plan $(\mathbb{R}^{+2})$ pour des raisons de parités, et à supposer que $s\pi/l_z > r\pi/l_x$, quatre cas peuvent être définis. Chacun de ces cas peut être décomposé en respectivement $5, 6, 6$ et 7 domaines du quart de plan $(\mathbb{R}^{+2})$ où l'intégrande est régulière sauf éventuellement sur ses bords. Ces quatre cas et leurs domaines sont donnés sur la figure 4.2.1. Les intégrales sur chaque domaine peuvent ensuite être calculées à l'aide de quadratures adaptatives bidimensionnelles capables de gérer des domaines non bornés et/ou avec des singularités sur leurs bords comme celle de Shampine [Shampine 08].



(a) Cas 1 (b) Cas 2

(c) Cas 3 (d) Cas 4

FIGURE 4.2.1 – Domaines d'intégration pour Z_{mn}

Afin de justifier ces calculs alors que des formules approchées ont été développées par Maidanik [Maidanik 62], un cas d'application est proposé. Nous nous intéressons au mode $(5; 2)$ d'une plaque rectangulaire de dimensions $(25\,\text{cm} \times 17\,\text{cm})$, soit appuyée sur ces quatre bords, soit encastrée sur ces quatre bords. Les formules de Maidanik ne permettent de calculer que la partie réelle de l'impédance dans le cas appuyé et recommande de prendre le double pour le cas de la plaque encastrée. Les résultats sont présentés sur la figure 4.2.2 pour des fréquences $f \in [20; 20\,\text{kHz}]$.

Les constats suivants peuvent être faits à partir de cet exemple. Les formules de Maidanik capturent correctement les régimes asymptotiques de la partie réelle du cas appuyé. Cependant, ces formules étant définies par morceaux, des discontinuités peuvent survenir. Une erreur importante est commise au voisinage de la fréquence propre du mode où l'impédance est approchée par un plateau. La partie imaginaire de l'impédance est totalement négligée, alors qu'elle est primordiale pour les basses fréquences. Enfin, on remarque que l'approximation consistant à prendre le double

de l'impédance du cas appuyé pour calculer celle du cas encastré n'est justifiée pour aucune partie du domaine fréquentiel.

L'ensemble de ces constats permet de confirmer l'intérêt de calculer avec précision ces impédances de rayonnement plutôt que d'utiliser des formules approchées afin de calculer le bruit rayonné par une structure.

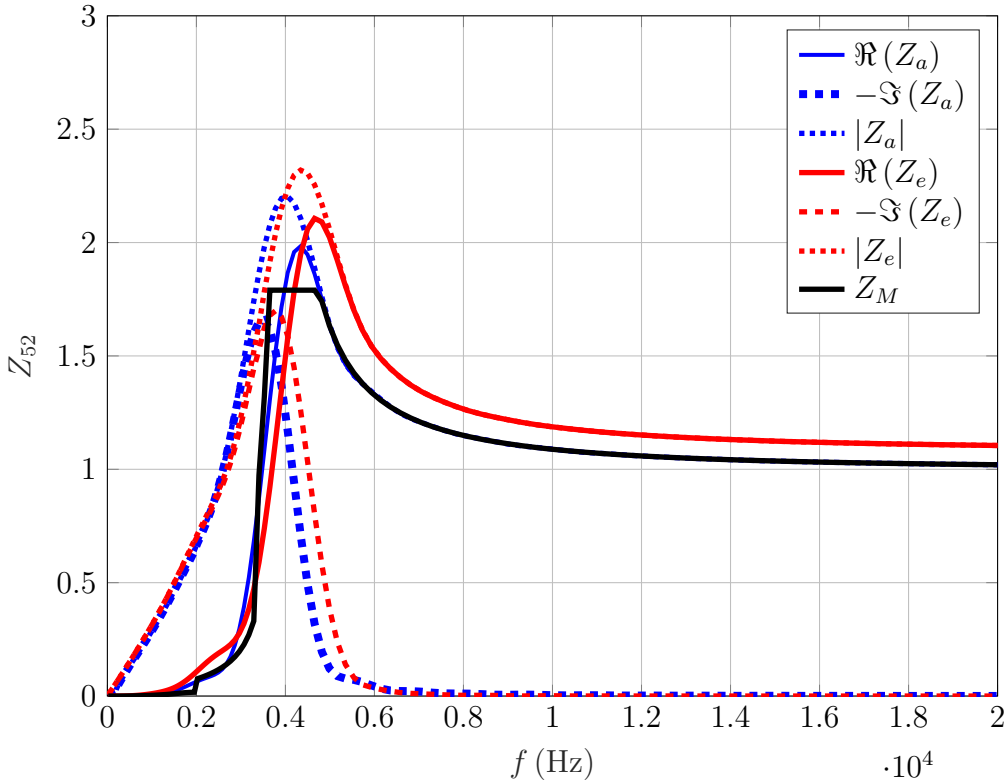


FIGURE 4.2.2 – Comparaison des méthodes de calculs pour Z_{52} d'une plaque rectangulaire. Z_a correspond au calcul exact d'une plaque appuyée, Z_e au calcul exact d'une plaque encastrée et Z_M au calcul asymptotique de Maidanik [Maidanik 62] d'une plaque appuyée

4.3 Article

Sylvain Morilhat
ONERA-DMPE,
2 Avenue E. Belin,
Toulouse 31000, France
e-mail: sylvain.morilhat@onera.fr

François Chedevergne
ONERA-DMPE,
2 Avenue E. Belin,
Toulouse 31000, France
e-mail: francois.chedevergne@onera.fr

Frank Simon
ONERA-DMPE,
2 Avenue E. Belin,
Toulouse 31000, France
e-mail: frank.simon@onera.fr

A Unified Methodology to Evaluate the Radiated Noise Due to Turbulent Boundary Layer Flows

For vibro-acoustic applications, a turbulent wall pressure (TWP) fluctuations model was derived. The model is based on the resolution of Poisson's equation. The pressure is characterized in time and space through its spectrum in the frequency wave-number domain. The developed model follows trends commonly observed using Corcos model in a large frequency range but also shows new behaviors for low and high frequencies. The radiated noise due to TWP fluctuations is then computed in accordance with the form of the TWP spectrum. A specific computational methodology is proposed to perform the calculation without introducing limiting hypothesis on the radiated impedance.
[DOI: 10.1115/1.4041611]

1 Introduction

The internal noise perceived in helicopter cockpits is caused by several sources. Among them, flow-induced noise is becoming a growing area of interest. For decades, it was considered negligible compared to noise sources generated by the engines which were predominant. Thanks to the efforts made to reduce those sources of noises, the flow-induced noise must now be considered in order to improve passengers comfort in flight.

The unsteady turbulent wall pressure (TWP) due to boundary layers developing along external surfaces generates a vibratory motion of walls creating radiated noise that propagates inside aircraft. Modeling the whole scenario requires associating turbulence and vibro-acoustic models, related to each other through the fluctuating wall pressure. The stochastic nature of turbulence makes the TWP hardly expressible in the physical domain $p(\mathbf{x}, t)$. It is generally described with appropriate functions such as intercorrelations in space and time $S_{pp}(\mathbf{r}, \tau)$, or similarly using Fourier transforms as spectra in the wave-number and frequency domain $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$. In this context, modeling the turbulence fluctuations at the wall reduces down to modeling the spectrum $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$. From this spectrum, vibro-acoustics tools are applied to compute the radiated noise. From a theoretical point of view, these two tasks can be performed separately. But practically, the form of $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ greatly affects the numerical implementation of the computation of the radiated noise. For this reason, it is interesting to have a complete modeling accounting for both turbulence and vibro-acoustics issues available in a unified context. The goal of this paper is twofold. First, a more realistic model for the spectrum $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$, compared to those available in the literature, is proposed. Second, standard vibro-acoustics tools are revisited to make them compatible with the proposed form of the $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ model. The whole set forms a methodological framework for computing the radiated noise due to turbulent boundary layers (TBLs).

To model $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$, a commonly used approach is to split the spectrum $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) \approx \phi_{pp}(\omega) \times \varphi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ into a form function $\varphi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ and an amplitude function $\phi_{pp}(\omega)$ such that $(2\pi)^{-2} \int \varphi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) \mathrm{d}\mathbf{k} = 1$. Concerning $\phi_{pp}(\omega)$, models can rely on experimental data since measurements only require single-point information. On the theoretical side, only asymptotic behaviors were obtained as discussed by Panton and Linebarger [1], Blake [2], and Bradshaw [3]: $\phi_{pp}(\omega) \propto_{\omega \to 0} \omega^2$ and $\phi_{pp}(\omega) \propto_{\omega \to \infty} \omega^{-5}$. As discussed by Keith et al. [4] based on empirical data, different characteristic scales have to be used for high and low frequencies. The outer variables suit low frequencies, while wall variables suit high frequencies. The overlapping region may be approximated using $\phi_{pp}(\omega) \propto \omega^{-1}$ and both scaling can be used. Slopes in ω^2 and ω^{-5} were observed experimentally by Farabee and Casarella [5] but ω^{-1} matching remains questionable. Instead, slopes between $\omega^{-0.7}$ and $\omega^{-0.8}$ were observed by Mcgrath and Simpson [6], Blake [7], and Goody and Simpson [8]. Even though asymptotic behaviors were found for ϕ_{pp}, there is no theoretical model for ϕ_{pp} covering the whole spectral domain. Most of the models available in the literature are thus based on empirical correlations. Their forms are chosen such that the asymptotic behaviors are recovered and reproduce experimental data. These models rely on TBL parameters such as freestream velocity U_e, boundary layer thickness δ, momentum thickness θ, friction velocity u_τ, or pressure gradient. Correlations for the zero pressure gradient boundary layers were proposed by Efimtsov [9,10], Goody [11], and Catlett [12], while Rozenberg et al. [13], Hu and Herr [14], Hu [15], and Kamruzzaman et al. [16] presented correlations for adverse pressure gradient cases. Zero pressure gradient models have been compared by Hwang et al. [17], while adverse pressure gradient models have been compared by Lee [18].

Models for the spatial part $\varphi_{pp}(k, \omega)$ also rely on empirical considerations and result in correlations made to reproduce experimental data. Most of the models used in the literature are inspired by Corcos [19,20] works. Based on experimental observations, a model for the spatial correlation of the TWP was built with an oscillatory exponential decay in the longitudinal direction x and an exponentially decaying form in the transverse direction z

$$\begin{aligned} &S_{pp}(x, z, x + \delta x, z + \delta z, \omega) \\ &\quad = \phi_{pp}(\omega) \exp\left(-\alpha \left|\frac{\omega \delta x}{U_c}\right|\right) \exp\left(-\beta \left|\frac{\omega \delta z}{U_c}\right| + j \frac{\omega \delta x}{U_c}\right) \\ &U_c = 0.7 U_e(x) \\ &\alpha = 0.116 \\ &\beta = 0.7 \end{aligned} \tag{1}$$

Corcos model only provides information on the spatial behavior as the correlation S_{pp} depends on an unknown function $\phi_{pp}(\omega)$ of

Contributed by the Fluids Engineering Division of ASME for publication in the Journal of Fluids Engineering. Manuscript received April 26, 2018; final manuscript received September 25, 2018; published online December 12, 2018. Assoc. Editor: Samuel Paolucci.

 Copyright © 2019 by ASME

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

the frequency ω. The spectrum $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ associated with this correlation is then obtained through a Fourier transform in space using the product of two Cauchy distributions in each direction

$$\Phi_{pp}(k_x,k_z,\omega) = \phi_{pp}(\omega)\frac{2\pi\alpha}{k_c\left[\alpha^2+(k_x/k_c+1)^2\right]}\frac{2\pi\beta}{k_c\left[\beta^2+(k_z/k_c)^2\right]}$$
$$k_c = \omega/U_c \tag{2}$$

Corcos work was improved by several authors proposing new values for parameters $\alpha,\beta,U_c/U_e$. For instance, Efimtsov [9,10] accounted for compressibility effects and the boundary layer thickness to compute values of α and β.

To avoid resorting to the splitting introduced above and to have a more realistic modeling of $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$, Poisson's equation that governs the fluctuations of the turbulent pressure can be directly considered. The idea of solving Poisson's equation with Green's functions dates back to Kraichnan [21] in 1956. However, the determination of Φ_{pp} requires the knowledge of the mean profiles in the boundary layer and the spectra of the fluctuating velocities. As these quantities were not available for Kraichnan, only the simplified case of a constant shear stress profile was considered and its study was limited to determine orders of magnitude. Moreover, the model requires the computation of improper integrals that cannot be solved analytically. About 20 years later, when these integrals could be numerically evaluated, Panton and Linebarger [1] computed spatial and frequency spectra. The TBL profile was described through semi-analytical models. Most of the modern Φ_{pp} models rely on Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) calculations to get the TBL profiles. Two types of approaches may be distinguished. On one side, works following the spectral approach of Kraichnan, based on a wave-number-frequency resolution, may be gathered such as works by Lee et al. [22,23], Remmler et al. [24], and Parchen [25] latterly extended by Bertagnolio et al. [26,27]. All these models give only the frequency spectrum $\phi_{pp}(\omega)$ and not the complete $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ spectrum. On the other side, works based on a space–time resolution of Poisson's equation such as Peltier and Hambric [28] and Slama et al. [29] result in an expression for the correlation $S_{pp}(\mathbf{r},\tau)$. The spectra $\phi_{pp}(\omega)$ and $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ are deduced through Fourier transforms but they must be performed numerically as no analytical formulations are available in these studies.

As complete vibro-acoustics modeling requires $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ and not only $\phi_{pp}(\omega)$, models based on the resolution of Poisson's equation available in the literature are not completely suitable in the present context. Using $S_{pp}(\mathbf{r},\tau)$ is theoretically possible but leads to delicate numerical issues and very large computational costs. Recently, Kraichnan's approach was revisited by Lysak [30] for pipe flows. Aupoix [31] extended the approach to any boundary layer flow computed using a RANS solver. One of the objectives of the present work is to improve this approach to obtain the whole spectrum $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ in the wave-number and frequency domain from the resolution of Poisson's equation. The resulting spectrum will then serve as an input for vibro-acoustics computations in order to evaluate the radiated noise.

Several studies [32–36] have already addressed the question of computing the radiated noise caused by turbulent boundary layers. The radiated noise is characterized by the acoustic intensity integrated over the whole vibrating surface. For that purpose, the TWP spectrum is modeled using Corcos formulation (2) and is assumed to behave as a combination of planar waves allowing to resort to Fourier transform for computations. This methodology was initiated in the 70 s [37] and further extended by Hwang and Maidanik [38], Graham [33], and Maury et al. [39]. In the specific case of a rectangular plate simply supported on its edges, analytical expressions were obtained by Hwang and Maidanik [38] for the acoustic intensity. Such analytical solutions are no longer achievable when other structures are considered or when different forms for TWP spectra $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ are used.

In the present context, where the TWP spectrum is no longer described using Corcos model, the standard methodology for the computation of the radiated noise must be revisited. Starting from the definition of the acoustic intensity, the main difficulty lies in the calculation of the two-dimensional improper integrals over the wave-number domain. The retained approach for the TWP computation does not permit to separate the longitudinal and transversal contributions. To compute the acoustic intensity, a new methodology is proposed, based on a numerical evaluation of the improper integrals and an efficient procedure of selection of the main contributions.

The paper is organized as follows: the first section is dedicated to the model of the TWP spectrum. The original model of Aupoix [31] is recap and an extension is formulated to access the whole spectrum $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$. The model is then compared to Corcos approach. The second section is devoted to the coupling with the vibrating structure. The methodology allowing the evaluation of the radiated noise is detailed and a computational algorithm is presented.

2 Turbulence Modeling

This section concentrates on the modeling of term $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$. In this study, this term relies on studies by Lysak [30] and Aupoix [31]. The basis of these works is briefly summarized in Sec. 2.1.

2.1 Lysak and Aupoix's Model. The main idea of Lysak and Aupoix's approach is to solve the following Poisson's equation in order to access the TWP spectrum $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$:

$$\nabla^2 p = -\rho\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(2U_iu_j + u_iu_j - \overline{u_iu_j}) \tag{3}$$

The source terms correspond to

- $-2\rho(\partial^2/\partial x_i\partial x_j)U_iu_j$ which reflects the interactions between the turbulence and the mean flow (TM),
- $-\rho(\partial^2/\partial x_i\partial x_j)(u_iu_j - \overline{u_iu_j})$ which accounts for the turbulent-turbulent (TT) interactions.

First, Lysak and Aupoix only consider the linear term $-2\rho(\partial^2/\partial x_i\partial x_j)U_iu_j$ of Eq. (3), and more precisely, only $-2\rho(\mathrm{d}U/\mathrm{d}y)(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)$ is retained in a two-dimensional boundary layer context. They neglect the TT interactions. This assumption is questionable under some circumstances but there are no existing solutions to deal with the TT term when solving Poisson's equation in the spectral domain. In the approach initiated by Peltier and Hambric [28] and recently extended by Slama et al. [29] that solves Poisson's equation in the physical space, both TM and TT terms are considered. As S_{pp} is a second-order tensor, its computation through Eq. (3) requires velocity tensors of order two for TM terms and three and four for TT terms. Assuming that the fluctuating velocity fields satisfy the quasi-normality hypothesis, the third-order tensor is zero, and the fourth-order tensor can be expressed using the second-order tensor just as for the TM term.

Second, Poisson's equation is solved using Green's functions. Then, the velocity fluctuations are modeled using an isotropic and homogeneous von Kàrmàn spectrum for the spatial part and a Dirac distribution using Taylor's frozen turbulence hypothesis for the frequency part. These two choices are discussed in Lysak [40]. The spectrum $\Phi_{vv}(\mathbf{k},\omega)$ reads

$$\begin{aligned}&\Phi_{vv}(\mathbf{k},\omega)\\ &= (2\pi)^3\frac{3}{8\pi}\frac{\langle v^2\rangle}{k_e^3}\frac{(k_x^2+k_z^2)}{k_e^2}\left[1+\mathbf{k}^2/k_e^2\right]^{-17/6}\times 2\pi\delta(\omega+k_xU)\langle v^2\rangle\\ &= \mathbb{E}(v^2)k_e \text{ wave} - \text{number carrying the maximum of energy}\end{aligned} \tag{4}$$

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

With this model for Φ_{vv}, the final formulation of Lysak's spectrum of the TWP reads

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega) &= (2\pi)^3 3\rho^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 \frac{\langle v^2\rangle}{k_e^3}\left(\frac{k_x}{k_e}\right)^2 \\ &\quad \left[1+\mathbf{k}^2/k_e^2\right]^{-17/6}\exp(-2|\mathbf{k}|y)\delta\big(\omega+U(y)k_x\big)\mathrm{d}y \\ \phi_{pp}(\omega) &= 2\pi 3\rho^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 \langle v^2\rangle \omega^2 U^{-3} k_e^{-4} I\left(\frac{\omega}{Uk_e}, k_e y\right)\mathrm{d}y \\ I(\xi,\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2\alpha\sqrt{\xi^2+\zeta^2}\right)\times\left(1+\xi^2+\zeta^2\right)^{-17/6}\mathrm{d}\zeta\end{aligned} \tag{5}$$

Lysak's original model is restricted to the very specific case of round pipe flows for which an analytic solution of the profiles of U, $\langle v^2\rangle$, and k_e is known. An extension to an arbitrary boundary layer computed with a RANS solver was developed by Aupoix [31], deducing k_e and $\langle v^2\rangle$ from the mean turbulent quantities

$$\begin{aligned}k_e &= 1.8\varepsilon k_t^{-3/2} \\ \langle v^2\rangle &= -1.3\langle uv\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

with k_t being the turbulent kinetic energy and ε the dissipation rate. For the remainder of the paper, this model will be denoted as the LA model.

2.2 Modification of the Frequency Part of the Velocity Spectrum. Considering $\Phi_{pp}(k,\omega)$ given in Eq. (5) only allows to compute the frequency dependency of the wall pressure spectrum $\phi_{pp}(\omega)$. As mentioned earlier, with this approach, the spatial dependency has to be known to compute the radiated noise. This drawback was identified by Lysak where it was shown that the longitudinal correlation length provided by its model is zero, which is physically meaningless. This behavior is caused by Dirac's distribution used to represent the frequency part of the velocity spectrum and that relies on Taylor's frozen turbulence hypothesis. For a given frequency and a given height in the boundary layer, only the advective wave-number $-\omega/U$ is taken into account. This selectivity is due to the zero width of Dirac's distribution. To solve this issue, a wider distribution may be used. Cauchy's distributions corresponding to an exponential decay in time associated with a width, set through a characteristic time of decorrelation caused by turbulence, are retained to this end.

Such an exponential decay in time was already used by Tam and Auriault [41] in order to represent the decorrelation of the velocity fluctuation in jet flows. It was also used by Ewert et al. [42–44] to mimic the evolution of the velocity fluctuations in a boundary layer. In both works, the characteristic time of decorrelation τ_S is computed from RANS values. In particular, Ewert use

$$\tau_S = 4.2/w_t \tag{7}$$

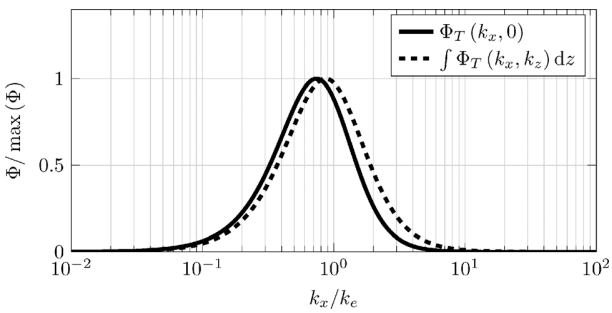


Fig. 1 Turbulence filters evolutions with respect to k_x in a semi-logarithmic plot

where w_t is the specific dissipation rate. This formulation will be used thereafter.

Finally, the Cauchy distribution in k centered around the advective wave-number and having a width of $1/U\tau_s$ reads

$$\Phi_A(\mathbf{k},y,\omega) = \frac{\tau_s/\pi}{1+\tau_s^2(\omega+Uk_x)^2} \tag{8}$$

The resulting Φ_{pp} model is reformulated as

$$\begin{aligned}\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega) &= (2\pi)^3 3\rho^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 \\ &\quad \frac{\langle v^2\rangle}{k_e^3}\Phi_T(\mathbf{k},y)\Phi_A(\mathbf{k},y,\omega)\Phi_D(\mathbf{k},y)\mathrm{d}y \\ \Phi_T(\mathbf{k},y) &= \left(\frac{k_x}{k_e}\right)^2\left[1+\mathbf{k}^2/k_e^2\right]^{-17/6} \\ \Phi_D(\mathbf{k},y) &= \exp(-2|\mathbf{k}|y)\end{aligned} \tag{9}$$

For the remainder of the paper, this model will be denoted as the Lyzak Morilhat and Aupoix (LMA) model. This model is now analyzed and departures from standard approaches such as Corcos model (Eq. (2)) are evidenced to highlight the strengths and weaknesses of the models.

2.3 Wave-Number Dependency. For a given height y in the boundary layer, function $k \to \Phi_{pp}[y](\mathbf{k},\omega)$ is proportional to the product $\Phi_T\Phi_A\Phi_D$. The three functions $\Phi_T(\mathbf{k},y)$, $\Phi_A(\mathbf{k},y,\omega)$, and $\Phi_D(\mathbf{k},y)$ can be seen as filters in the wave-number domain. They will be referred to as "turbulence filter," "advection filter," and "damping filter." The significant contributions to $\Phi_{pp}[y](\mathbf{k},\omega)$ in the (k_x,k_z) plan result from a balance between these three filters. First, filters are analyzed separately. Each of these filters is represented by its central wave-number k_0 and its -3 dB wave-number bandwidth Δk_0.

2.3.1 Turbulence Filter. The turbulence filter is a pass-band filter in the wave-number domain such that its central wave-number $k_0 \propto k_e$. Figure 1 shows two representations of the turbulent filter through functions $k_x \to \Phi_T(k_x,0)$ and $k_x \to \int \Phi_T(k_x,k_z)dk_z$. Similar behaviors are observed with a slight shift of the central wave-number k_0. Their respective bandwidths Δk_0 are summarized in Table 1.

2.3.2 Advection Filter. The advection filter is also a pass-band filter. It only depends on k_x and is a Cauchy distribution. It has a central wave-number $k_0 = -\omega/U$ and has a bandwidth $\Delta k_0 = 2\sqrt{\sqrt{2}-1}/(U\tau_s)$. Note that the bandwidth Δk_0 does not depend on the frequency ω. A representation of the shape of the advection filter is given in Fig. 2.

2.3.3 Damping Filter. The damping filter is an exponential low-pass filter using the local height inside the boundary layer y as a reference length.

2.3.4 Resulting Filter. The wave-number selectivity of the LMA model depends on the competition between those three filters. Different regimes of $k \to \Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ when ω varies depend on the advection filter as it is the only one with a dependency toward ω. At least three regimes can be found qualitatively. The advection filter has a narrower bandwidth than the turbulence filter. Thus, there is a range of ω such as $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ is driven by the advection filter which corresponds to Corcos' description. For low frequencies, the advection filter is no longer a pass-band filter and becomes a low-pass filter. The turbulence filter is the only remaining band-pass filter, and therefore, $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ is ruled by the turbulence filter. For high frequencies, $\omega/U \gg 1/y$ and $\omega/U \gg k_e$, the advection filter will be damped by the turbulence and damping filters. A more detailed discussion on this competition is made in Sec. 2.5.

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

Table 1 Bandwidths of the turbulence filter

	$k_x \to \Phi_T(k_x, 0)$	$k_x \to \int \Phi_T(k_x, k_z)\mathrm{d}k_z$
k_0	$\approx 0.74k_e$	$\approx 0.87k_e$
Low cutoff −3 deg dB	$\approx 0.42k_e$	$\approx 0.49k_e$
High cutoff −3 deg dB	$\approx 1.22k_e$	$\approx 1.50k_e$
Bandwidth −3 deg dB	$\approx 0.80k_e$	$\approx 1.01k_e$

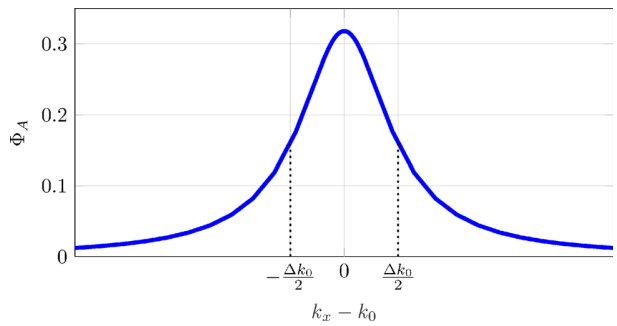


Fig. 2 Advection filter evolution with respect to k_x

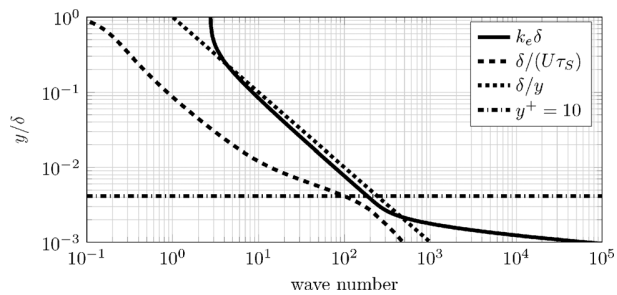


Fig. 3 Comparison of the bandwidths of the filters

The bandwidths of the three filters are compared in Fig. 3 versus the height of the TBL. The advection bandwidth is about one order of magnitude finer than the turbulence bandwidth. For a large of the TBL, the advection bandwidth scales on the height of the TBL.

2.4 Frequency Analysis. Aupoix [31] showed that the LA model is able to correctly reproduce the spectrum $\phi_{pp}(\omega)$ for a zero pressure gradient boundary layer. As the LMA model derives from the LA model, similar results are expected. Figures 4 and 5 show comparisons between several models for the configuration studied by Gravante et al. [45]: a zero pressure gradient TBL flow over a flat plate with $U_e = 15.3$ m s $^{-1}$ and $R_\theta = 7076$. Goody

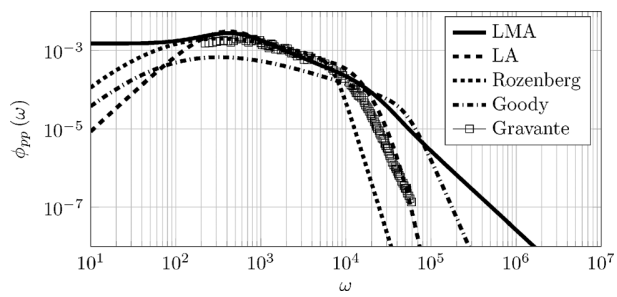


Fig. 4 Frequency dependency of ϕ_{pp} in a logarithmic representation

[11] and Rozenberg et al. [13] models are depicted in this figure to serve as references since they are standard correlations commonly used in the literature. For LA and LMA models, the spectra are computed as

$$\phi_{pp}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{10}$$

Figures 4 and 5 show no major difference between LA and LMA models in the range $\omega = [2 \times 10^3, 2 \times 10^5]\,\mathrm{s}^{-1}$. Rozenberg's model provides a similar trend for $\phi_{pp}(\omega)$. For high frequencies, all models exhibit different asymptotic behaviors. However, in the present study aimed at computing the radiated noise $I(\omega)$, the low amplitudes encountered at high frequencies will have a negligible contribution. In the present study, the observed differences are not relevant and will not be further discussed. For low frequencies, a significant difference appears. LA, Goody, and Rozenberg models show a ω^2 trend, coherent with asymptotic behaviors as reminded in the introduction. The LMA model acts differently. For $\omega \to 0$, $\phi_{pp}(\omega)$ tends to a constant non-zero value. There is a priori no reason to have $\phi_{pp}(0) = 0$, i.e., $\int S_{pp}(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$. The power spectral density function can be nonzero for $\omega = 0$: as long as the amplitude of the pressure fluctuations is zero, there will be no modification of the mean pressure value. Accurate measurements at such low frequencies are delicate. Few data are available in the literature. Analysis of TBL for large R_θ values by Tsuji et al. [46] exhibits nonzero $\phi_{pp}(\omega)$ values for $\omega \to 0$, but no clear conclusion can be drawn so far on that specific point. One can note that if the advection filter bandwidth Δk_0 is reduced, the Cauchy distribution tends to a Dirac distribution and the ω^2 behavior of the LA model is recovered by the LMA model. The loss of the ω^2 behavior with nonfrozen turbulence has been reported by Hu et al. [44]. The theoretical ω^2 behavior is established under the assumption of Taylor's hypothesis. The starting point is the Kraichnan–Phillips theorem asserting $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) \sim_{k\to 0} \mathbf{k}^2$. Then using Taylor's hypothesis and integrating over $\mathbf{k}$, it can then be shown that $\phi_{pp}(\omega) \sim_{\omega\to 0} \omega^2$ (see Howe [47,48] for more details). As this paper does not use Taylor's hypothesis, this result cannot be used anymore.

Lyzak Morilhat and Aupoix and LA models behave differently for high frequencies and τ_S is the key parameter that drives this modification. τ_S is defined by A/ω_t with $A = 4.2$. Tests have been performed for $A \in [42; 0.42]$. The resulting compensated spectra $(\omega\phi_{pp}(\omega))$ are presented in Fig. 6. For $A < 4.2$, the compensated spectrum shape is flattened and is shifted toward high frequencies. For $A > 4.2$, the LMA model tends to the LA model. It has been shown that despite this change of shape, the root-mean-square value $(2\pi)^{-1}\int \phi_{pp}(\omega)\mathrm{d}\omega$ is almost independent of A as its relative variation is below 1%.

2.5 Three-Branch Diagram. After briefly showing the capability of the LMA model to compute $\phi_{pp}(\omega)$, the focus is now made on the full spectrum $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ given by this model.

In standard approaches, as Corcos's model is only based on an advection mechanism, it is logical that for a given frequency ω, function $\mathbf{k} \to \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ has its maximum at $\mathbf{k} = (-k_c, 0, 0)$. With the introduction of new characteristic lengths in the LMA model, the maxima of the longitudinal spectrum $k_x \to \int \Phi_{pp}(k, \omega)\mathrm{d}k_z$ will no longer depend solely on k_c. Figure 7 is a schematic representation of the location of the maxima for a TBL evolving along a flat plate without any pressure gradient. This figure was built observing spectra $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ of about a thousand zero pressure gradient TBL with $U_e \in [20; 50]\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ and $R_\theta \in [2 \times 10^3; 4 \times 10^4]$ using the LMA model. A representation using a sketch was preferred since the axis can be scaled, allowing to highlight different trends in a single figure.

