



Estimation de la direction de marche à partir de capteurs inertiels et magnétiques portés dans la main

Christophe Combettes

► To cite this version:

Christophe Combettes. Estimation de la direction de marche à partir de capteurs inertiels et magnétiques portés dans la main. Autre. Université Bretagne Loire, 2016. Français. NNT : . tel-02290415

HAL Id: tel-02290415

<https://hal.science/tel-02290415>

Submitted on 17 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Christophe COMBETTES

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences & Technologies de l'Information et Mathématiques (STIM)

Discipline : Automatique et Informatique Appliquée

Unité de recherche : Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de
l'aménagement et des Réseaux (IFSTTAR)

Soutenue le 17 octobre 2016

Estimation de la direction de marche à partir de capteurs inertiels et magnétiques portés dans la main

JURY

Rapporteurs :	Olivier MICHEL , Professeur des universités, INP Grenoble Bertrand MERMINOD , Professeur des universités, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne – Suisse
Examineurs :	Bernard UGUEN , Professeur des universités, Université de Rennes 1 Hassen FOURATI , Maître de Conférences, Université Grenoble Sylvie LAMY , Ingénieur de recherche, CEA-LIST Saclay Guy PLANTIER , Ingénieur de recherche, HDR, ESEO, Angers
Directeur de Thèse :	Valérie RENAUDIN , Directrice de Recherche, IFSTTAR Nantes – Bouguenais
Co-directeur de Thèse :	François PEYRET , Directeur de Recherche, Université de Nantes

Remerciements

Comme tout le monde le sait, la thèse est un dur et long travail. Bien que demandant d'importants efforts personnels, la thèse n'est pas un travail solitaire mais le fruit d'une importante collaboration.

Je tiens à remercier en premier lieu ma directrice de thèse madame Valérie RENAUDIN pour m'avoir choisi et encadré durant ces 3 années de thèses. Je lui suis très reconnaissant pour le temps qu'elle a accordé à ma formation scientifique et plus généralement à ma formation de chercheur. Au quotidien, je la remercie pour sa disponibilité et pour les longues heures accordées aux relectures et corrections des articles et du mémoire.

Je remercie le jury de thèse : Les rapporteurs Olivier MICHEL et Bertrand MERMINOD pour le travail de lecture, de correction et de jugement du mémoire de thèse ; Les examinateurs Bernard UGUEN, Hassen FOURATI, Sylvie LAMY et Guy PLANTIER, pour la critique de mon travail.

Je souhaite aussi exprimer toute ma gratitude à ceux qui ont contribué à mon doctorat : François PEYRET pour son co-encadrement, Patrick LACOUR pour son travail et son expertise sur la veille scientifique, Miguel ORTIZ et Jean-Marie NORMAND pour les expérimentations.

Je remercie toute l'équipe Geoloc, les doctorants Mahdi, Nicolas, Taïa qui reprennent la suite de mon travail, mais aussi Mathieu le développeur, et enfin je pense aussi aux stagiaires Camille, Sylvain et Johan avec qui j'ai passé du temps.

Plus généralement, je remercie mes collègues de l'IFSTTAR Nantes, et notamment ceux du rez-de-chaussée du bâtiment Darcy. La bonne ambiance qui y règne va assurément me manquer.

La fin de thèse est aussi l'occasion de remercier l'ensemble des personnes qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

Table des matières

Chapitre A.Introduction	12
A.1 Contexte de la navigation piétonne.....	12
A.2 Les technologies de positionnement	12
A.3 Le challenge de la direction de marche	13
A.4 Contributions	15
A.5 Organisation du mémoire	15
Chapitre B.Éléments de la navigation inertielle et magnétique pour le piéton.....	18
B.1 Référentiels et repères de la navigation piétonne	18
B.1.1 Listes des référentiels	18
B.1.2 Composition des mouvements.....	19
B.2 Centrales Inertielles et Magnétiques	21
B.2.1 Les capteurs inertiels.....	21
B.2.2 Le magnétomètre	23
B.3 Paramétrage de l'orientation.....	26
B.3.1 Les matrices de rotation.....	26
B.3.2 Les quaternions	29
B.3.3 Les angles d'Euler.....	32
B.3.4 Conversions matrice de rotation-quaternion-angles d'Euler	33
B.3.5 L'antisymétrie et les rotations.....	34
B.3.6 Avantages et inconvénients des différents paramétrages.....	39
B.4 Outils pour l'estimation.....	41
B.4.1 Le filtre de Kalman	41
B.4.2 Algorithme Expectation-Maximization(EM)	44
B.4.3 Entropie et divergence statistique	46
B.5 Biomécanique de la marche.....	48
B.5.1 Le piéton.....	48
B.5.2 La marche : un phénomène cyclique	50
Chapitre C.Estimation de l'orientation d'une centrale inertielle et magnétique.....	54
C.1 Modèles de mesures et limites	54
C.1.1 Mesures des champs terrestres par le magnétomètre et l'accéléromètre.....	54
C.1.2 Propagation de l'orientation à partir de la mesure du gyromètre.....	55
C.1.3 Limites de l'hypothèse de mesure des champs terrestres.....	56
C.2 Méthodes usuelles appliquées au problème d'estimation de l'orientation	57
C.2.1 Hypothèse de mesure des champs terrestres	57
C.2.2 Stratégies employées par rapport aux variations de champ magnétique et aux accélérations externes	65
C.2.3 Conclusions.....	66
C.3 Avancées par rapport aux filtres existants.....	67
C.3.1 Modélisation du signal du gyromètre en quaternion unitaire.....	67
C.3.2 MAGYQ - Magnetic and Acceleration field with Gyroscope Quaternion.....	70

C.3.3	<i>Delay-MAGYQ</i>	76
Chapitre D.	Estimation de la direction de marche à partir de capteurs inertiels et magnétiques	80
D.1	Introduction	80
D.1.1	<i>Définition de la direction de marche du piéton</i>	80
D.1.2	<i>Estimation de la direction de marche par intégration directe</i>	81
D.1.3	<i>Référentiel piéton global</i>	82
D.2	Étude expérimentale des trajectoires de la main et du centre de masse du piéton.....	83
D.2.1	<i>Mouvements du centre de masse</i>	83
D.2.2	<i>Mouvements de la main</i>	89
D.3	Méthodes existantes d'estimation de la direction de marche	99
D.3.1	<i>Calcul des directions principales de l'accélération horizontale : PCA</i>	99
D.3.2	<i>Calcul de la corrélation avec un modèle : FLAM</i>	101
D.3.3	<i>Estimation de la direction de marche par analyse fréquentielle : FIS</i>	103
D.3.4	<i>Résolution de l'ambiguïté d'angle π</i>	106
D.3.5	<i>Conclusions</i>	106
D.4	Méthodes innovantes d'estimation de la direction de marche par approches statistiques...	106
D.4.1	<i>Distributions spatiales des mesures inertielles et direction de marche</i>	106
D.4.2	<i>Estimation des modèles de densité de probabilité</i>	108
D.4.3	<i>Estimation de la direction de marche basée sur la minimisation de distances statistiques</i>	112
D.4.4	<i>Conclusions</i>	118
Chapitre E.	Évaluations expérimentales	120
E.1	Estimation de l'orientation de la centrale inertielle en salle de capture de mouvements....	120
E.1.1	<i>Cadre de l'expérimentation</i>	120
E.1.2	<i>Scenarii</i>	121
E.1.3	<i>Résultats</i>	122
E.1.4	<i>Conclusions</i>	126
E.2	Estimation de la direction de marche en salle de capture de mouvements.....	127
E.2.1	<i>Description de l'expérimentation</i>	127
E.2.2	<i>Critères de performance</i>	128
E.2.3	<i>Scénario Swinging</i>	128
E.2.4	<i>Scénario Texting</i>	132
E.2.5	<i>Conclusions</i>	135
E.3	Estimation de la direction de marche en conditions réelles	135
E.3.1	<i>Description de l'expérimentation</i>	135
E.3.2	<i>Résultats</i>	137
E.3.3	<i>Conclusions</i>	140
Chapitre F.	Conclusions et perspectives	142
F.1	Conclusions	142
F.2	Perspectives	143

Liste des figures

Figure 1: Technologies de géolocalisation en fonction de leur couverture spatiale et leur précision [8] ...	13
Figure 2: Processus de navigation à l'estime à l'aide d'IMMU à la main	14
Figure 3: Distinction entre direction de marche et orientation du smartphone	14
Figure 4: Le piéton et les différents repères associés : référentiel de navigation (en rouge), le référentiel piéton (en vert) et le référentiel body (en noir).....	19
Figure 5: Déviation d'Allan pour les 3 composantes de l'accéléromètre de l'ADIS 16488.....	23
Figure 6: Rotation d'axe u et d'angle θ du vecteur x	28
Figure 7: Les 3 plans du piéton : sagittal (rouge), horizontal (bleu) et frontal (jaune)	48
Figure 8: Chaîne articulée représentant le corps humain	49
Figure 9: Numérotation de la chaîne articulée	50
Figure 10: Décomposition du cycle de marche [9] [38]	51
Figure 11: Evolution de la position du pied droit dans le plan sagittal, lors de la marche.....	52
Figure 12: Module de la transformée de Fourier de la vitesse axiale du pied	52
Figure 13: Norme du signal de l'accéléromètre porté dans la main comparé à celle du champ de gravité terrestre	56
Figure 14: Norme du signal du magnétomètre comparée à celle du champ magnétique terrestre.....	57
Figure 15: Variance d'Allan des 4 composantes du quaternion-gyroscope, issues du gyromètre de l'ADIS 16488.....	68
Figure 16: Vitesse estimée par intégration des mesures inertielles.....	82
Figure 17 : Salle de capture de mouvement, avec son dispositif de suivi par video-tracking des marqueurs optiques	83
Figure 18: Evolution de la position du centre de masse dans le plan sagittal sur 4 pas (2 foulées) à 5km/h	84
Figure 19: Evolution de la position du centre de masse dans le plan frontal au cours d'une foulée, pour $W1$ et $M1$ à différentes vitesses.....	85
Figure 20: Evolution de la position du centre de masse dans le plan horizontal, à 5km/h sur 3 foulées.....	86
Figure 21: Déphasage entre les oscillations verticales et latérales	86
Figure 22: Evolution de la vitesse dans le plan horizontal de $M1$, $M2$, $W1$ au cours d'une foulée	87
Figure 23: Superposition de la vitesse axiale avec les positions verticales des deux pieds sur 2 foulées	87
Figure 24: Evolution de vitesse du centre de masse dans le plan sagittal sur une foulée.....	88
Figure 25: Evolution de l'accélération du centre de masse dans le plan horizontal sur 2 foulées à 5km/h..	88
Figure 26: Evolution temporelle de l'accélération dans le référentiel piéton sur 2 foulées à 5 km/h.....	89
Figure 27: Accélération de la main en Swinging dans le plan horizontal sur 1 foulée à 5 km/h	92
Figure 28: Vitesse de rotation de la main en Swinging dans le plan horizontal sur 1 foulée à 5 km/h	93
Figure 29: Transformée de Fourier de l'accélération axiale de la main en Swinging à 5 km/h.....	93
Figure 30: Accélération de la main en Texting dans le plan horizontal sur 1 foulée à 5km/h	94
Figure 31: Vitesse de rotation de la main en Texting dans le plan horizontal sur 1 foulée à 5km/h.....	95
Figure 32: Transformée de Fourier des 3 composantes de l'accélération dans le référentiel piéton global à 5km/h.....	95
Figure 33: Présence d'importantes accélérations latérales dans le plan horizontal	96
Figure 34: Accélération de la main avec un mouvement irrégulier durant une foulée.....	96
Figure 35: Mise en correspondance des accélérations horizontales de la main en activité Texting avec la position verticale du pied sur 2 foulées.....	98
Figure 36: Accélération de l'IMU en mode Texting dans le plan horizontal sur une foulée (bleue) et sur une partie du cycle de marche (rouge)	98
Figure 37: Mise en correspondance des vitesses de rotation de la main en activité Texting avec la position verticale du pied sur 2 foulées	99

Figure 38: Norme de la transformée de Fourier du signal de l'accéléromètre, issu d'une IMU portée dans la main en mode Texting.....	103
Figure 39: Nuages de points de l'accélération dans le plan horizontal et directions de marche à -50° (gauche) et à 0° à droite.....	107
Figure 40: Modèle de densité de probabilité de l'accélération dans le plan horizontal.....	107
Figure 41: Accélérations dans le plan horizontal avec une direction de marche suivant la direction nord (0°)	110
Figure 42: Estimation de l'algorithme EM: à gauche les valeurs du mélange avec les valeurs initiales et à droite les valeurs du mélange à l'itération 10.....	111
Figure 43: Vraisemblance des paramètres estimés par l'algorithme EM à chaque itération.....	112
Figure 44: Illustration de la méthode de Newton	114
Figure 45: À Gauche: accélérations mesurées durant une foulée - À droite: densité estimée associée à ces mesures.....	116
Figure 46: Marqueurs optiques attachés IMMU (ULISS).....	120
Figure 47: Norme du signal de l'accéléromètre en Texting pour S1	123
Figure 48: Différence entre les champs magnétiques, l'un local et l'autre terrestre, en Texting pour S1 .	123
Figure 49: Norme du signal de l'accéléromètre comparée au champ de gravité terrestre, en Swinging pour S1	124
Figure 50: Différence entre les champs magnétiques, l'un local et l'autre terrestre, en Swinging pour S4	124
Figure 51: Erreurs d'estimation de l'angle yaw pour les 3 filtres d'estimation	126
Figure 52: Comparaison de la norme du champ magnétique terrestre par rapport aux mesures.....	126
Figure 53: Histogramme des erreurs angulaires pour la PCA sur l'accélération projetée dans le plan horizontal.....	129
Figure 54: Illustration du mouvement vers l'intérieur de la main en Swinging.....	130
Figure 55: Histogramme des erreurs angulaires pour FLAM.....	130
Figure 56: Histogramme des erreurs angulaires pour FIS sur l'accélération	131
Figure 57: Histogramme des erreurs angulaire pour Max-LogL sur l'accélération	132
Figure 58: Illustrations du matériel utilisé pour obtenir la solution de référence : À gauche la base « Novatel » située à proximité du lieu de l'expérimentation. À droite, le récepteur mobile « Septentrio » porté par les piétons durant l'expérimentation.	136
Figure 59: Illustrations des activités de la main durant l'expérimentation : Scénarii 1 et 2-activité Texting (gauche); Scénario 3 – Swinging (centre) puis mouvements irréguliers de la main (droite)	137
Figure 60: Mouvement irrégulier de la main	139
Figure 61: Position estimée à partir de la PDR	139

Liste des tableaux

<i>Tableau 1: Résultats de la marche en activité Texting.....</i>	<i>122</i>
<i>Tableau 2: Résultats de la marche en activité Swinging.....</i>	<i>123</i>
<i>Tableau 3: Erreurs d'orientation pour le scénario non supervisé</i>	<i>125</i>
<i>Tableau 4: Récapitulatif des mesures inertielles utilisées pour la PCA</i>	<i>127</i>
<i>Tableau 5: Nombres de foulées pour lesquelles la direction de marche est estimée</i>	<i>128</i>
<i>Tableau 6: Résultats de l'estimation de la direction de marche pour le scénario Swinging.....</i>	<i>128</i>
<i>Tableau 7: Nombre d'estimation par personne.....</i>	<i>132</i>
<i>Tableau 8: Résultats globaux de l'ensemble des tests.....</i>	<i>133</i>
<i>Tableau 9: Résultats de l'estimation de la direction de marche suivant différentes orientations du smartphone par rapport au piéton</i>	<i>133</i>
<i>Tableau 10: Résultats de l'estimation de la direction de marche suivant différentes vitesses de marche du piéton.....</i>	<i>134</i>
<i>Tableau 11: Résultats globaux de l'expérimentation en conditions réelles</i>	<i>138</i>
<i>Tableau 12: Résultats selon les scénarii 1,2 et 3.....</i>	<i>138</i>
<i>Tableau 13: Résultats du scénario 3, avec la première phase de mouvements réguliers puis la seconde phase de mouvements désordonnés</i>	<i>138</i>
<i>Tableau 14: Résultats selon les individus</i>	<i>138</i>

Liste des Publications

Deux articles de journaux:

C. Combettes and V. Renaudin. **Delay kalman filter to estimate the attitude of a mobile object with indoor magnetic field gradients.** *Micromachines*, Vol 7, Issue 5, n°79, 2016.

V. Renaudin and C. Combettes. **Magnetic, acceleration fields and gyroscope quaternion (MAGYQ)-based attitude estimation with smartphone sensors for indoor pedestrian navigation.** *Sensors*, Vol 14, Issue 12, p 22864-22890, 2014.

Quatre actes de conférence :

S. Kumar, V. Renaudin, Y. Aoustin, E. Le-Carpentier, and C. Combettes. **Model-based and experimental analysis of the symmetry in human walking in different device carrying modes.** In the proceedings of the *6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)*, June 2016.

C. Combettes and V. Renaudin. **Comparison of misalignment estimation techniques between handheld device and walking directions.** In the proceedings of the *International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, Oct 2015.

V. Renaudin, C. Combettes, and C. Marchand. **Toward a free inertial pedestrian navigation reference system.** In the proceedings of the *International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, (IPIN)*, 2014.

V. Renaudin, C. Combettes, and F. Peyret. **Quaternion based heading estimation with handheld MEMS in indoor environments.** In the proceedings of the *IEEE/ION, Position, Location and Navigation Symposium, (PLANS)*, May 2014.

Chapitre A. Introduction

A.1 Contexte de la navigation piétonne

La navigation a d'abord été conçue pour les objets comme les véhicules, les avions, les fusées ou les projectiles. Avec l'avènement de la miniaturisation électronique, les objets connectés, comme le smartphone ou les montres, prennent une place de plus en plus prépondérante dans notre vie quotidienne. Ce développement technologique va de pair avec une demande croissante des utilisateurs. Pour le grand public, ce besoin de géolocalisation ne s'arrête plus uniquement à l'automobile, mais s'applique à tous les modes de transport. Afin d'offrir un service de navigation continu, ce n'est plus uniquement la position du véhicule, mais la position du piéton qui doit être estimée. Les services de géolocalisation doivent alors s'adapter à ce changement de paradigme : passer du véhicule au piéton.

A.2 Les technologies de positionnement

Les satellites offrent une solution de géolocalisation absolue (*GNSS, Global Navigation Satellite System*) [1]. Les satellites situés dans l'espace et gravitant autour de la terre émettent continuellement des ondes qui sont captées par un récepteur. En comparant le temps d'émission et de réception du signal satellitaire et connaissant la vitesse de propagation de l'onde, la distance satellite-récepteur est alors estimée. Pour retrouver la position du récepteur, un calcul par trilatération à partir des signaux de quatre satellites différents est effectué. Le quatrième est nécessaire pour résoudre l'inconnue de synchronisation des horloges du récepteur et du satellite. Il existe plusieurs constellations de satellites : *GPS (Global Positioning System)* pour le système satellitaire des Etats-Unis, *GLONASS* pour la Russie et d'autres projets en cours de déploiement comme le système européen *Galileo* ou encore le Chinois *Beidou*.

Les erreurs du positionnement par satellites sont issues de plusieurs éléments. Le premier élément est la dérive des horloges du satellite et du récepteur, liée à la qualité matérielle des horloges. Le deuxième élément est lié aux principes de relativité : la différence d'écoulement du temps entre le satellite et le récepteur, due aux vitesses différentes des deux mobiles et à la gravité. Un troisième élément, porte sur la propagation du signal satellitaire. Le signal du satellite traverse différents milieux qui altèrent le signal. Les couches de l'atmosphère dégradent le signal. Un quatrième élément porte sur la géométrie de mesure et la couverture satellitaires. En un lieu et un instant donnés, il peut ne pas y avoir suffisamment de satellites ou alors ces derniers peuvent être dans une configuration géométrique pour laquelle l'estimation du positionnement du récepteur est imprécise. Ces erreurs peuvent être limitées en utilisant différentes méthodes. Une méthode classiquement utilisée est le *DGPS (Differential Global Positioning System)*, utilisant un réseau de stations sur terre [2]. Cela permet d'éliminer une partie des erreurs et par conséquent d'obtenir une précision de l'ordre du décimètre en milieu extérieur dégagé.

La géolocalisation par satellite s'est largement démocratisée que ce soit pour le grand public ou encore pour les professionnels, comme dans l'aviation. L'utilisation des satellites offre une solution crédible pour la géolocalisation du piéton dans un environnement dégagé par rapport au ciel où les satellites sont disponibles. Cependant, la précision est fortement altérée dans l'environnement piéton. Dans les milieux intérieurs tels que l'intérieur des bâtiments, les halles de gare, d'aéroport

ou encore dans les canyons urbains formés par les immeubles, les signaux des satellites sont absents ou sont au plus fortement atténués, réfléchis.

Les autres principales technologies de radionavigation utilisées dans la navigation piétonne sont le WiFi, l'UWB. Une classification des performances de ces technologies en fonction de leur couverture est donnée sur la Figure 1. D'autres technologies peuvent être utilisées comme le SONAR, le LIDAR. Ces technologies permettent d'obtenir un positionnement du piéton, mais dépendent d'infrastructures dédiées. De plus, ces solutions sont limitées dans l'espace et souffrent des multitrajets à l'instar de la géolocalisation par satellite.

Les centrales inertielles sont un autre type de technologies disponible pour la navigation piétonne. Elles sont un regroupement de capteurs proprioceptifs, qui permet la mesure des mouvements. Elles sont classiquement composées d'accéléromètres et de gyromètres. Il existe une large gamme de centrales inertielles, en termes de type de fonctionnement ou de qualité de signal [2] [3]. Des magnétomètres peuvent être ajoutés aux deux autres types de capteurs et former une centrale inertielle et magnétique, IMMU (*Inertial and Magnetic Measurement Unit*). Les magnétomètres sont aussi des capteurs proprioceptifs. Ils fournissent une mesure du champ magnétique local [4]. Les centrales inertielles sont aussi utilisées dans la navigation piétonne [5] [6] [7]. Elles ont les avantages d'être peu onéreuses, selon la gamme, et d'offrir un signal continuellement disponible indépendant de toute infrastructure terrestre.

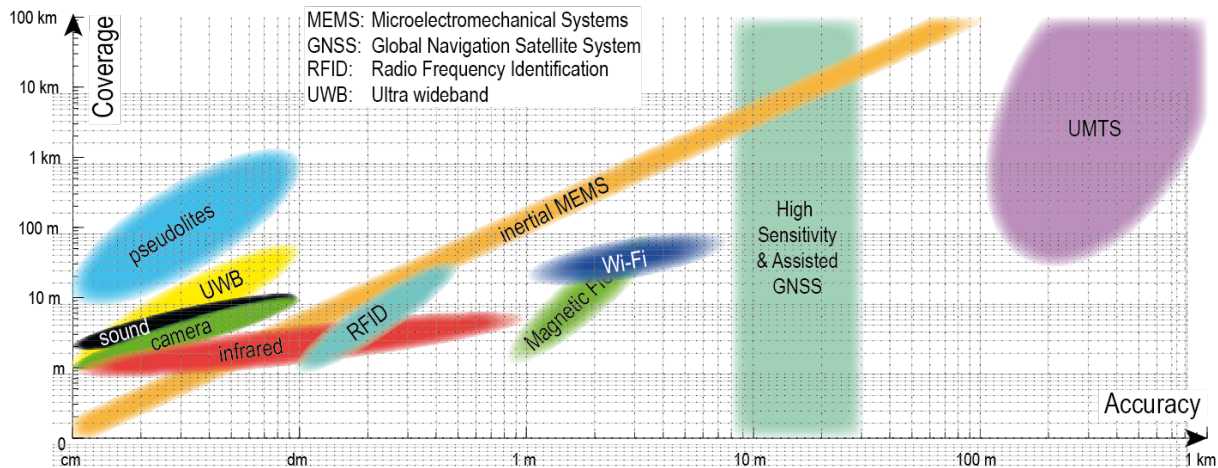


Figure 1: Technologies de géolocalisation en fonction de leur couverture spatiale et leur précision [8]

A.3 Le challenge de la direction de marche

La géolocalisation de piéton à partir d'IMMU s'effectue suivant la stratégie de navigation à l'estime appelée PDR (*Pedestrian Dead Reckoning*). La position à l'instant courant notée $\mathbf{p}_k$ est estimée à partir de la position à l'instant précédent $\mathbf{p}_{k-1}$ et de l'estimation d'un vecteur déplacement $\mathbf{d}_k$ entre ces deux instants. Lorsque l'IMMU est fixée sur le pied, le vecteur de déplacement est directement estimé par un processus d'intégration des mesures inertielles [7]. Lorsque l'on se base sur l'IMMU d'un smartphone ou objet connecté, un autre processus est adopté. Le vecteur de déplacement $\mathbf{d}_k$ est estimé à partir de deux paramètres qui sont : la longueur de pas, notée l_k et la direction de marche paramétrée par un angle, noté θ_k . Ce processus est illustré sur la Figure 2. La loi d'évolution de la position horizontale est alors :

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + l_k \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Les instants t_k et t_{k-1} sont appelés les instants de pas. La position verticale, comme par exemple un changement d'étage à l'intérieur d'un bâtiment se fait grâce à l'utilisation d'un baromètre couplé aux accéléromètres.

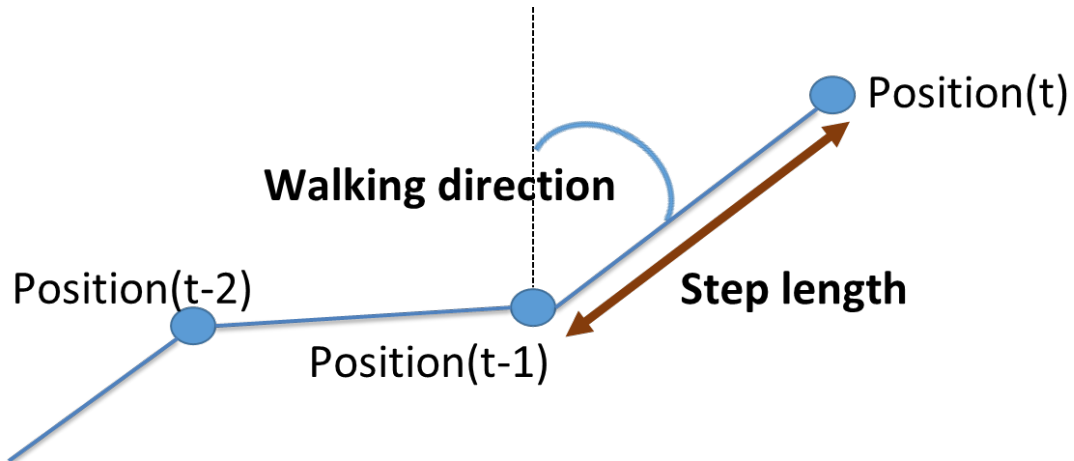


Figure 2: Processus de navigation à l'estime à l'aide d'IMMU à la main

L'estimation de la longueur de pas est une problématique largement traitée [9] [10]. L'estimation de la direction est plus difficile à appréhender. Elle a de plus un impact significatif sur l'estimation finale de position. Une erreur d'estimation de la direction de marche de seulement 5° sur une marche en ligne droite de 100 mètres provoque un décalage final de 8.7 mètres en position. La problématique de la direction de marche est qu'elle est en grande partie indépendante de l'orientation du smartphone comme illustré sur la Figure 3.



Figure 3: Distinction entre direction de marche et orientation du smartphone

La gestuelle des bras et de la main ont un important degré de liberté. Ce haut degré de liberté des membres supérieurs induit une relative indépendance entre l'orientation de la main, fournie par l'orientation du smartphone, et la direction de marche du piéton. Les membres supérieurs constituent de véritables bras de levier où les mouvements sont amplifiés en amplitude, en vitesse et en variété. Dans ces conditions l'estimation de la direction de marche se révèle complexe. À cette problématique de la variabilité de mouvements de la main, s'ajoute celle de la qualité des mesures pour traiter le problème. Les mesures inertielles sont issues de capteurs proprioceptifs, qu'il convient donc de projeter dans le référentiel de la carte pour être interprétées. Les erreurs d'orientation induisent donc des erreurs sur l'estimation la direction de marche. L'estimation de l'orientation est issue de la fusion accéléromètre-magnétomètre-gyromètre. Ce sont notamment les accélérations de la main et les perturbations magnétiques qui induisent ces erreurs d'orientation.

A.4 Contributions

La contribution principale de cette thèse porte sur l'estimation de la direction de marche en adoptant une approche statistique. Trois éléments nouveaux sont proposés dans ce mémoire :

- **Une analyse des mouvements du centre de masse et de la main** sur plusieurs individus est conduite dans une salle de capture de mouvement. Cette étude met en évidence la distribution singulière des données inertielles durant le cycle de marche.
- **Une revue des différentes méthodes d'estimation de la direction de marche** est présentée. Les différentes méthodes sont éprouvées et leurs limites pointées.
- **Une nouvelle méthode d'estimation de la direction de marche** est proposée. Les données inertielles sont considérées comme des variables aléatoires dont la distribution spatiale est connue. Ainsi des densités de probabilité sur un espace modélisent cette distribution. La direction de marche est estimée en minimisant la distance statistique entre les observations et l'ensemble des modèles prédéfinis.

Les autres contributions de la thèse portent sur l'estimation de l'orientation. Ce travail, basé sur l'approche [11], transforme le filtre avec une nouvelle formulation des modèles dynamiques et de mesure. Cette approche se base sur l'utilisation de phases opportunes du champ magnétique pour corriger la dérive des capteurs inertiels malgré la présence de perturbations magnétiques. Deux contributions sont apportées à cette approche :

- **Un nouveau modèle de mesure pour le gyromètre** est adopté. L'utilisation des mesures du gyromètre se fait suivant un processus d'intégration. Cette intégration induit des erreurs. Nous proposons donc de prendre en compte ces erreurs, en changeant le modèle de mesure classique du gyromètre. Nous interprétons cette mesure non pas comme une observation de la vitesse angulaire, mais comme une observation de la rotation entre instants consécutifs.
- **Un nouveau modèle de mesure pour le magnétomètre** est adopté. Dans l'approche [11], le modèle de mesure se base sur un champ magnétique dit de référence qui n'est pas connu a priori. Ce dernier est donc estimé au cours du processus d'estimation de l'orientation. Notre apport est de quantifier la qualité de l'estimation d'un tel champ et de la prendre en compte dans le processus d'estimation d'orientation.

A.5 Organisation du mémoire

Le mémoire est constitué de 4 chapitres principaux :

Le **chapitre B** est consacré à l'introduction à la navigation piétonne avec une centrale inertielle et magnétique. Les différentes notions et outils sont introduits pour les problématiques suivantes : la direction de marche et le calcul d'orientation. Les principales notions de la navigation piétonne y sont introduites. Elles comprennent les référentiels avec notamment le référentiel piéton, les capteurs, les paramétrages de l'orientation, les outils et notions pour l'approche statistique de l'estimation de la direction de marche.

Le **chapitre C** est consacré à l'estimation de l'orientation d'une centrale. Dans un premier temps, une revue des méthodes et stratégies pour le calcul d'orientation est présentée. Dans un second temps, un nouveau filtre d'estimation de l'orientation est décrit avec les deux contributions de la thèse sur cette problématique : la modélisation de l'information du gyromètre en termes d'orientation et non en termes de vitesse angulaire ; puis la prise en compte de l'estimation d'un champ de référence dans le processus de calcul d'orientation. Cette contribution a fait l'objet de deux publications en journal [12] [13] et une publication en conférence internationale avec acte référencé [14].

Le **chapitre D** est consacré à la problématique de la direction de marche. Dans un premier temps, une étude expérimentale sur l'analyse des mouvements du centre de masse et de la main est menée en salle de capture de mouvements. Puis nous proposons une revue des méthodes existantes pour estimer la direction de marche à partir des mesures inertielles de la main. Enfin, notre approche statistique pour estimer la direction de marche est présentée. Dans cette partie, nous proposons deux méthodes pour résoudre le problème : la maximisation de la vraisemblance et la minimisation de la divergence de Kullback-Leibler. Cette contribution a fait l'objet de deux publications en conférence internationale avec actes référencés [15] [16].

Le **chapitre E** correspond aux expérimentations. Une première expérimentation est menée en salle de capture de mouvement afin d'évaluer les erreurs des filtres d'estimation d'orientation. Puis les deux autres expérimentations sont effectuées pour qualifier les différentes méthodes d'estimation de la direction de marche. La première expérimentation est menée en salle de capture de mouvement, puis la seconde est effectuée en conditions réelles.

Chapitre B. Éléments de la navigation inertielle et magnétique pour le piéton

B.1 Référentiels et repères de la navigation piétonne

Les définitions des différents référentiels s'inspirent largement de [17] [18]. Pour notre étude, un référentiel est défini comme étant la donnée d'un espace de dimension 3 supposé en général euclidien et combiné à un temps. Les temps des différents référentiels seront supposés identiques pour tous. Pour chaque référentiel, un repère est défini de manière à exprimer l'évolution temporelle de la position et ses dérivées temporelles, d'un point ou objet de l'espace.

B.1.1 Listes des référentiels

B.1.1.1 Référentiel Inertiel

Le référentiel inertiel est un référentiel supposé galiléen, c'est-à-dire que les lois de la mécanique newtonienne s'y appliquent. Il est attaché au centre de la Terre, avec pour axes : l'axe $\mathbf{e}_1$, axe pointant vers le soleil au moment de l'équinoxe, l'axe $\mathbf{e}_3$ est l'axe de rotation de la Terre puis l'axe $\mathbf{e}_2$ est défini de manière à ce que le repère orthonormé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ soit direct (règle de la main droite). À partir de ce référentiel, la rotation de la Terre sur elle-même est observable. En revanche, pour observer la rotation de la Terre autour du soleil, un nouveau référentiel pouvant être supposé galiléen doit être défini. Dans la suite du document, un vecteur $\mathbf{x}$ exprimé dans la base du repère inertiel sera noté $\mathbf{x}^i$.

B.1.1.2 Référentiel Local ou de Navigation

Le référentiel local ou de navigation est défini à partir du plan tangent en un point de la terre. Il s'agit d'une approximation locale de la terre. Il est défini par les axes locaux $(\mathbf{n}, \mathbf{e}, \mathbf{d})$, correspondants au nord géographique, à l'est et à la verticale perpendiculaire au plan tangent. Cette approximation locale de la terre par un plan tangent permet d'appliquer les principes de géométrie euclidienne. Le référentiel de navigation et son repère orthonormé associé sont notés n et $\mathbf{x}^n$ est l'expression du vecteur $\mathbf{x}$ dans le repère de navigation.

B.1.1.3 Référentiel Body

Le référentiel body est un référentiel attaché à un objet présent dans l'espace. Il est attaché à un point de l'objet et comporte un repère orthonormé noté $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. L'expression du vecteur $\mathbf{x}$ est notée $\mathbf{x}^b$ dans le repère body. Le calcul d'orientation d'un objet dans un référentiel local revient à estimer les coordonnées des axes du repère b dans le repère n . Dans la suite du mémoire, le référentiel b sera le référentiel associé à la centrale inertielle et magnétique.

B.1.1.4 Référentiel Piéton

Un dernier référentiel est défini pour la navigation piétonne, il s'agit du référentiel piéton. Il est noté p et est composé de la base orthonormée directe $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$. Les trois vecteurs correspondent aux trois vecteurs principaux de l'anatomie humaine. Les vecteurs sont définis de la manière suivante : $\mathbf{p}_1$ est orienté vers l'avant du piéton, $\mathbf{p}_3$ est le vecteur vertical correspondant au vecteur $\mathbf{d}$ de la base n du référentiel de navigation. Enfin le vecteur $\mathbf{p}_2$ est défini de manière à ce que la base p soit directe. L'expression du vecteur $\mathbf{x}$ est notée $\mathbf{x}^p$ dans le repère piéton.

B.1.1.5 Illustration des repères

Afin d'illustrer les différents référentiels, une schématisation des différents repères est proposée en Figure 4 :

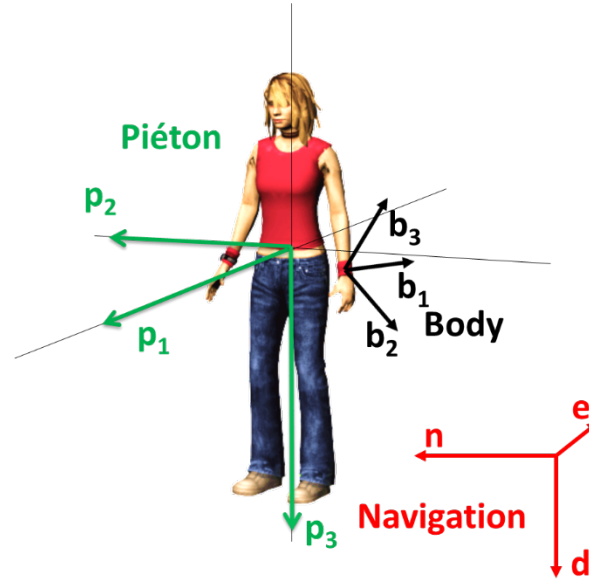


Figure 4: Le piéton et les différents repères associés : référentiel de navigation (en rouge), le référentiel piéton (en vert) et le référentiel body (en noir)

La position du piéton et ses dérivées temporelles (vitesse et accélération) sont décrites dans le référentiel de navigation avec son repère associé ($\mathbf{n}, \mathbf{e}, \mathbf{d}$) (en rouge). Le référentiel body (en noir) correspond à la centrale inertielle et magnétique présente dans les objets connectés comme le smartphone ou la montre connectée portés par le piéton. Le référentiel piéton (en vert) est quant à lui attaché au piéton, sur son centre de gravité.

B.1.2 Composition des mouvements

Un résultat important, démontré dans cette partie, à partir duquel sont établies les lois d'évolution temporelle de l'orientation est la formule de dérivation entre deux référentiels ou formule de Bour :

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_b + \boldsymbol{\omega}_{ab} \wedge \mathbf{x} \quad (2.1)$$

avec :

- $\mathbf{x}$ un vecteur de l'espace
- a, b deux référentiels
- $\boldsymbol{\omega}_{ab}$ la vitesse de rotation du repère de b par rapport au repère de a
- $\wedge$ le produit vectoriel

Soit a et b deux référentiels, $\mathbf{x}^a$ un vecteur exprimé dans le repère a de base orthonormée $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ et $\mathbf{x}^b = (x_1^b \ x_2^b \ x_3^b)^T$ son expression dans le repère b de base orthonormée $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$

. La dérivée temporelle de $\mathbf{x}$ dans le référentiel a et exprimée dans le repère b est noté $\left(\frac{d\mathbf{x}^b}{dt} \right)_a$.

Cette dérivée temporelle se développe de la manière suivante :

$$\left(\frac{d\mathbf{x}^b}{dt}\right)_a = \sum_{k=1}^3 \frac{dx_k^b}{dt} \mathbf{b}_k + x_k^b \left(\frac{d\mathbf{b}_k}{dt}\right)_a \quad (2.2)$$

avec $\mathbf{x}^b = (x_1^b \ x_2^b \ x_3^b)^T$ les coordonnées de $\mathbf{x}$ dans b .

Propriété 1: Un vecteur unitaire et sa dérivée temporelle sont orthogonaux, soit $\langle \mathbf{b}_k, \frac{d\mathbf{b}_k}{dt} \rangle = 0$

Propriété 2: Pour deux vecteurs de la base orthonormée : $k \neq p \Rightarrow \langle \mathbf{b}_k, \frac{d\mathbf{b}_p}{dt} \rangle = -\langle \mathbf{b}_p, \frac{d\mathbf{b}_k}{dt} \rangle$

En utilisant ces deux propriétés et en notant $\langle, \rangle$ le produit scalaire euclidien, la dérivée temporelle des vecteurs de la base b dans l'équation (2.2) devient :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} = \langle \mathbf{b}_2, \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \rangle \mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{b}_3, \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \rangle \mathbf{b}_3 \\ \frac{d\mathbf{b}_2}{dt} = -\langle \mathbf{b}_2, \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{b}_3, \frac{d\mathbf{b}_2}{dt} \rangle \mathbf{b}_3 \\ \frac{d\mathbf{b}_3}{dt} = \langle \mathbf{b}_1, \frac{d\mathbf{b}_3}{dt} \rangle \mathbf{b}_1 - \langle \mathbf{b}_3, \frac{d\mathbf{b}_2}{dt} \rangle \mathbf{b}_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

En développant l'équation (2.2) à partir de (2.3), il vient :

$$\left(\frac{d\mathbf{x}^b}{dt}\right)_a = \begin{pmatrix} \frac{dx_1^b}{dt} - \langle \mathbf{b}_2, \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \rangle x_2^b + \langle \mathbf{b}_3, \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \rangle x_3^b \\ \frac{dx_2^b}{dt} - \langle \mathbf{b}_3, \frac{d\mathbf{b}_2}{dt} \rangle x_3^b + \langle \mathbf{b}_2, \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \rangle x_1^b \\ \frac{dx_3^b}{dt} - \langle \mathbf{b}_1, \frac{d\mathbf{b}_3}{dt} \rangle x_1^b + \langle \mathbf{b}_3, \frac{d\mathbf{b}_2}{dt} \rangle x_2^b \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

En respectant la règle de la main droite, $\boldsymbol{\omega}_{ab}^b = \left(\langle \mathbf{b}_3, \left(\frac{d\mathbf{b}_2}{dt}\right)_a \rangle \ \langle \mathbf{b}_1, \left(\frac{d\mathbf{b}_3}{dt}\right)_a \rangle \ \langle \mathbf{b}_2, \left(\frac{d\mathbf{b}_1}{dt}\right)_a \rangle \right)^T$ est le vecteur de vitesse angulaire de b par rapport à a , exprimé dans b . À partir de cette expression, la formule de Bour sur la composition des mouvements est déduite:

$$\left(\frac{d\mathbf{x}^b}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\mathbf{x}^b}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega}_{ab}^b \wedge \mathbf{x}^b \quad (2.5)$$

La formule (2.5) est même indépendante du repère dans lequel sont exprimés les vecteurs, la formule de Bour (2.1) est retrouvée :

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega}_{ab} \wedge \mathbf{x} \quad (2.6)$$

B.2 Centrales Inertielles et Magnétiques

B.2.1 Les capteurs inertiels

Dans ce mémoire, l'appellation « capteurs inertiels » désigne les accéléromètres et les gyromètres. Plusieurs technologies de capteurs inertiels ont été développées. Une liste non exhaustive des différents types d'accéléromètres et de gyromètres est présentée en [19]. Cette partie est uniquement concentrée sur les accéléromètres et gyromètres de type MEMS.

B.2.1.1 L'accéléromètre

Les accéléromètres de types MEMS (*Pendulous and Vibrating-Beam Accelerometer*) sont composés d'éléments qui ont leurs propriétés électriques (Tension, courant, capacité, résistance) modifiées lors d'un mouvement. Le principe de mesure des accéléromètres est basé sur l'estimation du déplacement d'une masse attachée à un ressort par rapport au point d'équilibre.

$$\mathbf{a}_{ib} = \mathbf{g} - \frac{\mathbf{K}}{m} \mathbf{x} \quad (2.7)$$

avec :

- $\mathbf{x}$ le déplacement de la masse m
- $\mathbf{a}_{ib}$ l'accélération de la masse m
- $\mathbf{g}$ la force gravitationnelle
- $\mathbf{K}$ la raideur du ressort

Le déplacement de la masse m est donc proportionnel à la force spécifique notée $\mathbf{f}_{ib}$ et définie par :

$$\mathbf{f}_{ib} = \mathbf{a}_{ib} - \mathbf{g}$$

L'accéléromètre fournit ainsi une mesure tridimensionnelle de la force spécifique subie par la centrale inertielle. Cette dernière s'exprime en m/s^2 , en g ou mg (milli- g). La modélisation du signal de l'accéléromètre est la suivante [20]:

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{a}_{ib}^b - \mathbf{g}^b + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \quad (2.8)$$

avec :

- $\mathbf{y}_a$ la mesure de l'accéléromètre,
- $\mathbf{a}_{ib}^b$ l'accélération du centre du repère de la centrale par rapport au référentiel inertielle et exprimée dans le repère de la centrale,
- $\mathbf{n}_a$ est un bruit blanc centré et de variance σ_a^2
- $\mathbf{b}_a$ est le biais de l'accéléromètre.

B.2.1.2 Le gyromètre

De manière analogue aux accéléromètres, les gyromètres MEMS (*Vibratory Gyroscopes*) sont des dispositifs électroniques qui donnent une information inertielle par mesure d'une grandeur électrique. Le principe de mesure est basé sur la variation de l'accélération de Coriolis de l'élément vibrant. Un élément du gyromètre possède un mode de vibration propre. Lors d'un mouvement de rotation, l'accélération de Coriolis va être modifiée suivant la vitesse angulaire issue de ce mouvement :

$$\mathbf{a}_{Corilis} = 2\boldsymbol{\omega}_{ib} \wedge \mathbf{v}_r \quad (2.9)$$

avec :

- $\mathbf{a}_{Corilis}$ l'accélération de Coriolis
- $\mathbf{v}_r$ la vitesse relative de l'élément en vibration par rapport au gyromètre
- $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ la vitesse angulaire du gyromètre par rapport au référentiel inertiel

Le gyromètre fournit donc une mesure tridimensionnelle de la vitesse de rotation de la centrale inertielle. La vitesse de rotation est exprimée en rad/s ou °/s. La modélisation du signal du gyromètre est [20]:

$$\mathbf{y}_g = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g \quad (2.10)$$

avec :

- $\mathbf{y}_g$ la mesure du gyromètre,
- $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ la vitesse de rotation de la centrale inertielle par rapport au référentiel inertiel et exprimée dans le repère de la centrale inertielle,
- $\mathbf{n}_g$ un bruit blanc centré de variance σ_g^2
- $\mathbf{b}_g$ est le biais du gyromètre.

Les gyromètres MEMS utilisés en navigation piétonne ont une dérive comprise entre quelques °/heure à plusieurs dizaines de °/heure.

B.2.1.3 Variance d'Allan

L'estimation de la variance d'Allan est utilisée afin de caractériser la stabilité des signaux inertiels que ce soient ceux issus des accéléromètres ou des gyromètres [21] [22] [23]. La variance d'Allan d'un signal s en τ correspond à une moyenne d'écarts quadratiques entre deux moyennes du signal sur des fenêtres temporelles successives de longueur τ :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle (\bar{s}_{i+1} - \bar{s}_i)^2 \right\rangle \quad (2.11)$$

avec :

- σ^2 la variance d'Allan,
- $\bar{s}_i$ la moyenne du signal sur la $i^{\text{ème}}$ fenêtre avec pour longueur temporelle τ ,
- $\langle \rangle$ la moyenne temporelle sur l'ensemble du signal.

Il existe plusieurs estimateurs de la variance d'Allan [24], avec ou sans chevauchement des fenêtres temporelles (*Non-Overlapped Allan variance* et *Overlapping Allan variance*). Le chevauchement permet d'obtenir une estimation de la variance d'Allan plus stable, mais cependant plus coûteuse en temps de calcul. Une autre variance d'Allan a été définie, il s'agit de la variance d'Allan modifiée (*Modified Allan Variance*) [25], permettant d'affiner l'analyse du signal en différenciant les bruits de phase blancs et de scintillements.

Pour illustrer l'estimation de la variance d'Allan, l'écart-type de cette estimation appelée déviation d'Allan est régulièrement utilisé. Une illustration de l'estimation de la déviation d'Allan est proposée en Figure 5 :

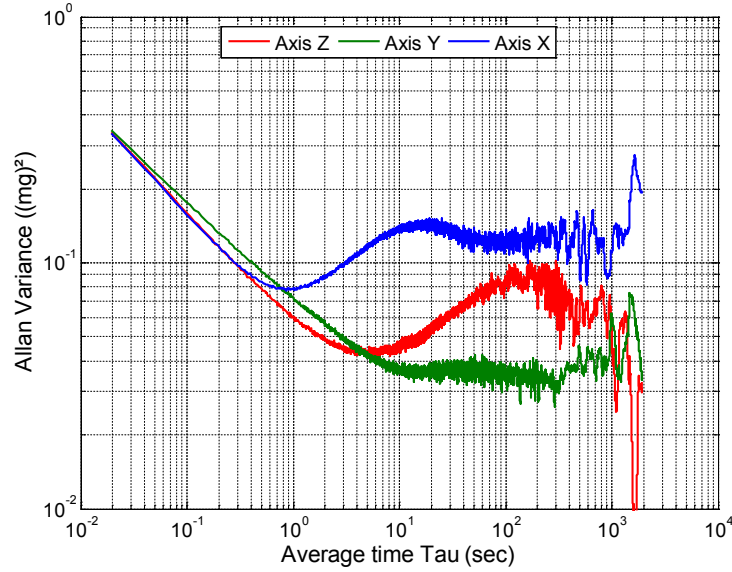


Figure 5: Déviation d'Allan pour les 3 composantes de l'accéléromètre de l'ADIS 16488

À partir de l'allure des courbes des déviations d'Allan estimées, différents types d'erreurs peuvent être caractérisés [23] : Bruit blanc, Instabilité du biais, Bruit de quantification, Bruit corrélé... L'estimation de la variance d'Allan permet de caractériser la qualité des capteurs MEMS.

B.2.2 Le magnétomètre

Le magnétomètre fournit une mesure tridimensionnelle du champ magnétique au point de mesure. Les magnétomètres de type MEMS sont composés d'éléments sensibles au champ magnétique externe, qui provoque des changements de propriétés électriques de l'élément sensible (Magnétorésistance, Fluxgate, Magnétomètre à effet Hall...). Les erreurs de mesure du magnétomètre sont [26]: le facteur d'échelle notée $\mathbf{S}$, la non-orthogonalité des axes de mesures notée $\mathbf{M}$, un biais de mesure noté $\mathbf{b}_{so}$, puis les erreurs dues aux éléments ferromagnétiques de la plateforme d'acquisition que sont les erreurs de fer doux (*soft-iron*) notée $\mathbf{A}_{si}$ et erreurs de fer dur (*hard-iron*) noté $\mathbf{b}_{hi}$:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{SM}(\mathbf{A}_{si}\mathbf{h} + \mathbf{b}_{hi}) + \mathbf{b}_{so} + \mathbf{n} \quad (2.12)$$

Afin de mesurer le champ magnétique externe à la plateforme, le signal est dans un premier temps calibré. L'ensemble du processus de calibration est présenté en [26]. En prenant en compte l'ensemble des erreurs citées, le modèle du magnétomètre s'écrit sous la forme suivante:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (2.13)$$

$\tilde{\mathbf{h}}$ est la mesure du magnétomètre. $\mathbf{h}$ est la valeur du champ magnétique local. $\mathbf{A}$ est une matrice 3×3 et $\mathbf{b}$ un vecteur contenant les erreurs précédemment citées. $\mathbf{n}$ est un bruit blanc avec σ_n^2 sa matrice de variance.

Rappel sur la méthode de calibration du magnétomètre présentée dans [26] :

Le champ magnétique local est supposé être le champ magnétique terrestre (ou connu) [27]. Selon la modélisation (2.13) et en calculant la norme de chaque côté, il vient la relation suivante :

$$(\tilde{\mathbf{h}} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^{-1} (\tilde{\mathbf{h}} - \mathbf{b}) = \|\mathbf{h}_{earth}\|_2^2 \quad (2.14)$$

avec :

- $\|\cdot\|_2$ la norme carrée de $\mathbb{R}^3$ et
- $\mathbf{h}_{earth}$ le champ magnétique terrestre disponible en [27] .

