



HAL
open science

Ingénierie d'états quantiques multimodes avec des impulsions femtosecondes

Adrien Dufour

► **To cite this version:**

Adrien Dufour. Ingénierie d'états quantiques multimodes avec des impulsions femtosecondes. Physique Quantique [quant-ph]. Sorbonne Université, 2018. Français. NNT : . tel-02189505v1

HAL Id: tel-02189505

<https://hal.science/tel-02189505v1>

Submitted on 14 Dec 2019 (v1), last revised 14 Feb 2020 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**SORBONNE
UNIVERSITÉ**



**COLLÈGE
DE FRANCE**
— 1530 —



Thèse de doctorat de Sorbonne Université

présentée par

Adrien Dufour

pour obtenir le grade de Docteur de Sorbonne Université
sur le sujet :

Ingénierie d'états quantiques multimodes avec des impulsions femtosecondes

préparée au Laboratoire Kastler Brossel
sous la direction de **Nicolas Treps** et **Claude Fabre**
soutenue le 2 octobre 2018



Membres du jury :

Dr. Virginia D'Auria	Rapporteuse
Dr. Ariel Levenson	Rapporteur
Pr. Agnès Maître	Membre du jury
Pr. Nicolas Treps	Directeur de thèse
Pr. Thomas Coudreau	Membre invité
Pr. Claude Fabre	Membre invité

Remerciements

Cher lecteur,

Cette thèse ne contient pas le récit de mon travail doctoral, mais simplement les résultats les plus intéressants obtenus lors de celui-ci. Il passe donc sous silence tout un aspect passionnant de la recherche : les tâtonnements et l'avancée par essais et erreurs. Il occulte aussi la dimension humaine du travail en laboratoire : des heures de camaraderies aux nuits de mesures en passant par les discussions fructueuses du café méridien, toute aventure scientifique est essentiellement collective. C'est pourquoi je me dois de remercier les personnes sans qui cette thèse ne serait pas entre vos mains aujourd'hui.

À tout seigneur, tout honneur : c'est Nicolas Treppe, mon directeur de thèse, qui a rendu cette thèse possible en m'invitant dès 2014 à rejoindre l'équipe pour mon doctorat. Il m'a ensuite procuré tous les conseils dont j'ai eu besoin et a soutenu toutes mes idées de manip. Certes, il y a un devis que je n'ai jamais pu lui faire signer (alors qu'un déjeuner à la Tour d'Argent aurait eu un effet si bénéfique sur le déroulement de l'expérience !), mais cela a été largement compensé par sa bonne humeur constante et sa disponibilité permanente. Quant à Claude Fabre, mon co-directeur de thèse, il n'a pas non plus été avare en bons conseils, en particulier pour donner du recul aux sections techniques des premiers chapitres. C'est aussi un compagnon de voyage passionnant, qui s'y connaît autant en histoire et cultures européennes qu'en physique, et ce n'est pas peu dire ! Ensuite, je remercie les membres du jury qui ont bien voulu faire une place à ma soutenance dans leurs emplois du temps que je sais chargés : Virginia D'Auria, Ariel Levenson, Agnès Maître et Thomas Coudreau. En particulier, les remarques des rapporteurs m'ont permis de procéder à quelques retouches finales après la soutenance, qui améliorent la lisibilité globale de la thèse. Qu'ils en soient remerciés !

Les autres membres de l'équipe méritent aussi leur part de remerciements, pour avoir fait de l'équipe « 15T Optique Quantique Multimode » un endroit où règne la bonne humeur. En premier lieu ceux qui ont dû me supporter le plus souvent : Young-Sik Ra et Clément Jacquard.

J'ai passé beaucoup de temps au laboratoire avec Young-Sik, de jour comme

de nuit, et je suis souvent resté admiratif devant sa patience et son intelligence. Ses doigts magiques ont plus d'une fois sauvé l'expérience : sans ses super-pouvoirs (il n'y a pas d'autres mots), pas de contraste à 96% sur l'homodyne ni de *sweet spot* à 3Hz! 영식이형 우리가 함께 보낸 시간들 모두 고마워. 형은 훌륭한 연구자가 될 거야! 내 논문이 프랑수어라 미안해 (어차피 형은 이미 모든 내용을 알고있지만). Quant à Clément, c'est lui qui m'a initié au clic-clac, dès mon stage de 2014, mais je lui dois aussi des grandes leçons de vie (« pour choisir son doctorat, deux critères : pas de froid, et pas de vide ») et la quasi-totalité de mes connaissances sur les fromages italiens.

Je dois aussi beaucoup à mes co-doctorants synchrones Pauline Boucher et Luca La Volpe. Depuis le premier jour (où nous avons déjeuné ensemble et mangé du raisin... italien), Luca est sur la table à côté de la mienne : à galérer sur les mêmes choses, à écouter la même musique, à comprendre la même proportion des talks des Vikings, à presque passer la nuit dehors ensemble dans la neige de Paderborn... et on aura peut-être bientôt le même nombre de pages dans nos thèses? Quant à Pauline, son semi-exil breton a réduit de moitié le nombre de pauses fruitées partagées, mais n'en a rendu que plus fructueuses celles qui restaient. Pauline, merci pour cette camaraderie de trois ans, pour ces rires partagés et tous tes bons tuyaux (notamment ceux sur la *terra incognita* qu'est ta rive droite, mais aussi sur la localisation de la barque à huîtres à Bordeaux). Tu as été une « témoin de thèse » parfaite!

Merci aussi à Mattia Walschaers, mon voisin de bureau, mon fournisseur de simulations numériques et de musiques épiques, de chocolat belge et d'anecdotes sur les gaussiennes (si tous les moments tronqués sont nuls, alors c'est forcément à partir de l'ordre 2 et c'est gaussien!). Cet attachant Flamand rend mon départ déchirant!

Merci aussi à Syamsundar De, le maître des bruits dans les lasers, toujours souriant (malgré sa tâche écrasante de superviser la *table of death*, le *throne of Vlad* et les autres délicatesses expérimentales laissées par Valérian) pour son soutien, notamment dans la lutte pour la cantine! À propos de ça, merci aussi à Valentina Parigi, pour ses fréquents conseils qui, même si je ne les ai pas tous suivis (elle saura auxquels je pense), étaient toujours avisés; ainsi que pour avoir complété ma connaissance des fromages italiens (ah, la burrata en salle de manip, un des meilleurs souvenirs d'en bas!). Je remercie aussi Francesco Arzani toujours prêt à discuter de pump shaping ou de musique, Thibault Michel qui a pris la manip en main à une vitesse record, Valérian Thiel qui a assuré depuis Oxford le service après-vente de ses LabView et de ses Blender, Tiphaine Kouadou qui est la seule personne à qui je peux parler de LabView à cœur ouvert, ainsi que nos vaillants stagiaires Francesca, Paul et Matthieu.

Mais il n'y avait pas que l'équipe 15T au LKB, et une bonne partie du plaisir

d'y venir chaque jour est due à mes camarades doctorants ! Les pauses-choco avec Adrien Cavallès et Maxime Joos étaient des respirations chocolatées d'autant plus bienvenues qu'elles étaient les seules occasions de voir le jour pendant les après-midi de manip. Mêmes transformées en pauses-pommes pour éviter que le doctorat fasse grossir autre chose que notre cortex, elles étaient toujours le lieu de discussions animées. Adrien, je sais que tu as retardé l'écriture de ta thèse juste pour pouvoir assister à un ou deux Friday bar de plus que moi, mais je te pardonne ! Maxime, courage pour la fin du manuscrit, imagine juste que c'est un morceau de salsa, et en quelques minutes l'inspiration te viendra ! Vous me manquerez, ainsi que tous les autres doctorants que j'ai eu la chance de rencontrer autour d'une table de manip ou d'une table basse de la cafet' pour le Friday Bar : Hanna Le Jeannic, Pierre Vernaz-Gris, Hélène Fleurbaey, Chayma Bouazza, Valentin Métillon, Rémi Metzdorff, Cédric Enesa, Léo Morel, Tom Darras, Jérémy Raskop, Tamara Bardon-Brun, Simon Thomas, Markus Bohlen, Thibault Capelle...

Mais le LKB ne marcherait pas longtemps s'il ne disposait pas de services remarquables, à qui je tiens à exprimer ma gratitude. En premier lieu au service électronique, c'est-à-dire Brigitte Delamour et Loïc Garcia, que j'ai très souvent sollicités : pour mes circuits amplificateurs, amplificateurs multivoies, alimentations stabilisés, ou encore pour des composants de rechange... Ils ont toujours su répondre à mes requêtes, mêmes les plus tarabiscotées. J'ai aussi souvent eu recours aux services de Romain Rybka, Laetitia Morel et Thierry Tardieu au secrétariat, merci pour leur patience. J'ai également une pensée amicale pour Delphine Charbonneau et Valérie Revelut qui se sont relayées pour la communication du laboratoire, ainsi que pour Bérangère Argence. Et enfin, une pensée toute particulière pour les deux seules personnes qui sont toujours arrivées avant moi au laboratoire et me permettaient donc de ne pas m'y sentir seul à 8h45 : Bintou Maiga et Simon Pigeon.

La liste ne s'arrête pas là puisque j'ai reçu beaucoup de soutien en-dehors du laboratoire, tout au long du doctorat et surtout au cours du processus d'écriture. En particulier merci à ceux qui m'ont supporté pendant le bouclage estival des chapitres 3 et 4 à Pornic ou qui ont relu l'un ou l'autre des chapitres : Aurélien, François, Élise, Noémi, Gabriel. Merci aussi à ceux qui ont partagé mes aventures au Collège des Ingénieurs : Agathe (qui est même venue à ma soutenance), Delphine, Romain, Ferdinand et Charlotte.

Et comme on n'arrive pas complètement par hasard en doctorat, je dois aussi remercier ceux qui n'ont pas attendu la thèse ni même le bac pour me soutenir avec force : ma mère et mon père¹, qui m'ont toujours laissé absolument libre

1. Mon père m'a un jour dit que pour juger un livre, il commençait par lire toutes les notes de bas de page. Si elles sont intéressantes, c'est un bon livre. Loin de moi l'idée d'influencer ce

de choisir ce qui me plaisait et m'ont transmis le goût de la lecture et la curiosité, mon frère et ma sœur dont je suis fier qu'ils aient pris avec succès des voies différentes de la mienne et dont j'espère qu'ils seront fiers d'avoir un frère docteur, mon grand-père qui m'a transmis le goût des sciences et ma grand-mère celui des mots. Et bien sûr le reste de ma famille, les Debègue, les Roullier et les Kettani, qui ont toujours écouté avec attention mes petits malheurs et bonheurs expérimentaux.

Enfin, rien n'aurait été possible sans quelqu'un qui me remotive tous les jours et me perfuse des quantités astronomiques d'amour de la vie : ma femme Marine. Tout ce que je fais, je le fais pour qu'elle soit fière de moi.

critère tout-à-fait excellent... mais je lui dédie tout de même la toute première note de bas de page de cet ouvrage !

Table des matières

Introduction	1
1 Optique quantique	5
1.1 Quadratures et photons	6
1.1.1 Quantification du champ électrique	6
1.1.2 Vecteur d'état	8
1.2 États quantiques	10
1.2.1 Mélanges statistiques	10
1.2.2 Vide quantique	11
1.2.3 États cohérents	12
1.2.4 États comprimés	12
1.2.5 États de Fock	14
1.2.6 États comprimés photo-soustraits	15
1.3 Aspect multimode	15
1.3.1 Transformations des états et des opérateurs	16
1.3.2 Changement de base	17
1.3.3 États intrinsèquement monomodes	18
1.3.4 Intérêt des états multimodes	20
1.4 Aspect non-gaussien	20
1.5 Aspect reconfigurable	21
2 Optique femtoseconde	23
2.1 Impulsions et dispersion	24
2.1.1 Largeurs spectrale et temporelle	24
2.1.2 Compensation de la phase quadratique	27
2.1.3 Dispersion angulaire	28
2.1.4 Impulsions multiples : le peigne de fréquences	29
2.2 Mise en forme d'impulsions	29
2.2.1 Principe du façonneur d'impulsions	29
2.2.2 Limites de résolution	32
2.3 Optique non linéaire	33

2.3.1	Effets non-linéaires	33
2.3.2	Doublage de fréquence	34
2.3.3	Conversion paramétrique descendante	36
2.3.4	Génération de somme de fréquences	38
2.4	SPOPO	40
2.4.1	Cavités résonantes	40
2.4.2	Oscillateur paramétrique optique	42
2.4.3	Description du SPOPO installé	44
2.4.4	États en sortie	48
3	Intrication multimode	51
3.1	Intrication	52
3.1.1	Intrication à deux modes	52
3.1.2	Intrication bipartite	53
3.1.3	Intrication multipartite	54
3.1.4	Retour sur les modes en sortie du SPOPO	55
3.2	États cluster	57
3.2.1	Définition des canevas quantiques	58
3.2.2	Stratégie expérimentale	62
3.2.3	Solution analytique au problème d'optimisation	66
3.2.4	Conclusion	70
3.3	Protocoles quantiques	71
3.3.1	Calcul quantique par mesures	71
3.3.2	Autres protocoles d'information quantique en variables continues	72
4	Ingénierie d'états quantiques par mise en forme de la pompe	75
4.1	Effets attendus de la mise en forme de la pompe	76
4.1.1	Décomposition de l'interaction paramétrique	76
4.1.2	Approximation gaussienne	79
4.1.3	Cas sans approximation	81
4.1.4	Cas de la pompe avec mise en forme	81
4.1.5	Optimisation de la forme de la pompe	84
4.2	Performances du façonnage de la pompe	89
4.2.1	Nouveau modèle à couches pour le SLM	89
4.2.2	Étalonnage du SLM	92
4.2.3	Formes de pompe accessibles	94
4.3	Détection multipixel	94
4.3.1	Détection homodyne	95
4.3.2	Détection homodyne spectralement résolue	97
4.3.3	Limitations de l'homodyne	97

4.3.4	Construction d'une détection multipixel efficace	102
4.3.5	Élargissement spectral avec une fibre multimode	107
4.4	Résultats de mesure	109
5	Soustraction de photon	111
5.1	Généralités sur la soustraction de photon	112
5.1.1	Cas monomode	113
5.1.2	Cas multimode	114
5.1.3	Effet de la soustraction sur un état gaussien	117
5.2	Réalisation expérimentale	121
5.2.1	Construction	121
5.2.2	Tomographie du soustracteur	124
5.3	Dégaussification par soustraction de photon	130
5.3.1	Remarques préparatoires	130
5.3.2	Soustraction dans un supermode	132
5.3.3	Soustraction dans une superposition de supermodes	137
5.4	Soustraction dans un cluster	140
5.4.1	Création des canevas quantique	140
5.4.2	Soustraction dans les nœuds d'un canevas quantique	142
5.5	Conclusion	146
	Conclusion et perspectives	147
	A Description de l'expérience	151
	B Fonctions de Hermite-Gauss	155
	C Diffraction par le SLM	161
	Bibliographie	165

Introduction

Avec la lumière, la nature nous fournit une ressource qui n'a de cesse de nous étonner, comme l'ont montré les premières expériences d'interférences de Young et Fresnel, la mise en évidence de la dualité onde-corpuscule et encore de nos jours les travaux pour percer les mystères de l'intrication quantique. La lumière a aiguillonné la curiosité des physiciens, qui est le premier moteur de la recherche. Cette curiosité a été en outre favorisée par le développement de nouvelles sources de lumière comme les lasers, qui sont devenus des outils largement répandus dans les laboratoires et permettent aujourd'hui de réaliser des mesures toujours plus fines et ouvrent la porte sur de nouveaux domaines, telle l'information quantique.

Parmi ces sources de lumières, les lasers ultrarapides ont fait l'objet d'un intérêt accru, se révélant utiles pour la métrologie, l'optique non-linéaire et l'optique quantique. Développés dans les années 1980 [Udem, 2002; Diddams, 2000], ils sont constitués d'impulsions lumineuses très brèves, d'une durée de l'ordre du cycle optique dans le domaine visible [Morgner, 1991; Witte, 2006], voire moins : la frontière de la femtoseconde (10^{-15} s) a désormais été franchie et des impulsions de quelques centaines d'attosecondes (10^{-18} s) ont été produites [Corkum, 1994; Paul, 2001; Agostini, 2004].

La production des impulsions les plus courtes possibles n'est pas le seul défi à relever en la matière : l'intérêt des chercheurs et des ingénieurs s'est aussi porté sur les manières de manipuler et de mettre en forme ces impulsions à leur guise. Des façonneurs construits à partir de modulateurs spatiaux donnent le contrôle spectral, temporel et même en polarisation sur ces impulsions femtosecondes [Weiner, 2000; Monmayrant, 2010; Weise, 2009]. Ce pouvoir de générer des impulsions sur mesure a permis à son tour de percer de nouveaux mystères : dynamique des réactions chimiques [Lindinger, 2004], spectroscopie [Guibal, 1997] ou encore contrôle cohérent [Judson, 1992; Warren, 1993; Salzmann, 2006; Hild, 2016].

La lumière intéresse également la recherche du fait de ses propriétés quantiques, qui sont actuellement un fantastique terrain d'exploration. Elles sont particulièrement importantes quand le nombre de photons dans le faisceau étudié est petit, de l'ordre du photon unique. Il s'agit d'un régime qui, s'il n'échappe pas complètement à l'œil humain [Tinsley, 2016 ; Vivoli, 2016], échappe assurément à l'intuition.

Mais même avec des faisceaux intenses des phénomènes quantiques entrent en jeu, telles les fluctuations quantiques. Elles trouvent leur origine dans le caractère granulaire des photons dont la répartition aléatoire dans le faisceau constitue une limite à la précision des mesures d'intensité. Un faisceau complètement vide de photon présente aussi des fluctuations quantiques, dues à des indéterminations fondamentales du champ : ce sont les fluctuations du vide. Maîtriser ces fluctuations quantiques a permis des gains de précisions pour certaines mesures [Polzik, 1992], dont celles des ondes gravitationnelles [Aasi, 2013 ; Abbott, 2016].

Un autre phénomène intrigant est l'intrication quantique, « qui nous force à nous affranchir complètement des schémas de pensée classique » [Schrödinger, 1935]. Cette intrication peut se définir comme le fait que des objets ou des états de la lumière soient tels qu'il devient impossible de les considérer comme des états séparés : ils forment un tout [Gisin, 2012]. L'intrication entre deux parties a été un concept fructueux. On lui doit des avancées théoriques sur le principe de localité, avec la vérification expérimentale des inégalités de Bell [Aspect, 1982 ; Hensen, 2015 ; Giustina, 2015 ; Shalm, 2015] ainsi que des découvertes telles que la téléportation quantique [Bennett, 1993 ; Bouwmeester 1997 ; Furusawa, 1998]. Une seconde révolution quantique est annoncée [Aspect, 2005], qui verrait le développement de nombreuses technologies quantiques reposant sur l'intrication. Certaines existent déjà, tel l'établissement quantique de clés secrètes [Bennett, 1984 ; Ekert, 1991 ; Grosshans, 2002] dont une version satellitaire a été récemment développée [Liao, 2017]. D'autres restent encore à inventer, tel que le calculateur quantique [Feynman, 1982 ; Deutsch, 1985 ; DiVincenzo, 2000 ; Rausendorf, 2001 ; Menicucci, 2006] ou l'internet quantique [Kimble, 2008]. Les ingrédients nécessaires à ces dernières sont ainsi en cours de développement : mémoires quantiques efficaces [VernazGris, 2018], génération d'intrication de manière déterministe [Laurat, 2018 ; Humphreys, 2018 ; Kurpiers, 2018], techniques d'extraction d'un mode quantique [Reddy, 2018]. Enfin, l'intrication ne se limite pas à l'intrication bipartite. Il est possible d'intriquer un grand nombre d'objets quantiques [Yokoyama, 2013 ; Chen, 2014 ; Gerke, 2015]. Il existe de multiples manières de lier des ressources quantiques entre elles, tant au niveau de la nature de l'intrication que la structure de cette intrication entre les objets. Une sorte particulière d'intrication multipartite a été l'objet de notre attention :

les *canevas quantiques* (aussi appelés *cluster states*).

Le travail qui a abouti à cette thèse a été guidé par cette envie de comprendre et de manipuler à la fois les modes spectraux et temporels de la lumière ainsi que les états quantiques qui les peuplent. Nous utilisons des lasers femtosecondes circulant dans un oscillateur paramétrique optique pour créer des états dits de *vide comprimé multimode*. Ces états recèlent de l'intrication multipartite sous-jacente [Roslund, 2014]. Cette intrication peut être arrangée pour obtenir des canevas quantiques, dont il est possible de choisir la structure de l'intrication pour tisser n'importe quel graphe intriqué [Cai, 2017].

A partir de là, deux directions de recherche ont été poursuivies. La première concerne le contrôle de la forme spectrale des états issus de l'oscillateur paramétrique optique, afin de produire des états comprimés sur mesure. Pour ce faire, nous avons construit un façonneur d'impulsions pour changer à notre guise le spectre du faisceau de pompe et nous avons préparé un dispositif de mesure adapté à de tels états : la détection homodyne multipixel. La deuxième direction d'exploration a porté sur l'aspect gaussien de nos états. L'état quantique est décrit par une fonction de répartition dans l'espace des phases, la fonction de Wigner, qui est gaussienne pour tous les états produits auparavant dans notre expérience. Grâce à un dispositif de soustraction de photon, nous avons été capables de générer et de mesurer de nouveaux états de la lumière, à la fois non-gaussiens et multimodes.

Plan de la thèse

Afin de présenter ces états et la manière dont nous les avons créés, nous suivrons le plan suivant :

Le **chapitre 1** est consacré aux bases de l'optique quantique, non pas pour en faire un exposé détaillé, déjà très bien fait ailleurs [Grynberg, 2010], mais simplement pour apporter les notions et notations utiles à la compréhension de la suite de la thèse : états et opérateur quantiques, fonction de Wigner, changements de base.

Le **chapitre 2** reprend les technologies femtosecondes utilisées au laboratoire : les effets non-linéaires qui interviennent, la génération d'états non-classiques par une cavité synchrone et la mise en forme spectrale.

Le **chapitre 3** est dédié à l'intrication quantique et en particulier aux canevas quantiques (*cluster states*). Nous indiquons comment nous les produisons à partir de vide comprimé multimode. En particulier, nous exposons une nouvelle méthode pour répartir les fluctuations quantiques entre les nœuds du canevas,

solution analytique à un problème d'optimisation qui était jusque-là résolu par un algorithme évolutionniste. Cette méthode, publiée ici pour la première fois, a été utilisée pour les prises de mesures expérimentales des chapitres suivants.

Le **chapitre 4** décrit les initiatives menées pour contrôler les modes dans lesquels est créé le vide comprimé multimode. Cela passe par une mise en forme spectrale du faisceau de pompe de la cavité, dont les conditions pratiques de mise en place sont détaillées.

Enfin, le **dernier chapitre** résulte d'une volonté de changer la forme de la fonction de Wigner de nos états quantiques. Pour cela, nous utilisons un processus de dégaussification à base de soustraction de photon, de sorte que les états produits sont non-gaussiens et leur fonction de Wigner présente des valeurs négatives. Nous nous sommes également attelés à appliquer la soustraction de photon à des canevas quantiques. Ces résultats, à ce jour encore inédits, concluront la présentation de notre travail.

Chapitre 1

Optique quantique

Plan du chapitre

1.1	Quadratures et photons	6
1.1.1	Quantification du champ électrique	6
1.1.2	Vecteur d'état	8
1.2	États quantiques	10
1.2.1	Mélanges statistiques	10
1.2.2	Vide quantique	11
1.2.3	États cohérents	12
1.2.4	États comprimés	12
1.2.5	États de Fock	14
1.2.6	États comprimés photo-soustraits	15
1.3	Aspect multimode	15
1.3.1	Transformations des états et des opérateurs	16
1.3.2	Changement de base	17
1.3.3	États intrinsèquement monomodes	18
1.3.4	Intérêt des états multimodes	20
1.4	Aspect non-gaussien	20
1.5	Aspect reconfigurable	21

Dans ce premier chapitre, nous présenterons les outils et notations utiles pour décrire les états quantiques de la lumière qui ont fait l'objet de notre travail. Autant que possible, nous en illustrerons les concepts avec des graphiques tirés de nos mesures expérimentales. Nous verrons comment l'on décrit le champ quantique par des opérateurs de champ et des vecteurs d'état, puis nous présenterons les états quantiques qui interviendront dans les chapitres suivants. Enfin, nous mettrons en lumière trois aspects cruciaux des états étudiés dans cette thèse : multimodes, non-gaussiens et reconfigurables.

1.1 Quadratures du champ, opérateurs et photons

Nous commençons par faire le lien entre l'électromagnétisme classique et son prolongement quantique, par le biais de la quantification canonique. Il faut alors distinguer le champ, représenté par un opérateur, et l'état quantique, représenté par le vecteur d'état.

1.1.1 Quantification du champ électrique

La théorie de l'électromagnétisme s'exprime par les équations de Maxwell. Ces équations sont linéaires et admettent une infinité de solutions, qui sont autant de manières pour la lumière de se propager. On exprime souvent ces solutions en décomposant le champ électrique sur une base : $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \mathbf{u}_{\ell}(\mathbf{r}, t) + c.c.$ ¹ où les \mathbf{u}_{ℓ} sont des modes, par exemple des ondes planes ou des modes gaussiens.

La détermination d'une famille de modes grâce aux équations de Maxwell et l'expression du champ électrique dans la base de ces modes est également à la base de la description quantique de la lumière. Il faut simplement trouver une expression adéquate pour \mathcal{E}_{ℓ} , qui lui permette de rendre compte de la nature quantique du champ.

Nous rappelons ici la quantification canonique du champ électrique, détaillée dans [Grynberg, 2010], où l'on fait appel à la base modale des ondes planes monochromatiques. Le champ électrique du mode repéré par ℓ , se propageant dans la direction \mathbf{k}_{ℓ} et polarisé selon $\boldsymbol{\epsilon}_{\ell}$ s'écrit :

$$\mathbf{u}_{\ell}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \boldsymbol{\epsilon}_{\ell} e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.1)$$

Ces modes sont orthogonaux et normalisés par le facteur L^3 . Celui-ci correspond à l'espace d'étude, qui peut correspondre à une réalité expérimentale ou être étendu vers l'infini en fin de calcul. Le champ² $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ se décompose ainsi :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\ell} i\mathcal{E}_{\ell}(t) \mathbf{u}_{\ell}(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

1. *c.c.* pour désigner le complexe conjugué. De même on écrira *h.c.* pour l'hermitien conjugué.

2. Le champ utilisé ici et pour le reste du chapitre est le champ électrique analytique, constitué par les composantes à fréquences positives du spectre : la transformée de Fourier de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ étant $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, on a $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$. On retrouve le champ réel grâce à la formule $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \left(\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\right)^* = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$

avec $\mathcal{E}_\ell(t) = \mathcal{E}_\ell(0)e^{-i\omega_\ell t}$ et $\omega_\ell = ck_\ell$. Sur cette base, les équations de Maxwell peuvent se réécrire sous la forme d'équations de Hamilton :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_\ell}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\ell} \\ \frac{dp_\ell}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\ell} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} x_\ell = \operatorname{Re}(\mathcal{E}_\ell) \cdot \sqrt{4\varepsilon_0/\omega_\ell} \\ p_\ell = \operatorname{Im}(\mathcal{E}_\ell) \cdot \sqrt{4\varepsilon_0/\omega_\ell} \\ H = 2\varepsilon_0 \sum_\ell |\mathcal{E}_\ell|^2 \end{array} \quad (1.3)$$

Les variables $x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N$ qui apparaissent dans ces équations sont nommées *variables canoniques*. Ce sont elles qui forment la charnière entre descriptions classique et quantique. Le hamiltonien H , quant à lui, est l'énergie du système. Dans le cas des ondes planes monochromatiques, les dynamiques de chacun des modes sont indépendantes, ce qui fait tout l'intérêt cette base modale.

Le procédé de quantification canonique consiste alors à définir des opérateurs \hat{x}_ℓ et \hat{p}_ℓ correspondants, qui ne commutent pas. Par convention, on les renormalise par un facteur $\sqrt{2/\hbar}$ et on impose les relations de commutation suivantes :

$$[\hat{x}_\ell, \hat{p}_{\ell'}] = 2i\delta_{\ell\ell'} \quad (1.4a)$$

$$[\hat{x}_\ell, \hat{x}_{\ell'}] = [\hat{p}_\ell, \hat{p}_{\ell'}] = 0 \quad (1.4b)$$

On définit également l'*opérateur annihilation* $\hat{a}_\ell = \frac{1}{2}(\hat{x}_\ell + i\hat{p}_\ell)$ et son conjugué hermitien l'*opérateur création* \hat{a}_ℓ^\dagger . Ils correspondent aux opérations de destruction et de création d'un photon dans le mode ℓ .

On a alors (en laissant les indices implicites) :

$$\begin{array}{l} \hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{p} = \frac{1}{i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} [\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'} \\ [\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}] = 0 \end{array} \quad (1.5)$$

On peut maintenant donner les opérateurs correspondant au champ électrique et au hamiltonien :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) = i \sum_\ell \sqrt{\frac{\hbar\omega_\ell}{2\varepsilon_0}} \hat{a}_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell(\mathbf{r}) \quad (1.6)$$

$$\hat{H} = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left(\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \frac{1}{2} \right) \quad (1.7)$$

Le champ réel correspond à l'opérateur $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}^{(+)} + \hat{\mathbf{E}}^{(+)\dagger}$ et, à la différence de l'écriture $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ de la description classique du champ, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ ne donne par

lui-même aucune information sur l'état quantique observé. Il s'agit d'un opérateur associé à une valeur expérimentalement mesurable : l'observable champ électrique. La description du rayonnement repose sur un deuxième outil mathématique : le *vecteur d'état*.

1.1.2 Vecteur d'état : variables discrètes et continues

Le vecteur d'état $|\psi\rangle$ est un élément d'un espace hermitien : l'espace des états. Il permet de calculer les valeurs moyennes des champs $\langle\psi|\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|\psi\rangle$, leur énergie $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ ainsi que les probabilités de mesures des grandeurs observables et leurs distributions statistiques.

Variables discrètes

Pour représenter l'état $|\psi\rangle$, le plus simple est de le décomposer sur une base des états connue. La base la plus naturelle est celle des états propres de notre hamiltonien. En effet, \hat{H} étant un opérateur hermitien, ses états propres forment une base orthogonale de l'espace des états.

Nous introduisons l'opérateur $\hat{N}_\ell = \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell$. Ses valeurs propres sont tous les entiers positifs $n_\ell = 0, 1, 2, \dots$. On note ses états propres $|n_\ell\rangle$ et on a les propriétés suivantes :

$$\hat{N}_\ell |n_\ell\rangle = n_\ell |n_\ell\rangle \quad (1.8)$$

$$\hat{a}_\ell |n_\ell\rangle = \sqrt{n_\ell} |n_\ell - 1\rangle \quad (1.9)$$

$$\hat{a}_\ell^\dagger |n_\ell\rangle = \sqrt{n_\ell + 1} |n_\ell + 1\rangle \quad (1.10)$$

Puisque l'on a $\hat{H} = \sum_\ell \hbar\omega_\ell (\hat{N}_\ell + 1/2)$ et que les \hat{N}_ℓ commutent entre eux, les vecteurs propres de \hat{H} sont les produits tensoriels des vecteurs propres des \hat{N}_ℓ , ce que l'on écrira : $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots = |n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle$. Pour un tel état, l'énergie vaut $\sum_\ell \hbar\omega_\ell (n_\ell + 1/2)$.

Un état remarquable est l'état vide, pour lequel tous les n_ℓ valent 0 :

$$|0\rangle = |n_1 = 0, n_2 = 0, \dots, n_\ell = 0, \dots\rangle \quad (1.11)$$

Dans cette base, appelée base de Fock, on peut décomposer $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_\ell=0}^{\infty} \dots C_{n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots} |n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle \quad (1.12)$$

Cette description est appelée *description en variables discrètes*, car les n_ℓ appartiennent à un ensemble discret. Le fait que les n_ℓ ne prennent que des valeurs

entières est également à l'origine de la notion de *photon*. En effet, l'énergie dans chaque mode s'écrit $\hbar\omega_\ell(n_\ell + 1/2)$ et ne peut donc varier que par ajout ou soustraction d'un quantum d'énergie $\hbar\omega_\ell$ en qui on reconnaît l'énergie d'un photon dans le mode l . On peut donc dire que n_ℓ est le nombre de photons dans le mode l et \hat{N}_ℓ l'opérateur associé.

En variables discrètes, l'état est décrit par la donnée de tous les coefficients complexes $C_{n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots}$. L'espace des états est donc de taille considérablement plus grande qu'en théorie classique où la simple donnée des $\alpha_\ell(0)$ dans l'équation (1.2) suffisait à connaître parfaitement le champ.

Lorsque l'on travaille avec des états qui ont un nombre entier de photons, ou lorsque ces états échangent, gagnent ou perdent un nombre entier de photons, ou encore lorsqu'on manipule des photons uniques, cette description dans la base de Fock est très utile. En revanche, lorsque l'on cherche à mesurer les quadratures du champ, il existe d'autres bases plus adaptées.

Variables continues

Au laboratoire, nous disposons d'une détection homodyne (présentée au chapitre 4) qui permet de mesurer directement les quadratures du champ x_ℓ et p_ℓ . Il est donc intéressant de disposer d'une expression de $|\psi\rangle$ où elles interviennent. Nous allons donc construire une base à partir des opérateurs quadratures associés, \hat{x}_ℓ et \hat{p}_ℓ . Puisque les valeurs propres des quadratures, contrairement à celles de \hat{N}_ℓ , peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle, cette approche a été baptisée *description en variables continues*.