The fundamental difference with Corcos's model is that for a given frequency, several maxima can be found. These maxima are located on three separate branches:

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

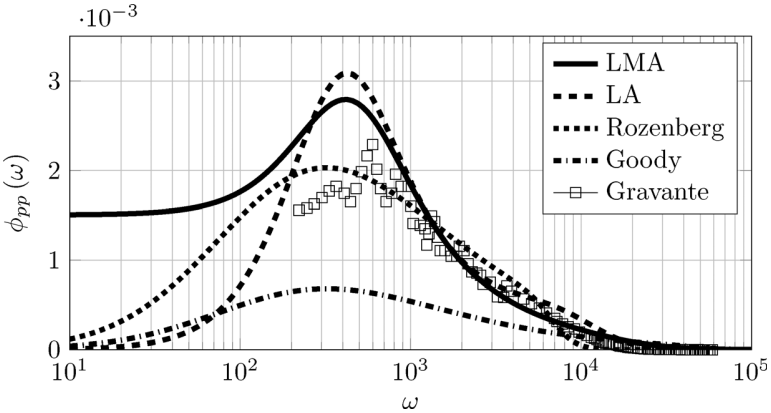


Fig. 5 Frequency dependency of ϕ_{pp} in a semi-logarithmic representation

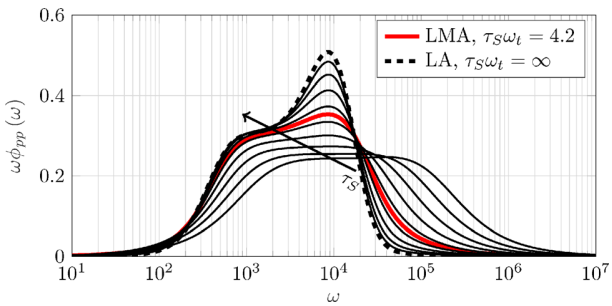


Fig. 6 Compensate frequency dependency of $\omega\phi_{pp}$ in a semi-logarithmic representation

- AFI_2H line in red which is denoted as the "advection branch,"
- EI_1C line in blue which is denoted as the "bifurcation branch,"
- BD line in green which is denoted as the "mirror branch."

For a given frequency ω, the location of the maximum on each branch, if it exists, is denoted $k_a(\omega)$, $k_u(\omega)$, and $k_m(\omega)$.

These three branches can be described by nine characteristics points A through H and I_1 and I_2 and will be studied in detail thereafter. Each of these points is fully characterized by a frequency and a wave-number.

Two lines have been added for reference:

- The advection line in purple such that $k_x + k_c = 0$,
- the sonic line in magenta such that $k_x + k_0 = 0$.

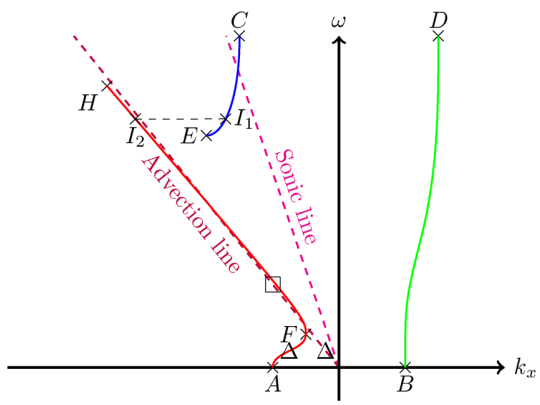


Fig. 7 Sketch of the three-branch diagram

2.5.1 Advection Branch. The advection branch is similar to the one found using Corcos's model between points F and H. The dispersion relation linking ω and k_x is $\omega = Ak_a(\omega)$. For Corcos's model, $A = -U_c$. It can be shown that the slope found using the LMA model is very close to $U_c = 0.7U_e$. However, the advection branch looks different for small frequencies as it does not reach the origin since $k_a(0) \neq 0$, as represented by point A in Fig. 7. This behavior is more physical than a collapse to the origin. Such a situation shows that enormous structures, larger than the boundary layer thickness, would be the most representative. The advection part and the small frequencies part of the advection branch can be separated easily because there is always a frequency ω such as $\mathrm{d}k_a/\mathrm{d}\omega(\omega) = 0$ which is represented by point F in Fig. 7.

The advection branch also behaves differently at high frequencies. For Corcos's model, the maximum is always held at the line $-\omega/U_c$. Once again, this means that very small structures, possibly smaller than Kolmogorov's scale, are carrying the maximum of energy. For the present model, the advection branch ceases to exist above a given threshold frequency which is represented by point H in Fig. 7.

2.5.2 Bifurcation Branch. Above a given frequency ω_E between ω_F and ω_H, $k_x \to \int \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)\mathrm{d}k_z$ has two maxima for $k_x < 0$. This situation corresponds to the emergence of the bifurcation branch and is represented by point E in Fig. 7. As above ω_H, the advection branch ceases to exist, it means that there is a frequency ω_I such that $\int \Phi_{pp}(k_a(\omega_I), k_z, \omega_I)\mathrm{d}k_z = \int \Phi_{pp}(k_u(\omega_I), k_z, \omega_I)\mathrm{d}k_z$ and beyond ω_I, the bifurcation branch dominates the advection branch. Finally, $k_u(\omega)$ tends to a finite value k_C for $\omega \to \infty$. $k_C \neq 0$ for the same reason that $k_A \neq 0$.

2.5.3 Mirror Branch. The advection and bifurcation branches are located on the left part of the diagram, i.e., for $k_x < 0$, in Fig. 7. For all frequencies, a maximum can be found in the right part for $k_x > 0$. It goes from the finite value k_B for $\omega = 0$ to the

Table 2 Correlations for characteristic points of the three branches diagram

		A, B	C, D	E
$R_{1/k} = \beta_k R_\theta^{\alpha_k}$	α_k	1.1056	1.0487	1.0547
	β_k	5.6485	3.2060	1.7399
$R_{U/\omega} = \beta_\omega R_\theta^{\alpha_\omega}$	α_ω			0.9977
	β_ω			1.2511
		F	I_1	I_2
$R_{1/k} = \beta_k R_\theta^{\alpha_k}$	α_k	1.1283	0.8184	1.0643
	β_k	5.1988	1.1987	2.5771
$R_{U/\omega} = \beta_\omega R_\theta^{\alpha_\omega}$	α_ω	1.0759	0.8103	
	β_ω	21.3876	2.1006	

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

finite value k_D for $\omega \to \infty$. It is found that $k_A + k_B = k_C + k_D = 0$, and therefore, the mirror branch behaves similar to the advection branch for low frequencies and the bifurcation branch for high frequencies.

2.5.4 Sonic Line. The sonic line stands as a limit of validation for the LMA model since the incompressibility hypothesis was used to model the turbulent fluctuations. Consequently, the locations of the sonic line and different branches must be compared before analyzing results. At a given k_x position, the advection line is always located below the sonic line for subsonic configurations. However, the section of the bifurcation line above the sonic line must be ignored since it relies on an inconsistent hypothesis. The limiting case for which the bifurcation branch must not be considered entirely corresponds to point E, located on the sonic line.

2.5.5 Scaled Correlations. From a series of zero pressure gradient TBL computations, the localization of points A, B, C, D, E, F, I_1, and I_2 can be expressed using R_θ. The wavenumbers are made dimensionless by using Reynolds numbers such as $R_{1/k} = (U/k\nu)$ and $R_{U/\omega} = (U^2/\omega\nu)$ for frequencies. The correlations are summed up in Table 2.

The most interesting fact about these correlations concerns points F and E. They can be seen as bounds for the validity of Corcos's model as according to the LMA model, the advection branch matches the advection line for frequencies $\omega_F < \omega < \omega_E$. These correlations also provide the location of point E with respect to the sonic line. The limit case for which the bifurcation branch must not be accounted for is reached when $\omega_E = ck_E$, i.e., $R_{U/\omega} = MR_{1/k}$ or $M = 0.7191R_\theta^{-0.057}$.

3 Vibro-Acoustics Modeling

The radiated noise is characterized through its acoustic intensity pv integrated over all the vibrating surface. In order to have a frequency description of this quantity, the Fourier transform of the cross-correlation between the acoustic pressure and the acoustic velocity is considered

$$I(\omega) = \int_\Omega \mathcal{F}_\tau(\mathbb{E}_t[p_a(\mathbf{r},t) \times v_a(\mathbf{r},t+\tau)])\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{11}$$

The computational process is as follows. The acoustic quantities p_a and v_a are described using Green's functions and the fluctuating pressure p as a source term. Therefore, $I(\omega)$ (Eq. (11)) is expressed using the pressure spectrum Φ_{pp} and Green's functions. In the present approach, Green's functions are computed using the harmonic framework classically used in vibro-acoustics. Only two stochastic quantities will be manipulated: I and Φ_{pp}, whereas it is common in the literature to use intermediaries such as Φ_{ww}, $\Phi_{v_a v_a}$, or $\Phi_{p_a p_a}$.

The final formulation of $I(\omega)$ cannot be used directly to get a numerical evaluation because the associated central processing unit time would be too large. A computational strategy is developed in order to get an accurate approximation of $I(\omega)$ with a computational cost compatible with industrial constraints. All these steps are described hereinafter.

3.1 Turbulence and Vibro-Acoustic Coupling. As explained before, p_a and v_a cannot be modeled as harmonic oscillating quantities because they are created by turbulence and can therefore only be described from a stochastic point of view. The modeling of $I(\omega)$ is divided into two steps. First, the stochastic part of Eq. (11) is extracted and isolated. Second, the remaining is computed using the harmonic oscillating framework. This splitting is realized using Green's functions g_p and g_v. As p_a and v_a are caused by the TWP, and assuming homogeneity in time, they are written as

$$\begin{aligned} p_a(\mathbf{r},t) &= \iint p(\mathbf{r}-\mathbf{x}_1, t-\tau_1) g_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_1, \tau_1)\mathrm{d}\mathbf{x}_1\mathrm{d}\tau_1 \\ v_a(\mathbf{r},t) &= \iint p(\mathbf{r}-\mathbf{x}_2, t-\tau_2) g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_2, \tau_2)\mathrm{d}\mathbf{x}_2\mathrm{d}\tau_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Replacing these expressions in Eq. (11) and using the commutativity of the integrations with the expectation operator, $I(\omega)$ reads

$$\begin{aligned} I(\omega) = \iiiint_\Omega \mathcal{F}_\tau(\mathbb{E}_t[p(\mathbf{r}-\mathbf{x}_1, t-\tau_1) \\ p(\mathbf{r}-\mathbf{x}_2, t+\tau-\tau_2)])g_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_1, \tau_1) \\ g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_2, \tau_2)\mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{x}_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\mathbf{x}_2\mathrm{d}\tau_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Using the notation

$$\mathbb{E}_t[p(\mathbf{r},t)p(\mathbf{r}+\mathbf{x}, t+\tau)] = S_{pp}[\mathbf{r}](\mathbf{x},\tau) \tag{14}$$

Equation (13) reads

$$\begin{aligned} I(\omega) = \iiiint_\Omega \mathcal{F}_\tau(S_{pp}[\mathbf{r}-\mathbf{x}_1](\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \tau+\tau_1-\tau_2) \\ \times [g_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_1, \tau_1) g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_2, \tau_2)]) \times \mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{x}_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\mathbf{x}_2\mathrm{d}\tau_2 \end{aligned} \tag{15}$$

The Fourier transform relative to τ is computed, changing the integrations over τ_1 and τ_2 in Fourier transforms

$$\begin{aligned} I(\omega) = \iiint_\Omega \Phi_{pp}[\mathbf{r}-\mathbf{x}_1](\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \omega) g_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_1, -\omega) \\ g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_2, \omega)\mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{x}_1\mathrm{d}\mathbf{x}_2 \end{aligned} \tag{16}$$

with $g_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_1, \omega) = \mathcal{F}_\tau[g_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_1, \tau)]$ and $g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_2, \omega) = \mathcal{F}_\tau[g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_2, \tau)]$. Then, Φ_{pp} is expressed as an inverse Fourier transform in x_2

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}[\mathbf{r}](\mathbf{x},\omega) &= \int \Phi_{pp}[\mathbf{r}](k,\omega)\frac{\exp(j\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}{(2\pi)^2}\mathrm{d}\mathbf{k} \\ I(\omega) &= \iiiint_\Omega \int \Phi_{pp}[\mathbf{r}-\mathbf{x}_1](\mathbf{k},\omega)\frac{\exp\big(j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\big)}{(2\pi)^2} \\ &\quad \mathrm{d}\mathbf{k} g_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_1, -\omega) g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{x}_2, \omega)\mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{x}_1\mathrm{d}\mathbf{x}_2 \end{aligned} \tag{17}$$

Spatial homogeneity $\Phi_{pp}[\mathbf{r}-\mathbf{x}_1](\mathbf{k},\omega) = \Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ is assumed meaning that the boundary layer is evolving slowly in the longitudinal direction. Therefore, spatial Fourier transforms with respect to $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$ can be computed as

$$I(\omega) = \iint_\Omega \Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)\frac{1}{(2\pi)^2} g_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, -\omega) g_v(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, \omega)\mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{18}$$

with $g_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}_\mathbf{x}[g_p(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)]$ and $g_v(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}_x[g_v(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)]$. Equation (18) is the product of three terms:

- $\Phi_{pp}[\mathbf{r}](\mathbf{k},\omega)$, the TWP spectrum computed in Sec. 2,
- $g_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, Green's function between the TWP and the acoustic pressure,
- $g_v(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, Green's function between the TWP and the acoustic velocity.

The determination of these Green's functions is done in the harmonic oscillating framework as is usual in vibro-acoustics.

3.2 Vibro-Acoustics Tools. The determination of Green's functions g_p and g_v may be decomposed in several steps assuming a unitary exciting TWP.

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

First, p_a is related to v_a through the resolution of Helmholtz's equation also known as Rayleigh's integral

$$p_a(\mathbf{r},\omega) = \frac{\rho j\omega}{(2\pi)^2}\int \frac{v_a(\mathbf{k},\omega)\exp(j\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mathbf{k}^2}}\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{19}$$

The existence of a modal *in vacuo* decomposition of the displacement w is assumed. As the vibrating structure is a bi-dimensional plate, the modal decomposition is indexed by a couple of integers (m, n). This decomposition is assumed to be orthonormal for the scalar product $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$. The natural frequency of the mode (m, n) is denoted ω_{mn}. Using this modal formalism, p_a and v_a read

$$\begin{aligned} v_a(\mathbf{r},t) &= \frac{\partial w}{\partial t}(\mathbf{r},t) \\ w(\mathbf{r},\omega) &= \sum_{mn} a_{mn}(\omega)w_{mn}(\mathbf{r}) \\ v_a(\mathbf{r},\omega) &= \sum_{mn} j\omega a_{mn}(\omega)w_{mn}(\mathbf{r}) \\ p_a(\mathbf{r},\omega) &= \sum_{mn} b_{mn}(\omega)w_{mn}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{20}$$

The dynamical equilibrium in $\mathbf{r}$ of the plate excited in $\mathbf{r}'$ reads

$$\begin{aligned} &\text{Elasticity} + \text{Damping} + \text{Inertia} = \text{Turbulent Excitation} \\ &\quad + \text{Acoustical retroaction} \end{aligned} \tag{21}$$

which can be expressed using the modal formalism as

$$\begin{aligned} &\sum_{mn} a_{mn}(\omega)\rho_p h[\omega_{mn}^2(1+j\eta) - \omega^2]w_{mn}(\mathbf{r}) \\ &\quad = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + 2\sum_{mn} b_{mn}(\omega)w_{mn}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{22}$$

where η is a damping loss factor, ρ_p is the density of the plate, and h is the thickness of the plate.

Equations (19) and (22) are projected on a given mode w_{rs} and integrated over Ω. Using the orthogonality property of the decomposition basis $\int_\Omega w_{mn}(\mathbf{r})w_{rs}(\mathbf{r})\mathrm{d}r = \delta_{mr}\delta_{ns}$, and the uncoupling modes approximation, meaning that the acoustical retroaction of the mode(r, s) only impacts itself, Eqs. (19) and (22) reduce to

$$\begin{aligned} b_{rs}(\omega) &= \frac{j\rho\omega^2}{(2\pi)^2}\sum_{mn} a_{mn}(\omega)\int\int \frac{w_{mn}(\mathbf{k})\exp(j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})w_{rs}(\mathbf{r})}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mathbf{k}^2}}\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \frac{j\rho\omega^2}{(2\pi)^2}\sum_{mn} a_{mn}(\omega)\int \frac{w_{mn}(\mathbf{k})w_{rs}(-\mathbf{k})}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}}\mathrm{d}\mathbf{k} \\ a_{rs}(\omega)\rho h\left[\omega_{rs}^2(1+j\eta) - \omega^2\right] &= w_{rs}(\mathbf{r}') + 2b_{rs}(\omega) \end{aligned} \tag{23}$$

The summation in Eq. (23) vanishes and the equation ruling a_{rs} then reads

$$\begin{aligned} &a_{rs}(\omega)\rho h\left[\omega_{rs}^2(1+j\eta) - \omega^2\right] \\ &= w_{rs}(\mathbf{r}') + 2\frac{j\rho\omega^2}{(2\pi)^2}a_{rs}(\omega)\int \frac{w_{rs}(\mathbf{k})w_{rs}(-\mathbf{k})}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mathbf{k}^2}}\mathrm{d}\mathbf{k} \\ &= w_{rs}(\mathbf{r}') + 2j\omega a_{rs}(\omega)Z_{rs}(\omega) \\ &\Longleftrightarrow a_{rs}(\omega)\mathcal{A}_{rs}(\omega) = w_{rs}(\mathbf{r}') \end{aligned} \tag{24}$$

with $Z_{rs}(\omega) = (\rho\omega/(2\pi)^2)\int |w_{rs}(\mathbf{k})|^2[(\omega/c)^2 - \mathbf{k}^2]^{-1/2}\mathrm{d}k$ being the radiation impedance and $\mathcal{A}_{rs}(\omega) = \rho h[\omega_{rs}^2(1+j\eta) - \omega^2] - 2j\omega Z_{rs}(\omega)$ the structural impedance.

Finally, Green's functions are computed from a_{rs}

$$\begin{aligned} g_p(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) &= \sum_{mn} b_{mn}(\omega)w_{mn}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{mn} j\omega w_{mn}(\mathbf{r}')[1/\mathcal{A}_{mn}(\omega)]Z_{mn}(\omega)w_{mn}(\mathbf{r}) \\ g_v(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) &= j\omega\sum_{mn} a_{mn}(\omega)w_{mn}(\mathbf{r}) \\ &= j\omega\sum_{mn} w_{mn}(\mathbf{r}')[1/\mathcal{A}_{mn}(\omega)]w_{mn}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{25}$$

Applying a Fourier transform toward r', Green's functions appearing in Eq. (18) are computed through

$$\begin{aligned} g_p(\mathbf{r},\mathbf{k},-\omega) &= \sum_{mn} -j\omega w_{mn}(\mathbf{k})[1/\mathcal{A}_{mn}(\omega)]Z_{mn}(-\omega)w_{mn}(\mathbf{r}) \\ g_v(\mathbf{r},-\mathbf{k},\omega) &= j\omega\sum_{mn} w_{mn}(-\mathbf{k})[1/\mathcal{A}_{mn}(\omega)]w_{mn}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{26}$$

Since $\mathcal{A}_{mn}(\omega)$ and $w_{mn}(\mathbf{k})$ are Fourier transforms of real quantities, we have $\mathcal{A}_{mn}(\omega)\mathcal{A}_{mn}(-\omega) = |\mathcal{A}_{mn}(\omega)|^2$ and $w_{mn}(\mathbf{k})$ $w_{mn}(-\mathbf{k}) = |w_{mn}(\mathbf{k})|^2$. Using the orthogonality of the modal decomposition, the acoustic intensity finally reads

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{\omega^2}{(2\pi)^2}\sum_{mn}\left[\int \Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)|w_{mn}(\mathbf{k})|^2\mathrm{d}\mathbf{k}\right]\frac{Z_{mn}(-\omega)}{|\mathcal{A}_{mn}(\omega)|^2} \\ &= \frac{\omega^2}{(2\pi)^2}\sum_{mn}[K_{mn}(\omega)]Z_{mn}(-\omega)|\mathcal{A}_{mn}(\omega)|^{-2} \end{aligned} \tag{27}$$

3.3 Computational Strategy. The numerical evaluation of the radiated noise from Eq. (27) is practically unachievable due to the large number of operations required for computation. Three terms are to be computed: $\mathcal{A}_{mn}, Z_{mn}$, and K_{mn}. The first two depend only on the mechanical characteristic of the exited structure and can be computed for a small computational cost and tabulated for later use. However, K_{mn} depends on both flow characteristics and the geometry of the structure, requiring updates as flow conditions change. The evaluation of this term is the reason why $I(\omega)$ cannot be directly computed from Eq. (27). To justify this statement quantitatively, let us consider the special case of a rectangular plate $L_x \times L_z$ simply supported on its edges. The displacement modes are

$$\begin{aligned} w_{mn}(\mathbf{r}) &= w_m(r_x)w_n(r_z) \\ w_m(r_x) &= \sqrt{\frac{L_x}{2}}\sin\left(m\pi\frac{r_x}{L_x}\right) = \sqrt{\frac{L_x}{2}}\sin(k_m r_x) \\ w_{mn}(\mathbf{k}) &= w_m(k_x)w_n(k_z) \\ w_m(k_x) &= \frac{m\pi}{L_x}\sqrt{2/L_x}\frac{\left((-1)^m e^{-jL_x k_x} - 1\right)}{\left(k_x^2 - m^2\pi^2 L_x^{-2}\right)} \\ &= k_m\sqrt{2/L_x}\frac{\left((-1)^n e^{-jL_x k_x} - 1\right)}{\left(k_x^2 - k_m^2\right)} \end{aligned} \tag{28}$$

Equation (28) and Fig. 8 indicate that $w_m(k_x)$ and consequently $|w_{mn}(\mathbf{k})|^2$ are oscillating functions. Therefore, the computation of K_{mn} which is an integration over the unbounded domain $\mathbb{R}^2$ reveals itself to be delicate. It is easier to perform the integration over each lobe of $|w_{mn}(\mathbf{k})|^2$and to sum all the contributions. The domain $\mathbb{R}^2$ is meshed with rectangles. Each rectangle corresponds to one lobe of $|w_{mn}(\mathbf{k})|^2$ and is indexed by the two integers M and N. The boundaries of the lobes are defined by

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

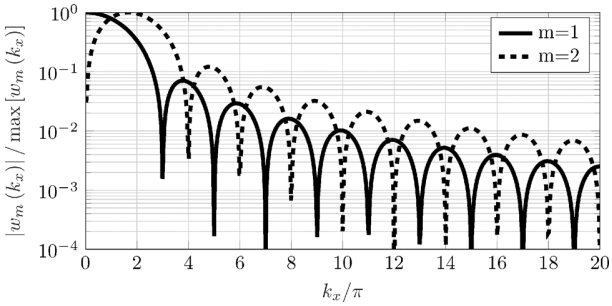


Fig. 8 Normalized modal function w_{mn} evolution with respect to k_x

$$(-1)^n e^{-jL_x k_x} - 1 = 0$$
$$(-1)^m e^{-jL_z k_z} - 1 = 0 \tag{29}$$

and can easily be found depending on the parity of m and n.

Numerical integrations on each lobe are computed using Shampine [49] adaptive quadrature which is able to compute indefinite integrals on unbounded and bidimensional supports. In reality, only a finite number of lobes are considered. The contributions of high values of M or N are negligible. Two bounded values M_L and N_L can be defined such that only lobes satisfying $M < M_L$ and $N < N_L$ are computed. M_L and N_L are found by comparing the wavelengths of the lobe $M\pi/L_x$ and $N\pi/L_z$ and a characteristic wavelength of the TWP $\max(0.7\omega/U_e, k_e(y=\delta/2))$. It has been shown that by taking $M_L = N_L = 100$, the relative error resulting from the computation of K_{mn} is below 1×10^{-6}.

From these considerations, a naive way to compute $I(\omega)$ can be elaborate using four loops. The associated computational process is summarized in Algorithm 1.

Table 3 gives typical orders of magnitudes of the number of operations for each loop. The total number of operations for the naive algorithm is about 3×10^{14}. In an industrial context, it is obviously impossible to rely on such a process to compute $I(\omega)$. A good approximation of $I(\omega)$ is however achievable, with a reasonable computational cost, because it can be shown that most of the contributions involved in the computation of terms I_1, I_2, and I_3 in Algorithm 1 are negligible.

Table 3 also provides the number of operations required if only the major contributions are computed with a relative error on $I(\omega)$ below 10^{-3}. The number of operations has been drastically reduced since only 10^{10} are required. The main difficulty is that the location in different space domains of these major contributions is a priori unknown. An exploratory process is used to locate these contributions. For three of the loops involved in Algorithm 1, the number of operations is reduced.

3.3.1 Boundary Layer Integration Loop. The first loop is the integration along the boundary layer thickness. According to Eq. (9) $\Phi_{pp}(y, \mathbf{k}, \omega)$ is proportional to

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 \frac{\langle v^2 \rangle}{k_e^3}$$

Table 3 Number of operations

	Exact	Approximate
Frequency loop ω	20,000	20,000
Modal loop m, n	100×100	$\approx$100
Wave-number Integration loop M, N	100×100	$\approx$100
Boundary layer Integration loop Y	150	$\approx$50
Product	3×10^{14}	10^{10}
Ratio	1	1/30,000

Algorithm 1 Naive algorithm

for $\omega \in I_\omega$ **do**
  for $m, n \in I_m \times I_n$ **do**
    for $M < M_L, N < N_L$ **do**
      for $Y \in I_Y$ **do**
        $I_1(M,N,m,n,Y,\omega) = \int_M^{M+1}[\int_N^{N+1} \Phi_{pp}(Y,k,\omega)|w_{mn}(k)|^2 \mathrm{d}k_y]\mathrm{d}k_x$
        $I_2(M,N,m,n,\omega) = I_2(M,N,m,n,\omega) + I_1(M,N,m,n,Y,\omega)\mathrm{d}Y$
      end for
      $I_3(m,n,\omega) = I_3(m,n,\omega) + I_2(M,N,m,n,\omega)$
    end for
    $I(\omega) = I(\omega) + I_3(m,n,\omega)$
  end for
end for

As $\langle v^2 \rangle(y=0) = \langle v^2 \rangle(y=\delta) = 0$, the contributions of the near wall and frontier regions of the boundary layer can be neglected. The maximum of the function

$$y \to \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 \frac{\langle v^2 \rangle}{k_e^3}$$

is roughly located near $\delta/2$ and the function is monotonically decreasing in both directions. The idea is to begin the exploration at $y = \delta/2$ and progress towards the wall until I_1 does not contribute significantly to I_2 and to repeat the process toward the frontier of the boundary layer. With a relative threshold fixed at $\varepsilon_Y = I_1/I_2 = 1.10^{-5}$, the number of heights to be considered in the boundary layer is reduced by a factor of 3 in subsonic boundary layer configurations with unitary Reynolds number in $[10^6,\ 10^7]$ which is characteristic of flows around helicopters.

3.3.2 Wave-Number Integration Loop. The second loop is the summation over M, N. It is quite difficult to know which of the I_2 terms contribute most to I_3. One can presume that $I_2(M,N,m,n,\omega)$ for $(M,N) = (m,n)$ has a significant contribution. However, it can be shown that $(M,N) = (m,n)$ is not always the global maximum as other local maxima can exist. The search of all these maxima may be a complex process and is very time-consuming.

The idea followed in this study is to compute $I_2(M,N,m,n,\omega)$ for all couples $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in [1 : M_L] \times [1 : N_L]$ with a less accurate but cheaper method of integration. This method does not need to be precise as its purpose is only to find the couples (M, N) giving a significant I_2. The I_1 integrals are evaluated using a Gauss

Algorithm 2 Light algorithm

for $\omega \in I_\omega$ **do**
  for m, n in radiative, resonant, and longitudinal modes **do**
    for $M, N \in [1 : MN_L] \times [1 : MN_L]$ **do**
      Compute integrals using Gauss quadrature
      $Y = \delta/2$
      while $I_1/I_2 > \varepsilon_Y$ **do**
        Compute I_1
        $I_2 = I_2 + I_1$
        increase Y
        end while
        $Y = \delta/2$
        Redo Y-loop for decreasing Y
        Sort $I_2/\max[I_2] > \varepsilon_{MN}$ and find M, N major contributions
        Redo Y-loop using Shampine quadrature on major contributors
        $I_3(m,n,\omega) = I_3(m,n,\omega) + I_2(M,N,m,n,\omega)$
      end for
      $I(\omega) = I(\omega) + I_3(m,n,\omega)$
  end for
  while $I_3/I > \varepsilon_{mn}$ **do**
    explore neighborhood of radiative, resonant, and longitudinal modes
    end while
end for

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

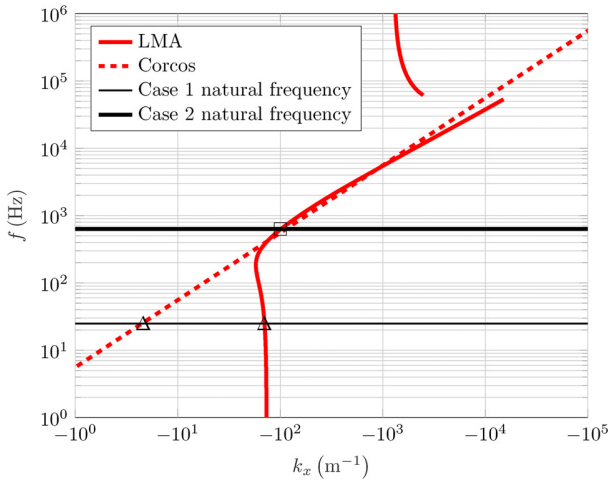


Fig. 9 Longitudinal dependency of $\Phi_{pp}(k,\omega)$ for a TBL with $U_e = 50\,\mathrm{ms}^{-1}$ and $R_\theta = 3540$

quadrature using $|w_{mn}(\mathbf{k})|^2$ as the weight function. Only $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ needs to be evaluated. The number of evaluations depends on the order of the quadrature. It has been shown that the zero-order, which requires only one evaluation per lobe, is sufficient to sort the $(M,\ N)$ couples and find the major contributors to $I_2(M,N,m,n,\omega)$. Once sorted, the main contributions are accurately computed using Shampine's quadrature. With a relative threshold fixed at $\varepsilon_{MN} = I_2/I_3 = 1\times10^{-5}$, only one percent of the initial amount of operations is required.

3.3.3 Modal Loop. The last loop is the modal summation over $(m,\ n)$. From a vibro-acoustic point of view, two families of modes need to be considered: the resonant and the radiative modes. For a given frequency ω, the radiative modes are such that there is a good coupling between the acoustic pressure and velocity which is obtained when $Z_{mn}(\omega)$ is maximized. The resonant modes have their natural frequency satisfying $\omega_{mn} = \omega$, and therefore, $|\mathcal{A}_{mn}(\omega)|^{-2}$ will be maximal. The modes of these two families are expected to be significant contributors to $I(\omega)$ and the other significant contributors are supposed to be located in their neighborhoods in the $(m,\ n)$ plan.

In the special case of a rectangular plate $L_x \times L_z$ simply supported on its edges, these families are localized on ellipses $(m\pi/L_x)^2+(n\pi/L_z)^2=C^2$. For resonant modes, $C=k_{mn}\sqrt{\omega/\omega_{mn}}$, and for radiation modes, $C=\omega/c$. There exists a frequency ω such that these two ellipses are superposed, and therefore, resonant and radiative modes are identical. $I(\omega)$ is expected to achieve a particularly high value in such cases.

Noticing that $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ is maximized when $k_z=0$, the longitudinal modes located on lines $n=\pm1$ are also expected to be significant contributors.

Due to these considerations, there is no need to compute all the contributions of all the $(m,\ n)$ modes, only the most significant ones

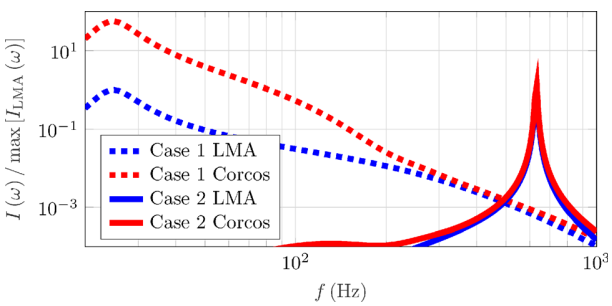


Fig. 10 Radiated noise by mode (1, 1)

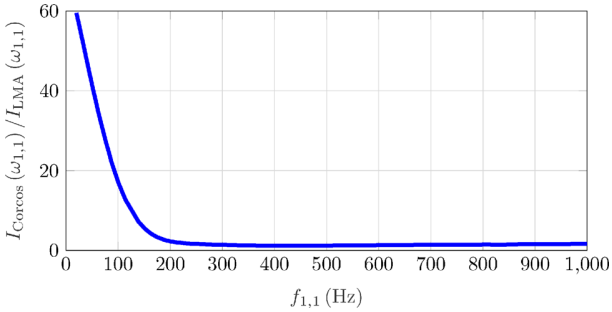


Fig. 11 Radiated noise by mode (1, 1) at the natural frequency

must be considered. Once again, their locations are a priori unknown but they are hypothesized to be located near the two ellipses and the two lines described previously. The strategy is as follows:

(1) Compute the contributions of the radiative, resonant, and longitudinal modes.
(2) Sort these contributions.
(3) Explore the neighborhood of these modes in order to find new significant contributors.

The threshold is fixed at $\varepsilon_{mn} = I_3/I = 1\times10^{-5}$. This allows a reduction of the number of computations of a factor 100.

Following the rules explained earlier, the light Algorithm 2 can be written.