L'équation (2.14) est l'équation cartésienne d'un ellipsoïde, de centre $\mathbf{b}$ et d'axes entièrement définis par la matrice définie positive :

$$\mathbf{Q} = \frac{(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^{-1}}{\|\mathbf{h}_{earth}\|_2^2} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

La calibration du signal du magnétomètre revient donc à rechercher les paramètres d'un ellipsoïde. Afin de déterminer $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ les paramètres d'erreurs, une phase de mesure dans toutes les orientations possibles est effectuée dans un environnement où le magnétomètre mesure uniquement le champ magnétique terrestre. Cette procédure permet d'obtenir n mesures du magnétomètre qui décrivent alors un ellipsoïde. En développant la relation (2.14) il vient pour la $i^{\text{ème}}$ mesure notée $\tilde{\mathbf{h}}_i$:

$$\tilde{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{h}}_i - 2\tilde{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{Q} \mathbf{b} - 1 = 0 \quad (2.16)$$

L'équation (2.16) peut être réécrite suivant une formulation linéaire :

$$\mathbf{K}_i \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{c} \\ d \end{bmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

avec :

- $\tilde{\mathbf{h}}_i = (\tilde{h}_{i1} \quad \tilde{h}_{i2} \quad \tilde{h}_{i3})^T$
- $\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{i1}^2 & \tilde{h}_{i2}^2 & \tilde{h}_{i3}^2 & 2\tilde{h}_{i1}\tilde{h}_{i2} & 2\tilde{h}_{i1}\tilde{h}_{i3} & 2\tilde{h}_{i2}\tilde{h}_{i3} & \tilde{h}_{i1} & \tilde{h}_{i2} & \tilde{h}_{i3} & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{q} = (q_{11} \quad q_{22} \quad q_{33} \quad q_{12} \quad q_{13} \quad q_{23})^T$
- $\mathbf{c} = -2\mathbf{Q}\mathbf{b}$
- $d = \mathbf{b}^T \mathbf{Q} \mathbf{b} - 1 \Rightarrow d = \frac{1}{4} \mathbf{c} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{c} - 1$

En prenant en compte l'ensemble des mesures notées i , et en imposant une contrainte de norme g sur la solution, le problème de minimisation s'écrit :

$$\min_{\mathbf{x}} (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) = 0 \quad (2.18)$$

avec :

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$, la fonction à minimiser
- $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 - 1$, les contraintes sur $\mathbf{x}$
- $\mathbf{x} = (\mathbf{q}^T \quad \mathbf{c}^T \quad d)^T$
- $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^T \mathbf{K}_i$, symétrique réelle positive, elle devient définie dès lors que la famille $(\mathbf{K}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est de rang $0.5m(m+3)+1$, dans le cas présent $m = 3$.

La contrainte sur la norme est arbitraire, elle permet de choisir une solution $\mathbf{x}_{opt}$ non nulle. Différentes méthodes permettent de résoudre le problème (2.18), présentées en [28]. Dans cette partie, c'est la méthode du multiplicateur de Lagrange [29] qui est développée. Soit la fonction L définit par : $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$, la solution $\mathbf{x}_{opt}$ possède la propriété suivante :

$$\mathbf{K} \mathbf{x}_{opt} = \lambda \mathbf{x}_{opt} \quad (2.19)$$

La solution $\mathbf{x}_{opt}$ est donc un vecteur propre de la matrice $\mathbf{K}$ associé à la plus petite valeur propre notée λ_{min} afin d'obtenir le minimum. Il est à noter que $\mathbf{K}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives (sauf cas particulier). Posons $\hat{\mathbf{x}}_{opt} = \alpha \mathbf{x}_{opt}$ la solution pour laquelle $\frac{1}{4} \hat{\mathbf{c}}_{opt}^T \hat{\mathbf{Q}}_{opt}^{-1} \hat{\mathbf{c}}_{opt} - \hat{d}_{opt} = 1$, où le coefficient α est alors définit par :

$$\alpha = \frac{4}{\mathbf{c}_{opt}^T \mathbf{Q}_{opt}^{-1} \mathbf{c}_{opt} - 4d_{opt}} \quad (2.20)$$

Les paramètres de calibration (2.13) peuvent alors être retrouvés :

$$\begin{cases} \mathbf{b} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{Q}}_{opt}^{-1} \mathbf{c} \\ \mathbf{A}^{-1} = \|\mathbf{h}_{earth}\|_2 \hat{\mathbf{Q}}_{opt}^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.21)$$

Une diagonalisation de $\hat{\mathbf{Q}}_{opt}$ permet de calculer $\hat{\mathbf{Q}}_{opt}^{\frac{1}{2}}$. Après cette phase de calibration, le signal du magnétomètre est modélisé par :

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{m}^b + \mathbf{n}_m \quad (2.22)$$

avec :

- $\mathbf{y}_m$ est la mesure du magnétomètre
- $\mathbf{m}^b$ est le champ magnétique local exprimé dans le repère de la centrale inertielle
- $\mathbf{n}_m$ est un bruit blanc centré et de variance σ_m^2

Le champ magnétique est une grandeur exprimée en G (Gauss) ou en T (Tesla).

B.3 Paramétrage de l'orientation

Une présentation des différents paramétrages de l'orientation d'un objet dans l'espace est fournie dans [30] et [31]. Dans cette partie, sont rappelés trois paramétrages : la matrice de rotation, les quaternions et les angles d'Euler.

B.3.1 Les matrices de rotation

Comme il a été énoncé précédemment B.1.1.2, l'orientation d'un objet muni d'un repère orthonormé noté b dans un espace local muni d'un repère n orthonormé, peut être définie par l'expression des vecteurs de la base b dans la base n . Une matrice est alors définie, il s'agit de la matrice de passage ou matrice de rotation de la base b à la base n :

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

avec $\mathbf{b}_k = (b_{1k} \ b_{2k} \ b_{3k})^T$ l'expression de $\mathbf{b}_k$ dans n . La matrice de rotation possède plusieurs propriétés :

Propriété 1: *c'est une matrice inversible et $\mathbf{C}_b^n \mathbf{C}_b^{nT} = \mathbf{I}_3$ avec $\mathbf{I}_3$ la matrice identité de $\mathbb{R}^3$*

Cette propriété découle directement de la définition de la matrice de rotation. La base b est une base orthonormée et ses éléments sont exprimés dans une base orthonormée. Tous les coefficients d'une matrice de rotation sont compris entre -1 et 1.

Propriété 2: *le déterminant est $\mathbf{C}_b^n$ unitaire, $|\mathbf{C}_b^n| = \det(\mathbf{C}_b^n) = 1$*

Par définition de la matrice de rotation, les bases n et b sont orthonormées directes, si bien que le déterminant est égal à 1. Les propriétés 1 et 2 suffisent aussi à définir une matrice de rotation.

Propriété 3: *l'ensemble des matrices de rotation muni de la multiplication matricielle forme un sous-groupe, non abélien du groupe des matrices inversibles.*

Le produit de deux matrices de rotation est de déterminant égal à 1 et l'inverse de ce produit est le produit inverse des transposés. L'ensemble est donc stable par la multiplication matricielle, chaque élément est donc inversible et la matrice identité est l'élément neutre : Il s'agit bien d'un sous-groupe des matrices inversibles.

Propriété 4: *Pour chaque matrice de rotation $\mathbf{C}_b^n$ il existe des éléments propres $\mathbf{u}, \theta$ tels que :*

$\mathbf{C}_b^n \mathbf{u} = \mathbf{u}, \|\mathbf{u}\| = 1$ et la trace de $\mathbf{C}_b^n$ est $\text{tr}(\mathbf{C}_b^n) = 2\cos(\theta) + 1$. Le spectre de $\mathbf{C}_b^n$ dans les complexes $\mathbb{C}$ est $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$

Démonstration :

Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée est défini par :

$$\chi_{\mathbf{R}}(\lambda) = \det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{Id}) \quad (2.24)$$

En utilisant les propriétés 1 et 2 sur les matrices de rotations, le polynôme caractéristique d'une matrice de rotation $\mathbf{C}_b^n$ est :

$$\chi_{\mathbf{C}_b^n}(\lambda) = -\lambda^3 + \text{tr}(\mathbf{C}_b^n)\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{C}_b^n)\lambda + 1 \quad (2.25)$$

La valeur 1 est une racine évidente du polynôme, le vecteur propre associé à cette valeur est l'axe de rotation, il est invariant lorsque la rotation lui est appliquée, il est noté $\mathbf{u}$. Le polynôme (2.25) se factorise donc par $\lambda - 1$:

$$\chi_{\mathbf{C}_b^n}(\lambda) = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + (1 - \text{tr}(\mathbf{C}_b^n))\lambda + 1\right) \quad (2.26)$$

Il reste donc à déterminer les racines du polynôme du 2nd degré. Le discriminant de ce polynôme est négatif (car 1 est une valeur propre de $\mathbf{C}_b^n$):

$$\Delta = (1 - \text{tr}(\mathbf{C}_b^n))^2 - 4 \leq 0 \quad (2.27)$$

Les racines sont donc complexes conjuguées :

$$x_{12} = \frac{(\text{tr}(\mathbf{C}_b^n) - 1)}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{(\text{tr}(\mathbf{C}_b^n) - 1)}{2}\right)^2} \quad (2.28)$$

En posant $\cos(\theta) = \frac{(\text{tr}(\mathbf{C}_b^n) - 1)}{2}$, $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{(\text{tr}(\mathbf{C}_b^n) - 1)}{2}\right)^2}$, les racines du polynôme caractéristique de $\mathbf{C}_b^n$ sont $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$

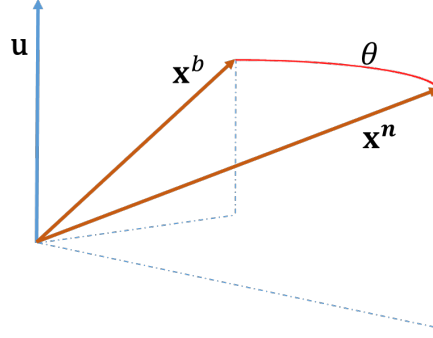
Propriété 5: la matrice $\mathbf{C}_b^n$ peut s'exprimer à partir de ses éléments propres $\mathbf{u}, \theta$ (formule de rotation de Rodrigues):

$$\mathbf{C}_b^n = \cos(\theta)\mathbf{I}_3 + (1 - \cos(\theta))\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \sin(\theta)[\mathbf{u} \times] \quad (2.29)$$

La matrice $\mathbf{C}_b^n$ représente la rotation d'axe $\mathbf{u}$ et d'angle θ . Le passage de la base b à la base n se fait grâce au produit matriciel :

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{x}^b \quad (2.30)$$

Une illustration de la rotation d'un vecteur $\mathbf{x}$ d'un angle θ autour de l'axe $\mathbf{u}$ est proposée en Figure 6. La projection de $\mathbf{x}$ sur l'axe $\mathbf{u}$ est conservée alors que la projection de $\mathbf{x}$ sur le plan orthogonal à $\mathbf{u}$ est « tournée » d'un angle θ dans le sens direct lorsque θ est positif.


 Figure 6: Rotation d'axe $\mathbf{u}$ et d'angle θ du vecteur $\mathbf{x}$

Propriété 6 : La dérivée de la matrice de rotation $\mathbf{C}_b^n$ est reliée à la vitesse angulaire de b par rapport à n et exprimée dans b par

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n [\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times] \quad (2.31)$$

avec :

- $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$ la vitesse angulaire de b par rapport à n exprimée dans b
- $[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice antisymétrique transformant le vectoriel de deux vecteurs en produit matrice vecteur.

Démonstration :

La matrice $\mathbf{C}_b^n$ peut s'écrire sous la forme suivante : $\mathbf{C}_b^n = (\mathbf{b}_k^n)_{1 \leq k \leq 3}$ en dérivant $\mathbf{C}_b^n$ et en appliquant la formule de Bour développée en (2.5) sur chacune des colonnes de la matrice $\mathbf{C}_b^n$:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \left(\left(\frac{d\mathbf{b}_k^n}{dt} \right)_b + [\boldsymbol{\omega}_{nb}^n \times] \mathbf{b}_k^n \right)_{1 \leq k \leq 3} \quad (2.32)$$

Or $\left(\frac{d\mathbf{b}_k^n}{dt} \right)_b = 0$, car la base b est fixe dans le référentiel b par définition, si bien que la dérivée devient $\dot{\mathbf{C}}_b^n = ([\boldsymbol{\omega}_{nb}^n \times] \mathbf{b}_k^n)_{1 \leq k \leq 3}$. En factorisant par la vitesse angulaire, l'équation (2.32) devient

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = [\boldsymbol{\omega}_{nb}^n \times] \mathbf{C}_b^n \quad (2.33)$$

En utilisant le fait que $[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times] = \mathbf{C}_b^{nT} [\boldsymbol{\omega}_{nb}^n \times] \mathbf{C}_b^n$, la formule (2.31) est retrouvée :

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n [\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times] \quad (2.34)$$

B.3.2 Les quaternions

B.3.2.1 L'espace des quaternions

L'ensemble des quaternions basé sur le corps des réels est noté $\mathbb{H}$ en référence à William Rowan Hamilton, le mathématicien qui a découvert la multiplication dans cet espace. L'ensemble des quaternions muni de l'addition et du produit avec un scalaire est isomorphe à l'espace vectoriel des quadruplets réels $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Un quaternion $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ est donc un quadruplet de réels (q_1, q_2, q_3, q_4) .

Une autre notation est adoptée pour décrire un quaternion :

$$\mathbf{q} = (q_1, \mathbf{u}_q^T)^T \quad (2.35)$$

avec q_1 la partie dite scalaire ou réelle du quaternion et $\mathbf{u}_q = (q_2 \ q_3 \ q_4)^T$ la partie vectorielle ou imaginaire notée $\text{Im}(\mathbf{q})$ du quaternion $\mathbf{q}$. Cet espace est de plus muni d'une multiplication interne notée $\otimes$. Pour deux quaternions $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}$ l'opération $\otimes$ est définie par :

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \mathbf{u}_q \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_1 \\ \mathbf{u}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 p_1 - \langle \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_p \rangle \\ q_1 \mathbf{u}_p + p_1 \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{u}_p \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Avec ce nouvel opérateur, l'espace des quaternions forme un corps gauche, car la commutativité avec cette multiplication n'est pas conservée. Le produit de quaternions peut aussi s'écrire sous la forme de produits matriciels :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} &= \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{p} & \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} &= \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{q} \\ &= \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} & \text{ou} &= \begin{pmatrix} p_1 & -p_2 & -p_3 & -p_4 \\ p_2 & p_1 & p_4 & -p_3 \\ p_3 & -p_4 & p_1 & p_2 \\ p_4 & p_3 & -p_2 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

L'espace des quaternions est muni du produit scalaire euclidien, identique au produit scalaire euclidien classique de $\mathbb{R}^4$, il est noté $\langle, \rangle$ et est défini, pour $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}$, par :

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \sum_{i=1}^4 q_i p_i \quad (2.38)$$

D'autres éléments peuvent être définis sur un quaternion :

- Le conjugué d'un quaternion $\mathbf{q}$ est $\bar{\mathbf{q}} = (q_1 \ -\mathbf{u}_q^T)^T$
- La norme (euclidienne) d'un quaternion $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} = \sqrt{q_1^2 + \|\mathbf{u}_q\|^2}$
- L'inverse d'un quaternion non nul : $\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} (q_1 \ -\mathbf{u}_q^T)^T$
- L'élément unité est : $\mathbf{1}_q = (1 \ \mathbf{0})^T$

Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sera noté sous sa forme quaternion par :

$$(\mathbf{x})_q = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x}^T \end{pmatrix}^T \quad (2.39)$$

Un quaternion $\mathbf{q}$ peut aussi s'écrire sous une forme dite polaire avec les paramètres $(\theta, \mathbf{u})$ définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_q}{\|\mathbf{u}_q\|} \\ \cos(\theta) = \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|}, \sin(\theta) = \frac{\|\mathbf{u}_q\|}{\|\mathbf{q}\|}, \theta \in [0, \pi] \end{cases} \quad (2.40)$$

Ainsi on obtient :

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \mathbf{u}^T \end{pmatrix}^T \quad (2.41)$$

B.3.2.2 Quaternion et rotation

L'espace des quaternions est intimement relié aux rotations de $\mathbb{R}^3$, comme l'énonce la propriété suivante.

Propriété 1 : L'opération $\mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}$ correspond à la rotation d'axe $\mathbf{u}$ et d'angle θ

avec : $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u}^T \end{pmatrix}^T$ un quaternion unitaire

Démonstration :

La démonstration consiste à calculer le triple produit de quaternions $\mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}$. Commençons par calculer le produit $(\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}$:

$$(\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \mathbf{x}^b, \mathbf{u} \rangle \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{x}^b + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}^b \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Puis en multipliant à gauche par $\mathbf{q}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}} = & \\ & \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \mathbf{x}^b, \mathbf{u} \rangle - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \mathbf{x}^b, \mathbf{u} \rangle \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \langle \mathbf{x}^b, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \mathbf{x}^b + 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}^b + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}^b) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

En utilisant les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos(\theta) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \\ \quad = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}^b) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}^b \rangle \mathbf{u} - \mathbf{x}^b \end{array} \right. \quad (2.44)$$

L'expression de $\mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}$ devient :

$$\mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}} = (\cos(\theta) \mathbf{x}^b + \sin(\theta) \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}^b + (1 - \cos(\theta)) \langle \mathbf{x}^b, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u})_q \quad (2.45)$$

En factorisant par $\mathbf{x}^b$ l'expression de $\mathbf{C}_b^n$ apparaît, ce qui permet de conclure :

$$(\mathbf{x}^n)_q = \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}} \quad (2.46)$$

Le quaternion $\mathbf{q}$ est donc le quaternion (à une ambiguïté de signe près) permettant le passage de la base b vers la base n , il est noté $\mathbf{q}_b^n$. Ainsi, l'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$ peut-être représenté par la sphère unité de $\mathbb{H}$. L'hypersphère des quaternions unité ou 3-sphère est donc l'espace géométrique représentant les rotations de l'espace $\mathbb{R}^3$. Ce n'est pas un espace vectoriel, mais c'est une variété riemannienne de dimension 3. La métrique riemannienne est induite par le produit scalaire classique. La distance entre deux quaternions unitaires $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ est donnée par :

$$d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = |\arccos(\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle)| \quad (2.47)$$

Cette distance représente la longueur d'un arc sur une sphère. De la même manière que la matrice de rotation, le quaternion $\mathbf{q}_b^n$ est relié à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$.

Propriété 2 : La dérivée d'un quaternion unitaire est définie par la formule :

$$\dot{\mathbf{q}}_b^n = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^n \otimes (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b)_q \quad (2.48)$$

Démonstration :

En dérivant dans le référentiel n l'équation (2.46) pour tout vecteur $\mathbf{x}$ fixe dans n il vient :

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{x}^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_b^n + \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\left(\frac{d\mathbf{x}^b}{dt} \right)_b \right)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_b^n + \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{x}^b)_q \otimes \dot{\bar{\mathbf{q}}}_b^n \quad (2.49)$$

Puis en appliquant la formule de Bour et en multipliant à gauche par $\bar{\mathbf{q}}_b^n$ et à droite par $\mathbf{q}_b^n$:

$$\mathbf{0} = \bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{x}^b)_q + (\mathbf{x}^b)_q \otimes \dot{\bar{\mathbf{q}}}_b^n \otimes \mathbf{q}_b^n + \left([\boldsymbol{\omega}_{bn}^b \times] \mathbf{x}^b \right)_q \quad (2.50)$$

En remarquant la relation de conjugaison : $\overline{\bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{x}^b)_q} = -(\mathbf{x}^b)_q \otimes \dot{\bar{\mathbf{q}}}_b^n \otimes \mathbf{q}_b^n$ il vient :

$$\mathbf{0} = 2 \left(\text{Im} \left(\bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{x}^b)_q \right) \right)_q + \left([\boldsymbol{\omega}_{bn}^b \times] \mathbf{x}^b \right)_q \quad (2.51)$$

En utilisant le fait que $\bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \mathbf{q}_b^n = \mathbf{1}_q$, il apparaît que le quaternion $\bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n$ est un imaginaire pur :

$$\left(2 \left[\text{Im} \left(\bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n \right) \times \right] \mathbf{x}^b \right)_q = - \left([\boldsymbol{\omega}_{bn}^b \times] \mathbf{x}^b \right)_q \quad (2.52)$$

Cette relation étant vraie pour tout $\mathbf{x}^b$ et que $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = -\boldsymbol{\omega}_{bn}^b$

$$\left(2 \text{Im} \left(\bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n \right) \right)_q = (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b)_q \quad (2.53)$$

Puisque $\bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n$ est un imaginaire pur, la relation suivante est obtenue :

$$2\bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n = (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b)_q \quad (2.54)$$

La formulation de la dérivée du quaternion unitaire $\mathbf{q}_b^n$ en (2.48) est retrouvée :

$$\dot{\mathbf{q}}_b^n = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^n \otimes (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b)_q \quad (2.55)$$

B.3.3 Les angles d'Euler

Les angles d'Euler sont définis à partir d'une séquence de trois rotations consécutives. Les angles sont nommés *roll* noté ϕ pour le roulis, *pitch* noté θ pour le tangage et *yaw* noté ψ pour le lacet. Les matrices de rotation correspondant à chacun des angles sont :

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Et les quaternions représentant les rotations *yaw* *pitch* et *roll* :

$$\mathbf{q}_\psi = \left(\cos \frac{\psi}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \sin \frac{\psi}{2} \right)^T, \mathbf{q}_\theta = \left(\cos \frac{\theta}{2} \quad 0 \quad \sin \frac{\theta}{2} \quad 0 \right)^T, \mathbf{q}_\phi = \left(\cos \frac{\phi}{2} \quad \sin \frac{\phi}{2} \quad 0 \quad 0 \right)^T$$

Les angles d'Euler sont reliés à la matrice de rotation. Lorsque l'ordre des rotations choisi est (*yaw-pitch-roll*), la matrice de rotation est définie par : $\mathbf{C}_b^n = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi$ et s'écrit :

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \psi \cos \phi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Pour les quaternions unitaires, la relation avec les angles d'Euler se fait par , lorsque l'ordre des rotations est *yaw-pitch-roll* :

$$\mathbf{q}_b^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Il est important de noter que l'écriture de $\mathbf{q}_b^n$ ou de $\mathbf{C}_b^n$ en fonction des angles d'Euler varie suivant l'ordre de la séquence des angles d'Euler [30], ici $\mathbf{q}_b^n = \mathbf{q}_\psi \mathbf{q}_\theta \mathbf{q}_\phi$

B.3.4 Conversions matrice de rotation-quaternion-angles d'Euler

Les passages d'un paramétrage à l'autre sont rappelés dans cette partie : Angle d'Euler-Matrice de rotation-Quaternions.

B.3.4.1 Conversion matrice de rotation-quaternion

À partir de (2.29) et de B.3.2.2, la matrice de rotation $\mathbf{C}_b^n$ en fonction de $\mathbf{q}_b^n$ s'écrit :

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_4 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_3q_4 - q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_3) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

avec $\mathbf{q}_b^n = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4)^T$. En effectuant des combinaisons linéaires à partir de l'expression (2.58) et de la notation (2.23) de la matrice de rotation l'expression de $\mathbf{q}_b^n$ en fonction des coefficients de $\mathbf{C}_b^n$ (à condition que $\text{tr}(\mathbf{C}_b^n) + 1 \neq 0$) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{1}{2}(1 + b_{11} + b_{22} + b_{33})^{\frac{1}{2}} \\ q_2 = \frac{b_{32} - b_{23}}{4q_1} \\ q_3 = \frac{b_{13} - b_{31}}{4q_1} \\ q_4 = \frac{b_{21} - b_{12}}{4q_1} \end{array} \right. \quad (2.59)$$

B.3.4.2 Conversion matrice de rotation-angles d'Euler

Le passage matrice de rotation-angle d'Euler dépend bien évidemment du choix de la séquence des angles. Le passage des angles d'Euler vers les matrices de rotation est donné par les formules (2.56). Pour la séquence *yaw-pitch-roll*, le passage matrice vers angle est donné par

$$\begin{cases} \phi = \arctan_2(b_{32}, b_{33}) \\ \theta = -\arcsin(b_{31}) \\ \psi = \arctan_2(b_{21}, b_{11}) \end{cases} \quad (2.60)$$

avec $\arctan_2(y, x) \in [-\pi, \pi]$ la fonction inverse de tangente qui prend en compte les signes de x et y .

B.3.4.3 Conversion quaternion-angles d'Euler

La conversion quaternion-angle d'Euler dépend aussi de la séquence d'angles choisie. Les passages angles d'Euler vers quaternion sont donnés par (2.57). Le passage quaternion vers angles d'Euler pour la séquence *yaw-pitch-roll* est obtenu par :

$$\begin{cases} \phi = \arctan_2(2(q_3q_4 + q_1q_2), q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \\ \theta = -\arcsin(2(q_2q_4 - q_1q_3)) \\ \psi = \arctan_2(2(q_2q_3 + q_1q_4), q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) \end{cases} \quad (2.61)$$

B.3.5 L'antisymétrie et les rotations

B.3.5.1 Matrices de rotation et matrices antisymétriques

Les matrices de rotations sont intimement liées aux matrices antisymétriques réelles. Il existe plusieurs transformations liant les deux espaces, dans cette partie deux transformations sont présentées : la transformation exponentielle et la transformation de Cayley. Une matrice antisymétrique $\mathbf{A}$ a la propriété $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, de plus elle peut s'écrire à partir d'un unique vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T \quad (2.62)$$

B.3.5.1.1 La transformation exponentielle d'une matrice antisymétrique

La première transformation présentée est la transformation exponentielle d'une matrice antisymétrique réelle.

Propriété 1 : Soit $\mathbf{A}$ une matrice antisymétrique, la matrice $\exp(\mathbf{A})$ est une matrice de rotation d'axe $\mathbf{a}$, d'angle $\|\mathbf{a}\|$ et est définie par :

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (2.63)$$

Démonstration :

En séparant les termes pairs des termes impairs sur la série décrivant l'exponentielle matricielle :

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathbf{A}^{2k}}{2k!} + \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{2k+1!} \right) \quad (2.64)$$

Les puissances de $\mathbf{A}$ s'écrivent suivant les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{2k} = (-1)^k \|\mathbf{a}\|^{2k} \left(\mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\|} \right) k \geq 1 \\ \mathbf{A}^{2k+1} = (-1)^k \|\mathbf{a}\|^{2k+1} \left[\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \times \right], k \geq 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

En séparant la série en deux (les deux séries sont convergentes), il vient :

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{I}_3 + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \|\mathbf{a}\|^{2k}}{2k!} \right) \left(\mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\|} \right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \|\mathbf{a}\|^{2k+1}}{2k+1!} \right) \left[\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \times \right] \quad (2.66)$$

Les séries sinus et cosinus apparaissent :

$$\exp(\mathbf{A}) = \cos(\|\mathbf{a}\|) \mathbf{I}_3 + (1 - \cos(\|\mathbf{a}\|)) \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\|} + \sin(\|\mathbf{a}\|) \left[\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \times \right] \quad (2.67)$$

La formule (2.29) est retrouvée. Ainsi $\exp(\mathbf{A})$ est une matrice de rotation représentant la rotation autour de l'axe $\mathbf{a}$ et d'angle $\|\mathbf{a}\|$.

Pour toute matrice de rotation $\mathbf{C}_b^n$ ayant pour éléments propres θ et $\mathbf{u}$, il y a la relation suivante :

$$\mathbf{C}_b^n = \exp([\theta \mathbf{u} \times])$$

B.3.5.1.2 La transformation de Cayley d'une matrice antisymétrique

Une autre transformation liant les matrices de rotation aux matrices antisymétriques existe, il s'agit de la transformation de Cayley.

Propriété 1 : Soit $\mathbf{A}$ une matrice antisymétrique, alors la matrice $\mathbf{P} = (\mathbf{I}_3 + \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1}$ est une matrice de rotation

Démonstration :

Puisque $\mathbf{A}$ est antisymétrique, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ ce qui implique que la matrice $\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}$ est inversible, $\mathbf{P}$ est donc bien défini. En posant le calcul $\mathbf{P} \mathbf{P}^T$ et en intervertissant les opérateurs transposé et inverse il vient :

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^T = (\mathbf{I}_3 + \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{I}_3 + \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) \quad (2.68)$$

Puis en regroupant les inverses et en utilisant la commutativité des matrices :

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^T = (\mathbf{I}_3 + \mathbf{A})((\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 + \mathbf{A}))^{-1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) \quad (2.69)$$

Puis développant l'opérateur inverse sur le produit de 2 matrices et en utilisant l'associativité il vient finalement :

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}_3 \quad (2.70)$$

La matrice $\mathbf{P}$ est donc une matrice orthogonale de déterminant 1, c'est donc une matrice de rotation.

Réciproquement, si -1 n'est pas une valeur propre de $\mathbf{P}$ alors $\mathbf{A} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{P})(\mathbf{I}_3 + \mathbf{P})^{-1}$ est une matrice antisymétrique. La transformation de Cayley est explicitée par la propriété suivante.

Propriété 2 : Soit $\mathbf{P}$ une matrice telle que $\mathbf{P} = \cos(\theta)\mathbf{I}_3 + (1 - \cos(\theta))\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \sin(\theta)[\mathbf{u} \times]$ avec $\|\mathbf{u}\|=1, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il existe une matrice antisymétrique $\mathbf{A}$ vérifiant la transformation de Cayley :

$$\begin{cases} \mathbf{P} = (\mathbf{I}_3 + \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1} \\ \mathbf{A} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)[\mathbf{u} \times] \end{cases} \quad (2.71)$$

Démonstration :

Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\|\mathbf{u}\|=1$ la norme de Frobenius de la matrice $\mathbf{A}$ est strictement inférieure à 1.

Développons le produit $(\mathbf{I}_3 + \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1}$ en remarquant la série géométrique :

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I}_3 + \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{I}_3 + \mathbf{A}) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}^k \quad (2.72)$$

En séparant la somme suivant la parité, puis en développant la multiplication il vient :

$$\mathbf{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}^{2k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{A}^{2k} + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}^{2k+1} \quad (2.73)$$

En utilisant la formule établie en (2.65) et les notations de (2.71) il vient :

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_3 + 2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left\| \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\|^{2k} \right) (\mathbf{I}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}^T) + 2 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left\| \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\|^{2k+1} \right) [\mathbf{u} \times] \quad (2.74)$$

Puis en notant $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et en reconnaissant encore une fois les limites de séries géométriques, la matrice $\mathbf{P}$ s'écrit :

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_3 + 2 \frac{-t^2}{1+t^2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}^T) + \frac{2t}{1+t^2} [\mathbf{u} \times] \quad (2.75)$$

Ce qui finalement devient :

$$\mathbf{P} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \mathbf{I}_3 + \left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \mathbf{u}\mathbf{u}^T + \frac{2t}{1+t^2} [\mathbf{u} \times] \quad (2.76)$$

Les formules trigonométriques de l'angle moitié apparaissent :

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad (2.77)$$

En les appliquant, la formule (2.29) est retrouvée.

B.3.5.2 Quaternions unitaires et quaternions imaginaires

Les quaternions unitaires possèdent les mêmes liens avec les quaternions imaginaires purs que les matrices de rotation avec les matrices antisymétriques. La transformation exponentielle ou la transformation de Cayley d'un quaternion imaginaire pur est un quaternion unitaire représentant une rotation.

B.3.5.2.1 La transformation exponentielle d'un quaternion imaginaire pur

Un quaternion imaginaire pur se note $(\mathbf{a})_q$ avec $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$. La transformation exponentielle de $(\mathbf{a})_q$ s'écrit :

$$\exp((\mathbf{a})_q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((\mathbf{a})_q)^k}{k!} \quad (2.78)$$

Propriété 1 : *L'exponentielle d'un quaternion imaginaire pur $\frac{1}{2}(\mathbf{a})_q$ est un quaternion unitaire :*

$$\mathbf{q}_a = \exp\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a})_q\right) = \left(\cos\left(\frac{\|\mathbf{a}\|}{2}\right) \quad \sin\left(\frac{\|\mathbf{a}\|}{2}\right) \frac{\mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\|} \right)^T \quad (2.79)$$

Le quaternion $\mathbf{q}_a$ est le quaternion représentant la rotation d'axe $\mathbf{a}$ et d'angle $\|\mathbf{a}\|$. Le coefficient $\frac{1}{2}$ est à retenir, car sans sa présence, il s'agirait d'une rotation de même axe, mais avec un angle deux fois plus grand, $2\|\mathbf{a}\|$. Réciproquement à l'application exponentielle, une application logarithme entre l'espace des quaternions et les quaternions imaginaires purs ou les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ peut être défini :

$$\log(\mathbf{q}) = \theta \mathbf{u} \quad (2.80)$$

où $\log$ est la fonction logarithme, ici définie pour les quaternions et $\mathbf{q} = (\cos(\theta) \ \sin(\theta)\mathbf{u}^T)^T$. À partir de l'application exponentielle, un quaternion à la puissance t est défini par :

$$\mathbf{q}' = \exp(t \log(\mathbf{q})) \quad (2.81)$$

B.3.5.2.2 La transformation de Cayley d'un quaternion imaginaire pur

La transformation de Cayley appliquée aux quaternions est définie par la formule suivante :

Propriété 1 : *Soit $\mathbf{u}$ un vecteur, alors le quaternion $\mathbf{q}$ défini en (2.82) est un quaternion unitaire :*

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{u})_q \right) \otimes \left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{u})_q \right)^{-1} \quad (2.82)$$

Propriété 2 : Réciproquement, à partir d'un quaternion unitaire $\mathbf{q}$, il existe un quaternion imaginaire $(\mathbf{v})_q$ pur tel que :

$$(\mathbf{v})_q = \left(\mathbf{I}_q + \mathbf{q} \right) \otimes \left(\mathbf{I}_q - \mathbf{q} \right)^{-1} \quad (2.83)$$

Il est possible d'expliciter la transformation de Cayley en fonction de deux paramètres :

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{a})_q \right) \otimes \left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{a})_q \right)^{-1} \\ \mathbf{a} = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\mathbf{u}, \|\mathbf{u}\|=1, \theta \in [0, \pi[\end{cases} \quad (2.84)$$

Démonstration :

Soit $\mathbf{a} = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\mathbf{u}$ avec $\|\mathbf{u}\|=1, \theta \in [0, \pi[$, le calcul de $\left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{a})_q \right)^{-1}$ donne :

$$\left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{a})_q \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{a}\|^2} \left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{a})_q \right) \quad (2.85)$$

En multipliant à gauche par $\left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{a})_q \right)$ il vient :

$$\left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{a})_q \right) \otimes \left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{a})_q \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{a}\|^2} \begin{pmatrix} 1 - \|\mathbf{a}\|^2 & 2\|\mathbf{a}\| \frac{\mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\|} \end{pmatrix}^T \quad (2.86)$$

Puis en remplaçant par les paramètres $\mathbf{a} = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\mathbf{u}, \|\mathbf{u}\|=1, \theta \in [0, \pi[$ il vient :

$$\left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{a})_q \right) \otimes \left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{a})_q \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{4}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{4}\right)} & \frac{2 \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{4}\right)} \mathbf{u}^T \end{pmatrix}^T \quad (2.87)$$

Les formules de l'angle moitié (2.77) en $\tan\left(\frac{\theta}{4}\right)$ apparaissent, il vient finalement :

$$\left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{a})_q \right) \otimes \left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{a})_q \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u}^T \end{pmatrix}^T \quad (2.88)$$

La formule (2.84) est retrouvée. Il vient d'être prouvé que la transformation de Cayley appliquée aux quaternions réalise une surjection sur l'ensemble des quaternions unitaires.

B.3.6 Avantages et inconvénients des différents paramétrages

Après avoir présenté les différents paramétrages de l'orientation, une discussion sur les avantages/inconvénients est menée dans cette partie.

B.3.6.1 Coûts de calculs

Les 3 paramétrages présentent des avantages différents suivant le type de calcul.

- Taille dans la mémoire :

Les angles d'Euler permettent d'exprimer une rotation avec seulement 3 paramètres alors que les quaternions le font avec 4 et les matrices de rotations 9 paramètres. C'est le seul avantage des angles d'Euler.

- Rotation d'un vecteur :

En paramétrant la rotation par une matrice de rotation, le calcul de la rotation d'un vecteur nécessite 9 multiplications et 6 additions. Il s'agit du paramétrage le plus économe en calcul pour la rotation d'un vecteur. Le paramétrage en quaternions nécessite quant à lui 22 multiplications et 12 additions. Avec le paramétrage en angle d'Euler, la rotation se fait par calcul matriciel, avec la matrice de rotation paramétrée en sinus et cosinus d'angle d'Euler, ce qui implique un passage angle d'Euler-matrice de rotation où les calculs sont démultipliés.

- Composition de deux rotations

La composition de deux rotations est une opération courante dans le calcul d'orientation. La composition de deux rotations avec les matrices de rotations nécessite 27 multiplications et 18 additions. Avec les quaternions, elle nécessite 16 multiplications et 12 additions. Pour les angles d'Euler, la composition de rotations nécessite un passage angle d'Euler-Matrice de rotation ou quaternion. Encore une fois le nombre de calculs va augmenter de manière importante. Pour la composition de rotation, le paramétrage en quaternion est donc clairement plus avantageux.

B.3.6.2 Blocage de Cardan

Un inconvénient important des angles d'Euler est le blocage de Cardan (*gimbal lock*). Ce problème survient notamment lorsque l'axe de tangage est à 90° . Ce qui implique que les axes de roulis et de lacet sont identiques. En mécanique, cela se traduit par la perte d'un degré de liberté. Le blocage de Cardan peut être mathématiquement exprimé dans la matrice de rotation $\mathbf{C}_b^n$ exprimée en

choisissant la relation (2.56). En fixant l'angle de tangage $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\phi - \psi) & \cos(\phi - \psi) \\ 0 & \cos(\phi - \psi) & -\sin(\phi - \psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Pour une telle matrice de rotation, il existe une infinité de couples ψ, ϕ pouvant la paramétrer. Dans ce cas, le passage de la matrice de rotation vers les angles d'Euler est problématique, car il n'y aura pas un unique triplet d'angles paramétrant la rotation.

B.3.6.3 Interpolation

L'interpolation est une opération importante de l'espace des rotations. Cette dernière permet de comparer deux séquences d'orientation avec des échantillonnages temporels différents ou d'effectuer de la fusion de deux orientations. Plusieurs méthodes permettent d'interpoler des rotations [32]. Pour le paramétrage en angle d'Euler, l'interpolation peut s'effectuer de manière linéaire :

$$\begin{pmatrix} \phi_t \\ \theta_t \\ \psi_t \end{pmatrix} = \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right) \begin{pmatrix} \phi_{t_1} \\ \theta_{t_1} \\ \psi_{t_1} \end{pmatrix} + \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \begin{pmatrix} \phi_{t_2} \\ \theta_{t_2} \\ \psi_{t_2} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

avec $(\phi_t, \theta_t, \psi_t)$ les angles d'Euler à l'instant t et $t \in [t_1, t_2]$. Pour les autres paramétrages, l'interpolation linéaire peut aussi être définie. Pour les matrices de rotation, le groupe des matrices de rotation n'est pas stable pour l'addition. Ce qui a pour conséquence de ne pas avoir l'assurance d'une rotation pour la matrice résultante :

$$\mathbf{C}_t = \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right) \mathbf{C}_{t_1} + \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \mathbf{C}_{t_2} \quad (2.91)$$

avec $\mathbf{C}_t$ la matrice de rotation à l'instant t . Comme pour les matrices de rotation, l'interpolation linéaire de quaternion unitaire ne fournit pas en général un quaternion unitaire. L'obtention d'un quaternion unitaire est en revanche très simple, car il s'agit d'une normalisation du quaternion :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t &= \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right) \mathbf{q}_{t_1} + \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \mathbf{q}_{t_2} \\ \mathbf{q}_t &= \frac{\mathbf{q}_t}{\|\mathbf{q}_t\|_2} \end{aligned} \quad (2.92)$$

avec $\mathbf{q}_t$ le quaternion unitaire à l'instant t . Une autre méthode permet d'interpoler les quaternions unitaires sans variation de vitesse [32] et qui conserve la norme unitaire. Il s'agit de l'interpolation sphérique (*Slerp* pour 2 points et *Squad* pour un ensemble de points). L'interpolation sphérique entre deux points est définie par :

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t_1} \otimes (\bar{\mathbf{q}}_{t_1} \otimes \mathbf{q}_{t_2})^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}} \quad (2.93)$$

Cette interpolation peut aussi s'écrire sous la forme suivante:

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t_1} \otimes \exp \left(\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \log \left((\bar{\mathbf{q}}_{t_1} \otimes \mathbf{q}_{t_2}) \right)_q \right) \quad (2.94)$$

Ou encore sous la forme additive suivante, en posant $\theta = \arccos(\langle \mathbf{q}_{t_1}, \mathbf{q}_{t_2} \rangle)$:

$$\mathbf{q}_t = \frac{\sin \left(\left(1 - \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right) \theta \right)}{\sin(\theta)} \mathbf{q}_{t_1} + \frac{\sin \left(\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \theta \right)}{\sin(\theta)} \mathbf{q}_{t_2} \quad (2.95)$$

Cette dernière écriture additive se retrouve en exprimant un vecteur normé en fonction de deux vecteurs normés non nécessairement orthogonaux. L'interpolation temporelle des rotations grâce au paramétrage en quaternions et avec la méthode sphérique permet d'obtenir une trajectoire lisse à une vitesse constante contrairement aux autres méthodes et paramétrages. Pour l'interpolation de rotations, le paramétrage en quaternion est avantageux.

B.4 Outils pour l'estimation

Dans cette partie, deux méthodes utilisées dans l'estimation sont présentées : Le filtre de Kalman [33] [34], l'algorithme d'Espérance-Maximisation [35]. La notion d'entropie de Shannon est aussi introduite. L'ensemble de ses notions et outils est utilisé dans la suite du mémoire.

B.4.1 Le filtre de Kalman

Soit $\mathbf{X}_t$ une variable aléatoire de taille n dont on souhaite estimer la densité de probabilité, quel que soit l'instant. L'estimation de cette variable aléatoire se fait grâce à la connaissance d'une réalisation notée $\mathbf{y}_t$ d'une variable aléatoire $\mathbf{Y}_t$ de taille p et des hypothèses suivantes.

B.4.1.1 Hypothèses

1^{ère} Hypothèse : À l'instant t_0 la variable $\mathbf{X}_{t_0}$ est une variable aléatoire gaussienne définie par :

$$\mathbf{X}_{t_0} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{X}_{t_0}}, \mathbf{P}_{\mathbf{X}_{t_0}}) \quad (2.96)$$

avec $\mathbf{m}_{\mathbf{X}_{t_0}}$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_{t_0}}$ respectivement la moyenne et la matrice de variance-covariance de $\mathbf{X}_{t_0}$.

2^{ème} Hypothèse : La variable aléatoire $\mathbf{X}_t$ suit le modèle de propagation temporel suivant :

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}\mathbf{X}_t + \mathbf{G}\mathbf{V}_t \quad (2.97)$$

avec :

- $\mathbf{X}_{t+\Delta t}$ et $\mathbf{X}_t$ la variable aléatoire aux instants $t + \Delta t$ et t
- $\mathbf{V}_t$ un bruit blanc gaussien tel que : $\mathbf{V}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$
- $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont les matrices du modèle

3^{ème} Hypothèse : La variable aléatoire $\mathbf{Y}_t$ dépend de $\mathbf{X}_t$ suivant le modèle de mesure :

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{H}\mathbf{X}_t + \mathbf{M}\mathbf{W}_t \quad (2.98)$$

avec :

- $\mathbf{W}_t$ un bruit blanc gaussien tel que : $\mathbf{W}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$
- $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}$ deux matrices

Le système décrit par les équations (2.97) et (2.98) est observable.

B.4.1.2 Equations du filtre de Kalman

L'estimation du filtre de Kalman consiste à calculer continuellement au cours du temps les paramètres de Gaussienne.

Propriété 1 : *La combinaison linéaire d'une variable aléatoire gaussienne avec un bruit blanc gaussien de moyenne nulle est une variable aléatoire gaussienne.*

A partir de la propriété 1 et en supposant que $\mathbf{X}_{t-\Delta t} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{X}_{t-\Delta t}}, \mathbf{P}_{\mathbf{X}_{t-\Delta t}})$ alors $\mathbf{X}_t$ défini à partir du modèle (2.97) est une variable aléatoire gaussienne :

$$\mathbf{X}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{X}_t}, \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t}) \quad (2.99)$$

avec :

- $\mathbf{m}_{\mathbf{X}_t} = \mathbf{F}\mathbf{m}_{\mathbf{X}_{t-\Delta t}}$ la moyenne de $\mathbf{X}_t$
- $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_t} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{\mathbf{X}_{t-\Delta t}}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$ la matrice de variance-covariance de $\mathbf{X}_t$

Grâce à la propriété 1, la variable aléatoire $\mathbf{Y}_t$ est gaussienne et:

$$\mathbf{Y}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{Y}_t}, \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t}) \quad (2.100)$$

avec :

- $\mathbf{m}_{\mathbf{Y}_t} = \mathbf{H}\mathbf{m}_{\mathbf{X}_t}$ la moyenne de $\mathbf{Y}_t$
- $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{\mathbf{X}_t}\mathbf{H}^T + \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{M}^T$ la matrice de variance-covariance de $\mathbf{Y}_t$

La variable aléatoire $(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t)$ est aussi une variable aléatoire gaussienne :

$$(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{\mathbf{X}_t} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{Y}_t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t} & \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t\mathbf{Y}_t} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t\mathbf{X}_t} & \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t} \end{pmatrix}\right) \quad (2.101)$$

avec :

- $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{\mathbf{X}_t} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{Y}_t} \end{pmatrix}$ la moyenne de $(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t)$
- $\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t} & \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t\mathbf{Y}_t} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t\mathbf{X}_t} & \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t} \end{pmatrix}$ la matrice de variance-covariance de $(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t)$
- $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_t\mathbf{Y}_t} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t\mathbf{X}_t}^T = \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t}\mathbf{H}^T$ la covariance entre $\mathbf{X}_t$ et $\mathbf{Y}_t$

Propriété 2 : *Soit $(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t)$ une variable aléatoire gaussienne telle que :*

$$(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{\mathbf{X}_t} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{Y}_t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t} & \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t\mathbf{Y}_t} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t\mathbf{X}_t} & \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t} \end{pmatrix}\right)$$

Alors la variable aléatoire $(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_t = \mathbf{y}_t)$ est une variable aléatoire gaussienne définie par :

$$(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_t = \mathbf{y}_t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{X}_t} + \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t\mathbf{Y}_t}\mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t}^{-1}(\mathbf{y}_t - \mathbf{m}_{\mathbf{Y}_t}), \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}_t\mathbf{Y}_t}\mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t}^{-1}\mathbf{P}_{\mathbf{Y}_t\mathbf{X}_t})$$

En écrivant les résultats de la propriété 2 en fonction des matrices (2.100) :

$$\begin{cases} \mathbf{m}_{\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_t} = \mathbf{m}_{\mathbf{x}_t} + \mathbf{K}(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{m}_{\mathbf{x}_t}) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_t} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_t} - \mathbf{K}\mathbf{H}^T \mathbf{P}_{\mathbf{x}_t} \end{cases} \quad (2.102)$$

avec $\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{H}^T + \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{M}^T)^{-1}$ le gain de Kalman.

B.4.1.3 Extended Kalman Filter(EKF)

L'EKF est utilisé lorsque le modèle de propagation (2.97) et/ou le modèle de mesure (2.98) sont non linéaires :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = f(\mathbf{X}_t) + \mathbf{V}_t \\ \mathbf{Y}_t = h(\mathbf{X}_t) + \mathbf{W}_t \end{cases} \quad (2.103)$$

avec $\mathbf{V}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{W}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ des bruits blancs gaussiens centrés. L'erreur d'estimation est définie par :

$$\delta \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_t \quad (2.104)$$

avec $\hat{\mathbf{X}}_t$ l'estimation de la variable aléatoire $\mathbf{X}_t$ à l'instant t .

B.4.1.3.1 Estimation de l'erreur

L'idée est alors de considérer l'erreur d'estimation $\delta \mathbf{X}_t$, comme élément à estimer. Avec comme hypothèses :

Hypothèse 1 : l'erreur d'estimation suit un processus aléatoire gaussien $\delta \mathbf{X}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{P}_{\delta \mathbf{X}_t})$

Hypothèses 2 : il est supposé que $\|\delta \mathbf{x}_t\| \ll 1$, alors un développement au 1^{er} ordre en $\delta \mathbf{x}_t$ de (2.103) donne:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{X}_{t+\Delta t} \approx \mathbf{F} \delta \mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \\ \delta \mathbf{Y}_t \approx \mathbf{H} \delta \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t \end{cases} \quad (2.105)$$

avec :

- $\delta \mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_{t+\Delta t} - f(\hat{\mathbf{X}}_t)$ l'erreur estimée à $t + \Delta t$, $\hat{\mathbf{x}}_t$ est la réalisation de $\hat{\mathbf{X}}_t$
- $\delta \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - h(\hat{\mathbf{x}}_t)$ l'innovation à l'instant t et réalisation de la variable $\delta \mathbf{Y}_t$
- $\mathbf{F} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_t}$ $\mathbf{H} = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_t}$ les matrices jacobiennes de f et h en $\hat{\mathbf{x}}_t$

Les hypothèses sont donc identiques au filtre de Kalman, mais pour l'erreur. À partir du modèle de propagation (2.105) et des propriétés B.4.1.2 il vient :

$$\delta \mathbf{X}_{t+\Delta t} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{F} \mathbf{P}_{\delta \mathbf{X}_t} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}) \quad (2.106)$$

À partir du modèle de mesure (2.105) et des propriétés B.4.1.2 :

$$\delta \mathbf{X}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{K} \delta \mathbf{y}_t, \mathbf{P}_{\delta \mathbf{X}_t} - \mathbf{K} \mathbf{H}^T \mathbf{P}_{\delta \mathbf{X}_t}) \quad (2.107)$$

avec $\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\delta \mathbf{X}_t} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{\delta \mathbf{X}_t} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$ le gain de Kalman. Finalement $\hat{\mathbf{X}}_t$ est corrigé à partir de l'estimation de $\delta \mathbf{X}_t$, si bien que l'erreur d'estimation $\delta \mathbf{X}_t$ est à nouveau centrée :

$$\delta \mathbf{X}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{P}_{\delta \mathbf{X}_t} - \mathbf{K} \mathbf{H}^T \mathbf{P}_{\delta \mathbf{X}_t})$$

B.4.2 Algorithme Expectation-Maximization(EM)

L'algorithme EM permet d'estimer un ensemble de paramètres le plus probable au regard d'observations [35]. C'est un calcul itératif permettant au moins localement, de maximiser la vraisemblance (plus précisément, il s'agit de la log-vraisemblance, ce qui est équivalent). Cette recherche de maximum se fait grâce à des données complétées dont on estime les probabilités. Le processus se décompose en 2 étapes. La première étape consiste à estimer les probabilités des données complétées sachant les observations données et l'ensemble de paramètres. La seconde étape consiste à estimer un nouvel ensemble de paramètres qui maximise la log-vraisemblance sachant les observations et les données complétées.

B.4.2.1 Formulation du problème

Soit $(\mathbf{x}_i)_{i \in I}$ une série d'observations qui sont les réalisations d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$ avec I un ensemble pour l'indexage des observations. Soit $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_g)_{g \in G}$ un ensemble de paramètres, où G est l'ensemble d'indexage des paramètres. La log-vraisemblance de $\boldsymbol{\theta}$ est donnée par :

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \log(p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})) \quad (2.108)$$

avec $p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})$ la vraisemblance de $\boldsymbol{\theta}$. Le problème consiste à déterminer $\boldsymbol{\theta}$ tel que :

$$\boldsymbol{\theta}_{\max} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} (L(\boldsymbol{\theta})) \quad (2.109)$$

La recherche du maximum de L est en général difficile à réaliser directement. En considérant $\mathbf{Z}$ une variable aléatoire cachée, cette recherche de maximum devient possible. La log-vraisemblance s'écrit :

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \log \left(\int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{z} \right) \quad (2.110)$$

C'est grâce à cette formulation que le problème peut se résoudre.

B.4.2.2 Algorithme EM

L'algorithme EM est initialisé au hasard. Cependant, l'initialisation a un impact sur la solution obtenue au final. Ainsi, plusieurs valeurs initiales peuvent être testées. En posant $\boldsymbol{\theta}_n$, l'estimation du paramètre $\boldsymbol{\theta}$ à la $n^{\text{ième}}$ itération, le paramètre $\boldsymbol{\theta}_{n+1}$ est calculé de manière à ce que :

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) \log(p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})) d\mathbf{z} \right) \quad (2.111)$$

avec ces deux étapes :

- l'étape *Expectation* : calcul de $p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n)$ en connaissant $\boldsymbol{\theta}_n$
- l'étape *Maximization* : calcul de $\boldsymbol{\theta}_{n+1}$ qui maximise $\int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) \log(p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})) d\mathbf{z}$.

L'algorithme est arrêté lorsque pour un seuil ε on a : $\|\boldsymbol{\theta}_{n+1} - \boldsymbol{\theta}_n\| < \varepsilon$

B.4.2.3 Dérivation de la vraisemblance

La dérivation de l'algorithme EM est expliquée en [36], cette partie en reprend les grandes lignes.