Les opérateurs quadratures sont eux aussi hermitiens, leurs vecteurs propres forment donc deux bases orthogonales de l'espace des états. Restreignons-nous au mode l . On désigne par $|x_0\rangle_{x_\ell}$ le vecteur propre de \hat{x}_ℓ pour la valeur $x_0 \in \mathbb{R}$. On peut décomposer $|\psi\rangle$ sur cette base :

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) |x\rangle_x dx \quad (1.13)$$

La fonction $\psi(x)$ décrit complètement le vecteur d'état $|\psi\rangle$. La base des $|x\rangle_x$ est une base orthonormée ${}_x\langle x|x'\rangle_x = \delta(x - x')$ de relation de fermeture $\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle_x \langle x|_x = \mathbb{1}$. La base des vecteurs propres de \hat{p}_ℓ a les mêmes propriétés et on peut également s'en servir pour décomposer le vecteur d'état :

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p) |p\rangle_p dp \quad (1.14)$$

Ces deux fonctions φ et ψ sont toutes les deux des descriptions complètes de l'état physique et ont un lien simple entre elles : φ est la transformée de Fourier de ψ . On dit que les quadratures sont des variables conjuguées. Et comme

souvent face à un couple de variables conjuguées, il est intéressant de regarder l'espace des phases, c'est-à-dire le plan (x_ℓ, p_ℓ) , aussi appelé représentation de Fresnel. Premièrement parce que les fonctions ψ et φ sont à valeurs complexes, donc difficiles à appréhender, tandis qu'on peut espérer trouver dans le plan de phase une représentation à valeurs réelles. Une autre raison est que cela permet de faire apparaître l'amplitude et la phase du champ, si souvent utilisées en optique.

Il existe plusieurs manières de représenter l'état dans le plan de phase. Dans le reste de cette thèse, nous utiliserons la fonction de Wigner, qui est une quasi-distribution de probabilité [Wigner, 1932; Ville, 1948] dont nous ne donnons pour le moment que la définition :

$$W(x,p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x+y)\psi(x-y)e^{ipy} dy \quad (1.15)$$

1.2 États quantiques

1.2.1 Mélanges statistiques

Pour décrire des états dont on n'a pas une connaissance parfaite, on a recours à des *mélanges statistiques*. Cela peut être le cas pour un état mal préparé, qui contient du bruit d'origine classique. Un état qui serait le mélange statistique de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, auxquels on associe les opérateurs $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ et $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, ne pourra pas être décrit par une fonction d'onde mais seulement par une superposition de leurs opérateurs : $\hat{\rho}_{\text{mélange}} \propto |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$. On appelle $\hat{\rho}$ l'*opérateur densité*.

Plus généralement, tout opérateur positif $\hat{\rho}$ normalisé ($\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$) est un opérateur densité, qui représente un état possible du champ. On peut le diagonaliser :

$$\hat{\rho} = \sum_k r_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad (1.16)$$

Les états purs correspondent au cas particulier où seul r_0 est non-nul. Pour caractériser la pureté d'un état, on dispose de plusieurs outils : le nombre de Schmidt K et la pureté p , définis par :

$$K = \frac{1}{\sum_k r_k^2} \quad \text{et} \quad p = \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \frac{1}{K} \quad (1.17)$$

Nous interprétons K comme le nombre minimal effectif d'états purs intervenant dans le mélange et p est son inverse.

L'opérateur densité peut être donné sous forme de matrice si l'on dispose d'une base dénombrable comme c'est le cas en variables discrètes. En revanche, en variable continues, il est beaucoup trop compliqué à manipuler et on lui préfère la fonction de Wigner dont la formule (1.15) s'étend facilement aux mélanges statistiques en remarquant que $\psi^*(x+y)\psi(x-y) = \langle x+y|\hat{\rho}|x-y\rangle$.

1.2.2 Vide quantique

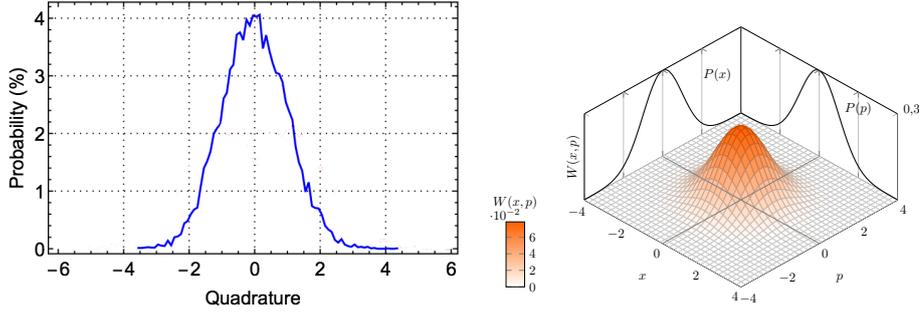


FIGURE 1.1 – *À gauche* : Histogramme des mesures de quadratures \hat{X}_θ sur le vide. Graphique tiré de nos résultats expérimentaux de janvier 2018, l'axe des abscisses a été renormalisé ($\sigma_0 = 1$). Comme le vide ne présente pas de dépendance en θ , la mesure a été faite avec des angles θ aléatoires et ce graphique présente le résultat moyenné en phase. *À droite*, fonction de Wigner du vide.

L'état $|0\rangle$ ne contient aucun photon : on le nomme *vide quantique*. Il contient pourtant des fluctuations, car si le champ est nul en moyenne, sa variance en revanche ne l'est pas : $\langle 0|\hat{\mathbf{E}}|0\rangle = 0$ mais $\langle 0|\hat{\mathbf{E}}^2|0\rangle \neq 0$.

Cela a des conséquences sur les quadratures \hat{x} et \hat{p} définies en (1.4). On peut les mesurer grâce à la détection homodyne définie au paragraphe 4.3, ainsi que toute quadrature d'angle intermédiaire de la forme :

$$\hat{X}_\theta = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{p} \quad (1.18)$$

Sur le vide, la détection homodyne donne $\langle 0|\hat{X}_\theta|0\rangle = 0$ et $\langle 0|\hat{X}_\theta^2|0\rangle = 1$. Si l'on mesure plusieurs fois une quadrature d'angle θ , on trouvera bien 0 en moyenne comme on s'y attend pour le vide, mais la mesure de la quadrature est entachée d'un bruit d'origine quantique appelé *bruit de grenaille*³. La figure 1.1

3. Ici, la variance de ce bruit vaut $\sigma_0^2 = 1$ et cela est imposé par la normalisation des quadratures en (1.4). Plusieurs conventions coexistent pour définir les quadratures et donc notre bruit de grenaille σ_0 : dans la littérature il vaut tantôt 1, tantôt 1/2. Si l'on prend $\sigma_0 = \sqrt{\hbar}/2$ on retrouve nos quadratures canoniques des équations (1.3). Pour la suite, nous garderons $\sigma_0 = 1$.

en est un exemple mesuré dans notre laboratoire ; on remarque que la distribution est proche d'une gaussienne.

La fonction de Wigner du vide est elle-même une gaussienne :

$$W_{|0\rangle}(x,p) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + p^2}{2}\right) \quad (1.19)$$

L'incertitude quantique se traduit par une probabilité de présence centrée sur 0 mais étalée sur une largeur 1.

Cette remarque ne s'applique pas seulement au vide. Pour tout état quantique, puisque, d'après l'équation (1.4), \hat{x} et \hat{p} ne commutent pas, leurs variances $\Delta_x^2 = \langle \xi | \hat{x}^2 | \xi \rangle$ et $\Delta_p^2 = \langle \xi | \hat{p}^2 | \xi \rangle$ vérifient l'inégalité :

$$\Delta_x \Delta_p \geq 1 \quad (1.20)$$

Cette relation est vérifiée par tous les états quantiques. Elle pose une limite quantique à la précision de la mesure des quadratures ou, c'est une autre manière de le voir, sur la précision des mesures d'amplitude et de phase. Le vide a cette particularité qu'il correspond au cas d'égalité, pour lequel $\Delta_x = \Delta_p = 1$.

1.2.3 États cohérents

Plus généralement, les états qui vérifient $\Delta_x = \Delta_p = 1$ sont appelés états cohérents. Ils correspondent aux états classiques produits par les lasers. On note $|\alpha\rangle$ un champ d'intensité $|\alpha|^2$ et de phase $\arg(\alpha)$. Sa fonction de Wigner est celle du vide déplacée de α dans l'espace des phases :

$$W_{|\alpha\rangle}(x,p) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(x - 2\text{Re}(\alpha))^2 + (p - 2\text{Im}(\alpha))^2}{2}\right) \quad (1.21)$$

Il y a toujours des fluctuations quantiques d'ordre de grandeur 1 mais si $|\alpha|^2$ est très grand, autrement dit si le nombre moyen de photons est très élevé, ces fluctuations sont négligeables devant le champ moyen et on peut connaître avec précision l'amplitude et la phase. C'est l'apparition des lasers qui a permis d'accéder à ces états qui atteignent la limite quantique énoncée par l'inégalité (1.20). Ils disposent de beaucoup d'autres propriétés qui en font des états de référence pour l'optique quantique [Gazeau, 2009].

1.2.4 États comprimés

Les états comprimés sont des états qui ont une quadrature dont la variance est inférieure au bruit de grenaille. Ils saturent eux aussi l'inégalité (1.20), mais de manière asymétrique :

$$\Delta_x^2 = \langle \xi | \hat{x}^2 | \xi \rangle = e^{-2\xi} \quad \text{et} \quad \Delta_p^2 = \langle \xi | \hat{p}^2 | \xi \rangle = e^{2\xi} \quad (1.22)$$

On appelle *vide comprimé* un état pur $|\xi\rangle$ centré en 0 comme le vide, mais dont une quadrature présente moins de fluctuations quantiques que l'autre. Sa fonction de Wigner s'écrit :

$$W_{|\xi\rangle}(x,p) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2/e^{-2\xi} + p^2/e^{+2\xi}}{2}\right) \quad (1.23)$$

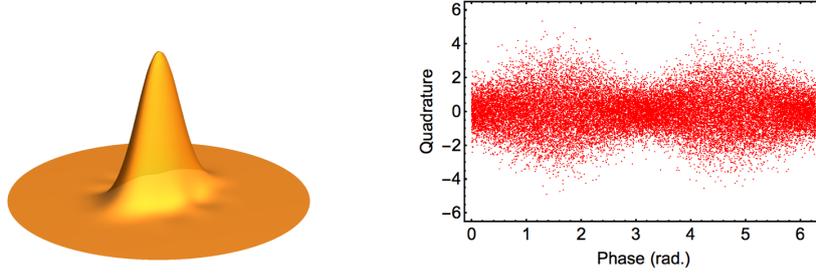


FIGURE 1.2 – Fonction de Wigner et quadratures du vide comprimé. À droite, les résultats de mesure de quadrature \hat{X}_θ sont présentés en fonction de la phase θ . À droite, la fonction de Wigner reconstruite. Résultats tirés de nos mesures expérimentales de janvier 2018. On voit que la variance des quadratures dépend de la phase. Pour les phases de 0 et π , elle descend même à 0,77, c'est-à-dire sous celle du vide qui vaut 1. Le degré de compression est de -2,3 dB.

Même si, comme pour le vide, les champs sont nuls en moyenne, le vide comprimé contient tout de même des photons. Le nombre moyen de photons croît avec le facteur de compression, il vaut $\langle \hat{N} \rangle = \Delta_x^2 + \Delta_p^2 - 2 = \text{ch}(\xi) - 1$. Seuls les nombres pairs de photons apparaissent, ce qui est manifeste sur la base de Fock :

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(\xi)}} \sum_{n \geq 0} (-\text{th}(\xi))^n \frac{\sqrt{2n!}}{2^n n!} |2n\rangle \quad (1.24)$$

L'opérateur de compression $\hat{S}(\xi)$ tel que $\hat{S}(\xi)|0\rangle = |\xi\rangle$ s'écrit :

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}\xi(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})\right] \quad (1.25)$$

Il correspond à la transformation obtenue par conversion paramétrique descendante, que nous verrons au paragraphe 2.3.3.

De tels états sont utiles pour des mesures où le bruit de grenaille est la limitation principale, comme c'est le cas pour la détection d'ondes gravitationnelles [Aasi, 2013; Caves, 1981] ou la spectroscopie [Polzik, 1992].

Le point commun des états cohérents et comprimés est de faire partie des états gaussiens. Un état est dit gaussien lorsque sa fonction de Wigner est gaussienne, auquel cas elle prend la forme ⁴ :

$$W(x - \langle x \rangle, p - \langle p \rangle) = \frac{1}{2\pi\sqrt{V_x V_p}} \exp\left(-\frac{x^2}{2V_x} - \frac{p^2}{2V_p}\right) \quad (1.26)$$

pour laquelle la pureté vaut $p = (V_x V_p)^{-1/2}$ et le nombre de photons $(V_x + V_p - 2)/4$.

1.2.5 États de Fock

Les états de Fock $|n\rangle$, définis en (1.8) et qui servent de base pour la description en variables discrètes, sont au contraire des états *non-gaussiens* : leur fonction de Wigner n'est pas gaussienne. Par exemple :

$$W_{|1\rangle}(x,p) = W_{|0\rangle}(x,p) (x^2 + p^2 - 1) \quad (1.27)$$

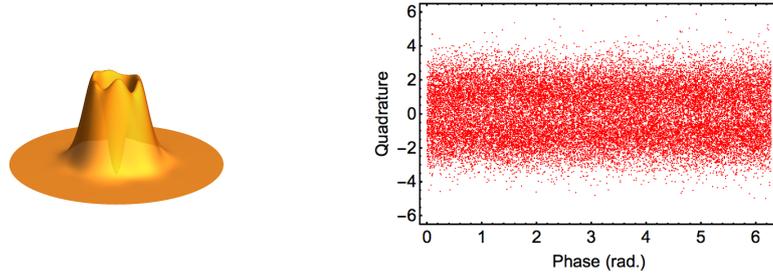


FIGURE 1.3 – Fonction de Wigner et quadratures d'un état à 1 photon. Résultats tirés de nos mesures expérimentales de janvier 2018 sur un état théoriquement proche d'un état à 1 photon (voir aussi la partie 5.3.3, en particulier la figure 5.16). La valeur à l'origine est négative : $-0,08/2\pi$.

De manière plus générale, l'état $|n\rangle$ a une distribution de quadrature $\psi_{|n\rangle}(x)$ proportionnelle à la n^e fonction de Hermite-Gauss et une fonction de Wigner proportionnelle à la n^e fonction de Laguerre-Gauss. Ainsi, la fonction de Wigner prend des valeurs négatives, notamment sa valeur à l'origine qui vaut $-1/2\pi$ pour tous les états où n est impair. Enfin, ces états n'ont pas de dépendance en phase, ce qui est reflété par la partie droite de la figure 1.3.

4. On a considéré que les axes principaux de la distribution sont selon x et p , ce qui est toujours vrai à une rotation près dans l'espace des phases. Une forme complètement générale des états gaussien sera donnée page 5.1.3.

1.2.6 États comprimés photo-soustraits

Un autre exemple de fonction de Wigner à valeurs négatives est l'état obtenu en soustrayant un photon à partir du vide comprimé. Sa production au laboratoire est l'objet du chapitre 5.

Soustraire un photon correspond à l'action de l'opérateur \hat{a} sur l'état quantique. La fonction de Wigner de l'état résultant, que nous qualifierons de *photo-soustrait*, s'exprime en fonction de la fonction de Wigner initiale [Ourjountsev, 2007; Morin, 2014] :

$$W_{\hat{a}|\psi\rangle}(x,p) = \frac{1}{2 \text{Tr}(\hat{a}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{a}^\dagger)} \left(1 + \frac{x^2 + p^2}{2} + x\partial_x + p\partial_p + \frac{\partial_x^2 + \partial_p^2}{2} \right) W_{|\psi\rangle}(x,p) \quad (1.28)$$

En appliquant cette formule à la fonction de Wigner du vide comprimé donnée en (1.23), on obtient :

$$W_{\hat{a}|\xi\rangle}(x,p) = W_{|\xi\rangle}(x,p) \left(\frac{x^2}{e^{-2\xi}} + \frac{p^2}{e^{+2\xi}} - 1 \right) \quad (1.29)$$

Cette fonction de Wigner prend des valeurs négatives, tout comme celle de l'état $|1\rangle$ dans l'équation (1.27).

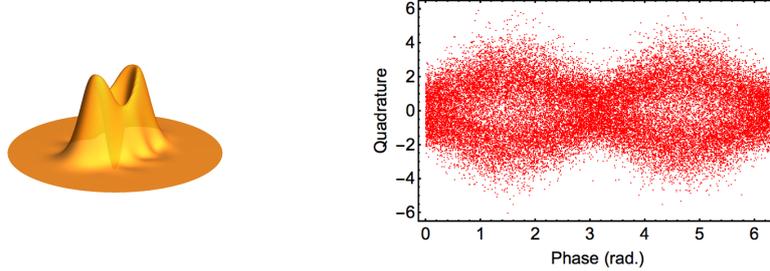


FIGURE 1.4 – Fonction de Wigner et quadratures du vide comprimé photo-soustrait. Tiré de nos mesures expérimentales de janvier 2018 : soustraction d'un photon sur l'état présenté en figure 1.2. Ce n'est pas un état pur, il y a un mélange avec du vide, ce qui rend la négativité à l'origine moins importante.

1.3 Aspect multimode

Depuis la section 1.1.2, nous avons mis de côté l'aspect multimode, pour décrire chaque mode séparément. Or, il existe des états de la lumière pour lesquels on ne peut pas le faire. Pour certains autres, c'est le choix de la base modale qui ne doit pas être fait au hasard.

Il s'agit donc de trouver une base propice à la description de l'état $|\psi\rangle$. Il est utile de rappeler que nous ne cherchons pas une base de l'espace des phases comme dans la section précédente, mais bien une base modale comme discuté en section 1.3.2.

Parfois, on peut trouver une base modale adéquate \mathbf{v}_k où tous les modes sont vides sauf un, c'est-à-dire $|\psi\rangle = |\mathbf{v}_1 : \psi_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2 : 0_2\rangle \otimes |\mathbf{v}_3 : 0_3\rangle \otimes \dots$. On dit alors que l'état est monomode. Si une telle base n'existe pas, alors l'état est multimode.

Les changements de base modales sont importants pour étudier le caractère multimode d'une ressource quantique. Ce sont des cas particuliers de transformations multimodes sur l'état quantique.

1.3.1 Transformations des états et des opérateurs

Entre les équations (1.2) et (1.6), la dépendance en temps a disparu. Pour la rendre explicite, deux conventions existent : la représentation de Schrödinger et celle de Heisenberg.

On rend compte de toutes les transformations unitaires subies par le faisceau (propagation, traversée d'un cristal, franchissement d'une lame séparatrice...) par un opérateur. On représente l'action d'un tel opérateur \hat{U} soit sur l'état quantique : $|\psi\rangle \mapsto \hat{U}|\psi\rangle$; soit sur les opérateurs de champ (c'est-à-dire les opérateurs \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{x} et \hat{p}) : $\hat{x} \mapsto \hat{U}^\dagger \hat{x} \hat{U}$. On parle de représentation de Schrödinger dans le premier cas et de représentation de Heisenberg dans le second cas.

En représentation de Schrödinger, l'évolution temporelle agit sur l'état $|\psi\rangle$ par le biais de l'équation de Schrödinger $\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle$. En représentation de Heisenberg, ce sont les opérateurs qui subissent l'évolution temporelle : $\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}, H]$, et la même équation s'applique à \hat{p} , \hat{a} et \hat{a}^\dagger . Dans les deux cas, pour un hamiltonien d'interaction indépendant du temps, on peut écrire l'opérateur de transformation $\hat{U}(t)$ résultant de l'application de l'hamiltonien durant une durée t_0 :

$$\hat{U}(t_0) = \exp(-i\hat{H}t_0/\hbar) \quad (1.30)$$

Dans le cas multimode en représentation de Heisenberg, les opérateurs se transforment ainsi :

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots) \mapsto (\hat{U}^\dagger \hat{x}_1 \hat{U}, \hat{U}^\dagger \hat{x}_2 \hat{U}, \dots) \quad (1.31)$$

On considère ici les transformations pour lesquelles l'opérateur transformé $\hat{U}^\dagger \hat{x}_i \hat{U}$ s'exprime comme combinaison linéaire des autres opérateurs. Par exemple, l'opérateur de compression de l'équation (1.25) transforme les opérateurs selon :

$$\begin{aligned} \hat{a} &\mapsto \text{ch}(\xi)\hat{a} + \text{sh}(\xi)\hat{a}^\dagger & \text{et} & \hat{x} \mapsto e^\xi \hat{x} \\ \hat{a}^\dagger &\mapsto \text{ch}(\xi)^*\hat{a}^\dagger + \text{sh}(\xi)^*\hat{a} & & \hat{p} \mapsto e^{-\xi} \hat{p} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Il est alors commode d'écrire l'équation (1.31) en notation vectorielle avec $\vec{\hat{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots)^T$:

$$\begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{Q}_U \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \vec{\hat{a}} \\ \vec{\hat{a}}^\dagger \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{C}_U \begin{pmatrix} \vec{\hat{a}} \\ \vec{\hat{a}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

où \mathcal{Q}_U et \mathcal{C}_U sont des matrices, représentations de l'opérateur \hat{U} .

Deux types de transformations sont remarquables. Premièrement, celles qui conservent les relations de commutation (1.4). Dans ce cas, la matrice \mathcal{Q}_U est symplectique. On peut montrer que les opérateurs de ce type sont engendrés par les hamiltoniens au plus quadratiques des opérateurs quadratures.

L'autre type de transformation remarquable est celui des transformations qui, en plus de laisser intactes les relations de commutations, conservent également l'énergie. Ce sont les interféromètres linéaires (ou passifs), composés d'une succession de lames séparatrices et de propagation. Ils ne « mélangent pas » les opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger : leur matrice \mathcal{C}_U est diagonale par bloc et chacun des deux blocs est une matrice unitaire. Ils correspondent aux changements de base.

1.3.2 Changement de base

Soit U une matrice unitaire, c'est à dire telle que $U^\dagger U = 1$. On l'applique à la famille des opérateurs création pour générer de nouveaux opérateurs :

$$\hat{b}_k^\dagger = \sum_\ell U_{k\ell} \hat{a}_\ell^\dagger \quad (1.34)$$

On en déduit

$$\hat{b}_k = \sum_\ell U_{k\ell}^* \hat{a}_\ell \quad \text{et} \quad \hat{a}_\ell = \sum_k U_{k\ell} \hat{b}_k \quad (1.35)$$

Calculons les commutateurs $[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \sum_{\ell, \ell'} U_{k\ell}^* U_{k'\ell'} [\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}^\dagger] = \sum_{\ell, \ell'} U_{k\ell}^* U_{k'\ell'} \delta_{\ell\ell'} = \delta_{kk'}$ et $[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = 0$. La famille des opérateurs \hat{b}^\dagger vérifie les équations de commutation (1.5) : ce sont donc des opérateurs création. En les injectant dans l'équation (1.6), on ré-exprime l'opérateur $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r})$ de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) = i \sum_k \hat{b}_k \tilde{\mathbf{v}}_k \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{v}}_k = \sum_\ell \sqrt{\frac{\hbar\omega_\ell}{2\varepsilon_0}} U_{k\ell} \cdot \mathbf{u}_\ell(\mathbf{r}) \quad (1.36)$$

Pour peu qu'en bonne approximation, le préfacteur $\sqrt{\frac{\hbar\omega_\ell}{2\varepsilon_0}}$ soit le même pour tout ℓ , on peut définir une famille de modes orthonormés :

$$\mathbf{v}_k = \sum_\ell U_{k\ell} \cdot \mathbf{u}_\ell \quad (1.37)$$

qui sont les modes associés aux opérateurs \hat{b}_k . On résume cela de manière compacte avec une écriture matricielle :

$$\vec{v} = U\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{b}^\dagger = U\vec{a}^\dagger \quad \text{et} \quad \vec{b} = U^*\vec{a} \quad (1.38)$$

Dans cette nouvelle base, on a de nouveaux opérateurs quadratures \hat{x}'_k et \hat{p}'_k , qui s'expriment en fonction des anciennes quadratures \hat{x}_ℓ et \hat{p}_ℓ :

$$\hat{x}'_k = \sum_{\ell} [\text{Re}(U_{\ell k})\hat{x}_\ell + \text{Im}(U_{\ell k})\hat{p}_\ell] \quad (1.39)$$

Ce qui se comprend mieux de manière matricielle en posant $U = X + iY$:

$$\begin{pmatrix} \vec{\hat{x}}' \\ \vec{\hat{p}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

La matrice $\mathcal{Q}_U = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}$ est une matrice symplectique : elle conserve les relations de commutation (1.4).

Connaissant la transformation sur les quadratures, on en déduit celle de la fonction de Wigner en représentation de Schrödinger :

$$W \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \mapsto W \left(\mathcal{Q}_U^{-1} \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \right) \quad (1.41)$$

1.3.3 États intrinsèquement monomodes

Il est facile de généraliser la fonction de Wigner comme nous avons généralisé la base de Fock en (1.12). Par exemple, le vide multimode $|0\rangle = |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle \otimes \dots$ a pour fonction de Wigner :

$$W_{|0\rangle}(x_1, p_1, x_2, p_2, \dots, x_\ell, p_\ell, \dots) = \prod_{\ell} W_{|0_\ell\rangle}(x_\ell, p_\ell) \quad (1.42)$$

La fonction de Wigner multimode du vide est séparable et égale au produit des fonctions de Wigner de chaque mode. Le nombre de modes à introduire dans ce produit est arbitraire, puisqu'aucun mode ne contient de photon.

Pour un état quelconque, certains modes seront non-vides. On peut écrire la fonction de Wigner multimode restreinte à ces modes et sous-entendre tous les modes vides pour avoir un espace des phases de dimension finie. Pour une description optimale, on cherche même à avoir cette dimension la plus petite possible. Parfois, elle est même égale à 1 : on a alors affaire à un état monomode.

Deux états illustrent bien le cas où il est possible de trouver une telle base : le photon unique et l'état cohérent.

Un état à photon unique est un vecteur propre de l'opérateur $\hat{N} = \sum_{\ell} \hat{N}_{\ell}$ pour la valeur propre 1. Il s'écrit donc⁵ $|1\rangle = \sum_{\ell} r_{\ell} |\mathbf{u}_{\ell} : 1_{\ell}\rangle$ dans la base \mathbf{u}_{ℓ} avec $\sum_{\ell} |r_{\ell}|^2 = 1$.

Introduisons le mode $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = \sum_{\ell} r_{\ell} \mathbf{u}_{\ell}(\mathbf{r})$ et construisons une base modale \mathbf{v}_k à partir de \mathbf{v}_1 . Dans cette nouvelle base modale, l'état s'écrit maintenant :

$$|1\rangle = |\mathbf{v}_1 : 1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2 : 0\rangle \otimes |\mathbf{v}_3 : 0\rangle \otimes \dots \quad (1.43)$$

Le photon unique est donc intrinsèquement monomode, même s'il semblait multimode dans la base d'origine des \mathbf{u}_{ℓ} .

L'état cohérent multimode, quant à lui, est défini comme le produit tensoriel d'états cohérents dans chaque mode :

$$|\alpha\rangle = |\mathbf{u}_1 : \alpha_1\rangle \otimes |\mathbf{u}_2 : \alpha_2\rangle \otimes \dots \quad (1.44)$$

Si on considère la base \mathbf{v}_k ayant pour premier vecteur

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\alpha_{\infty}} \sum_{\ell} \alpha_{\ell} \mathbf{u}_{\ell} \quad \text{avec} \quad \alpha_{\infty}^2 = \sum_{\ell} |\alpha_{\ell}|^2 \quad (1.45)$$

alors on a $|\alpha\rangle = |\mathbf{v}_1 : \alpha_{\infty}\rangle \otimes |\mathbf{v}_2 : 0\rangle \otimes |\mathbf{v}_3 : 0\rangle \otimes \dots$ qui est bien un état monomode.

Matrice de covariance

Après ces exemples, on peut se demander comment reconnaître un état multimode, car s'il est facile de trouver une base où l'état est monomode, il est plus difficile de montrer qu'il n'en existe pas. Nous disposons de critères mathématiques [Treppe, 2005], mais ils sont peu adaptés à nos conditions expérimentales.

On définit la matrice de covariance des opérateurs de quadrature :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_X & \Gamma_{xp} \\ \Gamma_{px} & \Gamma_P \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} (\Gamma_X)_{ij} &= \langle \hat{x}_i \hat{x}_j \rangle - \langle \hat{x}_i \rangle \langle \hat{x}_j \rangle \\ (\Gamma_P)_{ij} &= \langle \hat{p}_i \hat{p}_j \rangle - \langle \hat{p}_i \rangle \langle \hat{p}_j \rangle \\ (\Gamma_{xp})_{ij} &= (\Gamma_{px})_{ij} = \langle \hat{x}_i \hat{p}_j + \hat{p}_i \hat{x}_j \rangle / 2 - \langle \hat{x}_i \rangle \langle \hat{p}_j \rangle \end{aligned} \quad (1.46)$$

Sous l'effet d'un changement de base de matrice unitaire U , on peut montrer que la matrice de covariance est changée en $\Gamma \mapsto Q_U \Gamma Q_U^T$, le lien entre U et Q_U étant donné en (1.40).

5. en faisant l'identification $|\mathbf{u}_{\ell} : 1_{\ell}\rangle = |0_1, 0_2, \dots, 1_{\ell}, 0_{\ell+1}, \dots\rangle$

Pour les états gaussiens, la matrice de covariance (jointe aux moments du premier ordre) fournit une description complète de l'état.

Une manière expérimentale de distinguer les modes est d'utiliser les matrices de covariance. La matrice de covariance d'un état monomode, exprimée dans la bonne base, a un unique élément dominant. La décomposition en valeurs singulières des matrices de covariance donne une estimation du nombre de modes intrinsèques contenus dans l'état. De plus, la matrice de covariance indique, pour une base modale, si les ressources quantiques qui peuplent ces modes sont corrélées ou non. Nous aurons donc souvent recours aux matrices de covariance dans les chapitres expérimentaux.

1.3.4 De l'intérêt des états multimodes

Les états multimodes intéressent les physiciens à plusieurs égards. Tout d'abord, avoir plusieurs modes signifie avoir plusieurs ressources quantiques dans le même système physique. Par exemple, un faisceau optique contenant une dizaine de modes spectraux remplace avantageusement une dizaine de faisceaux contenant une seule ressource chacun. Cela est donc d'un grand intérêt pour les communications quantiques. Ensuite, quand il n'existe pas de base où l'on peut écrire l'état comme un produit tensoriel d'états monomodes, on a des phénomènes de couplage entre modes : c'est l'*intrication quantique*.

L'intrication est l'un des apports les plus notables de la théorie quantique. Elle a suscité un grand intérêt qui est à l'origine de nombreuses découvertes, comme la téléportation quantique ou distribution quantique de clés. Nombre de ces techniques utilisent des modes auxiliaires, qui sont consommés pendant l'opération, comme nous le verrons au paragraphe 3.3. C'est l'une des raisons pour lesquelles disposer d'un grand nombre de modes est utile. La richesse de la multimodalité sera donc l'objet d'un chapitre entier, le chapitre 3.

1.4 Aspect non-gaussien

Nous avons plusieurs fois distingué les états gaussiens des états non-gaussiens. Il s'agit d'une notion essentielle, étant donnée l'importance qu'ont les états non-gaussiens pour l'information quantique.

En effet, dans la perspective du développement de l'ordinateur quantique, le caractère non-gaussien est indispensable pour espérer obtenir un avantage quantique par rapport aux ordinateurs existants. On peut en avoir l'intuition : les statistiques gaussiennes étant facilement simulables avec les ordinateurs classiques, le comportement d'un ordinateur quantique à base d'états gaussiens pourrait être reproduit par un ordinateur classique et il n'y a donc pas de gain

à espérer [Bartlett, 2002]. Il en va en fait de même pour tous les états à fonction de Wigner positive [Veitch, 2013].

Au contraire, les fonctions de Wigner qui prennent des valeurs négatives ne peuvent plus être assimilées à de simples distributions de probabilité aisément simulables. De plus, la négativité intervient dans des protocoles indispensables aux communications quantiques, comme la distillation d'intrication. Tout ceci fait de la négativité de la fonction de Wigner une propriété indispensable.

Or, le théorème de Hudson-Piquet [Hudson, 1974] nous apprend que pour un état pur, toute fonction de Wigner qui n'est pas gaussienne a des parties négatives : il y a équivalence entre la négativité de la fonction de Wigner et son caractère non-gaussien. Celui-ci est donc une propriété intéressante pour l'information quantique.

Cependant, les états que l'on rencontre en pratique ne sont pas purs. Ils peuvent donc être non-gaussiens sans avoir de partie négative. Ils n'en restent pas moins intéressants pour l'optique quantique car ils témoignent de notre capacité à générer des états qui sortent du cadre le plus classique des états gaussiens.

Pour produire ce caractère non-gaussien à partir de ressources gaussiennes, opération que l'on qualifiera de « dégaussification », nous pouvons utiliser la soustraction de photon présentée en 1.2.6.

1.5 Aspect reconfigurable

Dans la perspective de l'information quantique, une autre qualité est attendue d'un système : être reconfigurable.

Pour traiter de l'information, un grand nombre de modes est requis. Les systèmes ne contenant qu'une seule ressource quantique doivent être juxtaposés, ce qui pose des problèmes d'extensibilité et de capacité à monter en charge. Les systèmes multimodes sont avantageux à cet égard.

Pour traiter l'information quantique, on utilise ces modes, en les manipulant et en les mesurant. Comme les opérations à faire peuvent être très diverses, il faut que leur manipulation soit adaptable. Il est donc utile que les ressources puissent se distribuer de différentes façons sur les modes, mais aussi que les manipulations que l'on exécute puissent se faire à volonté sur l'une ou l'autre ressource.

C'est cela que l'on qualifie de reconfigurable : la capacité de notre système à produire des états sur mesure et à opérer sur eux des manipulations différentes. C'est le fil conducteur des travaux présentés dans cette thèse : le chapitre 4 détaille la production de vide comprimé multimode et la manière de contrôler les modes sur lesquels se distribuent le vide comprimé. Le chapitre 5, quant à lui,

présente une opération de dégaussification adaptable en mode : la soustraction de photon spectralement résolue.

