



HAL
open science

Étude et conception d'une stratégie couplée de post-maillage/résolution pour optimiser l'efficacité numérique de la méthode Galerkin discontinue appliquée à la simulation des équations de Maxwell instationnaires

Matthieu Patrizio

► To cite this version:

Matthieu Patrizio. Étude et conception d'une stratégie couplée de post-maillage/résolution pour optimiser l'efficacité numérique de la méthode Galerkin discontinue appliquée à la simulation des équations de Maxwell instationnaires. Physique mathématique [math-ph]. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE), 2019. Français. NNT: . tel-02274985

HAL Id: tel-02274985

<https://hal.science/tel-02274985>

Submitted on 30 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par
Matthieu PATRIZIO

Le 3 mai 2019

Étude et conception d'une stratégie couplée de post-maillage/résolution pour optimiser l'efficacité numérique de la méthode Galerkin discontinue appliquée à la simulation des équations de Maxwell instationnaires

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Unité de recherche :
ISAE-ONERA MOIS MODélisation et Ingénierie des Systèmes

Thèse dirigée par
XAVIER FERRIERES et Bruno FORNET

Jury

Mme Hélène BARUCQ, Rapporteur
M. Philippe HELLUY, Rapporteur
M. Vincent MOUYSET, Examineur
M. Christophe GEUZAIN, Examineur
M. Xavier FERRIERES, Directeur de thèse
M. Bruno FORNET, Co-directeur de thèse
M. Stéphane LANTERI, Président

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le département Ondes Acoustiques et Radioélectriques de la DGA, le département Recherche et Technologie de Nuclétudes, ainsi que l'unité Mathématiques Appliquées et Calcul Intensif de l'ONERA Toulouse qui m'ont permis de réaliser cette thèse dans des conditions irréprochables.

Naturellement, mes remerciements vont ensuite à mes directeurs et encadrants, Xavier Ferrières, Bruno Fornet, et Vincent Mouysset. Au moins autant qu'une aventure scientifique, ces trois années auront été une aventure humaine. J'ai appris et désappris de nombreuses choses à leurs côtés, souvent pour le meilleur. Et comme il convient ici de voir le verre à moitié plein, je tiens à les saluer avec la plus grande sincérité pour leur investissement, leurs grandes compétences aussi bien théoriques que numériques (si tant est que cette distinction soit fondée), ainsi que leur pédagogie. Ils m'ont transmis un sens de la rigueur, une manière d'appréhender les problèmes et de cheminer dans l'inconnu qui me seront à jamais profitables.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury, en particulier les rapporteurs, Mme Hélène Barucq et M. Philippe Helluy, pour l'intérêt qu'ils ont su porter à ces travaux et pour la pertinence de leurs commentaires lors de la soutenance.

Évidemment, impossible de conclure la rédaction de ce mémoire sans avoir une pensée pour toutes les personnes qui m'ont permis de conserver un semblant d'équilibre durant ces trois ans.

À Matthieu, Nadir-Alexandre et Emanuele, qui comprendront de quel matériau est fait le vide du verre à moitié plein,

Aux vagues collègues de la Nucléteam, de Laurent (aka La Hen, aka Fire Rabbit, aka WikiLolo, aka Prophète CSE, aka La Pince), à Léo (aka Georges Mégrousse, aka Empereur des bails bresons, aka béni-oui-oui, aka chat ganté ne prit jamais souris), en passant par Nicolas (aka Nion, aka la Masse), Pierre (aka Dzzt), Geoffrey (aka Coach), Basile, Alexandra, Nicolas, et bien d'autres qui se reconnaîtront, pour leur bonne humeur et leur bienveillance, affichée pour les uns, habilement dissimulée pour les autres,

Aux amis historiques du sud et du moins sud dont l'énumération conduirait à doubler le nombre de pages de ce mémoire, pour les repères qu'ils ont constitués à leur insu,

À Christine, pour sa relécture atantive et ses précieux conseils, et Philippe, pour son soutien le jour où la partie se gagnait ou se perdait,

Enfin, à Marlène, mon amour, pour tant de choses essentielles qui perdraient en clarté à être explicitées, et à ma famille que j'espère avoir rendue fière et sans qui rien ne saurait être fait :

Merci.

Table des matières

Introduction	17
Du durcissement à l'électromagnétisme numérique	17
La chaîne de calcul Différences Finies	18
Recherche d'une alternative au schéma de Yee et motivations pour l'approche Galerkin Discontinue	20
Problématiques et objectifs de la thèse	24
Solution proposée	26
Organisation du manuscrit	28
Communications issues de la thèse	29
1 Résolution des équations de Maxwell par un schéma GDDT-Q^p à collocation	31
1.1 Mise en place du problème d'évolution	32
1.1.1 Système de Maxwell	32
1.1.2 Problème d'évolution étudié	34
1.2 Formulation variationnelle Galerkin Discontinue	35
1.2.1 Discrétisation du domaine de calcul	35
1.2.2 Formulation variationnelle	36
1.3 Schéma GDDT- Q^p à collocation sur maillages cartésiens	41
1.3.1 Approximation spatiale	41
1.3.1.1 Maillage cartésien	41
1.3.1.2 Espace d'approximation	42
1.3.1.3 Intégration numérique condensée	44
1.3.1.4 Formulation semi-discrétisée espace	47
1.3.1.5 Schéma GDDT	48
1.4 Étude numérique de la convergence	48
1.4.1 Description du cas-test et de la formule d'erreur	49
1.4.2 Consistance de l'approximation spatiale	50
1.4.3 Convergence du schéma en condition d'utilisation	51
1.5 Étude de l'impact du choix du maillage hp sur l'efficacité numérique du schéma	53
1.5.1 Cadre hp conforme	54
1.5.2 Cadre hp non-conforme	60
1.5.3 Analyse de l'explosion du temps d'exécution du solveur dans le cas non-conforme	64
1.6 Conclusion	68
2 Conception et analyse d'un schéma GDDT condensé adapté aux configurations hp non-conformes	71
2.1 Formulation variationnelle GD adaptée aux maillages non-conformes	72
2.1.1 Introduction de la notion de surface d'échange	73
2.1.2 Définition des configurations d'accolement unitaires	76
2.1.3 Formulation variationnelle GD avec surfaces d'échange	78
2.2 Schéma GDDT condensé	80
2.2.1 Définition de la notion de flux condensé	81
2.2.2 Formulation GD semi-discrétisée condensée	86

2.2.3	Conservation d'une énergie semi-discrète et premières hypothèses sur les flux condensés	88
2.2.4	Schéma GDDT condensé	91
2.3	Étude de stabilité	93
2.3.1	Conservation d'une énergie discrète	93
2.3.2	Détermination de la condition CFL	98
2.4	Étude de consistance	104
2.4.1	Notion de consistance pour une approche hp	104
2.4.2	Étude numérique préliminaire 2D	107
2.4.2.1	Mise en place de l'étude	107
2.4.2.2	Configuration $Q^2(h)/Q_m^1(\frac{h}{3})$	112
2.4.2.3	Configuration $Q^4(h)/Q_m^2(\frac{h}{3})$	114
2.4.2.4	Configuration $Q^3(h)/Q_m^3(\frac{h}{3})$	116
2.4.2.5	Test de convergence pour des flux de type condensé	117
2.4.2.6	Bilan	118
2.4.3	Analyse de la consistance des flux condensés	119
2.5	Conclusion	124
3	Mise en œuvre du schéma GDDT condensé	125
3.1	Méthode de construction de flux condensés pour des configurations hp non-conformes tensorielles	126
3.1.1	Description du cadre d'étude adopté	127
3.1.2	Éléments de construction des flux unitaires	129
3.1.2.1	Passage des flux condensés unitaires aux flux condensés réels	129
3.1.2.2	Structure de l'opérateur de trace condensée unitaire	130
3.1.2.3	Spécification des produits scalaires condensés unitaires	132
3.1.2.4	Tensorisation de flux condensés 1D	132
3.1.3	Bilan : <i>Modus operandi</i> de construction	136
3.2	Application à plusieurs interfaces hp non-conformes	137
3.2.1	Configuration $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$	137
3.2.2	Configuration $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$	141
3.2.3	Configuration $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$	143
3.3	Étude numérique de la convergence et des coûts de calcul	150
3.3.1	Présentation des cas-tests	151
3.3.2	Évaluation de la convergence en h	152
3.3.3	Analyse de l'efficacité numérique	157
3.3.4	Remarques sur le comportement numérique de la solution approchée	161
3.4	Conclusion	163
4	Conception d'un algorithme de post-maillage solveur-adapté	165
4.1	Définition d'un cadre d'étude pour le déraffinement de maillage	166
4.1.1	Formalisation d'un processus de h -déraffinement par agglomération de mailles	166
4.1.2	Admissibilité des maillages agglomérés	170
4.1.2.1	Admissibilité géométrique	170
4.1.2.2	Admissibilité structurelle	173
4.1.2.3	Bilan	173
4.1.3	Fonction d'adaptation hp	174
4.2	Mise en place d'un algorithme de h -déraffinement/ p -enrichissement heuristique	174
4.2.1	Formulation d'un problème d'optimisation et mise en évidence des difficultés	174
4.2.2	Calcul et représentation des volumes agglomérables du maillage initial	177
4.2.2.1	Mise en place d'un algorithme naïf	177
4.2.2.2	Calcul optimisé des facteurs de déraffinement maximaux	179
4.2.3	Vers une stratégie d'agglomération hiérarchique	182
4.2.4	Partition du maillage initial en domaines d'agglomération	184

4.2.5	Heuristique d'agglomération dans les Δ -domaines	190
4.2.5.1	Bilan et validation sur des exemples élémentaires	195
4.3	Gestion des raffinements locaux	198
4.3.1	Cadre d'étude	198
4.3.2	Limitation induite par les configurations condensées disponibles et stratégie de raffinement adoptée	200
4.3.3	Mise en place de l'approche de raffinement	201
4.3.4	Impact sur l'algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement	205
4.4	Conclusion	206
5	Utilisation de la chaîne de calcul GDDT développée sur des cas-tests d'intérêt industriel	209
5.1	Présentation des cas-tests	210
5.1.1	Cas-test n° 1 : structure d'avion	210
5.1.2	Cas-test n° 2 : modèle simplifié de missile (GENEC)	211
5.1.3	Cas-test n° 3 : fente mince sur boîtier	212
5.2	Analyse des résultats de post-maillage	213
5.2.1	Cas-test n° 1	214
5.2.2	Cas-test n° 2	217
5.2.3	Cas-test n° 3	218
5.3	Étude des résultats de simulation	221
5.3.1	Cas-test n° 1	221
5.3.2	Cas-test n° 2	226
5.3.3	Cas-test n° 3	229
5.4	Conclusion	232
	Conclusion et perspectives	235
	Bilan sur la stratégie de post-maillage/résolution mise en place	235
	Pistes d'amélioration et extensions possibles des travaux réalisés	237
	Annexes	243
A	Impact du choix des fonctions de base et de l'intégration discrète sur la complexité intrinsèque du schéma GD	243
A.1	Approche nodale	244
A.1.1	Points de Gauss	244
A.1.1.1	Nombre de degrés de liberté	244
A.1.1.2	Taux de remplissage des matrices élémentaires	244
	Intégration exacte	244
	Intégration condensée	244
A.1.2	Points de Gauss-Lobatto	245
A.2	Approche modale	245
A.2.1	Nombre de degrés de liberté	245
A.2.2	Taux de remplissage des matrices élémentaires	245
A.3	Bilan	245
B	Démonstration des lemmes préliminaires à l'établissement de la condition CFL du schéma condensé	249
C	Autres exemples de flux condensés	253
C.1	Configuration $Q^1(h)/Q_m^1(h/10)$	253
C.2	Configuration $Q^2(2h)/Q_m^1(h)$	254
C.3	Configuration $Q^4(6h)/Q_m^2(3h)$	255

D Rappels sur l'injection d'un champ incident par une surface de Huygens	257
E Résultats numériques complémentaires	261
E.1 Convergence du schéma GDDT- Q^p en flux centrés	261
E.2 Convergence sur le maillage hp en damier	262
E.3 Illumination d'une carrosserie automobile par une source de courant ponctuelle	262

Table des figures

1	Diffraction d'un champ incident par un objet en espace libre.	18
2	Chaîne de calcul générale.	18
3	Exemple de grille cartésienne 3D à pas variable et localisation des degrés de liberté dans une cellule de Yee.	19
4	Approximation en marche d'escalier d'une géométrie courbe par un maillage cartésien.	19
5	Illustration 2D de la problématique liée au maillage d'une fente.	20
6	Exemples de maillages hp conforme et non-conforme. Les entiers associés à chaque cellule représente le degré d'approximation local du schéma spatial.	22
7	Exemples de maillages compatibles avec l'approche GD, permettant d'améliorer l'approximation des géométries.	23
8	Principales contraintes et problématiques sous-jacentes intervenant dans la conception d'une chaîne de calcul GDDT industrielle.	26
9	Fonctionnement général de la chaîne de calcul GDDT développée.	27
1.1	Exemples de configurations h conformes et h non-conformes dans le cas d'un maillage parallélépipédique. Les facettes intérieures \mathcal{F}_h^i sont représentées par des couleurs différentes.	36
1.2	Passage de l'élément de référence à l'élément réel.	42
1.3	Courbes de consistance de l'approximation spatiale pour les ordres 1 à 4.	51
1.4	Courbes de convergence du schéma GDDT pour les ordres 1 à 4.	52
1.5	Évolution du degré de résolution optimal en fonction du facteur de déraffinement du maillage initial et du stockage mémoire (en nombre de degrés de liberté, N_{ddl}) correspondant pour chaque configuration.	55
1.6	Évolution du degré de résolution optimal en fonction du facteur de déraffinement du maillage initial et du temps de calcul correspondant pour chaque configuration, adimensionné par rapport au temps de calcul du maillage initial t-CPU(réf).	56
1.7	Position qualitative des points d'observation de la figure 1.8.	57
1.8	Évolution des composantes E_x , E_y , et E_z en fonction du temps, en deux points de la cavité : point n° 1 = (0,3 ; 0,35 ; 0,38), point n° 2 = (0.61 ; 0.61 ; 0.61).	58
1.9	En haut : cartographie en plan de coupe de la composante E_x à $t = 9ns$ pour les configurations de référence Q^1 et optimales Q^2 , Q^3 et Q^4 . Le maillage de visualisation utilisé est de dimensions 100*100*100. En bas : maillage de résolution.	58
1.10	Post-traitement des données de la figure 1.9d par un logiciel de visualisation adapté à la représentation de solutions hp	59
1.11	Maillage hp non-conforme générique utilisé dans cette étude. Dans la suite, ce type de maillage sera noté $Q^p-(N/2)*N*N/Q^{p'}-(N'/2)*N'*N'$, où $h = \frac{1}{N}$ et $h' = \frac{1}{N'}$	60
1.12	Position qualitative des points d'observation de la figure 1.14.	62
1.13	Évolution des composantes E_x , E_y , et E_z en fonction du temps, en deux points de la cavité : point n° 1 = (0.3, 0.35, 0,38) et point n° 2 = (0.61, 0.61, 0.61) ; appartenant respectivement au domaine hp le plus grossier et au plus fin.	62
1.14	En Haut : cartographie en plan de coupe de la composante E_x à $t = 8ns$ pour les différentes configurations, conformes et non-conformes, considérées. Le maillage de visualisation utilisé est de dimensions 100*100*100. En bas : maillage de résolution.	63
1.15	Découpage d'un maillage hp non-conforme générique en deux domaines conformes.	64

1.16	Découpage d'un maillage hp non-conforme générique en deux domaines conformes raccordés par une interface non-conforme.	65
1.17	Équivalents 1D des situations de flux hp conformes (a, b, c) et non-conformes : (d, e). . .	67
2.1	Exemple générique de surface d'échange.	74
2.2	Contre-exemples de surfaces d'échange incomplètes au sens de la contrainte (2.2).	75
2.3	Contre-exemples de surfaces d'échange non-minimales au sens de la contrainte (2.3).	75
2.4	Transport d'une configuration hp non-conforme sur la configuration unitaire correspondante.	77
2.5	Représentation, sur un exemple de surface d'échange, des ensembles \mathbb{F}_S^- et $\tilde{\mathbb{F}}_S^-$ intervenant respectivement dans la définition des espaces \mathbb{Q}_S^- et $\tilde{\mathbb{Q}}_S^-$, et de l'application \tilde{T}_S^-	84
2.6	Raffinements d'un maillage non-conforme.	106
2.7	Raffinements homogènes de facteur N d'une configuration initiale, assurant la conservation du motif de non-conformité.	106
2.8	Décomposition du calcul des termes du schéma sur un exemple de maillage hp non-conforme.	106
2.9	Configuration 2D initiale.	108
2.10	Raffinements homogènes de la configuration initiale. Le paramètre N désigne le facteur de raffinement homogène par rapport à la configuration initiale et l'on a noté $h = \frac{h_{ini}}{N}$. On représente en (a) le maillage hp initial, (b) son raffinement d'un facteur $N = 2$, et (c) d'un facteur $N = 4$. Sont représentées, en haut, les configurations 2D, et en bas, le support 1D des flux non-conformes correspondants.	108
2.11	Représentation des fonctions u_e , v_e , et $u_e.v_e$ utilisées dans notre étude.	111
2.12	Convergence des formules de quadrature composite pour le calcul de $\int_{[-1,1]}^Q u_e.v_e dx$	111
2.13	Représentation des approximations u_h (à gauche), v_h (au milieu), $u_h.v_h$ (à droite) pour plusieurs facteurs de raffinement N , sur la configuration initiale $Q^2(h)/Q_m^1(\frac{h}{3})$. Dans chaque graphique, les traits pleins verticaux représentent la subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$ en les N éléments considérés, et ceux en pointillés représentent le découpage de chaque élément en 3 sous-morceaux.	113
2.14	Évolution de l'erreur de consistance des flux hp non-conformes en fonction de la finesse du maillage des configurations $Q_m^2(h)/Q_m^1(\frac{h}{3})$	114
2.15	Représentation des approximations u_h (à gauche), v_h (au milieu), $u_h.v_h$ (à droite) pour plusieurs facteurs de raffinement N , sur la configuration initiale $Q^4(h)/Q_m^2(\frac{h}{3})$. Dans chaque graphique, les traits pleins verticaux représentent la subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$ en les N éléments considérés, et ceux en pointillés représentent le découpage de chaque élément en 3 sous-morceaux.	115
2.16	Évolution de l'erreur de consistance des flux hp non-conformes en fonction de la finesse de maillage des configurations $Q_m^4(h)/Q_m^2(\frac{h}{3})$	116
2.17	Évolution de l'erreur de consistance des flux hp non-conformes en fonction de la finesse de maillage des configurations $Q_m^3(h)/Q_m^3(\frac{h}{3})$	117
2.18	Évolution de l'erreur de consistance des flux hp non-conformes en fonction de la finesse de maillage pour les configurations (a) $Q_m^2(h)/Q_m^1(\frac{h}{3})$ et (b) $Q_m^4(h)/Q_m^2(\frac{h}{3})$	118
3.1	Exemple de configuration hp non-conforme formant une surface d'échange tensorielle.	128
3.2	Exemples de surfaces d'échange non tensorielles : l'accoulement du côté "-" de l'interface est licite, alors que celui du côté "+" ne respecte pas le critère (3.5).	128
3.3	Exemple de surface d'échange tensorielle non prise en compte dans la suite des travaux.	128
3.4	Exemples de configurations non-conformes présentant la même topologie hp : le nombre d'éléments ainsi que les espaces d'approximation locaux mis en jeu sont identiques, et les facettes qui constituent les surfaces d'échange ne diffèrent que d'un facteur d'échelle.	129
3.5	Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accoulement hp non-conforme de type $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$	138
3.6	Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accoulement hp non-conforme de type $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$	141

3.7	Représentation, pour chaque type de degré de liberté (ddl) Q^2 du côté "-" de la surface d'échange unitaire, des degrés de liberté Q_m^1 du côté "+" utilisés pour le calcul de la contribution de flux hp non-conforme condensée unitaire.	143
3.8	Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accollement hp non-conforme de type $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$	144
3.9	Répartition de la part relative des degrés de liberté (ddl) "+" dans le calcul des degrés de liberté "-", pour la contribution de flux hp non-conforme condensée unitaire 1D. Le résultat pour les degrés de liberté "-" n° 4 et 5 s'obtiennent par symétrie.	148
3.10	Représentation, pour chaque type de degré de liberté (ddl) Q^4 du côté "-" de la surface d'échange unitaire, des degrés de liberté Q_m^2 du côté "+" utilisés pour le calcul de la contribution de flux hp non-conforme condensée unitaire.	150
3.11	Présentation des maillages hp utilisés dans cette étude. Le paramètre h désigne la taille des cellules de la grille cartésienne de référence à partir de laquelle ils ont été construits.	151
3.12	Plans de coupe de la configuration non-conforme du cas-test 4 et du maillage de référence (Q^1) associé, à l'étape initiale et après raffinement homogène d'un facteur 2.	153
3.13	Courbes de convergence pour les différents cas-tests. Les simulations sont effectuées avec un paramètre de décentrement $\beta_C = 1$ sur les interfaces conformes (flux décentrés), et avec un paramètre $\beta_{NC} \in \{0; 1\}$ sur les interfaces non-conformes.	154
3.14	Représentations qualitatives d'une situation d'iso-qualité inconditionnelle (a) et conditionnelle (b) entre la résolution de référence et une résolution sur maillage hybride.	157
3.15	Évolution du gain en temps de calcul unitaire (t-CPU _U , durée d'une itération temporelle) et en temps de calcul total (t-CPU) en fonction du facteur de raffinement homogène du maillage hp utilisé dans l'étude de consistance.	159
3.16	Évolution temporelle de la composante E_y en un point d'observation éloigné (a) (distant de plusieurs mailles) et proche (b) (localisé dans une maille de contact) de la zone d'interface hp non-conforme, dans la configuration du cas-test n° 2, et pour un temps final de simulation de $T_f = 100ns$	162
3.17	Maillage en damier.	162
3.18	Zoom sur les dernières périodes de la figure 3.16b ($\simeq 50$ périodes).	163
4.1	Exemples 2D de maillages déraffiné et aggloméré obtenus à partir d'un maillage initial \mathcal{T}_h^{ini}	167
4.2	Exemples 2D de volumes agglomérables sur le maillage initial \mathcal{T}_h^{ini} (à gauche) et sur un maillage aggloméré de \mathcal{T}_h^{ini} (à droite).	168
4.3	Introduction du volume agglomérable $A_{K,\Delta}$, avec $\Delta = (3, 2)$, au sein d'un maillage 2D.	169
4.4	Illustration en 2D des différents types de discrétisation d'objets dans le maillage initial.	170
4.5	Exemples 2D de maillages agglomérés obtenus à partir du maillage initial (a), satisfaisant (b) ou non (d,e,f) les conditions d'admissibilité géométrique.	172
4.6	Exemples (b) et contre-exemples (c) de maillages structurellement admissibles pour le panel des configurations condensées héritées du chapitre précédent, construits à partir de la configuration initiale (a).	173
4.7	Exemple 2D de la détermination du facteur d'agglomération maximal géométriquement admissible d'une maille germe (a,b,c,d,e), et représentation de l'ensemble des facteurs d'agglomération maximaux du maillage initial (e).	178
4.8	Facteurs d'agglomération 1D maximaux, en vert dans la direction x et en rouge dans la direction y	179
4.9	Facteurs d'agglomération maximaux provisoires 3D, majorant les valeurs réelles.	179
4.10	Première correction issue du test d'admissibilité géométrique des agrégats de facteurs 2.	179
4.11	Critère de compatibilité de la distribution de facteurs d'agglomération en 2D.	180
4.12	Seconde correction issue du critère de distribution des facteurs d'agglomération.	180
4.13	Maillages utilisés pour évaluer l'apport de chaque type d'agrégat dans les performances numériques d'une configuration hybride.	182
4.14	Gains en performances numériques du solveur GDDT condensé en fonction du maillage hp de la figure 4.13 utilisé.	183
4.15	Exemple de Δ -partition d'un maillage initial 2D, avec $\Delta = (3, 3)$	185

4.16	Autre exemple de (3, 3)-partition.	186
4.17	Exemples de Δ -partitions de types maximal ($card_{\Delta} = 2$) pour la configuration initiale de la figure 4.15.	188
4.18	Coupe des maillages 3D utilisés pour l'étude de l'impact de la répartition des agrégats dans les performances de résolution.	190
4.19	Gains en temps d'exécution du solveur associés aux configurations de la figure 4.18.	190
4.20	Exemple 2D du parcours des mailles germes dans les 2 premiers appels de la procédure récursive de parcours par adjacence, pour le Δ -domaine et la maille germe de départ considérés.	192
4.21	Ensemble des configurations agrégées possibles pour le Δ -domaine n° 1 de la figure 4.15, en suivant la procédure de parcours par adjacence.	194
4.22	Exemple d'adjacence non-admissible entre deux Δ -domaines (a) et introduction d'un Δ -domaine tampon (b,c) pour corriger le problème.	195
4.23	Exemple 2D de la sélection du sous-maillage $Q^2(3h)$ préliminaire à l'étape d'agglomération $Q^4(9h)$ au sein d'un Δ -domaine.	196
4.24	Mise en œuvre de l'algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement sur des cas-tests élémentaires. On représente à gauche les maillages initiaux (données d'entrée) et à droite les configurations hybrides générées par l'algorithme. La présence d'un matériau est manifestée par les cellules de couleur verte.	197
4.25	Introduction du sous-maillage $\mathcal{R}_{K,\Phi}$, avec $\Phi = (5, 3)$, au sein d'un maillage initial 2D.	199
4.26	Mise en place de raffinements récursifs dans un maillage 2D permettant l'introduction du sous maillage $\mathcal{R}_{K,\Phi}$, avec $\Phi = (8, 8)$, en respectant les contraintes d'admissibilité structurelles.	200
4.27	Raffinement auxiliaire minimal permettant l'introduction du sous-maillage de facteur 8.	201
4.28	Représentation équivalente du maillage raffiné de la figure 4.26c à partir des facteurs de raffinement du maillage initial.	202
4.29	Exemple 2D de l'introduction de sous-maillages disjoints de facteur $\Phi = (4, 4)$ conduisant à un maillage raffiné admissible.	203
4.30	Exemple 2D de l'introduction de sous-maillages d'intersection non-vide de facteur $\Phi = (4, 4)$ conduisant à un maillage raffiné admissible.	203
4.31	Exemple 2D d'une impossibilité d'introduire deux sous-maillages de facteurs différents et d'intersection non-vide.	204
4.32	Exemple 2D d'une utilisation complète du post-mailleur, avec h -raffinement et h -déaffinement/ p -enrichissement.	205
5.1	Description de la chaîne de calcul mise en place dans les chapitres précédents.	209
5.2	Géométrie de la structure d'avion utilisée dans le cas-test n° 1, et position qualitative des points d'observation de la solution numérique.	211
5.3	Configuration du domaine de calcul pour le cas-test n° 1.	211
5.4	Géométrie du GENEK utilisée dans le cas-test n° 2, et position qualitative des points d'observation de la solution numérique.	212
5.5	Configuration du domaine de calcul pour le cas-test n° 2.	212
5.6	Géométrie du boîtier avec ouverture utilisée dans le cas-test n° 3, et position qualitative des points d'observation de la solution numérique.	213
5.7	Configuration du domaine de calcul pour le cas-test n° 3.	213
5.8	Fonctionnement général de l'algorithme de post-maillage.	214
5.9	Fonctionnement du post-mailleur pour la génération du maillage initial $Q^1(h)$	214
5.10	Coupes du maillage initial (a,b,c) et des configurations hp obtenues avec l'algorithme de post-maillage à la suite de l'introduction de l'élément $Q^2(3h)$ (d,e,f), et de l'élément $Q^4(9h)$ (g,h,i), pour le cas-test n° 1.	215
5.11	Exemples de volumes non-agglomérables (entourés en vert) du fait de contraintes géométriques visibles dans le plan de coupe, et d'un volume <i>a priori</i> agglomérable (entouré en rouge), mais qui de fait ne l'est pas à cause de contraintes existantes mais non apparentes dans le plan de coupe.	216

5.12	Coupes du maillage initial (a,b,c) et des configurations hp obtenues avec l'algorithme de post-maillage à la suite de l'introduction de l'élément $Q^2(3h)$ (d,e,f), et de l'élément $Q^4(9h)$ (g,h,i), pour le cas-test n° 2.	217
5.13	Trace du maillage de calcul sur l'objet diffractant du cas-test n° 3, pour la configuration de référence (à gauche), la configuration d'entrée du post-maillage (au centre), et la configuration générée par l'algorithme de post-maillage (à droite).	219
5.14	Cartographie de l'énergie électromagnétique (EM) du champ diffracté sur un plan de coupe orthogonal à l'axe de lacet (Oy), à différents temps de simulation, pour la résolution Q^1 de référence (colonne de gauche), hybrides Q^1/Q^2 (colonne centrale) et $Q^1/Q^2/Q^4$ (colonne de droite).	222
5.15	Cartographie de l'énergie électromagnétique (EM) du champ diffracté sur un plan de coupe orthogonal à l'axe de tangage (Oz), à différents temps de simulation, pour la résolution Q^1 de référence (colonne de gauche), hybrides condensées Q^1/Q^2 (colonne centrale) et $Q^1/Q^2/Q^4$ (colonne de droite).	223
5.16	Évolution temporelle des composantes E_x , E_z , H_x et H_z du champ électromagnétique diffracté du premier cas-test, aux points d'observation n° 1 (0.15, 0, -0.38), n° 2 (3.92, 0, 2.07), et n° 3 (8.51, -4.47, -0.10), localisés qualitativement sur la figure 5.2.	224
5.17	Cartographie de l'énergie électromagnétique (EM) extérieure au GENEC sur un plan de coupe orthogonal à (Oz), à différents temps de simulation, pour la résolution Q^1 de référence (colonne de gauche), hybrides condensées Q^1/Q^2 (colonne centrale) et $Q^1/Q^2/Q^4$ (colonne de droite).	227
5.18	Évolution temporelle des composantes E_x , E_y , et H_y du champ électromagnétique du deuxième cas-test, aux points d'observation n° 1 (0.24, 0.36, 0.08), n° 2 (0.48, 0.45, 0.13), et n° 3 (0.68, 0.25, 0.13), localisés qualitativement sur la figure 5.4.	228
5.19	Cartographie de la composante E_y (a), H_y (b), et de l'énergie électromagnétique (EM) (c) de la solution hybride condensée sur un plan de coupe dans l'axe de la fente (à gauche) et orthogonale à celle-ci (à droite), au temps $t = 5ns$	230
5.20	Évolution temporelle de la composante E_y aux points d'observation n° 1 (0.522, 0.532, 0.477), n° 2 (0.522, 0.532, 0.492), et n° 3, (0.522, 0.532, 0.502), localisés qualitativement sur la figure 5.6.	231
C.1	Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement hp non-conforme de type $Q^1(h)/Q_m^1(h/10)$	253
C.2	Courbes de convergence pour la configuration $Q^1(h)/Q_m^1(h/10)$ sur le cas-test de cavité métallique (propagation du mode (1,1,1) avec $T_f = 5ns$).	254
C.3	Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement hp non-conforme de type $Q^2(2h)/Q_m^1(h)$	254
C.4	Courbes de convergence pour la configuration $Q^2(2h)/Q_m^1(h)$ sur le cas-test de cavité métallique (propagation du mode (1,1,1) avec $T_f = 5ns$).	255
C.5	Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement hp non-conforme de type $Q^4(6h)/Q_m^2(3h)$	255
C.6	Courbes de convergence pour la configuration $Q^4(9h)/Q_m^2(6h)$ sur le cas-test de cavité métallique (propagation du mode (1,1,1) avec $T_f = 5ns$).	256
D.1	Mise en place d'un cas-test de diffraction en espace libre sur un domaine de calcul borné, via l'introduction d'une surface de Huygens.	258
E.1	Courbes de convergence du schéma GDDT en flux centrés pour les ordres 1, 2 et 4, sur le cas-test des modes de cavité résonante (voir paragraphe 1.4.3).	261
E.2	Courbes de convergence sur le cas-test du damier (voir figure 3.17), pour les différents types de résolution GDDT (propagation du (1,1,1)-modes de cavité avec $T_f = 5ns$).	262
E.3	Présentation du cas-test de la carrosserie automobile, et localisation qualitative du point source de courant J_S et des deux points d'observations.	263
E.4	Cartographie de l'énergie électromagnétique (EM) au temps final de simulation dans un plan de coupe, pour la résolution GDDT de référence, hybride classique, et hybride condensée.	264

E.5	Évolution temporelle de la composante E_y aux points d'observation n° 1 et n° 2.	264
-----	--	-----

Liste des tableaux

1.1	Points et poids de Gauss-Lobatto sur $[-1; 1]$ pour les ordres 1 à 4.	44
1.2	Degré par direction des termes $A_{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\alpha}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$	46
1.3	Étude de consistance de l'approximation spatiale pour un pas de temps sur-contraint, avec h la dimension des cellules, $N_{mailles}$ le nombre d'éléments du maillage, N_{ddl} le nombre de degrés de liberté, $\mathcal{E}rr$ l'erreur de simulation, et "taux cv." le taux de convergence entre deux configurations successives.	50
1.4	Valeurs maximales, en flux décentrés, du rapport $\frac{\sqrt{3}c_0 \Delta t}{h}$ en fonction de l'ordre de résolution, assurant la stabilité du schéma.	51
1.5	Données de convergence du schéma GDDT pour un pas de temps CFL, avec h la dimension des cellules, $N_{mailles}$ le nombre d'éléments du maillage, N_{ddl} le nombre de degrés de liberté, $\mathcal{E}rr$ l'erreur de simulation, et "taux cv." le taux de convergence entre deux configurations successives.	52
1.6	Configuration hp optimales et performances numériques associées. Le temps de calcul (t-CPU) est adimensionné par rapport à la résolution Q^1 de référence.	56
1.7	Gains en stockage mémoire et en temps d'exécution des différents maillages hp optimaux par rapport à la configuration de référence.	57
1.8	Performances numériques des différents maillages hp conformes et non-conformes. Les temps d'exécution (t-CPU) sont adimensionnés par rapport à la résolution Q^1 de référence.	61
1.9	Gains en stockage mémoire et en temps d'exécution des différents maillages hp par rapport à la configuration de référence.	63
1.10	Pourcentage du temps d'exécution total du solveur passé dans le calcul des différents termes du schéma. Seules les contributions principales sont renseignées, ce qui explique que le total de chaque ligne ne vaut pas 100%. Le pourcentage restant correspond au temps de lecture de données d'entrée, de recopie des champs (pour le schéma temporel), et d'écriture de fichiers de sortie.	65
1.11	Nombre d'accès mémoire aux degrés de liberté et d'évaluations des fonctions de base nécessaires au calcul des flux centrés et décentrés mis en jeu dans les configurations hp non-conformes de notre étude.	67
1.12	Nombre total en millions d'accès mémoire aux degrés de liberté et d'évaluation des fonctions de base pour une itération temporelle du solveur GDDT, dans les configurations de la figure 1.14.	68
2.1	Détail des différentes formules de quadrature utilisées.	111
3.1	Données de convergence sur le cas-test n° 1, pour les résolutions de référence $Q^1(h)$ et hybrides $Q^1(h)/Q^1(\frac{h}{2})$, avec flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) classiques et condensés. . . .	155
3.2	Données de convergence sur le cas-test n° 2, pour les résolutions de référence $Q^1(h)$ et hybrides $Q^2(3h)/Q^1(h)$, avec flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) classiques et condensés. . . .	155
3.3	Données de convergence sur le cas-test n° 3, pour les résolutions de référence $Q^1(h)$ et hybrides $Q^4(9h)/Q^2(3h)$, avec flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) classiques et condensés. . .	155
3.4	Données de convergence sur le cas-test n° 4, pour les résolutions de référence $Q^1(h)$ et hybrides $Q^4(9h)/Q^2(3h)/Q^1(\frac{h}{2})$, avec flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) classiques et condensés. 156	156

3.5	Gain en stockage mémoire entre le maillage de référence et la configuration hybride correspondante.	158
5.1	Données caractéristiques du maillage initial $Q^1(h)$ et des configurations hybrides générées par le post-mailleur, gain en nombre de degrés de liberté de ces configurations hybrides par rapport au maillage initial (Gain $ddl=N_{ddl}^{ini}/N_{ddl}$), et gain correspondant en temps d'exécution du post-mailleur (Gain $t\text{-CPU}=t\text{-CPU}^{ini}/t\text{-CPU}$) pour le cas-test n° 1.	215
5.2	Données caractéristiques du maillage initial $Q^1(h)$ et des configurations hybrides générées par le post-mailleur, gain en nombre de degrés de liberté de ces configurations hybrides par rapport au maillage initial (Gain $ddl=N_{ddl}^{ini}/N_{ddl}$), et gain correspondant en temps d'exécution du post-mailleur (Gain $t\text{-CPU}=t\text{-CPU}^{ini}/t\text{-CPU}$) pour le cas-test n° 2.	218
5.3	Données caractéristiques du maillage initial $Q^1(h)$ et des configurations hybrides générées par le post-mailleur, gain en nombre de degrés de liberté de ces configurations hybrides par rapport au maillage initial (Gain $ddl=N_{ddl}^{ini}/N_{ddl}$), et gain correspondant en temps d'exécution du post-mailleur (Gain $t\text{-CPU}=t\text{-CPU}^{réf}/t\text{-CPU}$) pour le cas-test n° 3.	219
5.4	Comparaison des pas de temps de simulation utilisés (Δt) et des gains en temps de calcul du solveur (Gain $t\text{-CPU}=t\text{-CPU}^{réf}/t\text{-CPU}$), pour les résolutions sur maillage de référence et sur maillage hybride relatives au cas-test n° 1.	225
5.5	Comparaison des pas de temps de simulation utilisés (Δt) et des gains en temps de calcul du solveur (Gain $t\text{-CPU}=t\text{-CPU}^{réf}/t\text{-CPU}$), pour les résolutions sur le maillage de référence et sur les maillages hybrides du cas-test n° 2.	229
5.6	Comparaison des pas de temps de simulation utilisés (Δt) et des gains en temps de calcul du solveur (Gain $t\text{-CPU}=t\text{-CPU}^{réf}/t\text{-CPU}$), pour les résolutions $Q^1(h)$ sur le maillage de référence, $Q^1(5h/n)/Q^2(15h)$ sur le maillage hybride, et DFDT avec sous-modèle, relatives au cas-test n° 3.	231
A.1	Valeurs de κ_p , pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$	245
A.2	Nombre de degrés de liberté des différentes approches GD considérées, pour un maillage comportant N éléments. À titre indicatif, le nombre de degrés de liberté requis par le schéma de Yee est d'environ $6N$	246
A.3	Taux de remplissage des matrices élémentaires des différentes approches GD considérées, sur l'élément K et pour un degré d'approximation p (une valeur de 1 signifiant que la matrice est pleine).	246
A.4	Calcul du nombre de degrés de liberté des différentes approximations GD pour un maillage comportant N éléments et pour un degré d'approximation de $p \in \{1, 2, 3, 4\}$	246
A.5	Calcul du taux de remplissage des matrices élémentaires sur l'élément K et pour un degré d'approximation $p \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ces valeurs représentent le pourcentage de non-zéros sur un total de $(p + 1)^6$ coefficients pour les approches nodales, et de κ_p^2 coefficients pour l'approche modale.	247
E.1	Gains en stockage mémoire ($N_{ddl}^{réf}/N_{ddl}$) et en temps de calcul ($t\text{-CPU}^{réf}/t\text{-CPU}$) pour les résolutions GDDT sur le maillage de référence et sur le maillage hybride.	265

Introduction

Cette thèse a été réalisée au sein du département de Recherche et Développement de l'entreprise Nuclétudes, filiale d'ArianeGroup spécialisée dans les domaines du durcissement, c'est-à-dire de la protection des systèmes et des équipements contre les effets des environnements radiatifs intenses. Ces environnements peuvent être d'origine naturelle (foudre, vent solaire, ceintures de radiation, etc.) ou artificielle (explosion nucléaire, fusion à confinement inertiel, arme à énergie dirigée, etc.). Les problématiques de durcissement impactent ainsi plusieurs secteurs d'activité, aussi bien militaires que civils, avec des applications pour le spatial, la défense, l'aéronautique et l'industrie nucléaire.

Notre étude porte sur la conception d'une chaîne de calcul numériquement performante basée sur la méthode Galerkin Discontinue en Domaine Temporel (GDDT), pour la résolution numérique des équations de Maxwell 3D instationnaires.

Du durcissement à l'électromagnétisme numérique

Tout système complexe présente une vulnérabilité aux rayonnements électromagnétiques ou particuliers (photons, neutrons, protons, ions lourds, etc.) pouvant, en cas d'exposition intense ou prolongée, conduire à des dysfonctionnements, à une diminution de sa durée de vie, voire à le rendre inopérant. Cette vulnérabilité se manifeste principalement au niveau de l'électronique et de la structure mécanique des systèmes, avec par exemple l'apparition de courants parasites susceptibles de dégrader les composants (cartes, câbles, etc.) ou de phénomènes thermiques pouvant causer des déformations de matériaux.

Dans ce contexte, le durcissement renvoie à l'ensemble des méthodes permettant de protéger les systèmes et les équipements contre les environnements radiatifs ou électromagnétiques. Ces méthodes peuvent être d'ordre logique, via une conception adaptée des circuits électroniques, ou matériel, avec des techniques de blindage limitant la pénétration des rayonnements. Dans ce dernier cas, la difficulté réside principalement dans le dimensionnement du blindage utilisé, car, en impactant la masse du système, il peut altérer ses performances et sa fiabilité. En conséquence, une expertise de grande précision est requise pour évaluer finement la vulnérabilité des équipements selon le type d'agression, afin de ne pas empiler des marges de sécurité trop lourdes conduisant à des solutions de durcissement trop contraignantes. Cette expertise repose d'une part sur des résultats expérimentaux et d'autre part sur des simulations numériques permettant de reproduire sur ordinateur certains des phénomènes physiques mis en jeu.

Ainsi, de nombreux moyens d'essais ont été développés pour recréer expérimentalement certains environnements (chambres réverbérantes à brassage de modes, générateurs d'impulsions électromagnétiques, canon à électrons, etc.), dans le but par exemple de tester la résistance de composants à une agression donnée, ou de calibrer des modèles physiques. Cependant, la simulation numérique demeure indispensable, pour deux raisons principales. Tout d'abord, elle permet d'accélérer et de baisser les coûts de la phase de conception des solutions de durcissement en évitant un recours systématique aux dispositifs expérimentaux, qui peuvent alors être utilisés comme outils de validation finale. D'autre part, elle reste le seul moyen d'estimer la vulnérabilité d'un système lorsque les conditions expérimentales sont inaccessibles, c'est-à-dire lorsqu'aucun moyen d'essai ne permet de s'approcher des conditions réelles d'agression, ou que les systèmes sont de trop grandes dimensions pour être contenus dans le volume expérimental du moyen d'essai. Si une partie des besoins en simulation numérique trouve une

réponse dans des logiciels commerciaux, certains besoins spécifiques nécessitent le développement de codes de calcul en propre. La brique de base dans le fonctionnement de ces logiciels est la simulation des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques, régis par les équations de Maxwell, en domaine temporel ou fréquentiel : on parle d'électromagnétisme numérique. Cette brique de base est généralement intégrée à des codes de calcul liés à des phénomènes plus complexes, notamment la simulation des plasmas via les approches "Particle In Cell" (PIC) [1].

Dans cette thèse, nous nous intéressons exclusivement à la simulation numérique des équations de Maxwell 3D dans le domaine temporel. La résolution dans le domaine fréquentiel ne paraît pas pertinente du fait des termes sources large bande utilisés dans les applications. Le problème type que nous considérons est l'illumination d'un objet diffractant par un champ incident en espace libre, voir figure 1.

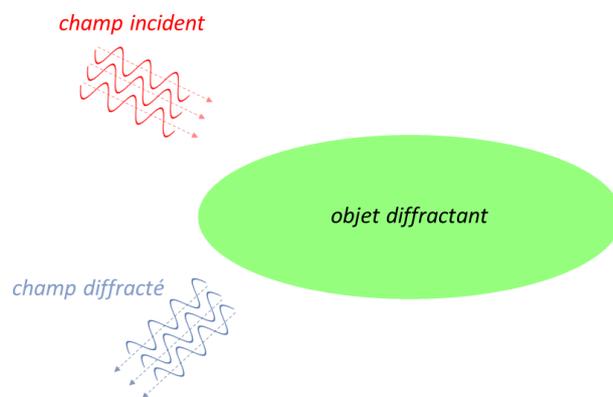


FIGURE 1 – Diffraction d'un champ incident par un objet en espace libre.

La chaîne de calcul Différences Finies

Le processus de simulation numérique s'organise en plusieurs étapes formant une chaîne de calcul représentée sur la figure 2. Elle se compose principalement de quatre éléments. Tout d'abord, un modelleur, permettant une description fidèle des contours de l'objet considéré via un logiciel de CAO (Conception Assistée par Ordinateur). À partir de ces données, le mailleur assure la discrétisation de la géométrie et du domaine de calcul, sous la forme d'une partition volumique généralement formée de tétraèdres ou d'hexaèdres (ou des deux types d'éléments, on parle alors de maillage hybride). S'ensuit le solveur, chargé de la résolution approchée des équations dans le domaine de calcul à l'aide d'un schéma numérique. Enfin, la dernière brique de la chaîne de calcul est le visualisateur, permettant de représenter graphiquement la solution calculée par le solveur. Le mailleur et le solveur ont un statut particulier dans la chaîne de calcul : ils définissent la méthode numérique de résolution utilisée.

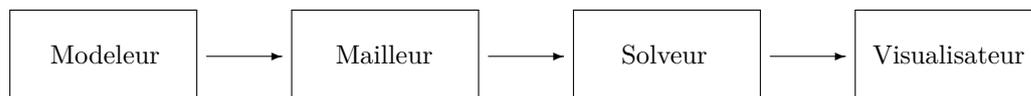


FIGURE 2 – Chaîne de calcul générale.

La méthode la plus répandue dans l'industrie pour résoudre numériquement les équations de Maxwell a été introduite par K. S. Yee en 1966 [2]. Il s'agit d'un schéma Différences Finies (DF) basé sur une approximation de type saute-mouton ("leapfrog") en espace et en temps. Le domaine de calcul est discrétisé par une grille cartésienne sur laquelle les inconnues des champs électriques et magnétiques sont décalées d'un demi-pas d'espace, voir figure 3. Lorsque la discrétisation est régulière, le schéma résultant est d'ordre 2 en espace et en temps, peu coûteux en ressources informatiques (charge mémoire et temps de calcul) et relativement aisé à implémenter.

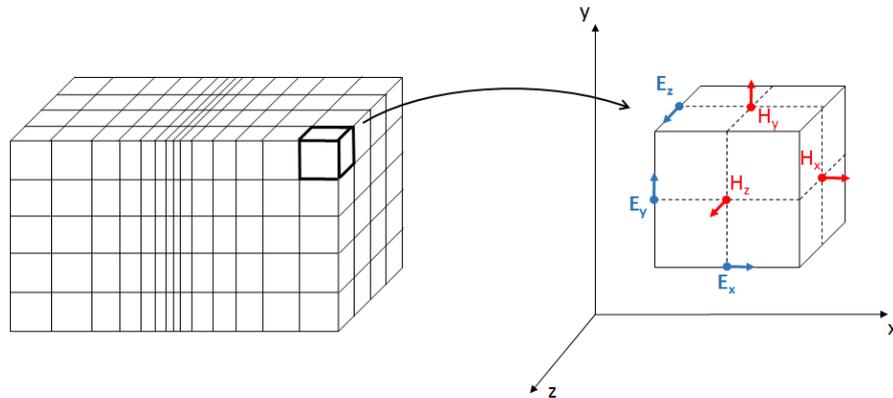


FIGURE 3 – Exemple de grille cartésienne 3D à pas variable et localisation des degrés de liberté dans une cellule de Yee.

De nombreux enrichissements ont été apportés pour rendre cette méthode utilisable pour des scènes de calcul de plus en plus complexes et réalistes, ce dans le but de suivre l'évolution des normes de qualification et des besoins industriels. Ainsi, plusieurs modèles physiques ont été développés pour les matériaux minces et les structures filaires [3][4][5] et plus récemment les matériaux composites [6], permettant une meilleure approximation des structures pouvant comporter des éléments d'échelles différentes. Afin d'améliorer la qualité des simulations en espace libre, plusieurs méthodes ont vu le jour, telles que les conditions aux limites absorbantes ABC ("Absorbing Boundary Condition") [7] ou les couches PML ("Perfectly Matched Layer") [8]. L'utilisation du schéma de Yee a également été élargie à des phénomènes physiques plus complexes tels que la modélisation des plasmas, avec le développement de la méthode PIC permettant la résolution numérique des équations de Maxwell-Vlasov.

Cependant, la chaîne de calcul Différences Finies présente de nombreux inconvénients. Un premier point bloquant concerne l'approximation en marches d'escalier des géométries courbes, voir figure 4, pouvant faire chuter la précision globale de l'ordre 2 à l'ordre 1 voire 0 [9][10].

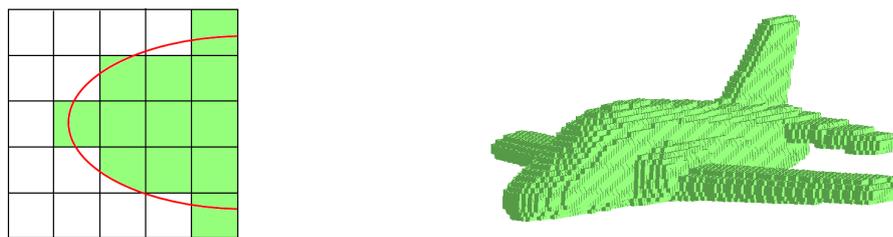


FIGURE 4 – Approximation en marche d'escalier d'une géométrie courbe par un maillage cartésien.

Une deuxième limitation, provenant de la rigidité des maillages, concerne la discrétisation des géométries multi-échelles. En effet, la conformité exigée dans l'accolement des cellules provoquant la propagation des contraintes locales du maillage, la représentation d'éléments de taille négligeable devant la dimension caractéristique du domaine de calcul devient rapidement trop coûteuse en stockage mémoire. Bien que l'utilisation de maillages à pas variable soit possible, la dilatation des mailles doit être progressive pour ne pas créer d'instabilité et ne peut pas excéder un facteur 1,2 par direction [5][11], ce qui n'est pas suffisant pour corriger le problème. De plus, on peut observer un ordre de convergence réduit, située entre 1 et 2, sur de tels maillages. En conséquence, la prise en compte d'éléments singuliers tels que les fentes et les fils, ainsi que les phénomènes liés aux matériaux minces (impédance de surface, effet de peau, etc.), est généralement assurée par l'introduction de modèles sous-cellulaires approchés. Ces

modèles, correspondant à des équations supplémentaires adjointes au schéma de Yee, posent deux problèmes principaux. Tout d'abord, ils peuvent provoquer l'instabilité du schéma, résultant de l'impact du sous-modèle sur l'approximation spatiale, ou de la modification de la constante CFL. Enfin, ils nécessitent une étape de mise en données du cas-test complexe et fastidieuse, où l'utilisateur doit renseigner le type de modèle à utiliser et l'ensemble des mailles concernées, ce qui peut requérir un temps ingénieur non négligeable.

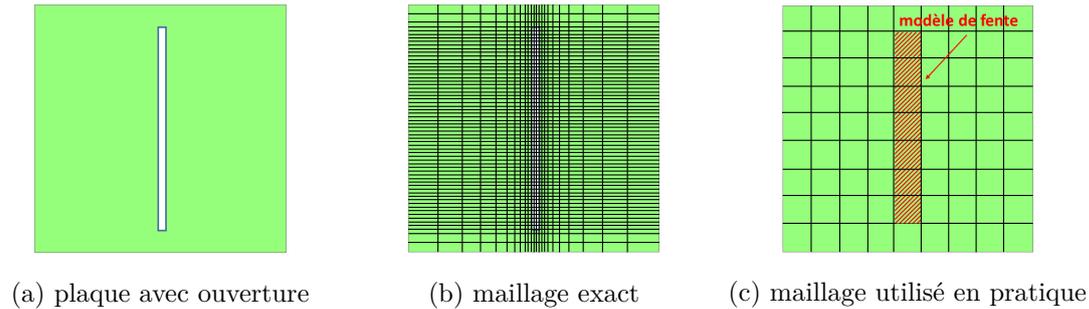


FIGURE 5 – Illustration 2D de la problématique liée au maillage d'une fente.

Enfin, le schéma de Yee est pénalisé par une importante erreur de dispersion. De manière générale, un schéma possède deux types d'erreurs numériques, l'une en dissipation, provoquant une atténuation de l'amplitude du signal, l'autre en dispersion, qui est une modification de la vitesse de propagation induisant un déphasage du signal. Il est montré dans [12] que le schéma de Yee est purement dissipatif, du fait des différences finies centrées en espace. Ce phénomène de dispersion, accentué dans le cas de maillages à pas variable [11], est particulièrement pénalisant pour les simulations dans des cavités résonantes ou pour des temps d'observation importants.

L'ensemble de ces difficultés ont motivé la recherche de méthodes numériques alternatives, afin, soit de remplacer le schéma de Yee, soit d'en venir en support par le biais d'approches hybrides, l'objectif général étant d'améliorer la qualité des simulations.

Recherche d'une alternative au schéma de Yee et motivations pour l'approche Galerkin Discontinue

De nombreux travaux ont été menés afin de pallier les limitations du schéma de Yee présentées précédemment, l'objectif étant de ne pas perdre l'ensemble des enrichissements produits ces quarante dernières années et qui en font l'outil industriel le plus mature en électromagnétisme numérique.

Une première partie de ces travaux vise à réduire l'erreur de dispersion du schéma. Les approches les plus abouties consistent à mettre en place un schéma de Yee d'ordre élevé [13][14][15]. Pour ce faire, des développements de Taylor plus poussés sont utilisés pour approcher les dérivées spatiales, ce qui nécessite un stencil de points élargi. L'erreur de dispersion est significativement réduite, mais le recours à un stencil de points plus étendu pose de nombreuses complications, notamment dans la gestion des conditions aux limites, que ce soit au bord du domaine de calcul ou à l'interface entre les matériaux. Pour pallier cette difficulté, une méthode DF d'ordre élevé sur stencil compact a été élaborée dans [11]. Elle se présente comme une réinterprétation du schéma de Yee via une approche Éléments Finis, permettant de monter l'ordre d'approximation sans élargir le stencil.

La seconde partie des travaux menés portent sur l'amélioration de la prise en compte des géométries complexes. Pour ce faire, un premier angle d'attaque concerne l'utilisation de maillages conformes non-orthogonaux basés sur des déformations locales des mailles proches des courbures (méthodes "contour-path") [16][17]. Ces méthodes permettent une meilleure prise en compte des géométries courbes, mais le traitement des cellules déformées dépend du type de matériau à la limite. Le processus est maîtrisé dans le cadre de frontières parfaitement métalliques, mais peut provoquer des instabilités dans

le cas d'interfaces plus générales [18]. Une deuxième approche concerne cette fois l'introduction de raffinements locaux, afin d'assurer une meilleure gestion des géométries multi-échelles [19]. Ces méthodes se basent sur l'introduction de cellules fictives et de conditions de transmission sophistiquées au niveau des interfaces entre les sous-grilles du maillage. Elles sont généralement adjointes à une approche AMR ("Adaptive Mesh Refinement" [20]) avec des raffinements d'un facteur maximum de 2 pour limiter l'erreur de dispersion [21]. Cependant, la plupart de ces méthodes ont été développées en 2D et montrent des problèmes de stabilité. Une autre limitation est l'apparition de réflexions parasites au niveau des interfaces non-conformes. Une approche de raffinement spatio-temporel étendue au 3D a été développée dans [22], mais nécessite l'inversion d'un système linéaire au niveau des interfaces non-conformes, pouvant ainsi provoquer une augmentation significative du temps d'exécution.

Par ailleurs, de nombreuses méthodes, basées sur des principes différents que ceux des Différences Finies, ont également été développées ou adaptées pour la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel.

Ainsi, la méthode des Volumes Finis (VF, ou "Finite Volume in Time Domain, FVTD"), issue de la simulation en mécanique des fluides, a commencé à être appliquée en électromagnétisme dans les années 1990. Elle se base sur une formulation conservative hyperbolique des équations de Maxwell et calcule une solution approchée constante par morceaux sur le maillage. Elle a l'avantage de présenter de faibles coûts de calcul, d'offrir une bonne gestion des discontinuités de la solution et d'être compatible avec des maillages déstructurés et non-conformes, permettant une bonne modélisation des géométries complexes. Ce schéma est cependant généralement pénalisé par un faible ordre de résolution (n'excédant pas 2) et par une importante erreur de dispersion ou de dissipation, selon le type de flux utilisé, centré ou décentré. Par ailleurs, les travaux menés dans [23] ont montré qu'une résolution sur maillage non-conforme par un schéma VF centré associée à une discrétisation temporelle explicite de type "leapfrog" s'accompagne de phénomènes de dispersion et de réflexions parasites qui dégradent significativement la qualité de la solution. Pour pallier ces limitations, des approches permettant d'augmenter l'ordre de la méthode sont étudiées, comme la méthode MUSCL ("Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws") [24][25].

Dans le but d'obtenir un ordre élevé de résolution, une méthode largement développée est celle des Éléments Finis (EF, ou "Finite Element Method, FEM"), basée sur une formulation variationnelle des équations de Maxwell. Dans cette approche, la solution est calculée sur un espace d'approximation de dimension finie. Pour une base donnée de cet espace, les coordonnées de la solution approchée sont alors appelées degrés de liberté. Initialement utilisée pour des applications en génie civil et en mécanique, son extension à l'électromagnétisme fut complexe car les éléments finis nodaux classiques ne sont pas adaptés à la physique des équations de Maxwell (conditions d'interface, relations de divergence) et peuvent produire des solutions non physiques. Adaptés à l'opérateur rotationnel, les éléments d'arêtes de Nédélec introduits dans les années 1980 ont permis de résoudre ce problème en assurant une condition de type "inf-sup" [26][27]. Un point fort de l'approche EF est d'être compatible avec des maillages déstructurés, permettant une bonne approximation des géométries complexes. Cependant, ces maillages doivent respecter plusieurs contraintes. Par exemple, ils doivent être conformes et le facteur de dilatation entre deux volumes adjacents ne doit pas excéder une certaine valeur dépendant de l'ordre de résolution utilisé. Ainsi, dans le cas de géométries multi-échelles, la génération de maillages assurant des performances numériques avantageuses est un problème délicat. Par ailleurs, bien que ces méthodes permettent d'améliorer la précision des calculs en introduisant des fonctions de base d'ordre élevé, elles peuvent engendrer des coûts de calcul conséquents, liés à l'assemblage et à l'inversion d'une matrice de masse globale sur le maillage. Les techniques de condensation (ou "lumping"), utilisées par exemple dans [11], sont alors nécessaires pour retrouver des temps d'exécution abordables.

Dans un registre similaire, une méthode présentant une grande flexibilité aux maillages et aux espaces d'approximation est la méthode Galerkin Discontinue (GD), développée dans les années 1970 par Reed et Hill [28] pour la résolution numérique de l'équation de transport des neutrons. Son champ d'application a par la suite été étendu de la mécanique des fluides compressibles [29][30] à l'électromagnétisme [31][32], en passant par la modélisation des plasmas [33], l'aérodynamique [34] et l'acoustique [35]. Elle peut être interprétée comme une approche VF d'ordre élevé ou comme une approche EF discontinue, en ce qu'elle construit une solution approchée polynomiale par morceaux sur le maillage et discontinue entre les éléments. Chaque cellule est associée à un espace d'approximation

local, pouvant être choisi indépendamment des cellules voisines. L'ensemble forme alors un maillage hp , où h et p représentent respectivement la taille caractéristique et le degré d'approximation utilisé pour chaque cellule. Les paramètres h et p peuvent être constants sur le maillage, on parle d'approximation hp conforme, voir figure 6a, ou bien ils peuvent varier d'une cellule à l'autre, on parle alors d'approximation hp non-conforme, voir figure 6b. L'approche GD a été déclinée en une multitudes de schémas, selon le choix de la formulation (faible, ultra-faible), des fonctions de base (modales, nodales), du stencil de degrés de liberté dans le cas de fonctions de base nodales (Gauss, Gauss-Lobatto, etc.), ou du type de flux (centrés, décentrés, méthodes de pénalisation, etc.). Les principaux avantages de ces méthodes sont leur grande souplesse de maillage permettant une bonne prise en compte des géométries complexes, leur ordre élevé de résolution ajustable localement, et leur parallélisation naturelle [36]. La principale difficulté de cette approche est les coûts de calcul conséquents qu'elle implique, que ce soit en temps CPU ou en stockage RAM, qui limitent fortement son utilisation dans un contexte industriel.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

(a) maillage hp conforme à l'ordre 1

		1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	1				
		1	1	1	1				
1	1			1	1				3
1	1			1	1				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1									
1									
1									
1									
1									
1									
1									
1									

(b) maillage hp non-conforme

FIGURE 6 – Exemples de maillages hp conforme et non-conforme. Les entiers associés à chaque cellule représente le degré d'approximation local du schéma spatial.

Pour certains problèmes de propagation d'ondes en espace libre, la méthode des éléments finis de frontière ("Boundary Element Method, BEM") [37] permet de réduire significativement les coûts de résolution. Cette méthode se base sur une réécriture des équations de Maxwell sous la forme d'une équation intégrale sur la surface de l'objet diffractant via une formule dite de représentation. Cette intégrale est alors calculée numériquement. On voit ainsi que seul le maillage de la frontière de l'objet est nécessaire, ce qui permet de réduire d'une unité la dimension du problème considéré. Cependant, cette approche s'avère délicate si la frontière ou le milieu de propagation présente des hétérogénéités, car le noyau de Green du système différentiel résultant, utilisé dans la formule de représentation, n'est pas connu a priori. De plus, la singularité du noyau de Green de l'équation des ondes 3D instationnaires et la difficulté résultante d'obtenir un schéma numérique viable font que l'approche BEM est beaucoup mieux adaptée au domaine fréquentiel et est de fait assez peu utilisée en domaine temporel.

Notons également l'existence de méthodes dites asymptotiques, dont le calcul de la solution approchée ne dérive pas directement de la résolution numérique des équations de Maxwell. Par exemple, la méthode des Lignes de Transmission ("Transmission Line Method, TLM") [38][39], repose sur un système d'analogies entre la propagation des champs électromagnétiques dans un milieu et la propagation de courants dans un réseau de lignes de transmission, le champ électrique \mathbf{E} étant assimilé à une tension U , et le champ magnétique \mathbf{H} à un courant I . Le système d'équations aux dérivées partielles de Maxwell, d'inconnues \mathbf{E}, \mathbf{H} est alors approché par un système d'équations aux dérivées ordinaires, d'inconnues I, U , dont la résolution numérique devient moins complexe. Ainsi, l'avantage de cette méthode est d'être relativement simple à implémenter et peu coûteuse numériquement. Elle permet également une bonne modélisation des fils et des fentes. Cependant, la détermination des paramètres caractéristiques des lignes de transmissions permettant d'assurer l'équivalence entre les problèmes électromagnétiques et électriques, typiquement des valeurs de résistance, de conductance et d'inductance, peut s'avérer difficile, de même que l'établissement du domaine de validité de cette équivalence.

Par ailleurs, un domaine de recherche actif concerne également l'hybridation de ces méthodes

numériques, afin de concilier les avantages de chacune en les utilisant dans leur domaine de compétence privilégié. On retrouve par exemple des stratégies d'hybridation à bas ordre, comme celles présentées dans [40][41][42] conciliant un schéma DFDT et VFDT, ou d'ordre élevé, comme dans [43], basées sur une méthode d'éléments finis spectraux sur maillages quadrangulaires hybridée avec une méthode GDDT sur simplexes.

Du fait des problématiques et applications visées, l'approche GDDT est celle qui présente *a priori* d'intérêt le plus important. Tout d'abord, pour sa capacité à représenter finement les discontinuités physiques et les géométries complexes, grâce à la nature de l'approximation et la possibilité d'utiliser des éléments courbes ainsi que des configurations déstructurées et non-conformes, voir figure 7. Cela ouvre en particulier la voie à des stratégies de raffinements locaux permettant de retrouver une vraie représentation des singularités géométriques sans pénaliser l'ensemble du maillage, comme l'illustre la figure 7b, et ainsi de s'affranchir de certains modèles sous-cellulaires aux domaines de validité contraignants. La deuxième raison qui motive notre intérêt est la montée en ordre de la méthode, relativement aisée et peu intrusive du point de vue de l'implémentation, permettant selon le besoin de rehausser la qualité des simulations. Un point fort est également de pouvoir ajuster le degré d'approximation élément par élément, afin d'adapter localement la précision en fonction de la régularité des phénomènes à capter.

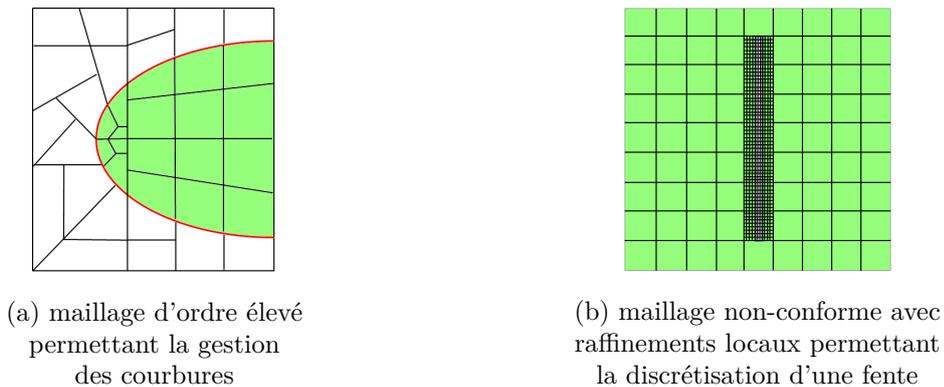


FIGURE 7 – Exemples de maillages compatibles avec l'approche GD, permettant d'améliorer l'approximation des géométries.

Cependant, comme évoqué précédemment, la méthode GDDT est fortement pénalisée par sa faible efficacité numérique d'une méthode de résolution, définie comme le temps CPU et le stockage mémoire à mobiliser pour atteindre une précision donnée. Or, l'efficacité numérique d'un schéma constitue un enjeu crucial car elle conditionne la complexité des cas traitables dans la limite des délais contractuels et des ressources informatiques disponibles. À ce titre, de nombreux travaux visant à améliorer les performances numériques de l'approche GD sont présents dans la littérature.

Une première partie de ces travaux étudie le type d'éléments, la formulation à adopter et les choix à effectuer lors de la discrétisation des équations afin de réduire la complexité algorithmique du schéma GD résultant. Ainsi, dans [44], une version dite "Line-Based" du schéma GD nodal est développée. Dans cette approche, le problème initial 3D est substitué par une série de sous-problèmes 1D, de sorte que les différentes contributions du schéma sont calculées sur un stencil restreint de degrés de liberté le long de chaque coordonnée. Les matrices obtenues sont alors jusqu'à fois 40 plus creuses que dans la formulation classique du schéma. Dans [45], une comparaison entre deux méthodes de calcul du terme de flux sur une interface non-conforme est effectuée. En dénombrant les opérations arithmétiques des deux approches, il est montré qu'un calcul par quadrature via une formule d'intégration numérique est moins coûteux qu'un calcul par projection nécessitant le calcul de matrices de passage entre les espaces d'approximation voisins. Par ailleurs, une nouvelle approche dite HDG ("Hybridizable Discontinuous Galerkin") concentre une part importante des recherches actuelles. Initialement développée pour les problèmes elliptiques [46], elle a été adaptée pour les équations de Maxwell en domaine fréquentiel [47] et plus récemment en domaine temporel pour un schéma temporel implicite [48]. Cette méthode cherche à réduire le nombre de degrés

de liberté ainsi que leur couplage au niveau des interfaces entre les cellules, et se base sur l'introduction de multiplicateurs de Lagrange pour représenter les traces de la solution sur les faces du maillage.

Plusieurs études prennent également en considération le schéma temporel associé au schéma GD. Dans [49], des coefficients multiplicateurs sont introduits sur les termes de flux afin d'obtenir une contrainte CFL moins restrictive, permettant d'utiliser des pas de temps jusqu'à deux fois plus élevés. Une autre stratégie, étudiée par exemple dans [31] et [50], consiste à introduire un schéma à pas de temps local, afin de ne pas être limité par la contrainte CFL des mailles de plus petites dimensions.

Une seconde partie de ces travaux se focalise davantage sur l'implémentation du schéma et sur les aspects de calcul haute performance. Ainsi, dans [50], une implémentation multi-GPU d'un schéma GD modal est mise en place, basée sur l'architecture CUDA. Sur un cas-test d'intérêt industriel, la solution développée a permis de diviser le temps de calcul d'un facteur 3 pour une parallélisation sur 16 cœurs. Dans [51], une stratégie de parallélisation est mise en place afin de limiter la perte d'accélération liée aux communications MPI. Cette stratégie repose sur un découpage du maillage en zones homogènes et sur des transferts de données asynchrones entre les différents cœurs. L'accélération résultante est alors proche de l'accélération théorique maximale.

Force est de constater que la grande majorité des travaux effectués afin d'améliorer l'efficacité numérique de la méthode GD, plutôt que de se situer au niveau global de la chaîne de calcul, se focalisent principalement sur le solveur. À ce jour, malgré les avancées obtenues, les coûts de calcul demeurent trop élevés pour envisager une utilisation industrielle systématique d'un schéma GD, sauf au prix d'un investissement matériel conséquent.

Problématiques et objectifs de la thèse

L'objectif à terme des travaux de Recherche et Développement initiés par Nuclétudes est d'améliorer la qualité de la modélisation et des simulations en électromagnétisme, aujourd'hui limitée par le schéma de Yee, comme nous avons vu précédemment. Pour ce faire, la stratégie envisagée est de réaliser une transition viable entre la chaîne de calcul DFDT de Yee et une chaîne de calcul GDDT utilisable pour des applications industrielles. La notion de viabilité recouvre ici trois aspects différents, représentant autant de contraintes qui jalonnent l'ensemble des travaux effectués (voir figure 8). Tout d'abord, un aspect de précision : la chaîne de calcul GDDT doit garantir le niveau de qualité exigé par l'utilisateur. Puis, un aspect de performance : elle doit présenter des coûts de calcul qui permettent son utilisation dans un contexte industriel, c'est-à-dire compatibles avec les échéanciers projets et les ressources informatiques disponibles. Enfin, un aspect d'ergonomie : elle doit être utilisable par un non spécialiste et nécessiter un temps ingénieur de mise en données le plus faible possible. La difficulté vient de ce que ces contraintes sont couplées les unes aux autres, bien qu'elles soient de natures différentes. Par exemple, la précision et les coûts de calcul d'une simulation résultent principalement du maillage *hp* et du schéma GD adoptés pour la résolution numérique. Or, pour un schéma donné, plusieurs maillages *hp* sont garants du même niveau de précision, mais un mauvais choix peut se traduire par des performances numériques rédhibitoires. La construction d'un maillage *hp* efficace pour le schéma GD considéré peut alors s'avérer très complexe et particulièrement fastidieuse pour l'utilisateur en charge de choisir les espaces d'approximation locaux en vue de satisfaire un critère de précision global. De même, pour une classe de maillages donnée, certains types de fonctions de base présenteront une meilleure efficacité numérique que d'autres et un mauvais choix peut conduire à des contre-performances. Ainsi, en toute vraisemblance, une chaîne de calcul GDDT répondant aux exigences de précision, performances et ergonomie, ne peut pas être obtenue simplement à partir de choix réalisés indépendamment sur chacun de ses maillons constitutifs. Au contraire, sa conception semble nécessiter une approche globale reposant *a priori* sur la maîtrise de plusieurs problématiques clés qui structurent ces travaux de thèse.

Une première problématique concerne la génération des maillages *hp* efficaces numériquement pour un solveur GDDT donné. En effet, comme nous venons de voir, la conception d'un maillage *hp* assurant la précision voulue et minimisant les ressources informatiques à mobiliser est au cœur de la contrainte d'ergonomie de la chaîne de calcul. Du fait de la complexité de la tâche, les maillages *hp* les plus souvent utilisés s'avèrent sous-optimaux, pour deux raisons. Tout d'abord, ils ne sont pas dédiés au solveur utilisé. Puis, les ordres de résolution locaux sont généralement choisis par l'utilisateur après que le maillage a été généré par un mailleur opérant indépendamment selon ses propres critères de qualité. En particulier,

cette méthodologie ne permet pas de prendre en compte une propriété qualitative de l'approche GD selon laquelle le meilleur compromis local en termes d'efficacité numérique est d'utiliser des cellules de dimensions les plus grandes possibles (h -déaffinement) associées à des ordres d'approximation élevés (p -enrichissement) et adaptés au niveau de précision voulu[52]. Ce processus d'adaptation hp paraît très prometteur en pratique, mais il relève davantage du problème d'optimisation que de l'ajustement manuel empirique. De fait, afin d'être efficace et ergonomique, il paraît essentiel que la mise en place d'une telle solution soit entièrement automatisée. Par ailleurs, celle-ci suppose la maîtrise *a priori* de la précision de la résolution numérique et sera d'autant plus efficace que le solveur présente des performances intrinsèques optimisées sur la classe de maillages hp considérée.

Ainsi, une deuxième question centrale concerne la définition d'un critère de précision clair et adapté à notre cadre d'étude, ainsi que la caractérisation des espaces d'approximation GD garants de ce critère. Dans l'entreprise, la qualité ingénieur de simulation est spécifiée en termes de précision DFDT pour un maillage cartésien donné. La conception de ce maillage résulte d'une expertise métier poussée et dépend non-trivialement de plusieurs facteurs, tels que la longueur d'onde que l'on souhaite capter, la taille du domaine de calcul, ou le temps de simulation durant lequel on souhaite capturer le signal avec fidélité. La précision DFDT obtenue sur ce maillage constitue alors une précision de référence permettant de définir un critère de qualification : pour un schéma GDDT donné, un maillage hp sera considéré comme admissible s'il induit une qualité au moins égale à celle de référence. À ce titre, une propriété intéressante permettant de faire le pont entre les résolutions DFDT et GDDT est la suivante : à iso-maillage, la précision du schéma de Yee est équivalente à celle obtenue par un schéma GD utilisant des fonctions de base de degré 1. Par ailleurs, si la préoccupation principale est de garantir *a minima* la précision de référence, il est crucial de ne pas aboutir à des simulations sur-précises, car les coûts de calcul peuvent alors devenir inutilement élevés. Cela nécessite en particulier d'examiner l'impact de la corrélation locale entre h et p sur la précision globale de la simulation.

Par la suite, une problématique centrale du point de vue des performances numériques concerne la création d'un solveur GD dont les algorithmes soient performants et le restent sur une classe de maillage hp suffisamment riche pour être d'intérêt industriel. Le point soulevé ici recouvre aussi bien des aspects relatifs aux schémas numériques (choix de la formulation, des flux, des fonctions de base, etc.), qu'aux algorithmes les mettant en œuvre et à l'implémentation utilisée (structures de données, parallélisation, etc.).

Enfin, un enjeu important est d'illustrer l'apport de la méthode GDDT par rapport à la méthode DFDT lorsque la précision est limitée à celle du schéma de Yee. Il est en effet nécessaire de distinguer la précision du schéma DFDT pur de celle obtenue en présence de modèles sous-cellulaires se basant généralement sur des considérations asymptotiques. Par ailleurs, ces derniers présentent deux inconvénients. D'une part, ils présentent parfois des domaines de validité restreints, et d'autre part ils peuvent alourdir le temps ingénieur de mise en données des cas-tests. Ainsi, une approche alternative à ces sous-modèles est d'utiliser des raffinements locaux de maillage, permis en GDDT, en limitant l'explosion du nombre de cellules à employer. Il s'agit donc d'inclure dans les aspects précédents une problématique de raffinement qui permettrait à l'utilisateur d'accroître volontairement la précision géométrique du maillage dans des zones prédéfinies afin de remplacer certains modèles sous-cellulaires.

Soulignons que l'incapacité à proposer une réponse, fût-elle partielle, à l'une des questions ci-dessus s'avèrerait bloquante pour proposer un candidat de chaîne de calcul satisfaisant nos objectifs.

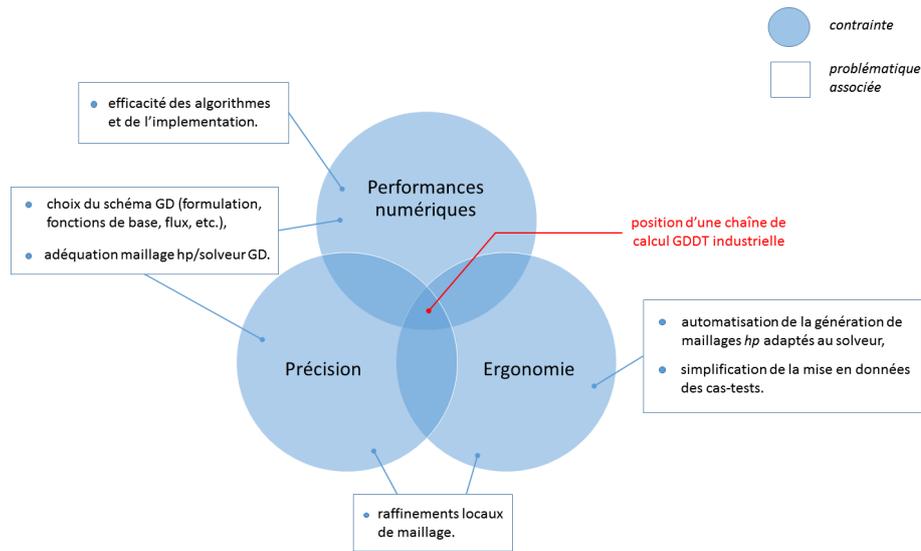


FIGURE 8 – Principales contraintes et problématiques sous-jacentes intervenant dans la conception d'une chaîne de calcul GDDT industrielle.

Solution proposée

Afin d'apporter une réponse aux différentes problématiques couplées présentées plus haut, nous proposons une stratégie globale portant à la fois sur le solveur GDDT et sur ses données d'entrée.

Précisons tout d'abord que les travaux effectués se restreignent aux maillages cartésiens, du fait des outils à disposition et du savoir-faire de l'entreprise autour des méthodes DFDT. Ce cadre d'étude s'avère privilégié du point de vue de la maîtrise de la précision et de la contrainte de performances numériques. En effet, d'une part, nous pouvons conserver le critère de qualité vu précédemment : une simulation est admissible si l'erreur commise est inférieure à celle de la résolution DFDT sur un maillage de référence donné. D'autre part, les structures de données informatiques utilisées pour la représentation des maillages cartésiens sont généralement plus légères que celles utilisées pour les maillages plus généraux (possibilité d'une tri-indexation des cellules). De plus, l'implémentation d'un schéma GD est plus aisée dans un cadre cartésien, car l'orientation des éléments est fixe et la notion de voisins à travers une face est facilement manipulable. Par ailleurs, un ensemble de maillages cartésiens conformes réalisés par des spécialistes et garants d'une précision DFDT de référence est disponible à Nuclétudes, ce qui représente une base de travail de qualité directement exploitable en DGDT. Remarquons que la satisfaction de nos objectifs dans ce cadre d'étude restreint et privilégié apparaît donc comme une condition *sine qua non* à la mise en place d'une chaîne de calcul GDDT industrielle plus générale.

Dans ce contexte, le point de départ de la solution proposée porte sur la conception d'un schéma GDDT aux performances intrinsèques optimisées sur les maillages hp cartésiens, conformes et non-conformes.

Afin de réduire la complexité du schéma, nous adoptons une approximation nodale aux points de Gauss-Lobatto. Ce choix permet en effet de maximiser le caractère creux des matrices locales de masse, de rigidité et de flux, via l'utilisation de méthodes d'intégration discrète par condensation [53]. Nous adoptons également une implémentation inspirée de la méthode "Line-Based" [44], qui, associée à une discrétisation temporelle explicite saute-mouton d'ordre 2, conduit à un schéma « matrix-free » numériquement efficace.

Cependant, nous mettons en évidence à travers plusieurs expériences numériques que l'utilisation de maillages hp non-conformes peut s'accompagner de contre-performances rédhibitoires au niveau du solveur. Nous montrons que ce phénomène, non référencé dans la littérature à notre connaissance, est dû au calcul classique des termes de flux au niveau des interfaces hétérogènes en p et/ou en h . Afin de s'affranchir de ce point bloquant, nous cherchons à généraliser la méthode de condensation

au calcul des flux hp non-conformes. Pour ce faire, une formulation originale du schéma GD adaptée aux approximations hybrides et généralisant la formulation usuelle est établie. Elle se base sur une redéfinition des termes de flux via l'introduction d'opérateurs de reconstruction de trace et de produits scalaires adaptés aux interfaces non-conformes. Nous procédons alors à l'analyse théorique du schéma GD résultant, appelé schéma GD condensé, et établissons des conditions sur les nouveaux termes de flux assurant sa stabilité et sa consistance. En utilisant une traduction de ces conditions sous la forme de systèmes algébriques, nous construisons plusieurs candidats de flux hp non-conformes condensés, formant un panel discret de configurations d'accolement hybrides convergentes et numériquement efficaces. Seules ces configurations admissibles sont alors considérées dans la suite, tout autre accolement non-conforme conduisant à des coûts de calcul trop importants pour présenter un intérêt pratique.

Dans un second temps, nous proposons un algorithme de post-maillage automatisé et adapté au schéma GD condensé. Cet algorithme permet, à partir du maillage de référence DFDT, de remplacer les sous-modèles d'ouverture par des raffinements locaux, et de piloter le processus de h -déaffinement/ p -enrichissement, afin de réduire les coûts de calcul de la résolution tout en garantissant la précision de référence. Cette étape de post-maillage conduit ainsi à l'introduction d'un nouveau maillon dans la chaîne de calcul, représenté sur la figure 9.

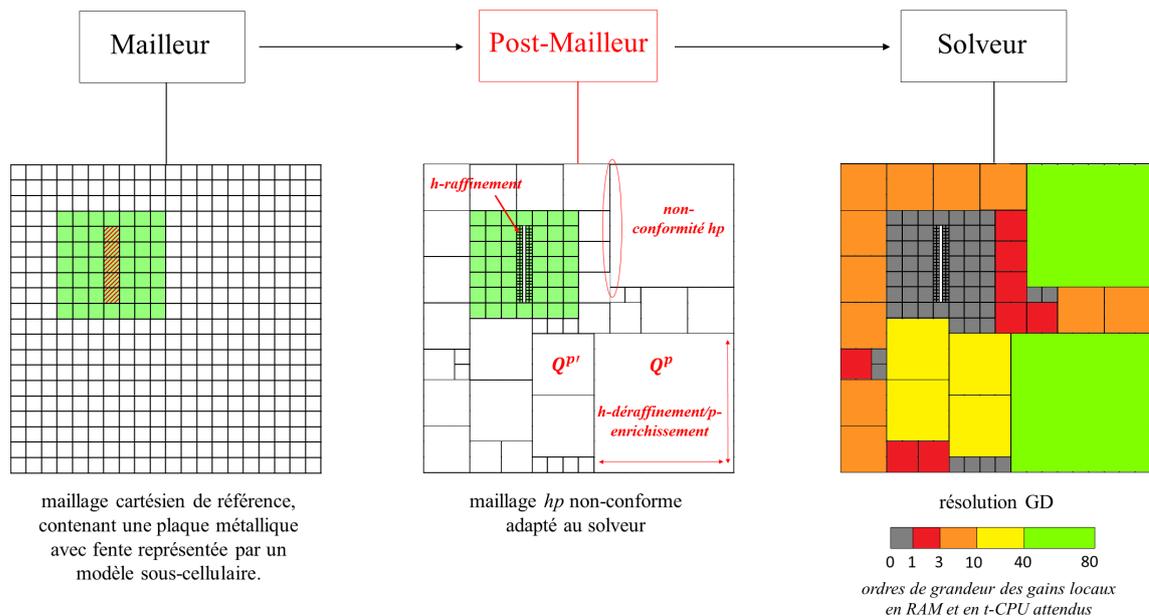


FIGURE 9 – Fonctionnement général de la chaîne de calcul GDDT développée.

Bien que la flexibilité de l'approche GD permette de gérer tout type d'élément et d'interface non-conforme, le post-maillage ne peut introduire dans le maillage de départ que des configurations admissibles appartenant au panel discret évoqué plus haut, afin d'éviter des performances numériques rédhibitoires. L'étape de post-maillage s'apparente ainsi à un problème d'optimisation sous contraintes, par nature combinatoire. Or, du fait de la complexité de ce problème et de la difficulté de représenter les différentes contraintes de manière continue (homogénéité surfacique et volumique des éléments, admissibilité des raccords non-conformes, etc.), les méthodes de résolution usuelles (optimisation globale ou locale sous forme continue) ou les algorithmes industriels de partitionnement de graphe (METIS [54], SCOTCH [55], etc.) n'ont pas une mise en place évidente. Nous développons donc un algorithme de post-maillage heuristique conçu à partir de critères de qualité et de performances empiriques. Cet algorithme se base sur une approche multi-niveaux, en procédant par déaffinements successifs. Afin d'être viable, il est nécessaire que cette étape de post-maillage présente des coûts de calcul raisonnables. En conséquence, nous proposons une

exploration optimisée de l'arbre de recherche du problème, en exploitant des propriétés géométriques de congruence sur les configurations hybrides.

Organisation du manuscrit

Ce mémoire est organisé de la manière suivante.

Dans le **Chapitre 1** nous commençons par présenter les équations de Maxwell, le formalisme mathématique utilisé dans la suite du travail, ainsi que le schéma GDDT servant de base à notre étude. La précision et les performances de ce schéma sont ensuite étudiées via plusieurs expériences numériques, menées sur des maillages cartésiens hp conformes et non-conformes. Des critères d'adaptation hp *a priori* sont alors déduits de cette étude. Puis, nous montrons que, si l'utilisation d'une stratégie de h -déaffinement/ p -enrichissement peut permettre d'améliorer significativement l'efficacité numérique de la résolution dans un cadre conforme, son extension à un cadre non-conforme peut s'accompagner d'une augmentation rédhibitoire des temps de calcul. Nous analysons alors cette chute de performances et nous montrons qu'elle résulte de l'apparition d'un sur-coût de calcul dans le traitement classique des termes de flux aux interfaces hétérogènes en h ou en p .

Le **Chapitre 2** traite de la conception d'un schéma GD entièrement condensé, adapté aux configurations hp non-conformes, dont le but est d'éviter les contre-performances observées sur maillage hybride. Pour ce faire, l'idée est de réduire la complexité du calcul des flux par l'extension de la méthode de condensation aux interfaces non-conformes. Ainsi, nous proposons une formulation GD originale basée sur une redéfinition des flux adaptée à la topologie des surfaces d'accolement entre les éléments hp . Ce faisant, nous introduisons la notion d'opérateur de reconstruction de trace et de produit scalaire condensé, définis en fonction de la géométrie de la non-conformité et des espaces d'approximation locaux mis en jeu. Une analyse du schéma GD résultant est alors effectuée. Sous certaines hypothèses sur les flux condensés, nous montrons que le schéma est stable sous une condition de type CFL. Nous discutons alors de la consistance de cette approche.

Le **Chapitre 3** est consacré à la mise en œuvre du schéma GD condensé. Il s'agit d'une part de proposer une méthodologie de construction de flux condensés et d'autre part d'étudier le comportement numérique du schéma. Ainsi, nous commençons par établir plusieurs résultats préliminaires permettant de simplifier l'élaboration des opérateurs de reconstruction de trace et des produits scalaires associés. Ces résultats permettent alors d'exploiter le caractère tensoriel des maillages hp considérés, afin de se ramener à un assemblage de quantités 1D plus facilement manipulables. Un *modus operandi* de construction est alors proposé pour une classe particulière d'interfaces hp non-conformes et mis en application sur plusieurs exemples. Par la suite, diverses expériences numériques sont menées afin de valider la convergence du schéma, d'analyser ses propriétés de dispersion et de dissipation, et d'étudier dans quelle mesure il permet de répondre à la problématique des coûts de calcul identifiée précédemment.

Le **Chapitre 4** se concentre alors sur la conception d'un algorithme de post-maillage automatisé, permettant d'introduire des raffinements locaux et de piloter un processus de h -déaffinement/ p -enrichissement solveur-adapté, à partir d'un maillage de référence DFDT. Le fonctionnement de cet algorithme est tout d'abord formalisé par un problème d'optimisation combinatoire, soumis à des contraintes de natures différentes liées à l'admissibilité des maillages hp . Plusieurs méthodes de résolution sont alors considérées, mais nous montrons qu'aucune ne semble adaptée au problème posé du fait de la diversité des contraintes mises en jeu. En conséquence, nous développons un algorithme de résolution heuristique basé sur plusieurs critères empiriques de qualité et de performances que nous explicitons. Enfin, nous présentons une mise en œuvre de cet algorithme sur quelques exemples élémentaires de manière à évaluer son efficacité.

En dernier lieu, le **Chapitre 5** présente une mise en application de la chaîne de calcul GDDT développée sur des cas-tests d'intérêt industriel. Sont considérés successivement l'illumination par une onde plane d'une structure métallique d'avion, d'un modèle simplifié de missile (GENEC), et d'un boîtier

présentant une ouverture de type fente mince. Nous tâchons alors d'évaluer dans quelle mesure la solution proposée permet de répondre aux différentes problématiques décrites précédemment. Une attention particulière est portée d'une part sur l'amélioration des performances numériques de l'approche GD, en termes de stockage mémoire et de temps de calcul, et d'autre part sur l'apport qualitatif de l'introduction de raffinements locaux par rapport à une solution DFDT basée sur des modèles sous-cellulaires.

Communications issues de la thèse

Les travaux de recherche effectués ont mené aux communications suivantes :

Article en préparation

M. Patrizio, B. Fornet, V. Mouysset, X. Ferrieres : *Analysis of an Efficient Fully Lumped Discontinuous Galerkin Method to Solve The Maxwell Equations in Time Domain*.

Proceedings

M. Patrizio, B. Fornet, V. Mouysset, X. Ferrieres : *An Efficient Flux-Lumped Discontinuous Galerkin Scheme for the 3D Maxwell Equations on Nonconforming Cartesian Grids*, 13th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (WAVES 2017), pp 283-284.

M. Patrizio, B. Fornet, V. Mouysset, X. Ferrieres : *Optimisation des performances de la méthode Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell 3D instationnaires*, 19e Colloque International & Exposition sur la Compatibilité ÉlectroMagnétique (CEM 2018).

Communications orales dans des conférences internationales et workshops

14-19 mai 2017 : WAVES 2017 (13th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation), Minneapolis, États-Unis,

9-11 juillet 2018 : CEM 2018 (19e Colloque International & Exposition sur la Compatibilité ÉlectroMagnétique), Paris, France.

9-13 juillet 2018 : ICOSAHOM 2018 (International Conference on Spectral and High Order Methods), Londres, Royaume-Uni.

Communications orales dans des colloques nationaux

5-9 juin 2017 : SMAI 2017 (8e Biennales des Mathématiques Appliquées et Industrielles), La Tremblade, France.

Communication dans des séminaires doctorants

13-17 juin 2016 : Doctoriales de l'Université Fédérale Toulouse Midi-Pyrénées, Albi, France,

22 janvier 2018 : Journée des doctorants de l'ONERA, Toulouse, France.

Distinction obtenue dans le cadre d'une conférence internationale

Prix doctorant CEM 2018 du meilleur article et exposé.

Chapitre 1

Résolution des équations de Maxwell par un schéma GDDT- Q^p à collocation

Sommaire

1.1	Mise en place du problème d'évolution	32
1.1.1	Système de Maxwell	32
1.1.2	Problème d'évolution étudié	34
1.2	Formulation variationnelle Galerkin Discontinue	35
1.2.1	Discrétisation du domaine de calcul	35
1.2.2	Formulation variationnelle	36
1.3	Schéma GDDT-Q^p à collocation sur maillages cartésiens	41
1.3.1	Approximation spatiale	41
1.4	Étude numérique de la convergence	48
1.4.1	Description du cas-test et de la formule d'erreur	49
1.4.2	Consistance de l'approximation spatiale	50
1.4.3	Convergence du schéma en condition d'utilisation	51
1.5	Étude de l'impact du choix du maillage hp sur l'efficacité numérique du schéma	53
1.5.1	Cadre hp conforme	54
1.5.2	Cadre hp non-conforme	60
1.5.3	Analyse de l'explosion du temps d'exécution du solveur dans le cas non-conforme	64
1.6	Conclusion	68

Ce premier chapitre est consacré à la présentation du schéma GDDT servant de point de départ à notre étude et à l'analyse de ses performances numériques sur une classe de maillages et d'espaces d'approximation obtenus par adaptation hp . Il est organisé de la façon suivante.

Tout d'abord, nous introduisons le cadre physique considéré et le formalisme mathématique adopté dans la suite du manuscrit. Nous commençons par présenter le système de Maxwell 3D dans le domaine temporel dans sa forme générale, nous rappelons des résultats concernant son caractère bien posé, puis nous établissons une formulation variationnelle de type Galerkin Discontinue équivalente, similaire à celles proposées dans [31] et [56].

Dans un second temps, nous proposons une discrétisation de cette formulation variationnelle sous la forme d'un schéma GDDT nodal choisi pour ses faibles coûts de calcul. Ce schéma utilise des fonctions de base de Lagrange associées au stencil de degrés de liberté de Gauss-Lobatto, identifiées pour leur efficacité numérique, surtout dans le cas de maillages hexaédriques [57]. Le principal intérêt de ces fonctions de base est de permettre une intégration numérique condensée creusant significativement les matrices locales de masse (rendues diagonales), de rigidité et de flux. En résulte une condition CFL moins contraignante

[58] et une complexité algorithmique drastiquement réduite, en comparaison avec d'autres types d'approximations (voir Annexe A). Nous introduisons ensuite la discrétisation temporelle basée sur le schéma explicite saute-mouton ("leapfrog") d'ordre 2, similaire à celui utilisé dans le schéma de Yee, choisi pour sa rapidité d'exécution. L'utilisation d'un schéma temporel d'ordre élevé ne paraît pas pertinente pour les applications visées, car on ne cherche pas à assurer une précision supérieure à la DFDT. Enfin, nous présentons une mise en œuvre du schéma GDDT sur un cas-test de cavité résonante pour lequel nous disposons d'une solution explicite, afin de valider sa convergence numérique.

Dans un troisième temps, nous étudions les performances numériques du schéma, pour des maillages hp obtenus par h -déraffinement/ p -enrichissement à partir d'une grille cartésienne de référence, sur laquelle la simulation DFDT sert d'étalon de précision. L'objectif est d'évaluer l'efficacité numérique du solveur sur des maillages hp cartésiens conformes et non-conformes du type de ceux considérés par la suite. Il s'agit d'une étape clé dans la mesure où l'efficacité de la stratégie de post-maillage proposée dans la thèse repose sur le niveau de performances du solveur sur ce type de configurations.

1.1 Mise en place du problème d'évolution

Dans cette section, nous partons de l'expression des équations de Maxwell que nous simplifions via des hypothèses de régularité sur le milieu de propagation et les termes sources, afin d'établir un problème d'évolution bien posé.

1.1.1 Système de Maxwell

Les équations de Maxwell constituent, avec l'expression de la force de Lorentz, le fondement théorique de l'Électromagnétisme. Elles synthétisent, en 4 identités vectorielles couplées, les travaux de C. F. Gauss, A. M. Ampère, M. Faraday et J. C. Maxwell. On doit leur formulation actuelle au physicien britannique O. Heaviside (fin du XIX^e siècle).

La propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu de \mathbb{R}^3 est modélisée par le système d'équations aux dérivées partielles d'inconnues \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} et \mathbf{B} suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \nabla \wedge \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{J}(\mathbf{x}, t), & \text{Loi de Maxwell-Ampère,} & (1.1a) \\ \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) + \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{Loi de Maxwell-Faraday,} & (1.1b) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{Loi de Gauss électrique,} & (1.1c) \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t), & \text{Loi de Gauss magnétique,} & (1.1d) \end{cases}$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et $t \geq 0$ sont respectivement les variables spatiale et temporelle,
- \mathbf{E} et \mathbf{H} sont les champs électrique ($V.m^{-1}$) et magnétique ($A.m^{-1}$),
- \mathbf{D} et \mathbf{B} sont les inductions électrique ($C.m^{-2}$) et magnétique (T),
- ρ et \mathbf{J} sont les densités de charge volumique ($C.m^{-3}$) et de courant électrique ($A.m^{-2}$).

Ces deux dernières quantités sont liées par l'équation de conservation de la charge, obtenue en prenant la dérivée en temps de (1.1d) et la divergence de (1.1a) :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.2)$$

Remarque 1.1 *Les applications visées dans notre étude ne faisant pas intervenir de porteurs de charge, on s'intéressera peu à cette équation dans la suite. En revanche, il s'agit d'une contrainte essentielle à prendre en compte dans le couplage entre les équations de Vlasov et de Maxwell pour de la simulation des plasmas, sans quoi la résolution numérique peut mener à des solutions non-physiques [59].*

Lorsque le milieu de propagation est linéaire, il est possible de formuler le problème (1.1) en fonction des seules inconnues \mathbf{E} et \mathbf{H} , en utilisant des relations, dites de constitution, reliant les champs et les inductions :

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), & (1.3a) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x}, t), & (1.3b) \end{cases}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\mu}}$ sont des tenseurs symétriques définis positifs, représentant la permittivité électrique ($F.m^{-1}$) et la perméabilité magnétique ($H.m^{-1}$) du milieu. Dans le cas d'un milieu isotrope, ces quantités se ramènent à des réels positifs $\epsilon(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$, constantes si le milieu est de plus homogène. Dans le vide, on a ainsi $\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon_0$ et $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0$, tel que, en notant c_0 la célérité de la lumière :

$$\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} F.m^{-1}, \quad (1.4a)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}, \quad (1.4b)$$

$$\epsilon_0\mu_0 = c_0 \simeq 3 \cdot 10^8 m.s^{-1}. \quad (1.4c)$$

La densité de courant électrique \mathbf{J} peut être décomposée en deux parties :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s, \quad (1.5)$$

où \mathbf{J}_c représente la densité de courant dans le matériau et \mathbf{J}_s une densité de courant source. Dans le cas d'un matériau conducteur, la loi d'Ohm donne l'existence d'un tenseur symétrique défini positif $\underline{\underline{\sigma}}$, appelé tenseur de conductivité électrique ($S.m^{-1}$), vérifiant :

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

Comme précédemment, si le milieu est isotrope, la conductivité est ramenée à un réel positif $\sigma(x)$, constant dans le cas homogène. Un matériau volumique parfaitement conducteur de courant est modélisé par une conductivité tendant vers l'infini. Un milieu non conducteur tel que le vide est en revanche modélisé par une conductivité nulle.

Ainsi, si le milieu de propagation $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est linéaire, anisotrope, non chargé, les équations (1.3), (1.5) et (1.6) permettent de réécrire le système de Maxwell sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\epsilon}}\partial_t\mathbf{E} - \nabla \wedge \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}}\mathbf{E} = -\mathbf{J}_s, & (1.7a) \\ \underline{\underline{\mu}}\partial_t\mathbf{H} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0, & (1.7b) \\ \nabla \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}\mathbf{E}) = 0, & (1.7c) \\ \nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}}\mathbf{H}) = 0. & (1.7d) \end{cases}$$

En prenant la divergence de l'équation (1.7b), on obtient, sous réserve de régularité suffisante pour commuter les dérivations temporelle et spatiales :

$$\partial_t \nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}}\mathbf{H}) = 0, \quad (1.8)$$

ce qui montre que la quantité $\nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}}\mathbf{H})$ se conserve au cours du temps. Donc, si l'on suppose que l'équation (1.7d) est vérifiée au temps initial $t = 0$, alors elle sera vérifiée pour tout instant $t \geq 0$. De même, l'équation (1.7c) est redondante, sous l'hypothèse supplémentaire que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Par la suite, nous supposons que ces hypothèses sur les conditions initiales et sur le terme de courant sont vérifiées, ce qui nous permettra d'écartier les contraintes de divergence (1.7c) et (1.7d) de notre modélisation.

Afin de réaliser des simulations en domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, deux types de conditions aux limites sont généralement utilisées sur la frontière $\partial\Omega$ de normale \mathbf{n} :

- condition conducteur électrique parfait, traduisant la nullité des composantes tangentielles du champ électrique, utilisée en pratique pour simuler la présence d'un métal de faible épaisseur et de conductivité infinie (métal parfait) :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = 0, \quad (1.9)$$

- condition de radiation de Silver-Müller, décrivant le comportement du champ diffracté à l'infini et généralement utilisée comme condition absorbante approchée pour la simulation sur un domaine borné de phénomènes en espace libre. Nous l'utiliserons dans le cas d'une propagation dans le vide, où elle s'écrit :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} = 0, \quad (1.10)$$

Par soucis de concision et de simplification des calculs, nous ne considérons dans la suite de ce chapitre que la condition métal parfait.

1.1.2 Problème d'évolution étudié

Le problème d'évolution considéré dans la suite de ce chapitre s'écrit, d'après ce qui précède :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\epsilon}} \partial_t \mathbf{E} - \nabla \wedge \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega \times (0, T_f), \\ \underline{\underline{\mu}} \partial_t \mathbf{H} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T_f), \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T_f), \\ \mathbf{E}(\cdot, t = 0) = \mathbf{E}_0 \text{ et } \mathbf{H}(\cdot, t = 0) = \mathbf{H}_0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1.11a) \\ (1.11b) \\ (1.11c) \\ (1.11d) \end{array}$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 . Nous donnons alors un cadre mathématique permettant d'assurer le caractère bien posé de ce problème. On introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) / \nabla \wedge \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}, \quad (1.12)$$

avec $\mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^3$. $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{rot}, \Omega} = (\|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 + \|\nabla \wedge \mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.13)$$

où $\|\cdot\|_{0, \Omega}$ désigne la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Sous l'hypothèse Ω lipschitzien, on pose :

$$\gamma_{\partial\Omega}^1(u) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{u}, \quad (1.14)$$

la trace tangentielle d'une application $u \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ sur la frontière $\partial\Omega$, définie à partir de la formule de Green :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \wedge \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v}) dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_{\partial\Omega}^1(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}). \quad (1.15)$$

Cette définition s'étend alors par densité aux fonctions de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ [60] et l'on a :

$$\gamma_{\partial\Omega}^1 : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{n} \wedge \mathbf{u}. \quad (1.16)$$

De manière analogue, on définit l'application de trace dans le plan tangent :

$$\gamma_{\partial\Omega}^2 : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{u}. \quad (1.17)$$

On rappelle alors le résultat d'existence et d'unicité suivant [61] :

Théorème 1.2 *Si les tenseurs de permittivité, de perméabilité et de conductivité satisfont les hypothèses suivantes :*

$$\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\mu}}, \underline{\underline{\sigma}} \in [L^\infty]^{3 \times 3}, \quad (1.18a)$$

$$\exists \epsilon_{min}, \epsilon_{max} \in \mathbb{R}^+ / \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \epsilon_{min} \|\mathbf{v}\|^3 \leq \mathbf{v}^* \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \leq \epsilon_{max} \|\mathbf{v}\|^3, \quad p.p. \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.18b)$$

$$\exists \mu_{min}, \mu_{max} \in \mathbb{R}^+ / \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mu_{min} \|\mathbf{v}\|^3 \leq \mathbf{v}^* \underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \leq \mu_{max} \|\mathbf{v}\|^3, \quad p.p. \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.18c)$$

$$\exists \sigma_{max} \in \mathbb{R}^+ / \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, 0 \leq \mathbf{v}^* \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \leq \sigma_{max} \|\mathbf{v}\|^3, \quad p.p. \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.18d)$$

et si de plus le terme source de courant vérifie $\mathbf{J}_s \in C^0((0, T_f), \mathbf{L}^2(\Omega))$, alors il existe une solution unique \mathbf{E}, \mathbf{H} du problème (1.11), telle que :

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1((0, T_f), \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0((0, T_f), \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)). \quad (1.19)$$

1.2 Formulation variationnelle Galerkin Discontinue

Cette section est consacrée à la mise en place, dans un cadre général, d'une formulation faible Galerkin Discontinue vectorielle équivalente au problème d'évolution (1.11).

1.2.1 Discrétisation du domaine de calcul

Le domaine de calcul Ω est subdivisé en un ensemble \mathcal{T}_h de cellules $\{K_i, i \in \llbracket 1, N_{él} \rrbracket\}$ (hexaédriques dans la suite), tel que :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N K_i \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad (1.20)$$

où $\overset{\circ}{K}$ désigne l'intérieur de K pour la topologie euclidienne. Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, on note \mathbf{n}_K la normale unitaire extérieure à K . On définit \mathcal{F}_h l'ensemble des faces du maillage, composé de deux sous-ensembles disjoints :

- l'ensemble des facettes intérieures \mathcal{F}_h^i , défini par :

$$f \in \mathcal{F}_h^i \Leftrightarrow \exists j \neq j' / f = K_j \cap K_{j'}, \quad (1.21)$$

- l'ensemble des facettes de bord \mathcal{F}_h^b , défini par :

$$f \in \mathcal{F}_h^b \Leftrightarrow \exists i / f = K_i \cap \partial\Omega, \quad (1.22)$$

Aucune contrainte n'est imposée sur la structure du maillage, si bien qu'il peut présenter :

- des configurations h conformes, du type de la figure 1.1a, où la juxtaposition entre deux mailles se fait au travers d'une seule facette,
- des configurations h non-conformes, du type de la figure 1.1b-c, où l'accrolement entre plusieurs mailles forme une interface constituée de plusieurs facettes et comportant des nœuds flottants.

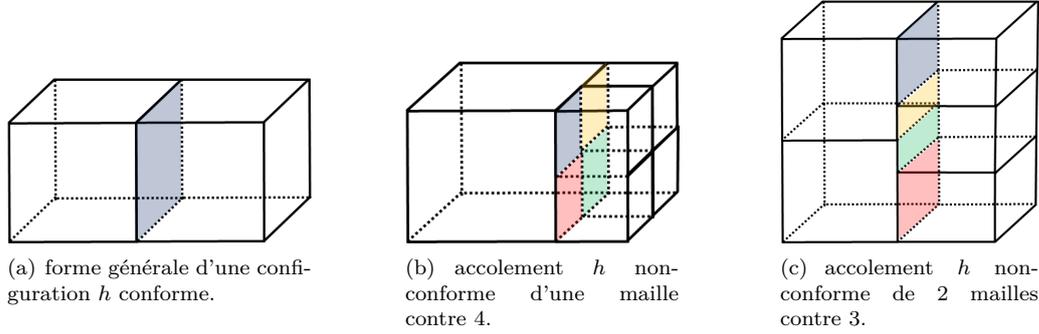


FIGURE 1.1 – Exemples de configurations h conformes et h non-conformes dans le cas d'un maillage parallélépipédique. Les facettes intérieures \mathcal{F}_h^i sont représentées par des couleurs différentes.

1.2.2 Formulation variationnelle

On définit l'espace de Sobolev par morceaux sur le maillage $H^1(\mathcal{T}_h)$ par :

$$H^1(\mathcal{T}_h) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in H^1(K) \right\}, \quad (1.23)$$

équipé de la norme suivante :

$$\|v\|_{1,h} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.24)$$

où $\|\cdot\|_{1,K}$ est la norme usuelle sur $H^1(K)$. On note alors $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$ l'espace $[H^1(\mathcal{T}_h)]^3$, dont la norme dérive directement de la précédente :

$$\|\mathbf{v}\|_{1,h} = \left(\sum_{d=1}^3 \|v_d\|_{1,h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.25)$$

Par la suite, le saut de la trace tangentielle et de la trace dans le plan tangent d'une fonction $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$ à travers une facette $f = K \cap K'$ peuvent être définies de la manière suivante :

$$\llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{v} \rrbracket_f^K = -\gamma_{K',f}^1(\mathbf{v}) - \gamma_{K,f}^1(\mathbf{v}), \quad (1.26)$$

$$\llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{v} \rrbracket_f^K = \gamma_{K',f}^2(\mathbf{v}) - \gamma_{K,f}^2(\mathbf{v}), \quad (1.27)$$

où les applications $\gamma_{K,f}$, $\gamma_{K',f}$, $\pi_{K,f}$ et $\pi_{K',f}$ sont définies de la même manière qu'en (1.16) et (1.17) sur les volumes K et K' . Cependant, afin d'obtenir plus de souplesse dans les calculs, nous pouvons utiliser, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, le théorème de trace dans $\mathbf{H}^1(K)$ [62] afin de définir directement les termes de sauts de \mathbf{v} :

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_f^K = \gamma_{K',f}^3(\mathbf{v}) - \gamma_{K,f}^3(\mathbf{v}), \quad (1.28)$$

où l'application de trace $\gamma_{K,f}^3$ est définie par densité comme limite de l'application de restriction :

$$\exists (\mathbf{v}_K^n) \in C^\infty(K)^\mathbb{N}, \mathbf{v}_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_K^n \text{ dans } \mathbf{H}^1(K) / \gamma_{K,f}^3(\mathbf{v}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_K^n|_f \text{ dans } \mathbf{L}^2(f). \quad (1.29)$$

On a alors par construction :

$$\llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{v} \rrbracket_f^K = \mathbf{n}_K \wedge \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_f^K, \quad (1.30)$$

$$\llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{v} \rrbracket_f^K = \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_f^K, \quad (1.31)$$

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_f^K = -\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_f^{K'}. \quad (1.32)$$

Afin de simplifier les notations, nous confondons donc dans la suite $\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{v}_K$ avec $\mathbf{n}_K \wedge \gamma_{K,\partial K}^3(\mathbf{v})$.

Remarque 1.3 Dans le cas de fonctions plus régulières $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^0(\mathcal{T}_h)$, ces quantités peuvent être calculées facilement en utilisant les applications :

$$\nu_{K,f}(\mathbf{v})(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{n}_K), \quad \forall \mathbf{x} \in f, \quad (1.33)$$

de sorte que :

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_f^K = \nu_{K',f}(\mathbf{v}) - \nu_{K,f}(\mathbf{v}). \quad (1.34)$$

Ces formules seront utilisées en pratique pour le calcul des flux numériques.

La formulation variationnelle GD s'écrit alors :

Trouver $\mathbf{E}(\cdot, t), \mathbf{H}(\cdot, t) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$ tels que, $\forall \phi, \psi \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K (\underline{\epsilon} \partial_t \mathbf{E}_K - \nabla \wedge \mathbf{H}_K + \underline{\sigma} \mathbf{E}_K + \mathbf{J}_s) \cdot \phi_K dx \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_K ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_K ds \right] = 0, \end{array} \right. \quad (1.35a)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K (\underline{\mu} \partial_t \mathbf{H}_K + \nabla \wedge \mathbf{E}_K) \cdot \psi_K dx - \int_{\partial K \cap \partial \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_K \cdot \psi_K ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \psi_K ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \psi_K ds \right] = 0, \end{array} \right. \quad (1.35b)$$

où $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}|_K$, $\mathbf{H}_K = \mathbf{H}|_K$, $\phi_K = \phi|_K$, $\psi_K = \psi|_K$, ds est l'abscisse curviligne associée à ∂K et $\beta_{\partial K}^K \in [0; 1]$.

Remarque 1.4 Les termes du type :

$$\int_{\partial K} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K ds, \quad (1.36)$$

peuvent paraître ambigus, car nous n'avons pas précisé le sens de la quantité \mathbf{v}_K sur le bord de la cellule ∂K . Or, en utilisant la propriété suivante du produit vectoriel :

$$\mathbf{n}_s \wedge \mathbf{u}_K = -\mathbf{n}_s \wedge \mathbf{n}_s \wedge \mathbf{n}_s \wedge \mathbf{u}_K, \quad (1.37)$$

le terme (1.36) s'écrit :

$$\int_{\partial K} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{v}_K ds = \int_{\partial K} \gamma_{K,\partial K}^2(\mathbf{u}_K) \cdot \gamma_{K,\partial K}^1(\mathbf{v}_K) ds \quad (1.38a)$$

$$= \int_{\partial K} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \gamma_{K,\partial K}^3(\mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{n}_K \wedge \gamma_{K,\partial K}^3(\mathbf{v}_K) ds \quad (1.38b)$$

ce qui lève toute ambiguïté sur le sens des traces utilisées. Les termes faisant apparaître un double produit vectoriel se traitent de manière analogue.

Remarque 1.5 Alors que le problème d'évolution est défini dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, la formulation variationnelle est posée dans l'espace par morceaux $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$, dont la régularité locale est supérieure. Ce choix n'est pas nécessaire a priori, dans la mesure où il est possible de construire des familles d'espaces polynomiaux d'ordre arbitrairement élevé et denses dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ [63]. Cependant, il est adapté à la discrétisation spatiale que nous voulons mettre en place, basée sur des fonctions Q^p pour des raisons de performances numériques.

On a alors la propriété fondamentale d'équivalence suivante, démontrée dans [31] (Proposition 4, p106) :

Proposition 1.6 En supposant que pour tout $t \in (0, T_f)$, la solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) de (1.11) a la régularité $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$, alors on a l'équivalence entre le problème fort (1.11) et le problème faible (1.35).

Parmi les termes de la formulation variationnelle (1.35), on distingue en particulier ceux de masse, de rigidité et de flux. Les termes de masse correspondent, aux tenseurs de perméabilité et de permittivité près, au produit scalaire \mathbf{L}^2 entre les champs et les fonctions tests :

$$\int_K \underline{\epsilon} \mathbf{E}_K \cdot \phi_K dx \quad ; \quad \int_K \underline{\mu} \mathbf{H}_K \cdot \psi_K dx, \quad (1.39)$$

et les termes de rigidité mettent en jeu la partie issue du rotationnel :

$$\int_K \nabla \wedge \mathbf{H}_K \cdot \phi_K dx \quad ; \quad \int_K \nabla \wedge \mathbf{E}_K \cdot \psi_K dx. \quad (1.40)$$

Si ces deux types de contributions sont communes avec les méthodes éléments finis, les termes de flux renvoient en revanche aux approches volumes finis. Ceux-ci se composent d'une partie centrée et décentrée :

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_K ds \quad + \quad \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_K ds, \quad (1.41a)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \psi_K ds}_{\text{partie centrée}} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \psi_K ds}_{\text{partie décentrée}}. \quad (1.41b)$$

Le paramètre $\beta_{\partial K}^K \in [0, 1]$ est appelé paramètre de décentration. Lorsque $\beta_{\partial K}^K = 0$, les flux sont dits centrés, si $\beta_{\partial K}^K \in]0, 1[$ ils sont dits partiellement décentrés, et dans le cas où $\beta_{\partial K}^K = 1$ on parle de flux complètement décentrés (ou "full upwind"). De plus, on distingue au sein des termes de flux (centrés et décentrés) une partie homogène et une partie hétérogène :

$$\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{v}_K ds = \sum_{f=K \cap K'} \int_f (\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_{K'} - \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{v}_K ds \quad (1.42a)$$

$$= \sum_{f=K \cap K'} \left[\underbrace{\int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_{K'} \cdot \mathbf{v}_K ds}_{\text{partie hétérogène}} - \underbrace{\int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K ds}_{\text{partie homogène}} \right]. \quad (1.42b)$$

La partie homogène correspond au produit scalaire surfacique entre deux fonctions restreintes au même élément K , tandis que la partie hétérogène fait intervenir les traces de deux fonctions prises sur deux éléments différents K et K' .

Les termes de flux centrés permettent d'imposer le juste niveau de régularité sur la solution. En effet, sur chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$ la solution de la formulation variationnelle a la régularité $\mathbf{H}^1(\mathbf{K})$, alors que la solution du problème d'évolution a la régularité $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathbf{K})$, plus faible. Or, pour passer des espaces $\mathbf{H}^1(\mathbf{K})$ à l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, en vertu du Théorème 2 de [31](p25), il suffit d'imposer la nullité des sauts tangentiels aux interfaces lors du recollement des champs définis par morceaux. Cette condition est d'ailleurs compatible avec la relation de passage du champ électrique entre deux matériaux (conservation de la composante tangentielle de \mathbf{E}). Un recollement de type $\mathbf{H}^1(\Omega)$, imposant la conservation de toutes les composantes des champs aux interfaces, serait incompatible avec les relations de passage, et non nécessaire du point de vue de la régularité attendue.

