



HAL
open science

Modèles analytiques pour la structure et l'évolution des systèmes stellaires sphériques

Emmanuel Davoust

► **To cite this version:**

Emmanuel Davoust. Modèles analytiques pour la structure et l'évolution des systèmes stellaires sphériques. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre & Marie Curie - Paris 6, 1977. Français. NNT: . tel-02196321

HAL Id: tel-02196321

<https://hal.science/tel-02196321>

Submitted on 27 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée
pour l'obtention du

DIPLÔME de DOCTEUR de 3^e CYCLE

à

*L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris VI -*

spécialité : **ASTRONOMIE**
mention : **Dynamique Stellaire**

par

Emmanuel DAVOUST

Sujet de la thèse :

**MODELES ANALYTIQUES POUR LA STRUCTURE ET L'EVOLUTION
DES SYSTEMES STELLAIRES SPHERIQUES**

Soutenu le 15 janvier 1977 devant la Commission composée de :

MM. J. RÖSCH

Président

M. HENON

Rapporteur

A. HAYLI
F. NAHON

}
Examineurs

TABLE DES MATIERES

I	Introduction	3
II	Méthodes pour étudier l'évolution des systèmes stellaires	5
III	Modèles analytiques	11
1	Définition de la vitesse d'évasion	11
	1 - 1 - $E_e = 0$	12
	1 - 2 - $E_e \leq 0$	12
2	Condition supplémentaire sur les vitesses dans le halo	13
3	Première série de modèles	15
	3 - 1 - Densités et dispersions des vitesses dans le noyau	16
	3 - 2 - Densités et dispersions des vitesses dans le halo	16
4	Deuxième série de modèles	19
IV	Intégration numérique de l'équation de Poisson	23
1	Méthodes d'intégration	23
	1 - 1 - Première méthode	23
	1 - 2 - Deuxième méthode	24
	1 - 3 - Variables et paramètres	26
	1 - 4 - Fonctions intégrales	26
2	Résultats	27
3	Vérifications	41

V	Diagramme de Lindblad	45
VI	Stabilité et évolution	51
1	Stabilité dynamique	51
2	Stabilité séculaire	53
VII	Evolution des paramètres	57
1	Ajustement	57
2	Evolution empirique des paramètres	59
3	Taux d'évolution des paramètres pour les différents modèles	67
4	Application des résultats à l'évolution des amas globulaires	70
5	Paramètre d'évolution	71
VIII	Evolution du noyau des modèles	73
1	Evolution homologique	73
2	Définitions du noyau des modèles	74
	2 - 1 - Critère cinématique	74
	2 - 2 - Critère de densité	74
3	Résultats; critère cinématique	75
4	Résultats; critère de densité	79
	Conclusion	83
	Remerciements	85
	Références	87
	Appendice: graphiques	95

I - INTRODUCTION

Nous nous proposons de construire des modèles pour la structure et l'évolution des systèmes stellaires sphériques.

L'information que nous avons sur la structure spatiale des systèmes stellaires sphériques réels est assez limitée: les comptages d'étoiles et la photométrie de surface nous donnent une densité projetée avec une grande incertitude dans le halo, nous ne connaissons pratiquement pas la distribution des vitesses. Et l'évolution de ces systèmes nous est inconnue parce que nous les observons probablement tous à peu près au même stade d'évolution.

Par contre, comme nous allons le voir, les simulations numériques sont riches en renseignements assez concordants sur les distributions spatiale et cinématique dans les systèmes de n corps auto-gravitants, et sur leur évolution.

C'est pourquoi, nous allons rechercher des modèles qui soient en accord non pas avec les données succinctes que nous pouvons avoir sur les systèmes stellaires réels, mais avec les résultats des simulations numériques. Ces modèles donneront un fondement théorique analytique aux structures obtenues par les expériences numériques et pourront servir de formule d'interpolation pour une manipulation plus aisée de ces modèles numériques.

Nous exposons d'abord brièvement l'ensemble des modèles qui ont été proposés pour la structure et l'évolution des systèmes stellaires sphériques. Ceci permettra de mieux situer la portée et les limites de notre contribution à ce domaine de recherche.

Nous présentons ensuite les fonctions de phase adoptées avec leur domaine de définition et les densités et dispersions des vitesses correspondantes. Ces dernières expressions sont fonction du rayon et du potentiel gravitationnel. Un chapitre est consacré à l'intégration numérique de l'équation de Poisson, pour éliminer le potentiel, et à une comparaison entre les résultats numériques pour les différents modèles. La question de stabilité, dynamique et séculaire, est abordée. Nous donnons ensuite sous forme de tableaux les variations des divers paramètres obtenus par ajustement de nos modèles aux résultats des expériences numériques et nous recherchons des lois de variation temporelle analytiques pour ces paramètres. Nous étudions enfin l'évolution des noyaux des modèles, pour vérifier la validité de l'hypothèse d'évolution homologique avancée par Lynden-Bell.

II - METHODES POUR ETUDIER L'EVOLUTION DES SYSTEMES STELLAIRES

Avant d'exposer en détail nos modèles nous allons présenter brièvement l'ensemble des méthodes qui ont été utilisées pour étudier l'évolution des systèmes stellaires sphériques. Cela permettra de mieux situer nos modèles et la méthode de Monte Carlo parmi toutes les théories existantes.

La méthode en principe la plus proche de la réalité est la méthode purement numérique des N corps: le système est représenté par N masses ponctuelles dont le mouvement est intégré numériquement. Comme le temps de calcul sur ordinateur nécessaire pour intégrer les équations du mouvement de N particules croît en N^3 , on est pratiquement limité à quelques centaines de particules. Du fait du petit nombre de particules le crossing-time et le temps de relaxation ne sont pas distincts et il est difficile de distinguer les effets dynamiques des effets de relaxation dans l'évolution d'un tel modèle. La méthode et ses résultats ont été exposés par Aarseth (1973, 1974) et Wielen (1974).

Dans la méthode de Monte Carlo le mouvement des étoiles individuelles est suivi de façon approchée: les étoiles sont placées sur des couches sphériques concentriques ou "superétoiles" dont le mouvement non perturbé est intégré pendant un intervalle de temps Δt .

Pour rendre compte de l'effet des rencontres, ce mouvement est perturbé en un seul point de son orbite en considérant l'effet d'une seule étoile du champ. Cette méthode ne donnera pas la perturbation exacte du mouvement de chaque étoile, mais l'effet statistique global sur tout le système doit être le même que si le mouvement avait été intégré exactement. La méthode a été exposée par Hénon (1972b, 1973a) et Spitzer et Hart (1971). Les résultats les plus intéressants pour nous ont été publiés par Hénon (1972a, 1975), Spitzer et Thuan (1972), Spitzer et Shull (1975) et Spitzer (1975).

La méthode hydrodynamique consiste à intégrer numériquement les équations hydrodynamiques, équations aux moments de l'équation de Boltzmann avec second membre, ce dernier étant donné par l'équation de Fokker-Planck. Le système des équations hydrodynamiques n'est pas fermé et il est nécessaire d'introduire une hypothèse simplificatrice pour pouvoir le résoudre. La technique consiste à adopter une distribution des vitesses maxwellienne avec des termes correctifs sous forme de développement en polynômes de Legendre. Cette méthode permet de suivre l'évolution macroscopique d'un système stellaire: évolution de la densité spatiale et des moments de la distribution des vitesses. La méthode a été utilisée par Larson (1970a,b), Talpaert et Lefèvre (1972) et Saito et Yoshizawa (1976).

Les trois méthodes que nous venons de présenter, méthodes essentiellement numériques, donnent qualitativement les mêmes résultats pour l'évolution d'un système stellaire sphérique; ces résultats ont été comparés dans plusieurs articles: Aarseth et Lecar (1975), Aarseth et al. (1974) et Wielen (1975). Les conclusions sont les suivantes: l'évolution est caractérisée par un flux d'énergie cinétique vers l'extérieur du système et par la formation d'une structure noyau-halo. Le noyau a la structure d'une sphère isotherme, la distribution des vitesses y est isotrope, son rayon décroît et la densité au centre croît systématiquement jusqu'à devenir infinie au bout d'un temps fini t_0 , temps de collapse. Un halo d'étoiles sur orbites fortement allongées se forme progressivement. L'évolution n'est pas homologique.

Nous nous tournons maintenant vers les modèles analytiques pour représenter l'évolution des systèmes stellaires sphériques.

L'hypothèse essentielle du modèle d'Hénon (1961) est celle de l'évolution homologique. Ceci permet de ramener le modèle à une forme canonique. Il suppose en outre que l'évolution est donnée localement par l'équation de Fokker-Planck et que la distribution des vitesses reste isotrope. Le modèle homologique obtenu a une densité centrale infinie, il y a un flux de matière et d'énergie vers le centre, comme pour les modèles numériques. La masse et le rayon total sont finis, ils décroissent au cours du temps. Il n'y a pas de halo à pente logarithmique $(\frac{d \log \rho}{d \log r})$ constante.

Comme les modèles numériques suggèrent que l'hypothèse d'évolution homologique n'est pas à retenir, Lynden-Bell (1975) propose que seul le noyau a une telle évolution; il suppose aussi que l'énergie totale du noyau reste constante au cours de l'évolution. Son modèle est discuté dans un chapitre ultérieur.

Michie (1961) considère un modèle défini par la fonction de phase

$$f(E, J) = A e^{-\alpha E - \beta J^2} \left[1 - \left(\frac{E}{E_e} \right)^5 \right]$$

où J est le moment angulaire et E_e l'énergie d'évasion. Il suppose qu'au cours du temps seuls les paramètres A , α et β changent. Leur variation est donnée par l'équation de Fokker-Planck. La structure du modèle est la suivante: la densité spatiale décroît en $r^{-3.7}$ dans le halo, la distribution des vitesses devient plus anisotrope lorsque le rayon croît. Au cours de l'évolution A et α croissent et β décroît. Le noyau se contracte, il y a un flux d'étoiles vers le centre et vers le halo, une plus grande isotropie dans le noyau et une plus grande anisotropie dans le halo. Remarquons que Yakimov (1969) a obtenu des résultats semblables pour un modèle avec 2 groupes d'étoiles de masses différentes.

Gejdarov (1965) considère l'évolution d'un système stellaire comme une succession d'états stationnaires définis par la fonction de phase

$$f_0 = \frac{A}{1 - e^{-\alpha E}} (e^{-\alpha E} - e^{-\alpha E} e)$$

et par

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2$$

où f_1 et f_2 sont des termes correctifs qui rendent compte de l'évolution et qui sont obtenus à partir de l'équation de Fokker-Planck. Ses résultats sont qualitatifs: la densité spatiale croît au centre et décroît à la périphérie.

Von Hörner (1968) considère un modèle défini par une fonction de phase f . Il trouve une équation différentielle pour la variation de f en supposant qu'il y a équilibre viriel local, que l'échange d'énergie par suite des collisions est limité et symétrique et que l'évasion des étoiles est négligeable. Il en déduit le taux de variation du noyau (voir tableau 8.).

King (1966) propose des modèles pour la structure des amas sphériques caractérisés par la fonction de phase

$$f(E) = A(e^{-\alpha E} - e^{-\alpha E} e)$$

Les densités spatiales de ses modèles sont caractérisées par un paramètre W_0 , potentiel au centre. Il suppose qu'au cours de l'évolution un système stellaire suit la séquence de ses modèles, W_0 croissant avec le temps.

Enfin, Lynden-Bell et Wood (1968) font une étude thermodynamique d'une sphère isotherme isolée dans l'espace. Ils supposent que le modèle évolue le long d'une séquence définie par le potentiel au centre v_1 jusqu'à une valeur de v_1 telle que l'entropie du système soit maximale, et au-delà de laquelle se produit une "catastrophe gravothermique". Cependant la validité de leurs calculs a été mise en doute (voir chapitre VI).

Nous avons choisi de construire des modèles pour l'évolution et la structure des systèmes stellaires sphériques en accord avec les résultats des expériences numériques parce que ce premier groupe de méthodes donne des résultats homogènes dans leur ensemble.

Nous présentons maintenant les hypothèses sur lesquelles reposent nos modèles.

Structure et évolution d'un système stellaire:

Nous nous proposons de construire un modèle pour un système stellaire à symétrie sphérique parfaite, dont toutes les étoiles ont la même masse et de moment angulaire total nul (c'est-à-dire sans rotation d'ensemble).

Nous supposons aussi qu'un système stellaire peut être représenté par un fluide continu dans un espace de phase à 6 dimensions. Cette hypothèse est justifiée pour la structure des amas globulaires et des galaxies elliptiques, mais probablement pas pour celle des amas galactiques, ou des amas de galaxies. La structure d'un tel système peut alors être définie par une fonction de phase donnant la densité d'étoiles en chaque point de l'espace de phase. La structure spatiale et la distribution des vitesses s'obtiennent en intégrant f sur l'espace des vitesses en adoptant des valeurs numériques pour les différents paramètres de structure. Sur un intervalle de temps assez court, de l'ordre du temps de cohérence t_c (crossing-time), temps que met une étoile pour traverser le système, la fonction de phase est supposée stationnaire et satisfait l'équation de Boltzmann stationnaire sans second membre.

Nous supposons en outre qu'au cours de l'évolution la fonction de phase conserve sa forme fonctionnelle et que l'évolution se traduit par une lente variation des paramètres de structure, sous l'effet des rencontres entre étoiles, de l'évasion d'étoiles hors du système et du flux d'énergie provoqué par la redistribution spatiale des étoiles. Cet effet est notable sur un intervalle de temps qui est de l'ordre du temps de relaxation, très grand par rapport à t_c . Remarquons que l'effet de "granularité" supprimé par l'hypothèse de fluide continu joue probablement un rôle important dans l'évolution. La méthode classique pour obtenir l'évolution d'un tel modèle est d'introduire un second membre dans l'équation de Boltzmann, calculé à partir de l'équation de Fokker-Planck. Une autre méthode, contestée, utilise la notion d'entropie. L'évolution

des paramètres de structure de nos modèles nous est donnée empiriquement: par ajustement aux différents stades d'évolution des modèles numériques.

Ces hypothèses vont nous permettre de construire des modèles analytiques en accord avec les résultats des expériences numériques. Nous établirons ainsi un lien, une cohésion entre deux méthodes d'investigation assez différentes. Cependant nous ne pourrions pas conclure des résultats concordants qu'ils confirment la réalité astronomique du schéma de structure et d'évolution obtenu par ces méthodes, car ce schéma pourrait n'être qu'une conséquence des hypothèses restrictives et du niveau d'idéalisation élevé du problème.

III - MODELES ANALYTIQUES

Nous définissons un modèle analytique de système stellaire par une fonction de phase $f(E, I^2)$ où E et I sont l'énergie et le moment angulaire d'une étoile. Cette fonction de phase représente la densité d'étoiles en chaque point de l'espace de phase (E, I^2) ou, de façon équivalente, (\vec{r}, \vec{v}) . Cette fonction de phase peut n'être définie que dans un domaine limité de l'espace de phase; nous supposons en particulier qu'elle est nulle pour des énergies supérieures à l'énergie d'évasion. C'est pourquoi le domaine de définition de la fonction de phase doit être précisé dans chaque cas.

De la fonction de phase f nous déduisons par simple intégration dans l'espace des vitesses deux expressions importantes pour la suite, la densité spatiale et les dispersions des vitesses. Ce sont ces fonctions que nous comparerons aux résultats des expériences numériques.

Avant de présenter les fonctions de phase adoptées et de calculer les densités et dispersions des vitesses correspondantes, nous allons préciser le domaine de l'espace de phase où ces fonctions sont nulles.

1 - Définition de la vitesse d'évasion

Une étoile possédant une vitesse supérieure ou égale à la vitesse d'évasion v_e n'est plus retenue par le champ gravitationnel du système stellaire. Il est donc normal de supposer que la fonction de

phase est nulle pour $v \gg v_e$.

La vitesse d'évasion se déduit de l'énergie d'évasion:

$$v_e = \sqrt{2E_e + 2U}$$

Il y a plusieurs façons de définir l'énergie d'évasion:

$$1 - 1 - E_e = 0$$

$$\text{Dans ce cas } v_e = \sqrt{2U}$$

Une étoile qui a cette vitesse arrive à l'infini avec une vitesse nulle.

La limite extérieure r_t du système est atteinte lorsque

$$U = \frac{GM_t}{r_t}$$

(l'indice t signifie total).

C'est à dire pour une vitesse d'évasion

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_t}{r_t}}$$

non nulle. Comme nous le verrons plus loin, la densité spatiale de nos modèles ne s'annule que pour $v_e \neq 0$. Par conséquent dans ce cas la densité spatiale subit une discontinuité à la limite du système où elle devient brusquement nulle.

Lorsque le rayon du modèle est infini, la définition de la vitesse d'évasion reste $v_e = \sqrt{2U}$, mais à la limite du système (à l'infini) U et v_e sont nuls, ainsi que la densité.

$$1 - 2 - E_e \leq 0$$

Nous définissons maintenant la vitesse d'évasion de la façon suivante: une étoile qui a cette vitesse arrive à la limite extérieure r_t du système (et non à l'infini) avec une vitesse nulle. Cette définition est plus satisfaisante du fait que la densité spatiale s'annule en r_t sans discontinuité.

En $r = r_t$ nous avons les relations suivantes:

$$v_e = \sqrt{2E_e + 2U} = 0$$

$$E_e = -U(r_t) = -\frac{GM_t}{r_t}$$

L'énergie d'une étoile est une intégrale du mouvement:

E_e a donc la même valeur en tout point du système et

$$v_e = \sqrt{2U + 2E_e} = \sqrt{2U - \frac{2GM_t}{r_t}}$$

Par la suite nous définirons la vitesse d'évasion par rapport à l'énergie d'évasion au centre du système:

$$E_e(r=0) = v_c^2 - 2U_c = \text{constante}$$

$$v_e = \sqrt{v_c^2 + 2U - 2U_c}$$

Ceci nous permet d'introduire la variable $U-U_c$.

Remarquons que lorsque le modèle est de rayon infini les deux définitions de la vitesse d'évasion sont identiques puisqu'une étoile arrive alors à la limite extérieure du système et à l'infini avec une vitesse nulle, et $v_e = \sqrt{2U}$. Remarquons aussi que la deuxième définition est plus générale que la première qui est le cas particulier où $v_c^2 = 2U_c$.

D'un point de vue formel les deux définitions conduisent à des modèles ayant la même structure et ne différant que par la valeur du rayon total.

2 - Condition supplémentaire sur les vitesses dans le halo

La première série de nos modèles consiste en modèles avec un noyau où la distribution des vitesses est isotrope et un halo où elle est anisotrope, les orbites étant fortement allongées.

Pour obtenir une telle structure nous faisons l'hypothèse suivante: toutes les étoiles du halo passent par le noyau; en d'autres termes dans ces modèles les orbites ont un péricentre maximum r_0 au delà duquel il n'y a plus d'orbites circulaires.

Nous allons montrer que cette condition entraîne l'existence d'une vitesse tangentielle maximale dans le halo, pour une vitesse radiale donnée.

Montrons d'abord que parmi les orbites passant à la distance r avec la vitesse radiale R , celle qui a le plus grand péricentre r_1 a aussi la plus grande énergie, c'est à dire

$$\frac{dE}{dr_1} > 0$$

L'indice 1 indique la valeur au péricentre : $U_1 = U(r_1)$; $T_1 = T(r_1)$.

Exprimons E en fonction du péricentre r_1 :

$$2E = R^2 + T^2 - 2U = T_1^2 - 2U_1 = \frac{r^2 T^2}{r_1^2} - 2U_1$$

d'où

$$E = \frac{2U_1 r_1^2 - 2U r^2 + R^2 r^2}{2(r^2 - r_1^2)}$$

Dérivons l'expression obtenue par rapport à r_1 :

$$\frac{dE}{dr_1} = \frac{1}{r_1(r^2 - r_1^2)} \left[\frac{2 r_1^2 r^2 (U_1 - U)}{r^2 - r_1^2} + r_1^3 U_1' \right] + \frac{R^2 r^2 r_1}{(r^2 - r_1^2)^2}$$

Montrons que la quantité entre crochets est une fonction décroissante de r_1 ; sa dérivée par rapport à r_1 est négative :

$$\frac{d}{dr_1} (r_1^3 U_1') + \frac{U_1'}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{2(U - U_1)}{r_1^3 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right)^2} < 0$$

Le premier terme est négatif: c'est la condition d'existence d'orbites circulaires stables (Chandrasekhar, 1943, p.155). Le deuxième terme est négatif: $\frac{dU}{dr} < 0$ par définition et le troisième terme est négatif.

La quantité entre crochets est nulle en $r = r_1$: en effet, si nous développons U au voisinage de $r = r_1$

$$U = U_1 + (r - r_1) U_1'$$

$$U_1 - U = (r_1 - r) U_1'$$

et

$$\frac{2r_1^2 r^2 (r_1 - r) U_1'}{(r - r_1)(r + r_1)} + r_1^3 U_1' \xrightarrow{r \rightarrow r_1} 0$$

Ainsi la quantité entre crochets est toujours positive pour $r < r_1$ et par conséquent

$$\frac{dE}{dr_1} > 0$$

Nous avons montré que l'énergie d'une orbite passant à la

distance r du centre avec une vitesse radiale R est une fonction croissante du péricentre. Si nous imposons une valeur maximale r_0 au péricentre, cela correspond au point r à une énergie maximale et par conséquent à une vitesse tangentielle maximale

$$E_{\max} = R^2 + T_{\max}^2 - 2U = T_0^2 - 2U_0 = \frac{r^2 T_{\max}^2}{r_0^2} - 2U_0$$

d'où

$$T_{\max}^2 = \frac{R^2 + 2U_0 - 2U}{r^2/r_0^2 - 1}$$

3 - Première série de modèles

La première série de modèles adoptés est définie par les fonctions de phase suivantes:

$$f_{11} = Ae^{-E/\sigma^2}$$

$$f_{12} = A(e^{-E/\sigma^2} - e^{-E_e/\sigma^2})$$

$$f_{13} = A(e^{-E/\sigma^2} - e^{-E_e/\sigma^2} + \frac{E - E_e}{\sigma^2} e^{-E_e/\sigma^2})$$

et d'une façon générale, pour $n \geq 2$:

$$f_{1n} = Ae^{-E_e/\sigma^2} \left[e^{-\frac{E - E_e}{\sigma^2}} - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{E - E_e}{\sigma^2} \right)^m \right]$$

ou

$$f_{1n} = Ae^{-E_e/\sigma^2} \sum_{m=n-1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{E - E_e}{\sigma^2} \right)^m$$

A, σ^2 et E_e sont des constantes

Les conditions aux limites sont

$$f_{1n} = 0 \text{ lorsque } v \geq v_e = \sqrt{2U + 2E_e} \quad \text{où } v = \sqrt{R^2 + T^2}$$

$$f_{1n} = 0 \text{ lorsque } r \geq r_0 \text{ et } T \geq T_{\max}$$

Les densités et dispersions des vitesses des modèles s'obtiennent en intégrant f_{1n} dans l'espace des vitesses en tenant compte des conditions aux limites.

3 - 1 - Densités et dispersions des vitesses dans le noyau:

$$\text{densité: } \rho_{1n} = 4\pi A \int_0^{\sqrt{2E_e + 2U}} \int_0^{\sqrt{2E_e + 2U - R^2}} f_{1n} T dR dT$$

$$\text{dispersions: } \rho_{1n} \overline{R^2} = 4\pi A \int_0^{\sqrt{2E_e + 2U}} \int_0^{\sqrt{2E_e + 2U - R^2}} f_{1n} R^2 T dR dT$$

$$\rho_{1n} \overline{T^2} = 2\pi A \int_0^{\sqrt{2E_e + 2U}} \int_0^{\sqrt{2E_e + 2U - R^2}} f_{1n} T^3 dR dT$$

En fait nous pouvons obtenir $\rho \overline{T^2}$ plus simplement à partir du moment d'ordre deux de l'équation de Boltzmann, souvent appelé: équation hydrodynamique:

$$\frac{d}{dr} \rho \overline{R^2} + \frac{2}{r} (\rho \overline{R^2} - \rho \overline{T^2}) = \rho \frac{dU}{dr}$$

3 - 2 - Densités et dispersions des vitesses dans le halo:

Dans ce cas nous avons une condition supplémentaire pour l'intégration sur les vitesses tangentielles.

$$T_{\max}^2 = \frac{R^2 + 2U_0 - 2U}{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}$$

La vitesse tangentielle est aussi limitée à la vitesse d'évasion $\sqrt{2(E_e + U) - R^2}$; si

$$\frac{R^2 + 2U_0 - 2U}{r^2/r_0^2 - 1} > 2(E_e + U) - R^2$$

nous n'intégrons que jusqu'à $\sqrt{2U - R^2}$; cela correspond à la valeur suivante de R:

$$R^2 < L^2 = (2E_e + 2U) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + (2U - 2U_0) \frac{r_0^2}{r^2}$$

densité:

$$\rho_{1n} = 4\pi A \left[\int_0^L \int_0^{\sqrt{\frac{R^2 + 2U_0 - 2U}{r^2/r_0^2 - 1}}} f_{1n} T dR dT + \int_L^{\sqrt{2U + 2E_e}} \int_0^{\sqrt{2U + 2E_e - R^2}} f_{1n} T dR dT \right]$$

dispersions:

$$\rho_{1n} \overline{R^2} = 4\pi A \left[\int_0^L \int_0^{\sqrt{\frac{R^2 + 2U_0 - 2U}{r^2/r_0^2 - 1}}} f_{1n} R^2 T dR dT + \int_L^{\sqrt{2U + 2E_e}} \int_0^{\sqrt{2U + 2E_e - R^2}} f_{1n} R^2 T dR dT \right]$$

$$\rho_{1n} \overline{T^2} = 2\pi A \left[\int_0^L \int_0^{\sqrt{\frac{R^2 + 2U_0 - 2U}{r^2/r_0^2 - 1}}} f_{1n} T^3 dR dT + \int_L^{\sqrt{2U + 2E_e}} \int_0^{\sqrt{2U + 2E_e - R^2}} f_{1n} T^3 dR dT \right]$$

Nous ne donnons pas ici le détail des calculs qui ont été faits pour $n=1, 2$ et 3 . Seuls les résultats sont donnés. Les expressions obtenues pour les densités et dispersions des vitesses ont permis de mettre en évidence une formule générale pour ces fonctions, valable pour tout n . Nous avons pu démontrer rigoureusement l'exactitude de cette formule générale par un raisonnement par récurrence. En effet, il y a une relation de récurrence entre f_{1n} et f_{1n-1} :

$$f_{1n} = f_{1n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!} \left(\frac{E - E_e}{\sigma^2} \right)^{n-2}$$

A partir de cette relation qui nous est donnée par hypothèse nous avons calculé les densités et dispersions des vitesses pour la

valeur n de l'indice en supposant vraies les expressions pour $n-1$. Comme nous obtenons la même expression, où $n-1$ est devenu n , la formule générale est vraie quel que soit n .