Chapitre 2

Optique femtoseconde

Plan du chapitre

2.1 Impulsions et dispersion	24
2.1.1 Largeurs spectrale et temporelle	24
2.1.2 Compensation de la phase quadratique	27
2.1.3 Dispersion angulaire	28
2.1.4 Impulsions multiples : le peigne de fréquences	29
2.2 Mise en forme d'impulsions	29
2.2.1 Principe du façonneur d'impulsions	29
2.2.2 Limites de résolution	32
2.3 Optique non linéaire	33
2.3.1 Effets non-linéaires	33
2.3.2 Doublage de fréquence	34
2.3.3 Conversion paramétrique descendante	36
2.3.4 Génération de somme de fréquences	38
2.4 SPOPO	40
2.4.1 Cavités résonantes	40
2.4.2 Oscillateur paramétrique optique	42
2.4.3 Description du SPOPO installé	44
2.4.4 États en sortie	48

Dans ce deuxième chapitre, nous présentons les techniques de l'optique ultra-rapide. Il s'agit de technologies qui ont émergé dans les années 80, grâce auxquelles nous avons accès à des impulsions d'une durée de quelques femtosecondes. Nous les utilisons au laboratoire car l'énergie étant très concentrée temporellement, la puissance instantanée atteint des valeurs élevées. Cela va favoriser les comportements non-linéaires, comme les interactions dans les cristaux, qui sont à la base de la génération de nos états de vide comprimé.

Pour faire écho au chapitre précédent, précisons qu'il s'agit ici de décrire

le mode $u(\mathbf{r}, t)$ dans lequel on peut trouver des ressources quantiques, comme du vide comprimé ou un état cohérent. Nous ne nous intéressons pas au mode spatial, qui dans notre cas est gaussien et bien connu, ni à la polarisation, qui en pratique est toujours linéaire, mais seulement au mode temporel $u(t)$. D'autres travaux ont déjà exploré les degrés de liberté offerts à l'optique quantique par la polarisation et par le mode spatial [Kolobov, 2007], tandis que l'accès au mode temporel a moins été exploité. L'apparition des lasers ultra-rapides et leur grande largeur spectrale nous permettent maintenant d'avoir accès au domaine spectral, notamment en manipulant le spectre, comme nous allons le voir par la suite.

Nous détaillerons donc la nature de ces trains d'impulsions ultra-brèves et présenterons une technique particulièrement utile pour leur manipulation : la mise en forme d'impulsions. Enfin, nous nous intéresserons aux phénomènes non-linéaires afin de mieux comprendre la génération de vide comprimé au laboratoire, dans un oscillateur paramétrique optique pompé en mode synchrone.

2.1 Impulsions et dispersion

2.1.1 Impulsion unique : largeurs spectrale et temporelle

Dans un premier temps, nous considérons une impulsion unique. On peut la décrire par son mode temporel $u(t)$, mais lorsque celui-ci est très court, on ne pourra pas y avoir directement accès. On mesure plus volontiers son spectre $\tilde{u}(\omega)$, par exemple avec un interféromètre. Un spectromètre va même donner facilement une mesure de son intensité spectrale $|\tilde{u}(\omega)|^2$ (figure 2.1). Celle-ci donne déjà des indications sur la durée temporelle.

L'impulsion est centrée temporellement en $t_0 = \int t|u(t)|^2 dt$ et spectralement en $\omega_0 = \int \omega|\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega$. S'agissant d'un mode normalisé, on a $\int |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega = \int |u(t)|^2 dt = 1$.

La durée de l'impulsion est alors le moment du second ordre du mode temporel et la largeur spectrale celui du mode spectral :

$$\Delta_t^2 = \int (t - t_0)^2 |u(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad \Delta_\omega^2 = \int (\omega - \omega_0)^2 |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.1)$$

Comme u et \tilde{u} sont liés par transformée de Fourier, on a l'inégalité :

$$\Delta_t \Delta_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

Une simple mesure de l'intensité spectrale nous donne déjà une estimation minimale de la durée de l'impulsion : $\Delta_t^{min} = 1/2\Delta_\omega$. Ce minimum est atteint

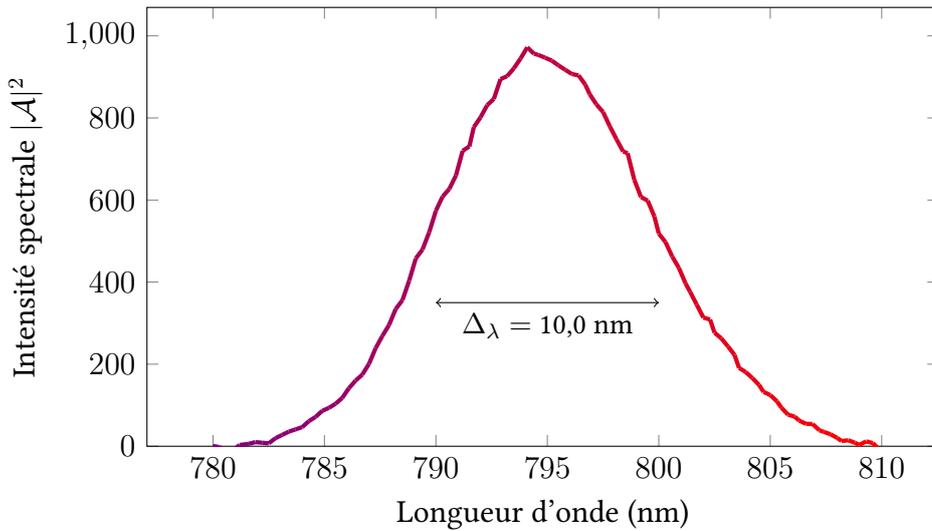


FIGURE 2.1 – Spectre du laser à impulsions femtosecondes. Il s'agit du laser titane-saphir qui est la source optique de toute l'expérience. La largeur spectrale Δ_ω est liée à la largeur en longueur d'onde affichée sur le graphe par : $\Delta_\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \Delta_\lambda$

lorsque l'impulsion a un profil gaussien. Pour les autres profils spectraux, les impulsions seront plus longues.

Mais à intensité spectrale donnée, la phase elle aussi a une influence sur la durée temporelle : la durée minimale pour un certain spectre est obtenue avec la phase spectrale plate. On dit alors que l'impulsion est limitée par transformée de Fourier. Dans le cas contraire, quand la phase spectrale $\phi(\omega) = \tilde{u}(\omega)/|\tilde{u}(\omega)|$ dépend de la fréquence, la durée de l'impulsion Δ_t est allongée par rapport à la durée qu'elle aurait eue avec une phase spectrale plate $\Delta_{t,\phi=0}$. L'allongement est égal à la variance du retard de groupe τ_g^2 :

$$\Delta_t^2 = \Delta_{t,\phi=0}^2 + \tau_g^2 \quad (2.3)$$

$$\text{avec } \tau_g^2 = \int \left(\frac{d\phi}{d\omega} - \left\langle \frac{d\phi}{d\omega} \right\rangle \right)^2 |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{d\phi}{d\omega} \right\rangle = \int \frac{d\phi}{d\omega} |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.4)$$

Souvent, seuls les premiers ordres de cette phase spectrale sont à prendre en compte :

$$\phi(\omega) = \phi_0 + \phi_1 \omega + \frac{1}{2} \phi_2 \omega^2 + \frac{1}{6} \phi_3 \omega^3 + \dots \quad (2.5)$$

Les coefficients ϕ_0 et ϕ_1 ne dépendent que de l'origine des temps et de celle des phases. La *phase quadratique* ϕ_2 et la *phase cubique* ϕ_3 sont plus intéres-

santes car elles sont la trace du passage de l'impulsion dans un milieu dispersif. Elles changent la forme temporelle de l'impulsion.

Le plus souvent, ϕ_2 domine. En effet, la quasi-totalité des milieux qu'un faisceau peut être amené à traverser augmente sa phase quadratique. La dispersion de vitesse de groupe $k''(\omega)$ du milieu traversé et son épaisseur L déterminent la phase quadratique ajoutée au faisceau : $\phi_2 = k''(\omega)L$. Des valeurs typiques sont présentées dans la table 2.1, où l'on voit que la traversée d'un cristal ajoute bien plus de phase quadratique qu'une grande distance d'air. On peut se poser la question : quelle quantité de phase quadratique une impulsion peut-elle supporter ?

$k''(\omega)$ en fs ² /mm	Air	BK7	SF10	BiBO
795 nm	0.021	45	158	166
397.5 nm	0.050	123	708	480

TABLE 2.1 – Phase quadratique ajoutée au faisceau par unité de longueur, pour quelques matériaux usuels.

Si la phase est uniquement quadratique, l'équation 2.3 se simplifie en :

$$\Delta_t^2 = \Delta_{t,0}^2 + \phi_2^2 \Delta_\omega^2 \quad (2.6)$$

On peut la transformer encore en réutilisant (2.2) : le produit $\kappa = \Delta_\omega^2 \Delta_{t,0}^2$ dépend de la forme spectrale, il vaut $\frac{1}{4}$ pour une gaussienne, $\frac{3}{10}$ pour le sinus cardinal, $\frac{1}{2}$ pour une exponentielle décroissante $\exp(-|x|)$. Alors on obtient

$$\Delta_t = \Delta_{t,0} \cdot \sqrt{1 + \kappa \left(\frac{\phi_2}{\Delta_{t,0}^2} \right)^2} \quad (2.7)$$

Ainsi, sans préjuger de la forme exacte de l'impulsion, c'est le rapport entre sa durée caractéristique Δ_t et la dispersion ϕ_2 qui dicte son allongement. Une impulsion de durée Δ_t peut supporter des phases quadratiques $\phi_2 \ll \Delta_t^2$. Au laboratoire, nos impulsions de 100 fs peuvent donc traverser sans trop de déformations plusieurs mètres d'air ainsi que quelques millimètres de cristaux. Par exemple, notre cristal de triborate de bismuth (BiBO) le plus long fait 2,5 mm, il ajoute donc 415 fs² à la phase quadratique, ce qui correspond à une élongation de 0,02 %.

La phase cubique, quant à elle, cause des asymétries temporelles qui allongent l'impulsion. Dans nos expériences, elle s'est révélée négligeable, nous ne rentrons donc pas plus dans le détail.

2.1.2 Compensation de la phase quadratique

L'inconvénient majeur de l'allongement de l'impulsion par la dispersion est la réduction de la puissance crête, ce qui diminue l'efficacité des phénomènes non-linéaires. Il faut donc pouvoir compenser la phase quadratique accumulée au cours de la propagation. Pour ce faire, nous utilisons deux techniques : la première est l'utilisation d'un compresseur à prismes et la seconde est la mise en forme d'impulsion qui sera présentée en 2.2.

Le principe du compresseur à prismes est le suivant : la lumière traverse quatre prismes disposés de telle sorte que le chemin parcouru dépend de la longueur d'onde. On peut utiliser les symétries pour avoir une géométrie plus compacte : à l'aide d'un miroir, on peut n'utiliser que deux prismes comme sur la figure 2.2. Il existe également un montage encore plus compact avec un coin de cube qui permet de n'utiliser qu'un seul prisme [Akturk, 2006].

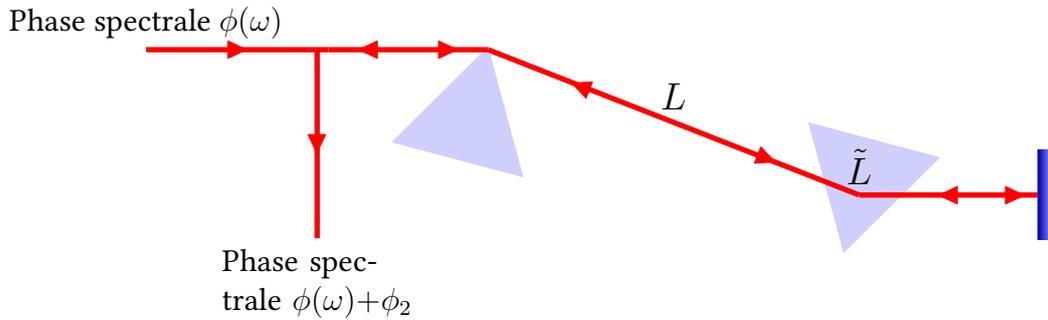


FIGURE 2.2 – Schéma du compresseur à prismes. Le faisceau parcourt une distance L entre les deux prismes et \tilde{L} à l'intérieur du second prisme.

C'est la géométrie à deux prismes que nous avons retenue. On note L la distance parcourue entre les deux prismes. Si on suppose que le faisceau passe par la pointe de chacun des deux prismes, la dispersion introduite est de :

$$\phi_2 = -8 \frac{L\lambda_0^3}{2\pi c^2} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_{\text{in } \lambda_0}^2 \quad (2.8)$$

Si on introduit plus de verre dans le faisceau en translatant le prisme de telle sorte que le faisceau voyage dans le prisme sur une distance \tilde{L} , on ajoute la dispersion du verre

$$\phi_2 = -8 \frac{L\lambda_0^3}{2\pi c^2} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 + \frac{\lambda_0^3 \tilde{L}}{\pi c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (2.9)$$

Sur notre table optique, un compresseur a été construit par Olivier Pinel [Pinel, 2010]. Nous l'avons modifié à plusieurs reprises au gré des besoins. Dans

la configuration actuelle, la distance entre les prismes est de 106 cm, ce qui introduit une dispersion négative de -18800 fs^2 , et le deuxième prisme en verre SF10 est traversé en son milieu, ce qui ajoute de la dispersion positive à hauteur de 3000 fs^2 .

2.1.3 Dispersion angulaire

Quand on introduit un prisme dans le faisceau, la dispersion du verre va aussi faire un couplage entre fréquence et direction : la dispersion angulaire. Notre faisceau n'en est pas exempt. Dès le début de son chemin sur la table, il traverse une paire de prismes anamorphiques (Thorlabs PS875-B) pour corriger son ellipticité. Nous avons calculé [Kasuya, 1978] que cela crée une dépendance angulaire fréquentielle de $10 \mu\text{rad}/\text{nm}$. Il y a aussi d'autres sources de dispersion angulaire, comme un façonneur d'impulsions mal réglé (voir le paragraphe 2.2.1).

Plusieurs grandeurs apparaissent : la dispersion angulaire a proprement dite, qui à chaque longueur d'onde associe la direction de propagation, et le gradient de fréquence α , qui nous indique comment varie la fréquence quand on change la direction de mesure¹. C'est plutôt la première qui nous intéresse, mais c'est la seconde qui est expérimentalement accessible, on est donc amené à passer de l'une à l'autre.

Au laboratoire, nous mesurons une dispersion angulaire de l'ordre de $10 \mu\text{rad}/\text{nm}$, comme prévu par la théorie. La dispersion angulaire a une conséquence non-intuitive : elle incline les fronts d'intensité [Chanteloup, 1998]. Les fronts d'onde (surfaces équi-phase) sont toujours perpendiculaires à la propagation, mais les fronts d'intensité (surfaces d'équi-intensité) forment un angle avec celles-ci, qui vaut $\theta = \lambda_0 a$ [Pretzler, 2000]. Cela va avoir pour conséquence, si on focalise le faisceau, d'allonger l'impulsion [Akturk, 2005].

Pour en limiter les effets, on peut filtrer la dispersion angulaire à l'aide d'un filtre spatial, ou alors la compenser avec un compresseur à prisme comme celui de la figure 2.2 [Osvay, 2004]. Dans nos expériences, la dispersion angulaire n'était pas critique pour nos mesures et nous avons dans un premier temps opté pour la première solution. Après les campagnes de mesure, nous avons testé la compensation et pu réduire la dispersion angulaire.

1. La dispersion angulaire (ou spatiale) est $a = \int x \partial_\lambda S(x, \lambda) d\lambda$ et le gradient de fréquence est $\alpha = \int \lambda \partial_x S(x, \lambda) dx$, où $S(x, \lambda)$ désigne l'intensité spectrale. On trouvera une description complète dans [Akturk, 2005] et une analyse plus succincte dans [Akturk, 2010].

2.1.4 Impulsions multiples : le peigne de fréquences

Les lasers femtosecondes génèrent des trains d'impulsions émises à une cadence régulière qu'on appelle le *taux de répétition* $f_{rep} = \omega_{rep}/2\pi$. À la place du spectre continu d'une impulsion unique, on a affaire à un spectre discret, qui ne contient que les multiples de ω_{rep} , à un décalage spectral ω_{ceo} près. On parle de peigne de fréquences. Chaque dent du peigne correspond à un mode longitudinal de la cavité laser. Leur espacement est dicté par la longueur de la cavité. On écrit leurs fréquences ainsi :

$$\omega_n = n\omega_{rep} + \omega_{ceo} \quad (2.10)$$

où ω_{ceo} est l'écart porteuse-enveloppe. Celui-ci est l'écart en fréquence entre les dents du peigne et les multiples les plus proches de la fréquence de répétition (voir le bas de la figure 2.3). Il est lié au déphasage $\Delta\phi_{CE}$ entre l'enveloppe temporelle et l'onde porteuse à ω_0 (voir le haut de la figure 2.3) : $\Delta\phi_{CE} = \omega_{ceo}/f_{rep}$.

L'amplitude des dents du peigne est modulée par le spectre de l'impulsion unique, comme représenté sur la figure 2.3. Toutes les dents sont en phase et c'est leur interférence constructive qui produit les impulsions. Le taux de répétition est très stable, ce qui en fait un outil de choix pour la métrologie. Le développement des peignes de fréquences a valu à Th. Hänsch [Udem, 2002] et J. Hall [Diddams, 2000] le prix Nobel en 2005.

Pour nos impulsions de 100 fs générées par une cavité de longueur 4 m, le nombre de raies spectrales est de l'ordre de 10^5 .

2.2 Mise en forme d'impulsions

La mise en forme d'impulsions est l'un des outils essentiel à notre travail. Elle permet de produire un mode temporel de notre choix pour la mesure homodyne, pour la soustraction de photon, ou pour la mise en forme de la pompe de la cavité qui génère nos états comprimés (voir le paragraphe 2.4). Nous en présentons le principe général, que nous illustrerons en détaillant la mise en place du façonneur d'impulsions pour la pompe de la cavité.

2.2.1 Principe du façonneur d'impulsions

Le principe du façonneur d'impulsions est simple : on sépare les longueurs d'onde, puis on les manipule indépendamment avant de les rassembler. La séparation des longueurs d'onde se fait par un réseau, comme illustré sur la figure 2.4. Un miroir cylindrique focalise chaque composante monochromatique et dans le plan focal de ce miroir, on place un modulateur spatial de lumière

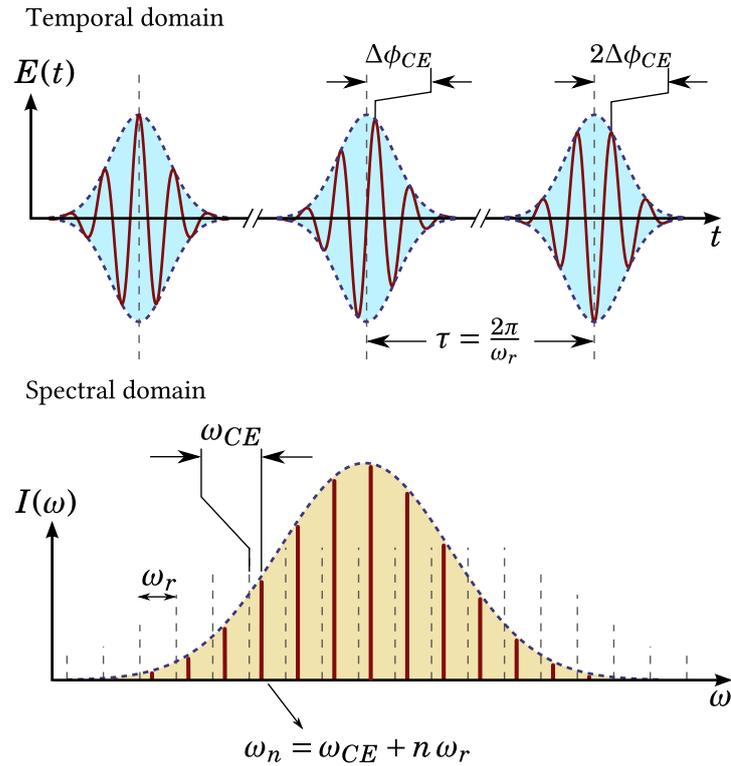


FIGURE 2.3 – Peigne de fréquences, dans le domaine temporel et dans le domaine spectral. On voit que dans le domaine temporel $E(t)$ n'est pas périodique car il y a un décalage de phase d'une impulsion à l'autre. Ce déphasage entre enveloppe et porteuse se retrouve dans le domaine spectral comme un décalage des dents du peigne par rapport aux multiples entiers de la fréquence de répétition. Graphique tiré de [Thiel, 2015].

appelé SLM (selon le sigle anglo-saxon *spatial light modulator*). Ce SLM est une matrice de cristaux liquides dont l'indice optique est contrôlable pixel par pixel.

La théorie est bien décrite dans de multiples sources [Monmayrant, 2010; Weiner, 2011; Weiner, 2000]. Nous avons opté pour une géométrie qu'A. Monmayrant qualifie de « géométrie Ω » [Monmayrant, 2005]. Elle produit des aberrations d'excentrement, mais elles ne sont pas préjudiciables à notre faisceau car celui-ci est filtré spatialement par la suite.

Les cristaux liquides sont soumis à une tension contrôlable par l'ordinateur, qui permet de changer la phase communiquée au faisceau. Nous avons ainsi le contrôle de la phase spectrale. La dimension verticale, jusque-là inutilisée puisque tout se passait dans le plan d'incidence, est mise à profit pour contrôler l'intensité.

Le SLM réfléchit la lumière incidente qui retransverse l'ensemble miroir-réseau

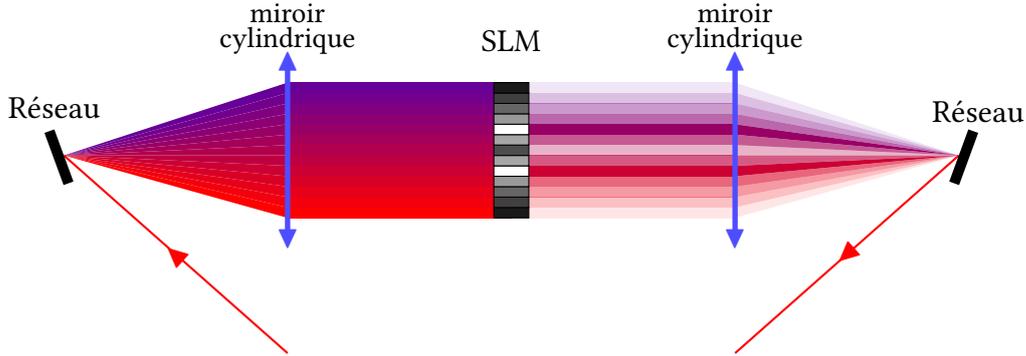


FIGURE 2.4 – Façonneur d’impulsions. Les longueurs d’onde sont séparées sur le réseau d’entrée, puis focalisées par la lentille. Le SLM change la phase et l’intensité spectrales longueur d’onde par longueur d’onde. La lumière est ensuite recombinaée par une lentille et un réseau, qui sont les mêmes qu’à l’entrée pour un SLM en réflexion. Le dessin a été fait en transmission pour davantage de lisibilité.

de manière symétrique. Ainsi, le faisceau se recombine exactement comme il s’était décomposé. On appelle cet ensemble de décomposition-recomposition une ligne $4f$, car la lumière y parcourt quatre fois la distance focale du miroir cylindrique. La symétrie permise par le SLM en réflexion limite les déformations du faisceau ; toutefois un réglage très fin est nécessaire pour que la recombinaison se fasse correctement.

On fait ces réglages en ajustant les paramètres suivants :

- pour corriger la *dispersion angulaire verticale*, on règle l’orientation du réseau. Il s’agit de tourner le réseau dans son plan, puis de compenser la déviation verticale créée par cette rotation [Pretzler, 2000]. Le troisième axe de rotation a déjà été utilisé pour se mettre à l’angle de Littrow.
- pour corriger la *dispersion angulaire horizontale*, c’est la distance entre le miroir cylindrique et le SLM qu’il faut ajuster.
- pour corriger la *dérive de fréquence temporelle*, c’est la distance réseau-SLM qu’il faut ajuster. On a la formule suivante [Weiner, 2000] :

$$\frac{\partial^2 \phi(\omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\lambda^3 g^2 (L - 4f)}{2\pi c^2 \cos^2 \theta_d}$$

où g est le nombre de traits du réseau (par unité de longueur) et θ_d l’angle de diffraction. À titre d’illustration, dans notre façonneur pour l’oscillateur local, d étant la position du prisme ($d=2L-8f$), on aboutit à :

$$\phi_2 [\text{in fs}^2] = 3300 \cdot d_{[\text{in mm}]} \quad (2.11)$$

On peut tirer avantage de cela pour compenser la phase quadratique qui s'est introduite dans le faisceau avant le façonneur.

2.2.2 Limites de résolution et choix des paramètres pour le façonneur bleu

Une fois le façonneur d'impulsions correctement réglé, les longueurs d'onde sont étalées sur l'écran du SLM suivant $x = \alpha\lambda$. Deux facteurs limitent la résolution en longueur d'onde de notre modulateur. Tout d'abord, les pixels du SLM ne sont pas infiniment fins. Leur largeur l_{pix} correspond à une largeur spectrale en-dessous de laquelle on ne peut pas descendre. Nous l'appelons la *limite de résolution des pixels* : $\delta\lambda_{pix} = l_{pix}/\alpha$. La deuxième limitation vient de la taille de la tache focale sur le masque de phase. Chaque longueur d'onde de l'impulsion d'entrée est focalisée sur le SLM par le miroir cylindrique en une tache focale de largeur à mi-hauteur Δx_0 . Cela correspond à une *limite de résolution optique* : $\delta\lambda_{opt} = \Delta x_0/\alpha$.

Nous avons construit un façonneur pour mettre en forme le faisceau de pompe (voir § 2.4). Il nous a donc fallu optimiser la résolution spectrale. Cela consiste à diminuer les deux limites de résolution. Le cas le plus optimal est atteint quand les deux sont limitantes en même temps : $\delta\lambda_{pix} \approx \delta\lambda_{opt}$.

On travaille avec un faisceau de largeur spectrale à mi-hauteur (FWHM) $\Delta\lambda = 3$ nm, centré en $\lambda_0 = -397,5$ nm. On a approché les angles de diffraction sur le réseau (θ_{in} en incidence, θ en diffraction) autant que possible de l'angle de Littrow. On note la focale du miroir cylindrique f_L , le nombre de traits du réseau g , le rayon à $1/e^2$ du faisceau d'entrée w_{in} (aussi appelé rayon du faisceau, ou *waist* en anglais). Ce sont ces trois paramètres que l'on doit choisir.

Comme on a $\alpha = f_L g / \cos(\theta)$ et $\Delta x_0 = 2\sqrt{2 \log 2} \frac{\cos(\theta_{in})}{\cos(\theta)} \frac{f_L \lambda_0}{\pi w_{in}}$ [Monmayrant, 2010], on obtient :

$$\delta\lambda_{opt} = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{2 \log 2} \cos(\theta_{in}) \lambda_0 \right) \cdot \frac{1}{w_{in} \times g} \quad (2.12)$$

$$\delta\lambda_{pix} = l_{pix} \cos(\theta) \cdot \frac{1}{f_L \times g} \quad (2.13)$$

Il faut donc choisir nos trois paramètres f_L , g et w_{in} aussi grands que possible. Pour g , cela est limité par les réseaux commercialement disponibles. Nous avons opté pour $g = 2400$ traits/mm. Concernant w_{in} , le diamètre est limité par la largeur du réseau choisi : 1 cm. Nous choisissons $w_{in} = 3mm$. Enfin, f_L doit être choisi assez grand pour que $\delta\lambda_{pix}$ soit comparable à $\delta\lambda_{opt}$, ce qui est le cas lorsque $f_L = 30$ cm. Mais il faut éviter que le spectre étalé sur le SLM ne dépasse

la largeur de l'écran, ce qui impose $f_L < 59$ cm. Nous avons une contrainte supplémentaire de compacité et nous avons opté pour $f_L = 25$ cm.

Avec ce choix de paramètres, notre façonneur devrait avoir une résolution spatiale limitée par $\delta\lambda_{opt} = 0,035$ nm et $\delta\lambda_{pix} = 0.030$ nm. Les deux se cumulant, on s'attend à ce que la plus petite plage de longueurs d'onde manipulable soit de $\delta\lambda_{SLM} = 0,046$ nm.

2.3 Optique non linéaire

L'optique non-linéaire intervient quand le milieu traversé par la lumière ne répond plus de manière linéaire au champ électrique. C'est un vaste domaine dont nous n'explorons ici que trois phénomènes : le doublage de fréquence, la conversion paramétrique descendante et la somme de fréquences.

2.3.1 Effets non-linéaires et approximations de travail

Le champ électrique analytique s'écrit :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{A}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.14)$$

où l'on a isolé l'enveloppe $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \omega)$, la polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$ et le terme d'oscillation spatiale $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Pour une onde monochromatique de fréquence ω_0 , on pourrait aussi isoler le terme d'oscillation temporelle $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}_0(\mathbf{r}) e^{i\omega_0 t}$.

La propagation des faisceaux est dictée par les équations de Maxwell. En pratique, il nous faut faire un certain nombre d'approximations pour aboutir à des équations utilisables. La première est l'approximation de Gauss (aussi dite *paraxiale*) : les faisceaux se propagent près de l'axe optique, avec un angle faible par rapport à celui-ci. Nous supposons même qu'ils ne se propagent que selon z . On va considérer que, dans le cristal, la diffraction est négligeable et on se restreint aux ondes planes.

La seconde est l'approximation de l'enveloppe lentement variable : les variations de l'enveloppe $\mathcal{A}(z, \omega)$ se font sur des distances plus longues que celles du terme d'oscillation spatiale $e^{ik\cdot z}$: $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} \ll k\mathcal{A}$ et $\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z}$.

Dans ce cadre simplifié, on va s'intéresser à la propagation de l'enveloppe. Dans le vide, l'enveloppe se propage sans se déformer. En revanche, dans un milieu matériel, la réponse du milieu induit une déformation. Cette réponse se traduit par ce qu'on appelle la *polarisation du milieu* P , qui dépend du champ électrique. Pour un milieu non-linéaire, la polarisation a une composante P_{NL} qui dépend de manière non-linéaire du champ électrique. C'est cette partie non linéaire qui gouverne la propagation de l'enveloppe :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z}(z, \omega) = i \frac{\omega}{2\epsilon_0 c n} P_{NL}^{(+)}(z, \omega) e^{-ik(\omega)z} \quad (2.15)$$

Cette équation est valable pour une composante de la polarisation du champ et on a utilisé la composante analytique $P_{NL}^{(+)}$ de la polarisation non-linéaire du milieu. Pour la suite, on se limitera au cas où la relation entre $\mathbf{E}^{(+)}(z, \omega) = E_x^{(+)}(z, \omega)\epsilon_x + E_y^{(+)}(z, \omega)\epsilon_y$ et $P_{NL}^{(+)}(z, \omega)$ est instantanée et quadratique :

$$P_{NL}^{(+)}(z, \omega) = \chi^{(2)} E_i^{(\pm)}(z, \omega) E_j^{(\pm)}(z, \omega) \quad (2.16)$$

Les valeurs de \pm et de $i, j \in (x, y)$ sont déterminées au cas par cas, en fonction de l'interaction étudiée. On appelle $\chi^{(2)}$ la susceptibilité électrique.

L'équation (2.15) est utile pour étudier la propagation du champ dans le cadre de champs classiques. Pour l'étude des champs quantiques, on préfère utiliser le hamiltonien d'interaction \hat{H}_{int} . Comme présenté au chapitre 1, l'évolution du champ quantique \hat{E} soumis à l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_{int} est :

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{int}, \hat{E}] \quad (2.17)$$

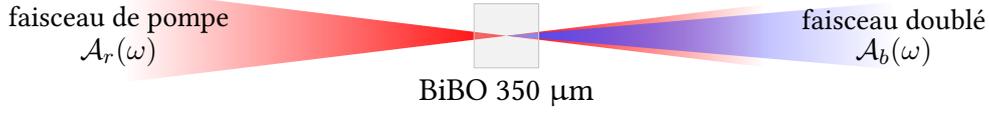
Au cours de la propagation dans le cristal, c'est l'équation (2.17) qui s'applique, ce qui en fait l'analogue quantique de l'équation (2.15). Pour l'utiliser, il nous faut un analogue à l'équation (2.16), c'est-à-dire une expression de l'interaction en fonction des champs en présence. Dans le modèle de mélange à trois ondes, où trois ondes nommées signal, pompe et complémentaire sont mélangées dans le cristal non-linéaire, \hat{H}_{int} s'exprime :

$$\hat{H}_{int} = i\hbar g \chi^{(2)} (\hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_c^\dagger - \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_c) \quad (2.18)$$

où \hat{a}_p est l'opérateur annihilation de photon dans le mode de la pompe, \hat{a}_s^\dagger et \hat{a}_c^\dagger les opérateurs création de photon dans les modes du signal et du complémentaire, respectivement. Le facteur g dépend de la configuration des faisceaux et du cristal (longueur, susceptibilité électrique) et cette expression est valable pour des faisceaux monomodes.

2.3.2 Doublage de fréquence

Pour générer un faisceau dans le proche ultraviolet, nous faisons passer le faisceau rouge à $\lambda_0 = 2\pi/\omega_0 = 795$ nm dans un cristal non-linéaire (BiBO). Le faisceau résultant contient de la lumière bleue à $\lambda_0/2 = 397,5$ nm. Il s'agit d'un doublage de fréquence, ou plus exactement de *génération de seconde harmonique* (SHG, selon le sigle anglais).