Soit ΔL_n tel que :

$$\Delta L_n = L(\boldsymbol{\theta}) - L(\boldsymbol{\theta}_n)$$

En introduisant l'écriture en (2.110) :

$$\begin{aligned} \Delta L_n &= \log \left(\int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{z} \right) - \log(p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}_n)) \\ &= \log \left(\int_{\mathbf{z}} \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}_n)} d\mathbf{z} \right) \end{aligned} \quad (2.112)$$

En introduisant la probabilité $p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n)$:

$$\Delta L_n = \log \left(\int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}_n)} d\mathbf{z} \right) \quad (2.113)$$

La fonction logarithme est concave, par application de l'inégalité de Jensen :

$$\Delta L_n \geq \int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) \log \left(\frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}_n)} \right) d\mathbf{z} \quad (2.114)$$

Pour l'algorithme EM, la maximisation ne porte pas directement sur $L(\boldsymbol{\theta})$, mais sur une fonction notée $l(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_n)$ majorée par $L(\boldsymbol{\theta})$:

$$l(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_n) = L(\boldsymbol{\theta}_n) + \int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) \log \left(\frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}_n)} \right) d\mathbf{z} \quad (2.115)$$

Le problème devient :

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} (l(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_n)) \quad (2.116)$$

En enlevant les parties constantes les éléments ne dépendant pas de $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_n) \log(p(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})) d\mathbf{z} \right) \quad (2.117)$$

La formule en (2.111) est retrouvée. Par construction, la suite $(L(\boldsymbol{\theta}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente et converge vers un maximum local de $L(\boldsymbol{\theta})$.

B.4.3 Entropie et divergence statistique

Dans cette partie, les notions d'entropie et de divergence statistique sont introduites.

B.4.3.1 Entropie de Shannon

Soit $X = (\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$ un ensemble de points dans d'un espace Ω . À chacun des points de l'ensemble une probabilité est associée : p_i est la probabilité de $\mathbf{x}_i$. L'entropie de Shannon [37] de la loi $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est définie comme étant l'information moyenne de X :

$$S(X) = \sum_{i=1}^n -p_i \log(p_i) \quad (2.118)$$

avec :

- $S(X)$ l'entropie de X
- $p_i = p(\mathbf{x}_i)$ la probabilité de $\mathbf{x}_i$ telle que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Cette grandeur est une mesure de la « dimension aléatoire » ou information d'un ensemble de points distribués dans un espace. Le maximum d'entropie est atteint lorsque les points sont équiprobables. L'entropie est nulle lorsqu'il y a un élément de X de probabilité 1 et les autres de probabilités nulles. L'entropie conjointe de X et Y est définie par :

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n -p_{ij} \log(p_{ij}) \quad (2.119)$$

avec :

- $S(X, Y)$ est l'entropie conditionnelle
- $p_{ij} = p(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ la probabilité conjointe de $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j$

Si X et Y sont indépendants alors $S(X, Y) = S(X) + S(Y)$. L'entropie conditionnelle est définie par :

$$S(X|Y) = S(X, Y) - S(Y) \quad (2.120)$$

En développant cette expression :

$$\begin{aligned} S(X|Y) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) \log(p(\mathbf{x}_i|Y = \mathbf{y}_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n p(\mathbf{y}_j) S(X|Y = \mathbf{y}_j) \end{aligned} \quad (2.121)$$

avec : $p(\mathbf{x}_i|Y = \mathbf{y}_j)$ la probabilité de $\mathbf{x}_i$ conditionnellement à $\mathbf{y}_j$. L'information mutuelle de X et Y est définie par :

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= S(X) + S(Y) - S(X, Y) \\ &= S(X) - S(X|Y) \end{aligned} \quad (2.122)$$

B.4.3.2 Divergence statistique

L'information mutuelle est la divergence de Kullback-Leibler de la distribution conjointe de deux variables aléatoires supposées indépendantes et de la véritable distribution conjointe :

$$I(X, Y) = D_{KL}(P(X, Y) \| P(X)P(Y)) \quad (2.123)$$

La divergence de Kullback-Leibler est définie dans le cas continu et le cas discret par :

$$\begin{aligned} D_{KL}(P_1 \| P_2) &= \int_{\mathbf{x} \in \Omega} p_1(\mathbf{x}) \log \left(\frac{p_1(\mathbf{x})}{p_2(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} \\ D_{KL}(P_1 \| P_2) &= \sum_{i=1}^n P_1(\mathbf{x}_i) \log \left(\frac{P_1(\mathbf{x}_i)}{P_2(\mathbf{x}_i)} \right) \end{aligned} \quad (2.124)$$

avec :

- $D_{KL}(P_1 \| P_2)$ est la divergence de Kullback-Leibler de P_2 par rapport à P_1
- P_1, P_2 deux distributions de densité de probabilité p_1, p_2

Elle possède les propriétés suivantes :

- $D_{KL}(P_1 \| P_2) \geq 0$
- $D_{KL}(P_1 \| P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$

Démonstration :

Soit P_1, P_2 deux distributions telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_1(\mathbf{x}_i) \neq 0, p_2(\mathbf{x}_i) \neq 0$ et telles que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_1(\mathbf{x}_i) &= 1 \\ \sum_{i=1}^n p_2(\mathbf{x}_i) &= 1 \end{aligned} \quad (2.125)$$

Avec les propriétés des distributions définies précédemment, l'égalité suivante est toujours vérifiée :

$$\log \left(\sum_{i=1}^n p_2(\mathbf{x}_i) \right) = 0 \quad (2.126)$$

Puis en introduisant la probabilité $p_1(\mathbf{x}_i)$:

$$\log \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{p_1(\mathbf{x}_i)} p_2(\mathbf{x}_i) \right) = 0 \quad (2.127)$$

La fonction logarithme est concave, en appliquant l'inégalité de Jensen :

$$\log \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{p_1(\mathbf{x}_i)} p_2(\mathbf{x}_i) \right) \leq \sum_{i=1}^n p_1(\mathbf{x}_i) \log \left(\frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{p_1(\mathbf{x}_i)} \right) \quad (2.128)$$

Le cas d'égalité de l'inégalité de Jensen intervient lorsque le rapport $\frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{p_1(\mathbf{x}_i)}$ est constant, pour tout $\mathbf{x}_i$. Ce qui implique que le cas de nullité de la divergence de Kullback-Leibler est réalisé uniquement lorsque les distributions sont identiques.

B.5 Biomécanique de la marche

Un aspect important de la navigation piétonne est la biomécanique de la marche. La description du processus de marche permet d'extraire des informations de fréquence de marche, de déplacement du piéton. Ces informations permettent d'estimer la longueur de pas.

B.5.1 Le piéton

B.5.1.1 Les plans du piéton

La trajectoire du piéton et ses dérivées temporelles sont projetées dans trois plans différents. Cette étude des mouvements du piéton dans ses plans principaux est proposée au Chapitre 4.

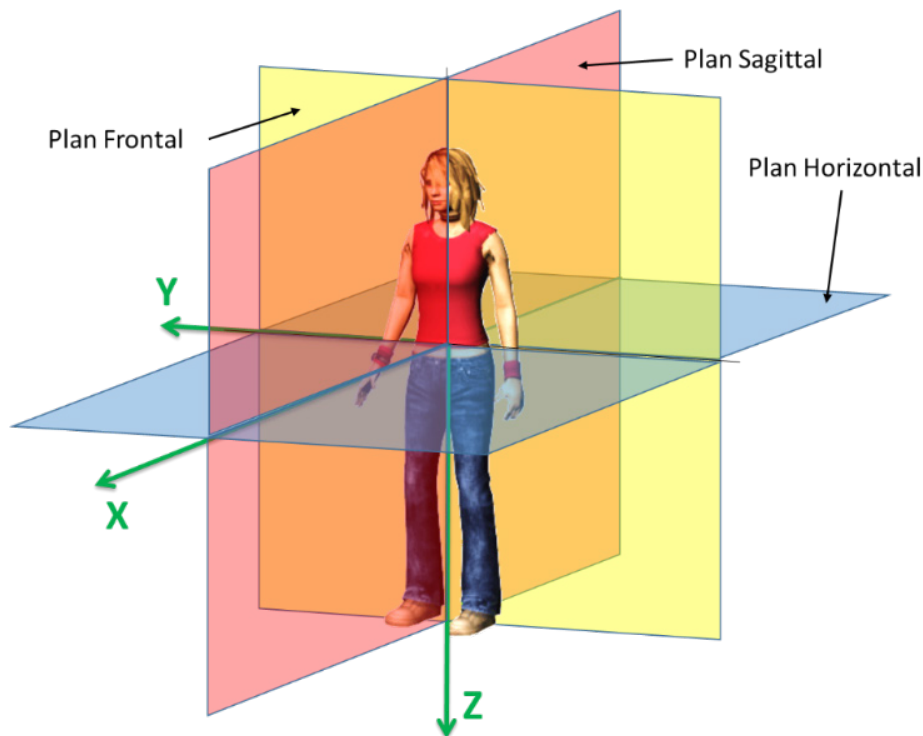


Figure 7: Les 3 plans du piéton : sagittal (rouge), horizontal (bleu) et frontal (jaune)

Les plans, illustrés en Figure 7, correspondent aux trois plans principaux de l'anatomie humaine définis par les axes principaux de l'anatomie:

- Le plan horizontal :

Le plan horizontal est le plan perpendiculaire à la verticale et attaché au centre de masse du piéton. Ce plan partage en deux le corps humain, la partie inférieure composée des membres inférieurs et la partie supérieure composée des membres supérieurs, de la tête et du tronc.

- Le plan frontal :

Le plan frontal est le plan défini par l'axe vertical et l'axe du bassin, et attaché au centre de masse du piéton. Ce plan sépare la partie postérieure de la partie antérieure de l'individu.

- Le plan sagittal :

Le plan sagittal est le plan défini par l'axe vertical et par l'axe qui est horizontal, perpendiculaire à l'axe du bassin et attaché au centre de masse. Le plan sagittal sépare la partie gauche de la partie droite de l'individu, de manière symétrique.

B.5.1.2 Modélisation du piéton

La trajectoire de chacun des points du piéton est liée par les contraintes de mouvements du corps humain. Le corps humain peut être modélisé géométriquement par une succession de solides liés les uns autres par des liaisons rotules. Cet ensemble de solides constitue une chaîne articulée où chacun des solides correspond à un segment du corps Figure 8. Cette modélisation permet d'exprimer le mouvement d'un segment par rapport à un autre segment de la chaîne articulée. Ainsi, il est possible d'exprimer la vitesse ou l'accélération de la main en fonction des vitesses ou accélérations des autres segments.



Figure 8: Chaîne articulée représentant le corps humain

Pour un solide S et deux points $a, b \in S$, il existe une relation dérivée de la formule de Bour (2.1) liant la vitesse du point a et la vitesse du point b :

$$\mathbf{v}(b)_n = \mathbf{v}(a)_n + \boldsymbol{\omega}_{s/n} \wedge \mathbf{l}_{ab} \quad (2.129)$$

avec :

- $\mathbf{v}(b)_n, \mathbf{v}(a)_n$ les vitesses des points b et a respectivement par rapport au référentiel n
- $\boldsymbol{\omega}_{s/n}$ est la vitesse de rotation du solide S par rapport au référentiel n
- $\mathbf{l}_{ab}$ est le vecteur entre le point a vers le point b

L'équation (2.129) s'applique à l'ensemble des segments. Afin de généraliser cette équation, une numérotation adéquate est proposée en Figure 9 :

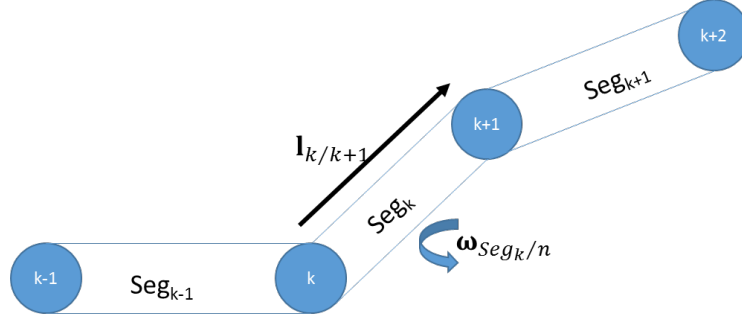


Figure 9: Numérotation de la chaîne articulée

À partir du modèle géométrique de la chaîne articulée, il est possible d'établir l'expression de la vitesse de n'importe quel segment en fonction des segments précédents :

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n} \wedge \mathbf{l}_{k/k+1} \quad (2.130)$$

avec :

- $\mathbf{v}_p$ la vitesse de l'extrémité p commune aux segments p et $p-1$ dans le référentiel n
- $\mathbf{v}_1$ la vitesse de la première extrémité dans le référentiel n
- $\boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n}$ la vitesse de rotation du segment k relativement au référentiel n
- $\mathbf{l}_{k/k+1}$ le vecteur liant les extrémités du segment dans le sens k vers $k+1$

En dérivant l'expression (2.130) dans le référentiel n l'expression des accélérations apparaît:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{d\boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n}}{dt} \wedge \mathbf{l}_{k/k+1} + \boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n} \wedge \frac{d\mathbf{l}_{k/k+1}}{dt}$$

avec $\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_1$ les accélérations des extrémités 1 et p dans le référentiel n . Puis en remarquant que

$\frac{d\mathbf{l}_{k/k+1}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n} \wedge \mathbf{l}_{k/k+1}$, l'accélération de l'extrémité p devient :

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{d\boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n}}{dt} \wedge \mathbf{l}_{k/k+1} + \boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n} \wedge \mathbf{l}_{k/k+1}) \quad (2.131)$$

B.5.2 La marche : un phénomène cyclique

B.5.2.1 Description du cycle de marche

La marche est le mode « naturel » de locomotion qu'a l'être humain pour se déplacer. Bien que tout le corps soit sollicité lors de la marche, c'est principalement les jambes qui sont mises en action, avec des appuis successifs sur les pieds gauche et droit. Lors de la marche, il y a constamment au moins un appui au sol de l'un des deux pieds, dans le cas contraire, il s'agit de la course. La marche est donc un phénomène cyclique avec une alternance de pas droit et gauche. La foulée correspond à deux pas successifs.

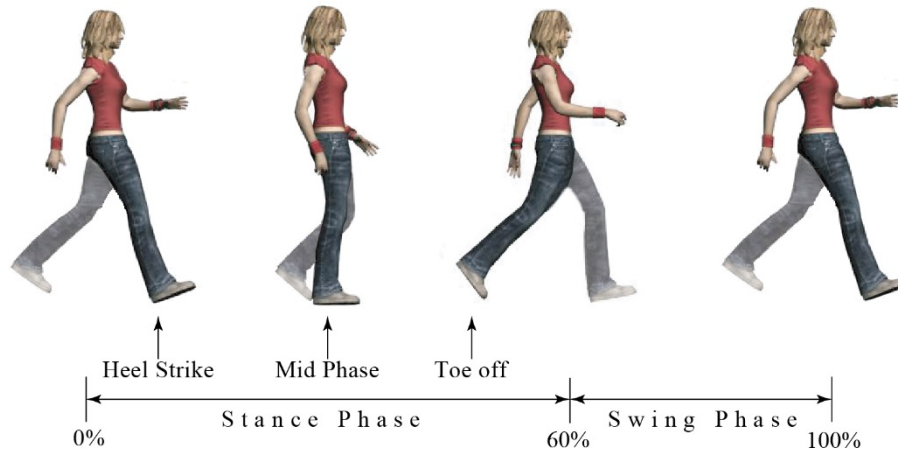


Figure 10: Décomposition du cycle de marche [9] [38]

La foulée est décomposée en deux phases, une première phase d'appui suivi d'une seconde phase de balancier. La phase d'appui débute par l'attaque au sol du talon suivi par la mise en contact total du pied sur le sol et enfin la levée progressive du pied avec les orteils comme derniers éléments du pied au contact du sol. Les mouvements des jambes sont aussi accompagnés par ceux des autres membres du corps : le tronc et les épaules oscillent suivant l'axe vertical dans le sens du pied posé au sol (Ex. : rotation vers la droite du tronc lorsque le pied droit est au sol). Les bras ont aussi des mouvements de balancier corrélés à ceux des jambes. La part de la phase d'appui au sol est de 60% du total du cycle de marche. Enfin la seconde partie est la phase de balancier ou de vol. Elle correspond à 40% du cycle de marche. Le mouvement de balancier de la jambe est alors accompagné par une rotation des membres supérieurs dans le sens opposé à la jambe sans appui (Ex. : rotation vers la gauche lorsque la jambe droite est lancée, ce qui correspond à un pied gauche au sol).

B.5.2.2 Modélisation de la longueur de pas

La marche peut se visualiser comme le mouvement d'un pendule inversé [9] [39] [40]. Lors de l'attaque du talon au sol, le tronc se situe à l'arrière. Puis à mesure que le pied augmente sa surface de contact avec le sol, le reste du corps vient à la même hauteur que le pied d'appui jusqu'à la phase intermédiaire (*mid phase* Figure 10). Par la suite le bassin est propulsé à l'avant du pied d'appui jusqu'à ce que ce dernier soit en contact avec le sol. Ainsi le pied au contact du sol correspond au centre de rotation du pendule et reste immobile, la partie supérieure du corps correspond à la masse en mouvement autour du centre de rotation. L'étude de la longueur de pas a montré que cette dernière dépend de la fréquence de pas et de la taille de l'individu [9]. Un modèle a été proposé et démontré sur plusieurs individus :

$$l_i = h(a f_{step_i} + b) + c \quad (2.132)$$

avec :

- l_i la longueur du $i^{\text{ème}}$ pas
- f_{step_i} la fréquence de pas pour le $i^{\text{ème}}$ pas
- h la hauteur de l'individu
- $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ les coefficients du modèle, ajustable pour chaque individu

La Figure 11 illustre le caractère cyclique de la marche, un motif spécifique de la position du pied dans le plan sagittal est répété à chaque foulée.

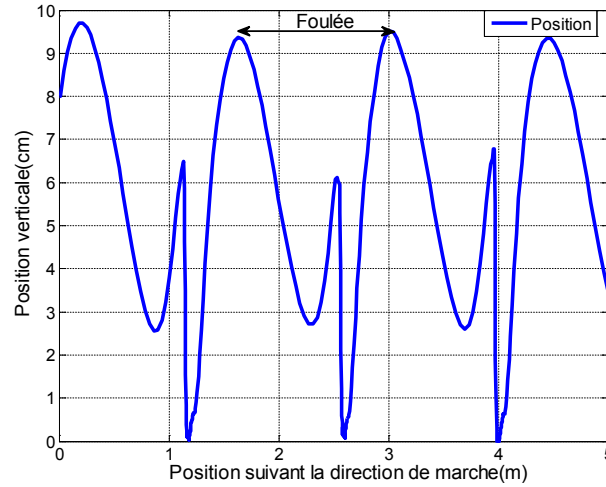


Figure 11: Evolution de la position du pied droit dans le plan sagittal, lors de la marche

Les fréquences de pas et de foulée peuvent être extraites d'une analyse fréquentielle de la position ou de ses dérivées. En guise d'illustration, la norme de la transformée de Fourier de la vitesse axiale du pied est tracée en Figure 12. Deux fréquences dominantes apparaissent : la fréquence de foulée à 0.95 Hz et celle de pas à 1.9 Hz.

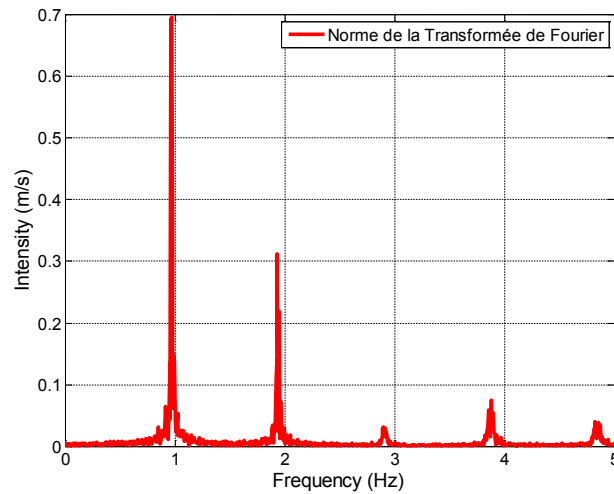


Figure 12: Module de la transformée de Fourier de la vitesse axiale du pied

Les fréquences de pas et de foulée sont généralement aux alentours de 2 Hz et 1 Hz respectivement. Les longueurs de pas et de foulée sont quant à elles généralement comprises entre 0.4 m et 0.8 m et 0.8 m et 1.6 m respectivement. Cela correspond à des vitesses de marche comprises entre 3.6 km/h et 6.7 km/h.

Chapitre C. Estimation de l'orientation d'une centrale inertielle et magnétique

C.1 Modèles de mesures et limites

C.1.1 Mesures des champs terrestres par le magnétomètre et l'accéléromètre

Dans cette partie les modèles de mesures sont repris et adaptés à l'hypothèse que les capteurs mesurent les champs terrestres : champ magnétique terrestre et champ de gravité terrestre. Le référentiel de la centrale inertielle et magnétique est appelé référentiel body, celui de la carte est le référentiel de navigation.

C.1.1.1 Magnétomètre : champ magnétique terrestre

Lorsque le champ magnétique externe est uniquement le champ magnétique terrestre, le magnétomètre en fournit une mesure dans le référentiel body :

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{m}_e^b + \mathbf{n}_m \quad (3.1)$$

avec $\mathbf{m}_e^b$ le champ magnétique terrestre exprimé dans le référentiel body. Ainsi sur une fenêtre de longueur T , le champ magnétique terrestre estimé est :

$$\hat{\mathbf{m}}_e^b = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{y}_m(t) dt \quad (3.2)$$

Le champ magnétique terrestre est une grandeur connue apriori dans le référentiel de navigation [20] [27] et est défini par :

$$\mathbf{m}_e^n = \begin{pmatrix} m_e^n & m_e^e & m_e^d \end{pmatrix}^T \quad (3.3)$$

C.1.1.2 Accéléromètre : champ de gravité terrestre

Le cas statique signifie que la centrale inertielle est immobile dans le référentiel de navigation. L'accéléromètre fournit alors une mesure du champ de gravité dans le référentiel body :

$$\mathbf{y}_a = -\mathbf{g}^b + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \quad (3.4)$$

L'équation (3.4) est vraie en considérant que l'accélération d'entraînement issue de la rotation terrestre est incluse dans le champ de gravité terrestre. Cette accélération étant définie par:

$$\mathbf{a}_{ie}^b = \boldsymbol{\omega}_{ie}^b \wedge (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b \wedge \mathbf{p}^b) \quad (3.5)$$

avec :

- $\mathbf{a}_{ie}^b$ l'accélération d'entraînement
- $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$ la vitesse de rotation de la Terre notée e par rapport à i ,
- $\mathbf{p}^b$ le vecteur reliant le centre de la Terre au point de la surface de la Terre sur lequel est la centrale inertielle.

En supposant le biais du capteur négligeable devant le champ de gravité terrestre :

$$\hat{\mathbf{g}}^b = -\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{y}_a(t) dt \quad (3.6)$$

Le champ de gravité terrestre est une grandeur connue dans le référentiel de navigation :

$$\mathbf{g}^n = (0 \quad 0 \quad g)^T \quad (3.7)$$

avec $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$.

C.1.2 Propagation de l'orientation à partir de la mesure du gyromètre

Pour rappel le quaternion $\mathbf{q}_b^n$ représente l'orientation du référentiel body par rapport au référentiel de navigation.

C.1.2.1 Propagation de l'orientation à partir de la vitesse de rotation

Un développement de Taylor sur le quaternion $\mathbf{q}_b^n$ donne:

$$\mathbf{q}_b^n(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{d^k \mathbf{q}_b^n(t)}{dt^k} \quad (3.8)$$

avec $\mathbf{q}_b^n(t + \Delta t)$ le quaternion à l'instant $t + \Delta t$ et $\mathbf{q}_b^n(t)$ le quaternion à l'instant t . À partir de l'équation différentielle sur les quaternions unitaires démontrée en Chapitre 2 et en supposant constante la vitesse de rotation entre les instants t et $t + \Delta t$ l'équation (3.8) devient :

$$\mathbf{q}_b^n(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{q}_b^n(t) \otimes \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t)}{2} \right)_q^k \quad (3.9)$$

avec $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t)$ la vitesse de rotation à l'instant t . En reconnaissant la série exponentielle appliquée aux quaternions, il vient finalement:

$$\mathbf{q}_b^n(t + \Delta t) = \mathbf{q}_b^n(t) \otimes \exp \left(\left(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t) \right)_q \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (3.10)$$

En revanche, si la vitesse de rotation n'est pas constante alors :

$$\mathbf{q}_b^n(t + \Delta t) = \mathbf{q}_b^n(t) \otimes \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \exp \left(\left(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \left(t + \frac{k\Delta t}{n} \right) \right)_q \frac{\Delta t}{2n} \right) \right) \quad (3.11)$$

Ce calcul est difficilement réalisable. L'approximation suivante est utilisée [41]:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \exp \left(\left(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \left(t + \frac{k\Delta t}{n} \right) \right)_q \frac{\Delta t}{2n} \right) \approx \exp \left(\frac{1}{2} \left(\int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{nb}^b(u) du \right)_q \right) \quad (3.12)$$

Une période d'échantillonnage suffisamment élevée par rapport aux variations de la vitesse de rotation permet donc de limiter l'erreur due à l'intégration de cette vitesse.

C.1.2.2 Propagation de l'orientation à partir de la mesure du gyromètre

La mesure du gyromètre est une estimation de la vitesse de rotation ω_{ib}^b , soit la vitesse de rotation du référentiel body par rapport au référentiel inertiel. Alors que pour la propagation de l'orientation de la centrale dans le repère de navigation, il s'agit de ω_{nb}^b la vitesse de rotation du référentiel body par rapport référentiel de navigation. Les deux vitesses de rotation sont reliées par :

$$\omega_{ib}^b = \omega_{in}^b + \omega_{nb}^b \quad (3.13)$$

avec ω_{in}^b la vitesse de rotation du référentiel de navigation par rapport au référentiel inertiel, ce qui correspond à la vitesse de rotation de la terre sur elle-même. La vitesse de rotation de la Terre sur elle-même est d'un tour en 24 heures soit en radian/s : $\|\omega_{in}^b\| = 7.27e-5$. Cette vitesse est faible par rapport à la puissance du bruit des gyromètres utilisés. Elle peut être soit négligée soit incluse dans le biais du gyromètre. La mesure du gyromètre fournit donc une estimation de ω_{nb}^b . Le quaternion est propagé temporellement par :

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{q}}_b^n(t) \otimes \exp\left(\left(\hat{\omega}_{nb}^b(t)\right)_q \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (3.14)$$

avec $\hat{\omega}_{nb}^b$ la vitesse de rotation estimée à partir de la mesure du gyromètre.

C.1.3 Limites de l'hypothèse de mesure des champs terrestres

L'hypothèse de mesure des champs terrestres se révèle fausse pour la navigation piétonne.

C.1.3.1 Accélérations externes

Les accélérations externes mesurées par l'accéléromètre ne sont pas négligeables par rapport au champ. Elles apparaissent dès qu'il y a un mouvement « rapide » de la main. Le bras constitue un levier amplifiant les accélérations externes. Son application induit des erreurs d'estimation notamment sur les angles roll et pitch. La Figure 13 illustre ce propos :

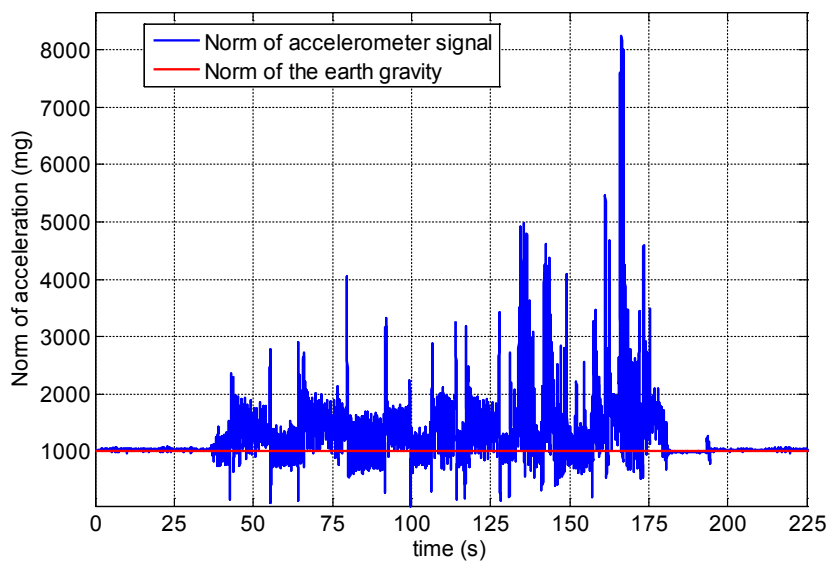


Figure 13: Norme du signal de l'accéléromètre porté dans la main comparé à celle du champ de gravité terrestre

Il a été demandé à un individu de marcher rapidement les bras ballants le long du corps puis d'effectuer des gestes vifs de la main. En comparant la norme du signal de l'accéléromètre avec celle du champ de gravité, l'importance des accélérations externes est mise en évidence expérimentalement.

C.1.3.2 Champ magnétique

Le piéton se déplace dans des environnements où il y a profusion de sources magnétiques. Les milieux urbains ou plus encore les milieux intérieurs (intérieur des bâtiments) sont constitués de matériaux ferromagnétiques induisant un champ magnétique non négligeable par rapport au champ magnétique terrestre. Les produits électroniques ou encore les ondes électromagnétiques produisent aussi des champs magnétiques importants par rapport au champ magnétique terrestre. Une illustration de la différence entre le champ magnétique terrestre et le champ magnétique local mesuré par le magnétomètre est fournie en Figure 14.

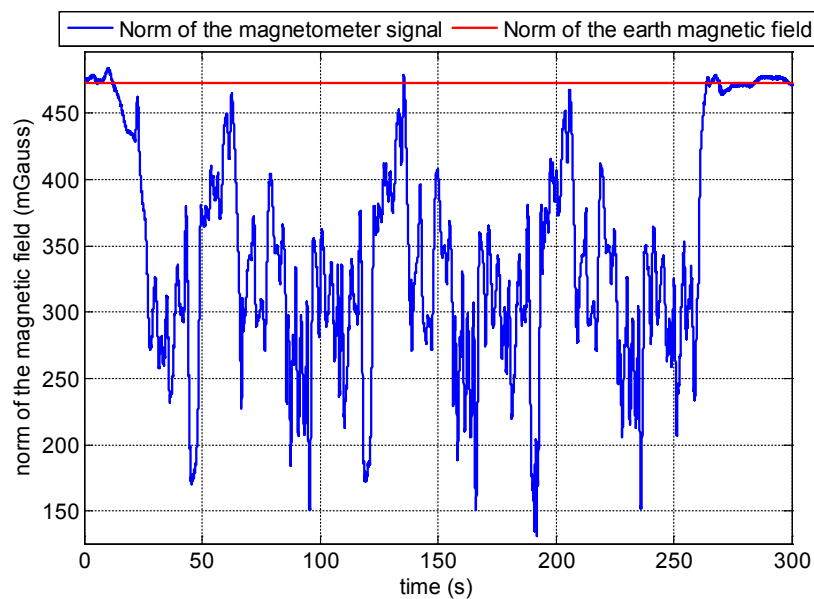


Figure 14: Norme du signal du magnétomètre comparée à celle du champ magnétique terrestre

Il a été demandé à un piéton de marcher à l'intérieur d'un bâtiment avec un magnétomètre. En comparant les normes du champ magnétique et celle du champ local mesuré par le magnétomètre, des écarts notoires apparaissent. Ces différences de normes sont dues à la présence de sources magnétiques à l'intérieur du bâtiment. Ces sources émettent un champ magnétique mesuré par le magnétomètre. La mesure fournie par le capteur n'est donc pas le champ magnétique terrestre.

C.2 Méthodes usuelles appliquées au problème d'estimation de l'orientation

C.2.1 Hypothèse de mesure des champs terrestres

À partir de l'hypothèse de mesure des champs terrestres, les angles d'Euler, la matrice de rotation ou le quaternion peuvent être estimés.

C.2.1.1 Estimation de l'orientation sans modèle de propagation

C.2.1.1.1 Estimation des angles d'Euler

Les angles d'Euler sont directement estimés à partir du magnétomètre et de l'accéléromètre [20].

La séquence choisie des angles d'Euler est *yaw-pitch-roll*, pour tout vecteur $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^b = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \mathbf{x}^n \quad (3.15)$$

L'application de (3.15) au champ de gravité terrestre :

$$\mathbf{g}^b = g \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Ce qui permet d'estimer directement le *pitch* et le *roll* :

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \arcsin\left(\frac{-\hat{\mathbf{g}}^b(1)}{g}\right) \\ \hat{\phi} = \arctan_2(\hat{\mathbf{g}}^b(2), \hat{\mathbf{g}}^b(3)) \end{cases} \quad (3.17)$$

La mesure du magnétomètre fournit une estimation du champ magnétique, en décomposant la matrice de rotation suivant les trois rotations $\mathbf{C}_b^n = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi$:

$$\mathbf{m}_e^n = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \mathbf{m}_e^b \quad (3.18)$$

Puis en multipliant à gauche par $\mathbf{R}_\psi^T$:

$$\mathbf{R}_\psi^T \mathbf{m}_e^n = \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \mathbf{m}_e^b \quad (3.19)$$

En posant $\mathbf{m}^w = \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \mathbf{m}_e^b$, il vient finalement, l'équation d'inconnues $\sin \psi$ et $\cos \psi$:

$$\begin{pmatrix} m_e^n \cos \psi + m_e^e \sin \psi \\ m_e^e \cos \psi - m_e^n \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}^w(1) \\ \mathbf{m}^w(2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_e^e & m_e^n \\ -m_e^n & m_e^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}^w(1) \\ \mathbf{m}^w(2) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Ce système est linéaire et se résout par :

$$\begin{pmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} = \frac{1}{(m_e^e)^2 + (m_e^n)^2} \begin{pmatrix} m_e^e & -m_e^n \\ m_e^n & m_e^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m}^w(1) \\ \mathbf{m}^w(2) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

L'angle *yaw* est finalement déduit et estimé par :

$$\hat{\psi} = \arctan_2(m_e^e \hat{\mathbf{m}}^w(1) - m_e^n \hat{\mathbf{m}}^w(2), m_e^n \hat{\mathbf{m}}^w(1) + m_e^e \hat{\mathbf{m}}^w(2)) \quad (3.22)$$

C.2.1.1.2 Problème de Wahba

L'estimation de l'orientation à partir de vecteurs d'observations est le classique problème de Wahba [42]. Le problème de Wahba consiste à estimer une matrice de rotation minimisant une fonction coût sachant les coordonnées de vecteurs dans deux systèmes de coordonnées :

$$f(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\mathbf{x}_i^n - \mathbf{R} \mathbf{x}_i^b\|^2 \quad (3.23)$$

avec :

- $\mathbf{x}_i^n, \mathbf{x}_i^b$ les $i^{\text{ème}}$ vecteurs d'observations dans les deux systèmes de coordonnées. Dans notre cas, les vecteurs d'observation sont les champs terrestres
- $\mathbf{R}$ est une matrice de rotation
- $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ la pondération des observations telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre ce problème [42]. Dans cette partie, c'est la résolution en quaternion qui est exposée. Le problème (3.23) peut s'écrire en utilisant les quaternions comme paramétrage de l'orientation :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^n \end{pmatrix}_q - \mathbf{q} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^b \end{pmatrix}_q \otimes \bar{\mathbf{q}} \right\|^2 \quad (3.24)$$

La solution de ce problème est donc :

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n = \arg \min_{\mathbf{q}} (f(\mathbf{q})), \|\mathbf{q}\| = 1 \quad (3.25)$$

La solution de ce problème (3.25) est :

$$\mathbf{H} \hat{\mathbf{q}} = \lambda_{\min} \hat{\mathbf{q}}, \|\hat{\mathbf{q}}\| = 1 \quad (3.26)$$

avec $\hat{\mathbf{q}}$ le vecteur propre unitaire de la plus petite valeur propre $\lambda_{\min}$ de la matrice $\mathbf{H}$ définie par :

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\mathbf{M} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^n \end{pmatrix}_q \right) - \mathbf{C} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^b \end{pmatrix}_q \right) \right)^T \left(\mathbf{M} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^n \end{pmatrix}_q \right) - \mathbf{C} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^b \end{pmatrix}_q \right) \right) \right) \quad (3.27)$$

Démonstration :

En supposant le quaternion unitaire, l'équation (3.24) se réécrit en fonction de la transformation du produit de quaternions en un produit matrice-vecteur par :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\| \mathbf{M} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^n \end{pmatrix}_q \right) \mathbf{q} - \mathbf{C} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^b \end{pmatrix}_q \right) \mathbf{q} \right\|^2 \quad (3.28)$$

La fonction f s'écrit donc finalement :

$$f(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\mathbf{M} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^n \end{pmatrix}_q \right) - \mathbf{C} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^b \end{pmatrix}_q \right) \right)^T \left(\mathbf{M} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^n \end{pmatrix}_q \right) - \mathbf{C} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^b \end{pmatrix}_q \right) \right) \right) \mathbf{q} \quad (3.29)$$

La fonction f est donc minimale lorsque $\mathbf{q}$ appartient à l'espace propre de la plus petite valeur propre de la matrice suivante :

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\mathbf{M} \left(\left(\mathbf{x}_i^n \right)_q \right) - \mathbf{C} \left(\left(\mathbf{x}_i^b \right)_q \right) \right)^T \left(\mathbf{M} \left(\left(\mathbf{x}_i^n \right)_q \right) - \mathbf{C} \left(\left(\mathbf{x}_i^b \right)_q \right) \right) \right) \quad (3.30)$$

Cette matrice est définie, ainsi le quaternion $\mathbf{q}$ est estimé de la manière suivante :

$$\mathbf{H}\hat{\mathbf{q}} = \lambda_{\min} \hat{\mathbf{q}}, \|\hat{\mathbf{q}}\| = 1 \quad (3.31)$$

L'expression (3.26) est donc retrouvée.

L'estimation de l'orientation par fusion accéléromètre-magnétomètre est sensible aux accélérations externes, aux variations de champ magnétique ainsi qu'aux bruits des capteurs. L'ajout d'un modèle de propagation notamment à partir du gyromètre permet de lisser cette estimation.

C.2.1.2 Estimation de l'orientation avec modèle de propagation

Le gyromètre fournit une estimation de la vitesse de rotation de la centrale. Il permet donc par intégration de sa mesure une estimation de l'orientation. L'intégration possède la propriété de réduire les bruits hautes-fréquences, en revanche l'effet des bruits basses fréquences, comme le biais, se trouve amplifié.

C.2.1.2.1 Additive Extended Kalman Filter (AEKF)

L'AEKF est un EKF où l'erreur sur le quaternion est additive [43] [44] [45]. Dans cette partie, un exemple d'AEKF est développé avec pour vecteur d'état, le quaternion et le biais du gyromètre :

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{q}_b^{nT} \quad \mathbf{b}_\omega^T \right)^T \quad (3.32)$$

avec : $\mathbf{q}_b^n$ le quaternion représentant l'orientation de la centrale inertielle dans le référentiel de navigation et $\mathbf{b}_\omega$ le biais du gyromètre, exprimé dans le référentiel body. Le vecteur d'état estimé est noté $\hat{\mathbf{x}}$ et l'erreur d'estimation est définie par :

$$\delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{q}_b^n \\ \delta \mathbf{b}_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_b^n - \hat{\mathbf{q}}_b^n \\ \mathbf{b}_\omega - \hat{\mathbf{b}}_\omega \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Propagation : Le vecteur d'état estimé à l'instant $t + \Delta t$ est :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{b,t+\Delta t}^n &= \hat{\mathbf{q}}_{b,t}^n \otimes \exp \left((\hat{\boldsymbol{\omega}})_q \Delta t \right) \\ \hat{\mathbf{b}}_{\omega,t+\Delta t} &= \hat{\mathbf{b}}_{\omega,t} \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{y}_g - \hat{\mathbf{b}}_\omega$ la vitesse angulaire estimée, Δt la période d'échantillonnage et $\hat{\mathbf{b}}_\omega$ le biais estimé du gyromètre. Le biais du gyromètre est supposé suivre un processus de Markov du premier ordre :

$$\delta \mathbf{b}_\omega = -\mathbf{F}_\omega \delta \mathbf{b}_\omega + \mathbf{n}_{b_\omega} \quad (3.35)$$

avec $\mathbf{F}_\omega$ la matrice des temps de corrélation, supposée diagonale et $\mathbf{n}_{b_\omega}$ un bruit blanc gaussien centré de variance $\sigma_{b_\omega}^2$. Le modèle de propagation d'erreur permettant de propager la matrice de variance-covariance est issu d'un développement à l'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\mathbf{q}}_b^n \\ \delta \mathbf{b}_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{C}_{(\hat{\omega})_q} & -\frac{1}{2} \mathbf{B}_{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{q}_b^n \\ \delta \mathbf{b}_\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{B}_{\hat{\mathbf{q}}_b^n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_\omega \\ \mathbf{n}_{b_\omega} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

avec la matrice $\mathbf{B}_{\hat{\mathbf{q}}_b^n} = \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}_b^n}(:, 2:4)$, ce qui signifie le bloc de la matrice $\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}_b^n}$ de la 2^{ème} colonne à la 4^{ème} colonne en prenant toutes les lignes.

Mises à jour : Il est supposé que le magnétomètre et l'accéléromètre mesurent respectivement le champ magnétique terrestre et le champ de gravité terrestre dans le référentiel body. L'innovation apportée par les deux mesures est définie par :

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{z}_a)_q &= (\mathbf{g}^n)_q - \mathbf{q}_b^n \otimes (-\mathbf{y}_a)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_b^n \\ (\delta \mathbf{z}_m)_q &= (\mathbf{m}^n)_q - \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{y}_m)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_b^n \end{aligned} \quad (3.37)$$

Le modèle de mesure est obtenu à partir d'un développement à l'ordre 1 de (3.37). Il est développé en C.3.2.2.3,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{z}_a &= \mathbf{H}_1(\mathbf{g}^n, \hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{q}_b^n - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_a \\ \delta \mathbf{z}_m &= \mathbf{H}_1(\mathbf{m}^n, \hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{q}_b^n - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_m \end{aligned} \quad (3.38)$$

avec :

- La fonction $\mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 2 \left(q_1 \mathbf{x} - \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{x} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_q \rangle \mathbf{I}_3 - \left[(q_1 \mathbf{x} - \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{x}) \times \right] \right)$ définie pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{q}$ un quaternion de rotation tel que $\mathbf{q} = (q_1 \quad \mathbf{u}_q^T)^T$
- La matrice $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ est la matrice de rotation obtenue à partir de $\hat{\mathbf{q}}_b^n$.

Le quaternion $\hat{\mathbf{q}}_b^n$ représente une rotation, il est normalisé afin de satisfaire la contrainte sur la norme $\|\hat{\mathbf{q}}_b^n\| = 1$.

C.2.1.2.2 Multiplicative Kalman Filter (MEKF)

Le MEKF est un second type d'EKF [43]. Ce type de filtre utilise la géométrie particulière de l'espace de quaternion unitaire. L'erreur sur le quaternion n'est plus additive, mais multiplicative. L'application exponentielle et la transformation de Cayley permettent d'interpréter un vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme une erreur d'orientation. À l'instar de l'AEKF, le vecteur d'état est composé du quaternion et du biais du gyromètre. La propagation du vecteur d'état est décrite en (3.34). Le choix de la définition de l'erreur va définir les modèles de propagation et de mesure. Deux solutions sont possibles : soit l'erreur notée $\mathbf{e}_1$ est exprimée dans le référentiel de navigation soit l'erreur notée $\mathbf{e}_2$ est exprimée dans le référentiel body :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{e_1} &= \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \bar{\mathbf{q}}_b^n \\ \mathbf{q}_{e_2} &= \bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \end{aligned} \quad (3.39)$$

avec le quaternion $\mathbf{q}_e$ représentant l'erreur de rotation et pouvant être paramétré par un vecteur $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^3$ en utilisant l'application exponentielle ou la transformation de Cayley :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e &= \exp\left((\mathbf{e})_q\right) \\ \mathbf{q}_e &= \left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{e})_q\right) \otimes \left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{e})_q\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Le choix de la paramétrisation n'induit aucune différence pour le modèle de propagation, en revanche, il faut remarquer le coefficient 2, qui apparaît lors de l'approximation au premier ordre en $\mathbf{e}$:

$$\begin{aligned} \exp\left((\mathbf{e})_q\right) &\approx \mathbf{I}_q + (\mathbf{e})_q \\ \left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{e})_q\right) \otimes \left(\mathbf{I}_q - (\mathbf{e})_q\right)^{-1} &\approx \mathbf{I}_q + 2(\mathbf{e})_q \end{aligned} \quad (3.41)$$

Propagation : Les modèles de propagation au premier ordre pour $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, en utilisant l'application exponentielle sont:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}}_b^n \delta \mathbf{b}_\omega + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_\omega \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \delta \mathbf{b}_\omega + \frac{1}{2} \mathbf{n}_\omega \end{aligned} \quad (3.42)$$

L'équation différentielle (3.36) pour l'erreur du biais du gyromètre reste inchangée. Le vecteur d'état peut être modifié afin d'obtenir des matrices jacobiennes ne dépendant plus du vecteur d'état [46]. Pour cela, le biais du gyromètre est exprimé dans le référentiel de navigation.

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{q}_b^{nT} \quad \mathbf{b}_\omega^{nT} \right)^T \quad (3.43)$$

Les équations pour $\mathbf{e}_1$ et l'erreur du biais sont alors modifiées :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{1}{2} \delta \mathbf{b}_\omega^n + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_\omega \\ \delta \dot{\mathbf{b}}_\omega^n &= -\mathbf{F}_\omega \delta \mathbf{b}_\omega^n + \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_{b_\omega} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Les matrices jacobiennes sur le vecteur d'état sont alors constantes, ce qui permet d'obtenir des trajectoires plus stables.

Mises à jour : Le modèle de mesure dépend de la définition de l'erreur (3.39) et du paramétrage (3.40). L'innovation apportée par les deux capteurs peut s'écrire dans le référentiel de navigation :

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{z}_a^n)_q &= (\mathbf{g}^n)_q - \mathbf{q}_b^n \otimes (-\mathbf{y}_a)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_b^n \\ (\delta \mathbf{z}_m^n)_q &= (\mathbf{m}^n)_q - \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{y}_m)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_b^n \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ou dans le référentiel body :

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{z}_a^b)_q &= (\mathbf{y}_a)_q - \bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes (-\mathbf{g})_q \otimes \mathbf{q}_b^n \\ (\delta \mathbf{z}_m^b)_q &= (\mathbf{y}_m)_q - \bar{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{m}_e^n)_q \otimes \mathbf{q}_b^n \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pour l'erreur $\mathbf{e}_1$, les modèles de mesure sont définis dans le référentiel de navigation et en utilisant la transformation exponentielle:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{z}_a^n &= 2[\mathbf{g}^n \times] \mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_a \\ \delta \mathbf{z}_m^n &= 2[\mathbf{m}_e^n \times] \mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_m \end{aligned} \quad (3.47)$$

Pour l'erreur $\mathbf{e}_2$, ils sont définis dans le référentiel de la centrale et en utilisant la transformation exponentielle :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{z}_a^b &= -2[\mathbf{g}^b \times] \mathbf{e}_2 + \mathbf{n}_a \\ \delta \mathbf{z}_m^b &= -2[\mathbf{m}_e^b \times] \mathbf{e}_2 + \mathbf{n}_m \end{aligned} \quad (3.48)$$

Si la transformation de Cayley est utilisée, un coefficient 2 apparaît sur les matrices jacobienues des modèles de mesure.

C.2.1.2.3 Descente de Gradient

Outre les EKF, la descente de gradient permet aussi de fusionner les mesures [47]. L'idée est de minimiser une fonction coût dépendant du quaternion en procédant par une descente de gradient. La direction de descente dépend du choix de la fonction coût et de la méthode de descente utilisée. Dans ce paragraphe, la fonction à minimiser est définie en (3.24) :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\| (\mathbf{x}_i^n)_q - \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}_i^b)_q \otimes \bar{\mathbf{q}} \right\|^2 \quad (3.49)$$

avec $\mathbf{x}_i^n$ et $\mathbf{x}_i^b$ les champs de gravité et/ou magnétique terrestre exprimés respectivement dans le référentiel de navigation et le référentiel body. Le vecteur $\mathbf{x}_i^b$ est la mesure de l'accéléromètre ou du magnétomètre. La fonction coût se développe la manière suivante :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\| \left((\mathbf{x}_i^n)_q \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}_i^b)_q \right) \otimes \bar{\mathbf{q}} \right\|^2 \quad (3.50)$$

En utilisant le fait que la norme du produit de quaternions est égale au produit des normes des quaternions et qu'un quaternion et son conjugué sont de normes identiques, il vient :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\| \left((\mathbf{x}_i^n)_q \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x}_i^b)_q \right) \right\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 \quad (3.51)$$

Puis en utilisant l'écriture (3.27) la fonction f s'écrit finalement :

$$f(\mathbf{q}) = \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q} \quad (3.52)$$

avec $\mathbf{H}$ définie en (3.27). En dérivant la fonction f suivant $\mathbf{q}$, le gradient obtenu est :

$$\nabla f(\mathbf{q}) = 2(\mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q}) \mathbf{q} + 2\|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{H} \mathbf{q} \quad (3.53)$$

Avec $\nabla f(\mathbf{q})$ le vecteur gradient de f en $\mathbf{q}$. L'équation différentielle des quaternions unitaires (3.14) ou (3.34), permet d'estimer le quaternion $\hat{\mathbf{q}}_{b,t}^n$ par propagation à partir de la mesure du gyromètre et d'une estimation $\hat{\mathbf{q}}_{b,t-\Delta t}^n$. La direction de descente est estimée à partir de cette estimation, il vient le processus itératif suivant :

$$\hat{\mathbf{q}}_{b,t,i+1}^n = \hat{\mathbf{q}}_{b,t,i}^n - \gamma_i \frac{\nabla f(\hat{\mathbf{q}}_{b,t,i}^n)}{\|\nabla f(\hat{\mathbf{q}}_{b,t,i}^n)\|} \quad (3.54)$$

avec $\hat{\mathbf{q}}_{b,t,i}^n$ l'ième estimation du processus itératif et γ_i le pas de la descente. Une itération est suffisante suivant la valeur du pas γ . D'autres directions peuvent être définies en prenant en compte la matrice hessienne notée $\nabla^2 f$ ou une approximation de cette dernière :

$$\nabla^2 (f(\mathbf{q})) = 2(\mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q}) \mathbf{I}_4 + 2\|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{H} + 8(\mathbf{H} \mathbf{q}) \mathbf{q}^T \quad (3.55)$$

La matrice hessienne permet de définir la direction de Gauss-Newton :

$$\hat{\mathbf{q}}_{b,t,i+1}^n = \hat{\mathbf{q}}_{b,t,i}^n - \gamma_i \left(\nabla^2 f(\hat{\mathbf{q}}_{b,t,i}^n) \right)^{-1} \nabla f(\hat{\mathbf{q}}_{b,t,i}^n) \quad (3.56)$$

C.2.1.2.4 Filtre de Kalman linéarisé

Un autre type de filtre de Kalman a été proposé en [48]. Cet algorithme utilise la propriété suivante pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{M} \left(\left(\mathbf{x}^n \right)_q \right) \mathbf{q}_b^n - \mathbf{C} \left(\left(\mathbf{x}^b \right)_q \right) \mathbf{q}_b^n = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

Cette propriété permet d'obtenir un modèle de mesure linéaire :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_t \mathbf{q} \quad (3.58)$$

avec $\mathbf{H}_t = \left(\mathbf{M} \left(\left(\mathbf{x}_t^n \right)_q \right) - \mathbf{C} \left(\left(\mathbf{x}_t^b \right)_q \right) \right)_{i \in [1;2]}$ où $\mathbf{x}_t^n, \mathbf{x}_t^b$ représentent les vecteurs de gravité ou magnétiques terrestres dans les référentiels de navigation et body respectivement.

C.2.1.2.5 Filtre complémentaire

De manière analogue à ce qui a été énoncé précédemment, deux quaternions peuvent être estimés à chaque instant : $\hat{\mathbf{q}}_{b,gyro}^n$ issu de la propagation (3.14) et $\hat{\mathbf{q}}_{b,am}^n$ issu des mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre C.2.1.1. Le quaternion estimé est issu d'une pondération des deux quaternions [49]. À l'aide de la transformée de Laplace, la fusion s'écrit :

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n(s) = \mathbf{F}_1(s) \hat{\mathbf{q}}_{b,gyro}^n(s) + \mathbf{F}_2(s) \hat{\mathbf{q}}_{b,am}^n(s) \quad (3.59)$$

avec $\mathbf{F}_1(s)$ et $\mathbf{F}_2(s)$ deux filtres dits complémentaires tels que $\mathbf{F}_1(s) + \mathbf{F}_2(s) = \mathbf{1}$.