Les flux décentrés, hérités et adaptés de la mécanique des fluides, sont connus pour être dissipatifs mais peu dispersifs [64]. Les raisons de ce choix sont multiples. Premièrement, pour les applications visées, l'erreur de dispersion est plus critique que l'erreur de dissipation, car elle modifie le contenu spectral de la solution numérique. Or, celui-ci est déterminant dans l'étude des couplages entre les champs et les systèmes (câbles et structures). Par ailleurs, les erreurs de dissipation peuvent être compensées en pratique par l'application de marges sur les résultats. Ensuite, plusieurs travaux ont montré que des ondes parasites peuvent apparaître sur la solution numérique lors de simulations sur maillages hp non-conformes [56]. Il paraît alors intéressant d'introduire une légère dissipation afin de limiter l'impact de ces ondes parasites sur la qualité de la solution. Remarquons à ce propos que les paramètres de décentrement $\beta_{\partial K}^K$ peuvent être ajustés localement sur chaque facette, ce qui est intéressant en pratique pour mieux contrôler le phénomène de dissipation numérique. Puis, dans [31], il est montré que les flux décentrés permettent de gagner un demi-ordre de consistance par rapport aux flux centrés. De plus, il est courant d'observer un phénomène de superconvergence numérique pour ce type de flux, avec une vitesse de convergence en $\mathcal{O}(h^{p+1})$ pour des fonctions de base d'ordre p et pour des éléments droits, là où les flux centrés sont limités en $\mathcal{O}(h^p)$ [65]. Plus loin, il s'agit à terme de pouvoir adapter ces travaux aux équations de Maxwell-Vlasov pour la simulation des plasmas. Or, dans ce cadre, des expériences passées ont montré que l'utilisation de flux décentrés est nécessaire pour obtenir le respect de la conservation de la charge. Enfin, il est plus facile de quantifier des erreurs commises en dissipation qu'en dispersion. En effet, l'utilisation d'une norme d'erreur usuelle de type L^2 en espace ne permet pas de bien prendre en compte l'écart entre un signal périodique exact et approché après un déphasage d'un nombre entier de périodes. Pour ce faire, il est nécessaire de mettre en place une norme d'erreur spectrale adaptée, sujet que nous n'avons pas abordé dans notre étude.

On montre alors le résultat suivant sur la stabilité du problème variationnel :

Proposition 1.7 *L'énergie du système (1.35), définie par :*

$$\forall t \in (0, T_f), \quad \mathcal{E}(t) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dx + \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dx, \quad (1.43)$$

vérifie l'inégalité suivante pour tout $t \in (0, T_f)$:

$$\mathcal{E}(t) \leq \left(\mathcal{E}(0) + \int_0^t \|\underline{\underline{\epsilon}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_s\|_0^2 dz \right) e^t. \quad (1.44)$$

En particulier, si l'on suppose que $\underline{\underline{\sigma}} = 0$ et $\mathbf{J}_s = 0$, alors on a pour tout $t \in (0, T_f)$:

- *conservation de l'énergie en flux centrés :*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \quad (1.45)$$

- *dissipation de l'énergie en flux décentrés :*

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0). \quad (1.46)$$

Preuve. Le résultat général (1.44) est démontré dans [31], Théorème 8, p109. Nous ne prouvons ici ce résultat que dans le cas particulier $\underline{\sigma} = 0$ et $\mathbf{J}_s = 0$, car le mécanisme de preuve est constitutif de la formulation variationnelle alternative qui sera présentée dans le chapitre suivant.

En prenant $\phi = \mathbf{E}$ et $\psi = \mathbf{H}$ dans (1.35) et en sommant les deux équations obtenues, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_K \underline{\epsilon} \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_K \underline{\mu} \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{H}_K dx - \int_K \nabla \wedge \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K dx + \int_K \nabla \wedge \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_K dx \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{E}_K ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{H}_K ds - \int_{\partial K \cap \partial \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_K ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{E}_K ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{H}_K ds \right] = 0. \quad (1.47) \end{aligned}$$

Le regroupement des termes de masse conduit à :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_K \underline{\epsilon} \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_K \underline{\mu} \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{H}_K dx \right] = \frac{1}{2} \partial_t \mathcal{E}(t). \quad (1.48)$$

Puis, en appliquant la formule de Green sur le terme de rigidité issu de (1.35a), on obtient :

$$\int_K \nabla \wedge \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K dx = \int_{\partial K} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K dx + \int_K \mathbf{H}_K \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_K dx \quad (1.49a)$$

$$= \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K dx + \int_{\partial K \cap \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K dx + \int_K \mathbf{H}_K \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_K dx. \quad (1.49b)$$

On réécrit alors la partie centrée des flux issus de (1.35a) en séparant les parties homogènes et hétérogènes :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{E}_K ds \right] \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\sum_{\substack{f \subset \partial K \setminus \partial \Omega \\ \exists K' / f = K \cap K'}} \int_f (\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{K'} - \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_K) \cdot \mathbf{E}_K ds \right] \quad (1.50a) \end{aligned}$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\sum_{\substack{f \subset \partial K \setminus \partial \Omega \\ \exists K' / f = K \cap K'}} \int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{K'} \cdot \mathbf{E}_K ds \right] - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\sum_{\substack{f \subset \partial K \setminus \partial \Omega \\ \exists K' / f = K \cap K'}} \int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K ds \right] \quad (1.50b)$$

$$= \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^i \\ f = K \cap K'}} \left[\int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{K'} \cdot \mathbf{E}_K ds + \int_f \mathbf{n}_{K'} \wedge \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} ds \right] - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K ds \right]. \quad (1.50c)$$

De même pour les flux centrés issus de (1.35b) :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{H}_K ds \right] = \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^i \\ f = K \cap K'}} \left[\int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{K'} \cdot \mathbf{H}_K ds + \int_f \mathbf{n}_{K'} \wedge \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_{K'} ds \right] \\ - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_K ds \right]. \quad (1.51) \end{aligned}$$

Enfin, on reformule la partie décentrée des flux issus de (1.35a) afin de faire apparaître un terme signé positivement :

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{E}_K \, ds \right] \\ &= \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^i \\ f=K \cap K'}} \left[\int_f \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_f^K \cdot \mathbf{E}_K \, ds + \int_f \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_{K'} \wedge \mathbf{n}_{K'} \wedge \mathbf{E} \rrbracket_f^{K'} \cdot \mathbf{E}_{K'} \, ds \right] \end{aligned} \quad (1.52a)$$

$$= \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^i \\ f=K \cap K'}} \left[\int_f \beta_{\partial K}^K \left\| \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_f^K \right\|^2 \, ds \right]. \quad (1.52b)$$

De même pour la partie décentrée des flux issus de (1.35b) :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{H}_K \, ds \right] = \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^i \\ f=K \cap K'}} \left[\int_f \beta_{\partial K}^K \left\| \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_f^K \right\|^2 \, ds \right]. \quad (1.53)$$

On remarque alors plusieurs simplifications dans (1.47) : les termes de rigidité se simplifient avec les termes de flux centrés homogènes et le terme de bord, et les parties hétérogènes des flux centrés s'annulent. On obtient finalement :

$$\frac{1}{2} \partial_t \mathcal{E}(t) = - \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^i \\ f=K \cap K'}} \left[\int_f \beta_{\partial K}^K \left\| \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E} \rrbracket_f^K \right\|^2 \, ds + \int_f \beta_{\partial K}^K \left\| \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_f^K \right\|^2 \, ds \right] \leq 0, \quad (1.54)$$

d'où le résultat. ■

1.3 Schéma GDDT- Q^P à collocation sur maillages cartésiens

Cette section traite de la mise en place du schéma GDDT servant de base à notre étude. Ce schéma est obtenu en discrétisant la formulation variationnelle (1.35) établie précédemment en espace et en temps. Dans la suite de ce chapitre, nous nous restreignons aux maillages cartésiens (conformes ou non-conformes).

1.3.1 Approximation spatiale

Les choix effectués dans la discrétisation spatiale définissent le schéma GD mis en place et ont un impact prépondérant dans ses coûts de calcul. Il s'agit en particulier de se donner :

- un espace d'approximation de $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$, noté \mathbf{U}_h ,
- des fonctions de base de cet espace, sur lesquelles la solution approchée sera calculée,
- des formules de quadrature pour le calcul des intégrales de la formulation variationnelle.

1.3.1.1 Maillage cartésien

Dans le cas d'un maillage cartésien, chaque élément du maillage s'écrit sous la forme :

$$K = [x_K, x_K + \Delta x_K] \times [y_K, y_K + \Delta y_K] \times [z_K, z_K + \Delta z_K]. \quad (1.55)$$

et correspond à l'image du cube unité $\hat{K} = [-1; 1]^3$, appelé élément de référence, par la transformation affine T_K . Cette transformation, illustrée sur la figure 1.2, est définie de la manière suivante :

$$T_K : \hat{K} \rightarrow K, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mapsto (x, y, z) = \left(x_K + \Delta x_K \frac{\hat{x} + 1}{2}, y_K + \Delta y_K \frac{\hat{y} + 1}{2}, z_K + \Delta z_K \frac{\hat{z} + 1}{2} \right). \quad (1.56)$$

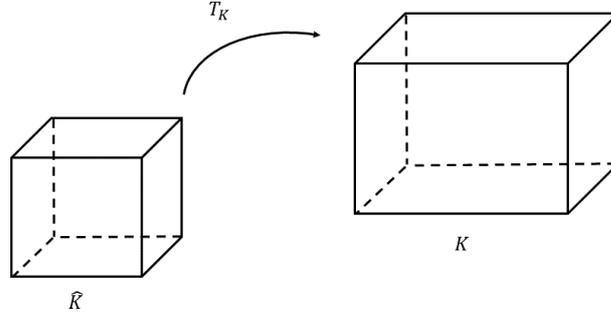


FIGURE 1.2 – Passage de l'élément de référence à l'élément réel.

La matrice jacobienne de T_K sera notée DT_K et son jacobien sera noté J_K . Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on a :

$$DT_K = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_K}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta y_K}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta z_K}{2} \end{pmatrix} ; \quad J_K = \frac{\Delta x_K \Delta y_K \Delta z_K}{8}. \quad (1.57)$$

Remarque 1.8 Le jacobien J_K correspond au rapport entre les volumes de la maille réelle et de la maille de référence :

$$J_K = \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(\hat{K})}. \quad (1.58)$$

1.3.1.2 Espace d'approximation

On commence par définir l'espace des fonctions Q^p sur l'élément de référence :

$$Q^p(\hat{K}) = \left\{ f : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \hat{\mathbf{x}} := (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mapsto \hat{x}^i \hat{y}^j \hat{z}^k, (i, j, k) \in \llbracket 0, p \rrbracket^3 \right\}. \quad (1.59)$$

On utilise alors l'espace d'approximation éléments finis discontinus suivant :

$$\mathbf{U}_h = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, \exists p_K \in \mathbb{N} / \hat{\mathbf{v}}_K := DT_K^* \mathbf{v}_K \circ T_K \in \mathbf{Q}^{p_K}(\hat{K}) \right\}. \quad (1.60)$$

Remarque 1.9 L'espace d'approximation choisi est similaire à celui utilisé dans [31][56]. Il est basé sur la transformation de Piola dite $\mathbf{H}(\mathbf{rot})$ -conforme [63][66] :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \mathcal{P}_K : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, K) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \hat{K}), v \mapsto DF_K^* v \circ T_K.$$

Cette transformation a été définie afin de conserver les composantes tangentielles dans le passage de l'élément réel à l'élément de référence. Elle a l'avantage, comme nous le verrons dans la suite, d'amener des simplifications algébriques permettant de réduire le stockage mémoire lié au calcul des termes de rigidité et de flux conformes.

Pour proposer une base de \mathbf{U}_h , on commence par définir une base de $\mathbf{Q}^p(\hat{K})$. On procède en deux temps, tout d'abord en définissant une base de $Q^p([-1; 1])$, l'ensemble des polynômes de degré p sur $[-1; 1]$, puis en se ramenant au cas 3D par tensorisation.

Étant donnés $\{\hat{x}_i, i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket\}$, $p+1$ points distincts deux à deux de $[-1; 1]$, il existe une unique base de $Q^p([-1; 1])$, notée $\{\hat{L}_i, i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket\}$, vérifiant la propriété d'unisolvance :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket^2, \hat{L}_i(\hat{x}_j) = \delta_{i,j}. \quad (1.61)$$

Cette base est constituée des polynômes de Lagrange associés aux points $\{\hat{x}_i\}$, définis de la manière suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket, \forall \hat{x} \in [-1; 1], \hat{L}_i(\hat{x}) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\hat{x} - \hat{x}_j}{\hat{x}_i - \hat{x}_j}. \quad (1.62)$$

Dans la suite, nous choisissons d'utiliser une distribution de points de Gauss-Lobatto (voir tableau 1.1 présenté plus loin) pour deux raisons principales. D'une part, elle intègre les extrémités de l'intervalle $[-1; 1]$, ce qui permettra de réduire significativement le calcul des termes de flux du schéma (interpolation surfacique au lieu de volumique). D'autre part, en comparaison avec d'autres distributions de points, celle de Gauss-Lobatto permet une interpolation de bonne qualité, comme le montre l'étude des constantes de Lebesgue menée dans [67]. Pour rappel, la constante de Lebesgue associée à une distribution de $p+1$ points, notée Λ_p , permet d'estimer l'erreur commise lors d'une interpolation nodale, grâce à la propriété :

$$\forall f \in C^0([-1; 1]), \|f - \pi_p(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_p) \|f - \pi_p^*(f)\|_\infty, \quad (1.63)$$

où $\pi_p(f)$ désigne le polynôme de degré p issu de l'interpolation de Lagrange sur la distribution de points considérée et où $\pi_p^*(f)$ représente la meilleure approximation polynômiale de f de degré p . L'étude [67] montre alors que le choix des points de Gauss-Lobatto permet d'obtenir une constante de Lebesgue avantageuse.

La base de $\mathbf{Q}^p(\hat{K})$ est alors définie comme suit :

$$\forall \alpha \in \{x, y, z\}, \forall (l, m, n) \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket^3, \hat{\mathbf{L}}_{l,m,n}^\alpha(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{L}_l(\hat{x})\hat{L}_m(\hat{y})\hat{L}_n(\hat{z})\mathbf{e}_\alpha, \forall \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \hat{K}, \quad (1.64)$$

où $\{\mathbf{e}_\alpha, \alpha \in \{x, y, z\}\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 . L'ensemble $\{\hat{\mathbf{L}}_{l,m,n}^\alpha, 1 \leq l, m, n \leq p+1, \alpha \in \{x, y, z\}\}$ correspond à la famille des polynômes de Lagrange associée aux points $\{\hat{\mathbf{x}}_{l,m,n} = (\hat{x}_l, \hat{x}_m, \hat{x}_n), 1 \leq l, m, n \leq p+1\}$. On hérite ainsi naturellement de la propriété de collocation suivante :

$$\forall \alpha \in \{x, y, z\}, \forall (l, m, n, l', m', n') \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket^6, \hat{\mathbf{L}}_{l,m,n}^\alpha(\hat{x}_{l'}, \hat{x}_{m'}, \hat{x}_{n'}) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'}\mathbf{e}_\alpha. \quad (1.65)$$

Il est à présent possible de définir une base \mathfrak{B}_h de l'espace d'approximation \mathbf{U}_h :

$$\mathfrak{B}_h = \left\{ \mathbf{L}_{l,m,n}^{K,\alpha} = DT_K^{*-1} \hat{\mathbf{L}}_{l,m,n}^\alpha \circ T_K^{-1} \cdot \mathbf{1}_K, K \in \mathcal{T}_h, 1 \leq l, m, n \leq p_K + 1, \alpha \in \{x, y, z\} \right\}. \quad (1.66)$$

Ainsi, les champs électromagnétiques approchés se décomposent de la manière suivante, pour tout $t \in (0, T_f)$ et $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l, m, n=1}^{p_K+1} E_{l,m,n}^{K,\alpha}(t) \mathbf{L}_{l,m,n}^{K,\alpha}(\mathbf{x}), \quad (1.67)$$

$$\mathbf{H}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l, m, n=1}^{p_K+1} H_{l,m,n}^{K,\alpha}(t) \mathbf{L}_{l,m,n}^{K,\alpha}(\mathbf{x}). \quad (1.68)$$

où $\{E_{l,m,n}^{K,\alpha}(t), H_{l,m,n}^{K,\alpha}(t), K \in \mathcal{T}_h, 1 \leq l, m, n \leq p_K + 1, \alpha \in \{x, y, z\}\}$ sont les degrés de liberté des champs électriques et magnétiques à l'instant t .

Remarque 1.10 On a $\dim(\mathbf{U}_h) = \text{card}(\mathfrak{B}_h) = 3 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (p_K + 1)^3$, ce qui correspond au nombre de degrés de liberté total de l'approximation spatiale.

1.3.1.3 Intégration numérique condensée

Pour évaluer les intégrales de (1.35), la méthode usuelle consiste à se donner une formule de quadrature sur l'élément de référence \hat{K} et à considérer son image sur l'élément réel K en utilisant le changement de variable T_K . Ces quadratures sont généralement de type interpolation, c'est-à-dire qu'elles approchent l'intégrale de la fonction considérée par l'intégrale d'un polynôme interpolateur sur une distribution de points donnée. En 1D ces formules s'écrivent de manière générale :

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \simeq \int_{[a,b]}^Q f(x)dx = \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i), \quad (1.69)$$

où $\{\omega_i, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ et $\{x_i, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ désignent respectivement les points de la quadrature Q . À ce titre, les formules les plus couramment utilisées sont :

- la formule de Gauss (ou Gauss-Legendre), construite à partir de la famille des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire L^2 , exacte pour des polynômes de degré $\leq 2p + 1$ pour $p + 1$ points d'intégration en 1D,
- la formule de Gauss-Lobatto (voir tableau 1.1), exacte pour des polynômes de degré $\leq 2p - 1$ pour $p + 1$ points d'intégration en 1D. La distribution de points associée a la particularité de recouvrir les bords de l'élément, ce qui va permettre, comme nous le verrons, de réduire les coûts de calcul du schéma.

Dans le cas de maillages cartésiens, les formules de quadrature 2D et 3D sont directement obtenues par tensorisation des formules 1D.

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
\hat{x}_1	-1	-1	-1	-1
$\hat{\omega}_1$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
\hat{x}_2	1	0	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{21}}{7}$
$\hat{\omega}_2$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{49}{90}$
\hat{x}_3		1	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	0
$\hat{\omega}_3$		$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{32}{45}$
\hat{x}_4			1	$\frac{\sqrt{21}}{7}$
$\hat{\omega}_4$			$\frac{1}{6}$	$\frac{49}{90}$
\hat{x}_5				1
$\hat{\omega}_5$				$\frac{1}{10}$

TABLE 1.1 – Points et poids de Gauss-Lobatto sur $[-1; 1]$ pour les ordres 1 à 4.

Dans le but de gagner en efficacité numérique, la méthode dite de condensation (ou "lumping") a été introduite dans [53] pour la discrétisation des systèmes elliptiques. L'objectif était de pallier l'inversion coûteuse de la matrice de masse des schémas éléments finis nodaux. Par la suite, elle a été adaptée pour les problèmes hyperboliques comme l'équation des ondes [68][69], et l'on pourra en trouver une étude détaillée dans [70]. Elle consiste à remplacer la matrice de masse exacte et pleine par une matrice de masse approchée et diagonale. Pour ce faire, une méthode consiste à utiliser une formule de quadrature dont les points d'intégration coïncident avec les degrés de liberté des fonctions tests (collocation). La méthode a par la suite été élargie au calcul de la matrice de rigidité et il est à présent courant de l'utiliser dans les schémas GD [71][72] dans le but de creuser les matrices utilisées dans l'implémentation.

Dans [73], il est montré, sur un schéma éléments finis, que pour des maillages suffisamment réguliers (éléments non distordus, parallélogrammes, parallélépipèdes) l'approximation commise par la condensation de masse et de rigidité n'impacte pas l'ordre de convergence de la méthode. Les auteurs font également remarquer que l'approximation nodale aux points de Gauss-Lobatto permet de diviser par deux le temps de calcul de la matrice de rigidité par rapport à l'approximation aux points de Gauss, ce qui va dans le sens de l'étude menée dans l'Annexe A qui a orienté le choix de l'espace d'approximation.

Nous allons donc chercher à utiliser autant que possible un calcul condensé des intégrales de (1.35), afin de réduire la complexité algorithmique du schéma. Pour ce faire, la formule de quadrature de Gauss-Lobatto à $p_K + 1$ points par direction sera utilisée pour l'évaluation des termes de masse, de rigidité, de bord et de flux homogènes de l'élément K . On notera \int_K^{GL} le calcul condensé de l'intégrale ramenée sur l'élément de référence. On montre dans ce qui suit que malgré l'approximation commise dans ces calculs, il est tout de même possible de conserver des propriétés fondamentales nécessaires à construire un schéma numérique viable.

Tout d'abord, on montre qu'un calcul condensé des termes de masse et de flux homogène définissent un produit scalaire sur les espaces d'approximation locaux :

Proposition 1.11 *Pour tout élément $K \in \mathcal{T}_h$, la forme linéaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \int_K^{GL} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ est un produit scalaire sur $\mathbf{Q}^{p_K}(K)$ et un semi-produit scalaire sur $\mathbf{C}^\infty(K)$.*

Preuve. Le produit scalaire de \mathbb{R}^n implique la bilinéarité et la symétrie de l'application, et sa positivité est assurée par la positivité des poids de quadrature de Gauss-Lobatto. Considérons alors $\mathbf{u} \in \mathbf{Q}^{p_K}(K)$ tel que $\int_K^{GL} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} = 0$. Ceci s'écrit :

$$\sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_{l,m,n=1}^{p_K+1} \omega_{l,m,n} (u_{l,m,n}^\alpha)^2 = 0, \quad (1.70)$$

où $\{u_{l,m,n}^\alpha, \alpha \in \{x,y,z\}, 1 \leq l,m,n \leq p_K+1\}$ désigne les coordonnées de \mathbf{u} dans la base des polynômes de Lagrange associés aux points de Gauss-Lobatto. Les points de quadrature de Gauss-Lobatto étant positifs, on a donc nécessairement :

$$\forall \alpha \in \{x,y,z\}, \forall 1 \leq l,m,n \leq p_K+1, u_{l,m,n}^\alpha = 0, \quad (1.71)$$

ce qui montre que \mathbf{u} est le polynôme nul et donc que \int_K^{GL} est défini positif sur $\mathbf{Q}^{p_K}(K)$.

À présent, si $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(K) - \{0\}$, il suffit que \mathbf{u} soit nul aux points de quadrature pour que $\int_K^{GL} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} = 0$, et donc on n'a pas la définie positivité sur cet espace. ■

Corollaire 1.12 *Pour tout élément $K \in \mathcal{T}_h$, l'application $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{u}\|_{h,K} := \left(\int_K^{GL} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $\mathbf{Q}^{p_K}(K)$ et une semi-norme sur $\mathbf{C}^\infty(K)$.*

Preuve. Résultat immédiat en utilisant le fait que $\|\cdot\|_{h,K}$ dérive de \int_K^{GL} . ■

Remarque 1.13 *Ces résultats s'étendent naturellement aux intégrales surfaciques. Par ailleurs, ils reposent implicitement sur le caractère affine des transformations T_K , car le jacobien constant qui apparaît dans le transport de l'intégrale de l'élément réel à l'élément de référence ne change pas l'ordre polynomial de la quantité à intégrer.*

On définit alors la norme condensée globale sur l'espace d'approximation :

$$\|\cdot\|_h : \mathbf{U}_h \rightarrow \mathbb{R}^+, \mathbf{u}_h \mapsto \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_{h,K}\|_{h,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.72)$$

D'autre part, on a vu dans la section précédente que la conservation (ou la décroissance) de l'énergie de la formulation variationnelle repose en partie sur l'utilisation de la formule de Green sur les termes de rigidité. Afin de conserver le mécanisme de preuve dans l'étude de stabilité de la formulation semi-discrétisée espace, il est nécessaire de pouvoir appliquer une formule équivalente sur les termes de rigidité condensés. On montre alors le résultat suivant :

Proposition 1.14 *Pour tout élément $K \in \mathcal{T}_h$ et pour toutes fonctions $\forall u, v \in \mathfrak{B}_h$, on a l'intégration par parties condensée :*

$$\int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \, dx = \int_{\partial K}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K + \int_K^{GL} \mathbf{u}_K \cdot \nabla \wedge \mathbf{v}_K. \quad (1.73)$$

Preuve. En utilisant le changement de variable T_K et la décomposition du rotationnel sous la forme $\nabla \wedge = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} A_\alpha \partial_\alpha$:

$$\int_K \nabla \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \, dx = \text{sgn}(J_K) \int_{\hat{K}} \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{u}}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}_K \, d\hat{x} \quad (1.74a)$$

$$= \text{sgn}(J_K) \int_{\hat{K}} (A_x \partial_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}_K + A_y \partial_{\hat{y}} \hat{\mathbf{u}}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}_K + A_z \partial_{\hat{z}} \hat{\mathbf{u}}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}_K) \, d\hat{x}, \quad (1.74b)$$

où $\hat{\nabla}$ désigne l'opérateur rotationnel en les variables $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. On introduit alors la quadrature condensée. Par définition :

$$\int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = \text{sgn}(J_K) \int_{[-1;1]}^{GL} \int_{[-1;1]}^{GL} \int_{[-1;1]}^{GL} (A_x \partial_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} + A_x \partial_{\hat{y}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} + A_x \partial_{\hat{z}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \, d\hat{x} d\hat{y} d\hat{z}. \quad (1.75)$$

Or, les termes $A_{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\alpha}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$ sont des polynômes de degré différent selon la direction, comme l'illustre le tableau 1.2 :

	$A_x \partial_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$	$A_y \partial_{\hat{y}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$	$A_z \partial_{\hat{z}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$
degré en \hat{x}	$2p_K - 1$	$2p_K$	$2p_K$
degré en \hat{y}	$2p_K$	$2p_K - 1$	$2p_K$
degré en \hat{z}	$2p_K$	$2p_K$	$2p_K - 1$

TABLE 1.2 – Degré par direction des termes $A_{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\alpha}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$

Ainsi, la quadrature utilisée étant d'ordre $2p_K - 1$, certaines intégrales de 1.75 sont en réalité calculées exactement :

$$\int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = \text{sgn}(J_K) \left[\int_{[-1;1]}^{GL} \int_{[-1;1]}^{GL} \int_{[-1;1]}^{GL} A_x \partial_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\hat{x} d\hat{y} d\hat{z} + \int_{[-1;1]}^{GL} \int_{[-1;1]}^{GL} \int_{[-1;1]}^{GL} A_y \partial_{\hat{y}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\hat{y} d\hat{x} d\hat{z} + \int_{[-1;1]}^{GL} \int_{[-1;1]}^{GL} \int_{[-1;1]}^{GL} A_z \partial_{\hat{z}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\hat{z} d\hat{x} d\hat{y} \right]. \quad (1.76)$$

Il est alors possible de réaliser une intégration par parties classique sur chaque intégrale intérieure. En utilisant l'antisymétrie du rotationnel, on a $A_{\hat{x}}^* = -A_{\hat{x}}$, et il vient :

$$\int_{[-1;1]} A_x \partial_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\hat{x} = \int_{\partial[-1;1]} A_x n_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\hat{x} + \int_{[-1;1]} \hat{\mathbf{u}} \cdot A_x^* \partial_{\hat{x}} \hat{\mathbf{v}} \, d\hat{x}, \quad (1.77a)$$

les autres termes en $\partial_{\hat{y}}$ et $\partial_{\hat{z}}$ se traitant de la même façon. En reportant ces expressions dans (1.76), on obtient exactement :

$$\int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \text{sgn}(J_K) \left[\int_{\partial \hat{K}}^{GL} \mathbf{n}_{\hat{K}} \wedge \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{K}}^{GL} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{v}} d\hat{\mathbf{x}} \right], \quad (1.78)$$

d'où le résultat. \blacksquare

1.3.1.4 Formulation semi-discrétisée espace

En introduisant l'espace d'approximation et les intégrales condensées vus précédemment, on obtient la formulation semi-discrétisée espace suivant :

Trouver $\mathbf{E}_h(\cdot, t), \mathbf{H}_h(\cdot, t) \in \mathbf{U}_h$ tels que, $\forall \phi_h, \psi_h \in \mathbf{U}_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} (\underline{\epsilon} \partial_t \mathbf{E}_{hK} - \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK} + \underline{\sigma} \mathbf{E}_{hK} + \mathbf{J}_s) \cdot \phi_{hK} dx \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^Q \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_h \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_{hK} ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^Q \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_h \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_{hK} ds \right] = 0, \quad (1.79a) \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} (\underline{\mu} \partial_t \mathbf{H}_{hK} + \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK}) \cdot \psi_{hK} dx - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK} \cdot \psi_{hK} ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^Q \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_h \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \psi_{hK} ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^Q \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_h \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \psi_{hK} ds \right] = 0, \quad (1.79b) \end{array} \right.$$

où :

- \int^{GL} désigne le calcul condensé de l'intégrale après changement de variable sur l'élément de référence, par une formule de quadrature Gauss-Lobatto à $(p_K + 1)^3$ points dans le cas d'une intégrale volumique sur K et à $(p_K + 1)^2$ dans le cas d'une intégrale surfacique sur ∂K ,
- \int^Q correspond à un calcul différent selon la nature du flux et de la facette considérée :
 - sur la partie homogène du flux, $Q = GL$, l'intégrale est calculée comme précédemment,
 - sur la partie hétérogène, on distingue deux cas de figure, selon que la configuration se prête ou non à un calcul par condensation. Si la facette support de l'intégrale est h conforme et si la trace des deux espaces d'approximation voisins sont identiques, alors $Q = GL$. Dans le cas contraire, il s'agit d'une situation de h ou p non-conformité inadaptée au calcul par condensation, et l'on choisit alors $Q = G$: l'intégrale est calculée exactement à l'aide d'une formule de quadrature de Gauss d'ordre suffisamment élevé, après changement de variable sur l'élément de référence.

On a alors l'équivalent semi-discret de la proposition 1.7 :

Proposition 1.15 *Si l'on suppose que $\underline{\sigma} = 0$ et $\mathbf{J}_s = 0$, alors l'énergie semi-discrète du système (1.79), définie par :*

$$\forall t \in (0, T_f), \quad \mathcal{E}_h(t) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\underline{\epsilon}_K}^{GL} \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} dx + \int_{\underline{\mu}_K}^{GL} \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} dx \right], \quad (1.80)$$

se conserve en flux centrés et décroît en flux décentrés.

Preuve. On utilise exactement le même mode opératoire que pour la démonstration de la proposition 1.7, rendu possible par la proposition 1.14 d'intégration par partie condensée. ■

1.3.1.5 Schéma GDDT

On s'intéresse à présent à la discrétisation temporelle de la formulation précédente. Celle-ci est basée sur un schéma explicite saute-mouton d'ordre 2, couramment associé à l'approche GD en électromagnétisme [74][56][31][65]. Le choix d'un schéma explicite plutôt qu'implicite se justifie par des raisons de performances, ces derniers nécessitant la résolution coûteuse d'un système linéaire global à chaque pas de temps. Par ailleurs, il est montré dans [58] que l'utilisation de schémas implicites de type Runge-Kutta peut être problématique, car, d'une part ils nécessitent de connaître la valeur des termes sources sur des pas de temps intermédiaires, et d'autre part, n'étant pas contraint par une condition CFL, un dimensionnement trop grossier du pas de temps peut conduire à une forte erreur de dissipation.

L'intervalle $(0, T_f)$ est discrétisé en N_{iter} intervalles réguliers de pas Δt et on note $t^n = n\Delta t$. En posant $\mathbf{E}^n = \mathbf{E}(\cdot, t^n)$ et $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}(\cdot, t^{n+\frac{1}{2}})$, le schéma GDDT s'écrit :

Pour tout $n \in \llbracket 0, N_{iter} \rrbracket$, trouver $\mathbf{E}_h^n, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbf{U}_h$, tels que, $\forall \phi_h, \psi_h \in \mathbf{U}_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} \left(\underline{\epsilon} \frac{\mathbf{E}_{hK}^{n+1} - \mathbf{E}_{hK}^n}{\Delta t} - \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} + \underline{\sigma} \frac{\mathbf{E}_{hK}^{n+1} + \mathbf{E}_{hK}^n}{2} + \mathbf{J}_s^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \phi_{hK} dx \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^Q \left[\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial K}^K \cdot \phi_{hK} ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^Q \beta_{\partial K}^K \left[\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_h^n \right]_{\partial K}^K \cdot \phi_{hK} ds \right] = 0, \quad (1.81a) \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} \left(\underline{\mu} \frac{\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \right) \cdot \psi_{hK} dx - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \cdot \psi_{hK} ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^Q \left[\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_h^{n+1} \right]_{\partial K}^K \cdot \psi_{hK} ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^Q \beta_{\partial K}^K \left[\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial K}^K \cdot \psi_{hK} ds \right] = 0. \quad (1.81b) \end{array} \right.$$

Remarque 1.16 Du fait de la discrétisation temporelle utilisée, l'initialisation de ce schéma nécessite de connaître $\mathbf{E}_h(\cdot, 0)$ et $\mathbf{H}_h(\cdot, \frac{\Delta t}{2})$. Si nous disposons de la première quantité via la condition initiale, la deuxième est inconnue a priori. En pratique, un schéma numérique auxiliaire tel que le schéma d'Euler explicite est utilisé pour en calculer une valeur approchée.

L'équivalent discret de la proposition 1.15 sera établi dans le chapitre suivant pour une écriture plus générale de ce schéma, où nous montrerons une propriété de stabilité sous condition CFL.

1.4 Étude numérique de la convergence

Cette section présente la mise en œuvre du schéma GDDT sur un cas-test de cavité résonante. L'objectif est d'une part d'étudier la convergence numérique en h du schéma pour différents degrés de résolution, et d'autre part d'établir des jeux de valeurs de référence qui serviront à calibrer les études adaptatives qui seront menées par la suite. On ne considère donc ici que des configurations hp conformes.

1.4.1 Description du cas-test et de la formule d'erreur

On considère la propagation de modes de résonance dans une cavité cubique $\Omega = [0; 1]^3$ vide aux parois parfaitement métalliques. Il s'agit d'un cas-test de validation classique dans la littérature, que nous retrouvons par exemple dans [45][50][65]. L'expression exacte $(\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e)$ de ces modes est donnée, pour tout $(t, x, y, z) \in (0, T) \times \Omega^3$, par :

$$E_{e,x}(x, y, z, t) = -mp \frac{\pi^2}{\omega^2} \sin(p\pi z) \cos(m\pi x) \sin(n\pi y) \cos(\omega c_0 t) \quad (1.82a)$$

$$E_{e,y}(x, y, z, t) = -np \frac{\pi^2}{\omega^2} \sin(p\pi z) \sin(m\pi x) \cos(n\pi y) \cos(\omega c_0 t) \quad (1.82b)$$

$$E_{e,z}(x, y, z, t) = (n^2 + m^2) \frac{\pi^2}{\omega^2} \cos(p\pi z) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) \cos(\omega c_0 t) \quad (1.82c)$$

$$H_{e,x}(x, y, z, t) = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\pi n}{\omega} \cos(p\pi z) \sin(m\pi x) \cos(n\pi y) \sin(\omega c_0 t) \quad (1.82d)$$

$$H_{e,y}(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\pi m}{\omega} \cos(p\pi z) \cos(m\pi x) \sin(n\pi y) \sin(\omega c_0 t) \quad (1.82e)$$

$$H_{e,z}(x, y, z, t) = 0 \quad (1.82f)$$

avec $\omega = \pi \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ et $m, n, p \in \mathbb{N}$ les nombres d'onde du signal dans les directions x, y, z . Dans cette étude, nous considérons le mode (1,1,1), ce qui correspond à une onde de fréquence $f = 260 \text{ MHz}$ et de longueur d'onde $\lambda = 1,15 \text{ m}$. Le temps final de simulation est fixé à $T_f = 5 \text{ ns}$ (1 période).

Pour l'étude de convergence, nous utilisons une norme espace-temps, afin de capturer les erreurs de dissipation et de dispersion commises sur toute la durée de simulation. Elle est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{E}rr = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \sqrt{\|\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_h\|_{0,\epsilon_0}^2 + \|\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_h\|_{0,\mu_0}^2} dt. \quad (1.83)$$

Cette quantité est calculée en utilisant la quadrature de Simpson pour la partie temporelle :

$$\mathcal{E}rr \simeq \frac{1}{T_f} \sum_{n=1}^{N_{iter}} \Delta t \left[\frac{1}{6} err^n + \frac{2}{3} err^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} err^{n+1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.84)$$

et la quadrature de Gauss à 10 points par direction sur chaque élément pour la partie spatiale :

$$err^i = \sum_{j=1}^{(10)^3} \omega_{K,j}^G \left[\epsilon_0 \left(\mathbf{E}_e(\mathbf{x}_{K,j}^G, t^i) - \mathbf{E}_h^n(\mathbf{x}_{K,j}^G) \right)^2 + \mu_0 \left(\mathbf{H}_e(\mathbf{x}_{K,j}^G, t^{i+\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h^{i+\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_{K,j}^G) \right)^2 \right]. \quad (1.85)$$

La discrétisation de l'erreur (1.83) est ainsi d'ordre 3 en temps et 19 en espace, ce qui est suffisant pour capturer les erreurs spatiales et temporelles du schéma, et donc ne pas être limitant pour l'étude de la convergence.

D'après les études menées dans [45][74][65], nous anticipons un ordre de convergence donné par :

$$\min\{2, p\}, \quad (1.86)$$

où 2 représente l'ordre du schéma temporel et p le degré des fonctions de base choisies pour la résolution. Ainsi, dans le but de s'affranchir de la saturation théorique de la vitesse de convergence et valider la montée en ordre de l'approximation spatiale, nous commençons notre étude en utilisant un pas de temps sur-contraint afin de minimiser l'erreur commise dans la partie temporelle du schéma. Puis, dans un second temps, nous nous plaçons dans des conditions d'utilisation normales du schéma, avec un pas de temps donné par la condition CFL.

1.4.2 Consistance de l'approximation spatiale

On commence donc par découpler la partie temporelle et spatiale du schéma en menant une étude de convergence avec un pas de temps petit devant la valeur maximale autorisée par la contrainte CFL ($\Delta t \simeq \frac{\Delta t^{CFL}}{1000}$).

Remarque 1.17 *L'étude de convergence pour la norme utilisée implique des temps d'exécution importants, car elle nécessite un calcul d'erreur basé sur une quadrature d'ordre élevé sur chaque élément du maillage et à chaque itération. Ces temps d'exécution sont de plus alourdis par l'utilisation de pas de temps restreints. De ce fait, nous ne considérons ici qu'un petit nombre de configurations, néanmoins suffisant pour estimer l'ordre de convergence du schéma. Une solution alternative pour rendre compte de la consistance de l'approximation spatiale sans utiliser des pas de temps sur-contraints est d'utiliser un schéma temporel d'ordre élevé, de type Runge-Kutta par exemple. Cependant, cette solution est nettement plus intrusive au niveau du code.*

Les résultats de cette étude sont consignés dans le tableau 1.3 et la figure 1.3. La stratégie des petits pas de temps utilisée a bien permis de contourner la saturation théorique de convergence à l'ordre 2. Pour des fonctions de base Q^p , on obtient une vitesse de $p + 1$, soit un ordre de plus que le résultat théorique. Ce phénomène, dit de super-convergence, est explicable par l'utilisation de flux décentrés et de maillages réguliers orthogonaux.

Résolution	h (m)	$N_{mailles}$	N_{ddl}	$\mathcal{E}rr$	taux cv.
Q^1	1,0e-1	1 000	48 000	4,83e-11	-
	8,33e-2	1 728	82 944	3,41e-11	1,9
	6,67e-2	3 375	162 000	2,20e-11	1,9
	5,0e-2	8 000	384 000	1,24e-11	2,0
Q^2	2,0e-1	125	20 250	3,67e-12	-
	1,25e-1	512	82 944	8,39e-13	3,1
	1,0e-1	1 000	162 000	4,26e-13	3,0
	8,3e-2	1 728	279 936	2,46e-13	3,0
Q^3	5,0e-1	8	3 072	4,69e-12	-
	3,33e-1	27	10 368	9,69e-13	3,9
	2,5e-1	64	24 576	3,19e-13	3,9
	2,0e-1	125	48 000	1,37e-13	3,8
Q^4	5,0e-1	8	6 000	4,36e-13	-
	3,33e-1	27	20 250	4,8e-14	5,4
	2,5e-1	64	48 000	1,05e-14	5,3
	2,0e-1	125	93 750	3,34e-15	5,1

TABLE 1.3 – Étude de consistance de l'approximation spatiale pour un pas de temps sur-contraint, avec h la dimension des cellules, $N_{mailles}$ le nombre d'éléments du maillage, N_{ddl} le nombre de degrés de liberté, $\mathcal{E}rr$ l'erreur de simulation, et "taux cv." le taux de convergence entre deux configurations successives.

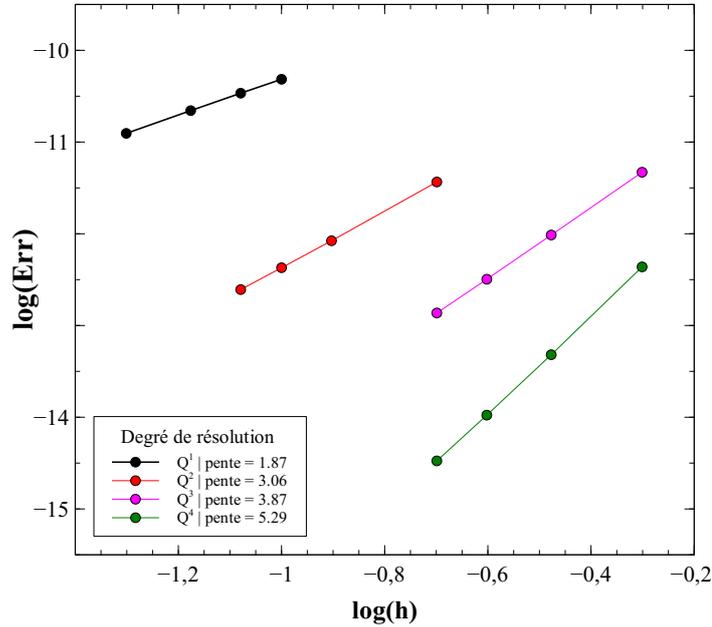


FIGURE 1.3 – Courbes de consistance de l’approximation spatiale pour les ordres 1 à 4.

En conclusion, la consistance numérique en h de l’approximation spatiale est acquise pour des fonctions de base allant de Q^1 à Q^4 et nous obtenons des vitesses de convergence en accord avec les résultats théoriques (pour une étude similaire réalisée en flux centrés, voir l’Annexe E).

1.4.3 Convergence du schéma en condition d’utilisation

Nous utilisons à présent le pas de temps maximal autorisé par la contrainte CFL du schéma observée en pratique pour ce cas-test (voir tableau 1.4).

Résolution	Q^1	Q^2	Q^3	Q^4
CFL	0,5	0,2	0,1	0,06

TABLE 1.4 – Valeurs maximales, en flux décentrés, du rapport $\frac{\sqrt{3}c_0\Delta t}{h}$ en fonction de l’ordre de résolution, assurant la stabilité du schéma.

Les données de convergence sont recensées dans le tableau 1.5 et la figure 1.4. Les ordres de convergence sont minorés par $\min\{2, p\}$, ce qui correspond au résultat théorique rappelé précédemment. On remarque que la super-convergence est conservée pour la résolution Q^1 . De même, on observe un ordre de résolution augmenté en Q^2 sur les premiers maillages (voir tableau 1.5), mais la limitation issue du schéma temporel devient rapidement prépondérante et la convergence se stabilise finalement à l’ordre 2, en accord avec les résultats théoriques.

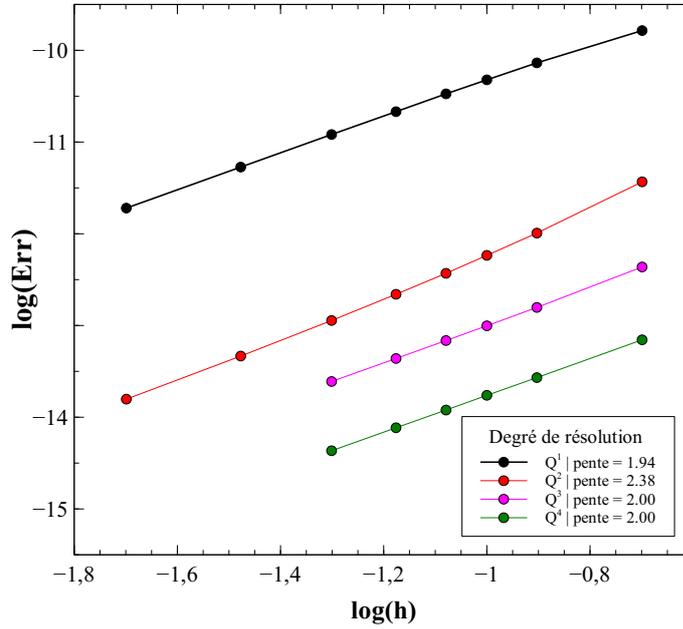


FIGURE 1.4 – Courbes de convergence du schéma GDDT pour les ordres 1 à 4.

Résolution	h (m)	$N_{mailles}$	N_{ddl}	$\mathcal{E}rr$	taux cv.	t-CPU (s)
Q^1	1,0e-1	1 000	48 000	4,8e-11	-	1,5e-1
	8,3e-2	1 728	82 944	3,4e-11	1,9	2,8e-1
	6,7e-2	3 375	162 000	2,1e-11	2,0	7,9e-1
	5,0e-2	8 000	384 000	1,2e-11	2,0	2,6
	3,3e-2	27 000	1 296 000	5,3e-12	2,0	21
	2,0e-2	125 000	6 000 000	1,9e-12	2,0	205
Q^2	1,0e-1	1 000	162 000	5,9e-13	-	8,9e-1
	8,3e-2	1 728	279 936	3,8e-13	2,5	2,4e-1
	6,7e-2	3 375	546 750	2,2e-13	2,4	10
	5,0e-2	8 000	1 296 000	1,1e-13	2,3	39
	3,3e-2	27 000	4 374 000	4,6e-14	2,3	202
	2,0e-2	125 000	20 250 000	1,6e-14	2,1	1337
Q^3	2,0e-1	125	48 000	4,3e-13	-	3,6e-1
	1,25e-1	512	196 608	1,6e-13	2,2	1,6
	1,0e-1	1 000	384 000	9,9e-14	2,1	5,6
	8,3e-2	1 728	663 552	6,9e-14	2,0	19
	6,7e-2	3 375	1 296 000	4,4e-14	2,0	47
	5,0e-2	8 000	3 072 000	2,5e-14	2,0	235
Q^4	2,0e-1	125	93 750	7,0e-14	-	0,7
	1,25e-1	512	384 000	2,7e-14	2,0	8,7
	1,0e-1	1 000	750 000	1,7e-14	2,0	41
	8,3e-2	1 728	1 296 000	1,2e-14	2,0	125
	6,7e-2	3 375	2 531 250	7,7e-15	2,0	264
	5,0e-2	8 000	60 000 000	4,3e-15	2,0	892

TABLE 1.5 – Données de convergence du schéma GDDT pour un pas de temps CFL, avec h la dimension des cellules, $N_{mailles}$ le nombre d'éléments du maillage, N_{ddl} le nombre de degrés de liberté, $\mathcal{E}rr$ l'erreur de simulation, et "taux cv." le taux de convergence entre deux configurations successives.

Malgré cette saturation, l'utilisation de fonctions de base d'ordre élevé demeure avantageuse, du fait de la plus grande précision qu'elles permettent d'obtenir à iso-maillage, comme en témoignent les positions relatives des droites de la figure 1.4. Ou bien, de manière équivalente, la montée en ordre est intéressante car elle permet de réduire les coûts de calcul nécessaires à atteindre une précision donnée, et donc d'améliorer l'efficacité numérique de la résolution. Par exemple, en utilisant les données de convergence Q^1 du tableau 1.5, on obtient que les temps d'exécution se corrélaient à l'erreur de simulation de la manière suivante :

$$t\text{-CPU}_{Q^1} \simeq 4.10^{-23} * \mathcal{E}rr^{-2,1}. \quad (1.87)$$

Ainsi, pour atteindre une erreur de simulation de $\mathcal{E}rr = 4,3.10^{-15}$, le temps de calcul de la résolution Q^1 est proche de deux ans pour l'architecture et les ressources informatiques utilisées, alors qu'elle est de l'ordre d'un quart d'heure avec des fonctions de base Q^4 .

Enfin, on observe que le gain en précision entre la résolution Q^1 et Q^2 est bien plus important que dans le passage Q^2 à Q^3 , ou Q^3 à Q^4 . Ce gap s'explique par la capacité de l'approximation spatiale à représenter la courbure de la solution : elle croit avec le degré des fonctions de base, mais elle s'acquiert dès la résolution Q^2 . Il s'agit d'une propriété qualitative de premier plan qui va nous permettre d'orienter la stratégie de post-maillage proposée par la suite.

Remarque 1.18 *Afin de ne pas fausser les performances numériques du solveur, les temps d'exécution présentés dans le tableau 1.5 ne tiennent pas compte du temps passé dans les routines de calcul de l'erreur.*

En conclusion, comme précédemment, la convergence numérique du schéma GDDT est obtenue pour des fonctions de base Q^1 à Q^4 conformément aux résultats théoriques.

1.5 Étude de l'impact du choix du maillage hp sur l'efficacité numérique du schéma

Comme nous avons vu dans la section précédente, à précision égale, une résolution Q^1 sur maillage fin peut être plusieurs milliers de fois plus lente qu'une résolution Q^4 sur maillage grossier. L'efficacité numérique d'une résolution GDDT est ainsi étroitement liée au choix du maillage hp utilisé. Dans notre démarche de recherche de performance, une problématique centrale qui se pose alors peut se formuler de la manière suivante : étant donnée une précision objectif, quel est le maillage hp permettant d'obtenir la meilleure efficacité numérique au niveau du solveur ? S'il semble acquis que l'utilisation de cellules de grandes dimensions associées à un degré d'interpolation élevé permet de diminuer les coûts de calcul [52], la question de l'affectation de ces ordres locaux sous une contrainte de précision globale reste ouverte. Dans cette section, nous cherchons à y apporter des éléments de réponse, en quantifiant l'impact d'une approche d'adaptation hp sur l'efficacité numérique du schéma GDDT, en condition d'utilisation ($\Delta t = \Delta t^{CFL}$). Les objectifs principaux de cette étude sont d'établir et de chiffrer des tendances dans les performances du schéma GDDT en fonction du maillage et des ordres de résolution utilisés, et de déterminer des équivalences de précision entre éléments hp différents.

Pour ce faire, nous allons comparer la précision et les coûts de calcul du solveur GDDT sur plusieurs maillages hp . Comme il est nécessaire de mesurer l'erreur commise lors de la résolution, nous utilisons de nouveau le cas-test de la cavité résonante pour laquelle nous disposons d'une solution exacte. Les maillages hp utilisés sont obtenus par h -déaffinement/ p -enrichissement à partir d'une grille cartésienne initiale, sur laquelle, dans la logique de la stratégie générale présentée en introduction, la résolution Q^1 donne une précision de référence. Cette précision de référence est alors considérée comme une contrainte de qualité. Ainsi, dans ce qui suit, un maillage hp sera dit admissible s'il engendre une qualité au moins égale à la qualité de référence.

Le processus de h -déaffinement/ p -enrichissement pouvant être mené de manière homogène (h et p constants) ou hétérogène (h et p variables) sur le maillage initial, notre étude se place tout d'abord dans un cadre conforme, puis dans un cadre non-conforme.

1.5.1 Cadre hp conforme

Dans ce paragraphe, le premier objectif est d'étudier l'évolution des performances numériques (stockage mémoire et temps de calcul) en fonction du maillage hp utilisé et de déterminer les gains qui peuvent être obtenus grâce à des maillages hp bien calibrés. Il s'agit alors d'en déduire des règles d'association locales, entre taille de cellule h et degré d'interpolation p , de sorte que l'élément hp soit garant d'un niveau de précision donné. Nous commençons par donner le cas-test considéré pour cette étude, nous détaillons ensuite la méthodologie employée, et enfin nous discutons des résultats obtenus.

On considère la propagation du mode $(3, 3, 3)$ une cavité résonante cubique Ω aux parois parfaitement métalliques, pour un temps de simulation $T_f = 15ns$ ($\simeq 12$ périodes), permettant d'obtenir des temps de calcul raisonnables et de voir apparaître les phénomènes de dissipation et de dispersion du schéma. Le maillage initial est une grille cartésienne conforme possédant 40 mailles par direction (noté $40*40*40$), sur laquelle la résolution Q^1 donne la précision minimale à satisfaire.

Alors, pour des fonctions de base Q^p , $p \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, l'objectif est de déterminer le maillage cartésien conforme permettant d'assurer la précision de référence en minimisant le stockage mémoire et le temps d'exécution du solveur. En d'autres termes, pour chaque ordre de résolution, nous cherchons le maillage admissible le plus grossier possible. De manière plus formelle, il s'agit de déterminer le maillage \mathcal{M}_p , pour $p \in \llbracket 1, p \rrbracket$, tel que :

$$\mathcal{M}_p = \arg \min_{\mathcal{M}} \{ (t\text{-CPU}(\mathcal{M}), \text{RAM}(\mathcal{M})) / \mathcal{E}rr(\mathcal{M}) \leq \mathcal{E}rr_{réf} \}, \quad (1.88)$$

où $t\text{-CPU}(\mathcal{M})$ et $\text{RAM}(\mathcal{M})$ représente le temps d'exécution et la charge mémoire de la résolution Q^p sur le maillage $\mathcal{M} = N*N*N$, $\mathcal{E}rr(\mathcal{M})$ l'erreur associée, et $\mathcal{E}rr_{réf}$ l'erreur du calcul Q^1 sur la grille cartésienne initiale. Le maillage \mathcal{M}_p sera appelé maillage optimal pour la résolution Q^p . De manière équivalente, pour un maillage donné, le degré de résolution permettant d'assurer la qualité de référence en minimisant les coûts de calcul sera dit optimal pour ce maillage. Remarquons d'ores et déjà que pour un ordre de résolution Q^p donné, il n'existe qu'un seul maillage optimal, mais qu'il est vraisemblable qu'une résolution Q^p puisse être optimale pour plusieurs maillages.

Afin de déterminer le maillage optimal pour les différents ordres de résolution, on procède par déraffinement successifs à partir du maillage initial, en incrémentant le degré de résolution lorsque la précision de référence n'est plus satisfaite. Ainsi, dans ce processus, lors d'une résolution Q^p sur maillage $N*N*N$, deux cas de figure peuvent se présenter :

- l'erreur commise est inférieure à l'erreur de référence : la simulation est sur-précise, il est possible d'en dégrader légèrement la qualité en poursuivant le h -déraffinement. Le degré de résolution Q^p est maintenu et on teste le maillage déraffiné suivant : $(N-1)*(N-1)*(N-1)$,
- l'erreur commise est supérieure à l'erreur de référence : le maillage $N*N*N$ n'est pas admissible, donc le maillage $(N+1)*(N+1)*(N+1)$ est optimal pour la résolution Q^p . La simulation est alors effectuée de nouveau avec des fonctions de base Q^{p+1} .

On obtient alors les résultats suivants. Sur la figure 1.5 est représentée l'évolution de l'ordre de résolution optimal en fonction du facteur de déraffinement δ_N , défini comme le rapport du nombre de mailles par direction entre la grille initiale et la grille courante :

$$\delta_N = \frac{N_{ini}}{N} \quad (1.89)$$

Rapporté au maillage réel, on obtient que la résolution Q^1 n'est optimale que sur le maillage initial $40*40*40$. Ceci est tout à fait normal du fait de la définition de la précision de référence, car pour un même ordre de résolution, l'erreur sur un maillage $(N-1)*(N-1)*(N-1)$ est nécessairement plus grande que celle sur le maillage $N*N*N$. Par la suite, cette évolution s'effectue par plateaux successifs, confirmant que des fonctions de base Q^p peuvent être optimales pour plusieurs maillages. Les meilleures configurations hp sont alors données par un maillage $11*11*11$ associé à une résolution Q^2 , un maillage $3*3*3$ pour une

approximation Q^3 , et un maillage $2*2*2$ pour les fonctions de base Q^4 . Le fait que tous les ordres de résolution soient balayés successivement tend à montrer que tout léger déraffinement peut être compensé par une légère augmentation du degré des fonctions de base. En particulier, si le déraffinement n'est pas trop grossier (facteur compris entre 1 et 3), le passage d'une résolution Q^p à une résolution Q^{p+k} avec $k > 1$ apparaît sous-optimal. Par ailleurs, la taille de chaque plateau semble être d'autant plus importante que l'ordre de résolution est élevé (le plateau Q^4 fait exception à cause du dimensionnement du cas-test, car pousser plus loin le déraffinement conduirait à un maillage constitué d'une seule cellule, configuration fortement dégénérée non admissible). Cela semble montrer que le gain en précision acquis par la montée en ordre croît plus rapidement que la perte induite par le déraffinement. Asymptotiquement, ce point paraît intéressant car il permet d'envisager des déraffinements colossaux, synonymes de forts gains en performances, au prix de fonctions de base d'ordre raisonnable. Ainsi, en exploitant les résultats de convergence du schéma issus de la figure 1.4, les fonctions de base Q^4 permettraient *a priori* d'utiliser un taux de déraffinement maximal de l'ordre de 80 (en toute rigueur, il faudrait mener de nouveau l'étude de convergence, car la condition initiale considérée n'étant plus la même, la pente et l'ordonnée à l'origine des droites de la figure 1.4 peuvent légèrement différer).

On retrouve sur cette même figure 1.5 l'évolution du stockage mémoire en fonction du facteur de déraffinement. La tendance est claire : le nombre de degrés de liberté décroît fortement au cours du processus h -déraffinement/ p -enrichissement. Cependant, un phénomène important est à noter. On observe, dans le passage de la résolution Q^1 à la résolution Q^2 une augmentation transitoire du nombre de degrés de liberté par rapport à la configuration de référence. Ainsi, jusqu'à ce qu'un taux de déraffinement proche de 1.6 soit atteint (correspondant au maillage $26*26*26$), il n'est pas avantageux du point de vue du stockage mémoire d'adopter une résolution Q^2 . Au delà de ce seuil, le stockage mémoire commence à être inférieur à la configuration de référence. Ce constat, qualitativement prévisible, s'explique premièrement par l'augmentation du nombre d'itérations du schéma temporel lors du passage Q^p à Q^{p+1} , du fait d'une condition CFL plus restrictive (voir tableau 1.4). Le pas de temps Q^{p+1} devient plus élevé que le pas de temps Q^p seulement à partir d'un certain facteur de déraffinement (dépendant de p). Deuxièmement, ce surcoût s'explique par la sur-précision de la simulation, car de manière générale, la qualité Q^{p+1} sur un maillage $(N-1)*(N-1)*(N-1)$ est bien plus importante que la qualité Q^p sur maillage $N*N*N$. On constate le même phénomène de sur-coût dans la transition Q^2 à Q^3 , mais dans une moindre mesure et surtout sans provoquer des coûts de calcul supérieurs à la configuration initiale. Le passage de l'ordre 1 à l'ordre 2 est donc un passage critique qui peut être source de contre-performances sévères si le facteur de déraffinement utilisé n'est pas suffisamment élevé. Les mêmes tendances sont observées sur les temps de simulation représentés sur la figure 1.6.

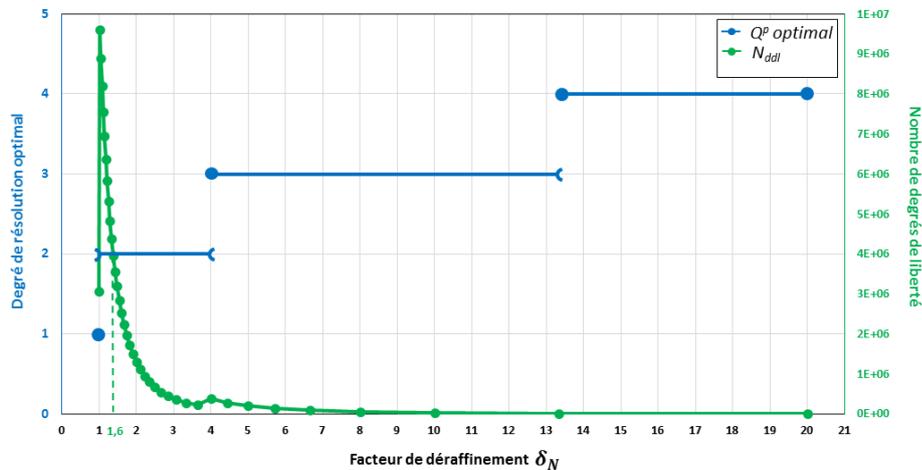


FIGURE 1.5 – Évolution du degré de résolution optimal en fonction du facteur de déraffinement du maillage initial et du stockage mémoire (en nombre de degrés de liberté, N_{dal}) correspondant pour chaque configuration.

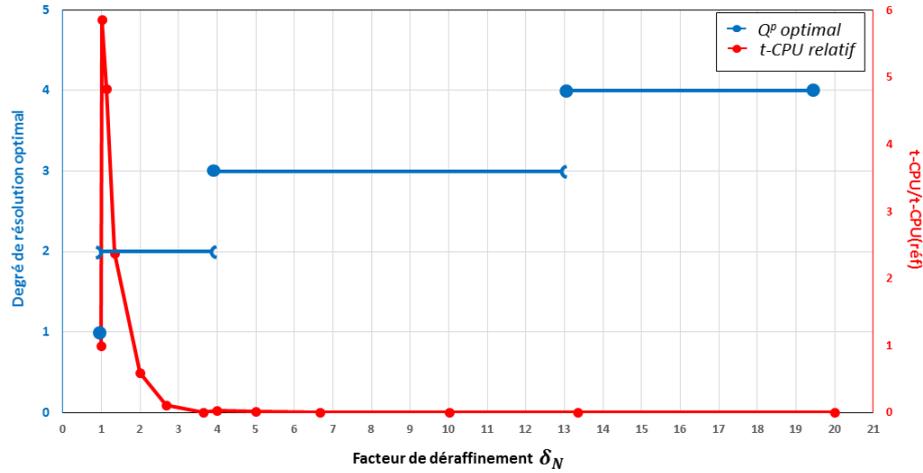


FIGURE 1.6 – Évolution du degré de résolution optimal en fonction du facteur de déraffinement du maillage initial et du temps de calcul correspondant pour chaque configuration, adimensionné par rapport au temps de calcul du maillage initial t-CPU(réf).

Intéressons nous à présent, non plus sur les tendances globales, mais sur les gains obtenus sur chaque maillage hp optimal associé aux différents ordres de résolution, dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 1.6.

Config. optimales	h	$N_{mailles}$	N_{ddl}	N_{iter}	t-CPU	\mathcal{E}_{rr}
Q^1 - 40x40x40 (réf.)	2,5e-2	64 000	3 072 000	624	1,0	1,9e-10
Q^2 - 11x11x11	9,1e-2	1 331	215 622	440	8,61e-3	1,36e-10
Q^3 - 3x3x3	3,3e-1	27	10 368	234	1,47e-3	1.63e-10
Q^4 - 2x2x2	5,0e-1	8	6 000	371	3,08e-3	6,16e-11

TABLE 1.6 – Configuration hp optimales et performances numériques associées. Le temps de calcul (t-CPU) est adimensionné par rapport à la résolution Q^1 de référence.

Par construction, chacune de ces configurations assure une meilleure précision que celle de référence. Dès lors, un indicateur central à étudier est l'écart à l'erreur de référence. En effet, plus cet écart est faible, plus on se rapproche de l'efficacité numérique optimale pour l'ordre de résolution considéré. *A contrario*, un écart important traduit une résolution sur-précise et donc potentiellement des sur-coûts inutiles. Comme le montre le tableau 1.7, l'écart à l'erreur de référence est faible pour les maillages hp optimaux Q^2 et Q^3 , ce qui permet d'affirmer que l'efficacité numérique sur ces deux configurations est proche de l'efficacité numérique théorique maximale. Ce constat ne s'étend pas à la résolution Q^4 qui s'avère sur-précise, car, comme expliqué précédemment, le cas-test est sous-dimensionné pour cet ordre de résolution.

Comme le montrent les gains en stockage mémoire présentés dans le tableau 1.7, l'utilisation d'un maillage adapté à l'ordre de résolution permet de compenser l'augmentation du nombre de degrés de liberté par maille, induit par la montée en ordre, si bien que le stockage mémoire de référence est divisé par un facteur allant de 10 à 300 suivant l'ordre de résolution utilisé. En ce qui concerne les temps d'exécution, les gains obtenus proviennent de la conjonction de deux facteurs. D'une part, de la réduction du nombre d'itérations (voir tableau 1.6), provenant de contraintes CFL moins restrictives résultant du h -déraffinement. D'autre part, de la chute de la complexité algorithmique intrinsèque du schéma spatial, comme le montre la comparaison des temps de calcul unitaire du schéma (durée d'une itération temporelle) figurant dans le tableau 1.7.

Config. optimales	$N_{ddl}^{réf} / N_{ddl}$	$t-CPU^{réf} / t-CPU$	$t-CPU_{iter}^{réf} / t-CPU_{iter}$
Q^1 - 40x40x40 (réf.)	1,0	1,0	1,0
Q^2 - 11x11x11	14	120	92
Q^3 - 3x3x3	300	680	360
Q^4 - 2x2x2	510	320	190

TABLE 1.7 – Gains en stockage mémoire et en temps d'exécution des différents maillages hp optimaux par rapport à la configuration de référence.

Par la suite, connaissant les facteurs de déraffinement entre les différentes configurations hp optimales, on peut établir, en première approximation, une équivalence de précision entre les éléments hp unitaires suivants : $Q^1(h)$, $Q^2(4h)$, $Q^3(13h)$ et $Q^4(20h)$. Le tableau 1.7 permet alors d'estimer asymptotiquement les coûts de calculs unitaires relatifs entre ces éléments. Par exemple :

- l'élément $Q^2(4h)$ est 14 fois moins coûteux en stockage mémoire et 92 fois plus rapide à l'exécution que l'élément $Q^1(h)$,
- l'élément $Q^3(13h)$ est 21 fois plus léger et 3,9 fois plus rapide que l'élément $Q^2(4h)$.

Naturellement, ces estimations sont cas-test dépendantes (maillage et précision de référence, condition initiale, présence d'un terme source, conditions aux limites, temps d'exécution, etc.), mais permettent néanmoins d'obtenir des ordres de grandeurs utiles pour orienter une stratégie automatisée d'adaptation hp .

Comparons alors les solutions numériques obtenues sur les maillages hp optimaux. La figure 1.8 présente l'évolution des composantes du champ électrique en deux points de la cavité, dont la position est représentée sur la figure 1.7. On observe que sur les dernières itérations, la solution numérique Q^1 de référence est systématiquement en avance de phase par rapport à la solution exacte et aux solutions Q^2 , Q^3 et Q^4 . On en conclut que malgré la dilatation des maillages, les résolutions d'ordre élevé permettent de réduire l'erreur de dispersion du schéma GDDT. En revanche, le h -déraffinement peut localement induire une augmentation de la dissipation, comme le montrent les figures 1.8c-1.8d pour la résolution Q^3 . Ce phénomène est particulièrement marqué sur ces deux figures, mais, la configuration Q^3 -3*3*3 étant admissible, il n'est pas suffisamment important pour faire chuter la précision globale en dessous du seuil de référence. Par ailleurs, l'utilisation de maillages hp déraffinés peut induire plusieurs artefacts, comme la présence de champ résiduel sur les interfaces (voir figure 1.9c), ou la déformation des nœuds du signal (voir figure 1.9d). Ces phénomènes sont causés à la fois par la résolution numérique et par la méthode de visualisation utilisées (voir remarque 1.19). Cependant, comme précédemment, malgré ces perturbations la précision globale reste supérieure à celle de référence.

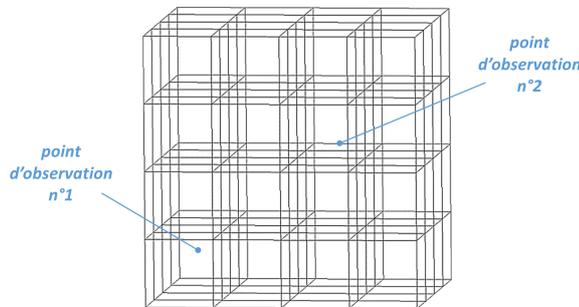


FIGURE 1.7 – Position qualitative des points d'observation de la figure 1.8.

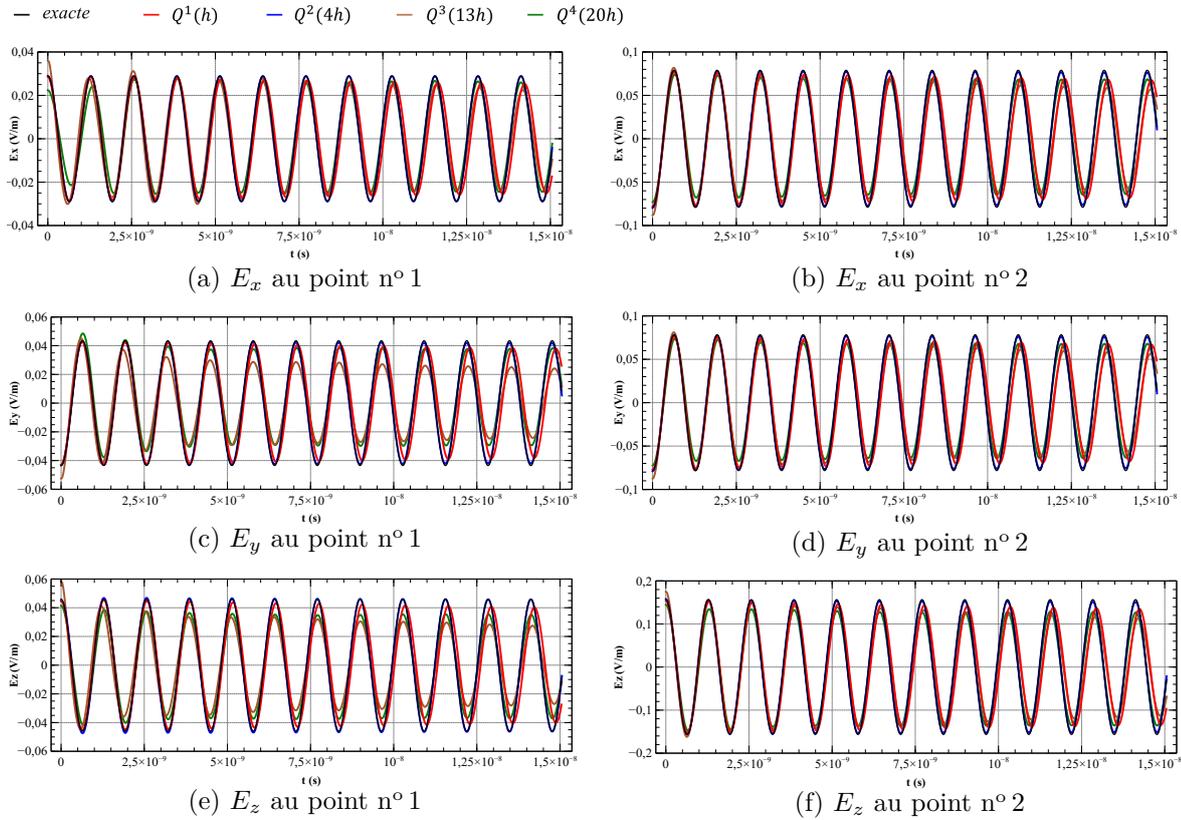


FIGURE 1.8 – Évolution des composantes E_x , E_y , et E_z en fonction du temps, en deux points de la cavité : point n° 1 = $(0,3 ; 0,35 ; 0,38)$, point n° 2 = $(0,61 ; 0,61 ; 0,61)$.

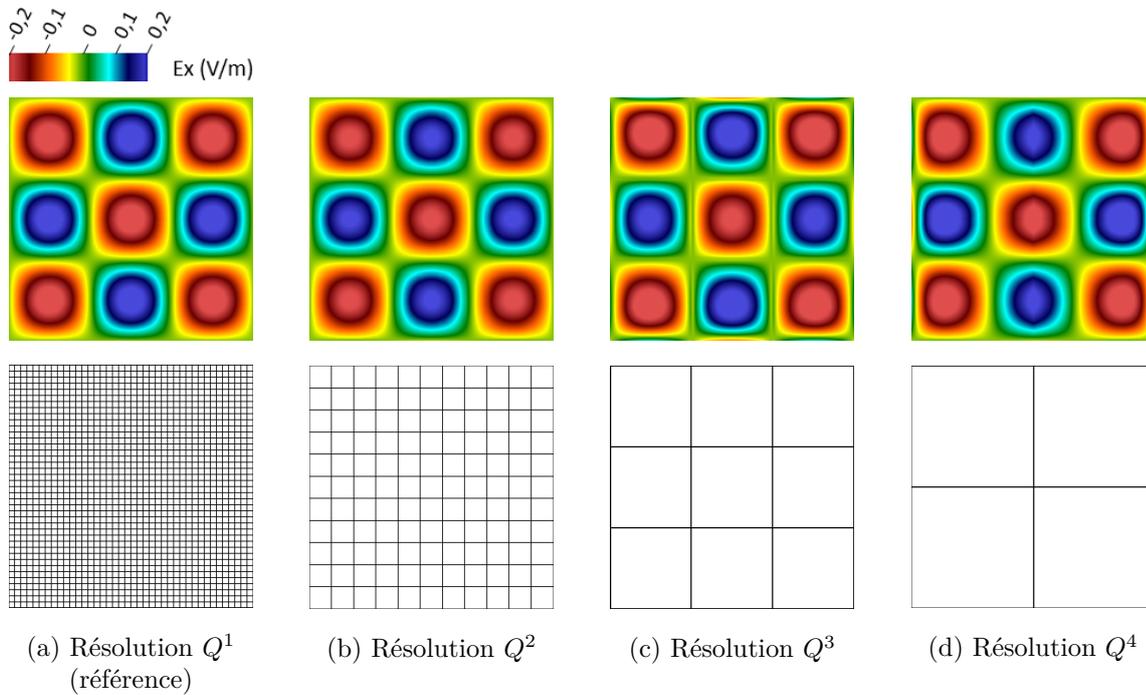


FIGURE 1.9 – En haut : cartographie en plan de coupe de la composante E_x à $t = 9ns$ pour les configurations de référence Q^1 et optimales Q^2 , Q^3 et Q^4 . Le maillage de visualisation utilisé est de dimensions $100*100*100$. En bas : maillage de résolution.

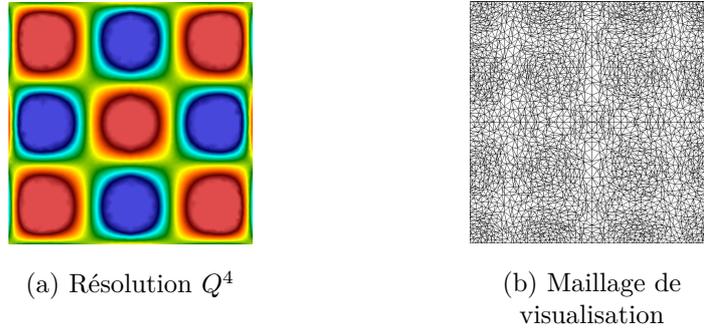


FIGURE 1.10 – Post-traitement des données de la figure 1.9d par un logiciel de visualisation adapté à la représentation de solutions hp .

Remarque 1.19 La représentation graphique (2D ou 3D) de solutions numériques d'ordre élevé (ou solution hp) est une thématique de recherche à part entière. En effet, la plupart des logiciels commerciaux ne sont pas adaptés à ce type de données d'entrée, qui sont alors traitées via une procédure non explicite de subdivision en simplexes. Or, cette procédure peut conduire à des artefacts de visualisation, dégradant la qualité de la solution numérique. L'analyse des résultats devient alors plus délicate, car les erreurs observées peuvent être imputées à tort à des erreurs de modélisation ou de simulation. Afin de pallier ces difficultés, une méthode de post-traitement auto-adaptative a été développée dans [75], permettant d'obtenir une représentation affine optimisée des solutions hp . Elle se base sur un processus de subdivision des éléments du maillage de calcul associé à un contrôle a posteriori de l'erreur L^∞ commise entre la solution numérique et la solution de visualisation.

Nous avons pu utiliser cette méthode afin d'obtenir une nouvelle représentation de la résolution Q^4 à partir des mêmes données d'entrée que celles de la figure 1.9d. Les résultats sont illustrés dans la figure 1.10. On observe que l'étirement de la solution numérique à l'interface entre deux cellules est corrigé, ce qui montre que ce phénomène était dû à une méthode de visualisation non-adaptée, du fait de la discontinuité de l'approximation (apparition de sauts aux interfaces). En revanche, la déformation du support nœuds est inchangée, ceci est donc dû à la résolution et est propre au maillage hp utilisé.

En conclusion, l'utilisation d'une stratégie de h -déraffinement/ p -enrichissement convenablement calibrée permet d'améliorer significativement l'efficacité numérique du schéma, ce qui conforte l'étude menée dans [52]. Si les tendances observées dans l'évolution des performances en fonction du maillage hp sont qualitativement générales, les résultats quantitatifs obtenus dépendent *a priori* du cas-test considéré (condition initiale, conditions aux limites, présence d'un terme source, temps final de simulation etc.) et du critère d'erreur choisi.

Vis-à-vis des temps de calcul, les ordres de résolution 2 et 4 semblent particulièrement intéressants, en ce qu'ils permettent de créer une rupture dans l'efficacité numérique du solveur. En effet, dans l'étude présentée, la configuration Q^2 optimale permet de diviser les temps de calcul unitaires par un facteur proche de 100. Le passage aux ordres supérieurs ne permet d'améliorer ce gain que d'un facteur 3,6 au mieux. De plus, les éléments Q^2 semblent être efficaces pour des petits facteurs de déraffinement, de l'ordre de 3 ou 4. Cela les rend particulièrement stratégiques car, dans le cas de géométries denses présentant un grand nombre d'objets intérieurs, des déraffinements de grande échelle sont inenvisageables. D'autre part, dans une utilisation plus macroscopique, les éléments Q^4 semblent être les plus intéressants, dans la mesure où ils paraissent très flexibles vis-à-vis du déraffinement, en étant *a priori* efficaces pour des facteurs allant de 10 à 100.

Cependant, le cadre d'étude hp conforme est particulièrement simplifié et irréaliste pour les applications. Ainsi, on s'intéresse dans la suite à l'étude des performances numériques liées à l'utilisation de maillages hp non-conformes.

1.5.2 Cadre hp non-conforme

Nous venons d'observer que dans un cadre conforme, l'utilisation de maillages hp déraffinés et bien choisis permet de réduire drastiquement les coûts de calcul de la résolution GDDT. Cependant, l'utilisation de configurations conformes avec des mailles de grande dimension n'est pas toujours envisageable pour les applications pratiques, car la présence d'objets à l'intérieur du domaine de calcul peut contraindre localement la taille des cellules. Une solution permise par l'approximation GD est alors de procéder, par endroit seulement, au h -déraffinement/ p -enrichissement, dans les zones où le maillage est libre, ce qui aboutit à des configurations hp non-conformes. Il est donc essentiel d'étudier les performances numériques du schéma sur ce type de maillages hp .

L'objectif de cette étude est de mesurer l'impact sur les coûts de calcul de l'utilisation d'éléments hp déraffinés différents au sein du même maillage. En particulier, nous cherchons à déterminer une relation entre l'efficacité numérique globale de la résolution et l'efficacité numérique locale de chacun des éléments hp utilisés. L'obtention d'une telle relation est en effet essentielle à la définition d'un estimateur de qualité et de performances pouvant guider par la suite la stratégie de post-maillage que nous voulons mettre en place.

Pour ce faire, toujours sur le cas-test de cavité résonante, nous allons considérer un motif de non-conformité relativement simple permettant d'évaluer *a priori* les coûts de calcul de la résolution. Ainsi, les maillages hp utilisés seront de la forme de la figure 1.11, composés de deux domaines séparant la cavité en deux parts égales, chaque domaine étant associé à un espace d'approximation local différent, $Q^p(h)$ et $Q^{p'}(h')$. On peut alors vraisemblablement supposer que les coûts de calcul sur le maillage hybride $Q^p-(N/2)*N*N/Q^{p'}-(N'/2)*N'*N'$ correspondent à la moyenne des coûts de calcul des configurations hp conformes $Q^p-N*N*N$ et $Q^{p'}-N'*N'*N'$.

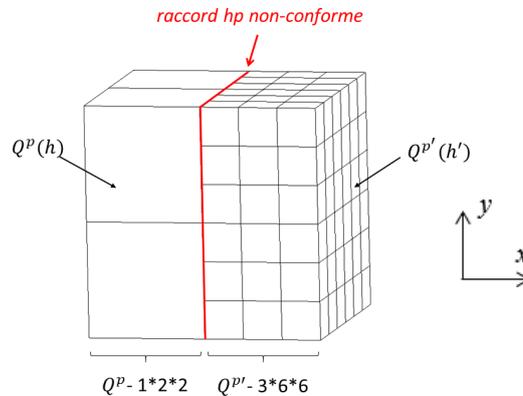


FIGURE 1.11 – Maillage hp non-conforme générique utilisé dans cette étude. Dans la suite, ce type de maillage sera noté $Q^p-(N/2)*N*N/Q^{p'}-(N'/2)*N'*N'$, où $h = \frac{1}{N}$ et $h' = \frac{1}{N'}$.

Nous avons mis en évidence précédemment le rôle stratégique des éléments d'ordres 2 et 4. Nous allons donc focaliser notre étude sur ces deux types de fonctions de base. Pour des raisons pratiques de temps d'exécution et de contraintes de divisibilité et sans incidence sur la généralité des résultats, le cas-test étudié est légèrement modifié par rapport au paragraphe précédent. Nous considérons ainsi la propagation du mode (2, 2, 2), pour un temps de simulation $T_f = 15ns$ (7 périodes). Le maillage initial est une grille $24*24*24$, sur laquelle la résolution Q^1 donne de nouveau la précision de référence. Nous considérons alors plusieurs maillages hp déraffinés conformes : $Q^2-8*8*8$ et $Q^4-2*2*2$; et non-conformes, conçus à partir des précédents : $Q^2-4*8*8/Q^1-12*24*24$ et $Q^4-1*2*2/Q^2-4*8*8$. Par soucis de concision, ces configurations seront dans la suite abrégées par Q^p dans le cas conforme et $Q^p/Q^{p'}$ dans le cas non-conforme. Les facteurs de déraffinement mis en jeu, 3 pour la résolution Q^2 et 12 pour la résolution Q^4 , ont été choisis en cohérence avec le paragraphe précédent pour être admissibles du point de vue de la précision et efficace du point de vue des performances numériques.

Les résultats relatifs à la qualité et aux coûts de calcul sont résumés dans le tableau 1.8. Les configurations hp conformes sont admissibles et s'accompagnent d'une réduction importante des coûts de calcul, bien que rien ne permette d'affirmer que les maillages utilisés soient optimaux. L'important écart relatif à l'erreur de référence montre en effet que les simulations sont sur-précises, ce qui suggère que des déraffinements plus conséquents auraient pu être utilisés. Néanmoins, cela permet de confirmer les tendances observées dans l'étude du paragraphe précédent, ainsi que l'ordre de grandeur des taux de déraffinement admissibles et efficaces pour les éléments Q^2 et Q^4 .

Les configurations hp hybrides sont également admissibles, ce qui montre, pour le cas-test considéré, que la présence de raccords non-conformes n'induit pas une détérioration globale significative de la précision. De plus, on observe (tableau 1.8) que l'erreur commise sur les configurations hybrides est proche de celle obtenue sur sa composante conforme de plus faible qualité. Par exemple, la précision Q^1 de référence est plus faible que la précision sur le maillage conforme Q^2 , mais voisine de celle du maillage hybride Q^2/Q^1 . De même pour la configuration Q^4/Q^2 . Ceci tend à montrer que l'erreur globale de simulation sur un maillage hp hybride est minorée par l'élément local de plus faible précision. Un tel résultat est cohérent aux études théoriques de consistance sur maillage h non-conformes, menées par exemple dans [31] et [45] dans un cadre GD, ou [11] dans un cadre éléments finis, qui établissent une majoration de l'erreur sous la forme d'une puissance du diamètre de la maille la plus grossière.

D'un point de vue purement local, on observe dans la figure 1.13 un plus grand déphasage sur la solution numérique de référence que sur les solutions hybrides. Par ailleurs, ce constat est valable dans chaque sous-domaine conforme du maillage. On en conclut donc que la présence de non-conformités n'altère pas la propriété qualitative de l'ordre élevé à réduire l'erreur de dispersion du schéma. On remarque cependant l'apparition d'un phénomène de modulation d'amplitude, particulièrement prononcé dans les figures 1.13a-1.13b qui correspondent à la composante du champ électrique normale aux interfaces non-conformes. Ce phénomène n'ayant pas été observé dans l'étude précédente, on en déduit qu'il est causé par la présence des non-conformités. En étudiant la figure 1.14c, on ne retrouve pas la perturbation observée dans l'étude précédente au niveau des interfaces conformes, causée par la discontinuité de l'approximation spatiale, alors que le maillage hp est le même (Q^4 - $2*2*2$). Ceci peut s'expliquer par le fait que le signal est plus régulier que précédemment, ce qui permet d'obtenir une plus grande précision de résolution, rendant cet artefact négligeable. En revanche, on retrouve ce phénomène pour les configurations non-conformes des figures 1.14d-1.14e, causant une légère déformation du nœud de la solution numérique. Ces artefacts restent néanmoins purement locaux et ne sont pas d'ampleur suffisante pour dégrader significativement la qualité globale de la résolution. Ces phénomènes seront étudiés plus en détail dans le chapitre 3.

Configurations	$N_{mailles}$	N_{ddl}	N_{iter}	t-CPU	\mathcal{E}_{rr}
Q^1 (référence)	13 824	663 552	374	1,0	1,5e-10
Q^2	512	82 944	320	8,3e-2	9,0e-12
Q^4	8	6 000	371	6,4e-3	1,9e-11
Q^2/Q^1	7 168	373 248	374	14	1,1e-10
Q^4/Q^2	260	44 472	371	62	3,5e-11

TABLE 1.8 – Performances numériques des différents maillages hp conformes et non-conformes. Les temps d'exécution (t-CPU) sont adimensionnés par rapport à la résolution Q^1 de référence.

Analysons en dernier lieu les coûts de calcul obtenus sur les configurations hybrides. Comme le montre le tableau 1.8, le stockage mémoire de ces maillages hp correspond exactement à la demi-somme de ceux des configurations conformes correspondantes. Ce résultat, cohérent avec l'estimation *a priori* des coûts de calcul explicitée plus haut, est tout à fait naturel, car le nombre de degrés de liberté est entièrement déterminé par le maillage et les espaces d'approximation locaux choisis, et n'est pas impacté par le schéma ou l'implémentation utilisée. Il est donc aisé de calculer exactement le stockage mémoire lié à un maillage hp , conforme ou non.

En revanche, les résultats concernant les temps d'exécution posent davantage question. En effet, comme le montre le tableau 1.8 le temps de calcul sur maillage hybride augmente considérablement par

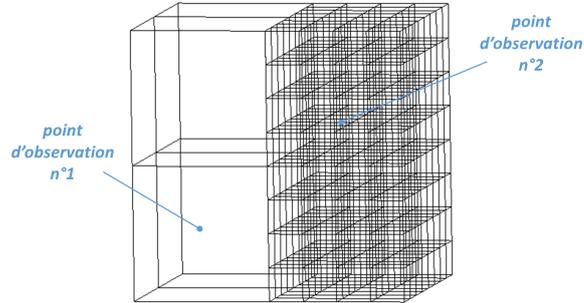


FIGURE 1.12 – Position qualitative des points d'observation de la figure 1.14.

— exacte — Q^1 — Q^2/Q^1 — Q^4/Q^2

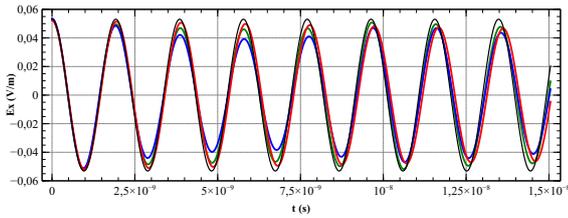
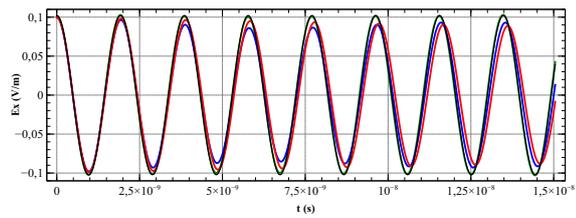
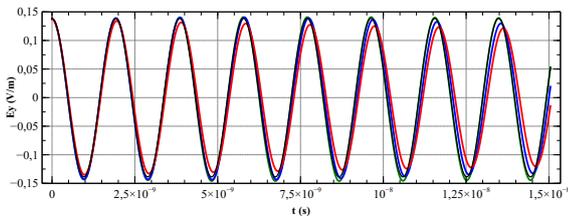
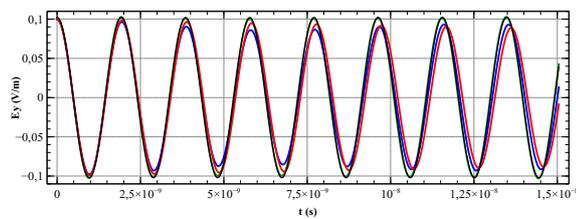
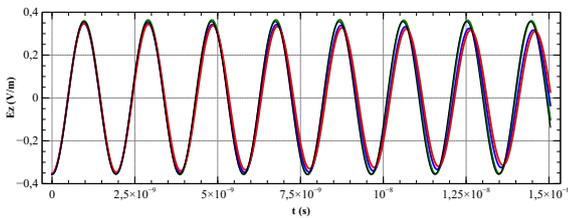
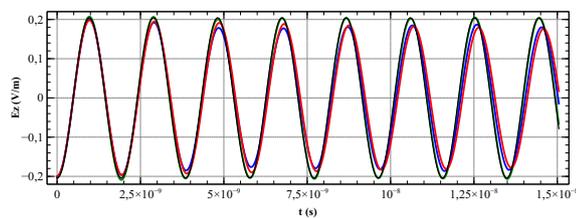
(a) E_x au point n° 1(b) E_x au point n° 2(c) E_y au point n° 1(d) E_y au point n° 2(e) E_z au point n° 1(f) E_z au point n° 2

FIGURE 1.13 – Évolution des composantes E_x , E_y , et E_z en fonction du temps, en deux points de la cavité : point n° 1 = (0.3, 0.35, 0.38) et point n° 2 = (0.61, 0.61, 0.61) ; appartenant respectivement au domaine hp le plus grossier et au plus fin.

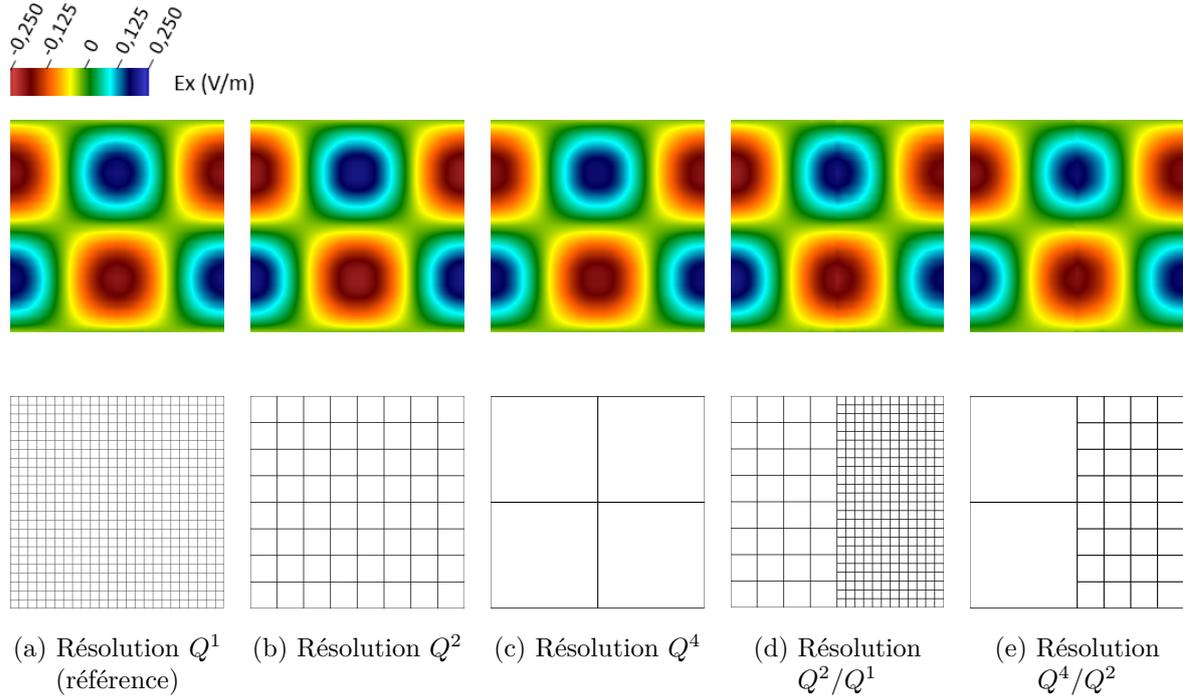


FIGURE 1.14 – En Haut : cartographie en plan de coupe de la composante E_x à $t = 8ns$ pour les différentes configurations, conformes et non-conformes, considérées. Le maillage de visualisation utilisé est de dimensions $100*100*100$. En bas : maillage de résolution.

rapport au temps de référence, ce qui est fortement inattendu du fait d'un nombre de degrés de liberté réduit sur ces configurations.

Prenons l'exemple de la résolution Q^2/Q^1 . Il serait vraisemblable d'obtenir un temps de calcul avoisinant la moyenne entre celui de la configuration Q^1 et celui de la configuration Q^2 , soit 0,54 (valeur adimensionnée par rapport au temps de référence). Ou bien, en prenant davantage de marge dans l'estimation, celui-ci devrait être situé entre 0,5 (temps de calcul de la résolution Q^1 sur la moitié du domaine de calcul) et 1,0 (temps de calcul de référence). Or, le temps d'exécution est 14 fois plus important que le temps de calcul de référence, ce qui dépasse toutes les estimations effectuées. Cela se produit également dans le cas Q^4/Q^2 , avec un temps de calcul multiplié par 62 par rapport à celui de référence. L'augmentation des temps de calcul est ainsi d'autant plus importante que les ordres de résolution mis en jeu sont élevés. Ce phénomène n'est pas imputable à une condition CFL devenant trop restrictive car le nombre d'itération reste stable dans toutes les configurations considérées (tableau 1.8). Par ailleurs, le tableau 1.9 met en évidence que le phénomène se produit également à l'échelle d'une itération temporelle. L'explosion des temps de calcul observée est donc liée à l'augmentation de la complexité algorithmique du schéma spatial sur les maillages *hp* non-conformes.

Configurations	$N_{ddl}^{réf}/N_{ddl}$	$t-CPU^{réf}/t-CPU$	$t-CPU_{iter}^{réf}/t-CPU_{iter}$
Q^1	1,0	1,0	1,0
Q^2	8,0	12	10
Q^4	110	156	160
Q^2/Q^1	1,8	7,3e-2	7,3e-2
Q^4/Q^2	15	1,6e-2	1,6e-2

TABLE 1.9 – Gains en stockage mémoire et en temps d'exécution des différents maillages *hp* par rapport à la configuration de référence.

En résumé, l'utilisation de configurations conformes faisant intervenir des éléments hp convenablement calibrés permet d'assurer la qualité de référence en réduisant significativement le nombre de degrés de liberté de l'approximation. En particulier, la qualité globale de résolution est limitée par l'élément hp local de plus faible précision.

En revanche, on constate une explosion des temps de calcul du solveur GDDT sur maillage hybride, qui semble provenir d'une augmentation de la complexité algorithmique du schéma spatial. Ce point est particulièrement bloquant vis-à-vis de la stratégie générale, présentée en introduction, que nous cherchons à mettre en place dans la thèse, car celle-ci repose sur les bonnes performances du solveur sur ce type de configurations.

Dans ce qui suit, nous allons donc chercher à déterminer précisément l'origine de cette chute d'efficacité numérique, afin, dans un second temps, de chercher à dépasser cette limitation.

1.5.3 Analyse de l'explosion du temps d'exécution du solveur dans le cas non-conforme

Comme évoqué dans le paragraphe précédent, il est possible, à partir des performances numériques de la résolution sur les maillages hp conformes, d'établir une estimation *a priori* des performances pour les configurations hybrides. Cette estimation se base sur un découpage du domaine de calcul en deux parties hp conformes illustré sur la figure 1.15 ci-dessous :

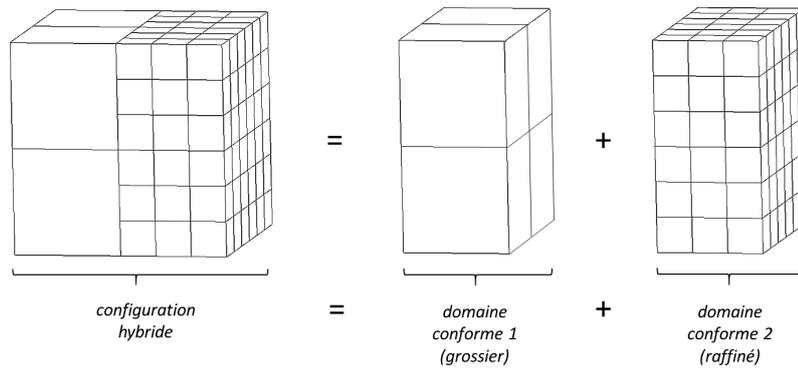


FIGURE 1.15 – Découpage d'un maillage hp non-conforme générique en deux domaines conformes.

et s'écrit, pour le motif de non-conformité considéré :

$$N_{dd}(global) = N_{dd}(domaine 1) + N_{dd}(domaine 2), \quad (1.90a)$$

$$t-CPU(global) \simeq t-CPU(domaine 1) + t-CPU(domaine 2), \quad (1.90b)$$

où le temps de calcul sur chaque domaine est estimé par la moitié du temps de calcul sur la configuration hp conforme globale correspondante. Nous ne prenons pas en compte dans (1.90b) le temps de calcul correspondant au couplage entre les deux domaines, car le nombre de degrés de liberté situés sur l'interface non-conforme est négligeable devant le nombre de degrés de liberté total de chaque partie homogène.

Or, comme nous avons vu, si l'estimation sur le stockage mémoire s'avère exacte, celle des temps de calcul se révèle fortement sous-évaluée, et l'on observe, de manière inattendue, une explosion des temps d'exécution du solveur sur les configurations hybrides. Afin de déterminer l'origine de ce phénomène, nous avons réalisé un profilage de code. L'objectif est d'identifier des éventuels goulots d'étranglement dans la résolution GD en analysant le temps passé dans les différentes routines du code de calcul. Les résultats de cette étude sont synthétisés dans le tableau 1.10.

Configuration	t-CPU	Rigidité			Flux				
		Q^1	Q^2	Q^4	conformes			non-conformes	
		Q^1	Q^2	Q^4	Q^1	Q^2	Q^4	Q^2/Q^1	Q^4/Q^2
Q^1	1,0	10%			76%				
Q^2	8,3e-2		20%		52%				
Q^4	6,4e-3			39%	25%				
Q^2/Q^1	14	2,3%	0,2%		0,1%	0,1%		96%	
Q^4/Q^2	62		<0,1%	<0,1%	<0,1%	<0,1%			99,9%

TABLE 1.10 – Pourcentage du temps d'exécution total du solveur passé dans le calcul des différents termes du schéma. Seules les contributions principales sont renseignées, ce qui explique que le total de chaque ligne ne vaut pas 100%. Le pourcentage restant correspond au temps de lecture de données d'entrée, de recopie des champs (pour le schéma temporel), et d'écriture de fichiers de sortie.

On observe que les temps d'exécution du solveur sont dominés par le calcul de deux contributions du schéma, la rigidité et les flux. Ces derniers se séparent eux-même en deux catégories, avec d'une part les flux conformes, assurant le passage de l'information entre les cellules au sein de chaque domaine, et d'autre part les flux non-conformes, assurant le raccord entre les deux parties homogènes.

Lors des résolutions conformes Q^1 et Q^2 , les parts du temps d'exécution total allouées au calcul des rigidités sont respectivement de 10% et 20%. Par ailleurs, le temps de calcul sur le maillage *hp* conforme Q^2 est près de dix fois plus faible que pour la résolution Q^1 . Ainsi, selon l'estimation (1.90b), il est vraisemblable d'obtenir une évolution des proportions précédentes respectivement en 9% et 2% pour la configuration non-conforme Q^2/Q^1 . Par un raisonnement analogue, les parts de temps de calcul liées aux flux conformes dans la configuration hybride sont censées passer de 76% à 38% pour le domaine Q^1 , et de 69% à 5% pour le domaine Q^2 . Or, contrairement à ces estimations, les part cumulées des contributions de rigidité et de flux conformes ne dépassent pas les 3% et les temps de calcul sont dominés par l'apparition des termes de flux non-conformes, qui à eux seuls totalisent 96% du temps d'exécution total. On en déduit que le calcul des flux non-conformes provoque l'explosion des temps de calcul sur maillage hybride. Pour la résolution Q^2/Q^1 , ceux-ci sont 14 fois plus importants que le temps de référence, ce qui est près de 30 fois supérieur au temps de calcul prévu. Le même phénomène, amplifié, se produit pour la configuration hybride Q^4/Q^2 , où la quasi-totalité du temps d'exécution du solveur est monopolisé par le calcul des flux non-conformes.

Les estimations effectuées sur les temps d'exécution en configuration hybride sont donc erronées, du fait d'une sous-évaluation des coûts de calcul des termes de flux non-conformes. En effet, nous avons jugé, à tort, que le raccord entre les deux domaines homogènes serait transparent au niveau des temps de calcul, le nombre de facettes porteuses d'un terme de flux non-conforme étant négligeable devant le nombre de facettes conformes. Or, l'expérience montre que le coût du raccord non-conforme, non seulement n'est pas négligeable, mais devient prépondérant dans les temps d'exécution sur maillage *hp* hybride. Ce résultat nous invite à considérer plutôt le découpage suivant (figure 1.16) de la configuration non-conforme :

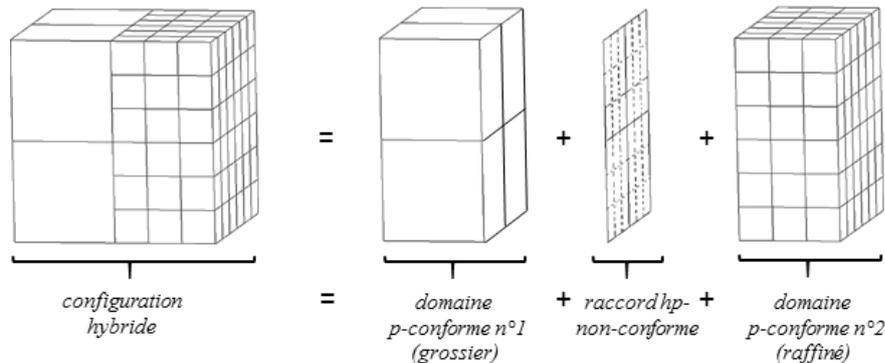


FIGURE 1.16 – Découpage d'un maillage *hp* non-conforme générique en deux domaines conformes raccordés par une interface non-conforme.

et à corriger l'estimation des temps de calcul en conséquence :

$$t\text{-CPU}(\text{global}) \simeq t\text{-CPU}(\text{domaine 1}) + t\text{-CPU}(\text{domaine 2}) + t\text{-CPU}(\text{raccord non-conforme}), \quad (1.91)$$

avec :

$$t\text{-CPU}(\text{raccord non-conforme}) \gg t\text{-CPU}(\text{domaine } i), \quad i = 1, 2. \quad (1.92)$$

Dans ce qui suit, nous allons donc essayer de comprendre pourquoi les termes de flux non-conformes provoquent un tel sur-coût de calcul. Pour simplifier l'analyse, nous commençons par nous placer en 1D. Un terme de flux générique s'écrit alors :

$$\int_I^Q u^-(x)u^+(x)dx, \quad (1.93)$$

où Q désigne le calcul discret de l'intégrale et $u^\pm \in Q^{p^\pm}(I)$. Pour les configurations *hp* conformes, les espaces d'approximation \pm sont les mêmes, $u^\pm \in Q^p(I)$, et on utilise un calcul condensé ($Q = GL$) :

$$\int_I^{GL} u^-(x)u^+(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{p+1} \omega_i u^-(x_i)u^+(x_i) = \sum_{i=1}^{p+1} \omega_i u_i^- u_i^+, \quad (1.94)$$

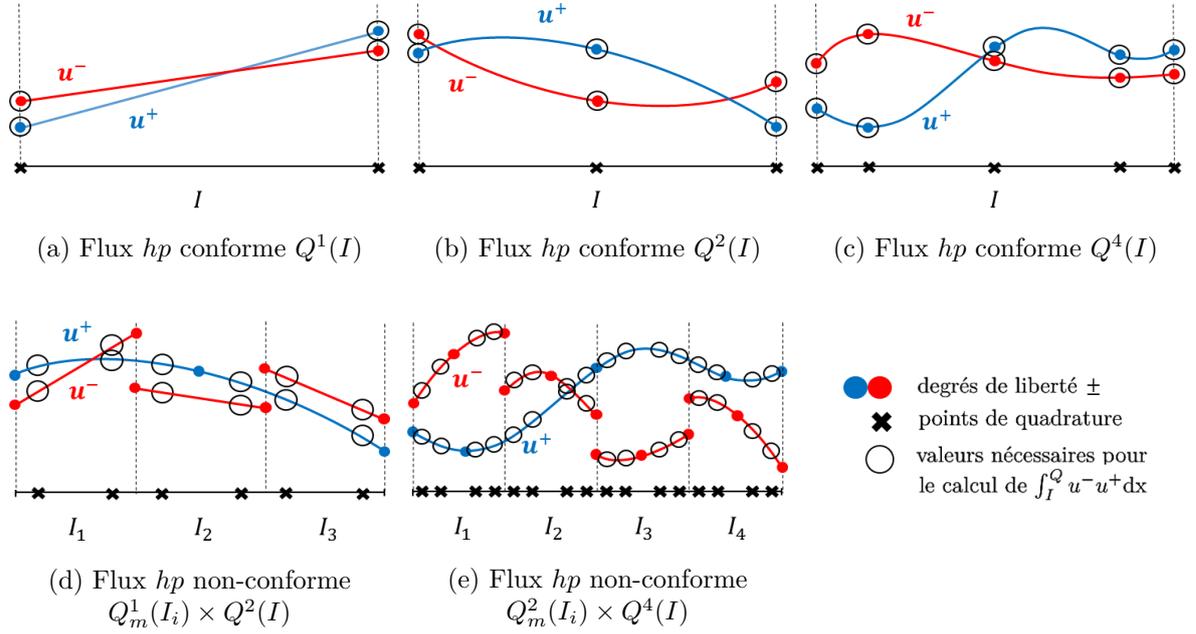
avec $(\omega_i)_{i=1}^{p+1}$ et $(x_i)_{i=1}^{p+1}$ les poids et points de quadrature de Gauss-Lobatto sur I , et $(u_i^\pm)_{i=1}^{p+1}$ les degrés de liberté de u^\pm . Ainsi, du fait de la propriété de collocation (1.61), l'évaluation de cette intégrale nécessite $2(p+1)$ accès mémoire aux degrés de liberté, comme l'illustrent les figures 1.17a-b-c. Considérons à présent le cas d'un flux non-conforme. Les espaces d'approximation étant différents et la quantité u^+u^- étant discontinue sur I , l'utilisation d'une méthode de condensation n'est plus adaptée. On décompose alors l'intégrale via la relation de Chasles sur chaque subdivision I_k de I , correspondant à une zone de continuité de la fonction u^+u^- . Alors, sur chaque I_k , le calcul de l'intégrale est exact. Celui-ci est basé sur une formule de quadrature de Gauss ($Q = G$) à N_G points, exacte à l'ordre $p^+ + p^-$ (voir figure 1.17d-e) :

$$\int_I^G u^-(x)u^+(x)dx = \sum_{I_k \subset I} \sum_{i=1}^{N_G} \omega_i^k u^-(x_i^k)u^+(x_i^k) \quad \text{avec} \quad u^\pm(x_i^k) = \sum_{j=1}^{p^\pm+1} u_j^\pm L_j^\pm(x_i). \quad (1.95)$$

Ainsi, si I est composé de N_s subdivisions, on dénombre :

- $N_s N_G (p^+ + p^- + 2)$ accès mémoire aux degrés de liberté,
- $N_s N_G (p^+ + 1)$ évaluations des fonctions de base L^+ ,
- $N_s N_G (p^- + 1)$ évaluations des fonctions de base L^- ,

afin d'évaluer l'intégrale de flux non-conforme. Le nombre d'accès mémoire est donc mécaniquement beaucoup plus élevé que dans le cas conforme. D'autre part, un nouveau type de calcul apparaît dans le cas non-conforme : l'évaluation des fonctions de base. Or, ce type de contribution est beaucoup plus coûteuse qu'un accès mémoire (évaluation d'un polynôme), ce qui peut tout à fait expliquer une forte augmentation des temps de calcul. De plus, l'évaluation d'une fonction de base est d'autant plus coûteuse que le degré de résolution est élevé, ce qui permet d'expliquer pourquoi le phénomène de sur-coût de calcul est plus important dans le cas Q^4/Q^2 que dans le cas Q^2/Q^1 .


 FIGURE 1.17 – Équivalents 1D des situations de flux hp conformes (a, b, c) et non-conformes : (d, e).

Étendons alors cette analyse du cas 1D au cas 2D. En dénombrant, de manière analogue, le nombre d'accès mémoire et d'évaluation des fonctions de base nécessaires au calcul des flux centrés et décentrés pour le cas d'une interface hp non-conforme 2D, on obtient les résultats du tableau 1.11.

Flux hp	Accès mémoire			Éval. fonction base		
	Q^1	Q^2	Q^4	Q^1	Q^2	Q^4
Conf. $Q^1(h)$	96			0		
Conf. $Q^2(3h)$		216			0	
Conf. $Q^4(12h)$			3000			0
Non-conf. $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$	2218	4068		2256	4536	
Non-conf. $Q^4(12h)/Q_m^2(3h)$		42084	91300		43236	95400

 TABLE 1.11 – Nombre d'accès mémoire aux degrés de liberté et d'évaluations des fonctions de base nécessaires au calcul des flux centrés et décentrés mis en jeu dans les configurations hp non-conformes de notre étude.

On voit que le nombre d'accès mémoire explose dans le passage d'un flux conforme à un flux non-conforme, de même que le nombre d'évaluation des fonctions de base, ce qui amène aux mêmes conclusions que pour le cas 1D.

Enfin, revenons aux maillages hp considérés dans notre étude. On recense dans le tableau 1.12 le nombre total d'accès mémoire et d'interpolations pour une itération temporelle du solveur GDDT (toutes contributions confondues).

Config.	Accès mémoire			Éval. fonction de base		
	Q^1	Q^2	Q^4	Q^1	Q^2	Q^4
Q^1 (référence)	8,5			0		
Q^2		1			0	
Q^4			4e-3			0
Q^2/Q^1	5,5	2,8		1,3	2,6	
Q^4/Q^2		3,2	5,8		2,8	6,1

TABLE 1.12 – Nombre total en millions d’accès mémoire aux degrés de liberté et d’évaluation des fonctions de base pour une itération temporelle du solveur GDDT, dans les configurations de la figure 1.14.

On remarque tout d’abord que sur les maillages hp conformes déraffinés, le nombre d’accès mémoire aux degrés de liberté est significativement réduit, ce qui permet d’expliquer la diminution des temps de calcul sur ces configurations. En revanche, sur les maillages hybrides, le nombre d’accès reste stable et d’un niveau comparable avec la configuration de référence ($\simeq 8,5M$), ce qui permet de justifier que le temps d’exécution n’est pas réduit sur ces configurations. Ceci s’explique par l’augmentation du nombre d’accès lié aux interfaces non-conformes, observée plus haut. Enfin, le nombre d’évaluations des fonctions de base, nul dans le cas de maillages hp conformes, explose dans le cas de maillages hp non-conformes. Or, comme évoqué plus haut, le coût numérique d’une interpolation est prépondérant devant celui d’un accès mémoire, et ce à plus forte raison avec des fonctions de base 2D d’ordre élevé. Ces deux derniers points permettent donc d’expliquer l’explosion des temps de calcul observée sur les configurations hybrides.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les cadres physique et mathématique considérés dans la suite du document, ainsi que le schéma GDDT servant de base de travail à notre étude. Dans une démarche de maîtrise de l’efficacité numérique de résolution, nous avons alors analysé l’impact du choix du maillage hp sur les performances du solveur, dans un cadre conforme et non-conforme. Nous avons ainsi observé que l’utilisation de maillages hp conformes déraffinés permet de réduire drastiquement les coûts de calcul, à condition que les paramètres h et p soient convenablement calibrés, constat déjà présent dans la littérature [52]. Plus loin, cette étude a permis de déduire des ordres de grandeur dans le dimensionnement de l’ordre de résolution local en fonction de la taille de cellule, dans le but d’alimenter une stratégie de post-maillage par h -déraffinement/ p -enrichissement. Nous avons en particulier dégagé l’importance des éléments Q^2 et Q^4 , qui permettent d’une part de créer une rupture dans l’efficacité numérique du schéma et d’autre part d’assurer une efficacité numérique optimale sur des échelles de déraffinements stratégiques.

Par la suite, la principale contribution de ce chapitre a été de mettre en évidence un goulot d’étranglement sur les temps de calcul du schéma GDDT sur maillages hp non-conformes.

À notre connaissance, ce constat n’est pas référencé dans la littérature et l’on retrouve même la tendance inverse dans [45] avec une amélioration des performances sur ce type de configurations. La principale raison à cela est la spécificité de notre cadre d’étude, avec notamment la légèreté des maillages cartésiens, une résolution en trois dimensions et en domaine temporel, ainsi qu’un schéma GD présentant de bonnes performances numériques intrinsèques, optimisées par une utilisation massive de calculs condensés des termes de masse, rigidité et flux conformes.

Au vu des gains conséquents obtenus sur les configurations hp conformes déraffinées, l’obtention de temps de calcul réhibitoires dans le cas non-conforme était fortement inattendue. Afin d’en déterminer l’origine, nous avons utilisé un logiciel de profilage de code. L’analyse a alors montré que l’explosion des coûts de calcul est localisée au niveau des routines en charge de l’évaluation des termes de flux non-conformes. Puis, en étudiant la complexité algorithmique liée au calcul de ces termes, nous avons établi une explication à cette augmentation des temps d’exécution. Un terme de flux non-conforme n’est pas naturellement adapté à un calcul par condensation. L’approche classique consiste alors à calculer ce terme exactement, en utilisant une quadrature d’ordre suffisamment élevé sur chaque facette constituant

l'interface non-conforme. Or, ce faisant, on multiplie les accès mémoire aux degrés de liberté ainsi que le nombre d'évaluations des fonctions de base dans des proportions trop importantes pour être compensées par les gains du déraffinement hp .

Notons que, à ce stade, cette explosion des temps d'exécution invalide la stratégie d'amélioration des performances de la chaîne de calcul GDDT envisagée dans la thèse et présentée en introduction. Pour aller plus loin, il apparaît donc nécessaire de pallier cette limitation.

Dans le chapitre suivant, nous cherchons à mettre en place un calcul original des termes de flux non-conformes afin de réduire le nombre d'accès mémoire et de s'affranchir des évaluations coûteuses des fonctions de base. Pour ce faire, l'idée directrice est d'introduire des opérateurs de traces adaptés aux configurations non-conformes dans le but de se ramener à une situation de pseudo-conformité, et ainsi de pouvoir procéder de nouveau à un calcul condensé efficace.