The associated computational cost depends on the threshold values $\varepsilon_Y, \varepsilon_{MN}, \varepsilon_{mn}, M_L$, and N_L. Since computing $I(\omega)$ through the naive algorithm is not possible, the exact error of the light algorithm is not directly accessible. Therefore, the threshold values cannot be directly related to that error. Nevertheless, an estimate of the error may be obtained as follows. The three summations of the algorithm are expressed with unknown errors e_1, e_2, and e_3

$$I_2 = \sum I_1 + e_1; I_3 = \sum I_2 + e_2; I = \sum I_3 + e_3 \tag{30}$$

Assuming the existence of constants A_1, A_2, and A_3 such that $e_i < \min(I_i)A_i$, the errors are expressed using the threshold values $e_1 < \varepsilon_Y I_2 A_1$, $e_2 < \varepsilon_{MN} I_3 A_2$, and $e_3 < \varepsilon_{mn} I A_3$.

Thus, Eq. (30) yields

$$\begin{aligned} I_2 &< \left(\sum I_1\right)/(1-\varepsilon_Y A_1) \\ I_3 &< \left(\sum I_2\right)/(1-\varepsilon_{MN} A_2) \\ I &< \left(\sum I_3\right)/(1-\varepsilon_{mn} A_3) \end{aligned} \tag{31}$$

Finally, an upper bound on the error on I is expressed as

$$\begin{aligned} I - \sum\sum\sum I_1 &< [(1-\varepsilon_Y A_1)(1-\varepsilon_{MN} A_2)(1-\varepsilon_{mn} A_3)]^{-1} - 1 \\ E_M &= [(1-\varepsilon_Y A_1)(1-\varepsilon_{MN} A_2)(1-\varepsilon_{mn} A_3)]^{-1} - 1 \\ &\approx (1+\varepsilon_Y A_1)(1+\varepsilon_{MN} A_2)(1+\varepsilon_{mn} A_3) - 1 \\ &\approx \varepsilon_Y A_1 + \varepsilon_{MN} A_2 + \varepsilon_{mn} A_3 \end{aligned} \tag{32}$$

Considering a set of random values of ω, m, n, M, and N, tests show that $\varepsilon_Y = 1\times10^{-5}$ implies $\varepsilon_Y A_1 < 1\times10^{-3}$. Using this value and considering a set of random values for ω, m, and n, it has been shown that $\varepsilon_{MN} = 1\times10^{-5}$ implies $\varepsilon_{MN} A_2 < 1\times10^{-3}$. Similarly, considering a set of random values of ω, tests conducted with $\varepsilon_{mn} = 1\times10^{-5}$ lead to $\varepsilon_{mn} A_3 < 1\times10^{-3}$. As a consequence, using $\varepsilon_Y = \varepsilon_{MN} = \varepsilon_{mn} = 1\times10^{-5}$, the relative error for the computation of $I(\omega)$ is estimated at 10^{-3}.

3.4 Application. The purpose of the application case is to demonstrate the importance of the difference in the longitudinal

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

dependency between the Corcos and LMA models highlighted in Sec. 2 in the prediction of the radiated noise. Two cases will be compared. Both of them consist in a 0.25 m × 0.17 m aluminum plate, simply supported on its edges and exited by a turbulent flow characterized by $U_e = 50\,\mathrm{ms}^{-1}$ and $R_\theta = 3540$. The difference between cases 1 and 2 relies on the thickness of the plates as $h_1 = 0.2\,\mathrm{mm}$ and $h_2 = 5\,\mathrm{mm}$. Therefore, the modal function $w_{mn}(k)$ and the radiation impedances are the same for both cases, while the natural frequencies of the modes and $\mathcal{A}_{mn}(\omega)$ are different.

In Fig. 7, symbols Δ (case 1) and □ (case 2) show where the two cases are located in the (k_x, ω) plan. As it is only a sketch, Fig. 9 presents the actual numerical values for cases 1 and 2. In addition, Fig. 9 presents the advection branch of the flow and the natural frequencies of mode $(1,1)$ of cases 1 and 2. Below 200 Hz, the maxima location of $k_x \to \Phi_{pp}(k,\omega)$ tends to be near $-80\ \mathrm{m}^{-1}$ for the LMA model, whereas it linearly decreases for Corcos's model. Taking a mode with a natural longitudinal wave-number below $80\ \mathrm{m}^{-1}$, two situations arise. First, if its natural frequency is below 200 Hz (or located below point F in Fig. 7), the radiated noise due to this mode predicted using the LMA model will be much smaller than the one predicted by Corcos's model. Second, if its natural frequency is above 200 Hz (or located above point F in Fig. 7) and below the very high frequencies range, the radiated noise predicted by both models will have the same order of magnitude because the maxima are located at the same places. The results will not be exactly the same because of differences in the spectral width in the longitudinal and the transversal directions.

If the mode $(1,1)$ is used, its natural longitudinal wave-number is $12.56\ \mathrm{m}^{-1}$ and the associated natural frequencies are, respectively, 25 Hz and 633 Hz. The radiation frequency which corresponds to the maximum of Z_{11} is 1209 Hz. The radiated noise due to the mode $(1,1)$ is plotted versus the frequency for both Corcos and LMA models in Fig. 10. For each case, the radiated noise is scaled by $\max[I_{\mathrm{LMA}}(\omega)]$.

As predicted, the behavior is completely different if the natural frequency is above or below 200 Hz. For case 2, near the natural frequency, both models give the same radiated noise. One may notice that small differences begin to appear for frequencies far from the natural frequency of the mode $(1,1)$. But for such frequencies, the radiated noise is negligible in comparison with that is found for the natural frequency. For case 1, the behavior is different as the shape is quite similar but the maxima differ from almost 2 orders in magnitude. This demonstrates that using Corcos's model for all frequencies can lead to large differences in the prediction of the radiated noise.

What has been shown in Fig. 10 can be refined to find precisely the transition between both regimes. Considering a series of plates with a variable thickness such as their natural frequencies lies in [20 Hz; 1 kHz], for each of these, the radiated noise at the natural frequency of both models will be compared. Results are depicted in Fig. 11 where it shows the ratio of the radiated noise versus the natural frequency of the plates.

The plate with the natural frequency $f_{mn} \approx 200\,\mathrm{Hz}$ is drawn to separate both regimes. One can notice that the radiated noise is maximal at natural frequencies due to high vibration level and the radiation frequency is far above and therefore not involved here.

The ratio between both radiated noises reaches values up to 60 which correspond to ≈ 18 dB. This value is not negligible for acoustics and shows that improved models must be developed to overcome Corcos's model limitations outside of its range of utilization.

4 Conclusion

An analytical model of the fluctuations of the turbulent wall pressure was developed in order to improve the prediction of noise radiated by a vibrating structure excited by a turbulent boundary layer. Most of the models available in the literature are based on empirical descriptions of the TWP. In the LMA model, the TWP fluctuations are computed from the modeled turbulent velocity fluctuations, leading to a more general model as the empiricism is not used directly on the final quantity of interest.

The TWP fluctuations are described in time and space through the LMA model. Both aspects are required for vibro-acoustics applications, whereas many studies focus only on the temporal aspects. The TWP is characterized by its spectrum in the frequency/wave-number domain which is more convenient for vibro-acoustics applications rather than the cross-correlation in space and time.

This new model has similarities with the empirical models available in the literature such as Corcos model, mostly when advection is the main mechanism involved. However, strong differences arise for high and low frequencies where the influence of turbulence scales cannot be neglected. One of the main interests of this finding is to provide frequencies boundaries for models based only on the advection mechanism which are commonly used without any boundaries. Outside of these boundaries, using Corcos or LMA model to compute the radiated noise will lead to completely different results as their behaviors in the frequency wave-number domain are different.

The LMA model was coupled with classic vibro-acoustics models in order to compute the radiated noise emitted by a structure excited by a turbulent flow. Considering the use of the final model in an industrial context, a simplified version was developed. The computational cost was significantly reduced, while the resulting error remains small and controlled.

The predicted new features found for the TWP spectrum must be confirmed experimentally. As the rare existing experimental data available in the literature are not documented enough to be reproduced with the present approach, the next step would be to design a new experimental apparatus in order to validate different steps of the modeling. In particular, the TWP and the turbulent velocity fluctuations spectra should be measured simultaneously in the frequency/wave-number domain allowing the verification of the validity of the proposed model.

Nomenclature

a_{mn} = modal amplitude of displacement
$\mathcal{A}_{mn}$ = structure impedance
b_{mn} = modal amplitude of pressure
c = speed of sound
dp/dx = pressure gradient
g_p = Green's function between the TWP and the acoustic pressure
g_v = Green's function between the TWP and the acoustic velocity
h = thickness of the vibrating plate
I = acoustical intensity
I_1, I_2, I_3 = partial summation of the acoustical intensity
j = $\mathrm{Re}(j) = 0$, $\mathrm{Im}(j) = 1$
k = wave-number
$k_c = \omega/U$ = advection wave-number
k_e = wave number carrying the maximum of energy
k_x = longitudinal wave-number
k_y = normal wave-number
k_z = transversal wave-number
K_{mn} = turbulence impedance
L_x = length of the vibrating plate
L_z = width of the vibrating plate
m, n = modal indexes
M, N = lobe indexes
M_L, N_L = boundaries of lobe indexes
p = turbulent wall pressure
p_a = acoustical wall pressure
S_{pp} = pressure intercorrelation
t, τ = time
$u_i = (u, v, w)$ = fluctuating fluid velocity
u_τ = friction velocity
U_e = freestream velocity

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

$U_i = (U, V, W) =$ mean fluid velocity
$v_a =$ velocity of the plate
$\langle v^2 \rangle = \mathbb{E}(v^2) w =$ displacement of the plate
$w_{mn}(k) =$ modal wave-number distribution
$x =$ longitudinal coordinate
$x, r =$ position
$y =$ normal coordinate
$z =$ transversal coordinate
$Z_{\mathrm{mn}} =$ radiation impedance
$\alpha, \beta =$ Corcos's constants
$\delta =$ boundary layer thickness
$\delta() =$ Dirac's distribution
$\varepsilon =$ turbulent dissipation
$\varepsilon_{mn} =$ modal threshold
$\varepsilon_{MN} =$ lobe threshold
$\varepsilon_Y =$ altitude threshold
$\theta =$ momentum thickness
$\rho =$ fluid density
$\rho_P =$ density of the vibrating plate
$\tau_S =$ characteristic time of decorrelation
$\Phi_A =$ advection filter
$\Phi_D =$ damping filter
$\Phi_T =$ turbulence filter
$\phi_{pp} =$ pressure power spectral density
$\Omega =$ surface of the vibrating plate
$\omega =$ pulsation
$\omega_t =$ turbulent specific dissipation rate
$\mathcal{F}_t(f) = \int f(t) \exp(j\omega\tau) \mathrm{d}\tau$, Fourier transform
$\mathcal{F}_t^{-1}(f) = (2\pi)^{-1} \int f(t) \exp(-j\omega\tau) \mathrm{d}\tau$, inverse Fourier transform

References

[1] Panton, R. L., and Linebarger, J. H., 1974, "Wall Pressure Spectra Calculations for Equilibrium Boundary Layers," J. Fluid Mech., **65**(2), pp. 261–287.
[2] Blake, W. K., 1986, *Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration: Complex Flow-Structure Interactions* (Applied Mathematics and Mechanics Series), Academic Press, London.
[3] Bradshaw, P., 1967, "Inactive Motion and Pressure Fluctuations in Turbulent Boundary Layers," J. Fluid Mech., **30**(2), pp. 241–258.
[4] Keith, W. L., Hurdis, D., and Abraham, B., 1992, "A Comparison of Turbulent Boundary Layer Wall-Pressure Spectra," ASME J. Fluids Eng., **114**(3), pp. 338–347.
[5] Farabee, T. M., and Casarella, M. J., 1991, "Spectral Features of Wall Pressure Fluctuations Beneath Turbulent Boundary Layers," Phys. Fluids A: Fluid Dyn., **3**(10), pp. 2410–2420.
[6] McGrath, B. E., and Simpson, R. L., 1987, "Some Features of Surface Pressure Fluctuations in Turbulent Boundary Layers With Zero and Favorable Pressure Gradients," National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC, Report No. NASA-CR-4051.
[7] Blake, W. K., 1970, "Turbulent Boundary-Layer Wall-Pressure Fluctuations on Smooth and Rough Walls," J. Fluid Mech., **44**(4), pp. 637–660.
[8] Goody, M. C., and Simpson, R. L., 2000, "Surface Pressure Fluctuations beneath Two- and Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers," AIAA J., **38**(10), pp. 1822–1831.
[9] Efimtsov, B. M., 1982, "Characteristics of the Field of Turbulent Wall Pressure-Fluctuations at Large Reynolds-Numbers," Soviet Phys. Acoust.-USSR, **28**(4), pp. 289–292.
[10] Efimtsov, B. M., 1984, "Similarity Criteria for the Spectra of Wall Pressure Fluctuations in a Turbulent Boundary Layer," Akusticheskii Zh., **30**, pp. 58–61.
[11] Goody, M., 2004, "Empirical Spectral Model of Surface Pressure Fluctuations," AIAA J., **42**(9), pp. 1788–1794.
[12] Catlett, M., Forest, J., Anderson, J. A., and Stewart, D., 2014, "Empirical Spectral Model of Surface Pressure Fluctuations Beneath Adverse Pressure Gradients," AIAA Paper No. 2014-2910.
[13] Rozenberg, Y., Robert, G., and Moreau, S., 2012, "Wall-Pressure Spectral Model Including the Adverse Pressure Gradient Effects," AIAA J., **50**(10), pp. 2168–2179.
[14] Hu, N., and Herr, M., 2016, "Characteristics of Wall Pressure Fluctuations for a Flat Plate Turbulent Boundary Layer With Pressure Gradients," AIAA Paper No. 2016-2749.
[15] Hu, N., 2017, "Empirical Spectral Model of Wall Pressure Fluctuations Including Adverse Pressure Gradient Effects," AIAA Paper No. 2017-3203.
[16] Kamruzzaman, M., Bekiropoulos, D., Lutz, T., Würz, W., and Krämer, E., 2015, "A Semi-Empirical Surface Pressure Spectrum Model for Airfoil Trailing-Edge Noise Prediction," Int. J. Aeroacoust., **14**(5–6), pp. 833–882.
[17] Hwang, Y., Bonness, W. K., and Hambric, S. A., 2009, "Comparison of Semi-Empirical Models for Turbulent Boundary Layer Wall Pressure Spectra," J. Sound Vib., **319**(1–2), pp. 199–217.
[18] Lee, S., 2018, "Empirical Wall-Pressure Spectral Modeling for Zero and Adverse Pressure Gradient Flows," AIAA J., **56**(5), pp. 1818–1829.
[19] Corcos, G. M., 1963, "Resolution of Pressure in Turbulence," J. Acoust. Soc. Am., **35**(2), pp. 192–199.
[20] Corcos, G. M., 1964, "The Structure of the Turbulent Pressure Field in Boundary-Layer Flows," J. Fluid Mech., **18**(3), pp. 353–378.
[21] Kraichnan, R. H., 1956, "Pressure Fluctuations in Turbulent Flow Over a Flat Plate," J. Acoust. Soc. Am., **28**(3), pp. 378–390.
[22] Lee, Y.-T., Blake, W. K., and Farabee, T. M., 2005, "Modeling of Wall Pressure Fluctuations Based on Time Mean Flow Field," ASME J. Fluids Eng., **127**(2), pp. 233–240.
[23] Lee, Y.-T., Farabee, T. M., and Blake, W. K., 2009, "Turbulence Effects of Wall-Pressure Fluctuations for Reattached Flow," Comput. Fluids, **38**(5), pp. 1033–1041.
[24] Remmler, S., Christophe, J., Anthoine, J., and Moreau, S., 2010, "Computation of Wall Pressure Spectra From Steady Flow Data for Noise Prediction," AIAA J., **48**(9), pp. 1997–2007.
[25] Parchen, R. R., 1998, *Progress Report DRAW: A Prediction Scheme for Trailing Edge Noise Based on Detailed Boundary Layer Characteristics*, TNO Institute of Applied Physics, Delft, The Netherlands.
[26] Bertagnolio, F., Aagaard Madsen, H., and Bak, C., 2009, "Experimental Validation of TNO Trailing Edge Noise Model and Application to Airfoil Optimization," European Wind Energy Conference and Exhibition, Marseille, France, Mar. 16–19.
[27] Bertagnolio, F., Fischer, A., and Zhu, W. J., 2014, "Tuning of Turbulent Boundary Layer Anisotropy for Improved Surface Pressure and Trailing-Edge Noise Modeling," J. Sound Vib., **333**(3), pp. 991–1010.
[28] Peltier, L. J., and Hambric, S. A., 2007, "Estimating Turbulent-Boundary-Layer Wall-Pressure Spectra From CFD RANS Solutions," J. Fluids Struct., **23**(6), pp. 920–937.
[29] Slama, M., Leblond, C., and Sagaut, P., 2018, "A Kriging-Based Elliptic Extended Anisotropic Model for the Turbulent Boundary Layer Wall Pressure Spectrum," J. Fluid Mech., **840**, pp. 25–55.
[30] Lysak, P. D., 2006, "Modeling the Wall Pressure Spectrum in Turbulent Pipe Flows," ASME J. Fluids Eng., **128**(2), pp. 216–222.
[31] Aupoix, B., 2015, "Extension of Lysak's Approach to Evaluate the Wall Pressure Spectrum for Boundary Layer Flows," Flow, Turbul. Combust., **94**(1), pp. 63–78.
[32] Maury, C., Gardonio, P., and Elliott, S. J., 2002, "A Wavenumber Approach to Modelling the Response of a Randomly Excited Panel—Part II: Application to Aircraft Panels Excited by a Turbulent Boundary Layer," J. Sound Vib., **252**(1), pp. 115–139.
[33] Graham, W. R., 1996, "Boundary Layer Induced Noise in Aircraft—Part I: The Flat Plate Model," J. Sound Vib., **192**(1), pp. 101–120.
[34] Graham, W. R., 1996, "Boundary Layer Induced Noise in Aircraft—Part II: The Trimmed Flat Plate Model," J. Sound Vib., **192**(1), pp. 121–138.
[35] Borisyuk, A. O., and Grinchenko, V. T., 1997, "Vibration and Noise Generation by Elastic Elements Excited by a Turbulent Flow," J. Sound Vib., **204**(2), pp. 213–237.
[36] Mazzoni, D., 2003, "An Efficient Approximation for the Vibro-Acoustic Response of a Turbulent Boundary Layer Excited Panel," J. Sound Vib., **264**(4), pp. 951–971.
[37] Davies, H. G., 1971, "Sound From Turbulent-Boundary-Layer-Excited Panels," J. Acoust. Soc. Am., **49**(3B), pp. 878–889.
[38] Hwang, Y. F., and Maidanik, G., 1990, "A Wavenumber Analysis of the Coupling of a Structural Mode and Flow Turbulence," J. Sound Vib., **142**(1), pp. 135–152.
[39] Maury, C., Gardonio, P., and Elliott, S. J., 2002, "A Wavenumber Approach to Modelling the Response of a Randomly Excited Panel—Part I: General Theory," J. Sound Vib., **252**(1), pp. 83–113.
[40] Lysak, P. D., and Brungart, T. A., 2003, "Velocity Spectrum Model for Turbulence Ingestion Noise From Computational-Fluid-Dynamics Calculations," AIAA J., **41**(9), pp. 1827–1829.
[41] Tam, C. K., and Auriault, L., 1999, "Jet Mixing Noise From Fine-Scale Turbulence," AIAA J., **37**(2), pp. 145–153.
[42] Ewert, R., 2008, "Broadband Slat Noise Prediction Based on Caa and Stochastic Sound Sources From a Fast Random Particle-Mesh (RPM) Method," Comput. Fluids, **37**(4), pp. 369–387.
[43] Ewert, R., Dierke, J., Siebert, J., Neifeld, A., Appel, C., Siefert, M., and Kornow, O., 2011, "CAA Broadband Noise Prediction for Aeroacoustic Design," J. Sound Vib., **330**(17), pp. 4139–4160.
[44] Hu, N., Appel, C., Herr, M., Ewert, R., and Reiche, N., 2016, "Numerical Study of Wall Pressure Fluctuations for Zero and Non-Zero Pressure Gradient Turbulent Boundary Layers," AIAA Paper No. 2016-2911.
[45] Gravante, S. P., Naguib, A. M., Wark, C. E., and Nagib, H. M., 1998, "Characterization of the Pressure Fluctuations Under a Fully Developed Turbulent Boundary Layer," AIAA J., **36**(10), pp. 1808–1816.
[46] Tsuji, Y., Imayama, S., Schlatter, P., Alfredsson, P. H., Johansson, A. V., Marusic, I., Hutchins, N., and Monty, J., 2012, "Pressure Fluctuation in High-Reynolds-Number Turbulent Boundary Layer: Results From Experiments and DNS," J. Turbul., **13**, p. N50.
[47] Howe, M., 1992, "A Note on the Kraichnan Phillips Theorem," J. Fluid Mech., **234**(1), pp. 443–448.
[48] Howe, M. S., 1998, *Acoustics of Fluid-Structure Interactions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
[49] Shampine, L. F., 2008, "Vectorized Adaptive Quadrature in Matlab," J. Comput. Appl. Math., **211**(2), pp. 131–140.

Downloaded From: https://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org on 01/17/2019 Terms of Use: http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use

Chapitre 5

Expériences en soufflerie

Ce chapitre a pour but de présenter les expériences faites en soufflerie durant la thèse. L'objectif de ces expériences est de pouvoir valider et/ou améliorer les différentes hypothèses conduisant à la modélisation des fluctuations de pression turbulente exposées dans le chapitre 4. Pour ce faire, des mesures de fluctuations de vitesses turbulentes et de pression pariétale ont été réalisées.

Ce chapitre se compose principalement d'un article soumis dans le journal Experiments in Fluids. Il donne une description technique du moyen d'essai, des instruments métrologiques mis en œuvre et des configurations qui ont été testées. Une première analyse des résultats obtenus est également proposée. Cependant, la comparaison avec les modèles développés dans le chapitre 4 y est absente car l'ensemble serait trop volumineux. Elle sera donc effectuée au chapitre suivant.

La rédaction d'un article impose une certaine concision du propos, le papier ne décrit donc que l'installation expérimentale et ne donne pas le cheminement qui a conduit à cette configuration. Cette démarche va donc être exposée afin de compléter le papier.

Trois points vont être abordés :

1. le choix et la conception de la métrologie de la mesure de pression ;
2. le choix et la conception de la métrologie de la mesure de vitesse ;
3. l'insonorisation acoustique de la soufflerie.

5.1 Mesures de pression

La revue bibliographique des différentes techniques de mesure de $\Phi_{pp}(k, \omega)$ a déjà été réalisée dans la partie bibliographique et est également donnée dans l'article ci-après. La solution technologique retenue est similaire à celle employée par Ibars [Ibars 90] à savoir un système de disques rotatifs permettant de modifier la distance et l'orientation d'une paire de microphones afin de mesurer l'ensemble des inter-corrélations spatiales dans le plan (x, z). Ce système a été choisi par rapport aux antennes acoustiques pour deux raisons. Il ne requiert que l'emploi de trois microphones alors que la réalisation d'une antenne acoustique avec une bonne résolution spatiale en nécessite des dizaines ; ce qui est incompatible avec les ressources matérielles actuelles du DMPE. Le principal inconvénient de ce type de système est que le temps total pour acquérir l'ensemble des inter-corrélations spatiales dans le plan (x, z) est de l'ordre de la dizaine d'heures. Cet inconvénient n'est pas problématique puisqu'en parallèle des mesures de corrélations sont effectuées par LDV et

que le temps total d'acquisition de ces mesures est également de l'ordre de la dizaine d'heures.

Le principe du dispositif utilisé est représenté sur la figure 5.1.1. Trois microphones sont utilisés : M_1 est fixe tandis que M_2 et M_2' sont mobiles. Les déplacements de ces microphones sont obtenus en combinant des rotations d'angles ϕ, β et β'. Les deux paires de microphones M_1M_2 et M_1M_2' permettent de mesurer des corrélations avec des écartements spatiaux différents. En effet, on aura : $\|\xi\| = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2} \in [3,5; 60\,\text{mm}]$ pour M_2 et $\|\xi'\| \in [37; 95\,\text{mm}]$ pour M_2'. Par comparaison, le système utilisé par Ibars était tel que $\sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2} \in [7,5; 90\,\text{mm}]$. La distance minimale atteinte est contrainte par la taille du capteur. Ibars utilisait des microphones B&K 4138 ayant un diamètre de $3,175\,\text{mm}$, tandis ceux que nous avons utilisé ont un diamètre externe de $1,3\,\text{mm}$.

Nous utilisons trois microphones plutôt que deux car la réalisation d'un seul disque satellite permettant $\sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2} \in [3,5; 90\,\text{mm}]$ était beaucoup plus complexe d'un point de vue de l'usinage du système. De plus, comme les disques sont mis en rotation par des moteurs pas-à-pas, on augmente la précision du positionnement en utilisant des disques avec des petits rayons. Il est tentant de vouloir effectuer des mesures simultanément avec les trois microphones afin de réduire le temps total d'acquisition. Comme les corrélations spatiales mesurées suivent un maillage cartésien, il n'existe en général pas de combinaisons des trois rotations ϕ, β et β' permettant de placer simultanément les deux microphones mobiles sur les points du maillage.

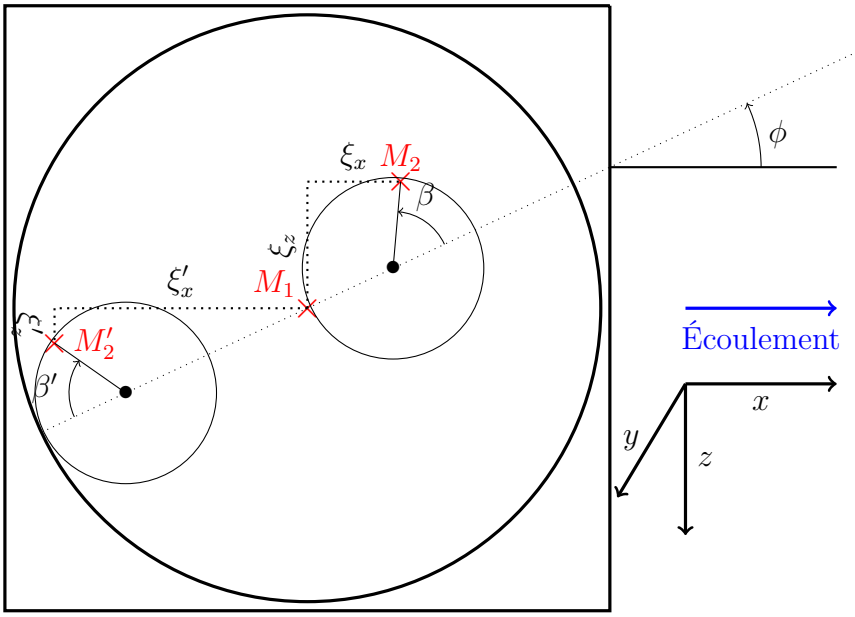


FIGURE 5.1.1 – Système de déplacement des micros. Les trois microphones sont représentés par des $\times$

Sans pour autant rentrer dans tous les détails technologiques, nous allons donner les grandes lignes conduisant au système final. La figure 5.1.2 présente le système tel qu'il est installé sur le plafond de la veine de la soufflerie. On peut voir que le disque principal est contenu dans une rainure horizontale de 20 cm de largeur. A moins de réusiner complètement le plafond de la soufflerie, ce qui était exclu pour des raisons financières et de calendrier, la taille du disque principal du système est contrainte par la largeur de cette rainure. Le système final est représenté sur la figure 5.1.3. Comme on peut le voir, la construction est assez compacte car afin de pouvoir être installée en veine, sa largeur maximale ne doit pas excéder 22 cm. Cela est dû à la

présence de poutres permettant de fermer les hublots de la soufflerie qui sont donc impossibles à enlever. Ces poutres sont visibles sur la figure 5.2.1, le photographe a un pied sur chacune d'elles.

L'ensemble des dimensions de ce système résulte d'un compromis entre les contraintes géométriques imposées par les dimensions de la soufflerie, des microphones ainsi que des moteurs utilisés.

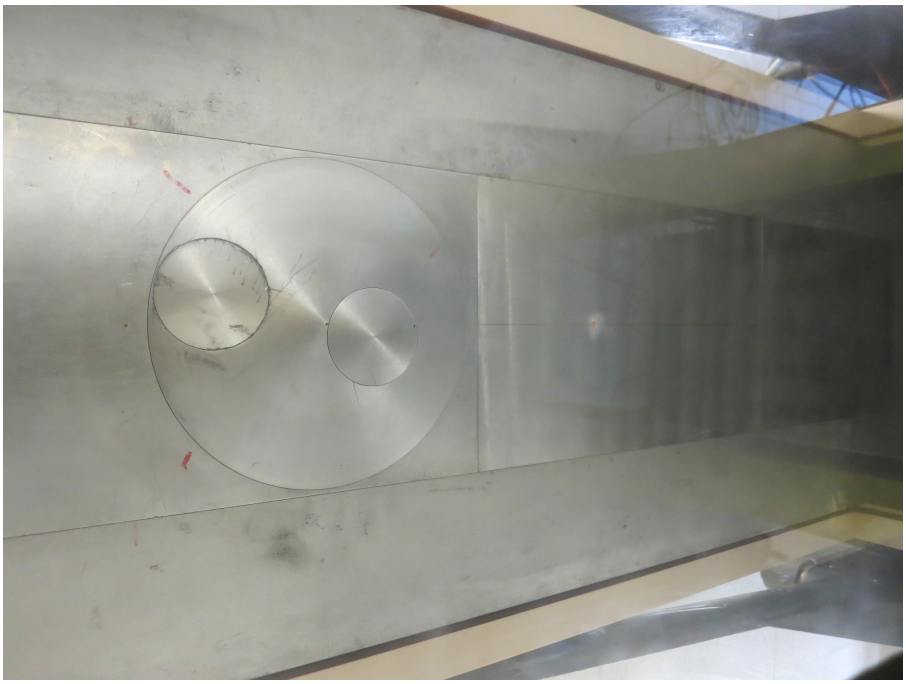


FIGURE 5.1.2 – Système de mesure de pression pariétale installé en veine

Nous allons terminer cette présentation du système de mesures de pression pariétale en donnant la précision obtenue sur les déplacements des microphones. Comme on utilise des moteurs pas à pas, la rotation des disques est quantifiée. Pour le grand disque, la plus petite rotation est de $0,01\,\text{deg} = 0,17\,\text{mrad}$ et pour les deux petits disques, la plus petite rotation est de $0,36\,\text{deg} = 6,28\,\text{mrad}$. On peut donc en déduire que la pire erreur de positionnement se produit lorsque $\phi = \beta = \beta' = 0$ et conduit à une erreur de position absolue de $0,1\,\text{mm}$ pour les deux couples M_1M_2 et M_1M_2'. L'erreur est similaire pour les deux couples car elle est principalement due à la précision des moteurs des petits disques qui est bien moindre que celle du moteur du disque principal.

5.2 Vélocimétrie

Comme pour les mesures de pressions, la bibliographie a déjà été réalisée dans la partie bibliographique et est également donnée dans l'article ci-après. Nous rappelons simplement que les mesures par fils chauds n'ont pas été utilisées car trop intrusives. Nous nous sommes donc tournés vers des techniques optiques. La PIV n'a pas été retenue car s'il est facile de mesurer des corrélations spatiales dans un plan, le montage permettant de mesurer des corrélations dans un volume aurait été beaucoup plus complexe Afin d'avoir une fréquence d'acquisition suffisante par rapport à la turbulence, il est néanmoins nécessaire d'employer de la PIV résolue dans le temps pouvant atteindre plusieurs dizaines de kHz. La tomographie-PIV permet de faire des mesures tridimensionnelles mais en plus d'une fréquence d'acquisition trop

FIGURE 5.1.3 – Système de mesure de pression pariétale

basse par rapport à la turbulence, cette technique de mesure n'est pas disponible au DMPE. Les mesures ont donc été réalisées par LDV, technique qui possède une haute fréquence d'acquisition et avec laquelle il est possible de mesurer des corrélations tridimensionnelles. Le principal inconvénient de cette technique de mesure est le temps total d'acquisition puisque les mesures sont ponctuelles.

La mise en place de l'expérience de mesures de fluctuations de vitesses turbulentes fut beaucoup moins complexe que celle concernant la pression. Hormis la synchronisation spatiale des volumes de mesure, chacun des deux vélocimètres est utilisé de manière standard. Il faut également signaler que ce genre d'expérience avait déjà été réalisée auparavant à l'ONERA/DAAA pour étudier un jet turbulent par Micheli. Aujourd'hui au DMPE, Francis Micheli a fortement contribué au succès de cette expérience.

Une des principales difficultés fut de réunir l'ensemble du matériel : deux bancs de déplacements trois axes et deux vélocimètres complets. L'autre fut la compacité du montage comme l'illustre la figure 5.2.1, représentant la soufflerie vue de dessus. Chacune des deux poutres correspond à un vélocimètre : la poutre marquée "Physice" a son optique d'émission à gauche et son optique de réception à droite tandis que c'est l'inverse pour l'autre vélocimètre. Les deux instruments doivent évoluer sans se percuter ni heurter l'ensemble des éléments externes de la soufflerie. Il doit également être possible de les rapprocher suffisamment pour que les deux volumes de mesure soient confondus. L'ensemble de ces contraintes géométriques a conduit à quelques ajustements avant d'aboutir à la configuration finalement utilisée.