Les formules suivantes résument les résultats obtenus
Les variables sont les suivantes:

$$k = \frac{v^2}{2\sigma^2}$$

$$\phi = \frac{2E_e + 2U}{2\sigma^2} = \frac{v^2 + 2U - 2U_e}{2\sigma^2}$$

$$V = \phi + \frac{\phi - \phi_0}{r^2/r_0^2 - 1}$$

où r_0 est le rayon du noyau et $\phi_0 = \phi(r_0)$. $H(r_0)$ est la fonction de Heaviside.

$n = 1$

Densité:

$$\rho_{11} = 4\pi A(2\sigma^2)^{3/2} e^{-E_e/\sigma^2} \left[e^\phi \int_0^{\sqrt{\phi}} x^2 e^{-x^2} dx - H(r_0) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} e^V \int_0^{\sqrt{V}} x^2 e^{-x^2} dx \right]$$

dispersions des vitesses:

$$\rho_{11}\overline{R^2} = \frac{4}{3}\pi A(2\sigma^2)^{5/2} e^{-E_e/\sigma^2} \left[e^\phi \int_0^{\sqrt{\phi}} x^4 e^{-x^2} dx - H(r_0) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{3/2} e^V \int_0^{\sqrt{V}} x^4 e^{-x^2} dx \right]$$

$$\rho_{11}\overline{V^2} = \rho_{11}\overline{R^2} + H(r_0)\pi A(2\sigma^2)^{5/2} e^{-E_e/\sigma^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} \left[\frac{r_0^2 V^{3/2}}{r^2} + \right. \\ \left. + 2(V - \phi - \frac{3r_0^2}{2r^2}) e^V \int_0^{\sqrt{V}} x^2 e^{-x^2} dx \right]$$

Woolley et Dickens (1967) donnent une expression analogue pour ρ_{11} .

$n \geq 2$

densité:

$$\rho_{1n} = \frac{2^{n+1} \pi A (2\sigma^2)^{3/2} e^{-E_e/\sigma^2}}{1.3 \dots (2n-1)} \left[e^\phi \int_0^{\sqrt{\phi}} x^{2n} e^{-x^2} dx - H(r_0) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} e^V \int_0^{\sqrt{V}} x^{2n} e^{-x^2} dx \right]$$

dispersions des vitesses:

$$\rho_{1n} \overline{R^2} = \frac{2^{n+1} \pi A (2\sigma^2)^{5/2} e^{-E_e/\sigma^2}}{1.3 \dots (2n+1)} \left[e^\phi \int_0^{\sqrt{\phi}} x^{2n+2} e^{-x^2} dx - H(r_0) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{3/2} e^V \int_0^{\sqrt{V}} x^{2n+2} e^{-x^2} dx \right]$$

$$\rho_{1n} \overline{T^2} = \rho_{1n} \overline{R^2} + \frac{H(r_0) \pi A (2\sigma^2)^{5/2} e^{-E_e/\sigma^2}}{1.3 \dots (2n+1)} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} \left[\frac{3r_0^2 V^{n+1/2}}{(2n+1)r^2} + 2(V - \phi - \frac{3r_0^2}{2r^2}) e^V \int_0^{\sqrt{V}} x^{2n} e^{-x^2} dx \right]$$

4 - Deuxième série de modèles

Les modèles sont définis par les fonctions de phase suivantes:

$$f_{21} = A e^{-\delta I^2/2\sigma^2 - E/\sigma^2}$$

$$f_{22} = A e^{-\delta I^2/2\sigma^2 - E/\sigma^2 - E_e/\sigma^2}$$

$$f_{23} = A e^{-\delta I^2/2\sigma^2 - E/\sigma^2 - E_e/\sigma^2 + \frac{E - E_e}{\sigma^2} e^{-E_e/\sigma^2}}$$

et d'une façon générale, pour $n \geq 2$:

$$f_{2n} = A e^{-\delta I^2/2\sigma^2} e^{-E_e/\sigma^2} \left[e^{-\frac{E-E_e}{\sigma^2}} - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{E-E_e}{\sigma^2}\right)^m \right]$$

ou

$$f_{2n} = A e^{-\delta I^2/2\sigma^2} e^{-E_e/\sigma^2} \sum_{m=n-1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{E-E_e}{\sigma^2}\right)^m$$

A , σ^2 , δ et E_e sont des constantes.

Les conditions aux limites sont:

$$f_{2n} = 0 \text{ lorsque } v > v_e = \sqrt{2U+2E_e}$$

Cette série de modèles est anisotrope dans le noyau puisque la fonction de phase dépend de E et I . Les orbites deviennent progressivement plus allongées vers l'extérieur du système et il n'y a pas lieu d'ajouter des conditions supprimant les orbites circulaires dans le halo.

Pour obtenir la densité spatiale et les dispersions des vitesses nous intégrons f_{2n} comme dans le paragraphe 3.1. Les résultats obtenus pour $n = 1, 2$ et 3 ont permis de mettre en évidence une formule générale pour ces expressions, dont nous avons pu démontrer la validité par un raisonnement par récurrence semblable à celui du paragraphe précédent. Les formules suivantes résument les résultats obtenus:

$n = 1$

densité:

$$\rho_{21} = \frac{2\pi A (2\sigma^2)^{3/2} e^{-E_e/\sigma^2}}{1 + \delta r^2} \left[e^{\Phi} \int_0^{\sqrt{\Phi}} e^{-x^2} dx - e^{-\delta r^2 \Phi} \int_0^{\sqrt{\Phi}} e^{-\delta r^2 x^2} dx \right]$$

dispersions des vitesses:

$$\overline{\rho_{21} R^2} = \frac{2\pi A (2\sigma^2)^{5/2} e^{-E_e/\sigma^2}}{1 + \delta r^2} \left[e^{\Phi} \int_0^{\sqrt{\Phi}} x^2 e^{-x^2} dx - e^{-\delta r^2 \Phi} \int_0^{\sqrt{\Phi}} x^2 e^{-\delta r^2 x^2} dx \right]$$

$$\rho_{21} \bar{T}^2 = \frac{\rho_{21} \bar{R}^2}{1+\delta r^2} + \frac{2\pi A (2\sigma^2)^{5/2} e^{-E/\sigma^2}}{1+\delta r^2} \left[\frac{3\sqrt{\phi}}{4\delta r^2} - \frac{1}{2} \left(\phi + \frac{3}{2\delta r^2} \right) e^{-\delta r^2 \phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} e^{\delta r^2 x^2} dx \right]$$

$n \geq 2$

densité:

$$\rho_{2n} = \frac{2^n \pi A (2\sigma^2)^{3/2} e^{-E/\sigma^2}}{1.3 \dots (2n-3)(1+\delta r^2)} \left[e^{\phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} x^{2n-2} e^{-x^2} dx - e^{-\delta r^2 \phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} x^{2n-2} e^{\delta r^2 x^2} dx \right]$$

dispersions des vitesses:

$$\rho_{2n} \bar{R}^2 = \frac{2^n \pi A (2\sigma^2)^{5/2} e^{-E/\sigma^2}}{1.3 \dots (2n-1)(1+\delta r^2)} \left[e^{\phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} x^{2n} e^{-x^2} dx - e^{-\delta r^2 \phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} x^{2n} e^{\delta r^2 x^2} dx \right]$$

$$\rho_{2n} \bar{T}^2 = \frac{\rho_{2n} \bar{R}^2}{1+\delta r^2} + \frac{2^n \pi A (2\sigma^2)^{5/2} e^{-E/\sigma^2}}{1.3 \dots (2n-1)(1+\delta r^2)} \left[\frac{(2n+1)\phi^{n-1/2}}{4\delta r^2} - \frac{2n-1}{2} \left(\phi + \frac{2n+1}{2\delta r^2} \right) e^{-\delta r^2 \phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} x^{2n-2} e^{\delta r^2 x^2} dx \right]$$

IV - INTEGRATION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE POISSON

Les expériences numériques nous fournissent des résultats sous la forme purement numérique de courbes de densité et de dispersions des vitesses en fonction du rayon. C'est donc à ce niveau que se feront les comparaisons entre les résultats des deux méthodes. Pour cela il nous faut éliminer le potentiel gravitationnel U des expressions pour la densité et les dispersions des vitesses obtenues au chapitre précédent. Cette variable s'élimine par intégration de l'équation de Poisson:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} = -4\pi G\rho(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

Pour les densités qui nous intéressent il n'existe pas de solutions analytiques à cette équation que nous devons intégrer numériquement.

1 - Méthodes d'intégration

Il s'agit d'intégrer numériquement l'équation de Poisson à partir de $r=0$ avec les conditions initiales $U=U_c$ et $\frac{dU}{dr}=0$. Nous présentons deux méthodes d'intégration et nous choisirons celle qui est la plus rapide à précision égale.

1 - 1 - Première méthode:

Nous développons U et $\frac{dU}{dr}$ en séries de Taylor autour de la valeur r ; h est un petit incrément.

$$U(r+h) = U(r) + hU'(r) + \frac{h^2}{2}U''(r) + \frac{h^3}{6}U'''(r)$$

$$U'(r+h) = U'(r) + hU''(r) + \frac{h^2}{2}U'''(r) + \frac{h^3}{6}U''''(r)$$

Par ailleurs l'équation de Poisson nous donne:

$$U''(r+h) = -4\pi G\rho(U, r+h) - \frac{2U'(r+h)}{r+h}$$

$$U'''(r+h) = -4\pi G \frac{d\rho}{dr} - \frac{2}{r+h} \left[U''(r+h) - \frac{U'(r+h)}{r+h} \right]$$

$$U''''(r+h) = -4\pi G \frac{d^2\rho}{dr^2} - \frac{2}{r+h} \left[U'''(r+h) - \frac{2}{r+h} \left(U'' - \frac{U'}{r+h} \right) \right]$$

Nous déterminons ainsi $U(r)$ de proche en proche et à chaque pas nous calculons $\rho(r)$ et les $\sqrt{v^2(r)}$.

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut calculer analytiquement les deux premières dérivées de $\rho(U, r)$. Les expressions trouvées sont assez complexes et comme elles doivent être calculées à chaque pas, cela ralentit l'intégration.

1 - 2 - Deuxième méthode:

Nous décomposons l'équation de Poisson en un système de deux équations du premier ordre:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(U, r)r^2$$

$$\frac{dU}{dr} = - \frac{GM(r)}{r^2}$$

et nous intégrons ce système par une méthode de Runge-Kutta du 4ème ordre modifiée par Gill. Cette méthode est décrite dans Ralston et Wilf (1960). Le principe est le suivant. Le système s'écrit sous forme matricielle:

$$\frac{dY}{dr} = F(r, Y)$$

où $Y = \begin{pmatrix} M \\ U \end{pmatrix}$ et $F(r, Y) = \begin{pmatrix} 4\pi\rho r^2 \\ - \frac{GM}{r^2} \end{pmatrix}$

Soit la valeur initiale Y_0 en r_0 , Q_0 l'erreur initiale et

h l'incrément. Nous calculons successivement:

$$k_1 = hF(r, Y_0)$$

$$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{2}(k_1 - 2Q_0)$$

$$Q_1 = Q_0 + 3 \left[\frac{1}{2}(k_1 - 2Q_0) \right] - \frac{1}{2} k_1$$

$$k_2 = hF\left(r + \frac{h}{2}, Y_1\right)$$

$$Y_2 = Y_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(k_2 - Q_1)$$

$$Q_2 = Q_1 + 3 \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(k_2 - Q_1) \right] - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2$$

$$k_3 = hF\left(r + \frac{h}{2}, Y_2\right)$$

$$Y_3 = Y_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(k_3 - Q_2)$$

$$Q_3 = Q_2 + 3 \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(k_3 - Q_2) \right] - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3$$

$$k_4 = hF(r+h, Y_3)$$

$$Y_4 = Y_3 + \frac{1}{8}(k_4 - 2Q_3)$$

$$Q_4 = Q_3 + 3 \left[\frac{1}{8}(k_4 - 2Q_3) \right] - \frac{1}{2}k_4$$

A la fin d'une itération nous avons $Y_4 = Y(r+h)$. Ainsi nous déterminons U et M de proche en proche et nous déduisons ρ et \bar{v}^2 à chaque pas.

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut évaluer 4 fois le second membre F à chaque pas.

Pratiquement nous avons trouvé la méthode 1,5 fois plus rapide que la deuxième pour les f_{2n} mais plus lente pour les f_{1n} .

1 - 3 - Variables et paramètres:

Pour l'intégration numérique proprement dite nous passons aux variables sans dimensions

$$\phi = \frac{E_e + U}{\sigma^2} = k + \frac{U - U_c}{\sigma^2}$$

et

$$x = \alpha r \quad \text{où} \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G \rho_c}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad \rho_c = \rho(r=0)$$

L'équation de Poisson devient:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\phi}{dx} = - \frac{\rho}{\rho_c}$$

où

$$\frac{\rho}{\rho_c} = e^{\phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} t^{2n} e^{-t^2} dt - H(x_0) \left(1 - \frac{x_0^2}{x^2}\right)^{1/2} e^{\phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} t^{2n} e^{-t^2} dt$$

et

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \frac{1}{1+\lambda x^2} \left(e^{\phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} t^{2n-2} e^{-t^2} dt - e^{-\lambda x^2 \phi} \int_0^{\sqrt{\phi}} t^{2n-2} e^{\lambda x^2 t^2} dt \right)$$

Les variables sont maintenant sans dimensions et les fonctions sont normalisées. Pour les comparaisons nous aurons donc deux paramètres d'échelle: α et ρ_c pour les densités et α et σ^2 pour les dispersions des vitesses.

Il reste deux paramètres de structure, sans dimensions, pour chaque modèle:

$$\phi(r=0) = k \quad \text{et} \quad x_0 = \alpha r_0 \quad \text{pour } f_{1n}$$

$$\phi(r=0) = k \quad \text{et} \quad \lambda = \delta \alpha^2 \quad \text{pour } f_{2n}$$

1 - 4 - Fonctions intégrales:

Les expressions pour les densités normalisées contiennent des intégrales de la forme:

$$e^{-a^2} \int_0^a x^{2n} e^{-x^2} dx \quad \text{et} \quad e^{-a^2} \int_0^a x^{2n} e^{x^2} dx$$

Celles-ci peuvent se ramener par intégration par parties à l'intégrale d'erreuret à l'intégrale de Dawson respectivement et à un polynôme en puissances de a . Ces deux dernières intégrales sont traitées de la façon suivante:

- Intégrale d'erreur:

$$\text{Erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt$$

Cette intégrale est remplacée par un développement limité à l'ordre 5 de la variable $U = (1+\rho y)^{-1}$ où ρ est une constante. L'approximation est donnée dans Hastings (1965).

Sur IBM 360 on peut utiliser la fonction DERF(Y), sous-programme mathématique, qui donne l'intégrale d'erreur en double précision pour tout $y \geq 0$.

- Intégrale de Dawson:

$$\text{Daw}(y) = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt$$

Cette intégrale est remplacée par un développement en fraction continue. Il y a 4 expressions selon que la variable est plus grande que 0, 2.5, 3.5 ou 5. Les expressions se trouvent dans Cody et al. (1970).

2 - Résultats

Nous avons calculé numériquement les densités et dispersions des vitesses des six modèles f_{1j} et f_{2j} ($j = 1, 2, 3$) pour toute une série de valeurs des paramètres de structure, pour mettre en évidence les propriétés propres à chaque modèle et pour avoir un large éventail de courbes recouvrant les formes de courbes obtenues par les expériences numériques, en vue d'un ajustement ultérieur.

Dans ce paragraphe nous discutons les propriétés distinctives des modèles analytiques. Les ajustements seront présentés dans le chapitre VII.

L'intervalle de variation des paramètres de structure qui permet de recouvrir l'ensemble des formes de courbes obtenues par les expériences numériques est le suivant:

$$\begin{aligned} k &= 4 \text{ à } 11 \\ x_0 &= 5 \text{ à } 300 \\ \lambda &= 10^{-5} \text{ à } 10^{-1} \end{aligned}$$

et l'ensemble des remarques qui suivent se rapportent à ce domaine.

Les modèles des deux séries f_{1j} et f_{2j} diffèrent peu pour un j donné: les deux manières d'introduire l'anisotropie (explicitement dans f_{2j} ou par des conditions aux limites sur les vitesses dans f_{1j}) ont le même effet sur la structure des modèles, à savoir que les orbites deviennent allongées dans le halo. C'est donc essentiellement la dépendance de f en E qui distingue les modèles. Ceci est bien illustré dans les figures 1 à 4: les densités et dispersions des vitesses des modèles de la série f_{1j} sont semblables à celles des modèles f_{2j} .

Les modèles deviennent plus massifs et plus étendus du point de vue spatial dans l'ordre $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}$. Ceci se remarque en particulier par le fait que la dépendance en r^{-a} de la densité s'étend sur plus d'ordres de grandeur en r lorsque nous passons de f_{i_1} à f_{i_3} . La conséquence de ceci est que les dispersions des vitesses varient plus lentement avec r lorsque nous passons de f_{i_1} à f_{i_3} . L'ensemble des figures 1 à 8 met bien en évidence ce phénomène.

Lorsque le degré d'anisotropie croît, les modèles deviennent plus étendus et plus massifs, et la masse et le rayon deviennent infinis pour une valeur donnée du deuxième paramètre de structure (λ ou x_0). Plus k est grand et j dans f_{ij} est grand et plus le degré d'anisotropie limite est petit.

Nous avons essayé de voir si le degré d'anisotropie limite correspondait à une distribution particulière de la masse et de l'énergie; en particulier, nous avons calculé l'énergie cinétique totale dans les directions radiale et tangentielle, sans trouver de tendance remarquable.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs limites du paramètre d'anisotropie pour plusieurs modèles. La première valeur correspond au modèle fini le plus anisotrope, la deuxième au modèle infini le moins anisotrope.

f_{13}			f_{23}		
k	x_0		k	λ	
6.6	14	13	4	.0372	.0375
6.7	16	15	4.1	.0338	.0340
6.8	18	17	4.2	.0305	.0308
6.9	20	18	4.3	.0275	.0278
7	24	22	4.4	.0250	.0252
7.1	26	24	4.5	.0225	.0228
7.2	32	30	4.6	.0202	.0205
7.3	36	34	4.8	.0164	.0166
f_{22}			f_{23}		
k	λ		k	λ	
4.5	.05	.06	5	.0130	.0132
5.5	.02	.03	5.2	.0100	.0110
5.7	.019	.020	5.4	.0080	.0082
5.8	.016	.018	5.6	.0040	.0080
5.9	.016	.018	5.8	.0048	.0050
6.2	.011	.012	6	.00361	.00364
6.5	.008	.009	6.2	.00263	.00266
6.6	.007	.008	6.4	.00180	.00190
6.7	.006	.007	6.6	.00120	.00130
6.8	.006	.007	6.8	.00086	.00090
6.9	.0050	.0055	7	.00054	.00055
7	.0048	.0050	7.2	.00031	.00040
7.2	.0030	.0040	7.4	.00020	.00022
8	.0014	.0016	7.6	.00012	.00020

Comment expliquer que le système devienne infini à partir d'un certain degré d'anisotropie? En imposant une condition restrictive supplémentaire par rapport à un modèle isotrope nous supprimons certaines orbites dans le halo, en particulier les orbites circulaires. La densité devrait y décroître, mais il y a en fait une redistribution de masse parce que l'équation de Poisson doit être satisfaite. Les orbites du halo sont allongées, les étoiles parcourent ces orbites suivant la loi des aires et la probabilité est plus grande de les trouver près de l'apocentre que du péricentre. Les orbites sont aussi en moyenne plus énergétiques: il faut plus de masse pour maintenir un équilibre.

La structure d'ensemble des modèles est la suivante:

La densité est semblable à la densité de la sphère isotherme dans le noyau, elle varie en r^{-a} (où a est une constante) dans la zone intermédiaire du proche halo et décroît abruptement (modèle fini) ou a un point d'inflexion et décroît moins vite (modèle infini) dans l'extrême halo.

La distribution des vitesses est isotrope et les dispersions des vitesses varient plus lentement dans le noyau; elle est anisotrope dans le halo, $\overline{T^2}$ y décroît en r^{-2} et $\overline{R^2}$ y décroît plus ou moins rapidement selon que le modèle est fini ou infini.

Dans le cas des modèles finis nous pourrions nous attendre à une décroissance plus lente des dispersions des vitesses dans le halo de ces modèles. Cependant la vitesse d'évasion a un effet prépondérant sur la densité et les vitesses dans le halo: elle décroît rapidement et devient nulle à la limite.

Les modèles sont caractérisés par deux paramètres de structure: k et x_0 pour les f_{1j} et k et λ pour les f_{2j} .

Le premier paramètre, k , détermine essentiellement la densité dans le noyau et le proche halo (en particulier la valeur de la pente a). Lorsque k croît, a décroît et le noyau devient plus massif.

Le deuxième paramètre, x_0 ou λ , détermine la distribution des vitesses dans le halo, et par suite le degré d'anisotropie du modèle. Il détermine aussi, par voie de conséquence, la densité du halo, et pour

les modèles très anisotropes, celle du noyau. Les modèles deviennent plus anisotropes et, du point de vue spatial, plus étendus lorsque x_0 décroît ou lorsque λ croît.

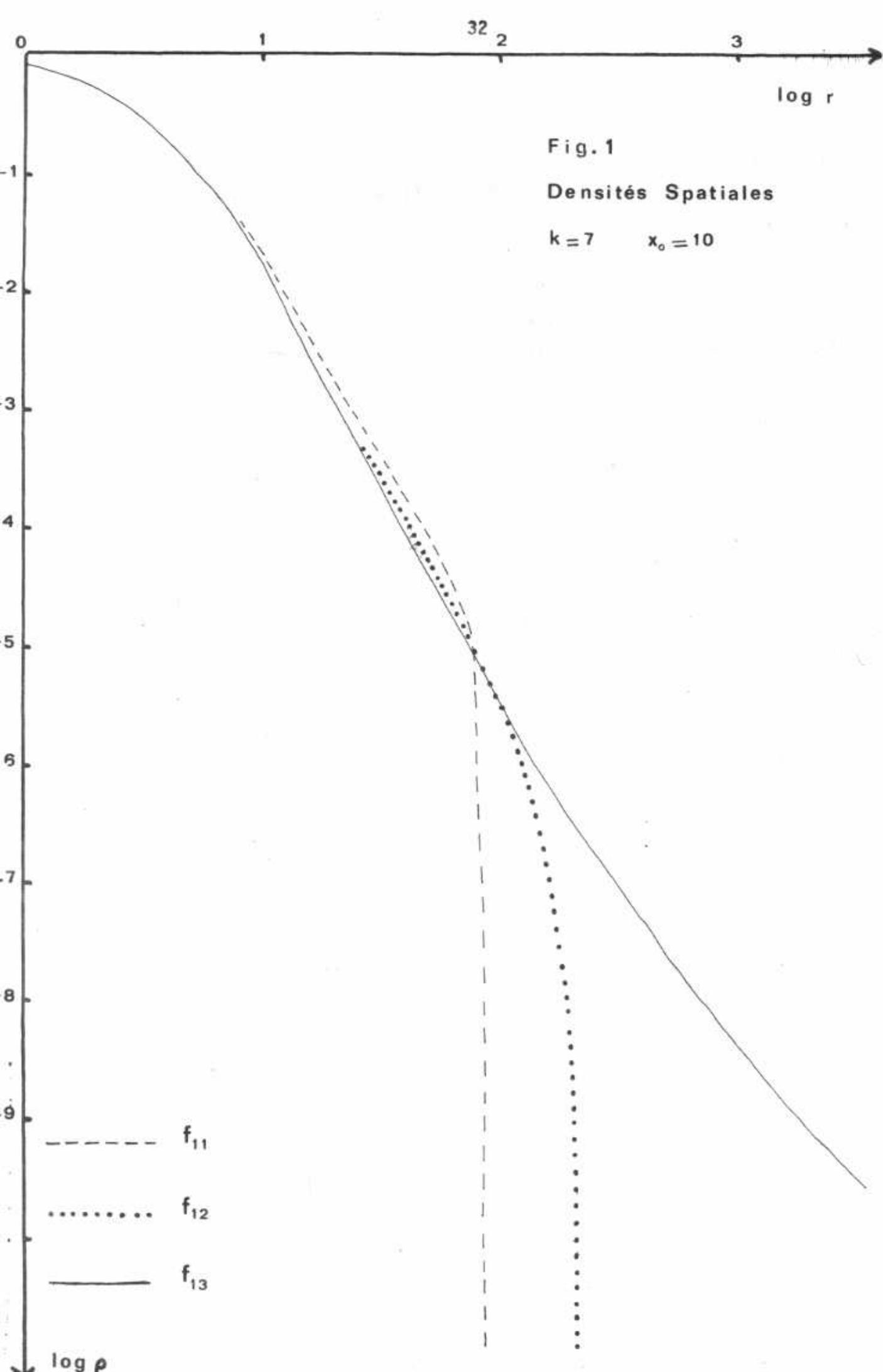
Remarques sur les figures 1 à 4:

Les deux fonctions de phase f_{1j} et f_{2j} produisent des densités et des dispersions des vitesses assez semblables pour un j donné.

Pour une même distribution des vitesses, les densités sont plus étendues dans l'ordre f_{i_1} , f_{i_2} , f_{i_3} .

Nous remarquons aussi que les modèles f_{13} et f_{23} sont infinis (point d'inflexion pour ρ).