Chapitre 2

Conception et analyse d'un schéma GDDT condensé adapté aux configurations hp non-conformes

Sommaire

2.1	Formulation variationnelle GD adaptée aux maillages non-conformes . . .	72
2.1.1	Introduction de la notion de surface d'échange	73
2.1.2	Définition des configurations d'accolement unitaires	76
2.1.3	Formulation variationnelle GD avec surfaces d'échange	78
2.2	Schéma GDDT condensé	80
2.2.1	Définition de la notion de flux condensé	81
2.2.2	Formulation GD semi-discrétisée condensée	86
2.2.3	Conservation d'une énergie semi-discrète et premières hypothèses sur les flux condensés	88
2.2.4	Schéma GDDT condensé	91
2.3	Étude de stabilité	93
2.3.1	Conservation d'une énergie discrète	93
2.3.2	Détermination de la condition CFL	98
2.4	Étude de consistance	104
2.4.1	Notion de consistance pour une approche hp	104
2.4.2	Étude numérique préliminaire 2D	107
2.4.3	Analyse de la consistance des flux condensés	119
2.5	Conclusion	124

Ce chapitre est consacré à la conception d'une méthode de calcul efficace des flux hp non-conformes par condensation et à l'analyse du schéma GDDT résultant. En effet, nous avons mis en évidence dans le chapitre précédent que l'approche la plus couramment utilisée pour calculer les termes de flux sur les surfaces de non-conformité (méthode de quadrature) provoquait une augmentation du nombre d'accès mémoire et d'interpolations surfaciques des fonctions de base, pouvant conduire à des temps de calcul rédhibitoires du solveur GDDT sur maillages hybrides. Or, l'intérêt de la stratégie générale que nous cherchons à mettre en place dans la thèse est basée sur la réduction des coûts de calcul du schéma par des configurations hp non-conformes bien choisies. L'élaboration d'un calcul alternatif des termes de flux non-conformes apparaît alors nécessaire pour pallier les contre-performances de l'approche classique sur ce type de configurations.

Outre le traitement par quadrature, on trouve principalement dans la littérature deux autres méthodes de calcul des flux non-conformes dans un cadre GD.

La première, introduite dans [76] pour des phénomènes de diffraction en électromagnétisme et reprise par la suite dans [77] pour des problèmes de propagation d'ondes, est basée sur l'utilisation d'éléments surfaciques avec joints ("mortar elements") [78][79]. Ces éléments jouent le rôle d'espaces tampons dans un calcul en trois étapes. Tout d'abord les traces de la solution de part et d'autre de l'interface globale d'accrolement non-conforme sont projetées dans l'espace "mortar". Les flux sont alors calculés dans cet espace et reprojétés dans l'espace des traces initial. L'intérêt de cette approche est de fournir un cadre d'étude privilégié pour l'analyse de stabilité et de consistance du schéma GD, en traitant dans un même formalisme les interfaces conformes et non-conformes. Elle se limite cependant aux accrolements non-conformes dans lesquels une cellule s'interface avec plusieurs.

Une deuxième approche, proposée dans [45], consiste à réinterpréter un accrolement non-conforme entre deux cellules comme un accrolement conforme entre deux éléments fictifs. Les espaces d'approximation sur ces éléments fictifs sont construits à partir d'un changement de base des éléments réels. Le calcul est alors rendu similaire à celui mené sur une interface conforme. L'inconvénient de cette approche réside dans les coûts de calcul des matrices de passage intervenant dans les changements de base. Elle est finalement délaissée au profit du calcul par quadrature exacte.

Aucune de ces méthodes ne paraît adaptée à notre problème du fait de leurs importants coûts de calcul.

Dans ce contexte, nous proposons un nouveau traitement des termes flux hp non-conformes permettant d'améliorer l'efficacité numérique du schéma sur configuration hybride. L'idée est de calculer ces termes via une méthode de condensation, afin de réduire le nombre d'accès mémoire et d'éviter les interpolations des fonctions de base, à l'image du calcul des flux hp conformes. Pour ce faire, le calcul exact à l'échelle des facettes est remplacé par un calcul approché sur la surface globale d'accrolement non-conforme, appelée surface d'échange.

Un terme de flux hp non-conforme classique utilise le produit scalaire L^2 sur un espace fonctionnel suffisamment riche pour contenir les traces de la solution de chaque côté de la surface d'échange. Or, comme nous allons voir, cette approche est sur-précise vis-à-vis des erreurs commises sur les autres termes du schéma et conduit donc à des coûts de calcul inutilement élevés. La méthode développée ici consiste donc à remplacer cet espace fonctionnel par un espace appauvri muni d'un produit scalaire condensé dérivant de \mathbb{R}^n et localement adapté à la topologie de l'accrolement non-conforme. Des opérateurs de reconstruction sont alors introduits pour assurer l'inclusion des traces dans ce nouvel espace. Dès lors, la stabilité et la consistance du schéma résultant peuvent être étudiées en fonction des propriétés des produits scalaires condensés et des opérateurs de reconstruction de traces.

Au-delà de l'objectif d'efficacité numérique, cette approche permet d'unifier le calcul des flux conformes et non-conformes. Elle permet également de poser un cadre d'étude général compatible avec le calcul classique par quadrature, qui correspond à un choix particulier d'opérateurs et de produits scalaires.

Ce chapitre est structuré en quatre temps. Nous commençons par mettre en place une formulation variationnelle GD équivalente à celle du chapitre précédent, permettant d'isoler les termes de flux à l'échelle des surfaces d'échange et de regrouper les autres termes du schéma en fonction de leur rôle dans le mécanisme de stabilité. Puis, nous discrétisons cette formulation en introduisant les opérateurs de reconstruction de trace ainsi que les produits scalaires condensés. Une étude d'énergie est proposée afin de faire apparaître des conditions sur ces quantités suffisantes pour assurer la stabilité du schéma GD semi-discrétisé espace. Par la suite, nous établissons la stabilité sous condition CFL du schéma GDDT condensé. Enfin, nous discutons de la consistance de ce schéma et montrons que celle-ci ne dépend que de la convergence des termes de flux condensés. En particulier, nous exhibons des expériences numériques en 1D mettant en évidence la sur-précision du calcul classique par quadrature et permettant de justifier la viabilité d'un calcul approché par condensation.

2.1 Formulation variationnelle GD adaptée aux maillages non-conformes

Dans cette section, nous proposons une formulation variationnelle GD équivalente à celle utilisée précédemment (1.35) et compatible avec la mise en place d'un calcul par condensation des termes de flux

non-conformes. Cette formulation se base d'une part sur un réarrangement des termes de flux à l'échelle de la plus petite réunion de facettes recréant une situation de pseudo-conformité entre les cellules, appelée surface d'échange, et d'autre part sur un regroupement approprié de ces termes selon leur rôle dans les mécanismes de stabilité du schéma vus dans le chapitre précédent.

2.1.1 Introduction de la notion de surface d'échange

Dans ce qui suit, pour chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$, on note \mathbb{F}_K l'ensemble de ses faces, définies comme images des faces du cube unité par la transformation T_K . Cet ensemble se divise en la collection des faces de K intérieures au domaine de calcul Ω , notée \mathbb{F}_K^i , et la collection des faces de bord de Ω , notée \mathbb{F}_K^b , de sorte que :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbb{F}_K = \mathbb{F}_K^i \cup \mathbb{F}_K^b \quad \text{et} \quad \mathbb{F}_K^i \cap \mathbb{F}_K^b = \emptyset. \quad (2.1)$$

On introduit alors la notion de surface d'échange :

Définition 2.1 *On note \mathcal{S}_h l'ensemble des surfaces d'échange du maillage \mathcal{T}_h , caractérisé de la manière suivante : $S \in \mathcal{S}_h$ si, et seulement si,*

- *S est une surface formée par l'accolement entre deux ensembles de mailles notés $(\mathcal{K}_S^-, \mathcal{K}_S^+) \subset \mathcal{T}_h^2$ tels que :*

$$\mathcal{K}_S^- \cap \mathcal{K}_S^+ = \emptyset \quad \text{et} \quad \exists (f_K^-)_{K \in \mathcal{K}_S^-} \in \prod_{K \in \mathcal{K}_S^-} \mathbb{F}_K^i, \exists (f_K^+)_{K \in \mathcal{K}_S^+} \in \prod_{K \in \mathcal{K}_S^+} \mathbb{F}_K^i / S = \bigcup_{K \in \mathcal{K}_S^-} f_K^- = \bigcup_{K \in \mathcal{K}_S^+} f_K^+, \quad (2.2)$$

- *S est minimale au sens de l'inclusion :*

$$\forall (\mathcal{K}_{S'}^-, \mathcal{K}_{S'}^+) \subset \mathcal{T}_h^2 \text{ vérifiant (2.2), } \left(\overbrace{S' \cap S}^{\circ} \neq \emptyset \right) \Rightarrow (S \subset S'). \quad (2.3)$$

On notera \mathbb{F}_S^\pm les ensembles des faces des mailles de \mathcal{K}_S^\pm intervenant dans la définition de S , et N_S^\pm leur cardinal respectif.

L'ensemble des facettes du maillage incluses dans la surface d'échange S sera désigné par \mathcal{F}_S^{max} :

$$\mathcal{F}_S^{max} = \{f \in \mathcal{F}_h^i / \exists (K, K') \in \mathcal{K}_S^- \times \mathcal{K}_S^+, f = K \cap K'\}, \quad (2.4)$$

et son cardinal sera noté N_S^{max} .

Dans le cas où $N_S^+ = N_S^- = 1$, la surface d'échange s sera dite *h conforme*. Elle sera dite *h non-conforme* si $N_S^- \neq 1$ ou $N_S^+ \neq 1$.

Enfin, chaque surface d'échange est associée à une normale unitaire \mathbf{n}_S , orientée par convention des mailles \mathcal{K}_S^- vers les mailles \mathcal{K}_S^+ .

Remarque 2.2 *Pour toute surface d'échange $S \in \mathcal{S}_h$, la caractérisation (2.2)-(2.3) assure l'unicité des ensembles \mathcal{K}_S^\pm (à la permutation des signes près).*

On illustre sur l'exemple de la figure 2.1 la surface d'échange formée par un accolement non-conforme :

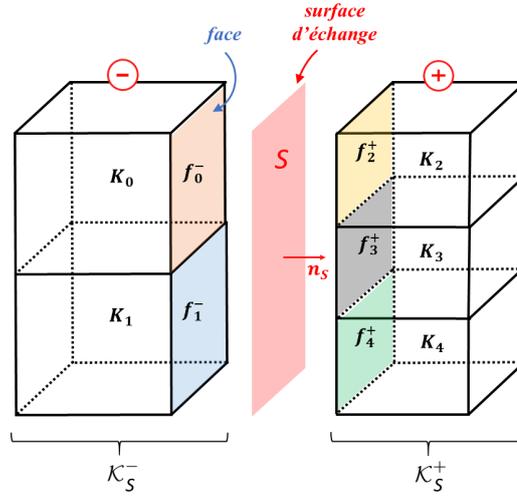


FIGURE 2.1 – Exemple générique de surface d'échange.

Cette configuration représente l'accolement entre les groupes de mailles suivant :

$$\mathcal{K}_S^- = \{K_0, K_1\} \quad ; \quad \mathcal{K}_S^+ = \{K_2, K_3, K_4\}, \quad (2.5)$$

formant une surface d'échange h non-conforme définie par :

$$S = f_{K_0}^- \cup f_{K_1}^- = f_{K_2}^+ \cup f_{K_3}^+ \cup f_{K_4}^+. \quad (2.6)$$

On a ainsi, dans cet exemple :

$$N_S^- = 2 \quad ; \quad N_S^+ = 3 \quad ; \quad N_S^{max} = 4, \quad (2.7)$$

et :

$$\mathbb{F}_S^- = \{f_{K_0}^-, f_{K_1}^-\} \quad ; \quad \mathbb{F}_S^+ = \{f_{K_2}^+, f_{K_3}^+, f_{K_4}^+\} \quad ; \quad \mathcal{F}_S^{max} = \{f_{K_0}^- \cap f_{K_2}^+, f_{K_0}^- \cap f_{K_3}^+, f_{K_1}^- \cap f_{K_3}^+, f_{K_1}^- \cap f_{K_4}^+\}. \quad (2.8)$$

Remarque 2.3 Soulignons que nous disposons à présent de trois notions différentes pour qualifier les éléments 2D formés par la partition \mathcal{T}_h . Tout d'abord, la notion de facette, utilisée dans le chapitre précédent, définie par l'intersection entre deux cellules ($f = K \cap K'$) et représentée par l'ensemble \mathcal{F}_h . Puis, la notion de face, définie localement sur chaque volume K comme image d'une face de l'élément de référence par l'application T_K , et représentée par les ensembles \mathbb{F}_K . Enfin, la notion de surface d'échange avec l'ensemble \mathcal{S}_h . Ces trois quantités correspondent à des besoins différents et coïncident dans le cas d'un accolement conforme entre deux mailles.

La notion de surface d'échange permet de regrouper des accolements de natures différentes, conformes et non-conformes. En particulier, toute configuration h conforme forme une surface d'échange h conforme. Cela va permettre par la suite de proposer une formulation GD plus générale que celle du chapitre précédent.

Poursuivons alors en donnant quelques contre-exemples de surfaces d'échange. Les surfaces représentées sur la figure 2.2 n'incluent pas la totalité des faces formant l'accolement, donc la première contrainte (2.2) n'est pas satisfaite. Les différentes surfaces représentées sur la figure 2.3 ne respectent pas, elles, la deuxième contrainte (2.2) de minimalité. Ceci peut se traduire sous plusieurs formes. En particulier, une surface d'échange ne peut pas utiliser plusieurs faces d'un même élément (voir figure 2.3a), ni être formée

par la juxtaposition de deux surfaces d'échange (voir figure 2.3b), elles ne peuvent pas non plus être en plusieurs tenants (voir figure 2.3c).

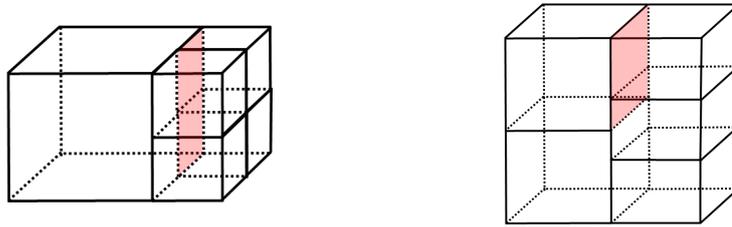


FIGURE 2.2 – Contre-exemples de surfaces d'échange incomplètes au sens de la contrainte (2.2).

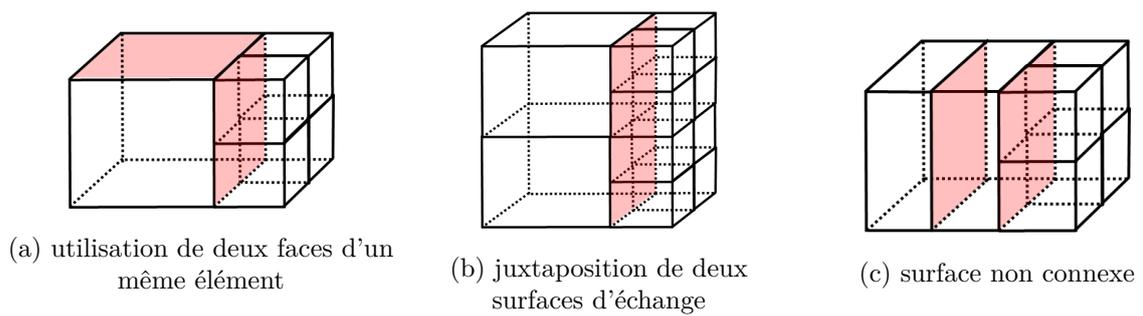


FIGURE 2.3 – Contre-exemples de surfaces d'échange non-minimales au sens de la contrainte (2.3).

2.1.2 Définition des configurations d'accolement unitaires

De même que nous avons introduit un élément de référence \hat{K} unifiant l'ensemble des cellules du maillage et simplifiant les calculs, nous introduisons ici la notion de configuration d'accolement unitaire (voir figure 2.4), qui va permettre de traiter de manière générique toutes les configurations non-conformes de topologie hp identiques et de faciliter l'analyse du schéma.

Pour chaque configuration \mathcal{K}_S^\pm liée à une surface d'échange S , on associe une configuration d'accolement unitaire, dans laquelle S est ramenée à une face de l'élément de référence $[-1; 1]^3$, notée \check{S} , comme illustré sur la figure 2.4. Dans cette configuration unitaire, les mailles $K \in \mathcal{K}_S^\pm$ sont transportées sur des cubes notés $\check{K} \in \check{\mathcal{K}}_S^\pm$, définis à partir des transformations suivantes de sorte à conserver la topologie de la configuration réelle :

- $T_K : \hat{K} \rightarrow K$, définie au chapitre précédent, assurant le passage entre l'élément de référence et l'élément réel,
- $\hat{T}_{S,K} : \check{K} \rightarrow \hat{K}$, définissant une homothétie, permettant le transport entre l'élément de référence et l'élément correspondant dans la configuration d'échange unitaire. Toute fonction $\check{\mathbf{u}} \in C^\infty(\check{\mathbf{K}})$ est alors associée à un élément $\hat{\mathbf{u}} \in C^\infty(\hat{\mathbf{K}})$, via la transformation de Piola $\mathbf{H}(\mathbf{rot})$ -conforme :

$$\check{\mathbf{u}} = D\hat{T}_{S,K}^* \hat{\mathbf{u}} \circ \hat{T}_{S,K}, \quad (2.9)$$

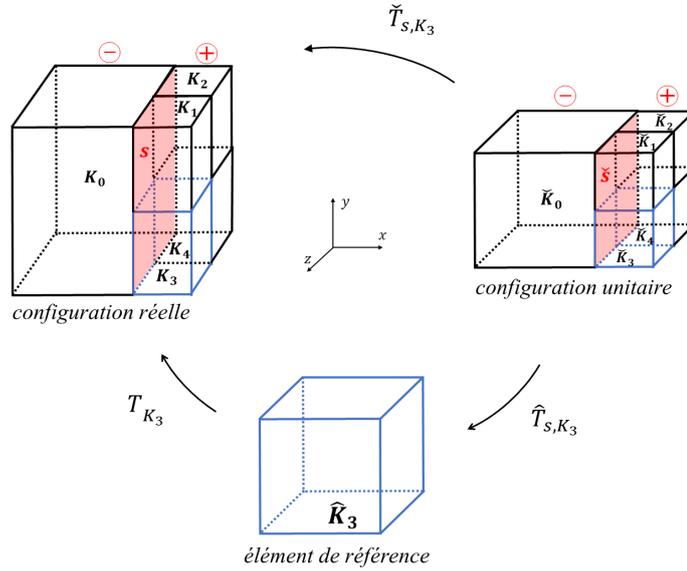
- $\check{T}_{S,K} : \check{K} \rightarrow K$, assurant le passage de l'élément réel vers l'élément correspondant dans la configuration unitaire, définie à partir des applications $\hat{T}_{S,K}$ et T_K ,

$$x = \check{T}_{S,K}(\check{\mathbf{x}}) = T_K \circ \hat{T}_{S,K}(\check{\mathbf{x}}), \quad (2.10)$$

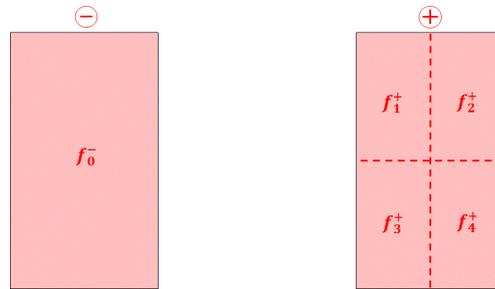
de sorte que tout $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbf{K})$ est associé à $\check{\mathbf{u}} \in C^\infty(\check{\mathbf{K}})$ via la relation :

$$\check{\mathbf{u}} = D\check{T}_{S,K}^* \mathbf{u} \circ \check{T}_{S,K} = D\hat{T}_{S,K}^* (DT_K^* \circ \hat{T}_{S,K}) \mathbf{u} \circ \check{T}_{S,K}. \quad (2.11)$$

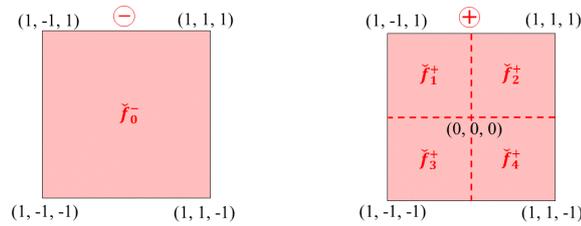
L'intérêt de cette mise en place est double. Tout d'abord, comme nous le verrons, elle permettra de faciliter la construction pratique des opérateurs et des produits scalaires intervenant dans la méthodes de condensation de flux que nous allons introduire. Elle permettra également de faciliter l'étude de stabilité du schéma et le calcul de la condition de CFL.



(a) passage entre les éléments d'un accolement non-conforme du maillage (configuration réelle), son équivalent de référence (configuration unitaire), et le cube unité (élément de référence).



(b) traces des éléments \mathcal{K}_S^- et \mathcal{K}_S^+ sur la surface d'échange réelle S .



(c) traces des éléments $\tilde{\mathcal{K}}_S^-$ et $\tilde{\mathcal{K}}_S^+$ sur la surface d'échange unitaire \tilde{S} .

FIGURE 2.4 – Transport d'une configuration hp non-conforme sur la configuration unitaire correspondante.

2.1.3 Formulation variationnelle GD avec surfaces d'échange

Le chapitre précédent a permis de montrer que la stabilité de la formulation variationnelle repose sur plusieurs associations entre les différents termes du bilan d'énergie : en intégrant par parties, les rigidités, les parties homogènes des flux centrés et les termes de bord se simplifient, les parties hétérogènes des flux centrés s'annulent, et les flux décentrés se regroupent pour former une quantité signée.

On a également vu que le découpage des termes de flux à l'échelle de la plus petite intersection entre les mailles (facettes), associé à un calcul par quadrature exact, provoquait une explosion de la complexité du schéma au niveau des accolements non-conformes.

Dans ce paragraphe, nous développons donc une formulation GD variationnelle alternative, conçue dans le but d'obtenir un schéma numériquement efficace sur les maillages hp non-conformes et de faciliter son analyse. Pour ce faire, nous allons regrouper les différents termes de la formulation usuelle selon les mécanismes de stabilité que nous venons de rappeler et réécrire les flux à l'échelle des surfaces d'échange.

Nous proposons ainsi la formulation GD suivante :

Trouver $\mathbf{E}(\cdot, \mathbf{t}), \mathbf{H}(\cdot, \mathbf{t}) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$ tels que, $\forall \phi, \psi \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\partial_t \mathbb{M}_{\underline{\xi}, K}^{\mathbf{E}} - \mathbb{R}_K^{\mathbf{H}} + \mathbb{S}_K^{\mathbf{E}} + \mathbb{J}_K + \frac{1}{2} \mathbb{I}_K^{\mathbf{H}} \right] - \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} [(\mathbb{C}_{S,-}^{\mathbf{H}} - \mathbb{C}_{S,+}^{\mathbf{H}}) - (\mathbb{D}_{S,-}^{\mathbf{E}} + \mathbb{D}_{S,+}^{\mathbf{E}})] = 0, \quad (2.12a) \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\partial_t \mathbb{M}_{\underline{\mu}, K}^{\mathbf{H}} + \mathbb{R}_K^{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \mathbb{I}_K^{\mathbf{E}} - \mathbb{B}_K^{\mathbf{E}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} [(\mathbb{C}_{S,-}^{\mathbf{E}} - \mathbb{C}_{S,+}^{\mathbf{E}}) + (\mathbb{D}_{S,-}^{\mathbf{H}} + \mathbb{D}_{S,+}^{\mathbf{H}})] = 0, \quad (2.12b) \end{array} \right.$$

où l'on a noté, pour $\mathbf{u} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, $\mathbf{v} \in \{\phi, \psi\}$, et $\underline{a} \in \{\underline{\xi}, \underline{\mu}\}$:

- $\mathbb{M}_{\underline{a}, K}^{\mathbf{u}}$ les termes de masse :

$$\mathbb{M}_{\underline{a}, K}^{\mathbf{u}} = \int_K \underline{a} \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \, dx, \quad (2.13)$$

- $\mathbb{R}_K^{\mathbf{u}}$ les termes de rigidité :

$$\mathbb{R}_K^{\mathbf{u}} = \int_K \nabla \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \, dx, \quad (2.14)$$

- $\mathbb{S}_K^{\mathbf{u}}$ le terme de conductivité :

$$\mathbb{S}_K^{\mathbf{u}} = \int_K \underline{\sigma} \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \, ds, \quad (2.15)$$

- \mathbb{J}_K^n le terme source de courant :

$$\mathbb{J}_K = \int_K \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{v}_K \, dx, \quad (2.16)$$

- $\mathbb{B}_K^{\mathbf{u}}$ le terme de bord :

$$\mathbb{B}_K^{\mathbf{u}} = \int_{\partial K \cap \partial \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \, ds, \quad (2.17)$$

- $\mathbb{I}_K^{\mathbf{u}}$ la partie homogène des flux centrés :

$$\mathbb{I}_K^{\mathbf{u}} = \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \, ds, \quad (2.18)$$

- $\mathbb{C}_{S,\pm}^u$ la partie hétérogène des flux centrés :

$$\mathbb{C}_{S,\pm}^u = \int_S \dot{\mathbf{n}}_S \wedge \mathbf{I}_S^\mp(\mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\mp}) \cdot \mathbf{I}_S^\pm(\mathbf{v}_{\mathcal{K}_S^\pm}) ds, \quad (2.19)$$

- $\mathbb{D}_{S,\pm}^u$ les termes de flux décentrés :

$$\mathbb{D}_{S,\pm}^u = \int_S \dot{\mathbf{n}}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\mathbf{I}_S^\mp(\mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\mp}) - \mathbf{I}_S^\pm(\mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\pm}) \right] \cdot \mathbf{I}_S^\pm(\mathbf{v}_{\mathcal{K}_S^\pm}) ds, \quad (2.20)$$

et où nous avons introduit les quantités suivantes :

- $\mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\pm}$ la collection des solutions sur les éléments \mathcal{K}_S^\pm :

$$\mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\pm} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{K}_S^\pm) / \forall K \in \mathcal{K}_S^\pm, \mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\pm}|_K := \mathbf{u}_K \in \mathbf{H}^1(K), \quad (2.21)$$

- \mathbf{I}_S^\pm l'application permettant d'obtenir un N_S^{max} -uplet de traces à partir d'un N_S^\pm -uplet d'applications volumiques :

$$\mathbf{I}_S^\pm : \mathbf{L}^2(\mathcal{K}_S^\pm) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_S^{max}), \mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\pm} \mapsto \mathbf{i}_S^\pm \circ \gamma_{S,\pm}^3(\mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\pm}), \quad (2.22)$$

- $\gamma_{S,\pm}^3$ l'application de trace \mathbf{H}^1 sur la surface d'échange S :

$$\gamma_{S,\pm}^3 : \mathbf{L}^2(\mathcal{K}_S^\pm) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{F}_S^\pm), \mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^\pm} \mapsto \mathbf{u}_S^\pm / \forall f \in \mathbb{F}_S^\pm, f \subset \partial K, \mathbf{u}_S^\pm|_f := \gamma_{K,f}^3(\mathbf{u}_K) \in \mathbf{L}^2(f), \quad (2.23)$$

avec, pour rappel, $\gamma_{K,f}^3(\mathbf{u}_K)$ correspondant à la trace de \mathbf{u}_K sur f (voir définition (1.29)),

- \mathbf{i}_S^\pm l'injection canonique assurant le passage d'un N_S^\pm -uplet à un N_S^{max} -uplet de traces :

$$\mathbf{i}_S^\pm : \mathbf{L}^2(\mathbb{F}_S^\pm) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_S^{max}), \mathbf{u}_S^\pm \mapsto \mathbf{u}_{S,max}^\pm / \forall f \in \mathcal{F}_S^{max}, \exists f^\pm \in \mathbb{F}_S^\pm, f \subset f^\pm, \mathbf{u}_{S,max}^\pm|_f := \mathbf{u}_S^\pm|_{f \cap f^\pm}, \quad (2.24)$$

- $\int_S \dot{\mathbf{n}}_S$ le regroupement des intégrales sur les facettes \mathcal{F}_S^{max} :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_S^{max}), \int_S \dot{\mathbf{n}}_S \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} ds := \sum_{f \in \mathcal{F}_S^{max}} \int_f \mathbf{u}|_f \cdot \mathbf{v}|_f ds, \quad (2.25)$$

Remarque 2.4 Nous avons regroupé dans cette formulation l'ensemble des termes de flux locaux définis à l'échelle des facettes en une intégrale de flux globale définie à l'échelle des surfaces d'échange. Or, si cette intégrale est directement bien définie pour un accollement conforme, elle n'a plus de sens pour les accollements non-conformes, car elle repose sur le produit scalaire \mathbb{R}^n entre deux quantités qui sont de dimensions différentes (un $3N_S^+$ -uplet contre un $3N_S^-$ -uplet). D'où l'introduction de l'application \mathbf{I}_S^\pm , permettant de réinterpréter ces quantités comme des éléments de $\mathbb{R}^{N_S^{max}}$, et de l'objet $\int_S \dot{\mathbf{n}}_S$, qui permet de retrouver une définition correcte de l'intégrale de flux via une décomposition à l'échelle des facettes de la surface d'échange. Il ne s'agit donc ici que d'une réécriture fastidieuse des termes de flux classiques qui peut sembler superflue mais qui se justifiera dans la suite. Nous verrons en effet que leur discrétisation à cette échelle globale peut être significativement moins coûteuse que celle réalisée usuellement en sommant les discrétisations locales.

On s'assure alors que cette formulation avec surfaces d'échange coïncide bien avec la formulation classique présentée dans le chapitre précédent :

Proposition 2.5 *Les formulations (2.12) et (1.35) sont équivalentes en flux centrés.*

De plus, si, pour toute surface d'échange, les paramètres de décentrement sont égaux sur chacune des facettes qui la constitue :

$$\forall S \in \mathcal{S}_h, \forall (f, f') \in \mathbb{F}_S^- \times \mathbb{F}_S^+ / f \in \partial K, f' \in \partial K', \beta_f^K = \beta_{f'}^{K'} =: \beta_S, \quad (2.26)$$

alors on a également l'équivalence en flux décentrés.

Preuve. Il s'agit simplement d'un réarrangement des termes de (1.35) basé sur la séparation des termes de flux et l'introduction des surfaces d'échange. On ne traite que l'équation (2.12a), la procédure étant similaire pour l'équation (2.12b).

Nous commençons par réarranger les termes de flux centrés issus de (1.35) :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_K ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{f=K \cap K'} \left[\int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{K'} \cdot \phi_K ds - \int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_K \cdot \phi_K ds \right] \quad (2.27)$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{f=K \cap K'} \int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{K'} \cdot \phi_K ds - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_K \cdot \phi_K ds. \quad (2.28)$$

Puis, en remarquant que :

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}_h^i} f = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_h} S, \quad (2.29)$$

on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{f=K \cap K'} \int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{K'} \cdot \phi_K ds = \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^i \\ f=K \cap K'}} \left[\int_f \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{K'} \cdot \phi_K ds + \int_f \mathbf{n}_{K'} \wedge \mathbf{H}_K \cdot \phi_{K'} ds \right] \quad (2.30)$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\int_S \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{I}_S^+ \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^+} \right) \cdot \mathbf{I}_S^- \left(\phi_{\mathcal{K}_S^-} \right) ds - \int_S \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{I}_S^- \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^-} \right) \cdot \mathbf{I}_S^+ \left(\phi_{\mathcal{K}_S^+} \right) ds \right]. \quad (2.31)$$

On procède de même pour les termes de flux décentrés, qui peuvent être factorisés à l'échelle des surfaces d'échange grâce à l'hypothèse d'identité des paramètres de décentrement des facettes. ■

Remarque 2.6 *La condition (2.26) ne pose pas de difficulté pratique car le paramètre de décentrement est généralement défini à l'identique sur l'ensemble des facettes du maillage.*

2.2 Schéma GDDT condensé

Cette section est consacrée à la mise en place du schéma GDDT condensé. Dans un premier temps, nous définissons les nouveaux termes de flux qui vont être utilisés dans ce schéma, conçus pour réduire la complexité du calcul au niveau des interfaces hp non-conformes. Nous présentons alors la formulation GD semi-discrétisée qui en résulte. Puis, en étudiant l'énergie semi-discrète liée à cette formulation, nous établissons des propriétés élémentaires que doivent satisfaire les flux condensés afin de garantir la stabilité

de l'approximation spatiale. Enfin, nous procédons à la discrétisation en temps pour aboutir finalement au schéma GDDT condensé. Dans ce qui suit, l'espace d'approximation \mathbf{U}_h est le même que celui utilisé dans le chapitre précédent.

2.2.1 Définition de la notion de flux condensé

De manière générale, il est utile, pour faciliter l'analyse de consistance du schéma, que les formes bilinéaires associées aux différents termes de la formulation GD conservent un sens de produit scalaire dans le passage du problème continu au problème discret. Ce point ne présente aucune difficulté pour les termes homogènes du schéma, tels que la masse, la rigidité, ou les flux conformes, sur lesquels il est même possible d'utiliser une intégration condensée en vertu de la proposition 1.11. En revanche, ce que nous montrons ici, c'est que la tâche devient plus complexe pour les flux hp non-conformes, qui sont par nature hétérogènes. Face à cette difficulté, là où l'approche classique consiste à adopter un produit scalaire très général et très coûteux numériquement, notre objectif est plutôt de définir des produits scalaires particularisés aux configurations hybrides, qui vont permettre de diminuer les coûts de calcul des flux non-conformes.

Dans ce qui suit, on s'intéresse donc à la discrétisation des termes de flux de la formulation GD précédente. On commence par traiter le cas du flux centré $\mathbf{C}_{S,-}^u$, le cas $\mathbf{C}_{S,+}^u$ et décentré $\mathbf{D}_{S,\pm}^u$ se déduisant sans difficulté. Considérons donc $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbf{U}_h^2$. Pour chaque surface d'échange $S \in \mathcal{S}_h$, on a :

$$\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \in \prod_{K \in \mathcal{K}_S^+} \mathbf{Q}^{p\kappa}(K) / \forall K \in \mathcal{K}_S^+, \mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}|_K := \mathbf{u}_{hK}, \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \in \prod_{K \in \mathcal{K}_S^-} \mathbf{Q}^{p\kappa}(K) / \forall K \in \mathcal{K}_S^-, \mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-}|_K := \mathbf{v}_{hK}, \quad (2.32b)$$

les N_S^\pm -uplets de solutions approchées sur les volumes \mathcal{K}_S^\pm de l'accolement. Sur S coïncident ainsi deux espaces de traces discrets, l'un provenant du côté "-" et l'autre du côté "+" de la surface d'échange :

$$\mathbf{Q}_S^\pm := \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\pm} \mathbf{Q}_{|\partial K \cap S}^{p\kappa}, \quad (2.33)$$

où $\mathbf{Q}_{|\partial K \cap S}^{p\kappa}$ désigne la restriction de l'espace $\mathbf{Q}^{p\kappa}(K)$ sur la face $f_K \in \mathbb{F}_K^i \cap \mathbb{F}_S^\pm$. ON pose alors :

$$\mathbf{u}_{hS}^+ := \gamma_{S,+}^3(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}) \in \mathbf{Q}_S^+ \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{hS}^- := \gamma_{S,-}^3(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-}) \in \mathbf{Q}_S^-. \quad (2.34)$$

Lorsque la surface d'échange est hp conforme, on a l'identité des espaces de traces :

$$\mathbf{Q}_S^+ = \mathbf{Q}_S^-. \quad (2.35)$$

Alors, le calcul condensé de l'intégrale de flux permet de conserver naturellement le produit scalaire de l'espace \mathbf{Q}_S^\pm (cf. proposition 1.11). En revanche, lorsque la surface d'échange est hp non-conforme, on perd l'identité précédente :

$$\mathbf{Q}_S^+ \neq \mathbf{Q}_S^-. \quad (2.36)$$

De plus, aucune inclusion n'est garantie entre ces quantités :

$$\mathbf{Q}_S^+ \not\subset \mathbf{Q}_S^- \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_S^- \not\subset \mathbf{Q}_S^+. \quad (2.37)$$

Il devient donc impossible d'utiliser le produit scalaire d'un de ces espaces pour calculer un terme de flux non-conforme.

L'approche classique, mise en œuvre dans le chapitre précédent, consiste alors à utiliser un produit scalaire d'un espace plus général. En réalisant une intégration exacte des termes de flux non-conformes via des quadratures d'ordre élevé sur chaque facette de l'accolement, elle permet de conserver le produit

scalaire $L^2(S)$. Plus spécifiquement, cette approche revient à utiliser le produit scalaire de l'espace \mathbb{Q}_S^{max} , défini de la manière suivante :

$$\mathbb{Q}_S^{max} = \left\{ u \in L^2(\mathcal{F}_S^{max}) / \forall f \in \mathcal{F}_S^{max}, u|_f \in \mathcal{Q}^P(f), P = \max_{K \in \mathcal{K}_S^- \cup \mathcal{K}_S^+} (p_K) \right\}. \quad (2.38)$$

Cet espace est constitué de polynômes définis par morceaux sur \mathcal{F}_S^{max} , de degré le plus élevé parmi ceux des éléments de \mathcal{K}_S^\pm . Il contient ainsi naturellement les deux espaces de traces \mathbb{Q}_S^\pm . Or, nous avons vu dans le chapitre précédent que la méthode de quadrature exacte sur \mathbb{Q}_S^{max} peut provoquer une augmentation significative du nombre d'accès mémoire et d'interpolations des fonctions de base, conduisant à l'explosion des temps de calcul du schéma.

Pour contourner cette difficulté, nous développons ici une approche de condensation adaptée aux configurations *hp* non-conformes. Sous sa forme la plus générale, cette approche consiste à substituer, dans le calcul des flux non-conformes, le produit scalaire de \mathbb{Q}_S^{max} par un produit scalaire construit à partir d'un espace $\tilde{\mathbb{Q}}_S^-$ vérifiant :

$$\tilde{\mathbb{Q}}_S^- \subset \mathbb{Q}_S^{max}. \quad (2.39)$$

L'idée est donc de calculer les termes de flux non-conformes sur un espace moins riche, afin que le produit scalaire de substitution, que nous appellerons produit scalaire condensé, présente des coûts de calcul plus faibles que celui utilisé sur \mathbb{Q}_S^{max} . Soulignons que le produit scalaire condensé ne définit alors *a priori* qu'une forme bilinéaire sur \mathbb{Q}_S^{max} . En l'absence d'autres considérations, l'espace $\tilde{\mathbb{Q}}_S^-$ peut être construit par morceaux, à partir d'une partition de la surface d'échange, $\tilde{\mathbb{F}}_S^-$, qui lui est propre. Il peut également utiliser des ordres d'approximation locaux choisis indépendamment de la configuration initiale, pour s'écrire finalement :

$$\tilde{\mathbb{Q}}_S^- = \prod_{\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^-} \mathcal{Q}^{P_{\tilde{f}}}(\tilde{f}) \quad (2.40)$$

Nous cherchons alors à construire le produit scalaire condensé sous la forme d'une quadrature composite adaptée au découpage $\tilde{\mathbb{F}}_S^-$ de la surface d'échange :

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\tilde{S}}^- := \sum_{\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^-} \langle \phi|_{\tilde{f}}, \psi|_{\tilde{f}} \rangle_{\tilde{f}}^-, \quad (2.41a)$$

$$\langle \phi|_{\tilde{f}}, \psi|_{\tilde{f}} \rangle_{\tilde{f}}^- := \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_{i=1}^{N_\alpha^-} \omega_{\alpha, \tilde{f}, i}^- \phi_{\alpha|_{\tilde{f}}}(\mathbf{x}_{\alpha, \tilde{f}, i}^-) \cdot \psi_{\alpha|_{\tilde{f}}}(\mathbf{x}_{\alpha, \tilde{f}, i}^-), \quad (2.41b)$$

avec $\phi, \psi \in \tilde{\mathbb{Q}}_S^-$, $\mathbf{x}_{\alpha, \tilde{f}, i}^- \in \tilde{f}$ et $\omega_{\alpha, \tilde{f}, i}^- \geq 0$ pour tout $\alpha \in \{x, y, z\}$, $\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^-$ et $i \in \llbracket 1, N_\alpha^- \rrbracket$. Remarquons dès à présent les propriétés suivantes qui seront utiles pour l'analyse du schéma :

Lemme 2.7 *Pour tout $\phi, \psi \in \tilde{\mathbb{Q}}_S^-$, on a l'inégalité :*

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\tilde{S}}^- \leq \frac{1}{2} (\langle \phi, \phi \rangle_{\tilde{S}}^- + \langle \psi, \psi \rangle_{\tilde{S}}^-) \quad (2.42)$$

Preuve. Immédiat en utilisant la positivité des poids $\omega_{\alpha, \tilde{f}, i}^-$ et l'inégalité :

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad (2.43)$$

pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. ■

Lemme 2.8 Si $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^\pm$ est un produit scalaire sur $\tilde{\mathbb{Q}}_S^\pm$, alors, pour tout $\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^\pm$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{f}}^\pm$ est un produit scalaire sur $\tilde{\mathbb{Q}}_S^\pm|_{\tilde{f}^\pm}$.

Preuve. Soit $\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^\pm$. Le produit scalaire de \mathbb{R}^n assure que la quantité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{f}}^\pm$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\tilde{\mathbb{Q}}_S^\pm|_{\tilde{f}^\pm}$, positive du fait de la positivité des poids $\{\omega_{\alpha, \tilde{f}, i}\}$. Puis, en prenant $\mathbf{u}|_{\tilde{f}} \in \tilde{\mathbb{Q}}_S^\pm|_{\tilde{f}^\pm}$ et en considérant $\mathcal{P}_{\tilde{f}}(\mathbf{u}|_{\tilde{f}})$ le prolongement à zéro de $\mathbf{u}|_{\tilde{f}}$ sur $S \setminus \tilde{f}$, on a que :

$$\left\langle \mathcal{P}_{\tilde{f}}(\mathbf{u}|_{\tilde{f}}), \mathcal{P}_{\tilde{f}}(\mathbf{u}|_{\tilde{f}}) \right\rangle_S^- = \left\langle \mathbf{u}|_{\tilde{f}}, \mathbf{u}|_{\tilde{f}} \right\rangle_{\tilde{f}}^- = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}|_{\tilde{f}} = 0, \quad (2.44)$$

car $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^\pm$ est un produit scalaire, ce qui montre la définie positivité de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{f}}^\pm$. \blacksquare

Dès lors, la question centrale posée dans notre approche est la suivante : existe-t-il une approximation des flux centrés sous la forme :

$$\mathbb{C}_{S,-}^u \simeq \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}_{hS}^+, \mathbf{v}_{hS}^- \right\rangle_S^- ? \quad (2.45)$$

On voit qu'une difficulté majeure se présente, car dans le cas général, on a :

$$\mathbb{Q}_S^+ \not\subset \tilde{\mathbb{Q}}_S^- \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_S^- \not\subset \tilde{\mathbb{Q}}_S^-. \quad (2.46)$$

ce qui interdit d'utiliser directement un produit scalaire sur $\tilde{\mathbb{Q}}_S^-$, et par conséquent une approximation du type (2.45). Pour corriger ce problème, l'idée est de substituer l'opérateur de trace utilisé jusqu'à présent par un nouvel opérateur, noté Π_S^- , à valeurs dans l'espace de calcul appauvri $\tilde{\mathbb{Q}}_S^-$, pour finalement corriger l'approximation (2.45) et définir les flux condensés sous la forme :

$$\mathbb{C}_{S,-}^u \simeq \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathcal{J}}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- \quad (2.47)$$

où $\tilde{\mathcal{J}}_S^-$ est l'analogie discret de I_S^- pour l'espace $\tilde{\mathbb{Q}}_S^-$:

$$\tilde{\mathcal{J}}_S^- : \prod_{K \in \mathcal{K}_S^-} Q^{p_K}(K) \rightarrow \tilde{\mathbb{Q}}_S^-, \quad \mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^-} \mapsto \tilde{\mathcal{J}}_S^- \circ \gamma_{S,-}^3 \left(\mathbf{u}_{\mathcal{K}_S^-} \right), \quad (2.48)$$

avec $\tilde{\mathcal{J}}_S^\pm$ l'injection canonique assurant le passage d'un N_S^- -uplet à un \tilde{N}_S^- -uplet de traces :

$$\tilde{\mathcal{J}}_S^\pm : \mathbb{Q}_S^\pm \rightarrow \tilde{\mathbb{Q}}_S^\pm, \quad \mathbf{u}_{hS}^\pm \mapsto \tilde{\mathbf{u}}_{hS}^\pm / \forall \tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^\pm, \tilde{f} \subset f \in \mathbb{F}_S^\pm, \tilde{\mathbf{u}}_{hS}^\pm|_{\tilde{f}} := \mathbf{u}_{hS}^\pm|_{\tilde{f} \cap f}, \quad (2.49)$$

La définition (2.47) cache cependant deux choix implicites, l'un sur l'opérateur Π_S^- et l'autre sur la régularité de $\tilde{\mathbb{Q}}_S^-$. Pour rappel, dans l'approche classique, les opérateurs de trace tangentielle γ^1 et de trace dans le plan tangent γ^2 , définis initialement à partir de la formule de Green, étaient calculés en tirant parti de la régularité de l'espace d'approximation autorisant l'utilisation de l'opérateur γ^3 de trace \mathbf{H}^1 , de sorte que pour tout $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\gamma_{K,\partial K}^1(\mathbf{u}_{hK}) = \mathbf{n}_K \wedge \gamma_{K,\partial K}^3(\mathbf{u}_{hK}) \quad (2.50a)$$

$$\gamma_{K,\partial K}^2(\mathbf{u}_{hK}) = \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \gamma_{K,\partial K}^3(\mathbf{u}_{hK}) \quad (2.50b)$$

On voit donc qu'il suffit de remplacer γ^3 par un opérateur adéquat pour retrouver un sens de trace tangentielle adapté à la configuration condensée, d'où le fait de remplacer dans (2.45) le terme :

$$\mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}_{hS}^+ := \mathbf{n}_S \wedge \gamma_{S,+}^3 \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \in \mathbb{Q}_S^+ \quad (2.51)$$

par la quantité suivante, appartenant à l'espace de calcul condensé :

$$\mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-}^+ \right) \in \tilde{\mathbf{Q}}_S^-. \quad (2.52)$$

Puis, afin d'assurer que $\mathbf{v}_{h_S}^-$ appartienne à $\tilde{\mathbf{Q}}_S^-$, nous avons restreint notre étude au cas particulier :

$$\mathbf{Q}_S^- \hookrightarrow \tilde{\mathbf{Q}}_S^- \hookrightarrow \mathbf{Q}_S^{max}. \quad (2.53)$$

Par ce choix, nous cherchons à éviter une approximation trop grossière pouvant dégrader la consistance du schéma et compliquer son étude (voir remarque 2.11). On assure ainsi, par exemple, que l'espace de calcul $\tilde{\mathbf{Q}}_S^-$ présente un découpage de la surface d'échange, $\tilde{\mathbb{F}}_S^-$, incluant *a minima* le découpage initial, \mathbb{F}_S^- , si bien que :

$$\forall \tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^-, \exists ! f \in \mathbb{F}_S^- / \tilde{f} \subset \overset{\circ}{f}, \quad (2.54)$$

ce qui permet de définir l'application $\tilde{T}_S^- : \tilde{\mathbb{F}}_S^- \rightarrow \mathbb{F}_S^-$ qui, à chaque élément de $\tilde{\mathbb{F}}_S^-$ associe l'unique élément de \mathbb{F}_S^- dans lequel il est inclus (voir figure 2.5).

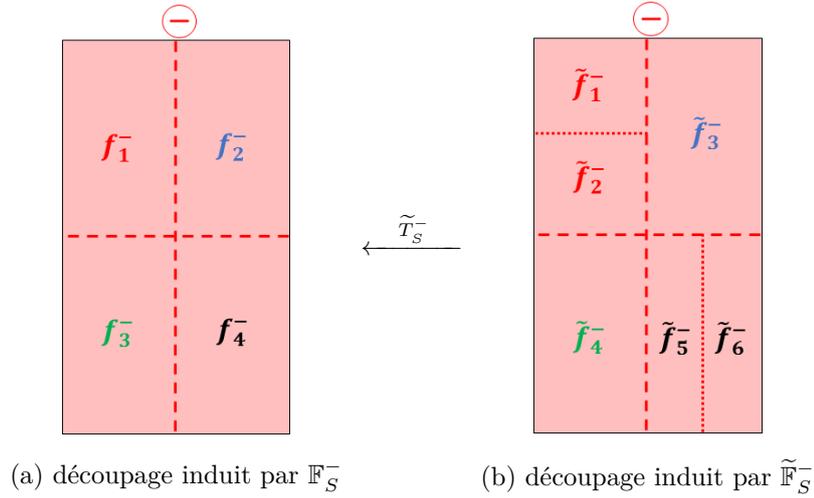


FIGURE 2.5 – Représentation, sur un exemple de surface d'échange, des ensembles \mathbb{F}_S^- et $\tilde{\mathbb{F}}_S^-$ intervenant respectivement dans la définition des espaces \mathbf{Q}_S^- et $\tilde{\mathbf{Q}}_S^-$, et de l'application \tilde{T}_S^- .

Reste à préciser ce que nous avons appelé opérateur adéquat Π_S^- . D'après ce qui précède, l'opérateur de trace condensé doit vérifier *a minima* :

$$\Pi_S^- : \prod_{K \in \mathcal{K}_S^+} \mathbf{Q}^{p_K}(K) \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}}_S^-. \quad (2.55)$$

Cependant, afin de conserver un sens de trace tangentielle dans le passage des flux standards aux flux condensés, nous allons poser plusieurs conditions supplémentaires sur cet opérateur.

D'une part, nous souhaitons conserver le fait que deux éléments de \mathbf{Q}_S^+ de mêmes composantes tangentielles sur S ont la même contribution dans le terme de flux, ce qui revient à poser :

$$\text{Ker} \left(\gamma_{S,+}^2 \right) \subset \text{Ker} \left(\Pi_S^- \right), \quad (2.56)$$

où :

$$\gamma_{S,+}^2 : \prod_{K \in \mathcal{K}_S^+} \mathbf{Q}^{p_K}(K) \rightarrow \mathbf{Q}_S^+, \mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \mapsto \gamma_{S,+}^2 \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \quad (2.57)$$

avec, pour tout $f \in \mathbb{F}_S^+$ telle que $f \subset \partial K$:

$$\gamma_{S,+}^2 \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) |_f = \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}_{hK}. \quad (2.58)$$

D'autre part, la composante normale à S d'un élément \mathbf{u}_{hS}^+ ne jouant pas dans le calcul du flux (du fait du produit vectoriel par \mathbf{n}_S), seule l'approximation de la partie tangentielle de γ^3 est utile. Il est donc possible de relâcher les contraintes de définition de l'opérateur $\mathbf{\Pi}_S^-$ en exigeant qu'il soit à valeurs dans l'espace des traces tangentielles sur $\tilde{\mathbf{Q}}_S^-$, c'est-à-dire :

$$Im(\mathbf{\Pi}_S^-) \subset Ker(\tilde{\gamma}_{S,-}^1), \quad (2.59)$$

avec :

$$\tilde{\gamma}_{S,-}^1 : \tilde{\mathbf{Q}}_S^- \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}}_S^-, \quad \phi_S^- \mapsto \mathbf{n}_S \cdot \phi_S^- \mathbf{n}_S. \quad (2.60)$$

S'ensuit le résultat de commutation suivant :

Lemme 2.9 *Étant donnée $S \in \mathcal{S}_h$, si l'opérateur de trace condensé $\mathbf{\Pi}_S^-$ vérifie l'hypothèse :*

$$Ker \left(\gamma_{S,+}^2 \right) \subset Ker \left(\mathbf{\Pi}_S^- \right) \quad \text{et} \quad Im(\mathbf{\Pi}_S^-) \subset Ker(\tilde{\gamma}_{S,-}^1), \quad (H1)$$

alors, pour tout $\mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h$, on a :

$$-\mathbf{\Pi}_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}) = \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}) = \mathbf{\Pi}_S^-(\mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}), \quad (2.61)$$

où $\mathbf{n}_S \wedge \cdot$ désigne l'application produit vectoriel volumique, définie à partir du projecteur orthogonal sur S noté \mathbf{p}_S^+ :

$$(\mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}_{hK})(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_S \left(\mathbf{p}_S^+(\mathbf{x}) \right) \wedge \left[\mathbf{n}_S \left(\mathbf{p}_S^+(\mathbf{x}) \right) \wedge \mathbf{u}_{hK}(\mathbf{x}) \right], \quad \forall \mathbf{x} \in K, \quad \forall K \in \mathcal{K}_S^+. \quad (2.62)$$

Preuve. Soit $S \in \mathcal{S}_h$. Pour tout élément $K \in \mathcal{K}_S^\pm$, les applications \mathbf{u}_{hK} et $-\mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}_{hK}$ ont les mêmes composantes tangentielles sur S . On a donc :

$$\mathbf{\Pi}_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}) = \mathbf{\Pi}_S^-(-\mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}). \quad (2.63)$$

Par ailleurs, $\mathbf{\Pi}_S^-$ étant à valeurs dans l'espace des traces tangentielles sur S , il est égal à sa trace tangentielle, soit :

$$-\mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}) = \mathbf{\Pi}_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}). \quad (2.64)$$

D'où le résultat. ■

L'hypothèse **(H1)** va donc nous permettre de retrouver une approximation de trace tangentielle au sein des termes de flux, en laissant suffisamment de liberté de construction sur l'opérateur $\mathbf{\Pi}_S^-$ pour la suite. On définit de manière analogue les quantités $\tilde{\mathbf{Q}}_S^+$, $\mathbf{\Pi}_S^+$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^+$, et l'on montre les équivalents des lemmes 2.7-2.8-2.9, pour les flux correspondant au côté "+" de la surface d'échange. Les normes induites par les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^\pm$ sur les espaces $\tilde{\mathbf{Q}}_S^\pm$ seront notées $\|\cdot\|_S^\pm$, et les normes locales induites par $\langle \cdot, \cdot \rangle_f^\pm$ sur $\tilde{\mathbf{Q}}_S^\pm|_f$ seront notées $\|\cdot\|_f^\pm$. Les termes de flux décentrés condensés vont utiliser les mêmes quantités que celles définies pour les flux centrés et s'écriront donc de manière générale :

$$\mathbf{D}_{S,-}^u \simeq \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\mathbf{\Pi}_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}) - \tilde{\mathbf{J}}_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-}) \right], \tilde{\mathbf{J}}_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-}) \right\rangle_S^- \quad (2.65)$$

Grâce à cette mise en place, nous créons une marge de manœuvre sur la précision et les coûts de calcul des flux hp non-conformes, que nous allons pouvoir exploiter pour améliorer l'efficacité numérique du schéma. Par exemple, en choisissant des points de quadrature dans (2.41b) situés au même endroit que les degrés de liberté de $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathcal{S}}^{\pm}$, on minimise, à l'image du calcul condensé des autres termes du schéma, le nombre d'accès mémoire et on supprime les interpolations aux fonctions de base nécessaires à l'évaluation des flux hp non-conformes, identifiés comme particulièrement coûteuses dans le chapitre précédent.

Enfin, on montre que le formalisme que nous venons d'introduire généralise le traitement classique des termes de flux, et qu'ainsi l'ensemble des flux condensés assurant la bonne tenue du schéma GDDT n'est pas vide :

Proposition 2.10 *Les flux conformes et non-conformes classiques (tels que définis dans le paragraphe 1.3.1.4) sont des cas particuliers de flux condensés.*

Preuve. Un flux condensé est entièrement caractérisé par le choix des espaces $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathcal{S}}^{\pm}$, des stencils de points $\{\mathbf{x}_{\alpha, \tilde{f}, i}^{\pm}\}$, des poids $\{\omega_{\alpha, \tilde{f}, i}^{\pm}\}$ et des opérateurs $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{S}}^{\pm}$. Les flux conformes classiques correspondent ainsi aux choix suivants :

- $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathcal{S}}^{\pm} = \mathbf{Q}_{\mathcal{S}}^{\pm}$,
- points et poids de la quadrature de Gauss-Lobatto colloquée aux degrés de liberté de la surface d'échange $S : \{\omega_{\alpha, \tilde{f}, i}^{\pm}, \mathbf{x}_{\alpha, \tilde{f}, i}^{\pm}\} = GL$,
- $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{S}}^{\pm} = -\mathbf{n}_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{n}_{\mathcal{S}} \wedge \cdot$.

Les flux non-conformes classiques correspondent quant à eux aux choix suivants :

- $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathcal{S}}^{\pm} = \mathbf{Q}_{\mathcal{S}}^{max}$,
- points et poids de la quadrature de Gauss-Legendre d'ordre suffisamment élevé pour réaliser une intégration exacte sur $S : \{\omega_{\alpha, \tilde{f}, i}^{\pm}, \mathbf{x}_{\alpha, \tilde{f}, i}^{\pm}\} = G$,
- $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{S}}^{\pm} = -\mathbf{n}_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{n}_{\mathcal{S}} \wedge \cdot$ comme précédemment.

■

Remarque 2.11 *Dans un cadre plus général où l'espace $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathcal{S}}$ serait choisi tel que :*

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{S}} \not\leftrightarrow \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathcal{S}} \quad (2.66)$$

on aurait a priori :

$$\mathbf{u}_{hs}^+ \notin \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathcal{S}}^- \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{hs}^- \notin \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathcal{S}}^-. \quad (2.67)$$

Il serait donc nécessaire, pour pouvoir utiliser un produit scalaire sur cet espace, d'utiliser cette fois un nouvel opérateur de trace pour ces deux quantités. Or, si la définition d'un opérateur de trace condensé pour \mathbf{u}_{hs}^+ ne pose pas de difficulté théorique majeure, la définition d'une quantité équivalente pour \mathbf{v}_{hs}^- , soulève davantage de questions. En effet, le rôle des fonctions tests étant d'extraire les informations de la formulation GD, l'utilisation d'un opérateur non injectif peut provoquer un défaut de rang au niveau du système final causant une approximation mal posée. Cette approche a donc été écartée de nos considérations.

2.2.2 Formulation GD semi-discrétisée condensée

En intégrant les nouveaux flux définis dans le paragraphe précédent, on aboutit à la formulation GD condensée semi-discrétisée espace suivante :

Trouver $\mathbf{E}_h(\cdot, t), \mathbf{H}_h(\cdot, t) \in \mathbf{U}_h$, tels que, $\forall \phi_h, \psi_h \in \mathbf{U}_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\partial_t \mathbb{M}_{h,\underline{\epsilon},K}^{\mathbf{E}} - \mathbb{R}_{hK}^{\mathbf{H}} + \mathbb{S}_{hK}^{\mathbf{E}} + \mathbb{J}_{hK} + \frac{1}{2} \mathbb{I}_{hK}^{\mathbf{H}} \right] - \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} [(\mathbb{C}_{hS,-}^{\mathbf{H}} - \mathbb{C}_{hS,+}^{\mathbf{H}}) - (\mathbb{D}_{hS,-}^{\mathbf{E}} + \mathbb{D}_{hS,+}^{\mathbf{E}})] = 0, \quad (2.68a) \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\partial_t \mathbb{M}_{h,\underline{\mu},K}^{\mathbf{H}} + \mathbb{R}_{hK}^{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \mathbb{I}_{hK}^{\mathbf{E}} - \mathbb{B}_{hK}^{\mathbf{E}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} [(\mathbb{C}_{hS,-}^{\mathbf{E}} - \mathbb{C}_{hS,+}^{\mathbf{E}}) + (\mathbb{D}_{hS,-}^{\mathbf{H}} + \mathbb{D}_{hS,+}^{\mathbf{H}})] = 0, \quad (2.68b) \end{array} \right.$$

avec, pour $\mathbf{u} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, $\mathbf{v} \in \{\phi, \psi\}$ et $\underline{a} \in \{\underline{\epsilon}, \underline{\mu}\}$:

- $\mathbb{M}_{h,\underline{a},K}^{\mathbf{u}}$ les termes de masse :

$$\mathbb{M}_{h,\underline{a},K}^{\mathbf{u}} = \int_K^{GL} \underline{a} \mathbf{u}_{hK} \cdot \mathbf{v}_{hK} dx, \quad (2.69)$$

- $\mathbb{R}_{hK}^{\mathbf{u}}$ les termes de rigidité :

$$\mathbb{R}_{hK}^{\mathbf{u}} = \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{u}_{hK} \cdot \mathbf{v}_{hK} dx, \quad (2.70)$$

- $\mathbb{S}_{hK}^{\mathbf{u}}$ le terme de conductivité :

$$\mathbb{S}_{hK}^{\mathbf{u}} = \int_K^{GL} \underline{\sigma} \mathbf{u}_{hK} \cdot \mathbf{v}_{hK} ds, \quad (2.71)$$

- $\mathbb{J}_{hK}^{\mathbf{u}}$ le terme source de courant :

$$\mathbb{J}_{hK} = \int_K^{GL} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{v}_{hK} dx, \quad (2.72)$$

- $\mathbb{I}_{hK}^{\mathbf{u}}$ la partie homogène des flux centrés :

$$\mathbb{I}_{hK}^{\mathbf{u}} = \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_{hK} \cdot \mathbf{v}_{hK} ds, \quad (2.73)$$

- $\mathbb{B}_{hK}^{\mathbf{u}}$ le terme de bord :

$$\mathbb{B}_{hK}^{\mathbf{u}} = \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_{hK} \cdot \mathbf{v}_{hK} ds, \quad (2.74)$$

- $\mathbb{C}_{hS,\pm}^{\mathbf{u}}$ la partie hétérogène des flux centrés :

$$\mathbb{C}_{hS,\pm}^{\mathbf{u}} = \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbb{P}_S^{\pm} \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^{\mp}} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^{\pm} \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^{\pm}} \right) \right\rangle_S^{\pm}, \quad (2.75)$$

- $\mathbb{D}_{hS,\pm}^{\mathbf{u}}$ les termes de flux décentrés :

$$\mathbb{D}_{hS,\pm}^{\mathbf{u}} = \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\mathbb{P}_S^{\pm} \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^{\mp}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^{\pm} \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^{\pm}} \right) \right], \tilde{\mathfrak{J}}_S^{\pm} \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^{\pm}} \right) \right\rangle_S^{\pm}. \quad (2.76)$$

Dans ce qui suit, nous cherchons des conditions sur les flux condensés permettant d'assurer la conservation de l'énergie de ce système.

2.2.3 Conservation d'une énergie semi-discrète et premières hypothèses sur les flux condensés

L'étude de stabilité de la formulation semi-discrétisée est souvent plus aisée que celle du schéma final et permet de découpler les contraintes liées aux approximations spatiale et temporelle. Ainsi, dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'énergie semi-discrète de la formulation (2.68) précédente, dans le but d'exhiber d'éventuelles conditions sur les opérateurs de reconstruction et sur les produits scalaires condensés, nécessaires ou suffisantes pour garantir la stabilité. Pour simplifier les calculs, nous nous plaçons dans le cas $\underline{\sigma} = 0$ et $\mathbf{J}_s = 0$.

Commençons par rappeler les principaux mécanismes sur lesquels reposent la conservation (ou la décroissance) de l'énergie du schéma semi-discret du chapitre précédent (voir démonstration de la proposition 1.15) :

1. le regroupement des termes de masse des équations en \mathbf{E} et \mathbf{H} fait apparaître la dérivée temporelle de l'énergie semi-discrète,
2. l'utilisation de l'intégration par parties condensée (proposition 1.14 fait que le terme de rigidité en \mathbf{E} se simplifie avec les termes de rigidité en \mathbf{H} , de bord, et de flux centrés homogènes,
3. les parties hétérogènes des flux centrés se simplifient en utilisant l'antisymétrie du produit vectoriel, via l'identité générique suivante sur $f = K \cap K'$:

$$\int_f (\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_{hK'} \cdot \mathbf{v}_{hK} \, ds - \mathbf{n}_{K'} \wedge \mathbf{v}_{hK} \cdot \mathbf{u}_{hK'}) \, ds = 0, \quad (2.77)$$

4. les flux décentrés se regroupent sous la forme d'un terme signé :

$$\int_f \left(\llbracket \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u} \rrbracket_f^K \cdot \mathbf{u}_{hK} \, ds + \llbracket \mathbf{n}_{K'} \wedge \mathbf{n}_{K'} \wedge \mathbf{u} \rrbracket_f^{K'} \cdot \mathbf{u}_{hK'} \right) \, ds \geq 0. \quad (2.78)$$

Ainsi, pour que la formulation condensée semi-discrète soit stable, il suffit que chacun des 4 mécanismes précédents soit conservé. Étant donné que les termes de masse, rigidité, bord, et de flux centrés homogènes sont inchangés, les points 1. et 2. sont automatiquement vérifiés pour la formulation condensée semi-discrète. En revanche, pour retrouver les points 3. et 4. il est nécessaire d'avoir leur équivalent dans le formalisme condensé, ce qui implique plusieurs hypothèses sur les opérateurs de reconstruction et les produits scalaires introduits précédemment.

Point 3. : termes de flux centrés hétérogènes

Dans le formalisme condensé, l'équivalent du point 3 s'écrit :

$$\mathbb{C}_{S,-}^u + \mathbb{C}_{S,+}^v = 0, \quad (2.79)$$

c'est-à-dire :

$$\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\kappa_S^+} \right), \tilde{\mathbf{J}}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\kappa_S^-} \right) \right\rangle_S^- + \left\langle \tilde{\mathbf{J}}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\kappa_S^+} \right), \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^+ \left(\mathbf{v}_{h\kappa_S^-} \right) \right\rangle_S^+ = 0. \quad (\mathbf{H2})$$

Cette hypothèse traduit une propriété de symétrie entre les flux centrés de part et d'autre d'une surface d'échange. Elle peut être interprétée comme une condition portant sur le caractère autoadjoint des opérateurs de traces pour les produits scalaires condensés. Elle va jouer un rôle central dans la suite, en particulier pour guider la construction pratique de ces quantités.

Point 4. : termes de flux décentrés

Pour la partie décentrée du flux, l'équivalent du point 4. s'écrit :

$$\mathbb{D}_{S,-}^u + \mathbb{D}_{S,+}^u \geq 0, \quad (2.80)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) - \tilde{\mathbf{J}}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right], \tilde{\mathbf{J}}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- \\ & + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\mathbf{\Pi}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) - \tilde{\mathbf{J}}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right], \tilde{\mathbf{J}}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+ \geq 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Or, en développant, le membre de gauche de cette inégalité s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathbf{J}}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\|_S^- \right)^2 + \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathbf{J}}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\|_S^+ \right)^2 - \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathbf{J}}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- \\ & - \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right), \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathbf{J}}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+, \end{aligned} \quad (2.82)$$

qui, par le lemme 2.7, est minoré par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathbf{J}}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\|_S^- \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathbf{J}}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\|_S^+ \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\|_S^- \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\|_S^+ \right)^2. \end{aligned} \quad (2.83)$$

On voit donc que sous l'hypothèse suivante :

$$\left\| \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^\pm \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^\pm} \right) \right\|_S^\pm \leq \left\| \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathbf{J}}_S^\mp \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^\mp} \right) \right\|_S^\mp, \quad (\mathbf{H3})$$

la positivité des flux décentrés est bien assurée. Cette hypothèse peut s'interpréter comme une condition non-augmentation de la partie tangente de la trace condensée de la solution au niveau des surfaces d'échange. On montre par ailleurs que la partie tangentielle des opérateurs de traces de part et d'autre d'une surface d'échange ont la même norme :

Proposition 2.12 *Pour toute surface d'échange $S \in \mathcal{S}_h$, si les opérateurs $\mathbf{\Pi}_S^\pm$ satisfont l'hypothèse (H2), alors elles ont la même norme subordonnée condensée :*

$$\left\| \left\| \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^- \right\|_S^- \right\|_S^- = \left\| \left\| \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^+ \right\|_S^+ \right\|_S^+ \quad (2.84)$$

Preuve. En notant $\mathcal{E}^\pm = \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\pm} \mathbf{Q}^{PK}(\mathbf{K})$, on a par définition :

$$\left\| \left\| \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^- \right\|_S^- \right\|_S^- := \sup_{\substack{\mathbf{u}^\pm \in \mathcal{E}^\pm / \\ \|\mathbf{u}^\pm\|_S^\pm \neq 0}} \frac{\left| \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{u}^+ \right), \tilde{\mathbf{J}}_S^- \left(\mathbf{u}^- \right) \right\rangle_S^- \right|}{\|\mathbf{u}^-\|_S^- \|\mathbf{u}^+\|_S^+}, \quad (2.85)$$

soit, avec (H2) :

$$\left\| \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \right\|_S^- = \sup_{\substack{\mathbf{u}_h^\pm \in \mathcal{E}^\pm / \\ \|\mathbf{u}_h^\pm\|_S^\pm \neq 0}} \frac{\left| \left\langle \tilde{\mathfrak{J}}_S^-(\mathbf{u}^-), \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+(\mathbf{u}^-) \right\rangle_S^+ \right|}{\|\mathbf{u}^-\|_S^- \|\mathbf{u}_h^+\|_S^+} =: \left\| \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \right\|_S^+ \quad (2.86)$$

■

Bilan

Finalement, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 2.13 *Dans le cas $\underline{\sigma} = 0$ et $\mathbf{J}_s = 0$, si pour toutes fonctions $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbf{U}_h^2$ et toute surface d'échange $S \in \mathcal{S}_h$ les opérateurs de traces Π_S^\pm et les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^\pm$ vérifient les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, alors l'énergie du système (2.68) se conserve en flux centrés.*

De plus, si **(H3)** est satisfaite, alors l'énergie décroît en flux décentrés.

Preuve. Commençons par démontrer le résultat en flux centrés. La démarche est la même que pour la proposition 1.15. En prenant $\phi_{hK} = \mathbf{E}_{hK}$, $\psi_{hK} = \mathbf{H}_{hK}$ et en sommant les deux équations de (2.68) on obtient :

$$A + B + C = 0 \quad (2.87)$$

avec :

$$A := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{d}{dt} \int_K^{GL} \underline{\epsilon} \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} dx + \frac{d}{dt} \int_K^{GL} \underline{\mu} \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} dx \right], \quad (2.88)$$

$$B := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} dx + \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} ds - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} dx - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} ds \right], \quad (2.89)$$

et :

$$C := \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[- \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+ \right. \\ \left. + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- - \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+ \right]. \quad (2.90)$$

Le terme A donne directement l'énergie du système :

$$A := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{d}{dt} \int_K^{GL} \underline{\epsilon} \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} dx + \frac{d}{dt} \int_K^{GL} \underline{\mu} \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} dx \right] = \frac{1}{2} \partial_t \mathcal{E}_h(t), \quad (2.91)$$

Le terme B regroupe les rigidités, la partie homogène des flux centrés et les termes de bord. En utilisant l'intégration par parties discrète, on obtient :

$$B := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} dx + \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} ds - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} dx - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} ds \right] \quad (2.92a)$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_{\partial K}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} ds - \int_K^{GL} \mathbf{H}_{hK} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK} dx + \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{H}_{hK} dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK} \cdot \mathbf{E}_{hK} ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK} dx + \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{E}_{hK} \cdot \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK} ds \right] \quad (2.92b)$$

$$= 0 \quad (2.92c)$$

Le terme C réunit les termes de flux centrés hétérogènes. En utilisant l'hypothèse **(H2)**, on obtient que :

$$C := \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[- \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+ + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- - \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+ \right] \quad (2.93a)$$

$$= 0, \quad (2.93b)$$

ce qui achève la démonstration en flux centrés.

Dans le cas des flux décentrés, le même mode opératoire conduit à :

$$\frac{1}{2} \partial_t \tilde{\mathcal{E}}_h(t) + D_E + D_H = 0, \quad (2.94)$$

avec, pour $\mathbf{u} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$:

$$D_u := \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right], \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- \right. \quad (2.95)$$

$$\left. + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\mathbf{\Pi}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right], \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+ \right]. \quad (2.96)$$

On retrouve ainsi les termes (2.81), dont la positivité est assurée par **(H3)**. D'où le résultat en flux décentrés. \blacksquare

2.2.4 Schéma GDDT condensé

En introduisant le schéma temporel saute-mouton d'ordre 2 dans la formulation semi-discrétisée précédente, on obtient directement le schéma GDDT condensé :

Pour tout $n \in \llbracket 0, N_{iter} \rrbracket$, trouver $\mathbf{E}_h^{n+1}, \mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} \in \mathbf{U}_h$, tels que, $\forall \phi_h, \psi_h \in \mathbf{U}_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\mathbb{M}_{h, \underline{\varepsilon}, K}^{\mathbf{E}, n+1} - \mathbb{M}_{hK}^{\mathbf{E}, n} \right) - \mathbb{R}_{hK}^{\mathbf{H}, n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\mathbb{S}_{hK}^{\mathbf{E}, n+1} + \mathbb{S}_{hK}^{\mathbf{E}, n} \right) + \mathbb{J}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \mathbb{I}_{hK}^{\mathbf{H}, n+\frac{1}{2}} \right] \\ \quad - \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\left(\mathbb{C}_{hS, -}^{\mathbf{H}, n+\frac{1}{2}} - \mathbb{C}_{hS, +}^{\mathbf{H}, n+\frac{1}{2}} \right) - \left(\mathbb{D}_{hS, -}^{\mathbf{E}, n+\frac{1}{2}} + \mathbb{D}_{hS, +}^{\mathbf{E}, n+\frac{1}{2}} \right) \right] = 0, \end{array} \right. \quad (2.97a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\mathbb{M}_{h, \underline{\mu}, K}^{\mathbf{H}, n+\frac{3}{2}} - \mathbb{M}_{hK}^{\mathbf{H}, n+\frac{1}{2}} \right) + \mathbb{R}_{hK}^{\mathbf{E}, n+1} - \frac{1}{2} \mathbb{I}_{hK}^{\mathbf{E}, n+1} - \mathbb{B}_{hK}^{\mathbf{E}, n+1} \right] \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\left(\mathbb{C}_{hS, -}^{\mathbf{E}, n+1} - \mathbb{C}_{hS, +}^{\mathbf{E}, n+1} \right) + \left(\mathbb{D}_{hS, -}^{\mathbf{H}, n+1} + \mathbb{D}_{hS, +}^{\mathbf{H}, n+1} \right) \right] = 0, \end{array} \right. \quad (2.97b)$$

où l'on a noté, pour $\mathbf{u} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, $\mathbf{v} \in \{\phi, \psi\}$ et $\underline{a} \in \{\underline{\varepsilon}, \underline{\mu}\}$:

- $\mathbb{M}_{h, \underline{a}, K}^{\mathbf{u}, n}$ les termes de masse :

$$\mathbb{M}_{h, \underline{a}, K}^{\mathbf{u}, n} = \int_K^{GL} \underline{a} \mathbf{u}_{hK}^n \cdot \mathbf{v}_{hK} dx, \quad (2.98)$$

- $\mathbb{R}_{hK}^{\mathbf{u}, n}$ les termes de rigidité :

$$\mathbb{R}_{hK}^{\mathbf{u}, n} = \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{u}_{hK}^n \cdot \mathbf{v}_{hK} dx, \quad (2.99)$$

- $\mathbb{S}_{hK}^{\mathbf{u}, n}$ le terme de conductivité :

$$\mathbb{S}_{hK}^{\mathbf{u}, n} = \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{u}_{hK}^n \cdot \mathbf{v}_{hK} dx, \quad (2.100)$$

- \mathbb{J}_{hK}^n le terme source de courant :

$$\mathbb{J}_{hK}^n = \int_K^{GL} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{v}_{hK} dx, \quad (2.101)$$

- $\mathbb{I}_{hK}^{\mathbf{u}, n}$ la partie homogène des flux centrés :

$$\mathbb{I}_{hK}^{\mathbf{u}, n} = \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_{hK}^n \cdot \mathbf{v}_{hK} ds, \quad (2.102)$$

- $\mathbb{B}_{hK}^{\mathbf{u}, n}$ le terme de bord :

$$\mathbb{B}_{hK}^{\mathbf{u}, n} = \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{u}_{hK}^n \cdot \mathbf{v}_{hK} ds, \quad (2.103)$$

- $\mathbb{C}_{hS, \pm}^{\mathbf{u}, n}$ la partie hétérogène des flux centrés :

$$\mathbb{C}_{hS, \pm}^{\mathbf{u}, n} = \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbb{I}_S^{\pm} \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^{\mp}}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^{\pm} \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^{\pm}} \right) \right\rangle_S^{\pm}, \quad (2.104)$$

- $\mathbb{D}_{hS, \pm}^{\mathbf{u}, n}$ les termes de flux décentrés :

$$\mathbb{D}_{hS, \pm}^{\mathbf{u}, n} = \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\mathbb{I}_S^{\pm} \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^{\mp}}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^{\mp} \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^{\mp}}^n \right) \right], \tilde{\mathfrak{J}}_S^{\pm} \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^{\pm}} \right) \right\rangle_S^{\pm}. \quad (2.105)$$

2.3 Étude de stabilité

On s'intéresse dans cette section à l'étude de stabilité du schéma GDDT condensé (2.97). Il s'agit d'établir sous quelles hypothèses, portant généralement sur les termes du schéma et sur le pas de temps Δt , la norme de la solution approchée est bornée pour tout temps t^n . Pour ce faire, il existe principalement deux approches.

La première approche se base sur le calcul du rayon spectral de la matrice globale \mathcal{M} du schéma. On réécrit (2.97) sous la forme d'une suite récurrente :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^n \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

et on cherche sous quelles conditions la raison de cette suite géométrique est plus petite que 1 (i.e. $\lambda_{max}(\mathcal{M}) \leq 1$, le rayon spectral de la matrice étant généralement calculée numériquement de manière approchée via la méthode de la puissance itérée). On retrouve par exemple cette approche dans [65], utilisée pour établir la condition CFL de plusieurs schémas temporels.

Une deuxième méthode consiste à définir une forme quadratique sur \mathbf{U}_h , décroissante en fonction de t^n , et à étudier sous quelles conditions cette forme bilinéaire est définie positive, constituant ainsi une norme sur l'espace d'approximation. La forme bilinéaire généralement considérée dérive directement d'une énergie discrète, alors appelée norme-énergie. Cette approche, utilisée par exemple dans [31][74] ou [45], a l'avantage de faire apparaître de manière explicite le rôle joué par chacun des termes du schéma dans l'expression de la contrainte CFL, et ainsi de pouvoir établir qualitativement l'impact d'une modification du schéma sur le pas de temps utilisé.

Ces deux approches sont équivalentes mais peuvent donner des résultats légèrement différents sur la valeur de la constante CFL en fonction, par exemple, du critère de convergence utilisé dans l'algorithme de la puissance itérée ou de la finesse des majorations utilisées dans la construction de la norme-énergie. Nous proposons ici une analyse de stabilité via une technique d'énergie similaire à celle menée dans [31], qui semble la mieux adaptée à notre cadre d'étude.

2.3.1 Conservation d'une énergie discrète

Nous commençons par introduire la notion énergie discrète au temps $t^n = n\Delta t$. Nous considérerons deux quantités, l'énergie discrète \mathcal{E}_h^n , utilisée dans le cas des flux centrés :

$$\mathcal{E}_h^n = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{hK}^n = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K^{GL} \left(\underline{\epsilon} \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{E}_{hK}^n + \underline{\mu} \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} \right) dx, \quad (2.107)$$

et l'énergie discrète modifiée $\tilde{\mathcal{E}}_h^n$, utilisée dans le cas des flux décentrés :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_h^n = \mathcal{E}_h^n + \frac{\Delta t}{4} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \left[\underline{\Pi}_S \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \right. \\ \left. - \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \left[\underline{\Pi}_S \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \right]. \quad (2.108) \end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.14 *On suppose que $\underline{\sigma} = 0$ et $\mathbf{J}_s = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans le cas d'un calcul en flux centrés, si les flux condensés satisfont les hypothèses (H1) et (H2), alors l'énergie discrète est conservée :*

$$\mathcal{E}_h^{n+1} = \mathcal{E}_h^n. \quad (2.109)$$

Dans le cas d'un calcul en flux décentrés, si de plus les hypothèses suivantes sont satisfaites, pour tout $S \in \mathcal{S}_h$ et $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbf{U}_h^2$:

$$\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- (\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- (\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-}) \right\rangle_S^- = \left\langle \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ (\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}), \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ (\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-}) \right\rangle_S^+ \quad (\widetilde{\mathbf{H2}})$$

$$\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ (\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-}), \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ (\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-}) \right\rangle_S^+ = \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathfrak{J}}_S^- (\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^-}), \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathfrak{J}}_S^- (\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-}) \right\rangle_S^- \quad (\widetilde{\mathbf{H3}})$$

alors l'énergie discrète modifiée décroît :

$$\tilde{\mathcal{E}}_h^{n+1} \leq \tilde{\mathcal{E}}_h^n. \quad (2.110)$$

Remarque 2.15 L'utilisation des flux décentrés nécessite d'utiliser deux nouvelles hypothèses par rapport au cas semi-discret, $(\widetilde{\mathbf{H2}})$ et $(\widetilde{\mathbf{H3}})$. La première, $(\widetilde{\mathbf{H2}})$, est l'analogue de $(\mathbf{H2})$ pour l'opérateur de trace dans le plan tangent et intervient dans tous les termes de la partie décentrée. La deuxième, $(\widetilde{\mathbf{H3}})$, résulte du décalage du pas de temps sur \mathbf{E}_h dans l'équation (2.127). Soulignons que ces hypothèses sont compatibles avec celles exhibées précédemment, $(\mathbf{H1})$, $(\mathbf{H2})$ et $(\mathbf{H3})$. En particulier, à l'aide de la proposition 2.12, on a :

$$(\widetilde{\mathbf{H3}}) \Rightarrow (\mathbf{H3}). \quad (2.111)$$

Preuve de la proposition 2.14. Dans le cas d'un calcul en flux centrés, on commence par écrire (2.97a) avec $\phi_h = \mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} \left(\frac{\mathbf{E}_{hK}^{n+1} - \mathbf{E}_{hK}^n}{\Delta t} - \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot (\mathbf{E}_{hK}^{n+1} + \mathbf{E}_{hK}^n) dx + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{E}_{hK}^{n+1} + \mathbf{E}_{hK}^n) ds \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right), \left[\tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+1} \right) + \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\rangle_S^- - \right. \\ & \quad \left. \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right), \left[\tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right) + \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) \right] \right\rangle_S^+ \right] = 0. \quad (2.112) \end{aligned}$$

On écrit ensuite (2.97a) en prenant $\psi_h = \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} \left(\frac{\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \right) \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- - \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+1} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^+ \right] = 0. \quad (2.113) \end{aligned}$$

Enfin, on écrit (2.97a) au temps t^{n-1} :

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} \left(\underline{\underline{\mu}} \frac{\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \nabla \wedge \mathbf{E}_K^n \right) \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} ds \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} ds \right] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- - \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^+ \right] = 0. \quad (2.114)
\end{aligned}$$

En sommant ces trois équations, il vient :

$$A + B + C + D + E + F = 0 \quad (2.115)$$

avec :

$$A := \frac{1}{\Delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} \underline{\underline{\epsilon}} \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \cdot \mathbf{E}_{hK}^{n+1} dx + \int_K^{GL} \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx - \int_K^{GL} \underline{\underline{\epsilon}} \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{E}_{hK}^n dx - \int_K^{GL} \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} dx \right], \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned}
B := & - \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}_{hK}^{n+1} dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}_{hK}^{n+1} ds + \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^{n+1} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds, \quad (2.117)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C := & - \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}_{hK}^n dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}_{hK}^n ds + \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} ds - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} ds, \quad (2.118a)
\end{aligned}$$

$$D := -\frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+1} \right) \right\rangle_S^- + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+1} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^+ \right], \quad (2.119)$$

$$E := \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right) \right\rangle_S^+ \right], \quad (2.120)$$

et :

$$F := -\frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) \right\rangle_S^+ \right]. \quad (2.121)$$

Le terme A donne directement la variation d'énergie du schéma sur un pas de temps :

$$A = \frac{1}{\Delta t} (\mathcal{E}_h^{n+1} - \mathcal{E}_h^n). \quad (2.122)$$

Le terme B regroupe les termes de rigidités, de flux intérieurs et de flux de bord, au temps t^n . En utilisant l'intégration par partie discrète, on montre que :

$$B = 0. \quad (2.123)$$

Le terme C est l'analogie du terme B au temps t^{n-1} et se traite de la même façon :

$$C = 0. \quad (2.124)$$

Les termes D , E et F réunissent les termes de flux centrés hétérogènes et se simplifient en utilisant l'hypothèse **(H2)** :

$$D = E = F = 0, \quad (2.125)$$

d'où le résultat dans le cas des flux centrés.

En ce qui concerne l'énergie modifiée, en suivant la même procédure, on obtient :

$$A + B + C + D + E + F + G + H + I = 0, \quad (2.126)$$

avec A, B, C, D, E, F identiques à précédemment, et où les termes supplémentaires G , H et I correspondent à l'introduction des flux décentrés :

$$\begin{aligned} G := & \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right], \left[\tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right) + \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\rangle_S^- \right. \\ & \left. + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) \right], \left[\tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right) + \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\rangle_S^+ \right], \quad (2.127) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H := & \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right], \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- \right. \\ & \left. + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right], \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^+ \right], \quad (2.128) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} I := & \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right], \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- \right. \\ & \left. + \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right], \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^+ \right]. \quad (2.129) \end{aligned}$$

Commençons donc par traiter l'expression G . En utilisant **(H2)** et **(H3)**, ce terme s'écrit :

$$G = \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 + \left\langle n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right], n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+1} \right) \right] \right\rangle_S^- \right]. \quad (2.130)$$

Alors, en utilisant la minoration issue du lemme 2.7, il vient :

$$G \geq \frac{1}{4} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 - \left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+1} \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \right]. \quad (2.131)$$

De même, on montre que :

$$H \geq \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \right\|_S^- \right)^2, \quad (2.132a)$$

et que :

$$I = \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left\langle n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^+}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right], n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \right\rangle_S^-. \quad (2.133a)$$

On a alors la minoration :

$$H + I \geq \frac{1}{4} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 - \left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^+}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \right]. \quad (2.134)$$

On obtient ainsi :

$$\mathcal{E}_h^{n+1} - \mathcal{E}_h^n = -G - H - I \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\Delta t}{4} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+1} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+1} \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(E_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left[\left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^+}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^-}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\left\| n_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(H_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \right]. \quad (2.136) \end{aligned}$$

soit exactement $\tilde{\mathcal{E}}_h^{n+1} - \tilde{\mathcal{E}}_h^n \leq 0$, d'après la définition de l'énergie modifiée (2.108). \blacksquare

2.3.2 Détermination de la condition CFL

Dans ce qui suit, on suppose que $\underline{\epsilon}_K = \epsilon_K I_3$ et que $\underline{\mu}_K = \mu_K I_3$, avec $\epsilon_K, \mu_K \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que ces paramètres sont identiques pour les volumes situés du même côté des interfaces non-conformes :

$$\forall S \in \mathcal{S}_h, \forall K, K' \in \mathcal{K}_S^\pm, \begin{cases} \epsilon_K = \epsilon_{K'} = \epsilon_S^\pm \\ \mu_K = \mu_{K'} = \mu_S^\pm \end{cases} \quad (2.137)$$

Afin de poursuivre l'étude de stabilité du schéma condensé, il est nécessaire d'introduire plusieurs notations. Pour $K \in \mathcal{T}_h$ et $S \in \mathcal{S}_h$, on pose :

- c_K , la célérité de la lumière dans la cellule K ,
- Λ_K , homogène à une longueur :

$$\Lambda_K = \min_{\substack{\hat{\mathbf{x}}_{l,m,n} \in \hat{K}, \\ 1 \leq l,m,n \leq p_K+1}} |J_K| \lambda_{\min} (DT_K^{-1} DT_K^{*-1}), \quad (2.138)$$

avec $\{\hat{\mathbf{x}}_{l,m,n}, 1 \leq l,m,n \leq p_K+1\}$ les points de Gauss-Lobatto 3D dans l'élément de référence,

- $\mathcal{R}, \mathcal{B}, \mathcal{F}_{\Pi_S}^\pm$ et \mathcal{F}_S^\pm les matrices correspondant respectivement aux contributions de rigidité, de bord et de flux centrés sur S :

$$\mathcal{R} = \hat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}} \hat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}}; \quad \mathcal{B} = \hat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}}; \quad \mathcal{F}_{\Pi_S}^\pm = \hat{\mathcal{M}}_{\mp}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_{\Pi_S}^\pm \hat{\mathcal{M}}_{\mp}^{-\frac{1}{2}}; \quad \mathcal{F}_S^\pm = \hat{\mathcal{M}}_{\mp}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_S^\pm \hat{\mathcal{M}}_{\mp}^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.139)$$

où $\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{R}}$ et $\hat{\mathcal{B}}$ les matrices de trois formes quadratiques calculées sur les fonctions de base de l'élément de référence \hat{K} , de terme général, dans une numérotation globale (I, J) des degrés de liberté :

$$\left[\hat{\mathcal{M}} \right]_{IJ} = \int_{\hat{K}}^{\text{GL}} \hat{\phi}_I \cdot \hat{\phi}_J d\hat{\mathbf{x}}; \quad \left[\hat{\mathcal{R}} \right]_{IJ} = \int_{\hat{K}}^{\text{GL}} \hat{\nabla} \wedge \hat{\phi}_I \cdot \hat{\nabla} \wedge \hat{\phi}_J d\hat{\mathbf{x}}; \quad \left[\hat{\mathcal{B}} \right]_{IJ} = \sum_{\hat{f} \in \mathbb{F}_{\hat{K}}}^{\text{GL}} \hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\phi}_I \cdot \hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\phi}_J d\hat{s}, \quad (2.140)$$

et $\hat{\mathcal{B}}_{\Pi_S}^\pm, \hat{\mathcal{B}}_S^\pm$, des matrices assemblées par blocs sur S à partir des éléments de \mathcal{K}_S^\pm :

$$\left[\hat{\mathcal{B}}_{\Pi_S}^\pm \right]_{IJ} = \sum_{\tilde{f} \in \mathbb{F}_S^\pm} \left\langle \frac{1}{\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^\pm} \tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge \tilde{\Pi}_S^\pm \left(D\hat{T}_{S,\mp}^* \hat{\phi}_I^\mp \right) \Big|_{\tilde{f}}, \tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge \tilde{\Pi}_S^\pm \left(D\hat{T}_{S,\mp}^* \hat{\phi}_J^\mp \right) \Big|_{\tilde{f}} \right\rangle^\pm, \quad (2.141)$$

$$\left[\hat{\mathcal{B}}_S^\pm \right]_{IJ} = \sum_{\tilde{f} \in \mathbb{F}_S^\pm} \left\langle \frac{1}{\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^\pm} \tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge D\hat{T}_{S,\mp}^* \hat{\phi}_I^\mp \Big|_{\tilde{f}}, \tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge D\hat{T}_{S,\mp}^* \hat{\phi}_J^\mp \Big|_{\tilde{f}} \right\rangle^\pm, \quad (2.142)$$

avec $K(\tilde{f})$ l'unique élément de \mathcal{K}_S^\pm tel que $\tilde{f} \cap \partial K \neq \emptyset$ et $\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^\pm$ le jacobien surfacique de l'application $\tilde{T}_{S,K}$ sur $f = \tilde{T}_S(\tilde{f}) \in \mathbb{F}_S^\pm$:

$$\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^\pm = \left(J_{D\tilde{T}_{S,K(\tilde{f})}} \left\| D\tilde{T}_{S,K(\tilde{f})}^{*, -1} \tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \right\| \right) \Big|_f, \quad (2.143)$$

et $\hat{\mathcal{M}}_\pm$ et $D\hat{T}_{S,\pm}^*$ des matrices également définies par blocs sur S à partir des éléments de \mathcal{K}_S^\pm :

$$\hat{\mathcal{M}}_{\pm} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{M}}_{K_1^{\pm}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{\mathcal{M}}_{K_N^{\pm}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D\hat{\mathcal{T}}_{S,\pm}^* = \begin{pmatrix} D\hat{\mathcal{T}}_{S,K_1^{\pm}}^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D\hat{\mathcal{T}}_{S,K_N^{\pm}}^* \end{pmatrix}. \quad (2.144)$$

- $\check{\Pi}_S^{\pm}$, l'équivalent de l'opérateur de trace Π_S^{\pm} sur la surface d'échange unitaire \check{S} :

$$\check{\Pi}_S^{\pm} = D\check{\mathcal{T}}_{S,\pm}^* \Pi_S^{\pm} D\check{\mathcal{T}}_{S,\mp}^{*,-1}. \quad (2.145)$$

On démontre alors la stabilité du schéma GDDT condensé sous-condition CFL :

Théorème 2.16 *Si les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées et si, pour tout élément $K \in \mathcal{T}_h$, on a :*

$$\Delta t < \frac{2\Lambda_K/c_K}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{R})} + \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathcal{B}) + \frac{1}{2}\max_{S \in \mathcal{S}_h} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_S^{\pm}}{\mu_S^{\mp}}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S^{\mp}}), \sqrt{\frac{\epsilon_S^{\mp}}{\epsilon_S^{\pm}}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^{\mp}) \right\}}, \quad (2.146)$$

alors le schéma GDDT condensé est stable en flux centrés.

Dans le cas des flux décentrés, si de plus les hypothèses supplémentaires (H2) et (H3) sont satisfaites, cette condition devient :

$$\Delta t < \frac{2\Lambda_K/c_K}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{R})} + \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathcal{B}) + \frac{1}{2}\max_{S \in \mathcal{S}_h} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_S^{\pm}}{\mu_S^{\mp}}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S^{\mp}}), \sqrt{\frac{\epsilon_S^{\mp}}{\epsilon_S^{\pm}}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^{\mp}) \right\} + \max_{S \in \mathcal{S}_h} (\beta_S \gamma_S \mathcal{F}_{\Pi_S^{\mp}}^-, \beta_S \gamma_S \mathcal{F}_S^+)}, \quad (2.147)$$

où l'on a posé :

$$\gamma_S = \max_{\mathbb{F}_S^-} \max_{\check{f}} \left(\left\| J_{D\check{\mathcal{T}}_{S,K(\check{f})}} \right\| \left\| D\check{\mathcal{T}}_{S,K(\check{f})}^{*,-1} \check{\mathbf{n}}_{\check{K}(\check{f})} \right\| \lambda_{\max} \left(D\check{\mathcal{T}}_{S,K(\check{f})}^* D\check{\mathcal{T}}_{S,K(\check{f})} \right) \right). \quad (2.148)$$

Remarque 2.17 *Dans le cas centré, nous obtenons une constante CFL similaire à celle établie dans [80]. Une différence importante est cependant à noter : l'expression (2.146) fait intervenir au dénominateur un maximum pris sur l'ensemble des surfaces d'échanges du maillage, alors que les travaux menés dans [80] ne font intervenir qu'un maximum local sur les facettes de la maille courante. Nous pouvons donc présager que l'expression établie ici est sous-optimale. Cela résulte de la séparation dans l'écriture du schéma des termes homogènes, factorisés sous la somme en K , et des termes hétérogènes, sous la somme en S .*

Par ailleurs, dans le cas décentré, on voit qu'un terme positif vient s'ajouter au dénominateur de (2.146). La contrainte CFL devient donc plus restrictive que dans le cas centré, ce qui correspond aux observations numériques.

La démonstration de ce théorème repose sur les deux résultats préliminaires suivants, dont les démonstrations sont reportées dans l'Annexe B :

Lemme 2.18 *On peut écrire \mathcal{E}_h^n comme suit :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_h^n = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K^{GL} \left(\tilde{\mathbf{E}}_{hK}^n \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{hK}^n + \tilde{\mathbf{H}}_K^{n+\frac{1}{2}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \right) dx \right] \\
& + \frac{\Delta t}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_K \left[\int_K^{GL} \nabla \wedge \tilde{\mathbf{E}}_{hK}^n \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx + \int_K^{GL} \tilde{\mathbf{E}}_{hK}^n \cdot \nabla \wedge \tilde{\mathbf{H}}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx - \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \tilde{\mathbf{E}}_{hK}^n \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds \right] \\
& + \frac{\Delta t}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^+ \mu_S^-}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\tilde{\mathbf{H}}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^- \mu_S^+}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\tilde{\mathbf{H}}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^+ \right], \quad (2.149)
\end{aligned}$$

où l'on a noté $\tilde{\mathbf{E}}_{hK}^n = \sqrt{\epsilon_K} \mathbf{E}_{hK}^n$ et $\tilde{\mathbf{H}}_K^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\mu_K} \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}}$.

Grâce à ce résultat, nous disposons d'une écriture de l'énergie où les termes en \mathbf{H} sont pris au même pas de temps $t^{n+\frac{1}{2}}$. Il est donc à présent possible de considérer les variables \mathbf{E}^n et $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$ comme des variables muettes et d'étudier la forme bilinéaire $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \mapsto \mathcal{E}_h(\mathbf{E}, \mathbf{H})$.

Lemme 2.19 *Nous avons l'estimation :*

$$\mathcal{E}_h \geq \hat{\mathcal{E}}_h, \quad (2.150)$$

où :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_h = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\Lambda_K \int_{\hat{K}}^{GL} (\hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{E}}_K + \hat{\mathbf{H}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K) d\hat{x} \right. \\
& + \frac{c_K \Delta t}{2} \operatorname{sgn}(J_K) \left(\int_{\hat{K}}^{GL} (\hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K + \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{H}}_K) d\hat{x} - \sum_{\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}_K^b} \int_{\hat{f}}^{GL} \hat{\mathbf{n}}_K \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K ds \right) \left. \right] \\
& + \frac{\Delta t}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^+ \mu_S^-}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^- \mu_S^+}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^-} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+ \right], \quad (2.151)
\end{aligned}$$

et, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\Lambda_K = \min_{\substack{\hat{\mathbf{x}}_{l,m,n}^{GL} \in \hat{K}, \\ 1 \leq l,m,n \leq p_K+1}} |J_K| \lambda_{\min} (DT_K^{-1} DT_K^{*-1}), \quad (2.152)$$

$\lambda_{\min}(M)$ désignant la plus petite valeur propre de la matrice M .

Nous revenons à présent sur la démonstration du théorème de stabilité sous condition CFL.

Preuve du théorème 2.16. Par la proposition 2.14, nous avons déjà que $\mathcal{E}_h^{n+1} = \mathcal{E}_h^n$. L'objectif est maintenant de déterminer sous quelle condition \mathcal{E}_h^n est une norme en $(\mathbf{E}_h^n, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}})$. Pour ce faire, la démarche est de montrer que $\hat{\mathcal{E}}_h \geq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\left\| \hat{\mathbf{E}}_K \right\|_{h,\hat{K}}^2 + \left\| \hat{\mathbf{H}}_K \right\|_{h,\hat{K}}^2 \right) (\Lambda_K - \alpha_K \Delta t)$, de sorte que la condition $\Delta t \leq \frac{\Lambda_K}{\alpha_K}$ pour tout K soit suffisante à assurer la positivité de $\hat{\mathcal{E}}_h$. Du fait du lemme 2.19, on aura alors la définie positivité de \mathcal{E}_h , seule propriété manquante pour en faire une norme.

On commence par se placer en flux centrés. On procède aux majorations suivantes dans les termes de $\hat{\mathcal{E}}_h$. Termes de rigidité :

$$\int_{\hat{K}}^{GL} \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K dx \leq \|\hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,\hat{K}} \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,\hat{K}}. \quad (2.153)$$

En notant $\hat{\underline{\mathbf{E}}}_K \in \mathbb{R}^{N_{dd}^K}$ le vecteur des degrés de liberté du champ $\hat{\mathbf{E}}$ sur la cellule K , on a :

$$\|\hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 = \hat{\underline{\mathbf{E}}}_K^T \hat{\mathcal{R}} \hat{\underline{\mathbf{E}}}_K \quad (2.154a)$$

$$= \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}} \hat{\underline{\mathbf{E}}}_K \right)^T \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \hat{\mathcal{R}} \sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \right) \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}} \hat{\underline{\mathbf{E}}}_K \right) \quad (2.154b)$$

$$\leq \lambda_{max} \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \hat{\mathcal{R}} \sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \right) \left\| \sqrt{\hat{\mathcal{M}}} \hat{\underline{\mathbf{E}}}_K \right\|_2^2 \quad (2.154c)$$

$$\leq \lambda_{max} \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \hat{\mathcal{R}} \sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \right) \|\hat{\underline{\mathbf{E}}}_K\|_{h,\hat{K}}^2. \quad (2.154d)$$

D'où :

$$\int_{\hat{K}}^{GL} \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K dx \leq \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_{max} \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \hat{\mathcal{R}} \sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \right)} \left(\|\hat{\underline{\mathbf{E}}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 + \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 \right). \quad (2.155)$$

De même :

$$\int_{\hat{K}}^{GL} \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{H}}_K dx \leq \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_{max} \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \hat{\mathcal{R}} \sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \right)} \left(\|\hat{\underline{\mathbf{E}}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 + \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 \right). \quad (2.156)$$

Pour le terme de bord, en utilisant l'identité $\mathbf{n} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{u}$, il vient :

$$\int_{\hat{f}}^{GL} \hat{\mathbf{n}}_K \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K d\hat{\sigma} \leq \|\hat{\mathbf{n}}_K \wedge \hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,\hat{f}} \|\hat{\mathbf{n}}_K \wedge \hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,\hat{f}} \quad (2.157a)$$

$$\leq \frac{1}{2} \lambda_{max} \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \hat{\mathcal{B}} \sqrt{\hat{\mathcal{M}}}^{-1} \right) \left(\|\hat{\underline{\mathbf{E}}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 + \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 \right) \quad (2.157b)$$

Traitons à présent les termes de flux. On commence par majorer :

$$\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- := \sum_{\tilde{f} \subset \tilde{\mathbb{F}}_S^-} \left\langle \mathbf{n}_{\tilde{f}} \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^+} \right) |_{\tilde{f}}, \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^-} \right) |_{\tilde{f}} \right\rangle_{\tilde{f}}^-, \quad (2.158)$$

le terme symétrique en + se traitant de manière identique en inversant les signes + et -. Alors, en utilisant les identités de passage sur la configuration non-conforme unitaire, on obtient, pour tout $\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^-$:

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{n}_{\tilde{f}} \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^+} \right) |_{\tilde{f}}, \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^-} \right) |_{\tilde{f}} \right\rangle_{\tilde{f}}^- \\ &= \left\langle \mathbf{n}_{K(\tilde{f})} \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^+} \right) |_{\tilde{f}}, \mathbf{H}_{K(\tilde{f})} |_{\tilde{f}} \right\rangle_{\tilde{f}}^- \end{aligned} \quad (2.159)$$

$$= \left\langle \frac{1}{\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^-} \check{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge \check{\Pi}_S^- \left(\check{\mathbf{E}}_{\tilde{\mathcal{K}}_S^+} \right) |_{\tilde{f}}, \check{\mathbf{H}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} |_{\tilde{f}} \right\rangle_{\tilde{f}}^- \quad (2.160)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{|\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^-|}} \check{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge \check{\Pi}_S^- \left(\check{\mathbf{E}}_{\tilde{\mathcal{K}}_S^+} \right) |_{\tilde{f}} \right\|_{\tilde{f}}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{|\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^-|}} \check{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge \check{\mathbf{H}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} |_{\tilde{f}} \right\|_{\tilde{f}}^2 \right), \quad (2.161)$$

où l'on a noté $f = \tilde{T}_S(\tilde{f})$ et K l'unique élément de \mathcal{K}_S^- tel que $f \in \mathbb{F}_K^i$. En sommant sur les \tilde{f} , il vient d'une part :

$$\sum_{\tilde{f} \in \tilde{\Gamma}_S^-} \left\| \frac{1}{\sqrt{|\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^-|}} \check{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge \check{\Pi}_S^- \left(\check{\mathbf{E}}_{\tilde{\mathcal{K}}_S^+} \right) |_{\tilde{f}} \right\|_{\tilde{f}}^2 \leq \lambda_{\max} \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}_+^{-1}} \hat{\mathcal{B}}_{\Pi_S^-} \sqrt{\hat{\mathcal{M}}_+^{-1}} \right) \sum_{K \in \mathcal{K}_S^+} \|\hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,K}^2, \quad (2.162)$$

et d'autre part :

$$\sum_{f \in \Gamma_S^-} \left\| \frac{1}{\sqrt{|\tau_{\tilde{K}(\tilde{f})}^-|}} \check{\mathbf{n}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} \wedge \check{\mathbf{H}}_{\tilde{K}(\tilde{f})} |_{\tilde{f}} \right\|_{\tilde{f}}^2 \leq \lambda_{\max} \left(\sqrt{\hat{\mathcal{M}}_-^{-1}} \hat{\mathcal{B}}_S^- \sqrt{\hat{\mathcal{M}}_-^{-1}} \right) \sum_{K \in \mathcal{K}_S^-} \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,K}^2. \quad (2.163)$$

On traite de manière analogue la deuxième partie du terme de flux $\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^-} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+$ (en inversant les signes + et -). On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^+ \mu_S^-}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^- - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^- \mu_S^+}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\mathbf{E}_{\mathcal{K}_S^-} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\mathbf{H}_{\mathcal{K}_S^+} \right) \right\rangle_S^+ \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^+ \mu_S^-}} \left(\lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S^-}) \sum_{K \in \mathcal{K}_S^+} \|\hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,K}^2 + \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^-) \sum_{K \in \mathcal{K}_S^-} \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,K}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^- \mu_S^+}} \left(\lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S^+}) \sum_{K \in \mathcal{K}_S^-} \|\hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,K}^2 + \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^+) \sum_{K \in \mathcal{K}_S^+} \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,K}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{2} \max_{S \in \mathcal{S}_h} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_S^+}{\mu_S^-}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S^-}), \sqrt{\frac{\mu_S^-}{\mu_S^+}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S^+}) \right\} \sum_{K \in \mathcal{T}_S} c_K \|\hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,K}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \max_{S \in \mathcal{S}_h} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_S^-}{\epsilon_S^+}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^-), \sqrt{\frac{\epsilon_S^+}{\epsilon_S^-}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^+) \right\} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_K \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,K}^2 \end{aligned} \quad (2.165)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{2} \max_{S \in \mathcal{S}_h} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_S^+}{\mu_S^-}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S^-}), \sqrt{\frac{\mu_S^-}{\mu_S^+}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S^+}), \sqrt{\frac{\epsilon_S^-}{\epsilon_S^+}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^-), \sqrt{\frac{\epsilon_S^+}{\epsilon_S^-}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^+) \right\} \\ & \quad \times \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_K \left(\|\hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,K}^2 + \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,K}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.166)$$

En procédant à une majoration du type $a + b + c \geq a - |b| - |c|$ dans l'expression de $\hat{\mathcal{E}}_h$, il vient :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_h \geq & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|\hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 + \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 \right) \left[\Lambda_K - \frac{c_K \Delta t}{2} \left(\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{R})} + \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathcal{B}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \max_{S \in \mathcal{S}_h} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_S^+}{\mu_S^-}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^-), \sqrt{\frac{\mu_S^-}{\mu_S^+}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^+), \sqrt{\frac{\epsilon_S^-}{\epsilon_S^+}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^-), \sqrt{\frac{\epsilon_S^+}{\epsilon_S^-}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^+) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Ainsi, pour assurer la positivité de $\hat{\mathcal{E}}_h$, il suffit que, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\begin{aligned} & \Lambda_K - \frac{c_K \Delta t}{2} \left(\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{R})} + \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathcal{B}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \max_{S \in \mathcal{S}_h} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_S^+}{\mu_S^-}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^-), \sqrt{\frac{\mu_S^-}{\mu_S^+}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^+), \sqrt{\frac{\epsilon_S^-}{\epsilon_S^+}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^-), \sqrt{\frac{\epsilon_S^+}{\epsilon_S^-}} \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^+) \right\} \right) > 0, \end{aligned} \quad (2.168)$$

d'où le résultat flux centrés.

Dans le cas des flux décentrés, on commence par remarquer que :

$$\tilde{\mathcal{E}}_h^n \geq \mathcal{E}_h^n - \frac{\Delta t}{4} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\|_S^- \right)^2, \quad (2.169)$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 &= \sum_{\tilde{f} \in \mathbb{F}_S^-} \left[\left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) \right\|_{\tilde{f}}^- \right)^2 \right. \\ & \left. - 2 \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right), \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right\rangle_{\tilde{f}} + \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right\|_{\tilde{f}}^- \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.170)$$

En majorant chacun des termes du membre de droite de cette expression, on obtient :

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_h} \beta_S \left(\left\| \mathbf{n}_S \wedge \left[\Pi_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right) - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{E}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right) \right] \right\|_S^- \right)^2 \quad (2.171a)$$

$$\leq \sum_{S \in \mathcal{S}_h} 2\beta_S \gamma_S \left(\lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^-) \sum_{K \in \mathcal{K}_S^+} \|\hat{\mathbf{E}}_K^n\|_{h,\hat{K}}^2 + \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^-) \sum_{K \in \mathcal{K}_S^-} \|\hat{\mathbf{E}}_K^n\|_{h,\hat{K}}^2 \right) \quad (2.171b)$$

$$\leq 2 \max_{S \in \mathcal{S}_h} (\beta_S \gamma_S \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^-), \beta_S \gamma_S \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^-)) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\hat{\mathbf{E}}_K^n\|_{h,\hat{K}}^2 \quad (2.171c)$$

$$\leq 2 \max_{S \in \mathcal{S}_h} (\beta_S \gamma_S \lambda_{\max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^-), \beta_S \gamma_S \lambda_{\max}(\mathcal{F}_S^-)) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_K \left(\|\hat{\mathbf{E}}_K^n\|_{h,\hat{K}}^2 + \|\hat{\mathbf{H}}_K^{n-\frac{1}{2}}\|_{h,\hat{K}}^2 \right). \quad (2.171d)$$

On obtient alors l'équivalent de (2.167) pour les flux décentrés :

$$\tilde{\mathcal{E}}_h \geq \mathcal{E}_h - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{c_K \Delta t}{2} \max_{S \in \mathcal{S}_h} \{ \beta_S \gamma_S \lambda_{max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^-), \beta_S \gamma_S \lambda_{max}(\mathcal{F}_S^-) \} \left(\|\hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 + \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 \right) \quad (2.172a)$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|\hat{\mathbf{E}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 + \|\hat{\mathbf{H}}_K\|_{h,\hat{K}}^2 \right) \left[\Lambda_K - \frac{c_K \Delta t}{2} \left(\sqrt{\lambda_{max}(\mathcal{R})} + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{2} \lambda_{max}(\mathcal{B}) + \frac{1}{2} \max_{S \in \mathcal{S}_h} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_S^+}{\mu_S}} \lambda_{max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^-), \sqrt{\frac{\mu_S^-}{\mu_S^+}} \lambda_{max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^+), \sqrt{\frac{\epsilon_S^-}{\epsilon_S^+}} \lambda_{max}(\mathcal{F}_S^-), \sqrt{\frac{\epsilon_S^+}{\epsilon_S^-}} \lambda_{max}(\mathcal{F}_S^+) \right\} \right. \right. \\ &\left. \left. + \max_{S \in \mathcal{S}_h} \{ \beta_S \gamma_S \lambda_{max}(\mathcal{F}_{\Pi_S}^-), \beta_S \gamma_S \lambda_{max}(\mathcal{F}_S^-) \} \right) \right]. \quad (2.172b) \end{aligned}$$

D'où le résultat en flux décentrés. ■

Nous nous intéressons dans ce qui suit à la consistance du schéma GDDT condensé.

2.4 Étude de consistance

Cette section traite de la convergence du schéma GDDT condensé. L'objectif principal est de déterminer des conditions sur les flux condensés définis dans la section 2.2 permettant d'assurer la consistance de l'approximation spatiale. Les hypothèses de stabilité établies dans la section précédente sont en effet incomplètes pour assurer la convergence du schéma. Par exemple, le candidat $\Pi_{\mathcal{S}}^{\pm} = \mathbf{0}$ satisfait **(H1)**, **(H2)**, **(H2)** et **(H3)**, mais ce choix n'est évidemment pas admissible du point de vue de la consistance car il annule les contributions de flux du schéma. Il est donc nécessaire de déterminer des conditions supplémentaires sur les opérateurs de trace et sur les produits scalaires condensés.

Nous commençons par discuter du sens à donner à la notion de consistance pour une approximation hp non-conforme. Puis, en vertu des résultats présents dans la littérature, nous choisissons de nous concentrer sur l'erreur commise au niveau des surfaces d'échange hp non-conformes afin de conclure sur la consistance globale du schéma. Nous cherchons alors à estimer, à l'aide de plusieurs expériences numériques, l'ordre de consistance en h des flux non-conformes, en un sens que nous préciserons. Ce faisant, nous montrerons la sur-précision du calcul classique de ces termes, en mettant en évidence un phénomène de saturation de convergence. Enfin, nous exhibons des conditions sur les opérateurs de reconstruction et les produits scalaires associés permettant d'assurer théoriquement la consistance des flux condensés.

2.4.1 Notion de consistance pour une approche hp

Commençons par rappeler brièvement les principales étapes de l'étude de consistance d'une méthode GD (voir par exemple [31][81][45]), ainsi que les principaux résultats obtenus dans le cas particulier d'une approximation p conforme ($\forall K \in \mathcal{T}_h, p_K = p$).

L'erreur de consistance est définie par :

$$\|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_* := \sqrt{\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{0,\underline{\epsilon}}^2 + \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_h\|_{0,\underline{\mu}}^2}, \quad (2.173)$$

avec (\mathbf{E}, \mathbf{H}) et $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)$ les solutions respectives du problème d'évolution (1.11) et d'une formulation GD semi-discrétisée telle que (2.68). Sous réserve de régularité suffisante, cette quantité est estimée grâce à l'introduction dans (2.173) de la projection de la solution exacte sur l'espace d'approximation, notée $(\pi_h \mathbf{E}, \pi_h \mathbf{H})$, menant à l'inégalité suivante :

$$\|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_*^2 \leq \sqrt{2} \left(\|(\Delta_{\mathbf{E}}^P, \Delta_{\mathbf{H}}^P)\|_* + \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_* \right), \quad (2.174)$$

où :

- $\Delta_{\mathbf{u}}^P := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ est l'erreur de projection (ou de troncature). Cette quantité mesure l'erreur commise dans le passage de l'espace de dimension infinie, dans lequel se situe la solution exacte, à l'espace de dimension finie, dans lequel on recherche la solution approchée. Elle ne dépend ainsi que du choix de l'espace d'approximation et des opérateurs de projection sur cet espace,
- $\Delta_{\mathbf{u}}^I := \mathbf{u}_h - \pi_h \mathbf{u}_h$ est l'erreur d'interpolation, liée aux choix de discrétisation (fonctions de base, formules de quadrature etc.) et quantifiant l'erreur commise par le schéma numérique.

L'estimation de l'erreur de consistance est alors obtenue en majorant successivement l'erreur de projection et l'erreur d'interpolation. On dispose ainsi du résultat général suivant, démontré dans [81] pour une formulation semi-discrète similaire à celle utilisée dans notre étude :

Théorème 2.20 *Si pour tout $(s, s') \in \mathbb{R}_+^2$, $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (\mathbf{H}_m^{s+1})^2$ et $(\partial_t \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H}) \in (\mathbf{H}_m^{s'+1})^2$, alors on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_*(T) &\leq \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_*(0) + C_P Th^{m_P} \max_{t \in (0, T)} \{ \|\mathbf{E}\|_{s+1}(t), \|\mathbf{H}\|_{s+1}(t) \} \\ &\quad + C_I Th^{m_I} \max_{t \in (0, T)} \{ \|\mathbf{E}\|_{s+1}(t), \|\mathbf{H}\|_{s+1}(t), \|\partial_t \mathbf{E}\|_{s+1}(t), \|\partial_t \mathbf{H}\|_{s+1}(t) \} \end{aligned} \tag{2.175}$$

où $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(h_K)$, C_P et C_I sont des constantes positives, $m_P = \min\{s + \frac{1}{2}, p - \frac{1}{2}\}$ et $m_I = \min\{s + \frac{1}{2}, s' - \frac{1}{2}, p - \frac{1}{2}\}$.

Ainsi, la vitesse de convergence du schéma GD est *a priori* d'au moins $p - \frac{1}{2}$, pour des fonctions de base Q^p en flux décentrés. Ce résultat, établi pour un calcul exact des termes du schéma, s'étend naturellement au cas d'un calcul condensé des termes de masse, rigidité et de flux conformes, pourvu que la solution exacte soit suffisamment régulière [31]. De plus, comme démontré pour un schéma Éléments Finis dans [73] et observé dans les applications numériques du chapitre précédent, l'utilisation de maillages cartésiens permet d'améliorer légèrement la vitesse de convergence du schéma, avec un ordre allant de p à $p+1$.