Pour ce phénomène, nous optons pour la description classique. On considère en entrée un champ d'amplitude spectrale $\mathcal{A}_r(\omega)$ centrée en ω_0 , qui traverse un cristal de longueur l_c . En sortie, le peigne doublé a pour amplitude spectrale $\mathcal{A}_b(\omega)$. Leurs polarisations sont orthogonales : pour une conversion de type I ($e+e \rightarrow o$), le champ incident est polarisé suivant l'axe extraordinaire du cristal et le champ résultant selon l'axe ordinaire. L'équation (2.16) présente des termes oscillant à la fréquence $2\omega_0$, qui à travers l'équation (2.15) génèrent un terme à $2\omega_0$. On intègre l'équation (2.15) appliquée à l'enveloppe de cette composante : $\mathcal{A}_b(\omega)$ qui est nul à l'entrée du cristal. En outre, on suppose le taux de conversion faible, c'est-à-dire $\mathcal{A}_r(\omega)$ constant tout au long du cristal. On a alors l'expression du spectre en sortie :

$$\mathcal{A}_b(\omega) = i \frac{\omega_0 l_c \chi^{(2)}}{nc} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_r(\omega') \mathcal{A}_r(\omega - \omega') \operatorname{sinc} \left[\frac{1}{2} \Delta k(\omega, \omega') l_c \right] \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.19)$$

où $\Delta k(\omega, \omega') = k_r(\omega') + k_r(\omega - \omega') - k_b(\omega)$ est l'accord de phase, $k_r(\omega) = n_e(\omega)\omega/c$ est le vecteur d'onde pour la polarisation du faisceau de pompe, qui est orientée selon l'axe extraordinaire du cristal dans ce cas. De même, $k_b(\omega) = n_o(\omega)\omega/c$ est le vecteur d'onde pour la polarisation du faisceau généré et les indices correspondants à ces deux axes n_e et $n = n_o(2\omega_0)$ peuvent être très différents dans un cristal biréfringent.

L'équation (2.19) ressemble à l'auto-convolution du spectre initial, c'est-à-dire à la mise au carré dans le domaine temporel. Si on néglige les effets de la dispersion au second ordre, hypothèse raisonnable dans notre cas [Medeiros, 2012], on peut approximer $\Delta k(\omega, \omega') \approx \Delta k_0(\omega)$ avec :

$$\Delta k_0(\omega) = (k'_r(\omega_0) - k'_b(2\omega_0)) \cdot (\omega - 2\omega_0) + \Delta k(2\omega_0, \omega_0) \quad (2.20)$$

On voit apparaître la différence des vitesses de groupe $k'_r(\omega_0) - k'_b(2\omega_0) = v_r^{-1} - v_b^{-1}$. Pour centrer le faisceau généré en $2\omega_0$, on annule le terme $\Delta k(2\omega_0, \omega_0)$ en ajustant l'orientation des axes principaux du cristal par rapport au faisceau. Le spectre résultant est alors :

$$\mathcal{A}_b(\omega) = i \frac{\omega_0 l_c \chi^{(2)}}{nc} \operatorname{sinc} \left(\frac{\Delta k_0(\omega) l_c}{2} \right) \cdot [\mathcal{A}_r * \mathcal{A}_r](\omega) \quad (2.21)$$

Ainsi, dans la limite de l'accord de phase parfait ($\Delta k = 0$), le spectre du peigne doublé est l'auto-convolution du spectre initial $[\mathcal{A}_r * \mathcal{A}_r](\omega)$. Autrement dit, le profil temporel du faisceau généré est le carré du profil initial, fenêtré par

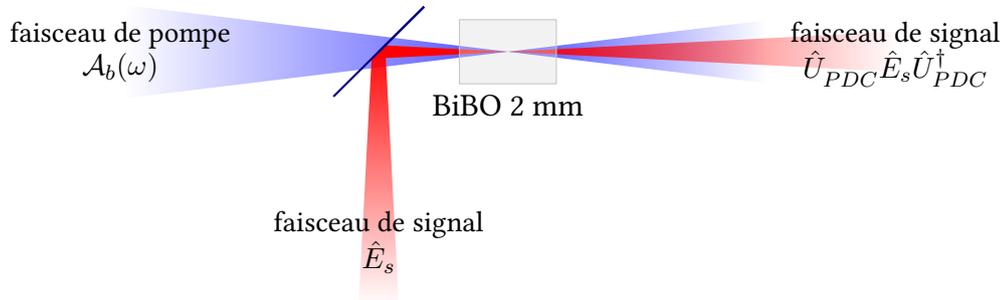
un rectangle dont la largeur dépend de la longueur du cristal l_c et de la différence des vitesses de groupe. On ajuste l'orientation du cristal biréfringent pour faire l'accord de phase à notre fréquence centrale $\omega_0 = 2\pi/\lambda_0 : \Delta k(2\omega_0) = 0$, mais on ne peut pas l'annuler sur toute la plage de fréquence Δ_ω . La largeur spectrale est alors réduite. La longueur du cristal a un double effet : plus le cristal est long, plus la conversion est efficace, mais plus le spectre résultant est étroit. Avec un cristal court, c'est la largeur spectrale initiale Δ_ω qui limite la largeur finale à $\sqrt{2}\Delta_\omega$.

Le doublage de fréquence est donc l'apparition de l'harmonique d'ordre 2 de la fréquence fondamentale due à l'anharmonicité du milieu. Cela correspond, en termes quantiques, à la création d'un photon de fréquence somme à partir de deux photons de fréquence initiale.

2.3.3 Conversion paramétrique descendante

Dans notre expérience, le faisceau créé par seconde harmonique est destiné à être envoyé dans un cristal non-linéaire placé dans une cavité. Il y subit de la *conversion paramétrique descendante*, qui agit comme de l'*amplification paramétrique* pour le faisceau résonant dans la cavité.

Il s'agit du mélange, dans un cristal de longueur l_c , entre un faisceau de pompe d'amplitude spectrale $\mathcal{A}_b(\omega)$ (centrée en $2\omega_0$) et un faisceau de signal (centré en ω_0 , pour lequel on choisit la description quantique du champ \hat{E}_s).



L'action de cette interaction sur le signal \hat{E}_s se traduit par $\hat{E}_s \rightarrow \hat{U}_{PDC} \hat{E}_s \hat{U}_{PDC}^\dagger$, où \hat{U}_{PDC} est l'opérateur de transformation de cette interaction. Cet opérateur est lié à l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_{PDC} grâce à la formule (1.30) : $\hat{U}_{PDC} = \exp\left(\frac{it}{\hbar} \hat{H}_{PDC}\right)$.

Dans le cas monomode, le hamiltonien \hat{H}_{PDC} prend la forme donnée plus haut : $\hat{H}_{int} = i\hbar g_0 \chi^{(2)} \hat{a}_p \hat{a}_c^\dagger \hat{a}_s^\dagger + h.c.$, à ceci près que le faisceau de signal est aussi le complémentaire. La conversion est dite dégénérée. Elle consiste en la conversion d'un photon de la pompe en deux photons : $\hat{H}_{PDC}^{mono} = i\hbar g_0 \chi^{(2)} \hat{a}_p \hat{a}_s^{\dagger 2} + h.c.$

C'est un cas intéressant car il permet de créer du vide comprimé. En effet, quand on considère que le faisceau de pompe est un faisceau cohérent intense, le hamiltonien devient $\hat{H}_{PDC}^{\text{mono}} = i\hbar g \chi^{(2)} \mathcal{A}_p (\hat{a}_s^{\dagger 2} + \hat{a}_s^2)$, ce qui génère l'opérateur $\hat{S}(2g_0 \chi^{(2)} \mathcal{A}_p) = \exp(g_0 \chi^{(2)} \mathcal{A}_p (\hat{a}_s^{\dagger 2} + \hat{a}_s^2))$ qui est l'opérateur de squeezing de l'équation (1.25). Le facteur de compression ξ vaut $2g_0 \chi^{(2)} \mathcal{A}_p$.

Si au contraire les deux photons sont émis dans des modes différents, on assiste à la génération de deux faisceaux intriqués. Cela permet d'obtenir des photons jumeaux, à partir desquels on construit les sources de photons uniques annoncés.

Notre cas est intermédiaire, car nous avons un unique mode spatial et un unique mode de polarisation, mais de multiples modes spectraux, puisque nous travaillons avec des peignes de fréquences. Notre faisceau signal est un peigne de fréquences centré en ω_0 , dont on note ω_n les fréquences des dents et \hat{a}_n les opérateurs annihilation associés aux dents. On considère que l'interaction a un faible effet sur la pompe, c'est-à-dire que \mathcal{A}_b ne dépend pas de z , on considère la pompe comme un champ classique et on tient compte de toutes les fréquences qu'elle contient pour obtenir le hamiltonien d'interaction :

$$\hat{H}_{PDC} = i\hbar g \sum_{n,m} L(\omega_n, \omega_m) \hat{a}_n^{\dagger} \hat{a}_m^{\dagger} - h.c. \quad (2.22)$$

avec

$$L(\omega_n, \omega_m) = \mathcal{A}_b(\omega_n + \omega_m) \Phi(\omega_n, \omega_m) \quad (2.23)$$

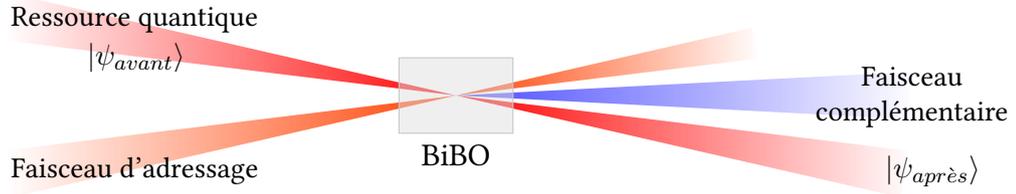
et

$$\Phi(\omega_n, \omega_m) = \text{sinc}\left(\frac{1}{2} \Delta k(\omega_m + \omega_n, \omega_n) l_c\right) \quad (2.24)$$

Le gain g est proportionnel à la longueur du cristal l_c , à $\chi^{(2)}$ et à l'amplitude de la pompe. $L(\omega_n, \omega_m)$ est la *distribution spectrale jointe*. L'équation (2.22) nous en donne une interprétation physique : c'est la probabilité de créer une paire de photons aux fréquences ω_m et ω_n . Comme on le voit en (2.23), cette probabilité est d'autant plus grande que l'énergie apportée par la pompe à la fréquence somme $\omega_m + \omega_n$ est importante et que les fréquences sont favorisées par l'accord de phase $\Delta k(\omega_m + \omega_n, \omega_n)$ via $\Phi(\omega_n, \omega_m)$. Avec un accord de phase large, c'est-à-dire Δk proche de 0 pour une large bande spectrale, si la pompe a de l'énergie à une fréquence ω , alors tous les couples de fréquences qui conservent l'énergie ($\omega' + \omega'' = \omega$) sont générés. Avec au contraire un accord de phase étroit, seul un plus petit nombre de couples de fréquences peut être créé. La largeur spectrale du faisceau généré dépend de l'accord de phase, ce qui est une différence notable avec le cas de la génération de seconde harmonique en (2.21), pour laquelle c'était la largeur spectrale du faisceau de pompe qui limitait celle du faisceau engendré.

2.3.4 Génération de somme de fréquences

La génération de somme de fréquences est un mélange à trois ondes, non-dégénéré. Deux faisceaux se croisent avec un angle non-nul dans un cristal non-linéaire et un faisceau doublé est créé. C'est en quelque sorte l'analogue non-dégénéré du doublage de fréquence décrit en 2.3.2 et le hamiltonien est de la forme (2.18) : $\hat{H}_{SFG} \propto i\hbar\hat{a}_p\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_c^\dagger + h.c.$ Pour la suite, nous ne faisons pas plus de considérations générales sur la somme de fréquences mais nous considérons le cas particulier qui nous intéresse, à savoir : lorsque l'un des deux faisceaux contient une ressource quantique de faible amplitude $|\psi_{avant}\rangle$, par exemple du vide comprimé. L'autre faisceau, appelé *faisceau d'adressage*, contient un état cohérent intense traité comme un rayonnement classique d'amplitude spectrale \mathcal{A}_g .



Les calculs sont complexes à cause de la configuration non colinéaire qui oblige à tenir compte des directions de propagations des faisceaux dans le cristal biréfringent. Nous donnons directement la transformation de l'état quantique, calculée dans la thèse de C. Jacquard² [Jacquard, 2017] :

$$|\psi_{après}\rangle \approx |\psi_{avant}\rangle + |\psi^-\rangle \quad \text{avec} \quad |\psi^-\rangle \propto \sum_{n,m} L_{SFG}(\omega_n, \omega_m) \hat{a}_{s,n} \hat{a}_{c,m}^\dagger |\psi_{avant}\rangle \quad (2.25)$$

Dans cette équation, $\hat{a}_{c,m}^\dagger$ est l'opérateur création d'un photon de fréquence ω_m dans le faisceau complémentaire, $\hat{a}_{s,n}$ l'opérateur annihilation dans le mode du signal à la fréquence ω_n et on a défini la distribution spectrale jointe suivante :

$$L_{SFG}(\omega_s, \omega_c) = \mathcal{A}_g(\omega_c - \omega_s) \cdot \text{sinc} \left(\frac{l_c}{2} \Delta k_{SFG}(\omega_c, \omega_s) \right) \quad (2.26)$$

avec

$$\Delta k_{SFG}(\omega_c, \omega_s) = k_g(\omega_c - \omega_s) + k_s(\omega_s) - k_c(\omega_c) \quad (2.27)$$

². Nous reprenons une forme simplifiée de son équation (5.19). Cela correspond à un hamiltonien proportionnel à $\hat{H}_{SFG} \propto i\hbar \sum_{n,m} L_{SFG}(\omega_n, \omega_m) \hat{a}_{s,n} \hat{a}_{c,m}^\dagger$

La distribution spectrale jointe a un sens physique : c'est la probabilité de succès du passage d'un photon du mode signal au mode complémentaire. Elle dépend de l'énergie disponible dans le faisceau d'adressage à la fréquence correspondant à l'énergie manquante au photon du signal pour devenir un photon du complémentaire : $\omega_c - \omega_s$.

On peut faire l'approximation (2.20) pour trouver : $\Delta k_{SFG}(\omega_c, \omega_s) \approx (v_r^{-1} - v_b^{-1}) \cdot (\omega_c - 2\omega_0) + \Delta k(2\omega_0, \omega_0)$ qui ne dépend plus de ω_s . Si le cristal est long, le terme d'accord de phase dans (2.26) devient très étroit autour de $\omega_c = 2\omega_0$. Cela implique que toute fréquence ω_s du faisceau signal sera convertie vers la même fréquence $2\omega_0$ dans le faisceau complémentaire. Autrement dit, la connaissance du faisceau converti n'apporte pas de connaissance sur ce qui a été converti. Cela nous sera utile par la suite, au chapitre 5.

2.4 Oscillateur paramétrique optique pompé en mode synchrone

Au cœur de notre dispositif expérimental se trouve un oscillateur paramétrique optique pompé en mode synchrone (abrégé en SPOPO, selon l'anglais *synchronously pumped optical parametric oscillator*). Dans cette partie, nous en résumons les propriétés et nous présentons le SPOPO utilisé au laboratoire.

2.4.1 Cavités résonantes

Une cavité optique est un ensemble de miroirs disposés de telle manière qu'une partie de la lumière reste confinée, comme présenté en figure 2.5. À chaque tour de cavité, la lumière se propage sur une longueur L , rencontre le miroir d'entrée et le miroir de sortie et accumule une phase spectrale $\varphi(\omega)$. En négligeant dans un premier temps tous les effets dispersifs, la phase vaut :

$$\varphi(\omega) = \omega L/c \quad (2.28)$$

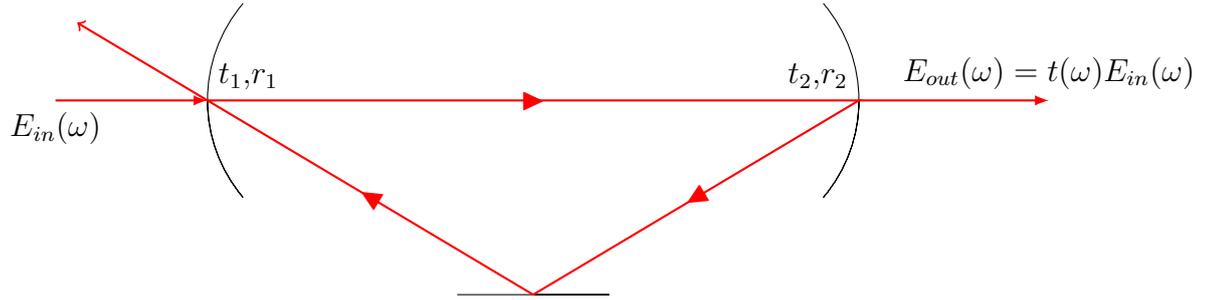


FIGURE 2.5 – Cavité optique. Les coefficients de réflexion et transmission sont : (t_1, r_1) pour le coupleur d'entrée, (t_2, r_2) pour le coupleur de sortie. La transmission totale est $t(\omega)$, elle dépend de la phase prise par le faisceau en un tour de cavité $\varphi(\omega)$.

Le champ en entrée est noté E_{in} . Une partie du champ est réfléchi par la cavité, l'autre est transmise par la cavité et ressort sous la forme $E_{out}(\omega) = t(\omega)E_{in}(\omega)$ avec :

$$t(\omega) = \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi(\omega)/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\varphi(\omega)}} \quad (2.29)$$

Le coefficient de transmission (en intensité) de l'onde entrée est périodique en $\varphi(\omega)$:

$$|t(\omega)|^2 = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - r_1 r_2 \cos(\varphi(\omega))} \quad (2.30)$$

Les valeurs de transmission maximum sont atteintes quand $\varphi(\omega)$ est un multiple de 2π . En effet, dans ce cas, après un tour de cavité, l'onde qui a fait un tour de cavité arrive en phase sur le miroir d'entrée, ce qui cause une interférence constructive. D'après l'équation (2.28), cela correspond aux valeurs de ω multiples de $2\pi c/L$, grandeur que l'on appelle *intervalle spectral libre*. Les fréquences résonantes dans la cavité de longueur L sont donc dans ce cas sans dispersion :

$$\omega_m^{cav} = 2\pi m \frac{c}{L} \quad (2.31)$$

La largeur spectrale des pics de transmission dépend des pertes optiques dans la cavité et des pertes par transmission à travers le coupleur de sortie.

Pour un peigne de fréquences, lorsque les fréquences de résonance de la cavité de (2.31) correspondent aux fréquences des dents du peigne données en (2.10), on a affaire à une *résonance totale*. La transmission du peigne de fréquences complet par la cavité est maximale et la longueur de la cavité est égale à la séparation entre deux impulsions successives : $L_0 = 2\pi c/\omega_{rep}$.

Il y a aussi des résonances partielles, quand la longueur de la cavité L_p n'est plus égale à L_0 mais en diffère d'un multiple entier p de la longueur d'onde centrale du peigne : $L_p = L_0 + p\lambda_0$. La dent centrale à $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ du peigne de fréquences est alignée avec un pic de transmission de la cavité, mais ce ne sera pas le cas pour les autres dents. Pour un multiple p assez petit, les dents voisines de la dent centrale auront un petit écart seulement par rapport au pic de transmission le plus proche, mais les dents les plus lointaines ne seront pas transmises par la cavité. La résonance n'est pas totale, car la fréquence de répétition du peigne $\omega_{rep} = 2\pi c/L_0$ n'est plus égale à la fréquence propre de la cavité $\omega_{cav} = 2\pi c/L_p$.

Si les dents du peigne de fréquences ont un décalage ω_{ceo} non nul, alors on voit en comparant les équations (2.10) et (2.31) qu'aucune longueur de cavité ne sera totalement résonante. Sauf si on adapte les pics de transmission de la cavité, ce qui se fait en ajoutant un terme à l'équation (2.31). Pour cela, on agit sur la phase spectrale linéaire acquise à chaque tour de cavité, par exemple en introduisant une épaisseur variable de verre dans le chemin optique [Medeiros, 2012].

Enfin, si le faisceau acquiert de la phase quadratique au cours de son parcours dans la cavité, cela ajoute un terme non-linéaire à l'équation (2.28) et empêche de trouver une résonance totale. La transmission par la cavité est alors diminuée, d'autant plus sévèrement que le spectre est large et que la finesse est haute.

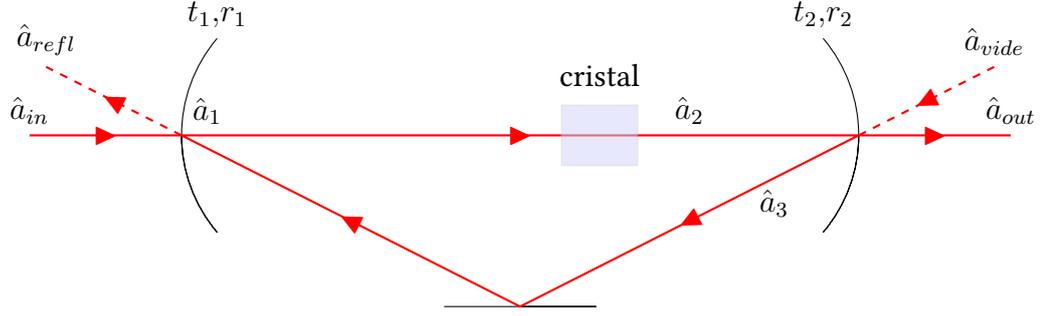


FIGURE 2.6 – Schéma d'un OPO en anneau.

2.4.2 Oscillateur paramétrique optique

Un oscillateur paramétrique optique (OPO) est une cavité résonante dans laquelle on a placé un milieu amplificateur utilisant l'amplification paramétrique (décrite au paragraphe 2.3.3). Ainsi, à chaque tour de cavité, la lumière est amplifiée. Si le gain compense les pertes, on atteint le *seuil d'oscillation*, au-dessus duquel l'oscillation se met en place.

Au-dessus du seuil, l'OPO émet un faisceau cohérent intense, dont la longueur d'onde centrale est ajustable en changeant les conditions d'accord de phase du cristal, ce qui est très utile pour atteindre les plages spectrales où il n'y a pas d'émission laser. Au-dessous du seuil, l'OPO produit du vide comprimé.

OPO monomode

Le modèle de l'OPO monomode en anneau permet d'évaluer le degré de compression dans le cas où un seul mode se propage dans la cavité.

Avec les notations de la figure 2.6, on cherche la relation entre \hat{a}_{out} et \hat{a}_{in} . Sur le coupleur d'entrée on a $\hat{a}_1 = t_1 \hat{a}_{in} + r_1 \hat{a}_3$ et $\hat{a}_{refl} = t_1 \hat{a}_3 - r_1 \hat{a}_{in}$; sur le coupleur de sortie on a $\hat{a}_{out} = t_2 \hat{a}_2 - r_2 \hat{a}_{vide}$ et $\hat{a}_3 = t_2 \hat{a}_{vide} + r_2 \hat{a}_2$. La traversée du cristal, détaillée au paragraphe 2.3.3, correspond à de la compression et en reprenant l'équation (1.32) cela donne³ : $\hat{a}_2 = ch(\xi) \hat{a}_1 - sh(\xi) \hat{a}_1^\dagger$.

En combinant ces relations, on obtient la transformation opérée par l'OPO [Jacquard, 2017] :

$$\hat{x}_{out} = (t_1 t_2 e^{-\xi} \hat{x}_{in} + (r_1 e^{-\xi} - r_2) \hat{x}_{vide}) / (1 - r_1 r_2 e^{-\xi}) \quad (2.32a)$$

$$\hat{p}_{out} = (t_1 t_2 e^{+\xi} \hat{p}_{in} + (r_1 e^{+\xi} - r_2) \hat{p}_{vide}) / (1 - r_1 r_2 e^{+\xi}) \quad (2.32b)$$

On calcule les variances des quadratures sur le mode de sortie, en considérant que les deux modes en entrée (\hat{a}_{in} et \hat{a}_{vide}) sont peuplés par l'état vide $|0\rangle$ dont la variance vaut 1 :

3. On a considéré que c'est la quadrature p qui est comprimée.

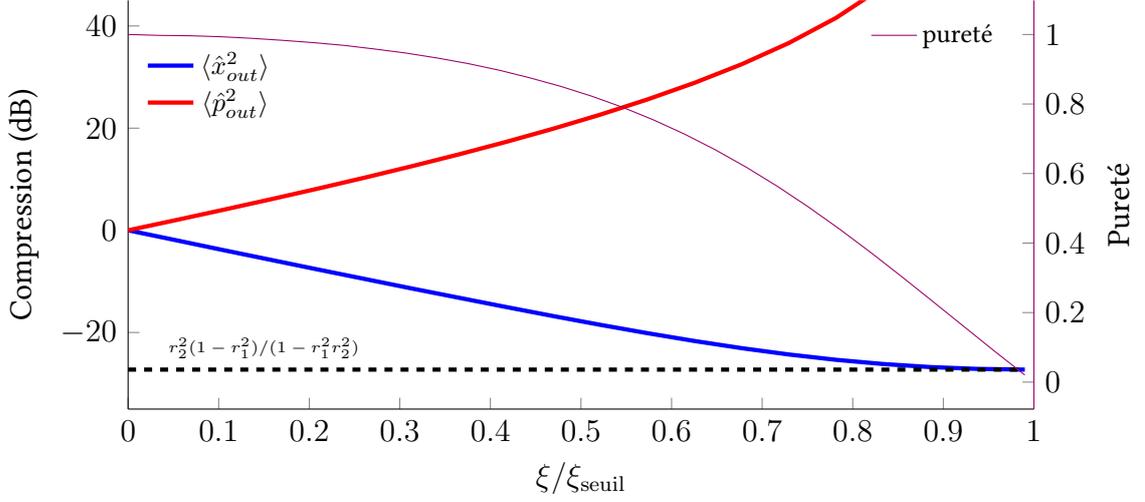


FIGURE 2.7 – Evolution du facteur de compression (courbes rouge et bleu) et de la pureté (courbe violette, axe de droite). La modélisation est faite avec $t_1^2 = 3\%$ pour modéliser les pertes. La réflexivité du coupleur de sortie est égale à 70 %. La quadrature x est de plus en plus comprimée quand la puissance de pompe augmente, jusqu'à atteindre un maximum de compression marqué par une ligne pointillée.

$$\langle \hat{x}_{out}^2 \rangle = \left(t_1^2 t_2^2 e^{-2\xi} + (r_1 e^{-\xi} - r_2)^2 \right) / (1 - r_1 r_2 e^{-\xi})^2 \quad (2.33a)$$

$$\langle \hat{p}_{out}^2 \rangle = \left(t_1^2 t_2^2 e^{+2\xi} + (r_1 e^{+\xi} - r_2)^2 \right) / (1 - r_1 r_2 e^{+\xi})^2 \quad (2.33b)$$

Ces équations divergent pour $\xi_{seuil} = -\ln(r_1 r_2)$, qui correspond à l'amplification pour laquelle le seuil est atteint. Plus on s'approche du seuil, plus la quadrature x est comprimée. En revanche, la pureté $P = (\langle \hat{x}_{out}^2 \rangle \langle \hat{p}_{out}^2 \rangle)^{-1/2}$ décroît en s'approchant du seuil, comme on le voit en figure 2.7.

OPO pompé en mode synchrone

Lorsque la pompe est un train d'impulsions, l'état créé par la conversion paramétrique descendante est également un train d'impulsions. On parle de pompage en mode synchrone quand la cavité est résonante avec ce peigne de fréquences généré. Dans ce cas, le délai entre deux impulsions de pompe est égal au temps nécessaire pour effectuer un tour de cavité.

Dans le modèle simple utilisé pour obtenir les équations (2.33), la pompe est un faisceau continu. Si la pompe est un peigne de fréquences, l'interaction

paramétrique n'est plus monomode : toutes les dents du peigne de fréquences y contribuent. On reprend donc le hamiltonien de l'équation (2.22) : $\hat{H}_{PDC} = i\hbar g \sum_{n,m} L(\omega_n, \omega_m) \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger - h.c.$.

Pour rendre le phénomène plus clair, on diagonalise la *distribution spectrale jointe* $L(\omega_n, \omega_m)$ grâce à la factorisation d'Autonne-Takagi [Autonne, 1915; Takagi, 1924] (sur laquelle nous reviendrons avec plus de détail en 4.1.1). Il s'agit d'un changement de base qui diagonalise L : on définit de nouveaux modes $\vec{\hat{s}} = V\vec{\hat{a}}$ à l'aide d'une matrice orthogonale V , pour laquelle on peut écrire $L = V\Lambda V^T$ avec Λ une matrice diagonale. On note Λ_k ses éléments diagonaux, qui sont réels et positifs, et les \hat{s}_k^\dagger sont les opérateurs création correspondants. L'équation 2.22 devient alors :

$$\hat{H}_{PDC} = i\hbar g \sum_k \Lambda_k \left(\hat{s}_k^{\dagger 2} - \hat{s}_k^2 \right) \quad (2.34)$$

Les modes propres associés aux \hat{s}_k sont appelés *supermodes*. L'influence de la forme spectrale de la pompe \mathcal{A}_b sur la forme de ces supermodes a été étudiée par F. Arzani dans sa thèse [Arzani, 2018a].

On reconnaît en cette équation (2.34) le hamiltonien de compression multi-mode, d'opérateur : $\bigotimes_k \hat{S}(2g\Lambda_k)$. Les supermodes ont des dynamiques indépendantes et on peut appliquer à chacun d'eux le modèle monomode du paragraphe précédent.

On a alors une assemblée de vides comprimés à des degrés de compression différents. Les modes pour lesquels $\Lambda_k = 0$ restent vides. La forme spectrale des supermodes qui accueillent le vide comprimé ainsi que la valeur de leur compression sont dictées par la forme de la distribution spectrale jointe L définie en (2.23). Elle-même dépend de l'amplitude spectrale de la pompe, ce qui signifie que mettre en forme la pompe change les supermodes et la répartition du facteur de compression. L'exploration théorique et expérimentale de ce moyen de générer des états quantiques sur-mesure fait l'objet du chapitre 4.

2.4.3 Description du SPOPO installé

Dans ce paragraphe, nous allons présenter le SPOPO qui a servi aux expériences présentées dans cette thèse. La cavité en anneau a été conçue par R. Medeiros de Araújo en 2012 [Medeiros, 2012]. Par la suite, des ajustements ont été faits et plusieurs miroirs ont été changés, mais aucun changement majeur de la configuration du dispositif n'a été effectué.

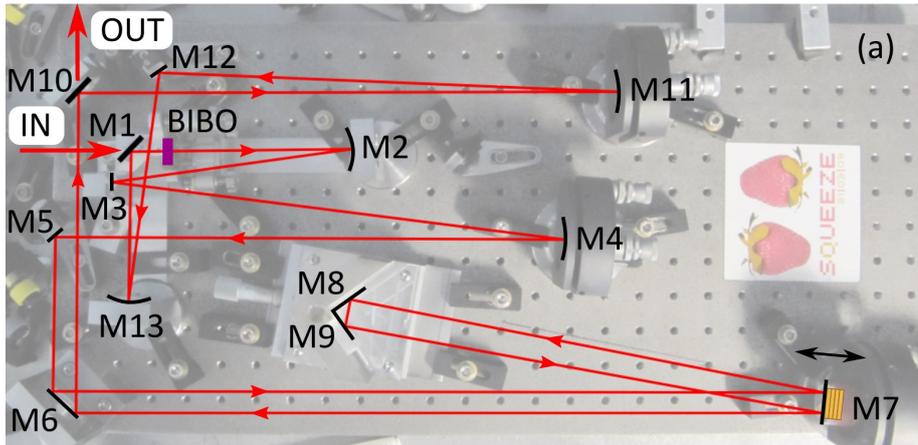


FIGURE 2.8 – La cavité SPOPO utilisée au laboratoire. Image reprise de [Medeiros, 2012]

Description de la cavité

La longueur de la cavité est réglée pour être synchrone avec le train d’impulsions issu du laser titane-saphir, qui a un taux de répétition de 76,4 MHz. Cela correspond à une cavité de longueur 3,93 m, repliée avec 15 réflexions sur 13 miroirs, présentée en figure 2.8.

Le miroir M1 est le coupleur d’entrée, de réflectivité $R = 99,85\%$ ⁴ et le miroir M10 est le coupleur de sortie. Plusieurs valeurs de transmission ont été utilisées successivement pour celui-ci : 20 %, 30 % et 50 %. Sauf précision contraire, c’est le 30 % qui est utilisé. Les autres miroirs sont traités pour avoir une réflectivité proche de 100 %. La finesse est de l’ordre de 17 et la bande passante de 3 MHz.

Les miroirs M2, M4, M11 et M13 sont sphériques : M2 et M13 focalisent le faisceau dans le cristal et M4 et M11 compensent la divergence du faisceau, comme on peut le voir sur la figure 2.9. Le rayon du faisceau dans la cavité est de l’ordre de $w_2 = 655\ \mu\text{m}$ et le rayon de gorge dans le cristal est de $w_0 = 38\ \mu\text{m}$. Toutefois, celui-ci est très dépendant de la position exacte de M13 et M2, qui sont écartés d’une distance différente de la somme de leurs longueurs focales pour éviter la configuration confocale, qui est instable.

Les miroirs M3 et M7 ont un revêtement qui introduit une phase quadratique négative, de $-50\ \text{fs}^2$ chacun. Leur rôle est de compenser partiellement la dispersion introduite à chaque tour de cavité : celle de l’air, de l’ordre de $80\ \text{fs}^2$ et celle du cristal, de l’ordre de $330\ \text{fs}^2$.

Le cristal est le lieu de l’amplification paramétrique présentée au paragraphe

4. Tous les miroirs ont un revêtement large-bande optimisé pour 795 nm, afin d’avoir les mêmes réflectivité et transmission pour toutes les longueurs d’onde manipulées.

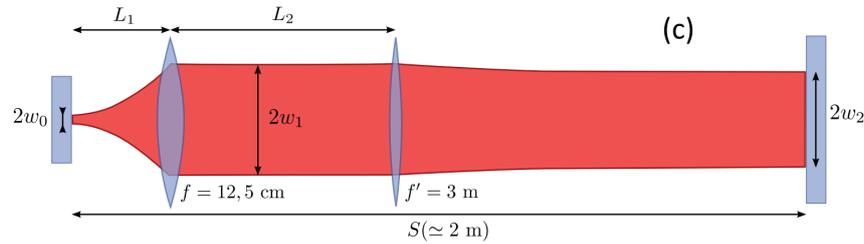


FIGURE 2.9 – Le profil du faisceau dans une demi-cavité. Image reprise de [Medeiros, 2012]

2.3.3. Nous avons utilisé deux types de cristaux : du bêta-borate de baryum (β -BaB₂O₄, abrégé BBO) et du triborate de bismuth (BiB₃O₆, abrégé BiBO). Les meilleurs résultats ont été obtenus avec un BiBO de longueur $l_c = 2$ mm.