Les dispersions des vitesses des modèles de dimensions finies décroissent rapidement et s'isotropisent dans l'extrême halo, alors que nous devrions nous attendre à une dispersion radiale importante due aux orbites allongées dans cette région. Cet effet, non physique, de nos modèles tient à ce que la vitesse d'évasion v_e décroît plus vite qu'en $1/r$ dans l'extrême halo.



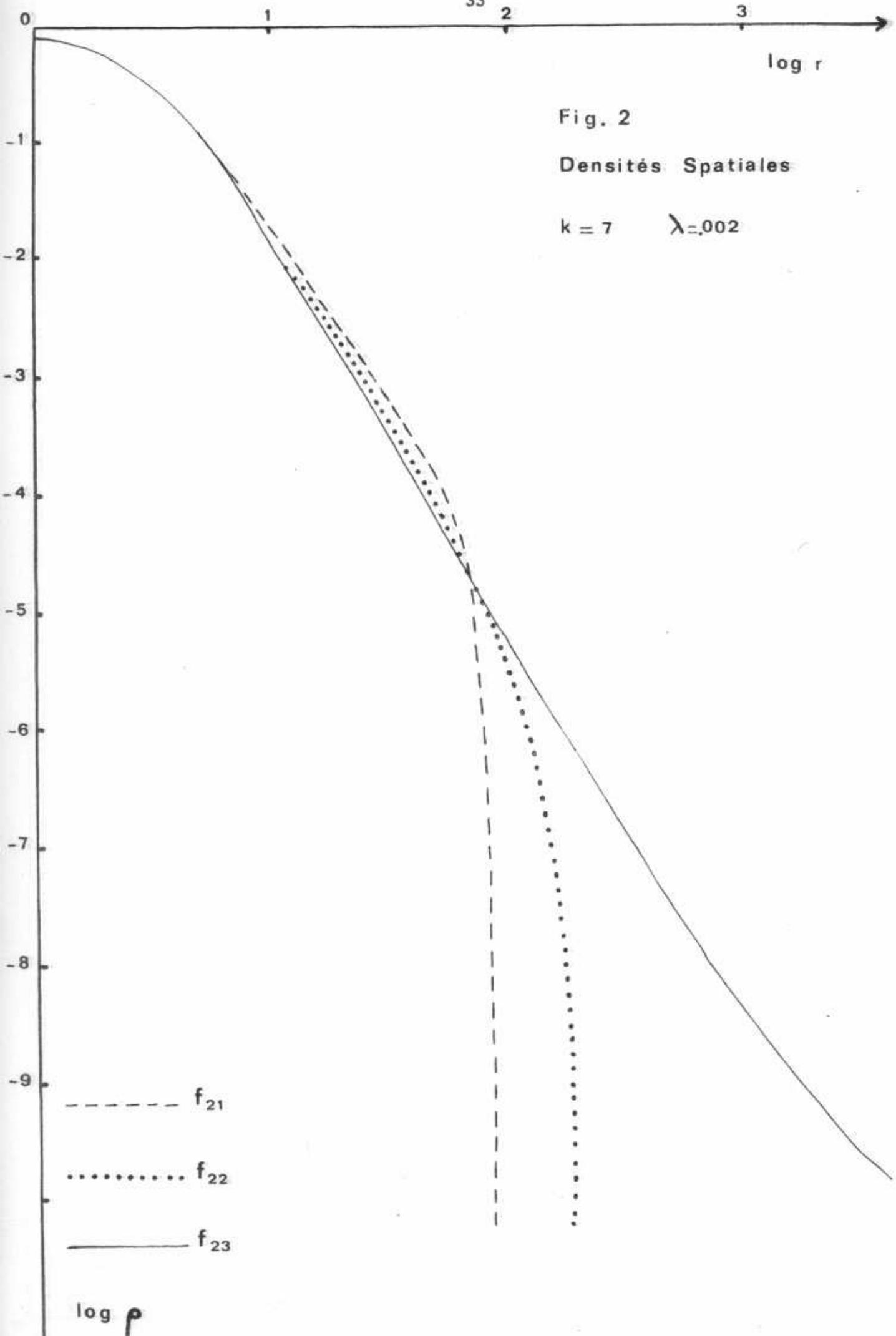


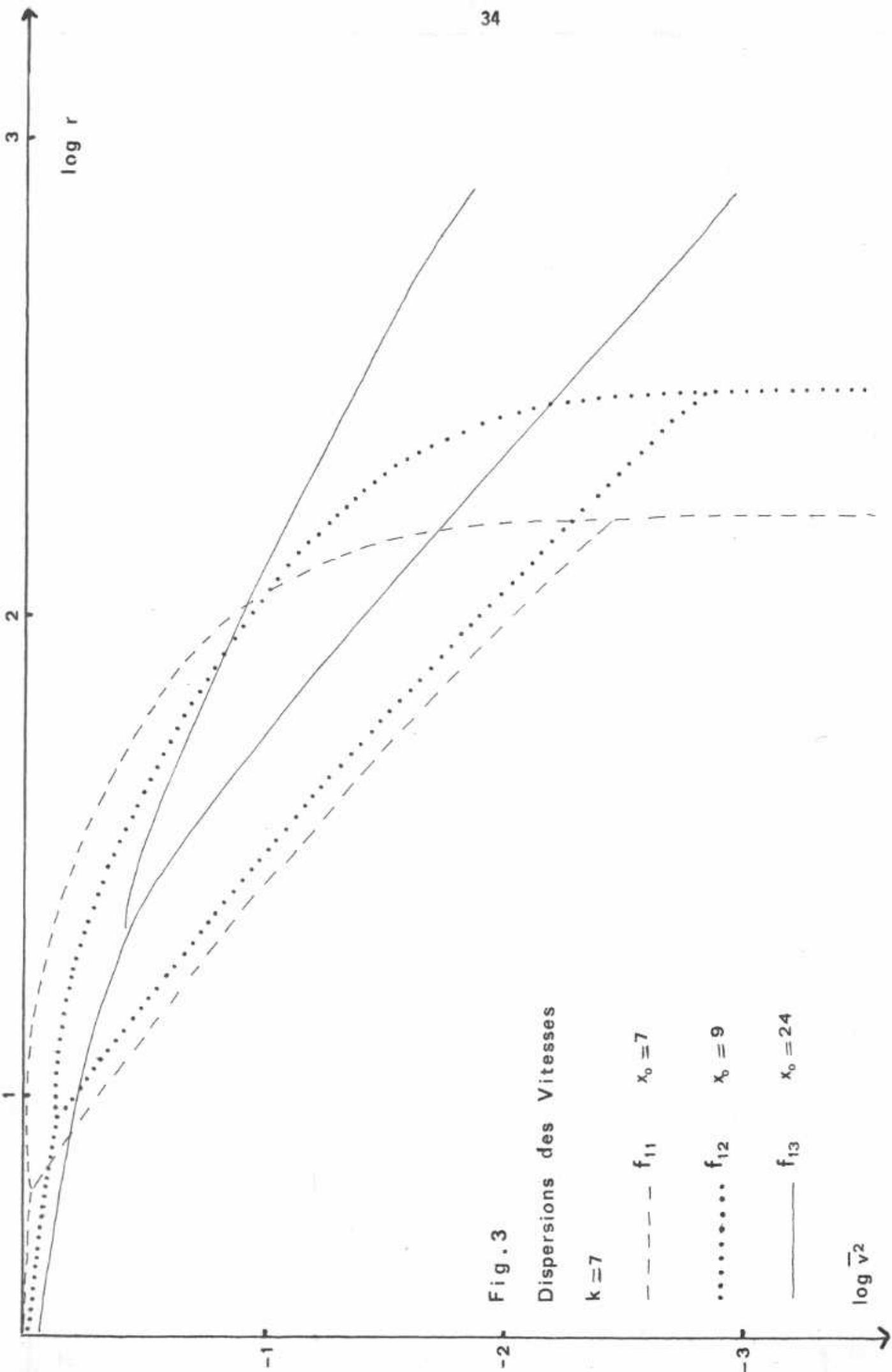
Fig. 2

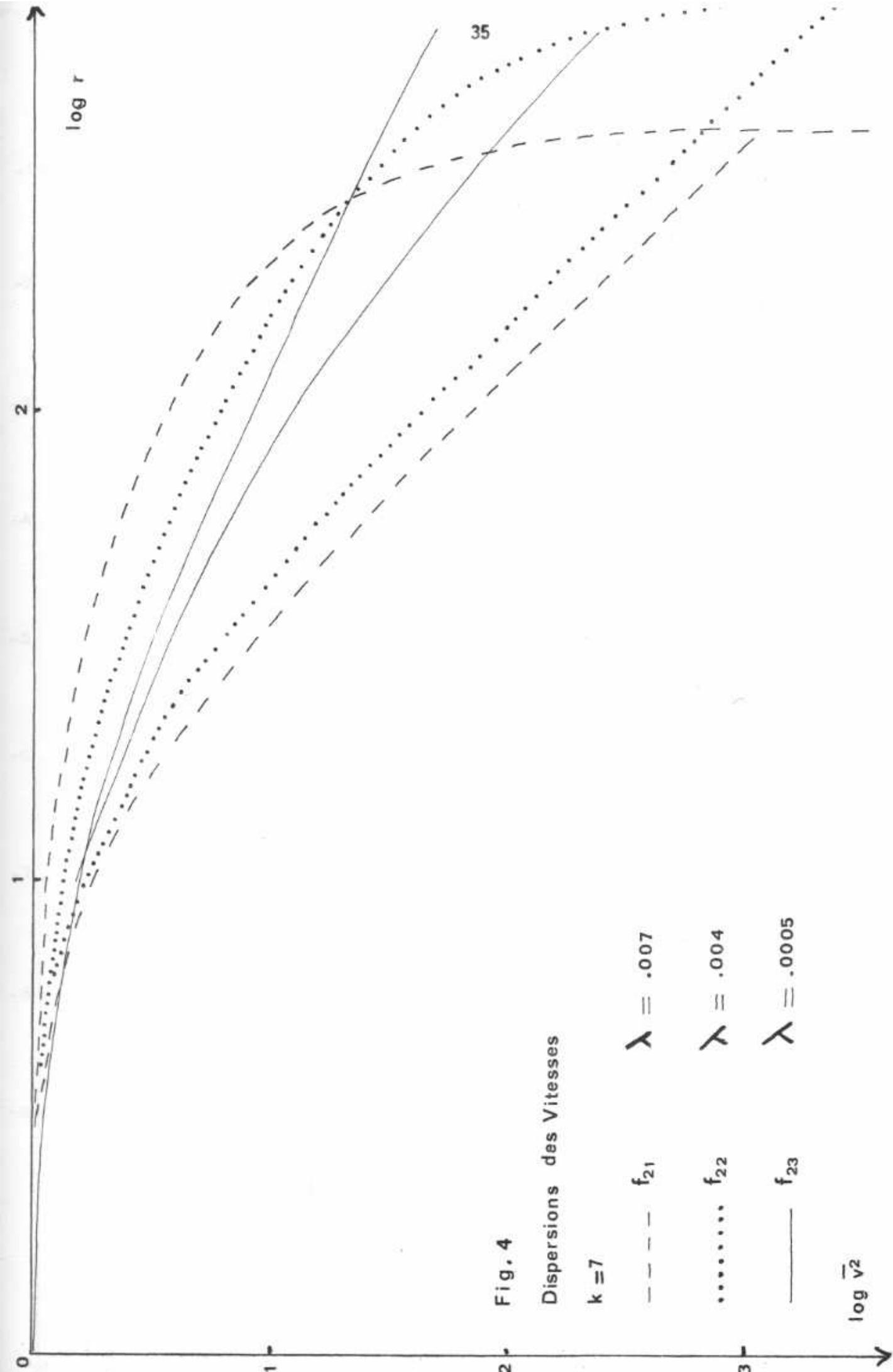
Densités Spatiales

$k = 7$ $\lambda = .002$

----- f_{21}
..... f_{22}
————— f_{23}

$\log \rho$

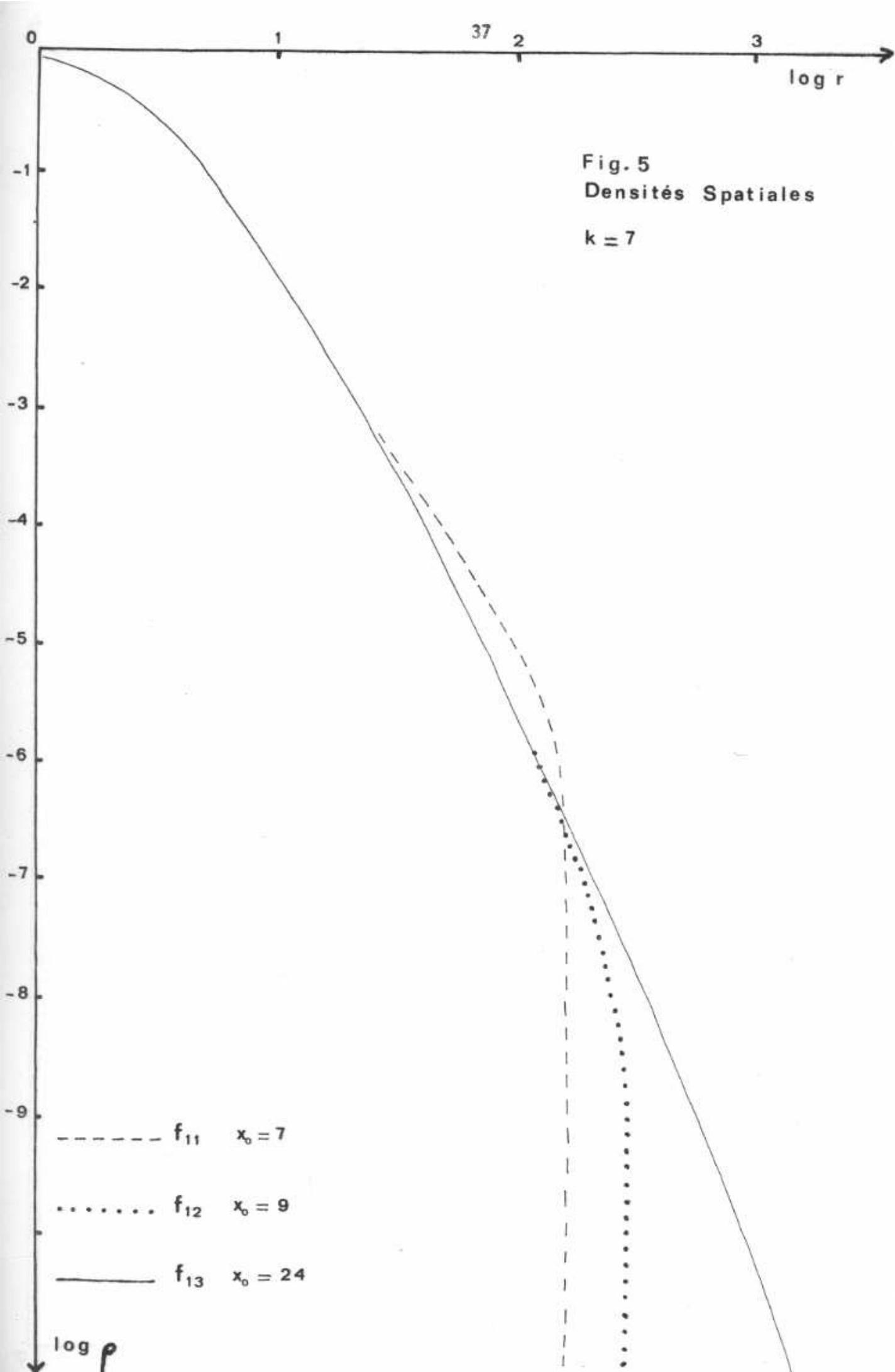




Remarques sur les figures 5 à 8:

Pour des distributions de densité aussi semblables que possible à k fixé, le degré d'anisotropie décroît du modèle f_{i_1} à f_{i_3} .

Les courbes \bar{T}^2 en fonction de r ne sont plus confondues. C'est ce point essentiel qui distingue les modèles lorsque nous voulons ajuster un tel modèle à un modèle "numérique".



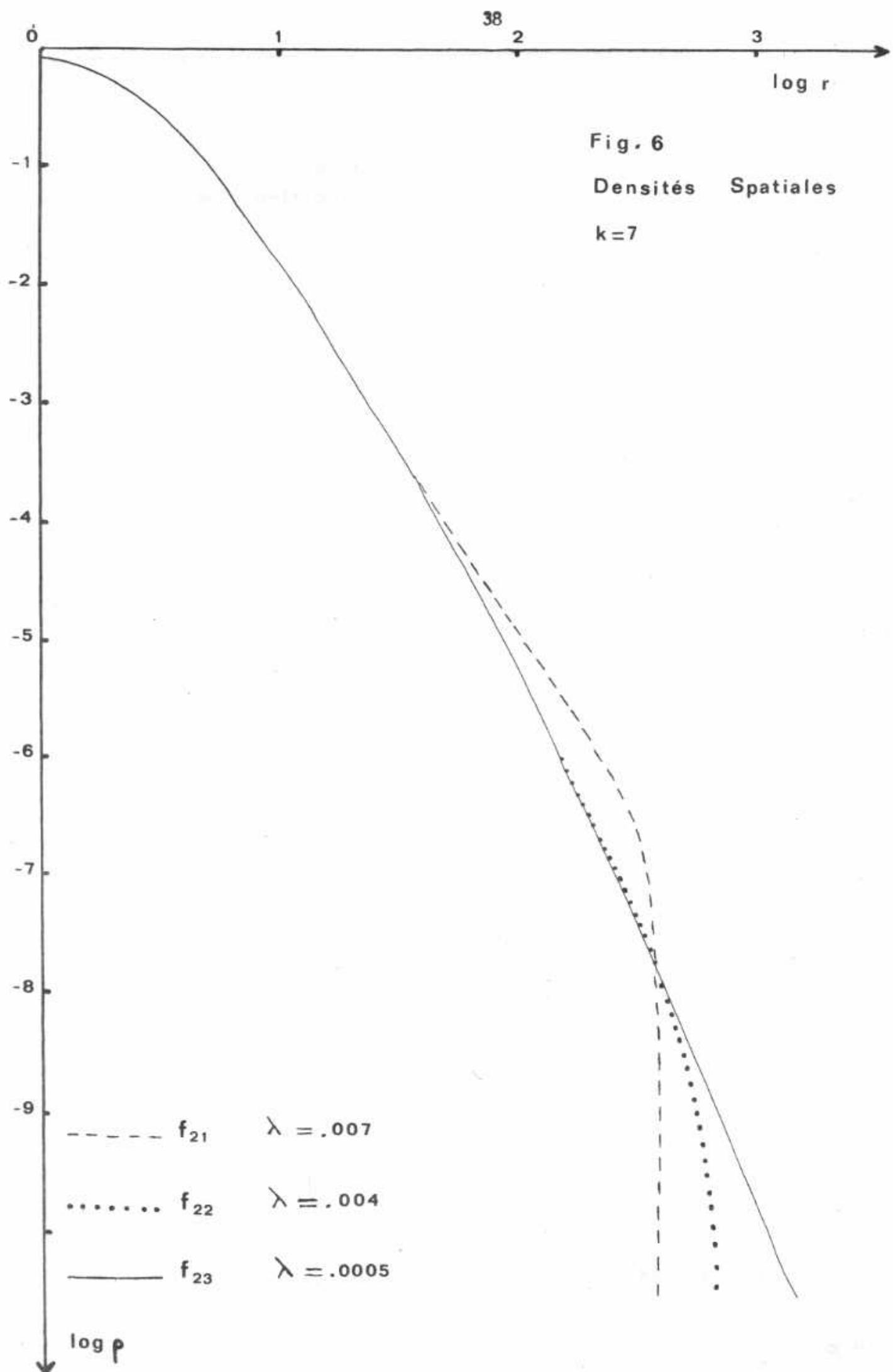
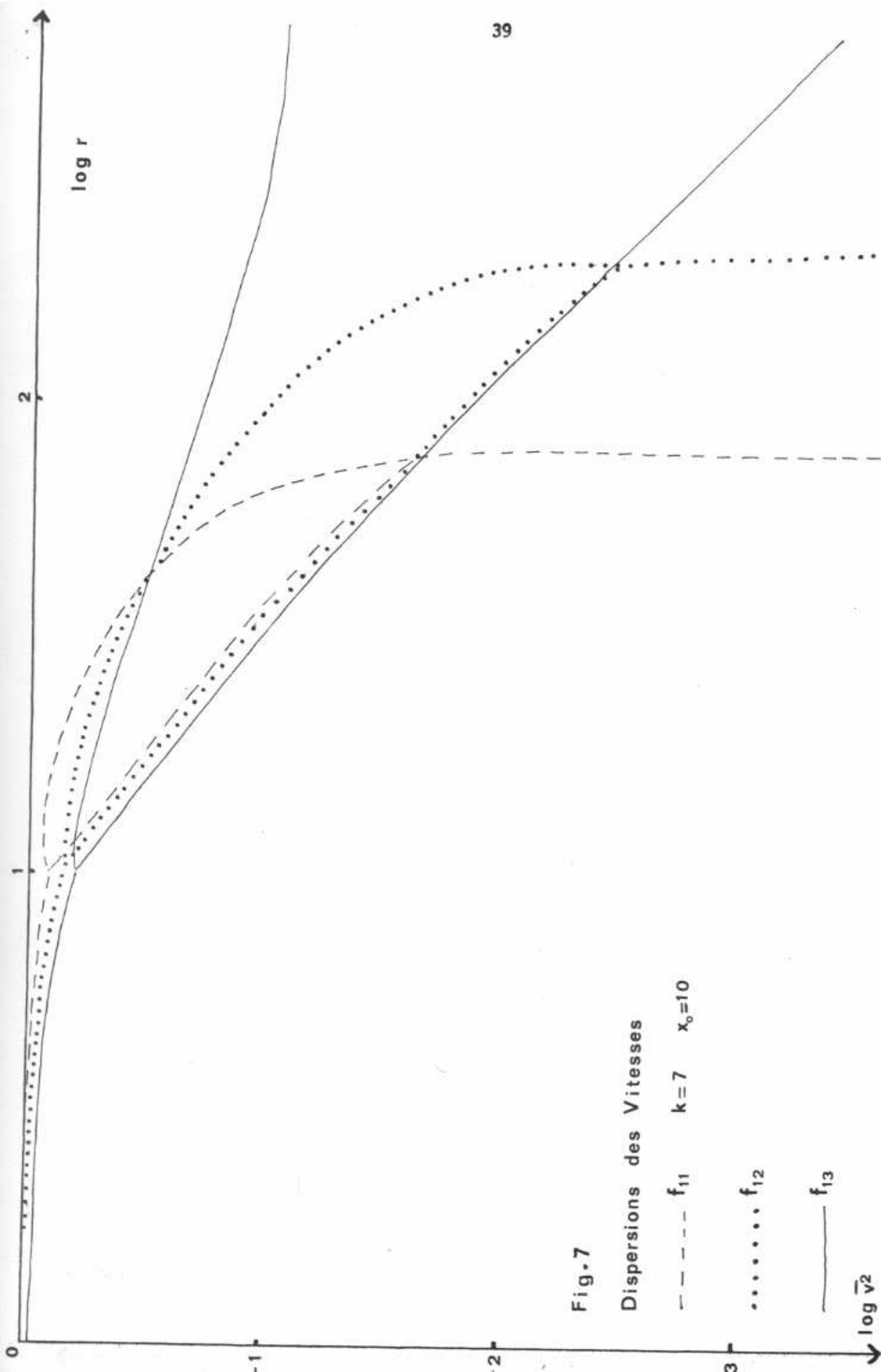


Fig. 6
Densités Spatiales
k=7



log r

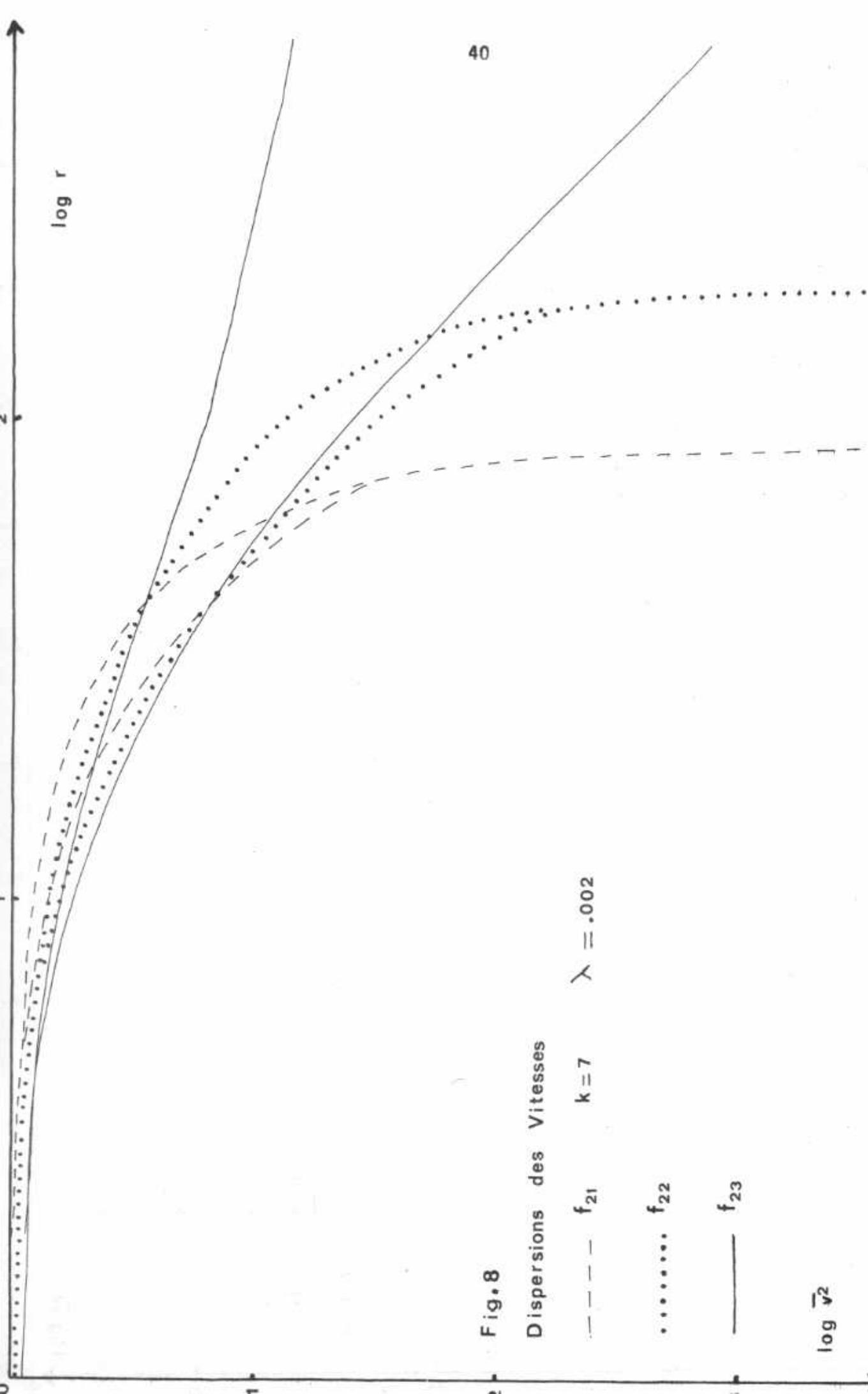


Fig. 8

Dispersion des Vitesses

--- f_{21} $k=7$ $\lambda=.002$

..... f_{22}

— f_{23}

$\log \bar{v}^2$

3 - VERIFICATIONS

Il est vital que nos programmes d'intégration numérique de l'équation de Poisson donnent des résultats corrects, puisque toute la suite de notre travail repose sur ces résultats. Pour nous en assurer nous avons pris les précautions et effectué les vérifications suivantes:

Nous avons toujours travaillé en double précision.