Dans le cas d'un maillage hp non-conforme, si le théorème 2.20 permet toujours d'estimer l'erreur commise par le schéma, la notion asymptotique d'ordre de consistance pose en revanche davantage de difficultés. En effet, celle-ci est généralement associée à un processus de raffinement, en h ou en p . Or, la notion de raffinement d'un maillage non-conforme apparaît comme mal posée. Par exemple, que signifie le fait que le maillage de la figure 2.6a a été raffiné par 2? En utilisant, au sens strict, la définition de finesse de maillage suggérée par le théorème 2.20, cela signifie que le plus grand diamètre des cellules, h , a été divisé par deux. Cependant, il n'y a pas unicité d'un tel maillage, comme l'illustrent les figures 2.6b-c. De plus, on voit que le maillage (b) fait intervenir des configurations nouvelles par rapport à la configuration initiale, tel que l'accolement d'une maille contre deux (encadré en rouge) et fait donc jouer des nouveaux termes au sein du schéma. De ce fait, les constantes intervenant dans la majoration de l'erreur de consistance peuvent être modifiées sur cette nouvelle configuration, et il devient alors erroné d'utiliser des raisonnements qualitatifs tels que : "en utilisant un maillage x fois plus fin, l'erreur sera divisée par y ". En revanche, le maillage (c) ayant été raffiné de manière homogène, il fait intervenir exactement les mêmes configurations que le maillage (a) et il y a donc du sens à comparer l'erreur commise dans ces deux cas.

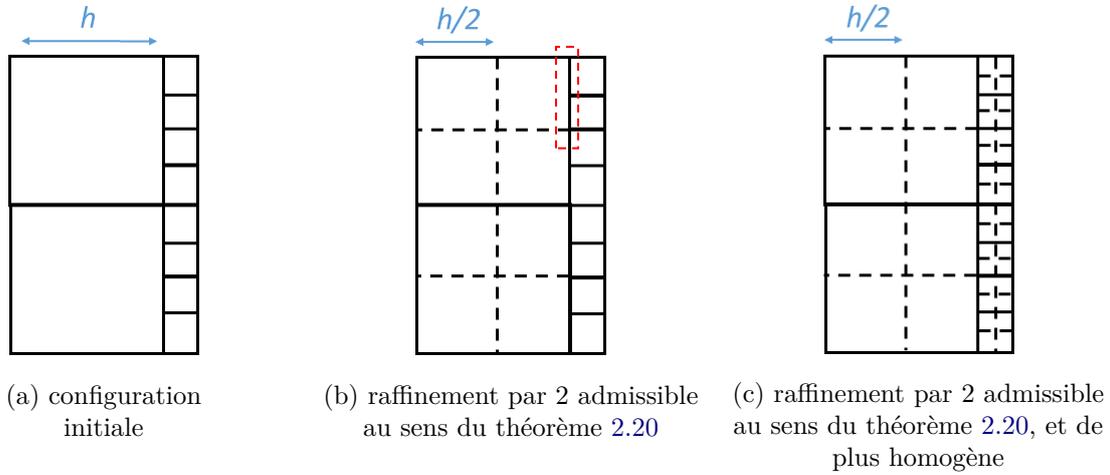


FIGURE 2.6 – Raffinements d'un maillage non-conforme.

On voit ainsi que l'obtention d'une notion d'ordre de consistance en h suppose la conservation des motifs de non-conformité du maillage hp initial lors du processus de raffinement. Nous allons donc nous intéresser dans la suite à l'étude de convergence du schéma sous cette contrainte d'homogénéité, par exemple pour la série de maillages décrits sur la figure 2.7.

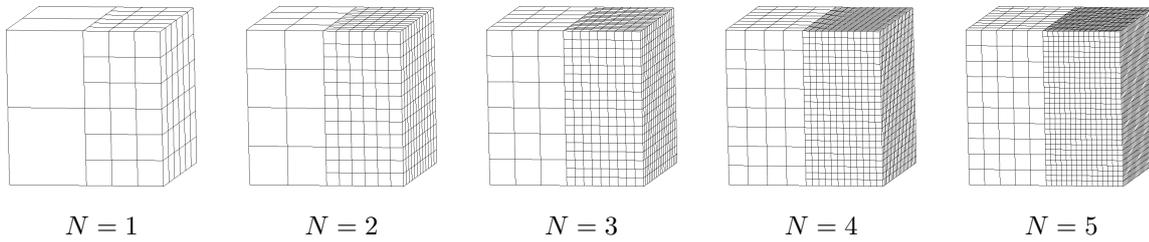


FIGURE 2.7 – Raffinements homogènes de facteur N d'une configuration initiale, assurant la conservation du motif de non-conformité.

Schématiquement, les configurations de ce type sont composées de différentes parties hp conformes, reliées entre-elles par des surfaces d'échange hp non-conformes, selon le modèle de la figure 2.8 ci-dessous :

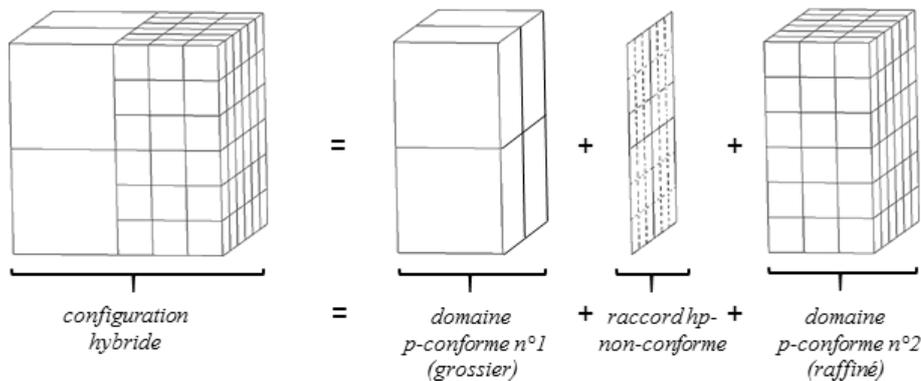


FIGURE 2.8 – Décomposition du calcul des termes du schéma sur un exemple de maillage hp non-conforme.

Sur cet exemple, l'erreur de consistance du schéma se décompose donc *a priori* en la somme des erreurs de consistance sur chaque domaine uniforme en p et des termes assurant leur raccord, c'est-à-dire les hp flux non-conformes. Dans l'exemple précédent (voir plus précisément la figure 2.8), on peut donc décomposer l'erreur de consistance du schéma ainsi :

$$\text{Consist.}(globale) \leq \text{Consist.}(dom. n^{\circ}1) + \text{Consist.}(dom. n^{\circ}2) + \text{Consist.}(raccord non-conf.). \quad (2.176)$$

Ainsi, connaissant par le théorème 2.20 l'erreur de consistance du schéma sur chaque partie homogène, il suffit *a priori* de connaître l'erreur de consistance des flux non-conformes pour obtenir celle du schéma global. Nous allons donc nous concentrer sur ce point précis dans les paragraphes suivants.

2.4.2 Étude numérique préliminaire 2D

Nous venons de voir que l'étude de consistance d'un schéma GDDT sur un maillage hp hybride peut être ramenée à l'étude de consistance des flux hp non-conformes reliant ses différentes parties homogènes. Avant d'analyser l'affectation de la convergence du schéma GD par la méthode de condensation proposée, il paraît donc essentiel de comprendre et de maîtriser la consistance des termes de flux hp non-conformes classiques. Pour cela, nous allons effectuer plusieurs expériences numériques dans le cadre simplifié de maillages 2D, sur lesquels les termes de flux correspondent à des intégrales linéiques.

L'objectif de cette étude est de mettre en évidence l'impact des choix de discrétisation, en particulier de l'espace d'approximation et du calcul discret des intégrales, sur la consistance en h des flux non-conformes calculés via l'approche classique, c'est-à-dire à partir de formules de quadratures locales définies sur chaque facette de l'accolement.

2.4.2.1 Mise en place de l'étude

Étant donnée une configuration du type de la figure 2.8, nous cherchons à obtenir un ordre de consistance en h sur le terme de flux hp non-conforme classique joignant les deux parties homogènes du maillage, c'est-à-dire à établir une inégalité de la forme :

$$\epsilon_{flux} = \left| \int_S \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{v}_e ds - \int_S^Q \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h ds \right| \leq Ch^\alpha. \quad (2.177)$$

où ϵ_{flux} représente l'erreur du flux numérique sur la surface d'échange S , \mathbf{u}_e la solution exacte du problème, \mathbf{v}_e une fonction test, \mathbf{u}_h et \mathbf{v}_h leurs approximations respectives, Q une formule de quadrature composite sur S de type interpolation, $C > 0$ pouvant dépendre du motif de non-conformité considéré mais indépendante de h , et α une constante. Dans ce cas, nous dirons que le flux non-conforme numérique est consistant à l'ordre α .

Pour ce faire, en cohérence avec le paragraphe précédent, nous allons nous donner une configuration non-conforme initiale, et, pour une série de maillages obtenus par h -raffinement homogènes de celui-ci, calculer numériquement ϵ_{flux} . Afin de simplifier le problème, nous allons considérer une configuration 2D, dont le motif de non-conformité hp initial est représenté sur la figure 2.9.

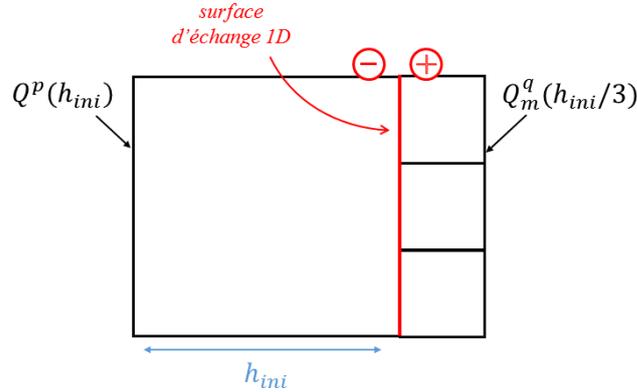


FIGURE 2.9 – Configuration 2D initiale.

On illustre alors, sur la figure 2.10, les premiers maillages obtenus par raffinement homogène à partir de cette configuration initiale.

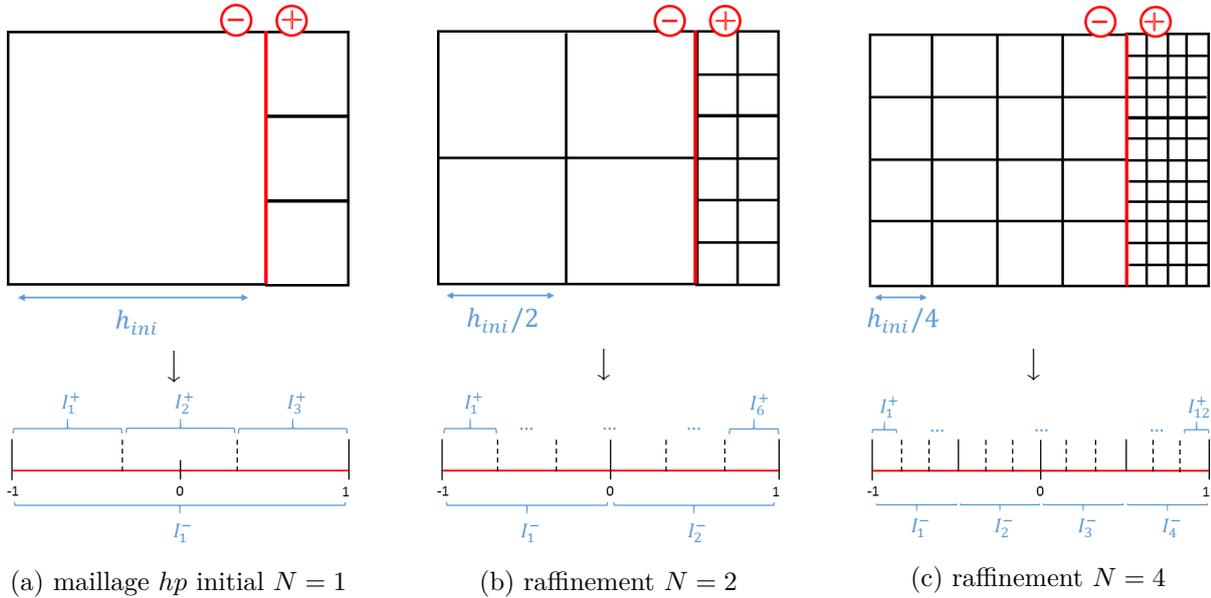


FIGURE 2.10 – Raffinements homogènes de la configuration initiale. Le paramètre N désigne le facteur de raffinement homogène par rapport à la configuration initiale et l'on a noté $h = \frac{h_{ini}}{N}$. On représente en (a) le maillage hp initial, (b) son raffinement d'un facteur $N = 2$, et (c) d'un facteur $N = 4$. Sont représentées, en haut, les configurations 2D, et en bas, le support 1D des flux non-conformes correspondants.

Les intervalles $(I_i^+)_{i=1}^{N^+}$ de la figure 2.10 correspondent, dans le cas d'un maillage 3D, aux facettes de l'accolement. À l'inverse, les intervalles $(I_i^-)_{i=1}^{N^-}$ correspondent aux surfaces d'échange non-conformes. Remarquons qu'au vu du motif de non-conformité choisi, si N représente le facteur de raffinement homogène du maillage, on a $N^- = N$ et $N^+ = 3N$.

Nous allons donc évaluer numériquement l'erreur de consistance des flux non-conformes, dont le support est ramené sur l'intervalle $[-1; 1]$:

$$\epsilon_{flux} = \left| \int_{[-1;1]} u_e(x).v_e(x)dx - \int_{[-1;1]}^Q u_h(x).v_h(x)dx \right|, \quad (2.178)$$

avec $(u_e, v_e) \in (C^\infty([-1; 1]))^2$, et $(u_h, v_h) = (\mathcal{P}_m^p(u_e), \mathcal{P}_m^q(v_e)) \in Q_m^p(I_i^-) \times Q_m^q(I_i^+)$, leurs approximations polynômiales par morceaux (projection nodale aux points de Gauss-Lobatto).

Afin de mettre en évidence l'impact de l'intégration discrète dans l'erreur de consistance des flux classiques, nous allons considérer plusieurs formules de quadrature composite, définies sur les intervalles $(I_i^+)_{i=1}^{N^+}$:

$$[-1; 1] = \bigcup_{i=1}^{N^+} I_i^+, \quad I_i^+ = [\alpha_{i-1}^+, \alpha_i^+], \quad (2.179)$$

Ces formules de quadrature composite Q s'écrivent de manière générale, pour $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_{[-1; 1]}^Q f(x) dx = \sum_{i=1}^{N^+} \int_{I_i^+}^{Q_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^{N^+} \sum_{j=1}^{N_i^q} \omega_{i,j} f(x_{i,j}), \quad (2.180)$$

où $Q_i = (\omega_{i,j}, x_{i,j})_{j=1}^{N_i^q}$ est la quadrature locale sur la cellule I_i^+ . La formule Q sera dite exacte au degré k si elle est exacte sur l'espace $Q_m^k(I_i^+)$, c'est-à-dire si elle intègre exactement toute fonction polynomiale par morceaux de degré inférieur ou égal à k sur chaque intervalle I_i^+ . On montre alors le résultat préliminaire suivant concernant l'erreur de quadrature (que l'on peut trouver par exemple dans [82] mais dont on donne ici une démonstration alternative), qui sera utile pour interpréter les résultats de l'étude numérique :

Lemme 2.21 *On suppose que la partition $(I_i)_{i=1}^{N^+}$ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $i \in \llbracket 1, N^+ \rrbracket$, $(\alpha_i^+ - \alpha_{i-1}^+) = h$. Si la quadrature composite Q est exacte au degré k et si pour tout $i \in \llbracket 1, N^+ \rrbracket$ on a $f|_{I_i^+} \in C^{k+1}(I_i^+)$, alors il existe une constante $M > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\left| \int_{[-1; 1]} f(x) dx - \int_{[-1; 1]}^Q f(x) dx \right| \leq Mh^{k+1}. \quad (2.181)$$

Preuve. Pour tout $i \in \llbracket 1, N^+ \rrbracket$, on désigne par $\mathcal{P}_{I_i^+}^k(f)$ le polynôme interpolateur de $f|_{I_i^+}$ en $(k+1)$ points de I_i^+ distincts deux à deux, notés $(x_{i,j})_{j=1}^{k+1}$. En sommant les erreurs d'interpolation commises sur chaque I_i^+ , on obtient que [83] : $\exists (\xi_1, \dots, \xi_N) \in I_1^+ \times \dots \times I_{N^+}^+ / \forall x \in [-1; 1] \setminus \{\alpha_0^+, \dots, \alpha_{N^+}^+\}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N^+} \mathbf{1}_{I_i^+}(x) \left[\mathcal{P}_{I_i^+}^k(f)(x) + \frac{f|_{I_i^+}^{(k+1)}(\xi_i)}{(k+1)!} \prod_{j=1}^{k+1} (x - x_{i,j}) \right]. \quad (2.182)$$

Ainsi, en notant $m_i = \frac{f|_{I_i^+}^{(k+1)}(\xi_i)}{(k+1)!}$, on a :

$$\int_{[-1; 1]} f(x) dx - \int_{[-1; 1]}^Q f(x) dx = \sum_{i=1}^{N^+} \left[\underbrace{\left(\int_{I_i^+} \mathcal{P}_{I_i^+}^k(f)(x) dx - \int_{I_i^+}^{Q_i} \mathcal{P}_{I_i^+}^k(f)(x) dx \right)}_{= 0 \text{ car la quadrature est exacte}} + m_i \left(\int_{I_i^+} \prod_{j=1}^{k+1} (x - x_{i,j}) dx - \int_{I_i^+}^{Q_i} \prod_{j=1}^{k+1} (x - x_{i,j}) dx \right) \right] \quad (2.183)$$

Il vient donc que :

$$\left| \int_{[-1;1]} f(x) dx - \int_{[-1;1]}^Q f(x) dx \right| \leq \max_{i \in \llbracket 1, N^+ \rrbracket} |m_i| \sum_{i=1}^{N^+} \left[\int_{I_i^+}^{\prod_{j=1}^{k+1}} |x - x_{i,j}| dx + \int_{I_i^+}^{\prod_{j=1}^{Q_i} |x - x_{i,j}| dx \right] \quad (2.184)$$

$$\leq \|f^{(k+1)}\|_{L^\infty([-1;1])} \sum_{i=1}^{N^+} \left[|\alpha_i^+ - \alpha_{i-1}^+| \sup_{I_i^+} \left(\prod_{j=1}^{k+1} |x - x_{i,j}| \right) + \sup_{I_i^+} \left(\prod_{j=1}^{k+1} |x - x_{i,j}| \right) \sum_{l=1}^{N_i^q} \omega_{i,l} \right] \quad (2.185)$$

$$\leq \|f^{(k+1)}\|_{L^\infty([-1;1])} \sum_{i=1}^{N^+} (2h^{k+2}) \quad (2.186)$$

$$\leq 2 \|f^{(k+1)}\|_{L^\infty([-1;1])} N^+ h^{k+2}. \quad (2.187)$$

Alors, en remarquant que $N^+ = \frac{2}{h}$, on obtient le résultat voulu. \blacksquare

Remarque 2.22 *Ce résultat n'est pas applicable directement à l'erreur de consistance des flux (2.178), car il ne s'agit pas simplement d'estimer une erreur de quadrature mais d'un chaînage complexe d'approximations : interpolation u_h de u_e , interpolation v_h de v_e , approximation de $u_e.v_e$ par $u_h.v_h$, suivi d'une quadrature. Notons que l'approximation de $u_e.v_e$ par $u_h.v_h$ peut poser question, car le polynôme interpolateur d'un produit ne coïncide pas, en général, avec le produit des polynômes interpolateurs.*

Les différentes formules de quadrature composite qui vont être utilisées dans notre étude sont présentées dans le tableau 2.1 [84].

Enfin, les fonctions u_e et v_e que nous allons utiliser, représentées sur la figure 2.11, sont définies de la manière suivante :

$$u_e(x) = x^5 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \quad (2.188a)$$

$$v_e(x) = \cos(2x)\sin(10x) + 1 \quad (2.188b)$$

Remarque 2.23 *Pour ce choix de u_e et v_e , le flux exact $\int_0^1 u_e(x).v_e(x)dx$ peut être calculé exactement. Cependant, afin de pouvoir reproduire aisément cette étude pour d'autres fonctions explicites, cette intégrale est calculée par une formule de quadrature de Gauss-Legendre composite exacte au degré 29, utilisant 10 points d'intégration dans chaque cellule I_i^+ .*

Quadrature	Points sur $[-1; 1]$	Poids sur $[-1; 1]$	Degré d'exactitude (k_{quad})
rectangle à gauche	$\hat{x}_1^q = -1$	$\hat{\omega}_1^q = 2$	0
point milieu	$\hat{x}_1^q = 0$	$\hat{\omega}_1^q = 2$	1
Gauss-Radau 2 points	$\hat{x}_1^q = -1$ $\hat{x}_2^q = \frac{1}{3}$	$\hat{\omega}_1^q = \frac{1}{3}$ $\hat{\omega}_2^q = \frac{2}{3}$	2
Simpson	$\hat{x}_1^q = -1$ $\hat{x}_2^q = 0$ $\hat{x}_3^q = 1$	$\hat{\omega}_1^q = \frac{1}{3}$ $\hat{\omega}_2^q = \frac{4}{3}$ $\hat{\omega}_3^q = \frac{1}{3}$	3
Gauss-Radau 3 points	$\hat{x}_1^q = -1$ $\hat{x}_2^q = \frac{1-\sqrt{6}}{5}$ $\hat{x}_3^q = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$	$\hat{\omega}_1^q = \frac{2}{9}$ $\hat{\omega}_2^q = \frac{16+\sqrt{6}}{18}$ $\hat{\omega}_3^q = \frac{16-\sqrt{6}}{18}$	4
Gauss-Legendre 3 points	$\hat{x}_1^q = -\frac{3}{5}$ $\hat{x}_2^q = 0$ $\hat{x}_3^q = \frac{3}{5}$	$\hat{\omega}_1^q = \frac{5}{9}$ $\hat{\omega}_2^q = \frac{8}{9}$ $\hat{\omega}_3^q = \frac{5}{9}$	5
Gauss-Legendre 4 points	$\hat{x}_1^q = -\frac{\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{35}$ $\hat{x}_2^q = -\frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}$ $\hat{x}_3^q = \frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}$ $\hat{x}_4^q = \frac{\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{35}$	$\hat{\omega}_1^q = \frac{18-\sqrt{30}}{36}$ $\hat{\omega}_2^q = \frac{18+\sqrt{30}}{36}$ $\hat{\omega}_3^q = \frac{18+\sqrt{30}}{36}$ $\hat{\omega}_4^q = \frac{18-\sqrt{30}}{36}$	7
Gauss-Legendre 5 points	$\hat{x}_1^q = -\frac{\sqrt{245+14\sqrt{70}}}{21}$ $\hat{x}_2^q = -\frac{\sqrt{245-14\sqrt{70}}}{21}$ $\hat{x}_3^q = 0$ $\hat{x}_4^q = \frac{\sqrt{245-14\sqrt{70}}}{21}$ $\hat{x}_5^q = \frac{\sqrt{245+14\sqrt{70}}}{21}$	$\hat{\omega}_1^q = \frac{322-13\sqrt{70}}{900}$ $\hat{\omega}_2^q = \frac{322+13\sqrt{70}}{900}$ $\hat{\omega}_3^q = \frac{128}{225}$ $\hat{\omega}_4^q = \frac{322+13\sqrt{70}}{900}$ $\hat{\omega}_5^q = \frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	9

TABLE 2.1 – Détail des différentes formules de quadrature utilisées.

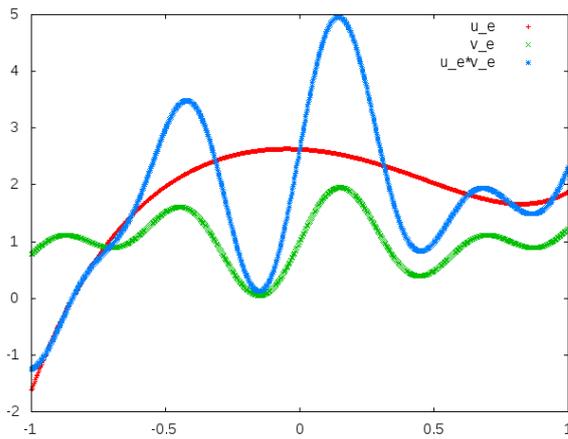


FIGURE 2.11 – Représentation des fonctions u_e , v_e , et $u_e.v_e$ utilisées dans notre étude.

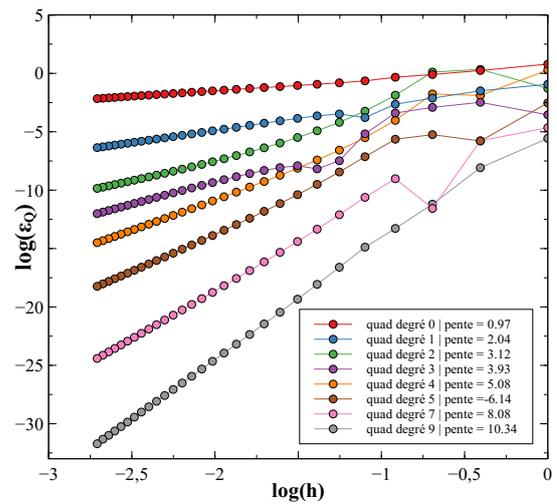


FIGURE 2.12 – Convergence des formules de quadrature composite pour le calcul de $\int_{[-1,1]}^Q u_e.v_e dx$.

Avant de présenter les résultats des expériences numériques de consistance, on commence par valider numériquement que les formules de quadrature convergent à l'ordre attendu, en calculant pour plusieurs facteurs de raffinement la quantité :

$$\epsilon_Q = \left| \int_{[-1;1]} u_\epsilon(x) \cdot v_\epsilon(x) dx - \int_{[-1;1]}^Q u_\epsilon(x) \cdot v_\epsilon(x) dx \right|. \quad (2.189)$$

Les résultats sont présentés sur la figure 2.12 et sont bien en accord avec le lemme 2.21, avec une vitesse de convergence de $k + 1$ lorsque la formule de quadrature composite utilisée est exacte au degré k .

Dans ce qui suit, nous étudions l'évolution de l'erreur de consistance ϵ_{flux} en fonction du facteur de raffinement homogène de la configuration hp initiale considérée et cherchons à établir un lien entre les espaces d'approximation, le degré d'exactitude des quadratures et l'ordre de consistance obtenu.

2.4.2.2 Configuration $Q^2(h)/Q_m^1(\frac{h}{3})$

Nous débutons notre étude sur une configuration hp initiale $Q^2(h)/Q_m^1(\frac{h}{3})$. La figure 2.13 illustre l'évolution des approximations u_h , v_h et $u_h \cdot v_h$ pour les premiers facteurs de raffinement (on peut notamment y remarquer la convergence L^∞ de ces quantités respectivement vers u_ϵ , v_ϵ et $u_\epsilon \cdot v_\epsilon$).

Avant de présenter les résultats obtenus, commençons par une remarque préliminaire. Sur chaque intervalle $I_i^+ \subset I_{i'}^-$, la quantité $u_\epsilon \cdot v_\epsilon$ est approchée par le polynôme :

$$u_h|_{I_i^+} \cdot v_h|_{I_i^+} = \mathcal{P}_{|I_{i'}^-}^2(u_\epsilon)|_{I_i^+} \cdot \mathcal{P}_{|I_i^+}^1(v_\epsilon), \quad (2.190)$$

qui est de degré 3. De ce fait, deux quadratures composites Q exactes au degré $k \geq 3$ doivent nécessairement donner la même valeur de flux numérique $\int_{[-1;1]}^Q u_h(x) \cdot v_h(x) dx$ (à l'erreur d'arrondi machine près). On s'attend donc à ce que les résultats de convergence obtenus avec de telles quadratures soient identiques (à ce titre, il paraît inutile du point de vue précision et sous-optimal du point de vue temps de calcul de choisir en pratique une formule de quadrature d'ordre supérieur à 3 pour une configuration de ce type).

Les résultats de l'étude de convergence sont illustrés sur la figure 2.14. Remarquons d'ores et déjà que les courbes obtenues pour les formules de quadrature d'ordre supérieur ou égal à 3 sont toutes confondues, ce qui est conforme à la remarque précédente. Concentrons nous alors sur le phénomène principal mis en évidence sur cette figure : la saturation de la convergence à l'ordre 2. Ce résultat n'était pas attendu *a priori*. En effet, au vu des quantités mises en jeu et du lemme 2.21, il aurait été vraisemblable d'obtenir un ordre de 3. Cela montre que la remarque 2.22 est plus décisive qu'il n'y paraît : le chaînage des différentes approximations dans le terme de flux numérique (interpolation et intégration discrète) crée une limitation de l'ordre de convergence qui ne peut pas être compensée par une augmentation de l'ordre de quadrature.

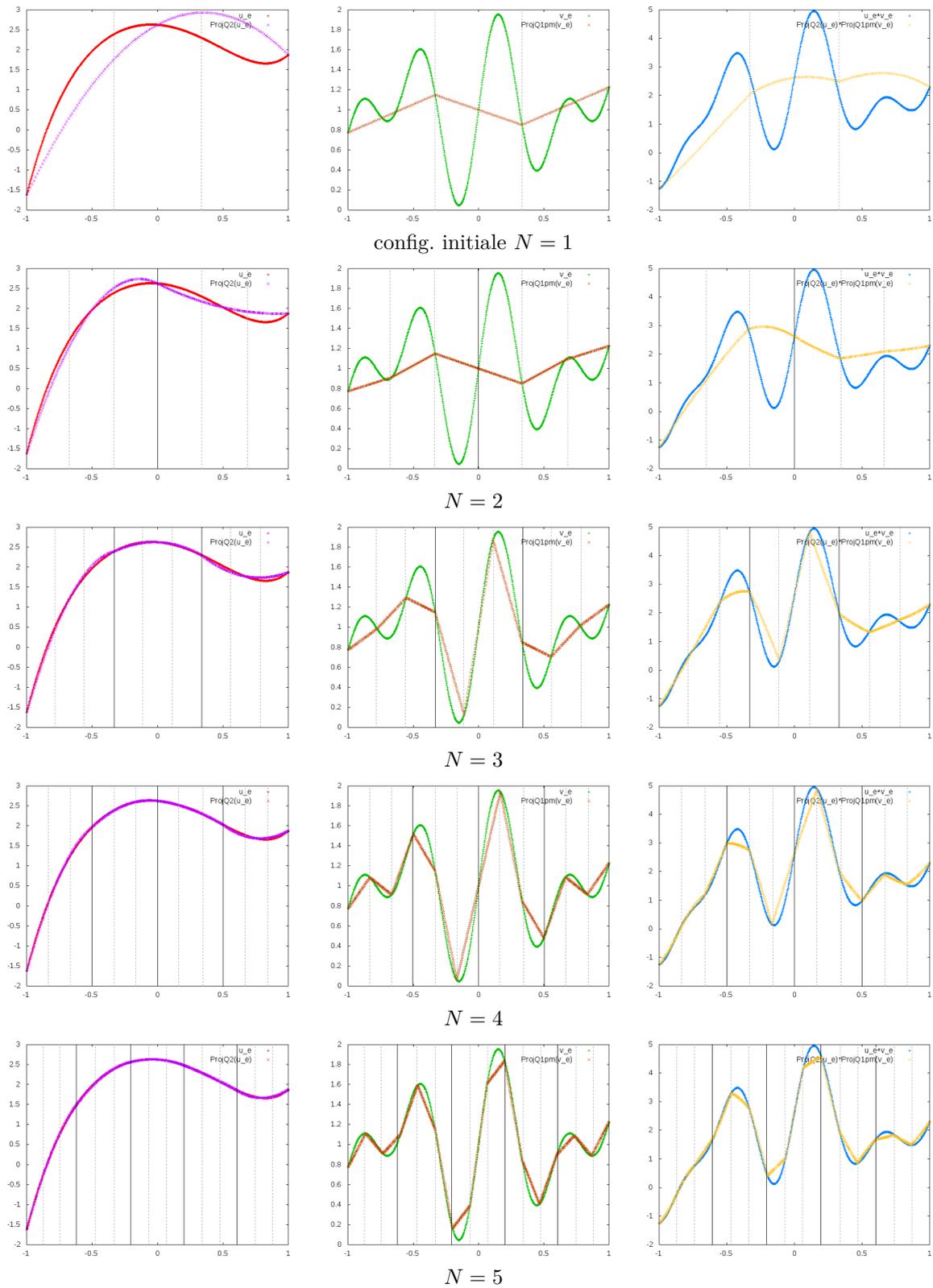


FIGURE 2.13 – Représentation des approximations u_h (à gauche), v_h (au milieu), $u_h \cdot v_h$ (à droite) pour plusieurs facteurs de raffinement N , sur la configuration initiale $Q^2(h)/Q_m^1(\frac{h}{3})$. Dans chaque graphique, les traits pleins verticaux représentent la subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$ en N éléments considérés, et ceux en pointillés représentent le découpage de chaque élément en 3 sous-morceaux.

Plus loin, on observe un ordre de 1 pour la quadrature de degré 0. Or, cette valeur coïncide avec la vitesse de convergence théorique de la quadrature en question. Cela suggère, dans ce cas particulier, que c'est l'intégration discrète qui limite l'ordre de convergence des flux. Ce comportement semble traduire une compétition entre les différentes approximations commises au sein des termes de flux numériques, au sortir de laquelle l'approximation de plus mauvaise qualité impose son ordre de convergence. En d'autres termes, l'ordre de convergence des flux non-conformes semble se comporter comme :

$$\min \{k_{quad} + 1, p_{proj}\}, \quad (2.191)$$

avec k_{quad} le degré d'exactitude de la formule de quadrature composite utilisée, et p_{proj} un paramètre lié à l'approximation de la quantité $u_e.v_e$ par $u_h.v_h$. Remarquons que, si cette hypothèse est vraie, on a nécessairement ici $p_{proj} = 2$. De plus, si ce comportement se confirme, il impacte directement les choix à effectuer au sein du schéma numérique. Il serait en effet inutile de choisir une formule de quadrature exacte au degré 3 pour le calcul des flux non-conformes considérés, car une formule exacte au degré 1 suffit à assurer la convergence optimale de ces termes.

Cependant, pour une configuration non-conforme donnée, il paraît difficile en l'état de conjecturer l'ordre de convergence maximal des termes de flux, et plus précisément une expression de p_{proj} . En particulier, cette quantité peut s'interpréter ici de plusieurs manières : double du degré d'interpolation minimal, degré d'interpolation minimal plus un, degré d'interpolation maximal, etc. Ainsi, afin d'affiner notre compréhension, nous allons mener une étude de convergence similaire pour une configuration d'ordre plus élevé.

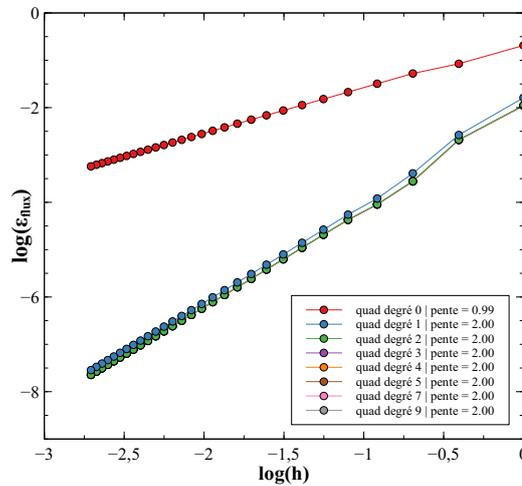
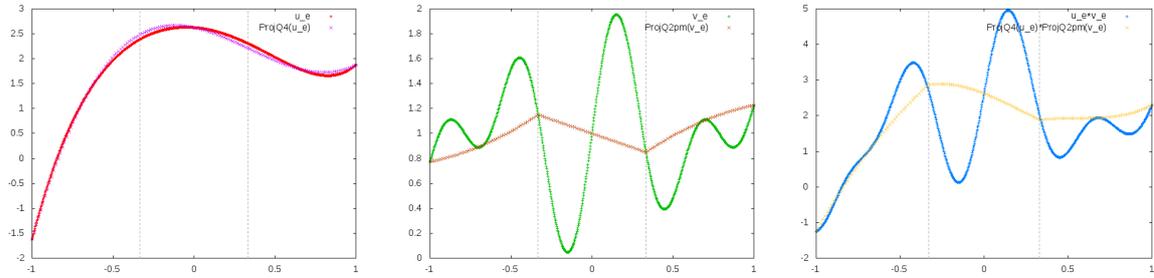


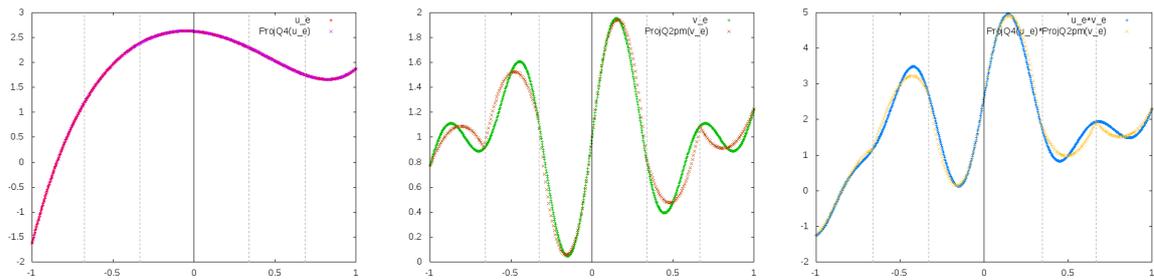
FIGURE 2.14 – Évolution de l'erreur de consistance des flux hp non-conformes en fonction de la finesse du maillage des configurations $Q_m^2(h)/Q_m^1(\frac{h}{3})$.

2.4.2.3 Configuration $Q^4(h)/Q_m^2(\frac{h}{3})$

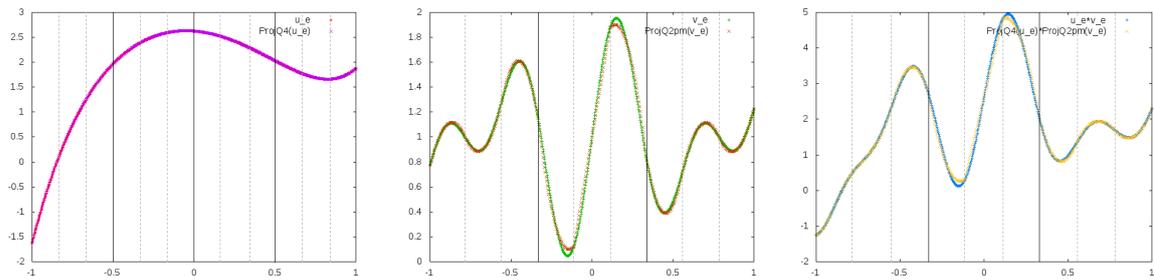
Nous considérons à présent une configuration initiale $Q^4(h)/Q_m^2(\frac{h}{3})$. Comme précédemment, on illustre les approximations des fonctions exactes sur la figure 2.15, pour les deux premiers facteurs de raffinement (on remarque par ailleurs que la convergence L^∞ des quantités u_h , v_h et $u_h.v_h$ vers u_e , v_e et $u_e.v_e$ semble plus rapide que dans le cas précédent, ce qui est cohérent du fait d'interpolations de degré plus élevé).



configuration initiale



$N = 2$



$N = 3$

FIGURE 2.15 – Représentation des approximations u_h (à gauche), v_h (au milieu), $u_h \cdot v_h$ (à droite) pour plusieurs facteurs de raffinement N , sur la configuration initiale $Q^4(h)/Q_m^2(\frac{h}{3})$. Dans chaque graphique, les traits pleins verticaux représentent la subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$ en les N éléments considérés, et ceux en pointillés représentent le découpage de chaque élément en 3 sous-morceaux.

Les résultats de convergence sont alors présentés sur la figure 2.16.

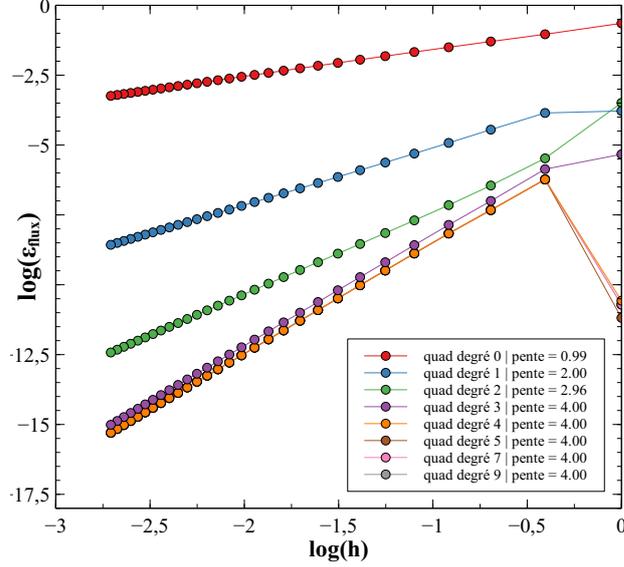


FIGURE 2.16 – Évolution de l'erreur de consistance des flux hp non-conformes en fonction de la finesse de maillage des configurations $Q_m^4(h)/Q_m^2(\frac{h}{3})$.

Comme dans le cas précédent, on observe, de manière prévisible, des résultats identiques dès que la formule de quadrature est d'ordre suffisamment élevé pour intégrer localement les polynômes $u_h|_{I_i^+} \cdot v_h|_{I_i^+}$ de manière exacte (qui sont ici de degré 6). De même, on observe un phénomène de saturation de convergence similaire au cas précédent, avec cette fois un ordre maximal de 4. Les pentes obtenues corroborent alors l'hypothèse d'un ordre de convergence en $\min\{k_{quad} + 1, p_{proj}\}$, avec dans ce cas $p_{proj} = 4$. Cette valeur représente en effet un seuil en dessous duquel la vitesse de convergence des flux non-conformes coïncide avec celle de la quadrature utilisée, signant vraisemblablement son caractère limitant.

Ainsi, pour cette configuration, bien que l'usage porterait à utiliser une formule de quadrature composite exacte au degré 6 pour le calcul des flux non-conformes, l'utilisation d'une quadrature de degré 3 suffirait à garantir le même ordre de convergence du schéma global, sous réserve que ce choix soit admissible vis-à-vis de la stabilité. Il s'agit là, comme nous verrons, d'un levier de premier plan pour réduire les coûts de calcul de la résolution.

À la lumière de ce nouveau cas-test, nous pouvons conjecturer que l'ordre de convergence des termes de flux non-conformes d'une configuration $Q_m^p(\frac{h}{n})/Q_m^q(\frac{h}{n'})$ se comporte comme :

$$\min\{k_{quad} + 1, 2 \min\{p, q\}\}. \quad (2.192)$$

Si cette hypothèse est vraie, nous devrions obtenir, pour une configuration initiale $Q^3(h)/Q^3(\frac{h}{3})$ par exemple, un ordre de convergence maximal de 6. Cela semblerait surprenant *a priori* car sur chaque morceau I_i^+ la quantité $u_e \cdot v_e$ serait de nouveau approchée par un polynôme de degré 6. Afin de tester cette hypothèse, nous allons donc brièvement mener une étude de convergence numérique sur cette configuration.

2.4.2.4 Configuration $Q^3(h)/Q_m^3(\frac{h}{3})$

Par le même mode opératoire que dans les paragraphes précédents, on obtient les résultats de la figure 2.17. On observe bien une saturation de la convergence à l'ordre 6, ce qui tend à confirmer la conjecture précédente.

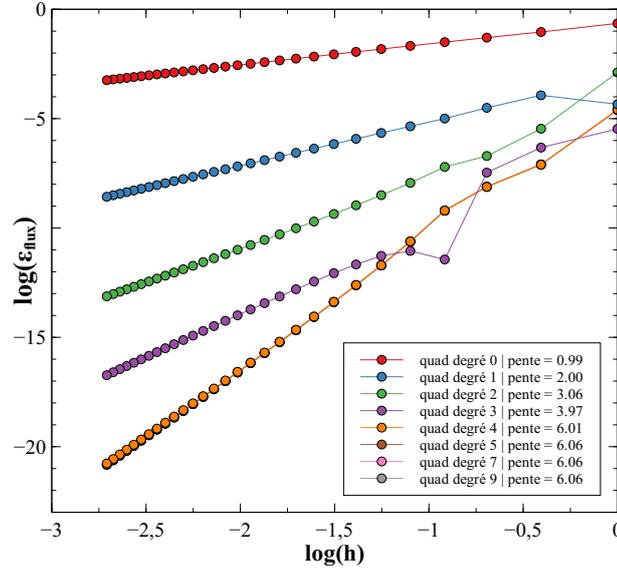


FIGURE 2.17 – Évolution de l'erreur de consistance des flux hp non-conformes en fonction de la finesse de maillage des configurations $Q_m^3(h)/Q_m^3(\frac{h}{3})$.

Au cours de ces expériences numériques, nous avons mis en évidence que l'utilisation d'une formule de quadrature exacte sur chaque morceau I_i^+ du flux non-conforme (approche classique) paraissait inutile du point de vue de la convergence et que nous pouvions, dans une certaine mesure, utiliser une formule de degré inférieur sans en dégrader l'ordre maximal.

Cependant, afin de légitimer la méthode de condensation proposée dans ce chapitre, il est nécessaire de valider qu'une intégration approchée à l'échelle de la surface d'échange I_i^- (approche condensée) permet également de garantir l'ordre de convergence maximal. Ainsi, avant de passer à l'analyse théorique de la consistance des flux non-conformes, nous proposons dans ce qui suit une étude numérique de convergence pour des flux de type condensé.

2.4.2.5 Test de convergence pour des flux de type condensé

Nous étudions donc dans ce paragraphe la convergence numérique de flux hp non-conformes de type condensé sur les configurations précédentes. Nous ne considérons ici qu'une version simplifiée de la méthode de condensation, où l'on choisit l'identité comme opérateur de reconstruction. Les quantités u_h et v_h sont donc définies comme précédemment. En revanche, ce qui distingue ce paragraphe des précédents, c'est que les flux non-conformes ne vont plus être calculés à l'échelle des facettes I_i^+ mais des surfaces d'échange I_i^- . Ainsi, les formules de quadrature composite que nous allons utiliser s'écrivent ici :

$$\int_{[-1,1]} f(x) dx = \sum_{i=1}^{N^-} \int_{I_i^-} f(x) dx = \sum_{i=1}^{N^-} \sum_{j=1}^{N_q} \omega_{i,j} f(x_{i,j}), \quad (2.193)$$

où $Q_i = (\omega_{i,j}, x_{i,j})_{j=1}^{N_q}$ désigne la quadrature locale sur I_i^- . Dans ce contexte, on dira donc que la formule de quadrature Q est exacte au degré k si elle est exacte sur $Q_m^k(I_i^-)$, c'est-à-dire si elle intègre exactement toute fonction polynomiale par morceaux de degré inférieur ou égal à k sur chaque intervalle I_i^- . L'erreur commise dans le calcul des flux, ϵ_{flux} , sera calculée comme précédemment.

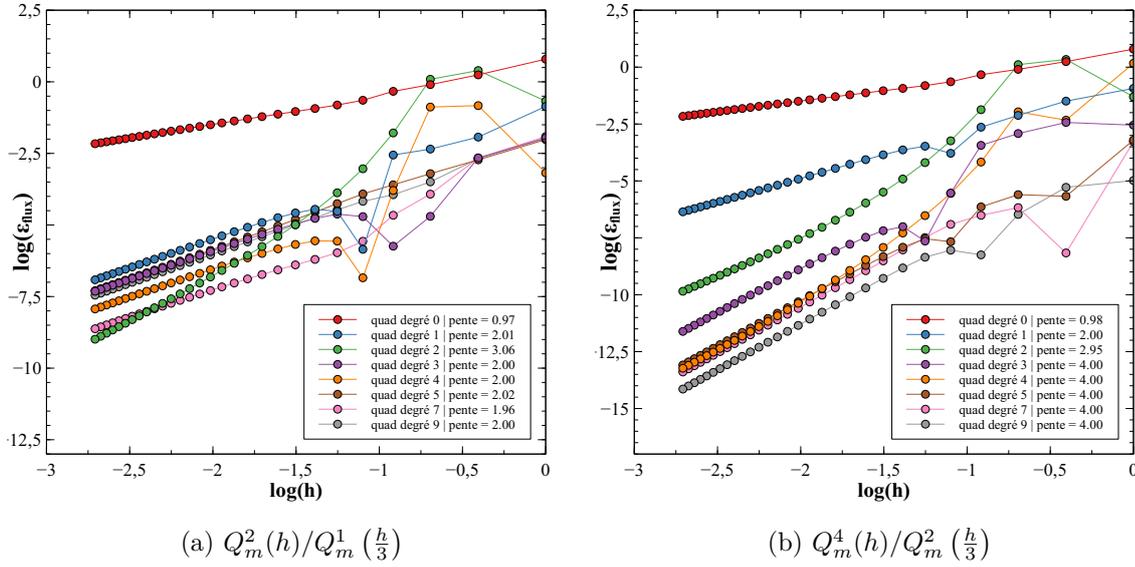


FIGURE 2.18 – Évolution de l'erreur de consistance des flux hp non-conformes en fonction de la finesse de maillage pour les configurations (a) $Q_m^2(h)/Q_m^1\left(\frac{h}{3}\right)$ et (b) $Q_m^4(h)/Q_m^2\left(\frac{h}{3}\right)$.

Les résultats sont illustrés sur la figure 2.18. On n'observe plus, contrairement aux expériences précédentes, la superposition exacte des courbes de convergence à partir d'un certain degré de quadrature. Ceci est tout à fait normal, car les quantités intégrées ne sont plus polynomiales mais polynomiales par morceaux sur le domaine d'intégration. Les formules de quadrature utilisées ne permettent donc pas de réaliser une intégration exacte et donnent chacune une approximation différente du flux.

Le résultat important est que les vitesses de convergence maximales sont identiques à celles obtenues dans les paragraphes précédents. Cela signifie qu'au delà de pouvoir utiliser une intégration numérique approchée localement sur chaque facette, celle-ci peut être réalisée à l'échelle globale de la surface d'échange sans dégrader la convergence des flux non-conformes. En particulier, la conjecture (2.192) sur l'ordre de convergence n'est pas remise en cause par l'utilisation de flux de type condensé.

Terminons en remarquant un phénomène de super-convergence lors de l'utilisation de la quadrature exacte au degré 2 dans le cas $Q_m^2(h)/Q_m^1\left(\frac{h}{3}\right)$ (figure 2.18a). On observe en effet un gain d'une unité par rapport à l'ordre de saturation. Une explication possible de ce phénomène réside dans la répartition des points d'intégration, la quadrature en question maximisant la collocation aux degrés de liberté de la fonction $Q_m^1\left(\frac{h}{3}\right)$.

2.4.2.6 Bilan

Cette série d'expériences numériques a permis de mettre en évidence trois résultats essentiels permettant de légitimer la méthode de condensation de flux développée dans ce chapitre et d'orienter la suite de notre étude.

Tout d'abord, nous avons établi la conjecture suivante :

Conjecture 2.24 *Pour une formule de quadrature composite exacte au degré k_{quad} , l'ordre de convergence des termes de flux hp non-conformes d'une configuration $Q_m^p(h)/Q_m^q(h')$ est donné par :*

$$\min \{k_{quad} + 1, 2 \min\{p, q\}\}. \quad (2.194)$$

Cette expression illustre la manière dont les différents paramètres de discrétisation (quadrature, degrés d'interpolation polynomiale) interagissent pour donner l'ordre de convergence des flux non-conformes. Si cette hypothèse est confirmée, elle représente un intérêt central. En effet, p et q étant fixés par l'espace d'approximation, elle permettrait de choisir le juste degré d'exactitude de la quadrature à utiliser afin d'assurer l'ordre de convergence maximal des flux non-conformes.

Puis, en relation directe avec le point précédent, nous avons montré que le calcul classique des flux hp non-conformes utilise une formule de quadrature sur-précise vis-à-vis de l'ordre de convergence de ces termes, impliquant des coûts de calcul inutilement élevés. Nous avons alors observé qu'il était possible d'utiliser des quadratures de degré plus faible sans impacter l'ordre de convergence des flux. C'est justement dans cette marge de manœuvre que la méthode de condensation de flux proposée a vocation à être utilisée.

Enfin, nous avons vu que l'approximation des termes de flux non-conformes peut être poussée jusqu'à l'utilisation d'une quadrature approchée à l'échelle des surfaces d'échange, tout en conservant l'ordre de convergence maximal. Ce dernier point achève de démontrer la viabilité de l'approche de condensation de flux proposée dans ce chapitre.

Dans ce qui suit, nous allons chercher à établir théoriquement un équivalent qualitatif de ce résultat. Plus précisément, nous allons chercher à exhiber des conditions sur les opérateurs de trace et les produits scalaires associés assurant la convergence en h des flux condensés vers les flux classiques.

2.4.3 Analyse de la consistance des flux condensés

Le schéma condensé peut être vu comme une perturbation du schéma classique, basée sur une modification des termes de flux hp non-conformes. Ainsi, pour assurer sa consistance en h , il suffit de garantir la consistance en h des flux condensés vis-à-vis des flux classiques, c'est-à-dire montrer que :

$$\tilde{\epsilon}_{flux}^{\pm} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad (2.195)$$

où, pour $S \in \mathcal{S}_h$, et $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbf{U}_h^2$:

$$\tilde{\epsilon}_{flux}^{\pm} = \left| \int_S \dot{\mathbf{n}}_S \wedge \mathbf{I}_S^{\mp}(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^{\mp}}) \cdot \mathbf{I}_S^{\mp}(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^{\pm}}) ds - \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{\Pi}_S^{\mp}(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^{\mp}}), \tilde{\mathbf{J}}_S^{\pm}(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^{\pm}}) \right\rangle_S^{\pm} \right|. \quad (2.196)$$

Remarquons d'ores et déjà la propriété suivante :

Lemme 2.25 Soit $S \in \mathcal{S}_h$ et $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbf{U}_h^2$. Si l'hypothèse **(H2)** est satisfaite, alors :

$$\tilde{\epsilon}_{flux}^+ = \tilde{\epsilon}_{flux}^-, \quad (2.197)$$

Preuve. Immédiat en utilisant **(H2)** et l'antisymétrie du produit vectoriel. ■

Il suffit donc d'établir 2.195 d'un côté ou de l'autre de l'interface, et à ce titre nous allons nous intéresser uniquement à $\tilde{\epsilon}_{flux}^-$. Avant de poursuivre, on introduit l'application $\tilde{\mathcal{L}}_S^{\pm}$, permettant de passer d'un N_S^{\pm} -uplet d'applications volumiques à un N_S^{\mp} -uplet de traces sur \tilde{S} :

$$\tilde{\mathcal{L}}_S^{\pm} : \mathbf{L}^2(\tilde{\mathcal{K}}_S^{\pm}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\tilde{\mathbb{F}}_S^{\mp}), \tilde{\mathbf{u}}_{\mathcal{K}_S^{\pm}} \mapsto \tilde{\mathbf{j}}_S^{\mp} \circ \gamma_{S, \mp}^3(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathcal{K}_S^{\pm}}). \quad (2.198)$$

On montre alors le résultat suivant sur la convergence en h des termes de flux condensés vers les flux classiques, et par suite la consistance en h du schéma GDDT condensé :

Théorème 2.26 Soit $S \in \mathcal{S}_h$ et $\mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h$. Si les hypothèses **(H4)** et **(H5)** suivantes sont satisfaites :

$$\forall \tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^-, \text{ la forme bilinéaire } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{f}} \text{ est une quadrature exacte au degré } p^- + \alpha \ (\alpha \geq 0), \quad (\mathbf{H4})$$

$$\exists \beta \geq 0 \ / \ \left| \left(\tilde{\mathbf{\Pi}}_S^- - \tilde{\mathcal{L}}_S^+ \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right|_{0, \tilde{\mathbb{F}}_S^-} \leq C_3 h^{\beta}, \quad (\mathbf{H5})$$

avec, pour tout $\check{\mu}^- \in \tilde{\mathbf{Q}}_S^-$:

$$|\check{\mu}^-|_{0, \tilde{\mathbb{F}}_S^-} \approx = \sum_{\check{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^-} \|\mu^-|_{\check{f}}\|_{0, \check{f}}, \quad (2.199)$$

alors on a l'estimation suivante :

$$\tilde{\epsilon}_{flux}^- \leq \max \{C_{quad}, C_{proj}\} h^{\min\{\alpha, \beta\}+1}. \quad (2.200)$$

La suite de cette section est consacrée à la démonstration de ce théorème. On procède en plusieurs étapes. Tout d'abord, comme dans l'étude classique de la consistance du schéma, nous commençons par décomposer $\tilde{\epsilon}_{flux}^-$ en la somme d'une erreur de projection $\tilde{\epsilon}_{proj}^-$ et une erreur de quadrature $\tilde{\epsilon}_{quad}^-$. Pour ce faire, on commence par introduire l'injection canonique \tilde{i}_S^\pm permettant de passer d'un \tilde{N}_S^\pm -uplet de traces en un N_S^{max} -uplet de traces sur S :

$$\tilde{i}_S^\pm : \mathbf{L}^2(\tilde{\mathbb{F}}_S^\pm) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_S^{max}), \quad (2.201)$$

Alors, en injectant la quantité suivante dans (2.196) :

$$\int_S \mathbf{n}_S \wedge \tilde{i}_S^- \left(\Pi_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right) \cdot \mathbf{I}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) ds, \quad (2.202)$$

il vient :

$$\tilde{\epsilon}_{flux}^- \leq |\tilde{\epsilon}_{proj}^-| + |\tilde{\epsilon}_{quad}^-|, \quad (2.203)$$

avec :

$$\tilde{\epsilon}_{proj}^- = \int_S \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{I}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \cdot \mathbf{I}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) ds - \int_S \mathbf{n}_S \wedge \tilde{i}_S^- \left(\Pi_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right) \cdot \mathbf{I}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) ds \quad (2.204)$$

et :

$$\tilde{\epsilon}_{quad}^- = \int_S \mathbf{n}_S \wedge \tilde{i}_S^- \left(\Pi_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right) \cdot \mathbf{I}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) ds - \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right\rangle_S^-. \quad (2.205)$$

On introduit alors les formes bilinéaires suivantes :

$$\forall (\mu, \nu) \in C^\infty(\mathcal{F}_S^{max}) \times C^\infty(\mathcal{F}_S^{max}), E_S^1(\mu, \nu) = \int_S \mathbf{n}_S \wedge \mu \cdot \nu ds, \quad (2.206)$$

$$\forall (\mu, \nu) \in \tilde{\mathbf{Q}}_S^- \times \tilde{\mathbf{Q}}_S^-, E_S^2(\mu, \nu) = \langle \mathbf{n}_S \wedge \mu, \nu \rangle_S^-, \quad (2.207)$$

$$\forall (\mu, \nu) \in \tilde{\mathbf{Q}}_S^- \times \tilde{\mathbf{Q}}_S^-, E_S(\mu, \nu) = E_S^1(\tilde{i}_S^-(\mu), \tilde{i}_S^-(\nu)) - E_S^2(\mu, \nu), \quad (2.208)$$

de sorte que :

$$\tilde{\epsilon}_{proj}^- = E_S^1(\mathbf{I}_S^+(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}), \mathbf{I}_S^-(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-})) - E_S^1(\tilde{i}_S^-(\Pi_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+})), \mathbf{I}_S^-(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-})), \quad (2.209)$$

et :

$$\tilde{\epsilon}_{quad}^- = E_S(\Pi_S^-(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+}), \tilde{\mathfrak{J}}_S^-(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-})) \quad (2.210)$$

On poursuit alors en montrant plusieurs lemmes techniques qui vont nous permettre d'estimer $\tilde{\epsilon}_{proj}^-$ et $\tilde{\epsilon}_{quad}^-$.

Lemme 2.27 *Pour tout $(\boldsymbol{\mu}_h, \boldsymbol{\nu}_h) \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{U}_h$, on a l'estimation suivante :*

$$\left| E_S^1 \left(\mathbf{I}_S^+ \left(\boldsymbol{\mu}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \mathbf{I}_S^- \left(\boldsymbol{\nu}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right) \right| \leq C_1 h \|\boldsymbol{\nu}_h\|_{0,\Omega} \|\tilde{\mathbf{n}}_S \wedge \tilde{\boldsymbol{\mu}}_h\|_{0,\tilde{\mathcal{F}}_S^{max}}, \quad (2.211)$$

avec $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, $C_1 > 0$ une constante indépendante du maillage, et où l'on a posé :

$$\|\tilde{\mathbf{n}}_S \wedge \tilde{\boldsymbol{\mu}}_h\|_{0,\tilde{\mathcal{F}}_S^{max}} = \sum_{\substack{\check{f} \in \tilde{\mathcal{F}}_S^{max} \\ \check{f} \subset \partial \check{K}}} \|\tilde{\mathbf{n}}_K \wedge \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{hK}\|_{0,\check{f}} \quad (2.212)$$

Preuve. En décomposant E_S^1 sur les facettes $f \in \mathcal{F}_S^{max}$ et en exprimant chacune de ces quantités sur \check{f} , on obtient :

$$\left| E_S^1 \left(\mathbf{I}_S^+ \left(\boldsymbol{\mu}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \mathbf{I}_S^- \left(\boldsymbol{\nu}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right) \right| \leq \sum_{\substack{\check{f} \in \tilde{\mathcal{F}}_S^{max} \\ \check{f} \subset \partial \check{K}}} \left| \int_{\check{f}} \tilde{\mathbf{n}}_K \wedge \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{hK} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{hK} d\check{s} \right|, \quad (2.213)$$

ce qui donne, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| E_S^1 \left(\mathbf{I}_S^+ \left(\boldsymbol{\mu}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \mathbf{I}_S^- \left(\boldsymbol{\nu}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right) \right| \leq \sum_{\substack{\check{f} \in \tilde{\mathcal{F}}_S^{max} \\ \check{f} \subset \partial \check{K}}} \|\tilde{\mathbf{n}}_K \wedge \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{hK}\|_{0,\check{f}} \cdot \|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{hK}\|_{0,\check{f}}. \quad (2.214)$$

En s'inspirant du travail effectué dans l'étude de stabilité de la section précédente, on utilise alors la majoration suivante :

$$\|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{hK}\|_{0,\check{f}}^2 \leq \lambda_{max} \left(\sqrt{\tilde{\mathcal{M}}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_f \sqrt{\tilde{\mathcal{M}}}^{-1} \right) \|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{hK}\|_{0,\check{K}}^2, \quad (2.215)$$

où \check{K} est l'unique élément de \mathcal{K}_S^- dont la frontière contient la facette \check{f} , $\tilde{\mathcal{M}}$ la matrice de masse sur \check{K} , et $\tilde{\mathcal{B}}_f$ la matrice de masse 2D calculée sur les fonctions de base de \check{K} , de taille $N_{ddl}^K \times N_{ddl}^K$ et de terme général :

$$\left[\tilde{\mathcal{B}}_f \right]_{IJ} = \int_{\check{f}} \check{\phi}_I \cdot \check{\phi}_J d\check{s}. \quad (2.216)$$

Puis, en ramenant $\|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{hK}\|_{0,\check{K}}$ sur l'élément réel, il vient :

$$\|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{hK}\|_{0,\check{K}}^2 = \int_K D\tilde{T}_{S,K} D\tilde{T}_{S,K}^* \boldsymbol{\nu}_K \cdot \boldsymbol{\nu}_K ds \leq \lambda_{max} \left(D\tilde{T}_{S,K} D\tilde{T}_{S,K}^* \right) \|\boldsymbol{\nu}_K\|_{0,K}^2. \quad (2.217)$$

Or, la proposition 7 de [31] (p145) montre que :

$$\lambda_{max} \left(D\tilde{T}_{S,K} D\tilde{T}_{S,K}^* \right) \leq Ch_K^2, \quad (2.218)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{hK}\|_{0,\check{K}}^2 \leq \alpha h_K^2 \|\boldsymbol{\nu}_K\|_{0,K}^2, \quad (2.219)$$

avec $\alpha > 0$ indépendante du maillage. On obtient ainsi :

$$\left| E_S^1 \left(I_S^+ \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right), I_S^- \left(\nu_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right) \right| \leq \sum_{\substack{\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}_S^{max}, \\ \tilde{f} \subset \partial \tilde{K}}} h_K \sqrt{\alpha \lambda_{max} \left(\sqrt{\tilde{\mathcal{M}}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_f \sqrt{\tilde{\mathcal{M}}}^{-1} \right)} \left\| \tilde{\mathbf{n}}_K \wedge \tilde{\mu}_{hK} \right\|_{0, \tilde{f}} \left\| \nu_{hK} \right\|_{0, K}, \quad (2.220)$$

d'où le résultat. ■

On obtient un résultat équivalent pour E_2 :

Lemme 2.28 *Pour tout $(\mu_h, \nu_h) \in U_h \times U_h$, on a l'estimation suivante :*

$$\left| E_S^2 \left(\tilde{\mathfrak{I}}_S^- \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^-} \right), \tilde{\mathfrak{I}}_S^- \left(\nu_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right) \right| \leq C_2 h \left\| \nu_h \right\|_{0, \Omega} \left| \tilde{\mathbf{n}}_S \wedge \tilde{\mathfrak{I}}_S^- \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right|_{0, \tilde{\mathbb{F}}_S}, \quad (2.221)$$

avec $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, $C_2 > 0$ une constante indépendante du maillage.

Preuve. On procède comme dans la démonstration précédente. ■

Lemme 2.29 *Soit $(\mu_h, \nu_h) \in U_h \times U_h$. Si l'hypothèse (H4) est satisfaite, alors pour tout projecteur $\mathcal{P}_\alpha : L^2(\mathcal{K}_S^+) \rightarrow Q^\alpha(\mathcal{K}_S^-)$, on a l'identité :*

$$\tilde{\epsilon}_{quad}^- = E_S \left(\Pi_S^- \left(\mu_{\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{I}}_S^- \left(\nu_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right) = E_S \left(\Pi_S^- \left(\mu_{\mathcal{K}_S^+} \right) - \tilde{\mathfrak{I}}_S^- \circ \mathcal{P}_\alpha \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{I}}_S^- \left(\nu_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right). \quad (2.222)$$

Preuve. Du fait de la linéarité de E_S , il suffit de montrer que :

$$E_S \left(\tilde{\mathfrak{I}}_S^- \circ \mathcal{P}_\alpha \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{I}}_S^- \left(\nu_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right) = 0. \quad (2.223)$$

Pour ce faire, développons ce terme :

$$E_S \left(\tilde{\mathfrak{I}}_S^- \circ \mathcal{P}_\alpha \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{I}}_S^- \left(\nu_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right) = \sum_{\substack{\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^-, \\ \tilde{f} \subset \partial K}} \left[\int_{\tilde{f}} P_{\alpha, \tilde{f}} \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \cdot \nu_{hK} ds - \left\langle P_{\alpha, \tilde{f}} \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \nu_{hK} \right\rangle_{\tilde{f}}^- \right], \quad (2.224)$$

avec $P_{\alpha, \tilde{f}} \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right)$ la composante de $\mathcal{P}_\alpha \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right)$ sur la face \tilde{f} . Or, la quantité :

$$P_{\alpha, \tilde{f}} \left(\mu_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \cdot \nu_{hK}, \quad (2.225)$$

est de degré :

$$\min\{\alpha, p^+\} + p^- \leq p^- + \alpha, \quad (2.226)$$

d'où le résultat. ■

Il est alors possible d'établir une majoration de $\tilde{\epsilon}_{quad}^-$:

Proposition 2.30 *Si les hypothèses (H4) et (H5) sont satisfaites, alors on a l'estimation suivante :*

$$|\tilde{\epsilon}_{quad}^-| \leq C_{quad} h^{\min\{\alpha, \beta\}+1}, \quad (2.227)$$

avec $C_{quad} > 0$ indépendante de h .

Preuve. L'identité (2.210) et le lemme 2.29 permettent d'écrire que :

$$\tilde{\epsilon}_{quad}^- = E_S^1 \left(\tilde{i}_S^- \left[\left(\tilde{\Pi}_S^- - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \circ \mathcal{P}_\alpha \right) \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \mathbf{I}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right] \right) - E_S^2 \left(\left(\tilde{\Pi}_S^- - \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \circ \mathcal{P}_\alpha \right) \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^+} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\mathcal{K}_S^-} \right) \right). \quad (2.228)$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire et en appliquant les résultats des lemmes 2.27 et 2.28, on obtient :

$$|\tilde{\epsilon}_{quad}^-| \leq C_1 \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \left| \tilde{i}_S^- \left[\left(\tilde{\Pi}_S^- - \tilde{\mathcal{P}}_\alpha \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right] \right|_{0, \tilde{\mathcal{F}}_S} h + C_2 \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \left| \left(\tilde{\Pi}_S^- - \tilde{\mathcal{P}}_\alpha \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right|_{0, \tilde{\mathcal{F}}_S} h \quad (2.229)$$

$$\leq \max\{C_1, C_2\} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \left| \left(\tilde{\Pi}_S^- - \tilde{\mathcal{P}}_\alpha \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right|_{0, \tilde{\mathcal{F}}_S} h. \quad (2.230)$$

Or, en prenant $\tilde{\mathcal{P}}_\alpha = \tilde{\mathcal{B}}_\alpha$, la projection issue du théorème de Bramble-Hilbert (voir par exemple le lemme 4 p147 de [31]), on a :

$$\left| \left(\tilde{\Pi}_S^- - \tilde{\mathcal{P}}_\alpha \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right|_{0, \tilde{\mathcal{F}}_S} \leq \left| \left(\tilde{\Pi}_S^- - \tilde{\mathcal{L}}_S^+ \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right|_{0, \tilde{\mathcal{F}}_S} + \left| \left(\tilde{\mathcal{L}}_S^+ - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right) \right|_{0, \tilde{\mathcal{F}}_S} \quad (2.231)$$

$$\leq C_3 h^\beta + C_4 \left[\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right]_{\alpha+1, \tilde{\mathcal{S}}}, \quad (2.232)$$

avec $C_4 > 0$ une constante indépendante du maillage, et :

$$\left[\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right]_{\alpha+1, \tilde{\mathcal{S}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \left| \frac{\partial^{\alpha+1} \tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+}}{\partial \tilde{x}_i^{\alpha+1}} \right|^2}. \quad (2.233)$$

Or, on a l'inégalité (lemme 2.4 de [73]) :

$$\left[\tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right]_{\alpha+1, \tilde{\mathcal{S}}} \leq C_5 h^\alpha \left\| \tilde{\mathbf{u}}_{h\mathcal{K}_S^+} \right\|_{0,S}, \quad (2.234)$$

d'où l'on déduit finalement :

$$|\tilde{\epsilon}_{quad}^-| \leq C_{quad} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} h^{\min\{\alpha, \beta\}+1}. \quad (2.235)$$

■

Enfin, nous avons l'estimation suivante de l'erreur de projection :

Proposition 2.31 *Si l'hypothèse (H5) est satisfaite, alors on a l'estimation suivante :*

$$|\tilde{\epsilon}_{proj}^-| \leq C_{proj} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} h^{\beta+1}, \quad (2.236)$$

avec $C_{proj} > 0$ indépendante de h .

Preuve. En utilisant l'identité (2.209) et le lemme 2.27, on a :

$$|\tilde{\epsilon}_{proj}^-| = \left| E_S^1 \left(\mathbf{I}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\kappa_S^+} \right) - \tilde{\mathbf{i}}_S^- \left(\mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\kappa_S^+} \right) \right), \mathbf{I}_S^- \left(\mathbf{v}_{h\kappa_S^-} \right) \right) \right| \quad (2.237)$$

$$\leq C_1 h \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \left| \mathbf{I}_S^+ \left(\mathbf{u}_{h\kappa_S^+} \right) - \tilde{\mathbf{i}}_S^- \left(\mathbf{\Pi}_S^- \left(\mathbf{u}_{h\kappa_S^+} \right) \right) \right|_{0,\tilde{\mathcal{F}}_S^{max}}. \quad (2.238)$$

Alors, en remarquant que (H5) permet d'écrire :

$$\left| \left[\tilde{\mathbf{i}}_S^- \left(\tilde{\mathbf{\Pi}}_S^- \right) - \tilde{\mathbf{I}}_S^+ \right] \left(\tilde{\mathbf{u}}_{h\kappa_S^+} \right) \right|_{0,\tilde{\mathcal{F}}_S^{max}} \leq C'_3 h^\beta \quad (2.239)$$

on obtient le résultat voulu. ■

Ainsi, en combinant les propositions 2.31 et 2.30, on obtient le résultat souhaité (2.200).

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en place une méthode de condensation de flux hp non-conformes, dans le but de pallier la problématique d'augmentation des temps de calcul sur maillage hybride identifiée dans le chapitre précédent. Cette méthode permet de construire une approximation des termes de flux classiques, en réinterprétant les situations de non-conformité, associées à des coûts de calcul élevés, en situations pseudo-conformes, sur lesquelles il va être possible de retrouver des performances avantageuses. Ces flux approchés, appelés flux condensés, sont définis en substituant le produit scalaire L^2 classique par des produits scalaires sur des espaces d'approximation appauvris et en introduisant des opérateurs de trace adaptés aux configurations hp considérées, permettant de recréer une homogénéité d'espaces au sein du terme de flux. Le schéma GDDT résultant est appelé schéma GDDT condensé.

L'analyse de l'énergie du schéma GDDT condensé a permis d'établir plusieurs hypothèses sur les produits scalaires et les opérateurs de traces introduits, garantissant la stabilité de l'approche sous une condition de type CFL. Ces hypothèses permettent de conserver certaines propriétés des flux classiques intervenant dans les mécanismes de stabilité du schéma. Ainsi, la condition (H2) permet d'assurer la symétrie de la partie centrée des flux condensés et garantir la conservation de l'énergie du système. Les conditions (H2) et (H3) permettent quant à elles d'assurer la positivité de la partie décentrée du flux, garantissant la décroissance de l'énergie pour ce type de résolution.

En étudiant numériquement la consistance en h de l'approximation GD, nous avons mis en évidence la sur-précision des termes de flux hp non-conformes classiques, donnant une nouvelle justification de leur important coût de calcul. Plus particulièrement, nous avons exhibé un phénomène de saturation sur l'ordre de convergence de ces termes, montrant qu'il est possible d'en détériorer, dans une certaine mesure, la précision sans impacter la consistance globale du schéma.

Ces résultats légitimant la méthode de condensation de flux hp non-conformes développée, nous avons cherché à justifier théoriquement la consistance du schéma GDDT condensé. Pour ce faire, nous avons établi la convergence en h des flux condensés vers les flux classiques, sous deux hypothèses supplémentaires. La première condition, (H4), porte sur les produits scalaires condensés et impose qu'ils définissent une formule de quadrature d'un certain ordre, dépendant de la configuration hp considérée. La seconde, (H5), concerne les opérateurs de trace condensée et permet de contrôler l'erreur commise par rapport à l'opérateur de trace classique.

Cependant, avant d'envisager l'utilisation du schéma GDDT mis en place dans ce chapitre, de valider sa convergence et d'étudier son efficacité numérique, il reste à établir une méthode de construction pratique pour les flux condensés. Tous ces aspects relatifs à la mise en œuvre du schéma GDDT condensé sont traités dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Mise en œuvre du schéma GDDT condensé

Sommaire

3.1	Méthode de construction de flux condensés pour des configurations hp non-conformes tensorielles	126
3.1.1	Description du cadre d'étude adopté	127
3.1.2	Éléments de construction des flux unitaires	129
3.1.3	Bilan : <i>Modus operandi</i> de construction	136
3.2	Application à plusieurs interfaces hp non-conformes	137
3.2.1	Configuration $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$	137
3.2.2	Configuration $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$	141
3.2.3	Configuration $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$	143
3.3	Étude numérique de la convergence et des coûts de calcul	150
3.3.1	Présentation des cas-tests	151
3.3.2	Évaluation de la convergence en h	152
3.3.3	Analyse de l'efficacité numérique	157
3.3.4	Remarques sur le comportement numérique de la solution approchée	161
3.4	Conclusion	163

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que le calcul classique des termes de flux sur les interfaces hétérogènes en h ou en p pouvait provoquer une explosion des temps d'exécution du solveur GDDT. Ce phénomène s'avérait particulièrement bloquant au vu de la stratégie globale envisagée pour optimiser les performances de l'approche GD. Rappelons en effet qu'à terme, il s'agit de développer une méthode de h -déraffinement/ p -enrichissement réduisant le nombre d'éléments des maillages utilisés, afin de diminuer le stockage mémoire et la durée de la résolution. Il est donc essentiel d'assurer que le schéma présente des temps de calcul avantageux sur des configurations hp non-conformes.

Pour pallier cette difficulté, nous avons défini de nouveaux termes de flux moins coûteux, à partir d'opérateurs de trace condensée et de produits scalaires adaptés à la topologie hp des accolements entre les cellules. L'objectif recherché était de réinterpréter les interfaces hétérogènes en pseudo-interfaces homogènes, afin de généraliser le calcul condensé efficace des intégrales aux termes de flux non-conformes. L'analyse théorique du schéma GDDT résultant a montré que la stabilité et la consistance sont conditionnées par plusieurs hypothèses, portant sur les opérateurs et les produits scalaires définissant ces nouveaux flux.

Dès lors, plusieurs interrogations liées à la mise en œuvre du schéma GDDT condensé se présentent. La première porte sur la possibilité de construire, pour toute surface d'échange hp , des flux condensés efficaces numériquement et qui soient admissibles, c'est-à-dire qui vérifient les hypothèses de stabilité et de consistance exhibées. L'existence de flux condensés admissibles n'est pas remise en cause, car nous

avons vu que les flux classiques en sont un cas particulier. En revanche, l'existence de flux condensés pour tout raccord non-conforme qui soient admissibles, différents des flux classiques, et qui présentent des coûts de calcul avantageux, n'est pas évidente *a priori*.

Un deuxième point à étudier concerne la convergence du schéma condensé. Si la stabilité et la consistance sont théoriquement contrôlées, il reste cependant à vérifier numériquement que l'on obtient bien un ordre de convergence suffisamment élevé pour présenter un intérêt pratique.

Puis, il est connu que des réflexions parasites numériques peuvent apparaître au niveau des interfaces non-conformes d'un maillage hybride [74]. Il est donc légitime d'envisager que ce phénomène puisse être aggravé par l'utilisation de flux approchés. Se pose donc la question de la qualité du schéma GDDT condensé. En particulier, son niveau de précision vis-à-vis de la référence Q^1 est un enjeu central pour la viabilité de notre stratégie.

Vient enfin l'aspect des performances numériques. En effet, ce schéma a été conçu pour répondre à une problématique de coûts de calcul sur maillage hybride. La question naturelle qui se pose alors est celle des gains en efficacité numérique atteignables en pratique par l'approche de condensation développée, l'enjeu étant de réhabiliter la stratégie d'optimisation globale envisagée.

Dans ce contexte, ce chapitre répond à trois objectifs : la définition d'un procédé de construction de flux condensés admissibles et numériquement efficaces, la validation de la bonne tenue du schéma du point de vue de la qualité et de la convergence, et l'évaluation des gains en coûts de calcul permis par la méthode. Il est donc organisé en trois temps.

Nous commençons par mettre en place une méthodologie de construction des opérateurs de trace condensée et des produits scalaires associés, permettant d'assurer que les flux condensés satisfont les conditions de stabilité, et certains *a priori* de consistance. Afin de faciliter le processus et de le rendre systématique, nous nous restreignons à un type particulier d'accolements non-conformes, formant des surfaces d'échange *hp* tensorielles. Les quantités sont alors construites sur un représentant unitaire 1D de l'interface hétérogène considérée, puis ramenées en 2D par tensorisation, pour finalement être transportées sur la configuration réelle.

Dans un second temps, nous appliquons ce *modus operandi* de construction à plusieurs configurations *hp* non-conformes. Ces configurations, présentant des topologies et des degrés d'approximations différents, sont choisies pour leur intérêt pratique du point de vue de la stratégie de post-maillage que nous voulons mettre en place par la suite.

En dernier lieu, nous procédons à plusieurs expériences numériques sur des maillages hybrides faisant intervenir les configurations *hp* préalablement considérées. L'objectif est double. D'une part, nous cherchons à valider la convergence du schéma pour les flux condensés construits, et, d'autre part, à évaluer sa qualité et ses performances numériques par rapport à la résolution de référence. Nous concluons alors sur le caractère utilisable du schéma condensé pour les applications visées.

Dans ce qui suit, nous nous plaçons exclusivement sur maillage cartésien.

3.1 Méthode de construction de flux condensés pour des configurations *hp* non-conformes tensorielles

Cette section est consacrée à la mise en place d'un guide pratique de construction des flux condensés. Pour être viable, la méthodologie proposée doit garantir la convergence du schéma. Il suffit donc qu'elle conduise à des flux condensés admissibles, c'est-à-dire satisfaisant les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, **(H2)**, **(H3)**, **(H4)** et **(H5)** établies dans le chapitre précédent.

Rappelons que les flux condensés définis sur une surface d'échange S correspondent à la quantité :

$$\left\langle n_S \wedge \Pi_S^\pm \left(u_{h\kappa_S^\pm} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^\pm \left(v_{h\kappa_S^\pm} \right) \right\rangle_S^\pm \simeq \int_S n_S \wedge I_S^\pm \left(u_{h\kappa_S^\pm} \right) \cdot I_S^\mp \left(v_{h\kappa_S^\mp} \right) ds, \quad (3.1)$$

pour $(u_h, v_h) \in U_h^2$, et sont caractérisés par le couple formé d'un opérateur de trace condensée :

$$\Pi_S^\pm : \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\pm} Q^{p\kappa}(K) \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}}_S^\pm, \quad (3.2)$$

allant de l'espace d'approximation par morceaux situé d'un côté de l'accolement à l'espace de calcul condensé correspondant, et d'un produit scalaire sur $\tilde{\mathbf{Q}}_S^\pm$, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^\pm$ et s'écrivant :

$$\left\langle n_S \wedge \Pi_S^\pm \left(u_{h\mathcal{K}_S^\mp} \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^\pm \left(v_{h\mathcal{K}_S^\pm} \right) \right\rangle_S^\pm = \sum_{\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{F}}_S^\pm} \left\langle n_S \wedge \Pi_S^\pm \left(u_{h\mathcal{K}_S^\mp} \right) |_{\tilde{f}}, \tilde{\mathfrak{J}}_S^\pm \left(v_{h\mathcal{K}_S^\pm} \right) |_{\tilde{f}} \right\rangle_{\tilde{f}}^\pm. \quad (3.3)$$

Chaque terme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{f}}^\pm$ définit de plus un produit scalaire local sur $\tilde{\mathbf{Q}}_S^\pm|_{\tilde{f}}$, posé sous la forme :

$$\forall (\phi, \psi) \in \left(\tilde{\mathbf{Q}}_S^\pm|_{\tilde{f}} \right)^2, \quad \langle \phi, \psi \rangle_{\tilde{f}}^\pm = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \sum_{i=1}^{N_\alpha^\pm} \omega_{\tilde{f}, \alpha, i}^\pm \phi_\alpha \left(x_{\tilde{f}, \alpha, i}^\pm \right) \psi_\alpha \left(x_{\tilde{f}, \alpha, i}^\pm \right). \quad (3.4)$$

De prime abord, la construction pratique de flux condensés admissibles paraît difficile, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, plusieurs des hypothèses à satisfaire ne portent pas séparément sur les opérateurs d'une part et sur les produits scalaires d'autre part, mais directement sur les flux condensés qui couplent ces quantités. On doit donc *a priori* les construire conjointement. De plus, si la construction des produits scalaires peut être en partie guidée, comme nous allons le voir, par le choix de recréer une collocation aux degrés de liberté dans la formule (3.4), celles des opérateurs de trace est en revanche beaucoup moins intuitive, en particulier pour des structures de non-conformités irrégulières. Par ailleurs, les termes de flux étant définis sur des interfaces 2D, le nombre de degrés de liberté mis en jeu croît rapidement avec les ordres d'approximation ou le nombre de facettes de la surface d'échange, ce qui complexifie les calculs.

Ainsi, afin d'aboutir à une méthode générale, nous allons commencer par mettre en place des moyens permettant de faciliter la construction des quantités en nous restreignant à des surfaces d'échange présentant une topologie simplifiée *hp* tensorielle. Dans ce cas particulier, nous allons voir qu'il est possible de travailler sur des termes unitaires 1D plus facilement manipulables, pour revenir ensuite aux flux condensés réels par tensorisation.

3.1.1 Description du cadre d'étude adopté

Nous nous intéressons donc dans ce qui suit au cas particulier de configurations non-conformes formant des surfaces d'échange *hp* tensorielles. Nous désignons par ce terme les surfaces d'échange $S \simeq [a, b] \times [c, d]$ (où la notation \simeq signifie "isomorphe à") caractérisées par :

- une structure en h résultant d'un produit cartésien de maillages des segments $[a, b]$ et $[c, d]$, notés $I_\alpha^\pm \in \mathcal{T}_h([a, b])$ et $I_{\alpha'}^\pm \in \mathcal{T}_h([c, d])$, avec $(\alpha, \alpha') \in \{x, y, z\}^2$:

$$\bigcup_{f^\pm \in \mathbb{F}_S^\pm} f^\pm \simeq I_\alpha^\pm \times I_{\alpha'}^\pm, \quad (3.5)$$

- une structure en p formée par le produit tensoriel des espaces $Q_m^{p^\pm}(I_\alpha^\pm)$ et $Q_m^{p^\pm}(I_{\alpha'}^\pm)$, constitués des polynômes de degré p^\pm définis par morceaux sur les pavés I_α^\pm et $I_{\alpha'}^\pm$:

$$\mathbf{Q}_S^\pm \simeq Q_m^{p^\pm}(I_\alpha^\pm) \otimes Q_m^{p^\pm}(I_{\alpha'}^\pm). \quad (3.6)$$

On illustre sur la figure 3.1 ci dessous un exemple de surface d'échange *hp* tensorielle.

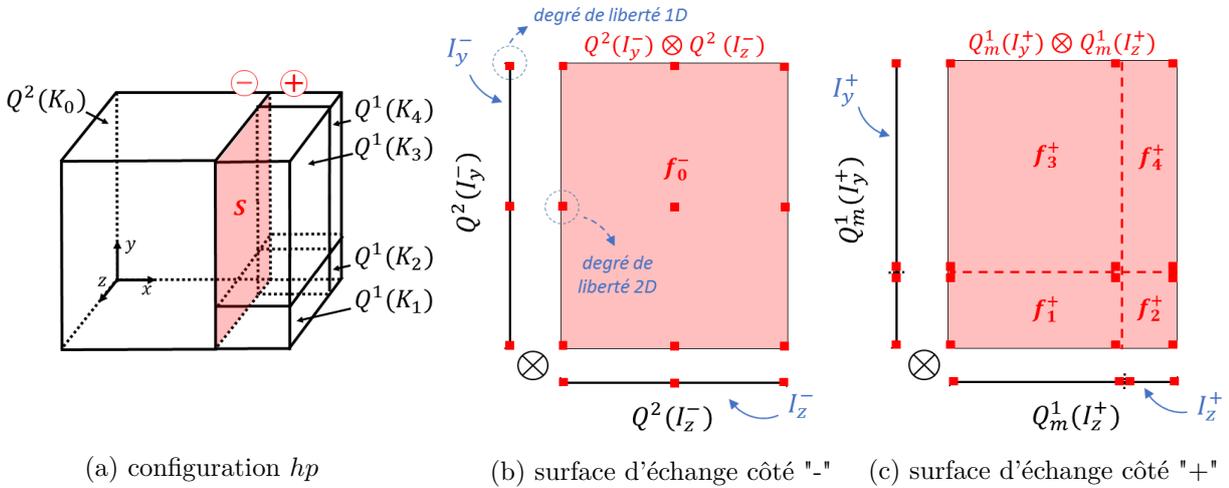


FIGURE 3.1 – Exemple de configuration hp non-conforme formant une surface d'échange tensorielle.

Soulignons que l'identité (3.5) impose la structure géométrique générale de l'accolement de part et d'autre de la surface d'échange. Ainsi, par exemple, les configurations de la figure 3.2 ne seront pas prises en compte, car ce critère de tensorialité n'est pas respecté du côté "+" de la surface d'échange.

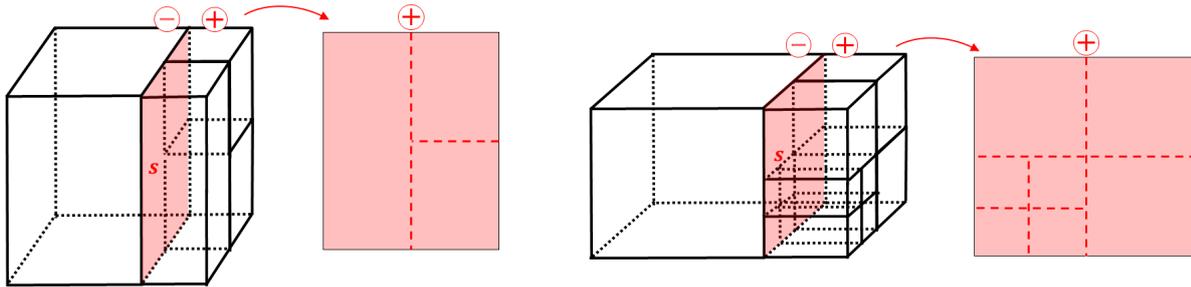


FIGURE 3.2 – Exemples de surfaces d'échange non tensorielles : l'accolement du côté "-" de l'interface est licite, alors que celui du côté "+" ne respecte pas le critère (3.5).

De manière générale, une configuration hp non-conforme tensorielle peut faire intervenir des éléments de degrés différents par direction, que ce soit du côté "+" ou "-" de l'interface, pour former des surfaces d'échange du type de la figure 3.3. Cependant, pour plus de simplicité, ces configurations ne seront pas prises en compte dans la suite. Nous ne considérerons donc que des surfaces d'échange qui sont homogènes en p sur les morceaux de S^+ et sur les morceaux de S^- .

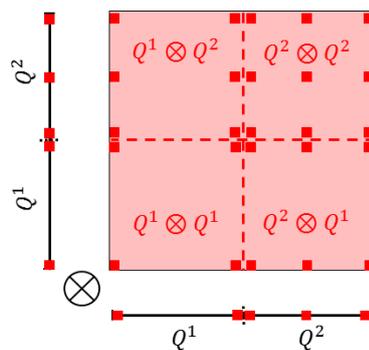


FIGURE 3.3 – Exemple de surface d'échange tensorielle non prise en compte dans la suite des travaux.

Enfin, dans ce qui suit, nous choisirons l'espace des traces réelles comme espace de calcul des flux condensés, c'est-à-dire que nous aurons l'identité :

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S^\pm = \mathbf{Q}_S^\pm. \quad (3.7)$$

On aura alors notamment les simplifications :

$$\tilde{\mathbb{F}}_S^\pm = \mathbb{F}_S^\pm \quad \text{et} \quad \tilde{\mathfrak{J}}_S^\pm = Id. \quad (3.8)$$

Ce cadre d'étude, bien que restreint, présente néanmoins un véritable intérêt applicatif, comme nous verrons plus loin grâce aux exemples numériques. Dans le paragraphe suivant, nous poursuivons notre démarche de simplification en montrant l'intérêt de se placer au niveau des configurations hp non-conformes unitaires.

3.1.2 Éléments de construction des flux unitaires

La construction de flux condensés, au cas par cas selon la surface d'échange considérée, semble trop fastidieux. En effet, nous voudrions que, pour des topologies d'accolement hp identiques (voir l'exemple de la figure 3.4), les flux condensés puissent se transporter d'une configuration à l'autre, afin de n'avoir à les construire qu'une seule fois. C'est pourquoi nous allons chercher à définir les flux condensés directement au niveau des configurations d'accolement unitaires (voir paragraphe 2.1.2), pour les transporter par la suite aux configurations réelles. Ce faisant, nous allons de plus pouvoir profiter de la symétrie des surfaces d'échange unitaires pour simplifier la construction des opérateurs de trace et des produits scalaires associés.

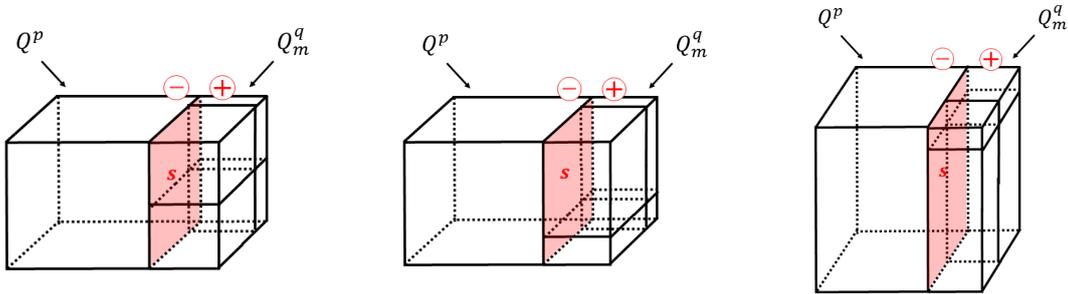


FIGURE 3.4 – Exemples de configurations non-conformes présentant la même topologie hp : le nombre d'éléments ainsi que les espaces d'approximation locaux mis en jeu sont identiques, et les facettes qui constituent les surfaces d'échange ne diffèrent que d'un facteur d'échelle.

La mise en place de cette stratégie repose cependant sur deux processus fondamentaux que nous étudions dans ce qui suit : transporter les opérateurs de trace et les produits scalaires condensés de la surface d'échange unitaire à la surface d'échange réelle ; et construire ces quantités sur la surface d'échange unitaire de sorte que les flux condensés réels soient admissibles.

3.1.2.1 Passage des flux condensés unitaires aux flux condensés réels

Comme nous avons vu au chapitre précédent, le passage entre configurations d'accolement réelle et unitaire est assuré par les transformations $\tilde{T}_{S,K}$ définies dans le paragraphe 2.1.2, qui sont affines dans notre cadre d'application (maillages cartésiens). Le caractère hp tensoriel d'une surface d'échange est donc conservé au cours du passage de la configuration unitaire à la configuration réelle.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini l'opérateur de trace unitaire $\check{\Pi}_S^\pm$ à partir de l'opérateur de trace réel Π_S^\pm , selon la relation :

$$\check{\Pi}_S^\pm \left(\check{u}_{h\kappa_S^\mp} \right) := D\tilde{T}_{S,\pm}^{-1} \Pi_S^\pm \left(D\tilde{T}_{S,\mp}^{*,-1} \check{u}_{h\kappa_S^\mp} \right). \quad (3.9)$$

De même, on définit naturellement le produit scalaire condensé unitaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^\pm$ à partir du produit scalaire condensé sur le maillage réel $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^\pm$ de la manière suivante :

$$\left\langle \check{u}_{h\mathcal{K}_S^\pm}, \check{v}_{h\mathcal{K}_S^\pm} \right\rangle_S^\pm := \left\langle D\check{T}_{S,\pm}^* u_{h\mathcal{K}_S^\mp}, D\check{T}_{S,\pm}^* v_{h\mathcal{K}_S^\mp} \right\rangle_S^\pm. \quad (3.10)$$

Dans ce qui suit, nous cherchons alors à construire ces quantités unitaires de sorte que les quantités réelles correspondantes vérifient les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, **(H2)**, **(H3)**, **(H4)** et **(H5)**, afin de garantir finalement la convergence du schéma GDDT condensé.

3.1.2.2 Structure de l'opérateur de trace condensée unitaire

On commence par montrer que l'hypothèse **(H1)** peut être facilement satisfaite si l'opérateur de trace présente une structure adaptée.

Proposition 3.1 *Soit $S \in \mathcal{S}_h$ de normale $\mathbf{n}_S \in \mathbb{R}^3$. Si l'opérateur de trace condensée unitaire $\check{\Pi}_S^\pm$ s'écrit sous la forme :*

$$\check{\Pi}_S^\pm = \begin{pmatrix} (1 - |\check{n}_{S,x}|)\check{\Pi}_S^\pm & 0 & 0 \\ 0 & (1 - |\check{n}_{S,y}|)\check{\Pi}_S^\pm & 0 \\ 0 & 0 & (1 - |\check{n}_{S,z}|)\check{\Pi}_S^\pm \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

avec :

$$\check{\Pi}_S^\pm : \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\mp} Q^{p_K}(\check{K}) \rightarrow \check{\mathbb{Q}}_S^\pm, \quad (3.12)$$

alors l'hypothèse **(H1)** est satisfaite.

Preuve. Les matrices jacobiennes de $\check{T}_{S,\pm}$, $D\check{T}_{S,\pm}$, étant diagonales sur les maillages cartésiens, la relation (3.9) conserve la structure de l'opérateur $\check{\Pi}_S^\pm$, de sorte qu'il existe :

$$\Pi_S^\pm : \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\mp} Q^{p_K}(K) \rightarrow \mathbb{Q}_S^\pm, \quad (3.13)$$

tel que :

$$\Pi_S^\pm = \begin{pmatrix} (1 - |n_{S,x}|)\Pi_S^\pm & 0 & 0 \\ 0 & (1 - |n_{S,y}|)\Pi_S^\pm & 0 \\ 0 & 0 & (1 - |n_{S,z}|)\Pi_S^\pm \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Soit alors $\mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h$ telle que :

$$\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^\mp} \in \text{Ker} \left(\gamma_{S,\mp}^2 \right). \quad (3.15)$$

Étant donné que pour tout $\alpha \in \{x, y, z\}$, $n_{S,\alpha} \in \{0, 1\}$ sur maillage cartésien, nécessairement $\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^\mp}$ est de la forme :

$$\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^\mp} = \begin{pmatrix} |n_{S,x}| u_{x,h\mathcal{K}_S^\mp} \\ |n_{S,y}| u_{y,h\mathcal{K}_S^\mp} \\ |n_{S,z}| u_{z,h\mathcal{K}_S^\mp} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

d'où :

$$\Pi_S^\pm \left(\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^\mp} \right) = \begin{pmatrix} (1 - |n_{S,x}|) |n_{S,x}| u_{x,h\mathcal{K}_S^\mp} \\ (1 - |n_{S,y}|) |n_{S,y}| u_{y,h\mathcal{K}_S^\mp} \\ (1 - |n_{S,z}|) |n_{S,z}| u_{z,h\mathcal{K}_S^\mp} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.17)$$

Ceci montre que la première partie de la condition **(H1)** est bien satisfaite :

$$\text{Ker} \left(\gamma_{S, \mp}^2 \right) \subset \text{Ker} \left(\Pi_S^\pm \right). \quad (3.18)$$

La deuxième partie de cette condition :

$$\text{Im} \left(\Pi_S^\pm \right) \subset \text{Ker} \left(\tilde{\gamma}_{S, \pm}^1 \right), \quad (3.19)$$

s'obtient facilement en remarquant que tout élément de $\text{Ker} \left(\tilde{\gamma}_{S, \pm}^1 \right)$ s'écrit nécessairement sous la forme :

$$\mathbf{u}_{h\mathcal{K}_S^\pm} = \begin{pmatrix} (1 - |n_{S,x}|)u_{x,h\mathcal{K}_S^\pm} \\ (1 - |n_{S,y}|)u_{y,h\mathcal{K}_S^\pm} \\ (1 - |n_{S,z}|)u_{z,h\mathcal{K}_S^\pm} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

■

Remarque 3.2 Par exemple, dans le cas où S est une surface d'échange de normale $\mathbf{n}_S = \mathbf{e}_x$, l'opérateur $\check{\Pi}_S^\pm$ s'écrira simplement :

$$\check{\Pi}_S^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\Pi}_S^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \check{\Pi}_S^\pm \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

On montre également la propriété suivante sur la commutation entre l'opérateur de trace et le produit vectoriel, qui nous sera utile pour prendre en compte les hypothèses de stabilité :

Proposition 3.3 Soit $S \in \mathcal{S}_h$. Si l'opérateur de trace condensée unitaire $\check{\Pi}_S^\pm$ est linéaire et s'il s'écrit sous la forme (3.11), on a :

$$\check{\mathbf{n}}_S \wedge \check{\Pi}_S^\pm(\cdot) = \check{\Pi}_S^\pm(\check{\mathbf{n}}_S \wedge \cdot) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^\pm(\cdot) = \Pi_S^\pm(\mathbf{n}_S \wedge \cdot). \quad (3.22)$$

Preuve. Soit $\mathbf{u}^\mp \in \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\mp} \mathbf{Q}^{p_K}(\mathbf{K})$. Par linéarité, on a :

$$\check{\Pi}_S^\pm(\check{\mathbf{n}}_S \wedge \check{\mathbf{u}}^\mp) = \begin{pmatrix} (1 - |\check{n}_{S,x}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{n}_{S,y}\check{u}_z^\mp - \check{n}_{S,z}\check{u}_y^\mp) \\ (1 - |\check{n}_{S,y}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{n}_{S,z}\check{u}_x^\mp - \check{n}_{S,x}\check{u}_z^\mp) \\ (1 - |\check{n}_{S,z}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{n}_{S,x}\check{u}_y^\mp - \check{n}_{S,y}\check{u}_x^\mp) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$= \begin{pmatrix} \check{n}_{S,y}(1 - |\check{n}_{S,x}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{u}_z^\mp) - \check{n}_{S,z}(1 - |\check{n}_{S,x}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{u}_y^\mp) \\ \check{n}_{S,z}(1 - |\check{n}_{S,y}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{u}_x^\mp) - \check{n}_{S,x}(1 - |\check{n}_{S,y}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{u}_z^\mp) \\ \check{n}_{S,x}(1 - |\check{n}_{S,z}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{u}_y^\mp) - \check{n}_{S,y}(1 - |\check{n}_{S,z}|)\check{\Pi}_S^\pm(\check{u}_x^\mp) \end{pmatrix} = \check{\mathbf{n}}_S \wedge \check{\Pi}_S^\pm(\check{\mathbf{u}}^\mp), \quad (3.24)$$

ce qui montre le résultat pour $\check{\Pi}_S^\pm$. Puis, en utilisant le fait que Π_S^\pm a la même structure diagonale que $\check{\Pi}_S^\pm$ sur maillage cartésien, la propriété de commutation avec \mathbf{n}_S s'obtient de la même manière. ■

3.1.2.3 Spécification des produits scalaires condensés unitaires

Nous spécifions ici le choix des points de collocation intervenant dans la définition des produits scalaires condensés. Dans le premier chapitre, nous avons vu que les importants temps d'exécution du schéma sur maillage hybride sont dûs à l'augmentation du nombre d'interpolations des fonctions de base, et, dans une moindre mesure, du nombre d'accès mémoire, dans la quadrature exacte des termes classiques de flux non-conformes. Nous allons donc chercher, dans le calcul des flux condensés, à minimiser le nombre d'accès mémoire, et à éviter les interpolations des fonctions de base. Pour ce faire, les points intervenant dans la définition des produits scalaires condensés sont choisis pour être colloqués au stencil définissant la base nodale de l'espace $\check{\mathbb{Q}}_S^\pm$ considérée (points de Gauss-Lobatto). Par ailleurs, toutes les composantes du champ électromagnétique appartenant au même espace d'approximation, nous choisissons de ne pas faire dépendre les poids des produits scalaires de la direction x , y ou z . Ainsi, les flux condensés unitaires vont s'écrire :

$$\forall (\check{u}^\pm, \check{v}^\pm) \in \left(\check{\mathbb{Q}}_S^\pm\right)^2, \quad \langle \check{u}^\pm, \check{v}^\pm \rangle_S^\pm = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_{\check{f} \in \check{\mathbb{F}}_S^\pm} \sum_{i=1}^{N^\pm} \check{\omega}_{\check{f}^\pm, i}^\pm \check{u}_{\alpha, \check{f}^\pm, i}^\pm \check{v}_{\alpha, \check{f}^\pm, i}^\pm, \quad (3.25)$$

avec $\{\check{u}_{\alpha, \check{f}^\pm, i}^\pm\}$ et $\{\check{v}_{\alpha, \check{f}^\pm, i}^\pm\}$ les degrés de liberté des polynômes \check{u}^\pm et \check{v}^\pm sur la face \check{f} .

Remarque 3.4 *Le choix de colloquer les points des produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_S^\pm$ aux degrés de liberté est à l'origine de l'appellation de "flux condensés".*

Pour la suite, il sera utile d'écrire cette identité sous la forme matricielle suivante :

$$\langle \check{u}^\pm, \check{v}^\pm \rangle_S^\pm = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \left(\check{u}_\alpha^\pm\right)^T \check{\Theta}_S^\pm \check{v}_\alpha^\pm, \quad (3.26)$$

avec :

- $\check{\Theta}_S^\pm \in \mathbb{R}^{N^\pm \times N^\pm}$ est la matrice de la forme bilinéaire définie sur $\check{\mathbb{Q}}_S^\pm \times \check{\mathbb{Q}}_S^\pm$ associée au produit scalaire condensé, rendue diagonale du fait de la collocation aux degrés de liberté, et définie par blocs sur les $\check{f}^\pm \in \check{\mathbb{F}}_S^\pm$,
- \check{u}_α^\pm et \check{v}_α^\pm sont des vecteurs constitués des degrés de liberté de \check{u}^\pm et \check{v}^\pm .

Nous pouvons à présent nous concentrer sur la construction des flux condensés unitaires.

3.1.2.4 Tensorisation de flux condensés 1D

Le cadre d'étude mis en place va nous permettre de construire les opérateurs de trace et les produits scalaires condensés unitaires sur un représentant 1D de l'accolement hp non-conforme, puis de déduire les flux condensés unitaires 2D via des résultats de tensorisation.

Dans ce qui suit, on notera $\underline{A} \otimes \underline{B}$ pour désigner le produit de Kronecker des matrices \underline{A} et \underline{B} . Nous noterons également $\check{\mathfrak{J}}_S^\pm : \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\pm} Q^{p_K}(K) \rightarrow \mathbb{Q}_S^\pm$ les applications coordonnées de $\check{\mathfrak{J}}_S^\pm$ (identiques selon x , y , et z), et $\Delta_S^\pm : \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\pm} Q^{p_K}(K) \rightarrow \mathbb{Q}_S^\pm$ l'application restriction 1D sur S :

$$\forall (x, y, z) \in \bigcup_{K \in \mathcal{K}_S^\pm} K, \quad \forall u^\pm \in \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\pm} Q^{p_K}(K), \quad \Delta_S^\pm(u^\pm)(x, y, z) = \begin{cases} u^\pm(x_S, y, z) & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_x, \\ u^\pm(x, y_S, z) & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_y, \\ u^\pm(x, y, z_S) & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_z, \end{cases} \quad (3.27)$$

où α_S est la coordonnée de la surface S de normale $\mathbf{n}_S = \mathbf{e}_\alpha$ (surface contenue dans le plan d'équation $\alpha = \alpha_S$). En exploitant le caractère tensoriel des configurations d'accolement considérées, les matrices des applications traces $\tilde{\mathfrak{J}}_S^\pm$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\tilde{\mathfrak{J}}_S^\pm = \begin{cases} \underline{\underline{\Delta_S^\pm}} \otimes \underline{\underline{Id}} \otimes \underline{\underline{Id}} & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_x, \\ \underline{\underline{Id}} \otimes \underline{\underline{\Delta_S^\pm}} \otimes \underline{\underline{Id}} & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_y, \\ \underline{\underline{Id}} \otimes \underline{\underline{Id}} \otimes \underline{\underline{\Delta_S^\pm}} & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_z. \end{cases} \quad (3.28)$$

On montre alors le résultat fondamental suivant, assurant le passage entre flux condensés unitaires 1D et 2D, de sorte à assurer les hypothèses de stabilité du schéma :

Théorème 3.5 *On suppose que pour tout $(\check{u}^+, \check{v}^-) \in Q_m^{p^+}(\check{I}^+) \times Q_m^{p^-}(\check{I}^-)$ (fonctions polynômiales par morceaux de $\check{I}^\pm \rightarrow \mathbb{R}$), l'hypothèse de symétrie des flux centrés est vérifiée en 1D :*

$$\left\langle \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+), \check{v}^- \right\rangle_{\check{I}}^- = \left\langle \check{u}^+, \check{\Pi}_I^+(\check{v}^-) \right\rangle_{\check{I}}^+. \quad (3.29)$$

En prenant $\check{\Pi}_S^\pm$ assemblés par blocs sous la forme (3.11) et avec :

$$\check{\Pi}_S^\pm = \begin{cases} \underline{\underline{\check{\Delta}_S^\mp}} \otimes \underline{\underline{\check{\Pi}_I^\pm}} \otimes \underline{\underline{\check{\Pi}_I^\pm}} & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_x, \\ \underline{\underline{\check{\Pi}_I^\pm}} \otimes \underline{\underline{\check{\Delta}_S^\mp}} \otimes \underline{\underline{\check{\Pi}_I^\pm}} & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_y, \\ \underline{\underline{\check{\Pi}_I^\pm}} \otimes \underline{\underline{\check{\Pi}_I^\pm}} \otimes \underline{\underline{\check{\Delta}_S^\mp}} & \text{si } \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{e}_z, \end{cases} \quad (3.30)$$

alors les conditions **(H2)** et **(H2)** sont vérifiées pour les espaces de traces et les produits scalaires condensés définis respectivement par :

$$\check{\mathfrak{Q}}_S^\pm = Q_m^{p^\pm}(\check{I}^\pm) \otimes Q_m^{p^\pm}(\check{I}^\pm) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\check{\Theta}}_S^\pm} = \underline{\underline{\check{\Theta}_I^\pm}} \otimes \underline{\underline{\check{\Theta}_I^\pm}}. \quad (3.31)$$

En supposant de plus que $\check{\Pi}_I^+$ est surjectif et que :

$$\check{\Pi}_I^+ \circ \check{\Pi}_I^- = Id, \quad (3.32)$$

alors **(H3)** est satisfaite.

Preuve. On montre le résultat dans le cas particulier d'une surface d'échange S de normale $\mathbf{n}_S = \mathbf{e}_x$, les autres cas se déduisant sans difficulté. Le point de départ est la réécriture de l'hypothèse (3.29) sous la forme matricielle suivante :

$$\left(\underline{\underline{\check{\Pi}_I^-}} \right)^T \underline{\underline{\check{\Theta}_I^-}} = \underline{\underline{\check{\Theta}_I^+}} \underline{\underline{\check{\Pi}_I^+}}. \quad (3.33)$$

Prenons alors $\alpha \in \{x, y, z\}$. On a :

$$\left(\underline{\check{\Pi}}_S^- (\check{u}_\alpha^+) \right)^T \underline{\check{\Theta}}_S^- \underline{\check{J}}_S^- (\check{v}_\alpha^-) \quad (3.34a)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^+ \right)^T \left(\underline{\check{\Pi}}_S^- \right)^T \underline{\check{\Theta}}_S^- \underline{\check{J}}_S^- \check{v}_\alpha^- \quad (3.34b)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^+ \right)^T \left(\underline{\check{\Delta}}_S^{+T} \otimes \underline{\check{\Pi}}_I^{-T} \otimes \underline{\check{\Pi}}_I^{-T} \right) \left(\underline{\mathbb{1}} \otimes \underline{\check{\Theta}}_I^- \otimes \underline{\check{\Theta}}_I^- \right) \left(\underline{\check{\Delta}}_S^- \otimes \underline{Id} \otimes \underline{Id} \right) \check{v}_\alpha^- \quad (3.34c)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^+ \right)^T \left(\underline{\check{\Delta}}_S^{+T} \underline{\mathbb{1}} \underline{\check{\Delta}}_S^- \right) \otimes \left(\left(\underline{\check{\Pi}}_I^- \right)^T \underline{\check{\Theta}}_I^- \underline{Id} \right) \otimes \left(\left(\underline{\check{\Pi}}_I^- \right)^T \underline{\check{\Theta}}_I^- \underline{Id} \right) \check{v}_\alpha^- \quad (3.34d)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^+ \right)^T \left(\underline{\check{\Delta}}_S^{+T} \underline{\mathbb{1}} \underline{\check{\Delta}}_S^- \right) \otimes \left(\underline{Id} \underline{\check{\Theta}}_I^+ \underline{\check{\Pi}}_I^+ \right) \otimes \left(\underline{Id} \underline{\check{\Theta}}_I^+ \underline{\check{\Pi}}_I^+ \right) \check{v}_\alpha^- \quad (3.34e)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^+ \right)^T \left(\underline{\check{\Delta}}_S^+ \otimes \underline{Id} \otimes \underline{Id} \right)^T \left(\underline{\mathbb{1}} \otimes \underline{\check{\Theta}}_I^+ \otimes \underline{\check{\Theta}}_I^+ \right) \left(\underline{\check{\Delta}}_S^- \otimes \underline{\check{\Pi}}_I^+ \otimes \underline{\check{\Pi}}_I^+ \right) \check{v}_\alpha^- \quad (3.34f)$$

$$= \left(\underline{\check{J}}_S^+ (\check{u}_\alpha^+) \right)^T \underline{\check{\Theta}}_S^+ \underline{\check{\Pi}}_S^+ (\check{v}_\alpha^-), \quad (3.34g)$$

ce qui montre, en vertu de (3.26), que :

$$\left\langle \underline{\check{\Pi}}_S^- (\check{u}^+), \underline{\check{\mathfrak{J}}}_S^- (\check{u}^-) \right\rangle_{\check{S}}^- = \left\langle \underline{\check{\mathfrak{J}}}_S^+ (\check{u}^+), \underline{\check{\Pi}}_S^+ (\check{u}^-) \right\rangle_{\check{S}}^+. \quad (3.35)$$

En utilisant (3.9), on obtient alors :

$$\left\langle \underline{\Pi}_s^- (u^+), \underline{\tilde{\mathfrak{J}}}_s^- (u^-) \right\rangle_s^- = \left\langle \underline{\tilde{\mathfrak{J}}}_s^+ (u^+), \underline{\Pi}_s^+ (u^-) \right\rangle_s^+. \quad (3.36)$$

Ainsi, en prenant $\mathbf{u}^+ := \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}^+$ et en utilisant la propriété de commutation (3.22), il vient :

$$\left\langle \mathbf{n}_S \wedge \underline{\Pi}_s^- (u^+), \underline{\tilde{\mathfrak{J}}}_s^- (u^-) \right\rangle_s^- + \left\langle \underline{\tilde{\mathfrak{J}}}_s^+ (u^+), \mathbf{n}_S \wedge \underline{\Pi}_s^+ (u^-) \right\rangle_s^+ = 0, \quad (3.37)$$

ce qui montre que (H2) est vérifiée. De même, en prenant $\mathbf{u}^+ := \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}^+$, on montre que (H2) est bien satisfaite.