La cavité est parcourue par plusieurs faisceaux : le faisceau de pompe, qui apporte l'énergie nécessaire à la production d'états comprimés dans le cristal, ainsi que deux faisceaux auxiliaires pour l'alignement de la cavité et son maintien en condition de résonance.

Le faisceau de pompe

Le *faisceau de pompe* est polarisé horizontalement et passe à travers les miroirs M1 et M4, qui sont dichroïques. Il est produit par doublage de fréquence dans un cristal de BiBO comme décrit en 2.3.2. En changeant l'intensité avant le cristal, on peut régler l'intensité de la pompe qu'on injecte dans le SPOPO, pour se rapprocher ou s'éloigner du seuil. Après la génération de seconde harmonique, le faisceau créé est légèrement elliptique. De plus, dans la configuration actuelle, il n'est pas complètement collimaté. En effet, il s'est avéré plus efficace pour l'amplification-déamplification de rapprocher la lentille de collimation de 1 cm du cristal de doublage, causant ainsi une divergence de 2,1 mrad horizontalement et 1,7 mrad verticalement.

Le cristal de doublage est un BiBO de 350 μm de long. L'efficacité de doublage est proportionnelle à l'intensité du faisceau doublé et elle peut monter jusqu'à 50 %. La puissance de pompe maximale est de 300 mW, mais nous travaillons habituellement avec 40 mW seulement.

Le choix de la longueur du cristal dépend de l'efficacité de doublage recherchée et de la dispersion spatiale tolérable. Plus le cristal est long, plus la génération de seconde harmonique est intense. Mais le BiBO est biréfringent, ce qui cause un décalage spatial entre les faisceaux (le « *walk-off* ») et il en résulte une dispersion spatiale qui est parfois gênante. R. Medeiros de Araújo [Medeiros, 2012] indique que 200 μm était un bon compromis entre efficacité et dispersion.

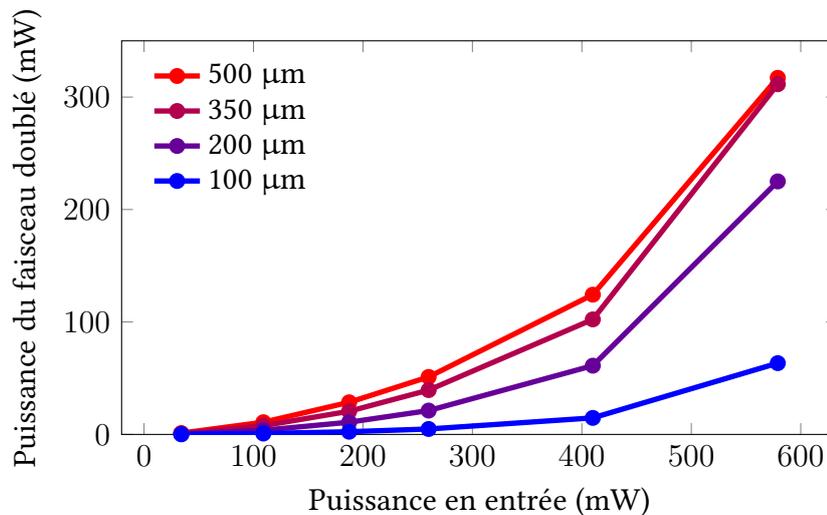


FIGURE 2.10 – Doublage de fréquence : plus le cristal est long, plus la puissance du faisceau doublé est grande. Entre le cristal de 350 μm et celui de 500 μm , ce surcroît de puissance est limité par le décalage spatial.

Nous avons amélioré la qualité du faisceau incident et nous avons pu utiliser un cristal plus long : 350 μm . Avec des cristaux plus longs, la dispersion spatiale engendrée nuit à l'interaction entre pompe et signal dans la cavité SPOPO et le gain en efficacité est limité par le décalage spatial, comme c'est le cas pour le cristal de 500 μm dans la figure 2.10.

Pour aligner la pompe, on se sert du facteur d'amplification-déamplification. On injecte le faisceau d'amorçage dans la cavité et on module la phase de la pompe avec une cale piézoélectrique placée sur son chemin. Quand la pompe et le signal sont en phase, celui-ci est amplifié, et quand ils sont en opposition de phase, il est atténué. Cela crée des oscillations, dont on maximise la visibilité pour trouver l'injection optimale de la pompe.

Les faisceaux d'alignement

Deux faisceaux auxiliaires traversent cette cavité : le faisceau d'amorçage, qui se propage dans le chemin optique où le vide comprimé multimode se crée ; et le faisceau de verrouillage, qui se propage sur ce même chemin mais dans le sens inverse.

Le *faisceau d'amorçage* sert à aligner la cavité : d'une intensité de quelques milliwatts, il est aisément observable et mesurable, ce qui permet de bien connaître le mode dans lequel est contenu le vide comprimé. Il a une longueur d'onde centrale de $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ et est polarisé verticalement. Pour l'injecter correctement,

on regarde sa transmission à travers la cavité. En variant continument la longueur de la cavité grâce à la cale piézoélectrique sur laquelle est collé M7, on voit des pics de transmission. On repère celui qui est le plus proche de la résonance totale, les autres sont les résonances partielles. Le tableau 2.2 montre l'intensité relative des pics de transmission.

pic	central	1 ^{er} voisin	2 ^e voisin	3 ^e voisin
intensité transmise	1.57 mW	1.52 mW	1.41 mW	1.28 mW

TABLE 2.2 – Mesure expérimentale de la transmission en fonction du pic. La cavité a été verrouillée en longueur : au premier voisin, la longueur de la cavité est une longueur d'onde plus courte qu'au pic central.

Lorsque la cavité est verrouillée, ce faisceau est en partie doublé par le cristal ($14 \mu\text{W}$, $397.50 \pm 1.3 \text{ nm}$), ce qui est utile pour aligner le faisceau de pompe. Pour produire du vide comprimé, on bloque complètement le faisceau d'amorçage.

Le *faisceau de verrouillage* parcourt la cavité en sens inverse et présente lui aussi des pics de transmission. Sa longueur d'onde centrale est aussi de 795 nm . Il est modulé par un modulateur électro-optique à $1,7 \text{ MHz}$ avant d'entrer dans la cavité. L'intensité transmise par la cavité est mesurée et démodulée afin de servir de signal à un système de verrouillage New Focus Servo Controller LB1005, qui repose sur un proportionnel intégral. Il est ainsi possible de garder la longueur de la cavité très proche de la longueur optimale [Drever, 1983].

2.4.4 États en sortie

Au-dessus du seuil

Pompé au-dessus du seuil, qui est à 135 mW ⁵, le SPOPO émet un rayonnement intense. La puissance émise dépend de la puissance de pompe, comme le montre la figure 2.11.

La théorie énonce que même si le gain dans la cavité augmente, seul le premier supermode est émis et qu'il empêche les autres de franchir le seuil [Fabre, 2000]. Expérimentalement, on constate toutefois que le spectre du rayonnement émis dépend du niveau de pompage. Proche du seuil, il a la forme du premier supermode.

5. avec le coupleur de sortie à 70 % de réflexivité

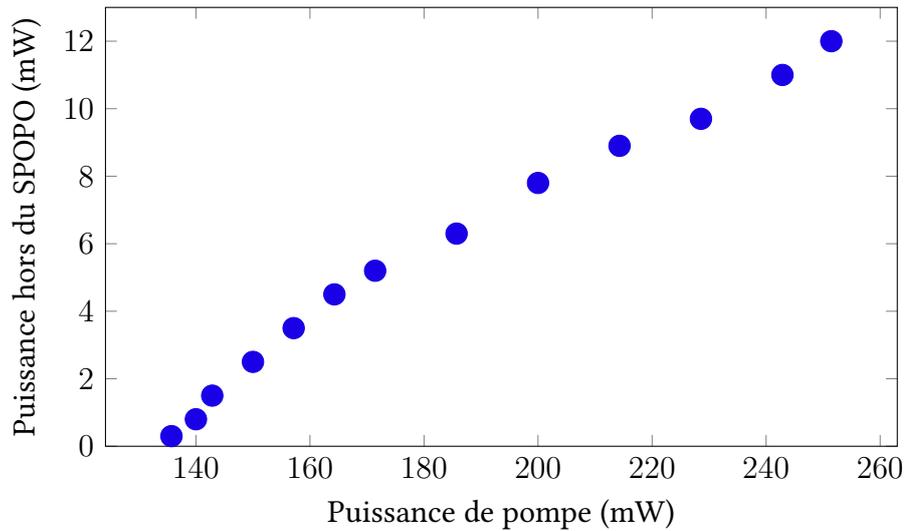


FIGURE 2.11 – La puissance émise par le SPOPO en fonction de la puissance de pompe.

Au-dessous du seuil

En-dessous du seuil, le SPOPO émet du vide comprimé, comme prévu en 2.4.2. Dans une certaine base spectrale, présentée en figure 2.12, l'état mesuré dans chaque mode est un vide comprimé. Le mode le plus comprimé affiche un degré de compression de 6 dB, comme on le voit sur la partie basse de la figure 2.12. Pour le mesurer, on fait appel à la détection homodyne et on mesure des matrices de covariance. Nous reviendrons en plus grand détail sur ces techniques dans le chapitre 4.

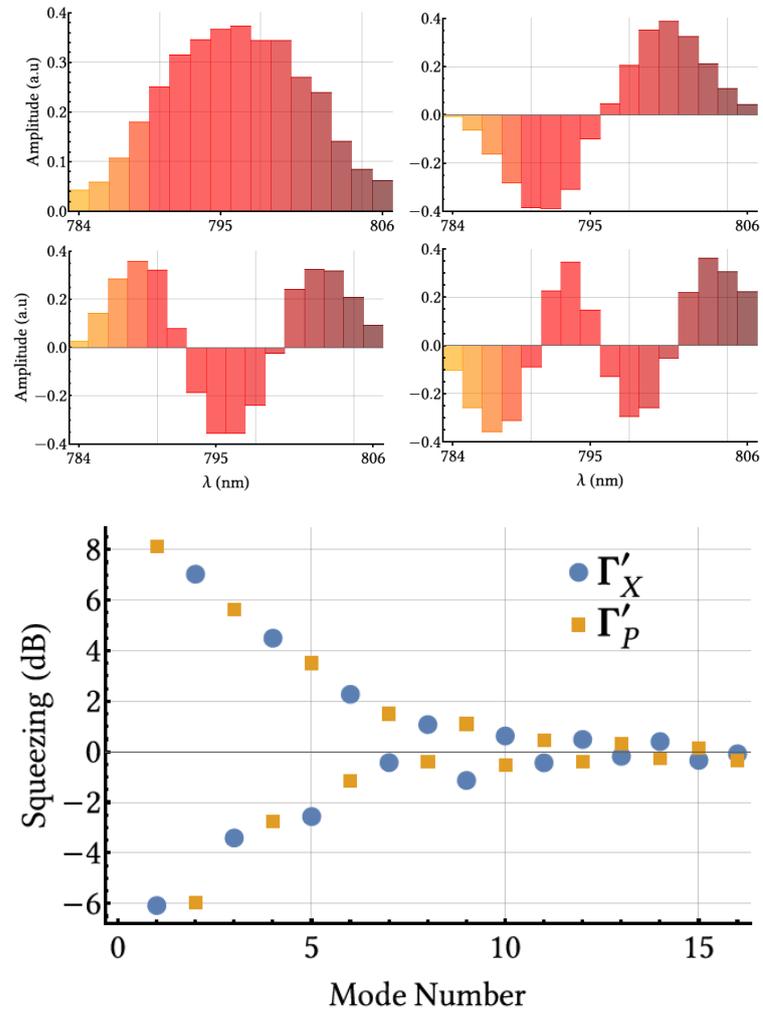


FIGURE 2.12 – *En haut* : les supermodes du SPOPO mesurés expérimentalement. *En bas* : répartition du degré de compression sur les supermodes. Repris de [Jacquard, 2017].

Chapitre 3

Intrication multimode

Plan du chapitre

3.1	Intrication	52
3.1.1	Intrication à deux modes	52
3.1.2	Intrication bipartite	53
3.1.3	Intrication multipartite	54
3.1.4	Retour sur les modes en sortie du SPOPO	55
3.2	États cluster	57
3.2.1	Définition des canevas quantiques	58
3.2.2	Stratégie expérimentale	62
3.2.3	Solution analytique au problème d'optimisation	66
3.2.4	Conclusion	70
3.3	Protocoles quantiques	71
3.3.1	Calcul quantique par mesures	71
3.3.2	Autres protocoles d'information quantique en variables continues	72

L'objectif de ce troisième chapitre est d'explorer le champ ouvert par la manipulation de ressources quantiques multimodes.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas simple où les ressources quantiques sont réparties sur deux modes uniquement. Cela permet de faire apparaître l'intrication quantique, qui est une corrélation entre ces deux modes, due à l'état quantique qui les peuple. La notion d'intrication s'étend à un nombre quelconque de modes et nous l'utilisons en particulier pour apporter un éclairage nouveau sur les états de sortie du SPOPO décrits au chapitre précédent.

Dans un second temps, nous présentons les états cluster, qui sont un ensemble de modes intriqués les uns avec les autres selon un schéma déterminé à l'avance. De tels états trouvent des applications en information quantique,

notamment dans les protocoles de calcul quantique fondé sur la mesure.

3.1 Intrication

3.1.1 Intrication à deux modes

Considérons un système à deux modes, notés 1 et 2. Il se peut que ces deux modes soient peuplés par des ressources indépendantes, $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$. L'état quantique est alors $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. L'état prend une forme factorisée sur ces deux modes et ils sont indépendants.¹

Pour certains états, comme $|\Psi^+\rangle = (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2)/\sqrt{2}$, on ne peut pas trouver de forme factorisée sur les modes 1 et 2. En conséquence, les modes ne sont pas indépendants. Si l'on regarde le premier mode uniquement, en écartant le deuxième, l'état quantique résultant n'est plus pur : $(\hat{\rho}^{|\Psi^+\rangle})_{\|1} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$. La perte de pureté indique que l'on n'a pas toute l'information concernant l'état. Avec des probabilités égales de trouver 0 ou 1, on a même le moins d'information possible pour un état à deux niveaux.

En variables continues, on retrouve aussi des états qui présentent ce comportement, par exemple : $|\Psi_{EPR}\rangle = \int |x\rangle_{x_1} |x\rangle_{x_2} dx$, où l'on a noté $|x\rangle_{x_i}$ l'état propre de la quadrature \hat{x}_i pour la valeur x , c'est-à-dire l'état infiniment comprimé sur la quadrature \hat{x} . On l'appelle état EPR [Einstein, 1935]. On peut également l'exprimer à l'aide des états comprimés sur p : $|\Psi_{EPR}\rangle = \int |p\rangle_{p_1} |-p\rangle_{p_2} dp$. Quand on fait des mesures de quadratures sur les deux modes de cet état, les résultats sont corrélés. Par exemple, supposons que l'on obtienne la valeur x_1 en mesurant la quadrature x du mode 1 et x_2 pour celle du mode 2. Alors sur cet état EPR, on constate à coup sûr :

$$x_1 - x_2 = 0 \quad (3.1)$$

Si on mesure les quadratures p , on trouve également des résultats corrélés :

$$p_1 + p_2 = 0 \quad (3.2)$$

Ces corrélations révèlent une intrication entre les deux modes 1 et 2. En revanche, en ne considérant qu'un seul des deux modes de l'état, puisque toutes les valeurs de p et de x sont possibles, on peut montrer qu'il n'est plus pur et que c'est un état thermique.

Ainsi, $|\Psi^+\rangle$ et $|\Psi_{EPR}\rangle$ sont deux exemples d'états intriqués à deux modes, en variables discrètes et continues. Remarquons que dans ces deux cas, on peut

1. On sous-entendra le signe \otimes dans la suite.

dénouer l'intrication en changeant de base. En effet, si l'on fait le changement de base $\hat{a}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_v^\dagger + \hat{a}_w^\dagger)$ et $\hat{a}_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_v^\dagger - \hat{a}_w^\dagger)$, alors dans cette nouvelle base on a $|\Psi^+\rangle = |1\rangle_v |0\rangle_w$. Autrement dit, $|\Psi^+\rangle$ est un état intriqué dans la base (1,2) mais est factorisable dans la base (v,w) . De même pour l'état EPR, qui sous le même changement de base devient l'état factorisé $|\psi_{EPR}\rangle = |0\rangle_{p_v} |0\rangle_{x_w}$.

L'intrication dépend donc de la base d'observation. Mais il existe des états qui, contrairement à $|\Psi^+\rangle$, sont intriqués dans toutes les bases.

3.1.2 Intrication bipartite

Les observations faites ci-dessus se généralisent en dimension quelconque, quand on considère deux sous-systèmes physiques A et B . Pour les états purs, nous avons présenté intuitivement l'intrication comme étant responsable de la perte de pureté quand on considère chacune des sous-parties séparément au lieu de les prendre ensemble. Dans le cas des états qui ne sont déjà pas purs à l'origine, ce critère de pureté ne s'applique pas et il faut donner une définition plus précise.

On appelle *états séparables* du système A - B ceux dont l'opérateur densité s'écrit :

$$\hat{\rho}^{AB} = \sum_k \lambda_k \hat{\rho}_k^A \hat{\rho}_k^B \quad (3.3)$$

On appelle *états intriqués* tous les états qui ne sont pas séparables. Pour prouver qu'un état est séparable, il suffit d'en exhiber une forme factorisée. En revanche, il n'est pas évident de prouver qu'un état est intriqué.

Un critère d'intrication souvent utilisé est la transposition partielle. Cela consiste à effectuer une transposition sur un seul des deux sous-systèmes et à regarder si l'état obtenu est toujours un état physique². Sur un état séparable, la transposition partielle \mathcal{T}_B du sous-système B agit de la manière suivante :

$$\mathcal{T}_B : \sum_k \lambda_k \hat{\rho}_k^A \hat{\rho}_k^B \longmapsto \sum_k \lambda_k \hat{\rho}_k^A (\hat{\rho}_k^B)^T \quad (3.4)$$

L'état $\hat{\rho}$ est dit physique lorsque sa matrice densité correspond à un état possible, c'est-à-dire quand elle est positive. Si $\hat{\rho}$ est positive, alors $\hat{\rho}^T$ est positive aussi. Ainsi, l'opérateur résultant de l'équation (3.4) $\sum_k \lambda_k \hat{\rho}_k^A (\hat{\rho}_k^B)^T$ est positif et il correspond à un état physique. La transposée partielle appliquée à un état séparable donne toujours un opérateur positif.

Par contraposée, si une matrice $\mathcal{T}_B(\hat{\rho}^{AB})$ n'est pas positive, alors l'état est intriqué. Ce critère est donc une condition suffisante, mais non nécessaire car

2. D'autres critères existent qui s'appliquent à la transposée partielle, par exemple son caractère logarithmiquement négatif [Vidal, 2002]

il existe des états intriqués dont la transposée partielle est positive. Quoiqu'il en soit, ce critère est couramment utilisé pour prouver l'intrication d'un état [Simon, 2000; Horodecki, 2009].

Les états gaussiens présentent une propriété liée à l'intrication : on peut toujours trouver une base dans laquelle ils ne sont pas intriqués. Plus précisément : pour tout état gaussien pur, il existe une unique base sur laquelle l'état est factorisé $\hat{\rho}_g^{AB} = \hat{\rho}_g^A \hat{\rho}_g^B$; pour tout état gaussien impur, il existe au moins une base dans laquelle l'état est séparable $\hat{\rho}_g^{AB} = \sum_k \lambda_k \hat{\rho}_{g,k}^A \hat{\rho}_{g,k}^B$.

3.1.3 Intrication multipartite

Lorsque le système se décompose en plus que deux sous-systèmes, l'intrication peut se faire de différentes façons. Avec quatre sous-systèmes A, B, C et D par exemple, on peut former des bi-partitions : $\{A\}\{BCD\}$, $\{AD\}\{BC\}$, etc, ou des tri-partitions $\{A\}\{B\}\{CD\}$, etc, ou encore une quadri-partition $\{A\}\{B\}\{C\}\{D\}$. Il peut y avoir de l'intrication au sein de chacune de ces partitions. Quand toutes les bi-partitions d'un système multipartite sont intriquées, on dit que l'état est complètement inséparable.

Un critère d'intrication multipartite est celui dit « à valeur propre de séparabilité », comme défini en référence [Sperling, 2013]. Ce témoin d'intrication repose sur un opérateur hermitien \hat{L} , que l'on choisit en fonction de l'état à étudier. Considérons une partition \mathbb{P} , par exemple $\mathbb{P} = \{A\}\{B\}\{CD\}$. Les états séparables sur cette partition s'écrivent $\hat{\rho} = \sum_k \lambda_k \hat{\rho}_k^A \hat{\rho}_k^B \hat{\rho}_k^{CD}$. La valeur moyenne de l'opérateur \hat{L} pour un état $\hat{\rho}$ vaut $\langle \hat{L} \rangle = \text{Tr}(\hat{L}\hat{\rho})$. On définit $g_{\mathbb{P}}^{\min}$, le minimum que prend $\langle \hat{L} \rangle$ sur l'ensemble des états séparables sur \mathbb{P} . On peut déterminer $g_{\mathbb{P}}^{\min}$ en résolvant un système d'équation aux valeurs propres.

Le témoin d'intrication est le suivant : si pour un état $\hat{\rho}$ on peut trouver un opérateur \hat{L} tel que :

$$\text{Tr}(\hat{L}\hat{\rho}) < g_{\mathbb{P}}^{\min} \quad (3.5)$$

alors l'état est intriqué relativement à la partition \mathbb{P} . On peut montrer que pour tout état intriqué, il existe un tel \hat{L} , ce qui fait de ce critère (3.5) une condition nécessaire et suffisante [Sperling, 2013].

Dans le cas des états gaussiens, qui sont complètement déterminés par leur matrice de covariance Γ (définie en 1.3.3), si l'on écrit l'opérateur de test $\hat{L} = \sum_{ij} (M_{xx}^{ji} \hat{x}_i \hat{x}_j + M_{px}^{ji} \hat{p}_i \hat{x}_j + M_{xp}^{ji} \hat{x}_i \hat{p}_j + M_{pp}^{ji} \hat{p}_i \hat{p}_j)$, sa valeur moyenne s'écrit simplement :

$$\langle \hat{L} \rangle = \text{Tr}(\hat{L}\hat{\rho}) = \text{Tr}(M\Gamma) \quad (3.6)$$

Cette relation permet d'utiliser le critère (3.5) à partir de la matrice de covariance mesurée expérimentalement. Il est alors intéressant de voir si le ré-

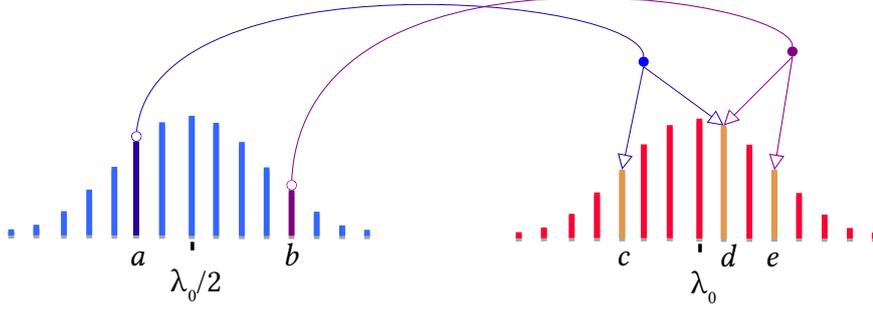


FIGURE 3.1 – La génération du peigne de fréquences à λ_0 par conversion paramétrique descendante crée de l'intrication. Les dents c et d sont intriquées car la conversion de la dent a crée des paires de photons jumeaux dans ces deux fréquences. De même, d et e sont intriquées par le biais de b .

sultat obtenu est significatif, en comparant la différence entre ces deux termes $\text{Tr}(\hat{L}\hat{\rho}) - g_{\mathbb{P}}^{\min}$ par rapport aux incertitudes d'origine expérimentale.

Grâce à la relation (3.6), on peut évaluer l'incertitude $\sigma(L)$ sur l'estimation de $\langle \hat{L} \rangle$, à partir des erreurs de mesure sur les covariances $\sigma(\Gamma^{ji})$: $\sigma(L)^2 = \sum_{i,j=1}^N (M^{ij} \sigma(\Gamma^{ji})^2)$. Connaissant ce résultat, on dispose maintenant d'une manière de quantifier le degré d'intrication :

$$\Sigma = \frac{\langle \hat{L} \rangle - g_{\mathbb{P}}^{\min}}{\sigma(L)} \quad (3.7)$$

3.1.4 Retour sur les modes en sortie du SPOPO

Pour illustrer notre propos, inspectons l'intrication présente dans les états de sortie du SPOPO évoqués en 2.4.4. Cette étude a fait l'objet d'un article commun à notre groupe et à l'Université de Rostock [Gerke, 2015].

Les états de sortie du SPOPO sont produits par conversion paramétrique descendante de la pompe. Les dents du peigne de pompe donnent naissance aux dents du peigne signal, comme illustré en figure 3.1. On s'attend à trouver de l'intrication entre les dents du peigne.

Le peigne de fréquences a été divisé en 4 ensembles, par bandes de fréquences d'égale énergie. Le profil des 4 bandes spectrales est représenté en figure 3.2. La matrice de covariance de chacune des deux quadratures x et p a été mesurée : $C_{xx}^{ji} = \langle \hat{x}_j \hat{x}_i \rangle$, $C_{pp}^{ji} = \langle \hat{p}_j \hat{p}_i \rangle$. La théorie et l'expérience nous apprennent que pour cette mesure, les corrélations xp sont nulles ou négligeables, la matrice de covariance complète est donc diagonale par blocs. On se limite aux opérateurs de test \hat{L} qui le sont aussi :

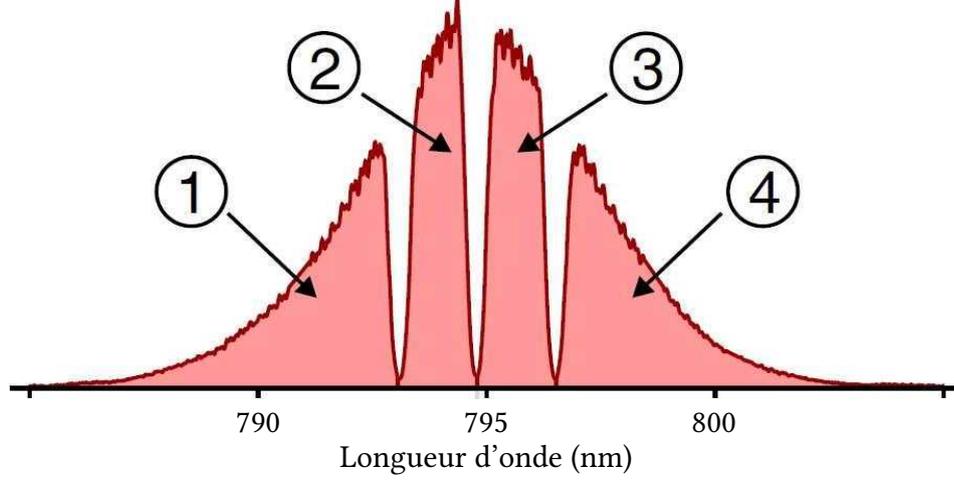


FIGURE 3.2 – Division du peigne de fréquences en 4 bandes spectrales d'énergies égales. On dénombre 15 partitions possibles de ces 4 sous-systèmes : 7 bipartitions $\mathbb{P}_2 = \{1,2,3\}\{4\}$, $\{1,4\}\{2,3\}$, etc; 6 tri-partitions $\mathbb{P}_3 = \{1,2\}\{3\}\{4\}$, $\{1,4\}\{2\}\{3\}$, etc; 1 quadri-partition $\mathbb{P}_4 = \{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$; et 1 partition triviale $\mathbb{P}_1 = \{1,2,3,4\}$. À part la partition triviale, toutes les partitions recèlent de l'intrication attestée par $\Sigma < 0$.

$$M = \begin{pmatrix} M_{xx} & 0 \\ 0 & M_{pp} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Pour cette forme, on peut donner la forme explicite de $g_{\mathbb{P}}^{\min}$ [Sperling, 2013] :

$$g_{\mathbb{P}}^{\min} = \sum_{\mathcal{I} \in \mathbb{P}} \text{Tr}_{\mathcal{I}} \left[M_{pp,\mathcal{I}}^{1/2} M_{xx,\mathcal{I}} M_{pp,\mathcal{I}}^{1/2} \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

On a noté $\text{Tr}_{\mathcal{I}}$ la trace restreinte au sous-système $\mathcal{I} \in \mathbb{P}$ et $M_{xx,\mathcal{I}}$ la matrice dont seules les lignes et colonnes relatives au sous-système \mathcal{I} ont été gardées. La matrice M peut être choisie librement; ici, elle a été choisie pour avoir Σ le plus négatif possible. Ce choix a été optimisé par un algorithme génétique.

Avec le spectre divisé en 4 sous-ensembles, on dénombre 14 partitions non-triviales possibles. Pour chacune de ces partitions, on calcule Σ à partir de la matrice de covariance Γ , en utilisant l'opérateur de test \hat{L} le plus favorable. À chaque fois, le résultat est négatif, compris entre $\Sigma = -4,66$ (pour la bi-partition $\mathbb{P}_2 = \{1,4\}\{2,3\}$) et $-24,61$ (pour la quadri-partition $\mathbb{P}_4 = \{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$).

Ces résultats sont significatifs : une valeur de $\Sigma \lesssim -4$ indique que la différence entre les deux termes de la relation (3.5) est supérieure à 4σ , ce qui correspond à un niveau de certitude de 99,99 %. L'état est bel et bien intriqué.

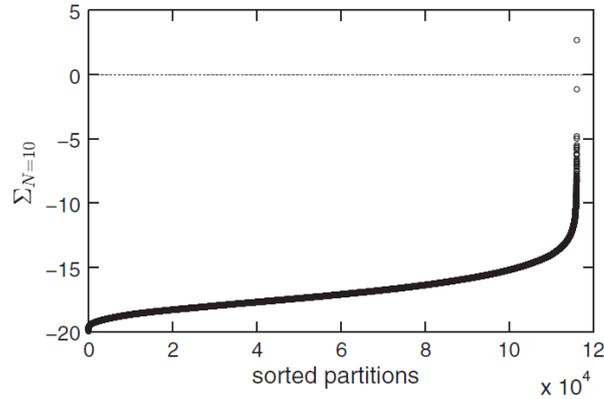


FIGURE 3.3 – La mesure d'intrication Σ pour chacune des 115 975 partitions possibles pour 10 bandes de fréquences, triées par Σ croissant. La partition à $\Sigma = +2,7$ est la partition triviale à un seul élément, autrement dit le spectre entier, pour lequel il est normal qu'il n'y ait pas d'intrication.

Il est naturel que la quadri-partition \mathbb{P}_4 soit plus intriquée que les autres, car la séparabilité complète $\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\{1\}} \hat{\rho}^{\{2\}} \hat{\rho}^{\{3\}} \hat{\rho}^{\{4\}}$ implique la séparabilité sur les autres partitions.

Le même exercice a été conduit avec une division en 10 sous-systèmes, toujours par bandes spectrales d'égale énergie. Les résultats sont présentés en figure 3.3. De nouveau, toutes les partitions présentent de l'intrication, la plus significative étant presque ³ $\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}\{6\}\{7\}\{8\}\{9\}\{10\}$ avec $\Sigma = -19,9$. Il est tout à fait notable que toutes les partitions soient intriquées : il s'agit d'une intrication multipartite complète (*full multipartite entanglement*).

3.2 États « cluster » : conditions de réalisation expérimentale

Les états « cluster », ou *canevas quantiques*, sont des états intriqués. Ils sont un ingrédient essentiel à l'information quantique en variables continues, notamment dans le cadre du calcul quantique par mesures (*measurement-based quantum computing*, ou MBQC) [Raussendorf, 2001].

Dans cette partie, nous présentons les canevas quantiques et les stratégies expérimentales pour les produire. Nous introduisons également une solution analytique à un problème d'optimisation qui était jusque-là résolu avec des al-

3. La 10-partition $\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}\{6\}\{7\}\{8\}\{9\}\{10\}$ n'est pas exactement la plus significative car la quadri-partition $\{1,2,3,4\}\{5\}\{6,9,10\}\{7,8\}$ atteint $\Sigma = -20,0$

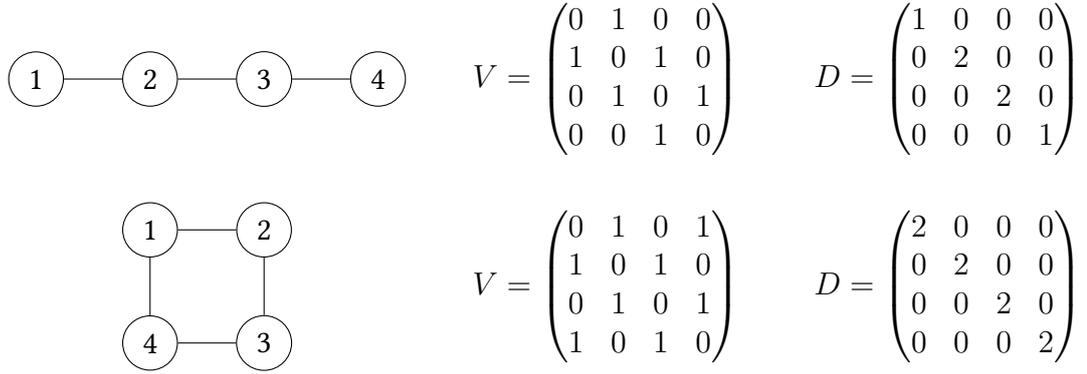


FIGURE 3.4 – Deux exemples de graphes avec les matrices correspondantes

algorithmes évolutionnistes complexes.