Nous avons utilisé deux méthodes d'intégration. Dans la première méthode nous nous sommes assurés que les développements limités convergeaient au moins au quatrième ordre; pour cela nous avons fait imprimer tous les termes des développements, tous les 10 pas d'intégration, pour plusieurs intégrations typiques. Nous avons aussi développé au cinquième ordre dans le noyau des modèles f_{1j} . Dans la deuxième méthode (celle de Runge Kutta) nous avons effectué un changement de variable dans le halo: le potentiel est devenu la variable. Dans les deux méthodes nous avons diminué le pas d'intégration h jusqu'à 10^{-3} .

Nous nous sommes assurés que les approximations pour les intégrales d'erreur et de Dawson étaient satisfaisantes pour toutes les valeurs de la variables, en comparant les valeurs obtenues à celles qui sont tabulées dans Abramowicz et Stegun (1965).

Nous avons calculé la masse à l'intérieur du rayon r de deux façons différentes:

$$M_1(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr$$

$$M_2(r) = - \frac{r^2}{G} \frac{dU}{dr}$$

de même pour l'énergie potentielle totale:

$$Ep_1 = 4\pi \int_0^{r_t} \rho \frac{U}{2} r^2 dr$$

$$Ep_2 = - G \int_0^{r_t} \frac{M(r)}{r} dM(r)$$

Nous avons vérifié que l'équation de Poisson sous forme intégrale était satisfaite:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rU) = -4\pi G\rho$$

$$U(0) - U(r) - r \frac{dU}{dr} = 4\pi G \int_0^r \rho r' dr'$$

Enfin nous nous sommes assurés que le théorème du Viriel était satisfait pour tous les modèles de dimensions finies. Le rapport des énergies cinétique et potentielle totales est égal à 0.5 à 1% près.

Par ailleurs, les modèles f_{11} et f_{12} ont été étudiés par plusieurs auteurs; nous avons comparé nos résultats aux leurs dans tous les cas où cela était possible:

Le modèle f_{11} sans halo a été calculé par Woolley et Dickens (1961). Leur table 1 donne le potentiel U , sa dérivée $\frac{dU}{dr}$ et la densité spatiale ρ/ρ_c en fonction du rayon r jusqu'à $r = 100$, pour $k = 6$ et 8 . L'accord avec nos résultats est excellent.

Le modèle f_{11} avec halo a été calculé par Woolley et Dickens (1967). Leur figure 38 donne la densité spatiale en fonction du rayon pour $k = 6, 6.25$ et 6.5 et pour un rayon du noyau de $x_0 = 10$. L'accord n'est que moyen, mais il faut tenir compte du fait qu'il s'agit ici d'une figure et non d'une table.

Le modèle f_{12} sans halo a été étudié en détail par King (1966): La table 1 donne les valeurs de la dispersion des vitesses pour 15 valeurs du potentiel. La table 2 donne le rayon total c , la masse μ et l'énergie potentielle totale β pour 11 valeurs du paramètre w_0 (qui correspond à notre K). L'accord est toujours excellent. Remarquons que les unités sont différentes:

$$c = \frac{x_t}{3} \quad \mu = \frac{8\pi}{27} M \quad \beta = \frac{8\pi}{27} E_p$$

où x_t , M et E_p sont le rayon, la masse et l'énergie potentielle totale dans nos unités. Nous avons aussi comparé nos courbes de densité $\rho = \rho(r)$ avec celles de King (communication privée) pour $K = 6, 7$ et 8 . L'accord

est ici aussi très satisfaisant.

Enfin l'article de Lynden-Bell et Wood (1968) donne l'énergie totale des modèles f_{11} et f_{12} sans halo (divisée par l'énergie totale de la sphère homogène correspondante) en fonction du paramètre k , dans leur figure 8. L'accord est excellent.

V - DIAGRAMME DE LINDBLAD

Précédemment nous avons considéré les modèles f_{ij} dans un espace de phase (\vec{r}, \vec{v}) et nous avons projeté la fonction de phase sur l'espace des positions (en intégrant sur les vitesses) pour avoir la densité.

Nous étudions maintenant les fonctions de phase f_{ij} dans l'espace (E, I^2) , pour mettre en évidence d'autres propriétés caractéristiques des deux séries de modèles.

Dans cet espace, plus précisément dans le diagramme d'axes E et I^2 , appelé diagramme de Lindblad, chaque orbite est représentée par un point puisque E et I^2 sont des intégrales du mouvement.

Le domaine de l'espace de phase rempli par ces orbites est limité par les droites $I^2 = 0$, $E - E_e = 0$ et par la courbe engendrée par l'ensemble des orbites circulaires. En effet, pour une énergie E donnée, c'est l'orbite circulaire qui a le plus grand moment angulaire I . L'équation de cette courbe est donnée en coordonnées paramétriques:

$$E = - \frac{r}{2} \frac{dU}{dr} - U$$

$$I^2 = - r^3 \frac{dU}{dr}$$

Dans ce diagramme le lieu des orbites ayant un péricentre (ou un apocentre) donné r est représenté par une droite tangente au lieu des orbites circulaires; c'est une droite d'équation:

$$E = \frac{I^2}{2r^2} - U$$

La portion de la droite au-dessus du point de tangence correspond aux orbites ayant leur péricentre en r et la portion au-dessous de ce point aux orbites ayant leur apocentre en r .

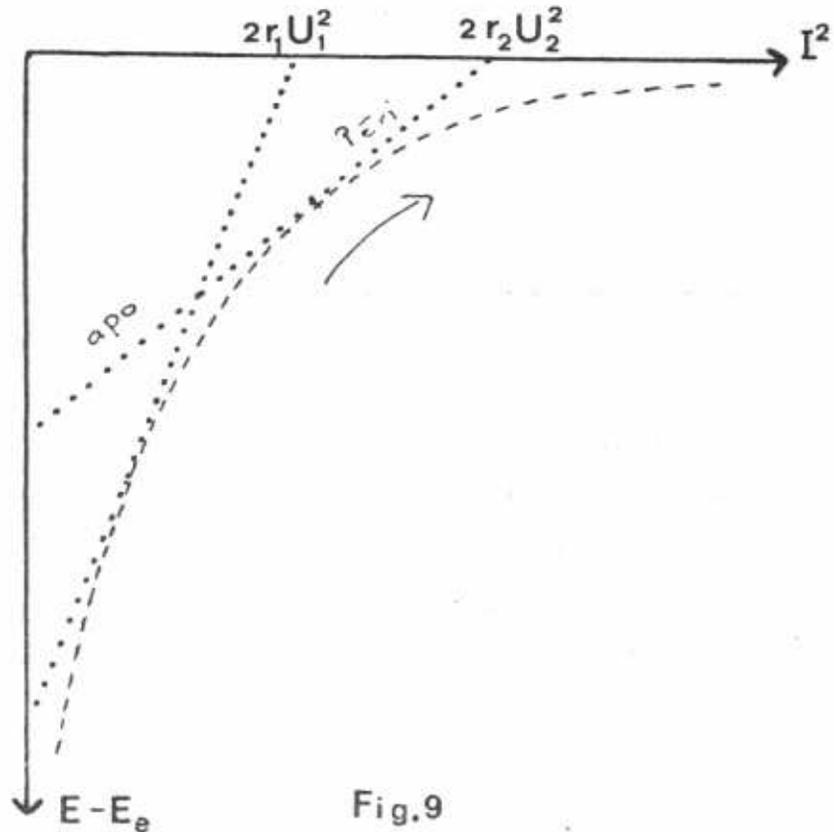


Fig.9

Le diagramme de Lindblad est représenté schématiquement dans la figure 9: les droites en pointillé représentent les lieux des apo- ou péricentres r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$). Pour le lieu des orbites circulaires la flèche indique le sens des rayons croissants.

Pour les modèles f_{1n} il y a par hypothèse un péricentre maximum r_0 pour les orbites possibles. Le domaine de l'espace de phase où f_{1n} est non nul est donc en outre limité par la droite d'équation

$$E = \frac{I^2}{2r_0^2} - U(r_0)$$

Les figures 10 et 11 donnent les diagrammes de Lindblad des modèles f_{13} et f_{23} pour $k = 7$. Remarquons que les abscisses

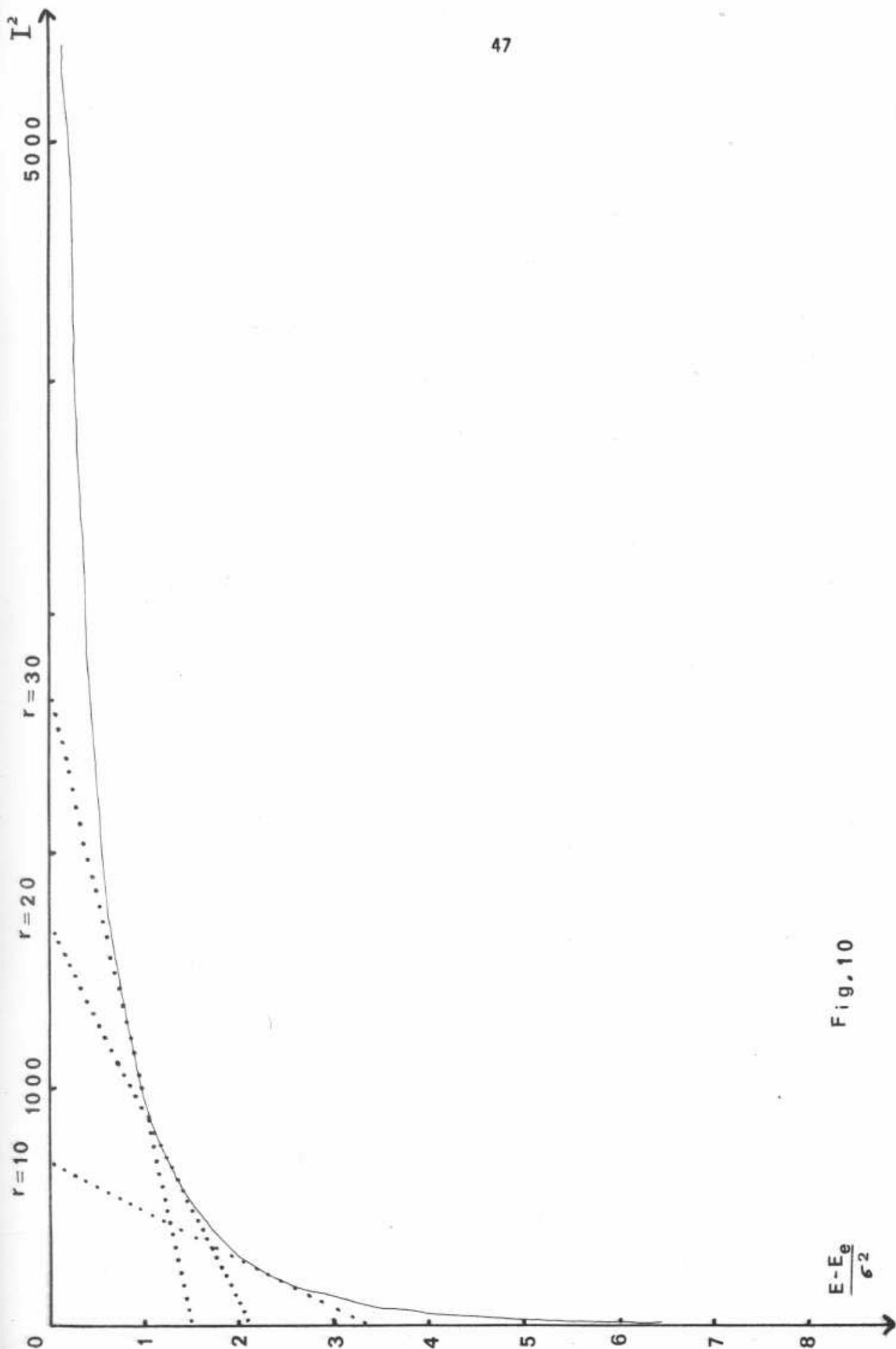


Fig. 10



Fig. 11

sont différentes dans les deux cas. Les domaines de définition des fonctions de phase f_{13} et f_{23} diffèrent pour les grandes valeurs du moment angulaire: pour f_{13} il n'y a pas d'orbites au-delà d'une valeur maximale de I qui dépend de la valeur du paramètre r_0 , alors que pour f_{23} il y a des orbites pour toutes les valeurs de I , même pour un δ faible. Cependant comme f_{13} est en $\exp(-\delta I^2)$, la densité de phase devient rapidement négligeable pour les grandes valeurs de I et les deux séries de modèles sont finalement assez semblables.

Nous pourrions porter sur les graphiques les courbes d'isodensité de phase. Pour les f_{1n} ce serait des droites parallèles à l'axe des I^2 . Pour les f_{21} ce serait des droites d'équation

$$\delta I^2 + 2(E - E_e) = \text{constante}$$

et pour les f_{2n} en général ce serait des courbes plus complexes décroissant rapidement aux grandes valeurs de I^2 .

Le diagramme de Lindblad est présenté en détail dans Ogorodnikov (1965, p. 286) pour les systèmes sphériques et dans Chandrasekhar (1943, p. 161) et Lindblad (1928) pour les systèmes à symétrie axiale.

VI - STABILITE ET EVOLUTION

Nous avons adopté des fonctions de phase stationnaires pour nos modèles. Ceux-ci sont donc en équilibre par hypothèse, et le théorème du viriel est toujours vérifié. Cependant il faut nous assurer que cet état d'équilibre (ou plutôt de "quasi-équilibre") est stable. Nous sommes amenés à examiner la stabilité sur deux échelles de temps.

1 - Stabilité dynamique

C'est la stabilité sur un intervalle de temps de l'ordre du temps de cohérence, temps que met une étoile pour traverser le système. Une instabilité dynamique est liée à un champ gravitationnel rapidement variable dans le temps, c'est-à-dire à des fluctuations statistiques de la masse trop importantes pour que le système soit statistiquement en équilibre.

Pour nos modèles, la stabilité dynamique signifie que dans la succession d'états d'équilibre qui constituent le modèle dans son évolution, chaque état d'équilibre est stable.

Un système stellaire à symétrie sphérique avec des mouvements purement radiaux est dynamiquement instable. (Antonov, 1973a). Nous sommes donc amenés à penser qu'une distribution des vitesses plus anisotrope tend à déséquilibrer un système stellaire.

En effet, quelques études de stabilité ont porté sur des systèmes stellaires ayant une distribution des vitesses anisotrope:

- un cylindre homogène infini avec une distribution des vitesses anisotrope est instable vis à vis d'oscillations non linéaires (Antonov 1973b, Antonov et Nezhinskij 1973).

- le modèle de Camm, caractérisé par la fonction de phase

$$f = A \left(\frac{I^2}{2a^2} + E_e - E \right)^{-1/2}$$

est instable vis à vis d'oscillations radiales linéaires (Polyachenko et Shukhman, 1974) et non linéaires (Antonov et Nuritdinov, 1975).

- le polytrophe généralisé $f = k(E_e - E)^{n-3/2} I^{2m}$ est instable dans la région hachurée de la figure 12 (Hénon, 1973b).

$m = -1$ correspond à des orbites purement radiales

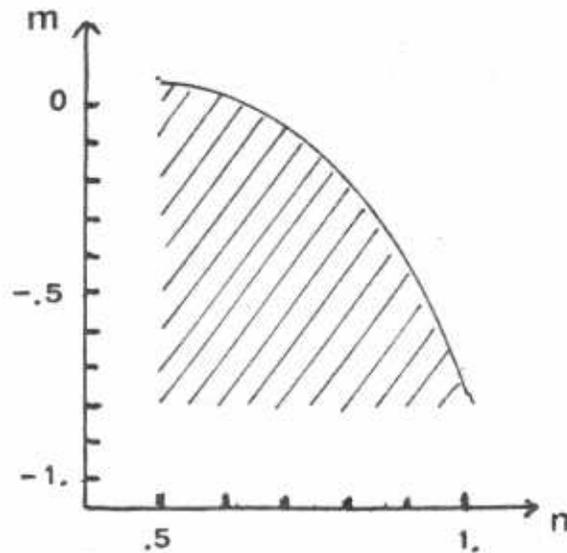


Fig 12

Un critère de stabilité dynamique a récemment été mis au point pour le modèle du water bag multiple. Ce critère peut en principe s'étendre à toutes les fonctions de phase en les considérant comme la limite d'un water bag lorsque le nombre de "bags" devient infini.

Le principe de la méthode est simple: pour qu'un système stellaire isolé soit stable, il suffit que toute perturbation (en densité, potentiel...) provoque une augmentation de l'énergie totale du système; dans ce cas toute amplification d'une perturbation initiale violerait le principe de conservation de l'énergie, et le système est stable.

Le critère est le suivant. Pour qu'un système stellaire à symétrie sphérique dont la fonction de phase est de la forme $f=f(E, I^2)$ soit stable vis à vis d'oscillations radiales, il suffit que (Dorémus et Feix 1973, Gillon et al. 1976a):

$$\frac{\partial f}{\partial E} < 0$$

Pour que le même système soit stable vis à vis d'oscillations non radiales, il suffit que (Gillon et al, 1976b):

$$\frac{\partial f}{\partial E} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial I} < 0$$

Nous remarquons que dans les régions d'instabilité des modèles cités plus haut ce critère n'est pas vérifié.

Dans tous nos modèles, ce critère est vérifié.

Nous pouvons donc conclure que dans un premier examen nos modèles sont dynamiquement stables.

2 - Stabilité séculaire

C'est la stabilité considérée sur un intervalle de temps de l'ordre du temps de relaxation t_r . Ce temps est en général beaucoup plus grand que le temps de cohérence, d'un facteur 10^6 . (voir Miller 1974b, table I). Une instabilité séculaire est en général due à un phénomène dissipatif (évasion d'étoiles, ségrégation des étoiles par masse, un flux d'énergie...). Dans le cas de nos modèles, c'est sur cette échelle de temps que la variation des paramètres devient mesurable.

La question est précisément de savoir si nous pouvons prédire que cette variation des paramètres, cette évolution par paliers, se fait dans une direction privilégiée, vers un état d'équilibre final où la distribution des vitesses serait maxwellienne par exemple, ou bien si elle se fait vers une catastrophe gravothermique. La stabilité séculaire signifie donc pour nos modèles que la succession d'états d'équilibre amène le système vers un état d'équilibre stationnaire où les paramètres deviennent pratiquement constants.

Un critère de stabilité séculaire pour les systèmes mécaniques et statistiques est le critère d'entropie maximum. Un système physique

évolue de façon irréversible vers des états de plus grande entropie. Si celle-ci atteint un maximum le système deviendra stationnaire.

Le théorème H de Boltzmann donne la définition suivante de l'entropie:

$$H = - \int f \log f \, d\vec{r} \, d\vec{v}$$

où f est la fonction de phase du système.

Lynden-Bell et Wood (1968) ont calculé l'entropie d'une sphère isotherme et d'un système caractérisé par la fonction de phase $f_{11} = Ae^{-E/\sigma^2}$. Ils ont trouvé que l'entropie atteint un maximum pour les valeurs de k de 6.55 et 8.2 respectivement. Ils ont aussi constaté que le rapport de l'énergie totale du système à l'énergie totale de la sphère homogène de même rayon et de même masse totale était directement proportionnel à l'entropie:

$$H \propto \frac{E_t}{\frac{3GM^2}{10r_t}}$$

Ils conjecturent que cette proportionnalité est encore vraie pour la fonction de phase f_{12} , dont la complexité ne permet pas de calculer H . Par ailleurs, dans le cas de la sphère isotherme ils ont mis en évidence une instabilité gravothermique au maximum d'entropie. Des travaux assez semblables ont été publiés par Antonov (1962).

Nous avons calculé l'énergie, la masse et le rayon total des modèles f_{ij} sans halo (c'est-à-dire $x_0 \rightarrow \infty$) et nous avons trouvé (en accord avec Lynden-Bell et Wood pour f_{11} et f_{12}) que le rapport de l'énergie totale E à l'énergie totale E_h de la sphère homogène correspondante passait par un maximum pour une valeur de k entre 8.1 et 8.3. (voir fig. 13). Nous avons en outre constaté qu'en introduisant une anisotropie des vitesses, ce rapport croît continûment avec le degré d'anisotropie lorsque x_0 décroît ou lorsque λ croît) pour une valeur donnée de k . Ces résultats ne prouvent pas l'existence ou l'absence d'un maximum de l'entropie des différents modèles, mais mettent en évidence une propriété intéressante de ceux-ci.

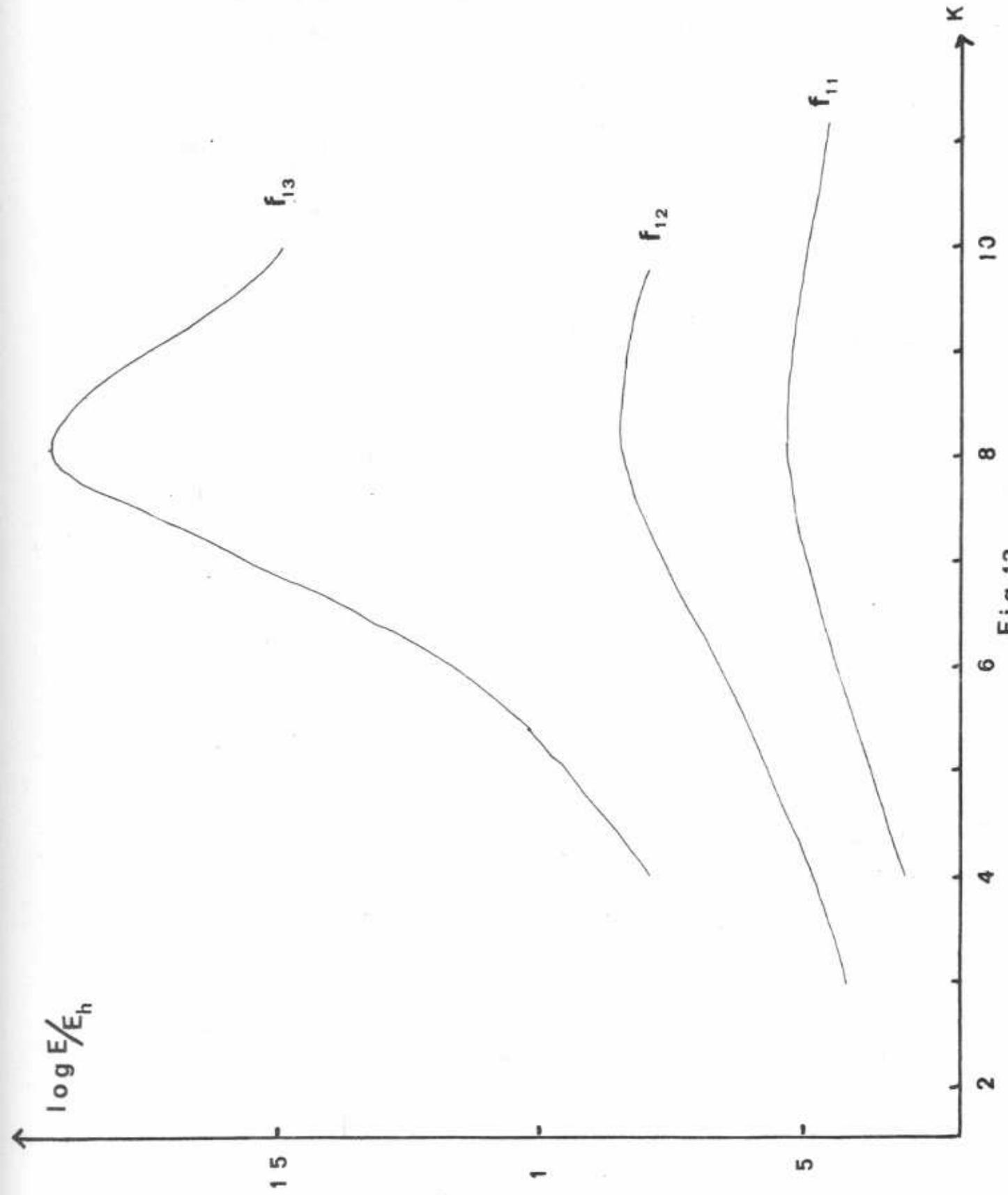


Fig 13

Cependant l'application du théorème H de Boltzmann à la dynamique stellaire et plus précisément l'article de Lynden-Bell et Wood ont été critiqués par plusieurs auteurs.