5.3 Insonorisation acoustique

La soufflerie utilisée a été sélectionnée principalement pour sa disponibilité à l'échelle de la thèse. En effet, les mesures de corrélations par LDV et par micro-

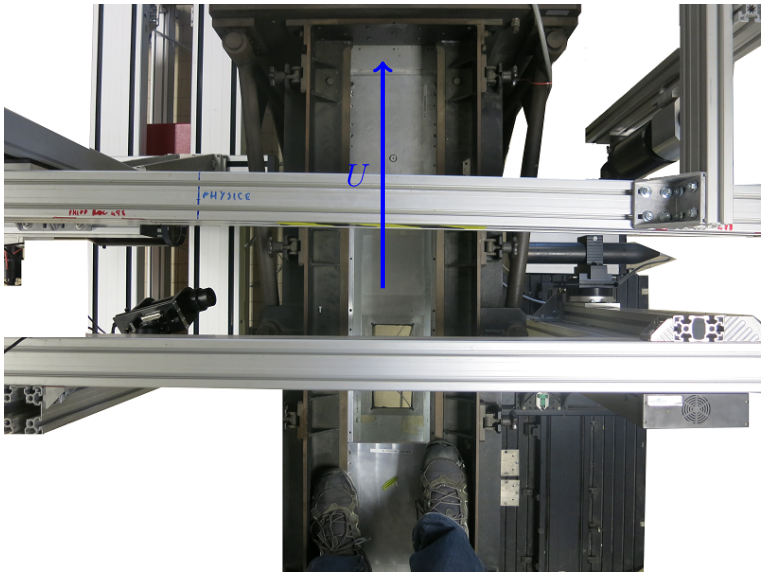


FIGURE 5.2.1 – Veine de la soufflerie vue du dessus

phones pariétaux mobiles n'avaient jamais été réalisées au DMPE et par conséquent les durées de leur mise en place et la validation de leur fonctionnement furent longues et surtout étaient difficilement quantifiables au début de la thèse. Il a donc été décidé d'utiliser cette soufflerie, auparavant dédiée à l'étude des écoulements turbulents, plutôt qu'une soufflerie dont l'environnement acoustique aurait été meilleur. L'idéal aurait en effet été de pouvoir utiliser une soufflerie anéchoïque comme celle du LMFA à Centrale Lyon utilisée par Arguillat [Arguillat 06] et Ibars [Ibars 90] pour le même genre de mesures de fluctuations de pression pariétale. Le DMPE n'a pas une telle installation mais possède deux souffleries de type Eiffel dédiées à l'étude de la transition laminaire-turbulent avec un faible taux de turbulence et de bruit acoustique. Ces souffleries n'ont néanmoins pas les qualités acoustiques d'une soufflerie anéchoïque et leurs disponibilités étaient trop réduites. C'est pourquoi elles n'ont pas été utilisées.

Par comparaison avec la soufflerie utilisée, le fort taux de turbulence était plutôt un avantage car il assurait le développement d'une couche limite épaisse dont la turbulence était pleinement développée dans la section d'essai où les mesures ont été réalisées. Le fort niveau acoustique n'était pas incompatible avec les mesures de vitesse. En revanche, les mesures de fluctuations de pression pariétales furent fortement impactées. Après avoir colmaté de nombreuses petites fuites induisant des sifflements dans la veine d'essai, les mesures de pression turbulente restaient fortement compromises car on avait $\left\langle p'^2 \right\rangle_{\text{acoustique}} \approx 200 \left\langle p'^2 \right\rangle_{\text{turbulence}}$. Afin d'améliorer ce ratio, il a été décidé d'insonoriser la soufflerie afin de limiter les perturbations acoustiques crées par le ventilateur. Trois actions ont été entreprises sous contraintes de temps et de moyens limités :

1. comblement d'une cavité ;
2. mise en place d'un tampon absorbant ;
3. recouvrement des parois à l'aval de la veine.

Chacun de ces trois points va être détaillé.

5.3.1 Comblement d'une cavité

Le ventilateur qui alimente la soufflerie utilisée est également relié à une soufflerie jumelle. On peut choisir laquelle des deux est alimentée en obstruant complètement l'un des deux conduits, à l'aval de la veine d'essai, dans le diffuseur. Ce dernier est de forme conique alors que la "boîte" dans laquelle on opère est de section carrée comme on peut le voir sur la figure 5.3.1. On insère dans la "boîte" de la soufflerie en fonctionnement dix cadres en bois percés au diamètre du diffuseur. Des cadres recouverts d'un tissu peuvent également être insérés afin de créer des pertes de charges et opérer à des vitesses plus faibles.

Les cadres vides ne sont pas parfaitement ajustés induisant ainsi des marches entre deux cadres successifs ainsi que des cavités génératrices de bruit. Un unique cadre en mélamine a été réalisé afin de supprimer ces sources de bruit.

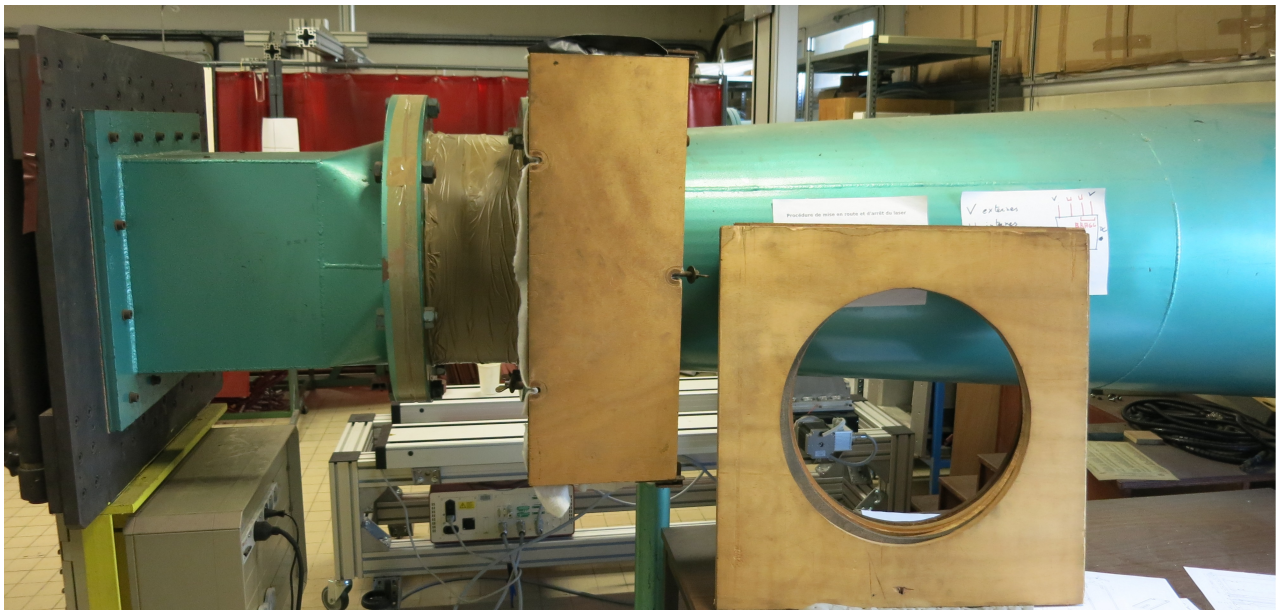


FIGURE 5.3.1 – "Boîte" et cadres en bois

5.3.2 Mise en place d'un tampon

Le ventilateur est relié à un conduit d'environ 8 m de longueur et de 80 cm de diamètre, qui est perpendiculaire à la direction principale des souffleries. Ce tuyau est visible sur la figure 5.3.2. Le ventilateur est derrière le mur situé à gauche tandis que les deux souffleries sont dans le prolongement des deux tuyaux qui partent vers le bas. La soufflerie utilisée correspond au tuyau qui est le plus à droite. Comme on peut le voir, le raccordement entre la soufflerie et le tuyau du ventilateur ne se fait pas au moyen d'un coude mais par l'intersection de deux cylindres perpendiculaires de même diamètre. Il existe donc une cavité à l'extrémité du tuyau horizontal, après le branchement vers la soufflerie. Cette cavité a été comblée avec un cylindre de mélamine de 80 cm de diamètre et de 45 cm d'épaisseur. Les ondes acoustiques en provenance du ventilateur impactent normalement ce cylindre réalisant ainsi un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f = c/(4\lambda) \approx 200\,\mathrm{Hz}$. Le tampon de mélamine réalisé est présenté sur la figure 5.3.3 ainsi que son installation dans le tuyau d'alimentation de la soufflerie.

FIGURE 5.3.2 – Tuyau d'alimentation des souffleries

FIGURE 5.3.3 – Tampon de mélamine

5.3.3 Recouvrement du tuyau d'alimentation

Les parois du diffuseur de la soufflerie étaient déjà recouvertes d'un matériau absorbant ; il a donc été décidé de traiter de la même manière le tuyau d'alimentation visible sur la figure 5.3.2 en collant une mousse de 5 cm d'épaisseur et d'une surface totale de 20 m^2. La pose de cette mousse est visible sur la figure 5.3.4

5.3.4 Autres modifications envisagées

En plus des trois actions présentées précédemment, il a été envisagé de construire une chicane dans le tuyau d'alimentation afin de piéger les ondes par réflexions successives. Cependant, cette modification induisait une perte de charge beaucoup trop importante et ne permettait plus d'utiliser la soufflerie dans des conditions nominales.

Les différentes modifications ont permis de mettre à jour le système de pales situés à l'amont du ventilateur qui permet de faire varier la vitesse en veine en créant une perte de charge. Ce système est représenté sur la figure 5.3.5 en ouverture et en fermeture maximales ainsi que sa localisation par rapport au ventilateur. Même dans le cas où les pales sont ouvertes au maximum, elles représentent toujours un obstacle important générateur de fortes perturbations acoustiques. Les traiter acoustiquement voire les déposer n'a pas été envisagé car cela représentait une modification trop importante.

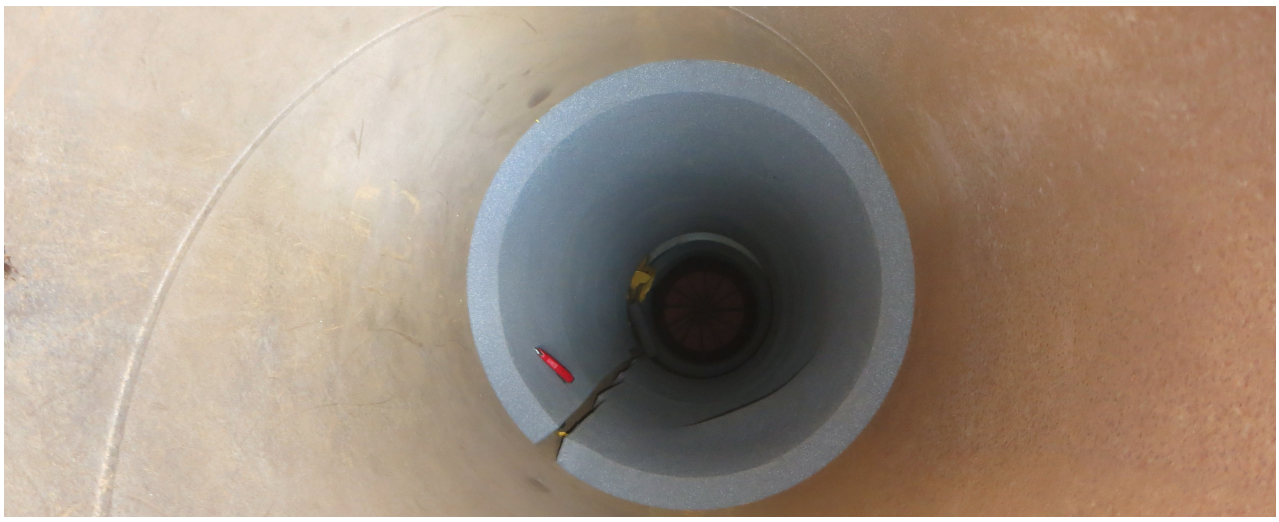


FIGURE 5.3.4 – Pose de la mousse absorbante dans le conduit d'alimentation

FIGURE 5.3.5 – Système de pales régulant la vitesse de fonctionnement de la soufflerie

5.3.5 Bilan

Après les trois modifications présentées ci-dessus, le ratio turbulence-acoustique a été amélioré pour atteindre $\left\langle p'^2 \right\rangle_{\text{acoustique}} \approx 40 \left\langle p'^2 \right\rangle_{\text{turbulence}}$. Ce ratio a encore été amélioré grâce à un post-traitement du signal. Ce traitement repose sur l'absence de corrélation entre les signaux acoustiques et turbulents. Ce genre de traitement est habituellement utilisé en acoustique pour, à l'inverse, retirer la composante turbulente d'un signal. Il a par exemple été mis en œuvre par Minotti *et al.* [Minotti 08]. En plaçant un microphone de référence à l'extérieur de la veine de la soufflerie, qui ne mesure donc que des fluctuations de pression acoustique, il est possible d'extraire une partie du signal acoustique mesuré en veine. Ce traitement est exposé en détails dans l'article ci-après. Ce traitement a permis d'améliorer le ratio turbulence-acoustique tel que $\left\langle p'^2 \right\rangle_{\text{acoustique}} \approx 10 \left\langle p'^2 \right\rangle_{\text{turbulence}}$.

Afin de mieux comprendre l'impact des traitements réalisés, l'inter-corrélation temporelle entre deux microphones espacés de quelques centimètres est présentée sur la figure 5.3.6. Tous les signaux sont adimensionnés par leur maximum. Le "signal initial" est obtenu avant toute modification de la soufflerie. Il correspond majoritairement à de l'acoustique et non à de la turbulence. Cela peut être vérifié en calculant la vitesse de phase associée au lobe principal et qui est égale à la vitesse du son. A l'inverse, on peut voir pour $\tau \approx -1\,\text{ms}$, une légère irrégularité sur la courbe d'inter-corrélation qui correspond en fait à la manifestation de la turbulence

puisque la vitesse de phase qui lui est associée est légèrement inférieure à la vitesse à l'extérieur de la couche limite.

Le but des traitements est donc de parvenir à faire mieux ressortir cette perturbation par rapport au signal acoustique. La courbe "traitement physique" correspond aux signaux mesurés après avoir modifié la soufflerie tandis que la courbe "traitement numérique" correspond au signal obtenu après application de la procédure décrite dans le papier.

Le "signal final" montré sur la figure 5.3.6 correspond au signal après le traitement numérique dont on a retiré la tendance polynomiale sur l'intervalle $\tau \in [-10; 10\,\mathrm{ms}]$ et forcé à 0 en dehors. Cette opération correspond à l'application d'un filtre passe haut sans induire le déphasage inévitable d'un filtrage numérique. Cette opération aurait été très dommageable car le déphasage modifie directement la vitesse de convection de la pression pariétale qui est un paramètre important des modèles pour $\Phi_{pp}(k, \omega)$.

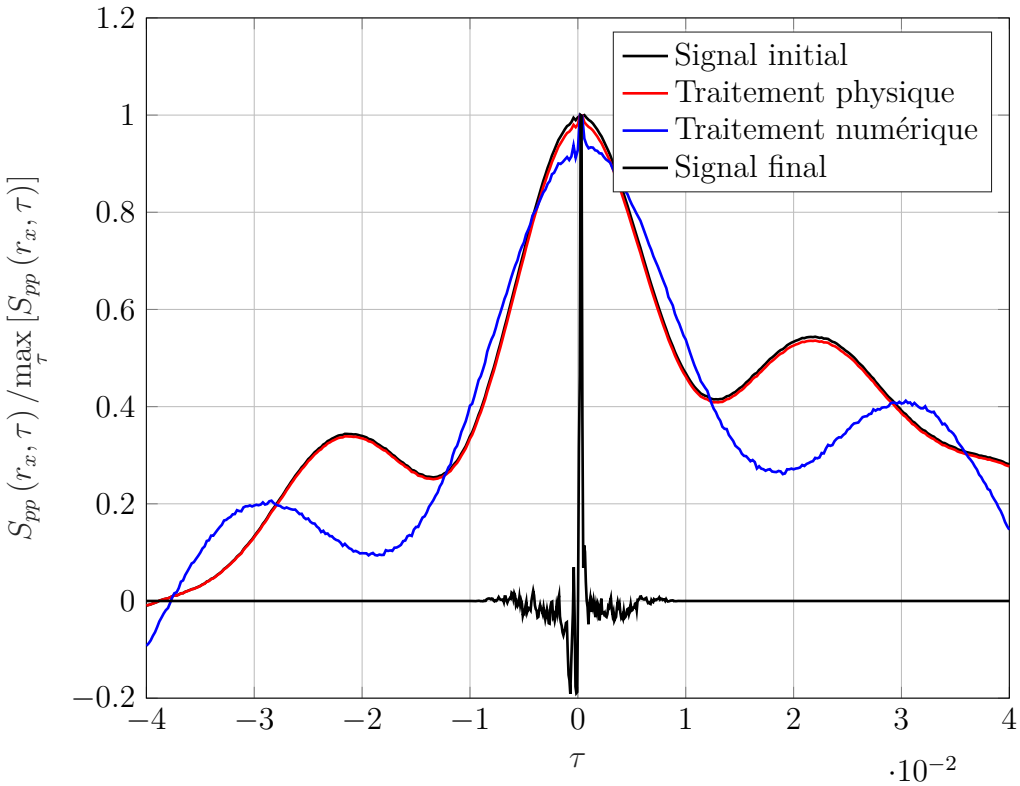


FIGURE 5.3.6 – Amélioration du ratio acoustique-turbulence

5.4 Article

Noname manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Wall-normal velocity and pressure correlations in a zero pressure gradient turbulent boundary layer

Sylvain Morilhat · François Chedevergne · Francis Micheli · Frank Simon

Received: date / Accepted: date

Abstract An experimental campaign dedicated to the characterization of the wall pressure spatial correlations was performed. Laser Doppler Velocimetry measurements and microphone recordings were made jointly on a turbulent boundary layer. Two-point two-time correlations of the wall pressure and of the wall-normal velocity were measured and analyzed. In particular, the Taylor hypothesis of frozen turbulence is confirmed for the velocity and pressure fluctuations. However, the convection velocity for the wall-normal velocity fluctuation is revealed to evolve across the boundary layer, following the mean velocity profile. For the pressure fluctuations, the convection velocity is found constant, irrespective of the Reynolds number, and equals to $0.8U_e$. Furthermore, the decorrelation time scale of the velocity correlations appears to be increasing throughout the boundary layer thickness in accordance with the increase of the convection velocity. The results obtained with this original campaign will help improving models for wall pressure spectrum, especially those based on the resolution of the Poisson equation for the pressure for which the wall pressure correlations are related to the wall-normal velocity correlations.

Keywords Wall pressure fluctuations · two-point two-time correlations · turbulent boundary layers

S. Morilhat
ONERA, Department of Multi-Physic for Energetics
2 avenue Edouard Belin 31055 Toulouse Cedex 4
E-mail: sylvain.morilhat@onera.fr

F. Chedevergne
Tel.: +33 5 62 25 28 09
Fax: +33 5 62 25 25 25
ONERA, Department of Multi-Physic for Energetics
2 avenue Edouard Belin 31055 Toulouse Cedex 4
E-mail: francois.chedevergne@onera.fr

F. Micheli
ONERA, Department of Multi-Physic for Energetics
2 avenue Edouard Belin 31055 Toulouse Cedex 4
E-mail: francis.micheli@onera.fr

F. Simon
ONERA, Department of Multi-Physic for Energetics
2 avenue Edouard Belin 31055 Toulouse Cedex 4
E-mail: frank.simon@onera.fr

1 Introduction

Turbulent boundary layers flows produce wall pressure fluctuations that may cause undesirable structure vibrations which in turn can generate acoustic radiations. To the stochastic response of vibrating structures to wall pressure excitation, the space-time correlation func-

tion, or equivalently the wave-number-frequency spectrum, is required. Among the different methods developed to model the pressure spectrum $\phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$, where $\mathbf{k}$ is the wave-number and ω the pulsation, recent efforts were focused on the resolution of the Poisson equation for the pressure fluctuations. The latter are then directly related to the velocity correlations of the turbulent flow. Slama et al. (2018), following Peltier and Hambric (2007) found a solution to the Poisson equation for wall pressure correlations in the space-time domain, the pressure spectrum being then obtained by Fourier transform. Morilhat et al. (2018) derived a model from the work of Lysak (2006) and Aupoix (2015) that permits to directly access the pressure spectrum from the resolution of the Poisson equation in the spectral domain. Those methods rely on several hypothesis concerning the wall pressure and velocity correlations in a turbulent boundary layer. Even if DNS database such as the recent work by Sillero et al. (2014), can provide accurate predictions and can serve to guide models, their high computational costs for high Reynolds number configurations remain a major obstacle. To the author knowledge, there is no experimental data that could be used to help the development of $\phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ models based on the resolution of the Poisson equation. Such an experiment require the joint measure of both the spatial correlations of the velocity and of the wall pressure fluctuations. The purpose of the present work is to provide such experimental data which will help consolidating $\phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ models.

To measure spatial correlations of turbulent velocity fluctuations, two distinct experimental set-ups using whether hot-wires or LDV (Laser Doppler Velocimetry) techniques were employed. Concerning hot-wire measurements of spatial correlations, the main contributions were realised by Favre et al. (1957), Tritton (1967) and Grant (1958). Altough very important results were gained from these experiments, the intrusive nature of the hot-wires limits the extend of this technique. In particular, difficulties are encountered when measuring longitudinal correlations due to the wake of the upstream hot-wire. In the present context, spatial correlation measurements are realized through the use of the LDV technique. Three kind of set-ups relying on the use of LDV benches were employed in the past.

The first two set-ups only use one velocimeter rendering these two techniques easy to implement. Belmabrouk and Michard (1998) used a 2D emitting head with four laser beams, generating two measuring volumes (MV). One is kept fixed while the second is moved by the use of rotating mirrors. This method was used to study a grid wake flow and a jet flow. The second technique only necessitating a unique velocimeter generates an elongated MV obtained using a set of lens having long focals. The spacing between the fringes is then not constant through the MV. Using two receiving heads focalized at two different locations of the elongated MV, a spatial correlation can be deduced. This technique was employed by Neumann et al. (2009) to study the wake flow behind a cylinder and Fraser et al. (1986) to study a grid wake flow. Although these two techniques only required a unique velocimeter, some limitations inevitably occur. In particular, in terms of accuracy a two velocimeter set-up is in essence preferable.

A set-up involving two velocimeters was used byBech et al. (1995) to study a Couette flow, Furuichi et al. (2004) and Benedict and Gould (1999) to study the detached flow behind a step and Trimis and Melling (1995) to study a jet flow. In a boundary layer context, Ölçmen et al. (2001) made two-point correlation measurements of the wall-normal fluctuating velocities in the vicinity of the wall. In the present study, such a set-up is adopted to access the spatial correlation of the wall-normal velocity component on a 3D field.

Concerning the measurements of the spatial correlation of turbulent wall pressure fluctuations, essentially all studies employed wall-mounted microphones. Four different methods can be identified. The most simple one consists in a network of regularly distributed mi-

crophones. The spatial resolution depends on the size of the sensors and the distance between two microphones. This kind of set-up require a large number of microphones, especially if a bi-dimensional resolution is needed. For that reason, Abraham and Keith (1998) applied this technique to the study of a turbulent boundary layer using a single 1D line of 48 microphones spaced out 4.22 mm one from another in an hydrodynamic tunnel.

The second class of methods makes use of signal processing to reduce aliasing. Phase delays are introduced between microphones resulting in band-pass filtering of the measured signals. This technique was developed by Maidanik (1967). One dimensional networks were used by Manoha (1996) et Ibars (1990) while bidimensional networks were used by Sherman et al. (1990). All these authors studied zero pressure gradient turbulent boundary layers. Sherman et al. (1990) used two networks of 11×11 microphones, being differentiated by the distance between microphones. The smallest network, having the shortest distance between microphones, was able to measure a large range of wave-numbers with a poor resolution while the larger one had a better resolution but a more limited frequency range. The cost of this set-up is very high due to the large number of microphones required and is prohibitive for the targeted configuration in our study.

The next improvement is due to Arguillat et al. (2010). Using two rotating 1D microphones networks a large area was covered. By combining the measurements obtained for each angular position of the networks, a better resolution is achieved compared to Sherman et al. (1990) approach using the same number of microphones. However, the total number of microphones remained important as the two tested networks used 47 and 63 microphones respectively. The two networks were used to study zero pressure gradient turbulent boundary layers and the flow downstream an oblique front-facing step.

At last, to limit the number of microphones drastically, Ibars (1990) proposed an innovative moving apparatus involving only two microphones. The resolution is now only limited by the size of the sensors. The main drawback of this method is the time required to acquire a complete bi-dimensional field of spatial correlations which was around 10 h for a zero pressure gradient turbulent boundary layer. The set-up used by the authors of this paper is similar to the one developed by Ibars (1990) and is illustrated on figure 2.

The article is organized as follows. After a brief preamble where the notation are introduced, section 3 presents the experimental setup and all the measurement techniques involved in the present study. Although only a small extract of representative data is illustrated in the paper, a complete description of all the measurements is made to show the extend of the realized work. Then, an analysis of the velocity and pressure two-point two-time correlations is performed through some illustrative examples. Finally, section 3 concludes and gives some perspectives.

2 Preamble

The models, such as in Slama et al. (2018) or Morilhat et al. (2018), providing the frequency spectrum $\Phi_{pp}(\omega)$ through the resolution of a Poisson equation for the pressure, relate the spacetime correlations of the wall pressure fluctuations $\langle p'(\mathbf{x},t)p'(\mathbf{x}+\mathbf{r},t+\tau)\rangle$ to the two-point two-time spatial correlation of the wall-normal velocity $\langle v'(\mathbf{x},t)v'(\mathbf{x}+\mathbf{r},t+\tau)\rangle$. For the zero pressure gradient boundary layers considered, the boundary layer thickness δ increases slowly in the streamwise direction and the velocity field can be assumed as homogeneous in a plane parallel to the wall with a good approximation. For this reason the two-point two-time spatial correlation is expected to only depend on y, $\mathbf{r}$ and τ. We note :

$$S_{vv}[y](\mathbf{r},\tau) = \langle v'(\mathbf{x},t)v'(\mathbf{x}+\mathbf{r},t+\tau)\rangle \qquad (1)$$

The associated wave-number frequency spectra $\Phi_{vv}[y](\mathbf{k},\omega)$ is deduced from $S_{vv}(y](\mathbf{r},\tau)$

through a direct Fourier transform. In the following, the argument $y = y_0$ will be dropped for clarity reasons and the values y_0 will be explicitly stated when needed.

The measurements realized in this study give access to two-point two-time correlations $S_{pp}(\mathbf{r}, \tau)$ and $S_{vv}(\mathbf{r}, \tau)$. In the following, we use the special notation $S_{vv}(\mathbf{r})$ (respectively $S_{pp}(\mathbf{r})$) or $\Phi_{vv}(\mathbf{k})$ (respectively $\Phi_{pp}(\mathbf{k})$) to designate the two-point correlation with $\tau = 0$ or the frequency spectrum. Similarly, the one-point correlation is $S_{vv}(\tau) = S_{vv}(\mathbf{0}, \tau)$ (respectively $S_{pp}(\tau)$) and the frequency spectrum is $\Phi_{vv}(\omega) = \Phi_{vv}(\mathbf{0}, \omega)$ (respectively $\Phi_{pp}(\omega)$).

3 Experimental setup

3.1 Wind tunnel

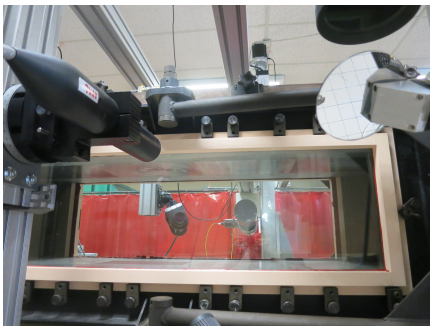


Fig. 1: Picture of the vein of the wind tunnel equipped with the two LDV benches. The "blue" LDV bench is on the left hand side while the "yellow" one is on the right, behind the test section

Experiments were conducted in a wind tunnel of Eiffel type. The test section is 1.8 m long while optical access only cover 1.2 m. The test section equipped with optical access is visible on figure 1. An empty vein was used so that boundary layers develops from the convergent up to the measuring vein and gives rise to sufficiently large boundary layer thicknesses. The turbulent boundary layers were measured on the top wall of the wind-tunnel, 1.1 m after the convergent.
The wind tunnel is not equipped with dedicated acoustical treatment to make it silent. There is just an absorbent foam on the walls of the pipe leading to the fan. Hence, a dedicated treatment for the measured pressure signals, described in subsection 3.3.2, is used to access the turbulent wall pressure.

3.2 Velocity measurement apparatus

Measurements were performed using two independent LDV systems. Two different wavelengths were used : 488 nm and 561 nm. Thus the velocimeters will be referred as "blue" and "yellow". Each velocimeter is mounted on a three axis translation stage. Both translation stages are completely independent. The resolution is around 25 μm.

The blue laser source is a Coherent Genesis MX SLM 488 nm solid state laser. It can provide a 2 W continuous beam but only 0.5 W were used. The emitting head is a Dantec 60X with four optical fibers allowing to measure the longitudinal and normal components of the velocity. The source and the emission heads are connected using a color separator FiberFlow Dantec 9060X0411. Only one component of the velocity can be measured. The switch between components is realized through a change of the used fibers pair.

The yellow laser source is an Oxxius 561 nm solid laser emitting a 300 mW continuous beam. The laser is directly connected on a modified Disa SSX-V emitting head. The receiving head is a Dantec 90SSX0341. Both set-ups are used in forward scattering. Characteristics of the two velocimeters are recapped in table 1.

The optical fibers of the receiving heads are connected to two photomultipliers Photonis XP2020, the latter being connected to a signal processor TSI FSA 4000. The signal processor is driven by the Flowsizer software (v 2.0.4.0).

Atomized DEHS oil, yielding droplets around 200 nm in diameter, is used as a tracer. The

Table 1: Characteristics of the velocimeters

	Wave-length	Beam power (each)	MV diameter	MV length
Blue	488 nm	20 mW	180 μm	4 mm
Yellow	561 nm	50 mW	130 μm	3 mm

droplets are generated with a Topas atomizer aerosol generator ATM 210H. The atomizer is connected to a network of perforated pipes placed in front of the convergent of the wind-tunnel. This set-up ensured a good and constant seeding through the all experimental campaign.

The relative position of the velocimeters must be calibrated daily in order to guaranty its precision. An instrument-holder carrying a calibrated hole of 50 μm diameter is placed inside the wind tunnel, normal to the transverse direction. Both velocimeters are aligned on this perforation using the diffraction of the laser beams through the hole. Using this procedure, the relative error in the longitudinal and normal direction is about 25 μm while the error in the transverse direction is about 1 mm.

3.3 Pressure measurements

3.3.1 Equipment

The wall pressure measurements are made using three flushed mounted pinhole microphones B&K 4182. The pinholes have a 1.1 mm diameter. A free field microphone B&K 4190 is placed in front of the inlet of the wind-tunnel. All microphones are connected to a NI 9234 signal acquisition module with a sampling rate of 50 kHz.

In order to measure spatial correlations on a large area, the three microphones are mounted on a rotating device sketched in figure 2. Microphone M_1 is fixed in the center of the main disk while microphones M_2 and M_2' can move in the (x, z) plane by combining rotations of angles ϕ, β and β'. Using M_1 and M_2, spatial correlations verifying $\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2} \in [3.5; 60]$ mm are accessible while using M_1 and M_2', spatial correlations with $\|\boldsymbol{\xi'}\| = \sqrt{\xi_x'^2 + \xi_z'^2} \in [37; 95]$ mm were measured.

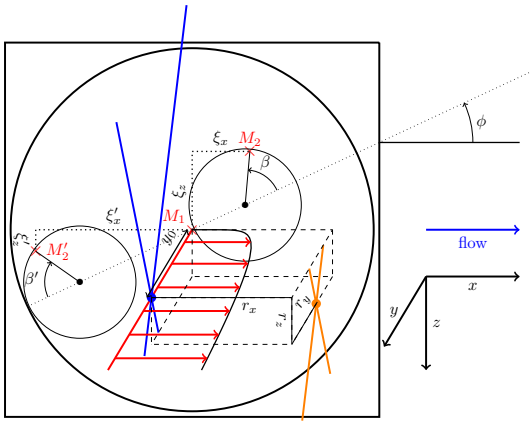


Fig. 2: Schematic representation of the microphone apparatus. Three microphones M_1, M_2 and M_2', marked with $\times$ symbols, are mounted on three separated rotating disks. The distance vector between microphones M_1 and M_2 is $\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, 0, \xi_z)$ while for microphones M_1 and M_2' the vector is $\boldsymbol{\xi'} = (\xi_x', 0, \xi_z')$. The two VM are drawn with the respective colors of the laser beams. They are spaced by the distance vector $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$

3.3.2 Post-procecing

The microphones record both turbulent wall pressure p_t and acoustical pressure p_a in a single signal. The used wind tunnel has no acoustical treatments yielding quite high acoustical level with $p_a \gg p_t$. The measured signals can then not be used directly to evaluate the turbulent wall pressure correlations. In order to subtract the acoustical part, a free-field microphone is placed outside of the wind tunnel in font of the convergent. There is no flow

around this microphone and it measures only the acoustical pressure. Assuming a complete decorrelation between turbulent and acoustical pressures, the turbulent spectrum can be extracted. This assumption is based on the fact that most of the energy of the acoustical spectrum is below 50 Hz while the turbulent spectrum covers a higher frequency range.