3.2.1 Définition des canevas quantiques

Graphes

En mathématiques, un graphe est constitué de deux ensembles : celui des nœuds et celui des arêtes. Les arêtes peuvent être orientées ou non.

La structure du graphe est représentée par une matrice d'adjacence V . Le coefficient de V à la ligne i et colonne j est égal à 1 si une arête relie le nœud i au nœud j ; sinon il est égal à 0. Pour un graphe non orienté, V est symétrique. À partir de V , on définit une autre matrice utile : la matrice des degrés D qui est une matrice diagonale dont les éléments sont égaux au nombre de voisins que chaque nœud possède.

Canevas quantiques

Un canevas quantique est un graphe dont les nœuds sont des modes et les arêtes des corrélations entre les modes. Un canevas quantique parfait se construit à partir d'un ensemble de modes contenant du vide infiniment comprimé sur p : $|0\rangle_{p_1} \otimes |0\rangle_{p_2} \otimes \cdots = |0\rangle_p^{\otimes n}$. Ces modes sont ensuite intriqués deux à deux selon les arêtes du graphe.

L'intrication se fait par une porte \hat{C}_Z . À deux modes, elle s'écrit⁴ $\hat{C}_Z =$

4. Cette écriture dépend de la convention de normalisation des quadratures en (1.4). Nous avons choisi $\sigma_0 = 1$, c'est-à-dire $[\hat{x}, \hat{p}] = 2i$. Si l'on avait choisi $\sigma_0 = 1/2$ comme dans [Arzani, 2018a], alors on aurait $\hat{C}_Z = e^{i\hat{x}_1\hat{x}_2}$. La jonction se fait en remarquant que dans les deux cas on a : $\hat{C}_Z = \exp\left[\frac{i}{2}(\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger)\right]$.

$e^{i\hat{x}_1\hat{x}_2/2}$. Les opérateurs de quadratures sont transformés de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \hat{C}_Z \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \hat{C}_Z^\dagger \quad (3.10)$$

avec $\vec{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ et $\vec{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2)^T$. On peut réduire ce calcul pour obtenir l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \\ \hat{x}'_2 \\ \hat{p}'_1 \\ \hat{p}'_2 \end{pmatrix}_{\text{après}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix}_{\text{avant}} \quad (3.11)$$

que l'on peut ré-écrire

$$\begin{pmatrix} \vec{x}' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -V_2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Pour construire le canevas quantique, l'ordre dans lequel on applique les portes C_Z correspondant aux arêtes du graphe n'est pas important puisque les C_Z commutent. On peut les écrire simultanément en une seule opération :

$$\hat{C}_Z^{[V]} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} \exp\left(\frac{i}{2} V_{jk} \hat{x}_j \hat{x}_k\right) \quad (3.13)$$

Le canevas quantique parfait est alors :

$$|G_V\rangle = \hat{C}_Z^{[V]} |0\rangle_p^{\otimes n} \quad (3.14)$$

Par l'équation (3.12), on connaît l'action de la porte C_Z à deux modes sur les opérateurs quadratures ; elle laisse invariant \hat{x} et déplace \hat{p} de l'opérateur \hat{x} : $\hat{C}_Z \hat{x}_1 \hat{C}_Z^\dagger = \hat{x}_1$ et $\hat{C}_Z \hat{p}_1 \hat{C}_Z^\dagger = \hat{p}_1 - \hat{x}_2$. Avec un plus grand nombre de modes, notés de nouveau $\vec{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots)^T$, on dispose d'une expression tout à fait analogue :

$$\hat{C}_Z^{[V]} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \hat{C}_Z^{[V]\dagger} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -V & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

En combinant (3.14) et (3.15) on trouve $(\vec{p}' - V\vec{x})|G_V\rangle = \vec{0}$. On appelle annulateurs (en anglais *nullifiers*) les opérateurs :

$$\hat{\delta}_i = \hat{p}_i - \sum_j V_{ij} \hat{x}_j \quad (3.16)$$

car chacun des $\hat{\delta}_i$ appliqué à $|G_V\rangle$ donne 0 :

$$\langle G_V | \hat{\delta}_i^2 | G_V \rangle = 0 \quad \forall i \quad (3.17)$$

Les annulateurs caractérisent le canevas quantique parfait : c'est le vecteur propre simultané des annulateurs.

Approximation des canevas quantiques

Le premier ingrédient d'un canevas quantique parfait est un état multimode infiniment comprimé en \hat{p} pour la valeur 0 : $|0\rangle_p^{\otimes n}$. En réalité, on ne dispose pas de tels états. On n'aura donc jamais de canevas quantique parfait, seulement des canevas quantiques approchés, qui n'annuleront pas les annulateurs.

On remplace chacun des $|0\rangle_p$ par un état comprimé $\hat{S}(\xi)|0\rangle$, où $\hat{S}(\xi)$ est l'opérateur de compression défini en (1.25). Cela revient à substituer à $|0\rangle_p^{\otimes n}$ l'état comprimé multimode $\bigotimes_{i=1}^n \hat{S}(\xi_i)|0\rangle$. Si on fait le choix que tous les états comprimés aient le même facteur de compression ξ_0 , cet opérateur devient $\hat{S}(\xi_0)^{\otimes n}$. L'état de canevas quantique s'écrit alors :

$$|\tilde{G}_V\rangle = \hat{C}_Z^{[V]} \hat{S}(\xi_0)^{\otimes n} |0\rangle \quad (3.18)$$

Quand la compression devient infinie, cet état tend vers le graphe parfait :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow \infty} |\tilde{G}_V\rangle = |G_V\rangle \quad (3.19)$$

Les canevas quantiques vérifient des versions assouplies des règles de caractérisation des canevas quantiques parfaits (3.14) et (3.17) : ils présentent de l'intrication entre les modes reliés par les arêtes du graphe et les variances de leurs annulateurs sont inférieures à celles du vide :

$$\langle \tilde{G}_V | \hat{\delta}_i^2 | \tilde{G}_V \rangle < \langle 0 | \hat{\delta}_i^2 | 0 \rangle \quad \forall i \quad (3.20)$$

Implémentation

Le deuxième ingrédient nécessaire à l'implémentation de canevas quantiques est la porte C_Z . La porte C_Z à deux modes, comme toutes les opérations qui conservent les relations de commutation (1.5), peut se factoriser comme l'application successive de trois opérations : changement de base, compression multimode et second changement de base : $\hat{C}_Z = U_2 \hat{S}(\xi) U_1$. On appelle cette forme la décomposition de Bloch-Messiah [Braunstein, 2005 ; Bloch, 1962]. Dans le cas de la porte C_Z , cela donne (en représentation symplectique) :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -V_2 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_2^{(C_Z)} \mathcal{K}^{(C_Z)} \mathcal{R}_1^{(C_Z)} \quad (3.21)$$

avec :

$$\mathcal{K}^{(C_Z)} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3.22)$$

$$\mathcal{R}_2^{(C_Z)} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -y \\ 0 & x & -y & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = 1/\sqrt{1 + \varphi^2} \\ y = -\varphi/\sqrt{1 + \varphi^2} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\mathcal{R}_1^{(C_Z)} = \begin{pmatrix} x' & 0 & 0 & -y' \\ 0 & x' & -y' & 0 \\ 0 & y' & x' & 0 \\ y' & 0 & 0 & x' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x' = \varphi/\sqrt{1 + \varphi^2} \\ y' = 1/\sqrt{1 + \varphi^2} \end{cases} \quad (3.24)$$

La matrice $\mathcal{R}_1^{(C_Z)}$ est la représentation symplectique du changement de base associé à la matrice unitaire $U_1 = \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, comme présentée en (1.40). De même pour $\mathcal{R}_2^{(C_Z)}$ avec x' et y' . Enfin, $\mathcal{K}^{(C_Z)}$ est une opération de compression $\hat{S}(\varphi)$ de facteur de compression φ^5 .

Pour appliquer la porte C_Z , il faut donc successivement : opérer un changement de base, puis comprimer chaque mode d'un facteur φ et enfin effectuer un second changement de base. Malheureusement, il est expérimentalement très délicat d'appliquer une compression à du vide comprimé.

Considérons le problème sous un autre angle, en effectuant cette fois la décomposition de Bloch-Messiah sur l'opérateur complet $\hat{C}_Z[V]\hat{S}(\xi)^{\otimes n}$ de l'équation (3.18). La représentation symplectique de $\hat{C}_Z[V]\hat{S}(\xi)^{\otimes n}$ est la matrice symplectique $\mathcal{Q}_{|\tilde{G}_V\rangle}$ telle que :

$$\hat{C}_Z^{[V]}\hat{S}(\xi)^{\otimes n} \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \hat{S}(\xi)^{\otimes n \dagger} \hat{C}_Z^{[V] \dagger} = \mathcal{Q}_{|\tilde{G}_V\rangle} \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Sa décomposition de Bloch-Messiah donne [Van Loock, 2007] :

$$\mathcal{Q}_{|\tilde{G}_V\rangle} = \mathcal{R}_2^{(V)}\mathcal{K}^{(V)}\mathcal{R}_1^{(V)} \quad (3.26)$$

5. Les amateurs de géométrie remarqueront que ce facteur est le nombre d'or et que les angles de rotation dans $\mathcal{R}_1^{(C_Z)}$ et $\mathcal{R}_2^{(C_Z)}$, à savoir $\arctan(\varphi)$ et $\operatorname{arccotan}(\varphi)$, sont les angles entre la diagonale et les côtés du rectangle aux proportions dorées.

De nouveau, $\mathcal{R}_1^{(V)}$ et $\mathcal{R}_2^{(V)}$ sont des changements de base et $\mathcal{K}^{(V)}$ est une combinaison de compressions $\bigotimes_{i=1}^n \hat{S}(\xi_i)$. *A priori*, les ξ_i ne sont pas égaux entre eux, et différents de ξ_0 .

Une remarque importante à faire est que $\mathcal{Q}_{|\tilde{G}_V\rangle}$ est appliqué au vide, ce qui fait que $\mathcal{R}_1^{(V)}$ n'a pas d'effet et que l'on peut prendre simplement :

$$\mathcal{Q}_{|\tilde{G}_V\rangle} = \mathcal{R}_2^{(V)} \mathcal{K}^{(V)} \quad (3.27)$$

En d'autres termes, on produit un canevas quantique avec de la compression multimode suivie d'un changement de base. Ce sont deux opérations réalisables au laboratoire !

Les canevas quantiques approchés de type (3.18) permettent d'effectuer les tâches auxquelles on destinait les canevas quantiques parfaits de type (3.14). En calcul quantique par mesures, qui sera présenté au paragraphe 3.3.1, l'imperfection du canevas quantique ajoute du bruit aux résultats du calcul, comme nous le verrons avec l'équation (3.54).

3.2.2 Stratégie pour la réalisation expérimentale des canevas quantiques

Grâce à la relation (3.27), on sait que la production expérimentale de canevas quantiques va consister en la production de vide comprimé suivie d'un changement de base. Il nous faut déterminer les paramètres de ces transformations : les niveaux de compression et la matrice de changement de base.

Expérimentalement, nous n'avons pas encore⁶ de contrôle sur les niveaux de compression que l'on peut utiliser pour réaliser la compression $\mathcal{K}^{(V)}$. En effet, ils dépendent des paramètres du SPOPO et de la puissance de pompe, qui sont donnés par les conditions expérimentales et qui conduisent à la transformation \mathcal{K}_{SPOPO} . En revanche, on peut réaliser tous les changements de base $\mathcal{R}_{2,exp}^{(V)}$ grâce à la grande versatilité du SLM (cf. section 2.2 : on peut faire des mesures sur n'importe quel mode). On va donc réaliser la transformation :

$$\mathcal{Q}_{exp} = \mathcal{R}_{2,exp}^{(V)} \mathcal{K}_{SPOPO} \quad (3.28)$$

À cause du manque de contrôle sur la répartition de la compression entre les modes, on ne pourra pas assurer que le canevas quantique sera équivalent à un graphe obtenu à partir de l'application de portes C_Z sur du vide uniformément comprimé $\hat{S}(\xi_0)^{\otimes n}|0\rangle$. Autrement dit, on ne peut pas garantir $\mathcal{Q}_{exp} = \mathcal{Q}_{|\tilde{G}_V\rangle}$.

6. Des efforts pour contrôler la répartition des niveaux de compression ont été faits, ils font l'objet du chapitre 4 de cette thèse.

L'essentiel est que l'état obtenu soit bien une approximation d'un canevas quantique parfait.

Cette approximation est faite selon le critère suivant : dans la limite d'une compression infinie, l'état doit tendre vers le canevas quantique parfait [Van Loock, 2007]. L'article de G. Ferrini [Ferrini, 2015] donne la marche à suivre pour déterminer ce changement de base adéquat. Dans les pages qui suivent, nous reprenons et approfondissons cette méthode.

Calcul de la matrice de changement de base

Le changement de base $\mathcal{R}_{2,exp}^{(V)}$ correspond à une matrice unitaire *via* l'équation (1.40). Nous appelons U_{sq}^c cette matrice de passage de la base des vides comprimés⁷ vers la base des nœuds du graphe. La base des supermodes comprimés est notée $\mathbf{u}_{sq,1}(\mathbf{r},t), \mathbf{u}_{sq,2}(\mathbf{r},t), \dots$ et on la désigne collectivement par $\vec{\mathbf{u}}_{sq}$. Les opérateurs création associés sont les $\hat{a}_{sq,1}^\dagger, \hat{a}_{sq,2}^\dagger, \dots$ notés de même $\vec{\hat{a}}^{sq}$. La base des nœuds du graphe, c'est-à-dire celle dans laquelle on retrouve une structure de canevas quantique entre les modes attestée par (3.20) ainsi que de l'intrication entre modes voisins, est notée $(\vec{\mathbf{u}}_c, \vec{\hat{a}}_c)$.

Le passage d'une base à l'autre se fait par la matrice unitaire U_{sq}^c :

$$\boxed{\vec{\hat{a}}_c = U_{sq}^c \cdot \vec{\hat{a}}_{sq} \quad \text{et} \quad \vec{\hat{a}}_c^\dagger = (U_{sq}^c)^\dagger \cdot \vec{\hat{a}}_{sq}^\dagger \quad \text{avec} \quad \vec{\mathbf{u}}_c = (U_{sq}^c)^\dagger \cdot \vec{\mathbf{u}}_{sq}} \quad (3.29)$$

Pour les quadratures, le changement de base se fait avec la forme symplectique de U_{sq}^c détaillée à l'équation (1.40). En notant $X = \text{Re}(U_{sq}^c)$ et $Y = \text{Im}(U_{sq}^c)$, on a :

$$\begin{pmatrix} \vec{\hat{x}}_c \\ \vec{\hat{p}}_c \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}}_{sq} \\ \vec{\hat{p}}_{sq} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

La première condition à remplir pour que cette matrice corresponde à un changement de base vers un canevas quantique est la suivante : si on augmentait infiniment la compression des états en entrée, il faudrait que les annulateurs tendent vers 0. Ceux-ci s'écrivent en fonction de la matrice d'adjacence V , suivant la définition donnée en (3.16) :

$$\hat{\delta}_i = \hat{p}_i^c - \sum_{l=1}^N V_{il} \hat{x}_l^c \quad \text{c'est-à-dire} \quad \vec{\hat{\delta}} = \begin{pmatrix} -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}}_c \\ \vec{\hat{p}}_c \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

7. La notation des indices est la suivante : c se réfère aux états graphes (*clusters* en anglais) et sq aux vides comprimés (*squeezed states*). Nous gardons ces notations pour avoir les mêmes notations que dans les autres documents du groupe.

En combinant les équations (3.30) et (3.31) on obtient $\vec{\delta} = (Y - VX)\vec{x}_{sq} + (X + VY)\vec{p}_{sq}$. Avec une compression infinie, la variance de \vec{p}_{sq} tend vers 0, mais celle de \vec{x}_{sq} diverge. Pour que la variance de $\vec{\delta}$ tende vers 0, il faut donc nécessairement que :

$$Y - VX = 0 \quad (3.32)$$

Ensuite, comme S est symplectique (car U_{sc}^c est unitaire), il faut que soient remplies les conditions :

$$XX^T + YY^T = \mathbb{1} \quad (3.33a)$$

$$XY^T - YX^T = 0 \quad (3.33b)$$

Les solutions aux équations (3.32) et (3.33) sont de la forme :

$$\begin{cases} X = (\mathbb{1} + V^2)^{-1/2} \mathcal{O} \\ Y = V(\mathbb{1} + V^2)^{-1/2} \mathcal{O} \\ U_{sq}^c = (\mathbb{1} + iV)(\mathbb{1} + V^2)^{-1/2} \mathcal{O} \end{cases} \quad (3.34)$$

Ici, \mathcal{O} désigne une matrice orthogonale quelconque. L'ensemble de nos solutions est paramétré par les matrices orthogonales, ce qui nous laisse un degré de liberté à déterminer. Ce degré de liberté correspond à la liberté que nous avons de répartir les degrés de compression de chaque mode entre les annulateurs. Si les vides comprimés en entrée sont tous également comprimés, alors la matrice \mathcal{O} n'a aucune influence.

Remarquons tout de même que la compression ne tendra en fait jamais vers l'infini. La condition (3.32) est donc purement formelle. On aurait pu choisir plutôt de minimiser directement $\vec{\delta}$ en incluant les termes en \vec{x}_{sq} . C'est une approche appelée « *direct MBQC* » [Ferrini, 2016], que nous ne poursuivrons pas plus avant.

Détermination de \mathcal{O} à partir de la variance des annulateurs

Il reste à déterminer la matrice \mathcal{O} , laissée libre par les équations (3.34). Les variances des annulateurs nous serviront de critère de décision.

Ces variances dépendent des vides comprimés disponibles. Expérimentalement, il s'agit de l'état en sortie du SPOPO. Nous disposons de sa matrice de covariance, que l'on supposera exprimée dans la base des supermodes comprimés. Nous n'avons accès qu'à deux sous-parties de la matrice de covariance complète : la matrice de covariance des \hat{x} notée Γ_X et celle des \hat{p} notée Γ_P . On

considère que les états sont comprimés sur la quadrature \hat{p} . La matrice de covariance des \hat{p} , qui est appelée K_{sq} , est donc diagonale⁸ avec des valeurs propres inférieures à 1 :

$$K_{sq} = \begin{pmatrix} e^{-2\xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\xi_2} & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

La matrice de covariance des Γ_X est quelconque. Si l'état est pur, alors elle est diagonale elle aussi : $\Gamma_X^{pur} = K_{sq}^{-1}$. Mais en toute généralité, la diagonalisation de la matrice de covariance Γ_P n'assure pas que la matrice Γ_X soit aussi diagonale dans la même base. Comme les quadratures \hat{x} sont anti-comprimées, Γ_X contient des termes qui peuvent être arbitrairement grands.

Ensuite, la théorie énonce que les corrélations croisées entre \hat{x} et \hat{p} sont nulles et cela est vérifié expérimentalement [Medeiros, 2014]. La matrice de covariance complète s'écrit donc :

$$\Gamma^{sq} = \begin{pmatrix} \Gamma_X & 0 \\ 0 & K_{sq} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

La matrice de covariance dans la base des nœuds du graphe est $\Gamma^c = S\Gamma^{sq}S^T$. Quant aux annulateurs, ils n'ont pas de base orthonormée associée, on ne peut donc pas leur attribuer une matrice de covariance (qui n'a été définie en 1.3.3 que pour les base orthonormées). En revanche, on peut tout à fait calculer leurs variances et leurs covariances.

Pour ce faire, on ré-écrit les annulateurs en combinant (3.31), (3.30) et (3.34) :

$$\vec{\delta} = (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O} \cdot \vec{p}^{sq} \quad (3.37)$$

ce qui nous permet de trouver la matrice K_{null} qui regroupe leurs variances et leurs covariances :

$$K_{null} = (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O} K_{sq} \mathcal{O}^T (I + V^2)^{1/2} \quad (3.38)$$

La variance $\Delta^2 \delta_i$ du i^e annulateur est donnée par le i^e élément diagonal de K_{null} :

$$\Delta^2 \delta_i = \vec{e}_i^T K_{null} \vec{e}_i \quad (3.39)$$

où l'on a noté \vec{e}_i le i^e vecteur canonique $\vec{e}_i = (0, \dots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, 0, \dots)^T$.

8. Une matrice expérimentale n'aura jamais ses coefficients extra-diagonaux tous nuls; néanmoins elle sera toujours diagonalisable. Par conséquent, il suffit de la diagonaliser et d'intégrer la matrice diagonalisante à \mathcal{O} dans l'équation (3.38) pour se ramener au cas diagonal.

Pour attester que l'on a bien un canevas quantique selon le critère (3.20), on compare la variance de l'annulateur avec la valeur obtenue pour le vide. Pour le vide, on pose $K_{sq} = \mathbb{1}$ et on obtient

$$\Delta^2 \delta_i^0 = [(I + V^2)]_{ii} = [(I + D)]_{ii} \quad (3.40)$$

où D est la matrice des degrés définie plus haut, qui contient le nombre de voisins de chaque nœud. C'est la comparaison entre $\Delta^2 \delta_i$ et $\Delta^2 \delta_i^0$ qui va nous guider pour l'optimisation de \mathcal{O} .

Cadre de l'optimisation

Pour savoir comment optimiser, il faut se donner une fonction d'évaluation à maximiser ou minimiser. Celle-ci dépend de l'application que l'on cherche à donner à nos états graphes.

Pour le cas qui nous occupe, c'est-à-dire la production de canevas quantiques, la figure de mérite est la quantité de bruit sur les annulateurs dû au caractère fini de la compression. On veut qu'il soit inférieur au bruit du vide pour pouvoir affirmer que l'on a bien produit des états graphes.

Notre fonction d'évaluation peut donc être :

$$f_1(\mathcal{O}) = \sum_i \frac{\Delta^2 \delta_i}{\Delta^2 \delta_i^0} \quad (3.41)$$

C'est cette fonction qui est utilisée pour nos expériences ainsi que dans les articles antérieurs du groupe [Ferrini, 2015]. L'optimisation est alors faite par un algorithme évolutionnaire, technique bien connue dans le domaine du contrôle cohérent [Roslund, 2009; Weise, 2011].

Au cours de cette thèse, il a été possible de trouver une solution analytique à ce problème d'optimisation. Cette méthode réduit considérablement le temps de calcul nécessaire à la détermination de la base des nœuds.

Cette technique est très générale. Elle s'applique à toute fonction d'adaptation f des variances des annulateurs, qui dépendent en dernier lieu de la matrice orthogonale \mathcal{O} :

$$F(\mathcal{O}) = f(\Delta^2 \delta_1(\mathcal{O}), \Delta^2 \delta_2(\mathcal{O}), \dots) = f(\Delta^2 \vec{\delta}_{\mathcal{O}}) \quad (3.42)$$

Il s'agit de minimiser cette fonction F . Pour cela, on va annuler ses dérivées.

3.2.3 Solution analytique au problème d'optimisation

Tout d'abord, fixons quelques notations sur les matrices : la base canonique des matrices anti-symétriques est $H_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j^T - \vec{e}_j \vec{e}_i^T$ (avec $i < j$) et celles des

matrices symétriques est $S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j^T + \vec{e}_j \vec{e}_i^T$ (avec $i \leq j$). On note \mathbb{H} l'ensemble des matrices antisymétriques réelles et \mathbb{O} l'ensemble des matrices orthogonales.

Il y a une bijection entre ces deux ensembles *via* la relation $\mathcal{O} = e^H$: pour tout \mathcal{O} orthogonale, il existe H antisymétrique qui vérifie cette relation et réciproquement. On définit la dérivée directionnelle de la fonction F au point $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$ dans la direction $H \in \mathbb{H}$ par :

$$\nabla_H F(\mathcal{O}) = \left. \frac{d}{d\theta} F(\mathcal{O} e^{\theta H}) \right|_{\theta=0} \quad (3.43)$$

Pour être rigoureux, une définition plus précise de cette équation est nécessaire. Permettons-nous une courte digression mathématique : l'ensemble des matrices orthogonales \mathbb{O} est une sous-variété lisse de l'ensemble de toutes les matrices [Shalit, 2014]. Autour de chaque point $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$, il existe un espace tangent noté $T_{\mathcal{O}}\mathbb{O}$ et relié à l'ensemble des matrices antisymétriques \mathbb{H} par $T_{\mathcal{O}}\mathbb{O} = \mathcal{O}\mathbb{H}$.

Pour chaque point $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$ et chaque « direction » $\mathcal{O}H \in T_{\mathcal{O}}\mathbb{O}$, il y a une unique géodésique qui passe par \mathcal{O} dans la direction H : $\gamma(\theta) = \mathcal{O}e^{\theta H}$. La dérivée directionnelle d'une fonction f dans la direction d'un vecteur $\mathcal{O}H \in T_{\mathcal{O}}\mathbb{O}$ est définie comme sa dérivée le long de la géodésique γ :

$$\nabla_H f(\mathcal{O}) = \left. \frac{d}{d\theta} f(\gamma(\theta)) \right|_{\theta=0} = \left. \frac{d}{d\theta} f(\mathcal{O}e^{\theta H}) \right|_{\theta=0}$$

Le fait de prendre la géodésique avec une multiplication à droite par $e^{\theta H}$ est un choix arbitraire. Mais qui ne nuit pas au raisonnement qui va suivre. En effet, il suffit de remarquer que $T_{\mathcal{O}}\mathbb{O} = \mathcal{O}\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathcal{O}$, ce qu'on obtient par la bijection $H \rightarrow \mathcal{O}H\mathcal{O}^T$. On aurait pu faire le choix de paramétriser les géodésiques par la gauche : $\lambda(\theta) = e^{\theta H}\mathcal{O}$ et définir la dérivée directionnelle selon ces géodésiques :

$$\bar{\nabla}_H f(\mathcal{O}) = \left. \frac{d}{d\theta} f(\lambda(\theta)) \right|_{\theta=0} = \left. \frac{d}{d\theta} f(e^{\theta H}\mathcal{O}) \right|_{\theta=0}$$

Dans tous les cas, si la matrice \mathcal{O} minimise la fonction f , on a à la fois $\bar{\nabla}_H f(\mathcal{O}) = \nabla_H f(\mathcal{O}) = 0$. C'est vrai en particulier pour toutes les matrices antisymétriques de la base canonique :

$$\forall j < l, \quad \bar{\nabla}_{H_{jl}} f(\mathcal{O}) = \nabla_{H_{jl}} f(\mathcal{O}) = 0$$

Dérivée directionnelle d'un annulateur

Tout d'abord, il est utile pour la suite de remarquer que pour une matrice quelconque M , on a la relation :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (e^{\theta H_{ij}} M e^{-\theta H_{ij}})_{\theta=0} = [H_{ij}, M] \quad (3.44)$$

Calculons la dérivée directionnelle d'un annulateur $\Delta^2 \delta_i$ à partir des équations (3.38), (3.39) et (3.44) :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{H_{jl}} \Delta^2 \delta_i(\mathcal{O}) &= \nabla_{H_{jl}} \left[\vec{e}_i^T (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O} K_{sq} \mathcal{O}^T (I + V^2)^{1/2} \vec{e}_i \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\vec{e}_i^T (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O} e^{\theta H_{ij}} K_{sq} (\mathcal{O} e^{\theta H_{ij}})^T (I + V^2)^{1/2} \vec{e}_i \right] \\
 &= \vec{e}_i^T (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O} [H_{jl}, K_{sq}] \mathcal{O}^T (I + V^2)^{1/2} \vec{e}_i \quad (\text{d'après (3.44)}) \\
 &= \vec{e}_i^T (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O} (e^{-2r_j} - e^{-2r_l}) S_{jl} \mathcal{O}^T (I + V^2)^{1/2} \vec{e}_i \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

On peut le ré-écrire sous une forme qui nous sera très utile par la suite :

$$\boxed{\nabla_{H_{jl}} \Delta^2 \delta_i(\mathcal{O}) = \Gamma_{jl} \text{Tr} [S_{jl} \cdot \mathcal{O}^T (I + V^2)^{1/2} \vec{e}_i \vec{e}_i^T (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O}] } \quad (3.46)$$

avec $\Gamma_{jl} = (e^{-2r_j} - e^{-2r_l})$. Si le degré de compression n'est pas uniforme (ce qui est le cas expérimentalement) et si on a ordonné les r_j , alors $\Gamma_{jl} > 0$ pour $j < l$.

Dérivée directionnelle de la fonction f

Nous pouvons maintenant calculer la dérivée directionnelle de la fonction composée $F(\mathcal{O}) = f(\Delta^2 \vec{\delta}_{\mathcal{O}})$. La fonction f est une fonction à plusieurs variables dont les dérivées partielles, notées $\partial_i f = \partial f / \partial \Delta^2 \delta_i$, vont intervenir.

$$\nabla_{H_{jl}} F(\mathcal{O}) = \sum_i \partial_i f(\Delta^2 \vec{\delta}_{\mathcal{O}}) \cdot \nabla_{H_{jl}} \Delta^2 \delta_i(\mathcal{O}) \quad (3.47a)$$

$$= \sum_i \partial_i f(\Delta^2 \vec{\delta}_{\mathcal{O}}) \cdot \Gamma_{jl} \text{Tr} [S_{jl} \cdot \mathcal{O}^T (I + V^2)^{1/2} \vec{e}_i \vec{e}_i^T (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O}] \quad (3.47b)$$

$$= \Gamma_{jl} \text{Tr} \left[\sum_i \partial_i f(\Delta^2 \vec{\delta}_{\mathcal{O}}) \cdot \mathcal{O}^T (I + V^2)^{1/2} \vec{e}_i \vec{e}_i^T (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O} S_{jl} \right] \quad (3.47c)$$

$$= \Gamma_{jl} \text{Tr} \left[\mathcal{O}^T (1 + V^2)^{1/2} \text{diag} [\partial_i f_{\mathcal{O}}(\Delta^2 \vec{\delta}_{\mathcal{O}})] (1 + V^2)^{1/2} \mathcal{O} S_{jl} \right] \quad (3.47d)$$

$$= \Gamma_{jl} \text{Tr} [\mathcal{O}^T \mathcal{M} \mathcal{O} S_{jl}] \quad (3.47e)$$

On a défini :

$$\boxed{\mathcal{M} = (1 + V^2)^{1/2} \cdot \text{diag}(\partial_i f) \cdot (1 + V^2)^{1/2}} \quad (3.48)$$

où $\text{diag}(\partial_i f)$ désigne la matrice diagonale qui a pour éléments diagonaux les $\partial_i f(\Delta^2 \vec{\delta}_\mathcal{O})$. La matrice \mathcal{M} étant symétrique par construction, elle est diagonalisable.

Une condition nécessaire pour minimiser f est d'annuler toutes ses dérivées directionnelles $\nabla_{H_{jl}} F(\mathcal{O})$. Comme pour toute paire $j < l$ on a $\Gamma_{jl} > 0$, l'équation (3.47e) rend cela équivalent à annuler tous les termes non-diagonaux de $\mathcal{O}^T \mathcal{M} \mathcal{O}$. En d'autres termes, il faut trouver \mathcal{O} tel que $\mathcal{O}^T \mathcal{M} \mathcal{O}$ soit diagonal.

Manipulation de \mathcal{M}

Cette matrice \mathcal{M} est donc au cœur du problème. En fait, dans le cas où la fonction à minimiser f dépend linéairement des annulateurs, on peut même la ré-exprimer à l'aide de la matrice \mathcal{M} de la manière suivante (en remontant les équations (3.47e) à (3.47a) et à une constante additive près) :

$$F(\mathcal{O}) = \text{Tr} [\mathcal{O}^T \mathcal{M} \mathcal{O} \cdot K_{sq}] \quad (3.49)$$

Supposons qu'on ait trouvé une matrice \mathcal{O} telle que $\mathcal{O}^T \mathcal{M} \mathcal{O}$ soit diagonal, d'éléments diagonaux (m_1, m_2, \dots) . La trace dans (3.49) se simplifie en : $F(\mathcal{O}) = \sum_i e^{-2r_i} m_i$.

C'est maintenant beaucoup plus simple : si par une permutation on ordonne $m_1 > m_2 > \dots$, alors on atteint le maximum de la fonction, car on a aussi $e^{-2r_1} > e^{-2r_2} > \dots$. Si au contraire on les ordonne par ordre décroissant $m_1 < m_2 < \dots$, alors on atteint le minimum de F .

La matrice optimale \mathcal{O} est donc celle qui diagonalise \mathcal{M} avec les valeurs propres décroissantes.

Diagonalisation de \mathcal{M}

\mathcal{M} est symétrique réelle, donc diagonalisable. On aimerait donc choisir \mathcal{O} qui réalise cette diagonalisation. Mais *a priori*, \mathcal{M} dépend de \mathcal{O} et de K_{sq} . Il y a un cas particulier où cela n'est pas le cas : c'est lorsque la fonction d'évaluation f est linéaire. Dans ce cas, il suffit de diagonaliser \mathcal{M} pour trouver \mathcal{O} .

– En particulier, avec la fonction f_1 définie en (3.41), la matrice est $\mathcal{M}_1 = (1 + V^2)^{1/2} \text{diag}(1/\Delta^2 \delta_i^0) (1 + V^2)^{1/2}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{M}_1 = (1 + V^2)^{1/2} (1 + D)^{-1} (1 + V^2)^{1/2} \quad (3.50)$$

avec D la matrice des degrés définie en 3.2.1. On diagonalise aisément cette matrice et c'est ainsi que sont trouvées les bases modales qui seront utilisées dans la partie expérimentale.