Après une analyse détaillée des résultats d'expériences numériques, Miller (1973, 1974a, 1974b) affirme qu'il n'y a pas de fondements physiques à l'existence d'une telle relation entre l'entropie d'un système stellaire et une fonctionnelle de sa fonction de phase. Il n'exclut cependant pas la possibilité qu'il existe une relation entre l'entropie et une autre caractéristique physique d'un système stellaire. Remarquons à ce propos qu'il existe un maximum d'entropie pour les trous noirs proportionnel au carré de leur masse (Bekenstein, 1973).

Ipsier (1974) étudie les propriétés des fonctions de phase pour lesquelles il existe un maximum local de l'entropie; il trouve en particulier que la distribution des vitesses doit être isotrope et conclue qu'aucun système stellaire sphérique réaliste ne peut avoir de maximum local de l'entropie définie par le théorème H.

Taff et Van Horn (1975) montrent que l'analyse de Lynden-Bell n'a pas montré l'existence d'une catastrophe gravothermique parce que le Jacobien dans un changement de variables s'annule précisément à l'extrémum de l'entropie.

D'autre part, les expériences numériques de Monte-Carlo mettent en évidence une évolution qui ne semble pas être vers un état d'équilibre: le noyau se contracte et la densité au centre devient rapidement infinie et le halo s'étend progressivement. Spitzer et Thuan (1972) remarquent que l'évasion d'étoiles hors du système est insuffisante pour expliquer le phénomène.

Ainsi les tentatives pour mettre en évidence par des arguments théoriques une direction d'évolution privilégiée n'ont pas abouti, et les expériences numériques semblent montrer que l'évolution ne se fait pas vers un état stationnaire, sauf pour certaines conditions initiales particulières (Saito et Yoshizawa, 1976).

VII - EVOLUTION DES PARAMETRES

Après avoir étudié les propriétés intrinsèques de nos modèles analytiques, nous utilisons ces modèles pour rendre compte de la structure et de l'évolution des modèles numériques. L'ajustement des courbes de densité et de dispersions des vitesses des modèles numériques par celles de nos modèles produit une série de paramètres: nous recherchons une loi d'évolution empirique pour ces paramètres pour pouvoir comparer leur évolution à l'évolution des paramètres obtenue par d'autres méthodes (exposées au chapitre II).

1 - Ajustement

Nous avons ajusté par nos modèles trois séries de modèles numériques obtenus par la méthode de Monte-Carlo:

- Modèle 72; Hénon (communication personnelle). Onze étapes d'évolution sont données.

- Modèle K; Spitzer et Shull (communication personnelle et Spitzer et Shull, 1975). Six étapes d'évolution sont données.

- Modèle DI, Spitzer et Thuan (1972). Trois étapes d'évolution sont fournies.

La méthode d'ajustement adoptée est la suivante. Nous avons porté les densités spatiales et les dispersions des vitesses des différents modèles (analytiques et numériques) en fonction du rayon sur

papier calque en échelles logarithmiques. Nous ajustons en superposant le modèle analytique et le modèle numérique et en faisant coulisser l'un horizontalement et verticalement (d'où deux paramètres d'échelle) par rapport à l'autre. Lorsque la courbe de densité est ajustée le paramètre d'échelle α est fixé et il n'y a plus d'ajustement que verticalement pour les courbes de vitesses. Chaque ajustement fournit deux paramètres d'échelle: (ρ_c, α) pour les densités et (σ^2, α) pour les vitesses, et deux paramètres de structure: (k, x_0) pour f_{1j} et (k, λ) pour f_{2j} .

Parmi nos modèles, seuls les modèles f_{13} et f_{23} peuvent s'ajuster de façon satisfaisante à chacun des modèles numériques. Lorsque l'accord est satisfaisant dans le noyau des autres modèles f_{i1} et f_{i2} , ceux-ci ne s'étendent pas assez dans l'espace et les dispersions des vitesses décroissent trop rapidement dans le halo. Nous avons remarqué plus haut (chapitre IV) que les modèles analytiques f_{i1} , f_{i2} et f_{i3} se distinguent par la structure du halo qui devient plus important lorsque nous passons de f_{i1} à f_{i3} , pour un même choix des paramètres de structure. Il est donc normal que les modèles numériques ne soient en accord qu'avec un seul type de modèle.

Il est intéressant de noter que le modèle qui s'ajuste le mieux aux résultats des expériences numériques, f_{i3} , n'est pas celui qui correspond à une distribution maxwellienne des vitesses, c'est-à-dire f_{11} .

La difficulté d'obtenir un accord satisfaisant pour les différents modèles analytiques est essentiellement due au fait que nous devons ajuster deux courbes en même temps pour un même choix des trois paramètres k , x_0 ou λ et α . Ainsi par exemple, nous ne pouvons pas accroître le paramètre α pour avoir un modèle plus étendu dans l'espace sans que cela ait des conséquences sur les dispersions des vitesses.

Nous avons porté en appendice des graphiques donnant les courbes de densité et de dispersions des vitesses ajustées par nos modèles pour différents stades d'évolution, pour montrer la qualité de l'ajustement obtenue dans les différents cas.

Dans la plupart des cas l'ajustement des courbes de densité

est très satisfaisant sur au moins six ordres de grandeur. Nous avons cependant remarqué une tendance des modèles analytiques à sous estimer la densité dans la zone intermédiaire entre le noyau et le halo (cette sous estimation pouvant être de 6 à 8% au maximum) et à la surestimer dans l'extrême halo. Ces effets tendant à affaiblir la pente de la densité et en conséquence la plupart des modèles analytiques ont une masse et un rayon infinis. Ces effets sont essentiellement dus au degré d'anisotropie élevé des modèles numériques auxquels ils ont été ajustés.

L'ajustement des courbes de dispersions des vitesses est moins précis: il y a en effet davantage de fluctuations dans les valeurs des dispersions des vitesses obtenues par les expériences numériques que dans celles des densités. Nous avons attribué la croissance aux grandes distances de la dispersion des vitesses radiales $\overline{R^2}$ du modèle K aux étoiles qui sont en train de s'échapper du système et qui ne devraient pas être prises en compte dans l'estimation de $\overline{R^2}$. Spitzer et Thuan (1972) remarquent à ce propos qu'il est parfois difficile de discriminer les étoiles qui s'évadent.

2 - Evolution empirique des paramètres

Nous avons porté dans les tableaux 1 à 6, les valeurs des paramètres trouvées par ajustement pour chaque stade d'évolution des trois modèles numériques. Il y a deux paramètres de structure sans dimensions (k, x_0) ou (k, λ), trois paramètres d'échelle ρ, σ^2 et α .

Le paramètre α obtenu directement par ajustement doit aussi se retrouver, à une constante multiplicative près, par la relation:

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{\sigma^2}}$$

Enfin le paramètre A se déduit des autres paramètres à partir de la relation pour la densité au centre:

$$A = \rho_c \left[2\pi(2\sigma^2)^{3/2} \left\{ e^k \int_0^{\sqrt{k}} e^{-x^2} dx - \sqrt{k} \left(1 + \frac{2k}{3} \left(1 + \frac{2k}{5}\right)\right) \right\} \right]^{-1}$$

Nous avons postulé une loi d'évolution empirique pour ces paramètres, de la forme:

$$P = a(t_0 - t)^b$$

où t_0 est le temps de collapse, a et b sont des constantes et p est le paramètre. Cette loi peut s'écrire:

$$y = a + bx$$

où $y = \log p$ et $x = \log(t_0 - t)$. L'ajustement de la loi sous cette deuxième forme à la variation des paramètres par une méthode de régression linéaire donne un exposant b et un coefficient de corrélation r^2 pour l'évolution de chaque paramètre. Les valeurs de b et r^2 sont portées en bas de chaque tableau pour chaque paramètre, celles de b sont résumées dans le tableau 7.

Le coefficient de corrélation r^2

$$r^2 = \frac{\left[\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n} \right]^2}{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right] \left[\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \right]}$$

donne la qualité de l'ajustement à la loi d'évolution empirique. Pour $r^2=1$ l'ajustement est parfait.

Pour le modèle 72, nous n'avons pas tenu compte des trois dernières étapes d'évolution (où $t > t_0$) dans le calcul de la loi de l'évolution empirique. Ces trois lignes montrent simplement quelle est l'évolution au-delà de la singularité centrale.

Pour nous assurer que la loi d'évolution postulée était justifiée, nous avons porté dans les figures 14 et 15 les valeurs de quelques uns des paramètres pour les différents stades d'évolution des modèles 72 et K. Les échelles sont logarithmiques, les unités et origines en ordonnées sont différentes pour chaque paramètre. Les points et croix sont les valeurs des paramètres et les droites ont été ajustées par régression linéaire.

Tableau 1 : 72vs f_{13}

$$t_0 = 1.6558$$

t	k	x_0	$\log \alpha$	$\log \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma^2}}$	$\log \rho_c$	$\log \sigma^2$	$\log A$
.0226	5	12	.85	.30	.10	-.50	-1.178
.6032	6.6	20	1.12	.56	.64	-.48	-1.424
.9931	7.2	30	1.27	.705	.94	-.47	-1.410
1.2816	7.8	60	1.50	.94	1.46	-.42	-1.232
1.4310	8.6	80	1.80	1.23	2.11	-.35	-1.40
1.5180	8.4	100	1.80	1.235	2.14	-.33	-0.952
1.5680	9.2	200	2.04	1.480	2.66	-.30	-0.829
1.6121	9.4	200	2.05	1.480	2.63	-.33	-0.901
1.6558	10.4	200	2.20	1.615	2.90	-.33	-1.067
1.5867	9.8	200	2.12	1.545	2.72	-.37	-0.926
1.7373	9.8	200	2.00	1.430	2.40	-.46	-1.112
b	-.152	-.811	-.792	-.784	-1.704	-.137	-.348
r^2	.84	.96	.95	.95	.95	.89	.70

Tableau 2 : 72vs f_{23}

$$t_0 = 1.6558$$

t	k	λ	$\log \alpha$	$\log \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma^2}}$	$\log \rho_c$	$\log \sigma^2$	$\log A$
.0226	5.2	.0015	.90	.335	.20	-.47	-2.471
.6032	6.2	.0020	1.10	.540	.60	-.48	-2.530
.9931	6.8	.0010	1.25	.685	.90	-.47	-2.519
1.2816	7.4	.0004	1.45	.905	1.35	-.46	-2.354
1.4310	8.2	.0001	1.80	1.235	2.10	-.37	-2.094
1.5180	8.2	.0001	1.80	1.265	2.16	-.37	-2.034
1.5680	9.4	.00003	2.12	1.55	2.79	-.31	-2.021
1.6121	9.4	.00003	2.08	1.525	2.68	-.37	-2.041
1.6558	10.2	.00002	2.25	1.723	3.07	-.375	-1.993
1.6857	9.8	.00002	2.15	1.595	2.77	-.42	-2.051
1.7373	9.4	.00002	2.05	1.500	2.57	-.43	-2.061
b	-.159	1.316	-.817	-.822	-1.746	-.103	-.389
r^2	.93	.94	.95	.96	.95	.75	.83

Tableau 3 : K vs f_{13} $t_0 = 1425$

t	k	x_0	$\log \alpha$	$\log \sqrt{\frac{\rho_C}{\sigma^2}}$	$\log \rho_C$	$\log \sigma^2$	$\log A$
550	7.4	20	-.73	-1.225	-1.88	.57	-5.879
750	7.6	30	-.62	-1.110	-1.62	.60	-5.753
950	8	40	-.48	-0.980	-1.36	.60	-5.671
1075	8	40	-.48	-0.970	-1.32	.62	-5.661
1175	8.2	60	-.32	-0.800	-0.92	.68	-5.439
1275	9	100	-.10	-0.560	-0.42	.70	-5.321
b	-.102	-.84	-.778	-0.820	-1.814	-.173	-0.712
r^2	.94	.96	.97	.97	.97	.93	.96

Tableau 4 : K vs f_{23} $t_0 = 1425$

t	k	λ	$\log \alpha$	$\log \sqrt{\frac{\rho_C}{\sigma^2}}$	$\log \sigma^2$	$\log \rho_C$	$\log A$
550	7	.001	-.72	-1.23	.57	-1.89	-5.710
750	7.4	.008	-.59	-1.085	.62	-1.57	-5.644
950	7.5	.0007	-.55	-1.07	.68	-1.46	-5.669
1075	7.6	.0006	-.50	-1.01	.64	-1.38	-5.573
1175	8.2	.0003	-.32	-0.815	.68	-0.95	-5.469
1275	9	.00015	-.05	-0.515	.71	-0.32	-5.236
b	-.132	1.060	-.816	-.869	-.158	-1.896	-.586
r^2	.94	.93	.94	.93	.77	.94	.89

Tableau 5 : D1 vs f_{13}

t	k	x_0	$\log \alpha$	$\log \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma^2}}$	$\log \rho_c$	$\log \sigma^2$	$\log A$
610	5.8	10	-.75	-1.28	-1.810	.75	-5.349
1910	8	40	-.20	-0.741	-0.662	.82	-5.363
2185	9.6	100	+.27	-0.6005	-0.301	.90	-5.764
b	-.163	-.745	-.760	-.567	-1.125	-.112	+.309
r^2	.98	.99	.998	.90	.92	.998	.77

 $t_0 = 2260$ Tableau 6 : D1 vs f_{23}

t	k	λ	$\log \alpha$	$\log \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma^2}}$	$\log \rho_c$	$\log \sigma^2$	$\log A$
610	5	.01	-.78	-1.305	-1.810	.80	-5.038
1910	7.5	.01	-.22	-0.761	-0.662	.86	-5.141
2185	9.2	.00015	+.25	-0.6055	-0.301	.91	-5.605
b	-.197	-.359	-.767	-.521	-1.125	-.0182	+.422
r^2	.97	.997	.998	.91	.92	.997	.88

 $t_0 = 2260$ Tableau 7 : exposants b

Modèle	k	x_0	λ	α	ρ_c	σ^2	A
72vs f_{13}	-.152	-.811		-.798	-1.704	-.137	-.348
72vs f_{23}	-.159		+1.316	-.820	-1.746	-.103	-.389
K vs f_{13}	-.102	-.840		-.800	-1.814	-.173	-.712
K vs f_{23}	-.132		+1.060	-.840	-1.896	-.158	-.586
D1vs f_{13}	-.163	-.745		-.630	-1.125	-.112	+.304
D1vs f_{23}	-.196		+1.359	-.640	-1.125	-.082	+.422

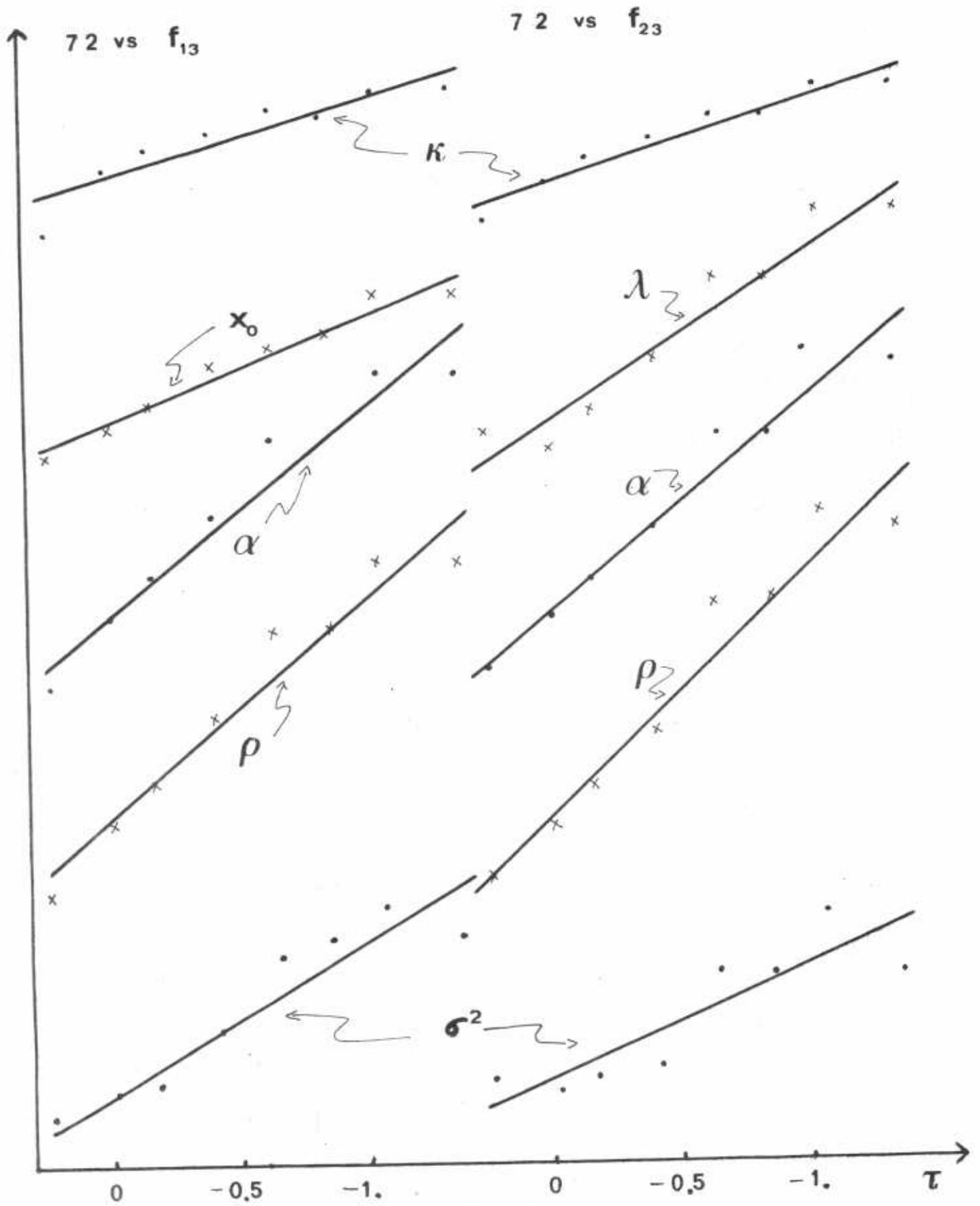


Fig. 14

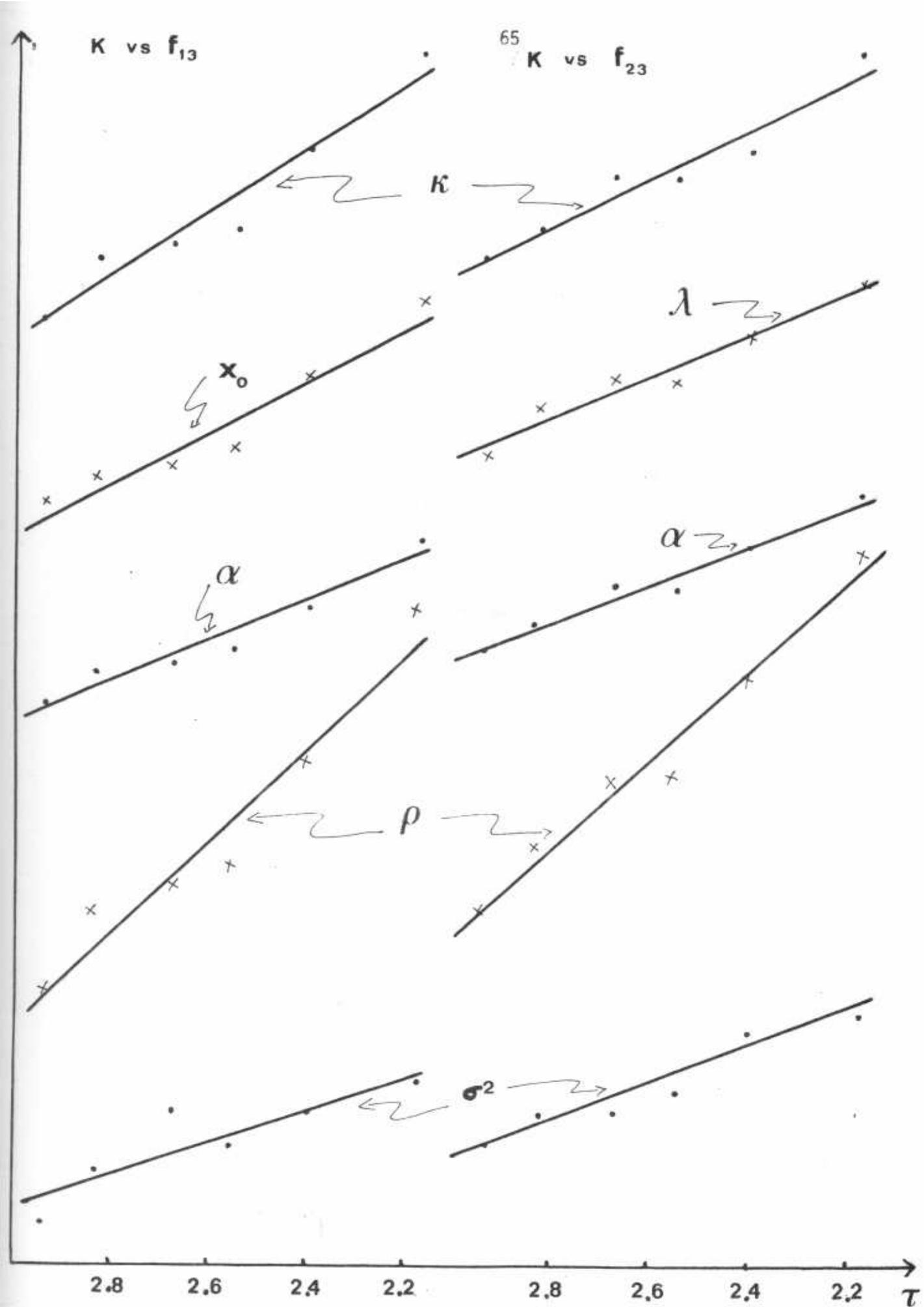


Fig.15

L'ensemble des tableaux et figures présentés ci-dessus vont nous permettre de comparer les différents modèles numériques:

Remarquons tout d'abord que nous obtenons à chaque ajustement deux valeurs du paramètre α , l'une directement par ajustement et l'autre par ρ_c et σ^2 auxquels α est lié par une relation simple. Ces deux valeurs coïncident à une constante multiplicative près. Ce fait est significatif: il met en évidence la dépendance entre la densité et la distribution des vitesses et plus généralement l'homogénéité des modèles et des ajustements. Le fait que les paramètres de structure (sans dimensions) varient dans le même intervalle pour les trois séries de modèles est aussi intéressant à noter, il témoigne d'une certaine similitude entre les différents modèles numériques.

Les figures 14 et 15 montrent que le choix d'une fonction exponentielle pour la loi de variation des paramètres est assez bien justifié. Notons que pour le modèle 72 les valeurs des paramètres sont stationnaires aux deux derniers stades d'évolution; c'est sans doute un effet statistique parce qu'en $t = t_0$ les valeurs des paramètres ont varié par rapport à ces deux stades précédents. Notons aussi que la valeur de l'exposant b est assez sensible au choix du temps de collapse t_0 qui n'est pas déterminé avec précision dans les modèles numériques. Si t_0 est sous-estimé, les valeurs (absolues) de b seront plus faibles. Spitzer et Shull (1975) définissent t_0 comme le temps au bout duquel 2% de la masse du système ont un rayon nul et déterminent sa valeur par extrapolation à 10% près, ce qui conduit à des incertitudes sur b d'environ 23%.

L'examen du tableau 7 nous permet de constater que pour un paramètre donné l'ajustement d'une série de modèles numériques par f_{13} et f_{23} donne deux valeurs de b très voisines. Les valeurs de b obtenues pour chaque paramètre, mais pour des séries de modèles numériques différents, sont encore égales, à l'intérieur de la marge d'erreur signalée plus haut. Le paramètre A a cependant des valeurs assez différentes mais c'est un paramètre secondaire, obtenu indirectement.

Dans ce qui précède, nous n'avons pas donné beaucoup de poids statistique au modèle D1 pour lequel nous n'avons que trois stades d'évolution.

3 - Taux d'évolution des paramètres pour les différents modèles

L'exposant b est une mesure du taux d'évolution pour les différents paramètres des modèles. Certains de ces paramètres, la densité centrale ρ_c , la dispersion des vitesses au centre σ^2 , le rayon r_c , et la masse M_c du noyau, sont des caractéristiques physiques des modèles. L'ajustement de ces paramètres à une loi de variation exponentielle a été fait pour certaines des méthodes exposées au chapitre II. Nous comparons ici les résultats.

Pour les modèles D, E et F de Spitzer et Thuan (1972) nous avons dû ajuster nous-même la loi exponentielle à partir des nombreuses données expérimentales des tableaux 6, 7 et 8 de leur article. Les trois modèles différent, par les conditions initiales:

- D est initialement une sphère isotherme avec une population initiale appréciable d'étoiles en orbites allongées dans le halo
- E a initialement une densité uniforme et la même distribution isotrope des vitesses en tous points.
- F, contrairement à D et E, est initialement en équilibre. C'est une sphère homogène où toutes les étoiles ont des orbites circulaires.

Les paramètres donnés par Spitzer et Thuan (1972) sont ρ_c , V_m^2 (qui correspond à notre σ^2), $K = \sqrt{\frac{V_m^2}{4\pi G \rho_c}}$ qui correspond à l'inverse

de notre α et qui est obtenu par ajustement d'une sphère isotherme au noyau du modèle, r_1 est le rayon contenant 2% de la masse.

Pour les autres méthodes, les exposants b sont calculés par les auteurs.

Nous donnons ci-dessous le tableau 8 qui résume l'ensemble des valeurs des exposants b obtenues pour les différentes méthodes.

Dans le modèle de von Hörner (1976) v_h est la vitesse d'évaporation et v_0^2 la vitesse quadratique moyenne au centre.

Pour les modèles K et 72, les exposants de M_c et r_c sont calculés dans le paragraphe 4 du chapitre VIII.

Remarquons à propos des résultats des méthodes numériques que les temps de collapse t_0 trouvés sont croissants dans l'ordre suivant des méthodes: méthode des N corps, méthode de Monte Carlo, méthode hydrodynamique (Aarseth et al, 1974). La différence est probablement due à une surestimation du temps de relaxation dans les dernières méthodes.

L'accord entre les différentes méthodes est qualitatif, le sens d'évolution de chaque paramètre est le même pour toutes les méthodes. La vitesse d'évolution varie selon les méthodes; il est surprenant de constater que la densité centrale varie moins vite pour Larson que pour la méthode de Monte Carlo qui sous estime t_0 par rapport à la méthode hydrodynamique.