In addition to microphones M_1 and M_2, presented in figure 2, we note M_e the external microphone. For the sake of clarity, we use the following notation : $\Phi_{pp,ij}(\omega) = \Phi_{pp}(\mathbf{r_{ij}}, \omega)$ designates the theoretical cross-spectrum of the pressure between microphones i and j with $\mathbf{r_{ij}}$ the distance vector between the two microphones. Similarly we introduce $\overline{\Phi_{pp,ij}}$ the experimental cross-spectrum measured by microphones i and j. The transfer function of microphone i is denoted by C_i such that:

$$\begin{aligned} &\Phi_{pp,ij}(\omega) = \overline{\Phi_{pp,ij}}(\omega)\, C_i^\star(\omega)\, C_j(\omega) \\ &\Phi_{pp,ii}(\omega) = \overline{\Phi_{pp,ii}}(\omega)\, |C_i(\omega)|^2 \\ &\forall (i,j) \in \{1,2,e\} \end{aligned} \tag{2}$$

with $C^\star$ the complex conjugate of C.

The transfer functions were obtained experimentally through a calibration process.

The pressure p is decomposed into an acoustical and a turbulent part $p_i = p_i^a + p_i^t$. As microphone e is outside of the wind tunnel $p_e^t \equiv 0$. Assuming a complete decorrelation between turbulent and acoustical pressures leads to:

$$\begin{aligned} \Phi_{pp,11}(\omega) &= \Phi^a_{pp,11}(\omega) + \Phi^t_{pp,11}(\omega) \\ \Phi_{pp,12}(\omega) &= \Phi^a_{pp,12}(\omega) + \Phi^t_{pp,12}(\omega) \\ &= \Phi^{a^\star}_{pp,21}(\omega) + \Phi^{t^\star}_{pp,21}(\omega) = \Phi^\star_{pp,21}(\omega) \\ \Phi_{pp,1e}(\omega) &= \Phi^a_{pp,1e}(\omega) = \Phi^{a^\star}_{pp,e1}(\omega) = \Phi^\star_{pp,e1}(\omega) \\ \Phi_{pp,22}(\omega) &= \Phi^a_{pp,22}(\omega) + \Phi^t_{pp,22}(\omega) \\ \Phi_{pp,2e}(\omega) &= \Phi^a_{pp,2e}(\omega) = \Phi^{a^\star}_{pp,e2}(\omega) = \Phi^\star_{pp,e2}(\omega) \\ \Phi_{pp,ee}(\omega) &= \Phi^a_{pp,ee}(\omega) \end{aligned} \tag{3}$$

Since the considered flow is a zero pressure gradient bi-dimensional turbulent boundary layer with a very slow evolution in the streamwise direction, we have $\Phi^t_{pp,11}(\omega) = \Phi^t_{pp,22}(\omega)$ while $\Phi^a_{pp,11}(\omega)$ can be significantly different from $\Phi^a_{pp,22}(\omega)$.
Let's assume the existence of a transfer function A_{ij} between the acoustical pressures such that:

$$\begin{aligned} &\Phi^a_{pp,ij} = \Phi^a_{pp,ii} A_{ij} \\ &A^\star_{ij} = A_{ji} \end{aligned} \tag{4}$$

A_{ij} is a complex function with the real and imaginary parts corresponding to the attenuation and delay between microphones i and j.

Thus the auto-spectra are put into the form:

$$\begin{aligned} \Phi^a_{pp,ii} &= \frac{\Phi^a_{pp,ie}\Phi^a_{pp,ei}}{\Phi^a_{pp,ee}} \\ \Phi^t_{pp,ii}(\omega) &= \Phi_{pp,ii} - \Phi^a_{pp,ii} \\ &= \Phi_{pp,ii} - \frac{\Phi^a_{pp,ie}\Phi^a_{pp,ei}}{\Phi^a_{pp,ee}} \quad , \ \forall i \in \{1,2\} \\ &= \Phi_{pp,ii} - \frac{\Phi_{pp,ie}\Phi_{pp,ei}}{\Phi_{pp,ee}} \end{aligned} \tag{5}$$

Using the transfer functions of the microphones, we have:

$$\begin{aligned} &\Phi^t_{pp,ii}(\omega) = \left[\overline{\Phi_{pp,ii}} - \frac{\overline{\Phi_{pp,ie}\Phi_{pp,ei}}}{\overline{\Phi_{pp,ee}}}\right] |C_i|^2 \\ &\forall i \in \{1,2\} \end{aligned} \tag{6}$$

Since $A_{13} = A_{12}A_{23}$ by definition of the transfer functions:

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi^a_{pp,1e}}{\Phi^a_{pp,11}} = \frac{\Phi^a_{pp,12}}{\Phi^a_{pp,11}} \frac{\Phi^a_{pp,2e}}{\Phi^a_{pp,22}} \\ &\Rightarrow \Phi^a_{pp,1e}\Phi^a_{pp,22} = \Phi^a_{pp,12}\Phi^a_{pp,2e} \end{aligned} \tag{7}$$

The turbulent inter-spectrum reads:

$$\begin{aligned}\Phi^t_{pp,12}(\omega) &= \Phi_{pp,12} - \Phi^a_{pp,12} \\ &= \Phi_{pp,12} - \frac{\Phi^a_{pp,1e}\Phi^a_{pp,22}}{\Phi^a_{pp,2e}} \\ &= \Phi_{pp,12} - \frac{\Phi_{pp,1e}}{\Phi^a_{pp,2e}}\frac{\Phi^a_{pp,2e}\Phi^a_{pp,e2}}{\Phi^a_{pp,ee}} \\ &= \Phi_{pp,12} - \frac{\Phi_{pp,1e}\Phi^a_{pp,e2}}{\Phi^a_{pp,ee}}\end{aligned} \tag{8}$$

Finally, turbulent wall pressure spectrum is obtained from the following formula:

$$\Phi^t_{pp,12}(\omega) = \left[\overline{\Phi_{pp,12}} - \frac{\overline{\Phi_{pp,1e}\Phi_{pp,e2}}}{\overline{\Phi_{pp,ee}}}\right] C_1^\star C_2 \tag{9}$$

Note that only microphones 1 and 2 need to be calibrated as $\Phi^t_{pp,11}, \Phi^t_{pp,22}$ and $\Phi^t_{pp,12}$ are independent from C_e.

3.4 Experimental conditions and measurement domain

Several series of measurements were made providing different kind of data. First, mean and variance profiles ($U(y), \langle u'^2\rangle(y), \langle v'^2\rangle(y)$ and $\langle u'v'\rangle(y)$) were measured for eight cases of external velocity values $U_e \in [25; 60]$ m/s. The corresponding range of Reynolds numbers based on the momentum thickness is $\mathcal{R}_\theta \in [2800, 10500]$. The objectives of this first set of measurements were to ensure that the boundary layers behaviors were nominal and to explore the effect of variation of $\mathcal{R}_\theta$ on the ratio $-\langle u'v'\rangle / \langle v'^2\rangle$. The measurement were obtained using the two MV of the velocimeters localized at the same point and oriented such that the longitudinal and the wall-normal velocity were measured. For all the considered Reynolds number R_θ, one-dimensional wall pressure measurements were acquired with the help of the rotating device described on figure 2. Two subsets of measurement were made depending on the displacement direction: longitudinal profiles where $\xi_z = \xi'_z = 0$ and $\xi_x \in [4, 59]$ mm and $\xi'_x \in [38, 93]$ mm ; and transverse profiles for which $\xi_x = \xi'_x = 0$ and $\xi_z \in [4, 59]$ mm and $\xi'_z \in [38, 93]$ mm using the notations introduced in figure 2. The displacement resolution was 1 mm in both directions.

Case $U_e = 50$ m/s was investigated in more details in a second set of measurements. Two-point two-time correlations of the turbulent velocity fluctuations were measured using the two velocimeters. Only the wall-normal component of the velocity is measured providing spatial correlations $S_{vv}(\mathbf{r}, \tau)$. One of the MV is fixed at position $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$ with an altitude in the boundary layer given by y_0. As shown on figure 2, r_x, r_y and r_z designate coordinates of the distance vector between the two MV. Let R_x, R_y and R_z be the lengths of the edges of the box containing all the locations of the second MV for a given position y_0 of the first MV. For each altitude y_0, one-dimensional profiles, for which two edge lengths R_x, R_y or R_z are set to zero, and bi-dimensional fields, where one of the lengths R_x, R_y or R_z is zero, were measured. The retained lengths R_x, R_y and R_z are summarized in table 2.

Obviously as the correlation lengths decrease when y_0 tends to zero, the lengths provided in table 2 for the 1D profiles correspond to the maximum lengths used at the boundary layer frontier for the largest y_0 values. These maximum lengths were estimated *a priori* using the turbulence length-scales described in Morilhat et al. (2018). Concerning the 2D fields of spatial correlations, the choices for the maximum lengths result from a compromise. Those lengths are yet large enough for two-point one-time correlations. For one-dimensional case, 24 different values of y_0 were considered while only 6 were retained for bi-dimensional. Each measurement is made on a recording time such that the full convergence is reached as explained in section 3. The number of acquiered spatial correlations are recapped in table 3.

Bi-dimensional measurements of the wall pressure correlations were also performed on

Table 2: Maxima values used for the vector distance $\mathbf{r}$ in each direction for one-dimensional or bi-dimensionnal explorations

	1D			2D		
Name	X	Y	Z	XY	XZ	YZ
R_x	$\leq 13\delta$	0	0	$\leq 2\delta$	$\leq 2\delta$	0
R_y	0	$\leq 1.5\delta$	0	$\leq 1.6\delta$	0	$\leq 1.6\delta$
R_z	0	0	$\leq 1.5\delta$	0	$\leq 2\delta$	$\leq 2\delta$

Table 3: Number of spatial correlations acquired for each kind of measurements and the associated data volumes

LDV		Microphones	
X	1735	1D	1792
Y	561	2D	500
Z	424	Total	2706
XY	1638		
XZ	1344		
YZ	1960		
Total	7662		
Measurements	3.82×10^9	4.06×10^9	
Raw Data	47 Go	42 Go	

the case $U_e = 50$ m/s. A cartesian mesh with an increasing displacement resolution was used. For $\|\xi\| \in [4, 28]$ mm the resolution was 1 mm, then for $\|\xi\| \in [28, 54]$ mm the resolution was 2 mm and finally for $\|\xi\| \in [54, 92]$ mm the resolution was 4 mm. The sampling rate of the microphones was 50 kHz and the recording time was fixed at 10 s.

4 Analysis of the velocity and pressure correlations

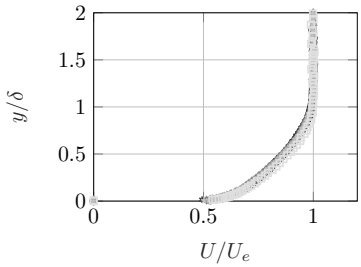
4.1 Mean velocity and Reynolds stresses

Before analyzing the data sets for the spatial correlations, a focus is made on the one-point one-time correlations obtained on the ZPG boundary layer configuration. The eight measured mean velocity profiles are presented on figures 3a and 3b, respectively normalized with the external and wall variables. The expected self-similarities of the boundary layers in the inner and outer regions are recovered. Figure 3b indicates that the MV give access to the velocity profiles all over the logarithmic region. However the buffer region and the viscous sublayer are almost not described.

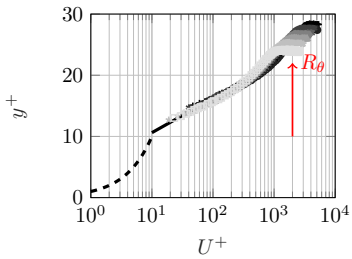
Normalized profiles of the Reynolds stress $\langle u'^2 \rangle^+$ are presented on figure 4a with respect to y^+. The measurements were not close enough to the wall to capture the peak of $\langle u'^2 \rangle$, however the characteristic plateau in the log-region is well recovered on all profiles. A good collapse, revealing the similarity nature of the profiles in the outer region, is also observed on figure 4b where the u' fluctuation profiles are drawn across the boundary layer using the outer scaling.

Standard characteristics of zero pressure gradient boundary layers are retrieved by these measurements, therefore ensuring a possible exploitation for models validation of the two-point two-time correlations of the velocity and the pressure described in section 3.4.

Lysak (2006), Aupoix (2015) and Morilhat et al. (2018) approaches relate the $\langle v'^2 \rangle$ profile to the wall pressure spectrum and a proper estimation of this profile is required to deduced the fluctuating wall pressure. Instead of relying on $\langle v'^2 \rangle$ profile directly, the model use an empirical correlation $\langle v'^2 \rangle = -\alpha \langle u'v' \rangle$ where

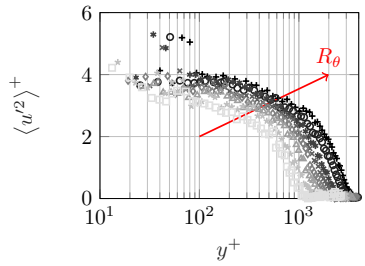


(a) Outer region scaling

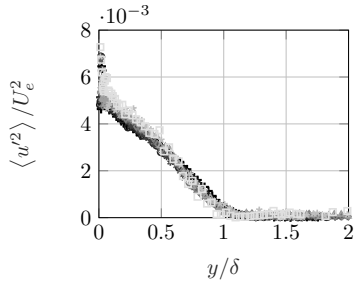


(b) Inner region scaling

Fig. 3: Mean longitudinal velocity profiles obtained for $R_\theta \in [2800, 10500]$. Gray to black colors indicate increasing R_θ values. (a) the normalization is based on the outer scales δ and U_e. (b) the normalization lies on the wall variables $y^+ = \dfrac{yu_\tau}{\nu}$ and $u_\tau = \sqrt{\dfrac{\tau_w}{\rho}}$. The dashed line (- - -) is the linear relation $u^+ = y^+$ and the solid line (——) is the logarithmic law $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$



(a) Inner region scaling



(b) Outer region scaling,

Fig. 4: Reynolds stress $\langle u'^2 \rangle$ profiles for $R_\theta \in [2800, 10500]$. Gray to black colors indicate increasing R_θ values. (a) the normalization is based on wall variables y^+ and u_τ. (b) the normalization is based on the outer scales δ and U_e

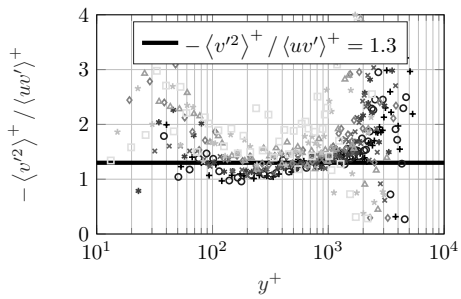


Fig. 5: Ratio $\alpha = -\langle v'^2 \rangle / \langle u'v' \rangle$ with respect to y^+ for $R_\theta \in [2800, 10500]$. Gray to black colors indicate increasing R_θ values

α is a constant. Lysak used $\alpha = 1$ for pipe flows while Aupoix and Morilhat used $\alpha = 1.3$ for zero pressure gradient turbulent boundary layer over flat plates. Figure 5 presents the evolution of α across the boundary layer thickness. A large plateau region is observed for the whole Reynolds range. However, the value of the plateau slightly depends on $\mathcal{R}_\theta$. The value $\alpha = 1.3$ appear to be a reasonable mean value for the considered Reynolds numbers range $\mathcal{R}_\theta \in [2800, 10500]$.

4.2 Integral length scales

Two-point spatial correlations are now examined. The external velocity is $U_e = 50$ m/s and $R_\theta = 8600$. The delay τ is fixed at zero and it

will be dropped from the variable list of S_{vv}. For each of the measured correlations $S_{vv}(\mathbf{r})$, for which the distance vector $\mathbf{r}$ is aligned with one the direction x, y or z, the integral length scale Λ is calculated as the area of the normalized correlations function $S_{vv}/\left\langle v'^2\right\rangle$:

$$\Lambda_i = \int_0^\infty \frac{S_{vv}(r_i\mathbf{e_i})}{\langle v'^2\rangle} dr_i \tag{10}$$

Note that as S_{vv} and $\left\langle v'^2\right\rangle$ implicitly depend on the altitude y_0, Λ_i is a function of y_0.

As explained by Sillero et al. (2014) the interpretation of Λ is not straightforward. In the present case, the correlation signals $S_{vv}(r_x, 0, 0)$ contain negative values as y_0 increase thus diminishing the calculated value of Λ_x. Furthermore, the presence of residual noises on all the correlations as $\|r\| \to \infty$ introduce errors in the numerical computation of the integrals. Results depend on the method chosen for computing the length scales. Here, the initial definition (10) is conserved. For consistency, the results are compared to those found using an exponential fit e^{-r_i/Λ_i} of the correlation. Figures 6a, 6c and 6b show the three 1D normalized correlations, plotted with respect to the distance r_i normalized by the respective integral length scales. For the y direction, two distinct length scales are computed. The first one Λ_y^{sup} refers to the evolution of the correlation for positive values of the distance r_y, while Λ_y^{inf} is related to the negative distance toward the wall. On the figures, the associated Von Karman isotropic correlation functions S_{vv}^{VK} are also depicted for comparison purposes. This function is computed as follows. For two-point one-time correlation, $S_{vv}(\mathbf{r})$ is deduced from the wave-number spectrum $\Phi_{vv}(\mathbf{k})$ through an inverse Fourier transform:

$$S_{vv}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{vv}(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}.\mathbf{r}} d\mathbf{k} \tag{11}$$

In isotropic turbulence, the velocity spectrum is related to the energy spectrum through:

$$\Phi_{vv}(\mathbf{k}) = \frac{E(\mathbf{k})}{4\pi k^2}\left(1 - \frac{k_y^2}{k^2}\right) \tag{12}$$

where $k = \|\mathbf{k}\|$.

The energy spectrum for isotropic turbulence may be approximated by the Von Karman model:

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\left\langle v'^2\right\rangle}{k_e} \frac{\left(\frac{k}{k_e}\right)^4}{\left(1 + \left(\frac{k}{k_e}\right)^2\right)^{\frac{17}{6}}} \tag{13}$$

where k_e is the characteristics wavenumber carying the maximum of energy.
For 1D correlations the integral in eq.(11) simplifies and analytical solutions are achieved. For the normalized correlations such that $S_{vv}^{VK}(\mathbf{0}) = \left\langle v'^2\right\rangle$, they read:

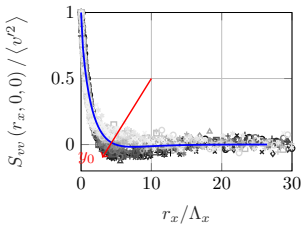
$$\begin{aligned} S_{vv}^{VK}(r_x, 0, 0) &= (r_x k_e)^{1/3}\left(2K_{1/3}(r_x k_e) \right. \\ &\quad \left. - r_x k_e K_{2/3}(r_x k_e)\right) \\ S_{vv}^{VK}(0, 0, r_z) &= (r_z k_e)^{1/3}\left(2K_{1/3}(r_z k_e) \right. \\ &\quad \left. - r_z k_e K_{2/3}(r_z k_e)\right) \\ S_{vv}^{VK}(0, r_y, 0) &= (r_y k_e)^{1/3} K_{1/3}(r_y k_e) \end{aligned} \tag{14}$$

where $K_{1/3}$ and $K_{2/3}$ are modified Bessel functions of the second kind. Functions in eq. (14) stand for the 1D correlations in an equivalent isotropic flow. Deviations from these functions reveal anisotropic effects.
A more general analytical form for $S_{vv}^{VK}(r_x, r_y, r_z)$ is also accessible:

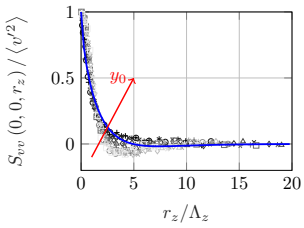
$$\begin{aligned} S_{vv}^{VK}(r_x, r_y, r_z) &= 2(k_e r)^{1/3}\mathrm{K}_{1/3}(k_e r) \\ &\quad - k_e^{4/3}\left(r_x^2 + r_z^2\right) r^{-2/3}\mathrm{K}_{2/3}(k_e r) \end{aligned} \tag{15}$$

where $r = \|\mathbf{r}\|$.

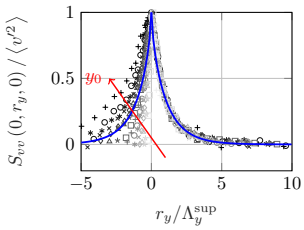
Figures 6a, 6c and 6b show a good collapse of all the correlations with a little effect of the altitude y_0. Remark that the effect is reversed between $S_{vv}(r_x, 0, 0)$ and $S_{vv}(0, 0, r_z)$.



(a) Longitudinal correlation



(b) Transversal correlation



(c) Normal correlation

Fig. 6: Spatial correlations of the wall-normal velocity S_{vv} obtained for $R_\theta = 8600$. Blue lines correspond to the Von Karman correlation model of eq. (14)

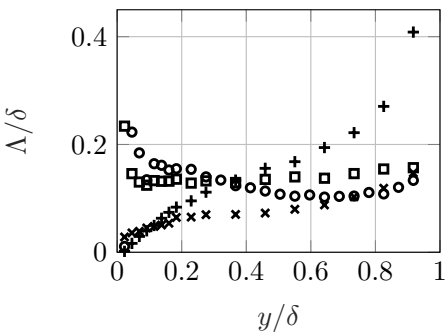


Fig. 7: Integral length-scale evolutions across the boundary layer, Λ_x: line with $\circ$ symbol, Λ_y^{sup}: line with $\square$ symbol, Λ_y^{inf}: line with $+$ symbol and Λ_z: line with $\times$ symbol

Furthermore, on figure 6c the retained normalization using Λ_y^{sup} do not allowed to collapse all curves for negative values of r_y.

Finally, the evolution of the four length scales are plotted against the altitude y_0 in the boundary layer on figure 7. Results are consistent with those found by Sillero et al. (2014) and used in Slama et al. (2018) as a reference, even though some discrepancies exist for Λ_x. As mentioned above, this may be due to the numerical method used to compute eq.(10).

4.3 Planar sections of the spatial correlations

To complete the previous analysis, the spatial correlations obtained in three different plans

are examined. For the sake of compactness, only one altitude Y_b is presented here. We retain a location in the logarithmic region where $y_0 = 0.18\delta$, corresponding to $y_0^+ = 300$. Results are representative of those observed for other altitudes in the boundary layer. The iso-contours of the functions

$S_{vv}(r_x, r_y, 0)$, $S_{vv}(r_x, 0, r_z)$ and $S_{vv}(0, r_y, r_z)$ are plotted in the respective plans on figures 8a, 8b and 8c. Figures 8a and 8c point out the asymmetry in the y direction due to the blocage effect of the wall. A slight nonphysical asymmetry relative to z when r_x tends to zero is also visible on figure 8b. It disappears for higher position y_0 in the boundary layer.

4.4 Convection velocity and decorrelation time scale

The spatial correlations are now used to find out the associated convection velocity at which the fluctuations are advected and the associated time scale. Considering that the convection is essentially longitudinal, only $S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau)$ is scrutinized. For $y_0 = 0.18\delta$, time evolution of the correlations $S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau)$ are shown for five increasing values of the distance r_x on figure 9. This figure illustrates the transport of the correlation with the dissipation and the dispersion of $S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau)$ as r_x increases.

Experimentally (Favre et al. 1958), in boundary layer flows the correlation $S_{uu}(0, r_y, 0, \tau)$ was found to present maxima positively or negatively delayed with respect to the sign of r_y. This is due to inclined and elongated structures in the boundary layers. There is no similar experimental results for $S_{vv}(0, r_y, 0, \tau)$. From DNS results, Sillero et al. (2014) shows that $S_{vv}(r_x, r_y, 0, 0)$ exhibits no slope, the iso-contours of $S_{vv}(r_x, r_y, 0, 0)$ for $r_x = 0$ being almost vertically aligned,

unlike $S_{uu}(r_x, r_y, 0, 0)$ or $S_{ww}(r_x, r_y, 0, 0)$. The present measurements confirm this trend as shown on figure 10. No time delays are observed on $S_{vv}(0, r_y, 0, \tau)$. The correlation simply decreases and slightly widens as $|r_y|$ increases.

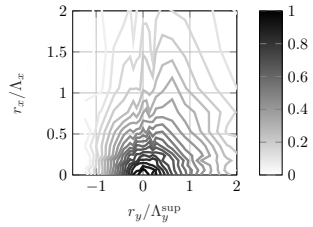
The complete evolution with respect to the normalized delay $\tau U_e/\delta$ of $S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau)$ is presented on figure 11a for all the acquired longitudinal distance r_x. Adjusting an exponential decay $e^{-\frac{\tau}{\tau_S}}$ as illustrated on the figure allows to evaluate the decorrelation time scale τ_S. A similar approach was already used by Tam et al. (1999) and Ewert (2008); Ewert et al. (2011) to represent the decorrelation of the velocity fluctuations with time. Time scale τ_S is plotted on figure 11b for all altitude y_0. The decorrelation time scale increases across the boundary layer suggesting that the convection velocity increase accordingly.

To evaluate the convection velocity U_c^u, for each distance r_x on figure 11a the peak value of $S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau)$ is extracted.

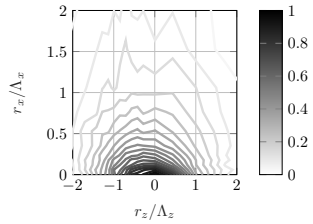
Applying this procedure to all altitude y_0 in the boundary layer leads to figure 12a. For each altitude y_0, the peak value of $S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau)$ has a quasi linear evolution in the (r_x, τ) plane suggesting that the convection velocity is constant. Furthermore, the convection velocity is always lower that U_e and depends on y_0. A linear regression provides an estimate of U_c^u and its variation throughout the boundary layer is shown on figure 12b. The convection velocity increase with y_0 and is very similar to the mean velocity U in the outer region of the boundary layer. This is consitent with the result obtained by Renard and Deck (2015) by means of DNS.

4.5 Advection of pressure fluctuations

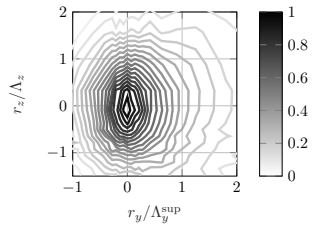
For each Reynolds number R_θ, the microphone apparatus was used to acquire the pressure correlations in the (x, z) plane. As mentioned in the subsection 3.3.2, the pressure cross-spectrum result from a post-processing. Because acoustic signals are several orders of magnitude higher than the turbulent part of the acquired pressure signal, the only truly relevant information coming from the numerical procedure is related to the relative variation of the turbulent pressure correlations. For that reason, a normalization is used to present the results. For



(a) (x, y) plane



(b) (x, z) plane



(c) (y, z) plane

Fig. 8: Correlation of the wall-normal velocity S_{vv} drawn in planar sections for the altitude in the boundary layer $y_0^+ = 300$, $y_0/\delta = 0.18$ and $R_\theta = 8600$

each considered case, the normalization factor is $\langle p'^2 \rangle = S_{pp}(0, 0, 0, 0)$ obtained from the central microphone M_1 as represented on figure 2. As there is no pressure gradient applied to the boundary layer, the pressure fluctuation $\langle p'^2 \rangle$ can be considered as constant all over the explored plane.

First, case $R_\theta = 8600$ corresponding to $U_e = 50$ m/, is analyzed. Contours of the normalized pressure correlation $S_{pp}(\xi_x, 0, 0, \tau)/\langle p'^2 \rangle$ and $S_{pp}(0, 0, \xi_z, \tau)/\langle p'^2 \rangle$ are plotted on figures 13a and 13b.

At a glance on figure 13b, the bi-dimensional nature of the flow is confirmed since the peak value of the pressure correlation $S_{pp}(0, 0, \xi_z, \tau)$ remains located at $\xi_z = 0$. There is no transport of the pressure correlation in the transverse direction. On the opposite, a linear evolution of $S_{pp}(\xi_x, 0, 0, \tau)$ is clearly visible on figure 13a. A linear regression gives the associated convection velocity U_c^p. Once plotted for all R_θ cases, figure 14 is obtained.

The convection velocity for the pressure correlation is almost constant for all the considered R_θ and is about $0.8U_e$. This value is close to the commonly used value $0.7U_e$, as for example in Corcos model Corcos (1963, 1964) for $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$.

5 Conclusion

A rather large measuring campaign was performed to described the spatial correlations of the wall-normal velocity and the pressure in

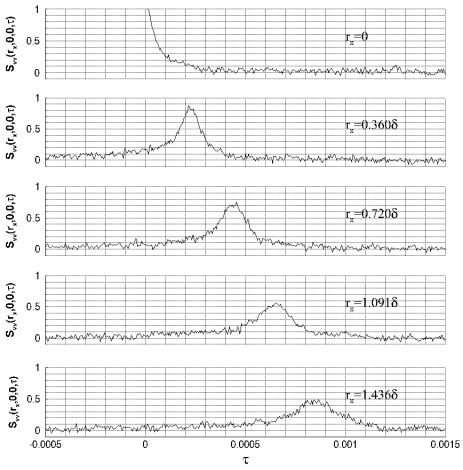


Fig. 9: Transport of the velocity correlation. For each values of the distance vector $\mathbf{r} = (r_x, 0, 0)$, the normalized velocity correlation $S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau)/\langle v'^2 \rangle$ is plotted with respect to τ. The altitude is fixed at $y_0/\delta = 0.18$.

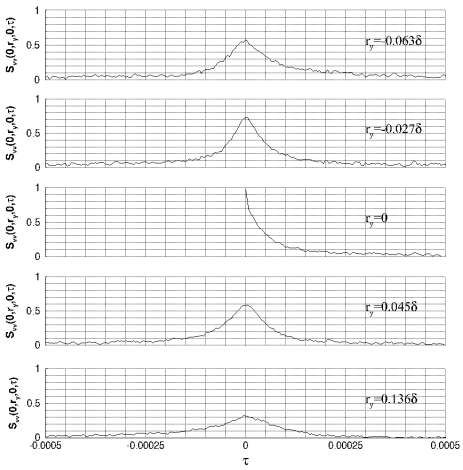
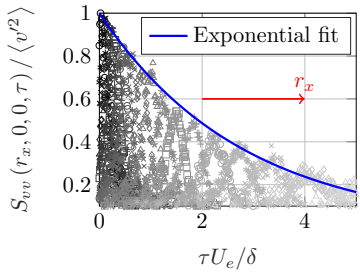
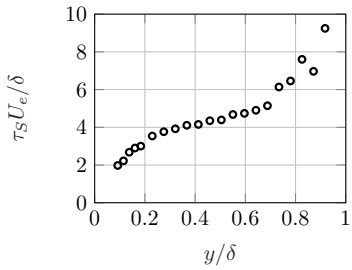


Fig. 10: Normal distribution of the velocity correlation. For each values of the distance vector $\mathbf{r} = (0, r_y, 0)$, the normalized velocity correlation $S_{vv}(0, r_y, 0, \tau)/\langle v'^2 \rangle$ is plotted with respect to τ. The altitude is fixed at $y_0/\delta = 0.18$

a zero pressure gradient turbulent boundary layer. The pressure correlations were acquired using three microphones mounted on rotating



(a) wall-normal velocity correlation

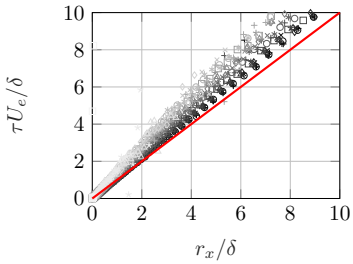


(b) time scale

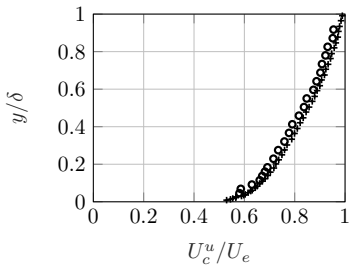
Fig. 11: Decorrelation time scale. (a) evolution of $S_v v(r_x, 0, 0, \tau)$ with respect to τ. Black to gray colors indicate increasing r_x values. Velocity correlations are obtained for $y_0/\delta = 0.18$, $R_\theta = 8600$. (b) Profile of the decorrelation time scale τ_S in the boundary layer for $R_\theta = 8600$

disks that permit to characterize a large area of the wall surface. Two LDV benches were also employed to access the velocity correlations. These measurements complete the existing experimental and numerical database (Favre et al. 1957; Tritton 1967; Sillero et al. 2014) by providing the spatial correlations for the wall-normal velocity. Furthermore, the complementary pressure correlations measurements provide a unique data-set that will help improving the recent modeling efforts focused on the wall pressure fluctuations (Slama et al. 2018; Morilhat et al. 2018).