Passons maintenant à la deuxième partie de la proposition. Si $\underline{\check{\Pi}}_I^+$ est surjectif, alors il existe \check{u}^- tel que $\check{u}^+ = \underline{\check{\Pi}}_S^+ (\check{u}^-)$. En injectant dans (3.29) et en utilisant le fait que $\underline{\check{\Pi}}_I^+ \circ \underline{\check{\Pi}}_I^- = Id$, il vient :

$$\langle \check{u}^-, \check{v}^- \rangle_{\check{I}}^- = \left\langle \underline{\check{\Pi}}_I^+ (\check{u}^-), \underline{\check{\Pi}}_I^+ (\check{v}^-) \right\rangle_{\check{I}}^+, \quad (3.38)$$

ce qui peut également s'écrire :

$$\underline{\check{\Theta}}_I^- = \left(\underline{\check{\Pi}}_I^+ \right)^T \underline{\check{\Theta}}_I^+ \underline{\check{\Pi}}_I^+. \quad (3.39)$$

Alors, pour $\alpha \in \{x, y, z\}$:

$$\left(\check{J}_S^-(\check{u}_\alpha^-)\right)^T \check{\Theta}_S^- \check{J}_S^-(\check{v}_\alpha^-) \quad (3.40a)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^-\right)^T \check{J}_S^{-T} \check{\Theta}_S^- \check{J}_S^- \check{v}_\alpha^- \quad (3.40b)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^-\right)^T \left(\check{\Delta}_S^- \otimes Id \otimes Id\right)^T \left(\underline{1} \otimes \check{\Theta}_I^- \otimes \check{\Theta}_I^-\right) \left(\check{\Delta}_S^- \otimes Id \otimes Id\right) \check{v}_\alpha^- \quad (3.40c)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^-\right)^T \left(\check{\Delta}_S^{-T} \underline{1} \check{\Delta}_S^-\right) \otimes \left(Id \check{\Theta}_I^+ Id\right) \otimes \left(Id \check{\Theta}_I^+ Id\right) \check{v}_\alpha^- \quad (3.40d)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^-\right)^T \left(\check{\Delta}_S^{-T} \underline{1} \check{\Delta}_S^-\right) \otimes \left(\left(\check{\Pi}_I^+\right)^T \check{\Theta}_I^+ \check{\Pi}_I^+\right) \otimes \left(\left(\check{\Pi}_I^+\right)^T \check{\Theta}_I^+ \check{\Pi}_I^+\right) \check{v}_\alpha^- \quad (3.40e)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^-\right)^T \left(\check{\Delta}_S^- \otimes \check{\Pi}_I^+ \otimes \check{\Pi}_I^+\right)^T \left(\underline{1} \otimes \check{\Theta}_I^+ \otimes \check{\Theta}_I^+\right) \left(\check{\Delta}_S^- \otimes \check{\Pi}_I^+ \otimes \check{\Pi}_I^+\right) \check{v}_\alpha^- \quad (3.40f)$$

$$= \left(\check{u}_\alpha^-\right)^T \left(\check{\Pi}_S^+\right)^T \check{\Theta}_S^+ \check{\Pi}_S^+ \check{v}_\alpha^- \quad (3.40g)$$

$$= \left(\check{\Pi}_S^+(\check{u}_\alpha^-)\right)^T \check{\Theta}_S^+ \check{\Pi}_S^+(\check{v}_\alpha^-), \quad (3.40h)$$

d'où, par (3.26) :

$$\left\langle \check{\mathfrak{J}}_S^-(\check{u}^-), \check{\mathfrak{J}}_S^-(\check{v}^-) \right\rangle_{\check{S}}^- = \left\langle \check{\Pi}_S^+(\check{u}^-), \check{\Pi}_S^+(\check{v}^-) \right\rangle_{\check{S}}^+. \quad (3.41)$$

Ainsi, comme précédemment, en utilisant (3.9), il vient :

$$\left\langle \check{\mathfrak{J}}_S^-(\mathbf{u}^-), \check{\mathfrak{J}}_S^-(\mathbf{v}^-) \right\rangle_S^- = \left\langle \Pi_S^+(\mathbf{u}^-), \Pi_S^+(\mathbf{v}^-) \right\rangle_S^+. \quad (3.42)$$

En prenant $\mathbf{u}^- := \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{u}^-$ et $\mathbf{v}^- := \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{v}^-$, on montre ainsi que l'hypothèse $(\widetilde{H3})$ est satisfaite. ■

Ce résultat va donc nous permettre d'assurer que si les flux unitaires 1D vérifient certaines conditions, alors les flux condensés réels satisfont les hypothèses de stabilité, $(H2)$, $(\widetilde{H2})$ et $(\widetilde{H3})$. Nous cherchons à présent à établir un résultat similaire pour les hypothèses de consistance $(H4)$ et $(H5)$. Dans cette optique, nous montrons la propriété suivante :

Proposition 3.6 *Si, pour tout $\check{I}_i^- \in \check{\mathbb{F}}_I^-$, la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\check{I}_i^-}$ est une quadrature exacte au degré $p^- + \alpha$ ($\alpha \geq 0$), alors l'hypothèse $(H4)$ est vérifiée pour $\check{\Theta}_S^- = \check{\Theta}_I^- \otimes \check{\Theta}_I^-$, où $\check{\Theta}_I^-$ désigne la matrice par bloc des quadratures locales $\check{\Theta}_{I_i}^-$*

Preuve. Par tensorisation, tout produit scalaire local $\langle \cdot, \cdot \rangle_f^-$ est une quadrature exacte au degré $p^- + \alpha$ sur $\check{f} \in \check{\mathbb{F}}_S^-$. Les transformations $\check{T}_{S,K}$ permettant de revenir à la configuration réelle étant affines sur maillage cartésien, elles ne font pas chuter l'ordre de ces quadratures, si bien que finalement, pour tout $f \in \mathbb{F}_S^-$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ est une quadrature exacte au degré $p^- + \alpha$. ■

Il reste en dernier lieu à traiter l'hypothèse $(H5)$ relative à la consistance de l'opérateur de trace unitaire. Contrairement aux autres hypothèses, nous ne sommes pas parvenus à déterminer une condition suffisante sur les opérateurs unitaires 1D assurant la satisfaction de celle-ci. Toutefois, nous allons chercher à contrôler l'erreur introduite par cet opérateur au sein du processus de construction des flux

condensés. Pour ce faire, nous allons nous donner des *a priori* de consistance sur les quantités 1D, se basant sur la conjecture suivante : si les flux unitaires 1D condensés et exacts coïncident sur un espace polynômial suffisamment riche, alors l'erreur commise par l'opérateur $\check{\Pi}_S^-$ sera suffisamment faible pour que l'hypothèse **(H5)** soit satisfaite. Ceci se traduit sous la forme :

Conjecture 3.7 *Soit $S \in \mathcal{S}_h$. On suppose que, pour tout $\beta > 0$, il existe $(p_1^+, p_1^-, p_2^+, p_2^-) \in \mathbb{N}^4$ tels que, si :*

$$a \text{ priori de consistance : } \begin{cases} (C^-) & \forall (\check{u}^+, \check{v}^-) \in Q^{p_1^+}(\check{I}^+) \times Q^{p_1^-}(\check{I}^-), \int_{\check{I}} \check{u}^+ \cdot \check{v}^- d\check{x} = \left\langle \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+), \check{v}^- \right\rangle_{\check{I}}^-, \\ (C^+) & \forall (\check{v}^-, \check{u}^+) \in Q^{p_2^-}(\check{I}^-) \times Q^{p_2^+}(\check{I}^+), \int_{\check{I}} \check{v}^- \cdot \check{u}^+ d\check{x} = \left\langle \check{\Pi}_I^+(\check{v}^-), \check{u}^+ \right\rangle_{\check{I}}^+, \end{cases} \quad (\widetilde{H5})$$

alors :

$$\forall \check{u}_{h\mathcal{K}_S^\pm} \in \prod_{K \in \mathcal{K}_S^\pm} Q^{p_K}(\check{K}), \left| \left(\check{\Pi}_S^- - \check{\mathfrak{L}}_S^+ \right) \left(\check{u}_{h\mathcal{K}_S^\pm} \right) \right|_{0, \mathbb{F}_S} \lesssim C_3 h^\beta. \quad (3.43)$$

Cette conjecture, que l'on peut résumer en "**(H5)** \Rightarrow **(H5)**", a l'avantage de se traduire facilement sous la forme d'un processus constructif comme nous le verrons dans la section suivante. En pratique, les *a priori* de consistance que nous allons nous donner prennent donc la forme de deux produits d'espaces polynômiaux, un sur chaque côté de l'interface, pour lesquels les flux condensés unitaires 1D doivent être exacts. Intuitivement, on suppose que pour augmenter l'ordre de consistance de l'opérateur de trace, il suffit d'enrichir les espaces polynômiaux considérés, en augmentant au moins un degré d'interpolation parmi p_1^+ , p_1^- , p_2^+ , et p_2^- . Notons également qu'en choisissant convenablement ces paramètres (par exemple $p_1^\pm = p_2^\pm = \deg(\check{u}^+ \cdot \check{v}^-)$), il semble possible de retrouver la même régularité que les flux classiques.

Toutefois, en procédant ainsi, il n'est pas assuré que l'hypothèse **(H5)** soit satisfaite. Cela n'est pas rédhibitoire en soit, car cette hypothèse fait partie d'un ensemble de conditions suffisantes mais non nécessaires à la bonne tenue du schéma. Nous validerons numériquement l'intérêt de cette conjecture en étudiant la convergence du schéma condensé sur plusieurs cas-tests.

Remarque 3.8 *Si les flux condensés vérifient la propriété de symétrie (3.29), et si le flux condensé " \pm " satisfait (C^\pm) , alors le flux condensé " \mp " satisfera également (C^\pm) . L'a priori de consistance qu'on se donne impose ainsi plus de régularité sur les flux condensés qu'il n'y paraît.*

3.1.3 Bilan : *Modus operandi* de construction

Les différents résultats établis plus haut nous conduisent au processus de construction suivant. Étant donnée une surface d'échange $S \in \mathcal{S}_h$, hp non-conforme et tensorielle, la définition des flux condensés sur S se décompose en six étapes :

1. on définit l'équivalent unitaire 1D de la situation de non-conformité hp ,
2. du côté "-", on se donne un *a priori* d'opérateur de trace et de produit scalaire condensés unitaires 1D, ce dernier devant vérifier les conditions d'application de la proposition 3.6, et on calcule la matrice de flux condensé unitaire 1D du côté "-" :

$$\check{\underline{\underline{F}}}_I^- = \left(\check{\underline{\underline{\Pi}}}_I^- \right)^T \check{\underline{\underline{\Theta}}}_I^-, \quad (3.44)$$

\rightarrow ainsi, on assure que **(H4)** sera vérifiée,

3. on en déduit la forme générale de la matrice de flux condensé unitaire 1D à utiliser du côté "+" en utilisant la relation (3.29) :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}}_I^+ = \left(\underline{\underline{\tilde{F}}}_I^- \right)^T, \quad (3.45)$$

→ ainsi, on assure que **(H2)**, **(H2)** seront vérifiées,

4. on se donne un *a priori* de consistance sous la forme **(H5)**, (C^-) et (C^+) , pour les flux condensés unitaires 1D de chaque côté de l'interface, et on résout le système algébrique résultant de sorte à déterminer entièrement $\underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^-$, $\underline{\underline{\tilde{\Theta}}}_I^-$, et $\underline{\underline{\tilde{F}}}_I^+$,

→ ainsi, on assure que **(H5)** sera vérifiée,

5. on cherche une factorisation de la matrice de flux unitaire 1D du côté "+" sous la forme :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}}_I^+ = \left(\underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^+ \right)^T \underline{\underline{\tilde{\Theta}}}_I^+, \quad (3.46)$$

afin que la condition d'application du théorème 3.5 relative aux flux décentrés soit satisfaite,

→ ainsi, on assure que **(H3)** sera vérifiée,

6. on définit les quantités 2D par tensorisation, on assemble l'opérateur de trace unitaire sous la forme (3.11), et on revient aux flux réels en utilisant les relations de passage (3.9) et (3.10),

→ ainsi, on assure que **(H1)** sera vérifiée.

Cette méthodologie repose d'une part sur la donnée de plusieurs *a priori* sur la forme des flux condensés (forme de l'opérateur de trace d'un côté de l'interface, relations de consistance, etc.), et d'autre part sur la déduction complète et explicite de ces quantités via la résolution de systèmes algébriques. À l'issue de ce processus, les flux condensés permettent d'assurer théoriquement la stabilité du schéma. La consistance n'est en revanche pas théoriquement garantie, car la satisfaction de l'hypothèse **(H5)** repose sur une conjecture. Il sera donc nécessaire de valider numériquement la convergence du schéma pour chaque nouveau flux condensé construit.

3.2 Application à plusieurs interfaces *hp* non-conformes

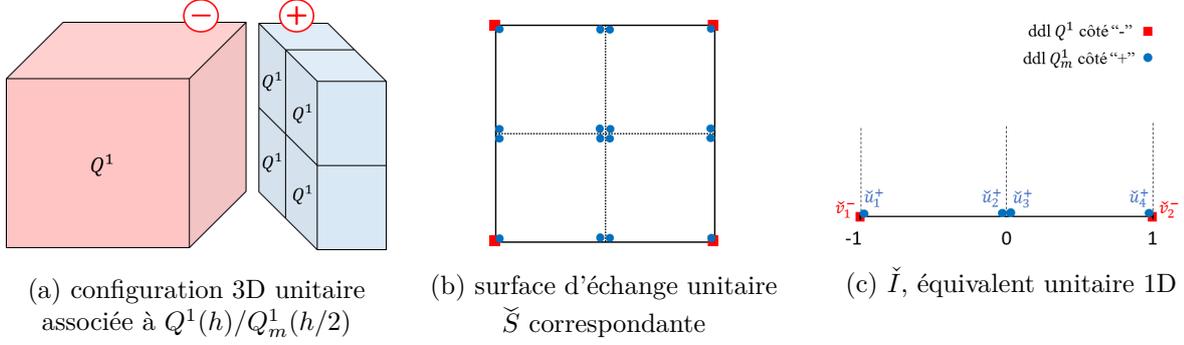
Dans cette section, nous construisons des flux condensés pour plusieurs surfaces d'échange *hp* non-conformes, en utilisant la méthodologie présentée précédemment. Nous nous concentrons sur trois configurations stratégiques pour les applications : une configuration de raffinement $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$ qui va être utilisée pour améliorer la description géométrique des objets, et deux configurations de déraffinement $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$ et $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$ dont le but sera de réduire les coûts de calcul de la résolution.

3.2.1 Configuration $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$

Un des objectifs de la chaîne de calcul développée est de pouvoir améliorer la description géométrique des objets, et en particulier de pouvoir prendre en compte dans le maillage des singularités de type fente ou fil grâce à l'introduction de raffinements locaux. Dans cette optique nous commençons par nous intéresser à une configuration commune dans les approches de remaillage [20], formée par un raffinement de facteur 2. Au-delà de cet objectif pratique, l'idée est également de faciliter la mise œuvre de la méthodologie de construction, en considérant en premier lieu un accollement *hp* relativement simple.

Soit $S \in \mathcal{S}_h$ une surface d'échange définie par l'accolement d'une maille $Q^1(h)$ contre 4 mailles $Q^1(h/2)$, le tout formant une configuration $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$ du type de la figure 3.5a. Nous détaillons dans ce qui suit la construction d'un flux condensé sur S , étape par étape.

Étape 1 On représente sur la figure 3.5 le passage de la configuration hp non-conforme unitaire 3D à la situation 1D correspondante.



(a) configuration 3D unitaire associée à $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$

(b) surface d'échange unitaire \check{S} correspondante

(c) \check{I} , équivalent unitaire 1D

FIGURE 3.5 – Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement hp non-conforme de type $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$.

Dans cet exemple, on a ainsi : $\check{I}^- = \{-1, 1\}$ et $\check{I}^+ = \{-1, 0\} \cup \{0, 1\}$. Les degrés de liberté d'un élément $\check{v}^- \in Q^1(\check{I}^-)$ seront notés $\{\check{v}_i^-\}_{i=1}^2$, et ceux d'un élément $\check{u}^+ \in Q_m^1(\check{I}^+)$ seront notés $\{\check{u}_i^+\}_{i=1}^4$.

Étape 2 En exploitant la symétrie de la configuration, on propose *a priori* suivant pour l'opérateur de trace unitaire 1D côté "-" :

$$\forall \check{u}^+ \in Q_m^1(\check{I}^+), \quad \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+) = (a\check{u}_1^+ + b\check{u}_2^+) \check{L}_1^- + (b\check{u}_3^+ + a\check{u}_4^+) \check{L}_2^-, \quad (3.47)$$

où \check{L}_1^- et \check{L}_2^- sont les fonctions de base de $Q^1(\check{I}^-)$ (polynômes de Lagrange associés au stencil $\{-1, 1\}$), et a et b des coefficients à déterminer. On choisit d'utiliser les poids de la formule de Gauss-Lobatto à 2 points pour définir le produit scalaire condensé associé à cet opérateur (voir tableau 1.1), notés $(\check{\omega}_1^-, \check{\omega}_2^-)$. Ce faisant, la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\check{I}^-}$ définit bien une formule de quadrature sur \check{I}^- , exacte à l'ordre 1 (la proposition 3.6 peut donc s'appliquer). On a donc :

$$\forall (\check{u}^+, \check{v}^-) \in Q_m^1(\check{I}^+) \times Q^1(\check{I}^-), \quad \left\langle \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+), \check{v}^- \right\rangle_{\check{I}^-} = \check{\omega}_1^- (a\check{u}_1^+ + b\check{u}_2^+) \check{v}_1^- + \check{\omega}_2^- (b\check{u}_3^+ + a\check{u}_4^+) \check{v}_2^-. \quad (3.48)$$

La matrice de flux condensé unitaire 1D associée s'écrit ainsi :

$$\underline{\underline{\check{F}_I^-}} = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- a & 0 \\ \check{\omega}_1^- b & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- b \\ 0 & \check{\omega}_2^- a \end{pmatrix} = \left(\underline{\underline{\check{\Pi}_I^-}} \right)^T \underline{\underline{\check{\Theta}_I^-}}, \quad (3.49)$$

avec :

$$\underline{\underline{\check{\Pi}_I^-}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\check{\Theta}_I^-}} = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Étape 3 Du fait de la relation (3.29), la matrice de flux condensé unitaire 1D du côté "+" s'écrit :

$$\underline{\underline{\check{F}_I^+}} = \left(\underline{\underline{\check{F}_I^-}} \right)^T = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- a & \check{\omega}_1^- b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_2^- b & \check{\omega}_2^- a \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Remarque 3.9 À ce stade, nous connaissons la forme générale de la matrice $\underline{\underline{\tilde{F}}}_I^+$. Celles de $\underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^+$ et $\underline{\underline{\tilde{\Theta}}}_I^+$ sont en revanche à déterminer.

Étape 4 On se donne l'*a priori* de consistance suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C^-) \quad \forall (\check{u}^+, \check{v}^-) \in Q^0(\check{I}^+) \times Q^1(\check{I}^-), \quad \int_{\check{I}} \check{u}^+ \cdot \check{v}^- d\check{x} = \left\langle \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^-(\check{u}^+), \check{v}^- \right\rangle_{\check{I}}^-, \\ (C^+) \quad \forall (\check{v}^-, \check{u}^+) \in Q^0(\check{I}^-) \times Q_m^1(\check{I}^+), \quad \int_{\check{I}} \check{v}^- \cdot \check{u}^+ d\check{x} = \left\langle \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^+(\check{v}^-), \check{u}^+ \right\rangle_{\check{I}}^+. \end{array} \right. \quad (3.52)$$

On cherche alors a et b pour que cet *a priori* soit vérifié. Pour ce faire, nous allons traduire les contraintes (C^\pm) sous la forme d'un système algébrique et résoudre ce dernier. Commençons par déterminer les équations induites par (C^-) . Cette condition équivaut à :

$$\forall \check{u}^+ \in \mathcal{B}(Q^0(\check{I}^+)), \quad \forall \check{v}^- \in \mathcal{B}(Q^1(\check{I}^-)), \quad \int_{\check{I}} \check{u}^+ \cdot \check{v}^- d\check{x} = (\check{u}^+)^T \underline{\underline{\tilde{F}}}_I^- \check{v}^-, \quad (3.53)$$

où $\mathcal{B}(Q^0(\check{I}^+))$ et $\mathcal{B}(Q^1(\check{I}^-))$ désignent respectivement une base de $Q^0(\check{I}^+)$ et de $Q^1(\check{I}^-)$. En choisissant :

$$\mathcal{B}(Q^0(\check{I}^+)) = \{x \mapsto 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(Q^1(\check{I}^-)) = \{\check{L}_1^-, \check{L}_2^-\}, \quad (3.54)$$

on obtient que :

$$\int_{\check{I}} \check{u}^+ \cdot \check{v}^- d\check{x} = (\check{u}^+)^T \underline{\underline{\tilde{F}}}_I^- \check{v}^- \Rightarrow \begin{cases} 1 = \check{\omega}_1^-(a+b) \text{ pour } (\check{u}^+, \check{v}^-) = (x \mapsto 1, \check{L}_1^-), \\ 1 = \check{\omega}_2^-(a+b) \text{ pour } (\check{u}^+, \check{v}^-) = (x \mapsto 1, \check{L}_2^-), \end{cases} \quad (3.55)$$

ce qui conduit, en utilisant le fait que $\check{\omega}_1^- = \check{\omega}_2^- = 1$, à l'unique identité :

$$a + b = 1. \quad (3.56)$$

De même, la condition (C^+) équivaut à :

$$\forall \check{v}^- \in \{x \mapsto 1\}, \quad \forall \check{u}^+ \in \{\check{L}_1^+, \check{L}_2^+, \check{L}_3^+, \check{L}_4^+\}, \quad \int_{\check{I}} \check{v}^- \cdot \check{u}^+ d\check{x} = (\check{v}^-)^T \underline{\underline{\tilde{F}}}_I^+ \check{u}^+, \quad (3.57)$$

qui amène à :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.58)$$

L'ensemble des contraintes $(C^-) \cup (C^+)$ conduit donc au système trivial :

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (3.59)$$

qui admet comme unique solution $\{a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}\}$.

Remarque 3.10 *Le fait que le système $(C^-) \cup (C^+)$ soit bien posé n'est pas évident a priori. Cela dépend, d'une part, de l'adéquation entre le nombre de degrés de liberté des matrices de flux $\underline{\check{F}}_I^\pm$ et le nombre d'équations indépendantes que l'on peut dériver de l'a priori de consistance, et, d'autre part, de la compatibilité des systèmes obtenus par (C^-) et (C^+) .*

À ce stade, les quantités $\underline{\check{\Pi}}_I^-, \underline{\check{\Theta}}_I^-,$ et $\underline{\check{F}}_I^+$ sont ainsi entièrement déterminées.

Étape 5 La matrice de flux :

$$\underline{\check{F}}_I^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

se factorise alors sous la forme :

$$\underline{\check{F}}_I^+ = \left(\underline{\check{\Pi}}_I^+ \right)^T \underline{\check{\Theta}}_I^+, \quad (3.61)$$

avec :

$$\underline{\check{\Pi}}_I^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\check{\Theta}}_I^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Remarque 3.11 *Le produit scalaire condensé $\check{\Theta}_I^+$ correspond à la formule composite des trapèzes. Elle définit ainsi une quadrature exacte au degré 1 sur chaque morceau de \check{I}^+ .*

L'opérateur $\check{\Pi}_I^+$ est donc surjectif. De plus, on a :

$$\underline{\check{\Pi}}_I^+ \underline{\check{\Pi}}_I^- = Id. \quad (3.63)$$

On peut donc appliquer le théorème 3.5.

Étape 6 Les flux condensés unitaires sont finalement obtenus par tensorisation. Par exemple, pour une surface S de normale $\pm \mathbf{e}_x$:

$$\underline{\check{\Pi}}_S^\pm = \underline{\check{\Delta}}_S^\mp \otimes \underline{\check{\Pi}}_I^\pm \otimes \underline{\check{\Pi}}_I^\pm ; \quad \underline{\check{\Theta}}_S^\pm = \underline{\check{\Theta}}_I^\pm \otimes \underline{\check{\Theta}}_I^\pm. \quad (3.64)$$

Remarque 3.12 *Les matrices de flux condensés unitaires, $\underline{\check{F}}_S^\pm = \underline{\check{F}}_I^\pm \otimes \underline{\check{F}}_I^\pm$, ont donc la forme suivante (à une transposition près) :*

$$\underline{\check{F}}_S^\pm = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

où "*" désigne un terme non-nul. Leur taux de remplissage est ainsi de 25%, alors que les matrices de flux classiques sont pleines. On s'attend donc à ce que le schéma résultant soit moins coûteux que le schéma classique. La méthode de condensation mise en place peut ainsi être réinterprétée comme un moyen de creuser les matrices de flux hp non-conformes.

3.2.2 Configuration $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$

Au cours du premier chapitre, nous avons établi que l'élément $Q^2(3h)$ permettait d'améliorer significativement l'efficacité numérique du schéma, sur une échelle de déraffinement stratégique pour les applications. Nous cherchons donc ici à construire un flux condensé permettant son utilisation pratique.

Soit $S \in \mathcal{S}_h$ une surface d'échange définie par l'accolement d'une maille $Q^2(3h)$ contre 9 mailles $Q^1(h)$, le tout formant une configuration $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$ du type de la figure 3.6a.

Étape 1 La mise en place de la situation hp non-conforme unitaire 1D est illustrée sur la figure 3.6.

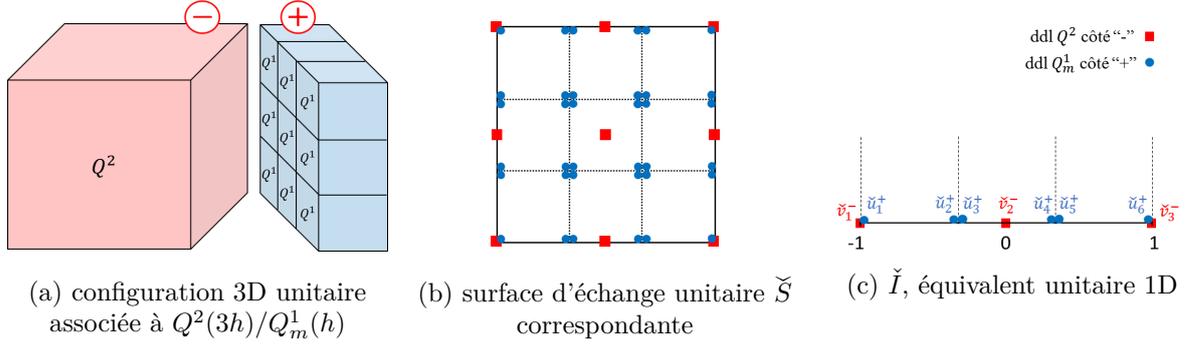


FIGURE 3.6 – Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement hp non-conforme de type $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$.

On a ici : $\check{I}^- = \{-1, 1\}$ et $\check{I}^+ = \{-1, -\frac{1}{3}\} \cup \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\} \cup \{\frac{1}{3}, 1\}$. Les degrés de liberté d'un élément $\check{v}^- \in Q^2(\check{I}^-)$ seront notés $\{\check{v}_i^-\}_{i=1}^3$, et ceux d'un élément $\check{u}^+ \in Q_m^1(\check{I}^+)$ seront notés $\{\check{u}_i^+\}_{i=1}^6$.

Étape 2 On propose *a priori* suivant pour l'opérateur de trace unitaire 1D côté "-":

$$\forall \check{u}^+ \in Q_m^1(\check{I}^+), \quad \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+) = a\check{u}_1^+ \check{L}_1^- + (b\check{u}_2^+ + c\check{u}_3^+ + c\check{u}_4^+ + b\check{u}_5^+) \check{L}_2^- + a\check{u}_6^+ \check{L}_3^-, \quad (3.66)$$

où $\{\check{L}_i^-\}_{i=1}^3$ sont les fonctions de base de $Q^2(\check{I}^-)$ (polynômes de Lagrange associés au stencil $\{-1, 0, 1\}$), et a, b et c des coefficients à déterminer. On choisit d'utiliser les poids de la formule de Gauss-Lobatto à 3 points pour définir le produit scalaire condensé associé à cet opérateur (voir tableau 1.1), notés $(\check{\omega}_1^-, \check{\omega}_2^-, \check{\omega}_3^-)$. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\check{I}^-}$ définit donc une formule de quadrature exacte à l'ordre 3 sur \check{I}^- (suffisant pour pouvoir appliquer la proposition 3.6). On a donc, pour tout $(\check{u}^+, \check{v}^-) \in Q_m^1(\check{I}^+) \times Q^2(\check{I}^-)$:

$$\left\langle \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+), \check{v}^- \right\rangle_{\check{I}^-} = \check{\omega}_1^- a \check{u}_1^+ \check{v}_1^- + \check{\omega}_2^- (b\check{u}_2^+ + c\check{u}_3^+ + c\check{u}_4^+ + b\check{u}_5^+) \check{v}_2^- + \check{\omega}_3^- a \check{u}_6^+ \check{v}_3^-. \quad (3.67)$$

La matrice de flux condensé unitaire 1D associée s'écrit ainsi :

$$\check{\underline{\underline{F}}}_I^- = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- a & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- b & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- c & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- c & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- b & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_3^- c \end{pmatrix} = \left(\check{\underline{\underline{\Pi}}}_I^- \right)^T \check{\underline{\underline{\Theta}}}_I^-, \quad (3.68)$$

avec :

$$\check{\underline{\underline{\Pi}}}_I^- = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \check{\underline{\underline{\Theta}}}_I^- = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_3^- \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Étape 3 Par la relation (3.29), la matrice de flux condensé unitaire 1D du côté "+" s'écrit :

$$\underline{\underline{\check{F}_I^+}} = \left(\underline{\underline{\check{F}_I^-}} \right)^T = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- b & \check{\omega}_2^- c & \check{\omega}_2^- c & \check{\omega}_2^- b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- a \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Étape 4 On se donne l'*a priori* de consistance suivant :

$$\begin{cases} (C^-) & \forall (\check{u}^+, \check{v}^-) \in Q^1(\check{I}^+) \times Q^1(\check{I}^-), \int_{\check{I}} \check{u}^+ \cdot \check{v}^- d\check{x} = \left\langle \underline{\underline{\check{\Pi}_I^-}}(\check{u}^+), \check{v}^- \right\rangle_{\check{I}}^-, \\ (C^+) & \forall (\check{v}^-, \check{u}^+) \in Q^1(\check{I}^-) \times Q_m^1(\check{I}^+), \int_{\check{I}} \check{v}^- \cdot \check{u}^+ d\check{x} = \left\langle \underline{\underline{\check{\Pi}_I^+}}(\check{v}^-), \check{u}^+ \right\rangle_{\check{I}}^+. \end{cases} \quad (3.71)$$

On cherche alors a , b , et c pour que cet *a priori* soit vérifié. L'identité (C^-) équivaut à :

$$\forall \check{u}^+ \in \{x \mapsto 1, x \mapsto x\}, \forall \check{v}^- \in \{\check{L}_1^-, \check{L}_2^-, \check{L}_3^-\}, \int_{\check{I}} \check{u}^+ \cdot \check{v}^- d\check{x} = (\check{u}^+)^T \underline{\underline{\check{F}_I^-}} \check{v}^-, \quad (3.72)$$

et conduit au système :

$$\begin{cases} a & = & 1, \\ 2b + 2c & = & 1. \end{cases} \quad (3.73)$$

De même, la condition (C^+) équivaut à :

$$\forall \check{v}^- \in \{x \mapsto 1, x \mapsto x\}, \forall \check{u}^+ \in \{\check{L}_i^+, i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\}, \int_{\check{I}} \check{v}^- \cdot \check{u}^+ d\check{x} = (\check{v}^-)^T \underline{\underline{\check{F}_I^+}} \check{u}^+, \quad (3.74)$$

soit après calculs :

$$\begin{cases} a & = & 1, \\ b & = & \frac{1}{4}, \\ c & = & \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (3.75)$$

L'ensemble des contraintes $(C^-) \cup (C^+)$ conduit donc de nouveau à un système compatible et trivial, dont l'unique solution est $\{a = 1, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{4}\}$.

Étape 5 La matrice de flux :

$$\underline{\underline{\check{F}_I^+}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

se factorise alors sous la forme :

$$\underline{\underline{\check{F}_I^+}} = \left(\underline{\underline{\check{\Pi}_I^+}} \right)^T \underline{\underline{\check{\Theta}_I^+}}, \quad (3.77)$$

avec :

$$\underline{\underline{\check{\Pi}}}_I^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\check{\Theta}}}_I^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Remarque 3.13 Comme pour la configuration précédente, le produit scalaire condensé $\check{\Theta}_I^+$ correspond à la formule des trapèzes composite sur \check{I}^+ .

L'opérateur $\check{\Pi}_I^+$ est donc surjectif, et on a bien :

$$\underline{\underline{\check{\Pi}}}_I^+ \underline{\underline{\check{\Pi}}}_I^- = Id. \quad (3.79)$$

On peut donc appliquer le théorème 3.5.

Remarque 3.14 Dans cet exemple, la méthode de condensation permet de creuser la matrice de flux hp non-conforme classique à hauteur de 89%. La figure 3.7 donne une interprétation du caractère creux des matrices de flux condensés, en illustrant les domaines de dépendance entre degrés de liberté "+" et "-" dans le terme de flux. Plus précisément, cette représentation permet de rendre compte du nombre d'accès mémoire aux degrés de liberté "+" nécessaires au calcul de la contribution de flux hp non-conforme pour chaque type de degré de liberté "-".

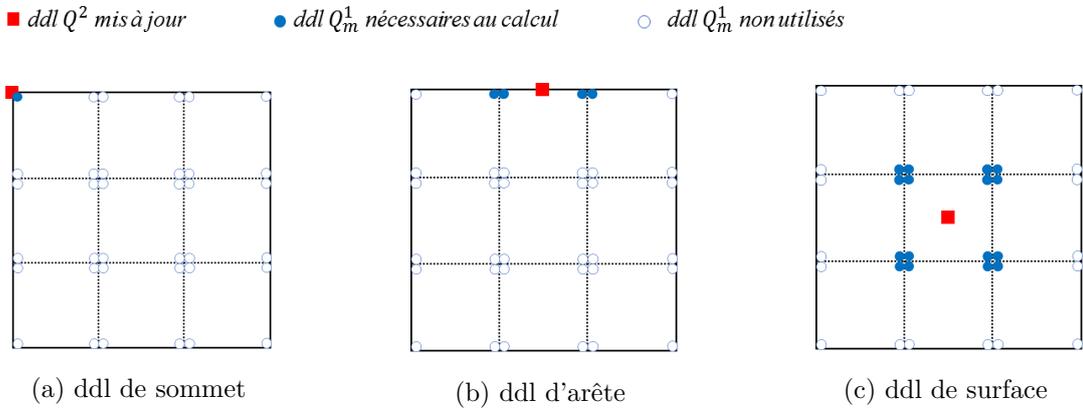


FIGURE 3.7 – Représentation, pour chaque type de degré de liberté (ddl) Q^2 du côté "-" de la surface d'échange unitaire, des degrés de liberté Q_m^1 du côté "+" utilisés pour le calcul de la contribution de flux hp non-conforme condensée unitaire.

3.2.3 Configuration $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$

Dans ce paragraphe, nous cherchons à construire un flux condensé adapté à une configuration non-conforme d'ordre élevé. La première motivation est de tester la robustesse de notre méthodologie de construction en l'appliquant à un accollement dépourvu d'éléments Q^1 , qui amènent naturellement beaucoup de simplifications dans les calculs. La seconde motivation est bien sûr d'ordre pratique, car plus le degré des fonctions de base est élevé, plus on peut déraffiner le maillage sans perte de précision, et plus les gains en efficacité numérique sont importants *a priori*.

Dans le paragraphe précédent, nous avons construit un flux condensé adapté à l'utilisation des éléments $Q^2(3h)$. Afin de conserver l'intérêt de ce travail, nous allons donc considérer une surface d'échange $S \in \mathcal{S}_h$ définie par l'accolement d'une maille $Q^4(9h)$ contre 9 mailles $Q^2(3h)$, le tout formant une configuration $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$ du type de la figure 3.8a.

Remarque 3.15 Le déraffinement par 9, ici associé aux fonctions de base Q^4 , peut paraître sous-dimensionné par rapport à celui exhibé dans le premier chapitre, où l'on a vu que des facteurs de l'ordre de 20 (voire davantage) pouvaient être utilisés. Ce choix a deux raisons principales. Tout d'abord, nous voulons garantir que la précision de la simulation ne sera pas dégradée par l'introduction de cette configuration condensée dans le maillage. Nous cherchons donc à compenser une éventuelle dégradation de qualité causée par la méthode de condensation de flux, par l'apparente sur-précision de l'élément $Q^4(9h)$ considéré. La deuxième raison est d'ordre pratique. Il est en effet plus facile de proposer des *a priori* sur les opérateurs de trace et de mener les calculs dans le cas où le nombre de sous-faces de la configuration reste faible, et ce à plus forte raison lorsque les fonctions de base sont d'ordre élevé de part et d'autre de l'accolement.

Étape 1 La configuration *hp* non-conforme, la surface d'échange unitaire associée et son équivalent 1D sont illustrés sur la figure 3.8.

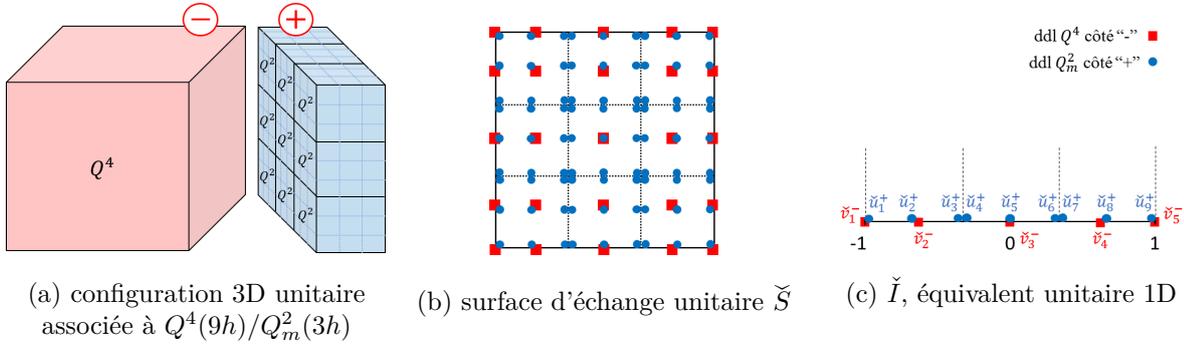


FIGURE 3.8 – Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement *hp* non-conforme de type $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$.

Comme dans la configuration précédente, on a : $\check{I}^- = \{-1, 1\}$ et $\check{I}^+ = \{-1, -\frac{1}{3}\} \cup \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\} \cup \{\frac{1}{3}, 1\}$. Les degrés de liberté d'un élément $\check{v}^- \in Q^4(\check{I}^-)$ seront notés $\{\check{v}_i^-\}_{i=1}^5$, et ceux d'un élément $\check{u}^+ \in Q_m^2(\check{I}^+)$ seront notés $\{\check{u}_i^+\}_{i=1}^9$.

Étape 2 Toujours en exploitant la symétrie de la configuration, on propose l'*a priori* suivant pour l'opérateur de trace unitaire 1D côté "-": pour tout $\check{u}^+ \in Q_m^2(\check{I}^+)$,

$$\begin{aligned} \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+) &= (a\check{u}_1^+ + b\check{u}_2^+ + c\check{u}_3^+) \check{L}_1^- + (d\check{u}_1^+ + e\check{u}_2^+ + f\check{u}_3^+ + g\check{u}_4^+ + h\check{u}_5^+ + i\check{u}_6^+) \check{L}_2^- \\ &\quad + (j\check{u}_1^+ + k\check{u}_2^+ + l\check{u}_3^+ + m\check{u}_4^+ + n\check{u}_5^+ + m\check{u}_6^+ + l\check{u}_7^+ + k\check{u}_8^+ + j\check{u}_9^+) \check{L}_3^- \\ &\quad + (i\check{u}_4^+ + h\check{u}_5^+ + g\check{u}_6^+ + f\check{u}_7^+ + e\check{u}_8^+ + d\check{u}_9^+) \check{L}_4^- + (c\check{u}_7^+ + b\check{u}_8^+ + a\check{u}_9^+) \check{L}_5^- \end{aligned} \quad (3.80)$$

où $\{\check{L}_i^-\}_{i=1}^9$ sont les fonctions de base de $Q^4(\check{I}^-)$ (polynômes de Lagrange associés au stencil $\{-1, -\sqrt{\frac{3}{7}}, 0, \sqrt{\frac{3}{7}}, 1\}$), et $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$ des coefficients à déterminer. On choisit d'utiliser les poids de la formule de Gauss-Lobatto à 5 points pour définir le produit scalaire condensé associé à cet opérateur (voir tableau 1.1), notés $(\check{\omega}_1^-, \check{\omega}_2^-, \check{\omega}_3^-, \check{\omega}_4^-, \check{\omega}_5^-)$. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_I^-$ définit donc une formule de quadrature exacte à l'ordre 7 sur \check{I}^- (suffisant pour pouvoir appliquer la proposition 3.6). On a donc, pour tout $(\check{u}^+, \check{v}^-) \in Q_m^2(\check{I}^+) \times Q^4(\check{I}^-)$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^-(\check{u}^+), \check{v}^- \right\rangle_{\check{Y}}^- &= \check{\omega}_1 (a\check{u}_1^+ + b\check{u}_2^+ + c\check{u}_3^+) \check{v}_1^- + \check{\omega}_2 (d\check{u}_1^+ + e\check{u}_2^+ + f\check{u}_3^+ + g\check{u}_4^+ + h\check{u}_5^+ + i\check{u}_6^+) \check{v}_2^- \\
&+ \check{\omega}_3 (j\check{u}_1^+ + k\check{u}_2^+ + l\check{u}_3^+ + m\check{u}_4^+ + n\check{u}_5^+ + m\check{u}_6^+ + l\check{u}_7^+ + k\check{u}_8^+ + j\check{u}_9^+) \check{v}_3^- \\
&+ \check{\omega}_4 (i\check{u}_4^+ + h\check{u}_5^+ + g\check{u}_6^+ + f\check{u}_7^+ + e\check{u}_8^+ + d\check{u}_9^+) \check{v}_4^- + \check{\omega}_5 (c\check{u}_7^+ + b\check{u}_8^+ + a\check{u}_9^+) \check{v}_5^-. \quad (3.81)
\end{aligned}$$

La matrice de flux condensé unitaire 1D associée s'écrit ainsi :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}}_I^- = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- a & \check{\omega}_2^- d & \check{\omega}_3^- j & 0 & 0 \\ \check{\omega}_1^- b & \check{\omega}_2^- e & \check{\omega}_3^- k & 0 & 0 \\ \check{\omega}_1^- c & \check{\omega}_2^- f & \check{\omega}_3^- l & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- g & \check{\omega}_3^- m & \check{\omega}_4^- i & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- h & \check{\omega}_3^- n & \check{\omega}_4^- h & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- i & \check{\omega}_3^- m & \check{\omega}_4^- g & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_3^- l & \check{\omega}_4^- f & \check{\omega}_5^- c \\ 0 & 0 & \check{\omega}_3^- k & \check{\omega}_4^- e & \check{\omega}_5^- b \\ 0 & 0 & \check{\omega}_3^- j & \check{\omega}_4^- d & \check{\omega}_5^- a \end{pmatrix} = \left(\underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^- \right)^T \underline{\underline{\tilde{\Theta}}}_I^-, \quad (3.82)$$

avec :

$$\underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^- = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & g & h & i & 0 & 0 & 0 \\ j & k & l & m & n & m & l & k & j \\ 0 & 0 & 0 & i & h & g & f & e & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\tilde{\Theta}}}_I^- = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_4^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_5^- \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Remarque 3.16 Contrairement aux candidats précédents, l'a priori considéré ici ne met pas en injection les degrés de liberté du côté "-" avec ceux du côté "+". En particulier, chaque degré de liberté côté "+" est utilisé plusieurs fois dans la définition de l'opérateur de trace. Ce faisant, nous avons cherché à adapter la richesse de l'information utilisée avec le degré des fonctions de base de la configuration, pour ne pas dégrader la précision du raccord. Cependant, comme nous allons voir, cela va amener davantage de difficultés dans la construction du flux condensé, notamment au niveau de la partie décentrée et de la satisfaction de l'hypothèse (**H3**).

Étape 3 En utilisant de nouveau la relation (3.29), on obtient que la matrice de flux condensé unitaire 1D du côté "+" s'écrit :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}}_I^+ = \left(\underline{\underline{\tilde{F}}}_I^- \right)^T = \begin{pmatrix} \check{\omega}_1^- a & \check{\omega}_1^- b & \check{\omega}_1^- c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \check{\omega}_2^- d & \check{\omega}_2^- e & \check{\omega}_2^- f & \check{\omega}_2^- g & \check{\omega}_2^- h & \check{\omega}_2^- i & 0 & 0 & 0 \\ \check{\omega}_3^- j & \check{\omega}_3^- k & \check{\omega}_3^- l & \check{\omega}_3^- m & \check{\omega}_3^- n & \check{\omega}_3^- m & \check{\omega}_3^- l & \check{\omega}_3^- k & \check{\omega}_3^- j \\ 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_4^- i & \check{\omega}_4^- h & \check{\omega}_4^- g & \check{\omega}_4^- f & \check{\omega}_4^- e & \check{\omega}_4^- d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_5^- c & \check{\omega}_5^- b & \check{\omega}_5^- a \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Étape 4 On se donne l'a priori de consistance suivant :

$$\begin{cases} (\mathcal{C}^-) & \forall (\check{u}^+, \check{v}^-) \in Q^1(\check{I}^+) \times Q^4(\check{I}^-), \int_{\check{I}} \check{u}^+ \cdot \check{v}^- d\check{x} = \left\langle \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^-(\check{u}^+), \check{v}^- \right\rangle_{\check{I}}^-, \\ (\mathcal{C}^+) & \forall (\check{v}^-, \check{u}^+) \in Q^1(\check{I}^-) \times Q_m^2(\check{I}^+), \int_{\check{I}} \check{v}^- \cdot \check{u}^+ d\check{x} = \left\langle \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_I^+(\check{v}^-), \check{u}^+ \right\rangle_{\check{I}}^+. \end{cases} \quad (3.85)$$

On cherche alors à déterminer les coefficients $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$ pour que cet a priori soit vérifié. L'identité (\mathcal{C}^-) équivaut à :

$$\forall \check{u}^+ \in \{x \mapsto 1, x \mapsto x\}, \forall \check{v}^- \in \{\check{L}_i^-, i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket\}, \int_{\check{I}} \check{u}^+ \cdot \check{v}^- d\check{x} = (\check{u}^+)^T \check{F}_I^- \check{v}^-, \quad (3.86)$$

ce qui conduit au système (en supprimant les équations redondantes) :

$$\begin{cases} a + b + c & = & 1, \\ d + e + f + g + h + i & = & 1, \\ 2(j + k + l + m) + n & = & 1, \\ a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c & = & 1, \\ d + \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}f + \frac{1}{3}g - \frac{1}{3}i & = & \sqrt{\frac{3}{7}}. \end{cases} \quad (3.87)$$

Remarque 3.17 Les trois premières équations du système précédent sont particulièrement remarquables car elles imposent que la reconstruction des degrés de liberté "-" en fonction des degrés de liberté "+" s'effectue de manière barycentrique. C'était également le cas sur les exemples précédents, mais cette propriété apparaît clairement sur cette configuration moins triviale.

De même, la condition (C^+) équivaut à :

$$\forall \check{v}^- \in \{x \mapsto 1, x \mapsto x\}, \forall \check{u}^+ \in \{\check{L}_i^+, i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\}, \int_{\check{I}} \check{v}^- \cdot \check{u}^+ d\check{x} = (\check{v}^-)^T \check{F}_I^+ \check{u}^+, \quad (3.88)$$

et se traduit en :

$$\begin{cases} \check{\omega}_1^- a + \check{\omega}_2^- b + \check{\omega}_3^- c & = & \frac{1}{9}, \\ \check{\omega}_1^- b + \check{\omega}_2^- e + \check{\omega}_3^- k & = & \frac{4}{9}, \\ \check{\omega}_1^- c + \check{\omega}_2^- f + \check{\omega}_3^- l & = & \frac{1}{9}, \\ \check{\omega}_2^- (g + i) + \check{\omega}_3^- m & = & \frac{1}{9}, \\ 2\check{\omega}_2^- h + \check{\omega}_3^- n & = & \frac{4}{9}, \\ \check{\omega}_1^- a + \sqrt{\frac{3}{7}}\check{\omega}_2^- d & = & \frac{1}{9}, \\ \check{\omega}_1^- b + \sqrt{\frac{3}{7}}\check{\omega}_2^- e & = & \frac{8}{27}, \\ \check{\omega}_1^- c + \sqrt{\frac{3}{7}}\check{\omega}_2^- f & = & \frac{1}{27}, \\ \sqrt{\frac{3}{7}}\check{\omega}_2^- (g - i) & = & \frac{1}{27}. \end{cases} \quad (3.89)$$

L'ensemble des contraintes (C^-) \cup (C^+) conduit donc au système linéaire $\underline{\underline{A}} x = \underline{\underline{b}}$ de 14 équations et 14 inconnues, avec, en notant $\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & \check{\omega}_2^- 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- \\ \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \alpha\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \alpha\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \alpha\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\check{\omega}_2^- & 0 & -\alpha\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

et :

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

Or, en utilisant un logiciel de calcul formel, on obtient que $\det(\underline{A}) = 0$, avec $rg(\underline{A}) = 12$, et :

$$Ker(\underline{A}^T) = Span\{\underline{k}_1, \underline{k}_2\}, \quad \underline{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3\check{\omega}_1^- \\ -3\alpha\check{\omega}_2^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{k}_2 = \begin{pmatrix} -2\check{\omega}_1^- \\ -2\check{\omega}_2^- \\ -\check{\omega}_3^- \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Les *a priori* choisis dans cet exemple conduisent donc à un système mal posé, mais compatible avec le second membre, car le calcul montre qu'on a bien :

$$\underline{k}_1^T \cdot \underline{b} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{k}_2^T \cdot \underline{b} = 0. \quad (3.93)$$

Nous cherchons donc à en extraire un système de Cramer. Après plusieurs tests, on obtient qu'en imposant $c = n = 0$ et en supprimant les lignes n° 2 et 5 (les moins creuses), on obtient un nouveau système de 12 équations à 12 inconnues qui cette fois est bien posé, $\underline{A}'\underline{x}' = \underline{b}'$, avec :

$$\underline{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & \check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\omega}_3^- \\ \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \alpha\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \alpha\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\omega}_1^- & 0 & 0 & \alpha\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\check{\omega}_2^- & 0 & -\alpha\check{\omega}_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

et :

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix} ; \quad \underline{b}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{27} \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

On obtient finalement la solution suivante :

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ c = 0, \\ d = \frac{\sqrt{21}}{147}, \\ e = \frac{80\sqrt{21}}{441}, \\ f = \frac{10\sqrt{21}}{441}, \\ g = \frac{29}{98} - \frac{83\sqrt{21}}{882}, \\ h = \frac{20}{49}, \\ i = \frac{29}{98} - \frac{103\sqrt{21}}{882}, \\ j = \frac{1}{64} - \frac{\sqrt{21}}{192}, \\ k = \frac{5}{8} - \frac{5\sqrt{21}}{36}, \\ l = \frac{5}{32} - \frac{5\sqrt{21}}{288}, \\ m = -\frac{19}{64} + \frac{31\sqrt{21}}{192}, \\ n = 0. \end{cases} \quad (3.96)$$

Remarque 3.18 La figure 3.9 représente, pour chaque degré de liberté "-", l'importance relative des degrés de liberté "+" dans la recombinaison réalisée par l'opérateur $\tilde{\Pi}_I^-$.

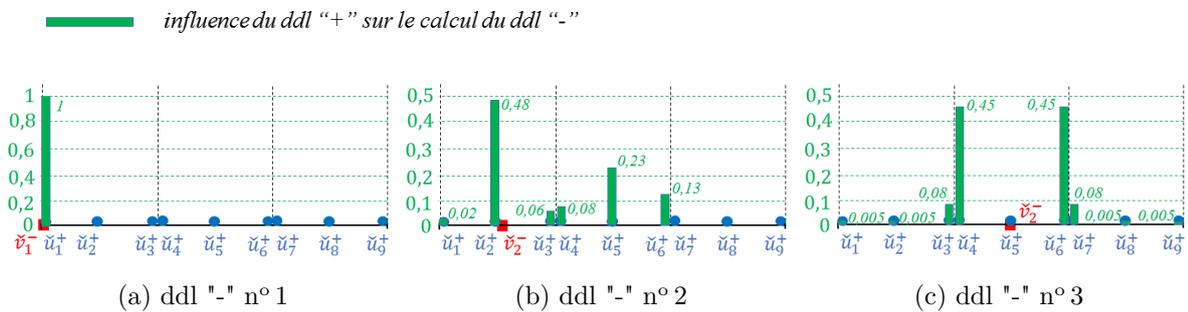


FIGURE 3.9 – Répartition de la part relative des degrés de liberté (ddl) "+" dans le calcul des degrés de liberté "-", pour la contribution de flux hp non-conforme condensée unitaire 1D. Le résultat pour les degrés de liberté "-" n° 4 et 5 s'obtiennent par symétrie.

Deux remarques sont alors à formuler. Premièrement, on voit que, pour chaque degré de liberté "-", le degré de liberté "+" ayant le plus d'influence dans la contribution de flux associée est celui le plus proche géométriquement, ce qui se comprend bien intuitivement. Le degré de liberté central "-" de la figure 3.9c

fait exception uniquement car le coefficient (n) associé au degré de liberté "+" situé au même point géométrique a été fixé arbitrairement à 0 afin de fermer le système linéaire précédent.

Puis, on voit également que deux degrés de liberté "+", pourtant situés au même point géométrique, peuvent avoir des poids différents dans la contribution de flux d'un degré de liberté "-". C'est par exemple ce que montre la figure 3.9c : les degrés de liberté \check{u}_3^+ et \check{u}_4^+ sont tous les deux situés à $\check{x} = -\frac{1}{3}$, pourtant le poids du premier est négligeable devant le poids du second.

Ces deux observations peuvent être utiles pour orienter le choix des a priori d'opérateurs de trace. Par exemple, pour un degré de liberté "-" donné, il ne semble pas nécessaire de faire jouer des degrés de liberté "+" relativement éloignés de celui-ci.

Étape 5 Nous ne sommes pas parvenus sur cet exemple à factoriser la matrice de flux côté "+" sous la forme voulue, $\check{F}_I^+ = \left(\check{\Pi}_I^+\right)^T \check{\Theta}_I^+$, avec $\check{\Pi}_I^+$ surjectif et vérifiant $\check{\Pi}_I^+ \check{\Pi}_I^- = Id$. Cela n'entrave pas l'implémentation du schéma, mais nous ne pouvons pas appliquer directement la deuxième partie du théorème 3.5 assurant la satisfaction de l'hypothèse (H3). Rappelons que cette hypothèse permet en pratique d'assurer la positivité des flux décentrés et ainsi de garantir la décroissance de l'énergie dérivant du schéma GDDT condensé. Ainsi, comme le candidat que nous venons de construire est tout à fait adapté pour la partie centrée du flux, nous allons tester l'utilisation d'un candidat différent pour la partie décentrée du raccord $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$, assurant a priori la positivité du terme dans le bilan d'énergie. Le candidat que nous proposons a la même forme générale que celui de la partie centrée, seuls changent les poids attribués aux degrés de liberté "+", que nous choisissons tous positifs et équirépartis :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1, \\ b = 0, \\ c = 0, \\ d = \frac{1}{6}, \\ e = \frac{1}{6}, \\ f = \frac{1}{6}, \\ g = \frac{1}{6}, \\ h = \frac{1}{6}, \\ i = \frac{1}{6}, \\ j = \frac{1}{6}, \\ k = \frac{1}{6}, \\ l = \frac{1}{6}, \\ m = \frac{1}{6}, \\ n = 0. \end{array} \right. \quad (3.97)$$

La convergence du schéma pour ce candidat de flux condensé hybride sera alors validée numériquement. On peut néanmoins anticiper une précision moins élevée lors de l'utilisation des flux décentrés sur cette configuration, car la consistance de la partie décentrée du flux condensé n'est pas aussi bien contrôlée que celle de la partie centrée.

Remarque 3.19 Les matrices de flux condensés (centrés et décentrés) ont cette fois un taux de remplissage de 24%. C'est près du double de la configuration $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$, du fait d'un a priori sur l'opérateur de trace plus riche. On illustre alors sur la figure 3.10, comme dans l'exemple précédent, le nombre de degrés de liberté "+" nécessaires au calcul du flux en chaque degré de liberté "-".

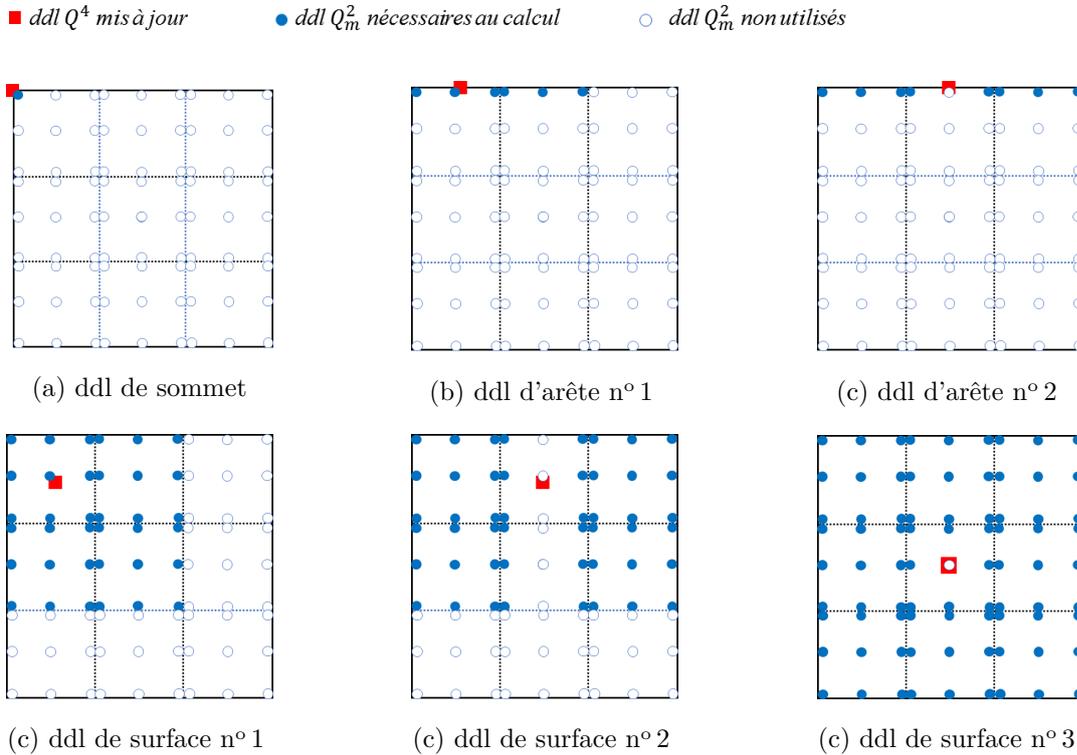


FIGURE 3.10 – Représentation, pour chaque type de degré de liberté (ddl) Q^4 du côté "-" de la surface d'échange unitaire, des degrés de liberté Q_m^2 du côté "+" utilisés pour le calcul de la contribution de flux hp non-conforme condensée unitaire.

Si la suite de nos développements vont s'appuyer sur les trois configurations hp non-conformes considérés dans cette section, d'autres flux condensés, moins prometteurs pour les applications, ont également été construits et sont présentés dans l'Annexe C. Soulignons également que, bien que la méthodologie de construction proposée puisse prendre en compte des accolements hp plus généraux, nous nous sommes limités ici, pour plus de simplicité, à des configurations du type "une maille contre plusieurs".

3.3 Étude numérique de la convergence et des coûts de calcul

Dans cette section, nous étudions la convergence et les performances numériques du schéma GDDT condensé. Pour ce faire, nous utilisons plusieurs cas-tests hp non-conformes, conçus à partir des accolements hybrides vus dans le paragraphe précédent, pour lesquels nous disposons de flux condensés présentant *a priori* des coûts de calcul réduits par rapport aux flux classiques.

L'objectif de cette étude est multiple. Tout d'abord, nous cherchons à valider le processus de construction développé vis-à-vis de la stabilité et de la consistance du schéma. Puis, il s'agit de déterminer dans quelle mesure la méthode de condensation de flux permet de limiter l'explosion des coûts de calcul sur maillage hybride, et donc de répondre à la problématique de performances identifiée dans le premier chapitre. Nous cherchons également à estimer la précision du schéma condensé, par rapport à l'approche classique, mais surtout par rapport à la résolution de référence Q^1 fixant la contrainte de qualité minimale à respecter. L'enjeu principal de cette section est donc d'évaluer la viabilité du schéma condensé dans le cadre de nos applications.

Dans un premier temps, nous commençons par décrire les cas-tests. Puis, en mettant en place un processus de raffinement homogène tel que décrit dans le chapitre précédent (voir paragraphe 2.4.1), nous établissons numériquement la convergence en h du schéma. Les coûts de calcul du solveur sont

ensuite analysés et comparés pour les 3 types de résolutions considérées (résolution hp conforme de référence, hp non-conforme classique et condensée). Nous concluons alors par quelques remarques sur le comportement numérique de la solution condensée, en abordant brièvement les problématiques de dissipation, de dispersion, et d'apparition d'ondes parasites, communes pour le type d'approximation utilisée.

3.3.1 Présentation des cas-tests

Nous travaillons à partir du cas-test de la cavité métallique résonante vu dans le premier chapitre, décliné en quatre maillages hp non-conformes dont le motif initial est représenté sur la figure 3.11.

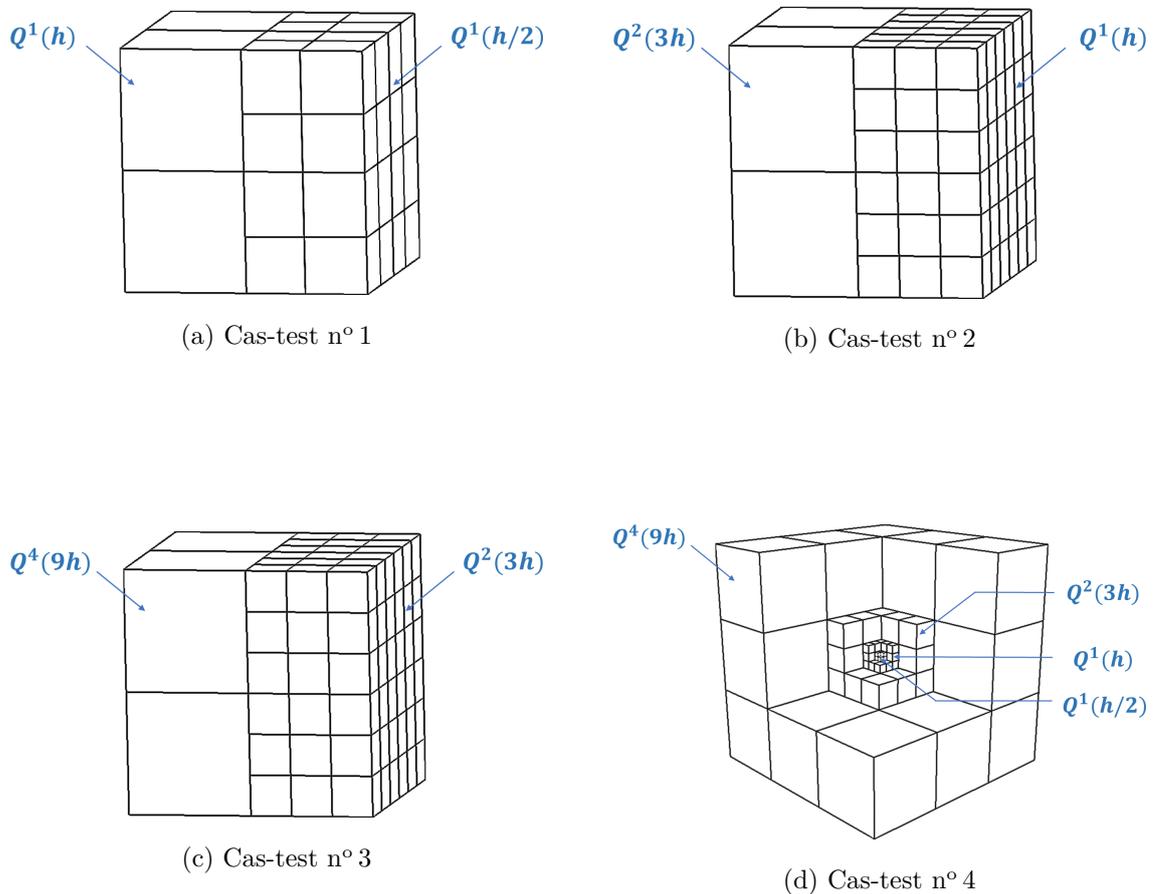


FIGURE 3.11 – Présentation des maillages hp utilisés dans cette étude. Le paramètre h désigne la taille des cellules de la grille cartésienne de référence à partir de laquelle ils ont été construits.

Chacun de ces maillages est construit par adaptation hp à partir d'une grille cartésienne de référence de pas d'espace h . Les trois premières configurations (figures 3.11a-b-c) sont des configurations élémentaires, ne faisant intervenir qu'un seul type de raccord hp non-conforme. Nous cherchons ainsi à évaluer séparément chacun des raccords condensés construits précédemment, du point de vue de la précision et des performances. Soulignons que le cas-test n° 1 est construit par h -raffinement, alors que les cas-tests n° 2 et 3 sont construits par h -déraffinement/ p -enrichissement du maillage initial correspondant. L'objet de ce cas-test n'est donc pas d'optimiser les performances, mais d'améliorer localement la qualité de la résolution. La quatrième configuration (figure 3.11d) est en revanche plus générale, et mêle raffinements et déraffinements hp de sorte à contenir tous les accolements non-conformes condensés disponibles. Ce faisant, nous cherchons d'une part à valider la bonne tenue du schéma condensé sur des maillages hybrides complexes de ce type, et d'autre part à établir d'éventuelles corrélations avec les résultats obtenus sur les cas-tests élémentaires, notamment du point de vue de la convergence.

Les paramètres généraux des simulations effectuées sont les suivants :

- pour les cas-tests n° 1, 2 et 3, propagation du mode (2,2,2) (fréquence $\sim 520MHz$) pour une durée de simulation de $T_f = 5ns$ ($\sim 2,5$ périodes),
- pour le cas-test n° 4, propagation du mode (4,4,4) (fréquence $\sim 1GHz$) pour une durée de simulation de $T_f = 3ns$ (~ 5 périodes).

Toutes les simulations sont réalisées dans les conditions pratiques d'utilisation du schéma temporel, c'est-à-dire avec un pas de temps CFL maximal obtenu numériquement.

3.3.2 Évaluation de la convergence en h

Nous cherchons dans ce paragraphe d'une part à valider la convergence en h du schéma condensé à l'ordre théorique, et d'autre part à la situer par rapport à celle de la résolution de référence et de l'approche classique.

Pour ce faire, nous travaillons à partir d'une série de maillages hp , obtenus par raffinements homogènes successifs des configurations hybrides initiales que nous venons d'introduire (série de maillages du type de la figure 2.7 du chapitre précédent). À chacun de ces maillages hp correspond une grille cartésienne conforme (voir figure 3.12), sur laquelle la résolution Q^1 va permettre d'évaluer la convergence de référence.

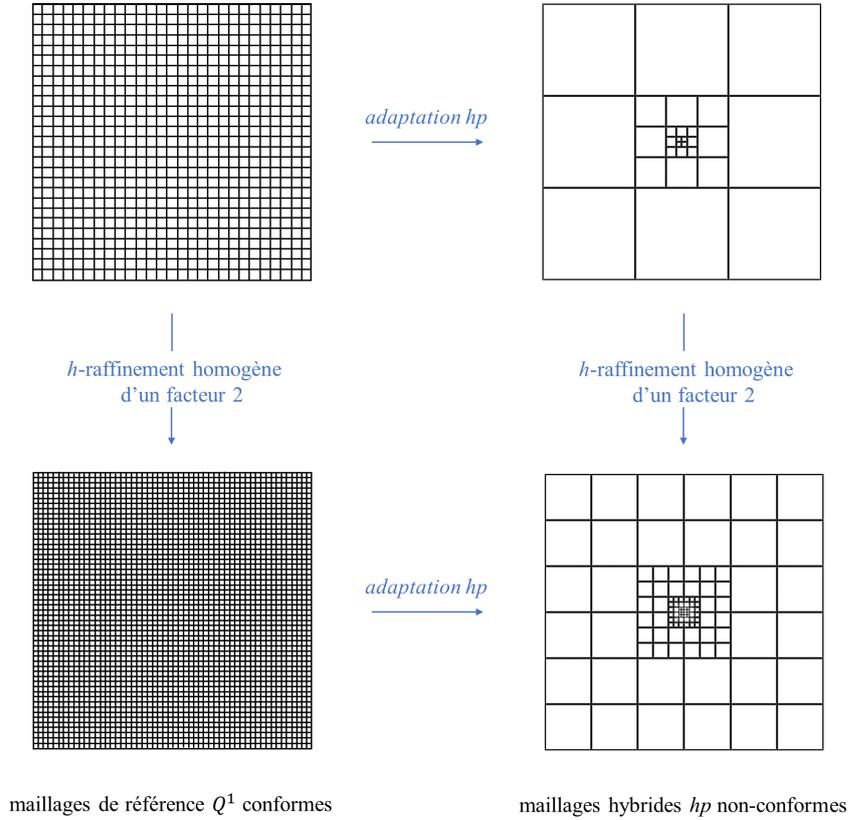


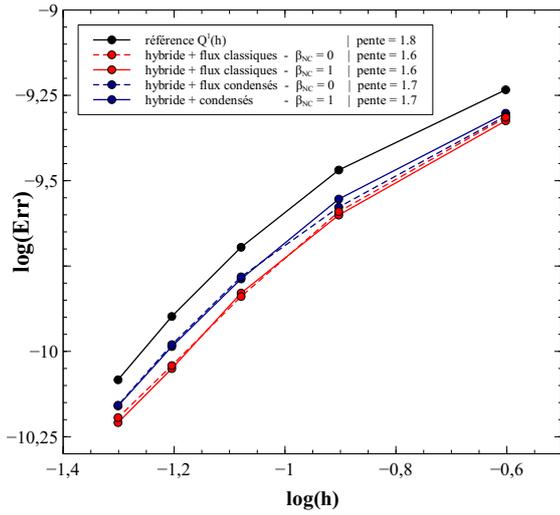
FIGURE 3.12 – Plans de coupe de la configuration non-conforme du cas-test 4 et du maillage de référence (Q^1) associé, à l'étape initiale et après raffinement homogène d'un facteur 2.

Pour les raisons exposées dans le chapitre 1, nous considérons une résolution en flux décentrés. Ainsi, au vu des résultats obtenus dans le premier chapitre, nous pouvons anticiper une convergence voisine de l'ordre 2 pour la résolution conforme Q^1 de référence. En revanche, il n'est pas évident *a priori* que cette propriété de super-convergence soit conservée sur les configurations hp non-conformes. Nous nous attendons donc, pour la résolution GD hybride classique, à un ordre de convergence situé entre les deux valeurs suivantes :

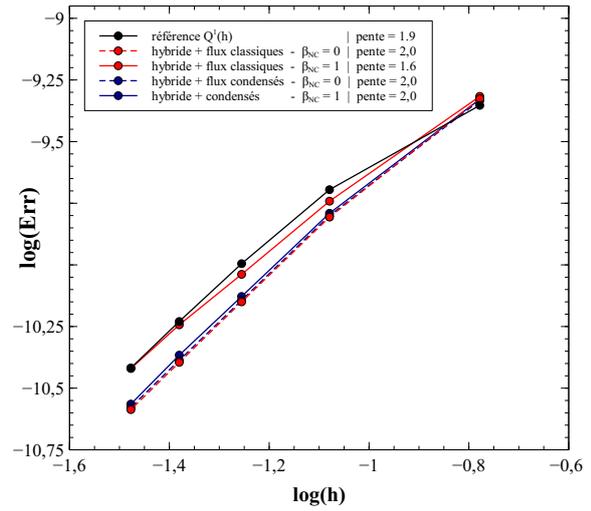
$$\underbrace{\min \left\{ 2, p_{min} - \frac{1}{2} \right\}}_{\text{estimation basse issue de [81]}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\min \{ 2, p_{min} + 1 \}}_{\text{estimation haute issue du chapitre 1}} \quad (3.98)$$

où le premier terme de l'accolade représente l'ordre du schéma temporel, et le second l'ordre de convergence de l'approximation spatiale, dépendant du plus faible degré de résolution noté p_{min} du maillage hp . Quant à la résolution par le schéma condensé, les flux de la section précédente ayant été conçus pour ne pas être limitants dans la consistance de l'approximation spatiale, nous devrions observer un ordre de convergence similaire. Ajoutons également que la convergence du cas-test n°4 devrait être limitée asymptotiquement à l'ordre le plus faible observé sur les cas-tests élémentaires n°1, 2 et 3, car il utilise l'ensemble des configurations d'accolements non-conformes.

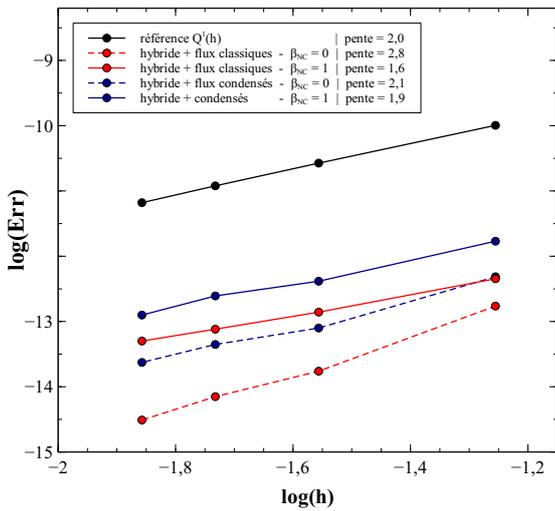
Afin de valider le processus de construction des flux condensés vis-à-vis des contraintes des parties centrée et décentrée, nous allons réaliser les simulations hybrides en faisant varier le paramètre de décentrement, uniquement au niveau des interfaces non-conformes (β_{NC}). Pour chaque cas-test et pour chaque facteur de raffinement, nous relevons alors la dimension des cellules de référence (h), le nombre de mailles ($N_{mailles}$) et de degrés de liberté (N_{ddl}), l'erreur commise ($\mathcal{E}rr$, telle que définie dans le chapitre 1), le taux de convergence (taux cv.), le pas de temps utilisé (Δt) et le temps de simulation (t-CPU). Les résultats sont reportés sur la figure 3.13 et dans les tableaux 3.1-3.2-3.3-3.4 pour le cas particulier des résolutions en flux non-conformes décentrés ($\beta_{NC} = 1$).



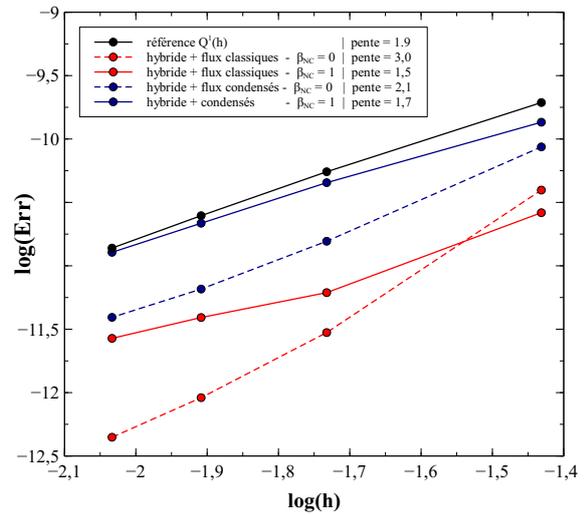
(a) Cas-test n° 1



(b) Cas-test n° 2



(c) Cas-test n° 3



(d) Cas-test n° 4

FIGURE 3.13 – Courbes de convergence pour les différents cas-tests. Les simulations sont effectuées avec un paramètre de décentrement $\beta_C = 1$ sur les interfaces conformes (flux décentrés), et avec un paramètre $\beta_{NC} \in \{0; 1\}$ sur les interfaces non-conformes.

Résolution	h (m)	$N_{mailles}$	N_{ddl}	$\mathcal{E}rr$	taux cv.	Δt (s)	t-CPU (s)
Référence <i>hp</i> conforme	2,50e-1	64	3 072	5,84e-10	-	2,41e-10	1,40e-2
	1,25e-1	512	24 576	3,40e-10	0,8	1,20e-10	7,20e-2
	8,33e-2	1 728	82 944	2,02e-10	1,3	8,02e-11	0,28
	6,25e-2	4 096	196 608	1,27e-10	1,6	6,02e-11	0,95
	5,00e-2	8 000	384 000	8,25e-11	1,9	4,81e-11	2,61
Hybride + Flux Classiques	2,50e-1	288	13 824	4,85e-10	-	1,20e-10	0,79
	1,25e-1	2 304	110 592	2,57e-10	0,9	6,02e-11	6,42
	8,33e-2	7 776	373 248	1,45e-10	1,4	4,01e-11	25,0
	6,25e-2	18 432	884 736	9,11e-11	1,6	3,01e-11	62,8
	5,00e-2	36 000	1 728 000	6,48e-11	1,5	2,41e-11	145
Hybride + Flux Condensés	2,50e-1	288	13 824	4,98e-10	-	1,20e-10	4,80e-2
	1,25e-1	2 304	110 592	2,79e-10	0,8	6,02e-11	0,54
	8,33e-2	7 776	373 248	1,63e-10	1,3	4,01e-11	3,19
	6,25e-2	18 432	884 736	1,03e-10	1,6	3,01e-11	16,80
	5,00e-2	36 000	1 728 000	6,92e-11	1,8	2,41e-11	45,7

TABLE 3.1 – Données de convergence sur le cas-test n° 1, pour les résolutions de référence $Q^1(h)$ et hybrides $Q^1(h)/Q^1(\frac{h}{2})$, avec flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) classiques et condensés.

Résolution	h (m)	$N_{mailles}$	N_{ddl}	$\mathcal{E}rr$	taux cv.	Δt (s)	t-CPU (s)
Référence <i>hp</i> conforme	1,67e-1	216	10 368	4,44e-10	-	1,60e-10	4,30e-2
	8,33e-2	1 728	82 944	2,02e-10	1,2	8,02e-11	0,28
	5,56e-2	5 832	279 936	1,01e-10	1,7	5,35e-11	2,2
	4,17e-2	13 824	663 552	5,89e-11	1,9	4,01e-11	7,38
	3,33e-2	27 000	1 296 000	3,82e-11	1,9	3,21e-11	36,1
Hybride + Flux Classiques	1,67e-1	112	5 832	4,82e-10	-	1,60e-10	1,0
	8,33e-2	896	46 656	1,81e-11	1,4	8,02e-11	6,8
	5,56e-2	3 024	157 464	9,16e-11	1,7	5,35e-11	20
	4,17e-2	7 168	373 248	5,71e-11	1,6	4,01e-11	56
	3,33e-2	14 000	729 000	4,00e-11	1,6	3,21e-11	136
Hybride + Flux Condensés	1,67e-1	112	5 832	4,70e-10	-	1,60e-10	2,3e-2
	8,33e-2	896	46 656	1,62e-11	1,7	8,02e-11	0,16
	5,56e-2	3 024	157 464	7,45e-11	1,9	5,35e-11	1,35
	4,17e-2	7 168	373 248	4,30e-11	1,9	4,01e-11	4,1
	3,33e-2	14 000	729 000	2,73e-11	2,0	3,21e-11	19

TABLE 3.2 – Données de convergence sur le cas-test n° 2, pour les résolutions de référence $Q^1(h)$ et hybrides $Q^2(3h)/Q^1(h)$, avec flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) classiques et condensés.

Résolution	h (m)	$N_{mailles}$	N_{ddl}	$\mathcal{E}rr$	taux cv.	Δt (s)	t-CPU (s)
Référence <i>hp</i> conforme	5,56e-2	112	279 936	1,0e-10	-	5,35e-11	2,2
	2,28e-2	896	2 239 488	2,7e-11	1,9	2,68e-11	40
	1,85e-2	3 024	7 558 272	1,2e-11	2,0	1,78e-11	286
	1,39e-2	7 168	17 915 904	6,6e-12	2,0	1,33e-11	717
	5,56e-2	112	20 496	3,24e-12	-	6,29e-11	92,4
Hybride + Flux Classiques	2,28e-2	896	163 968	6,54e-13	1,7	2,89e-11	724
	1,85e-2	3 024	553 392	2,7e-13	1,5	1,93e-11	2 788
	1,39e-2	7 168	1 311 744	1,45e-13	1,5	1,44e-11	5 828
	5,56e-2	112	20 496	2,2e-11	-	4,04e-11	0,14
	2,28e-2	896	163 968	5,8e-12	2,0	2,02e-11	2,2
Hybride + Flux Condensés	1,85e-2	3 024	553 392	2,7e-12	1,3	1,35e-11	11
	1,39e-2	7 168	1 311 744	1,6e-12	2,3	1,01e-11	56

TABLE 3.3 – Données de convergence sur le cas-test n° 3, pour les résolutions de référence $Q^1(h)$ et hybrides $Q^4(9h)/Q^2(3h)$, avec flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) classiques et condensés.

Résolution	h (m)	$N_{maill\grave{e}s}$	N_{ddl}	$\mathcal{E}rr$	taux cv.	Δt (s)	t-CPU (s)
Référence <i>hp</i> conforme	3,37e-2	19 683	944 784	1,94e-10	-	3,57e-11	7,70
	1,85e-2	157 646	7 558 272	5,52e-11	1,8	1,78e-11	286
	1,23e-2	531 441	25 509 168	2,49e-11	2,0	1,19e-11	705
	9,26e-3	1 259 712	60 466 176	1,38e-11	2,0	8,91e-12	2302
Hybride + Flux Classiques	3,37e-2	86	25 344	2,62e-11	-	1,78e-11	3 303
	1,85e-2	688	202 752	6,15e-12	2,1	8,92e-12	25 942
	1,23e-2	2 322	684 288	3,53e-12	1,3	5,95e-12	88 146
	9,26e-3	5 504	1 622 016	2,28e-12	1,5	4,45e-12	210 489
Hybride + Flux Condensés	3,37e-2	86	25 344	1,36e-10	-	1,78e-11	0,43
	1,85e-2	688	202 752	4,53e-11	1,6	8,92e-12	2,97
	1,23e-2	2 322	684 288	2,17e-11	1,8	5,95e-12	19,80
	9,26e-3	5 504	1 622 016	1,28e-11	1,8	4,45e-12	75,57

TABLE 3.4 – Données de convergence sur le cas-test n° 4, pour les résolutions de référence $Q^1(h)$ et hybrides $Q^4(9h)/Q^2(3h)/Q^1(\frac{h}{2})$, avec flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) classiques et condensés.

Nous pouvons tout d’abord constater que pour les résolutions de référence, nous obtenons bien une pente de convergence proche de 2, en accord avec la valeur attendue. L’ordre obtenu sur les cas hybrides se situe également dans l’intervalle théorique (3.98), mais sa valeur dépend du type de flux utilisé au niveau des interfaces *hp* non-conformes : classique/condensé, et centrés/décentrés.

Dans le cas des flux classiques, un phénomène de super-convergence est conservé lorsque le raccord non-conforme est de type centré ($\beta_{NC} = 0$), avec des pentes supérieures au degré de résolution minimal utilisé pour la résolution. Cela s’explique par le fait qu’en flux centrés, la borne inférieure de l’intervalle (3.98) devient, pour les maillages orthogonaux :

$$\min \{2, p_{min}\}, \quad (3.99)$$

comme le montre l’étude menée dans [73]. En revanche, lorsque le raccord est décentré, l’ordre de consistance en espace de cette borne inférieure est diminué d’un demi, ce qui peut expliquer la dégradation de convergence observée dans le cas-test n° 3, où une valeur de 1,6 est obtenue pour un degré de résolution minimal $p_{min} = 2$ (voir figure 3.13c).

En ce qui concerne les flux condensés, les figures 3.13a-b montrent des courbes de convergence très proches pour les cas-tests n° 1 et 2, que le raccord soit centré ou non, avec un ordre situé entre p_{min} et $p_{min} + 1$. En revanche, pour le cas-test n° 3, bien que les pentes varient peu avec le paramètre de décentrement, on constate un décrochage de précision de la courbe décentrée, dont la position est d’un ordre de grandeur au dessus de la courbe centrée (voir figure 3.13c). Cela provient du fait que, contrairement aux raccords Q^1/Q^1 et Q^1/Q^2 , le flux condensé construit sur la partie centrée de la configuration Q^4/Q^2 est différent et de meilleure qualité que celui construit sur la partie décentrée. On voit ici l’impact de cette différence de qualité : en flux décentrés, l’ordre de convergence du schéma condensé est peu altéré, mais la résolution est moins précise. Comme le montre la figure 3.13d, le même phénomène se produit pour le cas-test n° 4. Or, ce cas-test fait intervenir tous les raccords condensés non-conformes, en particulier le raccord Q^2/Q^4 . Il peut donc se justifier de la même manière. Plus loin, on voit que, lorsque les flux *hp* non-conformes sont décentrés, le schéma condensé permet d’améliorer l’ordre de convergence par rapport au schéma classique. Cela peut s’expliquer par le fait que les flux condensés mis en place sont légèrement moins dissipatifs que les flux classiques, comme nous allons voir plus loin (figure 3.18).

Remarquons enfin que sur le cas-test n° 4, l’ordre de convergence obtenu en flux décentrés correspond bien à la valeur minimale observée sur les cas-tests élémentaires n° 1, 2, et 3, pour les résolutions hybrides classique et condensée. Ceci confirme que la convergence d’un maillage *hp* hybride est limitée par la configuration de plus faible ordre de consistance. On fait en revanche le constat inverse en flux centrés, ce qui laisse supposer que, dans ce cas, le processus de raffinement n’a pas été poussé suffisamment loin pour rendre compte du comportement asymptotique de la convergence.

En conclusion, la stabilité et la consistance du schéma condensé sont acquises pour les cas-tests considérés. L’ordre de convergence numérique est en accord avec l’étude théorique du schéma, ce qui tend en particulier à valider le processus de construction de flux *hp* non-conformes présenté au début du chapitre. De plus, pour le cadre applicatif considéré (flux décentrés), la méthode de condensation de flux permet d’améliorer légèrement l’ordre de convergence par rapport à l’approche classique.

3.3.3 Analyse de l'efficacité numérique

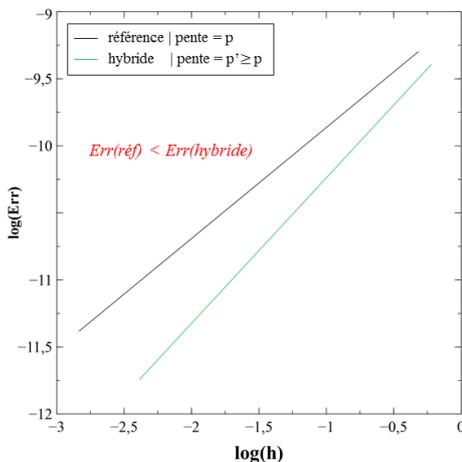
Nous présentons ici une comparaison de l'efficacité numérique des différentes résolutions effectuées (référence, hybride classique, hybride condensée), basée sur les résultats de l'étude de convergence du paragraphe précédent. L'objectif principal est de déterminer si le schéma condensé permet d'éviter l'explosion des temps d'exécution du solveur sur les maillages hp non-conformes tout en satisfaisant la précision de référence. Dans ce qui suit, seul le cas des flux décentrés ($\beta_C = \beta_{NC} = 1$) sera considéré (cadre applicatif).

Avant de comparer les coûts de calcul de chaque type de résolution et d'évaluer l'apport du schéma condensé, il est nécessaire de s'assurer que les solutions numériques présentent un niveau de précision équivalent. Plus précisément, dans notre cadre d'étude, il s'agit de s'assurer que les solutions hybrides garantissent *a minima* la qualité de référence (critère d'iso-qualité).

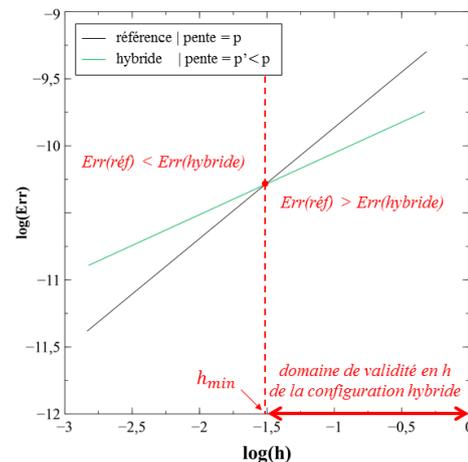
Les positions relatives des courbes de convergence de la figure 3.13 montrent que l'erreur de simulation sur le maillage hp de référence est systématiquement plus élevée que pour les configurations hybrides, classique ou condensée, sur le maillage h -déaffiné/ p -enrichi correspondant. Notre critère de qualité est donc satisfait. Il devient alors sensé de comparer les coûts de calcul de ces différentes résolutions.

Cependant, avant de poursuivre, apportons une nuance à ce résultat. De manière générale, lorsque la courbe de convergence (assimilée ici à une droite pour plus de simplicité) d'une résolution hybride est située en dessous de celle de référence, deux cas de figure peuvent se présenter :

- la pente de référence est inférieure ou égale à celle associée à la résolution hybride. Dans cette situation, représentée qualitativement sur la figure 3.14a, la solution hybride sera systématiquement plus précise que la solution de référence, quel que soit le facteur de raffinement considéré, ou autrement dit, quel que soit la finesse du maillage initial. Dans ce cas, nous dirons que la résolution hybride satisfait le critère d'iso-qualité de manière inconditionnelle,
- la pente de référence est strictement supérieure à celle associée à la résolution hybride, comme illustré sur la figure 3.14b. Dans ce cas, on distingue deux régimes. Si le pas du maillage initial est strictement supérieur à une certaine valeur critique $h > h_{min}$, la solution hybride sera plus précise que la solution de référence, sinon, c'est la solution de référence qui sera la plus précise, et donc le critère d'iso-qualité ne sera plus respecté. Il se crée ainsi un domaine de validité en h de la configuration hybride, correspondant à l'intervalle de confiance $[0, h_{min}]$, en dehors duquel la solution hybride n'est pas de qualité suffisante pour présenter un intérêt applicatif. Pour une situation de ce type, nous dirons que la résolution hybride satisfait le critère d'iso-qualité de manière conditionnelle.



(a) iso-qualité inconditionnelle



(b) iso-qualité conditionnelle

FIGURE 3.14 – Représentations qualitatives d'une situation d'iso-qualité inconditionnelle (a) et conditionnelle (b) entre la résolution de référence et une résolution sur maillage hybride.

Ainsi, en revenant à l'étude de convergence effectuée, on voit que les résolutions hybrides (classique et condensée) des cas-tests n° 1, 3 et 4 satisfont le critère d'iso-qualité de manière conditionnelle, alors que celles du cas-test n° 2 le satisfont de manière inconditionnelle. En réalisant une régression linéaire sur les courbes de convergence correspondantes, on peut donner une estimation des intervalles de confiance associés aux résolutions hybrides des cas-tests n° 1, 3 et 4. Par exemple, pour le cas-test n° 1, on a $h_{min} \simeq 5mm$ pour la résolution avec les flux classiques, et $h_{min} \simeq 2mm$ avec les flux condensés (valeurs non restrictives pour les applications). On voit donc, sur cet exemple, que le domaine de validité de la configuration hybride est moins restrictive pour le schéma condensé que pour le schéma classique. Or, un point intéressant est le suivant : les expériences présentées ici tendent à montrer que les flux condensés construits permettent d'améliorer légèrement l'ordre de convergence numérique du schéma par rapport à l'approche classique. On pourrait donc vraisemblablement généraliser le constat précédent, en disant que quelle que soit la configuration hybride considérée, le schéma condensé présente un domaine de validité moins restrictif que le schéma classique.

Pour conclure cette remarque, soulignons seulement que si les résolutions hybrides considérées satisfont le critère d'iso-qualité, c'est parce que nous nous sommes placés (à notre insu) dans le domaine de validité des différentes configurations hybrides considérées, et que ce résultat n'était pas acquis *a priori*.

Le tableau 3.5 présente, pour chaque cas-test, le gain en stockage mémoire entre le maillage de référence et le maillage hybride correspondant. Ces gains sont indépendants du facteur de raffinement (celui-ci étant réalisé de manière homogène) et du type de flux utilisé.

Cas-test n°	1	2	3	4
$\frac{N_{ddl} \text{ réf.}}{N_{ddl} \text{ hybride}}$	0,22	1,78	13,7	37,3

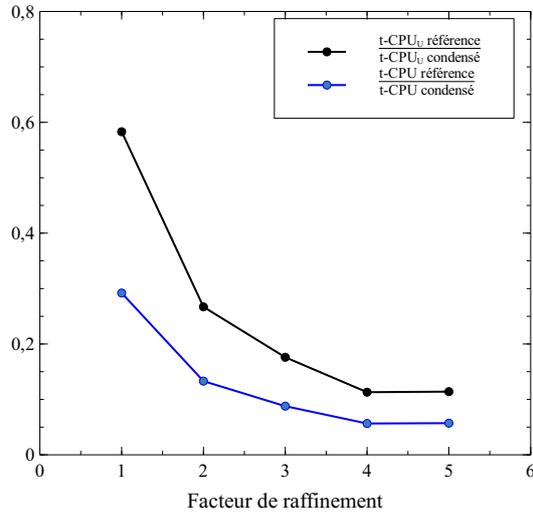
TABLE 3.5 – Gain en stockage mémoire entre le maillage de référence et la configuration hybride correspondante.

On constate que le maillage hybride utilisé pour le cas-test n° 1 présente un stockage mémoire supérieur à celui du maillage de référence (gain inférieur à 1), ce qui est tout à fait normal car il est obtenu par raffinement du maillage initial. Dans les autres cas-tests, où nous avons procédé par h -déaffinement/ p -enrichissement, nous obtenons un gain significatif, d'autant plus important que les ordres de résolution sont élevés. Ceci reste vrai également dans le cas n° 4, où, en plus du déaffinement, nous avons mis en place une zone de raffinement local. On retrouve ainsi des résultats cohérents avec ceux du chapitre 1 : l'utilisation d'un maillage hp hybride bien adapté permet de réduire significativement le stockage mémoire.

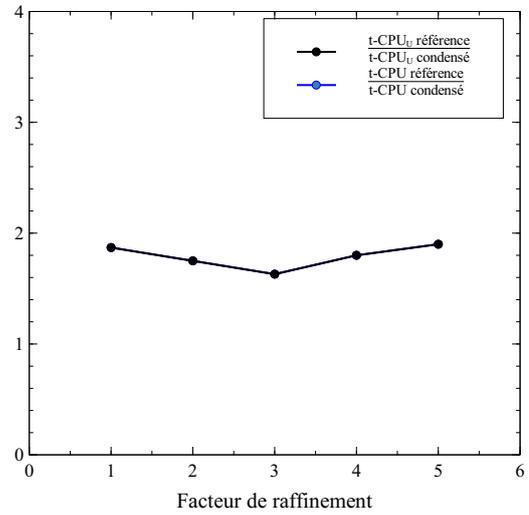
Intéressons nous à présent au temps de calcul des schémas classique et condensé obtenus sur les différents cas-tests.

Comme dans le chapitre 1, les tableaux 3.1 à 3.4 montrent une explosion systématique du temps de simulation sur maillage hybride par rapport au maillage de référence, lorsque les flux classiques sont utilisés. Les raisons de cette explosion ont déjà été présentées précédemment : augmentation du nombre d'accès mémoire et d'interpolations des fonctions de base aux interfaces non-conformes, et sur-précision de la résolution. Ainsi, sur l'ensemble des simulations effectuées (hormis celles du cas-test de raffinement n° 1 qui n'a pas vocation à améliorer les performances numériques), l'approche hybride classique donne des temps de calcul entre 4 et 430 fois plus importants que la résolution de référence, ce qui confirme une nouvelle fois son caractère inutilisable pour des applications pratiques.

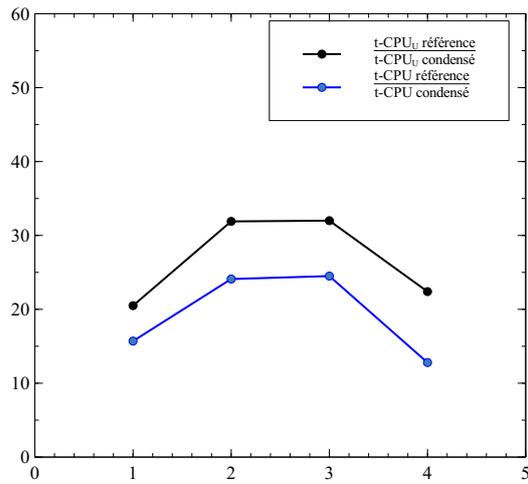
Passons donc aux performances du schéma condensé. Afin d'écartier l'impact du changement de contrainte CFL dans les temps d'exécution, nous cherchons tout d'abord à évaluer la complexité algorithmique du schéma spatial, et à la comparer avec la résolution de référence. Pour ce faire, nous relevons le gain en temps de calcul unitaire (courbes noires de la figure 3.15), c'est-à-dire le rapport des durées d'une itération temporelle entre la résolution de référence $Q^1(h)$ et la résolution condensée sur maillage hybride.



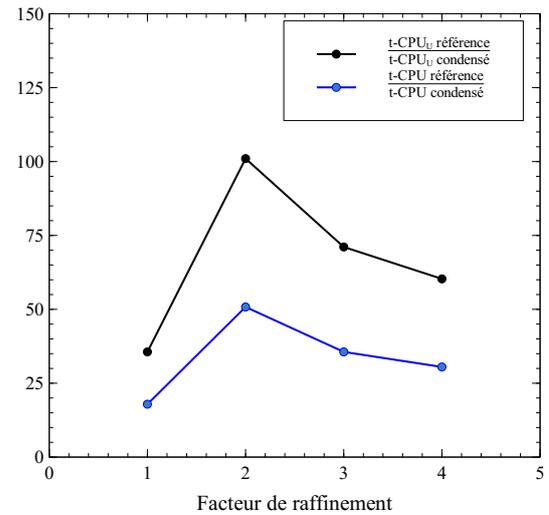
(a) Cas-test n° 1



(b) Cas-test n° 2



(c) Cas-test n° 3



(d) Cas-test n° 4

FIGURE 3.15 – Évolution du gain en temps de calcul unitaire ($t\text{-CPU}_U$, durée d'une itération temporelle) et en temps de calcul total ($t\text{-CPU}$) en fonction du facteur de raffinement homogène du maillage hp utilisé dans l'étude de consistance.

On observe alors qu'en excluant logiquement le cas-test n° 1, les résultats sont clairement en faveur de la résolution sur maillage hybride avec le schéma condensé, avec des gains en temps de calcul unitaires proches de 2 pour le cas-test n° 2, situés entre 20 et 35 pour le cas-test n° 3, et entre 35 et 100 pour le cas-test n° 4. Ceci montre que le couple maillage hybride/schéma condensé permet une approximation spatiale moins coûteuse que celle référence, et *a fortiori* que celle du couple maillage hybride/schéma classique.

Pour que ce bilan unitaire puisse s'étendre au temps de simulation global, il est nécessaire que les gains acquis sur l'approximation spatiale ne soient pas contrebalancés par une contrainte CFL devenue trop restrictive, du fait de la modification du maillage de calcul ou de l'utilisation des flux condensés.

Étudions donc les pas de temps utilisés sur les différentes configurations. Pour le cas-test n° 1 (voir tableau 3.1), les pas de temps des configurations hybrides (classique et condensée) correspondent à la moitié de ceux utilisés sur les maillages de référence correspondants, du fait de l'introduction de cellules raffinées par 2. On conclut donc que le pas de temps limitant est donné par la plus petite cellule d'ordre 1 présente dans le maillage, et que ni le passage à la configuration hybride ni l'utilisation du flux condensé $Q^1(h)/Q^1(\frac{h}{2})$ n'a joué sur celui-ci. Pour le cas-test n° 2 (voir tableau 3.2), le pas de temps des configurations hybrides est cette fois identique à celui utilisé sur le maillage de référence. On conclue donc comme précédemment. En revanche, sur le cas-test n° 3 (voir tableau 3.2), on voit que si le pas de temps de la résolution hybride classique est légèrement amélioré par rapport à celui de référence, il est réduit d'environ 25% pour la résolution hybride condensée. Ceci montre que le raccord $Q^4(9h)/Q^3(3h)$ construit précédemment a amené une condition CFL plus restrictive que celle du schéma classique. Cependant, cette diminution du pas de temps est négligeable devant le gain unitaire acquis sur l'approximation spatiale. Ainsi, comme nous allons voir, la résolution hybride condensée reste significativement avantageuse du point de vue des temps d'exécution. Enfin, pour le cas-test n° 4, les pas de temps utilisés pour les résolutions hybrides correspondent une nouvelle fois aux demi-pas de temps de référence, conformément aux conclusions que nous venons de faire sur les cas-tests élémentaires. Remarquons que ces constats seraient impactés positivement par l'ajout d'une stratégie de pas de temps local.

En dernier lieu, nous nous intéressons donc aux gains en temps de calcul global du schéma condensé. (courbes bleues de la figure 3.15). En excluant le cas-test n° 1 pour les raisons précédemment évoquées, on constate que la résolution hybride condensée est plus rapide que la résolution de référence, d'un facteur proche de 2 pour le cas-test n° 2, situé entre 12 et 24 pour le cas-test n° 3, et entre 15 et 50 pour le cas-test n° 4. Les gains globaux obtenus sont cependant inférieurs ou égaux aux gains unitaires, ce qui est naturel du fait de la réduction du pas de temps de simulation décrit plus haut.

Enfin, remarquons que, outre la réduction de complexité de l'approximation spatiale, l'écart à l'erreur de référence permet également d'expliquer les meilleures performances du schéma condensé par rapport au schéma classique. Les tableaux 3.1-3.2-3.3-3.4 montrent en effet que l'erreur commise par le schéma condensé est de manière générale nettement plus proche de l'erreur de référence que celle commise par le schéma classique, ce qui se traduit en pratique par un effort numérique plus faible.

Remarque 3.20 *On observe dans la figure 3.15 des fluctuations dans l'évolution des gains en temps de calcul. Cela vient du fait que, lors du processus de raffinement, la part relative des différentes contributions du schéma dans la charge de calcul globale évolue différemment selon leur nature. Par exemple, si f représente le facteur de raffinement homogène, le nombre de cellules croit comme f^3 , alors que le nombre de surfaces d'échange non-conformes évolue en f^2 . Asymptotiquement, le coût de calcul des contributions correspondant aux parties homogènes du maillage hp (rigidités et flux conformes) devient donc prépondérant devant celui des termes de raccords hybrides (flux non-conformes). On peut ainsi s'attendre à ce que le gain se stabilise autour d'une valeur limite, correspondant aux parties homogènes les plus coûteuses du maillage hp (phénomène bien visible sur la figure 3.15a).*

Plus spécifiquement, pour les cas-tests n° 3 et 4, on observe un gain beaucoup plus faible sur la première configuration que sur les maillages hp raffinés qui suivent. Cette cassure s'explique simplement par la durée d'initialisation du schéma qui prend une part non négligeable pour ces simulations, du fait d'un nombre élevé de degrés de liberté et d'un nombre faible d'itérations temporelles.

Remarque 3.21 *De manière générale, si l'on néglige la phase de lecture des données d'entrée et d'initialisation, le temps d'exécution du solveur peut s'écrire qualitativement sous la forme :*

$$t\text{-CPU} \simeq t\text{-CPU}_U * N_{iter} \simeq t\text{-CPU}_U * \frac{T_f}{\Delta t}, \quad (3.100)$$

où $t\text{-CPU}_U$ désigne la durée d'une itération temporelle (mesure intéressante de la complexité du schéma spatial), N_{iter} le nombre d'itérations temporelles, T_f le temps final de simulation, et Δt le pas de temps utilisé (donné par la contrainte CFL). Ainsi, le gain en temps de calcul global d'une résolution hybride par rapport à la résolution de référence peut s'écrire sous la forme :

$$\underbrace{\frac{t\text{-CPU réf.}}{t\text{-CPU hybride}}}_{\text{ratio } t\text{-CPU global}} \simeq \underbrace{\frac{t\text{-CPU}_U \text{ réf.}}{t\text{-CPU}_U \text{ hybride}}}_{\substack{\text{ratio sur} \\ \text{l'approx. spatiale}}} * \underbrace{\frac{\Delta t \text{ hybride}}{\Delta t \text{ réf.}}}_{\substack{\text{ratio sur} \\ \text{le schéma temporel}}}. \quad (3.101)$$

Les coûts de calcul des différentes résolutions effectuées s'interprètent alors facilement à partir de cette formulation : la résolution hybride classique n'introduit pas de perte d'efficacité au niveau du schéma temporel ($\Delta t \text{ hybride} / \Delta t \text{ réf.} = 1$), mais provoque une forte augmentation de la complexité du schéma spatial ($t\text{-CPU}_U \text{ réf.} / t\text{-CPU}_U \text{ hybride} \ll 1$); en revanche, la résolution hybride condensée peut induire une légère perte au niveau du schéma temporel ($\Delta t \text{ hybride} / \Delta t \text{ réf.} \lesssim 1$), mais produit un gain significatif sur la complexité de l'approximation spatiale ($t\text{-CPU}_U \text{ réf.} / t\text{-CPU}_U \text{ hybride} \gg 1$).

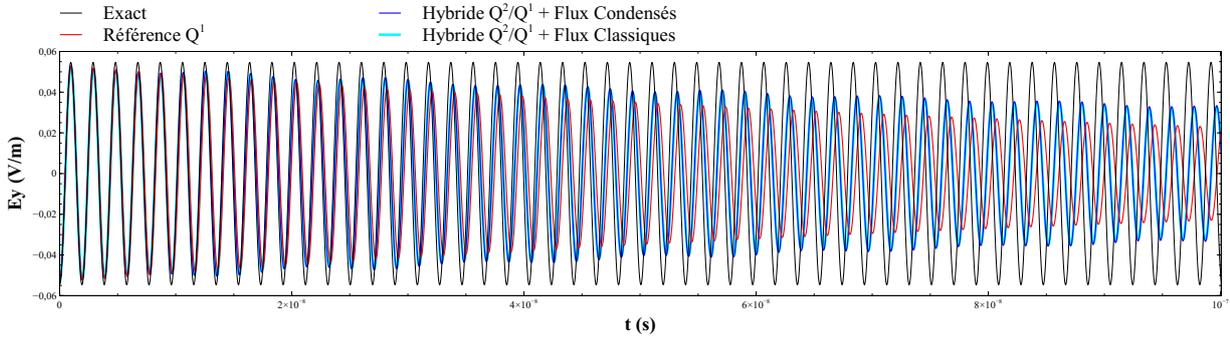
En résumé, la résolution sur maillages h -déaffinés/ p -enrichis associée au schéma GDDT condensé présente une efficacité numérique supérieure à celle de référence. La méthode de condensation de flux développée permet donc de pallier les problématiques de performances du schéma classique, en évitant l'explosion des temps d'exécution sur maillage hybride. Les gains en coûts de calcul résultent de la réduction significative de la complexité algorithmique du schéma spatial, et perdurent malgré une contrainte CFL légèrement plus restrictive lors de l'utilisation du raccord condensé $Q^4(9h)/Q^2(3h)$.

3.3.4 Remarques sur le comportement numérique de la solution approchée

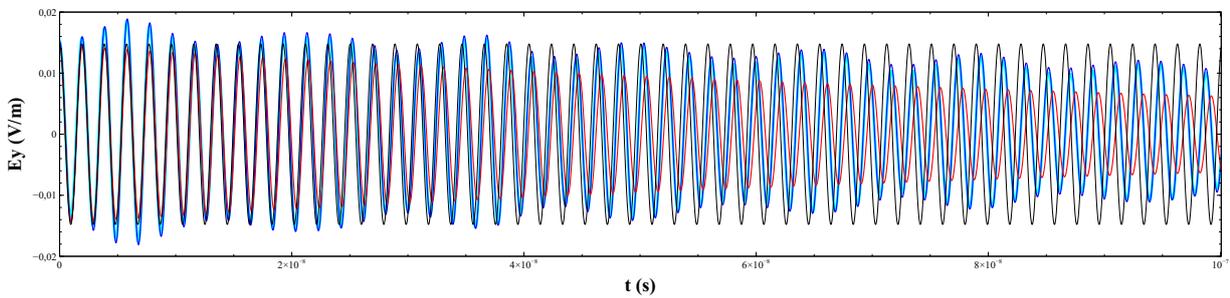
Plusieurs travaux ont mis en évidence l'apparition d'ondes ou de réflexions parasites lors de l'utilisation d'interfaces non-conformes [74][23][56]. Nous cherchons donc, dans ce paragraphe, à évaluer succinctement l'impact de la méthode de condensation de flux vis-à-vis de cette problématique. Nous abordons également le caractère dissipatif et dispersif du schéma condensé.

Pour ce faire, nous considérons le cas particulier de la configuration de la figure 3.11b, et nous étudions l'évolution de la solution approchée en deux points d'observation. Le premier point est distant de plusieurs mailles de l'interface non-conforme, et le deuxième est situé dans une cellule au contact de celle-ci. Nous comparons alors, sur la figure 3.16, la solution numérique de référence avec les solutions numériques hybrides classique et condensée.

On constate alors l'apparition d'un phénomène de modulation d'amplitude sur les solutions numériques hybrides. Ce phénomène est particulièrement prononcé à proximité de l'interface non-conforme (voir figure 3.16b), et s'atténue à mesure que l'on s'en éloigne (voir figure 3.16a). Le point important est que ce phénomène se produit quelle que soit la résolution hybride utilisée. Il ne résulte donc pas directement du schéma condensé, bien qu'il soit légèrement plus marqué pour cette résolution.



(b) Point éloigné de l'interface non-conforme



(a) Point proche de l'interface non-conforme

FIGURE 3.16 – Évolution temporelle de la composante E_y en un point d'observation éloigné (a) (distant de plusieurs mailles) et proche (b) (localisé dans une maille de contact) de la zone d'interface hp non-conforme, dans la configuration du cas-test n° 2, et pour un temps final de simulation de $T_f = 100ns$.

Le phénomène de modulation d'amplitude n'est pas limitant pour les cas-tests considérés dans ce chapitre, mais on peut anticiper qu'il devienne une source d'erreur non négligeable pour des configurations pathologiques présentant un motif de non-conformité régulier, du type de la figure 3.17.

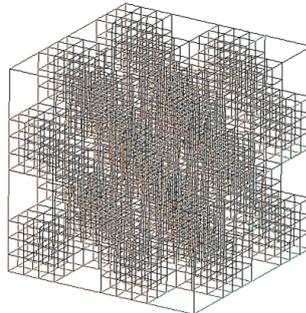


FIGURE 3.17 – Maillage en damier.

Nous ne proposons pas dans cette section une analyse poussée des propriétés de dissipation et de dispersion du schéma condensé, car la méthode généralement utilisée (étude par ondes planes [70]) n'est pas adaptée à l'utilisation de maillages hp non-conformes. Nous pouvons néanmoins apporter quelques éléments d'analyse à partir des résultats précédents, en étudiant les dernières périodes de la solution

numérique (voir figure 3.18). Ainsi, en notant λ la longueur d'onde de la solution exacte, on observe un déphasage proche de $\lambda/4$ pour la résolution condensée, et de l'ordre de $\lambda/2$ pour la résolution de référence. L'erreur de dispersion est donc deux fois plus faible dans le cas de la résolution hybride condensée que dans la résolution de référence. Elle est par ailleurs comparable à celle de la résolution hybride classique. On observe un comportement similaire vis-à-vis de la dissipation, l'amplitude de la solution hybride condensée étant supérieure à celle de la solution de référence d'environ 20%. La dissipation est par ailleurs légèrement accrue pour la solution hybride classique. Ces résultats dépendent bien sûr de la configuration et du raccord *hp* non-conforme condensé considérés. Nous pouvons cependant en conclure qu'il est possible de construire des flux *hp* non-conformes condensés, efficaces numériquement, et assurant un comportement numérique équivalent à celui de l'approche classique.

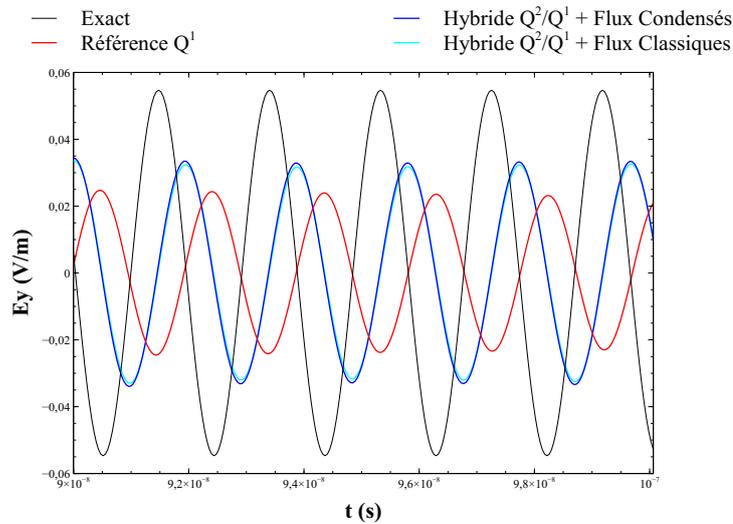


FIGURE 3.18 – Zoom sur les dernières périodes de la figure 3.16b ($\simeq 50$ périodes).

En conclusion, la résolution sur maillage hybride peut provoquer une modulation d'amplitude de la solution numérique. Ce phénomène résulte du changement d'espace d'approximation local au sein du maillage *hp*, et peut être accentué par la méthode de condensation de flux. Il reste cependant concentré au niveau des interfaces non-conformes, et ne dégrade pas la qualité de la solution approchée de manière significative, qui demeure supérieure à la qualité de référence. Notons également qu'il ne remet pas en cause la convergence du schéma (voir l'Annexe E). De plus, comme nous le verrons ultérieurement, ce phénomène est nettement moins prononcé lorsque le terme source est injecté via une surface de Huygens, correspondant davantage au cadre de nos applications. Enfin, pour la configuration *hp* considérée, la solution hybride condensée présente une erreur de dissipation et de dispersion plus faible que la solution de référence, et similaire à la solution hybride classique.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes concentrés sur la construction pratique de flux condensés, la validation numérique du schéma résultant, et l'étude de sa précision et de ses performances.

Si la méthodologie de construction proposée permet d'assurer la stabilité du schéma, nous ne sommes pas parvenus à y intégrer toutes les hypothèses de consistance établies dans le chapitre précédent. En pratique, nous avons donc introduit des conditions de consistance alternatives, se déclinant plus facilement en procédé constructif. Celles-ci imposent l'exactitude des flux condensés sur certains espaces polynômiaux donnés *a priori*, dont on suppose que la richesse conditionne la précision de l'approximation. Le processus de construction résultant semble bien adapté aux configurations d'accolement *hp* non-conformes à bas ordre (Q^1 , Q^2), et permet d'obtenir des flux condensés théoriquement stables, et numériquement

consistants. Cependant, il présente certaines limitations pour des fonctions de base d'ordre élevé, pour lesquelles le contrôle de la stabilité de la partie décentrée du flux condensé s'avère plus difficile.

Pour chaque flux condensé construit, nous avons mis en place une série de maillages hp qui ont permis de valider la convergence en h du schéma. À partir de ces simulations, nous avons pu montrer que le schéma condensé sur maillage hybride satisfait bien le critère de précision fixé précédemment, c'est-à-dire *a minima* l'iso-qualité avec la résolution GDDT- Q^1 sur une grille cartésienne de référence. L'étude des coûts de calcul associés a permis de mettre en évidence des gains sur la charge mémoire et sur les temps d'exécution par rapport à la résolution de référence. La méthode de condensation de flux développée permet donc d'éviter l'explosion des temps d'exécution sur maillage hybride, identifiée dans le premier chapitre.

Le principal inconvénient de notre approche reste que la construction des flux condensés doit être effectuée au cas par cas, pour chaque configuration hp non-conforme donnée, ce qui peut s'avérer fastidieux. Cependant, comme nous le verrons plus loin dans les applications numériques, il ne semble pas nécessaire de construire un grand nombre de raccords condensés pour concevoir des maillages hp amenant des gains significatifs en temps de calcul. Se limiter à quelques accolements stratégiques permet au contraire de mieux maîtriser la précision et les coûts de calcul de la résolution, et de faciliter la génération automatisée des maillages hp . Par ailleurs, il n'est pas rare qu'une méthode numérique se limite à un nombre restreint de configurations de maillages. On peut par exemple citer les méthodes AMR [20], qui se limitent à des raffinements/déraffinements de facteur 2, ou à l'approche GD/mortar développée dans [77] et évoquée dans le chapitre précédent, qui se limite à des accolements d'une cellule contre plusieurs.

À l'issue de ce travail, nous disposons donc d'un panel discret de configurations hp non-conformes à partir duquel nous pouvons concevoir des maillages hybrides présentant des coûts de calcul avantageux, et satisfaisant *a priori* la qualité de référence : une configuration de raffinement $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$, et deux configurations de déraffinement $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$, $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$. Ainsi, dans le chapitre suivant, nous présentons la conception d'un algorithme de post-maillage automatisé, permettant de générer des maillages hp optimisant les performances numériques de la résolution, et capable d'améliorer localement la description géométrique des objets.