Tableau 8

	ρ_c	σ^2	r_c	M_c
von Hörner (1968)	-1,333	-.222	.556	.333
von Hörner (1976)				
$v_h/v_o = 2$	-1,56		.594	.219
1,8	-1,42		.570	.291
1,6	-1,18		.529	.413
Larson (1970)				
sphère isotherme	-1,34	-.225		
amas globulaires	-1,53	-.30		
noyaux de galaxies	-1,47	-.30		
Lynden-Bell (1975)	-1,428	-.286	.572	.286
Spitzer et Thuan (1972)				
D	-1,455	-.146	.465	
E	-1,754	-.179	.570	
F	-1,528	-.251	.526	
Modèle 72				
vs f_{13}	-1,70	-.137	.698	.514
vs f_{23}	-1,75	-.103	.715	.533
Modèle K				
vs f_{13}	-1,81	-.173	.716	.408
vs f_{23}	-1,90	-.158	.724	.389
Modèle D1				
vs f_{13}	-1,13	-.112	.687	.988
vs f_{23}	-1,13	-.082	.636	.939

4 - Application des résultats à l'évolution des amas globulaires

Nous venons de constater que les différentes méthodes pour étudier l'évolution des systèmes stellaires donnent des résultats concordants pour le sens d'évolution des différents paramètres physiques des modèles. La densité spatiale au centre ρ_c et la dispersion des vitesses au centre σ^2 croissent au cours du temps et ρ_c croit au moins cinq fois plus vite que σ^2 . Nous pouvons en déduire le paramètre α :

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{\sigma^2}}$$

qui croit au cours du temps. La vitesse d'évasion au centre normalisée k :

$$k = \frac{v_c^2}{2\sigma^2}$$

croit au cours du temps. Enfin le rayon du noyau r_c décroît au cours du temps.

Par ailleurs Peterson et King (1975) ont déterminé ces paramètres physiques pour les amas globulaires en ajustant les courbes de densité d'un modèle analytique aux courbes de densité observées dans les amas globulaires. Le modèle utilisé est le modèle de King (1966) qui correspond à notre modèle f_{12} sans halo ($x_0 \rightarrow \infty$) ou à f_{22} pour $\delta = 0$, c'est-à-dire un modèle avec une distribution des vitesses isotrope partout. Ils donnent ρ_c , r_c , σ^2 , la vitesse d'évasion au centre (qu'il suffit de diviser par $2\sigma^2$ pour avoir k) et le temps de relaxation t_r . Nous en déduisons α .

Nous avons divisé l'ensemble des amas globulaires étudiés par Peterson et King en groupes suivant les classifications de Shapley (Hogg 1953) et de Kron et Mayall (1965) qui sont des classifications suivant le degré de concentration spatiale, et nous avons calculé la valeur moyenne et l'écart type des différents paramètres physiques pour chaque groupe. Le tableau 9 résume nos résultats. Les classes I à XII sont celles de Shapley et a, b et c sont les classes de Kron et Mayall.

Tableau 9

Classe	$\bar{\alpha}$ (pc ⁻¹)	\bar{k}	\bar{r}_c (pc)	\bar{t}_r (10 ⁸ ans)
I-III	4.8 ± 4.0	6.6 ± 1.5	1.6 ± 2.2	7.8 ± 20
IV-VI	4.7 ± 3.1	8.3 ± 0.6	0.9 ± 0.5	2.0 ± 2.5
VII-IX	3.9 ± 2.1	7.0 ± 0.7	1.5 ± 0.7	4.7 ± 7.7
X-XII	1.1 ± 0.8	6.0 ± 1.3	5.7 ± 4.5	15. ± 15.2
a	2.2 ± 2.7	6.5 ± 1.1	1.9 ± 1.5	4.8 ± 3.7
b	3.5 ± 2.7	7.8 ± 1.0	1.3 ± 0.8	2.9 ± 2.7
c	8.1 ± 4.3	9.9 ± 1.2	.49 ± .25	.55 ± .68

Les résultats du tableau 9 sont en bon accord avec ceux du tableau 8, les sens de variation des différents paramètres sont respectés: lorsque r_c décroît α et k croissent. Le sens d'évolution prédit par le tableau 9 est donc des classes XII à I et a à c. Les temps de relaxation déterminés par Peterson et King sont consistants avec ces conclusions: un amas globulaire qui aura évolué plus rapidement et sera à un stade d'évolution plus avancé aura un temps de relaxation plus petit; cependant les écarts-types sont trop importants pour que nous attachions beaucoup d'importance à ce dernier résultat.

5 - Paramètre d'évolution

Von Hörner (1976) propose de mesurer le degré d'évolution dynamique d'un système stellaire par un "module d'évolution" défini de la façon suivante:

$$W = \log \frac{r_h}{r_c}$$

où r_c est le rayon tel que la densité spatiale est en $r^{-2.5}$ et r_h le rayon tel que la densité spatiale est en $r^{-3.5}$. Il distingue trois étapes d'évolution. Le premier stade, qui dépend beaucoup des conditions initiales, est caractérisé par un mélange de phase: W croît rapidement de 0 à .741. Dans le deuxième stade, il y a développement d'une structure noyau-halo, W croît plus lentement jusqu'à 1.9. Le troisième stade est l'évolution

après l'apparition de la singularité centrale.

Nous avons calculé le paramètre W pour l'ensemble des modèles: il suffit pour cela de déterminer les rayons auxquels la dérivée logarithmique de la densité est égale à -2.5 et -3.5 . Cependant pour les modèles D1 vs f_{23} et K vs f_{23} la valeur r_h n'est jamais atteinte pour les stades avancés d'évolution. De plus la discontinuité des dérivées de ρ à la limite noyau-halo des modèles f_{13} rend difficile la détermination de r_h pour ces modèles.

Par conséquent nous donnons les valeurs du paramètre W pour le modèle 72 vs f_{23} uniquement. Le résultat est bien conforme aux prédictions de von Hörner. Il est intéressant de noter que les étapes d'évolution correspondant au stade 1 sont caractérisées par un modèle analytique de dimensions finies, alors que le modèle de Monte Carlo correspondant est initialement infini. Cependant la densité y décroît initialement en r^{-5} , ce qui explique que nous l'avons ajusté par un modèle analytique fini.

Tableau 10 : Paramètre W ; 72 vs f_{23}

t	r_c	r_h	W	
.0226	4.5	8.8	.291	} stade 1
.6032	4.9	13.7	.447	
.9931	5.2	24.6	.675	
1.2916	5.5	69.8	1.103	} stade 2
1.4310	5.9	288	1.689	
1.5130	5.9	288	1.689	
1.5680	6.5	536	1.916	
1.6121	6.5	536	1.916	
1.6558	6.8	631	1.968	} stade 3
1.6857	6.6	573	1.939	
1.7373	6.5	532	1.913	

VIII - EVOLUTION DU NOYAU DES MODELES

1 - Evolution homologique

Il nous a paru intéressant d'examiner si une hypothèse de Lynden-Bell (1975) sur l'évolution des noyaux des systèmes stellaires était vérifiée. Il suppose que l'évolution est homologique et que l'énergie totale du noyau se conserve. Les conséquences de ces deux hypothèses sont:

$$M_c \propto (t_0 - t)^{2/7}$$

$$\sigma^2 \propto (t_0 - t)^{-2/7}$$

$$\rho_c \propto (t_0 - t)^{-10/7}$$

$$r_c \propto (t_0 - t)^{4/7}$$

et bien sûr $E_c = \text{constante}$.

Nous voyons que ces deux hypothèses sur l'évolution se trouvent vérifiées si les quantités:

$$M_c \sigma^2, M_c \rho_c^{1/5}, M_c r_c^{-1/2} \text{ et } E_c$$

sont constantes.

La seule hypothèse d'évolution homologique implique que le rapport $E_c/M_c \sigma^2$ reste constant.

Nous nous proposons de calculer ces différents paramètres du noyau dans les modèles f_{13} et f_{23} que nous avons ajustés aux modèles numériques. Nous pourrions ainsi en déduire l'évolution du noyau dans les différents cas.

2 - Définitions du noyau des modèles

Pour calculer ces paramètres, il nous faut une définition quantitative du noyau de nos modèles. Le noyau est la région au centre du système où la densité stellaire est très élevée par opposition au halo peu dense. A la limite entre le noyau et le halo il y a un fort contraste de densité.

2 - 1 - Critères cinématiques

Nous pouvons penser à priori que ce contraste de densité est dû à la cinématique des étoiles. En effet, pour les modèles f_{1i} , à la disparition des orbites circulaires et presque circulaires correspond une décroissance brusque en densité par rapport aux modèles isotropes. De même dans les modèles f_{2i} la densité de phase décroît exponentiellement lorsque le moment angulaire croît. Nous adoptons comme première définition du noyau la région où la distribution des vitesses s'écarte peu de l'isotropie.

Dans les modèles f_{1i} la définition est simple, par construction c'est la région où $x < x_0$. Dans cette région la distribution des vitesses est parfaitement isotrope.

Dans les modèles f_{2i} , l'anisotropie des vitesses atteint le centre du système; nous pouvons définir le noyau comme la région où le rapport des dispersions des vitesses tangentielles et radiales est plus grand que .8 ou .9.

2 - 2 - Critères de densité

Le noyau se distingue aussi du halo par une densité assez élevée et relativement constante, proche de celle de la sphère isotherme. Nous pouvons donc adopter comme définition du noyau:

→ la région où $\frac{d \log \rho}{d \log r} > - 2.5$. C'est la région où la densité est voisine de celle de la sphère isotherme.

-la région contenant 2 ou 10% de la masse totale du système.
 Cette définition ne peut s'appliquer qu'aux modèles finis.

3 - Résultats, critère cinématique

Nous avons calculé le rayon, la masse et l'énergie totale des noyaux des différents modèles définis par un critère cinématique. Nous avons ensuite converti les valeurs sans dimensions **obtenues en valeurs réelles** par les transformations suivantes:

$$r_c = \frac{x_c}{\alpha} \quad ; \quad M_c = \frac{4\pi \rho_c}{\alpha^3} M_c^* \quad ; \quad E_c = \frac{2\pi \rho_c \sigma^2}{\alpha^3} E_c^*$$

Les quantités avec astérisque (*) sont sans dimensions. Les données obtenues sont portées en valeurs logarithmiques dans les tableaux suivants:

Tableau 11 : K vs f_{13}

τ	r_c	E_c	M_c
2.9420	2.0310	2.4671	1.8569
2.8293	2.0971	2.4980	1.8809
2.6767	2.0821	2.4147	1.8037
2.5441	2.0821	2.4747	1.8438
2.3979	2.0982	2.5144	1.8530
2.1761	2.1000	2.5369	1.8728

Tableau 12 : K vs f_{23}

τ	r_c	E_c	M_c
2.9420	1.9268	2.3402	1.7369
	2.2142	2.4007	1.8451
2.8293	1.8330	2.3730	1.7069
	2.0842	2.4371	1.8172
2.6767	1.8265	2.4453	1.7202
	2.0776	2.5069	1.8293
2.5441	1.8160	2.3592	1.6763
	2.0670	2.4181	1.7819
2.3979	1.8000	2.4029	1.6825
	2.0459	2.4583	1.7865
2.1761	1.6722	2.3787	1.6223
	1.9061	2.4421	1.7360

Dans ce dernier tableau ainsi que dans les tableaux 14 et 16, la première ligne de chaque temps correspond à la valeur .9 du rapport des dispersions et la deuxième ligne à la valeur .8.

Tableau 13 : 72 vs f_{13}

τ	r_c	E_c	M_c
.2130	.2292	-1.6828	-1.1819
.0223	.1818	-1.7053	-1.2246
-.1787	.2071	-1.7317	-1.2600
-.4269	.2782	-1.7216	-1.2695
-.6482	.1031	-1.7628	-1.3845
-.8608	.2000	-1.7282	-1.3407
-1.0565	.2610	-1.7141	-1.3084
-1.3595	.2510	-1.7667	-1.3378

Tableau 14 : 72 vs f_{23}

τ	r_c	E_c	M_c
.2130	.4160	-1.7007	-1.1404
	-	-	-
.0223	-.0469	-1.8284	-1.3661
	.2222	-1.7569	-1.2439
-.1787	-.0247	-1.8343	-1.3845
	.2455	-1.7810	-1.2826
-.4269	.0198	-1.8376	-1.3845
	.2912	-1.8000	-1.2983
-.6482	.0388	-1.8707	-1.4709
	.3106	-1.8409	-1.3860
-.8608	.0388	-1.8107	-1.4109
	.3106	-1.7809	-1.3260
-1.0565	-.0408	-1.8522	-1.5023
	.2145	-1.8057	-1.3896
-1.3595	-.0008	-1.9022	-1.4923
	.2545	-1.8557	-1.3796

Tableau 15 : DI vs f_{13}

τ	r_c	E_c	M_c
1.1206	1.7500	2.4860	1.7278
.4472	1.8021	2.4927	1.6617
-.2218	2.2700	1.8331	.9438

Tableau 16 : DI vs f_{23}

τ	r_c	E_c	M_c
1.1206	1.4428	2.2527	1.4385
	1.6665	2.4252	1.6613
.4472	1.3873	2.3864	1.4640
	1.6284	2.4638	1.5850
-.2218	1.3564	1.7100	1.7429
	1.5857	1.7792	.8606

Le rayon, l'énergie cinétique et la masse des noyaux définis par un critère cinématique restent pratiquement constants au cours de l'évolution; ils dépendent de $\tau = t_0 - t$ à un exposant plus petit que .1. Cependant les fluctuations sont importantes.

Nous avons calculé des quantités qui devraient rester constantes au cours d'une évolution homologique:

$M_c \sigma^2$ est à peu près constant

$M_c \rho_c^{1/5}$ est toujours croissant

$M_c r_c^{-1/2}$ est constant (K) ou décroissant (72)

$E_c / M_c \sigma^2$ est décroissant ou constant

Enfin le rapport de l'énergie totale du noyau à l'énergie de la sphère homogène correspondante croît au cours du temps.

Remarquons qu'il y a peu de différence entre les noyaux définis par le rapport des dispersions des vitesses de .9 et .8.

Ainsi, il ne semble pas que le noyau défini cinématiquement suive une évolution homologique. Le rayon du noyau des modèles de Spitzer et collaborateurs (défini comme le rayon contenant 2 ou 10% de la masse) décroît en $\tau^{1/2}$, alors que le rayon de la région isotrope reste constant dans le temps. Ce désaccord, ainsi que les résultats du paragraphe suivant, montrent que la définition cinématique n'est pas satisfaisante: le contraste de densité noyau-halo apparaît déjà dans la région isotrope près du centre et l'anisotropie des vitesses ne fait qu'accentuer ce contraste, sans réel-

lement le provoquer et ainsi ne donne qu'une limite supérieure du rayon du noyau.

4 - Résultats: critère de densité

Nous donnons maintenant les valeurs des rayons, masses et énergie totales des noyaux des différents modèles définis par un critère de densité:

Tableau 17 : K vs f_{13}

τ	r_c	E_c	M_c
2.9420	1.4782	2.0959	1.4066
2.8293	1.3759	2.0730	1.3489
2.6767	1.2509	1.9448	1.1324
2.5441	1.2509	2.0048	1.2523
2.3979	1.0982	1.9997	1.1830
2.1761	.8993	1.9043	1.0549

Tableau 18 : K vs f_{23}

τ	r_c	E_c	M_c
2.9420	1.4443	2.0052	1.3269
2.8293	1.3304	2.0228	1.2839
2.6767	1.2904	2.0774	1.2756
2.5441	1.2482	1.9808	1.3633
2.3979	1.0909	1.9595	1.1429
2.1761	.8493	1.8635	1.0041

Tableau 19 : 72 vs f_{13}

τ	r_c	E_c	M_c
.2130	-.2065	-2.0270	-1.5495
.0223	-.4040	-2.0620	-1.6778
-.1787	-.5296	-2.1422	-1.7861
-.4269	-.7366	-2.2106	-1.9191
-.6482	-1.0147	-2.3409	-2.1350
-.8608	-1.0218	-2.3047	-2.1151
-1.0565	-1.2338	-2.4239	-2.2759
-1.3595	-1.2371	-2.5025	-2.3269

Tableau 20 : 72 vs f_{23}

τ	r_c	E_c	M_{c1}
.2130	-.2468	-2.0153	-1.5820
.0223	-.4098	-2.1045	-1.7052
-.1787	-.5340	-2.1745	-1.8070
-.4269	-.7096	-2.2548	-1.9147
-.6482	-1.0291	-2.3989	-2.1661
-.8608	-1.0291	-2.3389	-2.1061
-1.0565	-1.3071	-2.5313	-2.3769
-1.3595	-1.2671	-2.5813	-2.3669

Tableau 21 : DI vs f_{13}

τ	r_c	E_c	M_c
1.1206	1.4312	2.2322	1.4177
.4472	.9709	2.0228	1.0703
-.2218	.5495	1.1473	.0909

Tableau 22 : DI vs f_{23}

τ	r_c	E_c	M_c
1.1206	1.4032	2.2074	1.3855
.4472	.9604	2.0794	1.6826
-.2218	.5493	1.1862	.1242

Pour un noyau défini par un critère de densité nous trouvons que l'énergie décroît au cours du temps. De plus, r_c et M_c décroissent un peu plus rapidement au cours du temps que ne le prédit la théorie de Lynden-Bell.

Le rapport de l'énergie totale à celle de la sphère homogène correspondante est constant ou décroît au cours du temps.

Nous avons aussi calculé les quantités qui restent constantes dans une évolution homologique:

$M_c \sigma^2$	semble décroître au cours du temps
$M_c \rho_c^{1/5}$	décroit au cours du temps
$M_c r_c^{-1/2}$	est constant (K) ou décroît (72)
$E_c / M_c \sigma^2$	croît au cours du temps

Ainsi, bien que pour cette deuxième définition du noyau nous obtenions des résultats en accord avec les autres méthodes, à savoir un noyau qui se contracte au cours du temps, nous n'avons pas pu mettre en évidence une évolution homologique du noyau et nous ne pouvons pas confirmer les hypothèses de Lynden-Bell.

CONCLUSION

Nous avons étudié les propriétés de deux séries de modèles analytiques susceptibles de rendre compte des résultats des expériences numériques de Monte Carlo. Les modèles sont définis par une fonction de phase f_{ij} et deux paramètres de structure (k et x_0 ou λ). Ils sont caractérisés par une structure noyau-halo: le noyau a une densité voisine de celle de la sphère isotherme, la distribution des vitesses y est isotrope et le halo est formé d'étoiles en orbites fortement allongées.

Nous avons tenté d'ajuster les courbes de densité et de dispersions des vitesses de nos modèles aux courbes obtenues numériquement: l'ajustement est satisfaisant pour les modèles définis par les fonctions de phase:

$$f_{13} = A \left(e^{-E/\sigma^2} - e^{-E_e/\sigma^2} + \frac{E - E_e}{\sigma^2} e^{-E_e/\sigma^2} \right)$$

et

$$f_{23} = A e^{-\delta I^2/2\sigma^2} \left(e^{-E/\sigma^2} - e^{-E_e/\sigma^2} + \frac{E - E_e}{\sigma^2} e^{-E_e/\sigma^2} \right)$$

Cependant ces modèles ont presque tous une masse et un rayon infinis, à cause du degré d'anisotropie élevé des modèles numériques correspondants.

Les paramètres de structure et d'échelle obtenus par l'ajustement sont cohérents entre eux, leur évolution empirique est régulière et monotone et qualitativement en accord avec les résultats obtenus par d'autres méthodes. Le paramètre k (identique au paramètre W_0 de King, 1966) croit systématiquement jusqu'au temps de collapse t_0 et l'anisotropie s'accroît au cours de l'évolution.

Une étude des noyaux des modèles n'a pas mis en évidence une évolution homologique.

Un premier prolongement intéressant de ce travail serait de remédier aux insuffisances de nos modèles, en particulier au fait que leur masse et leurs dimensions deviennent infinies à partir d'un certain degré d'anisotropie.

Par la suite nous pourrions étudier des modèles avec plusieurs groupes d'étoiles de masses différentes et les comparer aux résultats obtenus dans ces cas par les méthodes numériques.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Hénon qui m'a proposé le sujet de cette thèse, fourni de nombreuses données non publiées sur ses modèles et aidé par ses suggestions et critiques constructives qui ont grandement amélioré le fond et la forme de ce travail.

Messieurs King et Miller m'ont fait l'honneur de s'intéresser à ce travail lors de leurs séjours respectifs à l'Observatoire de Besançon. Les discussions que nous avons eues ont été fructueuses et enrichissantes et je leur en suis reconnaissant.

Monsieur Spitzer et son collaborateur Monsieur Shull ont bien voulu m'envoyer de nombreuses données non publiées relatives à leur modèle K; je les remercie vivement.

Je tiens également à remercier Monsieur Hayli, Directeur de l'Observatoire de Besançon où ce travail a été fait, pour la grande confiance et la bienveillante sollicitude qu'il n'a cessé de me témoigner.

J'exprime ma respectueuse gratitude à Monsieur Rösch qui a bien voulu accepter la présidence du Jury et je remercie Monsieur Nahon pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail en acceptant de participer au Jury.

Je remercie enfin tous mes collègues de l'Observatoire qui m'ont aidé, par de nombreuses discussions, à mieux comprendre et approfondir le sujet que j'avais entrepris d'étudier, et Madame Choux qui s'est chargée de la dactylographie du présent document.

REFERENCES

-
- Aarseth, S. 1973
"Computer simulations of star cluster dynamics"
Vistas in Astronomy, 15, 13-37
- Aarseth, S. 1974
"Dynamical evolution of simulated star clusters. I. Isolated models"
Astron. Astrophys., 35, 237-250
- Aarseth, S., Lecar M. 1975
"Computer simulations of stellar systems"
Ann. Rev. Astron. Astrophys., 13, 1-21
- Aarseth, S., Hénon, M., Wielen, R. 1974
"A comparison of numerical methods for the study of star cluster dynamics"
Astron. Astrophys., 37, 183-187
- Abramowicz, M., Stegun, I. 1965
"Handbook of mathematical functions"
Dover Publications
- Antonov, V. 1962
(La distribution de phase la plus probable dans les systèmes stellaires sphériques et les conditions de son existence)
Vestnik Leningrad Gos. Univ. 7, 135-146

- Antonov, V. 1973 a
 (Sur l'instabilité des modèles à symétrie sphérique avec des mouvements purement radiaux)
 Dinamika galaktik i zvezdnykh sistem, Alma-Ata, 139-144
- Antonov, V. 1973 b
 "Gravitational instability of a cold rotating cylinder"
 Sov. Phys. Dokl, 18, 159
 (traduit de Dokl. Akad. Nauk SSSR 209, 584-585, 1973)
- Antonov, V., Nezhinskij, E. 1973
 (Sur la stabilité d'un cylindre infini avec une distribution des vitesses anisotrope)
 Trudy Astronomicheskoy Observatorii LGU, 29, 122-140
- Antonov, V., Nuritdinov, S. 1975
 (Oscillations non linéaires de quelques modèles homogènes de systèmes stellaires. I. Cas d'oscillations radiales)
 Vestnik Leningrad Gos Univ., 1, 133-138
- Bekenstein, J. 1973
 "Black holes and entropy"
 Phys. Rev. D, 7, 2333-2346
- Chandrasekhar, S. 1943
 "Principles of stellar dynamics"
 Dover Publications
- Cody, W., Paciorek, K., Thacher, H. 1970
 "Chebyshev approximations for Dawson's integral"
 Mathematics of computation, 24, 171-178
- Dorémus, J.P., Feix, M. 1973
 "Stability of a selfgravitating system with phase space density function of energy and angular momentum"
 Astron. Astrophys., 29, 401-407
- Gejdarov, M. 1965
 (Evolution dynamique des amas stellaires)
 Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoj SSR Ser. fiz. matem., 18, n° 6, 91-108

- Gillon, D., Cantus, M., Dorémus, J.P., Baumann, G. 1976 a
 "Stability of selfgravitating spherical systems in which phase space density is a function of energy and angular momentum, for spherical perturbations"
 Astron. Astrophys., 50, 467-470
- Gillon, D., Dorémus, J.P., Baumann, G. 1976 b
 "Stability of self gravitating systems with phase space density a function of energy and angular momentum for aspherical modes"
 Astron. Astrophys., 48, 467- 474
- Hastings, C. 1955
 "Approximations for digital computers"
 Princeton University Press
- Hénon, M. 1961
 "Sur l'évolution dynamique des amas globulaires"
 Annales d'Astrophysique, 24, 369-419
- Hénon, M. 1972 a
 "Monte Carlo models of star clusters"
 I.A.U. Colloq. 10, 44-59
- Hénon, M. 1972 b
 "The Monte Carlo method"
 I.A.U. Colloq. 10, 406-422
- Hénon, M. 1973 a
 "Collisional dynamics in spherical stellar systems"
 Third advanced course of the Swiss Society of Astronomy and Astrophysics. Ed. Martinet L., Mayor, M., 183-260
- Hénon, M. 1973 b
 "Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems"
 Astron. Astrophys., 24, 228-238
- Hénon, M. 1975
 "Two recent developments concerning the Monte Carlo method"
 I.A.U. Symposium 69, 133-150

- Hogg, H. 1953
 "Star clusters"
 Handbuch der Physik, 53, 129-207
- von Hörner, S. 1968
 "High central densities in stellar systems"
 Bull. Astron., 3ème série, III, 147-161
- von Hörner, S. 1976
 "Measuring the dynamical age of N body systems"
 Astron. Astrophys., 46, 293-302
- Ipser, J. 1974
 "On using entropy arguments to study the evolution and secular stability of spherical stellar dynamical systems"
 Astrophys. J., 193, 463-470
- King, I. 1960
 "The escape of stars from star clusters. V. The basic escape rate"
 Astron. J., 65, 122-126
- King, I. 1966
 "The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models"
 Astron. J., 71, 64-75
- Kron, G., Mayall, N. 1960
 "Photoelectric photometry of galactic and extragalactic star clusters"
 Astron. J., 65, 581-620
- Larson, R. 1970 a
 "A method for computing the evolution of star clusters"
 Monthly Notices Royal Astron. Soc., 147, 323-337
- Larson, R. 1970 b
 "The evolution of star clusters"
 Monthly Notices Royal Astron. Soc., 150, 93-110