The ratio $\alpha = -\langle v'^2 \rangle / \langle u'v' \rangle$ is found to be around 1.3 in the logarithmic region of the boundary layer, irrespective of the Reynolds number in the range $R_\theta \in [2800, 10500]$. This result confirms previous studies for which this



(a) $\max_{\tau}(S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau))$



(b) convection velocity

Fig. 12: Convection of the wall-normal velocity correlations. (a) evolution of the peak values of $S_{vv}(r_x, 0, 0, \tau)$ in the plane (r_x, τ). Gray to black colors indicate increasing y_0 values. The red line represents the linear convection at constant speed U_e. (b) Profile of the convection velocity U_c^u ($\circ$ symbols) compared to the mean longitudinal velocity profile ($+$ symbols)

value of α was also estimated. More interestingly, the spatial damping of the correlation function $S_{vv}(r_i\mathbf{e_i}, 0)$ may be reasonably approximated using a model based on the Von Karman spectrum for $\Phi_{vv}(\mathbf{k})$, except for $r_y < 0$. The only remaining unknown parameters are the length scales Λ_i which may be modeled for example from the results obtained in this study Furthermore, the decorrelation time scale τ_S is found to be increasing across the boundary layer thickness, while the convection velocity for the velocity correlations U_c^u is revealed to be close to the mean velocity. However, when focusing on the wall pressure fluctuations, the convection velocity U_c^p appears to be constant and equals to $0.8U_e$. This confirms that in a modeling context for $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$, the use of the Taylor hypothesis of frozen turbulence is justified.

From the elaborated database, the next step is to inject the measured mean velocity profiles together with the Reynolds stress profile $-\langle u'v' \rangle$ as inputs of the model developed by Morilhat et al. (2018) and compared the resulting modeled $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ to the measurements. With the help of all the acquired data, potential discrepancies should be trackable and the model improved.

References

Abraham BM, Keith WL (1998) Direct measurements of turbulent boundary layer wall pressure wavenumber-frequency spectra. Journal of Fluids Engineering 120(1):29–39

Arguillat B, Ricot D, Bailly C, Robert G (2010) Measured wavenumber: Frequency spectrum associated with acoustic and aerodynamic wall pressure fluctuations. The Journal of the Acoustical Society of America 128(4):1647–1655

Aupoix B (2015) Extension of Lysak s Approach to Evaluate the Wall Pressure Spectrum for Boundary Layer Flows. Flow, Turbulence and Combustion 94(1):63–78

Bech K, Tillmark N, Alfredsson P, Andersson H (1995) An investigation of turbulent plane couette flow at low reynolds numbers. Journal of Fluid Mechanics 286:291–325

Belmabrouk H, Michard M (1998) Taylor length scale measurement by laser doppler velocimetry. Experiments in Fluids 25(1):69–76

Benedict L, Gould R (1999) Understanding biases in the near-field region of lda two-point correlation measurements. Experiments in fluids 26(5):381–388

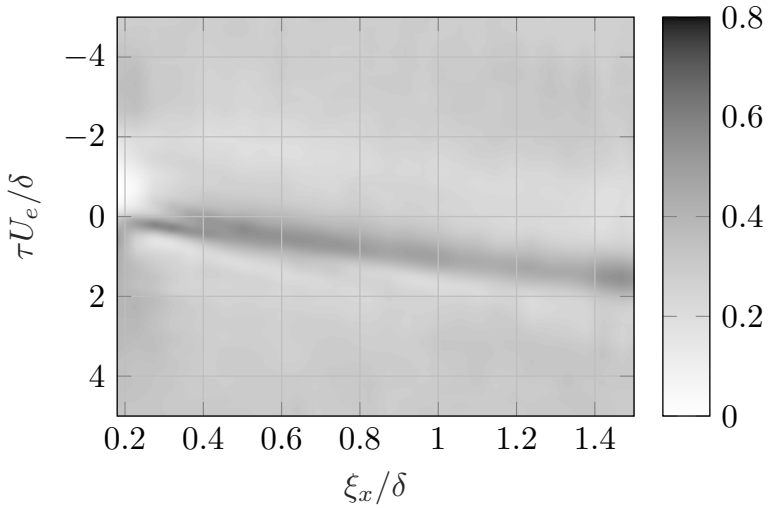
Corcos GM (1963) Resolution of pressure in turbulence. The Journal of the Acoustical Society of America 35(2):192–199

Corcos GM (1964) The structure of the turbulent pressure field in boundary-layer flows. Journal of Fluid Mechanics 18(03):353–378

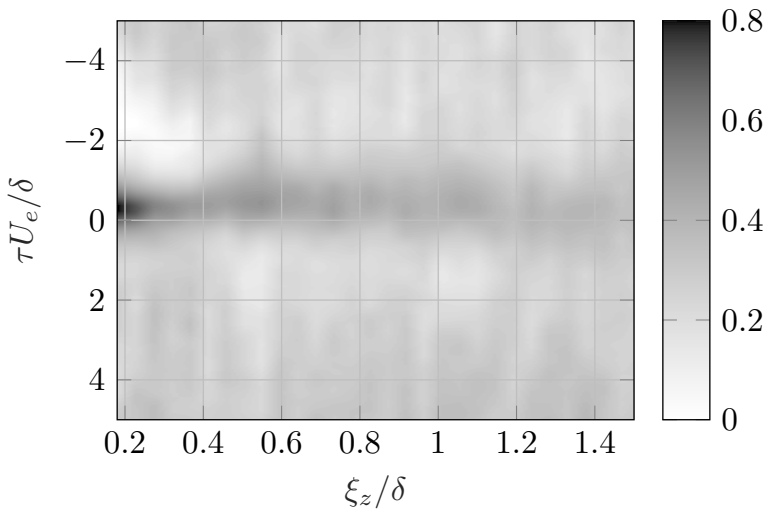
Ewert R (2008) Broadband slat noise prediction based on caa and stochastic sound sources from a fast random particle-mesh (rpm) method. Computers & Fluids 37(4):369–387

Ewert R, Dierke J, Siebert J, Neifeld A, Appel C, Siefert M, Kornow O (2011) Caa broadband noise prediction for aeroacoustic design. Journal of sound and vibration 330(17):4139–4160

Favre A, Gaviglio J, Dumas R (1957) Space-time double correlations and spectra in a turbulent



(a) (x, τ) plane



(b) (z, τ) plane

Fig. 13: Contours of the turbulent pressure correlations $S_{pp}(\mathbf{r}, \tau)$ in space-time planes. A normalization is made using the pressure fluctuations recorded on microphone M_1 $\langle p'2 \rangle = S_{pp}(0, 0, 0, 0)$

boundary layer. Journal of Fluid Mechanics 2(4):313–342

Favre AJ, Gaviglio JJ, Dumas RJ (1958) Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer. Journal of Fluid Mechanics 3(04):344, DOI 10.1017/s0022112058000021, URL https://doi.org/10.1017/s0022112058000021

Fraser R, Pack C, Santavicca D (1986) An ldv system for turbulence length scale measurements. Experiments in fluids 4(3):150–152

Furuichi N, Hachiga T, Kumada M (2004) An experimental investigation of a large-scale structure of a two-dimensional backward-facing step by using advanced multi-point ldv. Experiments in Fluids 36(2):274–281

Grant H (1958) The large eddies of turbulent motion. Journal of Fluid Mechanics 4(2):149–190

Ibars P (1990) Contribution des petits nombres donde au champ pariétal de pression

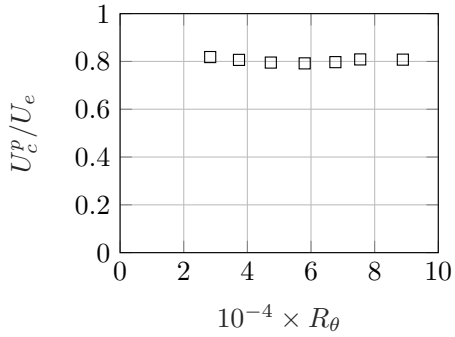


Fig. 14: Convection velocity profile U_c^p for the turbulent pressure fluctuations with respect to R_θ

dans une couche limite turbulente bidimensionnelle. comparaison de différentes techniques expérimentales. These: Ecole Centrale de Lyon

Lysak PD (2006) Modeling the wall pressure spectrum in turbulent pipe flows. Journal of fluids engineering 128(2):216–222

Maidanik G (1967) Flush-Mounted Pressure Transducer Systems as Spatial and Spectral Filters. The Journal of the Acoustical Society of America 42(5):1017–1024

Manoha E (1996) The wavenumber-frequency spectrum of the wall pressure fluctuations beneath a turbulent boundary layer. In: Aeroacoustics Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics

Morilhat S, Chedevergne F, Simon F (2018) A unified methodology to evaluate the radiated noise due to turbulent boundary layer flows. Journal of Fluid Engineering accepted

Neumann M, Shirai K, Buttner L, Czarske J (2009) Two-point correlation estimation of turbulent shear flows using a novel laser doppler velocity profile sensor. Flow Measurement and Instrumentation 20:252 – 263

Ölçmen S, Simpson R, Goody M (2001) An experimental investigation of two-point correlations in two- and three-dimensional turbulent boundary layers. Flow, Turbulence and Combustion 66(2):85–112

Peltier LJ, Hambric SA (2007) Estimating turbulent-boundary-layer wall-pressure spectra from cfd rans solutions. Journal of Fluids and Structures 23(6):920–937

Renard N, Deck S (2015) On the scale-dependent turbulent convection velocity in a spatially developing flat plate turbulent boundary layer at reynolds number $re_\theta = 13000$. Journal of Fluid Mechanics 775:105–148

Sherman CH, Ko SH, Buehler BG (1990) Measurement of the turbulent boundary layer wavevector spectrum. The Journal of the Acoustical Society of America 88(1):386–390

Sillero J, Jimenez J, Moser R (2014) Two-point statistics for turbulent boundary layers and channels at reynolds numbers up to $\delta^+ = 2000$. Physics of fluids 26(105109)

Slama M, Leblond C, Sagaut P (2018) A kriging-based elliptic extended anisotropic model for the turbulent boundary layer wall pressure spectrum. Journal of Fluid Mechanics 840:25–55

Tam W, Christopher K, Auriault L (1999) Jet mixing noise from fine-scale turbulence. AIAA journal 37(2):145–153

Trimis D, Melling A (1995) Improved laser doppler anemometry techniques for two-point turbulent flow correlations. Measurement Science and Technology 6(6):663

Tritton D (1967) Some new correlation measurements in a turbulent boundary layer. Journal of Fluid Mechanics 28(3):439–462

Chapitre 6

Modélisation corrigée

Ce chapitre a pour objectif de tirer profit de la campagne de mesure exposées au chapitre précédent dans le but d'améliorer le modèle pour Φ_{pp}. Cette amélioration porte sur la modélisation du terme source de l'équation de Poisson et consiste à proposer un modèle plus réaliste pour Φ_{vv} que celui issu du spectre de Von Kàrmàn en turbulence homogène isotrope. Cette amélioration se fait en considérant des échelles de longueurs de décorrélation différentes dans les directions longitudinale, transversale et normale. Ce chapitre est décomposé en trois parties. Premièrement, le nouveau modèle obtenu pour Φ_{vv} est dérivé analytiquement. Deuxièmement, le modèle de Φ_{pp} obtenu est comparé avec ceux établit précédemment en utilisant le diagramme à trois branches introduit au chapitre 4. Enfin, puisque les différents modèles de Φ_{pp} développés dans cette thèse ont des comportements radicalement différents par rapport à celui de Corcos aux hautes et basses fréquences, il est important d'étudier les fréquences limites à partir desquelles ces nouveaux phénomènes surviennent, afin de vérifier qu'elles sont compatibles ou non avec les ordres de grandeur des fréquences rencontrées en vibro-acoustique

6.1 Modification du modèle de Φ_{vv}

Le modèle homogène isotrope de Von Kàrmàn pour les fluctuations de vitesse normale s'écrit dans le domaine spatial et celui des nombres d'onde :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{VK}vv}(\mathbf{r}) &= A_{S\mathrm{VK}}\left\langle v'^2\right\rangle\left[2\left(k_e\left|r\right|\right)^{1/3}\mathrm{K}_{1/3}\left(k_e\left|r\right|\right) - k_e^{4/3}\frac{r_x^2+r_z^2}{\left|r\right|^{2/3}}\mathrm{K}_{2/3}\left(k_e\left|r\right|\right)\right]\\
A_{S\mathrm{VK}} &= \frac{2^{2/3}\Gamma\left(2/3\right)\sqrt{3}}{4\pi}\\
A_{S\mathrm{VK}} &\approx 0.296\\
\Phi_{\mathrm{VK}vv}(\mathbf{k}) &= A_{\Phi\mathrm{VK}}\frac{\langle v'^2\rangle}{k_e^3}\left(\frac{k_x^2+k_z^2}{k_e^2}\right)\left(1+\left(\mathbf{k}/k_e\right)^2\right)^{-17/6}\\
A_{\Phi\mathrm{VK}} &= \frac{55\sqrt{3\pi}\Gamma\left(3/2\right)\Gamma\left(5/6\right)}{9}\\
A_{\Phi\mathrm{VK}} &\approx 28.676
\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Lysak donne deux définitions différentes de $A_{\Phi\mathrm{VK}}$. Dans son article [Lysak 03] dédié à la modélisation de Φ_{vv} il utilise la valeur donnée dans la formule (6.1.1), conduisant à $S_{\mathrm{VK}vv}(0) = \left\langle v'^2\right\rangle$ tandis que dans [Lysak 06]dédié à la modélisation de

Φ_{pp} il utilise $A_{\Phi\mathrm{VKL}} = 3\pi^2$ qui est plus simple d'emploi. Il signale néanmoins dans [Lysak 06] que l'on a $A_{\Phi\mathrm{VK}}/A_{\Phi\mathrm{VKL}} \approx 0.97$ et donc que cette approximation peut être légitime.

La démonstration permettant de passer de $\Phi_{\mathrm{VK}vv}$ à $S_{\mathrm{VK}vv}$, ni même l'expression tridimensionnelle de $S_{\mathrm{VK}vv}$ n'ont pu être trouvées dans les ouvrages généraux de turbulence de la littérature. Le résultat le plus proche est donné par Hinze [Hinze 76] qui donne le spectre en énergie du modèle de Von Kàrmàn dans le domaine spatial et dans le domaine des nombres d'ondes, sans démonstration. C'est pourquoi nous allons donner ici les étapes de la démonstration. $S_{\mathrm{VK}vv}$ s'obtient à l'aide d'une transformée de Fourier tridimensionnelle inverse de $\Phi_{\mathrm{VK}vv}$. Ce calcul est délicat car $\Phi_{\mathrm{VK}vv}$ n'est pas une fonction sphérique de $\mathbf{k}$ puisqu'il manque le terme k_y^2 au numérateur. Calculer les transformées de Fourier une par une ne permet pas d'aboutir car les expressions se complexifient drastiquement à chaque étape. Seuls les résultats partiels $S_{\mathrm{VK}vv}(r_x, 0, 0)$, $S_{\mathrm{VK}vv}(0, r_y, 0)$ et $S_{\mathrm{VK}vv}(0, 0, r_z)$ peuvent être obtenus.

Il est néanmoins possible de se ramener au calcul d'une transformée de Fourier tridimensionnelle d'une fonction sphérique en échangeant multiplication et dérivation dans le calcul de la transformée de Fourier. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
(2\pi)^3 S_{\mathrm{VK}vv}(\mathbf{r}) &= \int \Phi_{\mathrm{VK}vv}(\mathbf{k})\, e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{k} \\
&= A_{\Phi\mathrm{VK}} \frac{\langle v'^2 \rangle}{k_e^3} \int \left(\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_e^2} \right) \left(1 + (\mathbf{k}/k_e)^2\right)^{-17/6} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{k} \\
&= -A_{\Phi\mathrm{VK}} \frac{\langle v'^2 \rangle}{k_e^5} \left[\frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_z^2} \right] \left(\int \left(1 + (\mathbf{k}/k_e)^2\right)^{-17/6} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{k} \right)
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Nous venons ainsi de faire apparaitre la transformée de Fourier d'une fonction sphérique qui ne nécessite qu'une seule intégration :

$$\begin{aligned}
\int \left(1 + (\mathbf{k}/k_e)^2\right)^{-17/6} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{k} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \left(1 + (k/k_e)^2\right)^{-17/6} \frac{k^2}{kr} \sin(kr)\, \mathrm{d}k \\
&= \frac{9 k_e^{10/3} 2^{2/3} r^{1/3}}{220 \pi^{3/2} \Gamma(5/6)} \left(r k_e \mathrm{K}_{2/3}(r k_e) + \frac{2}{3} \mathrm{K}_{2/3}(r k_e) \right)
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Il est alors possible par double dérivation d'obtenir les résultats donnés dans la formule (6.1.1).

Le modèle de Von Kàrmàn possède deux échelles de longueurs intégrales : Λ_y pour la direction normale, $\Lambda_x = \Lambda_z$ pour les directions longitudinale et transversale. Ces longueurs peuvent être calculées en fonction de k_e par intégration puisque par définition $\Lambda_i = \int S_{vv}(x_i) / S_{vv}(0)\, \mathrm{d}x_i$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\Lambda_x k_e = \Lambda_z k_e &= \frac{3 \left(\Gamma(2/3)\right)^3 2^{1/3}}{8\pi} \\
&\approx 0.373 \\
\Lambda_y &= 2\Lambda_x = 2\Lambda_z \\
&\approx 0.747/k_e
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

La campagne de mesures de fluctuations de vitesses turbulentes a permi de mettre en évidence que même au sein d'un écoulement cisaillé, le modèle isotropique de Von Kàrmàn avait une certaine légitimité. Il a en effet été montré que :

$$\begin{aligned} S_{vv}\left(r_x/\Lambda_x,0,0\right) &\approx S_{\mathrm{VK}vv}\left(r_x/\Lambda_{VKx},0,0\right) \\ S_{vv}\left(0,r_{yp}/\Lambda_{yp},0\right) &\approx S_{\mathrm{VK}vv}\left(0,r_{yp}/\Lambda_{VKy},0\right) \\ S_{vv}\left(0,r_{ym}/\Lambda_{ym},0\right) &\approx S_{\mathrm{VK}vv}\left(0,r_{ym}/\Lambda_{VKy},0\right) \\ S_{vv}\left(0,0,r_z/\Lambda_z\right) &\approx S_{\mathrm{VK}vv}\left(0,0,r_z/\Lambda_{VKz}\right) \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

avec $r_{yp} \geq 0$, $r_{ym} \leq 0$ et les différents Λ_i représentant les échelles intégrales dans les différentes directions. Nous rappelons que si le modèle de Von Kàrmàn est isotrope, cela ne signifie pas pour autant que $\mathbf{r} \to S_{\mathrm{VK}vv}(\mathbf{r})$ est une fonction sphérique.

Une version améliorée de ce modèle doit être capable de prendre en compte des échelles de longueurs caractéristiques différentes dans chacune des trois directions. La modification du modèle va se faire en deux temps :

— on considèrera trois longueurs caractéristiques : Λ_x, Λ_y et Λ_z pour le modèle de Von Kàrmàn ;

— on considèrera quatre longueurs caractéristiques : $\Lambda_x, \Lambda_z, \Lambda_{yp}$ et Λ_{ym} afin de prendre en compte l'effet de blocage due à la présence de la paroi en différenciant les cas $r_y \geq 0$ et $r_y \leq 0$.

6.1.1 Modèle à trois longueurs caractéristiques M3L

L'élaboration de ce premier modèle modifié va être très formelle puisqu'elle consiste à remplacer respectivement $k_x/k_e, k_y/k_e$ et k_z/k_e par $k_x l_x, k_y l_y$ et $k_z l_z$ dans l'expression de Φ_{vv} donnée dans la formule (6.1.1). Il faut alors s'assurer que la constante de normalisation conduit bien à $S_{\mathrm{VK}vv}(0) = \left\langle v'^2 \right\rangle$, ce qui est équivalent à $\int \Phi_{vv}(\mathbf{k})\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,(2\pi)^3 = \left\langle v'^2 \right\rangle$. Ces nouveaux modèles seront notés S_{vv3l} et Φ_{vv3l} et on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{vv3l}(\mathbf{k}) &= A_{\Phi 3l}\left\langle v'^2 \right\rangle l_x l_y l_z \left((k_x l_x)^2 + (k_z l_z)^2\right)\left(1 + (k_x l_x)^2 + (k_y l_y)^2 + (k_z l_z)^2\right)^{-17/6} \\ A_{\Phi 3l} &= A_{\Phi \mathrm{VK}} \\ S_{vv3l}(\mathbf{k}) &= A_{S3l}\left\langle v'^2 \right\rangle \left[2\left|\mathbf{r}_l\right|^{1/3}\mathrm{K}_{1/3}\left(\left|\mathbf{r}_l\right|\right) - \frac{\left(\frac{r_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{r_z}{l_z}\right)^2}{\left|\mathbf{r}_l\right|^{2/3}}\mathrm{K}_{2/3}\left(\left|\mathbf{r}_l\right|\right)\right] \\ \mathbf{r}_l &= \left(r_x/l_x, r_y/l_y, r_z/l_z\right) \\ A_{S3l} &= A_{S\mathrm{VK}} \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Ce modèle possède trois échelles intégrales de longueur, une par direction de l'espace, qui peuvent être calculées en fonction de l_x, l_y et l_z :

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{x3l}}{l_x} = \frac{\Lambda_{z3l}}{l_z} = \frac{2\Lambda_{y3l}}{l_y} &= \frac{3\left(\Gamma\left(2/3\right)\right)^3 2^{1/3}}{8\pi} \\ &\approx 0.373 \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

La démarche permettant de construire un modèle anisotrope en intégrant une échelle de longueur par direction d'espace a déjà été utilisé par de nombreux auteurs, notamment Peltier et Hambric [Peltier 07] et Slama *et al.* [Slama 18] qui utilisent des modèles différents pour le spectre en énergie. On note toutefois que ces auteurs travaillent uniquement dans le domaine spatial et jamais dans celui des nombres-d'ondes.

6.1.2 Modèle à quatre longueurs caractéristiques M4L

Le modèle anisotrope M3L développé ci-avant ne permet pas de prendre en compte l'effet de blocage dû à la présence de la paroi. Nous proposons donc de le modifier en intégrant deux longueurs distinctes dans la direction normale : l_{yp} pour $r_y \geq 0$ et l_{ym} pour $r_y \leq 0$. Ces modèles seront notés S_{vv4l} et Φ_{vv4l}. Le modèle S_{vv4l} s'exprime très facilement en fonction des modèles S_{vv3lp} utilisant les longueurs l_x, l_{yp} et l_z et S_{vv3lm} utilisant les longueurs l_x, l_{ym} et l_z. Si l'on note H la distribution de Heaviside, on a :

$$S_{vv4l}(\mathbf{r}) = \mathrm{H}(r_y)\, S_{vv3lp}(\mathbf{r}) + \mathrm{H}(-r_y)\, S_{vv3lm}(\mathbf{r}) \tag{6.1.8}$$

Pour obtenir le modèle pour Φ_{vv4l}, il suffit théoriquement de prendre la transformation de Fourier tridimensionnelle de S_{vv4l}, qui est beaucoup plus complexe que celle permettant de passer de S_{vv3l} à Φ_{vv3l} puisque le caractère sphérique est totalement perdu et que l'on doit effectuer deux transformations monolatères dans la direction normale plutôt qu'une seule bilatère. Le calcul peut être décomposé en quatre étapes :

1. on part de $\Phi_{vv3lp}(\mathbf{k})$ dont on prend la transformée de Fourier inverse bilatère dans la direction normale ;
2. on réalise alors une transformée de Fourier monolatère dans la direction normale pour $y \geq 0$;
3. on traite le cas $y \leq 0$ par symétrie Hermitienne de la transformée de Fourier ;
4. on assemble les résultats issus des deux calculs précédents.

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_{vv4l}(\mathbf{k})}{A_{\Phi 4l}} &= \frac{k_2^2 l_x l_z}{2}\left(M_{1m} + M_{1p}\right) \\
&+ \frac{k_2^2 2^{17/3} \pi l_x l_z k_y j}{495\left(\Gamma(2/3)\right)^3 \left(k_2^2+1\right)^{10/3}} \left[\frac{-\frac{19}{3}k_y^2}{\left(k_2^2+1\right)}\left(M_{2m} - M_{2p}\right) + 7\left(M_{3m} - M_{3p}\right)\right] \\
M_1 &= l_y \left(k_y^2 l_y^2 + k_2^2 + 1\right)^{-\frac{17}{6}} \\
M_2 &= \frac{\left(k_2^2 + \frac{8}{19}k_y^2 l_y^2 + 1\right) l_y^4}{\left(k_y^2 l_y^2 + k_2^2 + 1\right)} \mathrm{F}_2\left(\frac{k_y^2 l_y^2}{k_2^2+1}\right) \\
M_3 &= \frac{k_2^2 + \frac{4}{7}k_y^2 l_y^2 + 1}{k_y^2 l_y^2 + k_2^2 + 1} l_y^2 \mathrm{F}_1\left(\frac{k_y^2 l_y^2}{k_2^2+1}\right) \\
\mathrm{F}_1(x) &= {}_2\mathrm{F}_1\left(\left[1, \frac{4}{3}\right], \frac{3}{2}, -x\right) \\
\mathrm{F}_2(x) &= {}_2\mathrm{F}_1\left(\left[2, \frac{7}{3}\right], \frac{5}{2}, -x\right) \\
k_2^2 &= \left(k_x l_x\right)^2 + \left(k_z l_z\right)^2
\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Les fonctions ${}_2\mathrm{F}_1([a,b], c, x)$ sont les fonctions hypergéométriques définies comme le prolongement analytique en dehors du disque unité de l'unique solution développable en série entière de l'équation différentielle de Gauss :

$$x(1-x)\, y'' + (c - (a+b+1)\, x)\, y' - aby = 0 \tag{6.1.10}$$

La théorie de ces fonctions spéciales ne sera pas développée ici et on pourra consulter les ouvrages spécialisés de Gauss [Gauss 24], Kampé de Fériet [De Fériet 37] et Abramowitz *et al.* [Abramowitz 64] pour avoir une présentation théorique de ces fonctions ainsi que Luke [Luke 69] pour leur évaluation numérique. On notera simplement que la fonction F_1 est équivalente à un filtre passe-bas du premier ordre tandis que la fonction F_2 est un filtre passe-bas du second ordre.

A l'aide de la contrainte $\mathrm{F}_1(0) = \mathrm{F}_1(0) = 1$ et de développements asymptotiques, on peut construire à titre indicatif les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_1(x) &\approx \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} \\ \mathrm{F}_2(x) &\approx \frac{1}{1+\frac{16}{27}x^2} \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Ces fonctions spéciales ne peuvent être exprimées avec des fonctions plus connues comme celles de Bessel par exemple. On notera que les termes les comportant disparaissent lorsque $l_{ym} = l_{yp}$.

6.1.3 Bilan

Quatre modèles de $\Phi_{pp}(\mathbf{k},\omega)$ ont été développé durant cette thèse. Le modèle LMA correspond à une modification du terme fréquentiel du modèle élaboré par Lysak et Aupoix. Le modèle M1L correspond à une résolution de l'équation de Poisson différente de celle employée par Lysak et Aupoix en se passant des hypothèses simplificatrices de Lysak portant sur $\Phi_{qq}(\mathbf{k},\omega)$. La partie fréquentielle de ce modèle est, tout comme le modèle LMA, décrite par une distribution de Cauchy. Une seule longueur caractéristique est utilisée pour décrire la décorrélation des fluctuations de la composante verticale de la vitesse, d'où le nom M1L, pour une longueur. Les modèles M3L et M4L utilisent respectivement trois et quatre longueurs caractéristiques pour la décorrélation des fluctuations de la composante verticale de la vitesse, d'où leurs noms. Les formulations de ces modèles sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\Phi_{pp,\mathrm{LMA}}(\mathbf{k},\omega) &= \int \frac{e^{-2r_{1y}|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}^2} 4\rho^2 \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}(r_{1y})\right)^2 \Phi_{vv,\mathrm{VK}}[r_{1y}](\mathbf{k},\omega)\, f(\omega)\, \mathrm{d}r_{1y} \\
\Phi_{pp,\mathrm{M1L}}(\mathbf{k},\omega) &= \iint \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-2r_{1y}|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}^2} 4\rho^2 \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}(r_{1y})\right)^2 \Phi_{vv,\mathrm{VK}}[r_{1y}](\mathbf{k},\omega)\, f(\omega)\, g(\mathbf{k})\, \mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y \\
\Phi_{pp,\mathrm{M3L}}(\mathbf{k},\omega) &= \iint \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-2r_{1y}|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}^2} 4\rho^2 \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}(r_{1y})\right)^2 \Phi_{vv,3L}[r_{1y}](\mathbf{k},\omega)\, f(\omega)\, g(\mathbf{k})\, \mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y \\
\Phi_{pp,\mathrm{M4L}}(\mathbf{k},\omega) &= \iint \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-2r_{1y}|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}^2} 4\rho^2 \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}(r_{1y})\right)^2 \Phi_{vv,4L}[r_{1y}](\mathbf{k},\omega)\, f(\omega)\, g(\mathbf{k})\, \mathrm{d}r_{1y}\mathrm{d}k_y \\
g(\mathbf{k}) &= \frac{e^{-r_{1y}(|\mathbf{k}|+jk_y)}}{\mathbf{k}^2}\frac{1}{|\mathbf{k}|-jk_y} \\
f(\omega) &= 2\pi\frac{\tau_s(r_{1y})/\pi}{1+\left([\omega+k_xU(r_{1y})]\,\tau_s(r_{1y})\right)^2}
\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

6.2 Application

Les trois modèles LMA, M1L et M4L vont être comparés d'un point de vue quantitatif. Le modèle M3L ne présente d'intérêt que pour la construction du modèle M4L et ne sera donc pas intégré aux comparaisons. Le principal outil utilisé pour comparer ces modèles sera le diagramme introduit dans le chapitre 4 et qui étudie la position des maxima de $k_x \to \Phi_{pp}(k_x, 0, \omega)$ pour une pulsation ω donnée. Trois analyses vont être proposées :

1. localisation des maxima dans le plan (k_x, ω) ;
2. évolution de l'amplitude de $\Phi_{pp}(k_x, \omega)$ le long des différentes branches données par le diagramme et localisation du maximum global pour une pulsation donnée ;
3. étude de la largeur du pic associé à chaque maximum.

Les trois modèles vont être mis en œuvre sur une couche limite turbulente définie par $U_e = 50\,\mathrm{ms}^{-1}$ et $\mathcal{R}_\theta = 8500$ et pour des pulsations $\omega \in [10; 10^6\,\mathrm{rad.s}^{-1}]$. Il est entendu que ces valeurs n'ont pas nécessairement de sens physique vis-à-vis des pulsations caractéristiques de la turbulence. Ces valeurs ont été choisies afin d'atteindre les tendances asymptotiques du modèle en hautes et basses fréquences.

Les quatre longueurs caractéristiques sont modélisées par :

$$\begin{aligned}
\frac{l_x}{\delta}(y) &= 0.14 \\
\frac{l_z}{\delta}(y) &= \frac{y}{\delta}\left(0.5084 - 1.0917\frac{y}{\delta} + 0.7837\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right) \\
\frac{l_{yp}}{\delta}(y) &= 0.15 \\
\frac{l_{ym}}{\delta}(y) &= \frac{y}{\delta}\left(0.6465 - 1.2357\frac{y}{\delta} + 1.0790\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Cette modélisation directement basée sur les longueurs intégrales déduites des mesures LDV. La figure 6.2.1 présente à la fois les longueurs issues des mesures et celles issue de l'équation (6.2.1). Le comportement de l_x au voisinage de la paroi est fortement discutable et devrait tendre vers 0 comme l_z et l_{ym}.

Une nouvelle définition de τ_S va également être testée. Les mesures LDV ont montré que $\tau_S = 5.25/\omega_t$ convenait mieux que $\tau_S = 4.2/\omega_t$ comme le montre la figure 6.2.2.