- Avec la fonction $f_2(\Delta^2 \vec{\delta}_{\mathcal{O}}) = \sum_i \Delta^2 \delta_i$, la somme des variances des annulateurs, on trouve une matrice $\mathcal{M}_2 = (1 + V^2)$. Elle ne dépend pas de \mathcal{O} et donne des résultats différents de \mathcal{M}_1 .
- Si l'on veut obtenir des annulateurs de variances égales ou proches, la fonction d'évaluation est la variance des degrés de compression : $f(\mathcal{O}) = \frac{1}{N} \sum_i (\Delta^2 \delta_i)^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_j \Delta^2 \delta_j \right)^2$. On a alors : $\mathcal{M}_3 = \frac{1}{N} (1 + V^2)^{1/2} \cdot \text{diag}[(\Delta^2 \delta_i(\mathcal{O}) - \frac{2}{N} \sum_j \Delta^2 \delta_j(\mathcal{O}))_i] \cdot (1 + V^2)^{1/2}$. Cette fois-ci, \mathcal{M} dépend de \mathcal{O} ce qui rend le calcul plus délicat. De nouveau, il faut trouver \mathcal{O} tel que $\mathcal{O}^T \mathcal{M}_3 \mathcal{O}$ soit diagonal.
- Si besoin, on peut également considérer des fonctions d'évaluation qui dépendent des covariances des annulateurs $\langle \hat{\delta}_i \hat{\delta}_k \rangle = (\vec{e}_i^T K_{null} \vec{e}_k + \vec{e}_k^T K_{null} \vec{e}_i) / 2$. Il suffit alors d'adapter les équations (3.46) et suivantes, ce qui donne une nouvelle définition pour la matrice \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = (1 + V^2)^{1/2} \cdot \mathcal{W} \cdot (1 + V^2)^{1/2}$$

avec $\mathcal{W}_{ik} = \partial f / \partial \langle \hat{\delta}_i \hat{\delta}_k \rangle$.

3.2.4 Conclusion

Nous avons construit un algorithme pour déterminer la matrice \mathcal{O} qui répartit le bruit des vides comprimés en entrée de manière optimale. La définition de cette manière optimale est assez large : la fonction d'évaluation peut être toute fonction linéaire des variances des annulateurs et de leurs covariances.

Dans le cas de la production de canevas quantiques, qui nous a intéressé jusqu'ici, la somme des variances des annulateurs est une fonction d'évaluation toute indiquée et cela nous sera utile au chapitre 5.

Remarque sur les nœuds du canevas quantique

Quand on considère un nœud du graphe pris séparément, on s'attend à trouver un état impur avec une variance supérieure au bruit de grenaille, comme c'était le cas pour l'état EPR décrit en 3.1.1.

La matrice de covariance des quadratures pour les nœuds du graphe est $\mathcal{K}_S = S \mathcal{K} S^T$. Avec \mathcal{K} donné en (3.36) et S donné par (3.30) et (3.34), on obtient :

$$\mathcal{K}_S = \begin{pmatrix} X \Gamma_X X^T + Y \Gamma_P Y^T & X \Gamma_X Y^T - Y \Gamma_P X^T \\ Y \Gamma_X X^T - X \Gamma_P Y^T & X \Gamma_P X^T + Y \Gamma_X Y^T \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

On observe que toutes les sous-matrices de \mathcal{K}_S ont une composante en Γ_X qui ne s'annule pas. Pour un degré de compression suffisamment haut ($\Gamma_X \gg \Gamma_P$), on a même

$$\mathcal{K}_S \approx \begin{pmatrix} X\Gamma_X X^T & X\Gamma_X Y^T \\ Y\Gamma_X X^T & Y\Gamma_X Y^T \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

On observe comme attendu que les modes des nœuds du graphe sont impurs et qu'ils ont beaucoup d'excès de bruit. Les corrélations entre modes dépendent de \mathcal{O} . Elles n'ont pas de raison d'être nulles, même entre des modes qui ne sont pas liés par une arête du graphe.

3.3 Protocoles quantiques

Une des motivations à étudier l'intrication et les canevas quantiques est leur utilité dans les protocoles quantiques en variables continues.

3.3.1 Calcul quantique par mesures

On appelle calcul quantique toute transformation unitaire agissant sur un état quantique. Comme il existe des transformations quantiques qui n'ont pas d'équivalent classique, les physiciens espèrent mettre en évidence des opérations qui rempliraient certaines missions plus efficacement que les opérations classiques. Une machine dotée de ces opérations, qu'on appelle ordinateur quantique, jouirait donc d'un *avantage quantique* sur les machines d'aujourd'hui.

Des algorithmes profitant de cet avantage quantique ont été trouvés, notamment celui de Grover [Grover, 1997] et celui de Shor [Shor, 1997], mais la course à la technologie optimale pour les implémenter est loin d'être terminée.

Une des opérations quantiques intéressante est la mesure, combinée avec les corrélations de type quantique. Dans le cas des états intriqués, la mesure nous renseigne sur les modes mesurés mais aussi sur les modes non mesurés. On peut donc utiliser la mesure pour modifier le système de manière connue (grâce au résultat de mesure) et c'est cette idée qui est le fondement du *calcul quantique par mesures* (en anglais : *measurement-based quantum computing*, ou MBQC).

Formulation générale

Le calcul quantique gaussien sur n modes s'exprime de manière très générale :

$$\begin{pmatrix} \vec{\tilde{x}}^{in} \\ \vec{\tilde{p}}^{in} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{\tilde{x}}^{out} \\ \vec{\tilde{p}}^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tilde{x}}^{in} \\ \vec{\tilde{p}}^{in} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

où les A, B, C, D sont quelconques. On ajoute m états auxiliaires, un canevas quantique dans la formulation la plus fréquente. Comme on l'a vu à l'équation (3.27), il est équivalent de prendre comme états auxiliaires des états comprimés p_i^{aux} puis de les mélanger par une transformation unitaire. À cet état à $m + n$ modes, on fait subir des transformations unitaires qui ont pour effet d'intriquer les modes d'entrée avec les modes auxiliaires. Puis on mesure m de ces modes. L'ordre de mesure n'a pas d'influence.

Tout d'abord proposé en variables discrètes, le calcul quantique par mesures a été adapté au régime des variables continues. Contrairement à d'autres modèles de calcul quantique, il s'agit d'opérations non réversibles. Il a donc consommation de ressources quantiques, utilisation de modes auxiliaires qui sont mesurés. Chaque mesure est faite sur un seul mode et une ressource initiale intriquée est nécessaire [Arrighi, 2016]. Les résultats des mesures sont utilisés dans le traitement ultérieur, pour modifier l'état de sortie ou rectifier les résultats finaux (en anglais : *feed-forward*). Les ressources auxiliaires intriquées sont les canevas quantiques, qui apportent de l'intrication entre les modes.

Le processus est représenté dans la figure 3.5. On obtient

$$\begin{pmatrix} \vec{\hat{x}}^{\text{out}} \\ \vec{\hat{p}}^{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}}^{\text{in}} \\ \vec{\hat{p}}^{\text{in}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\hat{\mu}}_x \\ \vec{\hat{\mu}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\hat{\eta}}_x \\ \vec{\hat{\eta}}_p \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

avec $\hat{\mu}_x^i = \sum_{j=1}^m c_x^{ij} \hat{p}_j^{\text{squ}}$ et $\hat{\mu}_p^i = \sum_{j=1}^m c_p^{ij} \hat{p}_j^{\text{squ}}$ qui sont des opérateurs qui rendent compte du bruit additionnel dû à la compression finie des états auxiliaires; et $\eta_x^i = \sum_{j=1}^m l_x^{ij} p_j^{\text{aux}}$ et $\eta_p^i = \sum_{j=1}^m l_p^{ij} p_j^{\text{aux}}$ qui sont des fonctions des résultats des mesures de quadratures p_i^{aux} , que l'on peut corriger après coup. Les coefficients $c_{x/p}^{ij}$ et $l_{x/p}^{ij}$ dépendent de l'opération implémentée.

Le résultat de tout ceci est que l'on peut approcher un calcul quantique gaussien (3.53) par une combinaison de transformation unitaire et de mesure (3.54). La matrice U est simplement une transformation linéaire réalisable par des lames séparatrices et des lames d'ondes, tandis que la résultante ABCD est beaucoup plus variée.

3.3.2 Autres protocoles d'information quantique en variables continues

La plupart des protocoles d'information quantique ont maintenant une version en variables continue : la téléportation, le calcul quantique distribué, la distillation d'intrication... Le lecteur trouvera une revue complète et récente dans [Fedrici, 2017]. Nous nous permettrons d'ajouter deux avancées récentes. La première concerne directement le calcul quantique et a trait à la distribution

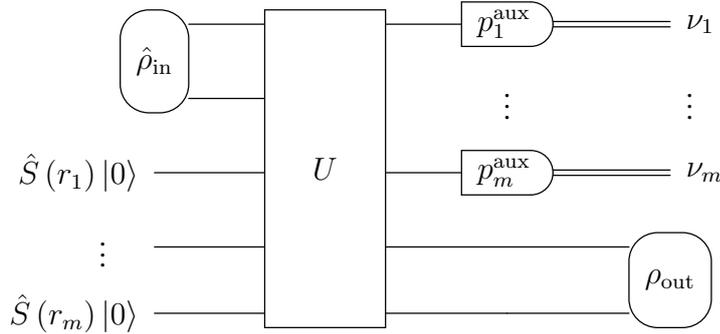


FIGURE 3.5 – Processus de calcul quantique gaussien par mesures (*Gaussian MBQC*). À l'état d'entrée à n modes ρ_{in} , on adjoint m modes auxiliaires. On mesure ensuite m modes par détection homodyne, sur leur quadrature p , qui donnent les résultats ν_j . Les n modes restants forment l'état de sortie ρ_{out} , à une correction près. Cette correction est appliquée en fonction des ν_j .

de la compression sur les modes auxiliaires [Léger, 2018] : la performance augmente avec le nombre d'états comprimés, mais pas de manière monotone. Il y a un nombre optimal d'états auxiliaires, qui est relativement bas, et le calcul peut rester efficace même si le squeezing est inégalement distribué et que le premier est beaucoup plus comprimé, ce qui est exactement le cas des états produits par notre SPOPO.

Le second résultat concerne les codes de correction d'erreur quantiques [Fukui, 2018]. Des codes correcteurs existent [Menicucci, 2014], mais ils nécessitent des états auxiliaires comprimés avec des degrés de compression de l'ordre de 20 dB excédant les possibilités expérimentales. Cet article, qui utilise les états GKP, abaisse ce seuil à 9,8 dB.

L'intrication quantique, que nous avons décrite dans ce chapitre, est un ingrédient essentiel de toutes les technologies quantiques évoquées ci-dessus. Ces technologies gagnent sans cesse en maturité, au point que d'aucuns annoncent que nous sommes à l'aube d'une Seconde révolution quantique [Aspect, 2005] : la première révolution quantique renvoyant aux innovations liées à la compréhension des propriétés statistiques des objets quantiques individuels (transistor, électronique...) et la seconde aux innovations fondées sur l'intrication quantique.

Chapitre 4

Ingénierie d'états quantiques par mise en forme de la pompe

Plan du chapitre

4.1 Effets attendus de la mise en forme de la pompe	76
4.1.1 Décomposition de l'interaction paramétrique	76
4.1.2 Approximation gaussienne	79
4.1.3 Cas sans approximation	81
4.1.4 Cas de la pompe avec mise en forme	81
4.1.5 Optimisation de la forme de la pompe	84
4.2 Performances du façonnage de la pompe	89
4.2.1 Nouveau modèle à couches pour le SLM	89
4.2.2 Étalonnage du SLM	92
4.2.3 Formes de pompe accessibles	94
4.3 Détection multipixel	94
4.3.1 Détection homodyne	95
4.3.2 Détection homodyne spectralement résolue	97
4.3.3 Limitations de l'homodyne	97
4.3.4 Construction d'une détection multipixel efficace	102
4.3.5 Élargissement spectral avec une fibre multimode	107
4.4 Résultats de mesure	109

L'objectif de ce quatrième chapitre est de décrire les initiatives menées pour contrôler les modes dans lesquels est créé le vide comprimé multimode. Pour cela, nous avons construit un façonneur d'impulsions utilisable sur la plage de longueurs d'onde de la pompe.

Dans un premier temps, nous donnons les prédictions théoriques : qu'attendre d'une mise en forme de la pompe ? Ensuite, nous présenterons notre façonneur d'impulsions et le modèle de description par couches que nous avons

inventé pour faciliter la programmation et la calibration du modulateur spatial de lumière (SLM). Puis nous exposerons les progrès faits dans le développement d'une détection homodyne multipixel, dispositif de mesure essentiel pour les états multimodes que nous créons. Enfin, nous présenterons des résultats qui prouvent que la mise en forme de la pompe a bien un effet sur les états de sortie du SPOPO.

4.1 Effets attendus de la mise en forme de la pompe

Les états quantiques produits par le SPOPO dépendent de la forme spectrale de la pompe et de l'accord de phase dans le cristal. Il y a donc un grand avantage à mettre en forme la pompe, car on peut ainsi modifier les états produits. Le but est alors de savoir quelle forme de pompe choisir pour obtenir un état désiré. Dans cette première partie, nous éclairons les relations entre la forme de la pompe et les états produits. Nous présentons les outils théoriques puis résumons les avancées faites par F. Arzani dans sa thèse [Arzani, 2018a].

4.1.1 Décomposition de l'interaction paramétrique

Nous avons vu au chapitre 2 que l'état en sortie du SPOPO est un vide comprimé multimode. Ses modes et ses degrés de compression sont dictés par la distribution spectrale jointe $L(\omega, \omega')$ de l'équation (2.23) :

$$L(\omega_n, \omega_m) = \mathcal{A}_b(\omega_n + \omega_m)\Phi(\omega_n, \omega_m) \quad (4.1)$$

Cette distribution spectrale jointe est donc le nœud de la compréhension de la forme spectrale des états comprimés. Elle est représentée en figure 4.1.

Pour décomposer cette distribution, nous disposons de deux outils : la factorisation d'Autonne-Takagi et la décomposition de Bloch-Messiah. Comme nous allons le voir, elles sont en fait équivalentes.

Factorisation d'Autonne-Takagi

La transformation du faisceau de signal par la conversion paramétrique descendante présente en section 2.3.3 est une transformation intrinsèquement multimode. On peut la représenter par un hamiltonien d'interaction au cours de la traversée du cristal :

$$\hat{H}_{PDC} = i\hbar g \sum_{n,m} L(\omega_n, \omega_m) \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger + h.c. \quad (2.22)$$

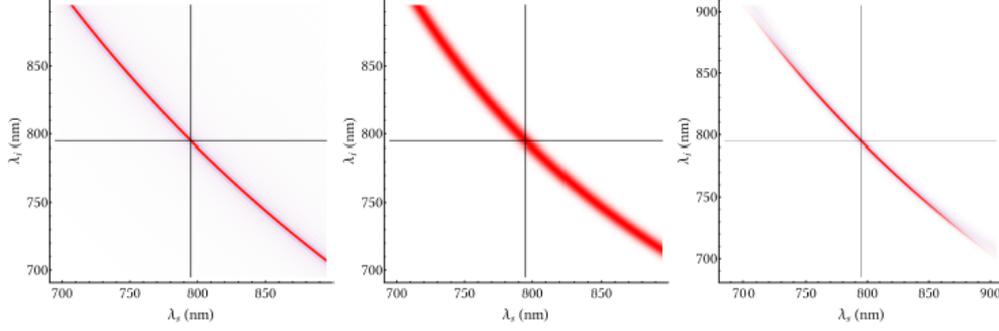


FIGURE 4.1 – À gauche, la distribution spectrale jointe. D’après l’équation (4.1), elle est le produit de l’enveloppe de la pompe et de l’accord de phase. Au centre, l’enveloppe de la pompe. Nous avons pris les conditions expérimentales d’une enveloppe gaussienne. À droite, l’accord de phase, représenté ici pour un BiBO de 2 mm. Il s’agit d’une distribution parabolique, dont la courbure dépend de la différence de vitesse de groupe dans le cristal. La largeur de cette distribution dépend aussi des paramètres du cristal. Tiré de [Jacquard, 2017]

Cette interaction est multimode, elle couple les dents m et n du peigne (d’opérateurs \hat{a}_m et \hat{a}_n). Or, on peut la factoriser pour découpler les modes, après quoi il sera facile de l’intégrer. Il s’agit donc de factoriser la matrice L définie par $L_{mn} = L(\omega_n, \omega_m)$, qui est symétrique par construction (mais pas nécessairement réelle).

La décomposition en valeurs singulières nous assure qu’il existe deux matrices unitaires U_1 et U_2 et une matrice diagonale Λ à éléments réels positifs Λ_k telles que $L = U_2 \Lambda U_1^\dagger$. La décomposition d’Autonne-Takagi [Autonne, 1915; Takagi, 1924], qui s’applique aux matrices symétriques, ajoute que $U_2 = U_1^*$, c’est-à-dire que les vecteurs singuliers à gauche sont simplement égaux (à une conjugaison près) aux vecteurs singuliers à droite. Il existe donc une matrice unitaire U telle que :

$$L = U^T \Lambda U \quad (4.2)$$

Comme on avait $\hat{H}_{PDC} = i\hbar g (\vec{\hat{a}}^\dagger)^T L \vec{\hat{a}}^\dagger + h.c.$, on effectue le changement de base $\vec{\hat{b}}^\dagger = U \vec{\hat{a}}^\dagger$ pour obtenir :

$$\hat{H}_{PDC} = i\hbar g \sum_k \Lambda_k (\hat{b}_k^{\dagger 2} - \hat{b}_k^2) \quad (4.3)$$

Une fois cette décomposition effectuée, on retrouve l’opérateur de traversée

du cristal

$$\hat{\mathcal{U}}_{PDC} = \exp\left(\frac{iT_0}{\hbar}\hat{H}_{PDC}\right) \quad (4.4)$$

pour un T_0 qui traduit le temps de traversée du cristal et on en déduit la transformation des opérateurs similaire à (1.32) :

$$\hat{b}_n \rightarrow \hat{\mathcal{U}}_{PDC}^\dagger \hat{b}_n \hat{\mathcal{U}}_{PDC} = \text{ch}(\xi_n) \hat{b}_n + \text{sh}(\xi_n) \hat{b}_n^\dagger \quad (4.5)$$

avec $\xi_n = -2T_0 g \Lambda_n$. Le signe $-$ reflète une compression selon p . On retrouve exactement les résultats pour l'OPO monomode présentés en (2.33).

Nous avons travaillé en ne considérant que les fréquences ω_n correspondant aux dents du peigne. Le même travail est possible en considérant la distribution spectrale jointe continue $L(\omega, \omega')$. On dispose alors de la décomposition de Schmidt [Schmidt, 1907], d'après le théorème de Mercer : $L(\omega, \omega') = \sum_k \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(\omega) \varphi_k(\omega')$. En notant $\hat{a}(\omega)$ l'opérateur annihilation à la fréquence ω , cela permet d'écrire

$$\int d\omega d\omega' L(\omega, \omega') \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega') = \sum_k \sqrt{\lambda_k} \hat{b}_k^{\dagger 2} \quad \text{avec} \quad \hat{b}_k^\dagger = \int d\omega \varphi_k(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) \quad (4.6)$$

Décomposition de Bloch-Messiah

La décomposition de Bloch-Messiah s'applique directement à la transformation complète \mathcal{Q} des opérateurs lors de la traversée du cristal. On écrit :

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{Q} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

La décomposition de Bloch-Messiah énonce qu'il est possible de trouver deux matrices symplectiques orthogonales R_1 et R_2 , et une matrice diagonale réelle K de la forme

$$K = \text{diag}(e^{\xi_1}, e^{\xi_2}, \dots, e^{\xi_n}, e^{-\xi_1}, e^{-\xi_2}, \dots, e^{-\xi_n}) \quad (4.8)$$

telles que :

$$\mathcal{Q} = R_1 K R_2 \quad (4.9)$$

Lien entre les deux approches

Les deux approches sont équivalentes. On peut passer de l'une à l'autre en partant de :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = 2g L \vec{a}^\dagger \quad (4.10)$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2gL \\ 2gL^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \\ &= 2g \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(L) & \operatorname{Im}(L) \\ \operatorname{Im}(L) & -\operatorname{Re}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\hat{x}} \\ \vec{\hat{p}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Et finalement :

$$\mathcal{Q} = \exp \left[2gT_0 \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(L) & \operatorname{Im}(L) \\ \operatorname{Im}(L) & -\operatorname{Re}(L) \end{pmatrix} \right] \quad (4.12)$$

On remarque que si la partie imaginaire de L est nulle, alors \mathcal{Q} est diagonale par bloc et ne mélange pas les quadratures x et p . En particulier, les covariances xp seront nulles.

4.1.2 Approximation gaussienne

Pour une distribution spectrale jointe quelconque, il faut recourir à des méthodes numériques pour trouver les supermodes. Il existe toutefois un cas pour lequel on dispose d'une solution analytique : c'est le cas gaussien. Sous certaines conditions, précisées par G. Patera dans sa thèse¹ [Patera, 2008], la distribution spectrale jointe de la figure 4.1 peut être approximée par une distribution gaussienne représentée en figure 4.2 et qui s'écrit :

$$L_g(\omega, \omega') = \sqrt{\frac{2}{\pi ab}} \exp \left[-\frac{(\omega + \omega' - 2\omega_0)^2}{2a^2} \right] \exp \left[-\frac{(\omega - \omega')^2}{2b^2} \right] \quad (4.13)$$

Cette distribution gaussienne a deux largeurs caractéristiques : a , imposée soit par le spectre de la pompe soit par la largeur de l'accord de phase (qui dépend de la longueur du cristal et de ses paramètres) et b , qui dépend de la courbure de l'accord de phase (voir figure 4.1, au centre). Dans notre configuration expérimentale, on a $a \ll b$ et ces constantes valent [Wasilewski, 2006] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \frac{1}{2\Delta_\omega^2} + \frac{L^2}{10} (\beta_{1,r} - \beta_{1,b})^2 & \beta_{1,b} &= \left. \frac{dk_b(\omega)}{d\omega} \right|_{2\omega_0} \\ \frac{1}{b^2} &= \frac{L\beta_{2,r}}{12} & \beta_{n,r} &= \left. \frac{d^n k_r(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega_0} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad (4.14)$$

1. Aux équations (4.56) et (4.57) page 66.

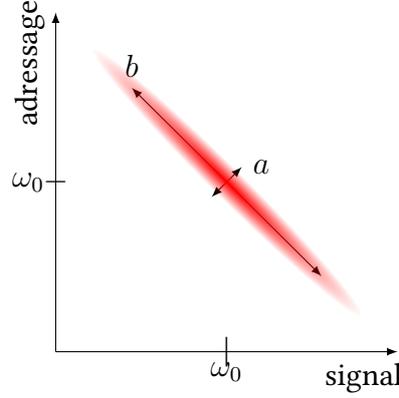


FIGURE 4.2 – Représentation de $L_g(\omega, \omega')$, l'approximation gaussienne de la distribution spectrale jointe de la figure 4.1.

On a noté Δ_ω la largeur spectrale² de la pompe et L la longueur du cristal. Les vecteurs d'onde k_r et k_b sont définis en 2.3.2 et la différence des vitesses de groupe $(\beta_{1,r} - \beta_{1,b})^2$ détermine aussi la largeur spectrale du faisceau issu de la somme de fréquences en (2.26).

Pour ce cas gaussien, la décomposition de Schmidt est bien connue [Fedorov, 2015b], elle a notamment été étudiée pour la génération de paires de photons intriqués [Grice, 2001]. Cette distribution est la suivante :

$$L_g(\omega, \omega') = \sum_n \Lambda_n \psi_n(\omega - \omega_0) \psi_n(\omega' - \omega_0) \quad (4.15)$$

avec

$$\psi_n(\omega) = \frac{(2/ab)^{1/4}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} \exp\left(\frac{\omega^2}{ab}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{ab}}\right) \quad \text{et} \quad \Lambda_n = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n \quad (4.16)$$

On reconnaît dans les ψ_n les fonctions d'Hermite-Gauss de largeur $\sqrt{ab}/2$. Le nombre de Schmidt de cette famille est $K = (a^2 + b^2)/ab$ [Fedorov, 2015b]. Dans le cas qui nous intéresse où $b \gg a$, on a directement $K \approx b/a$. Autrement dit, c'est le rapport entre les deux dimensions de la distribution qui dicte le nombre effectif de modes présents dans le faisceau.

Une deuxième observation tient au signe des supermodes : les Λ_n forment une suite géométrique de raison $(a-b)/(a+b) \approx -1$. Cela va conduire à une

2. au sens de (2.1), c'est-à-dire $\mathcal{A}_b(\omega) = \exp[-(\omega - 2\omega_0)^2/4\Delta_\omega]$

compression alternée³ : un mode sur deux est comprimé sur x , l'autre sur p .

Tout ceci est valable dans le cadre de l'approximation gaussienne. Hors des conditions d'application de cette approximation, ce modèle échoue à prédire les valeurs de compression Λ_n . En revanche la forme spectrale des supermodes est toujours plutôt bien prédite [Wasilewski, 2006], ce qui explique pourquoi les valeurs de compression mesurées expérimentalement ne correspondent pas aux valeurs prédites par le modèle gaussien alors que les supermodes ont en effet la forme gaussienne prédite par (4.16).

4.1.3 Cas sans approximation

On s'intéresse maintenant au cas où l'on ne fait pas appel à l'approximation gaussienne présentée ci-dessus. On considère le cas du spectre de la pompe gaussien, comme prévu par l'équation (2.21). La forme de la distribution spectrale jointe est présentée en figure 4.1 et répond à l'équation :

$$L(\omega, \omega') \propto \exp\left(-\frac{(\omega + \omega')^2}{4\Delta_\omega^2}\right) \text{sinc}\left(\frac{l_c}{2}\Delta k(\omega' + \omega, \omega)\right) \quad (4.17)$$

La forme de la pompe, par conservation de l'énergie, impose une forme anti-diagonale correspondant à $\omega + \omega' \approx \omega_0$, plus ou moins large en fonction de la largeur spectrale de la pompe. L'accord de phase Δk est défini en (2.19) et correspond à une parabole tangente à l'antidiagonale.

Un résultat de simulation numérique est présenté en figure 4.3, issu de la thèse de G. Patera. Les supermodes ont une forme qui s'approche de celle des fonctions d'Hermite-Gauss, comme dans le cadre de l'approximation gaussienne. La forme des supermodes est compatible avec celle observée expérimentalement, présentée en figure 2.12.

4.1.4 Cas de la pompe avec mise en forme

Quand le profil spectral de la pompe \mathcal{A}_b est mis en forme, on a accès à de nouveaux états de sortie qui se distinguent des précédents, tant au niveau de la forme spectrale que de la répartition des degrés de compression. Les résultats qui suivent sont issus de la thèse de F. Arzani [Arzani, 2018a], qui a effectué les simulations avec une discrétisation du spectre de la pompe sur 500 points. Le spectre avant mise en forme est pris gaussien, centré en 397,5 nm, de largeur à mi-hauteur égale à 1 nm.

3. On s'est autorisé une liberté par rapport à la factorisation d'Autonne-Takagi telle que présentée à la page 77, d'après laquelle tous les Λ_n devraient être positifs. Les modes selon cette décomposition seraient les $\{i^n \psi_n\}$ au lieu des $\{\psi_n\}$. Il nous a semblé plus clair de présenter cela comme une compression alternativement sur x et p .

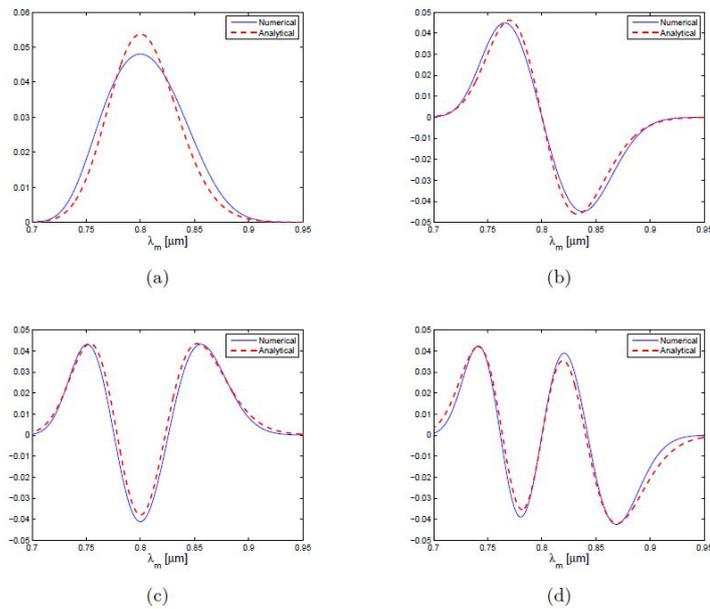


FIGURE 4.3 – Les quatre premiers modes issus de la diagonalisation de L . La simulation a été faite avec une discrétisation de 4800 points par 4800 points, pour un cristal de BiBO de longueur 0,1 mm et un faisceau de pompe gaussien (durée des impulsions : 100 fs). Le résultat numérique est comparé à une solution analytique. Comme on pouvait s’y attendre, les formes obtenues sont proches de celle de la famille des fonctions d’Hermite-Gauss. Simulation tirée de [Patera, 2008].

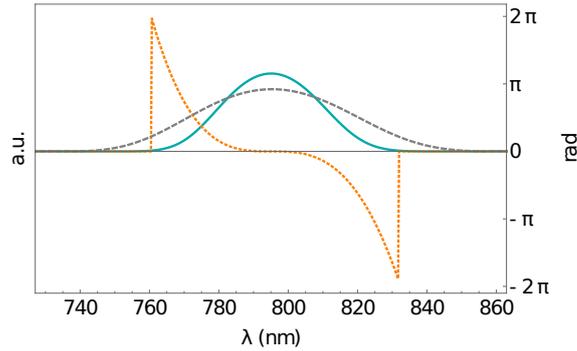


FIGURE 4.4 – Amplitude (en bleu) et phase (en rouge) du premier supermode obtenu avec une pompe chirpée, comparée au premier supermode obtenu avec une pompe sans phase spectrale (en gris, phase non représentée mais plate).

Pompe avec phase quadratique

Une première simulation examine le cas de l'ajout d'une phase quadratique. La figure 4.4 est la simulation du premier supermode obtenu pour une pompe d'amplitude inchangée mais de phase quadratique $\phi_2 = 2700 \text{ fs}^2$, choisie pour doubler la durée de l'impulsion.

Il est intéressant de noter que le spectre du supermode est plus étroit que dans le cas de la phase spectrale plate, ce qui correspond à une impulsion plus longue. La phase spectrale est cubique, bien approchée par $\varphi(\omega) \approx \phi_3(\omega - \omega_0)^3$, et cela se retrouve pour tous les supermodes. La relation entre ϕ_3 et ϕ_2 n'est pas évidente.

Pompe avec une phase alternée

Un cas simple expérimentalement est le cas où la moitié du spectre de la pompe est déphasé de π . Cela revient à multiplier par -1 la moitié du spectre, qui reste réel. Puisque le spectre est réel, la matrice de covariance Γ_{xp} est nulle, ce qui est commode pour faire des mesures expérimentales. Les supermodes issus de la simulation numérique sont présentés en figure 4.5 :

Lorsque l'on calcule la matrice de covariance des états de sortie, dans la base des bandes de fréquences, on obtient les matrices Γ_X et Γ_P présentées dans la figure 4.19 en page 110. La principale différence lorsque l'on rajoute la phase alternée est que les éléments antidiagonaux des matrices de covariances Γ_X et Γ_P , qui étaient les éléments dominants pour la pompe sans mise en forme spectrale, sont maintenant proches de 0.

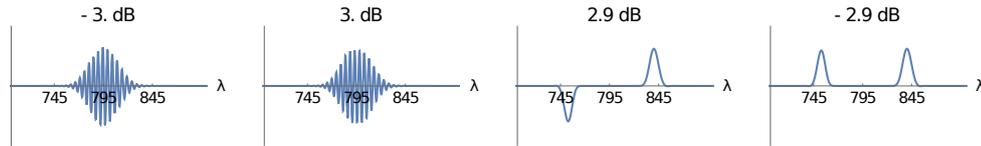


FIGURE 4.5 – Amplitude des quatre premiers supermodes obtenus avec une pompe alternée. Leur niveau de compression est indiqué : il est positif pour de la compression selon p (excès de bruit sur x) et négatif pour de la compression selon x .

4.1.5 Optimisation de la forme de la pompe

Les deux cas évoqués ci-dessus suffisent à se rendre compte que la relation entre forme de la pompe et forme des supermodes n'est pas immédiate. Obtenir des caractéristiques particulières sur les supermodes tout en garantissant que la forme de la pompe est expérimentalement réalisable est un problème qui ne peut pas être résolu analytiquement. F. Arzani [Arzani, 2018b] a utilisé un algorithme d'optimisation pour chercher les formes de pompe les plus adaptées à différentes situations. Nous en rappelons les principales caractéristiques avant de présenter les résultats obtenus.

Algorithme d'optimisation

L'algorithme utilisé est un algorithme évolutionniste développé pour le contrôle cohérent [Roslund, 2009]. Les paramètres de contrôle sont l'amplitude et la phase à imprimer sur le façonneur d'impulsions, avec un spectre discrétisé en 20 à 40 points. On cherche à optimiser une fonction d'évaluation (ou fonction d'adaptation) qui dépend du problème que l'on veut résoudre. L'algorithme agit de manière récursive. Il démarre avec un spectre aléatoire et génère par mutation (selon une loi de probabilité gaussienne isotrope) un ensemble de nouveaux paramètres : la première génération de mutants. La meilleure moitié de ces mutants (au sens de la fonction d'adaptation) est gardée et combinée linéairement pour obtenir le point de départ de la génération suivante. De génération en génération, l'algorithme finit par converger.

Des raffinements sont ajoutés afin d'accélérer la convergence et de limiter la sensibilité aux erreurs numériques ou expérimentales (dans l'optique d'utiliser ce même algorithme directement dans l'expérience). Tout d'abord, la souche de chaque nouvelle génération n'est pas calculée qu'en fonction des meilleurs mutants de la génération précédente : on intègre aussi les souches des générations précédentes. Ensuite, une analyse de l'adaptation des mutants permet de trouver les directions privilégiées dans lesquelles la fonction d'évaluation augmente le plus vite. La mutation est alors ajustée pour ne plus être isotrope mais

être étendue dans ces directions, pour faire une remontée de gradient. Quand la direction la plus favorisée est la même d'une génération à l'autre, le pas (c'est-à-dire l'amplitude de la mutation) est augmenté. Inversement, le pas est diminué si cette direction change rapidement. Enfin, il faut veiller à ce que l'impulsion après la mise en forme ait une puissance suffisante pour nos mesures ; ceci est pris en compte directement dans la fonction d'évaluation.