- Lindblad, B. 1928
 "On the dynamics of stellar systems"
 Arkiv för matematik astronomi och fysik, 21A, n°3, 1-28
- Lynden-Bell, D. 1975
 "Homology in the evolution of cluster cores"
 I.A.U. Symposium 69, 27-32
- Lynden-Bell, D., Wood, R. 1968
 "The gravothermal catastrophe in isothermal spheres and
 the onset of red-giant structure for stellar systems"
 Monthly Notices Royal Astron. Soc., 138, 495-525
- Michie, R. 1961
 "Structure and evolution of globular clusters"
 Astrophys. J., 133, 781-793
- Michie, R., Bodenheimer, P. 1963
 "The dynamics of spherical stellar systems. III. Theoretical
 models"
 Monthly Notices Royal Astron. Soc., 126, 269-281
- Miller, R. 1973
 "On the thermodynamics of selfgravitating N body systems"
 Astrophys. J., 180, 759-782
- Miller, R. 1974 a
 "On the thermodynamics of selfgravitating N body systems"
 I.A.U. Symposium 62, 261-272
- Miller, R. 1974 b
 "Equilibrium in stellar systems"
 Advances in chemical physics, 26, 107-144
- Ogorodnikov, K. 1965
 "Dynamics of stellar systems"
 Pergamon Press, London
- Peterson, C., King, I. 1975
 "The structure of star clusters. VI. Observed radii and
 structural parameters in globular clusters"
 Astron. J., 80, 427-436

- Polyachenko, V., Shukhman, I. 1974
 "Stability of gravitating systems with a quadratic potential. II. Spherically and axially symmetric model clusters with elliptical particle orbits"
 Sov. Astron., 17, 460-462 (traduit de Astron. Zh., 50, 721-725, 1973)
- Ralston, A., Wilf, H. 1960
 "Mathematical methods for digital computers"
 Wiley, New-York, p. 110-120
- Saito, M., Yoshizawa, M. 1976
 "Dynamical evolution of two component star clusters"
 Astrophys. Space Sci., 41, 63-77
- Spitzer, L., Hart, M. 1971
 "Random gravitational encounters and the evolution of spherical systems. I. Method"
 Astrophys. J., 164, 399-409
- Spitzer, L., Thuan, T. 1972
 "Random gravitational encounters and the evolution of spherical systems. IV. Isolated systems of identical stars"
 Astrophys. J., 175, 31-61
- Spitzer, L., Shull, M. 1975
 "Random gravitational encounters and the evolution of spherical systems. VI. Plummer's model"
 Astrophys. J., 200, 339-342
- Spitzer, L. 1975
 "Dynamical theory of spherical stellar systems with large N"
 I.A.U. Symposium 69, 3-26
- Taff, L., van Horn, H. 1975
 "Is there a gravothermal catastrophe"
 Astrophys. J., 197, L23-L24
- Talpaert, Y., Lefèvre, F. 1972
 "Etude hydrodynamique des amas stellaires à symétrie sphérique. I."
 Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, 58, 759-774

Wielen, R. 1974

"The gravitational N body problem for star clusters"
 Proceedings of the first European Astronomical Meeting,
 Athènes, 2, 326-354

Wielen, R. 1975

"Dynamics of star clusters: comparison of theory with
 observations and simulations"
 I.A.U. Symposium 69, 119-131

Woolley, R., Dickens, R. 1961

"Studies in the equilibrium of globular clusters. IV.
 Surface photometry compared with theory"
 Royal Obs. Bull., 42, 291-300

Woolley, R., Dickens, R. 1967

"Studies of the globular cluster ω Centauri . V. HR dia-
 gram, structure and dynamics"
 Royal Obs. Bull., 128, 255-331

Yakimov, V. 1969

(Evolution d'un système stationnaire inhomogène d'amas
 globulaire)
 Soobshcheniya Gosudarstvennogo Astronomicheskogo Instituta
 Shternberga, 158, 14-22

APPENDICE : GRAPHIQUES

Nous avons porté sur les graphiques qui suivent les densités et dispersions des vitesses des modèles numériques (points) et celles des modèles f_{13} et f_{23} (traits continus) ajustés pour chaque stade d'évolution, défini par un temps t (modèle 72) ou t' (modèle K).

Pour ne pas surcharger les graphiques nous avons fait deux courbes: l'une, pour l'ajustement par le modèle f_{13} et l'autre pour l'ajustement par le modèle f_{23} . Les densités ont été translatées en ordonnées (courbe supérieure: ajustement par f_{13} ; courbe inférieure: ajustement par f_{23}). Les dispersions des vitesses ont été translatées en abscisses (courbe de gauche: ajustement par f_{13} , courbe de droite: ajustement par f_{23}).

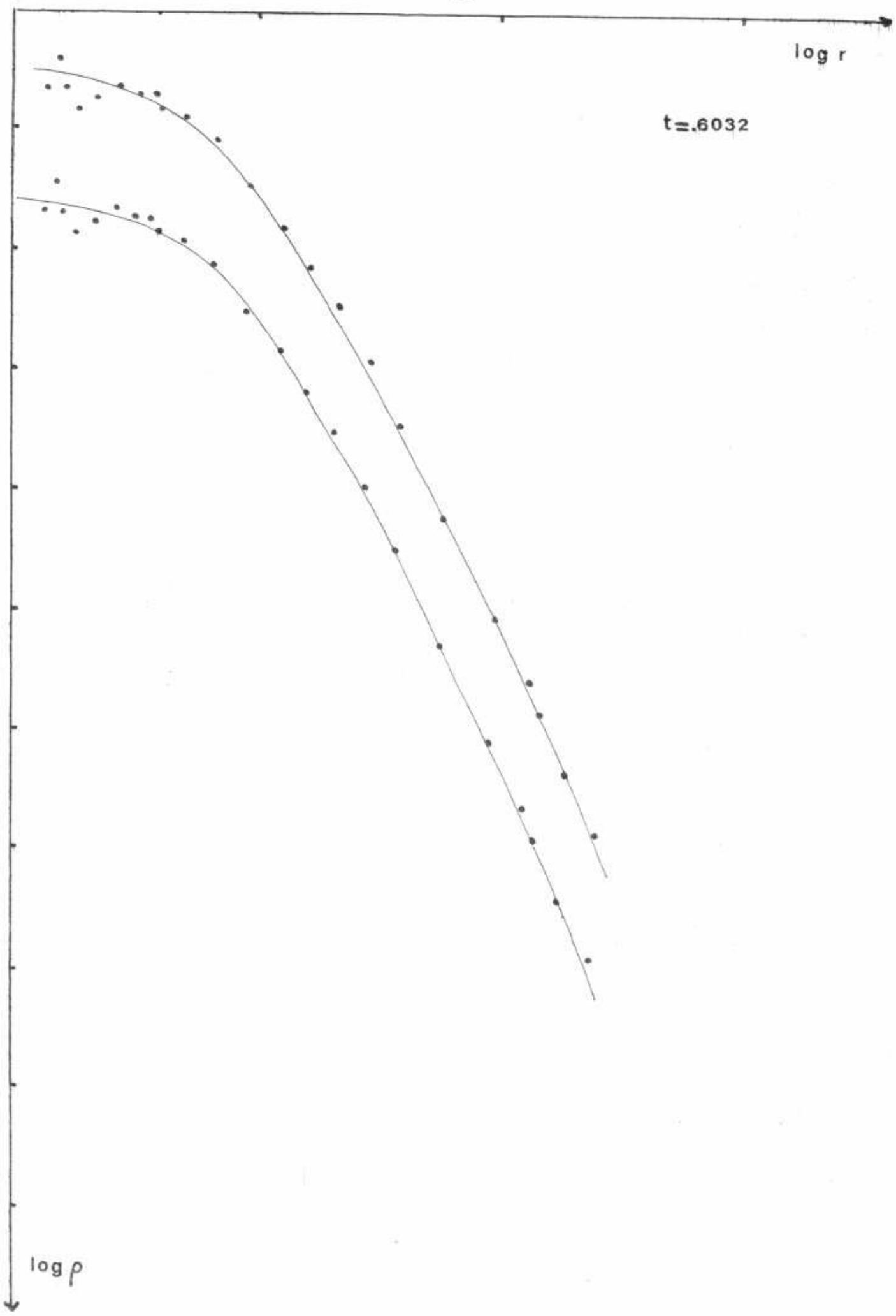
Dans les graphiques pour les dispersions des vitesses les points correspondent aux dispersions des vitesses radiales du modèle numérique, les cercles correspondent aux dispersions des vitesses tangentielles. Pour les courbes en traits continus, la portion supérieure correspond aux dispersions des vitesses radiales, la portion inférieure correspond aux vitesses tangentielles.

Les échelles sont logarithmiques, chaque unité représente un facteur 10, les origines sont arbitraires. Les densités et dispersions des vitesses au centre sont données dans les tableaux pour l'ajustement (voir chapitre VII, paragraphe 2) ainsi que les facteurs d'échelle α (translation des abscisses).