C.2.1.2.6 *UKF et filtres particulières*

L'EKF permet une estimation du vecteur d'état et de la matrice de variance-covariance. Cependant, la matrice de variance-covariance est issue d'une linéarisation des fonctions de propagation et de mesure. L'approximation au premier ordre induit cependant des erreurs. L'Unscented Kalman Filter propose une estimation plus fine de la matrice de variance-covariance [50]. Ce n'est plus un vecteur qui est propagé via les équations de propagation et de mesures, mais un ensemble de vecteurs appelés sigma vecteurs. Ce processus permet d'obtenir une meilleure connaissance de la dispersion du vecteur d'état.

Les filtres particuliers sont une famille de filtres bayésiens dans lequel l'hypothèse d'une distribution gaussienne du vecteur d'état est levée [51]. La distribution aléatoire du vecteur d'état est estimée au cours du temps : un support discret appelé ensemble des particules est propagé et le poids de chacune des particules est estimé en fonction de la vraisemblance par rapport aux mesures.

C.2.2 *Stratégies employées par rapport aux variations de champ magnétique et aux accélérations externes*

Dans cette partie, une revue des stratégies et méthodes existantes par rapport aux variations de champ magnétique et aux accélérations externes est proposée.

C.2.2.1 *Adaptation des gains dans la fusion accéléromètre-magnétomètre-gyromètre*

Une première stratégie par rapport aux accélérations externes et aux variations de champs magnétiques consiste à adapter les gains dans de la fusion accéléromètre-magnétomètre-gyromètre, [52] [53] [54]. Une détection de l'écart par rapport aux champs terrestres est alors mise en place. Le gain est alors rendu faible ou nul lorsque la détection indique la présence d'accélérations externes ou d'un champ magnétique différent du champ terrestre. Cette stratégie permet de ralentir la réponse des filtres lors des variations magnétiques ou d'accélérations externes. En revanche, dans un milieu où le champ magnétique est continuellement différent du champ magnétique terrestre, la robustesse par rapport à un champ magnétique local différent du champ terrestre n'est pas assurée.

C.2.2.2 *Fingerprinting : Empreintes de champ magnétique*

Cette approche est basée sur le principe d'empreintes spatiales utilisé pour localiser un objet mobile avec un récepteur WiFi en se basant sur l'amplitude du signal [55]. Une première phase de calibration est nécessaire. Il s'agit de construire une base de données : les amplitudes des champs magnétiques sont reliées à une position géographique. Après la mise en place de cette carte pour un lieu donné, le champ magnétique mesuré est comparé à la base de données et la position est directement estimée. Cette approche permet d'estimer directement la position du piéton. Elle permet de prendre en compte les variations spatiales du champ magnétique, notamment à l'intérieur des bâtiments. Cependant, cette approche ne prend pas en compte les variations temporelles du champ magnétique. En effet, des objets comme les ascenseurs sont en mouvements et induisent des variations de champ magnétique pour une position donnée.

C.2.2.3 *Mesure directe du gradient magnétique pour observer la vitesse*

L'idée de cette approche est de relier variation de champ magnétique à une variation de mouvement. Dans cette approche un ensemble de magnétomètres séparés par des distances connues permet de mesurer le gradient du champ magnétique local [56]. Ce gradient de champ magnétique permet d'observer la vitesse de l'objet instrumenté et la dérivée temporelle du champ magnétique. Ainsi à partir d'une position connue, un processus récursif d'estimation de la vitesse est appliqué en

intégrant les vitesses observées. Les performances de cette méthode sont améliorées dans les milieux avec d'importantes variations magnétiques. Cependant, elles dépendent fortement de la calibration des magnétomètres. Les distances entre les magnétomètres sont notamment critiques pour la mesure du gradient.

C.2.2.4 Utilisation de phase constante du champ magnétique : QSF

Une autre approche se base l'utilisation de phases quasi statiques du champ magnétique, [11]. Le champ magnétique est composé des phases constantes pour lesquelles le champ mesuré n'est pas le champ terrestre. Ces phases constantes de champ magnétique permettent d'observer la vitesse angulaire de la centrale inertielle. En appliquant la formule Bour introduite en Chapitre 2, pour la dérivée temporelle du champ magnétique dans les référentiels de navigation et body :

$$\left(\frac{d\mathbf{m}^b}{dt} \right)_n = \left(\frac{d\mathbf{m}^b}{dt} \right)_b + \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \wedge \mathbf{m}^b \quad (3.60)$$

Lorsque le champ magnétique est constant dans le référentiel de navigation alors la dérivée du champ magnétique dans le référentiel body est liée à la vitesse de rotation du repère body par rapport au repère de navigation :

$$\left(\frac{d\mathbf{m}^b}{dt} \right)_b = -\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \wedge \mathbf{m}^b \quad (3.61)$$

Cette approche innovante se base sur deux éléments déterminants pour la qualité de l'estimation : La détection de phases quasi statiques et l'estimation d'un champ magnétique de référence pour chaque phase quasi statique.

C.2.3 Conclusions

Plusieurs enseignements sont tirés de cette revue des méthodes de l'état de l'art :

Pour la phase de propagation, le signal du gyromètre est intégré. Bien que son biais soit pris en compte, l'erreur d'intégration issue de l'approximation (3.12) ne l'est pas.

L'hypothèse de mesure des champs terrestres étant fausse, diverses stratégies ont été développées. Cependant ces stratégies souffrent de plusieurs manquements :

- La stratégie d'adaptation des gains n'exploite pas toute l'information contenue dans le signal du magnétomètre.
- La stratégie Fingerprinting sur le champ magnétique n'est applicable que pour une zone limitée
- La stratégie de mesure du gradient magnétique est dépendante d'une calibration fine
- La stratégie d'exploitation des phases quasi statiques est dépendante de la qualité des estimations du champ de référence

Enfin, pour des applications nécessitant l'accélération dans le référentiel de navigation, l'estimation de l'orientation se révèle particulièrement critique : l'accélération estimée dans le référentiel de navigation est notée $\hat{\mathbf{a}}^n$. Elle est obtenue par projection des mesures inertielles dans le référentiel de navigation à l'aide de l'orientation estimée :

$$\hat{\mathbf{a}}^n = (\mathbf{g}^n)_q + \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{y}_a)_q \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \quad (3.62)$$

En utilisant le formalisme des angles d'Euler, l'erreur d'accélération dans le référentiel de navigation est à l'ordre 1 :

$$\delta \mathbf{a}^n \approx -[\mathbf{y}_a^n \times] \mathbf{e} \quad (3.63)$$

avec $\mathbf{e} = (\delta\phi \ \delta\theta \ \delta\psi)^T$ le vecteur des erreurs sur les angles d'Euler. La mesure $\mathbf{y}_a^n$ de l'accéléromètre est en moyenne proche de 10m/s^2 , en supposant une erreur angulaire de 10° , cela peut induire une erreur d'accélération de 1.7 m/s^2 .

C.3 Avancées par rapport aux filtres existants

Dans cette partie, nous développons un filtre d'estimation de l'orientation basé l'utilisation de périodes de champs quasi statiques. Nous adoptons donc l'approche quasi statique. Cependant, nous apportons les contributions suivantes :

- Les erreurs d'intégration sont incluses dans le vecteur d'état
- La qualité du champ de référence est prise en compte

En C.3.1, l'information fournie par le gyromètre est interprétée en termes d'orientation et non en termes de vitesse angulaire. Un nouveau modèle pour le gyromètre est alors adopté. Cette modélisation permet d'utiliser directement la forme discrète du filtre de Kalman et de modéliser les erreurs d'intégration.

En C.3.2, l'algorithme MAGYQ est présenté. Le modèle de propagation est construit du modèle en quaternions du signal du gyromètre. Les modèles de mesure sont basés sur les hypothèses de mesures quasi statiques : Un premier modèle où la mesure courante est comparée à un champ de référence, ce qui permet d'observer l'erreur d'orientation. Un second modèle où la mesure courante est comparée à la mesure suivante. Ce second modèle permet d'observer les biais.

En C.3.3, la qualité du champ de référence des périodes quasi statiques est prise en compte. L'estimation du champ de référence fait intervenir l'orientation estimée de la centrale du début de la phase statique.

C.3.1 Modélisation du signal du gyromètre en quaternion unitaire

L'information du signal du gyromètre n'est plus interprétée comme une vitesse angulaire, mais directement comme une rotation entre deux instants successifs.

C.3.1.1 Développement du nouveau modèle

Comme il a été vu en C.1.2.1, la propagation temporelle du quaternion s'effectue grâce à l'exponentielle de la vitesse de rotation :

$$\mathbf{q}_b^n(t + \Delta t) = \mathbf{q}_b^n(t) \otimes \mathbf{q}_{\omega, \Delta t}(t) \quad (3.64)$$

avec $\mathbf{q}_{\omega, \Delta t}(t)$ le quaternion représentant la rotation entre les instants t et $t + \Delta t$ du repère body. L'information du gyromètre est interprétée comme une rotation entre les instants t et $t + \Delta t$:

$$\mathbf{q}_{y_g, \Delta t} = \exp\left(\frac{\Delta t}{2} (\mathbf{y}_g)_q\right) \quad (3.65)$$

avec $\mathbf{q}_{y_g, \Delta t}$ le quaternion exprimant la rotation estimée entre les deux instants, il sera appelé le quaternion-gyroscopie et $\mathbf{y}_g$ la mesure du gyromètre. De la même manière que pour le modèle classique du signal du gyromètre, la modélisation en quaternion du signal du gyromètre est :

$$\mathbf{q}_{y_g, \Delta t} = \mathbf{q}_{\omega, \Delta t} + \mathbf{b}_{q_g, \Delta t} + \mathbf{n}_{q_{\omega}, \Delta t} \quad (3.66)$$

avec

- $\mathbf{b}_{q_g, \Delta t}$ représentant un biais du quaternion contenant les erreurs non gaussiennes du gyromètre avec l'erreur d'intégration.
- $\mathbf{n}_{q_{\omega}, \Delta t}$ représentant un bruit blanc de variance $\sigma_{q_{\omega}}^2$.

Le biais est modélisé par une marche aléatoire :

$$\dot{\mathbf{b}}_{q_g, \Delta t} = \mathbf{n}_{b_{q_{\omega}}, \Delta t} \quad (3.67)$$

avec $\mathbf{n}_{b_{q_{\omega}}, \Delta t}$ un bruit blanc centré gaussien de variance $\sigma_{b_{q_{\omega}}, \Delta t}^2$. À l'instar des signaux des autres capteurs, les quaternions-gyroscopes construits à partir du signal du gyromètre sont analysés par un calcul de variance d'Allan. Les différents bruits et leurs caractéristiques sont alors extraits : bruit blanc, instabilité du biais, bruit corrélé, marche aléatoire [23]. La variance d'Allan est calculée sur l'ensemble des composantes du quaternion-gyroscopie Figure 15. Le comportement est identique pour les 4 composantes, une première partie avec une pente de -1/2 puis une pente à 0 et enfin un début de pente à +1/2. On note cependant que la première composante est beaucoup plus faible, elle correspond à un terme d'ordre 2 en Δt .

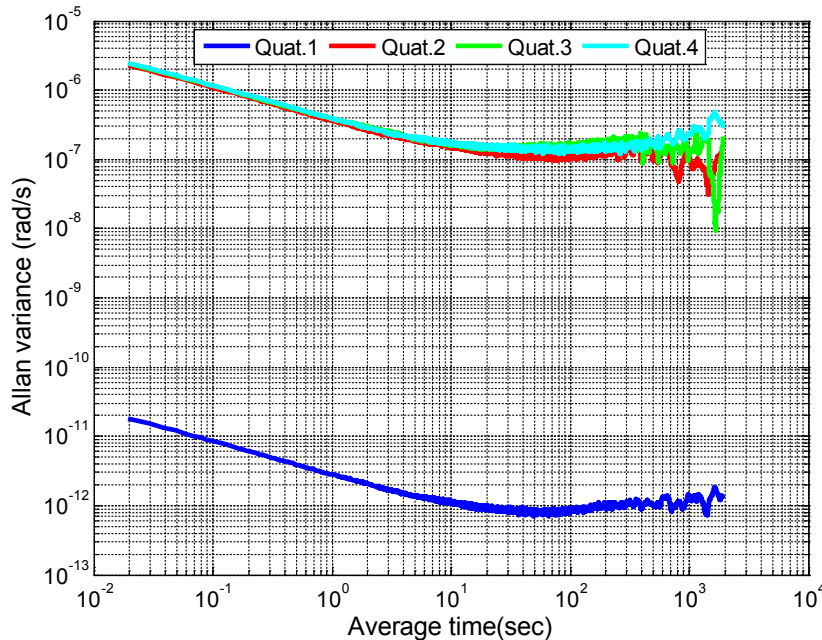


Figure 15: Variance d'Allan des 4 composantes du quaternion-gyroscopie, issues du gyromètre de l'ADIS 16488

C.3.1.2 Analyses et validation du modèle

C.3.1.2.1 Justification théorique du modèle

En considérant la période Δt comme un élément du premier ordre, un développement limité de (3.65) donne :

$$\mathbf{q}_{y_g, \Delta t} = \mathbf{1}_q + \frac{\Delta t}{2}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b)_q + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{b}_\omega)_q + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{n}_\omega)_q + o(\Delta t) \quad (3.68)$$

En effectuant le développement limité sur $\mathbf{q}_{\omega, \Delta t}$:

$$\mathbf{q}_{\omega, \Delta t} = \mathbf{1}_q + \frac{\Delta t}{2}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b)_q + o(\Delta t) \quad (3.69)$$

En injectant cette relation dans (3.68), le modèle du quaternion-gyroscope s'écrit :

$$\mathbf{q}_{y_g, \Delta t} = \mathbf{q}_{\omega, \Delta t} + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{b}_\omega)_q + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{n}_\omega)_q + o(\Delta t) \quad (3.70)$$

Ainsi, le modèle (3.66) est retrouvé en posant :

- $\mathbf{b}_{q_g, \Delta t} = \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{b}_\omega)_q + o(\Delta t)$ le biais sur le quaternion-gyroscope
- $\mathbf{n}_{q_g, \Delta t} = \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{n}_\omega)_q + o(\Delta t)$ un bruit blanc sur le quaternion-gyroscope

C.3.1.2.2 Justification du modèle par la simulation

Le modèle (3.66) peut être testé par simulation. Deux signaux simulés sont construits puis comparés. Le premier signal est construit à partir d'une simulation de signal du gyromètre et le second est simulé directement à partir du modèle (3.66):

Pour le premier signal, le signal du gyromètre est simulé à partir de son modèle développé en chapitre 2. Soit $\tilde{\mathbf{y}}_g$ le signal du gyromètre simulé, en supposant la vitesse de rotation nulle. Il ne reste donc qu'un biais modélisé par une marche aléatoire et un bruit blanc gaussien. À partir de ce signal simulé, les quaternions-gyroscopes notés $\mathbf{q}_{\tilde{\mathbf{y}}_g}$ sont construits. Les paramètres à fixer sont la puissance du bruit σ_g^2 , le biais initial $\mathbf{b}_g(0)$ et la puissance du bruit $\mathbf{n}_{b_g}$ de la marche aléatoire notée $\sigma_{b_g}^2$. Les valeurs choisies doivent être dans l'ordre de grandeur de celles des capteurs MEMS. Dans ce cas, il s'agit de l'ADIS 16488 [57].

Pour le second signal noté $\mathbf{q}_{y_g}$, le modèle (3.66) est directement utilisé, il ne reste donc qu'à simuler une marche aléatoire avec un bruit blanc gaussien. Les paramètres à déterminer pour la simulation sont la puissance du bruit $\sigma_{q_\omega}^2$ et le biais $\mathbf{b}_{q_g, \Delta t}$ assimilé à une marche aléatoire avec comme valeur initiale $\mathbf{b}_{q_\omega, \Delta t}(0)$ et le bruit noté $\mathbf{n}_{b_{q_\omega, \Delta t}}$ avec une puissance notée $\sigma_{b_{q_\omega, \Delta t}}^2$. Les valeurs choisies sont celles utilisées pour simuler le signal du gyromètre, multipliées par le facteur $\frac{\Delta t}{2}$, pour les trois dernières composantes. Pour la première composante, les valeurs choisies sont élevées au carré par rapport aux autres composantes.

La simulation est effectuée sur 100000 échantillons avec une fréquence de 100Hz. Afin de comparer statistiquement les signaux, un test de Kolmogorov-Smirnov est effectué [58]. Ce test indique si la distance entre les probabilités cumulées des deux distributions est significative ou non. L'hypothèse nulle testée et notée H_0 est « les deux signaux proviennent d'une même loi de probabilité ». Le test est défini par la statistique suivante :

$$T = p \left(\sup_k \left(\left| D_{\mathbf{q}_{\tilde{y}_g}}(k) - D_{\mathbf{q}_{y_g}}(k) \right| \right) \geq \frac{1.36}{\sqrt{N_{samples}}} \right) \quad (3.71)$$

avec :

- $D_{\mathbf{q}_{\tilde{y}_g}}$ la fonction de répartition empirique de $\mathbf{q}_{\tilde{y}_g}$
- $D_{\mathbf{q}_{y_g}}$ la fonction de répartition empirique de $\mathbf{q}_{y_g}$
- $N_{samples}$ correspond au nombre d'échantillons, ici 100000
- La valeur 1.36 correspond à un risque de 5%

L'hypothèse H_0 n'est pas rejetée pour les trois dernières composantes avec des p-values importantes (0,8), en revanche H_0 est rejetée pour la première composante. Cependant, cette composante correspond à un élément du second ordre en Δt . La modélisation proposée en (3.66) est donc satisfaisante.

C.3.2 MAGYQ - Magnetic and Acceleration field with Gyroscope Quaternion

Cette partie correspond à la description du filtre d'estimation d'orientation *MAGYQ* [12]. Cet algorithme intègre la modélisation présentée précédemment.

C.3.2.1 Propagation de l'orientation dans un filtre de Kalman avec paramétrage en quaternions

C.3.2.1.1 Vecteur d'état

Soit le vecteur d'état $\mathbf{x} = [\mathbf{q}_b^n \quad \mathbf{b}_{\mathbf{q}_g, \Delta t} \quad \mathbf{b}_a]^T \in \mathbb{R}^{11}$, avec $\mathbf{q}_b^n$ le quaternion représentant la rotation entre le repère b de la centrale et le repère n de la carte, $\mathbf{b}_a$ représente le biais de l'accéléromètre et $\mathbf{b}_{\mathbf{q}_g, \Delta t}$ représente le biais du quaternion gyromètre défini en (3.66), il est noté $\mathbf{b}_{\mathbf{q}_g}$. Afin de développer le modèle d'erreur, les éléments suivants sont définis :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (3.72)$$

avec $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{q}}_b^n \quad \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{q}_g} \quad \hat{\mathbf{b}}_a]^T$ le vecteur d'état estimé et $\delta \mathbf{x} = [\delta \mathbf{q}_b^n \quad \delta \mathbf{b}_{\mathbf{q}_g} \quad \delta \mathbf{b}_a]^T$ l'erreur d'estimation.

C.3.2.1.2 Propagation du vecteur d'état

Il faut tout d'abord estimer la rotation entre l'instant t_{k-1} et l'instant t_k , notée $\mathbf{q}_{\omega t_{k-1}, \Delta t}$. L'index Δt est omis pour le reste du développement des équations. Notons $\hat{\mathbf{x}}_{t_k} = [\hat{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \quad \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{q}_g t_k} \quad \hat{\mathbf{b}}_{at_k}]^T$, l'estimation du vecteur d'état à l'instant t_k .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_{y_{g^{t_{k-1}}}} = \exp\left(\frac{\Delta t}{2}(\mathbf{y}_{g^{t_{k-1}}})_q\right) \\ \hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}} = \mathbf{q}_{y_{g^{t_{k-1}}}} - \hat{\mathbf{b}}_{q_{g^{t_{k-1}}}} \\ \hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}} = \frac{\hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}}}{\|\hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}}\|} \end{array} \right. \quad (3.73)$$

L'estimation du quaternion $\mathbf{q}_b^n$ et des biais $\mathbf{b}_{q_g}$ et $\mathbf{b}_a$ se fait de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{q}}_{bt_k}^n = \hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}} \\ \hat{\mathbf{b}}_{q_{g^{t_k}}} = \hat{\mathbf{b}}_{q_{g^{t_{k-1}}}} \\ \hat{\mathbf{b}}_{a^{t_k}} = \hat{\mathbf{b}}_{a^{t_{k-1}}} \end{array} \right. \quad (3.74)$$

La matrice de variance-covariance notée $\mathbf{P}_{t_k}$ est propagée temporellement à partir des matrices jacobienues du système (3.74). Pour les calculer, le modèle de propagation d'erreur est établi :

$$\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}}} \delta \mathbf{q}_{bt_{k-1}}^n - \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}}^n \delta \mathbf{b}_{q_{g^{t_{k-1}}}} - \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}}^n \mathbf{n}_{q_{\omega, \Delta t}} \quad (3.75)$$

Démonstration :

Pour développer le modèle de propagation de l'erreur, il suffit d'exprimer l'erreur à l'instant t_k :

$$\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n = \mathbf{q}_{bt_k}^n - \hat{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \quad (3.76)$$

En utilisant la formule(3.64), le développement devient :

$$\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n = \mathbf{q}_{bt_{k-1}}^n \otimes \mathbf{q}_{\omega^{t_{k-1}}} - \hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}} \quad (3.77)$$

avec $\hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}} = \mathbf{q}_{y_{g^{t_{k-1}}}} - \hat{\mathbf{b}}_{q_{g^{t_{k-1}}}}$ le quaternion estimant la rotation entre les instants t_k et t_{k-1} . En utilisant le modèle du quaternion-gyroscope (3.66) et la définition de l'erreur d'état (3.72):

$$\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n = (\hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}^n + \delta \mathbf{q}_{bt_{k-1}}^n) \otimes (\mathbf{q}_{y_{g^{t_{k-1}}}} - \mathbf{b}_{q_{g^{t_{k-1}}}} - \mathbf{n}_{q_{\omega^{t_{k-1}}}}) - \hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}^n \otimes (\mathbf{q}_{y_{g^{t_{k-1}}}} - \hat{\mathbf{b}}_{q_{g^{t_{k-1}}}}) \quad (3.78)$$

Le développement de cette expression en ne gardant que les termes d'erreur d'ordre 1 donne:

$$\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n \approx \delta \mathbf{q}_{bt_{k-1}}^n \otimes (\mathbf{q}_{y_{g^{t_{k-1}}}} - \hat{\mathbf{b}}_{q_{g^{t_{k-1}}}}) - \hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}^n \otimes \delta \mathbf{b}_{q_{g^{t_{k-1}}}} - \hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}^n \otimes \mathbf{n}_{q_{\omega^{t_{k-1}}}} \quad (3.79)$$

L'erreur $\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n$ est donc constituée de 3 éléments. Un premier terme provenant de l'erreur $\delta \mathbf{q}_{bt_{k-1}}^n$ précédente propagée avec l'information du gyromètre, un deuxième terme provenant de la dérive du gyromètre et un dernier terme correspondant à du bruit blanc. En utilisant, la transformation d'un produit de quaternion, le modèle (3.75) est retrouvé :

$$\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{q}}_{\omega^{t_{k-1}}}} \delta \mathbf{q}_{bt_{k-1}}^n - \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}}^n \delta \mathbf{b}_{q_{g^{t_{k-1}}}} - \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}}^n \mathbf{n}_{q_{\omega, \Delta t}} \quad (3.80)$$

Les matrices jacobiennes $\mathbf{F}_{t_{k-1}}$ et $\mathbf{G}_{t_{k-1}}$ se déterminent à partir des modèles (3.74) et (3.75). La variance se propage donc par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{t_{k-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{q}}_{wt_{k-1}}} & -\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_{t_{k-1}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}_{bt_{k-1}}}^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_s \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & T_s \mathbf{I} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{P}_{t_k} = \mathbf{F}_{t_{k-1}} \mathbf{P}_{t_{k-1}} \mathbf{F}_{t_{k-1}}^T + \mathbf{G}_{t_{k-1}} \mathbf{Q}_{t_{k-1}} \mathbf{G}_{t_{k-1}}^T \quad (3.81)$$

avec les matrices $\mathbf{M}_q$ et $\mathbf{C}_q$ définies lors de la transformation du produit de quaternions en produit matriciel, définie au chapitre 2 et $\mathbf{Q}_{t_{k-1}}$ la matrice de bruit de propagation.

C.3.2.2 Mise à jour à partir de phases quasi statiques

Dans un premier temps, les phases quasi statiques sont détectées. Dans un second temps deux types de mises à jour sont effectués : la première mise à jour est la comparaison de la mesure à un champ de référence, la seconde mise à jour est la comparaison de deux mesures successives.

C.3.2.2.1 Champs de référence

Pour l'accéléromètre, le champ de référence est le champ de gravité terrestre. Expérimentalement, nous n'avons pas observé de phases quasi statiques où le champ de référence est différent du champ de gravité. La mesure de l'accéléromètre est centrée autour de la gravité terrestre.

Pour le magnétomètre, le champ de référence est différent du champ magnétique terrestre. Néanmoins, le champ magnétique terrestre est utilisé lorsqu'il est détecté à l'aide des détecteurs définis en C.3.2.2.2. Cela permet d'assurer la convergence du filtre. En revanche, en milieux intérieurs avec la présence de sources magnétiques, le champ magnétique local est modifié. Un autre champ de référence doit être calculé. Il est estimé de la manière suivante :

$$\left(\hat{\mathbf{m}}_{ref}^n \right)_q = \hat{\mathbf{q}}_{bt_0}^n \otimes \left(\mathbf{y}_{m,t_0} \right)_q \otimes \bar{\hat{\mathbf{q}}}_{bt_0}^n \quad (3.82)$$

avec $\hat{\mathbf{q}}_{bt_0}^n$ le quaternion estimé à au début de la période statique et $\mathbf{y}_{m,t_0}$ la mesure du magnétomètre en début de période statique.

C.3.2.2.2 Détection de phases quasi statiques

Le détecteur proposé est basé sur les normes des mesures des capteurs à l'instar du likelihood ratio test (LRT) [59]. Lorsque le champ est constant dans le référentiel de navigation, sa norme l'est par conséquent. La norme est invariante par changement de repère. Un premier détecteur est établi, permettant de mesurer l'écart quadratique moyen sur une fenêtre autour de la mesure courante entre les mesures et la norme de référence :

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=i-N}^{i+1} \left(\left\| \mathbf{f}_{t_k}^b \right\| - \xi_{ref} \right)^2 < \gamma_1 \quad (3.83)$$

avec $\mathbf{f}_{t_k}^b$ la mesure du magnétomètre ou accéléromètre à l'instant courant t_k , ξ_{ref} est la norme de référence et γ_1 un seuil prédéfini. Ce détecteur mesure la déviation globale. Afin de prévenir une valeur aberrante, un second détecteur est établi :

$$\left| \left\| \mathbf{f}_{t_k}^b \right\| - \xi_{ref} \right| \leq \gamma_2 \quad (3.84)$$

avec γ_2 un seuil prédéfini. Lorsque les deux conditions sont satisfaites, la mise à jour est appliquée. Si au moins l'une des deux conditions n'est pas satisfaite, aucune mise à jour n'est opérée à partir du capteur concerné.

C.3.2.2.3 Comparaison de la mesure par rapport à une valeur de référence

La première mise à jour est la comparaison de la mesure à une valeur de référence. L'innovation apportée par cette mise à jour est :

$$(\delta \mathbf{z})_q = (\mathbf{f}_{ref}^n)_q - \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{y}_f)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_b^n \quad (3.85)$$

avec $\mathbf{f}_{ref}^n$ le champ de référence magnétique ou de gravité, $\mathbf{y}_f$ la mesure du magnétomètre ou de l'accéléromètre. Enfin le modèle de mesure est développé par un développement à l'ordre 1 en $\delta \mathbf{x}$ et $\mathbf{n}_f$ de l'innovation (3.85):

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{H} \delta \mathbf{q}_b^n + \mathbf{M} \delta \mathbf{b}_f + \mathbf{M} \mathbf{n}_f \quad (3.86)$$

avec deux écritures possibles pour la matrice $\mathbf{H}$:

- $\mathbf{H}_1(\mathbf{m}^b, \mathbf{q} = (q_1 \quad \mathbf{u}_q^T)^T) = 2 \left(q_1 \mathbf{m}^b + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^b \quad \langle \mathbf{m}^b, \mathbf{u}_q \rangle \mathbf{I}_3 - \left[(q_1 \mathbf{m}^b + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^b) \times \right] \right)$
- $\mathbf{H}_2(\mathbf{m}^n, \mathbf{q} = (q_1 \quad \mathbf{u}_q^T)^T) = 2 \left(q_1 \mathbf{m}^n - \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^n \quad \langle \mathbf{m}^n, \mathbf{u}_q \rangle \mathbf{I}_3 - \left[(q_1 \mathbf{m}^n - \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^n) \times \right] \right)$
- $\mathbf{M} = -\hat{\mathbf{C}}_b^n$ l'opposé de la matrice de rotation estimée à partir de
- $\delta \mathbf{b}_f$ l'erreur de biais du capteur, s'il le capteur considéré est l'accéléromètre alors $\delta \mathbf{b}_f = \delta \mathbf{b}_a$, s'il s'agit du magnétomètre alors $\delta \mathbf{b}_f = \mathbf{0}$

Démonstration :

La présente démonstration est écrite avec la mesure du magnétomètre. Il n'y a donc pas de biais. En revanche, si l'on souhaite faire apparaître le biais, il suffit de remarquer qu'il joue un rôle symétrique au bruit. En remplaçant $\mathbf{y}_m$ et $\hat{\mathbf{q}}_b^n$ par les formules du modèle du magnétomètre et de l'erreur d'orientation, il vient pour l'innovation :

$$(\delta \mathbf{z})_q = (\mathbf{m}_{ref}^n)_q - (\mathbf{q}_b^n - \delta \mathbf{q}_b^n) \otimes (\mathbf{m}^b + \mathbf{n}_m)_q \otimes \overline{(\mathbf{q}_b^n - \delta \mathbf{q}_b^n)} \quad (3.87)$$

En développant cette expression :

$$\begin{aligned}
 (\delta \mathbf{z})_q = & \left(\mathbf{m}_{ref}^n \right)_q - \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\mathbf{q}_b^n} + \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} + \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\mathbf{q}_b^n} + \dots \\
 & + \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} - \left(\mathbf{q}_b^n - \delta \mathbf{q}_b^n \right) \otimes \left(\mathbf{n}_m \right)_q \otimes \overline{\left(\mathbf{q}_b^n - \delta \mathbf{q}_b^n \right)}
 \end{aligned} \quad (3.88)$$

En remarquant que $\left(\mathbf{m}_{ref}^n \right)_q = \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\mathbf{q}_b^n}$, et en ne gardant que les termes d'ordre 1, avec $\delta \mathbf{q}_b^n$ et $\mathbf{n}_m$ considéré comme les éléments d'ordre 1, il vient :

$$(\delta \mathbf{z})_q \approx \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} + \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} - \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \left(\mathbf{n}_m \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \quad (3.89)$$

L'innovation développée à l'ordre 1 est composée de deux parties. Une partie dépendante du bruit blanc $\mathbf{n}_m$ et une autre partie dépendante de l'erreur d'orientation $\delta \mathbf{q}_b^n$. La partie dépendante du bruit blanc peut s'écrire :

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \left(\mathbf{n}_m \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} = \left(\hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_m \right)_q \quad (3.90)$$

Avec $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ l'estimation de la matrice de rotation complètement définie à partir de $\hat{\mathbf{q}}_b^n$. Afin de mettre la partie dépendante de $\delta \mathbf{q}_b^n$ sous la forme $\mathbf{H} \delta \mathbf{q}_b^n$, il suffit de remarquer que :

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} = -\overline{\delta \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n} \quad (3.91)$$

Or pour tout quaternion $\mathbf{q}$, il y a la relation suivante : $\mathbf{q} - \overline{\mathbf{q}} = 2(\text{Im}(\mathbf{q}))_q$ avec Im la partie imaginaire. Il vient donc :

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} + \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} = 2 \left(\text{Im} \left(\delta \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \right) \right)_q \quad (3.92)$$

En utilisant la transformation du produit de quaternions en produit matriciel, il vient :

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} + \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} = 2 \left(\text{Im} \left(\mathbf{C} \left(\left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \right) \delta \mathbf{q}_b^n \right) \right)_q \quad (3.93)$$

Afin d'expliciter $\mathbf{C} \left(\left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \right)$, calculons $\left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n}$:

$$\left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} = \left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \begin{pmatrix} q_1 \\ -\mathbf{u}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{m}^b, \mathbf{u}_q \rangle \\ q_1 \mathbf{m}^b + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^b \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

avec $\hat{\mathbf{q}}_b^n = (q_1 \quad \mathbf{u}_q)^T$. Il vient donc pour $\mathbf{C} \left(\left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \right)$:

$$\mathbf{C} \left(\left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \right) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{m}^b, \mathbf{u}_q \rangle & -(q_1 \mathbf{m}^b + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^b)^T \\ q_1 \mathbf{m}^b + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^b & \langle \mathbf{m}^b, \mathbf{u}_q \rangle \mathbf{I}_3 - [(q_1 \mathbf{m}^b + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^b) \times] \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

En ne prenant en compte que les 3 dernières lignes de la matrice $\mathbf{C} \left(\left(\mathbf{m}^b \right)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \right)$, il vient :

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{m}^b)_q \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} + \delta \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{m}^b)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} = \left(\mathbf{H}(\mathbf{m}^b, \hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{q}_b^n \right)_q \quad (3.96)$$

avec $\mathbf{H}(\mathbf{m}^b, \hat{\mathbf{q}}_b^n) = 2 \left(q_1 \mathbf{m}^b + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^b \quad \langle \mathbf{m}^b, \mathbf{u}_q \rangle \mathbf{I}_3 - \left[(q_1 \mathbf{m}^b + \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^b) \times \right] \right)$. Finalement, le résultat (3.86) est démontré:

$$\delta \mathbf{z} \approx \mathbf{H}(\mathbf{m}^b, \hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{q}_b^n - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_m \quad (3.97)$$

Une autre formulation est possible pour le modèle d'erreur en faisant n utilisant la relation suivante :

$$\delta \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{m}^b)_q \otimes \overline{\mathbf{q}_b^n} = \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \overline{\mathbf{q}_b^n} \otimes \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{m}^b)_q \otimes \overline{\mathbf{q}_b^n} \quad (3.98)$$

Le champ magnétique $(\mathbf{m}^n)_q = \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{m}^b)_q \otimes \overline{\mathbf{q}_b^n}$ apparaît dans l'innovation:

$$(\delta \mathbf{z})_q \approx (\mathbf{m}^n)_q \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} + \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \otimes (\mathbf{m}^n)_q - \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\mathbf{n}_m)_q \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \quad (3.99)$$

En appliquant les mêmes principes de calculs que précédemment, les termes en $\delta \mathbf{q}_b^n$ s'écrivent:

$$(\mathbf{m}^n)_q \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \overline{\delta \mathbf{q}_b^n} + \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \otimes (\mathbf{m}^n)_q = 2 \left(\text{Im} \left(\mathbf{C} \left(\overline{\hat{\mathbf{q}}_b^n} \otimes (\mathbf{m}^n)_q \right) \delta \mathbf{q}_b^n \right) \right)_q \quad (3.100)$$

Ce qui donne finalement :

$$\delta \mathbf{z} \approx \mathbf{H}(\mathbf{m}^n, \hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{q}_b^n - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_m \quad (3.101)$$

Avec : $\mathbf{H}_2(\mathbf{m}^n, \hat{\mathbf{q}}_b^n) = 2 \left(q_1 \mathbf{m}^n - \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^n \quad \langle \mathbf{m}^n, \mathbf{u}_q \rangle \mathbf{I}_3 - \left[(q_1 \mathbf{m}^n - \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{m}^n) \times \right] \right)$

Une seconde mise à jour est développée, il s'agit du gradient du champ.

C.3.2.2.4 Gradient de champ

Lorsque le champ magnétique est constant dans le référentiel de navigation, les variations du champ dans le référentiel body fournissent une information de vitesse de rotation du référentiel body par rapport au référentiel de navigation. Soit $\mathbf{f}$ un champ constant dans le référentiel de navigation, alors pour t_k et t_{k+1} :

$$\mathbf{f}_{t_k}^n = \mathbf{f}_{t_{k+1}}^n \quad (3.102)$$

En écrivant $\mathbf{f}^n$ en fonction de $\mathbf{q}_b^n$ et $\mathbf{f}^b$:

$$\mathbf{q}_{bt_k}^n \otimes (\mathbf{f}_{t_k}^b)_q \otimes \overline{\mathbf{q}_{bt_k}^n} = \mathbf{q}_{bt_{k+1}}^n \otimes (\mathbf{f}_{t_{k+1}}^b)_q \otimes \overline{\mathbf{q}_{bt_{k+1}}^n} \quad (3.103)$$

En utilisant le fait que le conjugué d'un quaternion unitaire est aussi l'inverse, l'expression de $(\mathbf{f}_{t_k}^b)_q$ est :

$$\left(\mathbf{f}_{t_k}^b\right)_q = \bar{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \otimes \mathbf{q}_{bt_{k+1}}^n \otimes \left(\mathbf{f}_{t_{k+1}}^b\right)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_{bt_{k+1}}^n \otimes \mathbf{q}_{bt_k}^n \quad (3.104)$$

La rotation $\mathbf{q}_{\omega t_k}$ (3.64) entre les instants t_k et t_{k+1} apparaît :

$$\left(\mathbf{f}_{t_k}^b\right)_q = \mathbf{q}_{\omega t_k} \otimes \left(\mathbf{f}_{t_{k+1}}^b\right)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_{\omega t_k} \quad (3.105)$$

L'innovation est alors calculée en comparant deux mesures $\mathbf{y}_f$ successives :

$$(\delta \mathbf{z})_q = \left(\mathbf{y}_{f_{t_{k+1}}}\right)_q - \bar{\mathbf{q}}_{\omega t_k} \otimes \left(\mathbf{y}_{f_{t_k}}\right)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_{\omega t_k} \quad (3.106)$$

En effectuant un développement limité sur (3.106) au premier ordre $\delta \mathbf{x}$ et en $\mathbf{n}_f$, le modèle linéarisé est alors :

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{H}_3 \left(\mathbf{f}_{t_k}^b, \mathbf{q}_{\omega t_k} \right) \delta \mathbf{b}_{q_g} + 2 \delta \mathbf{b}_f + 2 \mathbf{n}_f \quad (3.107)$$

Plusieurs formulations de $\mathbf{H}_3$ sont possibles. Dans le cas présenté ici, cette matrice est exprimée :

$$\mathbf{H}_3 \left(\mathbf{f}_{t_k}^b, \hat{\mathbf{q}}_{\omega t_k} \right) = \left(q_1 \quad \mathbf{u}_q^T \right) = -2 \left(q_1 \mathbf{f}_{t_k}^b - \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{f}_{t_k}^b \quad \langle \mathbf{m}^n, \mathbf{u}_q \rangle \mathbf{I}_3 + \left[\left(q_1 \mathbf{f}_{t_k}^b - \mathbf{u}_q \wedge \mathbf{f}_{t_k}^b \right) \times \right] \right)$$

C.3.3 Delay-MAGYQ

C.3.3.1 Erreur sur le champ magnétique de référence dans MAGYQ

Soit $T_{QSF} = (t_k)_{0 \leq k \leq N}$ une période quasi statique, avec $\mathbf{m}_{ref}^n$ le champ magnétique associé. L'estimation de l'erreur d'orientation se fait grâce au calcul d'erreur sur le champ magnétique suivant :

$$\left(\delta \mathbf{m}_{t_k}^n\right)_q = \left(\mathbf{m}_{ref}^n\right)_q - \hat{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \otimes \left(\mathbf{y}_m(t_k)\right)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \quad (3.108)$$

Une estimation de ce champ est fournie à partir de l'instant initial t_0 de la période T_{QSF} :

$$\left(\hat{\mathbf{m}}_{ref_{t_{QSF}}}^n\right)_q = \hat{\mathbf{q}}_{bt_0}^n \otimes \left(\mathbf{y}_m(t_0)\right)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_{bt_0}^n \quad (3.109)$$

Cependant, ce champ de référence est une estimation. Il comporte deux erreurs. La première erreur est celle du magnétomètre, assimilée à un bruit blanc centré qu'il est possible de limiter par un filtrage passe-bas. La seconde erreur provient de l'estimation de l'orientation à l'instant t_0 .

L'innovation notée $\delta \mathbf{z}_k$ apportée à l'instant t_k est :

$$\left(\delta \mathbf{z}_{t_k}\right)_q = \left(\hat{\mathbf{m}}_{ref_{t_{QSF}}}^n\right)_q - \hat{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \otimes \left(\mathbf{y}_m(t_k)\right)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \quad (3.110)$$

L'équation (3.110) peut se réécrire en introduisant la valeur référence sur la période quasi statique du champ magnétique $\mathbf{m}_{ref}^n$:

$$\left(\delta \mathbf{z}_{t_k}\right)_q = \left(\hat{\mathbf{m}}_{ref_{t_{QSF}}}^n\right)_q - \left(\mathbf{m}_{ref}^n\right)_q + \left(\mathbf{m}_{ref}^n\right)_q - \hat{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \otimes \left(\mathbf{y}_m(t_k)\right)_q \otimes \bar{\mathbf{q}}_{bt_k}^n \quad (3.111)$$

Deux termes d'erreurs apparaissent $\delta \mathbf{m}_{t_k}^n$ l'erreur de projection du champ magnétique à l'instant t_k et $\delta \mathbf{m}_{t_0}^n$ l'erreur de projection du champ magnétique à l'instant t_0 , qui est aussi l'erreur d'estimation du champ de référence pour la période quasi statique :

$$\delta \mathbf{z}_k = \delta \mathbf{m}_{t_k}^n - \delta \mathbf{m}_{t_0}^n \quad (3.112)$$

C.3.3.2 Nouveau modèle de mesure

L'erreur de projection du champ magnétique dans le référentiel de navigation $\delta \mathbf{m}_{t_k}^n$ est reliée à l'erreur d'estimation du quaternion $\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n$, (3.86):

$$\delta \mathbf{m}_k^n = \mathbf{H}_2 \left(\hat{\mathbf{q}}_{bt_k}^n, \hat{\mathbf{m}}_{t_k}^n \right) \delta \mathbf{q}_{bt_k}^n + \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{n}_m \quad (3.113)$$

Finalement, l'innovation $\delta \mathbf{z}_{t_k}$ apportée par le magnétomètre est reliée aux erreurs d'orientation $\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n$ et $\delta \mathbf{q}_{bt_0}^n$:

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_{t_k} \delta \mathbf{q}_{bt_k}^n - \mathbf{H}_{t_0} \delta \mathbf{q}_{bt_0}^n + \mathbf{M}_{t_k, t_0} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_m^T & \mathbf{n}_m^T \end{pmatrix}^T \quad (3.114)$$

avec les matrices jacobiennes :

- $\mathbf{H}_{t_k} = \mathbf{H}_2 \left(\hat{\mathbf{q}}_{bt_k}^n, \hat{\mathbf{m}}_{t_k}^n \right)$ et $\mathbf{H}_{t_0} = \mathbf{H}_2 \left(\hat{\mathbf{q}}_{bt_0}^n, \hat{\mathbf{m}}_{t_0}^n \right)$
- $\mathbf{M}_{t_k, t_0} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{bt_k}^n & -\hat{\mathbf{C}}_{bt_0}^n \end{bmatrix}$

L'erreur d'orientation $\delta \mathbf{q}_{bt_0}^n$ apparaît et son influence doit être prise en compte dans le calcul des matrices de variance-covariance du filtre de Kalman.

C.3.3.3 Pondération de l'innovation avec prise en compte d'état antérieur

Le traitement de décalages temporels dans un filtre de Kalman est problème déjà traité [60] [61] [62]. Le vecteur d'état est modifié en incorporant l'état précédent concerné dans le nouveau vecteur d'état. Puis les opérations du filtre de Kalman sont classiquement appliquées.

Cependant, l'incorporation d'un nouvel élément alourdit les calculs. Afin de simplifier les calculs il est supposé que $\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n$ et $\delta \mathbf{q}_{bt_0}^n$ sont décorréliées. L'impact de l'estimation $\mathbf{q}_{bt_0}^n$ est toujours pris en compte, mais uniquement dans la matrice de variance-covariance de l'innovation (3.114) notée $\mathbf{P}_{\delta \mathbf{z}_k}$:

$$\mathbf{P}_{\delta \mathbf{z}_k} = \mathbf{H}_{t_k} \mathbf{P}_{\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n} \mathbf{H}_{t_k}^T + \mathbf{H}_{t_0} \mathbf{P}_{\delta \mathbf{q}_{bt_0}^n} \mathbf{H}_{t_0}^T + \mathbf{M}_{t_k, t_0} \begin{pmatrix} \sigma_m^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \mathbf{M}_{t_k, t_0}^T \quad (3.115)$$

avec :

- $\mathbf{P}_{\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n}$ la matrice de variance-covariance de $\delta \mathbf{q}_{bt_k}^n$
- $\mathbf{P}_{\delta \mathbf{q}_{bt_0}^n}$ la matrice de variance-covariance de $\delta \mathbf{q}_{bt_0}^n$
- σ_m^2 la variance de la mesure du magnétomètre

Ce réajustement de variance permet une plus grande stabilité de l'estimation de l'orientation durant les phases quasi statiques.

C.3.3.4 Conclusions

Un nouveau filtre d'estimation d'orientation a été développé. Les principales améliorations apportées sont :

- La modélisation en quaternion de l'information du gyromètre où les erreurs d'intégration sont incluses dans le biais
- Pour les phases de champs quasi statiques différentes, la qualité du champ de référence est prise en compte.

Chapitre D. Estimation de la direction de marche à partir de capteurs inertiels et magnétiques

D.1 Introduction

D.1.1 Définition de la direction de marche du piéton

La direction de marche est définie par la rotation entre le repère du piéton et le repère de navigation. Ainsi pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de l'espace :

$$\mathbf{x}^n = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w & 0 \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^p \quad (4.1)$$

avec θ_w la direction de marche du piéton. L'indice w est utilisé pour signifier le terme « walk ». La direction de marche est différente de l'orientation de la centrale estimée au Chapitre 3. Elle est liée au centre de masse du piéton. Le centre de masse d'un objet est le barycentre des masses. Il est défini par :

$$\frac{1}{m(Obj)} \int_{M \in Obj} \overline{GM} dm(M) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

avec

- Obj l'objet considéré
- G le centre de masse et
- $m(Obj)$ est la masse de l'objet.

Le champ de gravité $\mathbf{g}$ est supposé uniforme, en conséquence le centre de gravité et le centre de masse sont confondus. Le corps humain ne peut pas être considéré comme un solide, car la distance entre deux points du corps humain est susceptible de varier au cours du temps [63]. Par conséquent, le centre de masse n'est pas fixe sur le piéton. Néanmoins dans l'étude qui suit, il est supposé que le centre de masse est fixe par rapport au piéton. Ce point noté G par la suite, correspond à l'intersection des trois plans anatomiques décrits au Chapitre 2. La vitesse de G est classiquement définie par :

$$\mathbf{v}^n(G) = \frac{d\mathbf{p}^n(G)}{dt} \quad (4.3)$$

avec

- $\mathbf{p}^n(G)$ la position de G dans le référentiel n
- $\mathbf{v}^n(G) = (v_1^n(G) \ v_2^n(G) \ v_3^n(G))^T$ la vitesse de G dans le référentiel n

Le référentiel piéton est attaché au centre de masse, ainsi par définition, la composante horizontale de la vitesse du point G donne la direction de marche du piéton. La vitesse se décompose en deux

parties, une première partie correspondant à la vitesse horizontale et une seconde partie correspondant la vitesse verticale.

$$\mathbf{v}^n(G) = \left(\left\| \mathbf{v}_H^n(G) \right\| \begin{pmatrix} \cos(\theta_w) & \sin(\theta_w) \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3^n(G) \right)^T \quad (4.4)$$

avec $\mathbf{v}_H^n(G) = \begin{pmatrix} v_1^n(G) & v_2^n(G) \end{pmatrix}^T$ la vitesse de G dans plan horizontal. Dans le référentiel piéton, la vitesse du centre de masse est donc définie par :

$$\mathbf{v}^p(G) = \left(\left\| \mathbf{v}_H^n(G) \right\| \quad 0 \quad \mathbf{v}_3^n(G) \right)^T \quad (4.5)$$

D.1.2 Estimation de la direction de marche par intégration directe

Le Chapitre 3 est consacré à l'estimation de l'orientation du repère de la centrale inertielle et magnétique dans le repère de navigation. Le calcul de l'orientation permet de projeter les données de l'accéléromètre dans le repère de navigation. En soustrayant la gravité aux mesures projetées, une estimation de l'accélération de la centrale dans le repère de navigation est alors obtenue. La vitesse de la centrale est calculée par intégration de l'accélération estimée. La direction de marche, correspondant au vecteur directeur de la vitesse dans le plan horizontal, est donc obtenue. Cependant, la qualité des capteurs inertiels MEMS ne permet pas une estimation suffisamment précise de l'orientation de la centrale et du biais de l'accéléromètre pour intégrer l'accélération :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}^n &= \hat{\mathbf{C}}_b^n (\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{b}}_a) + \mathbf{g}^n \\ \hat{\mathbf{v}}^n(t + \Delta t) &= \hat{\mathbf{v}}^n(t) + \int_t^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{a}}^n(u) du \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pour mémoire $\hat{\mathbf{a}}^n$ est l'accélération estimée de la centrale inertielle et magnétique. $\mathbf{y}_a$ est la mesure de l'accéléromètre. $\mathbf{g}^n$ est le champ de gravité terrestre. $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ est la matrice de rotation estimée, représentant l'orientation de la centrale dans le référentiel navigation. $\hat{\mathbf{b}}_a$ est le biais estimé de l'accéléromètre et $\hat{\mathbf{v}}^n$ la vitesse estimée de la centrale inertielle et magnétique. La Figure 16 illustre l'effet de l'intégration des mesures des capteurs. Pour cet exemple, la vitesse du piéton est toujours inférieure à 1.5 m/s : dans un premier temps, elle est nulle puis dans un second temps, elle est proche de 1.4 m/s. Les bruits des mesures inertiels sont intégrés et l'estimation de la vitesse produit un résultat inexploitable pour estimer la direction de marche. L'intégration des mesures inertiels présentée en (4.6) est utilisée dans les cas où des mesures de la vitesse ou de la position sont disponibles avec une grande précision. C'est le cas par exemple du couplage GNSS-IMU [64] [65] avec des corrections de la vitesse de type ZUPT (Zero-Velocity-UpdaTe) lorsque la centrale inertielle est rigidement attachée au pied [66] [5]. L'estimation de la vitesse de rotation fournie par le gyromètre contient une information de mouvement angulaire :

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^n = \boldsymbol{\omega}_{ni}^n + \boldsymbol{\omega}_{ib}^n \quad (4.7)$$

avec :

- $\boldsymbol{\omega}_{nb}^n$ la vitesse de rotation de la centrale par rapport au référentiel navigation

- $\boldsymbol{\omega}_{ni}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d\theta_w}{dt} \end{pmatrix}^T$ la vitesse de rotation du référentiel piéton par rapport au référentiel navigation
- $\boldsymbol{\omega}_{ib}^n$ la vitesse de rotation de la centrale par rapport au référentiel piéton

La vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}_{ib}^n$ est un élément qui apparaît dès lors qu'il y a un mouvement de la main. Ainsi il est difficilement envisageable d'obtenir une information de direction de marche directement à partir de la vitesse de rotation instantanée. Il est possible d'exprimer l'accélération du point G en fonction de la direction de marche. Pour cela, considérons uniquement la vitesse dans le plan horizontal. Le référentiel de navigation est considéré comme Galiléen compte tenu de la faible valeur de la rotation terrestre :

$$\mathbf{a}_H^n(G) \approx \frac{d\|\mathbf{v}_H^n(G)\|}{dt} \begin{pmatrix} \cos(\theta_w) & \sin(\theta_w) \end{pmatrix}^T + \frac{d\theta_w}{dt} \|\mathbf{v}_H^n(G)\| \begin{pmatrix} -\sin(\theta_w) & \cos(\theta_w) \end{pmatrix}^T \quad (4.8)$$

L'accélération du point G se décompose en deux parties. Une première partie suivant la direction de marche, correspond aux variations de la norme de la vitesse horizontale. Une seconde partie suivant la direction orthogonale à la direction de marche, correspond aux variations de direction de marche. À partir d'une accélération instantanée donnée, il est apriori impossible de retrouver la direction de marche. Elle n'est calculable que si des hypothèses sur l'accélération ou la vitesse sont formulées.