Chapitre 4

Conception d'un algorithme de post-maillage solveur-adapté

Sommaire

4.1	Définition d'un cadre d'étude pour le déraffinement de maillage	166
4.1.1	Formalisation d'un processus de h -déraffinement par agglomération de mailles	166
4.1.2	Admissibilité des maillages agglomérés	170
4.1.3	Fonction d'adaptation hp	174
4.2	Mise en place d'un algorithme de h-déraffinement/p-enrichissement heuristique	174
4.2.1	Formulation d'un problème d'optimisation et mise en évidence des difficultés	174
4.2.2	Calcul et représentation des volumes agglomérables du maillage initial	177
4.2.3	Vers une stratégie d'agglomération hiérarchique	182
4.2.4	Partition du maillage initial en domaines d'agglomération	184
4.2.5	Heuristique d'agglomération dans les Δ -domaines	190
4.3	Gestion des raffinements locaux	198
4.3.1	Cadre d'étude	198
4.3.2	Limitation induite par les configurations condensées disponibles et stratégie de raffinement adoptée	200
4.3.3	Mise en place de l'approche de raffinement	201
4.3.4	Impact sur l'algorithme de h -déraffinement/ p -enrichissement	205
4.4	Conclusion	206

Au cours des chapitres précédents, nous avons vu que l'utilisation d'une stratégie h -déraffinement/ p -enrichissement de maillage menée dans un cadre conforme permettait d'améliorer significativement l'efficacité numérique de la résolution GDDT mais que son extension au cadre non-conforme peut entraîner des contre-performances rédhibitoires, du fait de l'explosion des coûts de calcul des termes de flux aux interfaces hétérogènes. Nous avons donc développé un schéma GDDT basé sur une méthode originale de condensation de flux, permettant de retrouver des performances avantageuses sur une classe restreinte de maillages cartésiens hp non-conformes. Ces maillages ne peuvent contenir que des configurations d'accolement pour lesquelles nous avons su construire des flux condensés efficaces numériquement et assurant la convergence du schéma. Dès lors, les performances du solveur GD reposent à part entière sur le maillage hp utilisé pour la résolution. Cependant, pour un cas-test donné, il est possible de construire un très grand nombre de maillages hp à partir des configurations condensées disponibles, présentant chacun une qualité et des coûts de calcul différents.

Dans ce contexte, ce chapitre traite de la construction de maillages hp adaptés au schéma GDDT condensé. Plus spécifiquement, nous nous concentrons, non pas sur des problématiques de génération de maillages *ex nihilo*, mais sur la conception d'une méthode de post-maillage. En effet, de par le contexte

industriel détaillé en introduction, nous disposons, pour chaque cas-test, d'un maillage fin cartésien conforme en guise de base de travail. Ces maillages sont calibrés de sorte qu'une résolution par le schéma de Yee (ou de manière équivalente par un schéma GDDT avec des fonctions de base Q^1) soit garant de la précision requise pour les applications, appelée précision de référence. Ainsi, l'objectif principal de ce chapitre est de concevoir un algorithme de post-maillage basé sur une stratégie de h -déaffinement/ p -enrichissement, capable de générer de manière automatisée des maillages hp minimisant les coûts de calcul du solveur, assurant la précision de référence, et satisfaisant les contraintes de représentation géométrique des objets du domaine de calcul.

Outre cet aspect d'efficacité numérique, nous allons également chercher à améliorer la description des éléments singuliers, de taille négligeable devant la dimension caractéristique de la scène de calcul (fils, fentes, etc.). En effet, dans l'approche DFDT ces éléments sont généralement pris en compte via des modèles sous-cellulaires (équations supplémentaires adjointes localement au schéma) dont le domaine de validité peut s'avérer contraignant en pratique. Le second objectif de ces travaux est donc d'assurer la représentation des objets singuliers directement dans le maillage de calcul et ainsi de s'affranchir autant que possible de certains modèles sous-cellulaires. Pour ce faire, nous allons une nouvelle fois chercher à tirer parti de la non-conformité permise dans l'approche GD, en développant une méthode de raffinement local de maillage.

La réalisation d'un algorithme de post-maillage satisfaisant ces objectifs est donc une étape clé dans la solution proposée dans cette thèse, qui conditionne l'efficacité numérique, la qualité et l'ergonomie de la chaîne de calcul GDDT développée.

Ce chapitre est organisé en trois temps. Tout d'abord, nous commençons par proposer un cadre d'étude adapté aux méthodes de h -déaffinement effectuées par agglomération de mailles. Nous y introduisons le vocabulaire et les notions de base qui seront utilisées par la suite. Puis, afin d'orienter la conception d'une stratégie d'agglomération efficace, nous cherchons à traduire le processus de déaffinement sous la forme d'un problème d'optimisation. Devant la complexité et la difficulté d'appréhension de ce problème, nous adoptons alors plusieurs simplifications permettant de relier, de manière approchée mais davantage exploitable en pratique, l'efficacité numérique d'une résolution GDDT condensée avec certaines caractéristiques des maillages hp utilisés. Finalement, à partir de ces relations, nous élaborons un algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement heuristique, totalement automatisé. En dernier lieu, nous nous intéressons à la mise en place d'une méthode de sous-maillage local. Étant limité par les raccords condensés disponibles, nous proposons alors une approche récursive par h -raffinement de facteur 2.

4.1 Définition d'un cadre d'étude pour le déaffinement de maillage

Cette section est consacrée à la définition d'un cadre d'étude permettant de formaliser l'algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement que nous cherchons à mettre en place. Nous nous intéressons particulièrement au processus d'agglomération sur un maillage donné et à la notion de maillage admissible pour le schéma GDDT condensé.

4.1.1 Formalisation d'un processus de h -déaffinement par agglomération de mailles

Soit \mathcal{T}_h^{ini} , un maillage initial, correspondant à une partition du domaine de calcul sous la forme d'une grille cartésienne conforme et régulière à $N_{él}^{ini}$ éléments, telle que :

$$N_{él}^{ini} = N_{él,x}^{ini} \times N_{él,y}^{ini} \times N_{él,z}^{ini}, \quad (4.1)$$

où $N_{él,\alpha}^{ini}$, $\alpha \in \{x, y, z\}$, représente le nombre d'éléments dans la direction α . Chaque élément $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$ peut être représenté par le triplet :

$$(i_K, j_K, k_K) \in \llbracket 1, N_{él,x}^{ini} \rrbracket \times \llbracket 1, N_{él,y}^{ini} \rrbracket \times \llbracket 1, N_{él,z}^{ini} \rrbracket. \quad (4.2)$$

Aussi, dans ce qui suit, nous noterons \mathcal{T} l'application :

$$\mathcal{T} : \mathcal{T}_h^{ini} \rightarrow \llbracket 1, N_{\text{él},x}^{ini} \rrbracket \times \llbracket 1, N_{\text{él},y}^{ini} \rrbracket \times \llbracket 1, N_{\text{él},z}^{ini} \rrbracket, K \mapsto (i_K, j_K, k_K). \quad (4.3)$$

Nous introduisons alors la notion de maillage aggloméré :

Définition 4.1 On appelle maillage aggloméré de \mathcal{T}_h^{ini} tout maillage cartésien \mathcal{T}_h du domaine de calcul vérifiant la propriété suivante :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h^{ini}, \exists ! K' \in \mathcal{T}_h / \overset{\circ}{K} \subset \overset{\circ}{K'}, \quad (4.4)$$

L'ensemble des maillages agglomérés de \mathcal{T}_h^{ini} sera noté $\text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini})$.

Remarque 4.2 Le maillage initial est un cas particulier de maillage aggloméré : $\mathcal{T}_h^{ini} \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini})$.

Les maillages agglomérés de \mathcal{T}_h^{ini} forment une partie de l'ensemble plus général des maillages déraffinés de \mathcal{T}_h^{ini} , dont la seule caractéristique est de faire intervenir des cellules de dimensions supérieures ou égales à celles du maillage initial (voir figure 4.1). L'intérêt de se placer sur ce sous-ensemble va être de faciliter le processus de post-maillage. En effet, un maillage aggloméré de \mathcal{T}_h^{ini} s'obtient à partir d'une seule opération élémentaire, à savoir la suppression d'arêtes, qui peut également être interprétée comme l'introduction d'agrégats de cellules. Cette opération élémentaire a l'avantage de conserver le caractère cartésien du maillage (mais évidemment pas sa conformité) et de s'adapter aisément aux contraintes de discrétisation des objets présents dans le domaine de calcul, déjà représentés au sein du maillage initial. *A contrario*, l'obtention d'un maillage déraffiné suppose, dans le cas général, la manipulation d'opérateurs plus complexes, tels que le bougé de points.

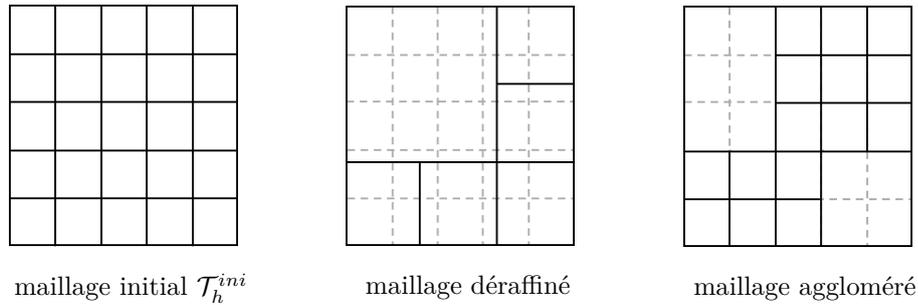


FIGURE 4.1 – Exemples 2D de maillages déraffiné et aggloméré obtenus à partir d'un maillage initial \mathcal{T}_h^{ini} .

On s'intéresse alors à la formalisation du processus de construction des maillages agglomérés de \mathcal{T}_h^{ini} . Pour ce faire, nous commençons par introduire la notion de volume agglomérable, illustrée sur la figure 4.2 :

Définition 4.3 Soit $\mathcal{T}_h \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini})$, $K \in \mathcal{T}_h^{ini} \cap \mathcal{T}_h$, et $\Delta = (\delta_x, \delta_y, \delta_z) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Nous appellerons volume agglomérable sur \mathcal{T}_h , de facteur Δ , issu de la maille germe K , le parallélépipède :

$$A_{K,\Delta} = \bigcup_{K \in \mathcal{A}_{K,\Delta}} K, \quad (4.5)$$

où l'ensemble $\mathcal{A}_{K,\Delta}$ est défini par :

$$\mathcal{A}_{K,\Delta} := \{ \mathcal{T}^{-1}(i_K + i, j_K + j, k_K + k), \forall (i, j, k) \in \llbracket 1, \delta_x \rrbracket \times \llbracket 1, \delta_y \rrbracket \times \llbracket 1, \delta_z \rrbracket \}, \quad (4.6)$$

et vérifie la contrainte :

$$\mathcal{A}_{K,\Delta} \subset \mathcal{T}_h^{ini} \cap \mathcal{T}_h. \quad (4.7)$$

L'ensemble des volumes agglomérables du maillage \mathcal{T}_h sera noté $\mathcal{V}_{agglo}(\mathcal{T}_h)$.

Remarque 4.4 Soulignons que la cellule de départ d'un volume agglomérable (maille germe), est nécessairement une cellule initiale, où nous faisons la distinction suivante entre "cellule initiale" et "cellule du maillage initial" : le premier terme désigne tout élément commun aux maillages initial et aggloméré : $K \in \mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_h^{ini}$, tandis que le second désigne sans ambiguïté tout élément $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$.

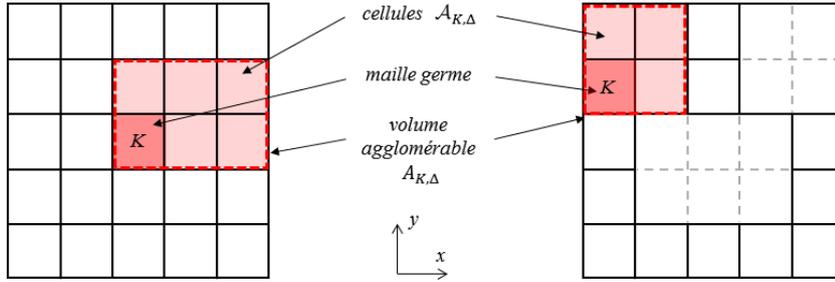


FIGURE 4.2 – Exemples 2D de volumes agglomérables sur le maillage initial \mathcal{T}_h^{ini} (à gauche) et sur un maillage aggloméré de \mathcal{T}_h^{ini} (à droite).

Nous poursuivons en formalisant le processus d'agglomération d'éléments d'un maillage, illustré sur la figure 4.3 :

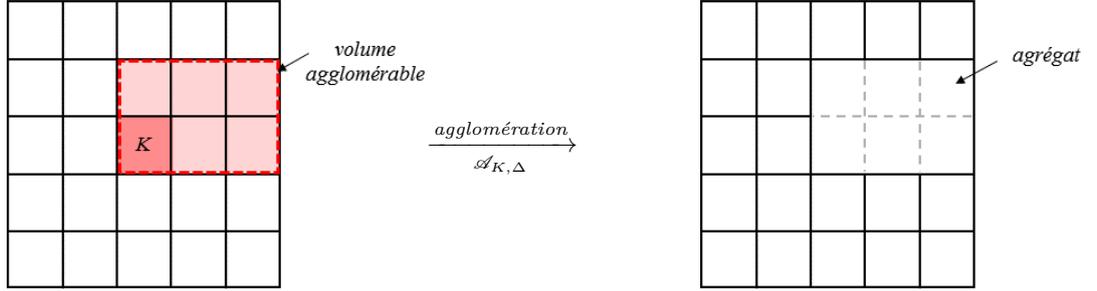
Définition 4.5 Soit $\mathcal{T}_h \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini})$ et $A_{K,\Delta} \in \mathcal{V}_{agglo}(\mathcal{T}_h)$. On appelle opérateur d'agglomération l'application $\mathcal{A}_{K,\Delta}$ chargée d'introduire le volume agglomérable $A_{K,\Delta}$ dans le maillage \mathcal{T}_h , c'est-à-dire de remplacer l'ensemble des mailles de $\mathcal{A}_{K,\Delta}$ par le volume $A_{K,\Delta}$:

$$\mathcal{A}_{K,\Delta} : \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini}) \rightarrow \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini}), \quad \mathcal{T}_h \mapsto \left[\mathcal{T}_h \setminus \bigcup_{K' \in \mathcal{A}_{K,\Delta}} \{K'\} \right] \cup \{A_{K,\Delta}\}. \quad (4.8)$$

Après son introduction, le volume agglomérable $A_{K,\Delta}$ forme un élément à part entière du maillage $\mathcal{A}_{K,\Delta}(\mathcal{T}_h)$:

$$(A_{K,\Delta} \in \mathcal{V}_{agglo}(\mathcal{T}_h)) \Rightarrow (\exists! K \in \mathcal{A}_{K,\Delta}(\mathcal{T}_h) / A_{K,\Delta} = K), \quad (4.9)$$

qui sera alors désigné par le terme d'agrégat.

FIGURE 4.3 – Introduction du volume agglomérable $A_{K,\Delta}$, avec $\Delta = (3, 2)$, au sein d'un maillage 2D.

Remarque 4.6 *Tout élément d'un maillage aggloméré est soit une maille initiale, soit un agrégat.*

On a alors les deux résultats élémentaires suivant sur le processus d'agglomération, qui nous serviront plus loin pour concevoir l'algorithme de post-maillage.

Lemme 4.7 *Soient $\mathcal{T}_h \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}})$ et $(A_{K,\Delta}, A_{K',\Delta'}) \in \mathcal{V}_{\text{agglo}}(\mathcal{T}_h)^2$. Si les volumes agglomérables sont disjoints, i.e. :*

$$\mathcal{A}_{K,\Delta} \cap \mathcal{A}_{K',\Delta'} = \emptyset, \quad (4.10)$$

alors les opérateurs d'agglomération commutent :

$$\mathcal{A}_{K,\Delta} \circ \mathcal{A}_{K',\Delta'}(\mathcal{T}_h) = \mathcal{A}_{K',\Delta'} \circ \mathcal{A}_{K,\Delta}(\mathcal{T}_h) \quad (4.11)$$

Preuve. Les volumes agglomérables étant disjoints, aucune cellule initiale de $\mathcal{A}_{K,\Delta}$ n'est utilisée pour définir $\mathcal{A}_{K',\Delta'}$. Les conditions suivantes sont donc vérifiées :

$$\mathcal{A}_{K,\Delta} \subset \mathcal{T}_h^{\text{ini}} \cap \mathcal{A}_{K,\Delta}(\mathcal{T}_h) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{K',\Delta'} \subset \mathcal{T}_h^{\text{ini}} \cap \mathcal{A}_{K',\Delta'}(\mathcal{T}_h). \quad (4.12)$$

Les maillages $\mathcal{A}_{K,\Delta} \circ \mathcal{A}_{K',\Delta'}(\mathcal{T}_h)$ et $\mathcal{A}_{K',\Delta'} \circ \mathcal{A}_{K,\Delta}(\mathcal{T}_h)$ sont donc bien définis. Puis, en utilisant le caractère disjoints des volumes agglomérables ainsi que la définition des opérateurs d'agglomération, on obtient :

$$\mathcal{A}_{K,\Delta} \circ \mathcal{A}_{K',\Delta'}(\mathcal{T}_h) = \left\{ \left[\mathcal{T}_h \setminus \bigcup_{K'' \in \mathcal{A}_{K',\Delta'}} \{K''\} \right] \cup \{A_{K',\Delta'}\} \right\} \setminus \left(\bigcup_{K' \in \mathcal{A}_{K,\Delta}} \{K'\} \right) \cup \{A_{K,\Delta}\} \quad (4.13a)$$

$$= \left\{ \left[\mathcal{T}_h \setminus \bigcup_{K' \in \mathcal{A}_{K,\Delta}} \{K'\} \right] \cup \{A_{K,\Delta}\} \right\} \setminus \left(\bigcup_{K'' \in \mathcal{A}_{K',\Delta'}} \{K''\} \right) \cup \{A_{K',\Delta'}\} \quad (4.13b)$$

$$= \mathcal{A}_{K',\Delta'} \circ \mathcal{A}_{K,\Delta}(\mathcal{T}_h), \quad (4.13c)$$

d'où le résultat. ■

Lemme 4.8 *Pour tout $\mathcal{T}_h \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}})$, il existe un n -uplet de volumes agglomérables $\{A_{K^{(0)},\Delta^{(0)}}, \dots, A_{K^{(n-1)},\Delta^{(n-1)}}\} \in [\mathcal{V}_{\text{agglo}}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}})]^n$ tel que :*

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{A}_{K^{(n-1)},\Delta^{(n-1)}} \circ \dots \circ \mathcal{A}_{K^{(0)},\Delta^{(0)}}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}}), \quad (4.14)$$

De plus :

$$\text{card}(\mathcal{T}_h) = N_{\text{él}}^{\text{ini}} + n - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_x^{(i)} \delta_y^{(i)} \delta_z^{(i)}. \quad (4.15)$$

Preuve. L'identité (4.14) s'obtient directement en utilisant les définitions de l'ensemble $\text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}})$ et des opérateurs d'agglomération. Puis, le cardinal d'un volume agglomérable $\mathcal{A}_{K,\Delta}$ avec $\Delta = (\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ étant donné par le produit $\delta_x \delta_y \delta_z$, l'introduction d'un agrégat dans un maillage \mathcal{T}_h supprime donc $\delta_x \delta_y \delta_z$ éléments et en rajoute un (l'agrégat lui-même). En répétant cette procédure n fois, on obtient (4.15). ■

Remarque 4.9 En vertu du lemme 4.7, cette proposition reste vraie en permutant arbitrairement la séquence d'agglomération (4.14).

Tout maillage aggloméré peut ainsi être décomposé en une séquence de maillages agglomérés intermédiaires, représentant chacun l'ajout d'un agrégat au maillage précédent. L'algorithme de post-maillage va donc être vu comme un processus de pilotage de l'introduction des agrégats.

Dans la suite du chapitre, pour plus de simplicité, nous considérerons exclusivement des agglomérations isotropes, c'est-à-dire telles que :

$$\delta_x = \delta_y = \delta_z =: \delta. \quad (4.16)$$

4.1.2 Admissibilité des maillages agglomérés

Afin de présenter un intérêt pratique, un maillage aggloméré doit satisfaire plusieurs contraintes, liées d'une part à la discrétisation de la géométrie, et d'autre part aux configurations d'accolement utilisées. Chacune de ces contraintes définissent des critères d'admissibilité de natures différentes, que nous décrivons dans ce qui suit.

4.1.2.1 Admissibilité géométrique

Au sein du maillage initial $\mathcal{T}_h^{\text{ini}}$, la représentation des objets contenus dans la géométrie peut prendre trois formes différentes, illustrées sur la figure 4.4.

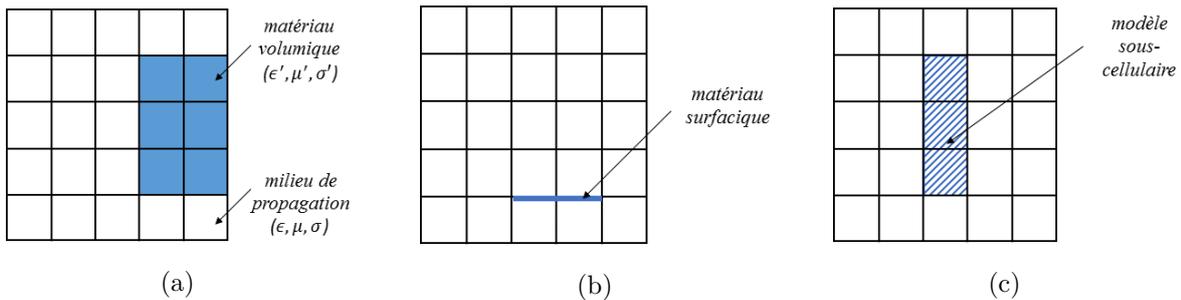


FIGURE 4.4 – Illustration en 2D des différents types de discrétisation d'objets dans le maillage initial.

Lorsque que l'objet présente des dimensions non-négligeables devant la taille caractéristique du domaine de calcul, on utilise généralement une représentation volumique (voir figure 4.4a). Celle-ci consiste à attribuer aux cellules initiales discrétisant l'objet un ensemble de paramètres physiques propres au matériau dont il est constitué, c'est-à-dire, dans notre cas, une permittivité, une perméabilité et une conductivité.

Certains matériaux minces sont en revanche généralement représentés via un modèle surfacique. Par exemple, une plaque parfaitement métallique de faible épaisseur sera prise en compte en affectant la condition aux limites 1.9 à l'ensemble des faces du maillage initial formant son support (voir figure 4.4b).

Enfin, pour représenter des objets singuliers tels que les fils et les fentes, de dimensions trop faibles pour être maillés, on utilise le plus souvent un modèle sous-cellulaire approché, dont le domaine de

validité est fonction des dimensions de l'objet modélisé et du pas d'espace des cellules initiales. Dans ce cas, un identificateur caractéristique du modèle est attribué aux cellules contenant la singularité (voir figure 4.4c). Lors de la résolution, le traitement de chaque cellule porteuse de cet identificateur sera alors modifié de sorte à simuler la présence de la singularité.

Pour qu'un maillage aggloméré soit valide, il faut qu'il ait une représentation des objets équivalente à celle du maillage initial, ce que nous allons traduire sous la forme de conditions d'homogénéité volumique et surfacique.

Définition 4.10 *Le maillage aggloméré $\mathcal{T}_h \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}})$ sera dit géométriquement admissible s'il vérifie les conditions suivantes :*

- homogénéité volumique : l'intérieur de chaque cellule ne contient qu'un seul matériau et aucune condition aux limites,
- homogénéité surfacique : chaque surface d'échange du maillage ne contient qu'une seule condition aux limites, et chaque surface d'échange non-conforme n'interface que des éléments constitués du même matériau,
- validité du placement des modèles sous-cellulaires : chaque modèle sous-cellulaire est situé dans un ensemble de cellules initiales.

L'ensemble des maillages agglomérés de $\mathcal{T}_h^{\text{ini}}$ géométriquement admissibles sera noté $\text{AggloGA}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}})$.

Remarque 4.11 *Une condition d'admissibilité géométrique supplémentaire, non détaillée dans la définition précédente, sera également prise en compte dans les applications : l'homogénéité de l'injection des termes sources. Plus précisément, nous allons imposer que la surface de Huygens (voir Annexe D) soit portée uniquement par des surfaces d'échange conformes, afin d'éviter tout risque de dégradation de qualité.*

On illustre sur la figure 4.5 plusieurs exemples et contre-exemples de maillage agglomérés géométriquement admissibles.

La notion d'admissibilité géométrique est alors naturellement étendue aux volumes agglomérables :

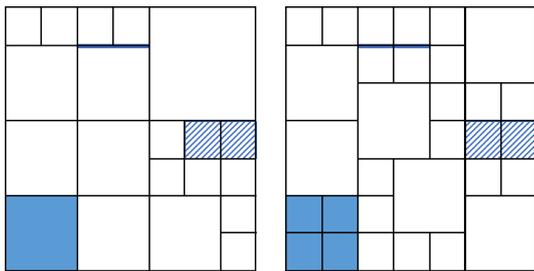
Définition 4.12 *Soit $\mathcal{T}_h \in \text{AggloGA}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}})$ et $A_{K,\Delta} \in \text{Vagglo}(\mathcal{T}_h)$. Le volume agglomérable $A_{K,\Delta}$ sera dit géométriquement admissible lorsque :*

$$\mathcal{A}_{K,\Delta}(\mathcal{T}_h) \in \text{AggloGA}(\mathcal{T}_h^{\text{ini}}). \quad (4.17)$$

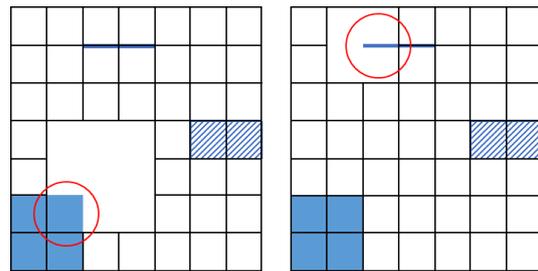
L'ensemble des volumes agglomérables géométriquement admissibles de \mathcal{T}_h sera noté $\text{VaggloGA}(\mathcal{T}_h)$.



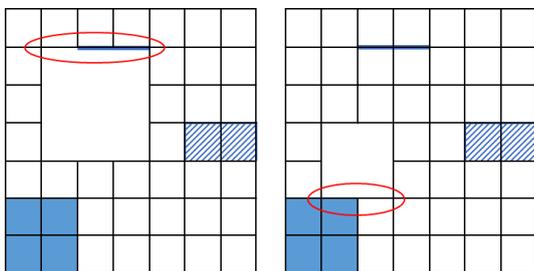
(a) maillage initial \mathcal{T}_h^{ini} avec éléments intérieurs



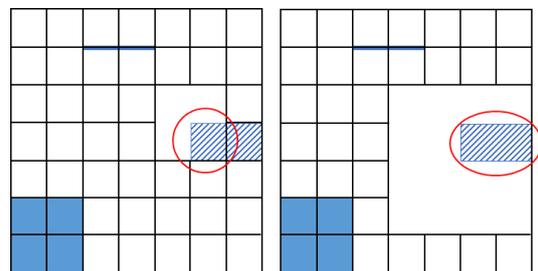
(b) maillages géométriquement admissibles



(c) homogénéité volumique non respectée



(d) homogénéité surfacique non respectée



(e) placement des sous-modèles non-valide

FIGURE 4.5 – Exemples 2D de maillages agglomérés obtenus à partir du maillage initial (a), satisfaisant (b) ou non (d,e,f) les conditions d'admissibilité géométrique.

4.1.2.2 Admissibilité structurelle

Comme nous ne disposons que d'un ensemble discret d'accolements hp associés à des flux condensés et que nous souhaitons exclure, pour des raisons de performances numériques, l'utilisation de tout autre type d'accolement, nous introduisons une notion d'admissibilité portant sur la structure d'un maillage aggloméré.

Définition 4.13 *Un maillage aggloméré $\mathcal{T}_h \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini})$ sera dit structurellement admissible s'il ne contient que des configurations d'accolement autorisées. L'ensemble des maillages agglomérés de \mathcal{T}_h^{ini} structurellement admissibles sera noté $\text{AggloSA}(\mathcal{T}_h^{ini})$.*

Soit alors $A_{K,\Delta} \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h)$. Le volume agglomérable $A_{K,\Delta}$ sera dit structurellement admissible lorsque :

$$\mathcal{A}_{K,\Delta}(\mathcal{T}_h) \in \text{AggloSA}(\mathcal{T}_h^{ini}). \quad (4.18)$$

L'ensemble des volumes agglomérables structurellement admissibles de \mathcal{T}_h sera noté $\mathcal{V}\text{aggloSA}(\mathcal{T}_h)$.

En pratique, seules vont être autorisées les configurations d'accolements hp pour lesquelles nous disposons de flux condensés, comme l'illustre la figure 4.6.

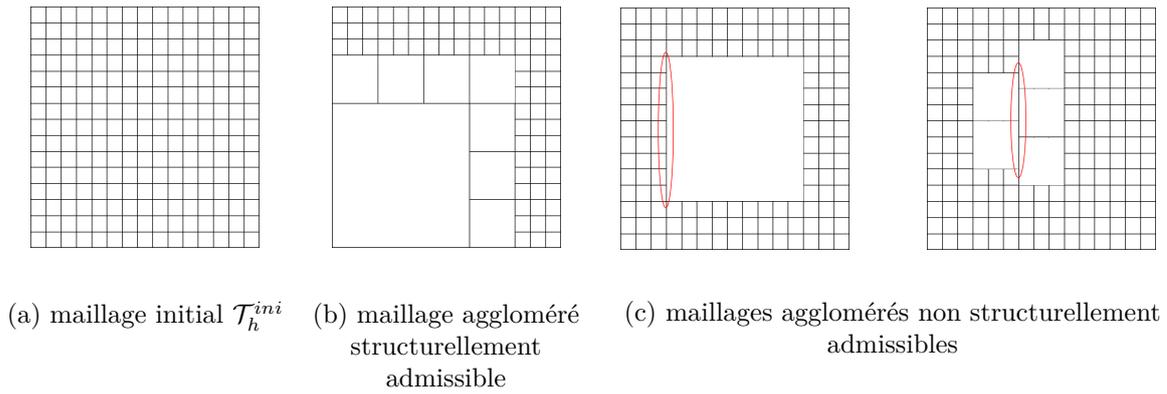


FIGURE 4.6 – Exemples (b) et contre-exemples (c) de maillages structurellement admissibles pour le panel des configurations condensées héritées du chapitre précédent, construits à partir de la configuration initiale (a).

4.1.2.3 Bilan

En combinant les différentes contraintes exposées précédemment, on arrive à la définition générale suivante d'un maillage aggloméré admissible :

Définition 4.14 *Un maillage aggloméré $\mathcal{T}_h \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini})$ sera dit admissible s'il est admissible géométriquement et structurellement, c'est-à-dire si :*

$$\mathcal{T}_h \in \text{AggloGA}(\mathcal{T}_h^{ini}) \cap \text{AggloSA}(\mathcal{T}_h^{ini}). \quad (4.19)$$

L'ensemble des maillages agglomérés de \mathcal{T}_h^{ini} admissibles sera noté $\mathcal{A}(\mathcal{T}_h^{ini})$.

En pratique, seuls les maillages agglomérés admissibles sont compatibles avec l'utilisation du schéma GDDT condensé. Il va donc être essentiel de savoir générer de tels maillages à partir d'une configuration initiale \mathcal{T}_h^{ini} donnée. Dans ce but, le travail de formalisation réalisé jusqu'ici va permettre de guider et de faciliter ce processus : dans la section suivante, nous allons tout d'abord chercher à construire l'ensemble des maillages agglomérés géométriquement admissibles, puis, au sein de cet ensemble, nous allons chercher à sélectionner une configuration structurellement admissible selon des critères de performances numériques que nous précisons. Plus précisément, dans la suite, nous allons proposer un système d'identification du

taux d'agglomération maximal de chaque cellule qui permettra de garantir que tous les agrégats construits seront géométriquement admissibles. Le travail portera ensuite sur le choix d'un bon candidat respectant les critères d'admissibilité structurelle et présentant *a priori* des coûts de calcul avantageux.

Toutefois, avant de nous concentrer sur la mise en place de cette stratégie, nous définissons dans le paragraphe qui suit un dernier objet permettant de simplifier la manipulation des maillage hp en reliant de manière univoque les notions de maillage et d'espace d'approximation.

4.1.3 Fonction d'adaptation hp

On supposera que, dans le cadre présent du déraffinement, l'ordre de résolution associé à une cellule est fonction uniquement de son taux de déraffinement. Cette fonction sera appelée fonction d'adaptation hp et sera notée f_{hp} .

D'après ce qui a été mis en place dans les chapitres précédents, la fonction d'adaptation hp que nous considérerons en pratique dans nos applications est définie ainsi : étant donné un maillage aggloméré admissible $\mathcal{T}_h \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_h^{ini})$,

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, f_{hp}(K) = \begin{cases} Q^1(K) & \text{si } K \text{ est une cellule initiale,} \\ Q^2(K) & \text{si } K \text{ est un agrégat de facteur 3,} \\ Q^4(K) & \text{si } K \text{ est un agrégat de facteur 9.} \end{cases} \quad (4.20)$$

Remarque 4.15 Dans le cadre du sous-maillage étudié plus loin, toute cellule raffinée sera associée à un espace d'approximation local $Q^1(h/n)$, ce qui revient à ajouter la condition suivante dans la définition de la fonction d'adaptation hp :

$$f_{hp}(K) = Q^1(K) \text{ si } K \text{ est une cellule raffinée.} \quad (4.21)$$

Dans ce qui suit, on parlera donc de manière indifférenciée de maillage et de maillage hp .

4.2 Mise en place d'un algorithme de h -déraffinement/ p -enrichissement heuristique

Cette section est consacrée à la conception d'un algorithme de post-maillage pilotant l'introduction des agrégats $Q^2(3h)$ et $Q^4(9h)$ au sein d'une configuration initiale donnée. Nous commençons par étudier le problème sous-jacent sous la forme d'une optimisation combinatoire sous contraintes. Après avoir exhibé les principales difficultés liées à la résolution de ce problème, nous adoptons plusieurs simplifications numériquement justifiées, et définissons une stratégie d'agglomération heuristique. Nous présentons alors une validation élémentaire de l'algorithme développé.

4.2.1 Formulation d'un problème d'optimisation et mise en évidence des difficultés

L'objectif de l'étape de h -déraffinement/ p -enrichissement peut être formalisé de la manière suivante :

Étant donné un maillage initial \mathcal{T}_h^{ini} , trouver $\mathcal{T}_h^{opt} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_h^{ini})$ tel que :

$$\mathcal{T}_h^{opt} = \underset{\substack{\mathcal{T}_h \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_h^{ini}), \\ \mathcal{E}_{rr}(\mathcal{T}_h) \leq \mathcal{E}_{rr}(\mathcal{T}_h^{ini})}}{\arg \min} \mathcal{C}(\mathcal{T}_h), \quad (4.22)$$

avec :

- $\mathcal{A}(\mathcal{T}_h^{ini})$, l'espace de recherche, constitué des maillages agglomérés admissibles de \mathcal{T}_h^{ini} ,
- $\mathcal{E}_{rr}(\mathcal{T}_h)$, l'erreur de simulation associée au maillage \mathcal{T}_h telle que définie en (1.83),

- $\mathcal{E}rr(\mathcal{T}_h) \leq \mathcal{E}rr(\mathcal{T}_h^{ini})$, la contrainte de qualité considérée dans nos travaux, c'est-à-dire la garantie *a minima* de la précision Q^1 sur le maillage initial,
- $\mathcal{C} : \mathcal{A}(\mathcal{T}_h^{ini}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction objectif, représentant le coût numérique de la résolution GDDT condensée. Le choix de \mathcal{C} peut varier selon le contexte applicatif et les ressources informatiques disponibles. Nous considérerons par défaut :

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_h) = (\text{t-CPU}(\mathcal{T}_h), N_{ddl}(\mathcal{T}_h)), \quad (4.23)$$

où $\text{t-CPU}(\mathcal{T}_h)$ est le temps d'exécution du schéma GDDT condensé sur le maillage \mathcal{T}_h et $N_{ddl}(\mathcal{T}_h)$ le nombre de degrés de liberté de la configuration, traduisant la charge mémoire à mobiliser.

On définit ainsi un problème d'optimisation combinatoire sous contraintes, possédant au moins une solution \mathcal{T}_h^{opt} car l'espace de recherche est fini et non vide (il contient au moins le maillage initial). Les problèmes de ce type, dont les exemples les plus classiques sont les problèmes du voyageur de commerce, du sac à dos, ou du partitionnement de graphe, ont donné lieu à de nombreux travaux (voir par exemple [85][86]). À ce titre, diverses méthodes de résolution spécifiques sont présentes dans la littérature, parmi lesquelles on distingue les méthodes exactes et les méthodes approchées.

Les méthodes exactes permettent d'assurer l'optimalité de la (ou des) solution(s) obtenue(s). L'approche la plus grossière consiste à énumérer toutes les solutions réalisables, à les tester une à une, et à retenir la (ou les) meilleure(s). Cette approche dite gloutonne est cependant peu exploitable en pratique, du fait de la grande cardinalité de l'espace de recherche conduisant généralement à des temps de résolution prohibitifs, ou de la difficulté à construire explicitement des solutions réalisables. Les méthodes de séparation et évaluation ("branch and bound") permettent alors de parcourir plus efficacement l'ensemble des solutions réalisables, en éliminant les solutions sous-optimales *a priori* et en partitionnant le problème initial en sous-problèmes moins complexes. Ces sous-problèmes sont ensuite généralement traités à l'aide de méthodes de relaxation facilitant la résolution, grâce à une réinterprétation continue de la formulation discrète. On retrouve cette philosophie du "diviser pour régner" dans les approches de la programmation dynamique, utilisées pour les problèmes d'optimisation vérifiant le principe d'optimalité de Bellman ("une solution optimale pour le problème contient les solutions optimales pour tous les sous-problèmes"), qui consistent à décomposer de manière récursive la formulation initiale en une famille de sous-problèmes, puis à déterminer une relation de récurrence reliant les solutions optimales de ces derniers.

Lorsque le problème de départ est trop complexe, que les ressources informatiques sont limitées ou que le temps de résolution est un paramètre critique, les méthodes exactes sont abandonnées au profit de méthodes approchées (ou heuristiques), dont le but est de construire une solution de "bonne" qualité. L'optimalité de la solution n'est alors plus garantie, l'écart à la valeur optimale est difficilement quantifiable, mais le temps nécessaire pour obtenir cette solution est généralement plus abordable. Certaines méthodes heuristiques sont ciblées sur un problème particulier, et d'autres, plus générales, sont adaptables à des applications plus diverses. On parle dans ce cas de métaheuristiques, dont on pourra retrouver une présentation générale dans [87], parmi lesquelles figurent notamment les méthodes de recherche locale. Ces méthodes se basent sur la notion de voisinage des solutions réalisables, définie à partir de mouvements élémentaires sur l'espace de recherche. Dans une logique de descente similaire aux algorithmes de gradient en optimisation continue, elles prennent la forme d'un processus d'amélioration itératif, en cherchant la meilleure solution parmi les voisins successifs d'une solution initiale. Mais il existe également de nombreuses autres métaheuristiques, telles que les méthodes évolutionnistes (algorithmes génétiques, colonies de fourmis, etc.), les réseaux de neurones, ou encore l'approche GRASP ("Greedy Randomized Adaptive Search Procedure").

En l'état, la prise en main du problème (4.22) pose trois difficultés principales. Tout d'abord, ce problème repose sur la connaissance *a priori* des performances (évaluation de la fonction coût) et de la qualité (évaluation de la contrainte) de la résolution GDDT condensée pour une configuration donnée. Or, si le nombre de degrés de liberté d'un maillage *hp* s'obtient facilement, l'estimation du temps d'exécution et de la précision du schéma est en revanche beaucoup plus complexe. En particulier, les estimations d'erreur *a priori* du type de (2.175) ne sont pas directement exploitables ici car elles ne donnent qu'une majoration de l'erreur de simulation dont la finesse n'est pas maîtrisée, ce qui peut conduire à éliminer à tort des solutions réalisables performantes.

La deuxième difficulté vient du fait que la fonction coût est à valeur dans \mathbb{R}^2 (on parle d'optimisation multi-objectifs ou multi-critères). On est donc amené à identifier le front de Pareto du problème, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de meilleur compromis pour les critères donnés (solutions non dominées). Cependant, la capture du front de Pareto est une procédure non triviale, pouvant de plus s'avérer très coûteuse numériquement [88].

Enfin, l'obstacle le plus important vient de la description et du parcours des éléments de l'espace de recherche. La génération automatique, la représentation, la comparaison et le stockage de maillages agglomérés admissibles sont en effet difficilement accessibles, et ce à plus forte raison pour des maillages initiaux de grandes dimensions ou faisant intervenir des géométries complexes.

Il est néanmoins possible de rendre ce problème plus abordable, en adoptant deux simplifications, numériquement justifiées.

La première consiste à supposer que toute introduction structurellement admissible d'un agrégat $Q^2(3h)$ ou $Q^4(9h)$ dans le maillage initial ne détériore pas la précision globale de la simulation. Cette hypothèse de travail est raisonnable dans la mesure où, dans les expériences numériques de la section 3.3, la précision de référence a toujours été satisfaite sur les maillages hybrides construits à partir de ces éléments. Soulignons cependant que cette hypothèse est limitée par l'existence des domaines de validité en h des configurations hybrides, mis en évidence dans le chapitre précédent. En adoptant cette simplification, on peut donc supprimer la contrainte de qualité, ce qui revient à considérer que tout maillage admissible est une solution réalisable du problème d'optimisation. L'obtention d'un estimateur *a priori* de la précision de simulation n'est alors plus nécessaire.

La deuxième simplification consiste à considérer que le nombre de degrés de liberté d'un maillage admissible est le principal facteur impactant les temps de calcul du schéma GDDT condensé. Cet *a priori* est relativement naturel dans la mesure où les temps de calcul reflètent la complexité algorithmique de la résolution qui est directement liée au nombre de degrés de liberté à traiter (le goulot d'étranglement sur les flux non-conformes ayant été supprimé). Il est d'ailleurs appuyé par plusieurs observations expérimentales, montrant que les temps de calcul et le nombre de degrés de liberté évoluent qualitativement de la même manière (voir par exemple la figures 1.5-1.6 dans le cas conforme, le tableau 3.5 et la figure 3.15 dans le cas non-conforme, ou plus loin dans la figure 4.14). Remarquons cependant que cette hypothèse peut être mise en défaut dans le cas où la chute de la complexité spatiale du schéma est trop faible pour compenser la limitation de la contrainte CFL induit par la configuration $Q^4(9h)/Q^2(3h)$ (voir remarque 3.21). En adoptant cette simplification, on peut ainsi s'affranchir de l'estimateur des temps de calcul. On retrouve de plus un problème d'optimisation mono-objectif.

Ce faisant, on obtient le problème simplifié suivant :

Étant donné un maillage initial \mathcal{T}_h^{ini} , trouver $\tilde{\mathcal{T}}_h^{opt} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_h^{ini})$ tel que :

$$\tilde{\mathcal{T}}_h^{opt} = \arg \min_{\mathcal{T}_h \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_h^{ini})} N_{ddl}(\mathcal{T}_h), \quad (4.24)$$

Il s'agit ainsi de déterminer le (ou les) maillage(s) aggloméré(s) admissible(s) possédant le plus petit nombre de degrés de liberté. Cependant, malgré le fait que cette formulation soit plus facilement manipulable, la problématique de génération et de parcours des éléments de l'espace de recherche demeure, si bien que nous n'avons pas vu comment adapter directement ou efficacement (voir remarque 4.16) une des méthodes usuelles évoquées plus haut pour la résolution de ce problème. Rappelons de plus que pour présenter un intérêt pratique, le temps de calcul de l'étape de post-maillage doit être négligeable devant le temps d'exécution de la chaîne de calcul globale. Il est donc primordial d'intégrer cet aspect de performance dans l'orientation de nos travaux.

Remarque 4.16 *Il semble possible de mettre en place une méthode de recherche locale pour la résolution du problème (4.24), dans laquelle le mouvement élémentaire sur l'espace de recherche serait l'introduction d'un agrégat et où deux maillages seraient dits voisins s'ils ne diffèrent que d'un agrégat. L'exploration du voisinage d'une configuration consisterait alors à tester toutes les manières d'y introduire un agrégat, en vérifiant systématiquement l'admissibilité du maillage résultant. Cependant, cette procédure serait*

extrêmement coûteuse en temps de calcul, car le nombre de possibilités pour l'ajout d'agrégat explose combinatoirement avec la taille du maillage et le test d'admissibilité présente un coût propre non négligeable. Nous n'avons donc pas cherché à approfondir cette approche. L'algorithme de post-maillage que nous allons proposer va néanmoins utiliser une recherche locale (voir remarque 4.26), mais avec une notion de voisinage et des mouvements élémentaires différents.

Nous allons donc concevoir un algorithme de post-maillage heuristique ciblé pour le problème (4.24). Ainsi, quitte à ne pas obtenir une configuration optimale, nous allons chercher à construire un maillage hp assurant des performances de résolution avantageuses, *a minima* supérieures à celles du maillage initial. La suite de cette section est consacrée à la mise en place de cet algorithme.

4.2.2 Calcul et représentation des volumes agglomérables du maillage initial

La conception d'un algorithme pilotant l'introduction d'agrégats repose, explicitement ou implicitement, sur la connaissance des volumes agglomérables du maillage initial. Rappelons qu'un volume agglomérable est dit géométriquement admissible s'il est compatible avec la discrétisation des objets, et structurellement admissible s'il ne crée que des accolements condensés dans le maillage.

Dans ce qui suit, nous cherchons donc à mettre en place une méthode efficace permettant le calcul et la représentation des volumes agglomérables géométriquement admissibles du maillage initial, qui sera utile par la suite pour y définir un processus d'agglomération. Autrement dit, il s'agit de déterminer le taux de déraffinement maximal de chaque cellule du maillage initial, au sens de la définition suivante :

Définition 4.17 Soit $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$. On appellera *taux (ou facteur) de déraffinement maximal* associé à la cellule K le plus grand entier $\delta^{max}(K) \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathcal{A}_{K, \Delta^{max}}(\mathcal{T}_h^{ini}) \in \text{Agglo}(\mathcal{T}_h^{ini}), \quad (4.25)$$

où l'on a noté $\Delta^{max} = (\delta^{max}(K), \delta^{max}(K), \delta^{max}(K))$.

4.2.2.1 Mise en place d'un algorithme naïf

La taille de chaque volume agglomérable géométriquement admissible est limitée par les contraintes de représentation des objets présentées dans la première section du chapitre. Pour connaître le taux de déraffinement maximal associé à une cellule initiale, il suffit donc d'y propager convenablement ces contraintes locales. Pour ce faire, une solution consiste à tester successivement l'admissibilité de l'agrégat issu d'une maillage germe donnée pour des facteurs de déraffinement croissants. Le dernier agrégat géométriquement admissible donne alors le taux de déraffinement maximal de la maille germe. Prenons l'exemple de la figure 4.7a. Le maillage obtenu après l'introduction d'un agrégat de facteur 2 et 3 sont géométriquement admissibles, comme illustré sur les figures 4.7b-c. En revanche, l'agrégat de facteur 4 ne respecte pas la contrainte d'homogénéité volumique (voir figure 4.7d), le maillage résultant n'est donc pas géométriquement admissible. Le taux de déraffinement maximal pour la maille germe considérée est donc 3, valeur que l'on inscrit par convention à l'intérieur de la cellule (voir figure 4.7e). En répétant le processus pour toutes les mailles initiales, on obtient la figure 4.7f, qui donne une représentation de tous les volumes agglomérables géométriquement admissibles de la configuration.

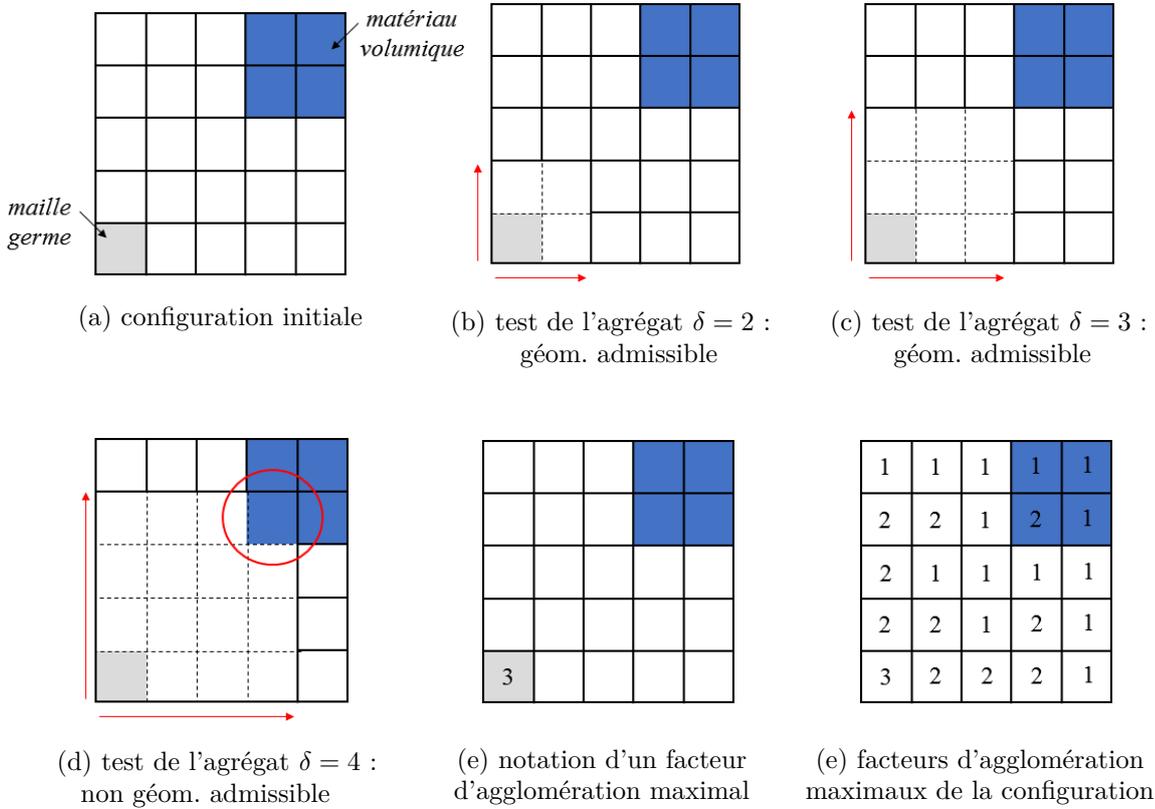


FIGURE 4.7 – Exemple 2D de la détermination du facteur d'agglomération maximal géométriquement admissible d'une maille germe (a,b,c,d,e), et représentation de l'ensemble des facteurs d'agglomération maximaux du maillage initial (e).

Notons que si une cellule initiale présente un taux de déraffinement maximal δ^{max} , tous les volumes agglomérables ayant cette cellule pour maille germe et un facteur de déraffinement $\delta \leq \delta^{max}$ seront géométriquement admissibles.

La méthodologie employée se traduit naturellement en l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Calcul naïf des facteurs d'agglomération maximaux.

Entrées : Maillage \mathcal{T}_h^{ini} ,

Sorties : $\delta^{max}(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}_h^{ini}$,

```

pour chaque maille  $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$  faire
   $\delta \leftarrow 1$ 
   $\Delta \leftarrow (\delta, \delta, \delta)$ 
  tant que  $\mathcal{A}_{K,\Delta} \in AggloGA(\mathcal{T}_h^{ini})$  faire
     $\delta \leftarrow \delta + 1$ 
  fin
   $\delta^{max}(K) \leftarrow \delta$ 
fin
```

On voit que cette méthode repose sur le test d'admissibilité " $\mathcal{A}_{K,\Delta} \in \text{AggloGA}(\mathcal{T}_h^{ini})$ ". Ce test consiste à vérifier que les critères d'admissibilité géométrique sont bien respectés, ce qui nécessite de parcourir toutes les cellules initiales de l'agrégat $A_{K,\Delta}$. Or, cet algorithme va répéter ce test d'admissibilité un grand nombre de fois et sur des agrégats de taille de plus en plus importante. Cette approche risque ainsi de s'avérer particulièrement coûteuse. Nous allons donc chercher à mettre en place une méthode de calcul plus efficace.

4.2.2.2 Calcul optimisé des facteurs de déraffinement maximaux

Afin de réduire la complexité du calcul des facteurs de déraffinement maximaux, nous proposons un algorithme optimisé exploitant la structure tensorielle du maillage initial limitant l'utilisation du test d'admissibilité. On procède en plusieurs étapes.

Dans une première étape, on détermine, pour chaque cellule initiale, le taux de déraffinement 1D maximal dans les directions x , y et z . Cela revient à évaluer dans chaque direction le nombre de mailles qui séparent la cellule initiale de l'hétérogénéité la plus proche (changement de matériau, présence d'une condition aux limites, etc.). En reprenant l'exemple 2D précédent, cette étape est illustrée sur la figure 4.8.

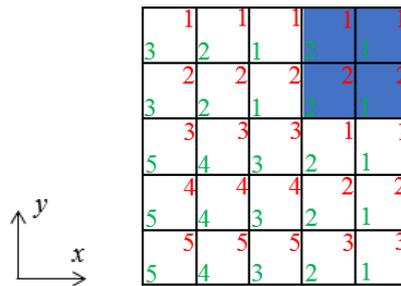


FIGURE 4.8 – Facteurs d'agglomération 1D maximaux, en vert dans la direction x et en rouge dans la direction y .

Dans une deuxième passe, comme seuls les agrégats isotropes sont considérés ici, on attribue à chaque maille la valeur correspondant au minimum des facteurs 1D calculés dans l'étape précédente. On obtient ainsi un majorant du facteur d'agglomération maximal de chaque cellule, comme illustré sur la figure 4.9.

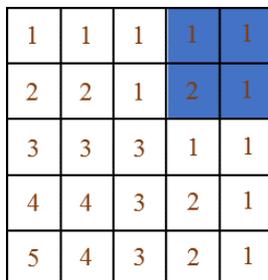


FIGURE 4.9 – Facteurs d'agglomération maximaux provisoires 3D, majorant les valeurs réelles.

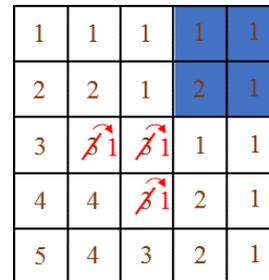


FIGURE 4.10 – Première correction issue du test d'admissibilité géométrique des agrégats de facteurs 2.

Alors, en remarquant qu'un volume agglomérable est géométriquement admissible si et seulement si tous les volumes agglomérables de facteur 2 qu'il contient le sont également, on effectue une première correction des valeurs provisoires que nous venons de calculer. Cette correction consiste à balayer l'ensemble des volumes agglomérables dont le taux de déraffinement maximal provisoire est strictement supérieur à 1, et à tester leur admissibilité géométrique pour un facteur de déraffinement égal à 2. Si ce test est positif (i.e. l'agrégat de facteur 2 ainsi défini est géométriquement admissible), alors la valeur provisoire attribuée à la cellule est inchangée, sinon, on lui attribue la valeur 1. Ainsi, on n'effectue le test d'admissibilité " $\mathcal{A}_{K,\Delta} \in \text{AggloGA}(\mathcal{T}_h^{ini})$ " qu'au plus $N_{él}^{ini}$ fois et uniquement pour des agrégats de facteur 2, ce qui réduit significativement la complexité de la procédure. Appliquée à l'exemple précédent, cette étape conduit aux corrections illustrées sur la figure 4.10.

Enfin, dans une dernière étape, on effectue une seconde correction portant sur la distribution des facteurs de déraffinement. Pour que celle-ci soit licite, il est en effet nécessaire qu'elle respecte le critère suivant, illustré en 2D sur la figure 4.11 : toute cellule initiale $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$ de facteur $\delta(K)$ doit être accolée, dans les directions $-x$, $-y$ et $-z$, à des cellules de facteur au plus égal à $\delta(K) + 1$. On teste alors l'ensemble des cellules initiales et l'on effectue les modifications nécessaires pour que ce critère soit respecté, comme illustré sur la figure 4.12 (notons qu'on obtient bien le même résultat qu'avec l'algorithme naïf). On obtient finalement l'algorithme 2.

Cette méthode de calcul et de représentation des volumes agglomérables géométriquement admissibles constitue le point de départ de l'algorithme de post-maillage que nous proposons. Dès lors, la problématique principale devient la définition d'une stratégie d'agglomération sur le maillage initial, efficace numériquement et capable de générer des configurations pertinentes du point de vue applicatif.

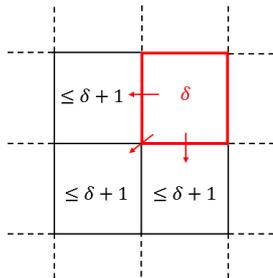


FIGURE 4.11 – Critère de compatibilité de la distribution de facteurs d'agglomération en 2D.

1	1	1	1	1
2	2	1	2	1
$\tilde{\delta}2$	1	1	1	1
$\tilde{\mathcal{A}}2$	$\tilde{\mathcal{A}}2$	1	2	1
$\tilde{\delta}3$	$\tilde{\mathcal{A}}2$	$\tilde{\delta}2$	2	1

FIGURE 4.12 – Seconde correction issue du critère de distribution des facteurs d'agglomération.

Algorithme 2 : Calcul optimisé des facteurs d'agglomération maximaux, avec : $K\%mat$ le matériau de la maille K , f_K^α un booléen sur la présence d'une condition aux limites sur la face de normale n_α de la maille K , $K\%sub$ un booléen sur la présence d'un modèle sous-cellulaire dans la maille K , et $K\%vois(\alpha)$ la maille voisine de K à travers la face de normale n_α .

Entrées : Maillage initial \mathcal{T}_h^{ini} ,

Sorties : Facteurs d'agglomération maximaux $\delta^{max}(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}_h^{ini}$,

1. Calcul des facteurs d'agglomération maximaux 1D dans les directions x, y, z :

```

pour chaque maille  $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$  faire
   $\delta_x(K) \leftarrow 1$  ;  $\delta_y(K) \leftarrow 1$  ;  $\delta_z(K) \leftarrow 1$ ,
   $K' \leftarrow K$ 
  pour chaque direction  $\alpha \in \{x, y, z\}$  faire
    tant que ( $K'\%mat = K\%mat$ ) & ( $f_{K'}^\alpha \%CL = 0$ ) & ( $K'\%sub = 0$ ) faire
       $K' \leftarrow K'\%vois(\alpha)$ 
       $\delta_\alpha(K) \leftarrow \delta_\alpha(K) + 1$ 
    fin
  fin
fin

```

2. Calcul des facteurs d'agglomération maximaux provisoires 3D :

```

pour chaque maille  $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$  faire
   $\delta(K) \leftarrow \min \{\delta_x(K), \delta_y(K), \delta_z(K)\}$ 
fin

```

3. Première correction :

```

pour chaque maille  $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$  faire
  si  $\delta(K) \geq 2$  alors
    si  $\mathcal{A}_{K,\Delta} \notin AggloGA(\mathcal{T}_h^{ini})$  alors
       $\delta(K) \leftarrow 1$ 
    fin
  fin
fin

```

4. Seconde correction et attribution des facteurs d'agglomération maximaux finaux :

```

pour  $k = N_z$  à 2 faire
  pour  $j = N_y$  à 2 faire
    pour  $i = N_x$  à 2 faire
       $K \leftarrow \mathcal{T}(i, j, k)$ 
       $K_1 \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i-1, j, k)$  ;  $K_2 \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i, j-1, k)$  ;  $K_3 \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i, j, k-1)$ 
       $K_4 \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i-1, j-1, k)$  ;  $K_5 \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i-1, j, k-1)$  ;  $K_6 \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i, j-1, k-1)$ 
      pour  $l$  allant de 1 à 6 faire
        si  $\delta(K_l) \geq \delta(K) + 1$  alors
           $\delta(K_l) \leftarrow \delta(K) + 1$ 
        fin
       $\delta^{max}(K_l) \leftarrow \delta(K_l)$ 
    fin
  fin
fin

```

4.2.3 Vers une stratégie d'agglomération hiérarchique

Du fait des simplifications adoptées précédemment, l'objectif principal du processus d'agglomération que nous cherchons à mettre en place est de construire un maillage possédant un nombre de degré de liberté réduit par rapport à la configuration initiale. Or, notons la chose suivante : un agrégat $Q^2(3h)$ est associé à 162 degrés de liberté (27 degrés de liberté pour chaque composante du champ électromagnétique) et se substitue à 27 mailles $Q^1(h)$, totalisant 1 296 degrés de liberté. Chaque introduction d'un élément $Q^2(3h)$ permet donc de diviser localement le stockage mémoire par 8. Par un raisonnement similaire on obtient que l'introduction d'un élément $Q^4(9h)$ permet de diviser localement le stockage mémoire par environ 47. L'introduction d'un de ces agrégats diminue donc automatiquement le stockage mémoire de la configuration courante. Ainsi, une stratégie d'agglomération avantageuse pourrait être de maximiser le nombre d'agrégats introduits dans le maillage initial. Dès lors, plusieurs approches sont possibles : maximiser le nombre d'agrégats $Q^2(3h)$ ou $Q^4(9h)$, maximiser la somme des agrégats de chaque type, mettre en place une optimisation multi-objectif avec une fonction coût du type (N^{Q^2}, N^{Q^4}) , minimiser le nombre d'éléments $Q^1(h)$, etc.

Afin d'orienter le choix d'une stratégie d'agglomération, nous allons chercher à estimer l'apport de chaque type d'agrégat sur les performances d'une résolution hybride. Pour cela, nous considérons de nouveau le cas-test de la cavité résonante (propagation de 1-modes pour un temps final $T_f = 10ns$), avec une grille initiale de taille $54 \times 54 \times 54$. Des agrégats $Q^2(3h)$ sont alors progressivement introduits dans le maillage initial jusqu'à obtenir la configuration hybride Q^1/Q^2 de la figure 4.13b (des éléments $Q^1(h)$ sont conservés afin que le maillage soit représentatif des applications réelles, en pratique ils assureront par exemple la description locale des objets). On réitère le processus avec les éléments $Q^4(9h)$, jusqu'à obtenir la configuration de la figure 4.13g. Les performances de résolution sont alors reportées sur la figure 4.14.

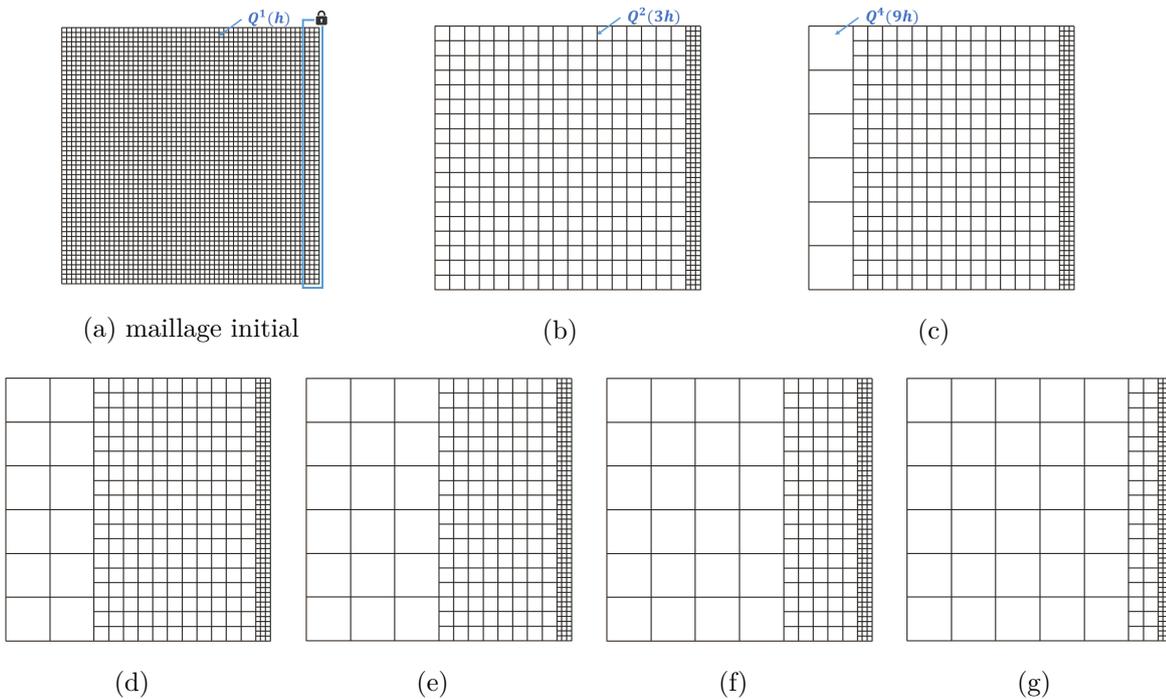


FIGURE 4.13 – Maillages utilisés pour évaluer l'apport de chaque type d'agrégat dans les performances numériques d'une configuration hybride.

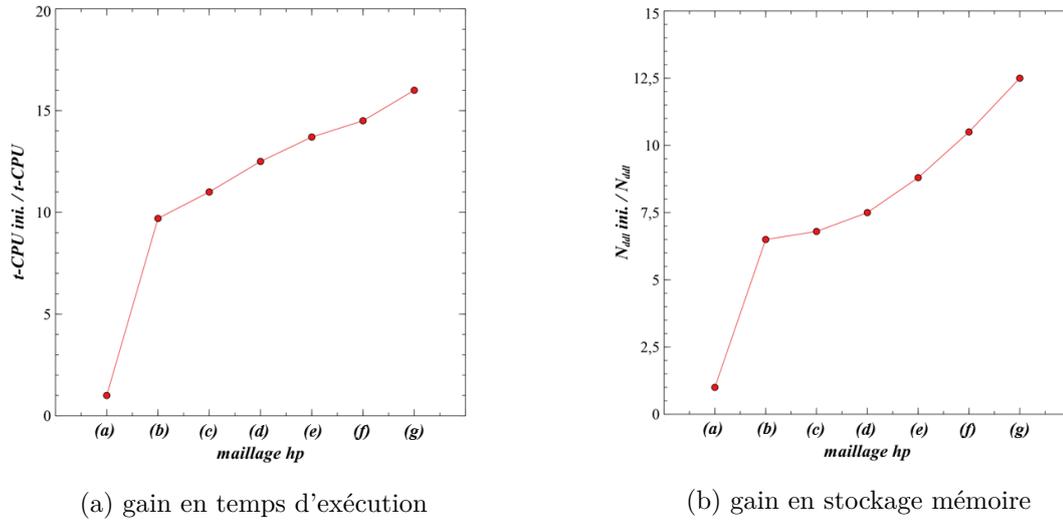


FIGURE 4.14 – Gains en performances numériques du solveur GDDT condensé en fonction du maillage hp de la figure 4.13 utilisé.

De manière prévisible, les meilleures performances sont obtenues sur la configuration de la figure 4.13g, présentant le nombre de degrés de liberté le plus faible, ou le nombre d'éléments $Q^4(9h)$ le plus élevé. Cependant, on note que l'apport des agrégats $Q^2(3h)$ est bien plus important que celui des agrégats $Q^4(9h)$ dans la réduction des coûts de calcul. En effet, le passage de la configuration initiale à la configuration Q^1/Q^2 permet de diviser le temps d'exécution par 10, alors que l'introduction des agrégats $Q^4(9h)$ ne permet qu'un gain relatif supplémentaire de 1,6. Autrement dit, dans cet exemple, la seule introduction des agrégats $Q^2(3h)$ permet d'atteindre près des deux tiers des gains en temps de calcul obtenus sur la configuration hybride $Q^1/Q^2/Q^4$ optimale. On fait qualitativement le même constat pour la réduction du stockage mémoire.

Il semble donc judicieux que l'algorithme de h -déraffinement/ p -enrichissement assure en premier lieu l'introduction d'un maximum d'agrégats $Q^2(3h)$, pour ensuite ajouter les éléments $Q^4(9h)$ au sein du maillage aggloméré obtenu. Notons que cette approche est bien cohérente avec l'objectif de réduction du stockage mémoire. En effet, les éléments $Q^4(9h)$ pouvant être vus comme des agrégats d'éléments $Q^2(3h)$, on comprend intuitivement que maximiser les agrégats $Q^2(3h)$ permettra de maximiser les agrégats $Q^4(9h)$, et donc, comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, de minimiser le nombre de degrés de liberté. Elle permet également de simplifier la conception d'un processus d'agglomération pour deux raisons : il n'y a plus d'arbitrage à réaliser entre les différents types d'agrégats (chacun étant pris en compte indépendamment) et il est possible *a priori* de réutiliser le même processus pour les deux niveaux de déraffinement.

En procédant ainsi, on définit une stratégie d'agglomération hiérarchique, dans laquelle les agrégats de niveau N sont introduits dans le sous-maillage aggloméré obtenu au niveau $N - 1$. Du fait des configurations condensées disponibles, nous ne considérons ici que deux niveaux de déraffinement, $Q^2(3h)$ et $Q^4(9h)$. La force de cette approche est que les différents types d'agrégats sont introduits les uns après les autres et non conjointement. Comme nous allons voir dans les paragraphes suivants, cela va permettre de concevoir un processus d'agglomération particulièrement performant.

Remarque 4.18 Dans notre cas, on voit aisément que tout maillage aggloméré admissible peut être construit par un processus hiérarchique, car les contraintes structurelles obligent les éléments $Q^4(9h)$ à se raccorder aux éléments $Q^2(3h)$ et que les deux facteurs d'agglomération mis en jeu sont des multiples. On ne perd donc pas en généralité à adopter une approche de ce type.

4.2.4 Partition du maillage initial en domaines d'agglomération

Rappelons que l'objectif de cette section est de concevoir un processus de construction d'un maillage aggloméré admissible de la configuration initiale \mathcal{T}_h^{ini} , assurant des performances avantageuses au niveau du solveur. Afin d'obtenir un bon candidat, il va donc être utile de générer plusieurs maillages agglomérés et de comparer leurs coûts de calcul *a priori*, reliés en première approximation à leur nombre de degrés de liberté. Or, le nombre de candidats potentiels pouvant être très élevé, l'efficacité des algorithmes utilisés est donc déterminante pour assurer la viabilité de l'approche.

Ainsi, dans ce paragraphe, nous tirons avantage du paradigme de déraffinement hiérarchique adopté précédemment en développant une méthode de partitionnement du maillage initial. Cette méthode permettra par la suite de simplifier significativement la mise en place d'un processus d'agglomération, en exploitant le principe du "diviser pour régner".

Dans ce qui suit, $\mathcal{Part}(\mathcal{T}_h^{ini})$ désignera l'ensemble des partitions de \mathcal{T}_h^{ini} . Rappelons que nous ne considérons que des facteurs d'agglomération isotropes de la forme $\Delta = (\delta, \delta, \delta)$. Par soucis de concision, nous noterons donc " $\Delta_1 > \Delta_2$ " pour :

$$\Delta_1 = (\delta_1, \delta_1, \delta_1), \quad \Delta_2 = (\delta_2, \delta_2, \delta_2), \quad \text{et} \quad \delta_1 > \delta_2. \quad (4.26)$$

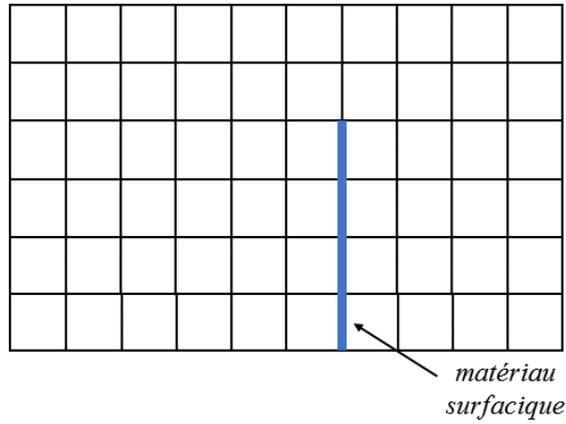
Nous commençons par introduire la notion de partition du maillage initial induite par les volumes agglomérables de facteur Δ :

Définition 4.19 Soit $\delta \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta = (\delta, \delta, \delta)$. On appellera Δ -partition du maillage initial tout élément $\mathcal{P}_\Delta \in \mathcal{Part}(\mathcal{T}_h^{ini})$ tel que :

$$\forall Dom \in \mathcal{P}_\Delta, \forall K \in Dom, (\Delta^{max}(K) \geq \Delta \Rightarrow \mathcal{A}_{K,\Delta} \subset Dom). \quad (4.27)$$

Les éléments $Dom \in \mathcal{P}_\Delta$ seront appelés Δ -domaines d'agglomération, ou domaines d'agglomération induits par le facteur Δ .

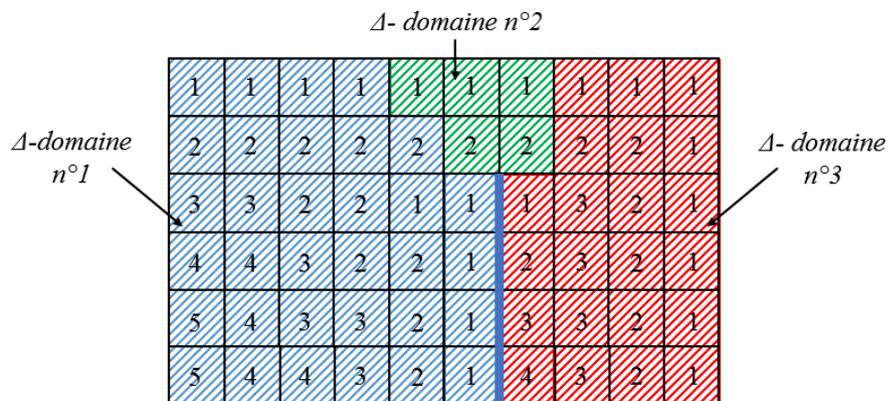
Un exemple 2D de Δ -partition est donné dans la figure 4.15. Remarquons en particulier qu'au sein d'une Δ -partition, tout volume agglomérable géométriquement admissible de facteur au moins Δ ne peut intersecter qu'une seule de ses composantes, et que tout volume agglomérable de facteur supérieur ou égal à Δ reste entièrement contenu dans le Δ -domaine de sa maille germe.



(a) maillage initial

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
3	3	3	2	1	1	1	3	2	1
4	4	3	2	2	1	2	3	2	1
5	4	3	3	2	1	3	3	2	1
5	4	4	3	2	1	4	3	2	1

(b) facteurs d'agglomération maximaux



(c) Δ -partition du maillage initial

FIGURE 4.15 – Exemple de Δ -partition d'un maillage initial 2D, avec $\Delta = (3, 3)$.

Remarque 4.20 Sur l'exemple de la figure 4.15, on voit que la Δ -partition représentée est également une Δ -partition pour $\Delta = (4, 4)$ et $\Delta = (5, 5)$, mais pas pour $\Delta = (2, 2)$. Ceci n'est pas gênant car dans notre approche nous allons calculer plusieurs Δ -partitions de manière totalement indépendante, pour des valeurs de Δ liées aux flux condensés disponibles (dans notre cas, $\Delta = (3, 3, 3)$ et $\Delta = (9, 9, 9)$).

Contrairement à toute autre partition du maillage initial, une Δ -partition constitue un découpage "intelligent" du domaine de calcul, au sens suivant : si le nombre d'agrégats de facteur Δ introduits dans chaque composante est maximal, alors le nombre d'agrégats de facteur Δ introduits dans le maillage global est maximal. Cette propriété n'est pas assurée pour tout découpage du maillage initial, car une mauvaise prise en compte de la distribution des facteurs d'agglomération peut fortement limiter l'introduction des agrégats. L'obtention d'une Δ -partition présente donc un intérêt pratique fondamental : il va permettre de décomposer le processus d'agglomération global en une somme de processus locaux et indépendants, et ainsi de réduire la complexité des algorithmes mis en jeu. En particulier, plus une Δ -partition sera fractionnée, plus elle sera intéressante *a priori* en termes de coûts de calcul. Or, la définition 4.19 n'impose aucune contrainte de cardinalité sur les Δ -partitions. Ainsi, sur l'exemple précédent, la partition constituée de l'ensemble des cellules initiales ou celle représentée sur la figure 4.16 sont des Δ -partitions de \mathcal{T}_h^{ini} , mais elles ne représentent pas un choix judicieux du point de vue de la complexité des algorithmes. Nous allons donc particulariser davantage la notion de Δ -partition, afin d'éliminer celles qui sont sous-optimales :

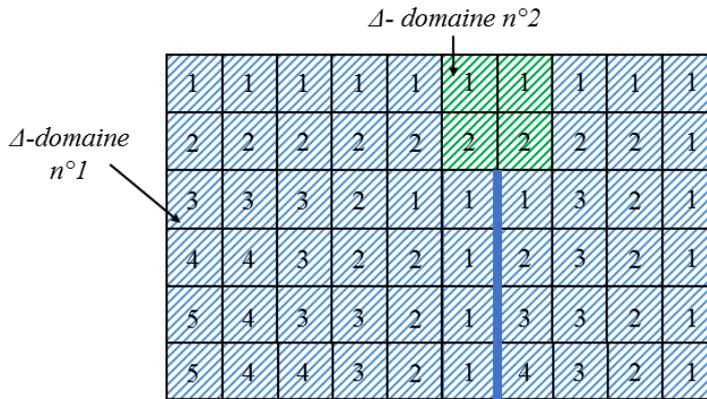


FIGURE 4.16 – Autre exemple de $(3, 3)$ -partition.

Définition 4.21 Pour toute Δ -partition $\mathcal{P}_\Delta \in \mathcal{Part}(\mathcal{T}_h^{ini})$, nous noterons :

$$\text{card}_\Delta(\mathcal{P}_\Delta) = \text{card}\{Dom \in \mathcal{P}_\Delta / \exists K \in Dom, \Delta^{max}(K) \geq \Delta\}. \quad (4.28)$$

Définition 4.22 Une Δ -partition $\mathcal{P}_\Delta \in \mathcal{Part}(\mathcal{T}_h^{ini})$ sera dite de type maximal lorsque :

$$\forall \mathcal{P}'_\Delta \in \mathcal{Part}(\mathcal{T}_h^{ini}) / \mathcal{P}'_\Delta \neq \mathcal{P}_\Delta, \text{card}_\Delta(\mathcal{P}'_\Delta) \leq \text{card}_\Delta(\mathcal{P}_\Delta). \quad (4.29)$$

Ainsi, toute Δ -partition de ce type maximise le nombre de Δ -domaines possédant au moins une cellule de facteur d'agglomération maximal supérieur à Δ . Or, seuls ces Δ -domaines sont "utiles" du point de vue d'un processus d'agglomération, dans le sens où c'est uniquement à l'intérieur de ceux-ci qu'il est possible d'introduire des agrégats de facteur Δ . D'où l'intérêt de ne s'intéresser qu'aux Δ -partitions de type maximal, qui ne considère pas les Δ -domaines incompatibles avec des agglomérations de facteurs Δ .

On montre alors la propriété suivante :

Proposition 4.23 *Soit $(\mathcal{P}_\Delta, \mathcal{P}'_\Delta) \in \mathcal{P}art(\mathcal{T}_h^{ini})^2$ un couple de Δ -partitions de type maximal. Alors, pour tout $(Dom, Dom') \in \mathcal{P}_\Delta \times \mathcal{P}'_\Delta$ vérifiant :*

$$\exists K \in Dom \cap Dom' / \Delta^{max}(K) \geq \Delta. \quad (4.30)$$

Alors, on a :

$$\forall K' \in (Dom \setminus (Dom \cap Dom')) \cup (Dom' \setminus (Dom \cap Dom')), \Delta^{max}(K') < \Delta. \quad (4.31)$$

Preuve. On raisonne par l'absurde. Supposons que :

$$\exists K \in Dom' \setminus (Dom \cap Dom') / \Delta^{max}(K) \geq \Delta, \quad (4.32)$$

et notons \widetilde{Dom}' le plus petit ensemble de mailles inclus dans \mathcal{T}_h^{ini} vérifiant la contrainte :

$$\forall K \in \widetilde{Dom}', (\Delta^{max}(K) \geq \Delta \Rightarrow \mathcal{A}_{K,\Delta} \subset \widetilde{Dom}'). \quad (4.33)$$

Nécessairement, \widetilde{Dom}' est un Δ -domaine inclus dans $Dom' \setminus (Dom \cap Dom')$. Alors, en remarquant que $Dom \cap Dom'$ est également un Δ -domaine (cet ensemble contient par hypothèse une cellule de facteur d'agglomération maximal supérieur à Δ , et est stable par agglomération de facteur Δ car Dom et Dom' sont des Δ -domaines), on obtient que :

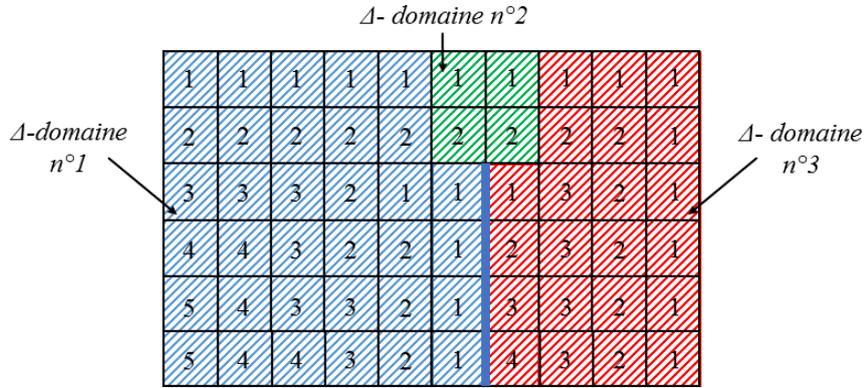
$$\widetilde{\mathcal{P}}_\Delta = (\mathcal{P}'_\Delta \setminus Dom') \cup (Dom \cap Dom') \cup \widetilde{Dom}', \quad (4.34)$$

est une Δ -partition de \mathcal{T}_h^{ini} . Or, on a :

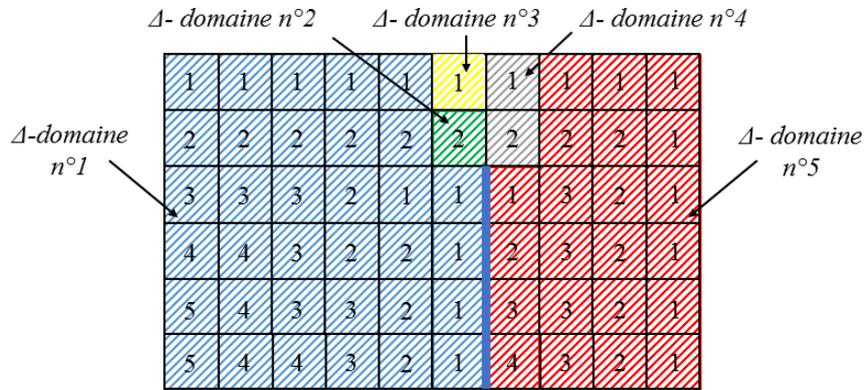
$$card_\Delta(\widetilde{\mathcal{P}}_\Delta) = card_\Delta(\mathcal{P}'_\Delta) + 1, \quad (4.35)$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle \mathcal{P}'_Δ est de type maximal. ■

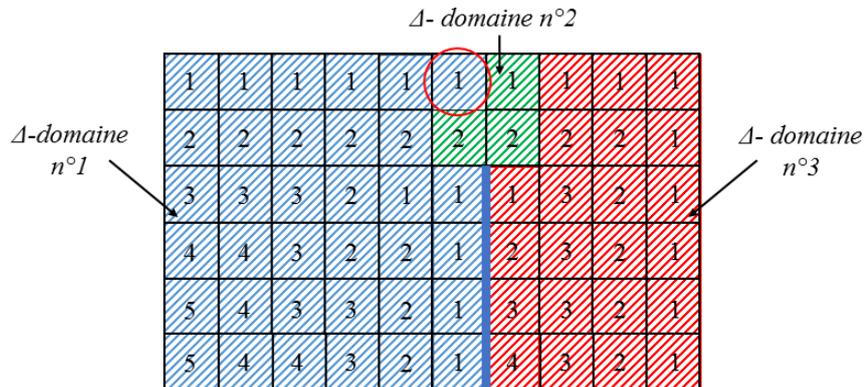
Ainsi, comme l'illustre la figure 4.17, on obtient que deux Δ -partitions de type maximal ne peuvent différer que de deux manières : soit par le découpage des Δ -domaines "inutiles" (voir 4.17a-b), soit par le retrait ou l'ajout au sein d'un Δ -domaine d'une cellule de facteur maximal plus petit que Δ n'ayant aucun impact sur les possibilités d'agglomération dans ce Δ -domaine (voir 4.17a-c). Il paraît donc *a priori* optimal du point de vue des performances de définir un processus d'agglomération sur une Δ -partition de type maximal.



(a) Δ -partition de type maximal



(b) autre Δ -partition de type maximal obtenue en fractionnant différemment un Δ -domaine "inutile" pour l'agglomération par Δ (ici le Δ -domaine n°2 de (a))



(c) autre Δ -partition de type maximale obtenue par ajout d'une cellule de facteur inférieur à Δ à un Δ -domaine existant (ici au Δ -domaine n°1 de (a))

FIGURE 4.17 – Exemples de Δ -partitions de types maximal ($card_{\Delta} = 2$) pour la configuration initiale de la figure 4.15.

Nous proposons alors une méthode de construction d'une Δ -partition de type maximal du maillage initial. Le principe général est le suivant. On commence par sélectionner une cellule initiale K , que l'on ajoute dans le Δ -domaine n°1. Alors, si $\Delta^{max}(K) \geq \Delta$, on ajoute également toutes les mailles du volume agglomérable $\mathcal{A}_{K,\Delta}$, et l'on réitère le processus pour chacune de ces mailles. En revanche, si $\Delta^{max}(K) < \Delta$, on passe à une autre cellule initiale, que l'on classe dans le Δ -domaine n°2, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les cellules initiales soient classées dans un Δ -domaine.

Par construction, chaque Δ -domaine vérifie la caractérisation (4.19) et est le plus petit possible. De

plus, comme toutes les cellules du maillage initial sont balayées et attribuées à un Δ -domaine, on construit bien une Δ -partition de type maximal de \mathcal{T}_h^{ini} . Cette procédure est détaillée dans l'algorithme 3.

Algorithme 3 : Calcul d'une Δ -partition du maillage initial de type maximal, avec : N_{Dom} le nombre de Δ -domaines de la partition, $Liste_Mailles(Dom)\%N$ et $Liste_Mailles(Dom)\%v$ respectivement le nombre et le vecteur des cellules du domaine Dom , et $Domaine(K)$ le domaine de la cellule K .

Entrées : Maillage initial \mathcal{T}_h^{ini} , Facteur d'agglomération Δ ,

Sorties : Δ -partition de type maximal \mathcal{P}_Δ de \mathcal{T}_h^{ini} ,

1. Initialisation :

$N_{Dom} \leftarrow 0$; $Liste_Mailles \leftarrow \emptyset$

pour chaque maille $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$ **faire**

 | $Domaine(K) \leftarrow 0$

fin

2. Calcul des Δ -domaines :

pour chaque maille $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$ **faire**

si $\Delta^{max}(K) \geq \Delta$ **alors**

si $Domaine(K) = 0$ **alors**

 | $N_{Dom} \leftarrow N_{Dom} + 1$

 | $Dom \leftarrow N_{Dom}$

sinon

 | $Dom \leftarrow Domaine(K)$

fin

pour $i = 0$ à $\delta - 1$ **faire**

pour $j = 0$ à $\delta - 1$ **faire**

pour $k = 0$ à $\delta - 1$ **faire**

 | $K' \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i_K + i, j_K + j, k_K + k)$

si $Domaine(K') = 0$ **alors**

 | $N \leftarrow Liste_Mailles(Dom)\%N$

 | $Liste_Mailles(Dom)\%N \leftarrow N + 1$

 | $Liste_Mailles(Dom)\%v(N) \leftarrow K'$

sinon

si $Domaine(K') \neq Dom$ **alors**

 | $Dom' \leftarrow Domaine(K')$

 | $N_{old} \leftarrow Liste_Mailles(Dom)\%N$

 | $Liste_Mailles(Dom)\%N \leftarrow N_{old} + Liste_Mailles(Domaine(K'))\%N$

 | $N_{new} \leftarrow Liste_Mailles(Dom)\%N$

 | $Liste_Mailles(Dom)\%v(N_{old} : N_{new}) \leftarrow Liste_Mailles(Dom')\%v(:)$

pour $l = 1$ à $Liste_Mailles(Dom')\%N$ **faire**

 | $K'' \leftarrow Liste_Mailles(Domaine(K'))\%v(l)$

 | $Domaine(K'') \leftarrow Dom$

fin

 | $Liste_Mailles(Dom')\%N \leftarrow 0$

 | $Liste_Mailles(Dom')\%v \leftarrow \emptyset$

 | $N_{Dom} \leftarrow N_{Dom} - 1$

fin

fin

fin

fin

fin

fin

4.2.5 Heuristique d'agglomération dans les Δ -domaines

Il ne reste plus qu'à définir une procédure d'agglomération de facteur Δ au sein de chaque Δ -domaine pour finaliser l'algorithme de h -déraffinement/ p -enrichissement. Nous cherchons alors à déterminer un "bon" moyen d'agglomérer les cellules, c'est-à-dire qui tende à maximiser le nombre d'agrégats de facteur Δ introduits. Toutefois, il est possible qu'il n'y ait pas unicité de la configuration optimale. Nous cherchons donc également à déterminer si, parmi l'ensemble des configurations maximisant le nombre d'agrégats, il n'en existerait pas une qui soit à privilégier et qui permettrait de mettre en évidence un facteur expliquant au second ordre les temps de calcul du schéma.

Afin de guider la définition d'une procédure d'agglomération efficace, nous réalisons l'expérience suivante. Étant donnée la grille initiale $21 \times 21 \times 21$ représentée figure 4.18a, nous cherchons comment distribuer 27 agrégats $Q^2(3h)$ le plus efficacement possible. Nous considérons 3 répartitions possibles : une version "éclatée", en "tranches" et en "bloc", respectivement illustrées sur les figures 4.18b-c-d. Le stockage mémoire des configurations hybrides étant les mêmes, on ne s'intéresse qu'aux gains obtenus sur les temps d'exécution du solveur, reportés dans la figure 4.19.

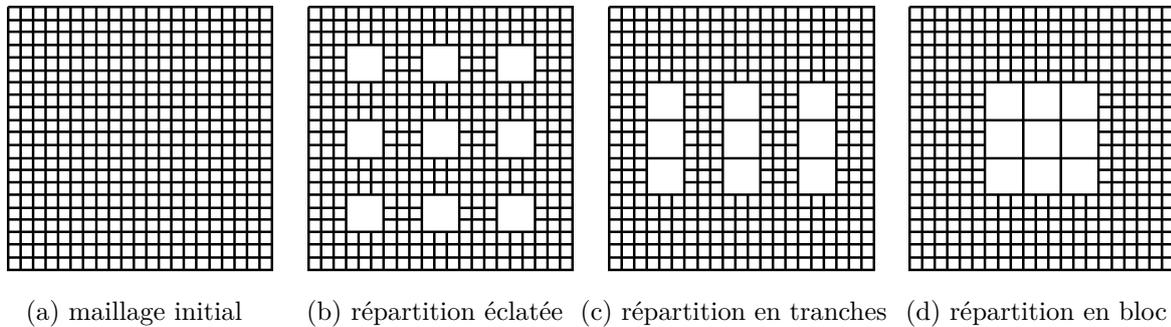


FIGURE 4.18 – Coupe des maillages 3D utilisés pour l'étude de l'impact de la répartition des agrégats dans les performances de résolution.

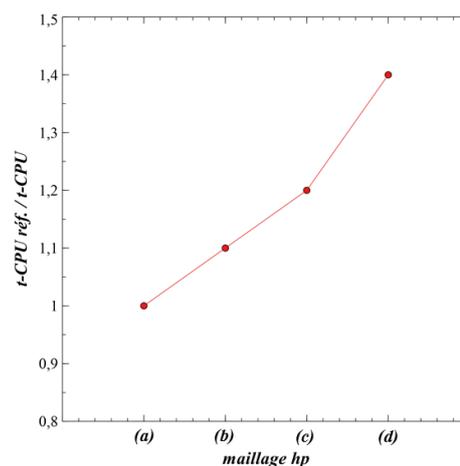


FIGURE 4.19 – Gains en temps d'exécution du solveur associés aux configurations de la figure 4.18.

On remarque ainsi qu'à nombre égal d'agrégats introduits dans le maillage initial, la configuration la plus avantageuse est celle qui maximise le nombre de surfaces d'échange hp -conformes entre ces agrégats. Notons par ailleurs que ceci est tout à fait compatible et cohérent avec l'objectif de maximiser le nombre d'agrégats. Cette observation s'explique par le fait que l'évaluation d'un flux conforme reste

moins coûteux que celle d'un flux non-conforme, même lorsque celui-ci est condensé. Il semble donc capital de prendre en compte cette propriété qualitative dans la conception du processus d'agglomération.

Remarque 4.24 *Une question naturelle se pose alors : quelle serait la configuration la plus avantageuse entre celle de la figure 4.18b et celle de la figure 4.18d à laquelle on aurait retranché un agrégat (par exemple l'agrégat central) ? La situation est paradoxale, car dans le premier cas, on maximise le nombre d'agrégats (27 contre 26), et, dans le second, le nombre de surfaces hp conformes entre les agrégats (54 contre 48). Il s'agit là d'un cas limite typique des problèmes d'optimisation multi-objectifs (solutions non dominées), que nous n'avons pas cherché à approfondir pour les raisons exposées précédemment. Les expériences numériques effectuées nous ont conduit à hiérarchiser les heuristiques de performances, avec en priorité la maximisation du nombre d'agrégats, suivi de la maximisation du nombre de surfaces hp conformes entre les agrégats.*

Dans ce but, nous proposons une première procédure que nous appellerons "procédure de parcours par adjacence". Il s'agit d'une approche récursive permettant, à partir d'un Δ -domaine Dom et d'une maille germe initiale $K \in Dom$ telle que $\Delta^{max}(K) \geq \Delta$, de déterminer automatiquement la liste maximale des volumes agglomérables de facteur Δ , admissibles, inclus dans Dom , et répartis "en bloc" autour de $A_{K,\Delta}$, c'est-à-dire formant une structure connexe ne comportant que des surfaces d'échange conformes.

Le principe est le suivant. On commence par sélectionner les cellules situées à une distance de $\pm\Delta$ de la maille germe de départ dans chaque direction. Puis, pour chacune de ces cellules, on teste si leur facteur d'agglomération maximal est supérieur ou égal à Δ : si c'est le cas, l'agrégat correspondant sera nécessairement admissible, on ajoute donc la cellule à la liste ; sinon, on passe à la cellule suivante. On répète alors récursivement ce processus pour chacune des cellules ajoutées à la liste. La procédure s'arrête lorsque toutes les cellules du Δ -domaine situées à une distance multiple de $\pm\Delta$ de la maille germe initiale ont été balayées. On aboutit ainsi à l'algorithme 4, dont on illustre les premières étapes sur l'exemple de la figure 4.20.

Algorithme 4 : Procédure de parcours par adjacence au sein d'un Δ -domaine à partir d'une maille germe donnée.

Entrées : Δ le facteur d'agglomération considéré, $Dom \in \mathcal{P}_\Delta$ un Δ -domaine du maillage initial, et $K \in Dom$ la maille germe de départ,

Sorties : $Liste_Vagglo_Delta$ la liste de taille N_Δ des mailles germes correspondant à la plus grande configuration agglomérée de facteur Δ qui soit structurellement admissible, connexe, hp conforme et incluse Dom ,

Fonction Récursive $Parcours(K)$

```

 $N_\Delta \leftarrow 0$ 
si  $K \in Dom$  alors
  si  $\Delta^{max}(K) \geq \Delta$  alors
    si  $K \notin Liste\_Vagglo\_Delta$  alors
       $N_\Delta \leftarrow N_\Delta + 1$ 
       $Liste\_Vagglo\_Delta(N_\Delta) \leftarrow K$ 
      pour  $q \in \{-\Delta, \Delta\}$  faire
         $K' \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i_K + q, j_K, k_K)$ 
         $Parcours(K')$ 
         $K' \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i_K, j_K + q, k_K)$ 
         $Parcours(K')$ 
         $K' \leftarrow \mathcal{T}^{-1}(i_K, j_K, k_K + q)$ 
         $Parcours(K')$ 
      fin
    fin
  fin
fin

```

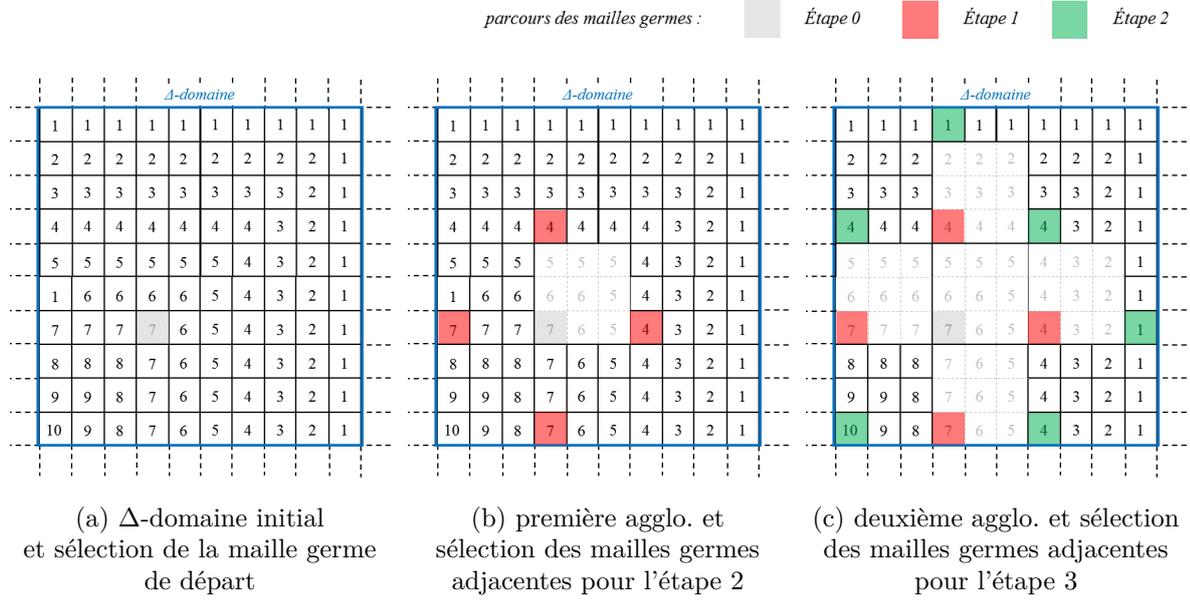


FIGURE 4.20 – Exemple 2D du parcours des mailles germes dans les 2 premiers appels de la procédure récursive de parcours par adjacence, pour le Δ -domaine et la maille germe de départ considérés.

En procédant ainsi, on obtient un ensemble candidat d'agrégats structurellement admissibles de facteur Δ à introduire dans le Δ -domaine considéré, qui est entièrement déterminé par la maille germe de départ. Se pose donc naturellement la problématique du choix de cette maille initiale : comment assurer qu'elle conduise à un ensemble candidat de cardinal maximal ?

Une solution serait de générer et de stocker ces ensembles pour chacune des cellules du domaine prises comme maille de départ, de comparer leur cardinal et de sélectionner le meilleur candidat. Intuitivement, on pourrait penser que cette énumération est trop coûteuse pour présenter un intérêt pratique, car, bien que le parcours par adjacence soit peu complexe, il est nécessaire de répéter cette procédure autant de fois qu'il y a de cellules dans le Δ -domaine, donc globalement $N_{\text{ét}}^{\text{ini}}$ fois à l'échelle de la Δ -partition.

Or, on a la propriété fondamentale suivante, qui montre qu'il est possible d'énumérer tous les ensembles en n'effectuant la procédure de parcours que sur un nombre très restreint de cellules du Δ -domaine :

Proposition 4.25 *Soient $\delta \in \mathbb{N}^*$, $\Delta = (\delta, \delta, \delta)$ et Dom un Δ -domaine d'une partition du maillage initial de type maximal induite par le facteur Δ . Il existe au plus δ^3 ensembles candidats d'agrégats de facteur Δ résultant de la procédure de parcours par adjacence.*

Preuve. Soit $K \in Dom$. Si $\Delta^{\text{max}}(K) < \Delta$, il n'existe aucun volume agglomérable de facteur Δ inclus dans Dom , le résultat est donc vérifié. Sinon, pour $K' \in \mathcal{A}_{K, \Delta}$, notons $\mathcal{E}_{\Delta}^{K'}$ l'ensemble des agrégats issus de la procédure de parcours par adjacences initialisé avec la cellule K' , et $\mathcal{E}_{\Delta}^K = \{\mathcal{E}_{\Delta}^{K'}, K' \in \mathcal{A}_{K, \Delta}\}$. Comme $\text{card}(\mathcal{A}_{K, \Delta}) = \delta^3$, on a :

$$\text{card}(\mathcal{E}_{\Delta}^K) \leq \delta^3, \quad (4.36)$$

avec égalité si et seulement si toutes les cellules de $\mathcal{A}_{K, \Delta}$ ont un facteur d'agglomération maximal supérieur à Δ^{max} . Prenons alors $K'' \in Dom$ tel que $K'' \notin \mathcal{A}_{K, \Delta}$ et montrons que $\mathcal{E}_{\Delta}^{K''} \in \mathcal{E}_{\Delta}^K$. En considérant la division euclidienne de $i_{K''} - i_K$ par δ , il vient :

$$\exists q_x \in \mathbb{Z}, \exists r_x \in \mathbb{N} / i_{K''} - i_K = q_x \delta + r_x. \quad (4.37)$$

Or, comme $r_x < \delta$:

$$K' := \mathcal{T}^{-1}(i_K + r_x, j_K, k_K) \in \mathcal{A}_{K,\Delta}. \quad (4.38)$$

Ainsi :

$$i_{K''} = i_{K'} + q_x \delta. \quad (4.39)$$

De même, on montre que :

$$j_{K''} = j_{K'} + q_y \delta \quad \text{et} \quad k_{K''} = k_{K'} + q_z \delta. \quad (4.40)$$

D'où :

$$K'' = \mathcal{T}^{-1}(i_{K'} + q_x \delta, j_{K'} + q_y \delta, k_{K'} + q_z \delta). \quad (4.41)$$

On a donc nécessairement :

$$K'' \in \mathcal{E}_{\Delta}^{K'}, \quad (4.42)$$

et par suite :

$$\mathcal{E}_{\Delta}^{K''} = \mathcal{E}_{\Delta}^{K'}. \quad (4.43)$$

L'équation (4.38) assurant que $\mathcal{E}_{\Delta}^{K'} \in \mathcal{E}_{\Delta}^K$, on obtient le résultat voulu. ■

Ce résultat est donc crucial du point de vue de l'efficacité numérique du post-mailleur : en pratique dans nos applications, il suffira de générer et comparer seulement 27 ensembles candidats d'agrégats dans chaque Δ -domaine lors de l'étape d'agglomération $Q^2(3h)$, de même lors de l'étape $Q^4(9h)$, et de sélectionner le meilleur candidat pour critère considéré, dans notre cas celui de plus grand cardinal.

On illustre cette propriété de congruence sur la figure 4.21a, qui énumère tous les ensembles candidats d'agrégats pour le Δ -domaine n°1 ($\Delta = (3, 3, 3)$) de l'exemple vu plus haut. D'après ce qui précède, il suffit de lancer la procédure de parcours par adjacence pour chacune des 9 cellules encadrées sur cette figure (9 cellules au lieu de 27 car il s'agit d'un exemple 2D). Ce faisant, on obtient les configurations représentées sur les figures 4.21b à 4.21j. On voit alors bien sur cet exemple que si l'on choisit une maille germe initiale différente des 9 considérées jusqu'ici, on retrouve automatiquement soit la configuration initiale (si la maille a un facteur d'agglomération inférieur à Δ), soit une des configurations agglomérées précédentes. Bien sûr, dans ce cas, la configuration la plus avantageuse est celle de la figure 4.21b, qui maximise le nombre d'agrégats introduits dans le Δ -domaine. En pratique, c'est donc celle-ci qui serait sélectionnée.

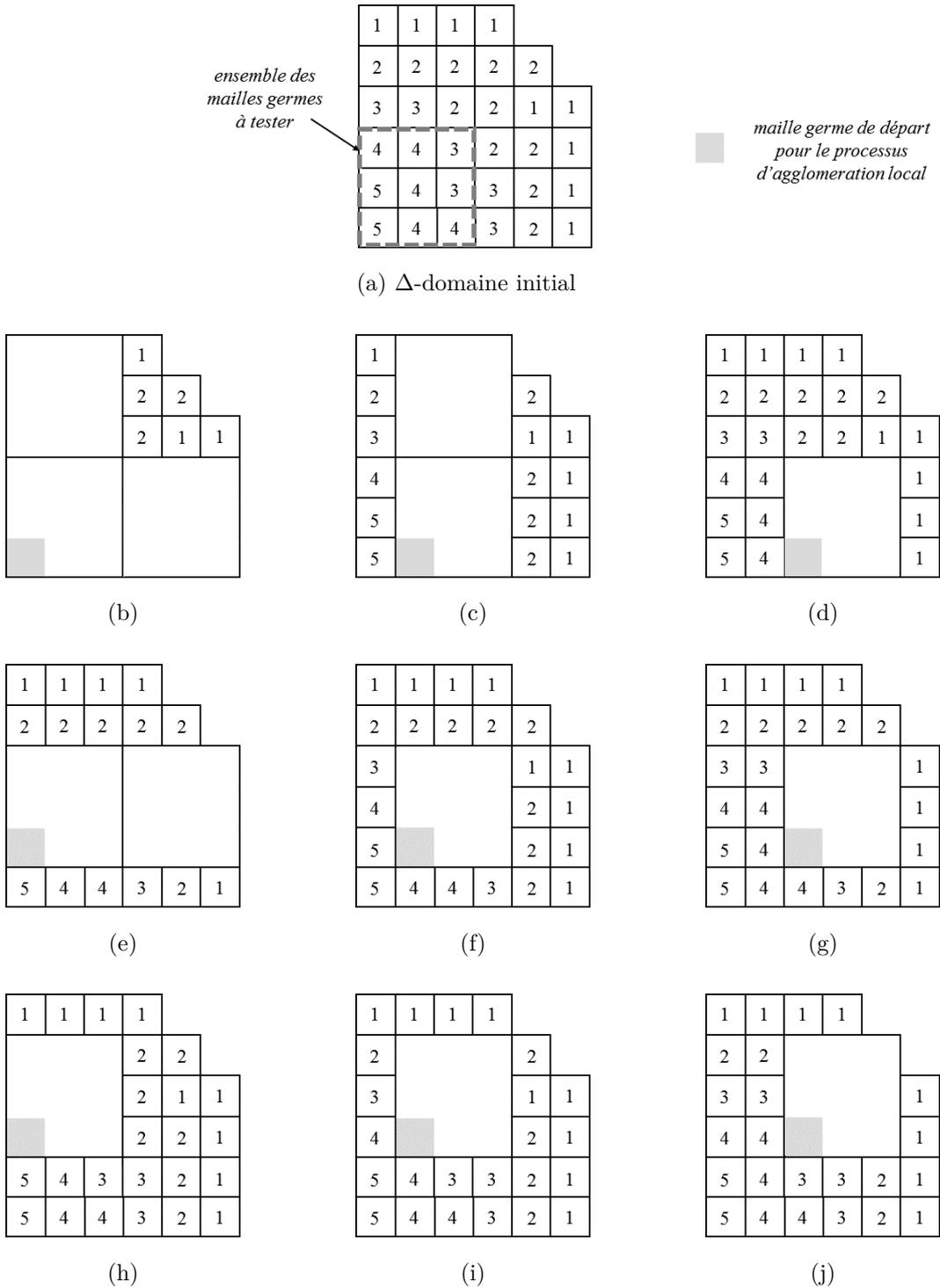


FIGURE 4.21 – Ensemble des configurations agrégées possibles pour le Δ -domaine n° 1 de la figure 4.15, en suivant la procédure de parcours par adjacence.

Remarque 4.26 *Le processus d'agglomération au sein d'un Δ -domaine s'apparente ainsi à une méthode de recherche locale, dans laquelle le mouvement élémentaire serait "choisir une nouvelle maille germe de départ", deux configurations seraient dites voisines lorsqu'elles sont générées à partir de deux mailles germes différentes, et le critère de sélection serait le nombre d'agrégats introduits (en cas d'égalité, on*

choisirait la configuration maximisant le nombre de surfaces d'échange conformes). Dans ce cadre, la propriété de congruence (proposition 4.25) peut être vue comme un moyen efficace de parcourir l'arbre de recherche local et de sélectionner le meilleur candidat.

Précisons néanmoins une difficulté qui émerge de la stratégie d'agglomération développée. L'introduction des agrégats étant réalisée de manière indépendante dans chaque composante de la Δ -partition, il est possible que des configurations non structurellement admissibles se forment dans les zones d'adjacence entre deux Δ -domaines, comme illustré sur la figure 4.22a. Plusieurs solutions ont alors été envisagées afin d'éviter l'apparition de telles configurations.

Par exemple, une première piste consiste à coupler les processus d'agglomération dans les Δ -domaines, en stockant tous les ensembles candidats d'agrégats dans chaque domaine et en cherchant une combinaison globalement admissible. Or, cette approche peut rapidement devenir rédhitoire en termes de coûts de calcul, le nombre de configurations augmentant exponentiellement avec le nombre de domaines. De plus, l'existence d'une combinaison admissible n'est *a priori* pas assurée. Une deuxième méthode, nettement moins coûteuse, est de détecter *a posteriori* les configurations locales non structurellement admissibles et de supprimer les agrégats litigieux. Cependant, en procédant ainsi, on peut être amené à supprimer un grand nombre d'agrégats et donc à réduire les gains potentiellement atteignables.

Finalement, la solution retenue, présentant empiriquement le meilleur compromis, consiste à isoler *a priori* les Δ -domaines adjacents, en introduisant une "distance de sécurité" dans les zones d'interface avant de procéder à l'agglomération. En pratique, il s'agit de détecter les cellules initiales formant l'accolement entre deux Δ -domaines et de les attribuer à un Δ -domaine tiers, créé sur place pour jouer le rôle de séparateur, et dans lequel aucun agrégat ne peut être introduit (voir figure 4.22b-c). On s'assure ainsi que la procédure d'agglomération globale ne crée que des maillages hybrides admissibles, mais la contrepartie est qu'on réduit potentiellement le nombre d'agrégats introduits dans le maillage.

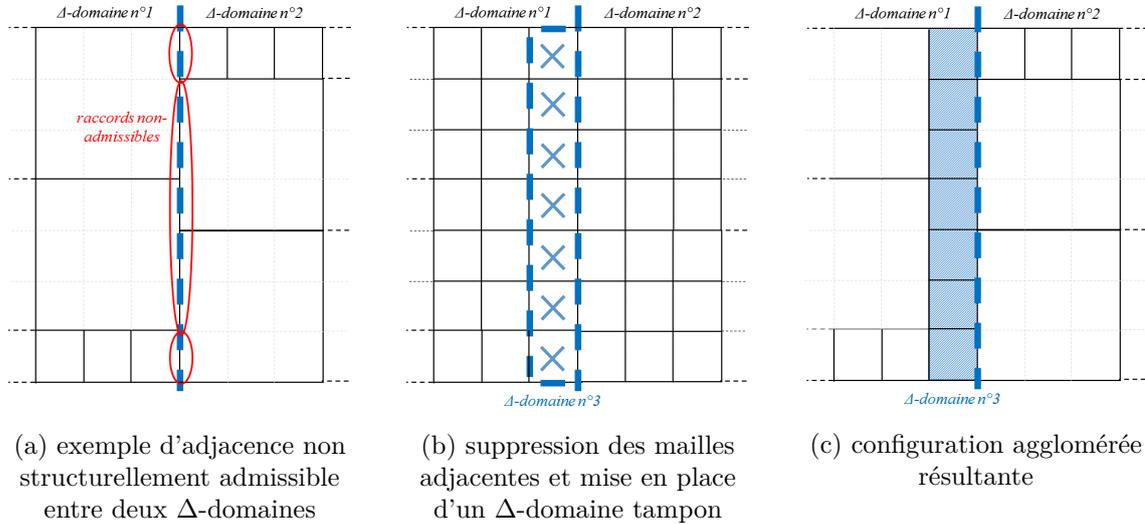


FIGURE 4.22 – Exemple d'adjacence non-admissible entre deux Δ -domaines (a) et introduction d'un Δ -domaine tampon (b,c) pour corriger le problème.

4.2.5.1 Bilan et validation sur des exemples élémentaires

Nous obtenons finalement un processus de h -déraffinement/ p -enrichissement entièrement automatisé, basé sur des heuristiques d'agglomération résultant d'*a priori* confortés par des expériences numériques diverses. Dans le cas particulier des configurations de déraffinement condensées disponibles ($Q^2(3h)$ et $Q^4(9h)$), il peut se résumer de la manière suivante :

1. calculer les facteurs d'agglomération maximaux du maillage initial (algorithme 2),

2. calculer la Δ -partition du maillage initial, pour $\Delta = (3, 3, 3)$ (algorithme 3),
3. isoler les Δ -domaines adjacents,
4. dans chaque Δ -domaine :
 - générer les (au plus) δ^3 ensembles candidats d'agrégats (algorithme 4),
 - évaluer le cardinal de chaque ensemble,
 - sélectionner l'ensemble de plus grand cardinal (en cas d'égalité, sélectionner l'ensemble qui maximise le nombre de surfaces d'échange conformes, et en cas de nouvelle égalité, choisir la première configuration),
 - on obtient ainsi une configuration hybride intermédiaire $Q^1(h)/Q^2(3h)$,
5. réitérer les quatre premiers points en prenant comme maillage initial le sous-maillage $Q^2(3h)$ de la configuration hybride issue de 4.
 - on obtient ainsi le maillage hybride final $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$.

Remarque 4.27 Concernant le point 5., il s'agit plus précisément d'extraire du maillage initial le sous-maillage $Q^2(3h)$ privé des agrégats adjacents aux cellules $Q^1(h)$, comme illustré sur la figure 4.23, afin d'éviter tout raccord non structurellement admissible du type $Q_m^1(h)/Q^4(9h)$.

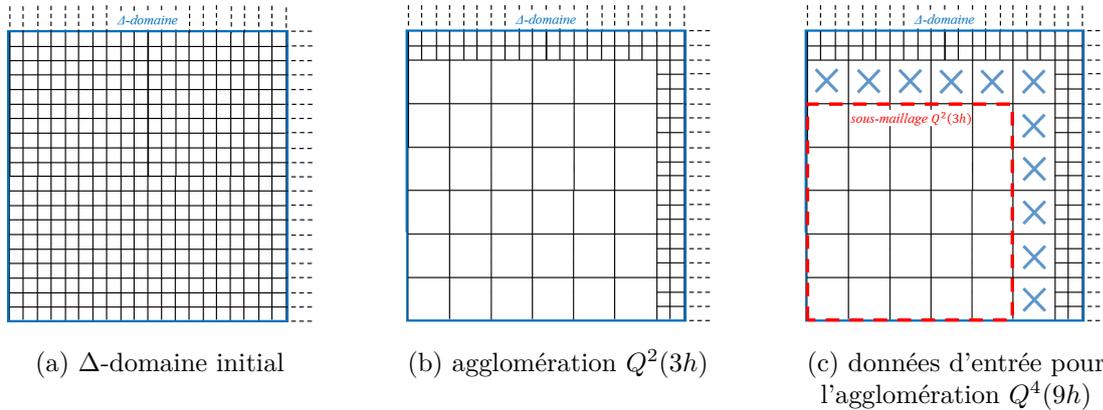
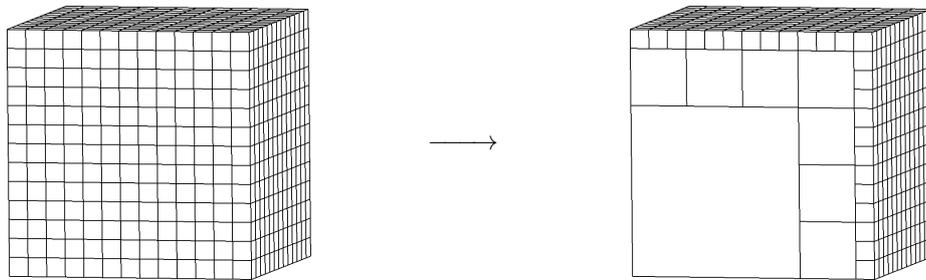


FIGURE 4.23 – Exemple 2D de la sélection du sous-maillage $Q^2(3h)$ préliminaire à l'étape d'agglomération $Q^4(9h)$ au sein d'un Δ -domaine.