log r

t = .6032

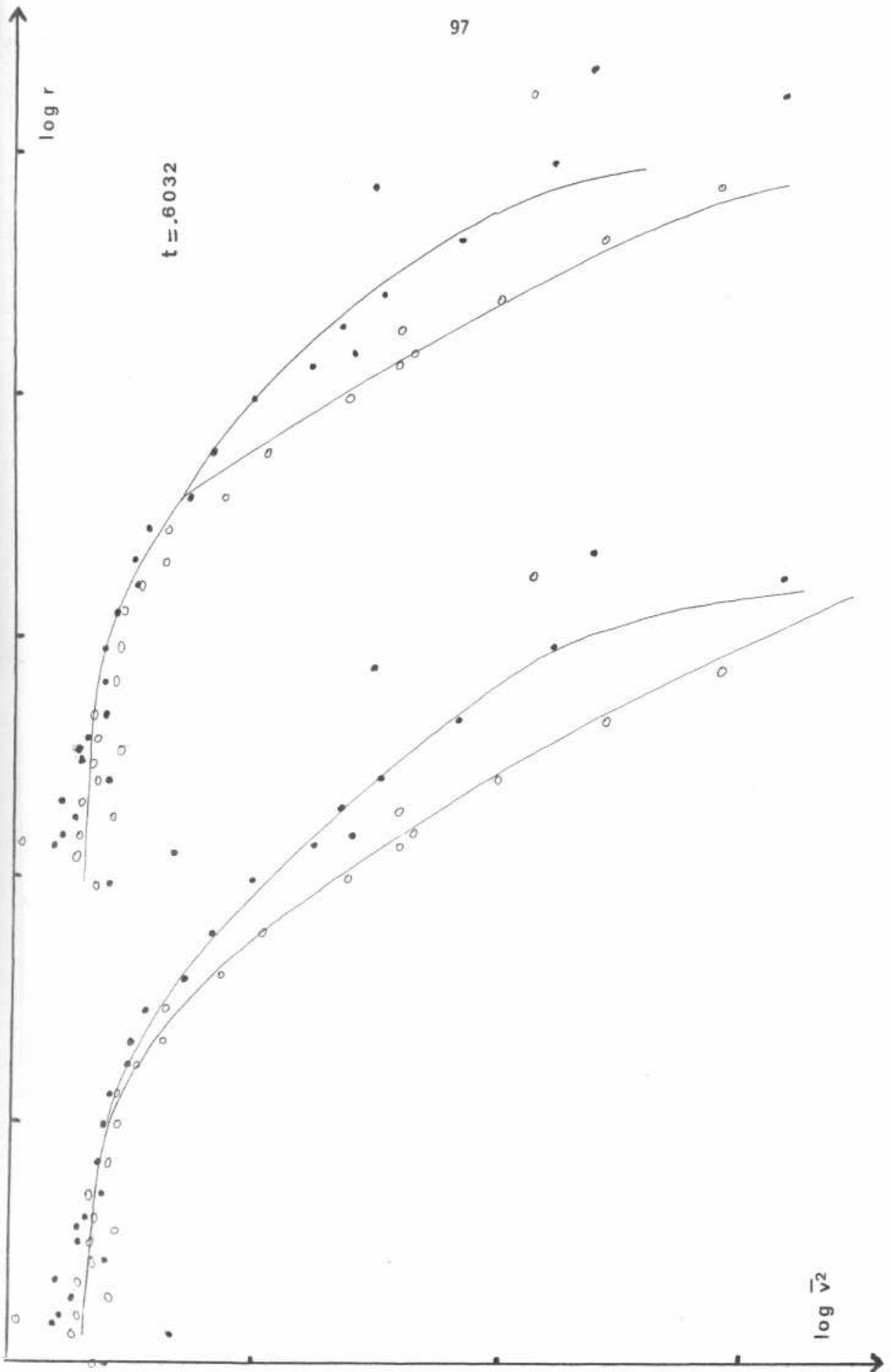
log ρ

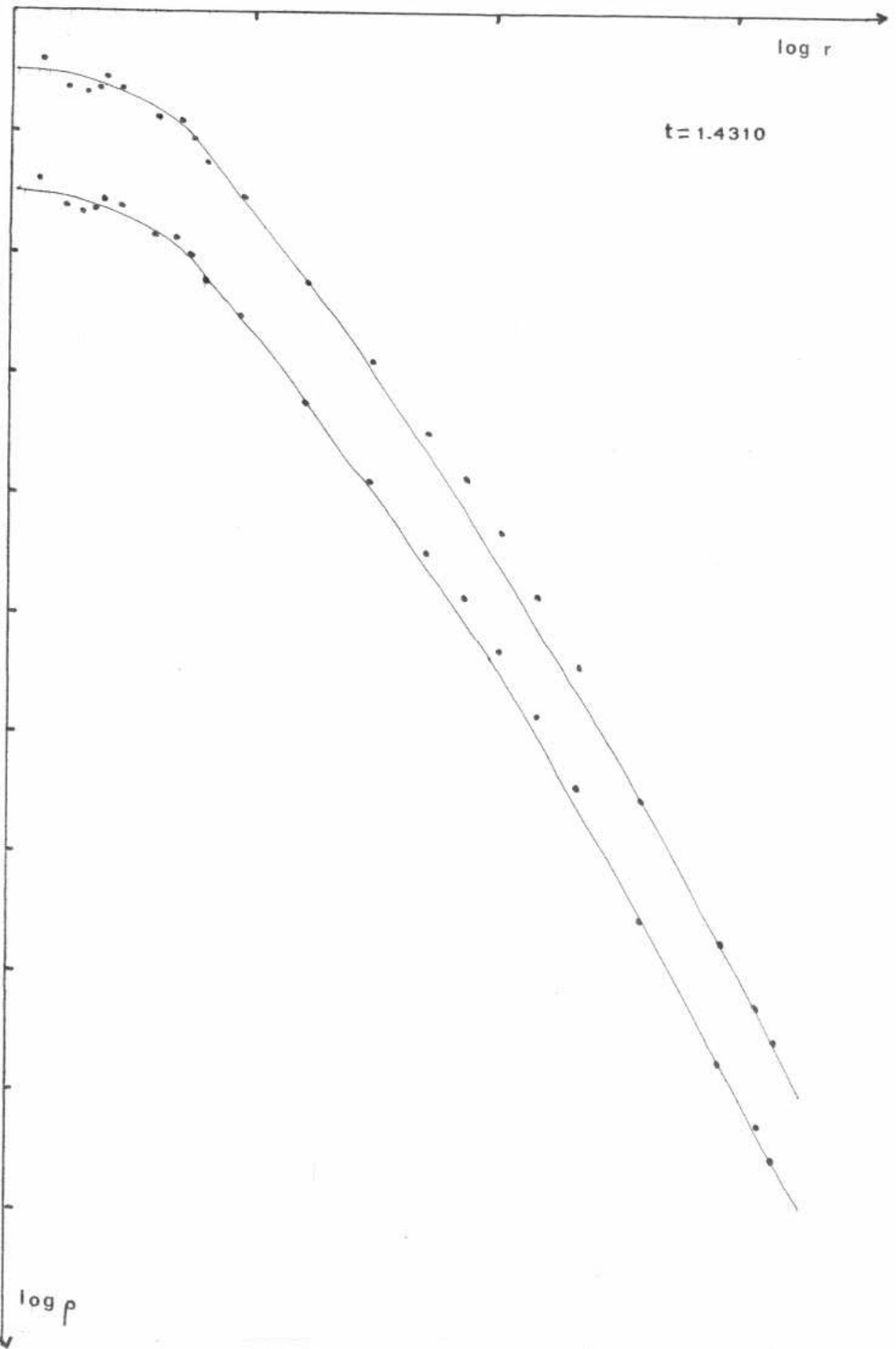


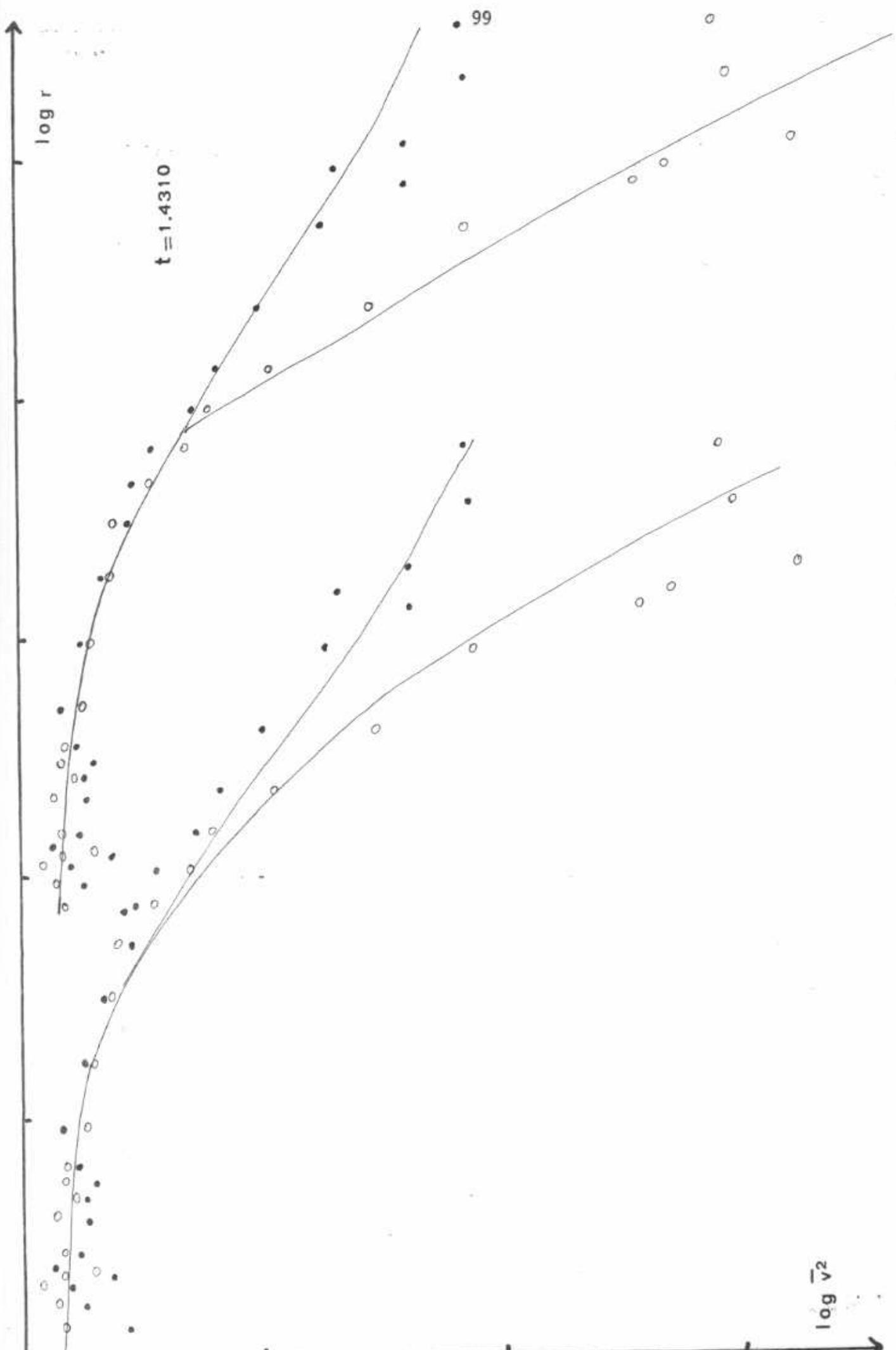
$t = .6032$

$\log r$

$\log \bar{v}^2$



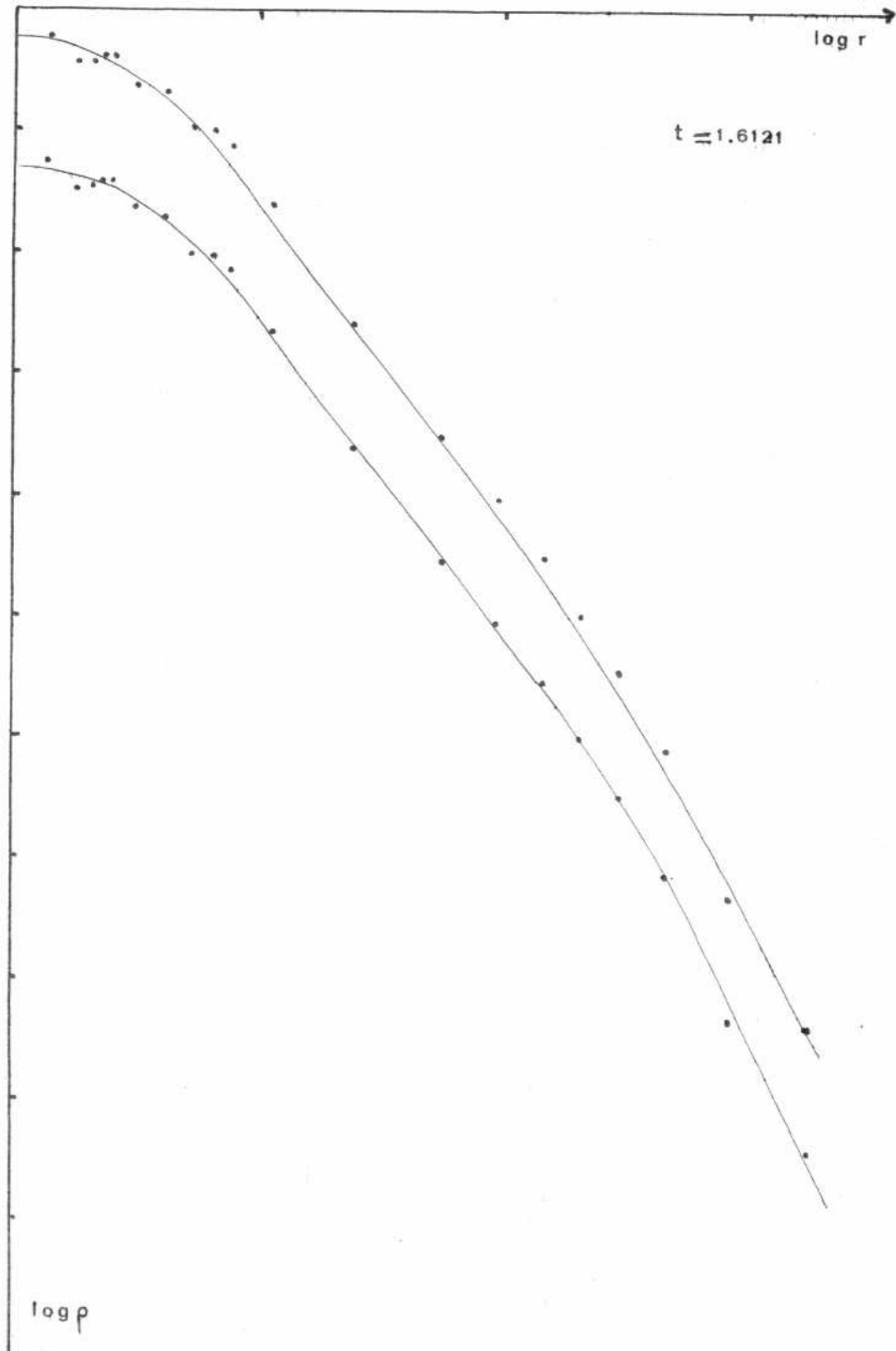


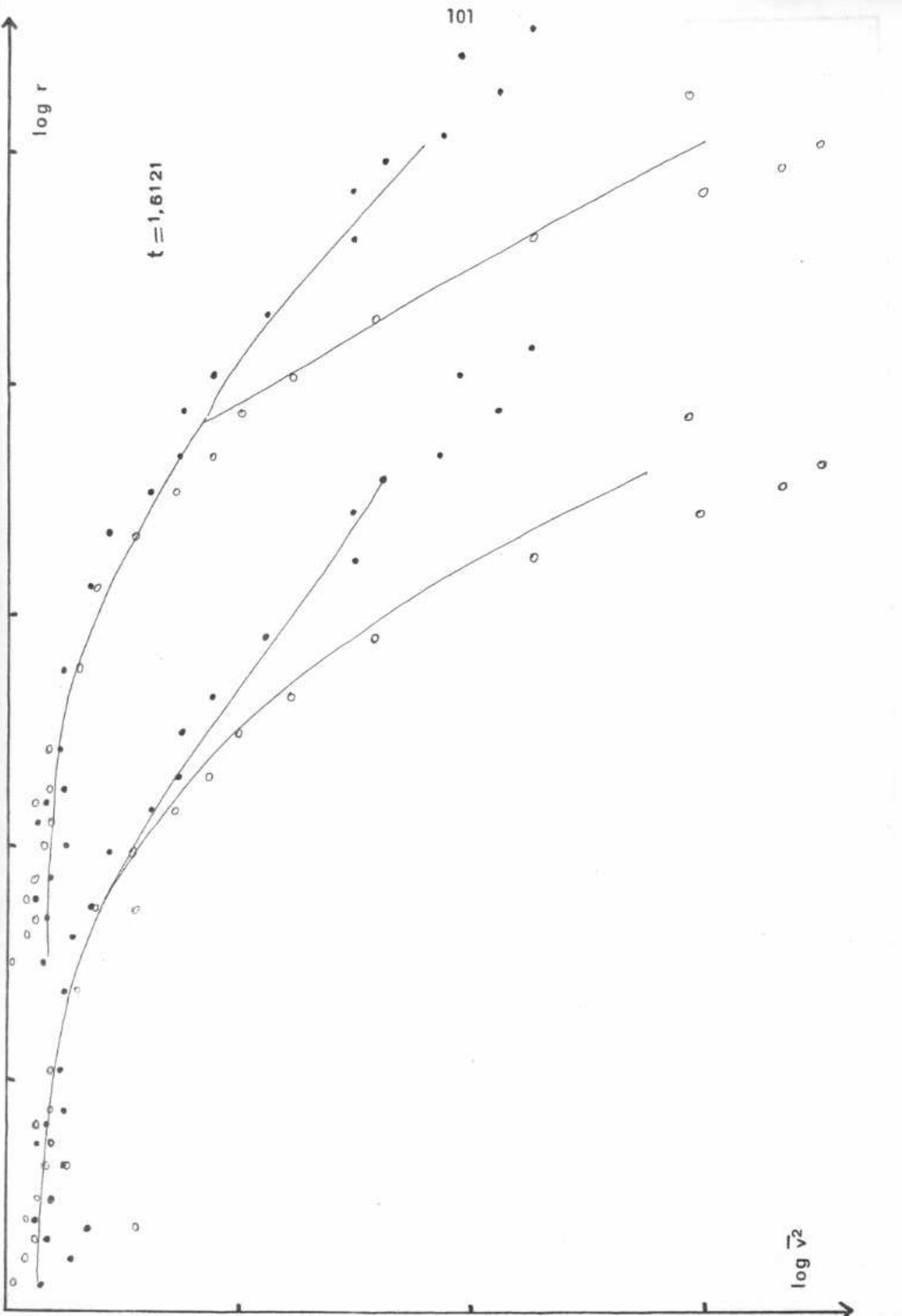


log r

$t = 1.6121$

log p

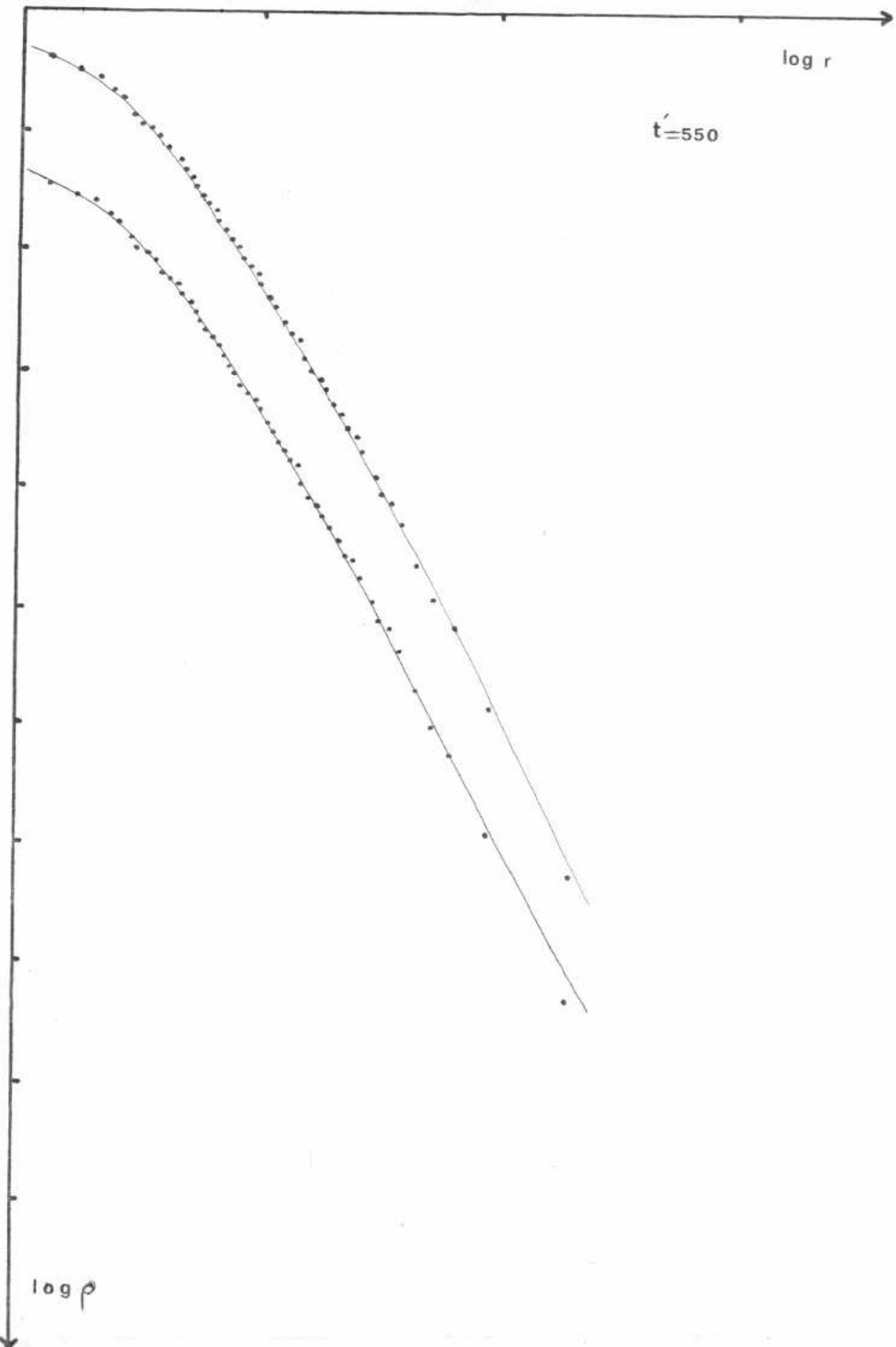


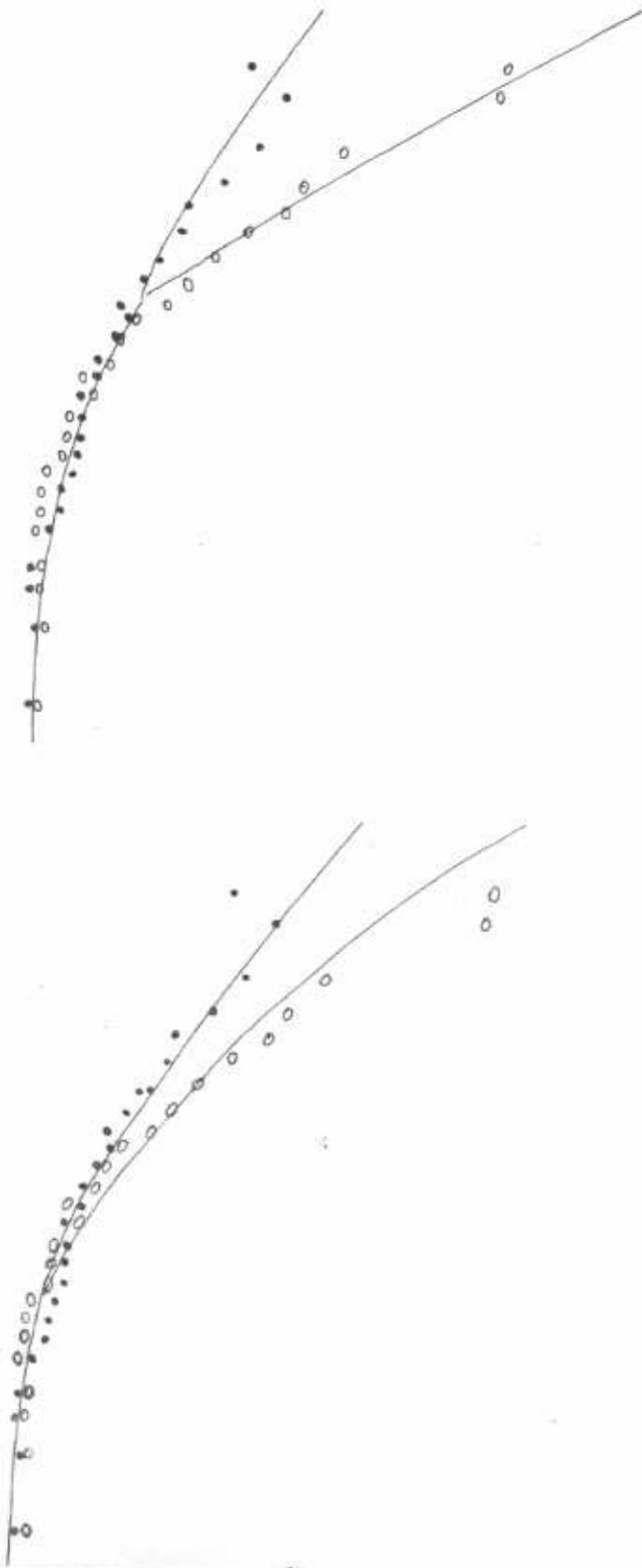


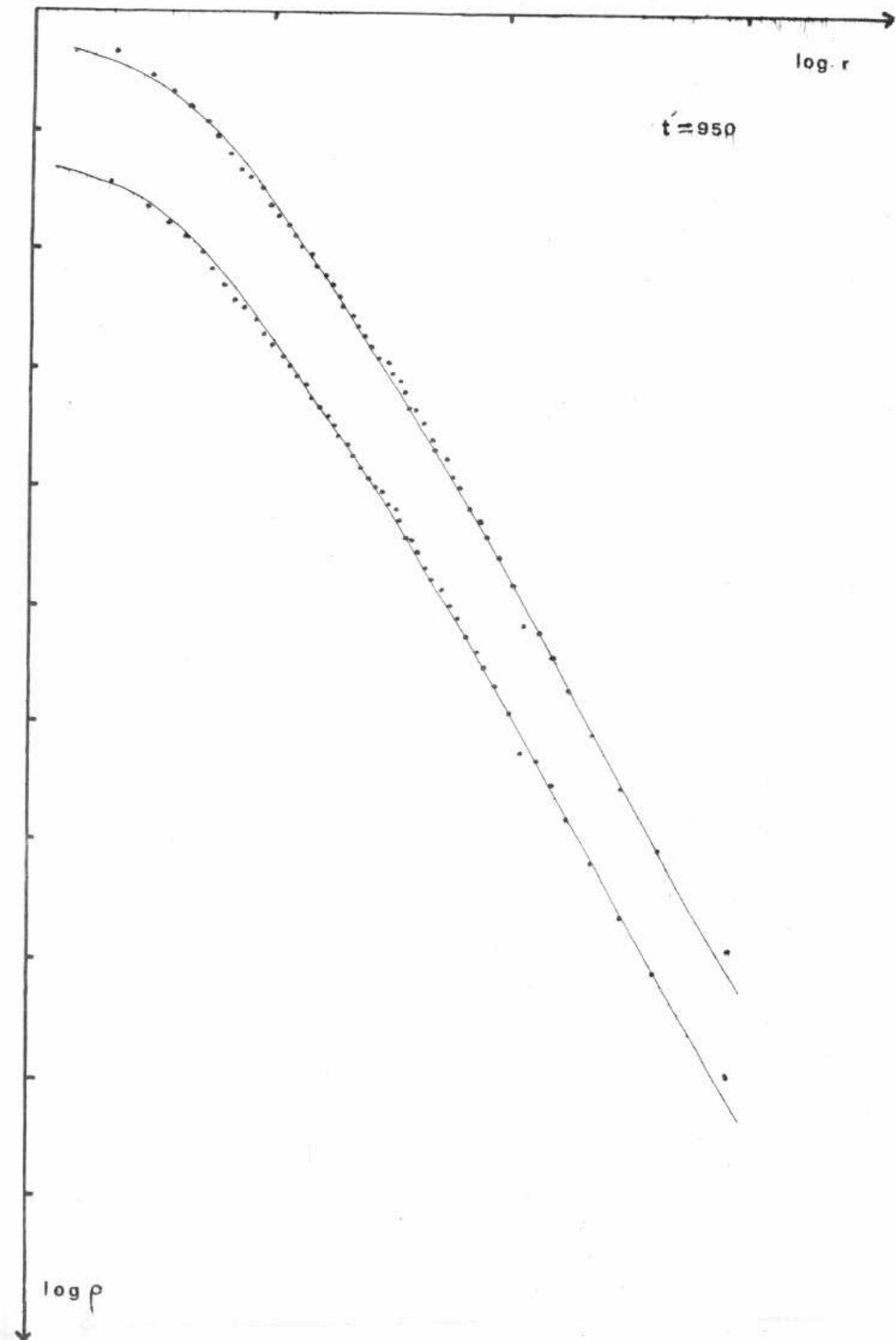
log r

$t' = 550$

log ρ



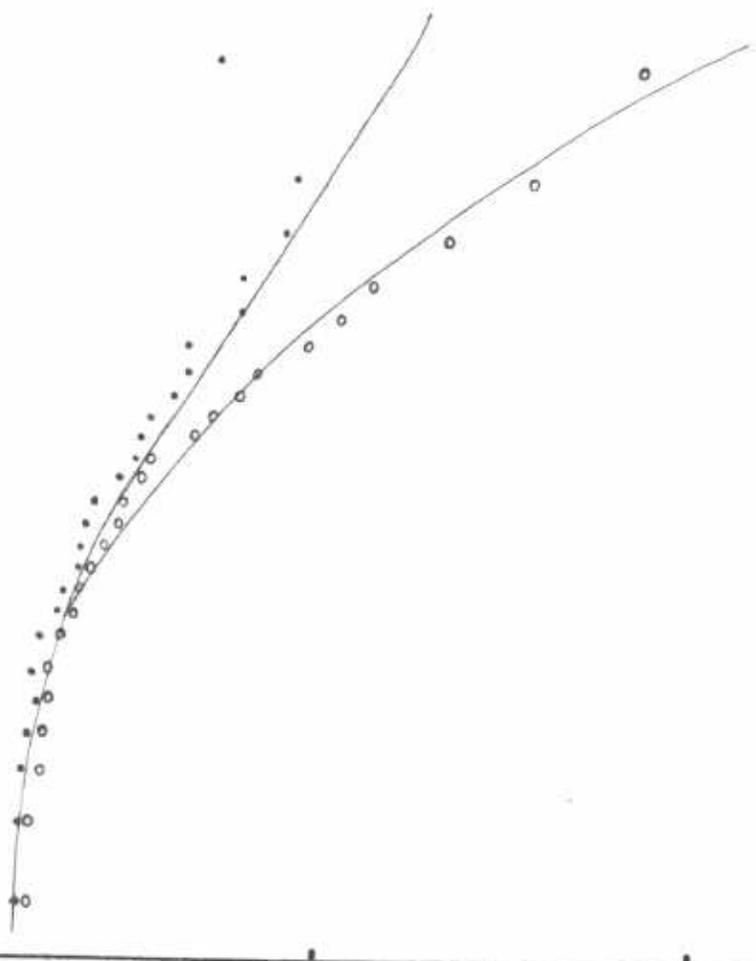
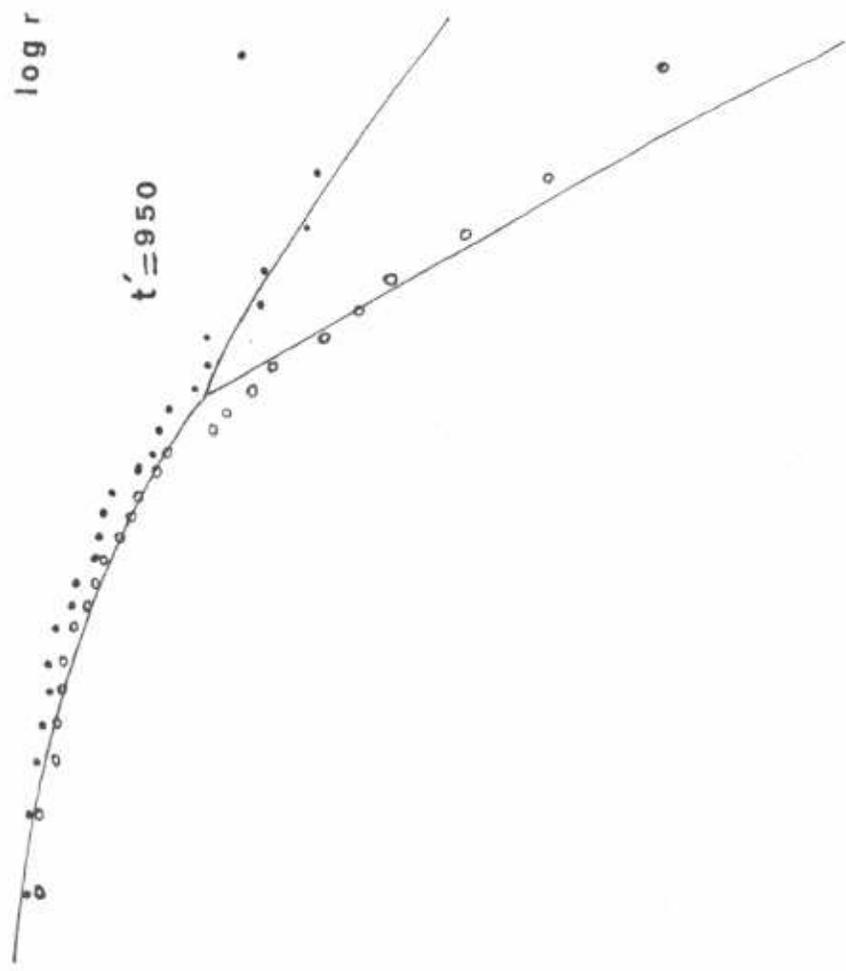
$\log r$ $t = 550$  $\log \bar{v}^2$

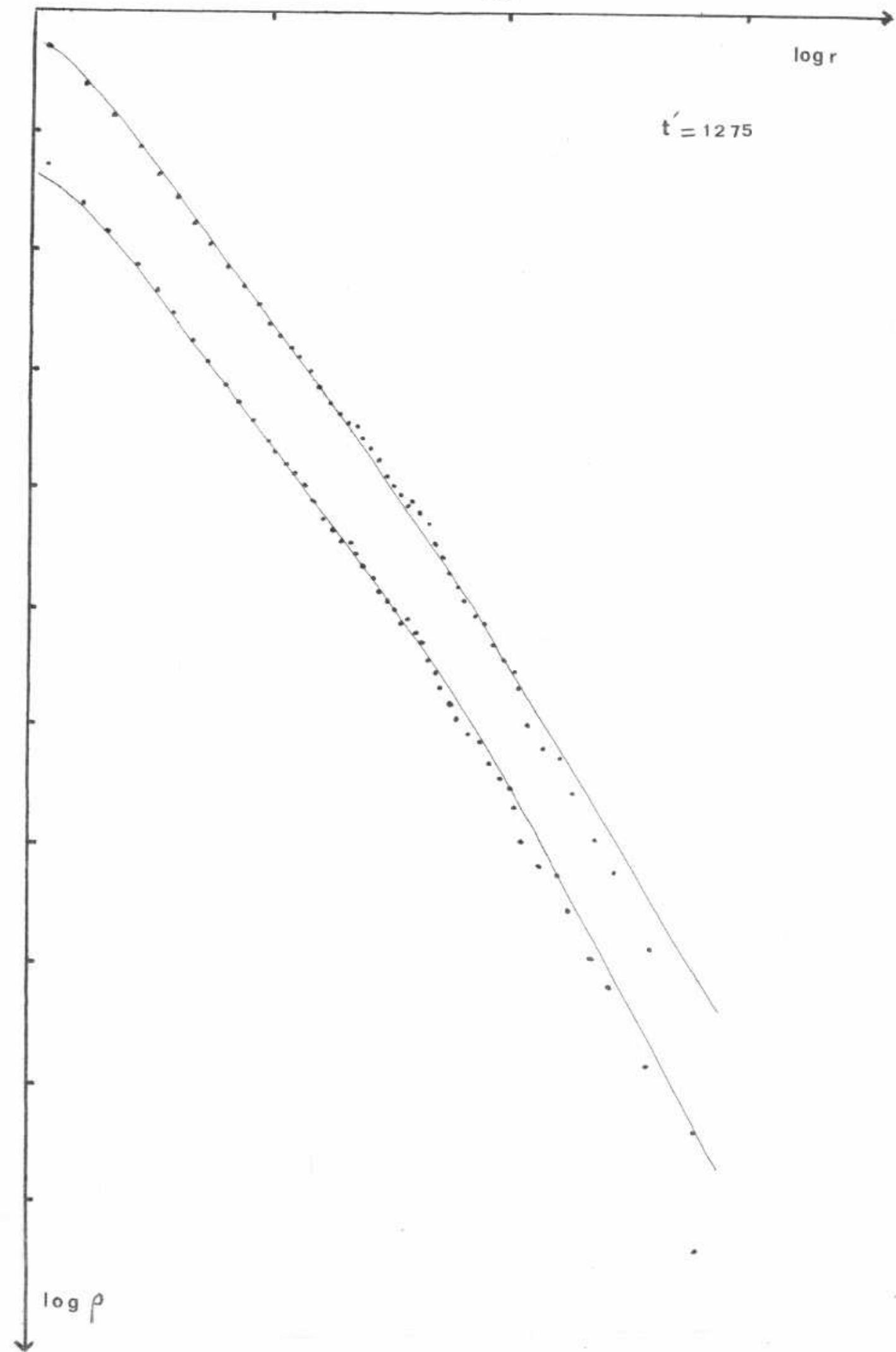
$\log r$ $t = 950$ $\log \rho$ 

$\log r$

$t' = 950$

$\log \bar{v}^2$

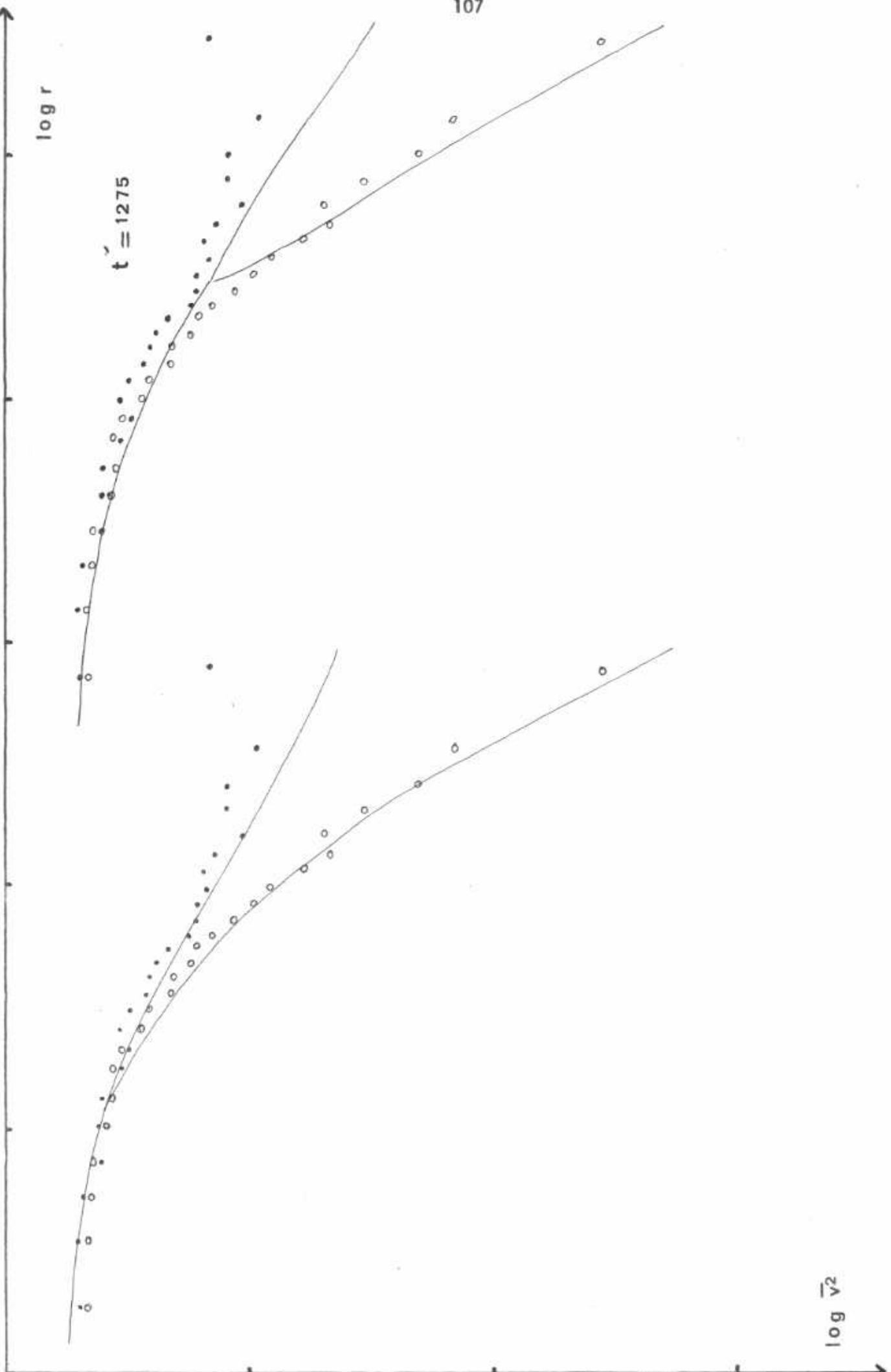


$\log r$ $t' = 1275$ $\log \rho$ 

log r

$t = 1275$

log \bar{v}^2



Errata

p.14 ligne 10: au lieu de $\frac{d}{dr_1}$ lire $\frac{d}{2dr_1}$

p.14 ligne 22: au lieu de $r < r_1$ lire $r > r_1$

p.15 ligne 5: au lieu de E_{\max} lire $2E_{\max}$

p.18, 19 et 26: remplacer partout $H(r_0)$ par $H(r_0)H(V)$

p.46 fig.9: au lieu de $r_1 U_1^2$ et $r_2 U_2^2$ lire $r_1^2 U_1$ et $r_2^2 U_2$ respectivement

p.61 tableau 1 ligne 10 colonne 1: au lieu de 1.5867 lire 1.6867

p.62 tableau 4 ligne 2 colonne 3: au lieu de .008 lire .0008

Permuter les figures 3 (p.34) et 7 (p.39) ainsi que les figures 4 (p.35) et 8 (p.40).