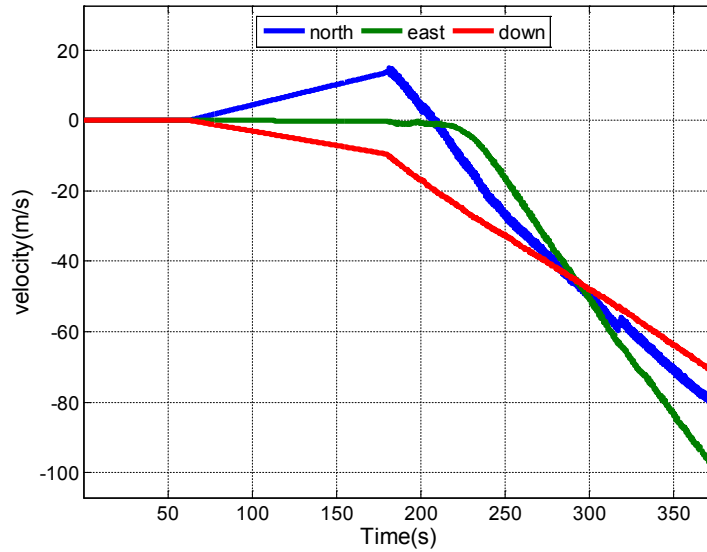


Figure 16: Vitesse estimée par intégration des mesures inertielles

D.1.3 Référentiel piéton global

Nous avons vu qu'il est difficilement envisageable d'obtenir directement la direction de marche ou même ses variations à partir des mesures d'accélérations et de vitesses angulaires d'une centrale inertielle placée dans la main. Pour obtenir une information de direction de marche, les mouvements du centre de masse et de la main sont étudiés dans la suite du mémoire sur une durée τ , un temps d'observation de la marche du piéton. Un nouveau référentiel est introduit: Le référentiel piéton global qui est défini par la direction de marche moyenne durant un cycle de marche :

$$\mathbf{x}^n = \begin{pmatrix} \cos \theta_{w_m} & -\sin \theta_{w_m} & 0 \\ \sin \theta_{w_m} & \cos \theta_{w_m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{p_m} \quad (4.9)$$

avec θ_{w_m} la direction de marche moyenne suivant une durée τ . Le référentiel piéton global sur un cycle de marche définit les trois plans anatomiques (Horizontal-Frontal-Sagittal) moyens au cours du cycle de marche.

D.2 Étude expérimentale des trajectoires de la main et du centre de masse du piéton

D.2.1 Mouvements du centre de masse

Il a été vu au Chapitre 2 que la marche est un phénomène cyclique. Cette périodicité se retrouve dans les mouvements du piéton. Dans cette partie, une analyse des mouvements du piéton est proposée. La position, la vitesse ou l'accélération sont étudiées dans les plans anatomiques moyens suivant une période temporelle τ correspondant au pas ou à la foulée (ou un multiple de l'un des deux). Cette partie se base sur l'étude [67]

D.2.1.1 Outils de mesure du mouvement

Pour réaliser cette étude, les mesures du mouvement ont été réalisées en salle de capture de mouvement (MotionLab) [68]. Cette salle est équipée d'un dispositif optique permettant le traçage précis de marqueurs optiques placés judicieusement sur le corps, Figure 17. La fréquence d'acquisition du système est de 60 Hz avec une précision millimétrique en position et inférieure à 1° en orientation. La vitesse est obtenue par différenciation des mesures de position.

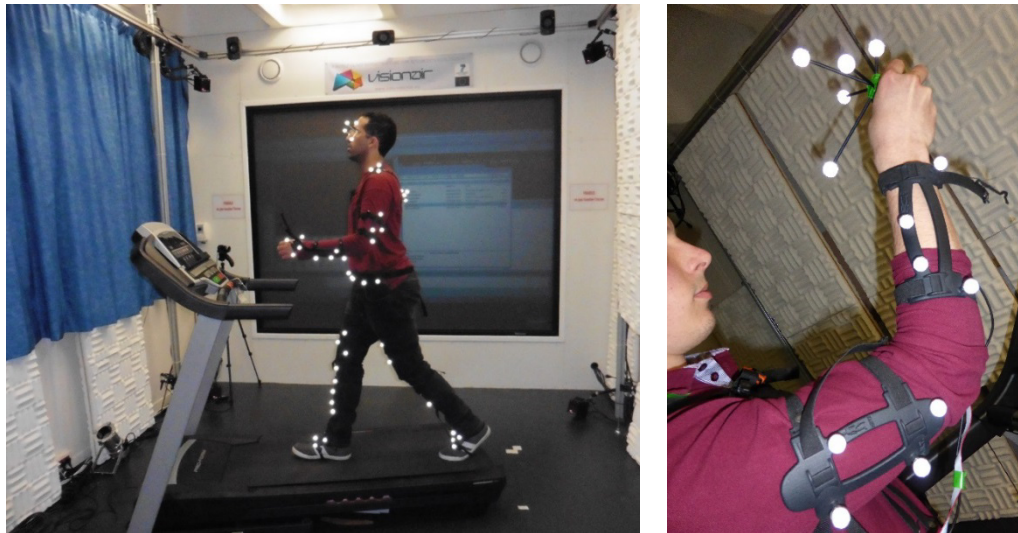


Figure 17 : Salle de capture de mouvement, avec son dispositif de suivi par video-tracking des marqueurs optiques

Pour les accélérations, deux méthodes permettent de les estimer :

- La première méthode consiste à effectuer une double différenciation des positions estimées par le MotionLab. Cependant avec cette méthode, les bruits de hautes fréquences sont amplifiés. Il est nécessaire d'appliquer un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure

assez basse pour filtrer le bruit, mais suffisamment haute pour ne pas lisser l'information de mouvement du piéton.

- La seconde méthode consiste à combiner les mesures de la centrale inertielle avec celles du MotionLab. Les centrales inertielles fournissent une mesure de la force spécifique (accéléromètres). Le MotionLab fournit une estimation précise ($<1^\circ$) de la matrice de rotation, permettant le passage du repère attaché aux marqueurs optiques au repère de la salle de capture de mouvement. En fixant des marqueurs optiques sur la centrale inertielle, l'orientation de cette dernière peut être obtenue plus précisément. En projetant les données de l'accéléromètre dans le repère de la salle de capture de mouvement, une estimation de l'accélération est alors réalisable. Cette méthode souffre cependant de la qualité de l'accéléromètre et du désalignement entre les marqueurs du MotionLab et les axes des centrales inertielles.

D.2.1.2 Évolution de la position dans les plans anatomiques moyens

- Position dans le plan sagittal

L'allure de la position du centre de masse dans le plan sagittal est relativement sinusoïdale au cours de la marche, Figure 18.

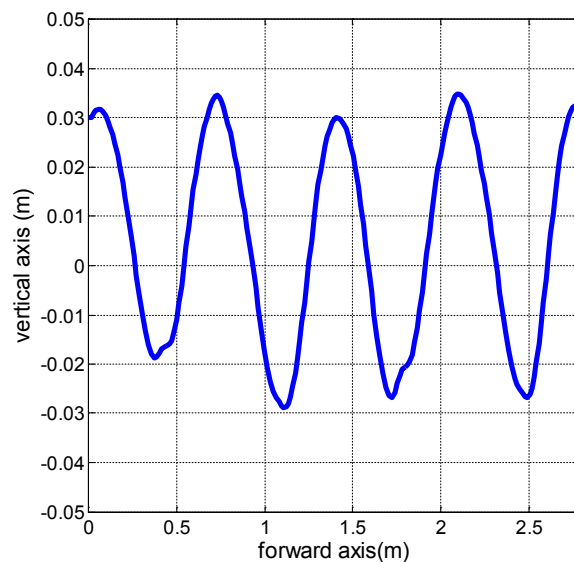


Figure 18: Evolution de la position du centre de masse dans le plan sagittal sur 4 pas (2 foulées) à 5km/h

L'axe vertical est noté *vertical axis* et la direction de marche moyenne est notée *forward axis*. Le mouvement du centre de masse dans le plan sagittal est classiquement modélisé par un modèle de pendule inverse [40] [69]. La position verticale oscille suivant la direction avant, avec une fréquence spatiale correspondant à la longueur de pas. La fréquence temporelle est donc aussi suivant la fréquence temporelle de pas. Cependant, la trajectoire du centre de masse présente des points singuliers. La sinusoïde est en particulier imparfaite lorsque la position verticale est au plus bas, ce qui correspond pour la marche, à un double support (les deux pieds au sol). Dans ce cas, il s'agit d'une phase de transition où le centre de rotation passe d'un pied à l'autre.

- Position dans le plan frontal

Les oscillations cycliques du centre de masse apparaissent aussi dans le plan frontal. L'élément cyclique est la foulée. La trajectoire du centre de masse possède une allure typique au cours d'une foulée, Figure 19. Les sommets supérieurs des boucles correspondent aux instants où le piéton est en appui sur une jambe, avec l'autre jambe en balancier. Les hauteurs minimales sont atteintes lorsque les deux pieds sont au sol. L'allure « nœud papillon » de la position dans le plan frontal au cours d'une foulée varie en fonction des individus et de la vitesse du piéton, Figure 19. Ainsi, avec une vitesse plus importante, les oscillations verticales augmentent en amplitude par rapport aux oscillations latérales. Les autres variations sont interindividus. Suivant l'âge, le sexe, la morphologie ou encore le caractère et la disposition affective du piéton, l'allure de la position dans le plan frontal sera différente [70]. Sur la Figure 19, les trajectoires correspondent à l'individu W1 (femme) et M1 (homme). Les oscillations latérales de l'individu W1 sont très clairement plus importantes par rapport à M1, avec un rapport 2 entre les individus. Les variations latérales de la position du centre de masse semblent plus importantes pour les individus femme par rapport aux individus homme. La répartition des masses variant suivant le sexe, avec notamment une répartition des masses plus importante au niveau des hanches pour les femmes, alors que pour les hommes elle plus équitablement répartie sur le reste du tronc [71].

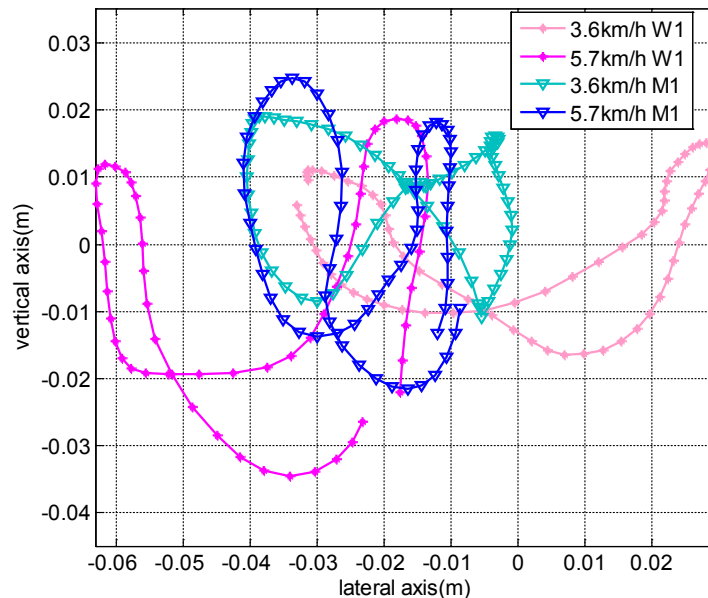


Figure 19: Evolution de la position du centre de masse dans le plan frontal au cours d'une foulée, pour W1 et M1 à différentes vitesses

- Position dans le plan horizontal

La périodicité de la marche est aussi observable dans le plan horizontal, Figure 20. La longueur de l'oscillation spatiale correspond à la longueur d'une foulée contrairement à celles du plan sagittal. Le mouvement du centre de masse dans le plan horizontal est constitué de phases où le mouvement latéral est très faible puis d'autres phases où le mouvement latéral est plus important. Sur la Figure 20, un léger saut apparaît avant chaque extrémum, il correspond à l'instant où le pied est posé au sol donc à l'impact du pied. Le mouvement devient plus latéral lorsque l'un des pieds va vers le sol. Enfin, il existe un déphasage de $\pi/2$ entre les oscillations latérales et verticales suivant la direction de déplacement. Le déphasage est illustré sur la Figure 21, avec en vert la position dans le plan horizontal et en bleu la position dans le plan sagittal. Chaque cycle de la position du centre de masse

dans le plan horizontal est ramené en un cycle de longueur 2π . Cela permet de mettre évidence le déphasage de $\pi/2$ qui existe entre les deux oscillations.

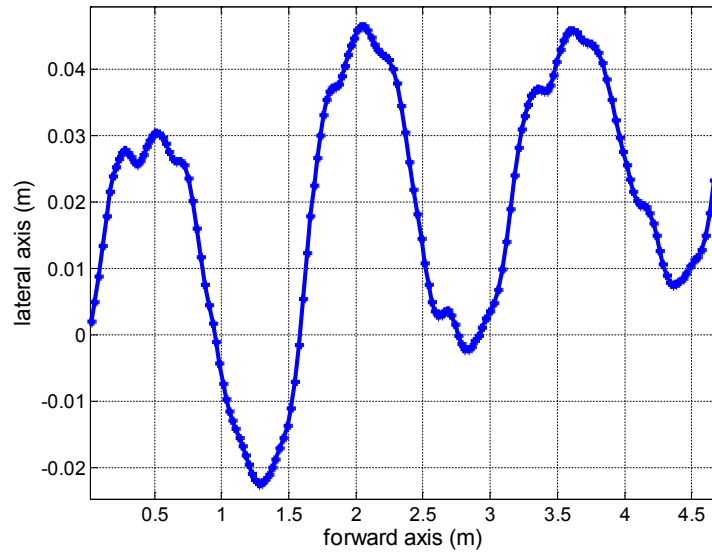


Figure 20: Evolution de la position du centre de masse dans le plan horizontal, à 5km/h sur 3 foulées

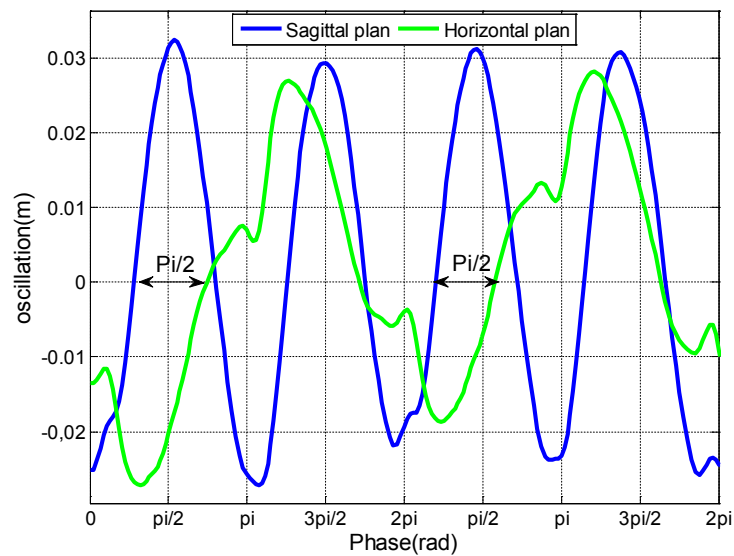


Figure 21: Déphasage entre les oscillations verticales et latérales

D.2.1.3 Évolution de la vitesse

De la même manière que pour la position, la vitesse du centre de masse peut être étudiée dans les différents plans. Dans cette partie, l'étude porte principalement sur la vitesse horizontale.

- Vitesse dans le plan horizontal

La vitesse du centre de masse dans le plan horizontal possède une forme caractéristique présentée en Figure 22. La vitesse du centre de masse de W1 possède des variations latérales plus importantes que les individus M1 et M2, ce qui illustre les propos en D.2.1.2 sur la variabilité interindividus.

L'allure de la vitesse dans le plan horizontal reste en revanche similaire pour les trois individus. Des successions de variations latérales et axiales constituent l'allure de la vitesse horizontale.

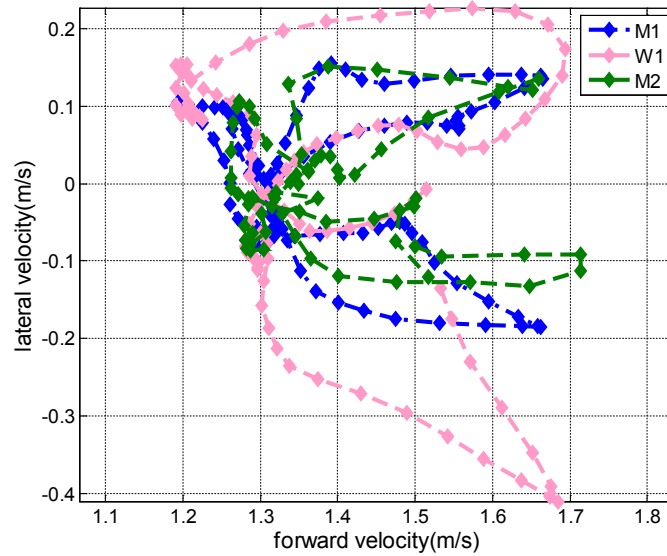


Figure 22: Evolution de la vitesse dans le plan horizontal de M1, M2, W1 au cours d'une foulée

Afin de mettre en évidence les phases où la vitesse axiale est la plus importante, les positions verticales des pieds droit et gauche sont superposées à la vitesse axiale en Figure 23. Afin de rendre lisibles les données, les valeurs sont normalisées et étudiées sur 2 foulées. Les courbes bleue et rouge représentent respectivement la position verticale des pieds gauche et droit. La phase du pied au contact du sol est clairement visible : il s'agit de celle où la position est minimale et stable. Les phases où la vitesse axiale est la plus importante correspondent à la fin de la phase d'appui du pied et à l'attaque du talon sur le sol et début de la phase d'appui de l'autre pied. La fin de la phase d'appui au sol correspond aux instants où la force de réaction au sol est importante lors de la marche, ce qui provoque une variation positive de la vitesse axiale [72].

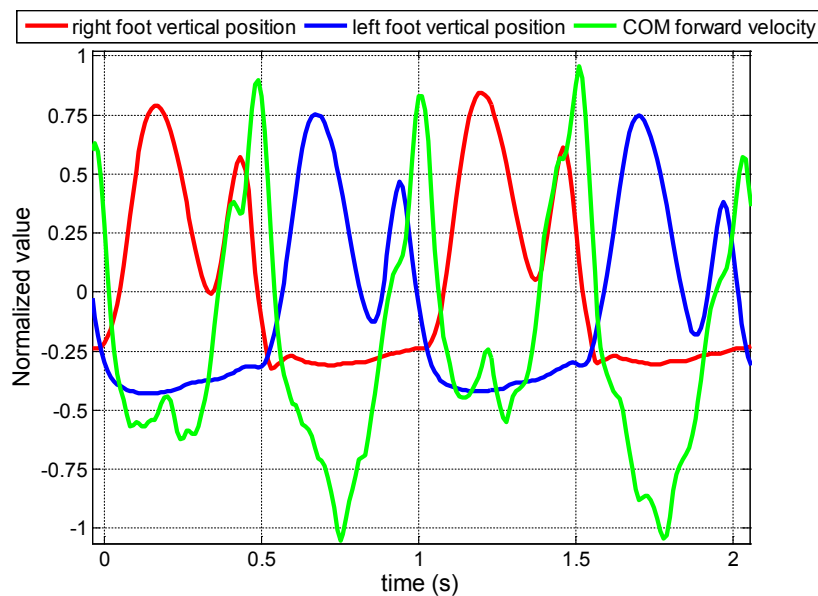


Figure 23: Superposition de la vitesse axiale avec les positions verticales des deux pieds sur 2 foulées

- Vitesse dans le plan sagittal

Comme pour la position dans le plan sagittal, la vitesse est périodique de période identique au pas. La Figure 24 témoigne de cette périodicité avec deux boucles quasi circulaires sur une foulée.

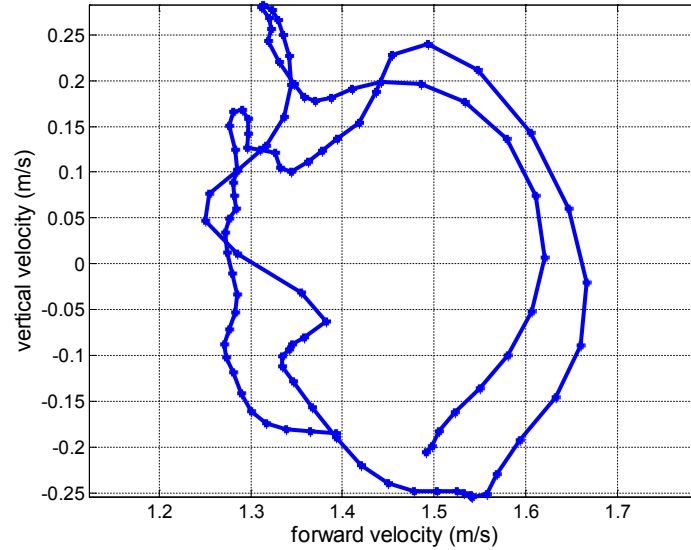


Figure 24: Evolution de vitesse du centre de masse dans le plan sagittal sur une foulée

D.2.1.4 Évolution de l'accélération

Dans la partie D.2.1.3, les variations de vitesse ont déjà été évoquées. Dans cette partie, l'allure de l'accélération dans le plan horizontal est analysée. À l'instar de la position et de la vitesse du centre de masse dans le plan horizontal, l'accélération du centre de masse dans le plan horizontal possède un caractère cyclique selon le pas et la foulée. Une illustration typique de l'évolution de l'accélération du centre de masse est proposée en Figure 25. Sur une foulée l'accélération possède une symétrie axiale, d'axe la direction de marche. L'accélération peut se décomposer en 5 zones, Figure 25 :

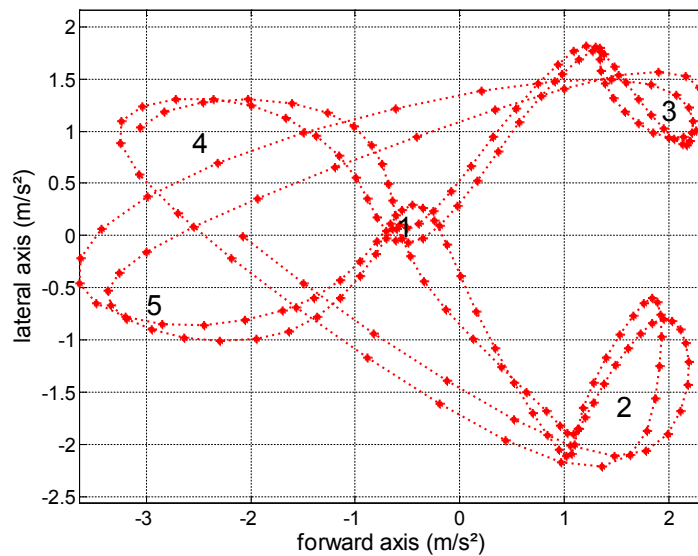


Figure 25: Evolution de l'accélération du centre de masse dans le plan horizontal sur 2 foulées à 5km/h

- La zone 1 correspond aux phases de vitesses relativement constantes, notamment au début de la phase de vol du pied.
- Les zones 2 et 3 correspondent aux phases d'accélération du centre de masse, avec une accélération axiale maximale.
- Les zones 4 et 5 correspondent aux phases de décélérations du centre de masse.

Cette allure est répétée à chaque foulée, quel que soit le piéton. Il existe cependant, à l'instar de la vitesse une variabilité interindividu et intra-individu.

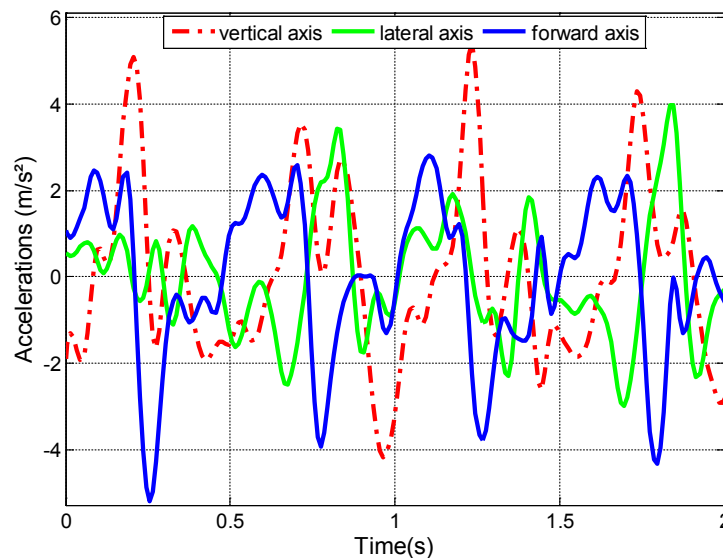


Figure 26: Evolution temporelle de l'accélération dans le référentiel piéton sur 2 foulées à 5 km/h

L'évolution temporelle des accélérations axiale, latérale et verticale est illustrée en Figure 26. Plusieurs remarques peuvent être formulées :

- La cyclicité de la marche est retrouvée dans l'accélération du centre de masse, en particulier pour les accélérations verticales et axiales.
- L'amplitude des oscillations est plus importante suivant les axes vertical et axial par rapport à l'axe latéral.
- Il existe un déphasage entre les oscillations axiale et verticale.

D.2.2 Mouvements de la main

Les mouvements de la main présentent une plus grande variabilité que ceux des autres parties du corps humain. Cependant, la cyclicité est retrouvée lors des mouvements répétitifs de la main. Les outils de mesures utilisés pour obtenir les différentes illustrations sont présentés en D.2.1.1.

D.2.2.1 Accélération de la main et accélération du centre de masse

De par la nature de « l'objet piéton », il a été vu en chapitre 2 qu'un modèle géométrique pouvait être adopté pour le corps humain. Le modèle géométrique adopté est la chaîne articulée composée de segments en liaison rotule les uns par rapport aux autres. Chacun des segments est un solide. Ce modèle permet d'exprimer les accélérations et les vitesses angulaires de la main en fonction de celle du centre de masse, des vitesses angulaires et de longueurs des segments :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{Hand} &= \mathbf{a}_{COM} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{d\boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n}}{dt} \wedge \mathbf{l}_{k/k+1} + \boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n} \wedge \mathbf{l}_{k/k+1}) \\ \boldsymbol{\omega}_{Hand/n} &= \sum_{k=2}^{p-1} \boldsymbol{\omega}_{Seg_k/Seg_{k-1}}\end{aligned}\quad (4.10)$$

Avec :

- $\mathbf{a}_{Hand}$ l'accélération de la main
- $\mathbf{a}_{COM}$ l'accélération du centre de masse
- $\boldsymbol{\omega}_{Seg_k/n}$ la vitesse angulaire du segment k
- $\mathbf{l}_{k/k+1}$ au vecteur du segment k

Les segments correspondent au tronc, au bras, à l'avant-bras et à la main. La numérotation utilisée en (4.10) est celle du Chapitre 2. Les vecteurs et les vitesses angulaires des segments (tronc, bras, avant-bras) sont inconnus avec une seule centrale. Ainsi il paraît impossible de retrouver l'accélération du centre de masse à partir de l'accélération et la vitesse angulaire de la main. Il en va de même pour la vitesse de rotation. En revanche, des mouvements « classiques » de la main du piéton peuvent être identifiés [73] [74] et exploités pour l'estimation de la direction de marche. Une description de ses différentes activités est proposée dans la suite. Cette analyse a pour but de retrouver l'information de direction de marche du piéton suivant les activités de la main portant la centrale inertielle.

D.2.2.2 Activités de la main

D.2.2.2.1 Description des activités de la main

Bien que très divers, les mouvements de la main peuvent être séparés selon des classes définies par des caractéristiques du signal : Énergie, contenu fréquentiel, évolution temporelle. Ces classes correspondent à différentes activités de la main du piéton portant la centrale inertielle.

- *Activité Swinging* : Lors de la marche, le piéton a régulièrement les bras ballants le long du corps. Les bras oscillent alors suivant la fréquence de pas ou de foulée selon la vitesse. Les signaux des centrales inertiels sont caractérisés par : une répétition assez parfaite des oscillations (pics très visibles sur les fréquences de pas et de foulée) accompagnées d'une intensité relativement forte.
- *Activité Texting* : Le piéton maintient sa main (le smartphone) relativement fixe par rapport au tronc. Cette activité apparaît lorsque le piéton regarde son écran de son smartphone contenant la centrale inertielle pour écrire/lire des messages, ou naviguer tout simplement sur les applications de son smartphone. Les intensités des signaux inertiels sont moindres par rapport à l'activité Swinging.
- *Activité Phoning* : Le piéton maintient son smartphone relativement proche de ses oreilles. Ce mode apparaît notamment quand le piéton passe un appel, écoute un message. Cette activité est semblable à l'activité Texting.
- *Activité Pocket* : Le smartphone est dans une poche, un sac: la poche du pantalon, dans un sac... Dans ce cas le smartphone est relativement solidaire du piéton ou du sac dans lequel il est « attaché ». L'énergie du signal est plus faible en moyenne que celle du mode Swinging.

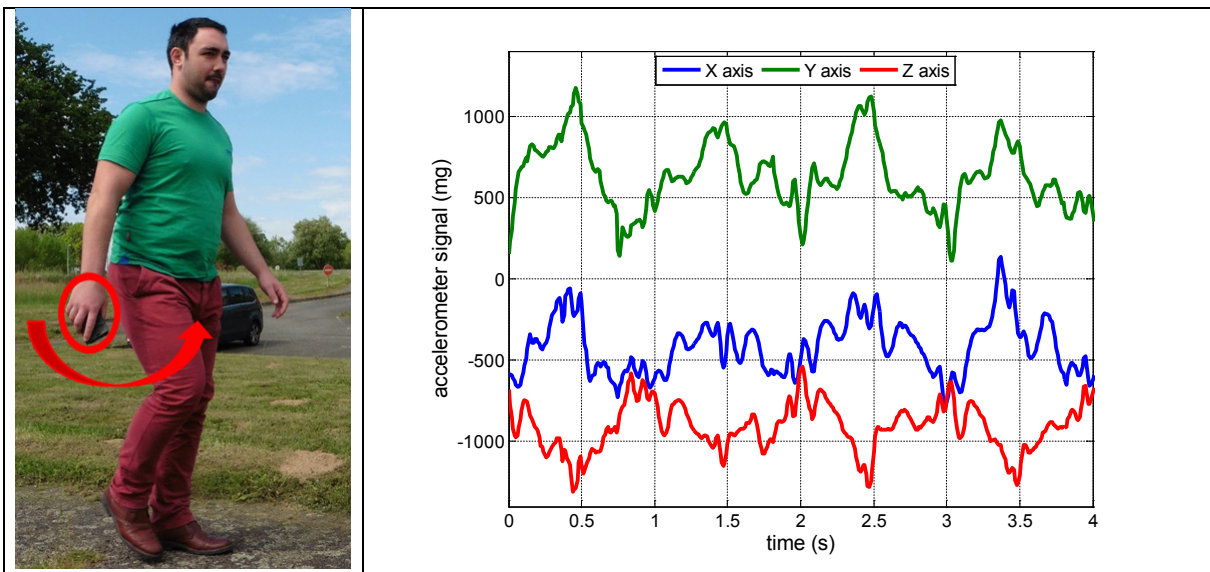
D'autres activités peuvent être définies : *Static* correspondant à une immobilité du smartphone. Plusieurs méthodes d'estimation des activités existent [73] [74]. Elles se basent sur des éléments décrivant le signal : la forme du signal, la fréquence, l'énergie. Puis l'activité est déterminée suivant une comparaison à des seuils ou grâce à des méthodes de type HMM (*Hidden Markov Model*).

D.2.2.2.2 Illustrations des activités de la main portant une centrale inertielle et magnétique

Dans cette sous-partie, une illustration des activités de la main est présentée. Pour les activités Texting, Swinging et Phoning, une illustration photo et une illustration du signal de l'accéléromètre sur 2 à 4 foulées sont proposées :

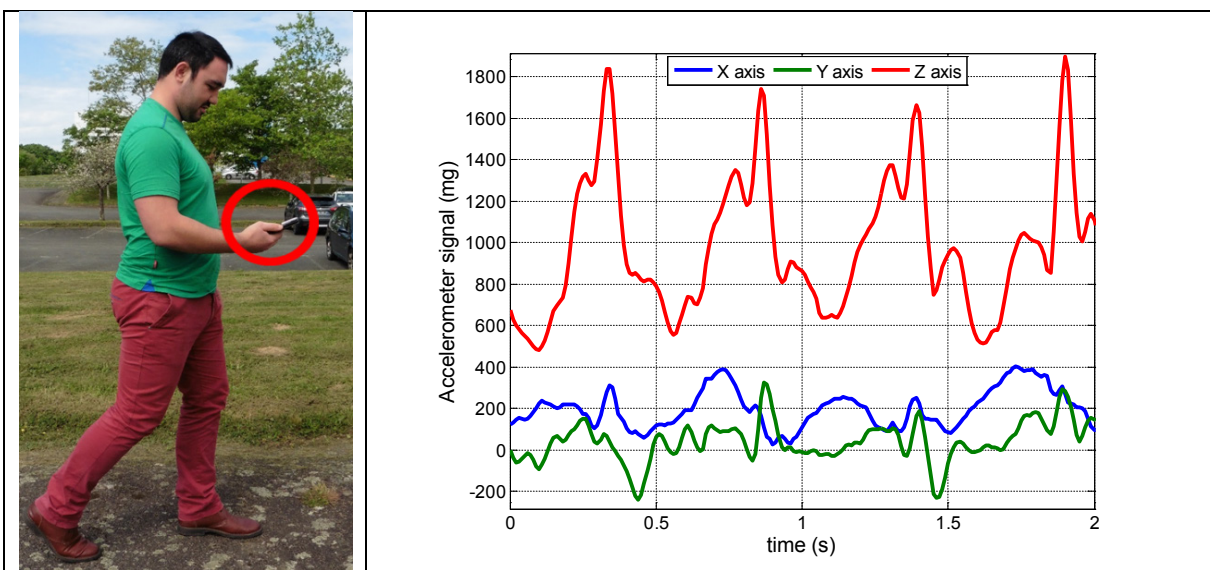
- *Swinging*

Le mouvement de balancier du bras induit des accélérations relativement fortes, et observables sur le signal de l'accéléromètre.



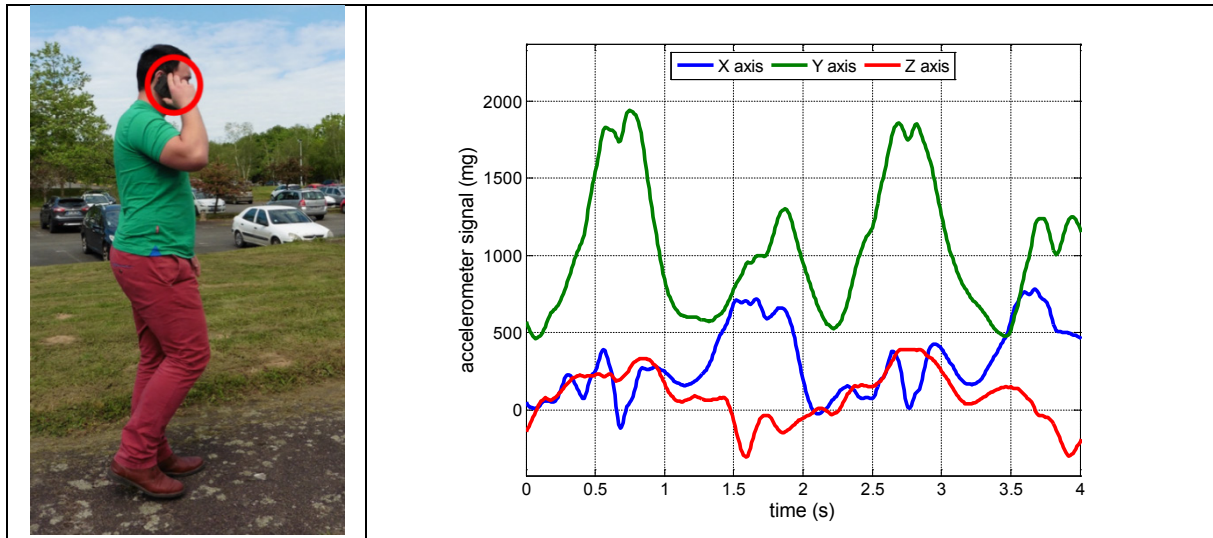
- *Texting*

L'accéléromètre fournit un signal périodique lié aux oscillations de l'individu durant la marche.



- *Phoning*

Cette activité fait produire à l'accéléromètre un signal proche de celui produit lors de l'activité Texting. L'axe Y pointant vers le haut, il se retrouve inversé par rapport à l'activité précédente.



D.2.2.3 Accélérations et vitesses de rotation dans le référentiel piéton global pour l'activité *Swinging*

Les mouvements cycliques de balancier de la main sont globalement dans la direction axiale. Ainsi les variations de position et de vitesses sont proches de la direction de marche. Les accélérations estimées durant une foulée sont selon une direction « principale » proche de la direction de marche, Figure 27.

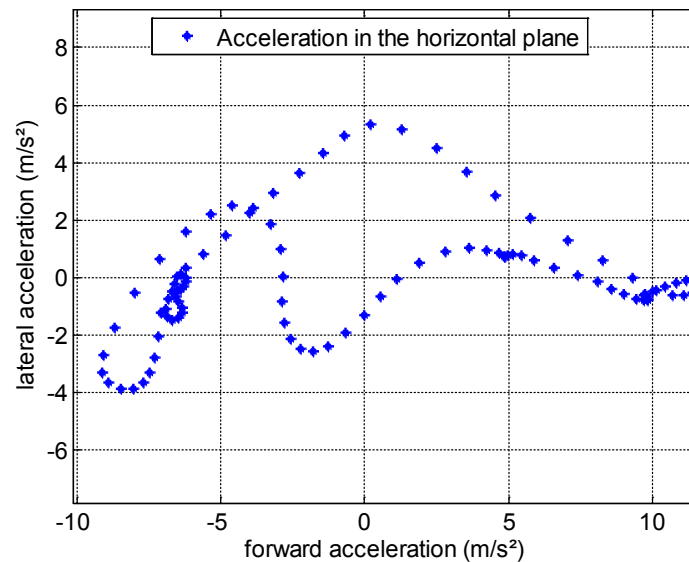


Figure 27: Accélération de la main en *Swinging* dans le plan horizontal sur 1 foulée à 5 km/h

Les vitesses de rotation sont en revanche réparties sur l'axe latéral, orthogonal à la direction de marche, Figure 28. En Swinging, l'axe de rotation dominant est proche de la direction latérale. L'axe dominant des vitesses angulaires est donc proche de l'axe latéral.

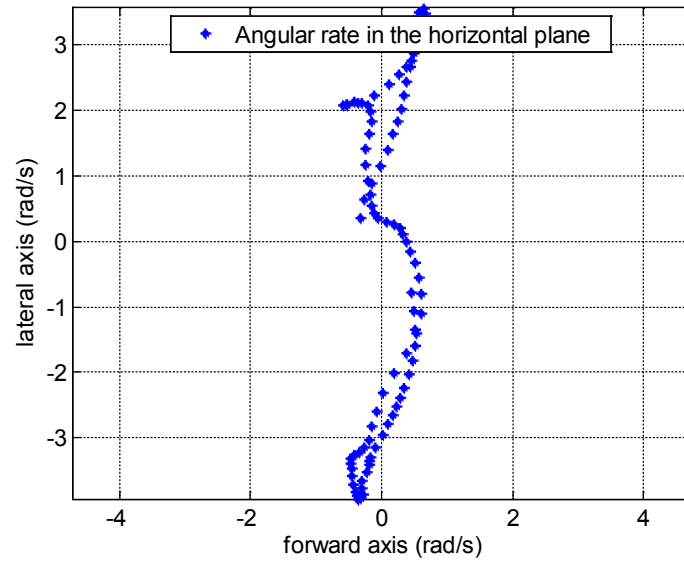


Figure 28: Vitesse de rotation de la main en Swinging dans le plan horizontal sur 1 foulée à 5 km/h

Lorsque la main est en activité Swinging, son accélération et sa vitesse de rotation sont des signaux cycliques. L'accélération et la vitesse de rotation sont alors modélisables par des sommes limitées de sinus et cosinus. La Figure 29 illustre la dimension cyclique de l'accélération de la main lors de l'activité Swinging. Le bras oscille très nettement à la fréquence de foulée, soit environ 1 Hz où l'essentiel de la puissance du signal est concentrée.

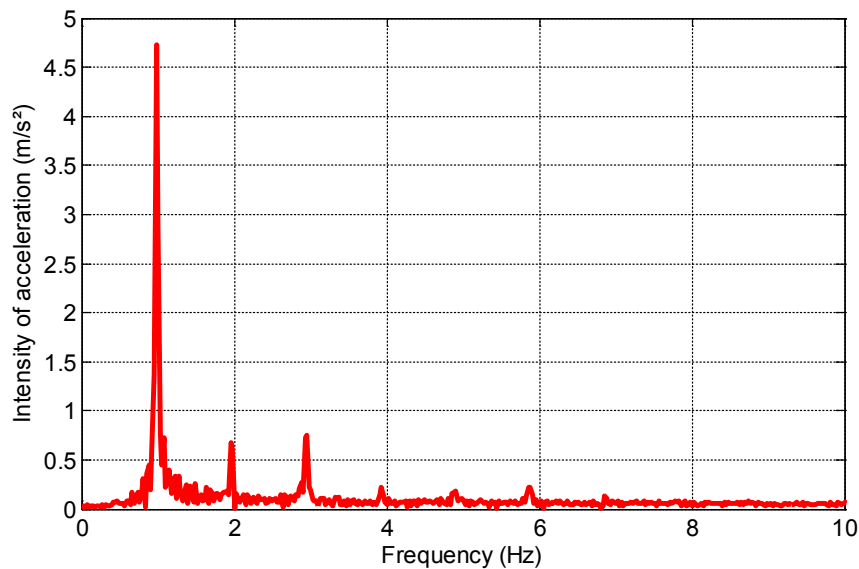


Figure 29: Transformée de Fourier de l'accélération axiale de la main en Swinging à 5 km/h

En conclusion de cette sous-partie, la direction de marche peut être retrouvée de différentes manières pour l'activité Swinging :

- Recherche des axes principaux d'énergie : Pour l'accélération, l'axe principal d'énergie du signal est proche de la direction de marche, alors que pour la vitesse de rotation, l'axe principal d'énergie du signal est proche de la direction orthogonale à la direction de marche.
- Recherche de l'axe le plus vraisemblable sachant le modèle dans le référentiel piéton global. Le modèle peut décrire l'évolution temporelle de l'accélération en utilisant par exemple la transformée de Fourier.
- Recherche de l'axe maximal d'entropie : les données inertielles forment un nuage de points dont la dispersion est selon un axe proche de la direction de marche.

D.2.2.4 Accélérations et vitesses de rotation dans le référentiel piéton global pour l'activité Texting

Les signaux d'accélération et de vitesse de rotation de la main lors de l'activité Texting sont caractéristiques. Les accélérations sont globalement dans la direction de marche, mais dans une moindre mesure que pour l'activité Swinging, Figure 30. Les mouvements de la main se composent principalement d'oscillations axiales et verticales. Il faut cependant déjà noter que les accélérations axiales ne sont pas autant dominantes pour l'activité Texting par rapport à l'activité Swinging. Cette observation reste vraie pour l'activité Phoning.

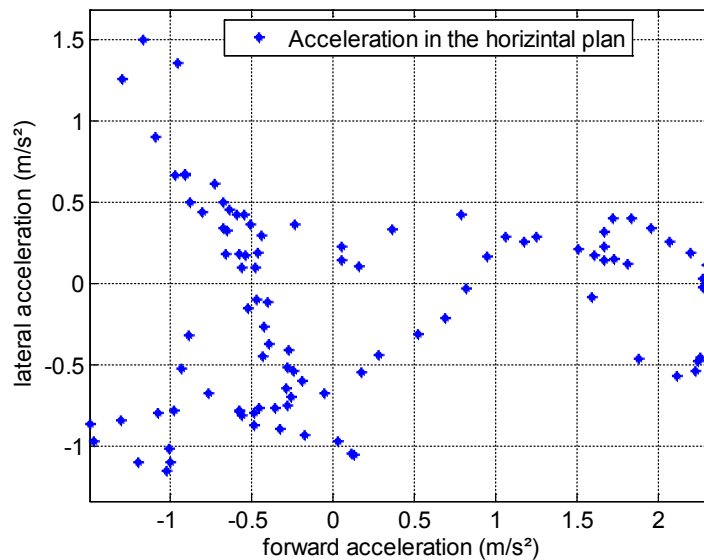


Figure 30: Accélération de la main en Texting dans le plan horizontal sur 1 foulée à 5km/h

La vitesse de rotation de la main en activité Texting possède la même propriété que pour l'activité Swinging : elle est globalement dans une direction proche de la direction orthogonale à celle de la marche, Figure 31. Comme pour l'accélération, la répartition des vitesses angulaires en activité Texting est plus diffuse que pour l'activité Swinging. La part de la projection axiale de la vitesse de rotation n'est pas négligeable par rapport à la projection latérale de vitesse de rotation.

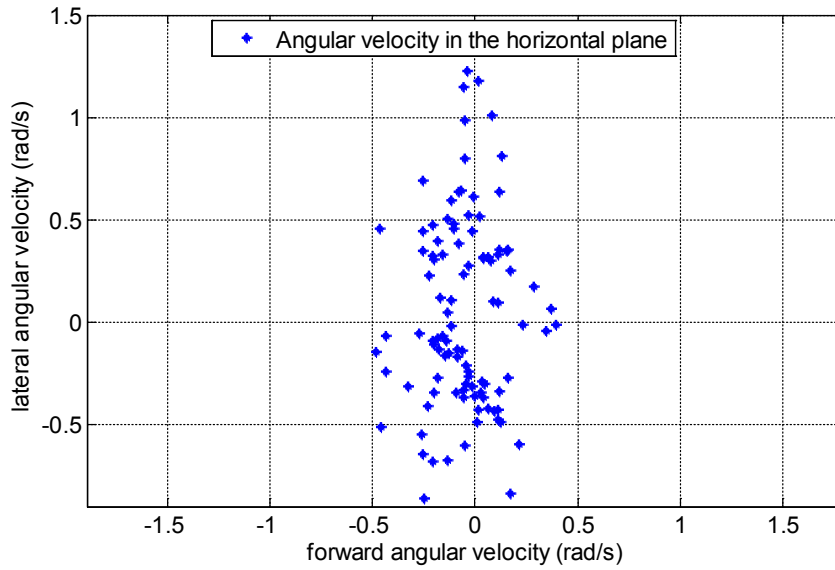


Figure 31: Vitesse de rotation de la main en Texting dans le plan horizontal sur 1 foulée à 5km/h

Les oscillations verticales de la main sont en partie dues au mouvement de rotation du bras suivant l'axe latéral. De manière analogue à l'activité Swinging, l'accélération ou la vitesse angulaire sont cycliques, Figure 32 .

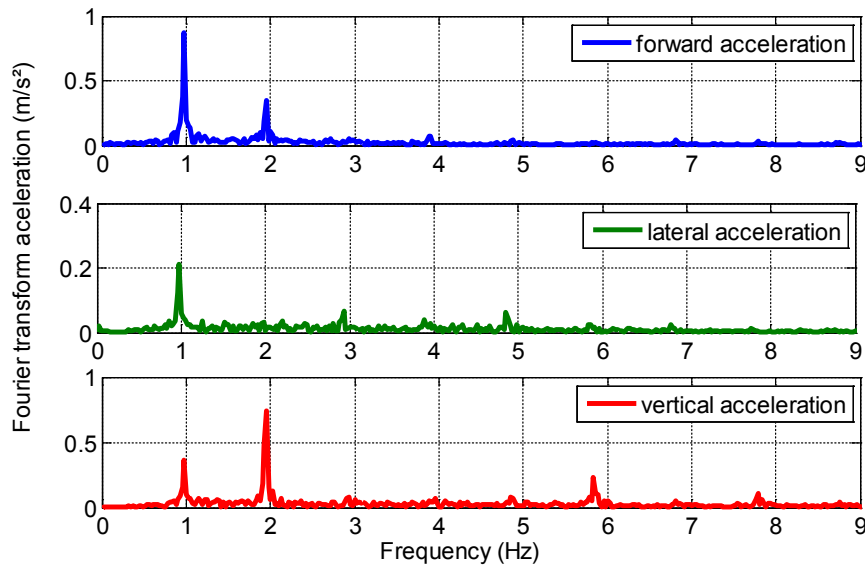


Figure 32: Transformée de Fourier des 3 composantes de l'accélération dans le référentiel piéton global à 5km/h

Cette périodicité peut être exploitée pour déterminer des modèles pour les accélérations et vitesses de rotation axiales et latérales durant un cycle de marche. Les accélérations axiales et latérales ont pour fréquence principale la fréquence de foulée, aux alentours de 1 Hz. La fréquence principale de l'accélération verticale correspond à la fréquence de pas, le double de la fréquence de foulée aux alentours de 2 Hz. La puissance spectrale de l'accélération dans le plan horizontal est plus importante dans la direction axiale par rapport à la direction latérale.

Les directions principales de mouvements sont moins nettes pour l'activité Texting que pour l'activité Swinging, en comparant les Figure 27 et Figure 28 avec les Figure 30 et Figure 31. Les oscillations latérales ne sont pas négligeables et peuvent dépasser celles qui sont axiales, Figure 33.

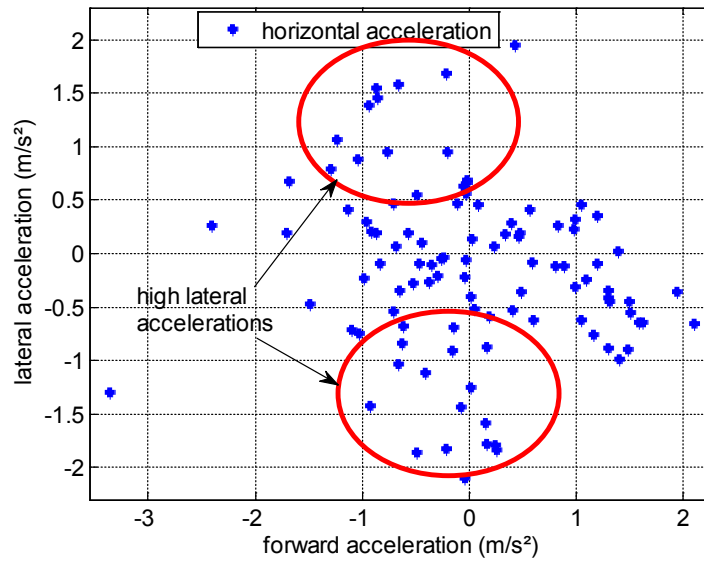


Figure 33: Présence d'importantes accélérations latérales dans le plan horizontal

Dans ce cas, la recherche de la direction de marche apparaît plus difficile. Les accélérations latérales sont plus importantes pour les individus ayant un centre de masse possédant des oscillations latérales plus importantes.

D.2.2.5 Mouvements irréguliers

Les mouvements irréguliers sont des mouvements relativement désordonnés et peu fréquents.