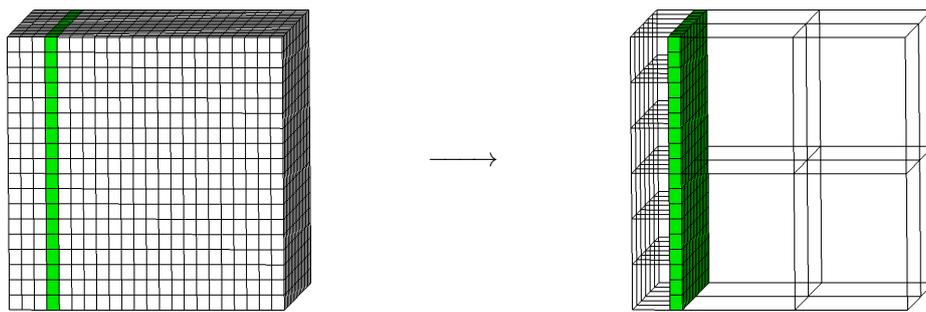
Afin de valider le bon fonctionnement de cet algorithme, nous allons le mettre en œuvre sur les trois configurations initiales élémentaires de la figure 4.24, pour lesquelles il est possible de déterminer les maillages hybrides $Q^1/Q^2/Q^4$ minimaux en termes de degrés de liberté.

La première configuration initiale (voir figure 4.24a) est une simple grille cartésienne $10*10*10$. La Δ -partition ($\Delta = (3, 3, 3)$) ne contient donc qu'un seul élément, constitué de l'ensemble des mailles initiales. La configuration initiale n° 2 (voir figure 4.24a) est une grille $24*18*18$ coupée en deux par la présence d'une plaque d'une maille d'épaisseur. Ainsi, du fait des contraintes d'admissibilité géométriques, aucun agrégat ne peut joindre les deux parties du maillage. On compte donc deux Δ -domaines distincts pour cette configuration. Enfin, le maillage initial n° 3 (voir figure 4.24c) est constitué d'une grille $27*27*27$ contenant en son centre un boîtier de taille $9*9*9$. On compte donc de nouveau deux Δ -domaines distincts, avec cette fois la particularité que l'un est géométriquement inclus dans l'autre.

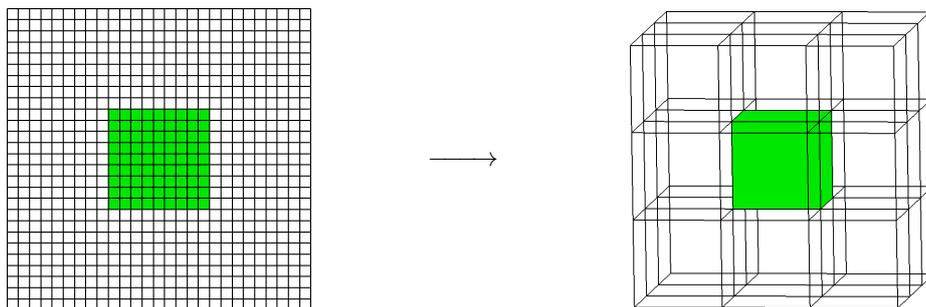
On vérifie alors aisément que dans chacun de ces cas-tests élémentaires, l'algorithme développé produit le maillage hybride optimal (à une rotation près dans le cas particulier de la configuration n° 1).



(a) configuration n° 1



(b) configuration n° 2



(c) configuration n° 3

FIGURE 4.24 – Mise en œuvre de l’algorithme de h -déraffinement/ p -enrichissement sur des cas-tests élémentaires. On représente à gauche les maillages initiaux (données d’entrée) et à droite les configurations hybrides générées par l’algorithme. La présence d’un matériau est manifestée par les cellules de couleur verte.

L'étude détaillée de la qualité et des performances de l'algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement sur des configurations initiales moins triviales fera l'objet du chapitre suivant. Ceci achève donc notre étude autour de la fonctionnalité de déaffinement du post-maillage. Dans ce qui suit, nous traitons de l'introduction de zones de raffinement dans le maillage initial et de l'articulation des processus de raffinement/déaffinement au sein de l'algorithme de post-maillage global.

4.3 Gestion des raffinements locaux

Dans cette section, nous développons une méthode de h -raffinement ayant pour but principal de permettre la prise en compte d'éléments singuliers de type fente ou fil via l'introduction de sous-maillages locaux. Si l'objectif de l'algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement était de diminuer les coûts de calcul de simulation, la motivation majeure est ici d'avoir la possibilité de s'affranchir de certains modèles sous-cellulaires, dont l'utilisation peut présenter plusieurs difficultés pratiques (domaine de validité ou de stabilité restrictif, artefacts numériques, etc.). L'intérêt des sous-maillages n'est toutefois pas réduit à ce point précis. Par exemple, lorsque le maillage initial est trop lâche pour autoriser le recours à un modèle sous-cellulaire, l'introduction de raffinements locaux peut permettre de ramener le modèle dans son domaine de validité. Puis, en introduisant une échelle de discrétisation plus fine, ils peuvent également permettre de représenter plus fidèlement la distance entre les objets, ce qui peut être déterminant pour modéliser correctement certains phénomènes physiques (par exemple, le champ électrique dans un condensateur est particulièrement sensible à la distance entre ses armatures).

Le contexte d'utilisation d'une approche de raffinement, telle que nous l'avons considérée dans nos travaux, va être posé différemment de la méthode de déaffinement précédente. En effet, les objets singuliers représentés par des modèles sous-cellulaires n'étant pas décrits géométriquement dans la configuration initiale, des données d'entrée supplémentaires relatives à leur position et leur dimension sont requises afin d'assurer leur description via des sous-maillages. L'introduction de raffinements locaux n'est donc pas transparente vis-à-vis de l'utilisateur, et, dans ce sens, l'approche que nous développons n'est pas totalement automatisée. En particulier, nous allons supposer que l'utilisateur renseigne l'ensemble des cellules initiales à raffiner (typiquement celles contenant les singularités), ainsi que le taux de raffinement souhaité. Comme nous allons voir, la problématique majeure qu'il s'agit de traiter réside alors dans la gestion des contraintes d'admissibilité structurelle induites par l'introduction d'une zone de raffinement local.

Nous commençons par décrire le cadre d'étude mis en place afin de formaliser les approches h -raffinement. Nous présentons ensuite les principales difficultés qui se présentent dans un contexte où les facteurs de raffinement sont limités par les configurations condensées disponibles. Nous développons alors une méthode de raffinement récursive adaptée à ce contexte et discutons de sa compatibilité avec l'algorithme de déaffinement mis en place précédemment.

4.3.1 Cadre d'étude

Par analogie avec la section 4.1, nous introduisons brièvement quelques notions permettant de caractériser l'introduction d'une zone de raffinement au sein du maillage initial.

Définition 4.28 *On appellera maillage raffiné de \mathcal{T}_h^{ini} , tout maillage cartésien \mathcal{T}_h du domaine de calcul vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \exists ! K' \in \mathcal{T}_h^{ini} / \overset{\circ}{K} \subset \overset{\circ}{K}'. \quad (4.44)$$

L'ensemble des maillages raffinés de \mathcal{T}_h^{ini} sera noté $\mathcal{Raff}(\mathcal{T}_h^{ini})$.

En d'autres termes, \mathcal{T}_h est un maillage raffiné de \mathcal{T}_h^{ini} si, et seulement si, \mathcal{T}_h^{ini} est un maillage aggloméré de \mathcal{T}_h , i.e. :

$$\mathcal{T}_h \in \mathcal{Raff}(\mathcal{T}_h^{ini}) \Leftrightarrow \mathcal{T}_h \in \mathcal{Agglo}(\mathcal{T}_h). \quad (4.45)$$

De plus, on a trivialement : $\mathcal{T}_h^{ini} \in \mathcal{Raff}(\mathcal{T}_h^{ini})$.

Définition 4.29 Soit $\Phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$. Nous appellerons sous-maillage régulier de la maille K et de facteur Φ l'ensemble des cellules :

$$\mathcal{R}_{K,\Phi} = \left\{ K' / \forall \alpha \in \{x, y, z\}, \forall q_\alpha \in \llbracket 0, \phi_\alpha - 1 \rrbracket, \alpha_{K'} = \alpha_K + q_\alpha \frac{\Delta \alpha_K}{\phi_\alpha}, \Delta \alpha_{K'} = \phi_\alpha, \right\}, \quad (4.46)$$

où (x_K, y_K, z_K) et $(\Delta x_K, \Delta y_K, \Delta z_K)$ sont respectivement le sommet de base et les dimensions du parallélépipède K (voir pour rappel la caractérisation (1.55)).

On emploie ici la qualification "régulier" car tous les éléments de $\mathcal{R}_{K,\Phi}$ ont les mêmes dimensions. Dans la suite, on ne s'intéressera qu'à ce type de sous-maillage. Remarquons par ailleurs que les paramètres Φ et (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) sont les stricts analogues des facteurs de déraffinement Δ et $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ introduits précédemment. On formalise alors le processus de raffinement d'une cellule initiale, illustré sur la figure 4.25 :

Définition 4.30 Soit $\mathcal{T}_h \in \mathcal{Raff}(\mathcal{T}_h^{ini})$. On appellera opérateur de raffinement l'application $\mathcal{R}_{K,\Phi}$ chargée d'introduire le sous-maillage $\mathcal{R}_{K,\Phi}$ dans le maillage \mathcal{T}_h :

$$\mathcal{R}_{K,\Phi} : \mathcal{Raff}(\mathcal{T}_h^{ini}) \rightarrow \mathcal{Raff}(\mathcal{T}_h^{ini}), \mathcal{T}_h \mapsto (\mathcal{T}_h \setminus \{K\}) \cup_{K' \in \mathcal{R}_{K,\Phi}} \{K'\}. \quad (4.47)$$

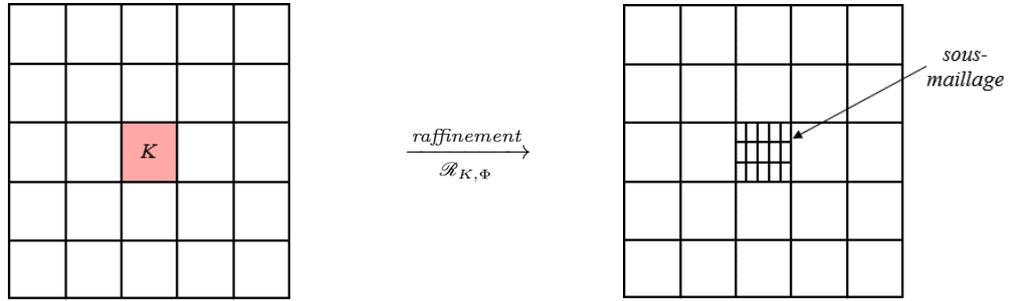


FIGURE 4.25 – Introduction du sous-maillage $\mathcal{R}_{K,\Phi}$, avec $\Phi = (5, 3)$, au sein d'un maillage initial 2D.

On se limite dans notre étude aux raffinements isotropes. Ainsi, dans ce qui suit, les facteurs de raffinement seront de la forme $\Phi = (\phi, \phi, \phi)$, avec $\phi \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, les notions d'admissibilité géométrique et structurelle des sous-maillages se déduisent sans difficulté en adaptant les définitions 4.10 et 4.13. De même pour les maillages raffinés de \mathcal{T}_h^{ini} admissibles (voir définition 4.14), dont l'ensemble sera noté $\mathcal{R}(\mathcal{T}_h^{ini})$.

Remarque 4.31 Les éléments d'un sous-maillage héritant naturellement des propriétés des cellules initiales correspondantes (conditions aux limites, matériau, etc.), on peut remarquer que si le maillage initial est géométriquement admissible, alors tout raffinement de ce maillage le sera également. L'admissibilité d'un maillage raffiné se joue donc uniquement sur le type de raccord non-conforme introduit (condensé ou non).

Remarque 4.32 En pratique, l'utilisateur communiquera en entrée du post-maillieur la liste des cellules initiales à sous-mailler, $\{K_i\}_{i=1}^N$, ainsi que les facteurs de raffinement associés, $\{\Phi_i\}_{i=1}^N$.

4.3.2 Limitation induite par les configurations condensées disponibles et stratégie de raffinement adoptée

L'ensemble des configurations condensées construites dans le chapitre précédent ne comprend qu'un seul raccord de raffinement, $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$, ce qui interdit l'introduction de sous-maillages de facteur strictement supérieur à 2. En l'état, l'intérêt du raffinement est donc fortement limité, car la dimension des objets singuliers que l'on souhaite discrétiser est généralement plus faible que $h/2$.

Pour pallier cette difficulté, une première solution serait de construire de nouveaux flux condensés du type $Q^1(h)/Q_m^1(h/n)$ avec $n > 2$, afin de pouvoir, quelque soit la taille de la grille initiale ou de la singularité considérée, utiliser le facteur de raffinement adéquat. Cependant, afin de couvrir tout le spectre des applications, il serait nécessaire de générer un très grand nombre de raccords condensés. Or, l'élaboration, l'implémentation et la validation d'un flux condensé viable et numériquement efficace peut requérir en pratique une durée de développement non négligeable. Ainsi, dans un contexte de temps limité, nous nous sommes intéressés à une solution plus accessible et plus flexible d'un point de vue applicatif, quitte à perdre légèrement en performances numériques.

Cette solution consiste à introduire récursivement des raffinements de facteur 2 jusqu'à atteindre l'échelle de sous-maillage voulue, ou du moins une approximation satisfaisante de celle-ci. Supposons par exemple que nous désirions introduire un sous-maillage de facteur 8 au sein de la maille K de la figure 4.26a. Ne disposant pas du raccord condensé $Q^1(h)/Q_m^1(h/8)$, l'introduction directe d'un tel sous-maillage, représenté sur la figure 4.26b n'est pas admissible. En revanche, en introduisant des raffinements auxiliaires progressifs dans un voisinage adapté de la cellule K de sorte à n'utiliser que des raccords du type $Q^1("h"/n)/Q_m^1("h"/2n)$, on obtient bien une configuration admissible, comme le montre la figure 4.26c.

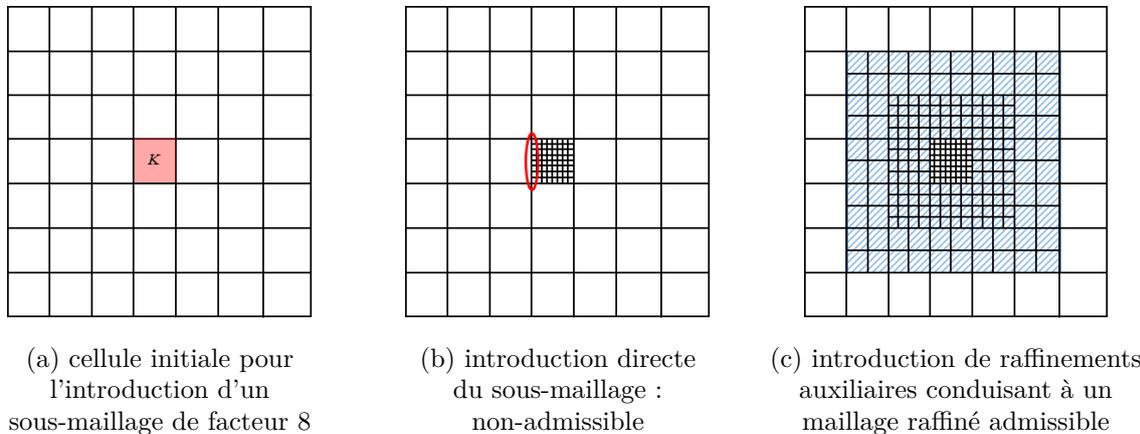


FIGURE 4.26 – Mise en place de raffinements récursifs dans un maillage 2D permettant l'introduction du sous maillage $\mathcal{R}_{K,\Phi}$, avec $\Phi = (8, 8)$, en respectant les contraintes d'admissibilité structurelles.

Remarque 4.33 Dans l'exemple précédent, il est possible d'introduire un sous-maillage auxiliaire plus économe que celui de la figure 4.26c. En effet, comme le montre la figure 4.27, les agrégats situés au niveau des angles de la couche de raffinement extérieure assurant la transition $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$ sont superflus, dans la mesure où leur suppression n'entraîne pas la perte de l'admissibilité de la configuration. Néanmoins, ces agrégats seront volontairement conservés par la suite, car ils permettent de former des structures *hp* homogènes se comportant mieux d'un point de vue de la qualité (cf. structure en damier, paragraphe 3.3.4), de mieux accompagner le changement de régularité des champs au voisinage d'une singularité géométrique, et de faciliter l'implémentation en permettant une programmation récursive sans distinction sur le facteur de raffinement considéré.

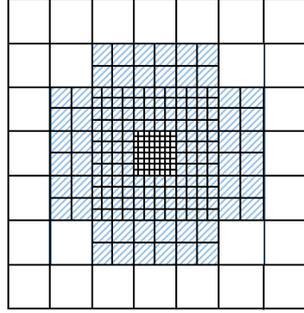


FIGURE 4.27 – Raffinement auxiliaire minimal permettant l'introduction du sous-maillage de facteur 8.

Remarque 4.34 *Les cellules $Q^1(h)$ appartenant à la couche extérieure du maillage de la figure 4.26c, bien qu'elles n'aient pas été raffinées, font partie intégrante des cellules auxiliaires mobilisées par le sous-maillage $\mathcal{R}_{K,\Phi}$. En effet, aucune de ces cellules ne pourra par la suite être agglomérée, sous peine de créer des configurations d'accolement non structurellement admissibles.*

4.3.3 Mise en place de l'approche de raffinement

Avec ce qui précède, on arrive naturellement à la notion suivante :

Définition 4.35 *Soient $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$, $\phi \in \mathbb{N}$ et $N_\phi \in \mathbb{N}^*$ tels que $\phi = 2^{N_\phi}$ et $\Phi = (\phi, \phi, \phi)$. On appellera domaine initial de raffinement auxiliaire associé au sous-maillage $\mathcal{R}_{K,\Phi}$ l'ensemble :*

$$\mathcal{A}ux_{K,\Phi} = \left\{ \mathcal{T}^{-1}(i_K + q_x\phi, j_K + q_y\phi, k_K + q_z\phi), (q_x, q_y, q_z) \in I_{K,\phi}^x \times I_{K,\phi}^y \times I_{K,\phi}^z - \{0, 0, 0\} \right\}, \quad (4.48)$$

avec :

$$I_{K,\phi}^x = [-\min\{N_\phi, i_K - 1\}, \min\{N_\phi, N_{\acute{e}l,x}^0\} - i_K], \quad (4.49a)$$

$$I_{K,\phi}^y = [-\min\{N_\phi, j_K - 1\}, \min\{N_\phi, N_{\acute{e}l,y}^0\} - j_K], \quad (4.49b)$$

$$I_{K,\phi}^z = [-\min\{N_\phi, k_K - 1\}, \min\{N_\phi, N_{\acute{e}l,z}^0\} - k_K]. \quad (4.49c)$$

L'ensemble $\mathcal{A}ux_{K,\Phi}$ contient ainsi toutes les cellules initiales situées dans un voisinage de l'élément K dans lesquelles il est nécessaire d'introduire un sous-maillage auxiliaire, choisi de sorte à assurer l'admissibilité de la configuration $\mathcal{R}_{K,\Phi}(\mathcal{T}_h^{ini})$. Cependant, comme nous allons voir, ce choix peut s'avérer non trivial, notamment lorsque plusieurs zones de raffinement de facteurs différents sont à introduire dans le maillage initial. Le cœur de l'approche proposée consiste alors à déterminer les facteurs de raffinement adéquats associés à ces sous-maillages auxiliaires. Dans ce qui suit, nous allons donc nous intéresser à la mise en place d'une méthode de calcul de ces quantités.

Par analogie avec la section précédente, nous allons attribuer à chaque cellule du maillage initial impactée par l'introduction d'un sous-maillage un entier correspondant à son facteur de raffinement, $\phi(K)$, qui sera par convention précédé d'un signe "-" dans les prochaines figures pour éviter toute confusion avec les facteurs d'agglomération. Afin de distinguer facilement les facteurs de raffinement auxiliaires, ceux-ci seront écrits en italique et la valeur "-1" sera attribuée à la couche extérieure de cellules auxiliaires $Q^1(h)$ non raffinées (celles de la remarque 4.34). Ainsi, la figure 4.26c sera décrite de manière équivalente, sur le maillage initial, par la figure 4.28.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-2	-2	-2	-2	-2	-1
-1	-2	-4	-4	-4	-2	-1
-1	-2	-4	-8	-4	-2	-1
-1	-2	-4	-4	-4	-2	-1
-1	-2	-2	-2	-2	-2	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

FIGURE 4.28 – Représentation équivalente du maillage raffiné de la figure 4.26c à partir des facteurs de raffinement du maillage initial.

Dans le cas où un seul sous-maillage $\mathcal{R}_{K,\Phi}$ est à introduire dans la configuration initiale, le calcul des facteurs de raffinement auxiliaires est triviale et s'obtient par l'algorithme 5 suivant :

Algorithme 5 : Calcul des facteurs de raffinement auxiliaires dans le cas de l'introduction d'un seul sous-maillage dans la configuration initiale.

Entrées : \mathcal{T}_h^{ini} , le maillage initial,
 $K \in \mathcal{T}_h^{ini}$ la cellule initiale à raffiner,
 $\Phi = (\phi, \phi, \phi)$ avec $\phi = 2^{N_\phi}$ et $N_\phi \in \mathbb{N}^*$, le facteur de raffinement considéré,
Sorties : $\Phi(K')$, $\forall K' \in \mathcal{Aux}_{K,\Phi}$, la liste des facteurs de raffinement auxiliaires,

1. Attribution du facteur de raffinement de la cellule K :

$$\phi(K) = 2^{N_\phi}$$

$$\Phi(K) = (\phi(K), \phi(K), \phi(K))$$

2. Calcul des facteurs de raffinement auxiliaires :

```

pour  $q_x \in I_{K,\phi}^x$  faire
  pour  $q_y \in I_{K,\phi}^y$  faire
    pour  $q_z \in I_{K,\phi}^z$  faire
      si  $(q_x, q_y, q_z) \neq (0, 0, 0)$  alors
         $K' \leftarrow \mathcal{S}^{-1}(i_K + q_x \phi, j_K + q_y \phi, k_K + q_z \phi)$ 
         $\phi(K') = 2^{N_\phi - \max\{|q_x|, |q_y|, |q_z|\}}$ 
         $\Phi(K') = (\phi(K'), \phi(K'), \phi(K'))$ 
      fin
    fin
  fin
fin

```

En revanche, dans un cadre plus réaliste où l'on souhaite introduire $N > 1$ sous-maillages, plusieurs cas de figure peuvent se présenter selon les facteurs de raffinement et les positions relatives des différentes cellules initiales $\{K_i\}_{i=1}^N$ considérées, ce qui complexifie légèrement ce calcul.

Commençons par considérer le cas particulier où tous les sous-maillages possèdent le même facteur de raffinement Φ . Si les domaines initiaux de raffinement auxiliaires sont deux à deux disjoints :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket / i \neq j, \mathcal{Aux}_{K_i, \Phi} \cap \mathcal{Aux}_{K_j, \Phi} = \emptyset, \quad (4.50)$$

il est facile de voir que l'utilisation de l'algorithme 5 successivement sur chacune des cellules initiales K_i conduit à un maillage raffiné admissible, comme illustré sur la figure 4.29.

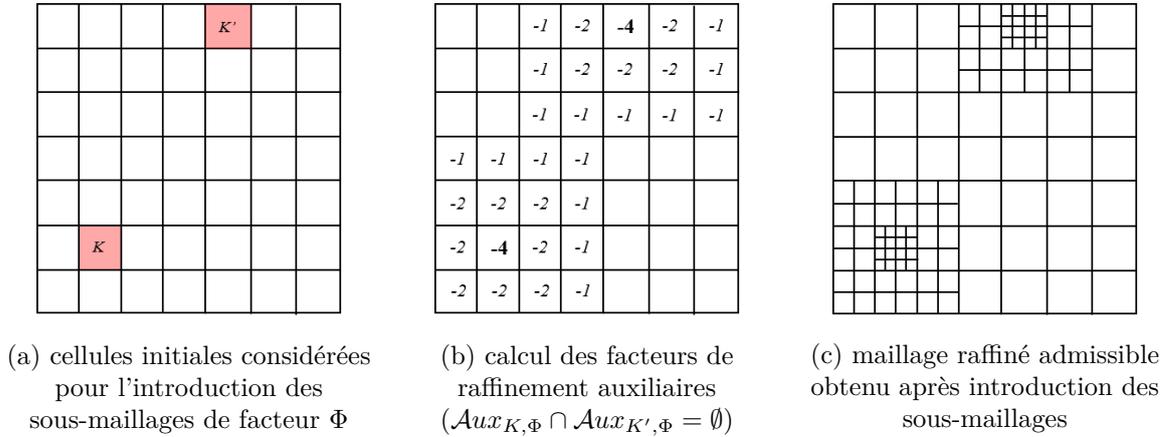


FIGURE 4.29 – Exemple 2D de l'introduction de sous-maillages disjoints de facteur $\Phi = (4, 4)$ conduisant à un maillage raffiné admissible.

Ceci reste vrai dans le cas où les domaines auxiliaires ne sont pas deux à deux disjoints, à condition d'ajouter une légère correction dans l'algorithme précédent. En effet, considérons par exemple l'introduction de deux sous-maillages, $\mathcal{R}_{K,\Phi}$ et $\mathcal{R}_{K',\Phi}$. Si $K \in \mathcal{Aux}_{K',\Phi}$, on voit qu'une valeur strictement inférieure à Φ va être attribuée à K lors du calcul des facteurs de raffinement auxiliaires de $\mathcal{R}_{K',\Phi}$, alors que l'on souhaite avoir $\Phi(K) = \Phi$. Il suffit donc de modifier l'algorithme 5 en autorisant l'attribution d'un nouveau facteur de raffinement uniquement dans le cas où celui-ci est supérieur à la valeur précédente. On obtient alors l'algorithme 6, utilisé dans l'exemple de la figure 4.30.

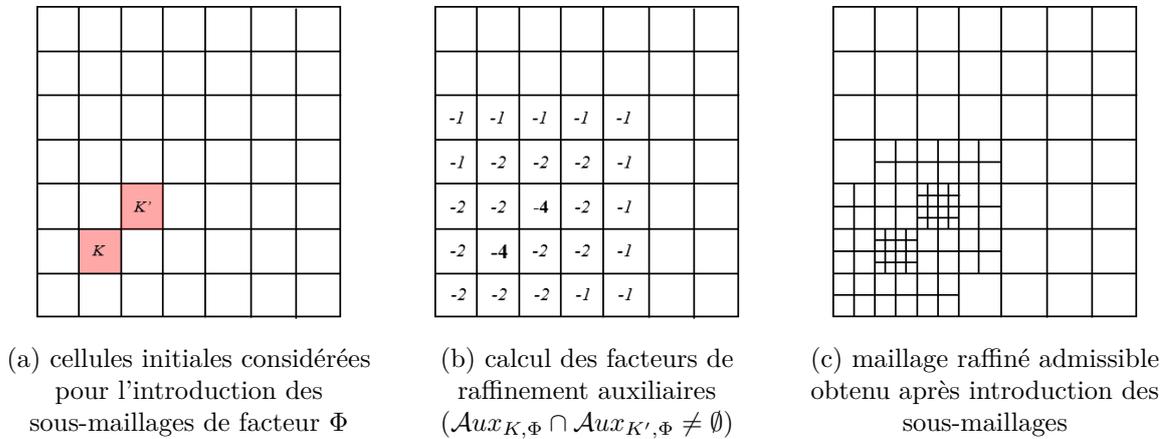


FIGURE 4.30 – Exemple 2D de l'introduction de sous-maillages d'intersection non-vide de facteur $\Phi = (4, 4)$ conduisant à un maillage raffiné admissible.

Algorithme 6 : Calcul des facteurs de raffinement auxiliaires dans le cas de l'introduction de plusieurs sous-maillages du même type.

Entrées : \mathcal{T}_h^{ini} , le maillage initial,
 $\{K_i\}_{i=1}^N$ les cellules initiales à raffiner,
 $\Phi = (\phi, \phi, \phi)$ avec $\phi = 2^{N_\phi}$ et $N_\phi \in \mathbb{N}^*$, le facteur de raffinement considéré,
Sorties : $\Phi(K')$, $\forall K' \in \mathcal{Aux}_{K_i, \Phi}$, $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, les facteurs de raffinement auxiliaires,

1. Attribution du facteur de raffinement des cellules initiales :

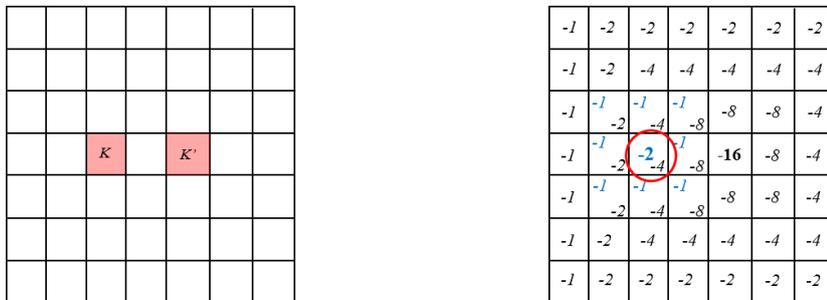
$\phi(\cdot) = 0$
 $\Phi(\cdot) = (0, 0, 0)$

pour $i = 1$ **à** N **faire**
 $\phi(K_i) = 2^{N_\phi}$
 $\Phi(K_i) = (\phi(K_i), \phi(K_i), \phi(K_i))$
fin

2. Calcul des facteurs de raffinement auxiliaires :

pour $q_x \in I_{K, \phi}^x$ **faire**
 pour $q_y \in I_{K, \phi}^y$ **faire**
 pour $q_z \in I_{K, \phi}^z$ **faire**
 si $(q_x, q_y, q_z) \neq (0, 0, 0)$ **alors**
 $K' \leftarrow \mathcal{S}^{-1}(i_K + q_x \phi, j_K + q_y \phi, k_K + q_z \phi)$
 si $2^{N_\phi - \max\{|q_x|, |q_y|, |q_z|\}} > \phi(K')$ **alors**
 $\phi(K') = 2^{N_\phi - \max\{|q_x|, |q_y|, |q_z|\}}$
 $\Phi(K') = (\phi(K'), \phi(K'), \phi(K'))$
 fin
 fin
 fin
 fin
fin

Enfin, la situation la plus délicate à traiter concerne l'introduction de plusieurs sous-maillages de facteurs de raffinements différents. Si les domaines auxiliaires sont deux à deux disjoints, le cas ne présente aucune difficulté et peut se traiter comme précédemment. Cependant, dans le cas contraire, des incompatibilités entre les domaines auxiliaires des différents sous-maillages peuvent apparaître et conduire à des configurations raffinées non structurellement admissibles, comme le montre la figure 4.31.



(a) cellules initiales des sous-maillages
 $\mathcal{R}_{K, \Phi}$ et $\mathcal{R}_{K', \Phi'}$

(c) superposition des domaines auxiliaires
et mise en évidence d'une incompatibilité

FIGURE 4.31 – Exemple 2D d'une impossibilité d'introduire deux sous-maillages de facteurs différents et d'intersection non-vidé.

Afin de résoudre une telle situation d'incompatibilité, une solution est de privilégier systématiquement le raffinement de plus haut facteur, quitte à sous-mailler certaines zones du maillage plus finement que ce qui était prescrit initialement. Pour ce faire, l'algorithme 6 s'applique alors de nouveau.

Remarque 4.36 *Soulignons que la méthode de raffinement proposée se généralise naturellement à tout facteur de raffinement élémentaire supérieur à 2. Elle ne s'oppose donc pas à la première solution envisagée, qui consistait à générer un grand nombre de raccords condensés de raffinement, mais vient plutôt en complément de celle-ci.*

4.3.4 Impact sur l'algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement

L'algorithme de post-maillage global doit assurer les fonctions de h -raffinement et de h -déaffinement/ p -enrichissement. Il est donc essentiel de s'assurer que ces deux procédures sont compatibles, c'est-à-dire qu'elles peuvent s'effectuer indépendamment l'une de l'autre.

Nous avons vu que l'introduction d'un sous-maillage impliquait la création d'un domaine de raffinement auxiliaire, sans quoi l'admissibilité de la configuration résultante n'est plus garantie. Il faut donc que les cellules initiales qui composent ce domaine auxiliaire soient mobilisables lors de ce processus, et donc qu'elles n'aient pas été préalablement agrégées dans un élément d'ordre élevé $Q^2(3h)$ ou $Q^4(9h)$. La procédure de raffinement doit ainsi nécessairement être antérieure à celle de déaffinement.

Formellement, si $\{(K_i, \Phi_i)\}_{i=1}^N$ est l'ensemble des sous-maillages à introduire dans la configuration initiale \mathcal{T}_h^{ini} , cela revient à exécuter l'algorithme de h -raffinement, puis celui de h -déaffinement/ p -enrichissement sur la donnée d'entrée :

$$\mathcal{T}_h^{ini} \setminus \bigcup_{i=1}^N \mathcal{Aux}_{K_i, \Phi_i}. \tag{4.51}$$

D'un point de vue pratique, cela peut être réalisé facilement en rajoutant le test " $\phi(K_{vois}) = 0$ " dans les conditions de la boucle "while" de l'algorithme 2 (étape 1) chargé du calcul des facteurs d'agglomération maximaux. Ce test consiste à détecter la présence d'une zone de sous-maillage afin de limiter l'incrémentatation des facteurs d'agglomération dans chaque direction.

On illustre alors, sur la figure 4.32, le fonctionnement de l'algorithme de post-maillage global.

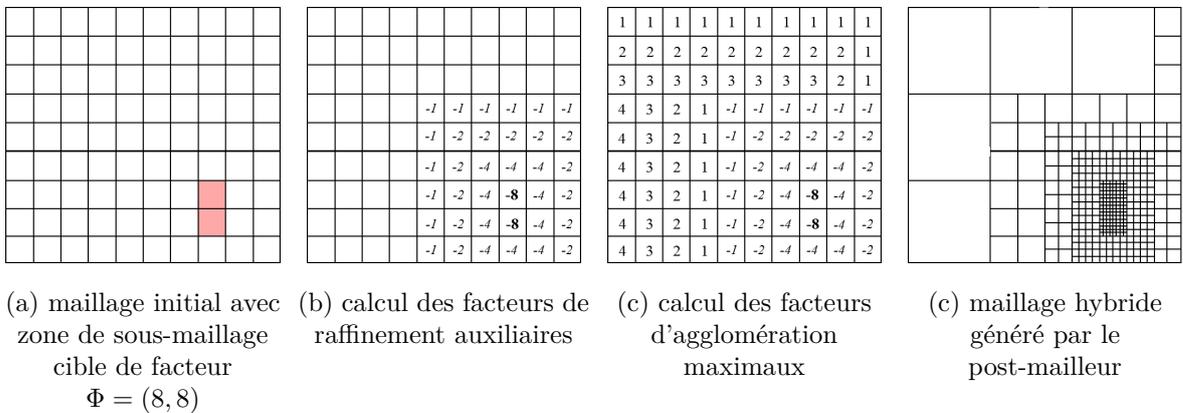


FIGURE 4.32 – Exemple 2D d'une utilisation complète du post-maillageur, avec h -raffinement et h -déaffinement/ p -enrichissement.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un algorithme de post-maillage dédié au schéma GDDT conçu précédemment et adapté au panel discret des configurations condensées disponibles. Cet algorithme utilise une grille cartésienne de type DFDT comme donnée d'entrée et s'organise en deux procédures principales : une procédure de h -raffinement semi-automatisée, nécessitant l'intervention initiale de l'utilisateur pour caractériser les zones de sous-maillage à introduire, suivi d'une procédure de h -déraffinement/ p -enrichissement, totalement automatisée et donc transparente pour l'utilisateur. Ces deux procédures répondent à des objectifs différents. La partie h -raffinement vise à retrouver la description des éléments de petites dimensions non représentés dans le maillage initial (fils, fentes, etc.), dans le but de réduire les erreurs de modélisation des cas-tests ainsi que le risque d'artéfacts numériques liés à certains modèles sous-cellulaires. La partie h -déraffinement/ p -enrichissement vise quant à elle à construire un maillage hp assurant des performances numériques avantageuses au niveau du solveur GDDT condensé et garantissant *a priori* la même précision que la configuration initiale. Le post-maillage résultant forme ainsi une étape à part entière dans le processus global de simulation numérique, conduisant à une nouvelle chaîne de calcul GDDT.

L'idée de départ pour l'algorithme de h -déraffinement/ p -enrichissement était de créer un processus d'agglomération de cellules initiales, où, de manière équivalente, d'introduction d'agrégats dans le maillage initial, orienté par une estimation *a priori* de la qualité et des coûts de calcul de résolution. Évidemment, pour éviter les contre-performances vues dans les chapitres précédents, nous avons restreint notre étude aux maillages hp dits admissibles, contenant uniquement des raccords non-conformes condensés ($Q^1(h)/Q^2(3h)$ et $Q^2(3h)/Q^4(9h)$). Nous avons donc tout d'abord traduit ce processus d'agglomération sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte : *trouver un maillage hp admissible satisfaisant la qualité initiale et minimisant les coûts de calcul de résolution*. Cependant, devant la difficulté de concevoir des estimateurs *a priori* de la qualité et des temps d'exécution qui soient précis et rapides à évaluer, nous avons cherché à simplifier ce problème. Pour ce faire, sur la base d'expériences numériques diverses, nous avons adopté les heuristiques suivantes : 1) l'introduction d'un agrégat $Q^2(3h)$ ou $Q^4(9h)$ dans le maillage initial ne détériore pas la précision de référence ; 2) le nombre de degrés de liberté d'un maillage hp admissible est le facteur principal impactant les temps de calcul du schéma condensé (en particulier, plus le nombre de degrés de liberté est faible, plus les temps de calcul sont faibles) ; 3) si deux maillages hp ont le même nombre de degrés de liberté, le temps de calcul le plus faible sera obtenu sur celui qui présente le plus grand nombre de surfaces d'échange hp conformes.

Toutefois, si l'évaluation du nombre de degrés de liberté et de surfaces d'échange conformes d'un maillage hp donné est facile et peu coûteux, générer des maillages hp admissibles est en revanche beaucoup plus compliqué, et, *a fortiori*, les générer tous pour choisir le meilleur est inenvisageable, ne serait-ce que du point de vue des performances. Alors, en adoptant une heuristique de déraffinement par agglomérations hiérarchiques (les éléments $Q^1(h)$ sont d'abord agrégés en éléments $Q^2(3h)$, eux-même agrégés par la suite en éléments $Q^4(9h)$), couplée avec une approche du type "diviser pour régner", nous avons développé un algorithme s'inspirant des méthodes de recherche locale et permettant de générer, si ce n'est le meilleur, du moins un maillage hp présentant des coûts de calcul fortement réduits par rapport au maillage de départ.

Cet algorithme repose, d'une part, sur le calcul du potentiel de déraffinement de chaque cellule initiale, déterminé à partir des contraintes géométriques du domaine de calcul, et, d'autre part, sur le partitionnement du maillage initial en domaines d'agglomérabilité. Sur chaque domaine d'agglomérabilité, on détermine alors le meilleur (pour les critères considérés) maillage hp aggloméré $Q^1(h)/Q^2(3h)$ puis $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$, grâce à un parcours efficace de l'arbre de recherche local. Notons que la méthodologie employée se généralise aisément à tout autre agrégat, pourvu que la hiérarchie entre les éléments soit respectée (par exemple : $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)/Q^6(18h)$).

Concernant la conception d'une méthode de h -raffinement, la principale difficulté réside dans l'admissibilité des maillages produits, car seuls des raccords hp non-conformes du type $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$ sont disponibles, alors que l'utilisateur peut potentiellement requérir un facteur de raffinement supérieur à 2. Nous avons donc développé une approche de raffinement récursive, permettant d'atteindre toute échelle

de sous-maillage correspondant à une puissance de 2 et garantissant l'admissibilité des configurations produites. Pour ce faire, des couches de raffinement auxiliaires sont introduites dans le voisinage du sous-maillage cible. Ces couches sont associées à des facteurs de raffinement évoluant progressivement (par puissances de 2 successives), afin d'assurer une transition admissible entre l'échelle du maillage initial et l'échelle du sous-maillage cible.

Bien qu'elle permette *a priori* de satisfaire l'objectif fixé, l'approche développée présente néanmoins plusieurs limitations. Tout d'abord, on voit qu'il est impossible d'atteindre exactement toute échelle de sous-maillage. Cela pourra donc conduire à des approximations dans la description géométrique des singularités. Une deuxième limitation est liée à la gestion de plusieurs sous-maillages dont les domaines de raffinement auxiliaires sont incompatibles. Nous avons alors vu que pour assurer l'admissibilité du maillage dans de telles situations, il était nécessaire de sous-mailler localement à une échelle plus fine que celle prescrite par l'utilisateur, ce qui pénalise inévitablement les performances numériques de la résolution. De même, la stratégie des raffinements auxiliaires utilisée tend à augmenter artificiellement le nombre de cellules du maillage et donc à alourdir la charge mémoire requise par le solveur. Plus loin, même si la méthode proposée ne conduit pas à une chute majeure d'ergonomie, l'automatisation de la méthode proposée demanderait à être davantage développée afin de s'affranchir au maximum de l'intervention de l'utilisateur, pouvant devenir particulièrement fastidieuse dans le cas de géométries multi-échelles complexes.

La poursuite de notre étude consisterait donc tout d'abord à construire un plus grand nombre de raccords condensés de raffinement, pour réduire autant que possible l'étendue des domaines de raffinement auxiliaires. Il serait également avantageux d'extraire de la mise en données du maillage initial la paramétrisation des modèles sous-cellulaires et la convertir en données d'entrée adéquates pour l'algorithme de h -raffinement, afin de pouvoir réutiliser directement un maillage DFDT sans intervention nécessaire de la part de l'utilisateur. Une réflexion préalable sur la méthodologie de raffinement la plus pertinente à adopter dans ce cadre serait néanmoins à mener.

Soulignons enfin que nous avons seulement présenté dans ce chapitre la conception de l'algorithme de post-maillage, mais nous n'en avons pas proposé une mise en œuvre complète (hormis une validation sommaire de l'algorithme de h -déraffinement/ p -enrichissement sur des configurations élémentaires). Plusieurs points restent ainsi à étudier afin d'assurer la viabilité du post-maillage, telles que les performances intrinsèques des algorithmes développés et la validité de l'hypothèse de travail selon laquelle l'introduction d'un agrégat $Q^2(3h)$ ou $Q^4(9h)$ dans le maillage initial ne détériore pas la précision de simulation. Ces problématiques vont être abordées dans le chapitre suivant, où nous proposons une mise en œuvre de la chaîne de calcul globale, sur des cas-tests se rapprochant du contexte applicatif réel.

Chapitre 5

Utilisation de la chaîne de calcul GDDT développée sur des cas-tests d'intérêt industriel

Sommaire

5.1	Présentation des cas-tests	210
5.1.1	Cas-test n° 1 : structure d'avion	210
5.1.2	Cas-test n° 2 : modèle simplifié de missile (GENEC)	211
5.1.3	Cas-test n° 3 : fente mince sur boîtier	212
5.2	Analyse des résultats de post-maillage	213
5.2.1	Cas-test n° 1	214
5.2.2	Cas-test n° 2	217
5.2.3	Cas-test n° 3	218
5.3	Étude des résultats de simulation	221
5.3.1	Cas-test n° 1	221
5.3.2	Cas-test n° 2	226
5.3.3	Cas-test n° 3	229
5.4	Conclusion	232

Ce chapitre est consacré à la présentation de résultats numériques obtenus avec la chaîne de calcul GDDT développée précédemment. Rappelons que celle-ci comporte deux éléments principaux, illustrés sur la figure 5.1 : le post-maillage, chargé de générer des maillages hp adaptés à l'approximation GD considérée ; et le solveur, basé sur le schéma GDDT condensé.

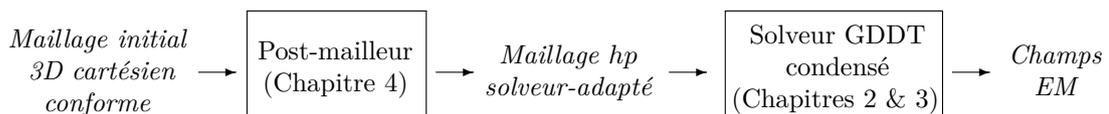


FIGURE 5.1 – Description de la chaîne de calcul mise en place dans les chapitres précédents.

L'objectif principal est d'évaluer l'apport, en termes de coûts de calcul, de précision, et d'ergonomie, de cette chaîne de calcul sur des problèmes se rapprochant des applications industrielles visées. Plus généralement, il s'agit de valider, sur des exemples numériques plus complexes que ceux considérés jusqu'ici, les différents choix effectués au cours des chapitres précédents et qui ont orienté nos développements. Notamment, la pertinence des cellules agglomérées en éléments $Q^2(3h)$ et $Q^4(9h)$, la viabilité des raccords condensés construits pour ces éléments, et l'efficacité de l'algorithme de post-maillage proposé.

Pour ce faire, nous allons simuler l'illumination de trois objets diffractants par une onde plane en espace libre : une structure d'avion, un modèle générique de missile, et un boîtier présentant une fente mince.

Dans un premier temps, nous commençons par décrire la géométrie, la spécificité et les paramètres de simulation de chaque cas-test. Puis, nous présentons les maillages *hp* résultant de l'étape de post-maillage, et étudions les gains en stockage mémoire acquis par rapport aux maillages d'entrée initiaux. Enfin, nous évaluons la précision des solutions numériques obtenues, et comparons les temps d'exécution du solveur afin de conclure sur l'efficacité de la solution globale mise en place dans nos travaux.

5.1 Présentation des cas-tests

Les cas-tests mis en œuvre dans ce chapitre présentent plusieurs simplifications par rapport aux applications réelles. Par exemple, nous allons considérer que les champs électromagnétiques se propagent dans le vide, les géométries seront décrites par des surfaces parfaitement métalliques, et les termes sources seront réguliers. Ils restent néanmoins intéressants d'un point de vue industriel car comme nous allons le voir, ils mettent en avant plusieurs difficultés pouvant se présenter en pratique : simulation en domaine non-borné, charge mémoire importante, structures géométriques imbriquées, et présence d'une fente mince.

Dans ce qui suit, nous considérons des agressions par une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω et polarisée linéairement, s'écrivant de la manière suivante :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t) = \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x}\right) \mathbf{u}_i \quad ; \quad \mathbf{H}_i(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{n}_i \wedge \mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t), \quad (5.1)$$

où \mathbf{n}_i désigne le sens de propagation et \mathbf{u}_i la direction de polarisation du champ incident. L'onde plane sera injectée dans le domaine de calcul via une surface de Huygens (voir Annexe D). Pour nous rapprocher du contexte applicatif réel, nous supposons par ailleurs que le champ incident est nul dans la zone de champ total à l'instant initial.

Remarque 5.1 *Comme le champ électromagnétique est nul dans le volume de calcul à l'instant initial, tant que l'onde plane n'a pas traversé toute la zone de champ total, le signal injecté correspond à un cosinus tronqué. Durant cette phase transitoire, le champ incident n'est donc pas purement monochromatique.*

5.1.1 Cas-test n° 1 : structure d'avion

Dans ce cas-test, nous considérons l'illumination d'une structure métallique d'avion, représentée sur les figures 5.2 et 5.3. Les paramètres généraux de simulation sont les suivants :

- dimensions du domaine de calcul : $15,5\text{m} \times 13,4\text{m} \times 6,91\text{m}$ ($[-1,10;13,95] \times [-6,70;6,70] \times [-2,69;4,22]$),
- caractéristiques de l'onde plane : fréquence $f = 150\text{MHz}$, longueur d'onde $\lambda = 2\text{m}$, sens de propagation $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_x$, direction de polarisation $\mathbf{u}_i = (\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)/\sqrt{2}$, avec $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 ,
- dimensions du maillage initial (entrée du post-maillage) : $162 \times 134 \times 67$ ($\Delta x \simeq \Delta y \simeq \Delta z \simeq \frac{\lambda}{20}$),
- temps de simulation : $T_f = 30\text{ns}$,
- résolution en champ total.

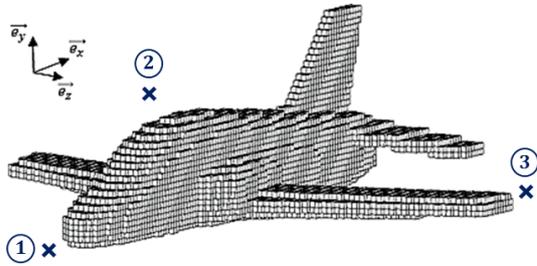


FIGURE 5.2 – Géométrie de la structure d'avion utilisée dans le cas-test n° 1, et position qualitative des points d'observation de la solution numérique.

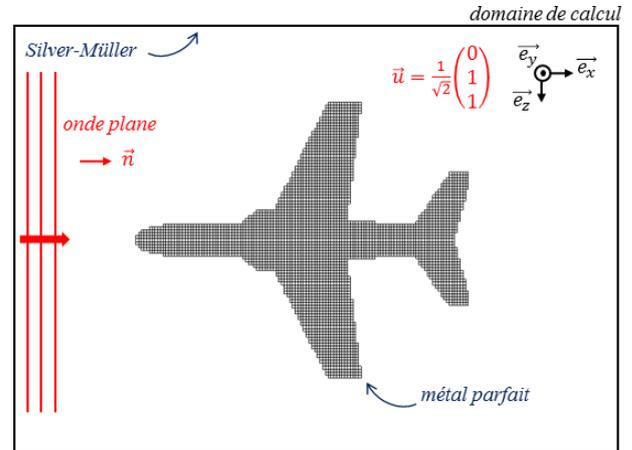


FIGURE 5.3 – Configuration du domaine de calcul pour le cas-test n° 1.

La géométrie étant entièrement décrite par le maillage initial, aucune zone de raffinement ne sera introduite dans le processus de post-maillage. De plus, en adoptant une résolution en champ diffracté, nous cherchons à maximiser le volume de calcul libre de toute contrainte géométrique, afin d'introduire le plus d'éléments *hp* déraffinés possible, et d'optimiser les gains en efficacité numérique de la résolution hybride. Ce cas-test est donc *a priori* favorable, en termes de performances numériques, vis-à-vis de la stratégie proposée.

5.1.2 Cas-test n° 2 : modèle simplifié de missile (GENEC)

Ce cas-test est basé sur une structure générique de missile (voir figures 5.4 et 5.5). Il a été proposé par le CEA/Gramat et fait partie des tests de validation du projet GREAT (Galerkin Resolution for Electromagnetic Applications in Time domain), financé par DGA/DS/MRIS dans le cadre d'un projet d'innovation duale RAPID. On peut en retrouver un exemple d'utilisation dans [89][51][11].

Les paramètres de simulation sont les suivants :

- dimensions du domaine de calcul : $0,96 \times 0,5 \times 0,25 \text{m}$ ($[0;0,96] \times [0;0,5] \times [0;0,25]$),
- caractéristiques de l'onde plane : fréquence $f = 750 \text{MHz}$, longueur d'onde $\lambda = 0,4 \text{m}$, sens de propagation $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_z$, direction de polarisation $\mathbf{u}_i = (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$,
- dimensions du maillage initial (entrée du post-maillage) : $160 \times 83 \times 42$ ($\Delta x \simeq \Delta y \simeq \Delta z \simeq \frac{\lambda}{60}$),
- temps de simulation : $T_f = 60 \text{ns}$,
- résolution en champ diffracté.

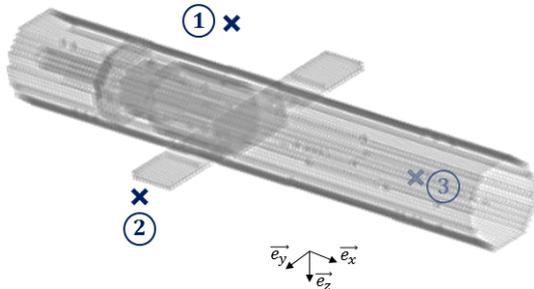


FIGURE 5.4 – Géométrie du GENEC utilisée dans le cas-test n°2, et position qualitative des points d'observation de la solution numérique.

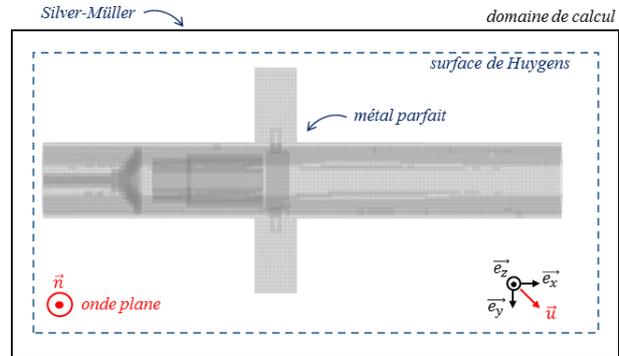


FIGURE 5.5 – Configuration du domaine de calcul pour le cas-test n°2.

Comme précédemment, la géométrie étant entièrement décrite par le maillage initial, aucun raffinement ne sera introduit par le post-maillieur. L'intérêt de ce cas-test par rapport au précédent est qu'il contient plusieurs objets imbriqués les uns dans les autres, ce qui tend à réduire le potentiel d'agrégation à l'intérieur de la structure. De plus, nous optons pour une résolution en champ total. Une surface de Huygens est donc introduite dans le domaine de calcul, créant des contraintes de maillage géométriques et structurelles supplémentaires limitant le processus de déraffinement. En effet, rappelons que le passage des termes sources étant particulièrement critique du point de vue de la précision, nous imposons que la surface de Huygens soit portée par des surfaces d'échange *hp* conformes. Ce cas-test est donc *a priori* défavorable, en termes de performances numériques, vis-à-vis de la stratégie proposée.

5.1.3 Cas-test n°3 : fente mince sur boîtier

Dans cet exemple, on considère un boîtier cubique présentant une ouverture mince (d'épaisseur nulle) sur l'une de ses faces, comme illustré sur les figures 5.6 et 5.7. L'idée est de pouvoir situer la méthode développée par rapport à une problématique industrielle suscitant de nombreux travaux de recherche, à savoir la gestion des singularités géométriques (fentes, fils, matériaux minces, etc.). Nous nous intéresserons en particulier à la comparaison des résultats avec le schéma DFDT de Yee, utilisant un modèle sous-cellulaire de fente mince.

Pour cela, nous allons considérer deux maillages initiaux. Le premier, dit de référence, assure le maillage exact de la géométrie. Le second, appelé maillage Différence Finies, correspond à celui qui serait utilisé en pratique pour réaliser la simulation avec le schéma de Yee et dans lequel la fente serait prise en compte par un sous-modèle.

Les paramètres du cas-tests sont les suivants :

- dimensions du domaine de calcul : $11\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm}$ ($[0;0,11] \times [0;0,11] \times [0;0,11]$),
- dimensions du boîtier : $5\text{cm} \times 5\text{cm} \times 5\text{cm}$,
- dimensions de la fente mince : longueur 4cm, ouverture 1mm,
- caractéristiques de l'onde plane : fréquence $f = 1,5\text{GHz}$, longueur d'onde $\lambda = 0,2\text{m}$ (l'ouverture est donc en $\frac{\lambda}{200}$), sens de propagation $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_z$, direction de polarisation $\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_y$,
- dimensions du maillage de référence (fente maillée) : $110 \times 110 \times 110$ ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\lambda}{200}$),
- dimensions du maillage Différences Finies (entrée du post-maillieur, fente non maillée) : $22 \times 22 \times 22$ ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\lambda}{40}$),
- temps de simulation : $T_f = 10\text{ns}$,
- résolution en champ total.

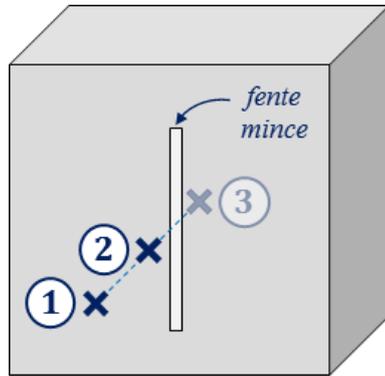


FIGURE 5.6 – Géométrie du boîtier avec ouverture utilisée dans le cas-test n° 3, et position qualitative des points d'observation de la solution numérique.

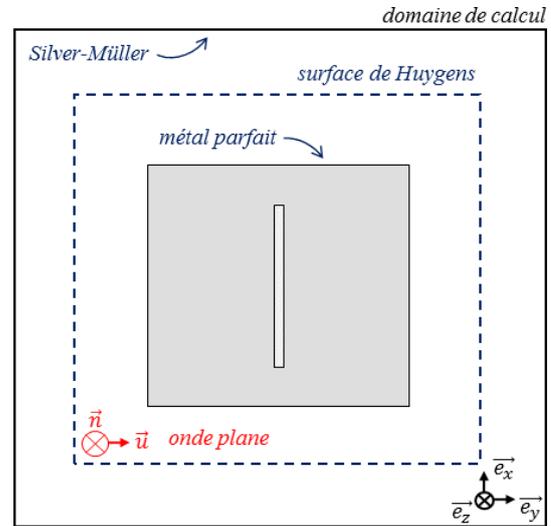


FIGURE 5.7 – Configuration du domaine de calcul pour le cas-test n° 3.

Afin de nous placer dans les conditions d'utilisation réelles de la chaîne de calcul, le post-maillieur prendra en entrée le maillage qui serait utilisé en pratique pour la résolution DFDT qui, ici, ne représente pas l'ouverture. Des raffinements locaux vont donc être introduits pour retrouver le maillage de la fente. Le cas-test étant exigü et le maillage DF étant relativement lâche, on peut d'ores et déjà anticiper qu'un faible nombre de cellules vont pouvoir être agrégées. L'objectif visé à travers ce cas-test est donc moins d'obtenir un gain important sur les coûts de calcul que d'étudier la capacité de l'algorithme de post-maillage à traiter la présence d'une ouverture, et d'estimer la différence de précision lorsque la singularité est portée par le maillage ou prise en compte via un modèle sous cellulaire.

5.2 Analyse des résultats de post-maillage

Dans cette section, nous nous intéressons aux maillages hp générés par le post-maillieur, pour les trois cas-tests présentés plus haut. Les principaux objectifs sont de valider le fonctionnement de l'algorithme de post-maillage proposé sur des configurations complexes, d'analyser la répartition des agrégats afin d'identifier d'éventuelles améliorations à y apporter, et d'établir les gains en stockage mémoire obtenus par rapport aux maillages initiaux.

Dans son fonctionnement le plus général illustré sur la figure 5.8, l'outil de post-maillage développé prend en entrée un maillage initial cartésien conforme de type Différences Finies, génère un maillage hp adapté au schéma GDDT condensé, et comporte 5 étapes réalisées séquentiellement, modulables selon les spécifications de l'utilisateur :

1. lecture des données d'entrée (maillage DFDT de finesse h),
2. lorsque l'utilisateur spécifie un h raffinement, l'algorithme de sous-maillage local est exécuté,
3. l'algorithme h -déaffinement/ p -enrichissement automatique est exécuté. À ce niveau, deux modes de fonctionnement sont possibles : un mode restreint où seule la phase d'agglomération $3h$ est exécutée, et un mode complet où l'on procède aux agglomérations $3h$ puis $9h$,
4. les espaces d'approximation locaux sont attribués à chaque cellule en utilisant la fonction d'adaptation hp définie dans le chapitre précédent ($Q^1(h/2)$, $Q^1(h)$, $Q^2(3h)$ ou $Q^4(9h)$),
5. la connectivité du maillage hp résultant est générée, puis celui-ci est communiquée au solveur. Ce faisant, l'idée est d'optimiser l'efficacité numérique de la résolution, et d'éviter de générer de nouveau les données d'entrée lorsque certains paramètres de simulation n'impactant pas directement le maillage sont modifiés (temps de simulation, fréquence de l'agression, etc.).

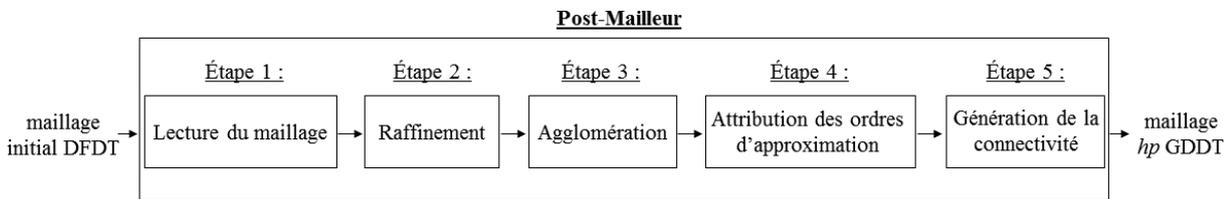
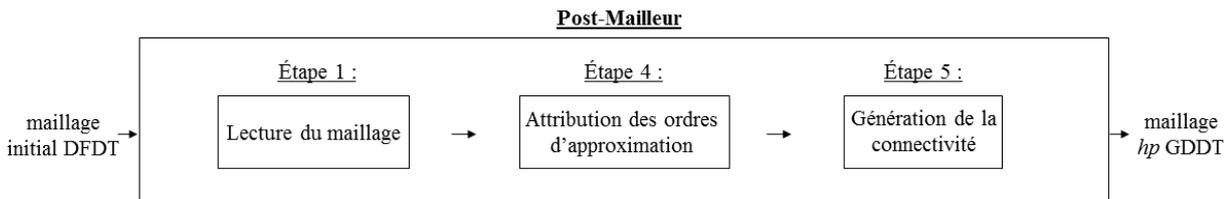


FIGURE 5.8 – Fonctionnement général de l'algorithme de post-maillage.

Soulignons que la génération du maillage hp initial $Q^1(h)$ (sur lequel la solution de référence sera calculée) nécessite l'exécution des étapes 1, 4 et 5, conduisant ainsi à un temps d'exécution non nul du post-mailleur (voir figure 5.9).

FIGURE 5.9 – Fonctionnement du post-mailleur pour la génération du maillage initial $Q^1(h)$.

Afin d'évaluer l'apport de chacune des phases de déaffinement dans l'efficacité numérique de la résolution, nous étudierons dans un premier temps le maillage hp obtenu à l'issue de l'introduction des éléments $Q^2(3h)$ (maillage hp $Q^1(h)/Q^2(3h)$), et, dans un second temps, le maillage hp obtenu après l'introduction des éléments $Q^4(9h)$ (maillage hp $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$).

5.2.1 Cas-test n° 1

Les résultats de post-maillage pour le premier cas-test sont présentés sur la figure 5.10 et le tableau 5.1, où l'on relève, pour chaque configuration, le nombre d'éléments $Q^1(h)$, $Q^2(3h)$ et $Q^4(9h)$ (respectivement $N_{Q^1(h)}$, $N_{Q^2(3h)}$, et $N_{Q^4(9h)}$), le nombre total d'éléments (N_{total}), le nombre de degrés de liberté (N_{ddl}), le gain en degrés de liberté (N_{ddl}^{ini}/N_{ddl}) et en temps d'exécution du post-maillage (t-CPUⁱⁿⁱ post-maillage/t-CPU post-maillage) par rapport au maillage initial.

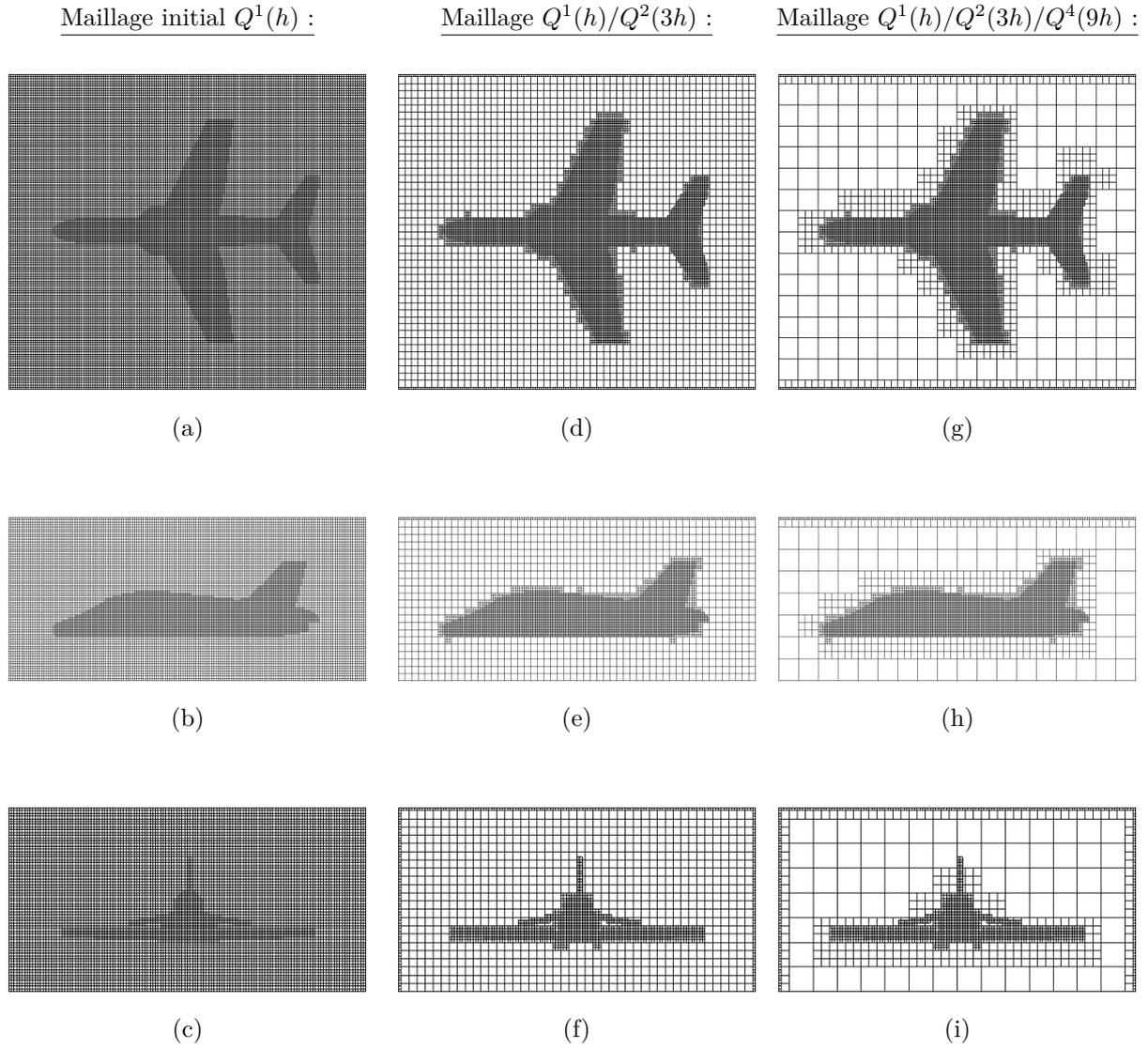


FIGURE 5.10 – Coupes du maillage initial (a,b,c) et des configurations hp obtenues avec l’algorithme de post-maillage à la suite de l’introduction de l’élément $Q^2(3h)$ (d,e,f), et de l’élément $Q^4(9h)$ (g,h,i), pour le cas-test n° 1.

Maillage hp	$N_{Q^1(h)}$	$N_{Q^2(3h)}$	$N_{Q^4(9h)}$	N_{total}	N_{ddl}	Gain ddl	Gain t-CPU
$Q^1(h)$ (ini)	1 454 436	-	-	1 454 436	69 812 928	1	1
$Q^1(h)/Q^2(3h)$	79 245	50 933	-	130 178	12 054 906	5,8	1,8
$Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$	79 245	9 812	1 523	90 580	6 535 554	11	2,6

TABLE 5.1 – Données caractéristiques du maillage initial $Q^1(h)$ et des configurations hybrides générées par le post-maillage, gain en nombre de degrés de liberté de ces configurations hybrides par rapport au maillage initial (Gain ddl= N_{ddl}^{ini}/N_{ddl}), et gain correspondant en temps d’exécution du post-maillage (Gain t-CPU= $t\text{-CPU}^{ini}/t\text{-CPU}$) pour le cas-test n° 1.

Commençons par quelques remarques sur les configurations hybrides produites par le post-mailleur.

Tout d'abord, leur aspect général rend bien compte du fonctionnement multi-niveaux de l'algorithme de post-maillage : les cellules $3h$ sont introduites au sein des cellules h , et les cellules $9h$ sont introduites au sein des cellules $3h$. La contrainte d'admissibilité structurelle est ainsi bien respectée : par exemple, aucun élément de taille $9h$ n'est en contact avec un élément de taille h .

On constate également que l'objet reste principalement décrit par des mailles initiales, hormis sur quelques portions planes de la géométrie (voir notamment la figure 5.10h). Ceci provient des structures en marches d'escalier résultant de l'approximation des courbures (propres aux maillages cartésiens), qui créent localement de fortes contraintes d'admissibilité géométrique et limitent l'agglomération des cellules. Ces structures se répercutent alors en cascade autour de l'objet lors de l'introduction des éléments $Q^2(3h)$ puis $Q^4(9h)$, comme le montrent bien les figures 5.10d-g. On peut donc en conclure que plus la géométrie du cas-test est droite et alignée sur les axes, plus l'algorithme de post-maillage sera efficace.

Enfin, on observe, sur certains bords du domaine de calcul des configurations hybrides, la présence de couches de cellules non agrégées, comme par exemple en haut et en bas de la figure 5.10g. Ceci résulte visiblement des contraintes de divisibilité existant entre les dimensions du maillage initial et le facteur de déraffinement des agrégats disponibles. À chaque étape, l'algorithme semble ainsi renvoyer la partie non agglomérable du maillage aux extrémités du domaine, afin de maximiser le nombre d'agrégats dans le volume de calcul et de surfaces d'échange hp conformes. Ne considérant que des agglomérations d'un facteur trois, cette hypothèse permet d'une part d'expliquer qu'il n'y a pas plus de deux couches non-agrégées aux extrémités du domaine, et d'autre part que ce phénomène ne se produit pas sur la frontière gauche et droite de la figure 5.10g. En effet, le maillage initial contenant 162 éléments dans la direction x , il est possible d'introduire exactement $162/3 = 54$ éléments $Q^2(3h)$ lors de la première étape, et exactement $54/3 = 18$ éléments $Q^4(3h)$ lors de la seconde, ce qui est conforme aux observations. Ainsi, une amélioration de l'algorithme de post-maillage pourrait être d'intégrer une étape préliminaire chargée d'ajouter (ou de retrancher) des couches de cellules dans le maillage initial, de sorte que le nombre de mailles dans chaque direction soit un multiple de trois.

Remarque 5.2 *On observe sur les maillages hybrides plusieurs volumes a priori agglomérables mais que le post-mailleur n'a pas agrégé. Par exemple, l'ensemble de mailles entouré en rouge sur la figure 5.11 semble présenter tous les critères d'admissibilité pour former un élément $Q^2(3h)$. Il s'agit en réalité d'un artefact de visualisation : ce volume n'est réellement pas agglomérable à cause d'une contrainte structurelle qui n'est pas visible dans ce plan de coupe.*

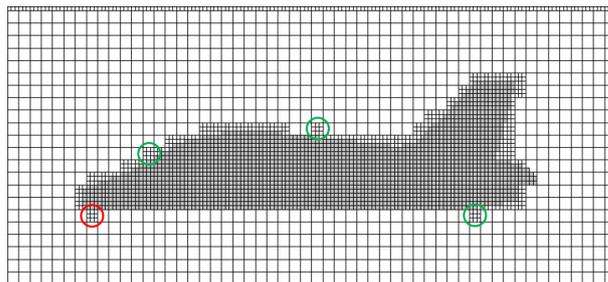


FIGURE 5.11 – Exemples de volumes non-agglomérables (entourés en vert) du fait de contraintes géométriques visibles dans le plan de coupe, et d'un volume *a priori* agglomérable (entouré en rouge), mais qui de fait ne l'est pas à cause de contraintes existantes mais non apparentes dans le plan de coupe.

Intéressons nous alors à la charge mémoire associée aux différents maillages hp de ce cas-test, décrit dans le tableau 5.1.

On constate que le premier maillage hybride $Q^1(h)/Q^2(3h)$ permet déjà une réduction significative du stockage mémoire, avec un nombre de degrés de liberté près de six fois inférieur à celui du maillage initial. Ceci résulte du nombre important de cellules $Q^1(h)$ ayant pu être agrégées en cellules $Q^2(h)$, du fait de l'importante zone de vide, libre de toute contrainte géométrique, entourant l'objet : seul 5,4% des cellules initiales ont été conservées.

L'introduction des éléments $Q^4(9h)$ permet alors une nouvelle réduction du stockage mémoire, toutefois inférieure à la précédente, avec un nombre de degrés de liberté divisé d'un facteur proche de deux par rapport à l'étape $Q^1(h)/Q^2(3h)$. Le maillage hybride final présente ainsi un stockage mémoire onze fois plus faible que le maillage initial. Notons que le nombre d'élément $Q^1(h)$ est inchangé à l'issue de cette étape, du fait des contraintes d'admissibilité structurelle, intégrées dans l'algorithme de post-maillage, n'autorisant l'introduction d'un élément $Q^4(9h)$ qu'au sein d'éléments $Q^2(3h)$.

Ajoutons une dernière remarque sur le temps d'exécution du post-maillage. Il s'agit d'une donnée de premier plan, car la stratégie générale proposée n'a d'intérêt pratique que si la durée de post-maillage est faible devant le temps d'exécution de la chaîne de calcul globale (en particulier devant le temps d'élaboration du maillage initial et le temps de résolution).

Le tableau 5.1 montre que cette durée est plus faible dans le cas des maillages hybrides que dans le cas du maillage initial, ce qui assure la viabilité de l'algorithme de post-maillage. Par ailleurs, le fait que le temps d'exécution soit plus important pour le maillage $Q^1(h)/Q^2(3h)$ peut sembler paradoxal. Cela provient du fait que le post-maillage, après avoir construit la configuration hybride, en génère une connectivité détaillée (donnée d'entrée du solveur). Or, cette étape est d'autant plus coûteuse que le nombre de cellules est grand, d'où une durée de post-maillage plus faible dans le cas $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$, contenant le moins d'éléments.

En conclusion, l'algorithme de post-maillage développé a permis de générer, en un temps d'exécution relativement faible, un maillage hybride adapté au solveur et présentant un coût de stockage environ dix fois inférieur au maillage initial. Cette réduction significative, difficilement quantifiable *a priori*, est cependant à rapprocher du caractère favorable précédemment identifié de ce cas-test.

5.2.2 Cas-test n° 2

On représente, comme précédemment, les résultats de post-maillage sur la figure 5.12 et le tableau 5.2.

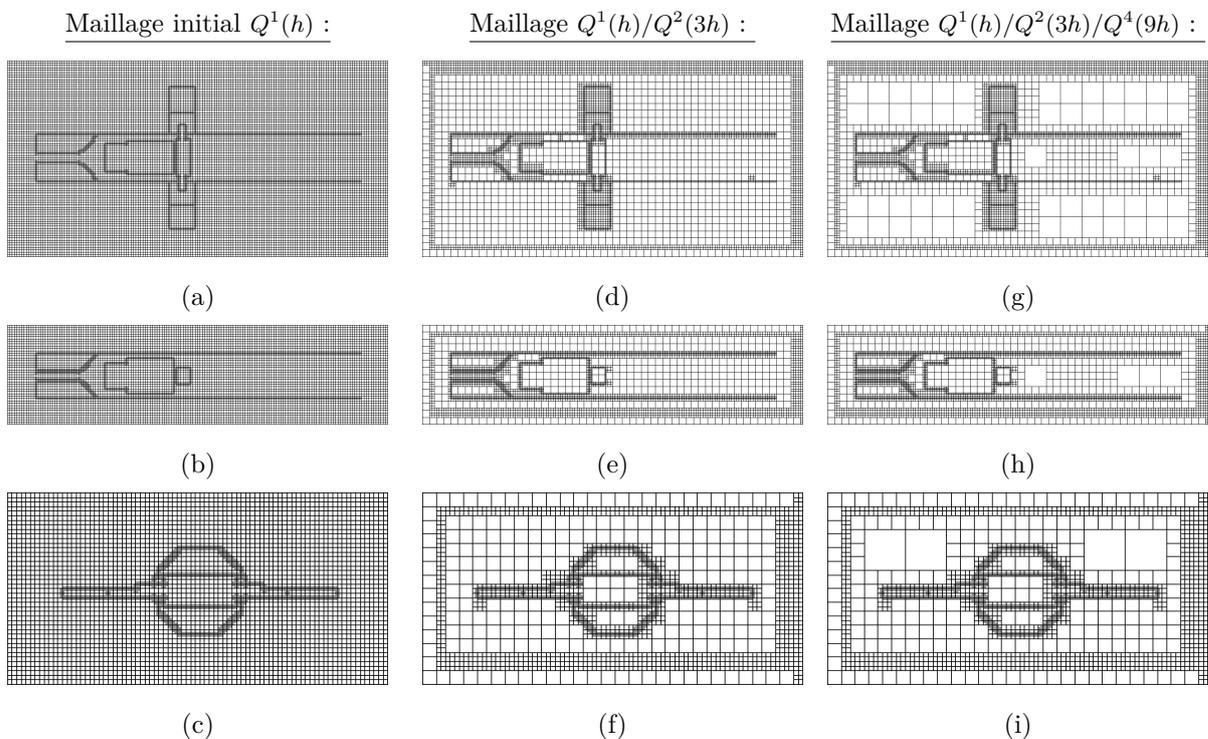


FIGURE 5.12 – Coupes du maillage initial (a,b,c) et des configurations hp obtenues avec l'algorithme de post-maillage à la suite de l'introduction de l'élément $Q^2(3h)$ (d,e,f), et de l'élément $Q^4(9h)$ (g,h,i), pour le cas-test n° 2.

Maillage hp	$N_{Q^1(h)}$	$N_{Q^2(3h)}$	$N_{Q^4(9h)}$	N_{total}	N_{ddl}	Gain ddl	Gain t-CPU
$Q^1(h)$ (ini)	557 760	-	-	557 760	27 914 730	1	1
$Q^1(h)/Q^2(3h)$	171 498	14 306	-	185 804	10 549 476	2,6	1,4
$Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$	171 498	11 066	120	182 684	10 114 596	2,8	1,5

TABLE 5.2 – Données caractéristiques du maillage initial $Q^1(h)$ et des configurations hybrides générées par le post-maillage, gain en nombre de degrés de liberté de ces configurations hybrides par rapport au maillage initial (Gain ddl= N_{ddl}^{ini}/N_{ddl}), et gain correspondant en temps d'exécution du post-maillage (Gain t-CPU=t-CPU ini /t-CPU) pour le cas-test n° 2.

Comme le montre, par exemple, la figure 5.12g, la séparation du maillage initial en domaines d'agglomérabilité indépendants a permis d'assurer un h -déaffinement/ p -enrichissement efficace au sein de chaque structure interne de la géométrie. En revanche, comme nous l'avions anticipé, le passage de la surface de Huygens a restreint le processus d'agglomération. Celle-ci, matérialisée par une enveloppe de mailles initiales résiduelles autour de l'objet, a notamment limité l'introduction des éléments $Q^4(9h)$, comme le montre la figure 5.12i. On voit d'ailleurs, sur cette même figure, que le traitement par l'algorithme de post-maillage du domaine d'agglomérabilité extérieur à la surface de Huygens n'est pas optimal. En effet, on constate que plusieurs éléments $Q^2(3h)$ supplémentaires auraient pu être introduits à la proximité du bord droit du domaine. Ceci suggère donc trois pistes d'amélioration pour l'algorithme de post-maillage. Premièrement, scinder le domaine d'agglomérabilité extérieur à la zone de champ total en plusieurs sous-domaines, suivant le changement de direction de la surface de Huygens définie sur le maillage initial. Une autre piste serait d'étudier la viabilité de l'injection du champ incident via des interfaces non-conformes, afin d'alléger les contraintes géométriques du maillage liées au passage de la surface de Huygens. On pourrait également penser à adapter automatiquement la localisation de la surface de Huygens au cours du processus d'agglomération, afin de la faire porter par des surfaces d'échange hp conformes d'ordre élevé, formées par exemple par l'accolement des éléments $Q^4(9h)$.

En ce qui concerne le stockage mémoire de ces différentes configurations (voir tableau 5.1), on obtient tout de même une réduction non négligeable du nombre de degrés de liberté, celui-ci étant divisé par près de trois sur le maillage hybride final $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$ par rapport au maillage initial. Contrairement au cas-test précédent, l'apport de l'introduction des éléments $Q^4(9h)$ est en revanche négligeable par rapport à celui des éléments $Q^2(3h)$.

Remarquons enfin que, malgré un plus grand nombre de domaines d'agglomérabilité sur ce cas-test que sur le précédent, la durée de post-maillage reste inférieure à celle du maillage initial, ce qui confirme la viabilité de l'algorithme développé.

En conclusion, bien que ce cas-test soit *a priori* défavorable vis-à-vis de l'approche de h -déaffinement/ p -enrichissement développée, la durée de post-maillage et les gains en stockage mémoire restent tout de même intéressants d'un point de vue pratique.

5.2.3 Cas-test n° 3

On représente sur la figure 5.13 les différents maillages du boîtier considérés, et l'on reporte dans le tableau 5.3 leurs principales caractéristiques.

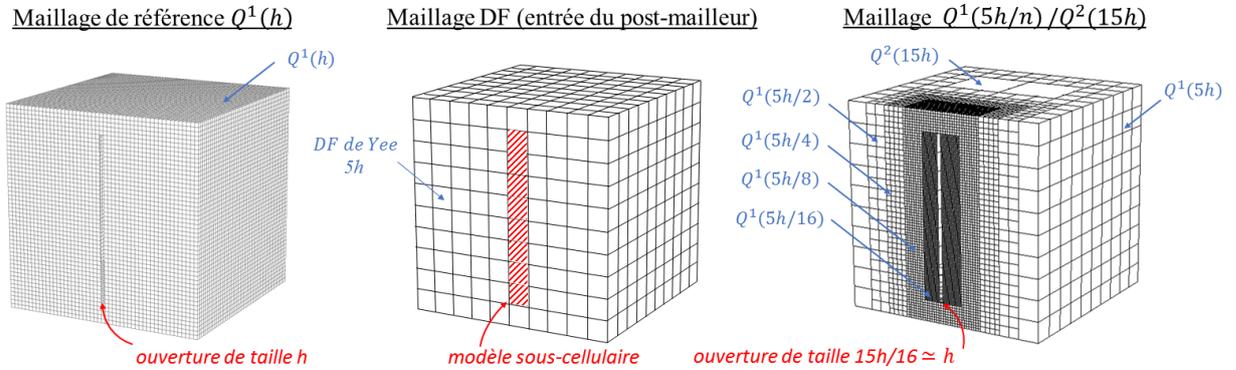


FIGURE 5.13 – Trace du maillage de calcul sur l'objet diffractant du cas-test n° 3, pour la configuration de référence (à gauche), la configuration d'entrée du post-mailleur (au centre), et la configuration générée par l'algorithme de post-maillage (à droite).

Config.	N_{DF}	N_{Q^1}	N_{Q^2}	N_{total}	N_{ddl}	Gain ddl	Gain t-CPU
$Q^1(h)$ (réf.)	-	1 331 000	-	1 331 000	63 888 000	1	1
DF $5h$ (ini)	10 648	-	-	10 648	$\simeq 64\,000$	$\simeq 1\,000$	-
$Q^1(5h/n)/Q^2(15h)$	-	224 413	121	224 534	10 791 426	6	6,1

TABLE 5.3 – Données caractéristiques du maillage initial $Q^1(h)$ et des configurations hybrides générées par le post-mailleur, gain en nombre de degrés de liberté de ces configurations hybrides par rapport au maillage initial ($\text{Gain ddl} = N_{ddl}^{ini} / N_{ddl}$), et gain correspondant en temps d'exécution du post-mailleur ($\text{Gain t-CPU} = \text{t-CPU}^{ref} / \text{t-CPU}$) pour le cas-test n° 3.

Rappelons qu'un des objectifs de ce cas-test est de valider la capacité de l'algorithme de post-maillage à générer des raffinements locaux, dans le but ici de retrouver le maillage de l'ouverture. Pour ce faire, la méthode de gestion des raffinements développée dans le chapitre précédent nécessite que l'utilisateur renseigne les informations suivantes en entrée du post-mailleur : la liste des cellules initiales par lesquelles passe la fente, le taux de raffinement maximal voulu (nécessairement une puissance de deux, ici 16), et le nombre de mailles raffinées à insérer dans l'ouverture (ici 3).

Afin d'atteindre le taux de raffinement objectif tout en respectant les contraintes d'admissibilité structurelle, la figure 5.13 montre que le post-mailleur a introduit trois couches de raffinement successives au sein du maillage initial, après quoi le maillage de la fente est finalement bien retrouvé.

Remarquons cependant que le maillage hybride généré ne représente pas fidèlement la géométrie de la fente : un écart de 6,25% est commis sur la taille de l'ouverture, représentant une éventuelle source d'erreur à considérer pour la comparaison des solutions numériques. Cela provient de la configuration choisie et du fait que l'on soit limité à des raffinements d'un facteur 2 (voir remarque 5.3). On voit donc que pour aller plus loin dans l'amélioration de l'approximation géométrique par raffinement, il est nécessaire de développer davantage de raccords hybrides $Q^1(h)/Q^1(h/n)$.

Remarque 5.3 *On peut en fait prouver qu'il est impossible, en ne considérant que des raffinements par deux, de retrouver la géométrie exacte de la fente dans la configuration considérée. En effet, si tel était le cas, on aurait :*

$$\exists(N, i) \in (\mathbb{N}^*)^2, \frac{\Delta x_{ini}}{2^N} * i = \text{largeur de la fente}, \quad (5.2)$$

avec N le taux de raffinement maximal, $\frac{\Delta x_{ini}}{2^N}$ est la taille des cellules raffinées au niveau de la fente, i le nombre de cellules raffinées dans l'ouverture, et h la taille exacte de l'ouverture. On aurait donc dans notre cas :

$$\exists(N, i) \in (\mathbb{N}^*)^2, \frac{5h}{2^N} * i = h, \quad (5.3)$$

Or, cette identité se ramène à :

$$5i = 2^N, \quad (5.4)$$

ce qui est absurde en utilisant la décomposition en nombres premiers de $5i$.

Intéressons nous finalement au stockage mémoire des différentes configurations. Comme nous l'avions anticipé, seule une faible proportion du maillage initial a pu être agglomérée, si bien qu'aucun agrégat $Q^4(9h)$ n'a pu être introduit. Cependant, le maillage initial étant plus grossier que le maillage de référence, la configuration hybride permet tout de même de diviser par six le nombre de degrés de liberté de ce dernier. Ce gain reste bien sûr dérisoire par rapport à celui de la configuration DF avoisinant le millier, du fait que l'ouverture n'est pas prise en compte par le maillage de calcul. Rappelons simplement qu'ici, l'objectif de nos développements n'est pas de gagner en charge mémoire sur l'approche DF, mais de pallier la contrainte pratique du domaine de validité du modèle sous-cellulaire par le maillage de la singularité.

Sur ce point, une piste d'amélioration serait d'optimiser le processus de raffinement. Par exemple, au lieu d'effectuer un raffinement homogène dans chaque cellule initiale concernée, il serait intéressant de mettre en place un raffinement progressif au sein de chaque cellule. Ce faisant, la zone de transition entre l'échelle de la singularité et l'échelle du maillage initial serait nettement moins étendue, ce qui réduirait le nombre de degrés de liberté total de la configuration.

Du point de vue de la durée de post-maillage, on obtient, comme dans les cas précédents, un temps d'exécution relativement faible. La mise en place de zones de raffinement local n'introduit donc pas de goulot d'étranglement particulier sur les performances du post-maillageur.

En résumé, à partir de quelques données d'entrée supplémentaires spécifiques à l'ouverture, la méthode développée permet bien de retrouver le maillage de la singularité, en introduisant des raffinements successifs d'un facteur 2. Le maillage hybride résultant présente un gain en charge mémoire intéressant en pratique par rapport à une configuration GD conforme maillée la dimension de la fente, mais demeurant négligeable devant le gain de la configuration DF (insistons sur le fait que cette comparaison n'a de sens que si le modèle sous-cellulaire est utilisé dans son domaine de validité). Enfin, la durée de post-maillage reste suffisamment faible pour assurer la viabilité de la solution proposée.

5.3 Étude des résultats de simulation

Cette section présente les solutions numériques obtenues sur les différents cas-tests. Notre premier objectif est d'estimer la qualité de la solution issue du schéma condensé sur maillage hybride. Rappelons que pour être admissible, cette solution hybride doit assurer *a minima* une précision équivalente à celle obtenue sur le maillage de référence pour une résolution GDDT- Q^1 . Ne disposant pas de solution exacte pour les cas-tests considérés, nous allons principalement nous appuyer, pour estimer la qualité des simulations, sur des sorties graphiques globales (cartes de champ 3D) et locales (composantes des champs en des points d'observation). Pour chaque cas-test, nous comparons alors plusieurs solutions numériques :

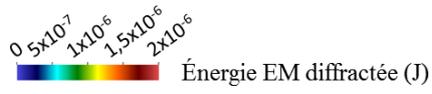
- la solution convergée numériquement, obtenue par une résolution Q^2 sur le maillage de référence (uniquement pour les sorties ponctuelles),
- la solution de référence, donnant la qualité objectif, obtenue par une résolution Q^1 sur le maillage de référence,
- la solution hybride, issue du schéma condensé sur le maillage hybride généré par le post-maillleur.

Comme dans la section précédente, nous allons distinguer la solution Q^1/Q^2 de celle $Q^1/Q^2/Q^4$, afin d'évaluer l'impact du passage à l'ordre Q^4 sur la qualité et les performances. Dans le cas particulier du cas-test n° 3, nous allons également considérer la solution Différences Finies avec le modèle sous-cellulaire d'ouverture, afin d'avoir un point de comparaison avec la solution qui serait utilisée en pratique pour les applications. Le deuxième objectif de cette étude est d'établir les gains en temps de calcul acquis grâce à la résolution hybride condensée par rapport à la résolution de référence. À ce titre, nous utiliserons dans toutes les simulations suivantes le pas de temps maximal assurant la stabilité du schéma, déterminé numériquement.

Remarque 5.4 *Avant d'exposer les résultats obtenus, rappelons que le logiciel utilisé pour à la visualisation 2D et 3D n'est pas adapté pour les solutions hp d'ordre élevé ou présentant des discontinuités. Au vu des observations du chapitre 1, nous nous attendons donc à constater certains artéfacts de visualisation, notamment au niveau des raccords hp hétérogènes du maillage. Par ailleurs, les résultats obtenus étant suffisamment concordants et appuyés par des sorties ponctuelles, nous n'avons pas jugé utile de chercher à améliorer la qualité de la visualisation (en utilisant par exemple l'outil de post-traitement développé dans [75], voir remarque 1.19).*

5.3.1 Cas-test n° 1

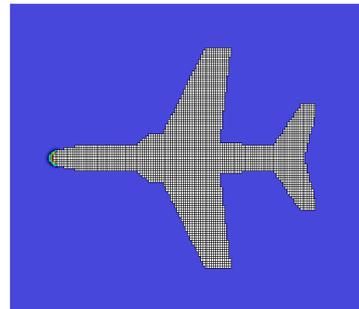
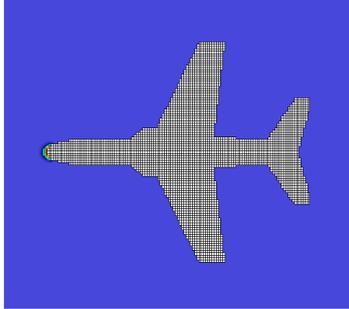
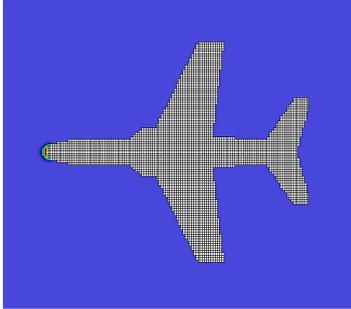
On représente, dans les figures 5.14 et 5.15, l'énergie électromagnétique diffractée autour de la géométrie à plusieurs instants de la simulation, et sur la figure 5.16, l'évolution temporelle de plusieurs composantes du champ diffracté en trois points d'observation, dont la position est illustrée sur la figure 5.2.



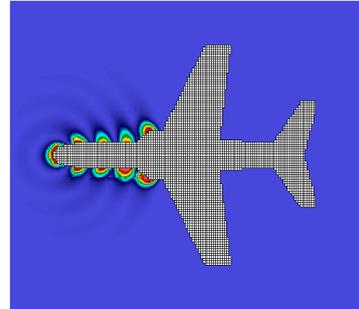
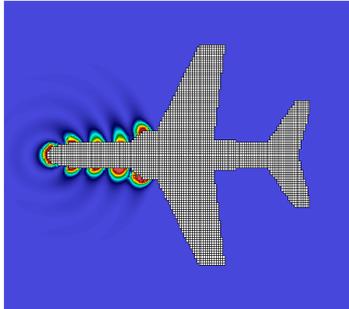
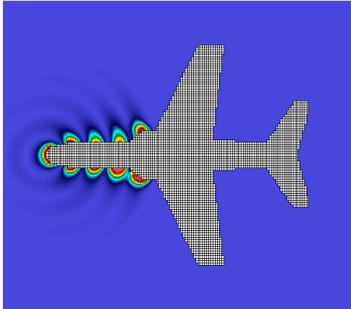
Résolution $Q^1(h)$ (référence) :

Résolution $Q^1(h)/Q^2(3h)$:

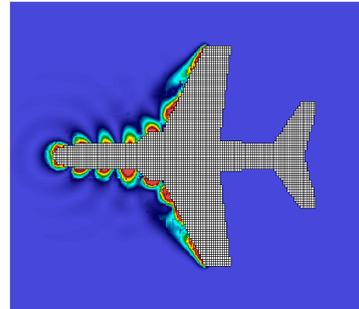
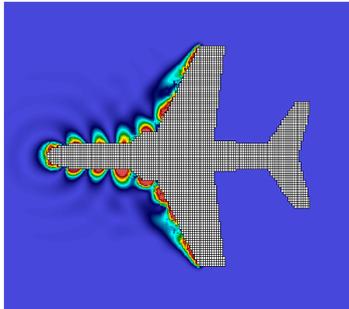
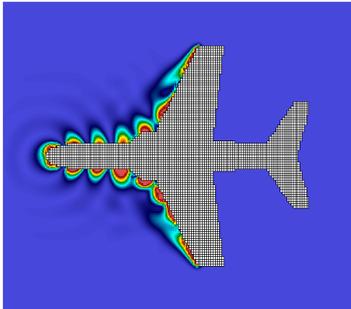
Résolution $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$:



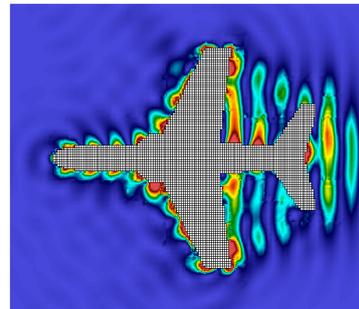
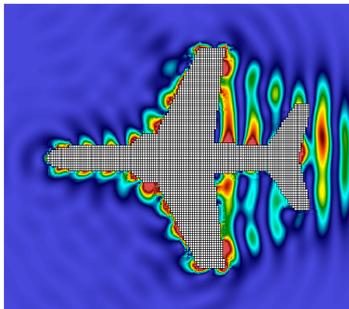
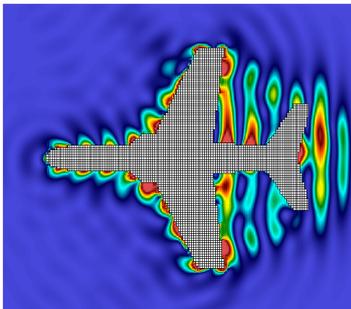
(a) $t = 7,2ns$



(b) $t = 21ns$



(c) $t = 28,6ns$



(d) $t = 50ns$

FIGURE 5.14 – Cartographie de l'énergie électromagnétique (EM) du champ diffracté sur un plan de coupe orthogonal à l'axe de lacet (Oy), à différents temps de simulation, pour la résolution Q^1 de référence (colonne de gauche), hybrides Q^1/Q^2 (colonne centrale) et $Q^1/Q^2/Q^4$ (colonne de droite).

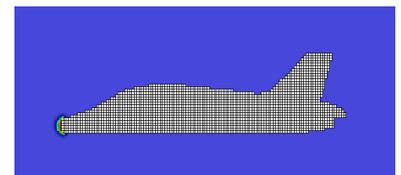
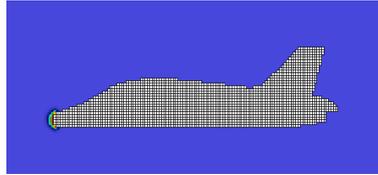
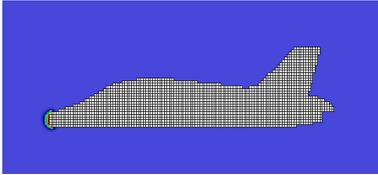
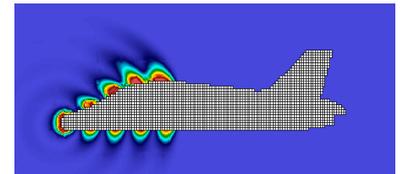
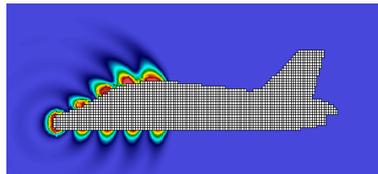
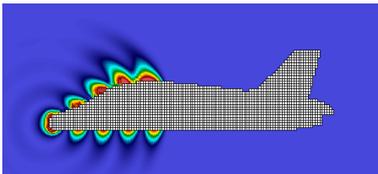
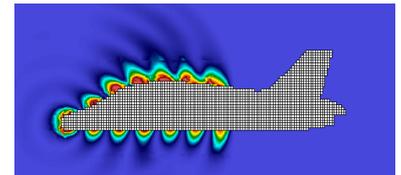
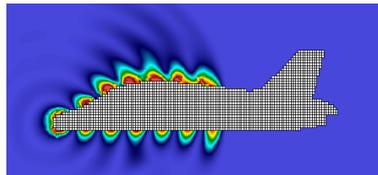
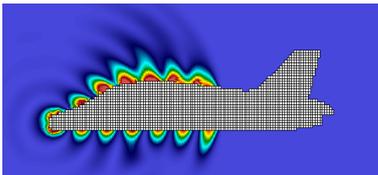
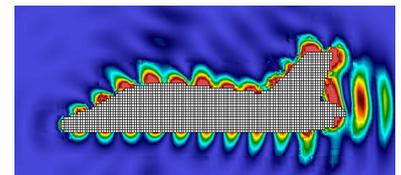
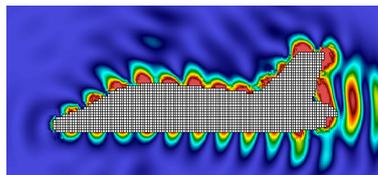
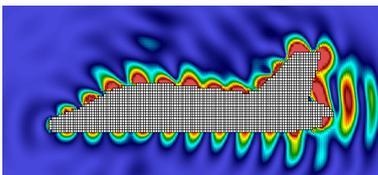
Résolution $Q^1(h)$ (référence) :Résolution $Q^1(h)/Q^2(3h)$:Résolution $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$:(a) $t = 7,2ns$ (b) $t = 21ns$ (c) $t = 28,6ns$ (d) $t = 50ns$

FIGURE 5.15 – Cartographie de l'énergie électromagnétique (EM) du champ diffracté sur un plan de coupe orthogonal à l'axe de tangage (Oz), à différents temps de simulation, pour la résolution Q^1 de référence (colonne de gauche), hybrides condensées Q^1/Q^2 (colonne centrale) et $Q^1/Q^2/Q^4$ (colonne de droite).

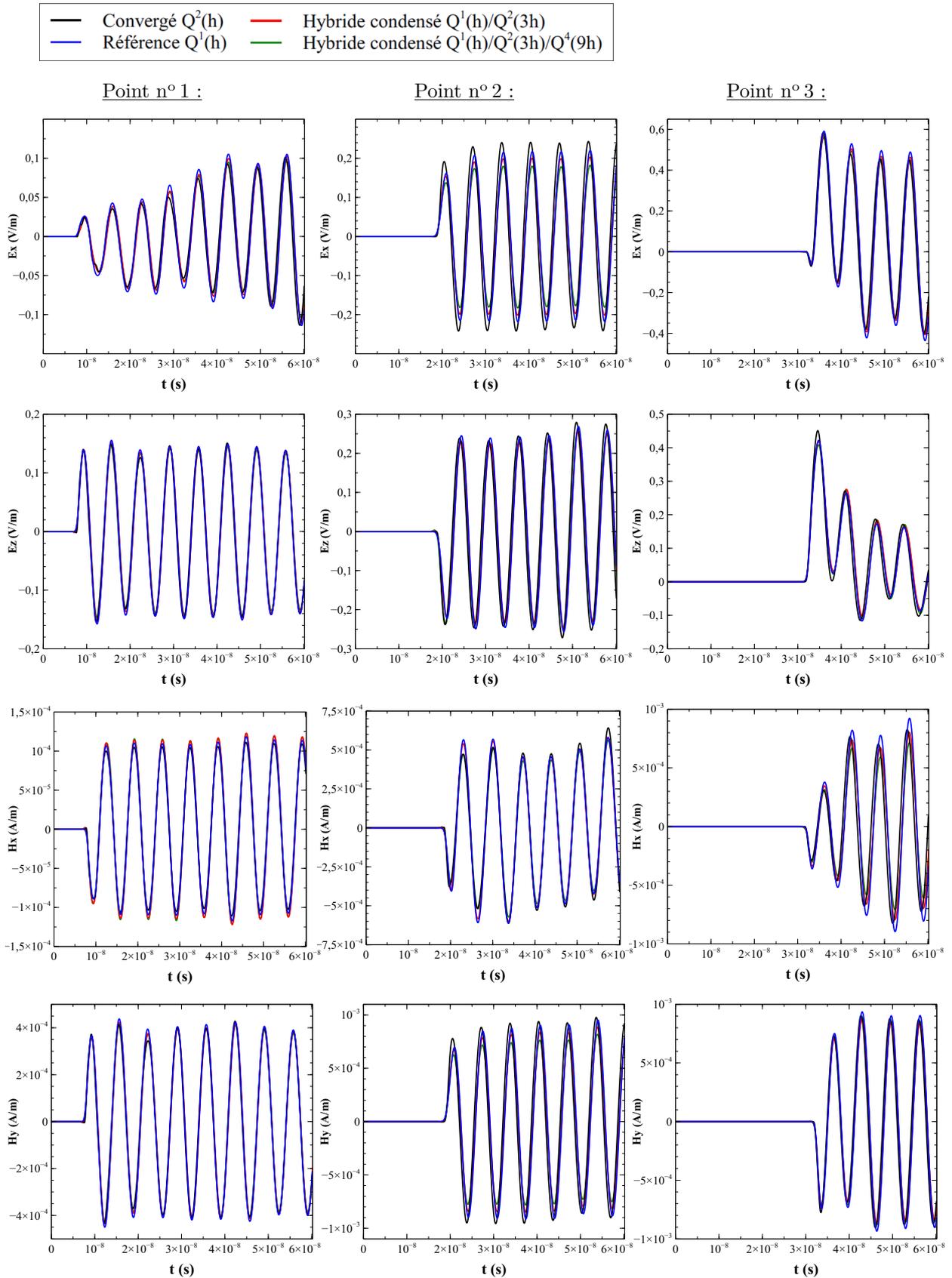


FIGURE 5.16 – Évolution temporelle des composantes E_x , E_z , H_x et H_z du champ électromagnétique diffracté du premier cas-test, aux points d'observation n° 1 (0.15, 0, -0.38), n° 2 (3.92, 0, 2.07), et n° 3 (8.51, -4.47, -0.10), localisés qualitativement sur la figure 5.2.

Concernant la cartographie de l'énergie, commençons par remarquer que nous retrouvons bien plusieurs comportements physiques et numériques attendus : décroissance du champ diffracté à l'infini, rayonnement d'une onde sphérique au niveau du nez de l'avion (diffraction d'une pointe), phénomène d'interférence (voir notamment la figure 5.14d), champ diffracté absorbé à la frontière du domaine de calcul (réflexions numériques négligeables).

Puis, on constate de manière générale une bonne adéquation entre les différentes solutions numériques obtenues. Deux nuances sont cependant à noter. La première concerne la présence d'irrégularités sur les solutions hybrides, donnant par endroit un effet de "pixellisation" aux sorties graphiques. Ce phénomène est particulièrement manifeste pour la solution $Q^1/Q^2/Q^4$ de la figure 5.14d et 5.15d. Or, en comparant la position de ces irrégularités avec la répartition des agrégats dans les configurations hybrides (voir figure 5.10), on constate qu'elles se situent au niveau des interfaces non-conformes. Ce phénomène peut donc être expliqué par l'apparition d'ondes parasites ou d'une modulation d'amplitude résultant de la non-conformité de l'espace d'approximation et de la qualité du raccord condensé (voir paragraphe 3.3.4), et/ou par des artefacts de visualisation (voir remarque 1.19). La deuxième nuance à apporter concerne la dissipation de la solution hybride $Q^1/Q^2/Q^4$. En comparant les contours des crêtes situées en dessous et à l'arrière de l'avion sur la figure 5.15d, on observe des résultats similaires pour la solution de référence et la solution hybride Q^1/Q^2 , mais une amplitude légèrement plus faible pour la solution $Q^1/Q^2/Q^4$. Le champ électromagnétique semble être légèrement dissipé lors du passage de l'interface $Q^2(2h)/Q^4(9h)$, ce qui illustre le fait que le raccord condensé construit est perfectible.

Remarque 5.5 *Le fait de ne pas obtenir des résultats symétriques dans la figure 5.14 n'est pas surprenant, car d'une part la structure de l'avion n'est pas rigoureusement symétrique dans ce plan d'observation, et d'autre part l'onde n'est pas polarisée dans un plan de symétrie de l'objet.*

Intéressons nous à présent aux sorties ponctuelles, qui permettent d'estimer un peu plus finement l'écart entre la solution hybride condensée et la solution de référence. On constate bien que la qualité des différentes solutions numériques est globalement comparable. On retrouve par ailleurs la tendance observée précédemment : la solution de référence et la solution hybride Q^1/Q^2 sont généralement très proches, tandis que la solution hybride $Q^1/Q^2/Q^4$ se démarque par une amplitude plus faible, comme le montre l'évolution du champ E_x et H_y au point de visualisation n° 2 sur la figure 5.16.

Il paraît délicat de trancher sur le caractère admissible des solutions numériques hybrides. En effet, bien que la solution de référence semble généralement être la plus proche de la solution convergée, il existe des exceptions, comme sur le champ E_x au point n° 1 où les solutions hybrides sont plus précises. Ainsi, à l'issue de cette étude et à défaut d'une mesure plus précise de la précision, nous pouvons conclure que la solution de référence est, en tendance, légèrement plus précise que les solutions hybrides, mais que ces dernières sont dans une marge d'erreur acceptable du point de vue applicatif.

Remarque 5.6 *On n'observe pas, sur les sorties ponctuelles de la figure 5.16 (et sur celles qui suivront), le phénomène de modulation d'amplitude constaté au chapitre précédent. On peut donc vraisemblablement supposer qu'il dépend du terme source considéré, et qu'il devient négligeable lorsque le signal est entretenu, comme c'est le cas dans les exemples traités ici. Ceci nous conduit donc à privilégier l'hypothèse d'une méthode de visualisation non-adaptée afin d'expliquer le phénomène de "pixellisation" évoqué plus haut.*

Enfin, étudions les gains obtenus sur le temps d'exécution du solveur, reportés dans le tableau 5.4.

Maillage hp	Flux non-conformes	Δt (s)	Gain t-CPU
$Q^1(h)$ (référence)	-	9,47e-11	1
$Q^1(h)/Q^2(3h)$	classiques	9,47e-11	5,7e-2
	condensés	9,47e-11	4,9
$Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$	classiques	9,47e-11	1,5e-2
	condensés	7,17e-11	6,6

TABLE 5.4 – Comparaison des pas de temps de simulation utilisés (Δt) et des gains en temps de calcul du solveur (Gain t-CPU=t-CPU^{réf}/t-CPU), pour les résolutions sur maillage de référence et sur maillage hybride relatives au cas-test n° 1.

Ces résultats confortent de nouveau le fait que les flux classiques causent des contre-performances numériques sévères, et ce même sur un maillage *hp* favorable *a priori* : selon la configuration utilisée, ils conduisent à des temps de calcul entre 17 et 90 fois supérieur au temps de référence. En revanche, la résolution hybride condensée Q^1/Q^2 permet à elle seule de diviser le temps d'exécution de référence par un facteur proche de 5. Comme pour la charge mémoire, l'introduction des éléments Q^4 permet alors de gagner un facteur supplémentaire, mais beaucoup plus faible que celui acquis par l'introduction des éléments Q^2 . Puis, conformément avec ce qui avait été constaté sur les exemples numériques du chapitre précédent, on observe que le pas de temps CFL est identique pour toutes les résolutions à l'exception de la résolution hybride condensée $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$ pour laquelle il est légèrement diminué. Ceci est donc de nouveau imputable à l'utilisation du raccord condensé $Q^2(3h)/Q^4(9h)$. Malgré cette restriction, les performances sont améliorées pour cette résolution qui fournit le gain en temps de calcul le plus élevé de notre étude, d'une valeur de 6,6. En calculant la durée d'une itération temporelle afin d'exclure la limitation CFL, on obtient un gain unitaire proche de 9. On voit donc que pour tirer davantage parti du déraffinement $Q^4(9h)$, il est nécessaire de construire un raccord condensé $Q^2(3h)/Q^4(9h)$ conduisant à une contrainte CFL moins restrictive.

En conclusion, nous obtenons sur ce cas-test *a priori* favorable des solutions hybrides condensées situées dans une marge d'erreur admissibles par rapport à la précision de référence et associées à des temps d'exécution significativement réduits, dont la part principale est due à l'introduction des agrégats $Q^2(3h)$. L'ajout des éléments $Q^4(9h)$ ne conduit pas à une amélioration de la qualité de la solution numérique, et, du fait d'une condition CFL plus restrictive, ne permet pas en l'état de gagner un facteur supplémentaire important sur les temps de calcul.

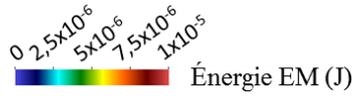
5.3.2 Cas-test n° 2

On représente, sur la figure 5.17 la cartographie de l'énergie électromagnétique autour de l'objet. Rappelons que cette simulation est réalisée en champ total, contrairement à la précédente. À ce titre, nous retrouvons bien sur cette figure la séparation entre la zone de champ total au voisinage de l'objet, et la zone de champ diffracté proche du bord du domaine de calcul. Comme précédemment, on obtient, sur cette échelle globale, une bonne adéquation entre les différentes solutions numériques, malgré la présence une nouvelle fois d'irrégularités au niveau des interfaces non-conformes pour les solutions hybrides. Par ailleurs, du fait d'un maillage initial plus fin, la dissipation de la solution $Q^1/Q^2/Q^4$ est cependant moins marquée dans ce cas-test (maillage en $\lambda/60$ contre $\lambda/20$ dans le cas-test précédent).

En ce qui concerne les sorties ponctuelles reportées sur la figure 5.18, plusieurs choses sont à noter. Pour les points de visualisation situés à l'extérieur de la géométrie (points n° 1 et 2), les différentes solutions numériques sont d'une précision équivalente. Ceci est moins évident pour le point situé dans la partie interne de l'objet (point n° 3), correspondant à une zone de champ moins régulier et de faible amplitude. La transmission de l'onde plane à l'intérieur de la géométrie se décompose en un régime transitoire où la solution présente de fortes variations (de $t = 0$ à $t = 15ns$), suivi d'un régime plus régulier assimilable à un régime périodique établi. Durant la phase transitoire, on ne relève pas un déphasage significatif entre les différentes solutions numériques, mais il apparaît que la solution de référence présente une dissipation moins importante que les solutions hybrides condensées, notamment pour les composantes du champ électrique. Sur la phase plus régulière, le champ électrique est très mal capté, qu'il soit issu de la solution de référence ou des solutions hybrides. De plus, ces dernières ne présentent pas une adéquation satisfaisante avec la solution de référence et ne semblent pas améliorer la précision. La composante H_y est en revanche mieux captée, et les solutions de référence et hybrides condensées sont d'une qualité comparable.

Ces résultats se justifient en prenant en compte la finesse du maillage initial. En effet, autour de l'objet, le champ a la régularité de l'onde plane, le maillage est donc dimensionné ($\lambda/60$) pour représenter fidèlement la solution dans cette zone. Or, comme nous avons vu dans la remarque 5.1, le spectre du signal injecté peut présenter durant une phase transitoire des fréquences plus élevées que la fréquence caractéristique de l'onde plane, pour lesquelles la configuration de référence peut s'avérer sous-maillée. Ainsi, la solution de référence se comporte au mieux comme un filtre passe bas, comme le montre bien

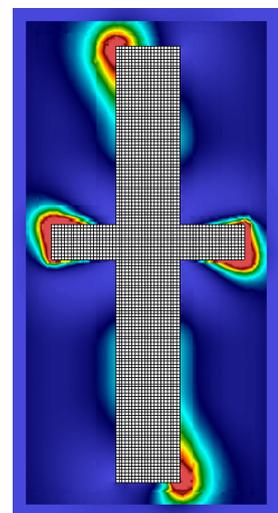
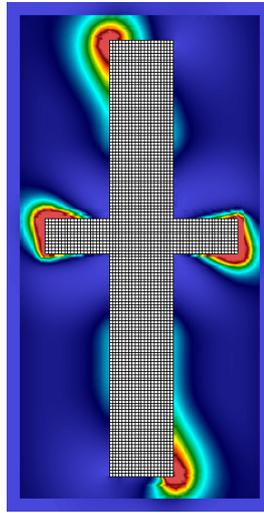
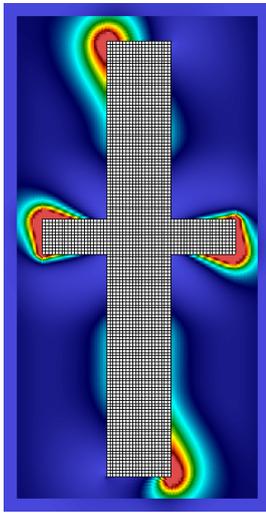
l'évolution H_y au point n° 3 : le bruit haute fréquence présent sur la courbe convergée n'est pas capté par la solution de référence. Ces résultats confirment alors que les solutions hybrides condensées n'améliorent pas la précision de référence. En particulier, pour que les solutions hybrides condensées se situent dans une marge d'erreur admissible par rapport à la solution de référence, il semble nécessaire que cette dernière soit suffisamment bien captée au préalable.



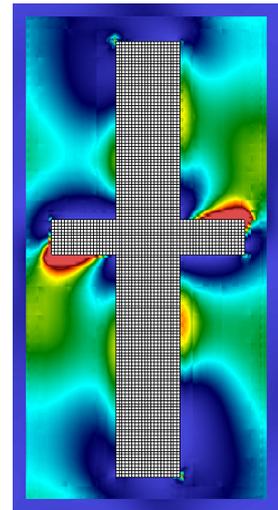
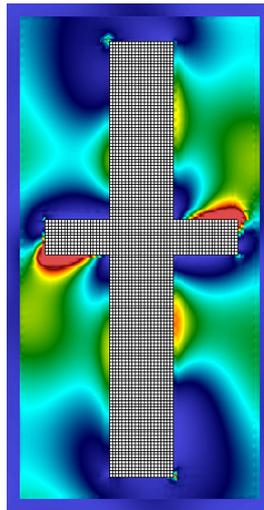
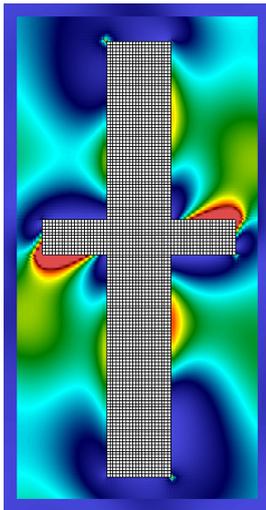
Résolution $Q^1(h)$ (réf.) :

Résolution $Q^1(h)/Q^2(3h)$:

Résolution $Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$:



(b) $t = 8,7ns$



(c) $t = 29ns$

FIGURE 5.17 – Cartographie de l'énergie électromagnétique (EM) extérieure au GENEC sur un plan de coupe orthogonal à $(0z)$, à différents temps de simulation, pour la résolution Q^1 de référence (colonne de gauche), hybrides condensées Q^1/Q^2 (colonne centrale) et $Q^1/Q^2/Q^4$ (colonne de droite).