Cinq modèles vont être comparés :

1. le modèle LMA avec $\tau_S = 4.2/\omega_t$;
2. le modèle LMA avec $\tau_S = 5.25/\omega_t$
3. le modèle M1L avec $\tau_S = 4.2/\omega_t$
4. le modèle M1L avec $\tau_S = 5.25/\omega_t$
5. le modèle M4L avec $\tau_S = 5.25/\omega_t$

Afin de ne pas surcharger les figures à venir avec des légendes trop importantes, le code couleur suivant va être utilisé pour les figures 6.2.3, 6.2.4, 6.2.6 et 6.2.7 :

Une branche supplémentaire par rapport au chapitre 4 a été mise en évidence. Cette branche avait été laissée de côté car elle ne porte jamais le maximum global de $k_x \to \Phi_{pp}(k_x, 0, \omega)$. Il est néanmoins nécessaire de l'intégrer dès lors qu'on veut étudier la largeur des pics associés à chaque maximum. En effet, sans cela, les

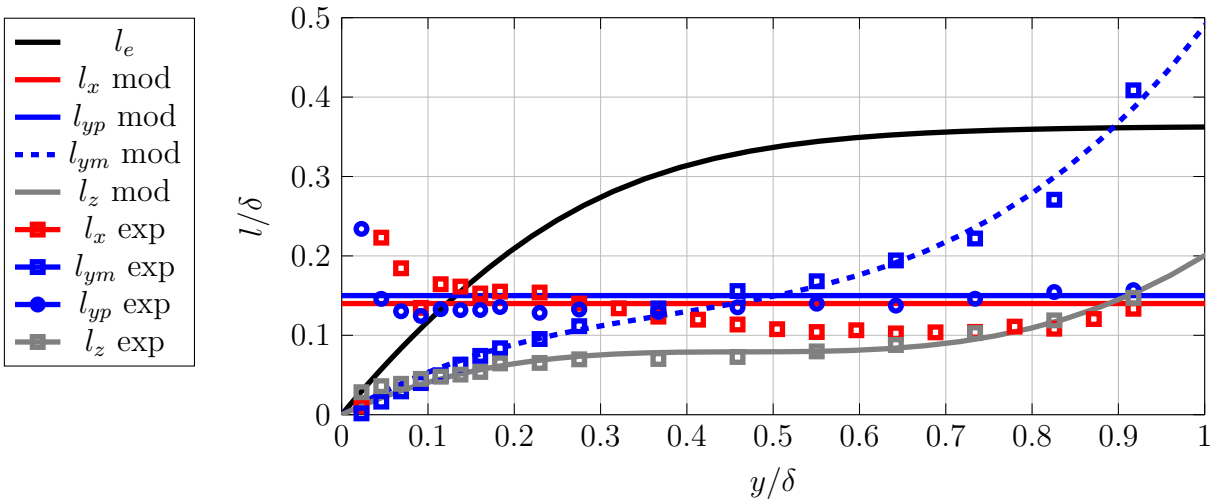


FIGURE 6.2.1 – Définitions des longueurs caractéristiques de décorrélation l_x, l_{ym}, l_{yp} et l_z

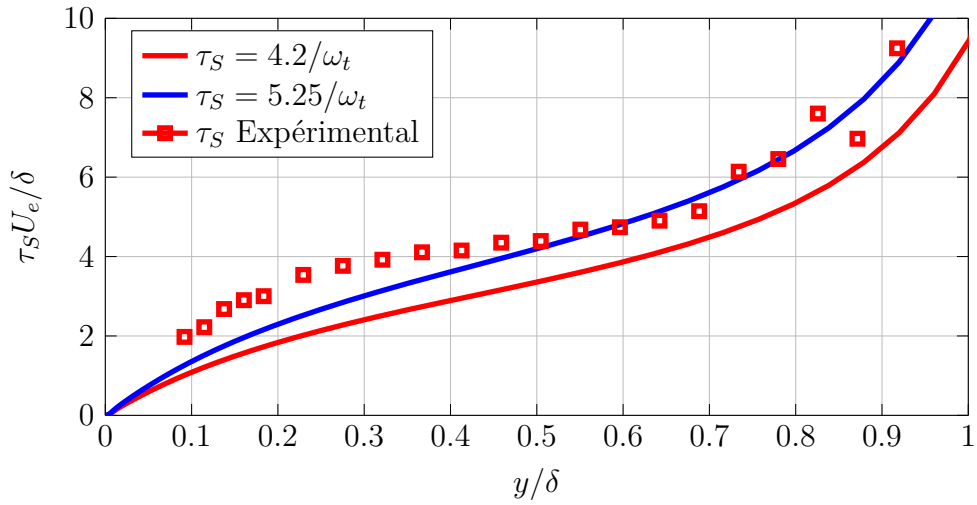


FIGURE 6.2.2 – Définition du temps caractéristique de décorrélation τ_S

pics peuvent être élargis artificiellement. Le diagramme à trois branches est donc renommé diagramme à quatre branches.

6.2.1 Localisation des maxima

Les figures 6.2.3 et 6.2.4 présentent la localisation des maxima du diagramme à quatre branches. Le principal constat que l'on peut faire est qu'il y a peu de différences entre les modèles LMA et M1L. La modification de la constante définissant τ_S n'a pas d'influence pour les hautes fréquences et a une très légère influence pour les basses fréquences. Son principal effet est de déplacer l'extrémité de la branche advection.

Le modèle M4L présente des différences aux hautes et basses fréquences. Les régimes asymptotiques des branches miroir, bifurcation et advection tendent vers des nombres-d'ondes plus grands en modules que les autres modèles. En dépit de ces différences, un comportement similaire au modèle de Corcos est également observable avec ce modèle. Cependant la plage fréquentielle pour laquelle cette similarité

Modèle	LMA		M1L		M4L	Corcos
Constante τ_S	4.2	5.25	4.2	5.25	4.2	
Courbe						
Symbole						

TABLE 6.1 – Code couleur pour les figures 6.2.3, 6.2.4, 6.2.6 et 6.2.7

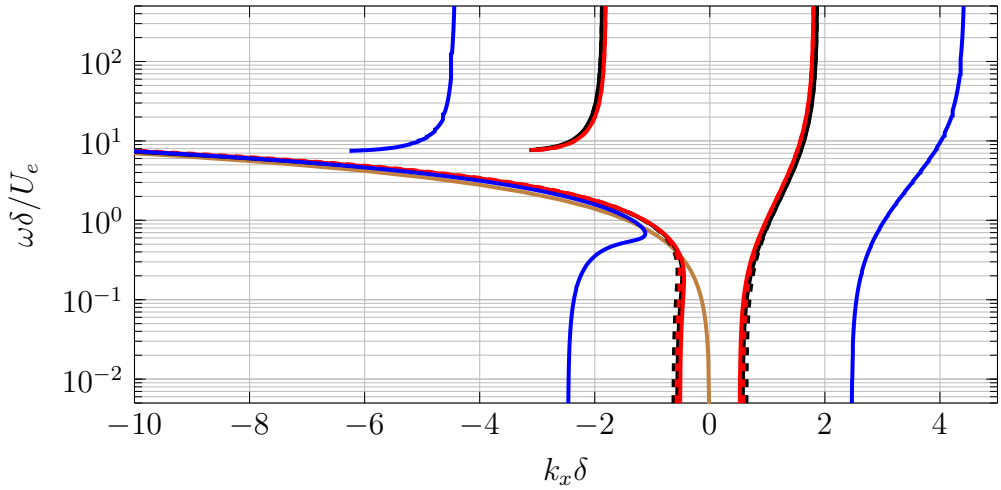


FIGURE 6.2.3 – Diagramme à quatre branches, comparaison des modèles Corcos, LMA, M1L et M4L, centré sur les branches Miroir et Bifurcation

existe est plus réduite que pour les modèles LMA et M1L. Enfin, le modèle M4L ne présente pas de branche supplémentaire.

En chaque point du plan (k_x, ω), il est possible d'associer une vitesse de phase définie par $\omega = U_\phi |k_x|$. Le modèle de Corcos est d'ailleurs défini par $U_\phi = 0.7U_e$. On note que pour la branche convective, les vitesses de phases sont semblables d'un modèle à l'autre et sont très proches de celle donnée par Corcos.

On peut conclure que les améliorations apportées au modèle M1L et la modification de la définition de τ_S n'apportent que peu de changements quant à la localisation des maxima. En revanche, le modèle M4L présente des changements. Sans remettre en cause la topologie du diagramme à quatre branches, des différences sur la localisation des points caractéristiques sont notables à cause des nouvelles longueurs caractéristiques introduites.

6.2.2 Évolution des amplitudes le long des branches

La figure 6.2.5 présente l'évolution de l'amplitude le long des branches pour le modèle LMA. Cette figure sert d'introduction aux figures 6.2.6 et 6.2.7 où les modèles LMA, M1L et M4L sont comparés.

On retrouve sur la figure 6.2.5 le scénario déjà décrit dans le chapitre 4.

Pour les basses pulsations, seules les branches miroir et advection existent et elles ont la même amplitude. Ces branches se séparent pour $\omega\delta/U_e \geq 0.05$. L'amplitude de la branche advection devient prépondérante devant celle de la branche miroir. Le modèle LMA se comporte alors comme celui de Corcos.

La branche bifurcation émerge aux alentours de $\omega\delta/U_e \approx 10$. Son amplitude est initialement moindre que celle de la branche advection. Elle devient prépondérante aux alentours de $\omega\delta/U_e \approx 30$. A partir de cette pulsation, la branche miroir a alors

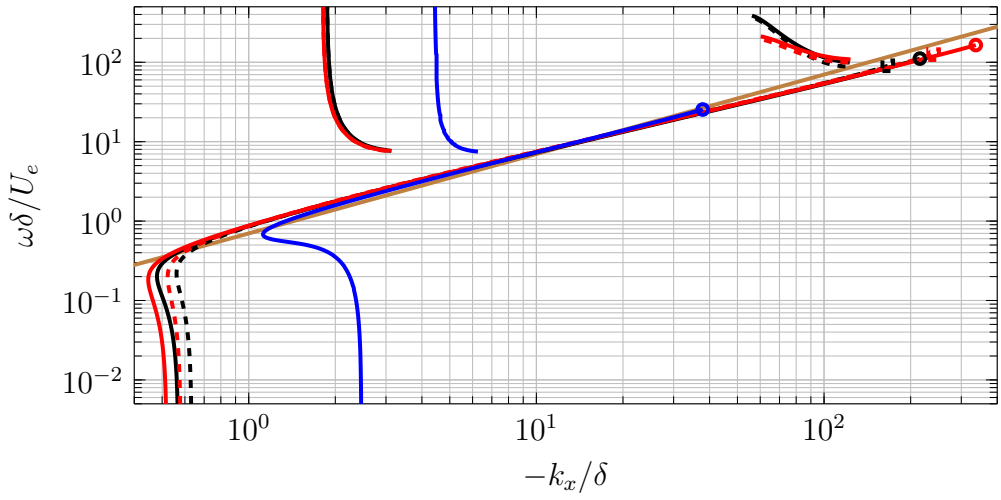


FIGURE 6.2.4 – Diagramme à quatre branches, comparaison des modèles Corcos, LMA, M1L et M4L, centré sur les branches Advection, Supplémentaire et Bifurcation.Les extrémités des branches advections sont représentées par les symboles donnés à la table 6.1

une amplitude égale à celle de la branche bifurcation.

Enfin pour $\omega\delta/U_e \leq 100$, la branche advection cesse d'exister et on assiste à la naissance de la branche supplémentaire. Néanmoins, son amplitude reste bien plus faible que celle des branches bifurcation et miroir ce qui explique qu'elle est absente du chapitre 4.

Les figures 6.2.6 et 6.2.7 comparent les modèles LMA, M1L et M4L. La représentation logarithmique ne permet pas de déceler de différences entre les modèles LMA et M1L et les différentes constantes utilisées pour définir τ_S.

En revanche, le modèle M4L a un comportement différent. Pour les basses fréquences, les amplitudes des branches miroir et advection sont d'un ordre de grandeur inférieures à celles des autres modèles. L'inverse se produit pour les hautes fréquences : les amplitudes des branches miroir et bifurcation sont d'un ordre de grandeur supérieures à celles des autres modèles. On note également que l'amplitude maximale de la branche advection du modèle M4L survient pour une pulsation plus importante que pour les autres modèles.

6.2.3 Largeur des pics du diagramme à quatre branches

Localiser les maxima du diagramme à quatre branches et connaitre les amplitudes associées ne donne qu'une vision partielle. Afin de la compléter, il est nécessaire de connaitre la largeur de ces pics. Cette information est importante pour le couplage avec la vibro-acoustique. En effet, pour une pulsation ω donnée, un pic très étroit n'excitera efficacement qu'un nombre réduit de modes de la structure tandis qu'à l'inverse, un pic plus large excitera un nombre important de modes.

Les pics seront mesurés à l'aide des largeurs à mi-hauteur k_{x05m} et k_{x05p} définies par :

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}\left(k_{xm},\omega\right) &= \max_{k_x}\left(\Phi_{pp}\left(k_{xm},\omega\right)\right) \\ \Phi_{pp}\left(k_{x05m},\omega\right) &= \Phi_{pp}\left(k_{xm},\omega\right)/2 \\ \Phi_{pp}\left(k_{x05p},\omega\right) &= \Phi_{pp}\left(k_{xm},\omega\right)/2 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

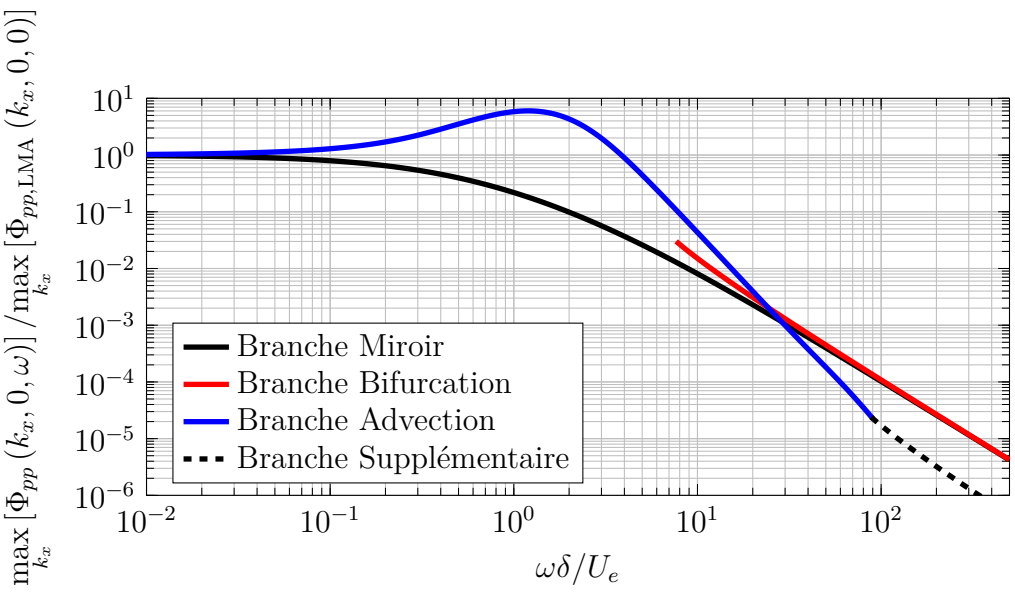


FIGURE 6.2.5 – Amplitude le long des quatre branches, comparaison du modèle LMA, représentation logarithmique.

avec k_{xm} la localisation du maximum du pic et $k_{x05m} \leq k_{xm} \leq k_{x05p}$. Si pour une pulsation donnée, il n'existe qu'une seule branche, alors les deux largeurs à mi-hauteur k_{x05m} et k_{x05p} seront toujours bien définies. En revanche, s'il existe deux branches et que leurs maxima sont resserrés, il peut être impossible de définir les largeurs à mi-hauteur entre les deux pics.

Afin de ne pas surcharger les figures, seuls les modèles LMA avec $\tau_S = 4.2/\omega_t$ et M4L avec $\tau_S = 5.25/\omega_t$ vont être comparés ici. En effet, tous les autres cas sont extrêmement similaires à celui du modèle LMA avec $\tau_S = 4.2/\omega_t$ comme on l'a montré précédemment avec la localisation des maxima.

Les figures 6.2.8a et 6.2.8b présentent les largeurs associées aux branches miroir, advection et bifurcation tandis que les figures 6.2.9a et 6.2.9b présentent les largeurs associées aux branches advection, bifurcation et supplémentaire.

On peut noter qu'en plus d'être situés à des nombres d'onde plus importants, les pics du modèles M4L sont environs deux fois plus larges que ceux du modèle LMA. De plus, comme le confirme la figure 6.2.7, la transition entre les branches advection et bifurcation s'effectue à une pulsation plus faible pour le modèle M4L que pour le modèle LMA.

Les largeurs à mi-hauteur du modèle de Corcos peuvent être calculées analytiquement :

$$\begin{aligned} k_{x05m} &= -\left(1+\alpha\right)k_c \\ k_{05p} &= -\left(1-\alpha\right)k_c \\ k_c &= \omega/U_e \\ \alpha &= 0.116 \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

La largeur du pic associé au modèle de Corcos tend donc vers 0 pour les basses pulsations tandis qu'elle reste non nulle pour les branches advection et miroir. Le pic associé au modèle de Corcos est toujours plus étroit que ceux associés aux branches advection et supplémentaire et il ne s'évase pas aux hautes fréquences.

Deux conclusions peuvent être tirées de l'observation des largeurs des pics. Les branches miroir et bifurcation ont une largeur étroite. Dans l'optique d'un couplage

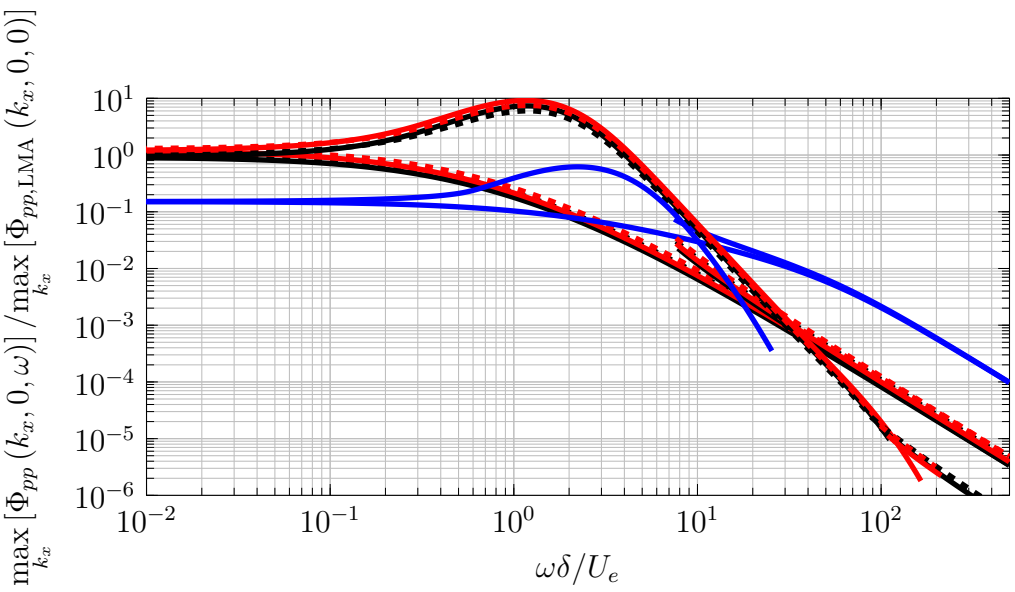


FIGURE 6.2.6 – Amplitude le long des quatre branches, comparaison des modèles LMA, M1L et M4L, représentation logarithmique

avec de la vibro-acoustique, il sera donc facile de les éviter en pratique en choisissant judicieusement les modes propres de la structure. En revanche, le pic de la branche advection est plus large que celui de Corcos ; plus de modes seront excités par ce mécanisme. Ces conclusions doivent être relativisées par le fait qu'elles ne reposent actuellement que sur un modèle théorique qui n'a pas été validé expérimentalement.

6.3 Applicabilité des modèles développés

Les modèles LMA, M1L et M4L présentent tous des phénomènes radicalement différents aux hautes et basses fréquences par rapport au modèle de Corcos. Il faut néanmoins s'assurer que les fréquences à partir desquelles ces nouveaux phénomènes surviennent sont compatibles avec une application vibro-acoustique. En pratique, cela signifie que les fréquences doivent être contenues dans le domaine audible défini par la bande $[20; 20\,\mathrm{kHz}]$.

Pour étudier cela, nous allons nous intéresser à la pulsations des points E et F du diagramme à trois branches introduits dans le chapitre 4 et sur la figure 7 de l'article publié dans le Journal of Fluids Engineering [Morilhat 19]. Nous rappelons que le point E correspond à l'émergence de la branche bifurcation tandis que le point F délimite la fin du régime advectif de la branche advection. La section précédente a montré qu'il n'y avait pas de différences notables entre les deux modèles LMA et M1L lorsqu'ils étaient comparés à l'aide du diagramme à trois branches. La constante définissant τ_S n'a également qu'un faible impact sur la localisation des points E et F. En revanche, le modèle M4L présente des différences notables puisque la plage fréquentielle où il coïncide avec le modèle de Corcos est plus réduite, à la fois pour les hautes et les basses fréquences. Par conséquent, en étudiant uniquement l'applicabilité du modèle LMA, on traite un cas plus restrictif que celui du modèle M4L. C'est pourquoi seul le modèle LMA sera traité ici.

Nous rappelons qu'en compilant un millier de couche limites turbulentes définies par $U_e \in [20; 50]\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et $R_\theta \in [2.10^3; 4.10^4]$, des formules empiriques ont étés établies donnant la pulsation et le nombre d'onde des points remarquables du dia-

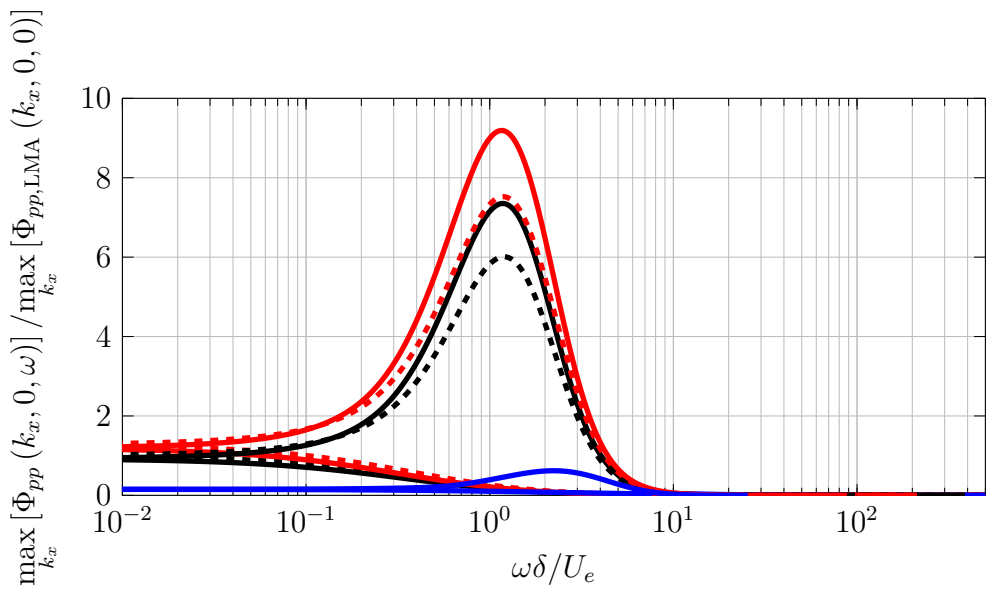


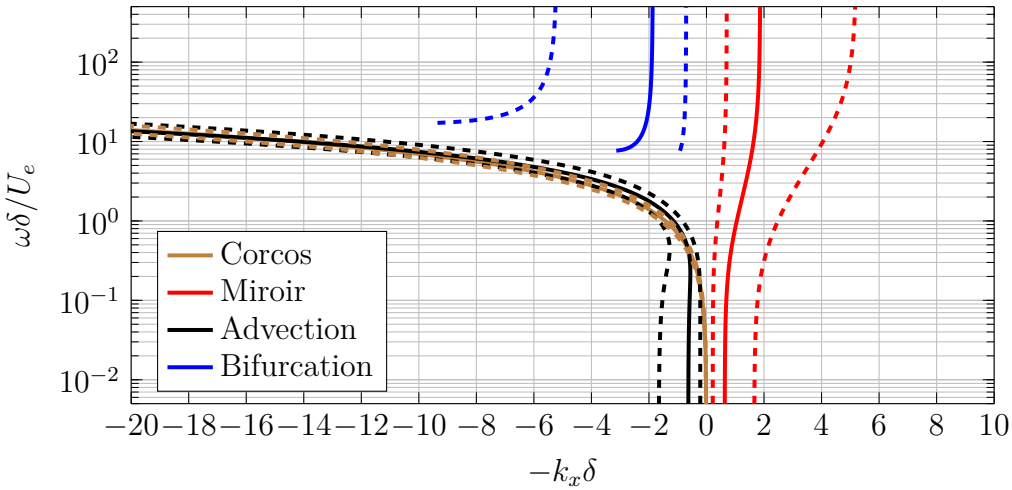
FIGURE 6.2.7 – Amplitude le long des quatre branches, comparaison des modèles LMA, M1L et M4L, représentation semi-logarithmique.

gramme. Ces formules vont être utilisées afin de déterminer les fréquences des points E et F pour des couches limites définies par $M \in [0; 0.5]$ et $R_\theta \in [1.10^3; 4.10^4]$ ce qui est caractéristique des couches limites faiblement subsoniques rencontrées sur les aéronefs.

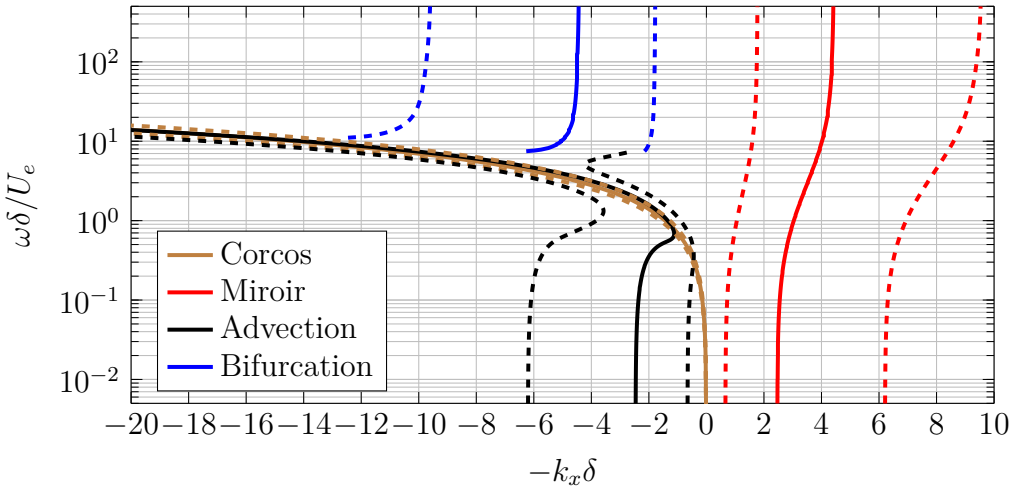
La figure 6.3.1a présente les iso-fréquences du point F tandis que la figure 6.3.1b présente les iso-fréquences du point E. On peut constater qu'une large région du plan Mach-Reynolds est contenu dans le domaine audible, ce qui indique que les modèles développés ont bien un intérêt pour une application vibro-acoustique.

En plus des limites d'audibilité, des limites de compressibilité doivent être ajoutées. En effet, l'équation de Poisson a été établie dans un contexte incompressible ; on ne peut donc pas traiter de couche limite dont les profils sont impactés par les effets compressibles. Il est communément admis que cela est vérifié pour les couches limites dont le nombre de Mach basé sur la vitesse externe est inférieur à 0.3. De plus, il est possible de définir dans le plan (k_x, ω) un cône acoustique par $|\omega| = c\,|k_x|$. Les phénomènes à l'intérieur de ce cône relèvent de l'acoustique et non plus uniquement de la turbulence. Les prévisions des modèles LMA, M1L et M4L ne doivent donc pas être pris en compte dans cette région du plan.

La figure 6.3.2 permet de faire un bilan de l'applicabilité du modèle LMA en représentant les limites d'audibilité et de compressibilité. Le cône acoustique est représenté par le lieu des couches limites telles que la vitesse de phase ω_E/k_E associée au point E soit égale à la vitesse du son. On constate que cette contrainte est moins restrictive que celle d'incompressibilité de la couche limite. Malgré cette contrainte, il reste une large portion du plan Mach-Reynolds où les nouveaux comportements des modèles LMA, M1L et M4L sont susceptibles d'avoir un impact pour une application vibro-acoustique.

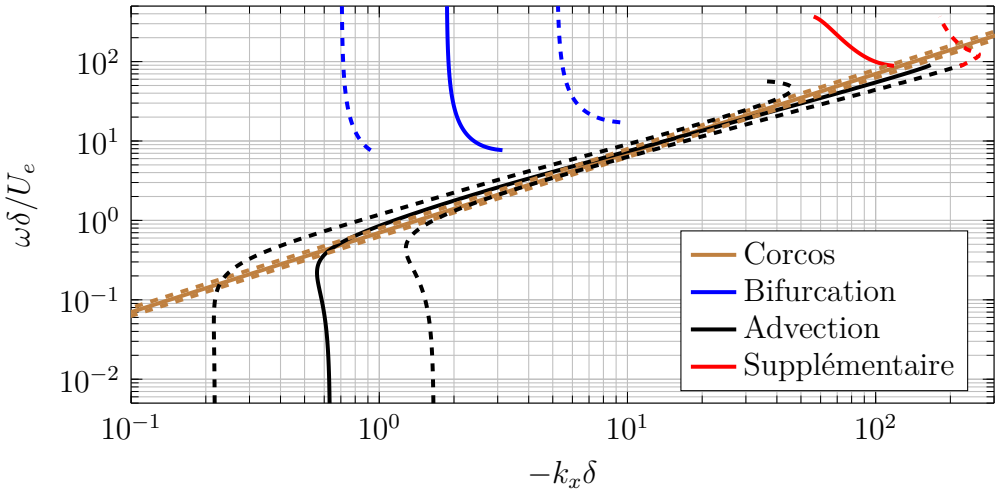


(a) Modèle LMA

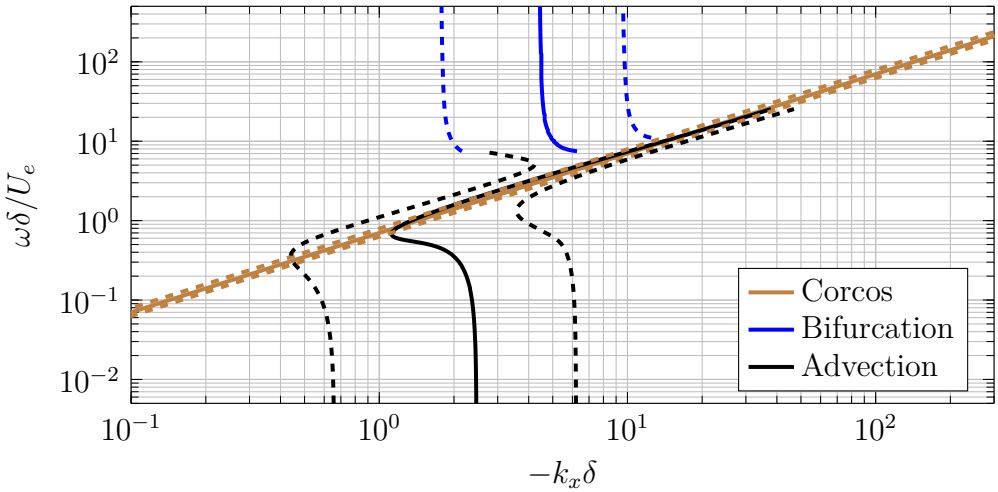


(b) Modèle M4L

FIGURE 6.2.8 – Maxima et largeurs à mi-hauteur des branches miroir, advection et bifurcation, comparaison avec le modèle de Corcos.

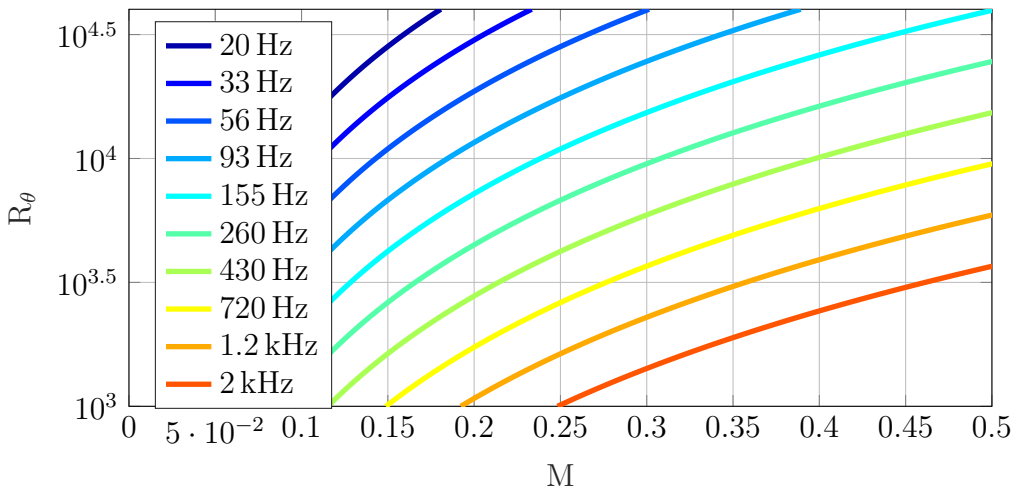


(a) Modèle LMA

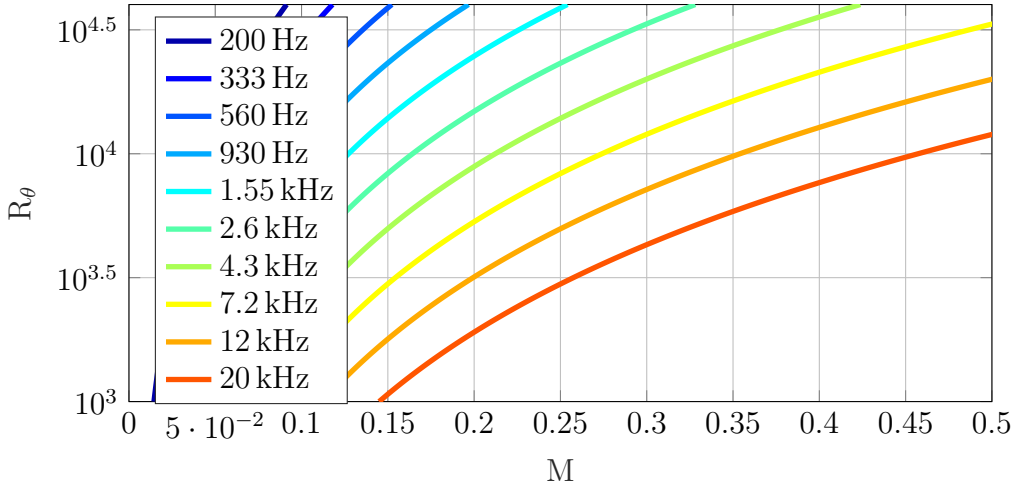


(b) Modèle M4L

FIGURE 6.2.9 – Maxima et largeurs à mi-hauteur des branches advection et bifurcation et supplémentaire, comparaison avec le modèle de Corcos.