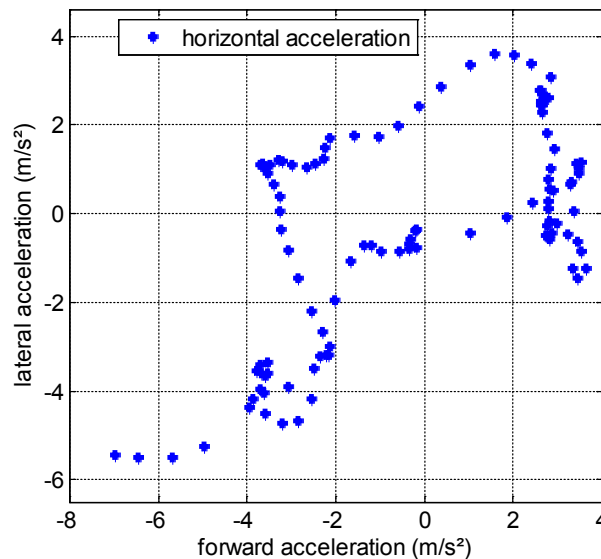


Figure 34: Accélération de la main avec un mouvement irrégulier durant une foulée

Les mouvements irréguliers ne correspondent à aucune autre activité de la main. On peut citer plusieurs mouvements considérés comme irréguliers par exemple des gestes rapides de la main, ou

encore un mouvement lent de désalignement entre la direction de la main et la direction de marche. Ces mouvements présentent une dimension aléatoire importante. Pour ces mouvements, l'estimation de la direction de marche est plus difficile que pour les cas où les accélérations ont des oscillations suivant la direction de marche. Les mouvements suivant la direction de marche ne sont pas dominants.

D.2.2.6 Phases d'accélérations axiales et de vitesses de rotation latérales durant le cycle de marche

Bien que la direction de marche n'apparaisse pas nettement dans les cas où les mouvements de la main axiaux ne sont pas dominants, l'analyse des accélérations de la main durant le cycle de marche permet de mettre en évidence des phases du cycle où les accélérations axiales sont dominantes. L'apparition de phases d'accélération axiale a aussi été observée en D.2.1.4 pour le centre de masse. Sur la Figure , une illustration du cycle de marche (une foulée) est proposée. Le cycle de marche est décomposé de la manière suivante :

- Décollage du pied gauche avec pied droit au sol
- Phase de swing de la jambe gauche avec pied droit au sol
- Attaque au sol du pied gauche avec pied droit toujours au sol
- Décollage du pied droit avec pied gauche au sol
- Phase de swing du pied droit avec pied gauche au sol
- Attaque au sol du pied droit avec pied gauche toujours au sol
- Puis on revient au point de départ (Décollage du pied gauche).

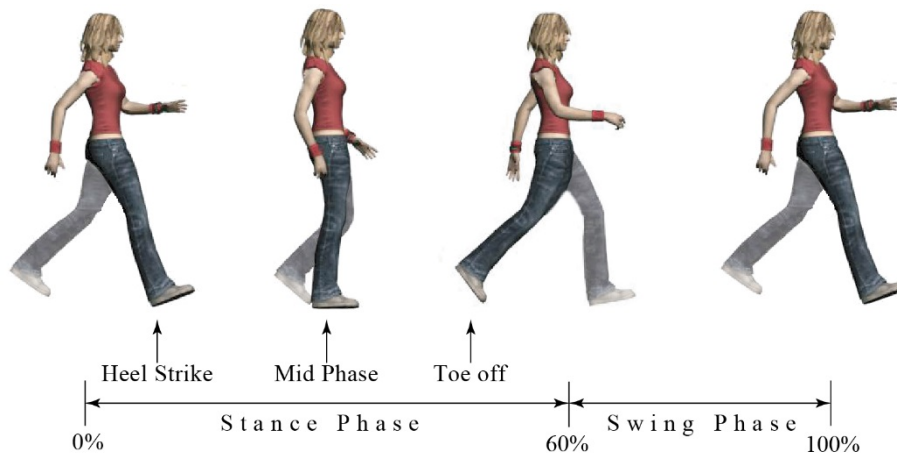


Figure 10: Décomposition du cycle de marche [9] [38]

Par mise en correspondance du cycle de marche et des accélérations horizontales Figure 10 et Figure 35, les accélérations axiales dominantes apparaissent lors de la phase d'appui du pied. La centrale inertielle et magnétique est portée à la main droite et il s'agit du pied droit qui est considéré (main homolatérale ou ipsilatérale au pied). De plus, les accélérations horizontales sont normalisées afin d'effectuer la correspondance, Figure 35.

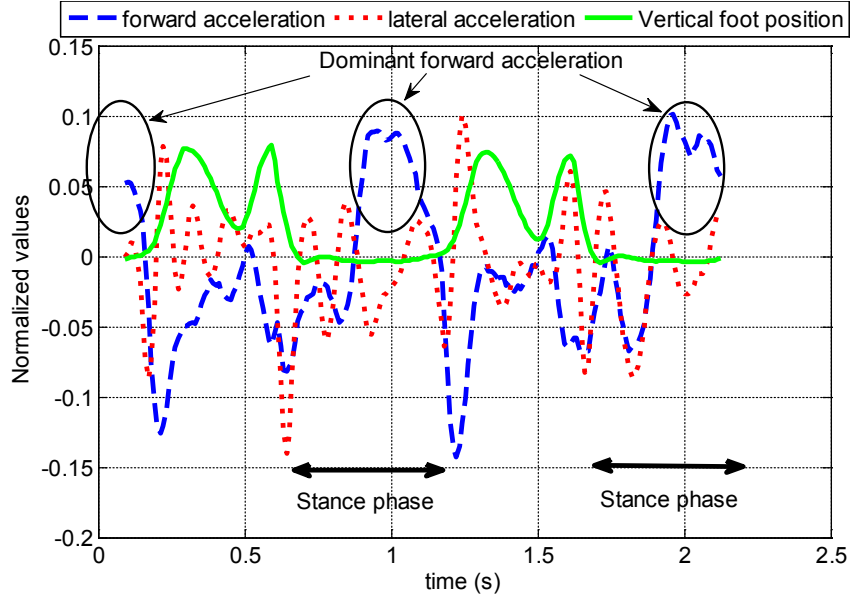


Figure 35: Mise en correspondance des accélérations horizontales de la main en activité Texting avec la position verticale du pied sur 2 foulées

Sur la Figure 36, l'ensemble des accélérations de la centrale portée dans la main droite en mode Texting est représenté par des carrés bleus. Les accélérations aux alentours de l'instant où le pied droit décolle du sol sont marquées de rouge.

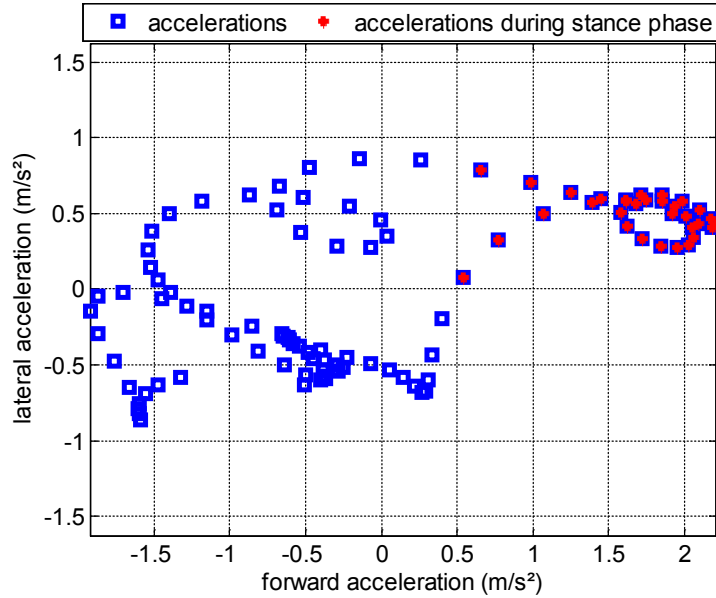


Figure 36: Accélération de l'IMU en mode Texting dans le plan horizontal sur une foulée (bleue) et sur une partie du cycle de marche (rouge)

La prise en compte du cycle de marche est un élément nouveau pour l'estimation de la direction de marche [75]. Ces accélérations correspondent aux accélérations axiales les plus fortes, qui sont même dominantes par rapport aux accélérations latérales. Ce phénomène d'accélérations axiales, observable sur plusieurs individus, pourrait être lié à la force de réaction du sol. La force de réaction au sol et son évolution durant la phase statique est présentée en [76]. Cette hypothèse reste cependant à vérifier.

De manière analogue aux accélérations, la vitesse de rotation comporte des phases opportunes où la direction dominante est proche de la direction latérale, Figure 37.

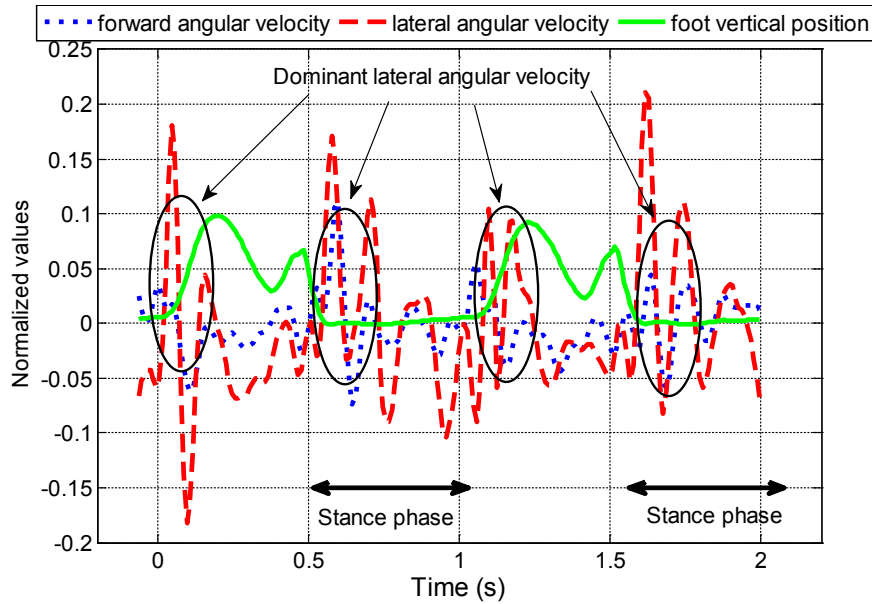


Figure 37: Mise en correspondance des vitesses de rotation de la main en activité Texting avec la position verticale du pied sur 2 foulées

Les vitesses de rotation latérales sont dominantes durant les phases de décollage du pied (fin de phase d'appui) et d'attaque du talon au sol (début de phase d'appui). Elles restent néanmoins plus courtes que les phases d'accélérations axiales. Ces phases sont observées sur plusieurs individus. Cependant, les vitesses de rotation durant la phase d'attaque du talon ne sont pas toujours dominantes par rapport aux vitesses axiales.

D.3 Méthodes existantes d'estimation de la direction de marche

D.3.1 Calcul des directions principales de l'accélération horizontale : PCA

PCA : *Principal Component Analysis*

D.3.1.1 Principe et estimation des axes principaux

Le calcul des directions principales est utilisé pour estimer la direction de marche [77] [78] [79]. L'accélération de la main dans le plan horizontal présente des oscillations durant le cycle de marche. Les oscillations les plus importantes du plan horizontal sont globalement suivant la direction axiale de la marche. L'idée consiste alors à estimer la direction qui maximise l'énergie du signal dans le plan horizontal. L'énergie de l'accélération dans le plan horizontal est définie par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_H^n, t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{a}_H^n(t)\|^2 dt \quad (4.11)$$

Avec :

- $\mathbf{a}_H^n$ est l'accélération dans le plan horizontal dans le référentiel de navigation
- $\mathbf{E}(\mathbf{a}_H^n, t_1, t_2)$ est l'énergie moyenne de l'accélération horizontale entre les instants t_1 et t_2

L'énergie axiale d'axe $\mathbf{u}_H^n(t)$ de l'accélération est définie par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_H^n, \mathbf{u}_H^n, t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{a}_H^n(t), \mathbf{u}_H^n(t) \rangle^2 dt \quad (4.12)$$

En écrivant (4.12) sous forme discrète :

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_H^n, \mathbf{u}_H^n, N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{a}_H^n(k), \mathbf{u}_H^n \rangle^2 \quad (4.13)$$

En supposant que l'axe $\mathbf{u}_H^n$ soit constant au cours de la période $[t_1, t_2]$, l'énergie du signal devient :

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_H^n, \mathbf{u}_H^n, N) = \mathbf{u}_H^{nT} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{a}_H^n(k) \mathbf{a}_H^n(k)^T \right) \mathbf{u}_H^n \quad (4.14)$$

Le problème consiste donc à maximiser l'énergie axiale sous la contrainte $\|\mathbf{u}_H^n\| = 1$. Il se formule de la manière suivante :

$$\max_{\mathbf{u}_H^n} (\mathbf{E}(\mathbf{a}_H^n, \mathbf{u}_H^n, N)), \|\mathbf{u}_H^n\| = 1 \quad (4.15)$$

Le vecteur $\mathbf{u}_H^n$ est paramétré par l'angle θ : $\mathbf{u}_H^n = (\cos \theta \quad \sin \theta)^T$. Le problème d'optimisation (4.15) se résout en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, ce qui donne après dérivation :

$$\mathbf{R} \mathbf{u}_H^n = \lambda \mathbf{u}_H^n \quad (4.16)$$

avec :

- $\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{a}_H^n(k) \mathbf{a}_H^n(k)^T$ la matrice de variance-covariance du problème qui est symétrique et définie positive pour peu que l'accélération ne soit pas constante
- λ est le multiplicateur de Lagrange

Le problème (4.15) consiste donc à rechercher les composantes principales (PCA) de la matrice symétrique réelle $\mathbf{R}$, ce qui revient à diagonaliser cette dernière matrice. Le vecteur propre correspondant à la valeur propre maximale est la solution du problème (4.15) avec une ambiguïté d'angle π .

D.3.1.2 Limites

L'estimation de la direction de marche par calcul des composantes principales souffre de plusieurs limites. Premièrement, la direction de marche n'est pas constante au cours d'un pas et encore moins au cours d'une foulée. Deuxièmement, l'estimation des directions principales est influencée par les valeurs de fortes intensités. Et enfin, il n'est pas garanti que la direction principale des oscillations soit la direction de marche. En effet, les oscillations latérales peuvent être plus importantes que les oscillations axiales et les mouvements de la main sont assez variables, avec des accélérations non axiales. La PCA classique est sensible aux valeurs aberrantes. Des méthodes dites robustes permettent une insensibilité relative aux valeurs aberrantes [80] [81]. Cependant ces approches s'appliquent dans des cas où la dimension de l'espace des données est suffisamment importante, dans notre cas, la dimension est de 2 ou au maximum 3.

La recherche d'axes principaux peut être appliquée sur des données filtrées. Un premier filtrage passe-bas permet de limiter les variations hautes fréquences. Enfin, un filtrage prenant en compte la recherche d'accélération axiales durant le cycle de marche permet de focaliser la recherche d'axe sur la partie contenant les plus d'information de direction de marche et donc d'améliorer cette approche.

D.3.2 Calcul de la corrélation avec un modèle : FLAM

FLAM : *Forward and Lateral Acceleration Model*. Un autre type de méthode se base sur la création d'un modèle temporel de l'accélération. Le calcul de la direction de marche se fait par maximisation de la corrélation entre le modèle et les mesures [82].

D.3.2.1 Principe et résolution

En supposant que le mouvement soit répétitif, un modèle d'accélération axiales et latérales peut être défini. Ce modèle d'accélération peut être défini pour chacun des modes, mais il peut aussi dépendre des personnes et de leur vitesse de marche.

$$\mathbf{a}_{Mod}^p(t) = \mathbf{f}(t, \text{Activité}, \text{vitesse}, \text{personne}) \quad (4.17)$$

avec :

$$\mathbf{a}_{Mod}^p(t) = \begin{pmatrix} a_{ModF}^p(t) & a_{ModL}^p(t) \end{pmatrix}^T \text{ les modèles d'accélération axiales (Forward) et latérales (Lateral).}$$

En supposant un modèle d'accélération, dont la construction est discutée en D.3.2.2, la direction de marche est estimée comme étant l'angle qui minimise la distance entre ledit modèle et l'accélération estimée ce qui revient à maximiser les corrélations entre les deux accélérations suivant le paramètre θ :

$$\begin{aligned} C_F(\theta) &= \int_{t_1}^{t_2} a_{ModF}^p(u) (\cos \theta \quad \sin \theta) \mathbf{a}_H^n(u) du \\ C_L(\theta) &= \int_{t_1}^{t_2} a_{ModL}^p(u) (-\sin \theta \quad \cos \theta) \mathbf{a}_H^n(u) du \end{aligned} \quad (4.18)$$

où $[t_1, t_2]$ est la fenêtre temporelle considérée. La direction de marche s'obtient par pondération des angles maximisant les fonctions de corrélations :

$$\theta_w = \alpha \arg \max_{\theta} (C_F(\theta)) + (1 - \alpha) \arg \max_{\theta} (C_L(\theta)) \quad (4.19)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$. La résolution du maximum des fonctions de corrélation peut se faire analytiquement. Le paramètre d'angle est indépendant de l'intégration, pour la corrélation axiale cela donne :

$$C_F(\theta) = \cos \theta \int_{t_1}^{t_2} a_{ModF}^p(u) a_H^n(1, u) du + \sin \theta \int_{t_1}^{t_2} a_{ModF}^p(u) a_H^n(2, u) du$$

La maximisation de la corrélation latérale est un problème identique. En supposant que le modèle d'accélération axiale ne soit pas simultanément orthogonal à l'accélération nord et l'accélération est, il vient par suite du calcul:

$$C_F = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \cos \theta + \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \sin \theta \right) \quad (4.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} - \quad \beta_1 &= \int_{t_1}^{t_2} a_{ModF}^p(u) a_H^n(1, u) du \\ - \quad \beta_2 &= \int_{t_1}^{t_2} a_{ModF}^p(u) a_H^n(2, u) du \end{aligned}$$

L'équation (4.20) fait apparaître une formule trigonométrique en remarquant que :

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_F &= \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \\ \sin \theta_F &= \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta_F = \arctan_2 \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}, \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \right)$$

L'équation (4.20) s'écrit donc simplement :

$$C_F(\theta) = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \sin(\theta + \theta_F) \quad (4.21)$$

La maximisation de cette corrélation est donnée par :

$$\arg \max_{\theta} (C_F(\theta)) = \frac{\pi}{2} + k\pi - \theta_F \quad (4.22)$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

D.3.2.2 Construction du modèle

Cette méthode de maximisation de la corrélation avec un modèle nécessite justement d'en créer un. La création du modèle décrite dans cette partie se base sur [82]. Pour une personne et un mode donnés, à partir d'accélération axiales et latérales connues, les modèles sont construits à partir d'une analyse fréquentielle. Les oscillations et la périodicité des accélérations axiales et latérales peuvent être estimées à partir de la transformée de Fourier. Cette dernière donne les fréquences, les amplitudes et les déphasages. Les fréquences choisies pour modéliser le signal sont les plus importantes en intensité (les 3 à 5 plus importantes) :

$$\begin{aligned} a_{ModF}^p(t) &= \sum_{k=1}^p a_{Fk} \cos(\omega_{Fk} t + \varphi_{Fk}) \\ a_{ModL}^p(t) &= \sum_{k=1}^p a_{Lk} \cos(\omega_{Lk} t + \varphi_{Lk}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec $(\omega_{Fk}, a_{Fk}, \varphi_{Fk})_{1 \leq k \leq p}$ et $(\omega_{Lk}, a_{Lk}, \varphi_{Lk})_{1 \leq k \leq p}$ les pulsations, amplitudes et déphasages pour les modèles d'accélérations axiales et latérales respectivement.

D.3.2.3 Limites

Cette méthode se base sur plusieurs éléments qui lorsqu'ils faillissent, engendrent des erreurs d'estimation. Un premier élément est la qualité du modèle. En effet, si le modèle ne correspond pas à l'activité ou à la personne, l'estimation de la direction de marche s'en trouvera dégradée. Le

déphasage temporel entre le modèle et l'observation est un second élément problématique pour le calcul de la corrélation. Enfin, le mouvement de la main est parfois assez erratique, si bien qu'aucun modèle ne coïncide avec les observations. Cette méthode ajoute une information sur l'évolution temporelle de l'accélération au cours du cycle de marche. En ce sens, elle constitue une amélioration par rapport à la méthode PCA.

D.3.3 Estimation de la direction de marche par analyse fréquentielle : FIS

FIS: *Frequency analysis of Inertial Sensors*

D.3.3.1 Analyse fréquentielle des accélérations et des vitesses de rotation

Le phénomène cyclique de la marche se retrouve dans les signaux des capteurs inertiels. La Figure 38 est une illustration de l'aspect cyclique des signaux. Il s'agit de la norme du signal de l'accéléromètre lorsque la centrale inertielle est dans la main, en activité Texting.

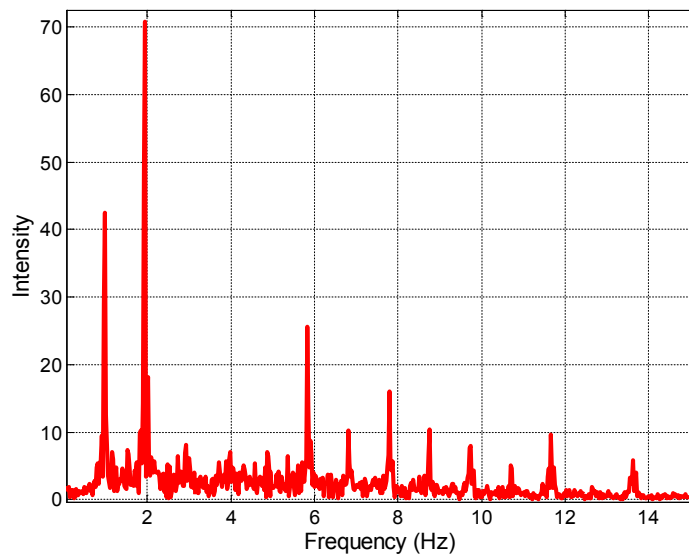


Figure 38: Norme de la transformée de Fourier du signal de l'accéléromètre, issu d'une IMU portée dans la main en mode Texting

Les puissances spectrales sont maximales en f_{step} (fréquence de pas) pour l'accélération axiale et la vitesse de rotation autour de l'axe latéral de déplacement, et elles sont maximales en (fréquence de foulée) pour l'accélération latérale et la vitesse de rotation autour de l'axe de direction de marche [83].

D.3.3.2 Estimation de la direction de marche

L'estimation de la direction de marche consiste à maximiser une fonction de coût dépendante de la direction de marche. Cette fonction est la combinaison linéaire des transformées de Fourier de l'accélération et de la vitesse de rotation projetées sur les axes de direction de marche et sa perpendiculaire horizontale. Les transformées de Fourier sont calculées suivant les fréquences de pas et de foulées :

$$\begin{cases} \mathbf{A}(f) = Tf(\mathbf{a}^b(t)) \\ \mathbf{G}(f) = Tf(\mathbf{\omega}_{nb}^b(t)) \end{cases} \quad (4.24)$$

avec :

- Tf l'opérateur « transformée de Fourier »
- $\mathbf{a}^b$ et $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$ l'accélération et la vitesse de rotation dans le référentiel body
- $\mathbf{A}(f)$ et $\mathbf{G}(f)$ les transformées de Fourier des accélérations et vitesses de rotation suivant la fréquence f .

En version discrète, la transformée de Fourier est définie par :

$$X(k) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p) e^{-i2\pi k \frac{p}{N}} \quad (4.25)$$

avec X la transformée de Fourier de x suivant la fréquence k . Les puissances spectrales projetées suivant les axes horizontaux du référentiel piéton sont définies par :

$$\begin{cases} P_{aF} = \left| \left\langle \mathbf{A}(f_{step}), \mathbf{p}_1^b \right\rangle \right|^2 ; P_{aL} = \left| \left\langle \mathbf{A}\left(\frac{f_{step}}{2}\right), \mathbf{p}_2^b \right\rangle \right|^2 \\ P_{\omega F} = \left| \left\langle \mathbf{G}\left(\frac{f_{step}}{2}\right), \mathbf{p}_1^b \right\rangle \right|^2 ; P_{\omega L} = \left| \left\langle \mathbf{G}(f_{step}), \mathbf{p}_2^b \right\rangle \right|^2 \end{cases} \quad (4.26)$$

avec $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ les axes du plan horizontal du piéton, correspondant à l'axe de direction de marche et à l'axe latéral à la direction de marche. Les axes $\mathbf{p}_1^b, \mathbf{p}_2^b$ sont définis à partir de (4.1) et de la connaissance des axes du repère navigation dans le repère body (ces derniers sont estimés dans le calcul d'orientation détaillé au chapitre 3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \cos \theta \mathbf{n}^b + \sin \theta \mathbf{e}^b \\ \mathbf{p}_2 &= -\sin \theta \mathbf{n}^b + \cos \theta \mathbf{e}^b \end{aligned} \quad (4.27)$$

avec $\mathbf{n}^b, \mathbf{e}^b$ les axes Nord et Est du repère navigation exprimés dans le repère body. Une fonction dite fonction coût dépendant de l'angle θ est définie comme étant la somme pondérée des puissances spectrales projetées :

$$f(\theta) = w_1 P_{aF} + w_2 P_{aL} + w_3 P_{\omega F} + w_4 P_{\omega L} \quad (4.28)$$

La fonction f peut être explicitée en fonction de l'angle θ . Pour cela, il suffit de l'exprimer pour P_{aF} :

$$\begin{aligned} P_{aF} &= \left| \left\langle \mathbf{A}(f_{step}), \cos \theta \mathbf{n}^b + \sin \theta \mathbf{e}^b \right\rangle \right|^2 \\ &= \left| \left\langle \mathbf{A}(f_{step}), \cos \theta \mathbf{n}^b \right\rangle + \left\langle \mathbf{A}(f_{step}), \sin \theta \mathbf{e}^b \right\rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ce qui se développe par :

$$P_{aF} = |a_{nF}|^2 (\cos \theta)^2 + |a_{eF}|^2 (\sin \theta)^2 + 2 \operatorname{Re}(a_{nF} a_{eF}^*) \cos \theta \sin \theta \quad (4.30)$$

avec :

- $a_{nF} = \left\langle \mathbf{A}(f_{step}), \mathbf{n}^b \right\rangle, a_{eF} = \left\langle \mathbf{A}(f_{step}), \mathbf{e}^b \right\rangle$ les projections de la transformée de Fourier sur les axes nord et est dans le repère body et
- $\text{Re}(z)$ la partie réelle du nombre complexe z .

La fonction coût définie en (4.28) s'écrit finalement :

$$f(\theta) = \boldsymbol{\lambda}^T \begin{pmatrix} (\cos \theta)^2 \\ \cos \theta \sin \theta \\ (\sin \theta)^2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\lambda}^T = (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4) \begin{pmatrix} |a_{nF}|^2 & 2\text{Re}(a_{nF}a_{eF}) & |a_{eF}|^2 \\ |a_{nL}|^2 & -2\text{Re}(a_{nL}a_{eL}) & |a_{eL}|^2 \\ |\omega_{nF}|^2 & 2\text{Re}(\omega_{nF}\omega_{eF}) & |\omega_{eF}|^2 \\ |\omega_{nL}|^2 & 2\text{Re}(\omega_{nL}\omega_{eL}) & |\omega_{eL}|^2 \end{pmatrix}.$$

Exprimant les coefficients issus des différents produits scalaires entre les transformées de Fourier de l'accélération, la vitesse de rotation et les axes Nord et Est :

$$\begin{aligned} a_{nL} &= \left\langle \mathbf{A}\left(\frac{f_{step}}{2}\right), \mathbf{n}^b \right\rangle, a_{eL} = \left\langle \mathbf{A}\left(\frac{f_{step}}{2}\right), \mathbf{e}^b \right\rangle \\ \omega_{nF} &= \left\langle \mathbf{A}\left(\frac{f_{step}}{2}\right), \mathbf{n}^b \right\rangle, \omega_{eF} = \left\langle \mathbf{A}\left(\frac{f_{step}}{2}\right), \mathbf{e}^b \right\rangle \\ \omega_{nL} &= \left\langle \mathbf{A}(f_{step}), \mathbf{n}^b \right\rangle, \omega_{eL} = \left\langle \mathbf{A}(f_{step}), \mathbf{e}^b \right\rangle \end{aligned} \quad (4.32)$$

puis en utilisant les relations trigonométriques, la fonction coût s'exprime:

$$f(\theta) = \frac{1}{2}((\lambda_1 - \lambda_3)\cos 2\theta + \lambda_2 \sin 2\theta + (\lambda_1 + \lambda_3)) \quad (4.33)$$

En opérant de la même manière que pour (4.20), la fonction coût s'écrit finalement :

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \sin(2\theta + \varphi) + (\lambda_1 + \lambda_3) \right) \quad (4.34)$$

avec $\varphi = \arctan_2(\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2)$.

La fonction f est maximale pour :

$$\arg \max_{\theta} (f(\theta)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi + k\pi \right) \quad (4.35)$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

D.3.3.3 Limites

Les performances de cette méthode sont principalement amoindries par deux limites. La première d'entre elles est que les oscillations suivant les fréquences de pas ou de foulée, ne sont pas assurées

d'être maximales suivant la direction de marche. Une deuxième limite est que cette méthode est tributaire de la qualité de l'estimation de la fréquence de marche.

D.3.4 Résolution de l'ambiguïté d'angle π

Pour certaines méthodes d'estimation de la direction de marche, par exemple la PCA, l'estimation comporte une ambiguïté d'angle π . Plusieurs éléments permettent de lever cette indétermination.

- Le déphasage entre les accélérations latérales et verticales peut être étudié. En effet, un déphasage de $+\pi/2$ est observé entre les oscillations verticales et les oscillations latérales (Figure 21).
- Suivant les modes ou activités du piéton, des phases d'accélérations axiales sont observées durant le cycle de marche, D.2.2.6. En sélectionnant ces phases, l'ambiguïté d'estimation de direction de marche peut être levée.
- En étudiant la dissymétrie des accélérations durant une foulée.

D.3.5 Conclusions

Plusieurs enseignements sont déduits de cette revue de l'état de l'art et de l'analyse de la marche en D.2.

- Hormis pour [75], les méthodes de l'état de l'art n'exploitent pas complètement les observations biomécaniques, et notamment la prise en compte de la phase d'appui au sol.
- Les approches sont sensibles aux variations de la marche. Les signaux des capteurs portés dans la main ont une dimension aléatoire importante. La modélisation spatio-temporelle du signal proposée dans l'état de l'art ne peut donc pas représenter et prendre en compte toute la variabilité des mouvements de la main.

Les remarques précédentes nous conduisent à considérer l'accélération ou plus largement les mesures inertiels comme des variables aléatoires de l'espace. La partie suivante est consacrée au développement de cette approche.

D.4 Méthodes innovantes d'estimation de la direction de marche par approches statistiques

D.4.1 Distributions spatiales des mesures inertiels et direction de marche

D.4.1.1 Modèle de distribution spatiale des mesures inertiels

Quel que soit l'activité : Texting, Swinging, ou d'autres activités, les mesures inertiels ont une distribution spatiale singulière, Figure 27, Figure 30, Figure 39. L'aspect distribution aléatoire est peut être mis en correspondance avec la direction de marche, Figure 39. Sur les deux tracés, il s'agit de l'accélération pour un piéton en activité Texting, mais avec des directions de marche différentes. Une répartition des accélérations identique autour de l'axe de direction de marche est identifiable. En effet, les nuages de points sont similaires à une rotation près, correspondant à la direction de marche.

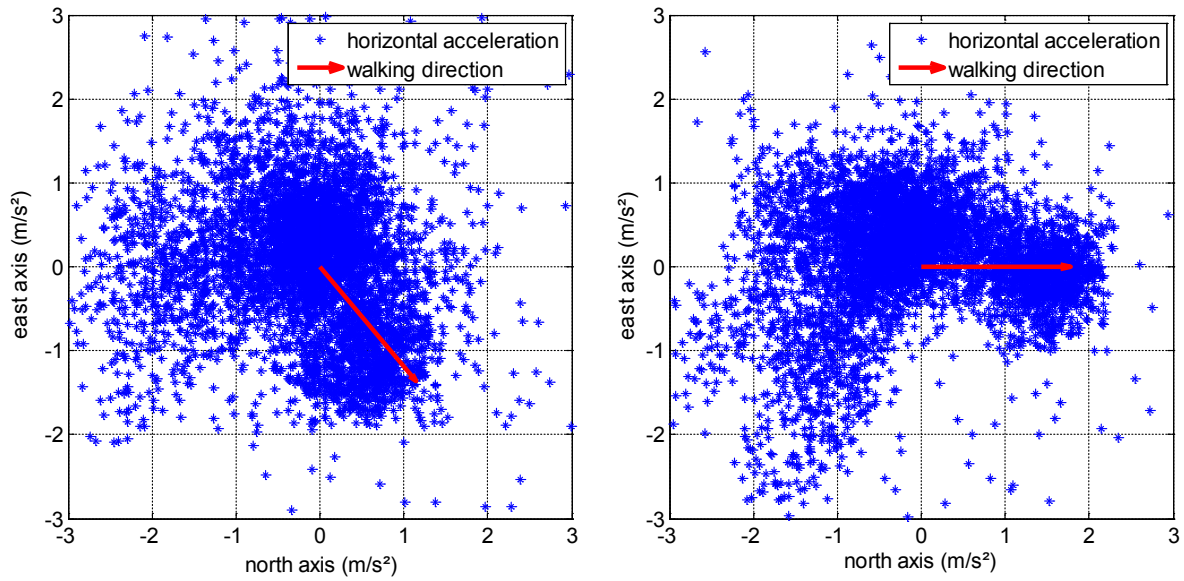


Figure 39: Nuages de points de l'accélération dans le plan horizontal et directions de marche à -50° (gauche) et à 0° à droite

Les mesures inertielles peuvent donc être modélisées par des densités spatiales selon l'activité et l'individu, Figure 40, avec l'échelle à droite:

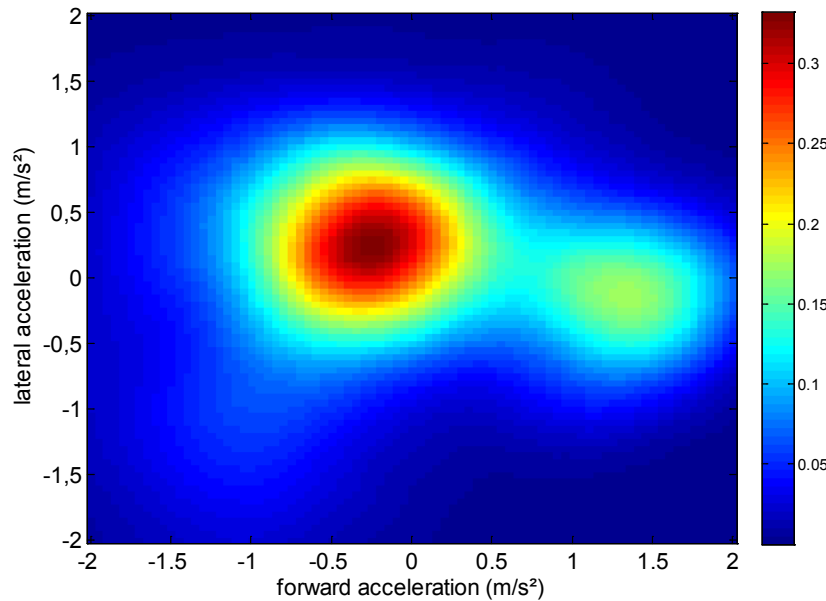


Figure 40: Modèle de densité de probabilité de l'accélération dans le plan horizontal

Sur cette figure, la densité de probabilité est estimée à partir de la méthode des noyaux décrite en [84], avec un noyau gaussien. Un ensemble de densités de probabilités paramétrées par la direction de marche peut être alors construit.

D.4.1.2 Recherche de l'angle minimisant la distance entre le modèle et les observations

L'idée générale pour estimer la direction de marche est donc de déterminer parmi l'ensemble de densité de probabilité, la densité qui sera la plus « proche » des observations. L'estimation de la direction de marche s'exprime donc comme un problème géométrique. La direction de marche estimée est l'angle minimisant une « distance statistique » entre les observations et l'ensemble des

modèles de densités de probabilité. Pour notre approche, la direction de marche est estimée par recherche du maximum de vraisemblance. Dans la suite, deux méthodes sont proposées :

- La maximisation de la vraisemblance
- La minimisation de la divergence de Kullback-Leibler

Le choix de l'ensemble des densités de probabilité est donc un préalable à notre approche. Expérimentalement, il a été observé que la phase du pied au sol produisait des accélérations plutôt axiales, le reste étant des accélérations centrées autour du vecteur nul. Cela donne donc deux modes principaux pour l'accélération. Ces deux modes sont visibles sur les nuages de points en Figure 39 et sur l'estimation non paramétrique de la densité de probabilité Figure 40. Le type de densité de probabilité choisi est un mélange gaussien avec 2 modes. Un mode représentant les accélérations autour de zéro et l'autre mode représentant les accélérations de la phase d'appui au sol. Le nombre de modes, et donc le nombre de paramètres peut être discuté. Un outil permettant de déterminer le nombre de paramètres d'un modèle peut être utilisé : le critère d'information bayésien [85] [86].

La suite de cette partie est consacrée à la construction de l'ensemble des densités de probabilité modèles puis à la résolution du maximum de vraisemblance et de minimum de la divergence de Kullback-Leibler entre l'ensemble des modèles et les observations

D.4.2 Estimation des modèles de densité de probabilité

Pour l'apprentissage d'un mélange gaussien, c'est l'algorithme Expectation-Maximization présenté au chapitre 2 qui est utilisé. L'apprentissage est effectué à partir d'observations dont la direction de marche est connue. Dans un premier temps, les formules d'apprentissage sont établies puis dans un second temps elles sont appliquées à notre cas.

D.4.2.1 Apprentissage des modèles de la densité de probabilité des mesures inertielles : Expectation-Maximization

Soit un ensemble d'observations noté $X = (\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Il est supposé que ces observations sont issues de n variables aléatoires indépendantes et qu'elles proviennent du mélange gaussien suivant :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^q \tau_k \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k) \quad (4.36)$$

Avec :

- $\mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k)$ la valeur en $\mathbf{x}$ de la gaussienne de moyenne $\mathbf{m}_k$ et de matrice de variance-covariance $\mathbf{P}_k$.
- $\tau_k \in [0, 1]$ est un coefficient, tel que $\sum_{k=1}^q \tau_k = 1$, q étant le nombre de gaussiennes du mélange

Les paramètres du modèle à estimer sont notés $\Psi = (\tau_k, \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k)_{1 \leq k \leq q}$ avec les poids des gaussiennes, les moyennes et les matrices de variance-covariance. Afin de déterminer les paramètres du modèle f , l'algorithme Expectation-Maximization est utilisé [36], et permet de maximiser la vraisemblance. Dans la présentation suivante, c est l'indice d'itération. La vraisemblance (log-vraisemblance) est définie par :

$$L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \Psi) = \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{k=1}^q \tau_k \mathcal{N}(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k) \right) \quad (4.37)$$

- Initialisation $c = 0$:

Le vecteur des paramètres à estimer est initialisé à partir de valeurs initiales proches du problème. Cette étape n'est pas à négliger puisque la solution finale en dépend. L'algorithme peut donc être appliqué plusieurs fois à partir de diverses initialisations afin de ne pas converger vers un extrémum local de la vraisemblance.

- Expectation-Maximization $c \rightarrow c + 1$:

Supposons connue Ψ^c , l'estimation des paramètres à l'itération c . Afin de simplifier le problème (4.37), les variables $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ décrivant l'appartenance de l'observation $\mathbf{x}_i$ à l'une des gaussiennes du mélange sont introduites. Ainsi la probabilité que l'observation i provienne de la $k^{\text{ième}}$ gaussienne du mélange, notée t_{ik} est donnée par :

$$t_{ik} = p(Z_i | \mathbf{x}_i, (\tau_k^c, \mathbf{m}_k^c, \mathbf{P}_k^c)) = \frac{\tau_k^c \mathcal{N}(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}_k^c, \mathbf{P}_k^c)}{\sum_{j=1}^p \tau_j^c \mathcal{N}(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}_j^c, \mathbf{P}_j^c)} \quad (4.38)$$

Le calcul à l'itération $c + 1$ des différents éléments du vecteur Ψ se fait par maximisation de la nouvelle fonction de vraisemblance complétée des Z_i :

$$L((Z_i)_{1 \leq i \leq n}, (\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \Psi) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p t_{ik} \log(\tau_k \mathcal{N}(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k)) \quad (4.39)$$

Les coefficients sont obtenus en calculant :

$$\frac{\partial L((Z_i)_{1 \leq i \leq n}, (\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \Psi)}{\partial \Psi} = 0 \quad (4.40)$$

Le coefficient, la moyenne et la matrice de variance-covariance du mode k sont obtenus par :

$$\tau_k^{c+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{ik}, \mathbf{m}_k^{c+1} = \frac{\sum_{i=1}^n t_{ik} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n t_{ik}}, \mathbf{P}_k^{c+1} = \frac{\sum_{i=1}^n t_{ik} (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_k^c)(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_k^c)^T}{\sum_{i=1}^n t_{ik}} \quad (4.41)$$

- Fin de l'algorithme :

Le processus d'estimation est arrêté lorsque la vraisemblance a convergé. Pour cela, un critère de convergence ε est fixé. Il permet de stopper le processus lorsque :

$$\left| \frac{L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \Psi^{c+1}) - L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \Psi^c)}{L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \Psi^c)} \right| < \varepsilon \quad (4.42)$$

La description faite dans ce paragraphe permet d'établir les formules utilisées pour l'apprentissage des modèles de densités de probabilité.

D.4.2.2 Exemple d'application de l'apprentissage

Ce paragraphe décrit l'application du processus d'estimation des modèles avec l'algorithme EM. Il a été vu en D.4.1 que l'ensemble des modèles est un mélange de deux gaussiennes. Le modèle se détermine à partir d'observations inertielles, ici les accélérations horizontales dans le référentiel de navigation, dont la direction de marche est de 0° , Figure 41 :

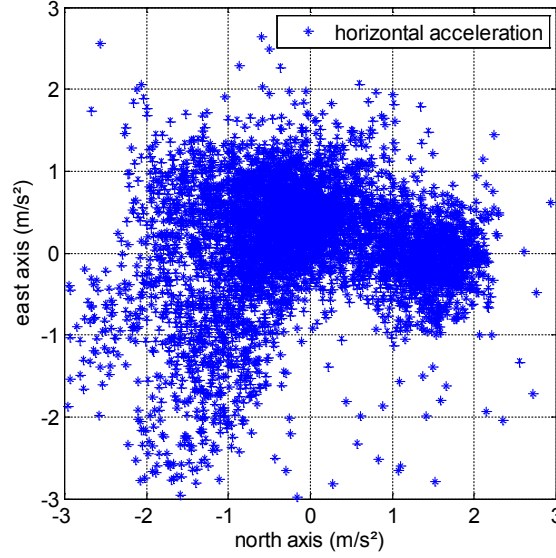


Figure 41: Accélérations dans le plan horizontal avec une direction de marche suivant la direction nord (0°)

L'objectif est de déterminer les paramètres du mélange gaussien suivant :

$$f_{accM}(\mathbf{x}) = \frac{\tau}{\left((2\pi)^d |\mathbf{P}_1|\right)^{\frac{1}{2}}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_1)^T \mathbf{P}_1^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_1)\right)} + \frac{1-\tau}{\left((2\pi)^d |\mathbf{P}_2|\right)^{\frac{1}{2}}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_2)^T \mathbf{P}_2^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_2)\right)} \quad (4.43)$$

avec :

- $(\mathbf{m}_1, \mathbf{P}_1)$ et $(\mathbf{m}_2, \mathbf{P}_2)$ les moyennes et variances des deux gaussiennes
- τ est le poids du mélange
- d est la dimension des observations, $d = 2$ dans notre cas
- $|\mathbf{P}|$ le déterminant de la matrice $\mathbf{P}$

Les accélérations sont dépendantes de la vitesse de marche. Afin d'être insensibles à un changement d'échelle, les données d'apprentissage sont normalisées. Les valeurs initiales choisies des paramètres sont :

$$\begin{cases} \tau = 0.5 \\ \mathbf{m}_1 = (1 \ 0)^T, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \\ \mathbf{m}_2 = (-1 \ 0)^T, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.44)$$

Une illustration de l'algorithme EM est proposée en Figure 42. Les éléments figurant sur ces illustrations sont : les points bleus sont les accélérations, en noir et rouge les ellipses représentant les modes du mélange : le point correspond à la moyenne, c'est le centre de l'ellipse, cette dernière représentant l'écart-type.

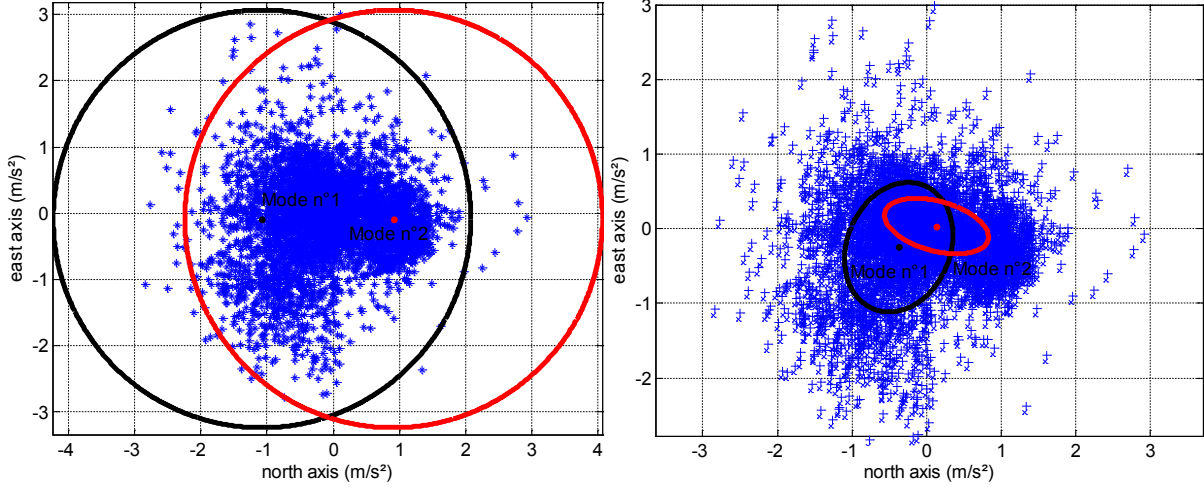


Figure 42: Estimation de l'algorithme EM: à gauche les valeurs du mélange avec les valeurs initiales et à droite les valeurs du mélange à l'itération 10

À chacune des itérations, les éléments calculés sont :

- La probabilité de l'observation i d'appartenir à l'un des deux modes, ce qui se calcule avec (4.38)
- Les paramètres du mélange sont mis à jour de manière à faire croître la vraisemblance. Ils sont calculés à partir des formules établies en (4.41).

L'algorithme est stoppé lorsque la croissance de la vraisemblance est inférieure à un seuil. Ce seuil est fixé expérimentalement à $\varepsilon = 10^{-8}$. Les paramètres du mélange gaussien sont finalement :

$$\begin{cases} \tau = 0.37 \\ \mathbf{m}_1 = (-0.49 \quad -0.29)^T, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.11 \\ 0.11 & 0.81 \end{pmatrix} \\ \mathbf{m}_2 = (0.16 \quad 0.04)^T, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0.48 & -0.10 \\ -0.10 & 0.15 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.45)$$

En Figure 43, la vraisemblance est estimée pour chaque itération de l'algorithme EM. À chaque itération la vraisemblance est augmentée, jusqu'à ce que la hausse de devienne faible. Dans notre exemple, la convergence est atteinte au bout de 52 itérations. Le modèle de densité de probabilité de l'accélération dans le plan horizontal est donc déterminé pour l'angle à 0° . À partir de ce premier modèle, l'ensemble des modèles pour les autres angles est obtenu en effectuant une rotation θ des paramètres du modèle :

$$\begin{aligned} f_{accM}(\mathbf{x}, \theta) &= \sum_{k=1}^2 \tau_k \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{R}(\theta) \mathbf{m}_k, \mathbf{R}(\theta) \mathbf{P}_k \mathbf{R}(\theta)^T) \\ &= \sum_{k=1}^2 \tau_k \mathcal{N}(\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{x}, \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k) \end{aligned} \quad (4.46)$$

avec :

- f_{accM} le modèle de distribution de l'accélération
- $\Psi = (\tau_k, \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k)_{1 \leq k \leq 2}$ les paramètres des 2 modes, estimés précédemment
- $\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ la matrice de rotation d'angle θ dans le plan

L'ensemble E_θ des densités est donc déterminé, il est défini par :

$$E_\theta = \{f_{accM}(\mathbf{x}, \theta), \theta \in]-\pi, \pi]\} \quad (4.47)$$

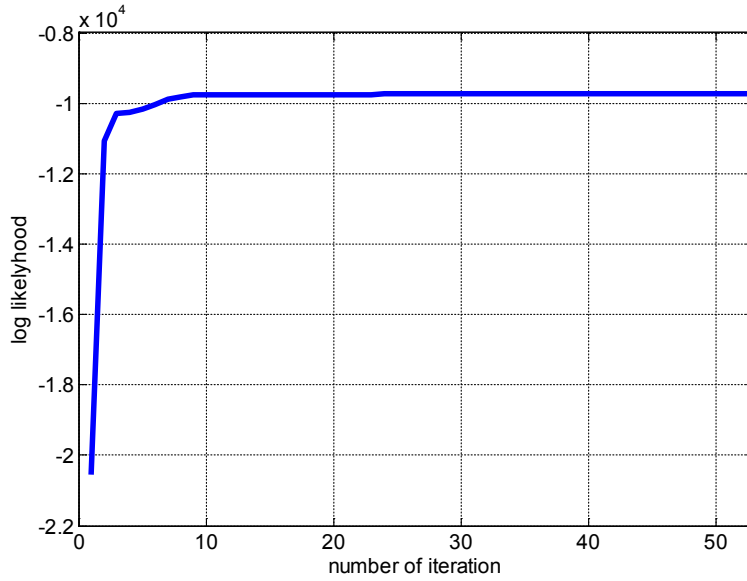


Figure 43: Vraisemblance des paramètres estimés par l'algorithme EM à chaque itération

D.4.3 Estimation de la direction de marche basée sur la minimisation de distances statistiques

Dans cette partie, deux méthodes d'estimation de la direction de marche sont présentées : la maximisation de la vraisemblance et la minimisation de la divergence de Kullback-Leibler. Les observations correspondent aux accélérations durant un cycle de marche, ce qui correspond à une foulée.

D.4.3.1 Méthode 1 : Maximisation de la log-vraisemblance : Max-LogL

D.4.3.1.1 Formulation du problème

La vraisemblance du modèle f_{acc} avec les n observations durant un cycle de marche est donnée par :

$$L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta) = \sum_{i=1}^n \log(f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)) \quad (4.48)$$

L'estimation de la direction de marche consiste donc à maximiser selon θ la vraisemblance (4.48). La solution de notre problème est notée θ_w :

$$\theta_w = \arg \max_{\theta} \left(L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta) \right) \quad (4.49)$$

Le maximum est atteint lorsque la dérivée de la vraisemblance est nulle :

$$\frac{\partial L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.50)$$

L'information de Fisher qui est la métrique de l'espace des paramètres, est donnée par l'espérance de la dérivée au carré de la vraisemblance :

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial \log(f_{accM}(\mathbf{x}, \theta))}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (4.51)$$

Elle correspond à l'inverse de la variance du paramètre θ estimé. Ainsi à partir de cette approche, une confiance peut être donnée à l'estimation.

D.4.3.1.2 Résolution du maximum de log-vraisemblance par la méthode de Newton

Pour résoudre le problème (4.49), nous proposons la méthode de Newton appliquée à la dérivée de la log-vraisemblance. Cette dernière se calcule facilement :

$$\frac{\partial L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\partial f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)}{\partial \theta} \right)}{f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)} \quad (4.52)$$

avec :

- $\frac{\partial f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)}{\partial \theta} = - \sum_{k=1}^2 \left(\frac{d\mathbf{R}(\theta)^T}{d\theta} \mathbf{x}_i \right)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{x}_i - \mathbf{m}_k) f_k(\mathbf{x}_i, \theta)$
- $f_k(\mathbf{x}_i, \theta) = \tau_k \mathcal{N}(\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{x}_i, \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k)$
- $\frac{d\mathbf{R}(\theta)}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$ la dérivée de $\mathbf{R}$ suivant θ

La méthode de Newton permet la recherche des zéros d'une fonction f en calculant sa dérivée. L'idée de la méthode de Newton est de construire une suite qui va converger vers un zéro de la fonction f . La suite issue de la méthode de Newton est définie de la manière suivante :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (4.53)$$

Les conditions pour appliquer la méthode, sont que la dérivée de f existe et soit non nulle et aussi que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartienne au domaine de définition de f . Une illustration de la méthode est proposée en Figure 44. La courbe bleue représente la fonction f pour laquelle on cherche le zéro noté x^* et les droites rouges correspondent aux tangentes de f .