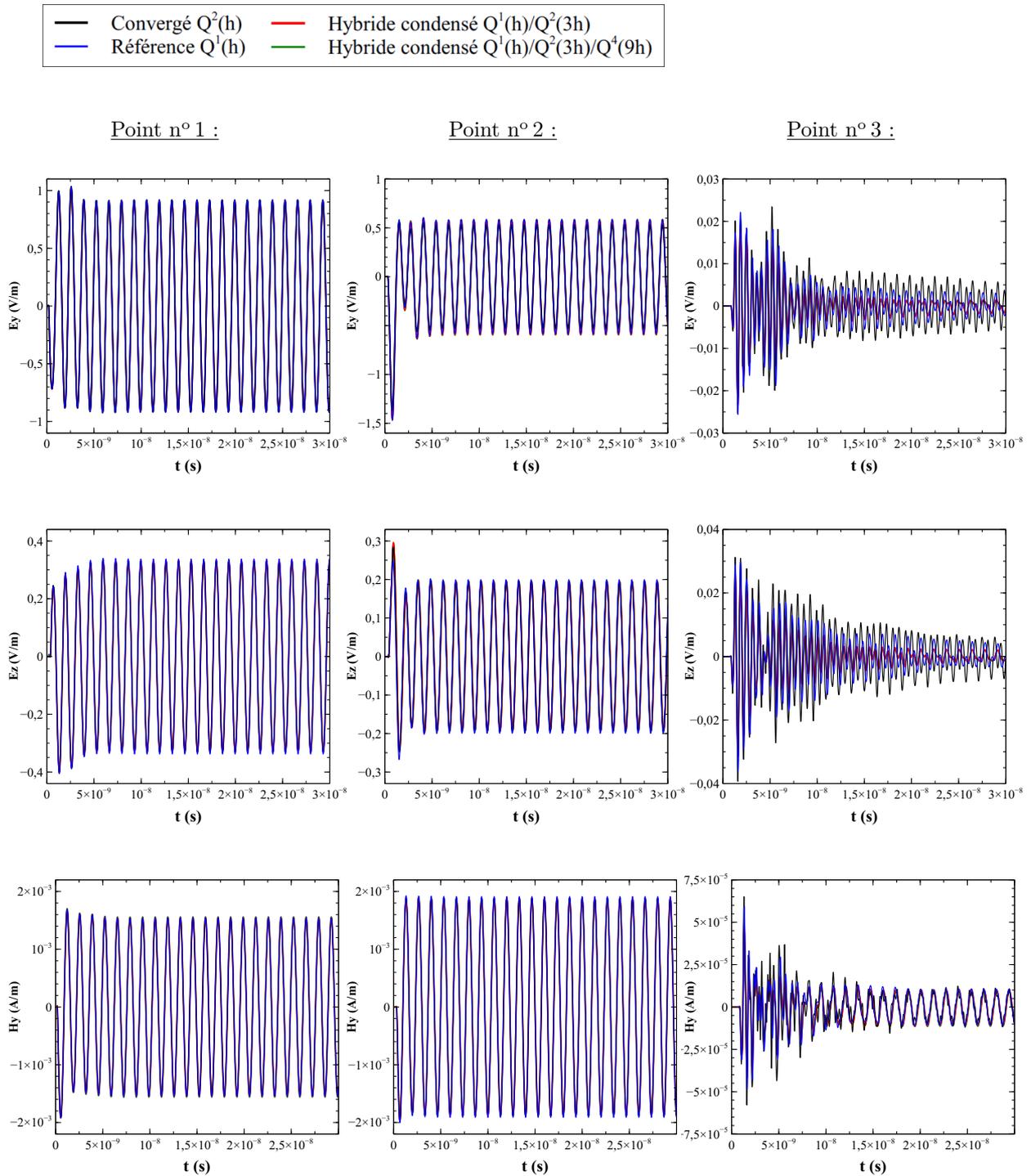


FIGURE 5.18 – Évolution temporelle des composantes E_x , E_y , et H_y du champ électromagnétique du deuxième cas-test, aux points d'observation n° 1 (0.24, 0.36, 0.08), n° 2 (0.48, 0.45, 0.13), et n° 3 (0.68, 0.25, 0.13), localisés qualitativement sur la figure 5.4.

Intéressons nous à présent aux temps d'exécution du solveur, reportés dans le tableau 5.5.

Maillage hp	Flux non-conformes	Δt (s)	Gain t-CPU
$Q^1(h)$ (référence)	-	5,78e-12	1
$Q^1(h)/Q^2(3h)$	classiques	5,78e-12	3,5e-2
	condensés	5,78e-12	2,0
$Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$	classiques	5,78e-12	1,5e-2
	condensés	4,37e-12	1,4

TABLE 5.5 – Comparaison des pas de temps de simulation utilisés (Δt) et des gains en temps de calcul du solveur (Gain t-CPU= $t\text{-CPU}^{\text{réf}}/t\text{-CPU}$), pour les résolutions sur le maillage de référence et sur les maillages hybrides du cas-test n° 2.

Ce cas-test disqualifie une fois de plus l'usage des flux classiques pour la résolution sur maillage hybride, car ils conduisent à des temps de calcul entre 28 et 67 fois plus importants que ceux de la résolution de référence.

La résolution condensée sur le maillage Q^1/Q^2 permet quant à elle de diviser le temps d'exécution de référence par 2. Comme nous l'avions anticipé, ce gain est plus faible que dans l'exemple favorable du paragraphe précédent, car la proportion d'éléments déraffinés introduits est moins importante. De plus, on remarque que le gain associé à la résolution $Q^1/Q^2/Q^4$ est plus faible que celui de la résolution Q^1/Q^2 . Sur cet exemple, l'introduction des éléments $Q^4(9h)$ est donc contre-productive, du fait d'une contrainte CFL réduite par l'introduction du raccord condensé $Q^2(3h)/Q^4(9h)$. Plus précisément, ceci résulte de la balance défavorable qui s'opère entre les performances du schéma temporel et du schéma spatial (voir remarque 3.21) : dans ce cas-test, le nombre d'agrégat $Q^4(9h)$ introduits étant trop faible, le gain acquis sur la complexité algorithmique de l'approximation spatiale ne permet pas de compenser la restriction du pas de temps de la simulation.

En résumé, dans les zones du domaine de calcul où le maillage initial est suffisamment fin pour capturer fidèlement la physique des phénomènes, les solutions hybrides condensées sont à iso-qualité avec la solution de référence. Dans les zones où le maillage initial est sous-dimensionné, la solution de référence est peu précise, les solutions hybrides condensées n'amènent pas une amélioration de qualité, et il paraît difficile de distinguer la solution la plus précise sans une mesure de l'erreur plus sophistiquée. Le gain en temps de calcul maximal est obtenu sur le maillage Q^1/Q^2 , la résolution $Q^1/Q^2/Q^4$ étant trop pénalisée par la contrainte CFL.

5.3.3 Cas-test n° 3

Pour rappel, nous ne cherchons pas à obtenir un gain en temps de calcul significatif dans ce cas-test. En effet, n'ayant pas implémenté de schéma temporel à pas de temps local, la contrainte CFL du maillage hp hybride va être lourdement pénalisée par l'introduction de cellules de taille inférieure à celle de référence. L'objectif principal est davantage de situer la précision de la solution hybride condensée sur maillage localement raffiné, par rapport, d'une part, à la solution Q^1 sur un maillage conforme à la dimension de la fente, et, d'autre part, à la solution DF basée sur un modèle sous-cellulaire et issue d'un code de référence.

Avant de comparer ces différentes solutions, on illustre sur la figure 5.19 la répartition du champ électromagnétique dans le voisinage de la fente, pour la résolution hybride condensée. On observe en particulier que dans le plan passant par l'axe de la fente, le champ magnétique est maximum aux extrémités et nul au centre et inversement pour le champ électrique. Ceci est conforme au comportement physique attendu, dont on pourra trouver une description dans [90].

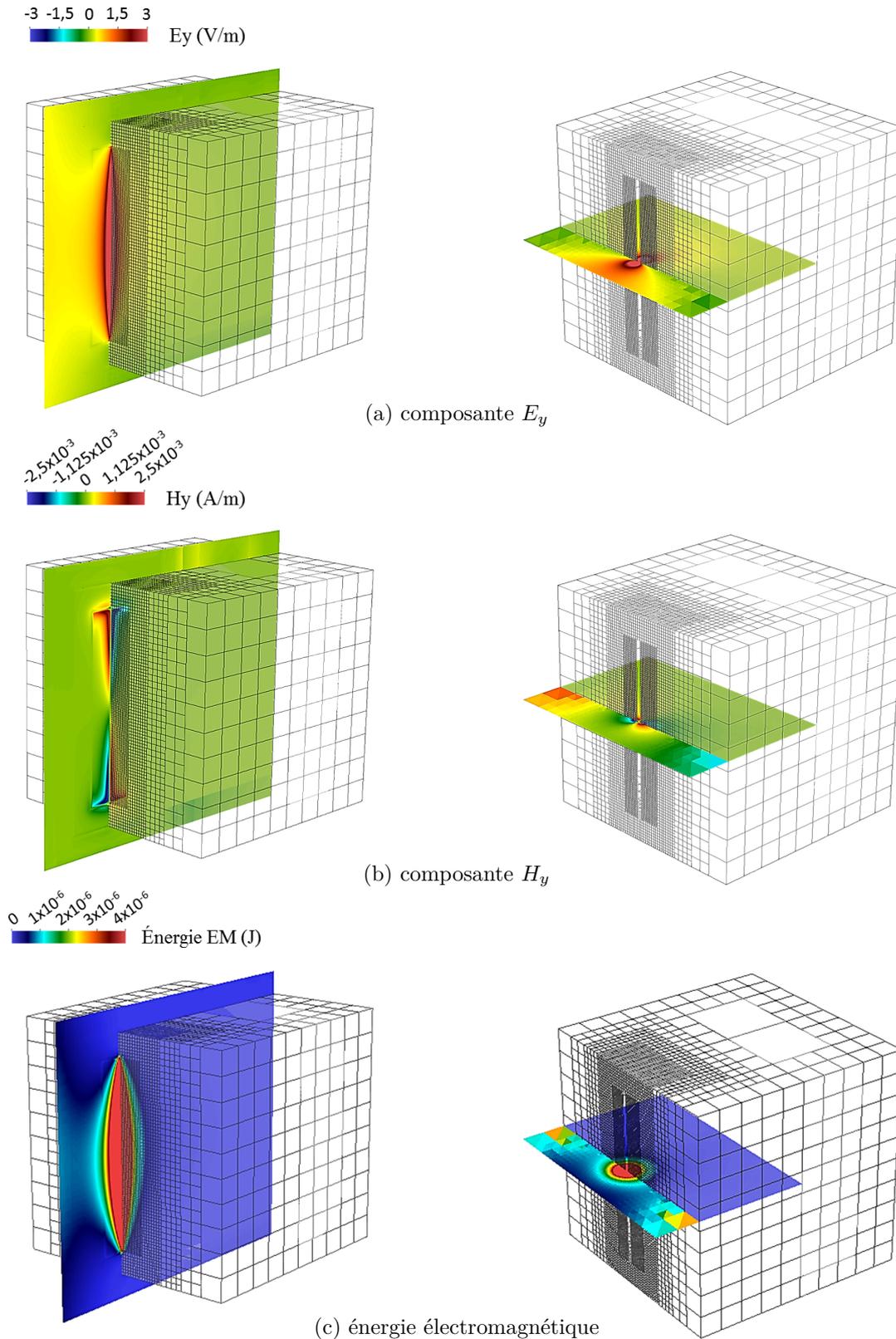


FIGURE 5.19 – Cartographie de la composante E_y (a), H_y (b), et de l'énergie électromagnétique (EM) (c) de la solution hybride condensée sur un plan de coupe dans l'axe de la fente (à gauche) et orthogonale à celle-ci (à droite), au temps $t = 5ns$.

La figure 5.20 présente alors la comparaison entre les différentes solutions numériques obtenues aux points d'observation considérés.

Au point n° 1, situé dans une zone de champ régulière en amont de la fente, les solutions numériques sont d'une précision comparable, bien que la solution hybride et la solution DF présentent une amplitude légèrement sur-évaluée. Au point n° 2, plus proche de la fente, la solution DF fournit cette fois une meilleure approximation de la solution convergée. La solution de référence et la solution hybride sont similaires et donnent une erreur non négligeable sur l'amplitude du signal. Notons cependant qu'ici la solution hybride est légèrement plus précise que la solution de référence.

Au point n° 3, situé à l'intérieur du boîtier, on voit qu'au delà d'une phase transitoire allant de $t = 0$ à $t \simeq 3ns$, la solution de référence est nettement moins précise que la solution hybride et DF. Comme dans le cas-test précédent, la solution hybride se comporte alors à la manière d'un filtre passe bas, elle ne permet de bien représenter que le signal porteur, tandis que la solution DF rend mieux compte du contenu haute fréquence du spectre transmis dans le boîtier.

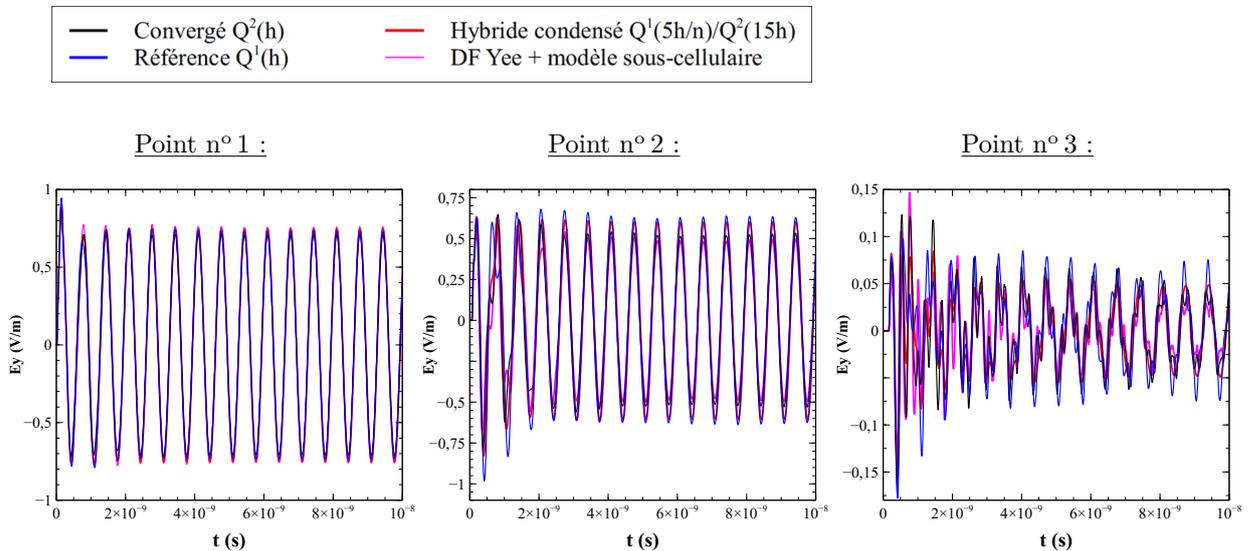


FIGURE 5.20 – Évolution temporelle de la composante E_y aux points d'observation n° 1 (0.522, 0.532, 0.477), n° 2 (0.522, 0.532, 0.492), et n° 3, (0.522, 0.532, 0.502), localisés qualitativement sur la figure 5.6.

Enfin, on reporte dans le tableau 5.6 les temps de résolutions des différentes résolutions effectuées.

Résolution	Flux non-conformes	Δt (s)	Gain t-CPU
GDDT $Q^1(h)$ (référence)	-	9,63e-13	1
DFDT $5h$ (schéma de Yee)	-	9,60e-12	2 130
GDDT $Q^1(5h/n)/Q^2(15h)$	classiques	3,009e-13	2,6e-1
	condensés	3,009e-13	2,1

TABLE 5.6 – Comparaison des pas de temps de simulation utilisés (Δt) et des gains en temps de calcul du solveur ($\text{Gain t-CPU} = t\text{-CPU}^{\text{réf}} / t\text{-CPU}$), pour les résolutions $Q^1(h)$ sur le maillage de référence, $Q^1(5h/n)/Q^2(15h)$ sur le maillage hybride, et DFDT avec sous-modèle, relatives au cas-test n° 3.

Commençons par remarquer que le pas de temps utilisé pour la résolution DF est près de dix fois supérieur à celui utilisé pour la résolution de référence. Ceci s'explique qualitativement par le fait que le maillage DF est 5 fois plus grossier que le maillage de référence et que la contrainte CFL associée

est près de deux fois moins restrictive que celle du schéma GDDT- Q^1 en flux décentrés. En revanche, conformément à ce qui était attendu, le pas de temps de la résolution hybride est plus de trois fois plus faible que celui de référence, du fait de l'introduction de mailles raffinées. Malgré cela, le temps d'exécution de la résolution hybride est divisé par deux par rapport à la résolution de référence. Ce gain, non négligeable, demeure bien sûr dérisoire devant le temps de calcul de la solution DF, plus de deux mille fois plus rapide que le temps de référence.

En conclusion, la solution DF avec modèle sous-cellulaire apparaît légèrement plus précise que la solution condensée sur le maillage localement raffiné, elle-même d'une meilleure qualité que la solution de référence. Le sous-maillage permet donc de capturer plus fidèlement les phénomènes qu'une configuration maillée à la dimension de la fente, mais n'améliore pas la qualité du modèle sous-cellulaire lorsque celui-ci est utilisé dans son domaine de validité. Cependant, ce domaine de validité, prenant la forme d'une contrainte sur le ratio entre la taille des cellules et la taille de la singularité représentée par le modèle, s'avère souvent limitant en pratique et l'outrepasser peut provoquer des artefacts numériques. Le principal avantage de l'approche de raffinement mise en place est donc, *a contrario*, de ne reposer sur aucun domaine de validité de ce type.

5.4 Conclusion

Les différents exemples numériques traités dans ce chapitre ont permis de mettre en évidence les points forts de la chaîne de calcul, mais également de révéler certaines de ses limitations et de dégager plusieurs pistes d'amélioration.

Conformément à nos objectifs, l'algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement a assuré la construction automatisée de maillages hp admissibles, présentant des coûts de stockage réduits, en des temps suffisamment faibles pour assurer sa viabilité pratique. Les gains sur le nombre de degrés de liberté s'évaluent entre 2,8 pour la configuration la plus défavorable et 11 pour la plus favorable.

L'algorithme de h -raffinement montre en revanche rapidement ses limites et constitue le principal axe d'amélioration du post-maillage. L'introduction des raffinements auxiliaires crée en effet une zone de transition importante entre la plus petite et la plus grande échelle de maillage, qui peut alourdir significativement le volume des configurations. *A minima*, il semblerait donc intéressant de pouvoir introduire plusieurs couches de raffinement au sein d'une même cellule initiale. La seule complication liée à cette approche serait alors la gestion de la connectivité entre les cellules raffinées, qui semble légèrement plus complexe à mettre en place.

En comparant les composantes des champs, sur chaque cas-test, en plusieurs points d'observation, nous avons établi que la précision des solutions hybrides condensées se situe dans une marge d'erreur acceptable par rapport à la qualité souhaitée. L'utilisation des éléments $Q^4(9h)$ ne permet pas une amélioration significative de la qualité et le cas-test n° 1 a montré qu'elle peut même provoquer une erreur de dissipation plus importante. Soulignons néanmoins que la méthodologie employée pour comparer la précision des différentes solutions est perfectible, car elle ne permet pas de rendre compte de l'erreur commise sur l'ensemble du domaine de calcul et sur toute la durée de simulation. La poursuite de notre étude consisterait donc à évaluer précisément l'écart à la solution convergée via l'utilisation d'une norme espace/temps du type de celle utilisée dans les chapitres précédents.

Les gains en temps de calcul acquis par la résolution condensée sur maillage hybride se situent entre 2 et 6,6. Ces gains sont acquis principalement par l'introduction des éléments $Q^2(3h)$. En revanche, une nouvelle fois, l'intérêt du passage aux éléments $Q^4(9h)$ est discutable, car le raccord condensé associé conduit à une contrainte CFL plus restrictive. Il ne permet donc pas de gagner systématiquement un facteur supplémentaire par rapport à la résolution $Q^1(h)/Q^2(3h)$. Afin de renforcer son intérêt pratique, il semble donc nécessaire de revoir l'opérateur de trace et le produit scalaire condensé définissant le raccord $Q^2(3h)/Q^4(9h)$.

Ces résultats sont bien sûr cas-tests dépendants. Ils sont particulièrement sensibles à la proportion du maillage initial libre de toute contrainte géométrique et au terme source considéré (voir l'Annexe E pour un cas-test faisant intervenir un terme source ponctuel de courant). Sur ce point, nous avons vu qu'une piste d'amélioration prometteuse est d'étendre le passage de la surface de Huygens aux interfaces non-conformes.

Conclusion et perspectives

Ces travaux s'inscrivent dans une démarche générale visant à dépasser certaines limitations du schéma DFDT de Yee (précision restreinte, mauvaise gestion des géométries courbes et multi-échelles, etc.) qui reste à ce jour, du fait de sa facilité de mise en œuvre et de ses faibles coûts de calcul, la méthode la plus utilisée dans l'industrie en Électromagnétisme numérique. Dans ce contexte, l'attrait de l'approche GD réside principalement dans la grande flexibilité des maillages utilisables (non-conformité, éléments courbes, etc.), et dans la possibilité d'ajuster localement la précision de l'approximation à un ordre arbitrairement élevé. Cependant, ces avantages ont le plus souvent une contrepartie défavorable en termes de coûts de calcul : les solveurs GDDT requièrent généralement des ressources mémoire et des temps d'exécution prépondérants devant ceux du schéma de Yee, si bien qu'ils sont relativement peu utilisés pour des applications industrielles.

Ainsi, l'objectif principal de cette thèse était d'améliorer l'efficacité numérique de la méthode GD, dans le cadre privilégié des maillages cartésiens. Le point de départ de notre étude a été de considérer que les faibles performances que peuvent présenter les résolutions GD résultent en grande partie d'une utilisation sous-optimale de la méthode, par défaut d'une chaîne de calcul spécifique et globalement cohérente. Nous avons donc cherché à travailler, non séparément comme c'est l'usage, mais conjointement sur le schéma et ses données d'entrée, afin d'optimiser le couple mailleur/solveur. Pour ce faire, l'idée directrice de nos travaux a été de tirer parti des méthodes d'adaptation hp , qui, par des choix locaux judicieux entre la taille des mailles h et le degré d'approximation p , permettent de réduire les coûts de calcul en diminuant le nombre d'éléments des maillages. Un second objectif a été d'étudier l'apport d'une approche de raffinement pour la description d'objets singuliers du type fente, en mettant à profit la non-conformité permise en GD. Ce type d'éléments est en effet à l'origine de nombreuses difficultés de modélisation car, présentant généralement une dimension négligeable devant la taille caractéristique du domaine de calcul, ils ne peuvent pas être directement portés par les maillages conformes de type DFDT sous peine d'alourdir la charge mémoire de manière rédhibitoire. Ils sont alors pris en compte via des modèles sous-cellulaires approchés, dont le domaine de validité peut s'avérer contraignant en pratique. Pouvoir retrouver une description exacte de ces éléments via l'introduction de sous-maillages locaux paraît ainsi particulièrement intéressant d'un point de vue applicatif.

Nous avons donc mis en place une stratégie en deux temps basée d'une part sur la conception d'un schéma GDDT pré-optimisé sur une classe particulière de maillages cartésiens hp non-conformes, et, d'autre part, sur la génération automatisée de maillages hp solveur-adaptés, assurant des performances de résolution avantageuses et permettant d'améliorer la discrétisation des objets singuliers.

Bilan sur la stratégie de post-maillage/résolution mise en place

Dans une première partie du travail, nous avons cherché à concevoir un schéma GDDT- Q^p Gauss-Lobatto aux performances intrinsèques optimisées sur maillages cartésiens et à évaluer l'apport de l'adaptation hp sur l'efficacité numérique de résolution. Notre étude a donné lieu aux contributions suivantes.

Tout d'abord, nous avons mis en évidence que les coûts de calcul de simulation pouvaient être fortement réduits grâce à une procédure de h -déaffinement/ p -enrichissement de maillage bien calibrée et réalisée dans un cadre hp conforme. Une hiérarchie entre l'efficacité numérique de plusieurs éléments hp a alors pu être déduite. Il en est notamment ressorti l'intérêt particulier de l'élément $Q^2(3h)$, assurant une précision équivalente à l'élément $Q^1(h)$ tout en permettant des gains en stockage mémoire et en temps de calcul significatifs. Nous avons en revanche observé que la généralisation de la procédure de h -déaffinement/ p -

encirhissement aux configurations non-conformes s'accompagnait d'une augmentation rédhibitoire des temps de résolution, *a priori* contre-intuitive et invalidant en l'état la pertinence de la stratégie globale envisagée. Nous avons alors montré que ces contre-performances résultaient de l'évaluation numérique des intégrales de flux *hp* non-conformes du schéma, qui, en provoquant une explosion du nombre d'accès mémoire et d'interpolations des fonctions de base, induit une augmentation considérable de la complexité algorithmique de résolution. Autrement dit, le coût de calcul global d'une résolution GDDT sur maillage hybride ne peut pas être ramené à une somme de coûts locaux sur chaque cellule, car le raccord entre éléments *hp* hétérogènes possède une complexité calculatoire propre et non négligeable à prendre en compte.

Afin de s'affranchir de ce point bloquant, nous avons cherché à définir de nouveaux termes de flux présentant des coûts d'évaluation réduits et conservant la bonne tenue du schéma. Pour ce faire, nous avons généralisé la méthode de condensation aux intégrales *hp* hétérogènes. L'idée a été de réinterpréter les flux non-conformes en pseudo-flux conformes, sur lesquels une intégration numérique condensée devient possible. En pratique, ceci est réalisé en introduisant des opérateurs de traces adaptés aux configurations *hp* non-conformes, permettant de recréer une homogénéité d'espaces, et en substituant le produit scalaire L^2 usuel par des semi-produits scalaires. Cette approche permet de creuser la matrice de flux du schéma et ainsi de réduire significativement la complexité de l'approximation spatiale. La stabilité sous condition CFL du schéma GDDT résultant (schéma condensé), a alors été établie à partir de plusieurs hypothèses sur les nouveaux termes de flux (flux condensés), ainsi que leur consistance vers les termes de flux usuels.

Nous avons alors mis en place une méthode de construction de flux condensés et validé la convergence numérique du schéma sur plusieurs exemples de maillages *hp* non-conformes. Trois principales configurations d'accolement condensées ont été retenues pour la suite des développements du fait de leur potentiel applicatif : une configuration de raffinement $Q^1(h)/Q^1(h/2)$ et deux configurations de déraffinement $Q^2(3h)/Q^4(9h)$ et $Q^4(9h)/Q^2(3h)$. En particulier, seuls les maillages *hp* conçus à partir de ce panel discret de configurations, appelés maillage *hp* admissibles, vont être utilisés en pratique sous peine d'obtenir des coûts de calcul prohibitifs.

Dans une deuxième partie du travail, nous avons cherché à concevoir un algorithme de post-maillage dédié au schéma GDDT condensé préalablement conçu. L'idée était de retravailler un maillage initial de type DFDT réalisable par des outils à disposition, dans le but d'obtenir un maillage *hp* répondant à deux objectifs : assurer une efficacité numérique de résolution optimisée et améliorer la prise en compte des éléments géométriques singuliers. Pour ce faire, nous avons procédé en deux temps.

Dans un premier temps, nous avons élaboré une méthode de *h*-déraffinement/*p*-enrichissement par agglomération automatisée de cellules, capable de générer un maillage *hp* admissible présentant *a priori* des coûts de calcul avantageux. Pour ce faire, nous avons tout d'abord cherché à déterminer certaines caractéristiques des maillages *hp* admissibles permettant d'expliquer, en première approximation, les performances numériques de résolution. Il en est notamment ressorti l'influence prépondérante du nombre de degrés de liberté dans les temps de calcul du schéma, et, dans une moindre mesure, l'impact sur ces derniers du nombre d'interfaces conformes entre les éléments *hp* d'ordre élevé. À partir de ces heuristiques, nous avons développé une stratégie d'agglomération s'inspirant des méthodes d'optimisation par recherche locale, basée sur des déraffinements hiérarchiques ($Q^1(h)/Q^2(3h)/Q^4(9h)$) couplés avec une approche du type "diviser pour régner". Nous avons alors montré que l'algorithme résultant permet de construire, sinon le meilleur, du moins un maillage *hp* aux coûts de calcul fortement réduits par rapport à la configuration initiale.

Dans un second temps, nous avons enrichi cet algorithme en y intégrant une approche semi-automatisée de raffinement local. La difficulté ici a été de pouvoir introduire des zones de sous-maillage dans la configuration initiale tout en assurant l'admissibilité du maillage *hp* produit. Ne disposant en pratique que d'un seul raccord condensé de raffinement ($Q^1(h)/Q^1(h/2)$), nous avons mis en place une méthode de sous-maillage progressive, procédant par raffinements de facteur 2 successifs.

L'algorithme de post-maillage global résultant constitue une étape à part entière dans la chaîne de calcul GDDT développée, intermédiaire entre le mailleur et le solveur. Il tient une place centrale dans la stratégie proposée dans cette thèse, dans le sens où il permet d'assurer la cohérence de la chaîne de calcul globale et plus particulièrement l'adéquation entre les maillages *hp* et le schéma GDDT considérés.

En dernier lieu, nous avons mis en œuvre la chaîne de calcul GDDT développée sur plusieurs cas-tests d'intérêt industriel : illumination d'une structure d'avion, d'un modèle simplifié de missile (GENEC), et d'un boîtier contenant une fente mince. L'intérêt de la démarche était d'évaluer la viabilité de la solution globale proposée dans un contexte applicatif. Nous avons en particulier cherché à estimer les gains en stockage mémoire et en temps de calcul acquis par le schéma condensé sur les configurations hybrides produits par le post-maillage par rapport à une résolution de référence, définie comme la résolution $Q^1(h)$ sur le maillage initial DFDT.

La stratégie de h -déaffinement/ p -enrichissement adoptée a permis de réduire le nombre de degrés de liberté du maillage initial d'un facteur allant de 2,8 pour l'exemple le plus défavorable, à 11 pour le plus favorable. Par ailleurs, les temps d'exécution du post-maillage se sont révélés suffisamment faibles pour permettre *a priori* son utilisation industrielle. Malgré un gain unitaire beaucoup plus faible, les éléments $Q^2(3h)$ ont eu un impact beaucoup plus important que celui des éléments $Q^4(9h)$, car il a été systématiquement possible d'en introduire un nombre beaucoup plus élevé. Évidemment, les gains en stockage mémoire obtenus sont fortement conditionnés par la proportion du maillage initial libre de toute contrainte géométrique. Celle-ci dépend notamment de la topologie de l'objet diffractant et du type de terme source considéré. La stratégie de raffinement s'est en revanche révélée davantage perfectible, car, si elle permet bien de retrouver un maillage admissible des singularités, elle provoque une augmentation locale importante du nombre de cellules.

Nous avons par la suite validé que les solutions numériques du schéma condensé sur maillage hybride se situaient dans une marge de précision admissible par rapport à la qualité objectif. Pour le cas-test d'ouverture, nous avons obtenu une solution hybride raffinée comparable à une solution Différences Finies issue d'un code de référence et utilisant un modèle sous-cellulaire de fente, mais ne permettant pas de rendre compte aussi fidèlement du contenu spectral haute fréquence du champ diffracté.

Enfin, en ce qui concerne les temps d'exécution du solveur, la résolution hybride condensée a permis d'obtenir des gains situés entre 2 et 6,6 par rapport à la résolution de référence. Ces gains sont majoritairement dus aux éléments $Q^2(3h)$. L'introduction des éléments $Q^4(9h)$ amène, au mieux, un gain légèrement supérieur au maillage Q^1/Q^2 . Au pire, elle peut induire des performances moins avantageuses, du fait d'une contrainte CFL plus restrictive.

Malgré les gains non négligeables obtenus sur l'efficacité numérique de l'approche GDDT, la chaîne de calcul développée demeure trop coûteuse à ce jour pour envisager son utilisation systématique dans un contexte industriel. Les travaux réalisés demeurent cependant extrêmement porteurs dans une logique d'amélioration de performances sur maillage hybride et ouvrent la voie à plusieurs perspectives.

Pistes d'améliorations et extensions possibles des travaux réalisés

À court terme, il serait avantageux d'étendre la méthode de condensation de flux aux éléments hp anisotropes, afin d'aller plus loin dans la réduction du stockage mémoire des maillages. Ce point est particulièrement stratégique car dans les applications réelles, les géométries sont généralement plus exiguës que celles des exemples traités. Disposer d'éléments de type "frite" ou "plaque" permettrait ainsi d'introduire davantage d'agrégats, d'autant que certains objets y seraient naturellement adaptés (torons, joints, éléments de faible épaisseur, etc.). Cela ne pose par ailleurs aucune difficulté technique *a priori*, car nous pouvons facilement adapter le processus tensoriel de construction des flux condensés, et reprendre les candidats 1D déjà utilisés.

Pour aller dans le même sens, une autre piste serait de relâcher davantage les contraintes d'admissibilité des maillage hp en générant *a minima* un raccord condensé pour l'accolement $Q^1(h)/Q^4(9h)$, et en améliorant le raccord $Q^2(3h)/Q^4(9h)$ du point de vue de la contrainte CFL. Cela serait de plus transparent vis-à-vis de l'algorithme de post-maillage développé. Générer d'autres candidats de déaffinement ne paraît pas nécessaire, dans la mesure où cela compliquerait la stratégie de post-maillage, et qu'aller chercher des échelles de déaffinement intermédiaires ou supérieures ne semble pas pertinent aujourd'hui du point de vue applicatif. En revanche, générer d'autres candidats de raffinement pour des échelles de sous-maillage plus importantes (>10) paraît primordial si l'on veut assurer la prise en compte de cas-tests fortement multi-échelles. Il sera par ailleurs intéressant de prolonger le travail effectué sur le post-maillage, en

proposant une résolution rigoureuse du problème d'optimisation associé, de sorte à assurer l'optimalité du maillage hp généré.

Puis, afin de minimiser le nombre d'itérations temporelles dans les éléments hp déraffinés, il semble décisif d'associer un schéma à pas de temps local à l'approximation GD condensée (voir par exemple [91][92]). Cela permettrait notamment une réduction importante des temps de calcul sur les maillages hybrides impliquant des raffinements locaux. Toutefois, pour ce faire, il serait nécessaire de mettre à jour l'analyse de stabilité du schéma pour ce type d'intégration temporelle. De nouvelles hypothèses sur les flux condensés pourraient alors être introduites afin d'assurer la bonne tenue du schéma et intégrées à leur processus de construction.

Pour aller plus loin dans la réduction des temps de calcul et se rapprocher davantage du cadre applicatif industriel, il semble inévitable d'effectuer le portage du schéma GDDT condensé sur une architecture parallèle (démarche similaire à [50][51]). Comparativement à l'approche GD classique, la méthode de condensation de flux ne semble pas créer de difficulté de parallélisation supplémentaire. Au contraire, elle permettrait *a priori* de diminuer le nombre de communications nécessaires entre les cellules. On peut donc anticiper que cette étape de parallélisation permettra d'acquérir des gains en temps de calcul significatifs. Il pourra par ailleurs être profitable de revoir l'algorithme de post-maillage pour y intégrer des *a priori* d'efficacité propres au contexte parallèle (répartition des agrégats pour réduire les communications, structure globale du maillage assurant une meilleure répartition de charge, etc.).

Enfin, il serait intéressant d'étendre l'application de la méthode de condensation de flux à des maillages plus généraux (hexaédriques non cartésiens, tétraédriques, non structurés, etc.) et à des topologies d'interfaces non-conformes moins restrictives, de sorte à améliorer l'approximation des géométries. Pour cela, une piste de travail serait de modifier le processus de construction des flux condensés proposé, en utilisant par exemple la transformation dégénérée définie dans [93] assurant le passage entre éléments de référence hexaédrique et tétraédrique. Il faudrait cependant également modifier ce processus afin de prendre en compte d'autres types de fonctions de base que les polynômes de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto. Cependant, ceci cache potentiellement une difficulté dans la mesure où il paraît moins évident de proposer des *a priori* de reconstruction de trace lorsque les degrés de liberté ne sont pas directement situés sur la face des éléments, ou lorsqu'ils n'ont pas de sens géométrique, comme c'est le cas pour les fonctions de base modales.

À plus long terme, plusieurs perspectives se présentent, telles que l'extension de la méthode de condensation de flux à d'autres physiques que l'électromagnétisme, ou encore l'extension de la stratégie de h -déraffinement/ p -enrichissement à d'autres types de schémas numériques.

Ainsi, un premier axe de travail serait l'utilisation ou l'adaptation de la méthode de condensation de flux dans un cadre différent que celui étudié dans cette thèse. Par exemple, en simulation des plasmas, les performances numériques des solveurs électromagnétiques GDDT représentent souvent un goulot d'étranglement au sein de l'approche PIC [1]. La solution globale proposée dans cette thèse pourrait donc permettre de relâcher, dans une certaine mesure, cette contrainte. Cependant, si le schéma GDDT ayant servi de base à notre étude est bien compatible avec l'approche PIC [94], il resterait nécessaire de s'assurer que la méthode de condensation de flux ne provoque pas la perte de la conservation de la charge, essentielle à la bonne tenue du schéma. Un autre exemple concerne cette fois la simulation en mécanique des fluides, où la présence de chocs ou de phénomènes non linéaires limitent en pratique l'utilisation d'intégrations condensées, qui peuvent provoquer l'apparition de parasites numériques ou de solutions non physiques. L'avantage de la méthode de condensation proposée est que l'ordre de consistance de l'approximation des flux peut être ajusté localement. La dimension du noyau créé par l'intégration approchée peut donc être réduite progressivement, jusqu'à retrouver l'intégration exacte usuelle. La construction de flux condensés consistants à ordre intermédiaire bien choisi et/ou satisfaisant de nouvelles contraintes de régularité pourrait donc permettre d'éviter l'apparition de solutions non physiques. On retrouverait alors un schéma numérique viable dont les performances numériques seraient améliorées.

On pourrait également envisager l'adaptation de la stratégie de post-maillage à d'autres types de schémas, et plus particulièrement dans un contexte d'hybridation de schémas. En effet, dans le cas de scènes complexes et/ou de grandes dimensions, une approche intéressante pour améliorer la précision et les performances des simulations consiste à utiliser conjointement plusieurs méthodes numériques, chaque méthode étant associée à une portion bien choisie du domaine de calcul afin d'en exploiter les points forts.

Ainsi, la mise en place d'un outil automatisé permettant d'une part d'attribuer les zones du domaine de calcul au schéma le plus pertinent, et d'autre part de générer un maillage adapté dans chacune de ces zones, paraît particulièrement porteur. Les principales questions sous-jacentes seraient alors liées à la manière de réaliser l'arbitrage entre les différentes méthodes numériques en fonction des données à disposition (contrainte de qualité, type de terme source, etc.), de déterminer des critères d'intérêt et de calculer automatiquement les seuils déclenchant le passage d'une méthode numérique à une autre, et de raccorder les différents maillages.

Dans ce contexte, la méthode de condensation de flux pourrait être utile pour traiter les problématiques de stabilité des schémas hybrides qui peuvent apparaître dans ce type d'approche [95]. La difficulté qui se présente en pratique est d'assurer une correspondance locale adéquate entre les schémas considérés, c'est-à-dire entre les différentes procédures d'interpolation et les espaces d'approximation hétérogènes mis en jeu. Or, ceci est précisément le rôle joué dans nos travaux par les flux condensés *hp* non-conformes. Ainsi, le formalisme d'analyse développé pourrait permettre d'étudier la stabilité des zones de raccord entre les schémas, voire de proposer de nouvelles techniques d'hybridation. Par ailleurs, notre méthode se basant directement sur une manipulation explicite des degrés de liberté du schéma, elle pourrait également conduire à une réduction des coûts de calcul de l'hybridation.

Annexes

Annexe A

Impact du choix des fonctions de base et de l'intégration discrète sur la complexité intrinsèque du schéma GD

Une manière d'estimer la complexité du schéma est de quantifier la charge mémoire de la résolution ainsi que le caractère creux des matrices qui sont mises en jeu. Pour un maillage et un espace d'approximation donné, nous allons donc dénombrer le nombre de degrés de liberté et le nombre de zéros des matrices élémentaires du schéma GD, ce dernier paramètre étant directement lié au nombre d'opérations arithmétiques et d'accès mémoire à effectuer pour une itération temporelle explicite. Pour ce faire, afin de simplifier les calculs, on se place dans une configuration *hp* conforme, en flux centrés, avec $\underline{\underline{\sigma}} = 0$ et $\underline{\underline{J}}_s = 0$. Pour toute cellule K intérieure au maillage, on considère alors les équations scalaires issues de (1.35) associées à la composante E_x du champ :

$$\underline{\underline{M}}_K \partial_t \underline{\underline{E}}_{K,x} - \underline{\underline{R}}_{K,y} \underline{\underline{H}}_{K,z} + \underline{\underline{R}}_{K,z} \underline{\underline{H}}_{K,y} - \frac{1}{2} \sum_{f \subset \partial K} n_y^f \underline{\underline{F}}_K^f \llbracket \underline{\underline{H}}_{K,z} \rrbracket + \frac{1}{2} \sum_{f \subset \partial K} n_z^f \underline{\underline{F}}_K^f \llbracket \underline{\underline{H}}_{K,y} \rrbracket = 0, \quad (\text{A.1})$$

avec $\underline{\underline{M}}_K$, $\underline{\underline{R}}_{K,y}$ et $\underline{\underline{F}}_K^f$ respectivement les matrices élémentaires de masse, rigidité et de flux à travers la face f , de terme général :

$$\left[\underline{\underline{M}}_K \right]_{IJ} = \int_K \phi_I \cdot \phi_J dx, \quad (\text{A.2})$$

$$\left[\underline{\underline{R}}_{K,\alpha} \right]_{IJ} = \int_K \partial_\alpha \phi_I \cdot \phi_J dx, \quad \alpha \in \{y, z\}, \quad (\text{A.3})$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_K^f \right]_{IJ} = \int_f \phi_I \cdot \phi_J dx, \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

où $\phi_{I,J}$ sont les fonctions de bases de degré p de la méthode GD considérée, et I et J sont les indices des degrés de liberté dans une numérotation globale au sein de la cellule.

Dans ce qui suit, nous allons donc calculer le nombre de zéros de ces matrices, pour les fonctions de base les plus couramment utilisées, et en faisant varier le type d'intégration numérique. Notons que comparer la complexité des différents schémas résultants a bien du sens, dans la mesure où, s'il ne conduisent pas strictement à la même précision, ils sont du moins tous consistants au même ordre.

A.1 Approche nodale

Une approche nodale est basée sur l'utilisation d'espaces d'approximation locaux de type Q^p (voir (1.59)). Les fonctions de base sont les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une distribution de $(p+1)^3$ points dans chaque cellule (distincts deux à deux). Nous considérons ici les stencil de Gauss et de Gauss-Lobatto.

A.1.1 Points de Gauss

A.1.1.1 Nombre de degrés de liberté

Chaque composante du champ électromagnétique est discrétisée via $(p+1)^3$ degrés de liberté. Ainsi, pour un maillage comportant N mailles par direction, on obtient $6(p+1)^3 N^3$ degrés de liberté au total.

A.1.1.2 Taux de remplissage des matrices élémentaires

Intégration exacte Chaque matrice est de taille $(p+1)^3 \times (p+1)^3$. Le calcul exact des intégrales via une quadrature d'ordre suffisamment élevé ne mène à aucune simplification particulière, tous les termes sont non nuls. Son taux de remplissage est donc de 1.

Intégration condensée Les fonctions de base 3D étant obtenues par produit tensoriel de fonctions de base 1D, on peut associer à I et J les triplets (I_1, I_2, I_3) et (J_1, J_2, J_3) traduisant cette tensorisation. Dans ce qui suit, nous utilisons la formule de quadrature de Gauss (G), à $(p+1)^3$ ou $(p+1)^2$ points par direction selon que la contribution soit volumique ou surfacique, pour calculer le terme général de chaque matrice élémentaire.

Le calcul du terme général de la matrice de masse donne, du fait de la condensation :

$$\left[\underline{\underline{M}}_K \right]_{IJ} \simeq \int_K^G \phi_I \cdot \phi_J dx = \delta_{I_1, J_1} \delta_{I_2, J_2} \delta_{I_3, J_3} \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, sur la ligne I de la matrice $\underline{\underline{M}}_K$, seul l'élément situé sur la colonne I est non nul. La matrice $\underline{\underline{M}}_K$ est diagonale, son nombre de non-zéros est $(p+1)^3$. Son taux de remplissage est donc de $(p+1)^3 / (p+1)^6 = 1 / (p+1)^3$.

Pour le calcul de la matrice de rigidité, en utilisant le fait que, pour tout $(x, y, z) \in K$, $\phi(x, y, z) = \phi^x(x)\phi^y(y)\phi^z(z)$, on obtient :

$$\left[\underline{\underline{R}}_{K,y} \right]_{IJ} \simeq \left(\int_{[x_K, x_K + \Delta x_K]}^G \phi_{I_1}^x \cdot \phi_{J_1}^x dx \right) \left(\int_{[y_K, y_K + \Delta y_K]}^G \partial_y \phi_{I_2}^y \cdot \phi_{J_2}^y dy \right) \left(\int_{[z_K, z_K + \Delta z_K]}^G \phi_{I_3}^z \cdot \phi_{J_3}^z dz \right) \quad (\text{A.7a})$$

$$= \omega_{J_2}^G \delta_{I_1, J_1} \delta_{I_3, J_3} \partial_y \phi_{I_2}^y(x_{J_2}^G) \quad (\text{A.7b})$$

Sur la ligne I de la matrice $\underline{\underline{R}}_K^y$, on a autant d'éléments non nuls que d'indices J tels que $I_1 = J_1$ et $I_2 = J_2$, soit $(p+1)$ termes. La matrice possède $(p+1)^3$ lignes, le nombre de non-zéros est donc de $(p+1)^4$. Finalement, le taux de remplissage est $1 / (p+1)^2$. De même pour $\underline{\underline{R}}_K^z$.

Enfin, en procédant de manière analogue, on montre que le taux de remplissage de la matrice de flux $\underline{\underline{F}}_K^f$ est de $1 / (p+1)^2$.

A.1.2 Points de Gauss-Lobatto

Nous traitons ce cas brièvement, car il correspond au choix effectué dans nos travaux et qu'il diffère peu de l'approche précédente.

Le nombre de degrés de liberté et le taux de remplissage des matrices élémentaires, lorsque les intégrales sont calculées exactement, sont identiques à l'approche nodale aux points de Gauss.

Lorsqu'une intégration condensée est utilisée, la seule différence avec ce qui précède réside dans le calcul des matrices de flux. En effet, le stencil de points de Gauss-Lobatto ayant la particularité d'inclure les bords de la cellules, on obtient une condensation complète de l'intégrale de flux (comme pour la matrice de masse). La matrice $\underline{\underline{F}}_K^f$ a donc un taux de remplissage de $1/(p+1)^3$.

A.2 Approche modale

Une approche modale est basée sur l'utilisation d'espaces d'approximation locaux du type :

$$\mathbf{P}^p(K) = \{ \mathbf{x} = (x, y, z) \in K \mapsto x^i y^j z^k \in \mathbb{R}, \forall (i, j, k) \in \llbracket 0, p \rrbracket^3 / i + j + k \leq p \}. \quad (\text{A.8})$$

Les fonctions de base sont les plus couramment utilisées sont alors les polynômes de Legendre.

A.2.1 Nombre de degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté au sein de la cellule K correspond au cardinal de l'ensemble :

$$\{ (i, j, k) \in \llbracket 0, p \rrbracket^3 / i + j + k \leq p \}, \quad (\text{A.9})$$

qui est donné par :

$$\kappa_p := \binom{p+3}{3} = \frac{(p+3)!}{6p!}, \quad (\text{A.10})$$

et dont la valeur numérique, pour les premiers entiers p , est reportée dans le tableau A.1.

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
κ_p	4	10	20	35

TABLE A.1 – Valeurs de κ_p , pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$.

A.2.2 Taux de remplissage des matrices élémentaires

Chaque matrice élémentaire est de taille $\kappa_p \times \kappa_p$. Les fonctions de base de Legendre étant une famille de polynômes orthogonaux, la matrice de masse, calculée exactement, se retrouve naturellement condensée, et présente un taux de remplissage de κ_p .

En revanche, les polynômes de Legendre ne possédant pas la propriété de collocation des polynômes de Lagrange exprimée en (1.65), il n'est pas possible de réaliser une intégration condensée des intégrales de rigidité et de flux, qui présente alors le taux de remplissage maximal.

A.3 Bilan

On résume, dans les tableaux A.2 et A.3, le nombre de degrés de liberté et le taux de remplissage des matrices élémentaires pour les différentes approches GD considérées.

nodal-Gauss	nodal-Gauss-Lobatto	GD-modal
$6(p+1)^3 N^3$	$6(p+1)^3 N^3$	$6\kappa_p N^3$

TABLE A.2 – Nombre de degrés de liberté des différentes approches GD considérées, pour un maillage comportant N éléments. À titre indicatif, le nombre de degrés de liberté requis par le schéma de Yee est d'environ $6N$.

	nodal-Gauss	nodal-Gauss + condensation	nodal-Gauss-Lobatto	nodal-Gauss-Lobatto + condensation	modal
$\underline{\underline{M}}_K$	1	$\frac{1}{(p+1)^3}$	1	$\frac{1}{(p+1)^3}$	$1/\kappa_p$
$\underline{\underline{R}}_{K,\alpha}$	1	$\frac{1}{(p+1)^2}$	1	$\frac{1}{(p+1)^2}$	1
$\underline{\underline{F}}_K^f$	1	$\frac{1}{(p+1)^2}$	1	$\frac{1}{(p+1)^3}$	1

TABLE A.3 – Taux de remplissage des matrices élémentaires des différentes approches GD considérées, sur l'élément K et pour un degré d'approximation p (une valeur de 1 signifiant que la matrice est pleine).

Afin de quantifier plus concrètement les différences de coûts de calcul entre ces approches, on reporte, dans les tableaux A.4 et A.5, les valeurs exactes prises par ces quantités pour les premières valeurs de p .

Ordre	nodal-Gauss	nodal-Gauss-Lobatto	modal
$p = 1$	$48^3 N^3$	$48^3 N^3$	$24N^3$
$p = 2$	$162N^3$	$162^3 N^3$	$60N^3$
$p = 3$	$384^3 N^3$	$384^3 N^3$	$120N^3$
$p = 4$	$750^3 N^3$	$750^3 N^3$	$210N^3$

TABLE A.4 – Calcul du nombre de degrés de liberté des différentes approximations GD pour un maillage comportant N éléments et pour un degré d'approximation de $p \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Ordre	Matrice	nodal -Gauss	nodal-Gauss + condensation	nodal- Gauss-Lobatto	nodal- Gauss-Lobatto + condensation	modal
$p = 1$	$\underline{\underline{M}}_K$	100%	12,5%	100%	12,5%	25%
	$\underline{\underline{R}}_{K,\alpha}$	100%	25%	100%	25%	100%
	$\underline{\underline{F}}_K^f$	100%	25%	100%	12,5%	100%
$p = 2$	$\underline{\underline{M}}_K$	100%	3,7%	100%	3,7%	10%
	$\underline{\underline{R}}_{K,\alpha}$	100%	11%	100%	11%	100%
	$\underline{\underline{F}}_K^f$	100%	11%	100%	3,7%	100%
$p = 3$	$\underline{\underline{M}}_K$	100%	1,56%	100%	1,56%	5%
	$\underline{\underline{R}}_{K,\alpha}$	100%	6,25%	100%	6,25%	100%
	$\underline{\underline{F}}_K^f$	100%	6,25%	100%	1,56%	100%
$p = 4$	$\underline{\underline{M}}_K$	100%	0,8%	100%	0,8%	2,9%
	$\underline{\underline{R}}_{K,\alpha}$	100%	4%	100%	4%	100%
	$\underline{\underline{F}}_K^f$	100%	4%	100%	0,8%	100%

TABLE A.5 – Calcul du taux de remplissage des matrices élémentaires sur l'élément K et pour un degré d'approximation $p \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ces valeurs représentent le pourcentage de non-zéros sur un total de $(p+1)^6$ coefficients pour les approches nodales, et de κ_p^2 coefficients pour l'approche modale.

On obtient que l'approximation modale est celle qui mobilise le moins de degrés de liberté, avec un gain variant entre 2 et 3,5 par rapport aux approches nodales (pour des ordres de résolution n'excédant pas $p = 4$). En revanche, les matrices élémentaires présentant de loin le plus petit nombre de non-zéros sont celles de l'approche GD-Gauss-Lobatto condensée, qui apparaît alors comme l'approximation de plus faible complexité calculatoire. Nous avons donc choisi cette approche comme base travail de notre étude.

Annexe B

Démonstration des lemmes préliminaires à l'établissement de la condition CFL du schéma condensé

Nous présentons ici les démonstration des lemmes 2.18 et 2.19 intervenant dans l'étude de stabilité du schéma condensé, menée dans paragraphe 2.3.2.

Preuve du lemme 2.18. On se place dans le cadre des flux centrés. On commence par écrire :

$$\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right), \quad (\text{B.1})$$

que l'on injecte dans la définition de \mathcal{E}_h^n :

$$\mathcal{E}_h^n = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K^{GL} \left(\epsilon_K \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{E}_{hK}^n + \mu_K \mathbf{H}_K^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} - \mu_K \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right) dx. \quad (\text{B.2})$$

On écrit alors (2.97b) au temps t^{n-1} avec $\boldsymbol{\psi}_{hK} = \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K^{GL} \mu_K \left(\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} \right) \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx \\ &= \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_S \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds + \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds \right] \\ & - \frac{\Delta t}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^+ \mu_S^-}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \boldsymbol{\Pi}_S^- \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\tilde{\mathbf{H}}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^- \mu_S^+}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \boldsymbol{\Pi}_S^+ \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\tilde{\mathbf{H}}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^+ \right]. \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

La formule de Green discrète donne :

$$\frac{1}{2} \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{\partial K}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds + \frac{1}{2} \int_K^{GL} \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx. \quad (\text{B.4})$$

En reportant dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K^{GL} \mu_K \left(\mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{hK}^{n-\frac{1}{2}} \right) \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx - \int_K^{GL} \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \nabla \wedge \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} dx + \int_{\partial K \cap \partial \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_{hK}^n \cdot \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} ds \right] \\
 &- \frac{\Delta t}{2} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^+ \mu_S^+}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^- \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h\mathcal{K}_S^+}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^- \left(\tilde{\mathbf{H}}_{h\mathcal{K}_S^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^- \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_S^- \mu_S^+}} \left\langle \mathbf{n}_S \wedge \Pi_S^+ \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h\mathcal{K}_S^-}^n \right), \tilde{\mathfrak{J}}_S^+ \left(\tilde{\mathbf{H}}_{h\mathcal{K}_S^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_S^+ \right]. \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

En injectant cette équation dans (B.2), et en appliquant le changement d'inconnues $\tilde{\mathbf{E}}_{hK}^n = \sqrt{\epsilon_K} \mathbf{E}_{hK}^n$ et $\tilde{\mathbf{H}}_{hK}^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\mu_K} \mathbf{H}_{hK}^{n+\frac{1}{2}}$, on obtient l'expression voulue. ■

Preuve du lemme 2.19. Il s'agit simplement d'écrire les termes de masse, rigidité et flux de bord dans l'élément de référence, et d'effectuer une minoration du terme masse. On procède terme après terme :

$$\int_K^{GL} \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K dx := \int_{\hat{K}}^{GL} (\mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K) \circ T_K |J_K| d\hat{x} = \int_{\hat{K}}^{GL} |J_K| DT_K^{-1} DT_K^{*-1} \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{E}}_K d\hat{x} \geq \int_{\hat{K}}^{GL} \Lambda_K \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{E}}_K d\hat{x}. \quad (\text{B.6a})$$

De même :

$$\int_K^{GL} \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{H}_K dx \geq \int_{\hat{K}}^{GL} \Lambda_K \hat{\mathbf{H}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K d\hat{x}. \quad (\text{B.7a})$$

Puis :

$$\int_K^{GL} \nabla \wedge \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_K dx := \int_{\hat{K}}^{GL} (\nabla \wedge \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_K) \circ T_K |J_K| d\hat{x} = \int_{\hat{K}}^{GL} \frac{|J_K|}{J_K} DT_K \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot DT_K^{*-1} \hat{\mathbf{H}}_K d\hat{x} \quad (\text{B.8a})$$

$$= \int_{\hat{K}}^{GL} \text{sgn}(J_K) \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K d\hat{x}. \quad (\text{B.8b})$$

De même :

$$\int_K^{GL} \mathbf{E}_K \cdot \nabla \wedge \mathbf{H}_K dx = \int_{\hat{K}}^{GL} \text{sgn}(J_K) \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{H}}_K d\hat{x}. \quad (\text{B.9a})$$

Quant au terme de bord :

$$\int_{\partial K \cap \Omega}^{GL} \mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_K ds := \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^b, \\ f \subset \partial K}} \int_f^{GL} (\mathbf{n}_K \wedge \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_K) \circ T_{K_k} |J_K| \|DT_K^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_K\| d\hat{\sigma} \quad (\text{B.10a})$$

$$= \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^b, \\ f \subset \partial K}} \int_f^{GL} \frac{|J_K| \|DT_K^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_K\|}{J_K \|DT_K^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_K\|} DT_K \hat{\mathbf{n}}_K \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot DT_K^{*-1} \hat{\mathbf{H}}_K d\hat{\sigma} \quad (\text{B.10b})$$

$$= \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_h^b, \\ f \subset \partial K}} \int_f^{GL} \text{sgn}(J_K) \hat{\mathbf{n}}_K \wedge \hat{\mathbf{E}}_K \cdot \hat{\mathbf{H}}_K d\hat{\sigma}, \quad (\text{B.10c})$$

d'où le résultat. ■

Annexe C

Autres exemples de flux condensés

D'autres flux condensés, différents de $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$, $Q^2(3h)/Q_m^1(h)$ et $Q^4(9h)/Q_m^2(3h)$, ont été construits au cours de notre étude. Cependant, ne présentant pas un compromis de qualité/performance satisfaisant, ces raccords n'ont pas été utilisés pour les applications, ni intégrés dans l'algorithme de post-maillage. Nous les présentons ici succinctement, car il nous semble important de montrer que la méthode de condensation de flux développée peut s'adapter à d'autres accolements que les trois principaux utilisés en pratique (pour retrouver la méthodologie de construction complète, se référer à la section 3.1).

C.1 Configuration $Q^1(h)/Q_m^1(h/10)$

On représente sur la figure C.1 le passage de la configuration hp non-conforme unitaire 3D à la situation 1D correspondante.

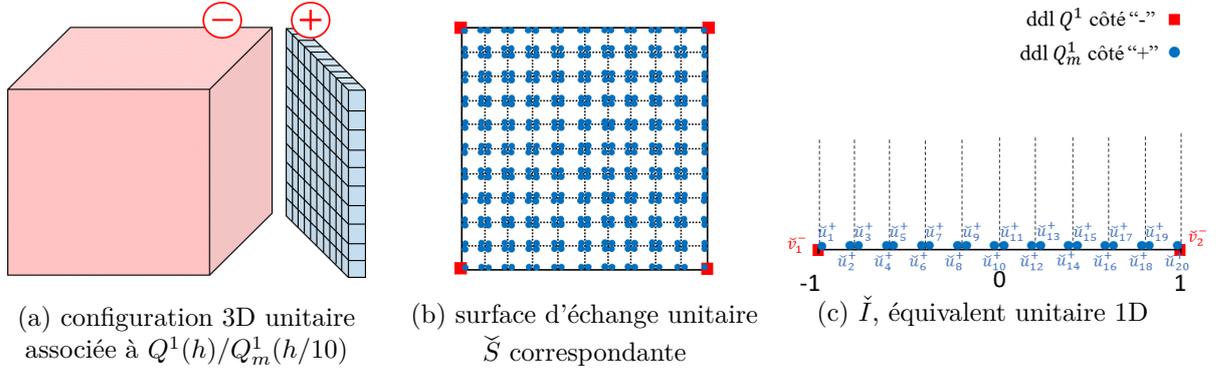


FIGURE C.1 – Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement hp non-conforme de type $Q^1(h)/Q_m^1(h/10)$.

En utilisant la même logique que pour le raccord $Q^1(h)/Q_m^1(h/2)$, on obtient l'opérateur de trace unitaire 1D côté "-" suivant :

$$\forall \check{u}^+ \in Q_m^1(\check{I}^+), \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+) = \left(\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \check{u}_i^+ \right) \check{L}_1^- + \left(\frac{1}{10} \sum_{i=11}^{20} \check{u}_i^+ \right) \check{L}_2^-, \quad (C.1)$$

associée à la quadrature de Gauss-Lobatto à 2 points par directions. Le schéma ainsi obtenu est consistant à l'ordre 1, comme l'illustre la figure C.2, mais ne présente pas une qualité satisfaisante pour être utilisée dans les applications (précision de référence non assurée).

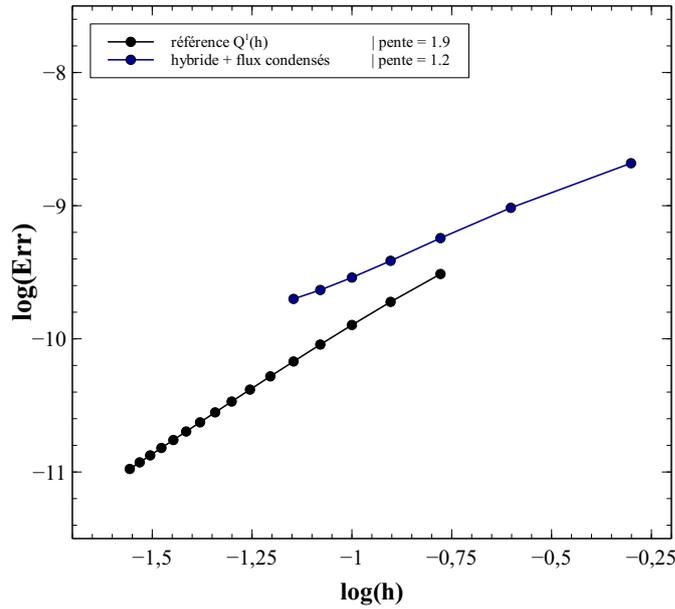


FIGURE C.2 – Courbes de convergence pour la configuration $Q^1(h)/Q_m^1(h/10)$ sur le cas-test de cavité métallique (propagation du mode (1,1,1) avec $T_f = 5ns$).

C.2 Configuration $Q^2(2h)/Q_m^1(h)$

La mise en place de la situation hp non-conforme unitaire 1D est illustrée sur la figure C.3.

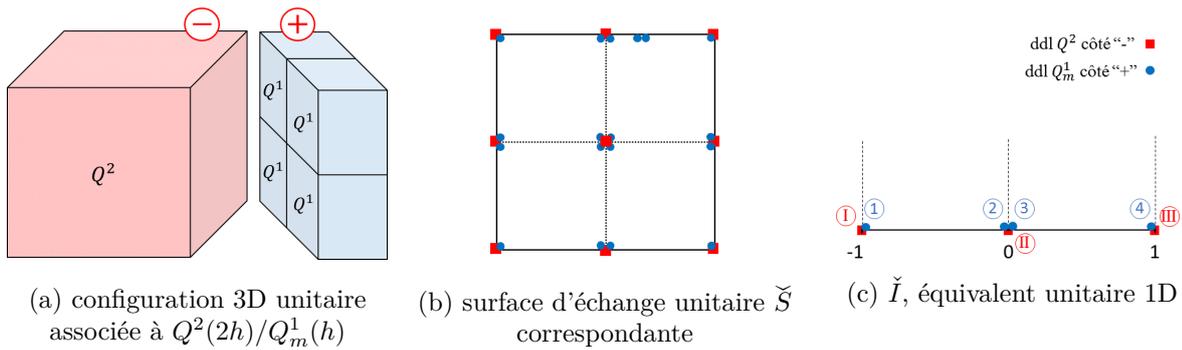


FIGURE C.3 – Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement hp non-conforme de type $Q^2(2h)/Q_m^1(h)$.

À partir de l'*a priori* suivant :

$$\forall \check{u}^+ \in Q_m^1(\check{I}^+), \quad \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+) = (a\check{u}_1^+ + b\check{u}_2^+) \check{L}_1^- + (c\check{u}_1^+ + d\check{u}_2^+ d\check{u}_3^+ + e\check{u}_4^+) \check{L}_2^- + (b\check{u}_3^+ + a\check{u}_4^+) \check{L}_3^-, \quad (\text{C.2})$$

associé à la quadrature de Gauss-Lobatto 3 points par direction, et un *a priori* de consistance Q^0 de chaque côté de l'interface, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2}, \\ c = \frac{1}{4}, \\ d = \frac{1}{4}, \\ e = \frac{1}{4}, \\ f = \frac{1}{4}. \end{array} \right. \quad (C.3)$$

Le schéma résultant est consistant à un ordre situé entre 1 et 2 (voir C.4), présente un domaine de précision exploitable, mais la contrainte CFL issue des éléments $Q^2(2h)$ est trop restrictive pour que cette configuration présente un intérêt pratique.

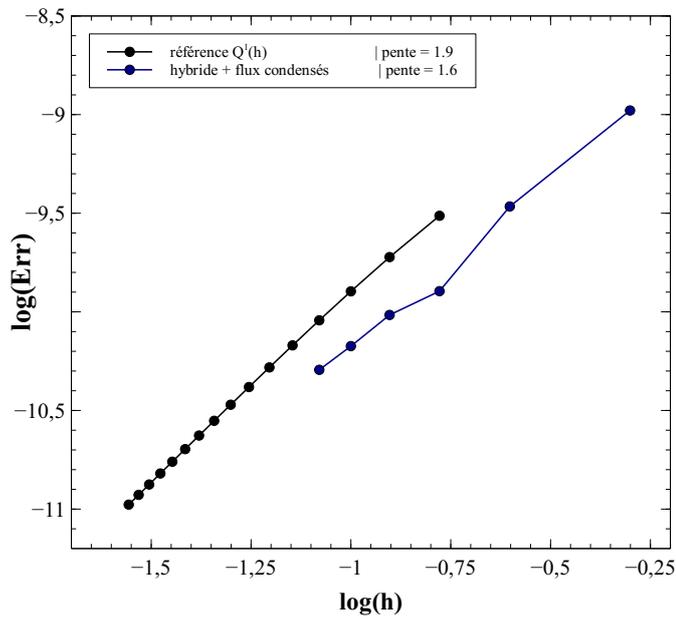
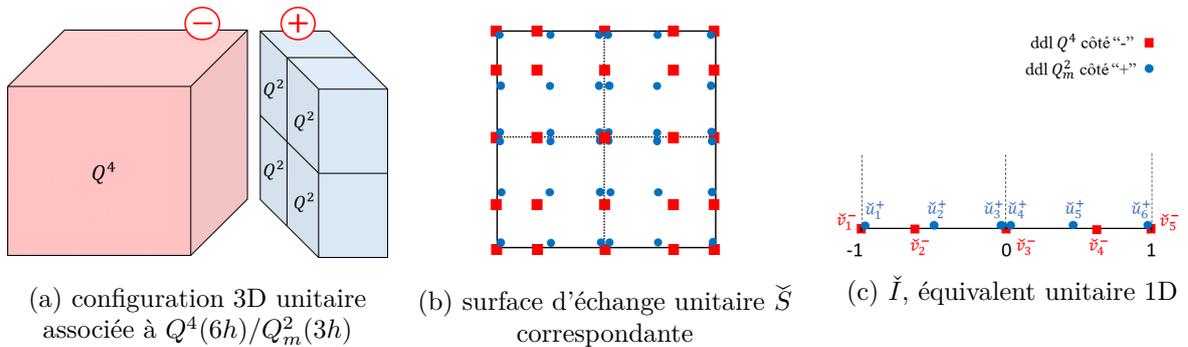


FIGURE C.4 – Courbes de convergence pour la configuration $Q^2(2h)/Q_m^1(h)$ sur le cas-test de cavité métallique (propagation du mode (1,1,1) avec $T_f = 5ns$).

C.3 Configuration $Q^4(6h)/Q_m^2(3h)$

On considère cette fois l'accolement hp non-conforme d'ordre élevé de la figure C.5.



(a) configuration 3D unitaire associée à $Q^4(6h)/Q_m^2(3h)$

(b) surface d'échange unitaire \tilde{S} correspondante

(c) \tilde{I} , équivalent unitaire 1D

FIGURE C.5 – Mise en place de l'équivalent unitaire 1D à un accolement hp non-conforme de type $Q^4(6h)/Q_m^2(3h)$.

L'opérateur de trace est alors cherché sous la forme :

$$\forall \check{u}^+ \in Q_m^2(\check{I}^+), \check{\Pi}_I^-(\check{u}^+) = a\check{u}_1^+ \check{L}_1^- + (b\check{u}_1^+ + c\check{u}_2^+ d\check{u}_3^+) \check{L}_2^- + (e\check{u}_2^+ + f\check{u}_3^+ + f\check{u}_4^+ + e\check{u}_5^+) \check{L}_3^- + (d\check{u}_4^+ + c\check{u}_5^+ b\check{u}_6^+) \check{L}_4^- + a\check{u}_6^+ \check{L}_5^-, \quad (\text{C.4})$$

La quadrature associée est celle de Gauss-Lobatto à 4 points par direction, et on se donne des *a priori* de consistance $Q^0(\check{I}^-) \times Q_m^2(\check{I}^+)$ et $Q^0(\check{I}^+) \times Q_m^4(\check{I}^-)$. Le calcul donne alors :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{6}{49}, \\ c = \frac{60}{49}, \\ d = -\frac{17}{49}, \\ e = 0, \\ f = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Comme le montre la figure C.6, le schéma résultant est consistant à l'ordre 1, et présente à ce titre un domaine d'iso-qualité $Q^1(h)$ trop limité pour envisager son utilisation pratique. De plus, la contrainte CFL issue de cette configuration est trop restrictive pour que ce raccord permette des gains systématiques en temps de calcul.

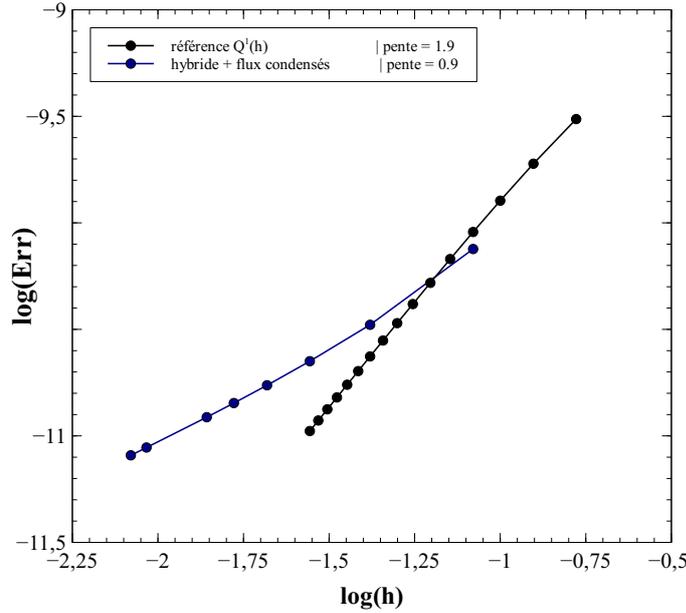


FIGURE C.6 – Courbes de convergence pour la configuration $Q^4(9h)/Q_m^2(6h)$ sur le cas-test de cavité métallique (propagation du mode (1,1,1) avec $T_f = 5ns$).

Annexe D

Rappels sur l'injection d'un champ incident par une surface de Huygens

Nous présentons ici la méthode communément adoptée afin d'injecter un champ incident dans le domaine de calcul (utilisée par exemple dans [51][31] dans un contexte GD, [11] en EF, [96] en DF, ou encore [25] en VF).

Pour les méthodes numériques variationnelles ou différentielles, une des difficultés de la simulation en espace libre est le choix de la formulation du problème à adopter sur le domaine de calcul Ω , nécessairement borné (maillage fini). Plus précisément, la principale problématique est de déterminer la condition aux limites à imposer sur sa frontière $\partial\Omega$, afin que la solution numérique obtenue coïncide bien avec la solution du problème non-borné. Le choix est délicat car il nécessite de préserver la physique du phénomène étudié : par exemple, simuler la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide tout en bornant artificiellement le domaine de calcul par une condition métal parfait produirait des réflexions n'ayant aucun sens physique.

Pour des cas d'illumination d'un objet \mathcal{O} par un champ incident (ou onde plane), c'est-à-dire par une source située à l'infini, définie dans tout l'espace et solution des équations de Maxwell homogènes, l'approche généralement adoptée se base sur la décomposition de la solution en deux parties :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_d, \quad (\text{D.1})$$

où $\mathbf{u} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ est le champ électromagnétique recherché (ou champ total), \mathbf{u}_i le champ incident, et \mathbf{u}_d le champ diffracté. Or, le champ diffracté a la propriété d'être décroissant à l'infini. L'idée est donc de restreindre l'application du champ incident à l'intérieur d'un volume borné $\mathcal{H} \subset \Omega$ contenant l'objet, dont le contour $\partial\mathcal{H}$ est appelé surface de Huygens. Le volume complémentaire $\mathcal{H}^c = \Omega \setminus \mathcal{H}$ ne contenant plus que du champ diffracté, on applique alors une condition aux limites absorbante (usuellement des couches PML) sur la frontière du domaine de calcul (voir figure D.1). On cherche ainsi à calculer :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{cases} \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_d & \text{sur } \mathcal{H} \\ \mathbf{u}_d & \text{sur } \mathcal{H}^c \end{cases}. \quad (\text{D.2})$$

Or, en injectant cette quantité dans les équations d'évolution (1.11a)-(1.11b), on montre que $\tilde{\mathbf{u}}$ est solution du système :

$$\begin{cases} \underline{\epsilon} \partial_t \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \wedge \tilde{\mathbf{H}} + \underline{\sigma} \tilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{J}_s - \mathbf{n}_{\mathcal{H}^c} \wedge \mathbf{H}_i \delta_{\partial\mathcal{H}} & \text{dans } \Omega \times (0, T_f), & (\text{D.3a}) \\ \underline{\mu} \partial_t \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \wedge \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{n}_{\mathcal{H}^c} \wedge \mathbf{E}_i \delta_{\partial\mathcal{H}} & \text{dans } \Omega \times (0, T_f), & (\text{D.3b}) \\ \text{condition aux limites sur } \partial\mathcal{O} \times (0, T_f), & & (\text{D.3c}) \\ \text{condition aux limites absorbante sur } \partial\Omega \times (0, T_f), & & (\text{D.3d}) \end{cases}$$

où $\mathbf{n}_{\mathcal{H}^c}$ est la normale unitaire sortante sur $\partial\mathcal{H}^c$, et $\delta_{\partial\mathcal{H}^c}$ la distribution de Dirac sur $\partial\mathcal{H}^c$. Ce système est alors discrétisé et résolu par le schéma GDDT, et le champ total est finalement obtenu en restreignant la solution numérique sur le volume \mathcal{H} . On voit ainsi que le champ incident est injecté sous la forme d'un terme source surfacique, défini sur la surface de Huygens. En pratique, la surface de Huygens est portée par des faces du maillage, et le champ incident est introduit via les termes de flux du schéma.

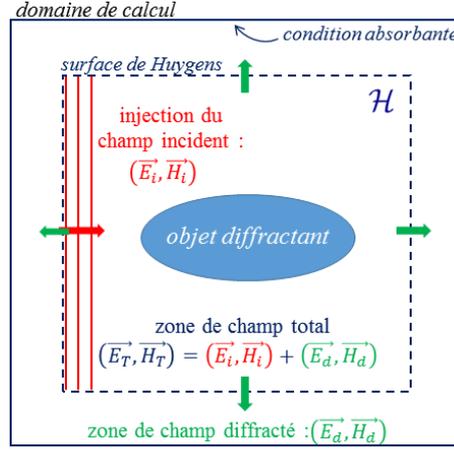


FIGURE D.1 – Mise en place d'un cas-test de diffraction en espace libre sur un domaine de calcul borné, via l'introduction d'une surface de Huygens.

Dans les applications considérées dans le chapitre 5, nous n'utilisons pas de source de courant, le milieu de propagation est le vide, l'objet \mathcal{O} est surfacique et parfaitement métallique, le champ diffracté est nul à l'instant initial, et nous utilisons la condition de Silver-Müller comme condition aux limites absorbante sur le bord du domaine de calcul. On résout donc le système suivant :

$$\begin{cases} \epsilon_0 \partial_t \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \wedge \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{n}_{\mathcal{H}^c} \wedge \mathbf{H}_i \delta_{\partial\mathcal{H}}, & \text{dans } \Omega \times (0, T_f), & \text{(D.4a)} \\ \mu_0 \partial_t \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \wedge \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{n}_{\mathcal{H}^c} \wedge \mathbf{E}_i \delta_{\partial\mathcal{H}}, & \text{dans } \Omega \times (0, T_f), & \text{(D.4b)} \\ \mathbf{n}_{\mathcal{O}} \wedge \tilde{\mathbf{E}} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{O} \times (0, T_f), & \text{(D.4c)} \\ \mathbf{n}_{\Omega} \wedge \tilde{\mathbf{E}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{n}_{\Omega} \wedge \mathbf{n}_{\Omega} \wedge \tilde{\mathbf{H}} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T_f), & \text{(D.4d)} \\ \tilde{\mathbf{E}}(\cdot, t=0) = \mathbf{E}_i(\cdot, t=0) \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & \text{et } \tilde{\mathbf{H}}(\cdot, t=0) = \mathbf{H}_i(\cdot, t=0) \mathbf{1}_{\mathcal{H}}, & \text{dans } \Omega, & \text{(D.4e)} \end{cases}$$

où $\mathbf{n}_{\mathcal{O}}$ est la normale unitaire sortante à l'objet diffractant. Ce type de résolution sera appelée résolution en champ total.

Une solution alternative est de simuler uniquement l'évolution du champ diffracté. Dans ce cas, en décomposant directement le champ total sous la forme (D.1) dans le problème d'évolution, on obtient le système vérifié par $(\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d)$:

$$\begin{cases} \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_d - \nabla \wedge \mathbf{H}_d = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T_f), & \text{(D.5a)} \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{H}_d + \nabla \wedge \mathbf{E}_d = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T_f), & \text{(D.5b)} \\ \mathbf{n}_{\mathcal{O}} \wedge \mathbf{E}_d = -\mathbf{n}_{\mathcal{O}} \wedge \mathbf{E}_i, & \text{sur } \partial\mathcal{O} \times (0, T_f), & \text{(D.5c)} \\ \mathbf{n}_{\Omega} \wedge \mathbf{E}_d + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{n}_{\Omega} \wedge \mathbf{n}_{\Omega} \wedge \mathbf{H}_d = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T_f), & \text{(D.5d)} \\ \mathbf{E}_d(\cdot, t=0) = 0 & \text{et } \mathbf{H}_d(\cdot, t=0) = 0, & \text{dans } \Omega. & \text{(D.5e)} \end{cases}$$

Nous dirons alors que nous effectuons une résolution en champ diffracté. Dans ce cas, on voit que le champ incident est injecté au niveau du contour de l'objet diffractant. Contrairement à la formulation (D.3), il

n'est donc pas nécessaire d'introduire une surface de Huygens dans le volume de calcul. Les contraintes de maillage sont donc moins restrictives. On revient alors facilement au champ total en ajoutant la valeur du champ incident à la solution numérique obtenue.

Annexe E

Résultats numériques complémentaires

Dans ce qui suit, nous présentons plusieurs résultats numériques venant appuyer ou illustrer certains points évoqués dans les chapitres précédents.

E.1 Convergence du schéma GDDT- Q^p en flux centrés

La figure E.1 présente la convergence du schéma GDDT pour le cas-test du paragraphe 1.4.3 (modes de cavité métallique) et en flux centrés ($\beta = 0$).

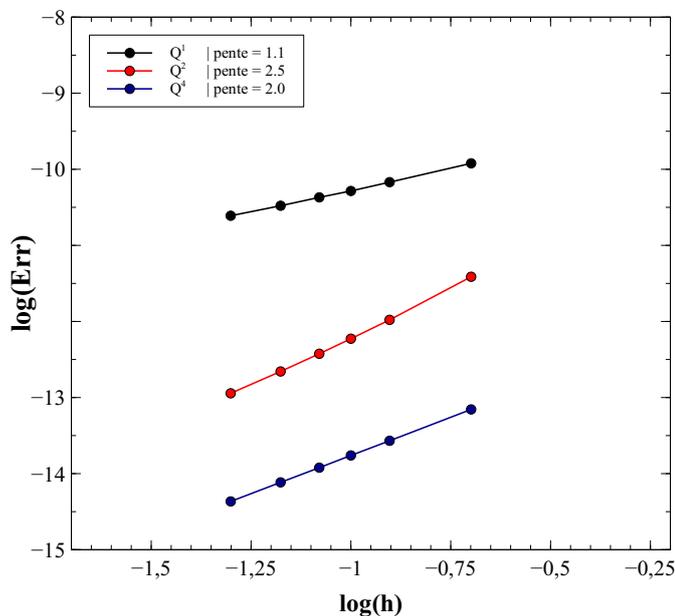


FIGURE E.1 – Courbes de convergence du schéma GDDT en flux centrés pour les ordres 1, 2 et 4, sur le cas-test des modes de cavité résonante (voir paragraphe 1.4.3).

Comparativement aux résultats obtenus dans le paragraphe 1.4.3, on constate la perte d'un ordre de convergence pour la résolution Q^1 (les résolutions Q^2 et Q^4 étant limitées par l'ordre du schéma temporel, elles n'apportent pas d'information supplémentaire). Le phénomène de super-convergence est donc ici perdu en flux centrés. Ce résultat représente ainsi une motivation supplémentaire quant à l'utilisation

des flux décentrés pour les applications.

E.2 Convergence sur le maillage hp en damier

Nous avons identifié dans le paragraphe 3.3.4 un maillage hybride pathologique, dite configuration en damier (voir figure 3.17), pouvant *a priori* provoquer une perte de qualité des solutions GDDT classique et condensée. Nous présentons donc ici les résultats de convergence sur ce cas-test, reportés sur la figure E.2.

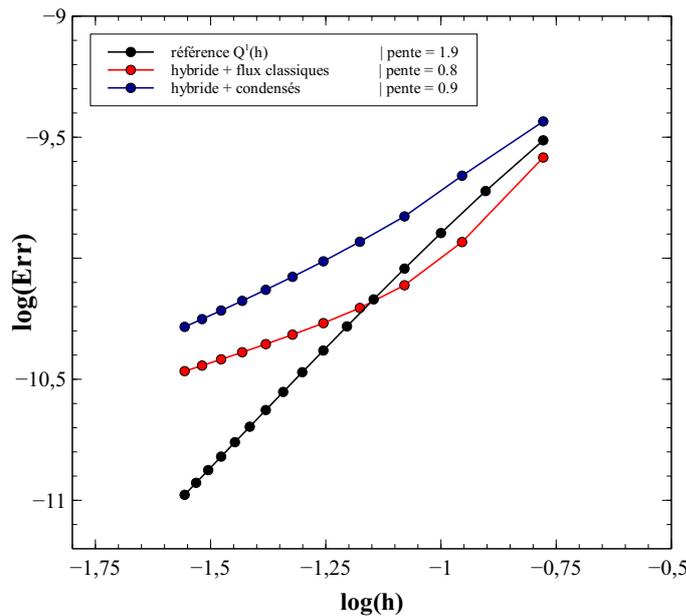


FIGURE E.2 – Courbes de convergence sur le cas-test du damier (voir figure 3.17), pour les différents types de résolution GDDT (propagation du (1,1,1)-modes de cavité avec $T_f = 5ns$).

On observe une cassure nette des courbes de convergence dans le cas des résolutions hybrides, amenant rapidement un niveau de précision plus faible que celui de référence. Comme nous l'avons envisagé, ce phénomène est vraisemblablement dû à la modulation d'amplitude des solutions hybrides, amplifié par la démultiplication des surfaces d'échange hp non-conformes.

Remarquons néanmoins que la convergence du schéma n'est pas perdue sur cette configuration. Notons également que l'ordre de convergence est légèrement supérieur pour le schéma condensé que pour le schéma hybride.

E.3 Illumination d'une carrosserie automobile par une source de courant ponctuelle

Nous présentons ici les résultats obtenus pour un cas-test de diffraction d'un champ électromagnétique créé par une source ponctuelle de courant \mathbf{J}_S . La géométrie considérée est celle d'une carrosserie automobile parfaitement métallique, représentée sur la figure E.3a, issue du projet européen GEMCAR.

L'intérêt de ce cas-test est de faire intervenir une source d'illumination différente des ondes planes utilisées dans le chapitre 5. Il permet donc d'évaluer l'apport du schéma condensé sur un cadre d'application plus large que celui considéré jusqu'alors.

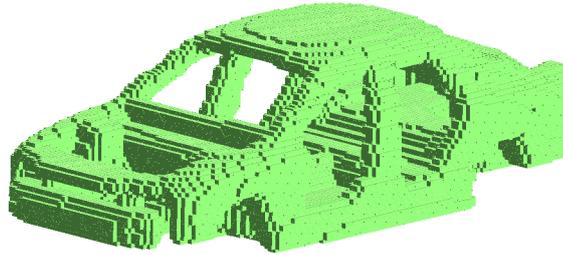
Cependant, nous avons choisi d'exclure cette étude des résultats numériques principaux du chapitre 5 car nous n'avons pas pu obtenir une solution convergée sur ce cas-test. Nous ne pouvons donc pas interpréter les différences entre la solution de référence et les solutions hybrides, ou, plus précisément,

nous ne savons pas déterminer si les différences observées vont dans le sens d'une amélioration ou d'une détérioration de la qualité de référence. Il demeure toutefois intéressant d'évaluer les coûts de calcul des différents types de résolution GDDT, afin notamment d'estimer l'impact d'un terme source de courant sur les gains en performances numériques de l'approche condensée.

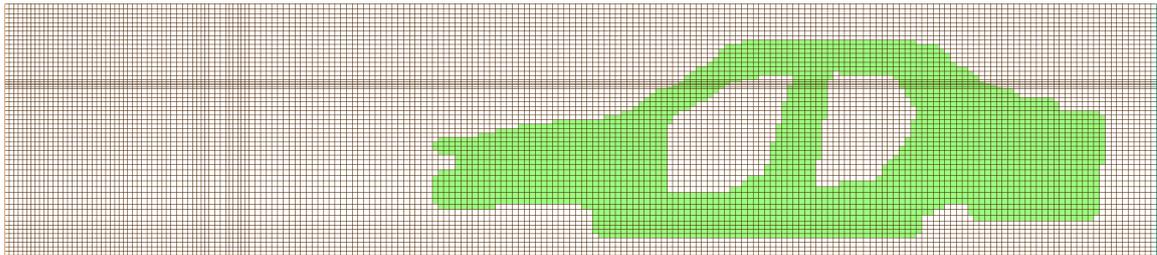
Les paramètres généraux de simulation sont les suivants :

- dimensions du domaine de calcul : $8,04\text{m} \times 3,41\text{m} \times 2,52\text{m}$ ($[-1.95, 6.09] \times [0.82, 2.59] \times [-1.21, 1.31]$),
- condition aux limites : Silver-Müller,
- fréquence du point source de courant : $f = 6\text{GHz}$,
- dimensions du maillage initial, représenté sur la figure E.3b : $211 \times 57 \times 90$ (maillage à pas variable, $\Delta x^{\max} \simeq \Delta y^{\max} \simeq \Delta z^{\max} \simeq \frac{\lambda}{15}$ et $\Delta x^{\min} \simeq \Delta y^{\min} \simeq \Delta z^{\min} \simeq \frac{\lambda}{40}$),
- temps de simulation : $T_f = 20\text{ns}$ (1 080 itérations temporelles),
- résolution en champ total.

Afin de conserver une description satisfaisante du support du terme source, nous n'avons pas cherché à introduire d'éléments $Q^4(9h)$, conduisant à un déraffinement trop important. Le maillage hybride Q^1/Q^2 issu du post-maillage est reporté sur la figure E.3c, les résultats de simulation sur la figures E.4 et E.5, et les performances numériques dans le tableau E.1.



(a) géométrie 3D



(b) coupe du maillage initial

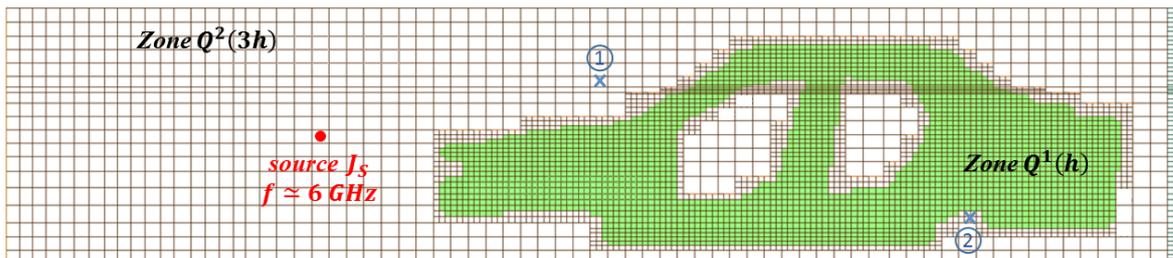
(c) coupe du maillage hybride Q^1/Q^2

FIGURE E.3 – Présentation du cas-test de la carrosserie automobile, et localisation qualitative du point source de courant J_S et des deux points d'observations.

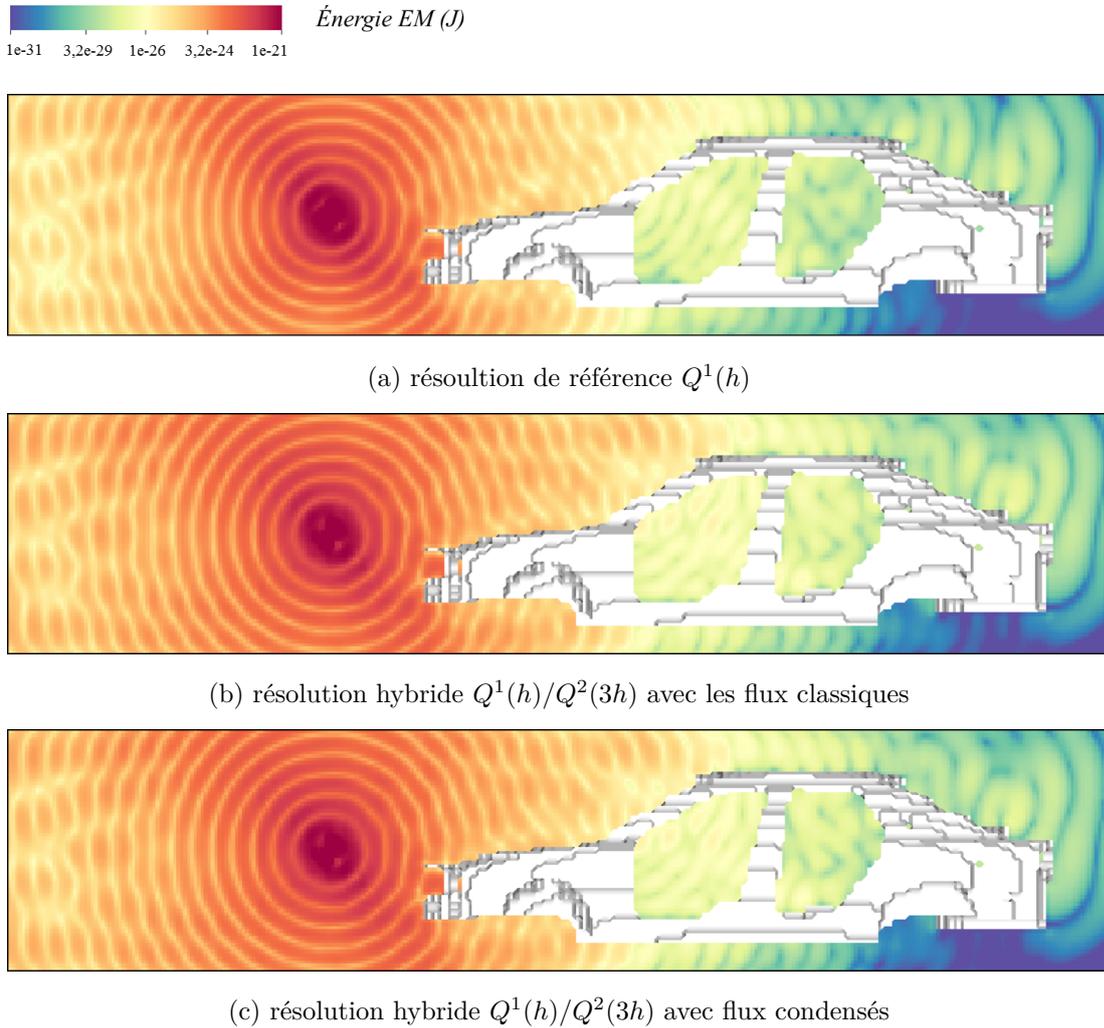


FIGURE E.4 – Cartographie de l'énergie électromagnétique (EM) au temps final de simulation dans un plan de coupe, pour la résolution GDDT de référence, hybride classique, et hybride condensée.

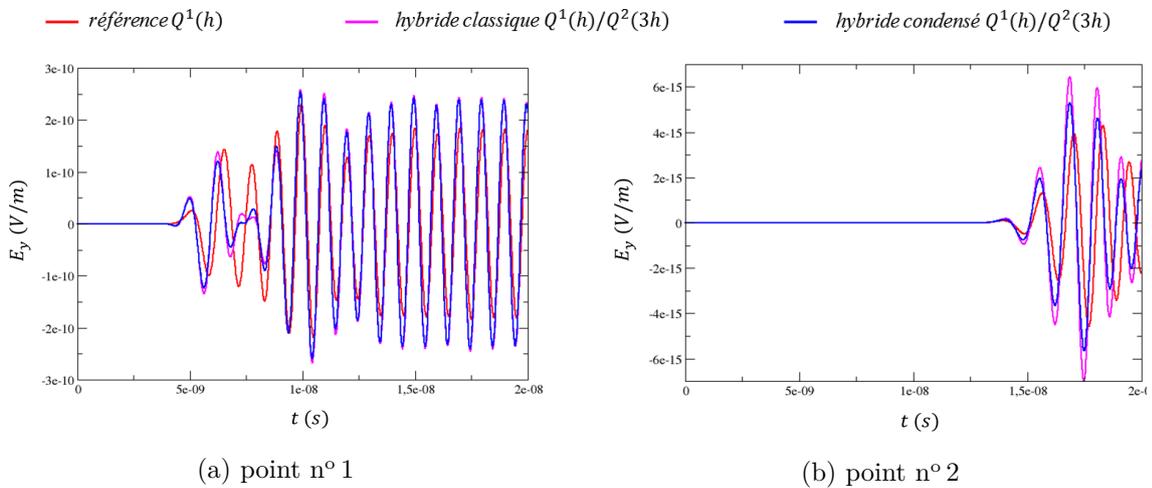


FIGURE E.5 – Évolution temporelle de la composante E_y aux points d'observation n° 1 et n° 2.

Maillage hp	Flux non-conformes	$\frac{N_{ddl}^{réf}}{N_{ddl}}$	$\frac{t\text{-CPU}^{réf}}{t\text{-CPU}}$
$Q^1(h)$ (référence)	-	1	1
$Q^1(h)/Q^2(3h)$	classiques condensés	2.5	0.1 2.4

TABLE E.1 – Gains en stockage mémoire ($N_{ddl}^{réf}/N_{ddl}$) et en temps de calcul ($t\text{-CPU}^{réf}/t\text{-CPU}$) pour les résolutions GDDT sur le maillage de référence et sur le maillage hybride.

Comme évoqué précédemment, il est délicat d'interpréter ces résultats en termes de précision. Soulignons cependant qu'on observe une assez bonne correspondance entre les différentes solutions dans les cartographies globales de la figure E.4. Les sorties ponctuelles font néanmoins apparaître quelques différences, surtout lors de la phase transitoire. Notons également que les zones de champ relativement régulières, les solutions hybrides classique et condensée donnent des résultats équivalents.

S'agissant des performances numériques, l'approche hybride condensée permet de diviser le stockage mémoire et les temps de calcul d'un facteur proche de 2,5 par rapport à la résolution de référence. On retrouve ainsi les ordres de grandeurs du chapitre 5. Les gains acquis par la chaîne de calcul développée ne sont donc pas remis en cause par l'utilisation d'une source ponctuelle de courant.

Bibliographie

- [1] R. Hockney and J. Eastwood. *Computer simulation using particles*. CRC Press, 1981.
- [2] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *I.E.E.E., Transactions on Antennas Propagation*, 14 :302–307, 2008.
- [3] R. Holland and L. Simpson. Finite-difference analysis of emp coupling to thin struts and wires. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2 :88–97, 1981.
- [4] C. Guiffaut and A. Reineix. Cartesian shift thin wire formalism in the fdtd method with multiwire junctions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 58(8) :2658–2665, 2010.
- [5] T. Volpert. *Étude d'un schéma différences finies haute précision et d'un modèle de fil mince oblique pour simuler les perturbations électromagnétiques sur véhicule aérospatial*. PhD thesis, Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace (ISAE), 2014.
- [6] L. D. Angulo, M. R. Cabello, J. Alvarez, A. R. Bretones, and S. G. Garcia. From microscopic to macroscopic description of composite thin pannels : A road map for their simulation in time domain. *IEE - Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 66(2) :660–668, 2018.
- [7] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31 :629–651, 1977.
- [8] J. P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114 :185–200, 1994.
- [9] A. Ditkowski, K. Dridi, and J. S. Hesthaven. Convergent cartesian grid methods for maxwell's equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 170(1) :39–80, 2001.
- [10] A. C. Cangellaris and D. B. Wright. Analysis of the numerical error caused by the stair-stepped approximation of a conducting boundary in fdtd simulations of electromagnetic phenomena. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39(10) :1518–1525, 1991.
- [11] N. Deymier. *Étude d'une méthode d'éléments finis d'ordre élevé et son hybridation avec d'autres méthodes numériques pour la simulation électromagnétique instationnaire dans un contexte industriel*. PhD thesis, Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace (ISAE), 2017.
- [12] A. Taflove. *Advances in computational electrodynamics : the finite-difference time domain*. Artech House, 1998.
- [13] J. Fang. *Time Domain Finite Difference Computation for Maxwell's Equations*. PhD thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, 1989.
- [14] C. W. Manry, S. L. Broschat, and J. B. Schneider. Higher-order fdtd methods for large problems. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, 10(2) :17–29, 1995.
- [15] C. W. Manry, S. L. Broschat, and J. B. Schneider. Low-dispersive super high-order fdtd schemes. *IEE - Antennas and Propagat. Soc. Int. Symposium (Salt Lake City, UT)*, 3 :1510–1513, 2000.
- [16] T. G. Jurgens, A. Taflove, K. R. Umashankar, and T. G. Moore. Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces. *IEE - Antennas and Propagation*, 40(4) :357–366, 1992.
- [17] S. Dey and R. Mittra. A modified locally conformal finite-difference time-domain algorithm for modeling three-dimensional perfectly conducting targets. *Microwave and Optical Technology Letters*, 17(6) :349–352, 1998.

- [18] W. Yu, R. Mittra, D. Arakaki, and D. H. Werner. A conformal finite difference time domain (cfdd) algorithm for modeling perfectly conducting objects. *The 16th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics*, 2000.
- [19] M. W. Chevalier and R. J. Luebbers. Dynamically adaptive mesh refinement fdtd : A stable and efficient technique for time-domain simulations. *IEE - Tran. Aten. Prop.*, 45 :411–421, 1997.
- [20] M. J. Berger and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 82 :64–84, 1989.
- [21] T. Fouquet. *Raffinement de maillage spatio-temporel local pour les équations de Maxwell*. PhD thesis, Université de Paris IX Dauphine, 2000.
- [22] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. Conservative space-time mesh refinement methods for the fdtd solution of maxwell’s equations. *J. Comput. Phys.*, 211(1) :9–35, 2005.
- [23] N. Canouet. *Méthodes de Galerkin Discontinu pour la résolution du système de Maxwell sur des maillages localement raffinés non-conformes*. PhD thesis, École des Ponts ParisTech, 2003.
- [24] J. P. Cioni and M. Remaki. Comparaison de deux methodes de volumes finis en electromagnetisme. 2008.
- [25] P. Bonnet. *Résolution des équations de Maxwell instationnaires et harmoniques par une technique de volumes finis. Applications à des problèmes de compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand, 1998.
- [26] J. C. Nédélec. Mixed finite elements in r3. *Numerical Mathematics*, 35 :315–341, 1980.
- [27] J. C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in r3. *Numerical Mathematics*, 50 :57–81, 1986.
- [28] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. 12, 1973.
- [29] J. F. Remacle, J. Flaherty, and M. Shephard. An adaptive discontinuous galerkin technique with an orthogonal basis applied to compressible flow problems. *SIAM Review*, 45(1) :53–72, 2003.
- [30] J. Xin and J. Flaherty. Viscous stabilization of discontinuous galerkin solutions of hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 56 :444–458, 2006.
- [31] S. Pernet. *Étude de méthodes d’ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Paris Dauphine-Paris IX, UFR Mathématiques de la décision, 2004.
- [32] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno. Convergence and stability of a discontinuous galerkin time-domain method for the 3d heterogeneous maxwell equations on unstructured meshes. *ESAIM : Math. Midel. and Num. Anal.*, 39(6) :1149–1176, 2005.
- [33] F. R. Foust, T. F. Bell, M. Spasojevic, and U. S. Inan. Discontinuous galerkin particle-in-cell simulation of longitudinal plasma wave damping and comparison to the landau approximation and the exact solution of the dispersion relation. *Physics of Plasmas*, 18(6), 2011.
- [34] V. Perrier. Discontinuous galerkin methods for aerodynamic applications. *Paris, France*, 56 :444–458, 2015.
- [35] N. Chevaugéon, J. F. Remacle, X. Gallez, P. Ploumhans, and S. Caro. Efficient discontinuous galerkin methods for solving acoustic problems. *AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California*, 2005.
- [36] J. S. Hesthaven and T. Warburton. *Nodal discontinuous Galerkin methods - algorithms, analysis, and applications*. Springer, 2008.
- [37] C. A. Brebbia and R. Magureanu. The boundary element method for electromagnetic problems. *Engineering Analysis*, 4(4) :1781–185, 1987.
- [38] S. Akhtarzad and P. B. Johns. The solution of maxwell’s equations in three space dimensions and time by the tlm method of numerical analysis. *Proceedings IEE*, 12 :1344–1348, 1975.
- [39] C. Christopoulos. The transmission-line modeling method : Tlm. *IEEE Press and Oxford University Press, A volume in the IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory*, 1995.
- [40] X. Ferrieres, J. P. Parmantier, S. Bertuol, and A. R. Ruddle. Application of a hybrid finite difference/finite volume method to solve an automotive emc problem. *IEEE Trans. on Eletromag. Compatibility*, 46(4) :624–234, 2004.

- [41] M. Yang, Y. Chen, and R. Mittra. Hybrid finite-difference/finite-volume time-domain analysis for microwave integrated circuits with curved pec surfaces using a nonuniform rectangular grid. *IEEE Trans. on Microwave Theor. and Tech.*, 48(6) :969–975, 2000.
- [42] F. Edelvik and G. Ledfelt. Explicit hybrid time domain solver for the maxwell equations in 3d. *Journal of Scientific Computing*, 15(1) :61–78, 2000.
- [43] R. W. Davies, K. Morgan, and O. Hassan. A high order hybrid finite element method applied to the solution of electromagnetic wave scattering problems in the time domain. *Comput. Mech.*, 44 :321–331, 2009.
- [44] P. O. Persson. A sparse and high-order accurate line-based discontinuous galerkin method for unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 233 :414–429, 2013.
- [45] H. Fahs. *Méthodes de type Galerkin Discontinu d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires sur des maillages simplexes non-conformes*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2008.
- [46] R. M. Kirby and S. Sherwin. To cg or to hdg : A comparative study. *Journal of Scientific Computing*, 51 :183–212, 2011.
- [47] S. Lanteri, L. Li, and R. Perrussel. Numerical investigation of a high order hybridizable discontinuous galerkin method for 2d time-harmonic maxwells equations. *COMPEL*, 32(3) :1112–1138, 2013.
- [48] A. Christophe-Argenvillier, S. Descombes, and S. Lanteri. An implicit hybridized discontinuous galerkin method for the 3d time-domain maxwell equations. *Preprint submitted to Applied Mathematics and Computational*, <hal-01374521>, 2016.
- [49] N. Chalmers, L. Krivodonova, and R. Qin. Relaxing the cfl number of the discontinuous galerkin method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(4) :2047–2075, 2013.
- [50] J. Charles. *Amélioration des performances de méthodes Galerkin discontinues d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires sur des maillages simplexes*. PhD thesis, Univeristé de Nice Sophia Antipolis, 2012.
- [51] T. Strub. *Résolution des équations de Maxwell tridimensionnelles instationnaires sur architecture massivement multicoeur*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2015.
- [52] D. Wirasaet, S. Tanaka, E. J. Kubatko, J. J. Westerink, and C. Dawson. A performance comparison of nodal discontinuous galerkin methods on triangles and quadrilaterals. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2009.
- [53] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [54] G. Karyppisand V. Kumar. Metis, a software package for partitioning unstructured graphs, partitioning meshes, and computing fill-reducing orderings of sparse matrices version 4.0. <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/download>.
- [55] F. Pellegrini and J. Roman. Scotch : A software package for static mapping by dual recursive bipartitioning of process and architecture graphs. *Proc. HPCN96*, pages 493–498.
- [56] J. B. Laurent. *Raffinements locaux auto-adaptatifs dans une méthode Galerkin discontinu pour la résolution des équations de Maxwell*. PhD thesis, Université de Toulouse 3 Paul Sabatier, 2013.
- [57] T. Strub, N. Muot, and P. Helluy. Méthode galerkin discontinue appliquée à l'électromagnétisme en domaine temporel. *17e Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique*, 2014.
- [58] S. Jund and S. Salmon. Arbitrary high-order finite element schemes and high-order mass lumping. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17(3) :375–393, 2007.
- [59] R. Barthelmé. *Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell*. PhD thesis, Université Louis Pasteur et CNRS, 2005.
- [60] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen. On traces of $h(\text{curl}, \omega)$ in lipschitz domains. *Journal of Mathematical analysis and applications*, 276, 2001.
- [61] M. Remaki. *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*. PhD thesis, École nationale des ponts et chaussées, 1999.

- [62] Z. Ding. A proof of the trace theorem of sobolev spaces on lipschitz domains. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(2) :591–600, 1996.
- [63] M. Bergot. *Éléments finis d'ordre élevé pour maillages hybrides. Application à la résolution de systèmes hyperboliques linéaires en régime harmonique et temporel*. PhD thesis, Université Paris Dauphine - Paris IX, 2010.
- [64] R. Hockney and J. Eastwood. *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*. IEE Press, 2015.
- [65] M. Mounier. *Résolution des équations de Maxwell-Vlasov sur maillage cartésien non-conforme 2D par un solveur Galerkin Discontinu*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2014.
- [66] P. Monk. *Finite elements methods for Maxwell's equations*. Oxford Science Publication, 2002.
- [67] J. S. Hesthaven. From electrostatics to almost optimal nodal sets for polynomial interpolation in a simplex. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(2) :655–676, 1998.
- [68] G. Cohen, P. Joly, and N. Tordjman. Higher-order finite elements with mass lumping for the 1d wave equation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 16(3-4) :329–336, 1994.
- [69] G. Cohen, P. Joly, and N. Tordjman. Construction and analysis of higher order finite elements with mass lumping for the wave equation. *Proceedings of the Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena, SIAM, Philadelphia*, pages 152–160, 1993.
- [70] G. Cohen. *Higher Order Numerical Method for Transient Wave Equations*. Berlin : Springer-Verlag, 2002.
- [71] T. Volpert, V. Mouysset, X. Ferrieres, N. Deymier, N. Muot, and B. Pecqueux. Stratégie multi-méthodes dans le domaine temporel. *CEM 2014, Clermont-Ferrand, France*.
- [72] E. Zhebel, S. Minisini, and W. A. Mulder. On the time-stepping stability of continuous mass-lumped and discontinuous galerkin finite elements for the 3d acoustic wave equation. *ECCOMAS 2012 - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- [73] M. Duruflé, P. Grob, and P. Joly. Influence of gauss and gauss-lobatto quadrature rules on the accuracy of a quadrilateral finite element method in the time domain. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 25(3) :526–551, 2009.
- [74] C. Durochat. *Méthode de type Galerkin discontinu en maillages multi-éléments (et non-conformes) pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires*. PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2013.
- [75] M. Maunoury, C. Besse, V. Mouysset, S. Pernet, and Pol-André Haas. Well-suited and adaptive post-processing for the visualization of hp simulation results. *Journal of Computational Physics*, 2018.
- [76] D. A. Kopriva, S. L. Woodruff, and M. Y. Hussaini. Computation of electromagnetic scattering with a non-conforming discontinuous spectral element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 :105–122, 2002.
- [77] T. BUI-THANH and O. Ghattas. Analysis of an hp-nonconforming discontinuous galerkin spectral element method for wave propagation. *J. Numer. Anal.*, 50(3) :1801–1826, 2012.
- [78] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. Basics and some applications of the mortar element method. *Surveys for Applied Mathematics and Mechanics*, 28(2) :97–123, 2005.
- [79] Y. Maday, C. Mavriplis, and A. T. Patera. Non-conforming mortar element methods : application to spectral discretizations. *SIAM Philadelphia*, pages 392–418, 1989.
- [80] G. Cohen, X. Ferrieres, and S. Pernet. A spatial high-order hexahedral discontinuous galerkin method to solve maxwell's equation in time domain. *Journal of Computational Physics*, 217 :340–363.
- [81] E. Montseny, S. Pernet, X. Ferrières, and G. Cohen. Dissipative terms and local time-stepping improvements in a spatial high order discontinuous galerkin scheme for the time-domain maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 2008.
- [82] J-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP, 2006.
- [83] G. M. Phillips. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer, 2003.

- [84] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. 1972.
- [85] L. Lobjois. *Problèmes d'optimisation combinatoire sous contraintes : vers la conception automatique de méthodes de résolution adaptées à chaque instance*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronotique et de l'Espace, 1999.
- [86] L. Belhouli. *Résolution de problèmes d'optimisation combinatoire mono et multi-objectifs par énumération ordonnée*. PhD thesis, Université Paris Dauphine - Paris IX, 2014.
- [87] J.-K. Hao, P. Galinier, and M. Habib. Métaheuristiques pour l'optimisation combinatoire et l'affectation sous contraintes. *Revue d'intelligence artificielle* (<http://www.info.univ-angers.fr/pub/hao/papers/RIA.pdf>), 1999.
- [88] A. Benki. *Méthodes efficaces de capture de front de pareto en conception mécanique multicritère : applications industrielles*. PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2014.
- [89] F. Sonnemann, J-C. Joly, and B. Pecqueur. Vulnerability of a missile facing hpm attack. *European Survivability Workshop*.
- [90] Le blog AEMC. Des fentes et leurs effets sur la cem. <https://www.aemc.fr/wp-content/uploads/2017/08/Des-fentes-et-leurs-effets-sur-la-CEM.pdf>, page 8, 2017.
- [91] S. Piperno. Symplectic local time-stepping in non-dissipative dgtd methods applied to wave propagation problems. *M2AN*, 40(5) :815–841, 2006.
- [92] M. J. Grote and T. Mitkova. Explicit local time-stepping methods for maxwell's equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(12) :3283–3302, 2010.
- [93] S. J. Sherwin and G. Karnidakis. A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :3775–3802, 1995.
- [94] B. Fornet, A. Grabon, and J. Despinoy. A lumped nodal dgdt-pic method to ensure charge conservation for the 3d vlasov-maxwell system on nonconforming cartesian grids. *12th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (WAVES 2015), Book of Abstracts*, pages 364–365, 2015.
- [95] Y. Ventribout and P. Breuilh. Méthode hybride dgtd/fdtd pour la résolution des équations de maxwell en domaine temporel. *Conférence URSI 2008* (http://ursi-france.telecom-paristech.fr/fileadmin/journees_scient/docs_journees_2008/cdrom/pdfs/sessionsf/C6/Ventribout_10.pdf).
- [96] A. Taflov and S. C. Hagness. *Computational electrodynamics. The finite-difference Time-Domain method. Third edition*. Artech house, 2005.

Titre : Étude et conception d’une stratégie couplée de post-maillage/résolution pour optimiser l’efficacité numérique de la méthode Galerkin discontinue appliquée à la simulation des équations de Maxwell instationnaires.

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons à l’amélioration des performances numériques de la méthode Galerkin Discontinu en Domaine Temporel (GDDT), afin de valoriser son emploi industriel pour des problèmes de propagation d’ondes électromagnétiques. Pour ce faire, nous cherchons à réduire le nombre d’éléments des maillages utilisés en appliquant une stratégie de h -déaffinement/ p -enrichissement. Dans un premier temps, nous montrons que si ce type de stratégie permet d’améliorer significativement l’efficacité numérique des résolutions dans un cadre conforme, son extension aux maillages non-conformes peut s’accompagner de contre-performances réhivitoires limitant fortement leur intérêt pratique. Après avoir identifié que ces dernières sont causées par le traitement des termes de flux non-conformes, nous proposons une méthode originale de condensation afin de retrouver des performances avantageuses. Celle-ci se base sur une redéfinition des flux non-conformes à partir d’un opérateur de reconstruction de traces, permettant de recréer une conformité d’espaces, et d’un produit scalaire condensé, assurant un calcul approché efficace. La stabilité et la consistance du schéma GDDT ainsi défini sont établies sous certaines conditions portant sur ces deux quantités. Dans un deuxième temps, nous détaillons la construction des opérateurs de trace et des produits scalaires associés. Nous proposons alors des flux condensés pour plusieurs configurations non-conformes, et validons numériquement la convergence du schéma GDDT résultant. Puis, nous cherchons à concevoir un algorithme de h -déaffinement/ p -enrichissement automatisé, dans le but de générer des maillages hp minimisant les coûts de calcul du schéma. Ce processus est traduit sous la forme d’un problème d’optimisation combinatoire sous plusieurs contraintes de natures très diverses. Nous présentons alors un algorithme de post-maillage basé sur un parcours efficace de l’arbre de recherche des configurations admissibles, associé à un processus de déaffinement hiérarchique. Enfin, nous mettons en œuvre la chaîne de calcul développée sur plusieurs cas-tests d’intérêt industriel, et évaluons son apport en termes de performances numériques.

Mots-clés : Galerkin discontinu, équations de Maxwell, approximation hp non-conforme, performances numériques.

Title : Study and design of a coupled post-meshing/solving strategy to improve the numerical efficiency of the discontinuous Galerkin method for electromagnetic computations in time domain.

Abstract : This thesis is devoted to improving the numerical efficiency of the Discontinuous Galerkin in Time Domain (DGTD) method, in order to enhance its suitability for industrial use. One can notice that, in an hp -conforming context, increasing correlatively the approximation order and the mesh size is a powerful strategy to reduce numerical costs. However, in complex geometries, the mesh can be constrained by the presence of small-scale inner elements, leading to hp -nonconforming configurations with hanging nodes. The first issue we are dealing with is related to the nonconforming fluxes involved in these configurations, whose high computational costs can deter the use of hp -coarsening strategies. In order to recover a satisfactory performance level, an original flux-lumping technique is set up. This technique relies on recasting hybrid fluxes into conforming ones, and is performed by introducing two ingredients : a reconstruction operator designed to map traces from each side of a nonconforming interface into the same functional space, and a lumped scalar product granting efficient integral computations. The resulting DGTD scheme is then proved to be stable and consistent, under some assumptions on the latter two elements. Subsequently, we develop a lumped flux construction routine, and show numerical convergence results on basic hybrid configurations. In a second part, we implement an automated strategy aiming at generating efficient hp -nonconforming meshes, well-suited to the previous DGTD scheme. To do so, a post-meshing process is formalized into a constrained optimization problem. We then put forward a heuristic hp -coarsening algorithm, based on a hierarchical coarsening approach coupled with an efficient search over the feasible configuration tree. Lastly, we present several numerical examples related to electromagnetic wave propagation problems, and evaluate computational cost improvements.

Keywords : discontinuous Galerkin, Maxwell’s equations, hp -nonconforming approximation, computational costs.