(a) Point F



(b) Point E

FIGURE 6.3.1 – Iso-fréquences du modèle LMA

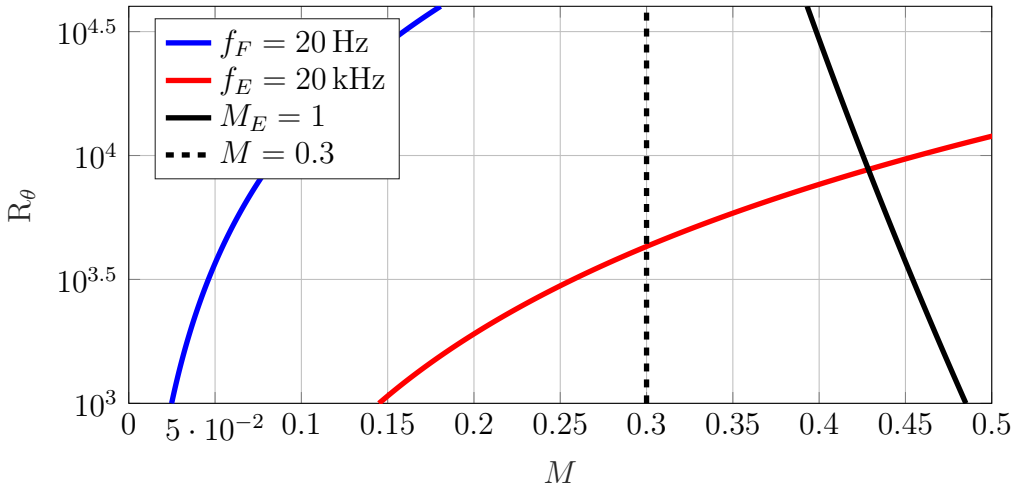


FIGURE 6.3.2 – Bilan d'applicabilité du modèle LMA

Conclusion

Rappel des objectifs

L'objectif de cette thèse était d'étudier la génération de bruit émis par une structure en vibration excitée par une couche limite turbulente en se focalisant sur la modélisation des fluctuations de pression pariétale. Cette étude a été réalisée en menant conjointement deux activités : la dérivation d'un modèle de spectre des fluctuations turbulentes de pression pariétale et son application à la vibro-acoustique ; la réalisation d'une expérience en soufflerie afin de valider et/ou d'améliorer les travaux de modélisation.

Bilan des travaux

La première étape des travaux de modélisation a consisté en une analyse et une modification des modèles de Lysak [Lysak 06] et Aupoix [Aupoix 15]. Ces modèles ne donnent qu'une description fréquentielle des fluctuations de pression pariétale et ne permettent pas d'étudier les aspects spatiaux nécessaires à une application vibro-acoustique. Cette incapacité à décrire les aspects spatiaux est due à une utilisation trop forte de l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor qui se traduit par une absence de décorrélation spatiale. Un mécanisme d'amortissement a donc été intégré au modèle appelé LMA. Les modèles de Lysak et Aupoix reposent sur la résolution analytique de l'équation de Poisson. Cette résolution ne peut cependant être menée à terme sans faire des hypothèses simplificatrices discutables sur le plan physique. Il a été montré que l'équation de Poisson pouvait être résolue exactement sans faire ces simplifications, ce qui a donné naissance au modèle M1L.

Le modèle LMA se compare correctement avec le modèle empirique de Corcos qui est la référence la plus utilisée pour les applications vibro-acoustiques pour une large gamme de fréquences. En revanche, des comportements totalement nouveaux pour les hautes et basses fréquences ont été mis en évidence. Des bornes fréquentielles d'utilisation du modèle de Corcos en fonction de paramètres de la couche limite ont été élaborées à partir de ces comportements hautes et basses fréquences.

La seconde étape de modélisation a été de mettre en place, d'un point de vue théorique et numérique, le couplage entre le modèle de fluctuations de pression et les outils classiques de la vibro-acoustique. La principale modification par rapport à la littérature a été de calculer numériquement avec une grande précision les impédances de rayonnement acoustique, et notamment leur partie imaginaire, là où la plupart des modèles se contentent de développements asymptotiques de la partie réelle.

L'algorithme de calcul de bruit a été parallélisé et grandement ($\times 3.10^4$) accéléré afin de pouvoir être utilisable dans un contexte d'avant projet industriel. Cette accélération a été obtenue à l'aide de simplifications des expressions calculées en veillant systématiquement à ne pas dégrader la précision du résultat final.

L'élaboration du modèle théorique repose sur la résolution de l'équation de Poisson faisant le lien entre les fluctuations turbulentes de vitesses et de pression. Il est donc nécessaire de mesurer ces deux grandeurs afin d'éprouver les qualités du modèle développé. L'expérience en soufflerie réalisée durant la thèse met donc en œuvre les métrologies adaptées : les fluctuations de vitesse ont étés mesurées par LDV tandis que les fluctuations de pression ont été mesurées à l'aide de micro-tiges affleurant la paroi de la soufflerie. Il a été nécessaire de concevoir et de réaliser un système de déplacement des microphones afin de pouvoir mesurer des corrélations spatiales des fluctuations de pression pariétale.

Il a été mis en évidence que le fort niveau acoustique de la soufflerie perturbait fortement les mesures microphoniques alors que les mesures vélocimétriques n'étaient pas impactées. Face à l'impossibilité de changer de soufflerie, une stratégie d'insonorisation de la soufflerie a été mise en place. La section de la soufflerie située entre le ventilateur et la section d'essai a été recouverte de mousse absorbante ce qui a permis d'améliorer le ratio de la variance de la pression acoustique sur la variance de la pression turbulente d'un facteur 5. Un traitement du signal basé sur l'absence de corrélation entre les signaux acoustiques et les signaux turbulents a été mis en place afin de filtrer numériquement l'acoustique restante après le traitement physique de la veine d'essai. Ces modifications se sont néanmoins révélées insuffisantes pour pouvoir réaliser une exploitation fine des mesures microphoniques avec le modèle développé. Il a néanmoins été établi que pour des couches limites telles que $\mathcal{R}_\theta \in [2800; 10500]$, la vitesse de groupe des fluctuations de pression était constante et égale à $0.8U_e$.

En revanche, les mesures de fluctuations de vitesse verticale se sont déroulées nominalement avec l'acquisition d'une base de données de corrélations spatio-temporelles tridimensionnelles. Des mesures de ce type n'avaient pas été réalisées depuis les années 60 et concernaient alors principalement la composante longitudinale des fluctuations de vitesses. Ces mesures ont validé l'ajout d'un mécanisme de décorrélation temporel de type exponentiel. Le modèle de Von Kàrmàn pour de la turbulence homogène isotrope peut être appliqué à un écoulement cisaillé, à condition d'utiliser des échelles caractéristiques de longueurs distinctes dans les différentes directions de l'espace.

Ces résultats expérimentaux ont permis de développer un modèle pour Φ_{vv} plus réaliste que celui de Von Kàrmàn. Pour cela les quatre longueurs de corrélation $\Lambda_x, \Lambda_{yp}, \Lambda_{ym}$ et Λ_z ainsi que le temps caractéristique de décorrélation τ_S ont été pris en compte et leurs valeurs numériques ont été calées grâce aux mesures. Cela a ensuite permis d'élaborer le modèle M4L pour Φ_{pp}.

Les modèles LMA, M1L et M4L ont des comportements similaires. On retrouve pour tous un bon accord avec le modèle de Corcos pour une large gamme de fréquences et des différences importantes aux hautes et basses fréquences. Les modèles se différencient néanmoins par les valeurs numériques de leurs régimes asymptotiques.

Perspectives

Les travaux réalisées dans cette thèse peuvent être complétés dans trois directions : l'expérimentation, la modélisation et la numérisation.

Les modèles LMA, M1L et M4L décrivent des comportements inédits pour Φ_{pp}

pour les hautes et les basses fréquences. L'expérience réalisée avait notamment pour but de les détecter. Cela n'a pu être réalisé en pratique à cause du fort niveau sonore de la soufflerie. Il est donc nécessaire de reprendre ces essais dans un environnement moins bruité.

Le modèle M4L se base sur une description plus fine des fluctuations de vitesse pour décrire *in fine* les fluctuations de la pression pariétale par rapport à celle utilisée dans les modèles LMA et M1L. Cette description peut encore être affinée en prenant en compte les évolutions verticales de $U(y)$ et $\mathrm{d}U/\mathrm{d}y(y)$ dans la modélisation de $S_{qq}[\mathbf{x}](\mathbf{r}, \tau)$.

Les modèles LMA, M1L et surtout le modèle M4L reposent sur des calculs numériques d'intégrales couteux. Leur utilisation intensive dans les avants-projets industriels ne sera possible qu'en réduisant ce cout en utilisant des méthodes plus adaptées. Cette adaptation devra néanmoins s'effectuer en veillant à ce que la précision ne soit pas dégradée.

Bibliographie

[Abraham 98] B. M. Abraham & W. L. Keith. *Direct measurements of turbulent boundary layer wall pressure wavenumber-frequency spectra.* Journal of Fluids Engineering, vol. 120, no. 1, pages 29–39, 1998.

[Abramowitz 64] M. Abramowitz & I. A. Stegun. Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables, volume 55. Courier Corporation, 1964.

[Adrian 00] R. J. Adrian, C. D. Meinhart & C. D. Tomkins. *Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 422, page 1–54, 2000.

[Angel 12] A. Angel, M. Magro & P. Pujol. Physique et outils mathématiques méthodes et exemples : méthodes et exemples. EDP Sciences, 2012.

[Arguillat 06] B. Arguillat. *Etude expérimentale et numérique de champs de pression pariétale dans l'espace des nombres d'onde, avec application aux vitrages automobiles.* PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2006.

[Aupoix 15] B. Aupoix. *Extension of Lysak s Approach to Evaluate the Wall Pressure Spectrum for Boundary Layer Flows.* Flow, Turbulence and Combustion, vol. 94, no. 1, pages 63–78, 2015.

[Aupperle 73] F. A. Aupperle & R. F. Lambert. *Acoustic radiation from plates excited by flow noise.* Journal of Sound and Vibration, vol. 26, no. 2, pages 223–245, 1973.

[Bally 90] P. Olivero Bally, P. Hocquet & B. E. Forestier. *Wavenumber-frequency spectrum of pressure fluctuations beneath a positive pressure-gradient turbulent boundary layer.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 3, pages 125–136, 1990.

[Bech 95] K. H. Bech, N. Tillmark, P. H. Alfredsson & H. I. Andersson. *An investigation of turbulent plane Couette flow at low Reynolds numbers.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 286, pages 291–325, 1995.

[Belmabrouk 98] H Belmabrouk & M Michard. *Taylor length scale measurement by laser Doppler velocimetry.* Experiments in Fluids, vol. 25, no. 1, pages 69–76, 1998.

[Benedict 99] LH Benedict & RD Gould. *Understanding biases in the near-field region of LDA two-point correlation measurements.* Experiments in fluids, vol. 26, no. 5, pages 381–388, 1999.

[Bertagnolio 09] F. Bertagnolio, H. Aagaard Madsen & C. Bak. *Experimental validation of TNO trailing edge noise model and application to airfoil optimization.* In 2009 European Wind Energy Conference and Exhibition, 2009.

[Bertagnolio 14] F. Bertagnolio, A. Fischer & W. J. Zhu. *Tuning of turbulent boundary layer anisotropy for improved surface pressure and trailing-edge noise modeling.* Journal of Sound and Vibration, vol. 333, no. 3, pages 991–1010, 2014.

[Biot 58] M. A. Biot. *Linear thermodynamics and the mechanics of solids.* Rapport technique, Cornell Aeronautical Lab., Inc., Buffalo, 1958.

[Blake 70] W. K. Blake. *Turbulent boundary-layer wall-pressure fluctuations on smooth and rough walls.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 44, no. 04, pages 637–660, 1970.

[Blake 86a] W. K. Blake. Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration : Complex Flow-Structure Interactions. Applied Mathematics and Mechanics Series. Academic Press, 1986.

[Blake 86b] W. K. Blake. Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration : General Concepts and elementary Sources. Applied Mathematics and Mechanics Series. Academic Press, 1986.

[Borisyuk 97] A. O. Borisyuk & V. T. Grinchenko. *Vibration and noise generation by elastic elements excited by a turbulent flow.* Journal of Sound and Vibration, vol. 204, no. 2, pages 213–237, 1997.

[Bravo 17] T. Bravo, C. Maury & C. Pinhède. *Absorption and transmission of boundary layer noise through flexible multilayer micro-perforated structures.* Journal of Sound and Vibration, vol. 395, pages 201–223, 2017.

[Bull 96] M. K. Bull. *Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers : some reflections on forty years of research.* Journal of Sound and Vibration, vol. 190, no. 3, pages 299–315, 1996.

[Catlett 14] M. Catlett, J. Forest, J. A. Anderson & D. Stewart. *Empirical spectral model of surface pressure fluctuations beneath adverse pressure gradients.* In Proceedings of the 20th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, 2014.

[Chase 80] David M Chase. *Modeling the wavevector-frequency spectrum of turbulent boundary layer wall pressure.* Journal of sound and Vibration, vol. 70, no. 1, pages 29–67, 1980.

[Chase 87] DM Chase. *The character of the turbulent wall pressure spectrum at subconvective wavenumbers and a suggested*

comprehensive model. Journal of Sound and Vibration, vol. 112, no. 1, pages 125–147, 1987.

[Chertock 61] G. Chertock. *Sound radiation from prolate spheroids.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 33, no. 7, pages 871–876, 1961.

[Chertock 64] G. Chertock. *Sound radiation from vibrating surfaces.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 36, no. 7, pages 1305–1313, 1964.

[Coles 56] D. Coles. *The law of the wake in the turbulent boundary layer.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 1, no. 02, pages 191–226, 1956.

[Corcos 63] G. M. Corcos. *Resolution of pressure in turbulence.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 35, no. 2, pages 192–199, 1963.

[Corcos 64] G. M. Corcos. *The structure of the turbulent pressure field in boundary-layer flows.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 18, no. 03, pages 353–378, 1964.

[Crandall 70] S. H. Crandall. *The role of damping in vibration theory.* Journal of sound and vibration, vol. 11, no. 1, pages 3IN1–18, 1970.

[Crandall 14] S. H. Crandall & W. D. Mark. Random vibration in mechanical systems. Academic Press, 2014.

[Davies 71] H. G. Davies. *Sound from Turbulent-Boundary-Layer-Excited Panels.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 49, no. 3B, pages 878–889, 1971.

[De Fériet 37] J Kampé De Fériet. *La fonction hypergéométrique.* 1937.

[DeJong 18] R. DeJong, P. Bootsma & K. DeVries. *Low wavenumber pressure content of turbulent boundary layer flows.* In Proceedings of the Inter-Noise 2018 conference, 2018.

[Efimtsov 82] B. M. Efimtsov. *Characteristics of the field of turbulent wall pressure-fluctuations at large Reynolds-numbers.* Soviet Physics Acoustics-Ussr, vol. 28, no. 4, pages 289–292, 1982.

[Efimtsov 84] B. M. Efimtsov. *Similarity criteria for the spectra of wall pressure fluctuations in a turbulent boundary layer.* Akusticheskii Zhurnal, vol. 30, pages 58–61, 1984.

[El Baroudi 63] M. Y. El Baroudi, G. R. Ludwig & H. S. Ribner. *An Experimental Investigation of Turbulence-Excited Panel Vibration and Noise (Boundary-Layer Noise).* Rapport technique, DTIC Document, 1963.

[Farabee 91] T. M. Farabee & M. J. Casarella. *Spectral features of wall pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers.* Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993), vol. 3, no. 10, pages 2410–2420, 1991.

[Favre 57] AJ Favre, JJ Gaviglio & R Dumas. *Space-time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 2, no. 4, pages 313–342, 1957.

[Favre 65] AJ Favre. *Review on space-time correlations in turbulent fluids.* Journal of Applied Mechanics, vol. 32, no. 2, pages 241–257, 1965.

[Ffowcs-Williams 82] J. E. Ffowcs-Williams. *Boundary-layer pressures and the Corcos model : a development to incorporate low-wavenumber constraints.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 125, pages 9–25, 1982.

[Filippi 98] P. Filippi, A. Bergassoli, D. Habault & J. P. Lefebvre. Acoustics : basic physics, theory, and methods. Academic Press, 1998.

[Fraser 86] R Fraser, CJ Pack & DA Santavicca. *An LDV system for turbulence length scale measurements.* Experiments In Fluids, vol. 4, no. 3, pages 150–152, 1986.

[Furuichi 04] N. Furuichi, T. Hachiga & M. Kumada. *An experimental investigation of a large-scale structure of a two-dimensional backward-facing step by using advanced multi-point LDV.* Experiments in Fluids, vol. 36, no. 2, pages 274–281, 2004.

[Ganapathisubramani 05] B Ganapathisubramani, N Hutchins, WT Hambleton, EK Longmire & I Marusic. *Investigation of large-scale coherence in a turbulent boundary layer using two-point correlations.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 524, pages 57–80, 2005.

[Gauss 24] Carl Friedrich Gauss. Carl Friedrich Gauss Werke. Gedruckt in der Dieterichschen Universitätsdruckerei (WF Kaestner), 1924.

[Gavin 02] J. R. Gavin. *Unsteady forces and sound caused by boundary layer turbulence entering a turbomachinery rotor.* PhD thesis, The Pensylvania State University, 2002.

[Gomperts 74] M. C. Gomperts. *Radiation from rigid baffled, rectangular plates with general boundary conditions.* Acta Acustica united with Acustica, vol. 30, no. 6, pages 320–327, 1974.

[Goody 00] M. C Goody & R. L. Simpson. *Surface pressure fluctuations beneath two-and three-dimensional turbulent boundary layers.* AIAA journal, vol. 38, no. 10, pages 1822–1831, 2000.

[Goody 04] M. Goody. *Empirical spectral model of surface pressure fluctuations.* AIAA journal, vol. 42, no. 9, pages 1788–1794, 2004.

[Graham 96a] W. R. Graham. *Boundary layer induced noise in aircraft, Part I : The flat plate model.* Journal of Sound and Vibration, vol. 192, no. 1, pages 101–120, 1996.

[Graham 96b] W. R. Graham. *Boundary layer induced noise in aircraft, Part II : The trimmed flat plate model.* Journal of Sound and Vibration, vol. 192, no. 1, pages 121–138, 1996.

[Grant 58] HL Grant. *The large eddies of turbulent motion.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 4, no. 2, pages 149–190, 1958.

[Gravante 98] S. P. Gravante, A. M. Naguib, C. E. Wark & H. M. Nagib. *Characterization of the pressure fluctuations under a fully developed turbulent boundary layer.* AIAA journal, vol. 36, no. 10, pages 1808–1816, 1998.

[Grosveld 92] F. W. Grosveld. *Plate acceleration and sound transmission due to random acoustic andboundary-layer excitation.* AIAA journal, vol. 30, no. 3, pages 601–607, 1992.

[Habault 98] D. Habault & P. J. T. Filippi. *Light fluid approximation for sound radiation and diffraction by thin elastic plates.* Journal of Sound and Vibration, vol. 213, no. 2, pages 333–374, 1998.

[Hinze 76] J Hinze. *0. 1975 Turbulence*, 1976.

[Hwang 84] Y. F. Hwang & F. E. Geib. *Estimation of the wavevector-frequency spectrum of turbulent boundary layer wall pressure by multiple linear regression.* Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design, vol. 106, no. 3, pages 334–342, 1984.

[Hwang 90] Y. F. Hwang & G. Maidanik. *A wavenumber analysis of the coupling of a structural mode and flow turbulence.* Journal of Sound and Vibration, vol. 142, no. 1, pages 135–152, 1990.

[Hwang 09] YF Hwang, W. K. Bonness & S. A. Hambric. *Comparison of semi-empirical models for turbulent boundary layer wall pressure spectra.* Journal of Sound and Vibration, vol. 319, no. 1, pages 199–217, 2009.

[Ibars 90] P. Ibars. *Contribution des petits nombres d'onde au champ pariétal de pression dans une couche limite turbulente bidimensionnelle. Comparaison de différentes techniques expérimentales.* These : Ecole Centrale de Lyon, 1990.

[Jacquin 06] L. Jacquin & P. Tabeling. Turbulence et tourbillons. École polytechnique, 2006.

[Kähler 04] CJ Kähler. *Investigation of the spatio-temporal flow structure in the buffer region of a turbulent boundary layer by means of multiplane stereo PIV.* Experiments in Fluids, vol. 36, no. 1, pages 114–130, 2004.

[Keith 92] W. L. Keith, D. A. Hurdis & B. M. Abraham. *A comparison of turbulent boundary layer wall-pressure spectra.* Journal of Fluids Engineering, vol. 114, no. 3, pages 338–347, 1992.

[Kraichnan 56] R. H. Kraichnan. *Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 28, no. 3, pages 378–390, 1956.

[Lee 05] Y. T. Lee, W. K. Blake & T. M. Farabee. *Modeling of wall pressure fluctuations based on time mean flow field.* Journal of Fluids Engineering, vol. 127, no. 2, pages 233–240, 2005.

[Lee 09] Y. T. Lee, T. M. Farabee & W. K. Blake. *Turbulence effects of wall-pressure fluctuations for reattached flow.* Computers & Fluids, vol. 38, no. 5, pages 1033–1041, 2009.

[Lesueur 88] C. Lesueur, J. Delcambre & M. Heckl. Rayonnement acoustique des structures : vibroacoustique, interactions fluide-structure. Eyrolles, 1988.

[Lin 67] Y. K. Lin. Probabilistic Theory of Structural Dynamics. McGraw-Hill, 1967.

[Love 88] A. E. H. Love. *The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A, vol. 179, pages 491–546, 1888.

[Love 13] A. E. H. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity, volume 1. Cambridge University Press, 2013.

[Luke 69] Yudell L Luke. Special functions and their approximations, volume 2. Academic press, 1969.

[Lysak 03] P. D. Lysak & T. A. Brungart. *Velocity spectrum model for turbulence ingestion noise from computational-fluid-dynamics calculations.* AIAA journal, vol. 41, no. 9, pages 1827–1829, 2003.

[Lysak 06] P. D. Lysak. *Modeling the wall pressure spectrum in turbulent pipe flows.* Journal of Fluids Engineering, vol. 128, no. 2, pages 216–222, 2006.

[Maidanik 62] G. Maidanik. *Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields.* the Journal of the Acoustical Society of America, vol. 34, no. 6, pages 809–826, 1962.

[Maidanik 67a] G. Maidanik. *Flush-Mounted Pressure Transducer Systems as Spatial and Spectral Filters.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 42, no. 5, pages 1017–1024, 1967.

[Maidanik 67b] G. Maidanik & D. W. Jorgensen. *BoundaryWave-Vector Filters for the Study of thePressure Field in a Turbulent BoundaryLayer.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 42, no. 2, pages 494–501, 1967.

[Manning 64] J. E Manning & G. Maidanik. *Radiation properties of cylindrical shells.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 36, no. 9, pages 1691–1698, 1964.

[Manoha 93] Eric Manoha. *Mesure du spectre en frequences et nombres d'ondes du champ des fluctuations de pression parietale sous une couche limite turbulente.* PhD thesis, Paris 6, 1993.

[Martin 77] N. C. Martin & P. Leehey. *Low wavenumber wall pressure measurements using a rectangular membrane as a spatial filter.* Journal of Sound and Vibration, vol. 52, no. 1, pages 95–120, 1977.

[Maury 02a] C. Maury, P. Gardonio & S. J. Elliott. *A wavenumber approach to modelling the response of a randomly excited panel, part I : general theory.* Journal of Sound and Vibration, vol. 252, no. 1, pages 83–113, 2002.

[Maury 02b] C. Maury, P. Gardonio & S. J. Elliott. *A wavenumber approach to modelling the response of a randomly excited panel, Part II : Application to aircraft panels excited by a turbulent boundary layer.* Journal of Sound and Vibration, vol. 252, no. 1, pages 115–139, 2002.

[McGrath 87] B. E. McGrath & R. L. Simpson. *Some features of surface pressure fluctuations in turbulent boundary layers with zero and favorable pressure gradients.* 1987.

[Minotti 08] A Minotti, F Simon & F Gantié. *Characterization of an acoustic liner by means of Laser Doppler Velocimetry in a subsonic flow.* Aerospace Science and Technology, vol. 12, no. 5, pages 398–407, 2008.

[Moreau 05] S. Moreau & M. Roger. *Effect of airfoil aerodynamic loading on trailing edge noise sources.* AIAA journal, vol. 43, no. 1, pages 41–52, 2005.

[Morilhat 19] S. Morilhat, F. Chedevergne & F. Simon. *A unified methodology to evaluate the radiated noise due to turbulent boundary layer flows.* Journal of Fluid Engineering, vol. accepted, 2019.

[Muravskii 07] G. B. Muravskii. *Linear models with nearly frequency independent complex stiffness leading to causal behaviour in time domain.* Earthquake Engineering & Structural Dynamics, vol. 36, no. 1, pages 13–33, 2007.

[Neumann 09] M. Neumann, S. Heitkam, K. Shirai, L. Büttner & J. Czarske. *Highly precise correlation estimates of turbulent shear flows using a LASER Doppler profile sensor and array detection.* In TSFP digital library online, 2009.

[Newland 12] D. E. Newland. An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis. Courier Corporation, 2012.

[Nikiforov 64] A. S. Nikiforov. *Radiation from a plate of finite dimensions with arbitrary boundary conditions.* Soviet Physics-Acoustics, vol. 10, pages 178–182, 1964.

[Nilsson 72a] A. C. Nilsson. *Reduction index and boundary conditions for a wall between two rectangular rooms. Part I : Theoretical results.* Acta Acustica united with Acustica, vol. 26, no. 1, pages 1–18, 1972.

[Nilsson 72b] A. C. Nilsson. *Reduction index and boundary conditions for a wall between two rectangular rooms. Part II : Experimental results.* Acta Acustica united with Acustica, vol. 26, no. 1, pages 19–23, 1972.

[Olivero-Bally 93] P Olivero-Bally, BE Forestier, E Focquenoy & P Olivero. *Wall-pressure fluctuations in natural and manipulated turbulent boundary layers in air and water.* ASME-PUBLICATIONS-FED, vol. 168, pages 63–63, 1993.

[Panton 74] R. L. Panton & J. H. Linebarger. *Wall pressure spectra calculations for equilibrium boundary layers.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 65, no. 2, pages 261–287, 1974.

[Parchen 98] R. R. Parchen. Progress report draw : A prediction scheme for trailing edge noise based on detailed boundary layer characteristics, volume 980023. TNO Institute of Applied Physics, 1998.

[Pavlou 99] E. Pavlou. *Dynamic analysis of systems with hysteretic damping.* PhD thesis, Rice University, 1999.

[Peltier 07] L. J. Peltier & S. A. Hambric. *Estimating turbulent-boundary-layer wall-pressure spectra from CFD RANS solutions.* Journal of Fluids and Structures, vol. 23, no. 6, pages 920–937, 2007.

[Pope 00] S. B. Pope. Turbulent flows. Cambridge university press, 2000.

[Preumont 13] A. Preumont. Random Vibration and Spectral Analysis/ Vibrations aléatoires et analyse spectrale, volume 33. Springer Science & Business Media, 2013.

[Rayleigh 45] L. Rayleigh. The theory of sound, volume 2. Macmillan, 1945.

[Remmler 10] Sebastian Remmler, Julien Christophe, Jerome Anthoine & Stephane Moreau. *Computation of wall pressure spectra from steady flow data for noise prediction.* AIAA journal, vol. 48, no. 9, pages 1997–2007, 2010.

[Ritz 09] W. Ritz. *Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern.* Annalen der Physik, vol. 333, no. 4, pages 737–786, 1909.

[Robert 84] G. Robert. *Modélisation et simulation du champ excitateur induit sur une structure par une couche limite turbulente.* PhD thesis, 1984.

[Robin 13] O. Robin, S. Moreau, T. Padois & A. Berry. *Measurement of the wavenumber-frequency spectrum of wall pressure fluctuations : spiral-shaped rotative arrays with pinhole-mounted quarter inch microphones.* In 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, page 2058, 2013.

[Rozenberg 12] Y. Rozenberg, G. Robert & S. Moreau. *Wall-pressure spectral model including the adverse pressure gradient effects.* AIAA journal, vol. 50, no. 10, pages 2168–2179, 2012.

[Sandman 75] B. E. Sandman. *Motion of a three-layered elastic–viscoelastic plate under fluid loading.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 57, no. 5, pages 1097–1107, 1975.

[Schewe 83] G. Schewe. *On the structure and resolution of wall-pressure fluctuations associated with turbulent boundary-layer flow.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 134, pages 311–328, 1983.

[Schloemer 67] H. H. Schloemer. *Effects of Pressure Gradients on Turbulent-Boundary-Layer Wall-Pressure Fluctuations.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 42, no. 1, pages 93–113, 1967.

[Shampine 08] L. F. Shampine. *Vectorized adaptive quadrature in MATLAB.* Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 211, no. 2, pages 131–140, 2008.

[Sherman 90] C. H. Sherman, S. H. Ko & B. G. Buehler. *Measurement of the turbulent boundary layer wave-vector spectrum.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 88, no. 1, pages 386–390, 1990.

[Shiloh 81] K. Shiloh, B. G. Shivaprasad & R. L. Simpson. *The structure of a separating turbulent boundary layer. Part 3. Transverse velocity measurements.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 113, pages 75–90, 1981.

[Sillero 14] Juan A Sillero, Javier Jiménez & Robert D Moser. *Two-point statistics for turbulent boundary layers and channels at Reynolds numbers up to d+=2000.* Physics of Fluids, vol. 26, no. 10, page 105109, 2014.

[Simpson 81a] R. L. Simpson, Y.-T. Chew & B. G. Shivaprasad. *The structure of a separating turbulent boundary layer. Part 1. Mean flow and Reynolds stresses.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 113, pages 23–51, 1981.

[Simpson 81b] R. L. Simpson, Y.-T. Chew & B. G. Shivaprasad. *The structure of a separating turbulent boundary layer. Part 2. Higher-order turbulence results.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 113, pages 53–73, 1981.

[Simpson 87] R. L. Simpson, M. Ghodbane & B. E. Mcgrath. *Surface pressure fluctuations in a separating turbulent boundary layer.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 177, pages 167–186, 4 1987.

[Slama 17] M. Slama. *Generalisation des modeles stochastiques de pression turbulente pariétale pour les études vibro-acoustiques via l'utilisation de simulations RANS.* PhD thesis, 2017.

[Slama 18] M. Slama, C. Leblond & P. Sagaut. *A Kriging-based elliptic extended anisotropic model for the turbulent boundary layer wall pressure spectrum.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 840, pages 25–55, 2018.

[Smol'yakov 00] A. V. Smol'yakov. *Calculation of the spectra of pseudosound wall-pressure fluctuations in turbulent boundary layers.* Acoustical Physics, vol. 46, no. 3, pages 342–347, 2000.

[Sommerfeld 10] A. Sommerfeld. *Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung für ein beliebiges Gebiet.* Physikal. Zeitschr, vol. 11, pages 1057–1066, 1910.

[Taylor 38] G. I. Taylor. *The spectrum of turbulence.* In Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, volume 164, pages 476–490. The Royal Society, 1938.

[Timoshenko 53] S. Timoshenko. History of Strength of Materials. McGraw-Hill, 1953.

[Townsend 80] A. Townsend. The structure of turbulent shear flow. Cambridge university press, 1980.

[Trimis 95] D Trimis & A Melling. *Improved laser Doppler anemometry techniques for two-point turbulent flow correlations.* Measurement Science and Technology, vol. 6, no. 6, page 663, 1995.

[Tritton 67] DJ Tritton. *Some new correlation measurements in a turbulent boundary layer.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 28, no. 3, pages 439–462, 1967.

[Violato 11] D. Violato & F. Scarano. *Three-dimensional evolution of flow structures in transitional circular and chevron jets.* Physics of Fluids, vol. 23, no. 12, page 124104, 2011.

[Von Karman 48] T. Von Karman. *Progress in the statistical theory of turbulence.* Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 34, no. 11, pages 530–539, 1948.

[Wallace 72a] C. E. Wallace. *Radiation resistance of a baffled beam.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 51, no. 3B, pages 936–945, 1972.

[Wallace 72b] C. E. Wallace. *Radiation resistance of a rectangular panel.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 51, no. 3B, pages 946–952, 1972.

[Warburton 54] G. B. Warburton. *The vibration of rectangular plates.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 168, no. 1, pages 371–384, 1954.

[Weinstock 74] R. Weinstock. Calculus of variations : with applications to physics and engineering. Courier Corporation, 1974.

[Willmarth 75] W. W. Willmarth. *Pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers.* Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 7, no. 1, pages 13–36, 1975.