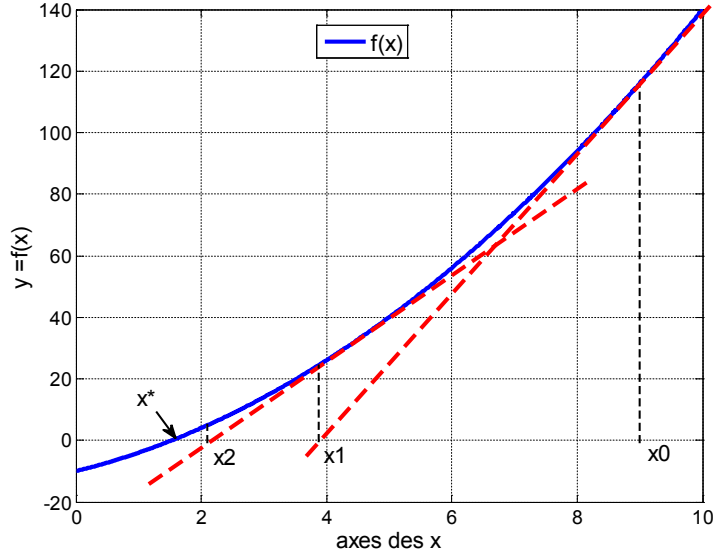


Figure 44: Illustration de la méthode de Newton

Dans le cas présent, il faut calculer la dérivée seconde de la vraisemblance. Cette dernière est définie par :

$$\frac{\partial^2 L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta)}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\partial^2 f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)}{\partial \theta^2} \right)}{f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)} - \left(\frac{\left(\frac{\partial f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)}{\partial \theta} \right)}{f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)} \right)^2 \quad (4.54)$$

avec :

$$\begin{aligned} - \quad \frac{\partial^2 f_{accM}(\mathbf{x}_i, \theta)}{\partial \theta^2} &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x}_i, \theta)}{\partial \theta^2}, \quad f_k(\mathbf{x}_i, \theta) \text{ est défini en (4.52)} \\ \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x}_i, \theta)}{\partial \theta^2} &= \left(\left(\frac{d\mathbf{R}(\theta)^T}{d\theta} \mathbf{x}_i \right)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{x}_i - \mathbf{m}_k) \right)^2 f_k(\mathbf{x}_i, \theta) \\ - \quad &+ (\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{x}_i)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{x}_i - \mathbf{m}_k) f_k(\mathbf{x}_i, \theta) \\ &- \left(\frac{d\mathbf{R}(\theta)^T}{d\theta} \mathbf{x}_i \right)^T \mathbf{P}_k^{-1} \left(\frac{d\mathbf{R}(\theta)^T}{d\theta} \mathbf{x}_i \right) f_k(\mathbf{x}_i, \theta) \end{aligned}$$

En appliquant la méthode de Newton à la recherche du maximum de vraisemblance, l'objectif est de retrouver un zéro de sa dérivée (4.52). À partir de plusieurs valeurs initiales d'angle noté θ_0 , le calcul de l'angle suivant est identique à (4.53) :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{\frac{\partial L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta_k)}{\partial \theta}}{\frac{\partial^2 L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta_k)}{\partial \theta^2}} \quad (4.55)$$

Le calcul est arrêté lorsque les variations d'angle et de log-vraisemblance sont faibles :

$$\left. \begin{array}{l} |\theta_{k+1} - \theta_k| < \varepsilon_1 \\ \left| \frac{L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta_{k+1}) - L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta_k)}{L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta_k)} \right| < \varepsilon_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\theta}_w = \theta_{k+1} \quad (4.56)$$

avec :

- $\hat{\theta}_w$ la direction de marche estimée
- $L(\theta_k)$ la log-vraisemblance de l'angle θ_k
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ les seuils de convergence

Les seuils de convergence sont fixés expérimentalement : $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ radians, $\varepsilon_2 = 10^{-4}$. La méthode de Newton permet de retrouver un extrémum uniquement local. La méthode est alors appliquée plusieurs fois à partir d'autres valeurs initiales. C'est expérimentalement que le nombre de valeurs initiales est fixé : 4 dans notre cas. Cette méthode peut être coûteuse en coûts de calcul. Il est possible de réduire nos calculs en se limitant à la dérivée 1^{ère} :

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \gamma_i \text{sign} \left(\frac{\partial L((\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}, \theta_k)}{\partial \theta} \right) \quad (4.57)$$

avec γ_i le pas de la recherche de maximum. Ce dernier est constant tant que le signe de la dérivée de la log-vraisemblance l'est, puis il est diminué jusqu'à un seuil (par exemple jusqu'à 0.5° en angle) à chaque fois que le signe de la dérivée change.

D.4.3.2 Méthode 2 : Minimisation de la divergence de Kullback-Leibler

D.4.3.2.1 Explication de l'approche et préliminaires

Soit deux densités de probabilité notées f_{accM} et $\hat{f}_{acc}$. La densité f_{accM} est le modèle de densité obtenu en D.4.2, paramétré par θ . La densité $\hat{f}_{acc}$ représente la distribution des observations. L'idée de notre approche est de retrouver le modèle le plus proche de cette densité, ce qui revient à estimer l'angle θ qui minimise la divergence statistique entre les deux densités. La mesure de divergence utilisée est la divergence de Kullback-Leibler (divergence K-L) introduite en chapitre 2. La divergence du modèle f_{accM} par rapport aux observations $\hat{f}_{acc}$ est donnée par la formule:

$$D_{KL}(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \| f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)) = \int_{\mathbf{x} \in S_x} \hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \log \left(\frac{\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})}{f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)} \right) d\mathbf{x} \quad (4.58)$$

avec S_x le support des distributions, correspondant à l'ensemble de définition des accélérations.

Le problème est de déterminer l'angle θ qui minimise la divergence (4.58). Ce problème s'écrit :

$$\theta_w = \arg \min_{\theta} \left(D_{KL}(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \| f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)) \right) \quad (4.59)$$

Pour estimer la divergence, plusieurs éléments préliminaires sont nécessaires :

- Un support S_x qui est un maillage discret de l'espace, où sont définies les densités de probabilité
- À partir d'une série d'observations $(\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$, il faut estimer la densité de probabilité $\hat{f}_{acc}$ modélisant la dispersion sur le support S_x

Pour notre cas $S_x \subset \mathbb{R}^2$, il représente l'espace des accélérations de la main. Ces dernières étant limitées en norme, S_x est donc borné. Pour l'activité Texting, le support est limité aux accélérations inférieures à 3m/s^2 , pour l'activité Swinging le support est limité à 10m/s^2 . Le support est défini par un ensemble de N points uniformément répartis dans l'espace délimité: $S_x = (\mathbf{x}_k)_{1 \leq k \leq N}$.

L'estimation de la densité des observations $\hat{f}_{acc}$ est une première problématique. La méthode utilisée est une méthode non paramétrique d'estimation des densités [84], basée sur les noyaux. Le noyau choisi est un noyau gaussien. Une illustration de la densité estimée à partir des mesures d'accélération est proposée en Figure 45 :

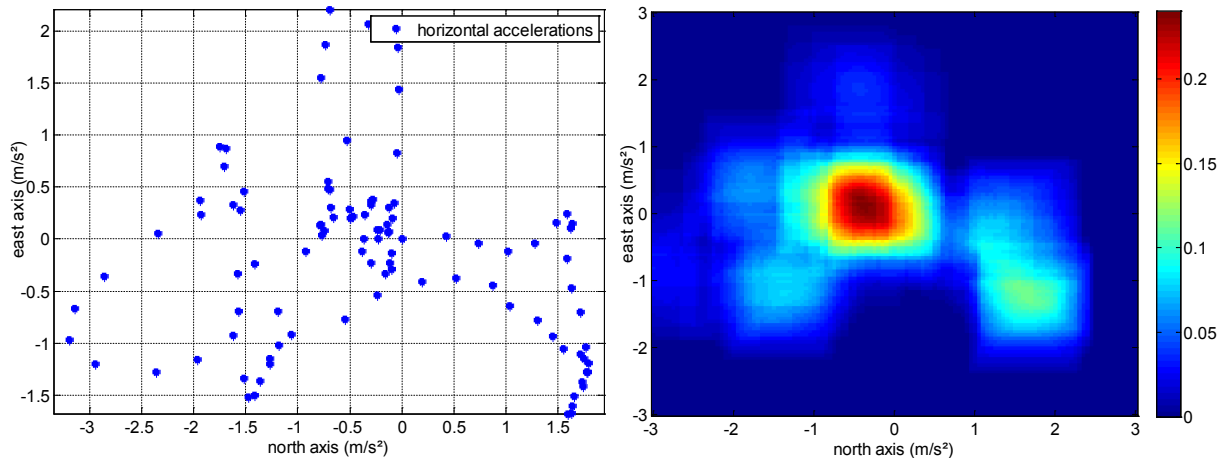


Figure 45: À Gauche: accélérations mesurées durant une foulée - À droite: densité estimée associée à ces mesures

À chaque foulée une densité est estimée, elle est définie sur le support S_x :

$$\hat{f}_{acc} = (p_k)_{1 \leq k \leq N} \quad (4.60)$$

avec p_k la valeur en $\mathbf{x}_k$ de la densité $\hat{f}_{acc}$.

D.4.3.2.2 Minimisation de la divergence de Kullback-Leibler

La minimisation de la divergence statistique par minimisation de la divergence de Kullback-Leibler est un problème identique à la maximisation de la vraisemblance. Cette équivalence est démontrée dans ce paragraphe. La divergence statistique (4.58) se développe de la manière suivante :

$$\begin{aligned} D_{KL}(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \parallel f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)) \\ &= \int_{\mathbf{x} \in S_x} \hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \log \left(\frac{\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})}{f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{x} \in S_x} \hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \log(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \int_{\mathbf{x} \in S_x} \hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \log(f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.61)$$

La divergence K-L se décompose donc en deux parties :

$$D_{KL}(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \| f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)) = -E(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})) - L(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}), \theta) \quad (4.62)$$

La première partie est correspond à l'entropie de $\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})$ (à un signe près),

$$E(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})) = - \int_{\mathbf{x} \in S_x} \hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \log(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (4.63)$$

La seconde partie de la divergence correspond une vraisemblance du modèle f_{accM} par rapport aux observations $\hat{f}_{acc}$:

$$L(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}), \theta) = \int_{\mathbf{x} \in S_x} \hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \log(f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)) d\mathbf{x} \quad (4.64)$$

Puisque l'entropie de $\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})$ ne dépend pas de θ , le minium de la divergence K-L est le maximum de la vraisemblance définie en (4.64) :

$$\begin{aligned} \theta_w &= \arg \min_{\theta} \left(D_{KL}(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \| f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)) \right) \\ &= \arg \max_{\theta} \left(L(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}), \theta) \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

D.4.3.2.3 Maximisation de la vraisemblance pondérée

Le problème (4.65) est donc identique à D.4.3.1. La résolution de ce problème peut être réalisée par une descente de gradient :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{\frac{\partial L(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}), \theta_k)}{\partial \theta}}{\frac{\partial^2 L(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}), \theta_k)}{\partial \theta^2}} \quad (4.66)$$

Les modèles sont supposés réguliers, ce qui permet d'invertir les symboles dérivée et somme. La dérivée première de la vraisemblance devient :

$$\frac{\partial L(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}), \theta_k)}{\partial \theta} = \int_{\mathbf{x} \in S_x} \hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \left(\frac{\left(\frac{\partial f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} \right)}{f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)} \right) d\mathbf{x} \quad (4.67)$$

Puis la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 L(\hat{f}_{acc}(\mathbf{x}), \theta_k)}{\partial \theta^2} = \int_{\mathbf{x} \in S_x} \hat{f}_{acc}(\mathbf{x}) \left(\frac{\left(\frac{\partial^2 f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^2} \right)}{f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)} - \left(\frac{\left(\frac{\partial f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} \right)}{f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)} \right)^2 \right) d\mathbf{x} \quad (4.68)$$

Avec $\frac{\partial f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 f_{accM}(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^2}$ définie en (4.52) et (4.54). Le processus d'estimation de l'angle θ est donc strictement identique à D.4.3. La différence réside juste sur la pondération apportée par $\hat{f}_{acc}(\mathbf{x})$.

D.4.4 Conclusions

Trois éléments clés sont répertoriés pour l'approche statistique:

- Pour une activité donnée, un ensemble de modèles statistiques dépendant de la direction de marche est définie D.4.2.
- À partir d'une série d'accélérations mesurées, la vraisemblance du paramètre θ est maximisée pour donner une estimation de la direction de marche.
- Les données utilisées pour l'apprentissage et les observations sont normalisées afin d'être comparables

Par rapport aux autres méthodes, notre approche présente plusieurs avantages. Elle permet la prise en compte de la dimension aléatoire des mouvements de la main. La modélisation de l'accélération se base sur l'analyse biomécanique développée en D.2, avec un modèle composé de deux modes, correspondant aux accélérations de la phase d'appui et celles proches de 0. La seconde méthode développée, basée sur la minimisation de la divergence K-L est une généralisation de la première méthode. Il a été vu que minimiser la divergence K-L revient à maximiser une vraisemblance pondérée. Cependant, la minimisation de la divergence K-L permet de mettre en place une estimation de la direction de marche plus robuste via la pondération.

Chapitre E. Évaluations expérimentales

E.1 Estimation de l'orientation de la centrale inertielle en salle de capture de mouvements

E.1.1 Cadre de l'expérimentation

Objectifs : Le but de ces expérimentations est de comparer différentes approches d'estimation de l'orientation. Trois approches sont traitées. La première approche est basée sur l'hypothèse de mesure des champs terrestres, le filtre est l'AEKF. La deuxième approche est basée sur l'utilisation de phases de champs quasi statiques, MAGYQ. La troisième approche est aussi basée sur l'utilisation de phases de champs quasi statiques, mais avec une prise en compte de l'influence des estimations passées, Delay-MAGYQ.

Matériel de référence : Afin de qualifier et quantifier les erreurs d'estimation des algorithmes, un système de référence angulaire doit être utilisé. Ainsi, l'expérience a lieu dans une salle de capture de mouvement équipée de caméras qui permettent le suivi en position et en orientation de marqueurs optiques, le système utilisé est décrit en [68]. Ces marqueurs optiques sont disposés à souhait. Pour obtenir l'orientation de référence de la centrale inertielle, un ensemble de marqueurs optiques est rigidement attaché à cette dernière, comme illustré en Figure 46. La petite taille de la salle de capture de mouvement, qui confère une bonne précision au système optique, ne permet pas de simuler la marche sur le sol. En effet, la scène filmée par les caméras est inférieure à 9m². Un tapis roulant est alors utilisé pour simuler la marche. Nous sommes cependant conscients que la marche sur tapis roulant diffère de celle en conditions réelles. La surface du sol, la vitesse imposée, la taille du tapis roulant et son environnement, le « sur-place » dans le référentiel de navigation sont autant d'éléments qui séparent la marche du piéton de la marche en tapis roulant, mais cette approche permet déjà de bien quantifier les apports des différents algorithmes d'estimation de l'orientation de la centrale inertielle dans la main.



Figure 46: Marqueurs optiques attachés IMMU (ULISS)

Équipement porté par le piéton : 4 sujets ont participé à cette expérience : S1, S2, S3 et S4. Ils portent à la main une centrale inertielle et magnétique. Deux centrales inertielles sont utilisées : l'ADIS 16488 d'Analog device [57] et ULISS (*Ubiquitous Localization with Inertial Sensors and Satellite*). Le boîtier ULISS comprend une centrale inertielle de VectorNav, il s'agit de la VN-300 dont les caractéristiques sont décrites en [87].

E.1.2 Scénarii

Trois scénarii sont proposés :

Marche en activité Texting :

Il s'agit d'une marche sur tapis roulant avec une vitesse fixée à 5 km/h. Le piéton maintient son téléphone portable de manière « relativement » fixe. Pour les 4 personnes, la durée du scénario est d'environ 120 secondes, ce qui correspond à 100-140 foulées.

Marche en activité Swinging :

Là encore, la marche s'effectue sur tapis roulant à 5 km/h. le piéton a les bras ballants lors de la marche. Pour les 4 personnes (les mêmes que pour le scénario Texting), la durée est d'environ 120 secondes.

Marche avec plusieurs activités sur une longue durée :

La marche s'effectue sur tapis roulant durant 13 minutes. La vitesse de marche est comprise entre 1 m/s et 1.7 m/s ce qui correspond à une distance entre 780 m à 1.3 km. Il est demandé au piéton de varier les activités : Texting, Swinging, Phoning, et Irregular

Les mesures inertielles et magnétiques sont fusionnées en post-traitement pour estimer l'orientation de la centrale avec les algorithmes suivants :

- Additive Kalman Filter (AEKF) : le filtre est décrit en Chapitre 3, avec l'hypothèse de mesure des champs terrestre.
- Magnetic, Acceleration Fields and Gyroscope Quaternion (MAGYQ) : Ce filtre exploite les phases statiques du champ magnétique.
- Delay MAGYQ : Il s'agit du même filtre que MAGYQ, avec la prise en compte de l'influence des estimations précédentes utilisées pour estimer le champ de référence.

Plusieurs qualités d'un algorithme d'orientation peuvent être testées :

- La « convergence » correspond à la capacité d'un algorithme à estimer progressivement une orientation proche de la réalité.
- La « vitesse de convergence » correspond à la capacité à obtenir une estimation proche de l'orientation réelle au bout d'une durée. La phase temporelle entre l'instant initial et l'instant où l'algorithme a convergé, est la phase de convergence.
- La « stabilité » correspond à la capacité de l'algorithme d'estimation à estimer au cours du temps une orientation proche de la réalité, après la phase de convergence de l'algorithme.

Plusieurs initialisations de l'orientation pour les algorithmes sont possibles. Elles ont cependant un impact sur le choix de la qualité testée des algorithmes :

- Si l'orientation est initialisée à partir d'une valeur lointaine de la réalité, alors dans un premier temps, c'est la convergence qui est testée.

- Si l'orientation est initialisée à partir d'une valeur proche de la réalité, par exemple à partir de l'estimation du MotionLab, c'est plutôt la stabilité qui est testée.

L'orientation est initialisée de manière à partir de l'estimation du MotionLab. Ce choix d'initialisation est fait afin d'étudier la stabilité des algorithmes par rapport aux mouvements de la main et aux fluctuations de champ magnétique. Les bruits de l'accéléromètre et du magnétomètre sont fixés à 10% du signal total. Le bruit du gyromètre est fixé à partir de la spécification à $0.0035^\circ/\text{s}/\sqrt{\text{Hz}}$. Enfin la variance initiale sur le quaternion est fixée à 10^{-4} .

E.1.3 Résultats

Les résultats des différents algorithmes sont calculés en termes d'erreurs sur les angles d'Euler par rapport à l'estimation du MotionLab. Ils sont analysés selon le scénario. Les grandeurs statistiques décrivant l'erreur sont : la moyenne de la valeur absolue de l'erreur notée μ et l'écart-type de l'erreur noté σ sur l'ensemble d'un scénario, pour l'ensemble des quatre sujets.

E.1.3.1 Scénario Texting

Pour le scénario Texting, les résultats sont présentés au Tableau 1 :

Tableau 1: Résultats de la marche en activité Texting

Algorithms	AEKF		MAGYQ		Delay MAGYQ	
Mean/standard deviation	μ	σ	μ	σ	μ	σ
Roll ($^\circ$)	0,6	0,5	1,8	1,1	1,0	0,9
Pitch ($^\circ$)	1,8	0,6	2,7	1,8	1,6	1,3
Yaw ($^\circ$)	6,7	4,7	6,5	4,4	6,2	4,7

Pour l'ensemble des sujets et des algorithmes, les résultats sont proches, avec au plus 1° d'écart entre les différents algorithmes. En activité Texting, les accélérations externes de la centrale inertielle est relativement faibles par rapport au champ de gravité terrestre,

Figure 47. Ainsi la mesure de l'accéléromètre est une bonne observation du champ de gravité dans le référentiel body. Par conséquent, les angles roll et pitch sont relativement bien estimés pour tous les algorithmes.

L'estimation de l'angle yaw est significativement moins bonne que pour les deux autres angles. Le champ magnétique est moins stable que le champ d'accélération. Néanmoins son estimation reste bonne avec une erreur de ($\mu=6.7^\circ$; $\sigma=4.7^\circ$) pour l'AEKF, de ($\mu=6.5^\circ$; $\sigma=4.4^\circ$) pour MAGYQ et de ($\mu=6.2^\circ$; $\sigma=4.7^\circ$) pour Delay-MAGYQ. La qualité de cette estimation est due au fait que le champ magnétique local est relativement stable et proche du champ magnétique terrestre. Cette proximité entre les deux champs est mise en évidence sur la

Figure 48, qui correspond à la différence du champ magnétique local estimé à partir des mesures du magnétomètre projetées à l'aide de l'orientation estimée par le MotionLab.

Dans ce scénario, les conditions de champ magnétique et les faibles amplitudes des mouvements expliquent la bonne qualité de l'estimation de l'orientation pour l'ensemble des algorithmes.

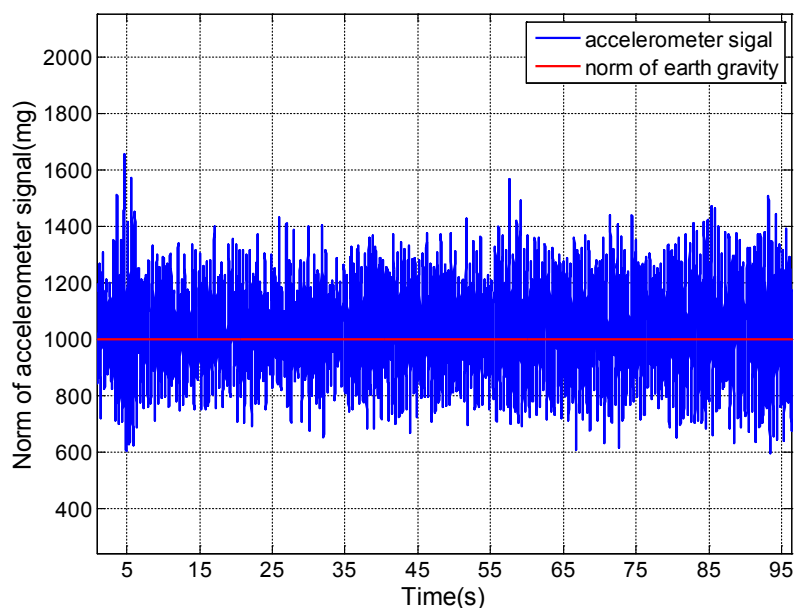


Figure 47: Norme du signal de l'accéléromètre en Texting pour S1

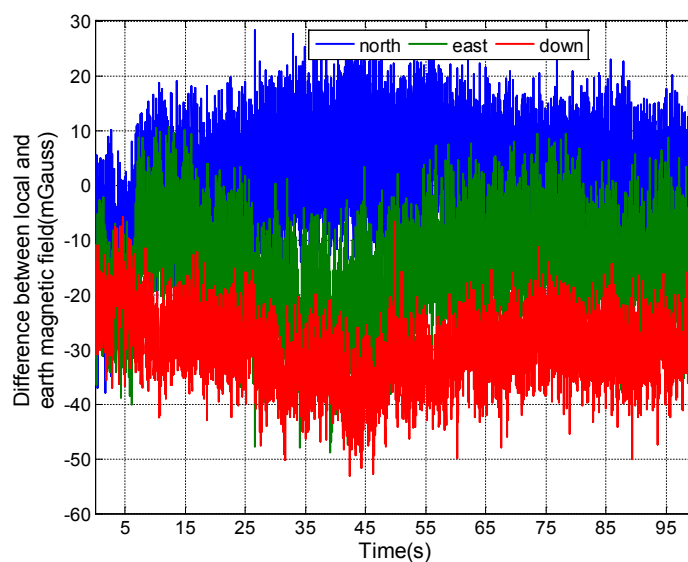


Figure 48: Différence entre les champs magnétiques, l'un local et l'autre terrestre, en Texting pour S1

E.1.3.2 Scénario Swinging

Les résultats du scénario Swinging sont résumés dans le Tableau 2 pour l'ensemble des quatre sujets.

Tableau 2: Résultats de la marche en activité Swinging

Algorithms	AEKF		MAGYQ		Delay MAGYQ	
Mean/standard deviation	μ	σ	μ	σ	μ	σ
Roll (°)	5,3	14,0	5,0	12,0	3,2	5,3
Pitch (°)	3,8	6,0	3,8	5,0	4,1	5,1
Yaw (°)	24,4	10,6	21,3	9,3	19,0	8,6

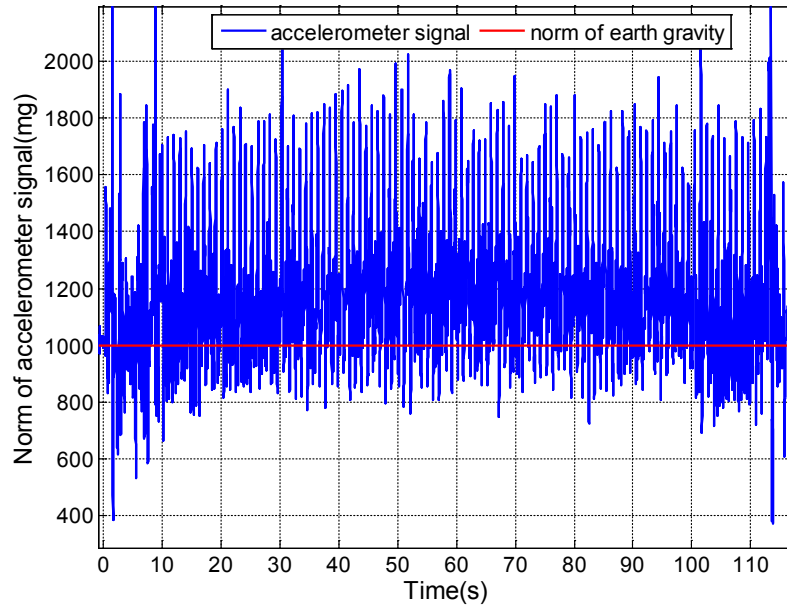


Figure 49: Norme du signal de l'accéléromètre comparée au champ de gravité terrestre, en Swinging pour S1

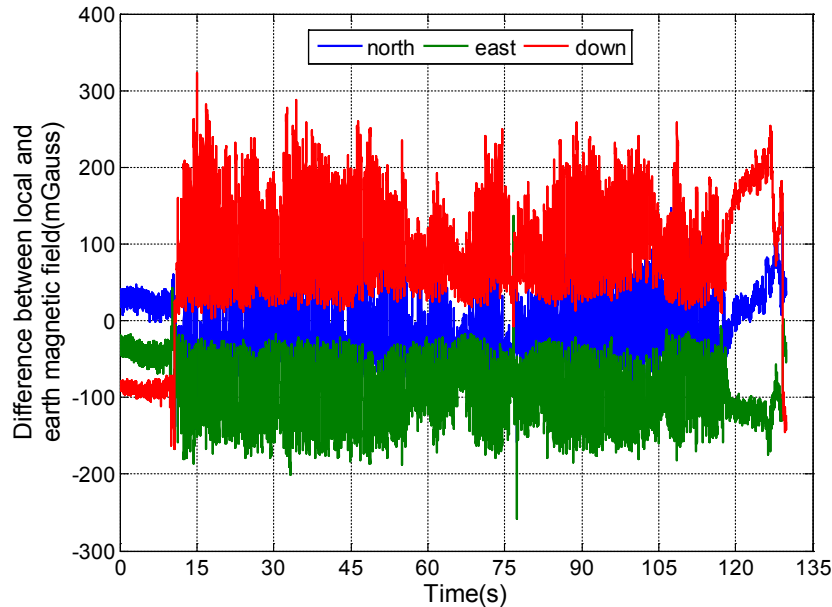


Figure 50: Différence entre les champs magnétiques, l'un local et l'autre terrestre, en Swinging pour S4

Pour l'ensemble des algorithmes, les performances d'estimation d'orientation sont moins bonnes rapport au scénario Texting : sur l'angle yaw, les erreurs ont une augmentation significative de 13°-18° selon les algorithmes. Les deux éléments expliquant les erreurs plus grandes sont les accélérations externes Figure 49 et les variations magnétiques importantes Figure 50.

Les mouvements de la main en phase d'oscillations produisent des accélérations externes non négligeables devant le champ de gravité terrestre. Ces accélérations propres affectent en particulier l'estimation du roll et du pitch. Ainsi, les erreurs moyennes pour ces deux rotations augmentent de 2° - 4° par rapport au scénario Texting. La différence est encore plus visible sur l'écart-type passant de quelques degrés à plus de 10° pour l'AEKF et MAGYQ.

Durant ce scénario, les quatre sujets ont marché dans des conditions magnétiques très fluctuantes. Une illustration des fluctuations de champ magnétique est proposée en Figure 50. Les fluctuations

du champ magnétique apparaissent en particulier lors des phases de balancier du bras. Dans ce cas, la centrale inertielle et magnétique s'éloigne puis se rapproche des éléments ferromagnétiques émettant un champ magnétique. Par conséquent, l'estimation de l'angle yaw est alors relativement mauvaise. Les fluctuations magnétiques influent aussi l'estimation du roll et du pitch, notamment pour l'AEKF avec une erreur sur le roll : ($\mu=5.3^\circ$; $\sigma=14.0^\circ$) et pour MAGYQ ($\mu=5.0^\circ$; $\sigma=12.0^\circ$).

Cependant des disparités appariassent suivant les algorithmes. L'algorithme Delay-MAGYQ présente les meilleures performances moyennes en termes d'erreurs angulaires et en écart-type ($\mu=19.0^\circ$; $\sigma=8.6^\circ$) par rapport à l'AEKF ($\mu=24.4^\circ$; $\sigma=10.6^\circ$). L'AEKF garde continuellement le champ magnétique terrestre comme champ de référence. Or le champ mesuré par le magnétomètre est éloigné du champ terrestre. En Figure 50, la différence entre le champ magnétique local et le champ magnétique terrestre est illustrée. Les différences sont notables par rapport aux 473 mGauss du champ terrestre. Les approches en quasi statiques permettent d'obtenir un champ de référence plus proche du champ local réel.

Pour le filtre Delay-MAGYQ, la variance de l'innovation prend en compte la variance du champ de référence estimé. Pour l'algorithme MAGYQ ($\mu=21.3^\circ$; $\sigma=9.3^\circ$), cette variance n'est pas prise en compte, le filtre est donc plus sensible aux variations de champ magnétiques.

E.1.3.3 Scénario non supervisé

Les erreurs d'orientation et leurs statistiques correspondantes sont détaillées en Tableau 3. Les erreurs sur le yaw, angle principalement affecté par la mesure du magnétomètre, sont illustrées en Figure 51. À l'instar du scénario Swinging, les meilleurs résultats sont fournis par Delay-MAGYQ avec les erreurs suivantes sur le yaw ($\mu=8.2^\circ$; $\sigma=9.8^\circ$). Les erreurs sur le roll et pitch sont comparables pour toutes les méthodes.

Pour le yaw, l'influence de l'environnement magnétique est prépondérante. Avec un nombre important de dispositifs induisant un champ magnétique, le magnétomètre mesure un champ local composé du champ magnétique terrestre et de la résultante des perturbations magnétiques externes, Figure 52.

Tableau 3: Erreurs d'orientation pour le scénario non supervisé

Algorithms	AEKF		MAGYQ		Delay MAGYQ	
Mean/standard deviation	μ	σ	μ	σ	μ	σ
Roll ($^\circ$)	5.8	7.4	6.0	8.8	5.0	8.5
Pitch ($^\circ$)	2.0	2.6	3.9	4.2	3.3	3.3
Yaw ($^\circ$)	18.1	8.6	11.3	10.2	8.2	9.8

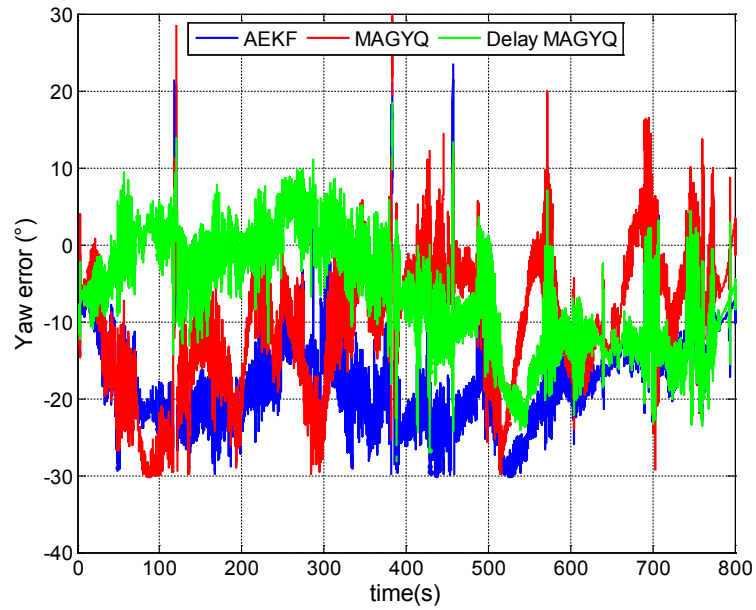


Figure 51: Erreurs d'estimation de l'angle yaw pour les 3 filtres d'estimation

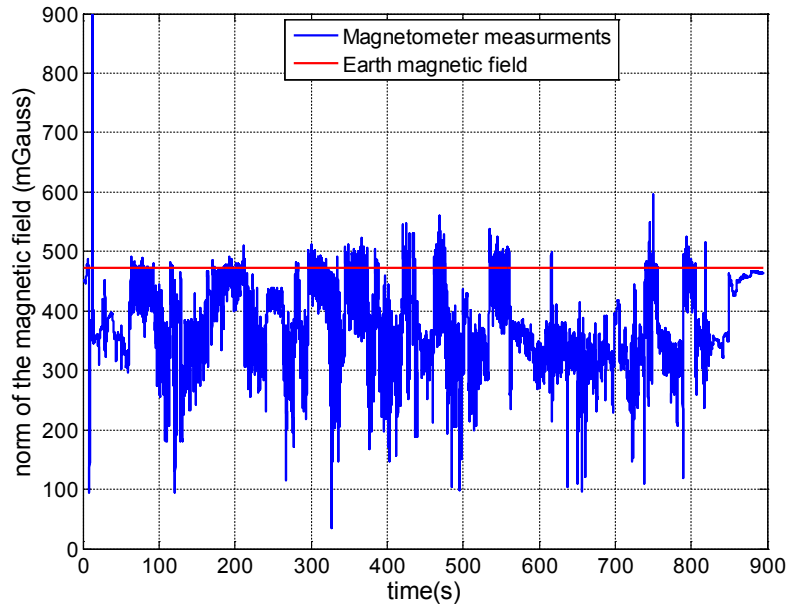


Figure 52: Comparaison de la norme du champ magnétique terrestre par rapport aux mesures

E.1.4 Conclusions

Cette expérimentation fournit plusieurs enseignements :

- L'utilisation d'un champ de référence adapté aux phases quasi statiques permet de limiter les erreurs en orientation.
- Pour le champ de référence, la prise en compte de l'influence des estimations passées permet d'affiner la confiance qu'il lui est accordé et par conséquent d'améliorer l'estimation de l'erreur.

E.2 Estimation de la direction de marche en salle de capture de mouvements

E.2.1 Description de l'expérimentation

- La salle de capture de mouvements (MotionLab) permet d'obtenir les positions et orientations de référence. Un ensemble de marqueurs optiques est situé sur la centrale inertielle afin d'obtenir la référence en orientation.
- Des marqueurs sont situés sur les pieds des personnes afin d'estimer les instants de pas.
- Deux centrales inertielles et magnétiques ont été utilisées : ADIS 16488 et ULISS.
- La marche est effectuée sur tapis roulant. Les personnes sont entraînées avec ce matériel. La direction de marche de référence est donc la direction du tapis roulant, elle reste fixe durant l'expérimentation. Pour la calculer, deux marqueurs optiques sont placés sur l'axe du tapis roulant, ce qui permet d'estimer directement la direction de cet axe et donc la direction de marche.
- Les accélérations et vitesses de rotation sont obtenues à partir des mesures de l'accéléromètre et du gyromètre projetées dans le référentiel de navigation à partir des mesures d'orientation du MotionLab.
- 5 personnes ont participé à l'expérimentation. 4 hommes et 1 femme notés : M1, W1, M2, M3, M4.
- Les directions de marche sont calculées sur des fenêtres temporelles identiques pour toutes les méthodes. Elles correspondent à une foulée.

Les méthodes testées sont :

- l'analyse par composante principale (**PCA**),
- la corrélation entre les mesures et les modèles sur l'accélération (**FLAM**)
- l'analyse fréquentielle de l'accélération (**FIS**)
- la log-vraisemblance entre les mesures et un modèle sur l'accélération (**Max-LogL**).

La PCA est utilisée de différentes manières. Un descriptif des sous-méthodes de la PCA est proposé, Tableau 4. Une case contenant le symbole × signifie que la mesure inertielle est prise en compte sinon elle ne l'est pas. Enfin, l'utilisation des phases d'appuis du pied au sol signifie qu'une pondération est appliquée aux accélérations durant cette phase.

Tableau 4: Récapitulatif des mesures inertielles utilisées pour la PCA

Nom des Méthodes	Accélérations horizontales	Accélérations en dimension 3	Vitesses de rotation horizontales	Vitesses de rotation en dimension 3	Utilisation des phases d'appuis du pied
PCA acc 2d	×				
PCA acc 3d		×			
PCA omega 3d			×		
PCA omega 3d				×	
PCA-Walk-Cycle	×				×

E.2.2 Critères de performance

Pour chaque méthode, une estimation de la direction de marche est obtenue. Cette dernière est comparée à la référence. Trois éléments statistiques sont utilisés pour quantifier l'erreur d'estimation, notés performances par la suite. Ce sont la moyenne de la valeur absolue de l'erreur notée μ , l'écart-type noté σ , ainsi que le pourcentage de valeurs supérieures à 20° noté $\%>20^\circ$, ce pourcentage correspond à un indicateur du nombre de valeurs aberrantes.

Deux variabilités sont définies au niveau des individus. La première variabilité est variabilité interindividuelle, il s'agit des fluctuations lorsqu'on observe un groupe d'individu. La seconde variabilité est la variabilité intra individuelle, il s'agit des fluctuations que l'on observe pour un même individu.

E.2.3 Scénario *Swinging*

E.2.3.1 Description du scénario *Swinging*

Le premier scénario correspond à l'activité *Swinging*. Le but de cette première expérimentation est de quantifier et observer des variabilités suivant les personnes et la vitesse de marche. W1, M1, M2, M3 et M4 ont participé à ce test. Différentes vitesses de marche ont été fixées à partir du tapis roulant : 3.6 km/h, 5 km/h et 5.8km/h. La durée de marche pour chacune des vitesses oscille entre 30 et 150 secondes selon les personnes. Le nombre de foulées correspondantes est donné dans le Tableau 5.

Tableau 5: Nombres de foulées pour lesquelles la direction de marche est estimée

Personnes	3.6 km/h	5 km/h	5.8 km/h
M1	21	24	27
W1	30	28	33
M2	120	100	100
M3	126	185	150
M4	135	110	110

E.2.3.2 Résultats

Les résultats globaux de toutes les méthodes sont présentés dans le Tableau 6 :

Tableau 6: Résultats de l'estimation de la direction de marche pour le scénario *Swinging*

Méthode	μ	σ	$\% > 20^\circ$
PCA acc 2d	10.0°	7.3°	4.0%
PCA acc 3d	10.3°	8.5°	5.3%
PCA omega 2d	11.2°	13.3°	13.2%
PCA omega 3d	13.0°	15.4°	22.3%
FLAM	12.9°	10.5°	17.5%
FIS	11.3°	7.7°	9.5%
Max-LogL	8.8°	7.4°	3.7%

E.2.3.2.1 PCA

PCA sur l'accélération : Les meilleurs résultats sont issus de l'accélération projetée dans le plan horizontal avec une erreur de ($\mu=10.0^\circ$; $\sigma=7.3^\circ$) et seulement 4% des estimations erronées de plus de 20° . La PCA peut cependant s'appliquer à l'accélération en 3 dimensions, en choisissant l'axe de dispersion maximale comme estimation de la direction de marche, avec une erreur de ($\mu=10.3^\circ$; $\sigma=8.5^\circ$)

PCA sur la vitesse de rotation : Cette méthode permet d'obtenir une estimation de la direction latérale, donc par suite de la direction de marche. L'erreur moyenne, l'écart-type et le nombre de valeurs aberrantes sont en revanche plus importants par rapport à l'estimation utilisant l'accélération avec ($\mu=11.2^\circ$; $\sigma=13.3^\circ$) et ($\mu=13.0^\circ$; $\sigma=15.4^\circ$) d'erreur.

Les variabilités : Des différences significatives apparaissent suivant les individus. Ainsi pour l'individu M4, l'estimation utilisant les vitesses angulaires fournit des résultats médiocres par rapport à l'individu M3 : avec ($\mu=13.5^\circ$; $\sigma=14.5^\circ$) par rapport aux ($\mu=5.5^\circ$; $\sigma=7.0^\circ$) de M1. La vitesse a une influence plus limitée par rapport aux variations interindividus : ($\mu=10.7^\circ$; $\sigma=9.2^\circ$) d'erreur à 3.6 km/h, et ($\mu=9.4^\circ$; $\sigma=5.8^\circ$) à 5.8 km/h.

Une illustration de la répartition des erreurs d'estimation pour la PCA sur l'accélération en 2D est proposée en Figure 53. Un mode est observable aux alentours de 13° . L'explication de ce mode provient de la présence d'un léger mouvement de la main vers l'intérieur du piéton durant le mouvement de balancier du bras. Une illustration de ce phénomène est proposée en Figure 54.

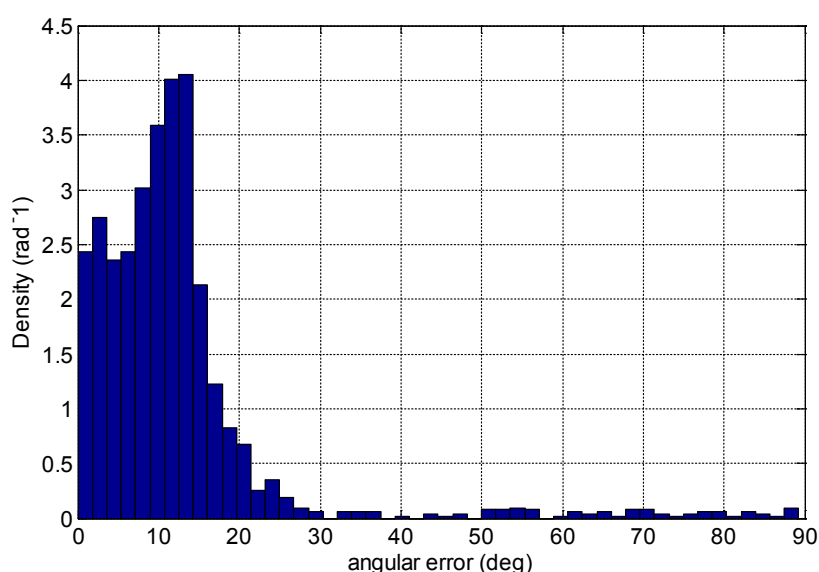


Figure 53: Histogramme des erreurs angulaires pour la PCA sur l'accélération projetée dans le plan horizontal

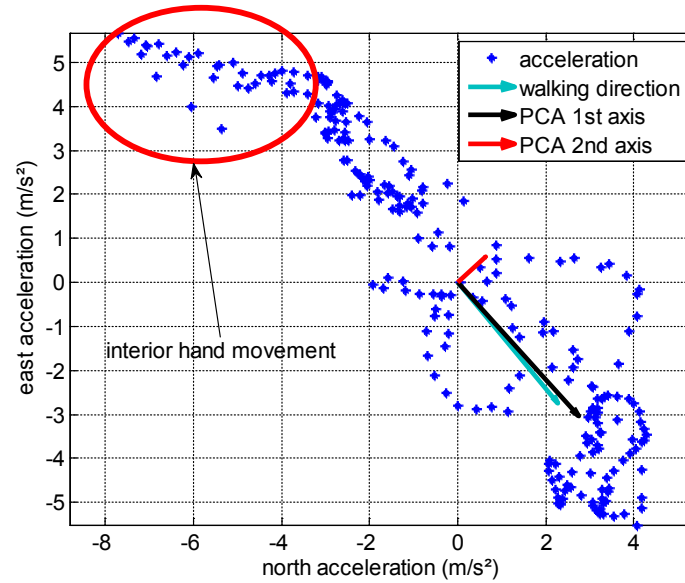


Figure 54: Illustration du mouvement vers l'intérieur de la main en Swinging

E.2.3.2.2 FLAM

Performances : Cette méthode d'estimation présente les résultats globaux les plus erronés en termes d'erreur moyenne, avec ($\mu=12.9^\circ; \sigma=10.5^\circ$). Cette plus grande erreur est due à la variabilité des mesures. Bien que les oscillations de la main soient un phénomène répétitif, il y a des variations qui ne sont pas prises en compte dans cette modélisation temporelle. Enfin, le déphasage entre le modèle et les mesures est un élément qui limite les performances de cette méthode.

Variabilités : Le modèle utilisé est appris à partir d'une vitesse de 5 km/h. Ainsi pour l'individu M3, l'erreur moyenne passe de ($\mu=15.5^\circ ; \sigma=13.9^\circ$) à 3.6 km/h, à ($\mu=11.7^\circ \sigma=7.3^\circ$) à 5 km/h. L'ensemble des erreurs est présenté sous forme d'histogramme en Figure 55. Une variabilité selon les individus est aussi observée : ($\mu=4.9^\circ ; \sigma=4.7^\circ$) d'erreur moyenne pour M1 et ($\mu=14.6^\circ ; \sigma=5.9^\circ$) pour M3.

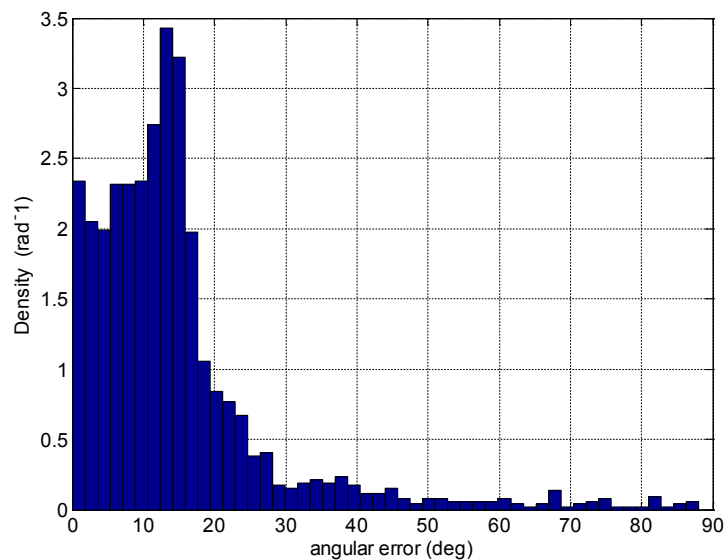


Figure 55: Histogramme des erreurs angulaires pour FLAM

E.2.3.2.3 FIS

Performances : L'estimation de la direction de marche par analyse fréquentielle présente de meilleurs résultats que la méthode précédente. ($\mu=11.3^\circ$; $\sigma=7.7^\circ$). L'écart-type est relativement petit. La densité des erreurs est illustrée en Figure 56, L'estimation de la direction de marche a été effectuée sur l'accélération suivant la fréquence de foulée [74]. La puissance du signal est maximale et largement dominante suivant cette fréquence. La distribution des erreurs est illustrée en Figure 56.

Variabilités : La vitesse impacte faiblement les résultats, avec des erreurs moyennes de ($\mu=11.5^\circ$; $\sigma=8.4^\circ$) à 3.6 km/h et de ($\mu=11.8^\circ$; $\sigma=8.4^\circ$) à 5 km/h. La variabilité interindividuelle est prédominante : ($\mu=13.7^\circ$; $\sigma=6.4^\circ$) d'erreur moyenne pour M3 et ($\mu=2.9^\circ$; $\sigma=2.3^\circ$) seulement pour M1.

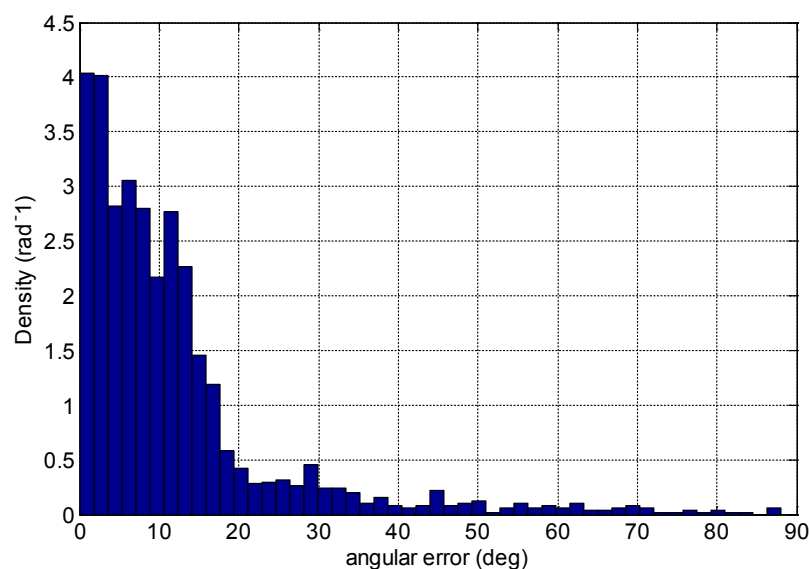


Figure 56: Histogramme des erreurs angulaires pour FIS sur l'accélération

E.2.3.2.4 Max-LogL

Performances : Il s'agit de la méthode présentant les meilleures performances en termes d'erreur moyenne avec ($\mu=8.8^\circ$; $\sigma=7.4^\circ$) et en termes d'erreurs aberrantes avec 3.7%. Avec la prise en compte d'un modèle, ce n'est plus la direction de puissance maximale qui est prise compte, mais la distance par rapport à ce modèle. Ainsi, le mouvement vers l'intérieur du piéton est pris en compte dans le modèle. Cette modélisation statistique permet une amélioration de l'estimation de la direction de marche. Une illustration de la répartition des erreurs est proposée en Figure 57.

Variabilités : Cette méthode semble néanmoins sensible à la vitesse avec une erreur moyenne de ($\mu=11.0^\circ$; $\sigma=9.5^\circ$) à 3.6 km/h, ($\mu=7.3^\circ$; $\sigma=6.2^\circ$) à 5 km/h. Les modèles statistiques ont été appris à partir des données inertielles pour une vitesse de 5 km/h. Une variabilité interindividus est présente : pour M1 l'erreur moyenne est de 3.0° avec 1.3% d'erreurs supérieures à 20° alors que pour M3 l'erreur moyenne est de 11.2° avec 3.2% d'erreur supérieure à 20° .

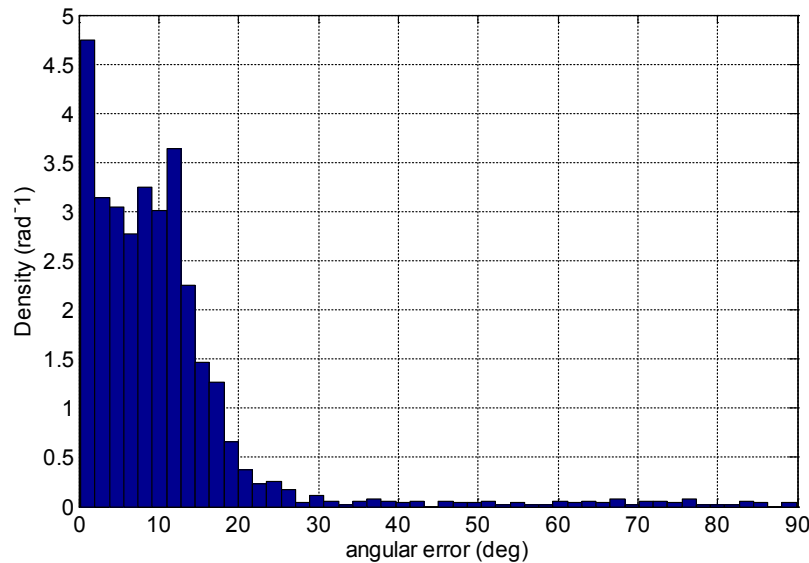


Figure 57: Histogramme des erreurs angulaire pour Max-LogL sur l'accélération

E.2.3.3 Conclusions

Les enseignements fournis par ce scénario sont les suivants :

- L'approche par modélisation statistique fournit les meilleurs résultats.
- La variabilité dominante est la variabilité interindividuelle. L'individu M3 a par exemple un mouvement de balancier des bras naturellement désaligné avec la direction de marche.
- La vitesse de rotation est une mesure exploitable pour l'estimation de la direction de marche.
- Pour presque toutes les méthodes, peu d'estimations sont aberrantes. Le mouvement de balancier de la main est selon une direction proche de la direction de marche.

E.2.4 Scénario Texting

E.2.4.1 Description du scénario

Le second scénario correspond à l'activité Texting. Dans ce scénario, deux éléments ont été testés : la vitesse et différentes orientations du smartphone par rapport au piéton. Les vitesses testées sont 3.6 km/h, 5 km/h et 5.8 km/h pour les individus M2, M3 et M4. Les orientations du smartphone par rapport au piéton sont 0° et 90° pour les individus M1 et W1. Le nombre d'estimations est fourni en Tableau 7.

Tableau 7: Nombre d'estimation par personne

Test	0°	90°	3.6 km/h	5 km/h	5.8 km/h
M1	33	30	×	×	×
W1	36	35	×	×	×
M2	×	×	100	100	90
M3	×	×	120	130	100
M4	×	×	100	100	100

E.2.4.2 Résultats

L'analyse des résultats globaux, qui sont présentés dans le

Tableau 8, permet de formuler les observations générales suivantes.

- L'estimation de la direction de marche est globalement moins bonne pour le scénario Texting que pour le scénario Swinging. Une raison est que les oscillations de la main pour cette activité sont moins importantes en intensité. Le pourcentage d'erreur supérieur à 20° témoigne de l'aspect plus « aléatoire » des mouvements de la main, avec notamment une hausse de 5% à plus de 10% de valeurs aberrantes.
- Des différences de qualité d'estimation apparaissent suivant les différentes méthodes. Les méthodes PCA 2D accélération, PCA Walking Cycle et Max-LogL ont les meilleurs résultats.

La PCA sur la vitesse de rotation fournit les estimations les plus erronées, et ce de manière significative, ce qui conduit à rejeter cette méthode pour l'estimation de la direction de marche lors de l'activité Texting. Enfin la PCA appliquée sur le signal en 3 dimensions de l'accélération produit des résultats mitigés. Le calcul de la direction de marche est variable : pour certains individus et les vitesses les plus importantes, c'est la composante de dispersion maximale, dans les autres cas c'est la seconde composante de dispersion maximale qui permet d'estimer la direction de marche. Les résultats suivants sont détaillés suivant l'orientation relative du smartphone par rapport au piéton, Tableau 9, et suivant les vitesses de marche du piéton Tableau 10.

Tableau 8: Résultats globaux de l'ensemble des tests

Méthode	μ	σ	% >20°
PCA 2d accélération	10.0°	9.4°	10.5%
PCA 3d accélération	16.4°	18.6°	25.8%
PCA Walking Cycle	10.6°	10.1°	12.5%
PCA 2d vitesse angulaire	29.1°	19.2°	65.9%
FLAM	14.9°	15.0°	25.7%
FIS	14.1°	16.4°	23.1%
Max-LogL	9.1°	8.8°	9.6%

Tableau 9: Résultats de l'estimation de la direction de marche suivant différentes orientations du smartphone par rapport au piéton

Angle/méthode	0°			90°		
	μ	σ	% >20°	μ	σ	% >20°
PCA 2d accélération	7.9°	6.5	1.7%	13.9°	10.8°	14.9%
PCA Walking Cycle	6.9°	6.1°	3.3%	7.9°	5.9°	3.0%
FLAM	11.6°	9.5°	18.3%	5.6°	4.3°	0.0%
FIS	11.0°	7.6°	11.7%	11.0°	8.7°	7.5%
Max-LogL	8.3°	7.0°	8.3%	7.5°	6.2°	6.0%

Tableau 10: Résultats de l'estimation de la direction de marche suivant différentes vitesses de marche du piéton

Angle/méthode	3.6 km/h			5 km/h			5.8 km/h		
	μ	σ	% >20°	μ	σ	% >20°	μ	σ	% >20°
PCA 2d accélération	11.5°	9.8°	14.9%	8.8°	7.7°	7.8%	9.4°	10.2°	10.6%
PCA Walking Cycle	12.8°	11.2°	18.0%	10.0°	8.8°	11.4%	10.4°	11.0°	13.3%
FLAM	20.6°	17.8°	39.3%	20.0°	18.7°	37.2%	8.8°	8.3°	6.9%
FIS	20.5°	21.9°	33.7%	13.2°	14.1°	22.6%	9.7°	9.6°	15.3%
Max-LogL	9.9°	10.0°	10.5%	8.7°	9.2°	9.0%	9.1°	8.4°	10.2%

Deux tendances apparaissent à la lecture de ces résultats :

- Premièrement l'estimation de la direction de marche est faiblement sensible à l'orientation du smartphone Tableau 9. La différence n'est pas significative pour une majorité de méthodes. Par exemple, pour la méthode FIS les erreurs passent de ($\mu=11.0^\circ$; $\sigma=7.6^\circ$) à ($\mu=11.0^\circ$; $\sigma=8.7^\circ$).
- Secondement, la vitesse impacte différemment les méthodes, Tableau 10. Par exemple, la méthode Max-LogL, les erreurs passent de ($\mu=9.9^\circ$; $\sigma=10.0^\circ$) pour 3.6 km/h à ($\mu=9.1^\circ$; $\sigma=8.4^\circ$) pour 5.8 km/h. Alors que pour la méthode FLAM, elles passent de ($\mu=20.6^\circ$; $\sigma=17.8^\circ$) pour 3.6 km/h à ($\mu=8.8^\circ$; $\sigma=8.3^\circ$) pour 5.8 km/h.

E.2.4.2.1 PCA

PCA 2D accélération : La méthode présente de bons résultats par rapport aux autres méthodes.

- La qualité des résultats dépend des individus. Ainsi pour M3, l'erreur moyenne est de ($\mu=9.9^\circ$; $\sigma=9.4^\circ$) alors que pour M4 l'erreur est de ($\mu=8.0^\circ$; $\sigma=7.0^\circ$)
- La vitesse affecte peu les résultats. Cependant à faibles vitesses, les mouvements de la main sont plus désordonnés et les accélérations latérales deviennent plus prépondérantes. L'estimation résultante est alors plus erronée à vitesse lente qu'à des vitesses plus grandes.

PCA Walking Cycle : La méthode présente de bons résultats, mais n'apporte pas d'amélioration par rapport à la PCA. Plusieurs explications sont possibles : le nombre d'accélérations et la pondération associée ne sont pas optimaux, les accélérations latérales ne sont pas négligeables sur toute la phase d'appui au sol.

E.2.4.2.2 FLAM

Performances : Cette méthode fournit des résultats globalement moins bons que ceux de la PCA, avec une erreur de ($\mu=14.9^\circ$; $\sigma=15.0^\circ$). Ici, la qualité de l'estimation dépend fortement du modèle. Aussi l'exploitation d'un modèle directement appris à partir des mesures sans passer par une transformée de Fourier pourrait améliorer les résultats, car le modèle se trouve en pratique assez éloigné des observations. Cette méthode est sensible à l'estimation des instants de pas qui peut induire un déphasage entre le modèle et les mesures.

Variabilités : Des variations individuelles sont observées, avec des erreurs faibles pour M1 et importantes pour M2 à 5km/h. Une spectaculaire amélioration de la qualité de l'estimation est visible pour 5.8km/h. L'éloignement du modèle par rapport aux mesures provoque des erreurs

d'estimation très importante. En revanche, lorsqu'elles sont proches, la méthode donne de bons résultats avec 8.8° et 6.9% d'erreurs aberrantes à 5.8 km/h.

E.2.4.2.3 FIS

Performances : Les résultats fournis par cette méthode sont parmi les moins bons avec ($\mu=14.1^\circ$; $\sigma=16.4^\circ$) d'erreur. L'information de direction de marche est semble-t-il aussi contenu dans les autres fréquences du spectre de l'accélération.

Variabilités : Les faibles vitesses dégradent fortement le résultat global avec plus de 20° d'erreur moyenne et plus de 33% d'erreurs supérieures à 20°. L'orientation du smartphone n'a pas d'influence sur l'estimation. Les variabilités interindividuelles sont importantes avec une erreur moyenne de 20.6° pour M2 comparée aux 11.1° d'erreur pour M4.

E.2.4.2.4 Max-LogL

Performances : Cette méthode fournit les meilleurs résultats, avec ($\mu=9.8^\circ$; $\sigma=8.8^\circ$) d'erreur, et 9.6% d'erreurs supérieures à 20°. L'approche statistique confirme son intérêt déjà illustré pour le scénario Swinging. La construction d'un modèle permet de prendre en compte le désalignement entre la direction de marche et l'axe de dispersion maximale.

Variabilités : La vitesse et l'orientation du smartphone par rapport au piéton ne sont pas des facteurs de variabilité significatifs. Ce sont plutôt les individus : ($\mu=7.4^\circ$; $\sigma=7.3^\circ$) d'erreur pour M2 par rapport aux ($\mu=12.0^\circ$; $\sigma=5.8^\circ$) pour M2.

E.2.5 Conclusions

L'analyse des estimations de direction de marche dans le cadre des scénarii Swinging et Texting avec les différents algorithmes proposés permet de tirer des conclusions générales.

Globalement, les estimations sont plus erronées en activité Texting qu'en activité Swinging où le mouvement de balancier répétitif est largement dominant en amplitude.

L'approche statistique est la plus prometteuse parmi toutes les méthodes. Une des raisons est qu'elle prend notamment en compte la variabilité individuelle. La méthode FLAM est aussi basée sur un modèle, mais ce dernier ne prend en compte la dimension aléatoire des mouvements de la main.

On observe que la variabilité interindividu est le principal facteur influençant la qualité de l'estimation de la direction de marche pour l'ensemble des individus. Certaines méthodes sont sensibles à la vitesse de marche, notamment FLAM et FIS. Enfin, en activité Texting la manière dont est maintenu le smartphone impacte peu la qualité de l'estimation de la direction de marche.

E.3 Estimation de la direction de marche en conditions réelles

E.3.1 Description de l'expérimentation

E.3.1.1 Matériel et post-traitement

- Une antenne réceptrice de signaux GNSS est positionnée sur une casquette portée sur la tête. Les données enregistrées par le récepteur sont post-traitées en mode différentiel (DGPS) [2] pour calculer les positions du mobile avec une précision comprise entre 1 et 5 centimètres, Figure 58. Les traces de référence ont été calculées avec le logiciel Rtklib 2.4.2 [88]. La direction de marche de référence est estimée à partir de cette trajectoire, en calculant la direction du vecteur de déplacement durant deux instants de foulée consécutifs.

- Les expérimentations ont été effectuées avec la centrale inertielle et magnétique ULISS
- Les accélérations estimées dans le référentiel de navigation ont été obtenues à partir de l'orientation estimée par l'algorithme MAGYQ-Delay.
- 4 personnes ont participé à l'expérimentation. 3 hommes et 1 femme notés : M1, M2, M3 et W1.
- Les méthodes testées sont : L'analyse par composante principale (**PCA**), la corrélation entre les mesures et les modèles sur l'accélération (**FLAM**), l'analyse fréquentielle de l'accélération (**FIS**) et le maximum de log-vraisemblance entre les mesures et un modèle sur l'accélération (**Max-LogL**).
- Les directions de marche sont calculées sur des fenêtres temporelles identiques pour toutes les méthodes. Elles correspondent à une foulée.
- Les instants de foulées sont estimés à partir des signaux de l'accéléromètre et du gyromètre [74]



Figure 58: Illustrations du matériel utilisé pour obtenir la solution de référence : À gauche la base « Novatel » située à proximité du lieu de l'expérimentation. À droite, le récepteur mobile « Septentrio » porté par les piétons durant l'expérimentation.

E.3.1.2 Scénarii

Cette expérimentation comprend trois scénarii illustrés en Figure 59. Le trajet est identique pour tous les scénarii et individus : il s'agit d'un tour de parking d'environ 230 mètres de distance parcourue trois fois par chaque personne. Ce qui donne près de 700 mètres de distance parcourue pour chaque individu durant l'expérimentation.

- Lors du premier scénario les piétons ont marché en activité Texting avec la centrale inertielle alignée avec la direction du piéton.
- Durant le second scénario, le piéton est toujours en activité Texting, mais la direction pointée par la centrale est orientée vers la direction latérale de marche.
- Pour le troisième et dernier scénario, les piétons ont eu pour consigne de varier les activités de la main portant la centrale.
 - o Les deux premiers tiers du parcours comportent des phases alternées de Texting, de Swinging et de Phoning.
 - o La consigne sur le dernier tiers du parcours a été de réaliser des gestes « aléatoires » de la main qui sont autres que ceux des activités classiques. Ce sont des mouvements

impliquant des changements continus, rapides ou lents de l'orientation du smartphone par rapport au piéton.

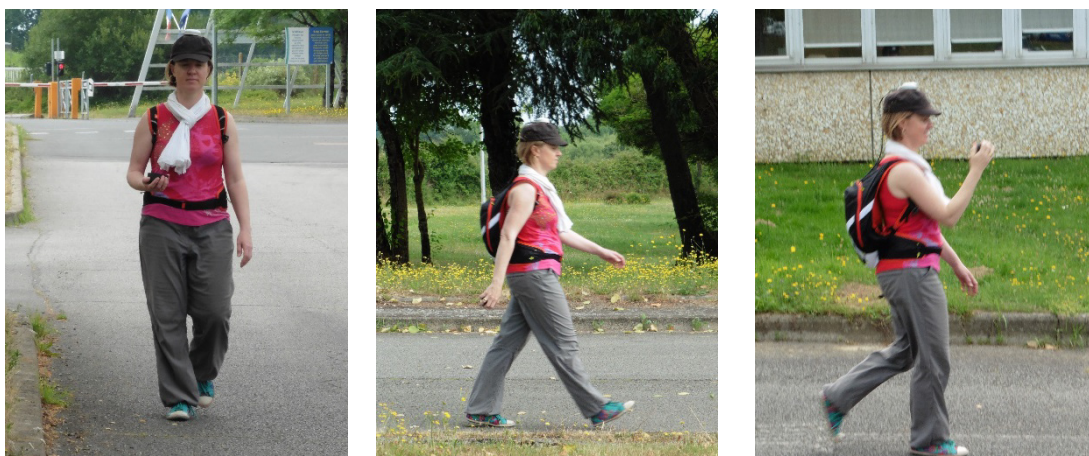


Figure 59: Illustrations des activités de la main durant l'expérimentation : Scénarii 1 et 2-activité Texting (gauche); Scénario 3 – Swinging (centre) puis mouvements irréguliers de la main (droite)

E.3.2 Résultats

E.3.2.1 Analyse globale

Les résultats globaux sont présentés en Tableau 11. La méthode présentant les meilleurs résultats globaux est la méthode Max-LogL avec une erreur moyenne globale de ($\mu=13.5^\circ$; $\sigma= 15.3^\circ$) et un taux d'erreur supérieur à 20° très en deçà des autres méthodes : 18.6% par rapport au 26% de la PCA et 45% de la méthode fréquentielle. Cependant, des disparités selon les individus et les scénarii existent.

Dans le Tableau 12, on observe que pour l'ensemble des scénarii, c'est pour le troisième scénario que les résultats sont les plus mauvais, avec une augmentation des erreurs moyenne de 4 à 10° selon les méthodes. Uniquement pour la méthode FIS, on observe des erreurs constantes pour l'ensemble des scénarii. Cette méthode propose un filtrage des mesures. Cependant, les erreurs sur les deux premiers scénarii sont importantes par rapport aux autres méthodes. C'est plus particulièrement le dernier tiers de ce scénario qui présente les erreurs les plus importantes. Durant cette partie, les individus ont effectué des mouvements aléatoires induisant des accélérations dans toutes les directions.

Dans le Tableau 14, des différences notoires apparaissent selon les individus. Ainsi pour l'individu M1, les erreurs sont supérieures de plus de 10° par rapport à M2. Cette différence s'explique par les oscillations latérales plus importantes de M1.

Enfin les erreurs pour les scénarii Texting sont plus importantes de 3 à 5° pour cette expérimentation par rapport à l'expérimentation en salle de capture de mouvement. La qualité de l'estimation de l'orientation influe directement sur l'estimation de la direction de marche. Il a été vu au Chapitre 3 qu'une erreur angulaire de 5° peut produire une erreur d'accélération de 0.9 m/s^2 et bien plus encore si il y a une forte accélération externe. Cette valeur n'est pas négligeable par rapport aux accélérations de la main.

Tableau 11: Résultats globaux de l'expérimentation en conditions réelles

Méthodes	μ	σ	% >20°
PCA 2d accélération	15.7°	15.0°	26.0%
PCA Walking Cycle	16.1°	14.6°	29.0%
FLAM	19.2°	19.7°	31.6%
FIS	21.8°	15.8°	45.9%
Max-LogL	13.5°	15.3°	18.6%

Tableau 12: Résultats selon les scénarii 1, 2 et 3

Méthodes /scénarii	1st scenario			2nd scenario			3rd scenario		
	μ	σ	% >20°	μ	σ	% >20°	μ	σ	% >20°
PCA 2d accélération	13.1°	12.0°	19.5%	16.4°	13.3°	30.4%	17.6°	18.7°	27.9%
PCA Walking Cycle	14.4°	12.5°	24.6%	16.9°	13.5°	34.3%	17.1°	17.4°	28.0%
FLAM	12.3°	12.5°	16.4%	13.4°	11.5°	20.4%	26.5°	21.8°	49.2%
FIS	21.2°	14.7°	46%	24.9°	15.4°	56.7%	19.3°	17.0°	34.8%
Max-LogL	10.3°	12.0°	10.8%	12.6°	13.2°	18.1%	17.6°	19.1°	27.3%

Tableau 13: Résultats du scénario 3, avec la première phase de mouvements réguliers puis la seconde phase de mouvements désordonnés

Méthodes /scénarii	Texting-Swinging-Phoning			Irregular motion		
	μ	σ	% >20°	μ	σ	% >20°
PCA 2d accélération	15.2°	15.5°	23.6%	21.8°	23.0°	36.1%
PCA Walking Cycle	16.3°	15.1°	26.7%	21.7°	22.9°	35.3%
FLAM	23.3°	19.8°	44.4%	32.9°	24.1°	61.4%
FIS	17.2°	14.5°	31.1%	23.2°	20.1°	41.4%
Max-LogL	14.4°	16.3°	19.4%	23.1°	22.4°	38.3%

Tableau 14: Résultats selon les individus

Méthodes/individus	W1		M1		M2		M3	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	Σ
PCA 2d accélération	12.4°	13.3°	22.7°	14.6°	9.0°	7.4°	14.2°	12.4°
PCA Walking Cycle	12.1°	13.6°	22.4°	20.4°	12.4°	10.2°	16.6°	14.8°
FLAM	19.9°	20.7°	24.4°	21.1°	13.9°	16.1°	19.3°	19.3°
FIS	28.9°	16.5°	28.0°	14.4°	12.1°	8.5°	16.6°	12.3°
Max-LogL	10.6°	14.2°	20.3°	14.7°	8.3°	6.8°	12.8°	13.3°

E.3.2.2 Illustration des mouvements irréguliers

Durant l'expérimentation, il a été demandé d'effectuer des mouvements irréguliers avec la main. Les mouvements irréguliers sont les mouvements autres que ceux classés en Texting Phoning ou

Swinging. Pour ce type de mouvements, toutes les méthodes fournissent une mauvaise estimation de la direction de marche. C'est l'importance des oscillations latérales qui affecte alors les estimations, Figure 60. Les méthodes d'estimation de directions de marche deviennent inexploitable. Un prétraitement pourrait permettre de limiter l'impact de ces oscillations latérales par exemple une exclusion des valeurs importantes d'accélération.

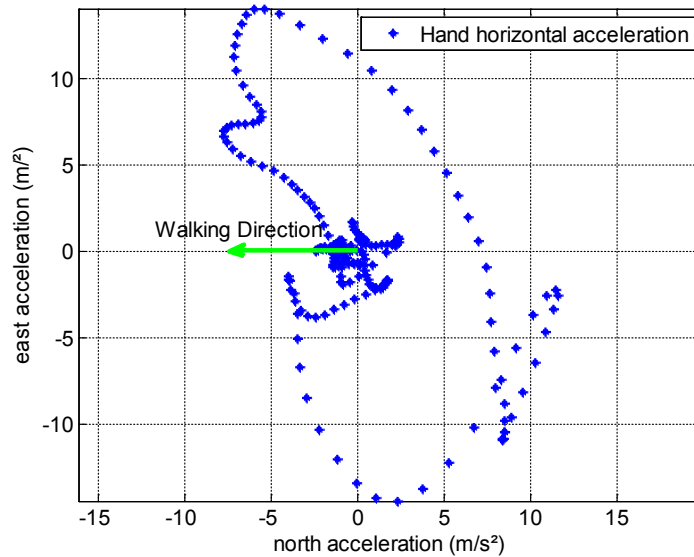


Figure 60: Mouvement irrégulier de la main

E.3.2.3 Calcul des traces PDR avec les estimations de direction de marche

Afin d'illustrer ces résultats sur le positionnement dynamique de piétons à partir d'un équipement connecté dans la main (smartphone, montre, etc.), les traces de marche sont estimées selon la méthode PDR. Les longueurs de pas sont estimées par DGPS afin de n'étudier que l'impact de la direction de marche sur les traces puisque la solution DGPS est la solution de référence. Les directions de marche sont issues des méthodes présentées précédemment. La Figure 61 illustre les traces PDR avec les directions estimées avec Max-LogL et PCA pour le sujet M2.

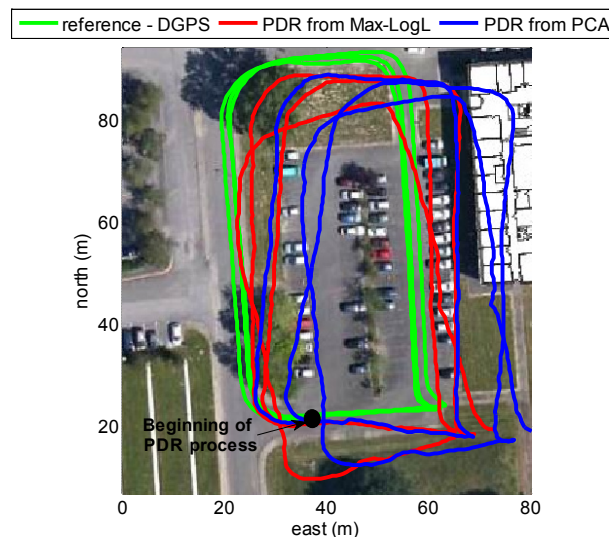


Figure 61: Position estimée à partir de la PDR

La position estimée à partir des capteurs inertiels et magnétiques dérive au cours du temps. Cependant, entre deux instants où les signaux satellites sont absents, la PDR peut permettre d'effectuer des jonctions sur près d'une centaine de mètres.

E.3.3 Conclusions

Plusieurs conclusions peuvent être déduites de cette expérimentation.

- La dérive temporelle en position est importante. Cependant, l'allure de la trajectoire est conservée durant 3 tours, ce qui correspond à près de 500 mètres de distance.
- Comme lors de l'expérimentation en salle de capture de mouvement, c'est l'approche statistique qui fournit les meilleurs résultats en conditions réelles d'expérimentation.
- L'estimation de l'orientation est critique. La qualité de cette estimation impacte directement l'estimation de la direction de marche. Les moins bons résultats de cette expérimentation pourraient être issus de la qualité de l'orientation. Dans le cas présent, l'orientation provient des capteurs, alors que pour l'expérimentation en intérieur, c'est le système optique qui fournit l'orientation de manière assez précise ($<1^\circ$).
- L'étude confirme que la variabilité inter individus est prédominante sur la qualité de l'estimation de la direction de marche. Cela nous conforte dans l'idée d'utiliser des modèles pour chaque personne.
- Pour les mouvements irréguliers, toutes les méthodes fournissent une estimation erronée et non exploitable. En revanche, les grandeurs comme la corrélation avec le modèle pour FLAM, le rapport des valeurs propres de la matrice de variance-covariance des mesures pour la PCA ou encore la vraisemblance peuvent fournir un indicateur de la qualité de l'estimation.

Chapitre F. Conclusions et perspectives

F.1 Conclusions

L'estimation de la direction de marche est l'une des problématiques majeures pour la navigation piétonne avec des capteurs inertiels portés dans la main, comme dans le cas des objets connectés, selon l'approche de calcul la plus courante appelée « Pedestrian Dead Reckoning ». Le problème vient du fait que la direction pointée par l'objet diffère très souvent de celle de la direction de marche et que ce désalignement est variable, souvent chaotique et donc complexe à estimer.

Les travaux réalisés durant cette thèse sont axés sur la mise en œuvre de méthodes permettant d'améliorer l'estimation de la direction de marche. Notre principale contribution a été de développer une nouvelle méthode d'estimation de cette direction en adoptant une approche statistique qui diffère des méthodes existantes. En effet, contrairement aux méthodes existantes qui conduisent une analyse dans les domaines temps et fréquence des mesures par inertie, l'idée générale de cette approche est de minimiser la distance entre des observations et un modèle statistique. Le modèle dépend de la direction de marche, ainsi retrouver le modèle le plus proche permet d'estimer cette direction.

Pour estimer la direction de marche, un premier travail d'analyse des mouvements du centre de masse et de la main a été effectué en salle de capture de mouvement. Il a été observé que le mouvement du centre de masse du piéton présente une évolution temporelle cyclique durant la marche. Le mouvement du centre de masse est bien ordonné : pour deux cycles de marche différents qui présentent peu de variations. A contrario, les mouvements de la main ont une dimension aléatoire significative. La classification des mouvements de la main est une étape importante pour extraire des informations. Pour une activité donnée, des informations de fréquences, une évolution temporelle sont observables. Enfin une répartition singulière des mesures inertielles a été observée durant le cycle de marche. Une phase d'accélération axiales lors de la phase d'appui a notamment été mise en évidence durant le cycle de marche. Les méthodes de l'état de l'art se basent sur certaines caractéristiques du mouvement de la main, mais pas cette observation multimodale.

Dans la méthode existante « *Forward and Lateral Acceleration Model* » (FLAM), l'accélération est modélisée dans le plan horizontal. Le modèle est déterministe. Il se base sur l'analyse fréquentielle du signal, l'accélération est modélisée par une somme de sinus et cosinus. Cette méthode est particulièrement sensible à la détection des instants de pas. Une deuxième méthode de l'art, la méthode fréquentielle « *Frequency analysis of Inertial Sensors* » (FIS), propose un filtrage du signal aux fréquences de pas et de foulée. Cependant, il n'est pas garanti que les oscillations suivant ces fréquences soient selon la direction de marche. La « *Principal Component Analysis* » (PCA) suppose que les accélérations sont globalement distribuées selon la direction de marche. Cette hypothèse est vraie pour l'activité « *Swinging* », soit avec un bras oscillant pendant la marche. Cependant les oscillations latérales de la main ne sont pas négligeables et les accélérations peuvent être globalement latérales. En revanche cette méthode ne dépend pas de l'estimation d'instant de pas ou d'estimation de fréquence de foulée ou de pas qui peuvent biaiser le résultat en cas d'erreur d'analyse du cycle de marche.

Dans notre approche statistique, un modèle est construit à partir d'observations d'accélérations et de vitesses de rotation de la main, pour une direction de marche connue. Le design de ce modèle est basé sur une analyse détaillée des mouvements de la main et du centre de masse de piétons qui a été conduite en laboratoire. Il s'agit d'un mélange gaussien bimodal qui est paramétré par un angle,

représentant la direction de marche. La direction de marche est ensuite déterminée en maximisant la vraisemblance du modèle par rapport aux observations sur au minimum un cycle de marche, soit deux pas. Une indétermination sur la détection des instants de pas n'impacte pas la méthode statistique proposée.

Cette méthode prend en compte un modèle statistique plus complexe par rapport à une simple gaussienne pour la PCA. Les mesures inertielles sont considérées comme des observations d'une variable aléatoire et non comme déterministes comme dans le cas de la méthode FLAM. Cependant, le processus de résolution de cette méthode est plus long que la PCA. Afin de pouvoir comparer le modèle et les observations, les signaux sont normalisés. En cas de mouvements brusques induisant de fortes accélérations, la valeur de référence de normalisation est très haute, ce qui réduit la partie utile du signal pour appliquer la méthode statistique proposée.

Afin de tester les méthodes, deux expérimentations ont été réalisées. L'une en salle de capture de mouvements avec 5 personnes et environ 1000 foulées et l'autre en conditions réelles avec 4 personnes sur 500 mètres chacune. Durant ces expérimentations, l'approche statistique a permis d'obtenir les meilleurs résultats avec ($\mu=13.5^\circ$; $\sigma=15.3^\circ$) d'erreur sur la direction de marche, comparé au ($\mu=15.7^\circ$; $\sigma=15.0^\circ$) pour la PCA, ($\mu=19.2^\circ$; $\sigma=19.7^\circ$) pour FLAM et ($\mu=21.2^\circ$; $\sigma=15.8^\circ$) pour FIS.

Ces erreurs restent importantes pour envisager une solution de navigation piétonne PDR uniquement basée sur les capteurs proprioceptifs intégrés dans l'objet connecté. Néanmoins cette nouvelle approche permet d'envisager des périodes plus longues de navigation autonome, soit sans accéder à des observations complémentaires issues de signaux WiFi, GNSS ou cartographiques.

D'autres conclusions ont émergé de nos expérimentations. C'est l'accélération dans le plan horizontal qui doit être privilégiée pour estimer la direction de marche. La vitesse de rotation est quant à elle exploitable uniquement dans le cas de mouvements de fortes amplitudes. Enfin, nous avons noté une importante variabilité interindividus. C'est cette variabilité qui influe le plus sur les performances obtenues. Il faut donc prendre en compte cette disparité entre les individus et construire des modèles pour chaque individu.

Deux autres contributions ont été apportées dans le cadre de l'utilisation de phases quasi statiques du champ magnétique pour estimer l'orientation de la centrale inertielle. Il s'agit respectivement du changement de modèle de mesure du gyromètre en quaternions unitaires et de la prise en compte des estimations passées dans la construction du champ de référence. Cette approche combinée aux deux contributions a permis d'obtenir une plus grande stabilité en milieux perturbés avec une erreur de lacet (yaw) ($\mu=8.2^\circ$; $\sigma=9.8^\circ$) par rapport aux ($\mu=18.1^\circ$; $\sigma=8.6^\circ$) d'une approche classique, de type Wahba, basée sur la mesure de champ terrestre.

F.2 Perspectives

Plusieurs suites et pistes d'améliorations d'estimation de la direction de marche sont envisagées.

Tout d'abord, la méthode d'estimation de direction de marche par minimisation de divergence de Kullback-Leibler doit être éprouvée. Cette méthode permet de pondérer les observations à partir de l'estimation de leur répartition spatiale. Cette approche permettrait de réduire l'impact des mouvements brusques de la main sur l'estimation de la direction de marche.

D'autres méthodes peuvent être testées, comme la méthode de *RANSAC* (*RANdom Sample Consensus*). Cette dernière permet d'opérer un tri parmi les observations afin de conserver

uniquement celles qui sont pertinentes par rapport à un modèle et donc de réduire l'impact de l'étape de normalisation du signal dans la possible perte de signal utile à la comparaison observations/modèles.

La définition d'un nombre plus important d'activités de la main du piéton pourrait être un moyen d'amélioration. À chaque activité, un nouveau modèle statistique est défini. Ce modèle serait alors plus fin et plus proche des observations.

L'utilisation de phases opportunes pour la calibration des modèles statistiques. Lorsque le piéton est à l'extérieur, les signaux GNSS peuvent alors fournir une estimation de la direction de marche. En ayant cette direction de référence, les modèles de distributions pourraient être réajustés.

Une quantification de la confiance sur la direction de marche doit être mise en place. Pour cela, la vraisemblance peut être directement utilisée. Cette dernière doit cependant être reliée à une erreur angulaire. L'estimation de l'information de Fisher pourrait être utilisée. En effet cette grandeur correspond à l'information d'un paramètre dans une distribution. Plus l'information du paramètre est grande, plus la confiance qu'on peut lui accorder l'est.

Enfin, ce travail a permis d'introduire une nouvelle approche pour l'estimation de la direction de marche en l'améliorant de 2° à 5° par rapport aux méthodes actuelles. Cette approche peut être rendue plus robuste par rapport aux mouvements brusques, ce qui peut faire l'objet d'une continuation à ce travail. Ainsi, il serait envisageable d'utiliser uniquement les capteurs inertiels et magnétiques pour le calcul de position sur une distance de plus de 500 mètres avec moins de 5 mètres d'erreur.

Références

- [1] P. D. Groves, Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, second edition ed. Artech house, Chap 8 GNSS: Fundamentals, Signals and Satellites, p 299-345 2013
- [2] P. D. Groves, Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, second edition ed. Artech house, Chap 10 GNSS: Advanced Techniques, p 437-467, 2013
- [3] KVH, Guide to Comparing Gyro and IMU Technologies-Micro-Electro-Mechanical System and Fiber Optic Gyros, <http://www.kvh.com/ViewAttachment.aspx?guidID={A4A8B05C-D372-41EA-B9C6-D7BCC4F40769}>, Last access : 15/08/2016
- [4] K. Mohamadabadi, Anisotropic Magnetoresistance Magnetometer for inertial navigation systems, Theses, Ecole Polytechnique X, Nov. 2013. [Online]. Available: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00946970> , Last access: 12/06/2016
- [5] V. Renaudin, C. Combettes, and C. Marchand, "Toward a free inertial pedestrian navigation reference system", in International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, oct. 2014
- [6] X. Yuan, C. Liu, S. Zhang, S. Yu, and S. Liu, "Indoor pedestrian navigation using miniaturized low-cost MEMS inertial measurement units", in IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014, p. 487–492. May 2014
- [7] A. R. Jimenez, F. Seco, C. Prieto, and J. Guevara, "A comparison of pedestrian dead-reckoning algorithms using a low-cost MEMS imu", In Intelligent Signal Processing, 2009. WISP 2009. IEEE International Symposium, p. 37–42. Aug, 2009
- [8] V. Renaudin, A. Dommès, and M. Guilbot, "Engineering, human and legal challenges of navigation systems for personal mobility" in IEEE Transaction on Intelligent Transportation Systems, <http://doi.org/10.1109/TITS.2016.2563481>, 2016
- [9] V. Renaudin, M. Susi, and G. Lachapelle, "Step length estimation using handheld inertial sensors," Sensors, vol. 12, no. 7, pp. 8507–8525, 2012. [Online]. Available: <http://www.mdpi.com/1424-8220/12/7/8507>
- [10] S. H. Shin, C. G. Park, J. W. Kim, H. S. Hong, and J. M. Lee, "Adaptive step length estimation algorithm using low-cost MEMS inertial sensors", IEEE Sensors Applications Symposium, p. 1–5, Feb 2007
- [11] M.H. Afzal, V. Renaudin, G. Lachapelle, "Use of earth's magnetic field for mitigating gyroscope errors regardless of magnetic perturbation", Sensors, Vol 11, Issue 12, p 11390–11414. 2011
- [12] V. Renaudin and C. Combettes. Magnetic, acceleration fields and gyroscope quaternion (magyq)-based attitude estimation with smartphone sensors for indoor pedestrian navigation. Sensors, Vol 14, Issue 12, p 22-64, 2014
- [13] C. Combettes and V. Renaudin. Delay kalman filter to estimate the attitude of a mobile object with indoor magnetic field gradients. Micromachines, Vol 7, Issue 5, p 79, 2016
- [14] V. Renaudin, C. Combettes, and F. Peyret. "Quaternion based heading estimation with handheld MEMS in indoor environments". In IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014 , p 645–656, May 2014
- [15] C. Combettes and V. Renaudin. "Comparison of misalignment estimation techniques between handheld device and walking directions". In 2015 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), p 1–8, Oct 2015

- [16] S. Kumar, V. Renaudin, Y. Aoustin, E. Le-Carpentier, and C. Combettes. "Model-based and experimental analysis of the symmetry in human walking in different device carrying modes". In 6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob), p 1172–1179, June 2016
- [17] J. Farrell. Aided navigation: GPS with high rate sensors. McGraw-Hill, Inc., Chap 2 Reference Frames, p 19-58, 2008
- [18] P. D. Groves, Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, second edition ed. Artech house, Chap 2 Coordinate Frames - Kinematics - and the Earth, p 23-78, 2013
- [19] P. D. Groves, Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, second edition ed. Artech house, Chap 4 Inertial Sensor, p 137-162, 2013
- [20] J. Farrell, Aided navigation: GPS with high rate sensors. McGraw-Hill, Inc., Chap 10 AHRS, p 353-377, 2008.
- [21] D. W. Allan, Should the classical variance be used as a basic measure in standards metrology? IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. IM-36, Issue. 2, p. 646–654, 1987
- [22] N. El-Sheimy, H. Hou, and X. Niu, Analysis and modeling of inertial sensors using allan variance, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 57, Issue 1, p. 140–149, 2008
- [23] X. Zhang, Y. Li, P. Mumford, and C. Rizos, "Allan variance analysis on error characters of MEMS inertial sensors for an fpga-based gps/ins system", In International Symposium on GPS/GNNS, Tokyo, Japan. US Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, p. 127–33, 2008
- [24] W. Riley, Handbook of frequency stability analysis, National Institute of Standards and Technology Special Publication, Vol. 1065, 2008. [Online]. Available: <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/SP/nistspecialpublication1065.pdf>, Last access: 20/07/2016
- [25] D. W. Allan and J. A. Barnes, "A modified "allan variance" with increased oscillator characterization ability", In Thirty Fifth Annual Frequency Control Symposium. 1981, p 470–475. May 1981
- [26] V. Renaudin, M. H. Afzal, and G. Lachapelle, "Complete triaxis magnetometer calibration in the magnetic domain" , Journal of sensors, vol. 2010, 2010
- [27] Magnetic calculator <http://www.ngdc.noaa.gov/geomag-web/#igrfwmm>. Last access: 12/06/2016
- [28] I. Markovsky, A. Kukush, and S. Van Huffel, Consistent least squares fitting of ellipsoids, Numerische Mathematik, Vol. 98, Issue 1, p. 177–194, 2004
- [29] J. Snyman, Practical mathematical optimization: an introduction to basic optimization theory and classical and new gradient-based algorithms. Springer Science & Business Media, Vol. 97, 2005
- [30] J. Diebel, Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors, https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn/_downloads/attitude.pdf , 2006, Last access : 20/07/2016
- [31] F. Zhang, Quaternions and matrices of quaternions, Linear Algebra and its Applications, Vol. 251, Issue 0, p. 21 – 57, 1997. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379595005439> , Last access : 20/07/2016

- [32] E. B. Dam, M. Koch, and M. Lillholm, Quaternions, interpolation and animation, <http://web.mit.edu/2.998/www/QuaternionReport1.pdf>, 1998, Last access : 15/08/2016
- [33] R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 82, Issue. 1, p. 35–45, 1960
- [34] R. E. Kalman and R. S. Bucy, New results in linear filtering and prediction theory, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 83, Issue. 1, p. 95–108, 1961.
- [35] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm, *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)*, p. 1–38, 1977
- [36] S. Borman, The expectation maximization algorithm-a short tutorial, https://www.cs.utah.edu/~piyush/teaching/EM_algorithm.pdf, 2004, Last access: 20/08/2016.
- [37] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, Vol 5, Issue 1, p 3–55, 2001.
- [38] V. Renaudin-Schouler. Hybridation MEMS/UWB pour la navigation pédestre intra-muros. PhD thesis , ENAC, Lausanne, 2009
- [39] Q. Ladetto, Capteurs et algorithmes pour la localisation autonome en mode pédestre Ph.D. thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2003.
- [40] R. C. Gonzalez, D. Alvarez, A. M. López, and J. C. Alvarez, Modified pendulum model for mean step length estimation, in the 29th Annual International Conference of the IEEE, Engineering in Medicine and Biology Society, *EMBS 2007*. IEEE, p. 1371–1374, 2007
- [41] Paul D Groves. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems. Artech house, Chap 6 : Dead Reckoning, Attitude, and Height Measurements, 2013.
- [42] F Landis Markley and Daniele Mortari. Quaternion attitude estimation using vector observations. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol 48, Issue 2, p.359–380, 2000.
- [43] John L Crassidis, F Landis Markley, and Yang Cheng. Survey of nonlinear attitude estimation methods. *Journal of guidance, control, and dynamics*, Vol 30, Issue 1, p 12–28, 2007
- [44] I. Y. Bar-Itzhack J. Deutschmann F. L. Markley. “Quaternion normalization in additive ekf for spacecraft attitude determination”. In *Flight Mechanics Estimation Theory Symposium*, NASA Goddard Space Flight Center; Greenbelt, MD, United States, p 403–421, Oct 01, 1991
- [45] J.L. Marins, X. Yun, E.R. Bachmann, R.B. Mcghee, and M.J. Zyda. “An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors”. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Proceedings, Vol 4, p 2003–2011, 2001.
- [46] S. Bonnabel, P. Martin, and E. Salaün. “Invariant Extended Kalman Filter: theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem”. In *48th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1297–1304, Shanghai, China, December 2009
- [47] S.O.H. Madgwick, A J L Harrison, and R. Vaidyanathan. “Estimation of imu and marg orientation using a gradient descent algorithm”, In *IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR)*, p 1–7, June 2011
- [48] D. Choukroun, I.Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman. Novel quaternion kalman filter. *Aerospace and Electronic Systems*, *IEEE Transactions on*, Vol 42, Issue 1, p 174–190, Jan 2006
- [49] T. Hamel and R. Mahony. “Attitude estimation on so[3] based on direct inertial measurements”. In *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, ICRA 2006., p 2170–2175, May 2006

- [50] J. J. LaViola. A comparison of unscented and extended kalman filtering for estimating quaternion motion. In American Control Conference, Vol 3, p 2435–2440, June 2003
- [51] Y.Cheng and J.L. Crassidis. Particle filtering for sequential spacecraft attitude estimation. In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, p16–19, AIAA Reston, VA, 2004
- [52] A.M. Sabatini. Quaternion-based extended kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol 53, Issue 7, p : 1346–1356, July 2006
- [53] R.G. Valenti, I. Dryanovski, and J. Xiao. Keeping a good attitude: A quaternion-based orientation filter for imus and margs. Sensors, Vol 15, Issue 8, 2015.
- [54] A. Makni, H. Fourati, and A. Y. Kibangou. Energy-aware adaptive attitude estimation under external acceleration for pedestrian navigation. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol 21, Issue 3, p 1366–1375, June 2016
- [55] J.Haverinen, , A. Kemppainen, Global indoor self-localization based on the ambient magnetic field. Robot. Auton. Syst., Vol 57, p 1028–1035, 2009.
- [56] D. Vissiere, Guidance, Navigation and Control Solutions for Unmanned Heterogeneous Vehicles in a Collaborative Mission, Ph.D. Thesis, Ecole des Mines de Paris, Paris, France, 2008.
- [57] Analog Device - ADIS 16488, <http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADIS16488.pdf>, Last access: 08/08/2016
- [58] Darling, D.A. The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises Tests. Ann. Math. Stat., Vol 28, p 823–838, 1957
- [59] J.B. Bancroft and G. Lachapelle. “Use of magnetic quasi static field (qsf) updates for pedestrian navigation”. In IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium (PLANS) , p 605–612, April 2012
- [60] H Kwakernaak. Optimal filtering in linear systems with time delays. Automatic Control, IEEE Transactions on, Vol 12, Issue 2, p 169–173, 1967
- [61] X. Lu, H. Zhang, W.Wang, and K.-L. Teo. Kalman filtering for multiple time-delay systems. Automatica, Vol 41, Issue 8, p 1455–1461, 2005
- [62] S. Roumeliotis, J.W. Burdick, et al., “Stochastic cloning: A generalized framework for processing relative state measurements”. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, Proceedings. ICRA’02, Vol 2, p 1788–1795., 2002
- [63] D. Lafond, M. Duarte, and F. Prince. Comparison of three methods to estimate the center of mass during balance assessment. Journal of Biomechanics, Vol 37, Issue 9 p 1421 – 1426, 2004
- [64] J. B Bancroft, G.Lachapelle, M. Elizabeth Cannon, and M.G. Petovello. “Twin IMU-HSPG integration for pedestrian navigation”. In ION GNSS, p 1377-1387, Sept 2008
- [65] Vadims Bistrovs and A Kluga. Combined information processing from gps and imu using kalman filtering algorithm. Elektronika ir Elektrotechnika, Vol 93, Issue 5, p 15–20, 2015
- [66] Z. Wang, H. Zhao, S. Qiu, and Q. Gao. Stance-phase detection for zupt-aided foot-mounted pedestrian navigation system. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol 20, Issue 6, p 3170–3181, Dec 2015
- [67] J. Rose, J. G. Gamble, and J. M. Adams, Philadelphia, Human walking. Lippincott Williams & Wilkins , 2006

- [68] Advanced Realtime Tracking: <http://www.ar-tracking.com/technology/optical-tracking/>. Last access:20/06/2016
- [69] M. McGrath, D. Howard, and R.Baker. The strengths and weaknesses of inverted pendulum models of human walking. *Gait & posture*, Vol 41, Issue 2, p 389–394, 2015
- [70] Bio Motion Lab: <http://www.biomotionlab.ca/demos/bmlwalker.html>. Last access: 03/05/2016
- [71] E.Zakhem, G. El Khoury, A.-J.Berro, H. Zouhal, C. El Khoury, D.Theunynck, R. Hurdziel, T.Pezé, G.Zunquin, C.Jacob, and R.El Hage. Les déterminants de santé corrélables à la densité minérale osseuse appréciée par ultrasonométrie. *Kinésithérapie, la Revue*, Vol 16, Issue 173, p 9 – 14, 2016
- [72] T. Keller, A. Weisberger, J. Ray, S. Hasan, R. Shiavi, and DM Spengler. Relationship between vertical ground reaction force and speed during walking, slow jogging, and running. *Clinical Biomechanics*, Vol 11, Issue 5, p 253 – 259, 1996
- [73] D. Bobkov, F. Grimm, E. Steinbach, S. Hilsenbeck, and G. Schroth. “Activity recognition on handheld devices for pedestrian indoor navigation”. In *International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, p 1–10, Oct 2015
- [74] M. Susi, V. Renaudin, and G. Lachapelle. Motion mode recognition and step detection algorithms for mobile phone users. *Sensors*, Vol 13, Issue 2, p 1539, 2013
- [75] N. Roy, H. Wang, and R. Roy Choudhury. “I am a smartphone and i can tell my user’s walking direction”. In *Proceedings of the 12th Annual International Conference on Mobile Systems, Applications, and Services, MobiSys ’14*, p 329–342, New York, NY, USA, 2014. ACM.
- [76] C.Maria Kim and J. J Eng. Symmetry in vertical ground reaction force is accompanied by symmetry in temporal but not distance variables of gait in persons with stroke. *Gait & Posture*, Vol 18, Issue 1, p23 – 28, 2003
- [77] J. Janardhanan, G. Dutta, and V. Tripuraneni. Attitude estimation for pedestrian navigation using low cost MEMS accelerometer in mobile applications, and processing methods, apparatus and systems, April 8 2014. US Patent 8,694,251
- [78] A. ALI, H.W. Chang, J. Georgy, Z. Syed, and C. Goodall. Method and apparatus for determination of misalignment between device and pedestrian, July 24 2014. WO Patent App. PCT/CA2014/000,040
- [79] Zhi-An Deng, Guofeng Wang, Ying Hu, and Di Wu. Heading estimation for indoor pedestrian navigation using a smartphone in the pocket. *Sensors*, Vol 15, Issue 9, p 21518-21536, 2015
- [80] P. Netrapalli, U. N. N., S. Sanghavi, A.e Anandkumar, and P. Jain. Non-convex robust PCA. *CoRR*, abs/1410.7660, 2014
- [81] G.g Heo, P.Gader, and H. Frigui. Rkf-pca: Robust kernel fuzzy PCA. *Neural Networks*, Vol 22, Issue (5–6), p 642 – 650, 2009
- [82] M. Chowdhary, M. Sharma, A. Kumar, S. Dayal, and M. Jain. Method and apparatus for determining walking direction for a pedestrian dead reckoning process, May 22 2014. US Patent App. 13/682,684.
- [83] M. Kourogi and T. Kurata. “A method of pedestrian dead reckoning for smartphones using frequency domain analysis on patterns of acceleration and angular velocity”. In *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014*, p 164–168, May 2014

- [84] Bilal Nehme. Techniques non-additives d'estimation de la densité de probabilité. Ph.D thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2010
- [85] Adrian E. Raftery Chris Fraley. Model-based clustering, discriminant analysis, and density estimation. Journal of the American Statistical Association, Vol 97, No 458, p 611–631, 2002.
- [86] Scott Shaobing Chen and P. S. Gopalakrishnan. "Clustering via the bayesian information criterion with applications in speech recognition". In Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, p 645–648, vol.2, 1998.
- [87] VectorNav VN300, <http://www.vectornav.com/docs/default-source/documentation/vn-300-documentation/PB-12-0004.pdf?sfvrsn=24> , last access: 08/08/2016
- [88] RTK-lib <http://www.rtklib.com/> , Last access: 08/08/2016

Thèse de Doctorat

Christophe COMBETTES

Estimation de la direction de marche à partir de capteurs inertiels et magnétiques portés dans la main

Walking direction estimation with handheld inertial and magnetic sensors

Résumé

La technologie d'aujourd'hui donne la possibilité à chacun de se localiser grâce à son smartphone. Cependant les milieux intra-muros restent encore relativement dépourvus en service de géolocalisation. Pour des raisons d'ubiquité, les centrales inertiels et magnétiques de technologie MEMS présentes dans les smartphones offrent une solution pour la navigation pédestre. Dans ce contexte la stratégie « Pedestrian Dead-Reckoning » s'avère intéressante car elle limite la dérive temporelle de l'estimation de la distance parcourue. Cependant, l'estimation de la direction de marche s'avère critique dans la stratégie PDR, les mouvements de la main présentant un certain désordre/désalignement qui rend difficile une telle estimation.

Dans un premier temps, l'estimation de l'orientation de la centrale inertielle est affinée afin de projeter avec un minimum d'erreur les mesures inertiels dans le plan horizontal. Un filtre d'estimation de l'orientation paramétré en quaternions et basé sur une exploitation opportune des champs magnétiques et de gravité a été développé. Dans un second temps, il s'agit d'estimer la direction de marche. Les méthodes de l'état de l'art proposent une estimation de la direction de marche à partir de la maximisation de l'énergie du signal. Cette approche est sensible aux mouvements de la main. Nous proposons une nouvelle approche basée sur les théories des probabilités et de l'information qui s'inspire de la description biomécanique de la marche. Des validations expérimentales sont conduites pour analyser les performances d'estimation de la direction de marche qui est directement reliée à la qualité de l'estimation du positionnement.

Mots clés

Navigation pédestre, Estimation de l'orientation, Capteurs Inertiels, Magnétomètres, Filtre de Kalman, Espérance-Maximisation, Cycle de marche, Direction de marche

Abstract

Thanks to new technological developments, it is now possible to get our localization with our own smartphone. However, indoor environments are still relatively lacking in localization based service. MEMS sensors, composed of inertial and magnetic sensors, offer a ubiquitous solution. These sensors can be merged with other technologies to give a reliable solution for the Pedestrian Navigation. In this context the "Pedestrian Dead Reckoning" strategy is attractive. Indeed, this strategy enables to estimate the walking distance with a limited drift. But the walking direction estimation remains critical in the PDR strategy. Hand movements are relatively erratic and cause a dynamic angular misalignment, which is difficult to estimate.

Firstly, a new orientation estimation algorithm of the handheld unit is developed to reduce the errors in the horizontal inertial measurements. The filter is parametrized with quaternions and based on opportune invariant phases of the magnetic and gravity fields. Secondly, a novel walking direction estimator is proposed. State of the art methods to estimate the walking direction are based on the signal energy maximization and are sensitive to erratic hand movements. The new approach is based on the theories of probability and information that is built on the biomechanical description of walking. Experimental validations are conducted to analyze the performance of the new direction estimation filter whose quality directly depends on the quality of the position estimates

Key Words

Pedestrian navigation, Orientation estimation, Inertial sensors, Magnetometers, Kalman Filter, Expectation-Maximization, Walking cycle, Walking direction