Squeezing également distribué

Avec une pompe sans mise en forme, le niveau de compression décroît avec l'ordre du supermode (voir par exemple la figure 2.12). En s'autorisant la mise en forme de la pompe, on peut vouloir obtenir que k premiers degrés de compression soient presque égaux.

La fonction d'évaluation dans ce cas est la suivante :

$$f_1 = \frac{1}{\Lambda_1} \sum_{j=1}^k \Lambda_j \quad (4.18)$$

avec les Λ_j définis en (2.34). En laissant l'algorithme d'optimisation agir pour maximiser f_1 , on obtiendra une forme spectrale optimale mais dont la faisabilité n'est pas assurée. En particulier, la convergence peut se faire vers une forme de pompe dont la réalisation par le façonneur impliquerait une trop grande perte d'intensité. On risque donc d'aboutir à une puissance de pompe trop faible pour mesurer expérimentalement le squeezing. Il faut donc rajouter un terme à cette fonction d'adaptation. On note $\mathcal{I}(\omega)$ la fonction de transfert du façonneur d'impulsion, dont la transmission $|\mathcal{I}(\omega)|^2$ et la phase $\varphi_{\mathcal{I}}(\omega) = \mathcal{I}(\omega)/|\mathcal{I}(\omega)|$ sont justement les paramètres à optimiser. Comme le modulateur spatial est un composant passif, on a $|\mathcal{I}(\omega)|^2 \leq 1$.

La puissance de pompe après le façonnage est :

$$w_{\mathcal{I}} = \int |\mathcal{A}_b(\omega)\mathcal{I}(\omega)|^2 d\omega \quad (4.19)$$

À la place de la fonction f_1 de l'équation (4.18), on utilise la fonction d'évaluation corrigée :

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\Lambda_1} \sum_{j=1}^k \Lambda_j + X(w_{\mathcal{I}}) \quad (4.20)$$

où X est une fonction qui doit être assez plate tant que la puissance est acceptable et devenir rapidement négative quand la puissance décroît. Comme cette nouvelle fonction d'optimisation tient compte de la puissance transmise, nous sommes certains d'obtenir une forme spectrale que nous pouvons produire sans

perte de puissance excessive. Les résultats de l'optimisation sont présentés en figure 4.6.

Sur cette simulation, on voit que les 80 premiers supermodes ont leur degré de compression Λ_j supérieur à $0,9\Lambda_1$. Toutefois, cela signifie qu'il s'agit d'un cas de haute dégénérescence, où toute combinaison de ces premiers supermodes donnera également un mode comprimé au même degré que le premier supermode. Cela explique probablement la forme erratique des trois premiers supermodes.

Optimisation de la production d'états graphes

Nous avons vu dans la partie sur la production de canevas quantiques (3.2) qu'il était possible de certifier l'obtention d'un canevas quantique en regardant ses annulateurs. Nous avons utilisé une fonction d'évaluation pour minimiser la somme de la variance de ces annulateurs :

$$f_3 = \sum_i \frac{\Delta^2 \delta_i}{\Delta^2 \delta_i^0} \quad (3.41)$$

Il est tout à fait possible d'utiliser de nouveau cette fonction d'évaluation sur des canevas quantiques prédéfinis. De nouveau, on préférera utiliser une version de f_3 qui favorise les hautes puissances de pompe :

$$\bar{f}_3 = \sum_i \frac{\Delta^2 \delta_i}{\Delta^2 \delta_i^0} + Z(w_I) \quad (4.21)$$

avec Z une fonction linéaire.

Les résultats de l'optimisation selon f_3 et selon \bar{f}_3 sont présentés en figure 4.7. Contrairement à l'approche adoptée en 3.2.2, les modes spectraux des nœuds du graphe sont fixés : ce sont les bandes de fréquences. Le spectre est donc divisé en quatre parts, dont on veut qu'elles présentent une structure de canevas quantique linéaire à 4 modes (comme présenté en figure 3.4). La variance des annulateurs est calculée, avec la pompe originelle, puis avec une pompe optimisée au sens des fonctions f_3 et \bar{f}_3 . On observe que la variance des annulateurs avec une pompe mise en forme est plus basse que celle sans mise en forme. Mettre en forme la pompe permet donc de rendre nos états de sortie plus adaptés à l'usage que l'on désire en faire.

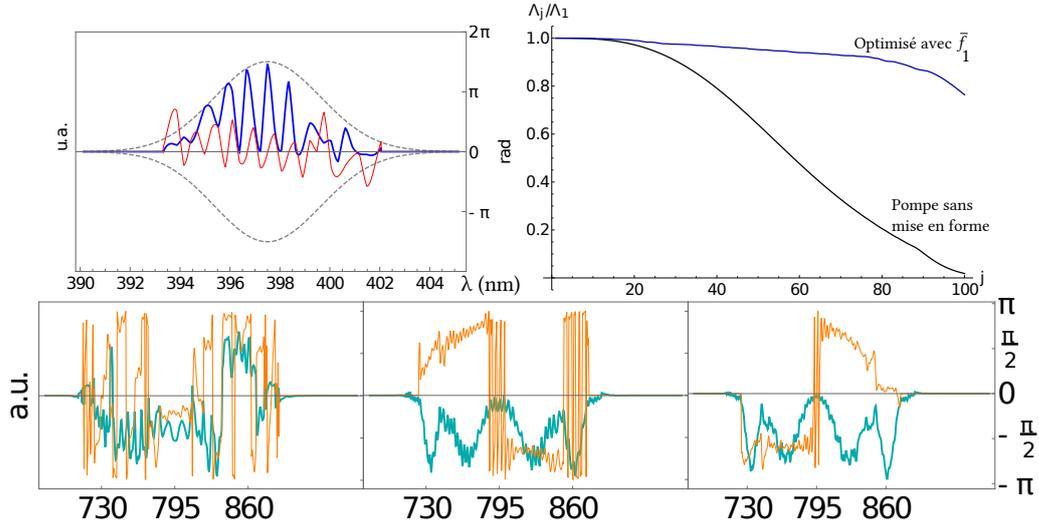


FIGURE 4.6 – Résultat de l’optimisation avec la fonction d’adaptation \bar{f}_1 de l’équation (4.20). Les paramètres choisis sont $k = 100$ et $X(w_I) = 3/(5w_I)^6$. Le cristal où a lieu la conversion paramétrique est un BiBO de 1.5 mm de long. Tiré de [Arzani, 2018a].

En haut, à gauche : la forme de pompe optimale, l’amplitude (en bleu) étant comparée à l’amplitude initiale (en pointillés gris) qui a une largeur à mi-hauteur en intensité (FWHM) de 2,5 nm . La phase spectrale est en rouge. La puissance en sortie vaut 30 % de celle en entrée.

En haut, à droite : la distribution des valeurs propres Λ_n (qui dictent le degré de compression). On constate qu’un grand nombre de supermodes a un degré de compression comparable à celui du premier supermode, comparé au cas de la pompe sans mise en forme.

En bas : la forme spectrale des trois premiers supermodes, amplitude en bleu et phase en orange. La partie linéaire de la phase spectrale a été enlevée.

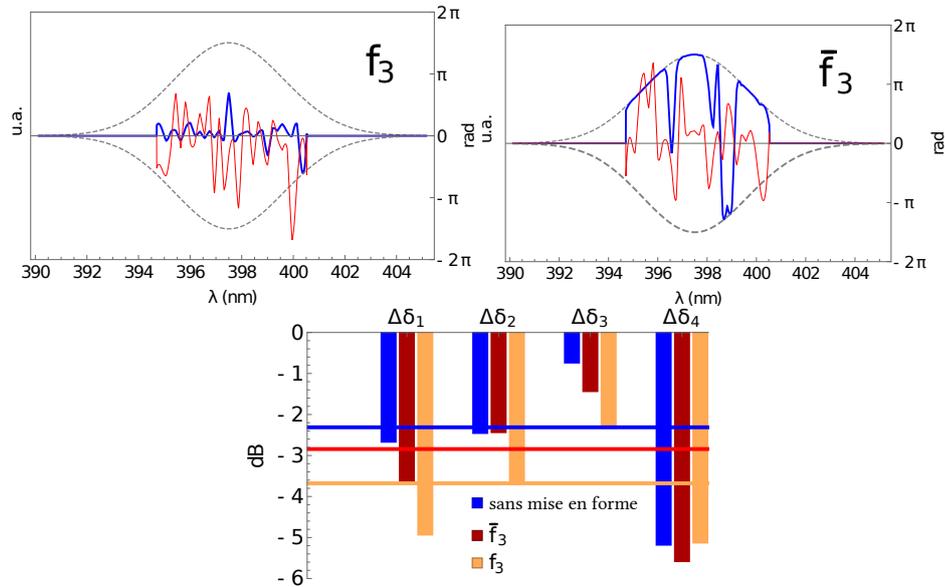


FIGURE 4.7 – Résultat de l’optimisation selon la fonction d’adaptation f_3 et \bar{f}_3 de l’équation (4.21), avec $Z(w_{\mathcal{I}}) = -1,35w_{\mathcal{I}}$. L’optimisation a lieu sur un état graphe dont on a fixé les nœuds comme étant 4 bandes de fréquences ordonnées en graphe linéaire. Le cristal est supposé être un BiBO de 0,5 mm de long. Tiré de [Arzani, 2018a].

En haut, à gauche : la forme de pompe optimale au sens de f_3 , l’amplitude (en bleu) étant comparée à l’amplitude initiale (en pointillés gris). La phase spectrale est en rouge. La puissance en sortie vaut 2 % de celle en entrée.

En haut, à droite : la forme de pompe optimale au sens de \bar{f}_3 , l’amplitude (en bleu) étant comparée à l’amplitude initiale (en pointillés gris). La phase spectrale est en rouge. La puissance en sortie vaut 80 % de celle en entrée.

En bas : les variances des annulateurs et leurs moyennes

4.2 Performances du façonnage de la pompe

Notre travail d'expérimentateur est maintenant d'implémenter les formes spectrales trouvées par F. Arzani [Arzani, 2018a; Arzani, 2018b]. Le principe de la mise en forme spectrale a été présenté en 2.2, nous nous intéressons maintenant à sa mise en pratique.

Les cristaux liquides du SLM sont soumis à une tension contrôlable par l'ordinateur, qui permet de changer la phase communiquée au faisceau. La direction verticale est utilisée pour séparer les longueurs d'onde et avoir le contrôle de la phase spectrale. La dimension verticale est mise à profit pour contrôler l'intensité, grâce à une modulation de phase périodique qui agit comme un réseau et diffracte la lumière dans le plan vertical. La lumière qui se trouve dans le premier ordre de diffraction [Vaughan, 2005] est alors sélectionnée par un filtre spatial. La forme de cette modulation périodique contrôle l'amplitude et la phase de la lumière diffractée, ce qui nous donne le contrôle sur l'amplitude et la phase de la lumière transmise par le façonneur. Nos investigations sur la forme de cette modulation périodique se trouvent en annexe C.

4.2.1 Nouveau modèle à couches pour le SLM

La plupart des SLM commerciaux ne fournissent pas de module pour la mise en forme spectrale. Le modèle X10468-05 de Hamamatsu ne déroge pas à la règle. Il nous faut donc construire un logiciel pour le contrôler et prévoir des procédures de calibration. Ces deux problématiques sont traitées efficacement avec une architecture à couches.

Les protocoles visant à produire un spectre particulier peuvent se décomposer en 5 fonctions distinctes. Ces couches sont les suivantes :

1. la couche physique,
2. celle du masque de voltage,
3. celle du masque de phase,
4. celle de la fonction de transfert,
5. la couche spectrale.

Il y a un grand avantage à séparer ces couches : d'une part parce que cela permet de changer facilement un des protocoles sans avoir besoin de changer tout le processus, d'autre part parce que les opérations de calibration sont internes à chaque couche. Détaillons l'action de chacune de ces couches.

Couche 5 : spectrale

Cette couche calcule les spectres désirés, qu'elle fournit à la couche 4. Typiquement, on peut chercher à numériser les formes spectrales trouvées par la théorie (comme celles de la section précédente) ou à obtenir les fonctions d'Hermite-Gauss. Nous avons programmé une interface graphique pour entrer les paramètres de la couche 5, de telle sorte qu'il est possible de changer en un clic la largeur ou la longueur d'onde centrale d'un mode gaussien. Nous notons $\mathcal{A}_b^{cible}(\omega)$ le spectre voulu par l'utilisateur et calculé par la couche 5.

Couche 4 : fonction de transfert

La couche 4 calcule la transmission et la phase qu'il faut faire subir au spectre, à partir du spectre $\mathcal{A}_b^{cible}(\omega)$ fourni par la couche 5.

On appelle inflexion la fonction $\mathcal{I}(\omega)$ qui transforme le spectre du faisceau incident $\mathcal{A}_b^{in}(\omega)$ en spectre de sortie $\mathcal{A}_b^{out}(\omega)$:

$$\mathcal{A}_b^{out}(\omega_n^{pix}) = \mathcal{I}_n \cdot \mathcal{A}_b^{in}(\omega_n^{pix}) \quad (4.22)$$

avec ω_n^{pix} la fréquence correspondant au n^e pixel du SLM. L'objectif est de produire un spectre qui soit le plus proche possible du spectre désiré : $\mathcal{A}_b^{out}(\omega) \approx \mathcal{A}_b^{cible}(\omega)$.

On suppose par simplicité que l'amplitude en entrée est normée, c'est-à-dire que $\max_{\omega} |\mathcal{A}_b^{in}(\omega)| = 1$. Le rôle de la couche 4 est de calculer l'inflexion \mathcal{I}_n et de communiquer à la couche 3 la transmission en amplitude $|\mathcal{I}_n|^2$ et le déphasage $\text{Arg}(\mathcal{I}_n)$ à appliquer à chaque longueur d'onde.

Le SLM étant un instrument passif, on a nécessairement $|\mathcal{I}_n| \leq 1$. La manière la plus simple de calculer l'inflexion est de prendre la fonction de transfert $\tilde{\mathcal{T}}(\omega) = \mathcal{A}_b^{cible}(\omega) / \mathcal{A}_b^{in}(\omega)$ et de la normaliser par son maximum :

$$\mathcal{I}_n = \tilde{\mathcal{T}}(\omega_n^{pix}) / \max_{\omega} |\tilde{\mathcal{T}}(\omega)| \quad (4.23)$$

Or, il arrive souvent que ce maximum soit atteint dans les ailes du spectre, là où le faisceau d'entrée a peu d'énergie. Dans ce cas, le facteur de normalisation est très grand et la puissance totale en sortie très petite. Pour éviter ces cas néfastes, on introduit un seuil κ en intensité (souvent de l'ordre de 0.1). Si, pour le pixel n , l'intensité est plus faible que ce seuil $|\mathcal{A}_b^{in}(\omega_n^{pix})|^2 < \kappa$, alors on ne compense plus l'intensité du spectre incident : on divise par $\sqrt{\kappa}$ au lieu de $\mathcal{A}_b^{in}(\omega_n^{pix})$. On compense tout de même la phase éventuelle $\varphi^{in}(\omega) = \arg(\mathcal{A}_b^{in}(\omega))$. L'inflexion est donc calculée à partir de la fonction de transfert de la manière suivante :

$$\mathcal{I}_n = \tilde{\mathcal{I}}(\omega_n^{pix}) / \max_{\omega} |\tilde{\mathcal{I}}(\omega)| \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{I}}(\omega) = \frac{\mathcal{A}_b^{cible}(\omega)}{\max[|\mathcal{A}_b^{in}(\omega)|; \sqrt{\kappa}]} e^{-i\varphi^i(\omega)} \quad (4.24)$$

Ainsi, sur toute la plage $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ pour laquelle l'amplitude d'entrée est supérieure au seuil κ , on s'assure que l'on a exactement la forme spectrale ciblée et que la transmission n'est pas inférieure à κ : $\mathcal{A}_b^{out}(\omega) = \mathcal{A}_b^{cible}(\omega)$. En revanche, en dehors de cette plage de façonnage, il n'y a pas de mise en forme : $\mathcal{A}_b^{out}(\omega) = \kappa^{-1/2} |\mathcal{A}_b^{in}(\omega)| \mathcal{A}_b^{cible}(\omega) < \mathcal{A}_b^{cible}(\omega)$.

Le choix du seuil κ dépend de l'usage du faisceau. Si l'on désire avant tout reproduire fidèlement un spectre donné, même au détriment de la puissance de sortie, il faut prendre un seuil assez bas. Si au contraire une grande puissance est nécessaire, un seuil assez élevé donnera satisfaction, au prix d'une plage de façonnage plus étroite. En général, il faudra faire un compromis entre ces deux voies, c'est la raison de notre choix à $\kappa = 0,1$.

Couche 3 : masque de phase

La couche 3 est chargée de trouver le masque de phase qui conduira à diffracter exactement les parties du spectre dont on a besoin, avec la phase voulue. Elle produit une matrice de réels entre 0 et 2π qui sera envoyée à la couche 2. Pour cela, elle reçoit de la couche 4 l'inflexion qu'il lui faut implémenter.

Pour une longueur d'onde donnée ω_n^{pix} , c'est-à-dire pour la colonne de pixels n sur laquelle cette longueur d'onde arrive, la couche 3 construit un réseau tel que soit diffractée une proportion $|\mathcal{I}_n|^2$ de l'intensité dans le premier ordre de diffraction, avec la phase $\text{Arg}(\mathcal{I}_n)$. La lumière dans le premier ordre de diffraction est transmise hors du façonneur, le reste est coupé. Nous avons utilisé un profil de réseau « en échelle », présenté en figure 4.8.

Couche 2 : masque de voltage

La couche 2 traduit en voltage le masque de phase fourni par la couche 3. Il s'agit de produire une matrice d'entiers entre 0 et 255 (qui représentent les niveaux de voltage possible). Ils sont calculés à partir de la phase désirée en chaque pixel, qui est une information fournie par la couche 3.

Couche 1 : physique

La *couche physique* est chargée de la modulation de phase. Pour cela, elle reçoit l'ensemble des voltages à appliquer aux pixels fourni par la couche 2

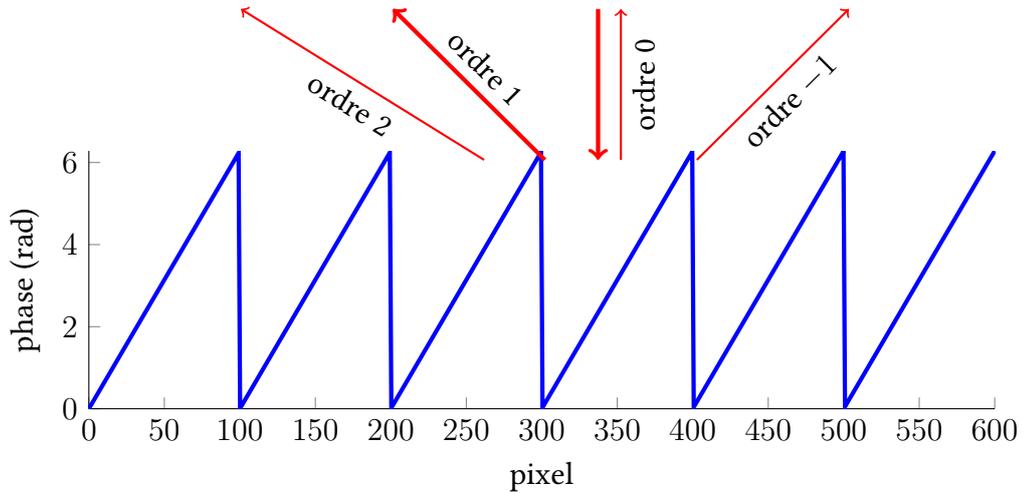


FIGURE 4.8 – Le réseau en échelle. Les angles de diffraction sont fixés par la période de répétition du motif et les intensités relatives des faisceaux diffractés dans les différents ordres dépendent de la profondeur du motif. Quand le motif a une profondeur de 2π , comme sur le graphique, toute la lumière est diffractée dans l'ordre 1.

et applique des tensions sur les cristaux liquides pour donner une phase au faisceau incident. Les protocoles de niveau 1 sont fournis par le constructeur.

4.2.2 Étalonnage du SLM

Trois couches nécessitent un étalonnage : les couches 2 à 4. L'étalonnage de niveau 2 se fait très rarement, celui de niveau 3 rarement et celui de niveau 4 quotidiennement.

Couche 2

Pour la couche 2, la relation entre la phase désirée et le voltage à appliquer nécessite une table de correspondance. Une telle courbe d'étalonnage de niveau 2 est fournie par le constructeur, mais nous en avons également reconstruit une expérimentalement. La figure 4.9 présente notre courbe d'étalonnage.

Cette calibration est linéaire, avec un coefficient de proportionnalité qui dépend de la longueur d'onde. En fait, le constructeur a inclus un pré-étalonnage qui compense le fait que la relation naturelle entre la tension appliquée aux cristaux liquides et leur variation d'indice optique n'est pas linéaire.

Hamamatsu fournit également des valeurs d'étalonnage, qu'il est intéressant de comparer aux nôtres. Le voltage nécessaire pour obtenir une modula-

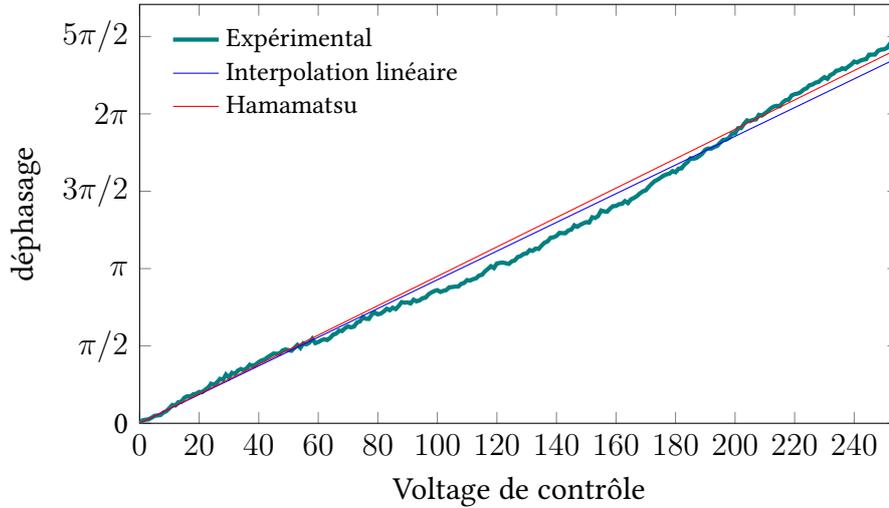


FIGURE 4.9 – Courbe d'étalonnage de la relation entre le voltage appliqué (entre 0 et 255) et la phase donnée au faisceau. La courbe a été obtenue par interférométrie avec un faisceau de référence. En bonne approximation, la relation est linéaire (en bleu) et la modulation de 2π est atteinte pour un voltage de 210. Cette courbe mesurée par nos soins est compatible avec les valeurs d'étalonnage fournies par Hamamatsu (en rouge).

tion de 2π à 399 nm vaut 210,5 selon le constructeur ; nos mesures donnent une valeur entre 209 et 211. Le deuxième paramètre d'étalonnage est la modulation maximale, atteinte avant le voltage de commande maximum de 255 : il vaut $2,40\pi$ selon Hamamatsu et $2,45\pi$ dans nos mesures expérimentales.

Couche 3

Pour la couche 3, il faut connaître la relation entre le masque de phase (qui a une forme de réseau de diffraction) et la transmission de l'intensité. Nous avons essayé plusieurs formes de réseau et retenu la forme simple dite « en échelle », présentée en figure 4.8. La relation entre la profondeur de la modulation de phase (entre 0 et 2π) et l'efficacité de transmission dans l'ordre 1 (entre 0 et 100 %) prend dans ce cas la forme d'un sinus cardinal. Les résultats de l'utilisation d'autres formes que le réseau en échelle se trouvent dans l'annexe C.

Couche 4

Pour la couche 4, il faut avoir mesuré l'amplitude en entrée \mathcal{A}_b^{in} . De plus, il faut savoir à quelle longueur d'onde correspond chaque pixel. C'est l'étalonnage

de niveau 4, aussi appelé ajustage spectral. Nous avons implémenté une manière efficace de le faire, avec un algorithme qui teste les colonnes de pixels une à une et enregistre pour chacune la longueur d'onde transmise. Ce programme est détaillé dans l'annexe C.

4.2.3 Formes de pompe accessibles

Les formes de pompe accessibles avec notre façonneur d'impulsion dépendent de sa résolution spectrale. Nous avons présenté en section 2.2.2 tous les paramètres retenus pour l'architecture du dispositif et conclu que la résolution spectrale attendue est $\delta\lambda_{SLM} = 0,046$ nm. Les facteurs limitant la résolution sont la diffraction par les optiques, la largeur physique du pixel, mais aussi l'alignement du façonneur : si une longueur d'onde n'est pas parfaitement verticale sur le SLM, alors elle va se répartir sur plusieurs colonnes de pixels, même si elle ne fait qu'un seul pixel de large.

De plus, les cristaux liquides ne peuvent pas supporter de saut brusque de phase car leur orientation varie continument. Si le voltage appliqué à un pixel est très différent de celui appliqué à son voisin, les cristaux liquides situés à leur frontière s'orientent selon une direction intermédiaire. Par conséquent, les formes spectrales avec des sauts d'amplitude ou de phase trop importants ne pourront pas être implémentés exactement, ils subiront un lissage.

On mesure la résolution spectrale en activant une unique colonne de pixels. Nous obtenons 0,067 nm. La largeur du spectre étant d'environ 3 nm, cela correspond à 45 degrés de contrôle sur le spectre. Cette résolution est du même ordre de grandeur que la limite de résolution donnée par les équations (2.12) et (2.13), qui vaut 0,046 nm. Pour l'optimisation de la forme spectrale de la pompe, F. Arzani utilise un spectre doté de 30 degrés de contrôle [Arzani, 2018a], ce qui est à notre portée.

Nous sommes donc en mesure d'implémenter les formes présentées en section 4.1.5. À titre d'exemple, le spectre de la figure 4.6 a été préparé et le résultat est présenté en figure 4.10.

4.3 Détection multipixel

Les supermodes qui sont générés avec une pompe mise en forme ont en général des corrélations xp non-nulles. Autrement dit, nous ne pouvons plus supposer que la matrice Γ_{xp} est nulle et nous devons donc la mesurer. Or, s'il est possible de mesurer les matrices Γ_X et Γ_P avec une détection homodyne standard, il est impossible de mesurer Γ_{xp} . Pour cela, il faut construire une *détection homodyne multipixel* : une détection homodyne multimode spectralement

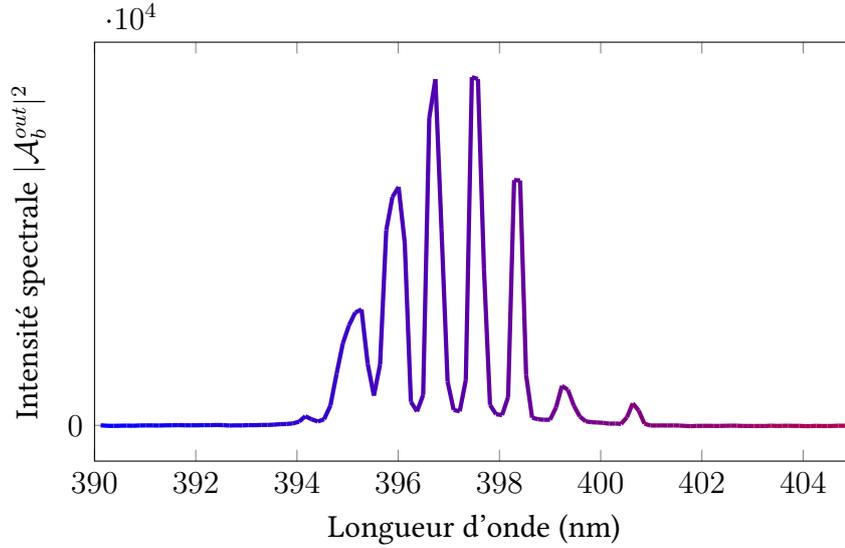


FIGURE 4.10 – Intensité spectrale obtenue par mise en forme du spectre de la pompe. Le spectre cible est celui de la figure 4.6.

résolue.

4.3.1 Détection homodyne

La détection homodyne est un outil bien connu en optique quantique [Grynborg, 2010]. C'est une mesure interférométrique où l'on mélange le faisceau à examiner avec un faisceau cohérent intense appelé *oscillateur local*. Le dispositif le plus simple est présenté en figure 4.11 : la lame semi-réfléchissante est supposée parfaitement équilibrée, le recouvrement spatial des deux faisceaux est supposé parfait et l'efficacité quantique des diodes égale à 1. On recueille les deux faisceaux sur des diodes identiques puis on soustrait les photo-courants pour obtenir le courant \hat{i} .

Il est bien connu [Thiel, 2015] que la différence des photocourants vaut (à un facteur près) :

$$\hat{i} = \sum_i \hat{a}_i^{s\dagger} \hat{a}_i^{lo} + h.c. \quad (4.25)$$

où les \hat{a}_i sont les opérateurs annihilation dans la base $u_i(\omega)$ de notre choix. L'exposant indique si l'opérateur se rapporte au signal (s) ou à l'oscillateur local (LO). En particulier, on peut choisir cette base de telle sorte que l'oscillateur local, qui est monomode comme nous l'avons vu en 1.3.3, ait toute son énergie dans le premier mode. On définit son amplitude et sa phase par $\alpha = \langle \hat{a}_0^{lo} \rangle =$

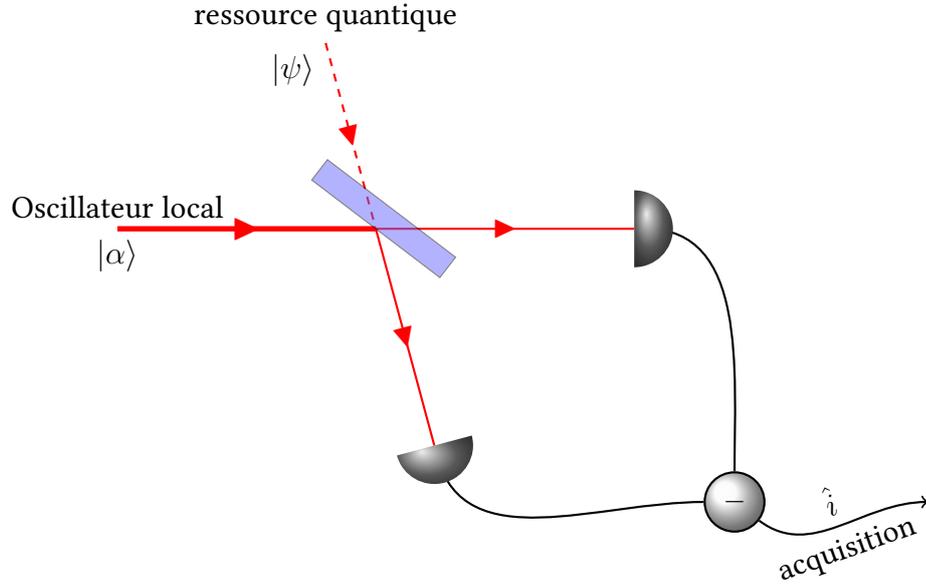


FIGURE 4.11 – Détection homodyne

$\sqrt{N_{\text{lo}}}e^{i\phi_{\text{lo}}}$. Nous nous plaçons dans le régime où le nombre de photons N_{lo} dans l'oscillateur local est bien supérieur à celui dans l'état quantique mesuré $|\psi\rangle$:

$$N_{\text{lo}} \gg \langle \psi | \sum_i \hat{a}_i^{s\dagger} \hat{a}_i^s | \psi \rangle \quad (4.26)$$

On définit l'opérateur quadrature tourné d'un angle θ :

$$\hat{x}^\theta = \hat{a}^{s\dagger} e^{i\theta} + \hat{a}^s e^{-i\theta} = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta \quad (4.27)$$

On retrouve les quadratures usuelles pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. La détection homodyne mesure la quadrature du mode du signal pour l'angle $\theta = \phi_{\text{lo}}$. On néglige tous les termes petits devant N_{lo} et on obtient :

$$\langle \hat{i} \rangle = \sqrt{N_{\text{lo}}} \langle \hat{x}_0^\theta \rangle \quad (4.28)$$

$$\langle \hat{i}^2 \rangle = N_{\text{lo}} \langle (\hat{x}_0^\theta)^2 \rangle \quad (4.29)$$

Ainsi, la détection homodyne permet de mesurer les quadratures du signal. Le paramètre $\theta = \phi_{\text{lo}}$ est contrôlé en plaçant un des miroirs du chemin de l'oscillateur local sur une cale piézoélectrique. Comme la mesure n'est possible que dans le mode de l'oscillateur local, il faut le mettre en forme pour mesurer les différents modes du champ. Nous disposons pour cela du façonneur d'impulsions présenté en 2.2.

Grâce à l'équation (4.29), nous pouvons mesurer les matrices de covariances Γ_X et Γ_P . En mettant l'oscillateur local dans le mode i et en balayant la phase, on obtient les éléments diagonaux $\Gamma_{X,ii} = \langle \hat{x}_i^2 \rangle$ et $\Gamma_{P,ii} = \langle \hat{p}_i^2 \rangle$: ce sont le maximum et le minimum de la variance $\langle (\hat{x}_i^\theta)^2 \rangle$, pour des états comprimés sur x ou p . Pour obtenir les éléments extra-diagonaux $\Gamma_{X,ij}$ et $\Gamma_{P,ij}$, l'oscillateur local est préparé dans la somme des modes i et j , ce qui permet d'accéder à $\langle (\hat{x}_i + \hat{x}_j)^2 \rangle$ puis calculer [Medeiros, 2014] :

$$\Gamma_{X,ij} = \langle \hat{x}_i \hat{x}_j \rangle = \frac{P_i + P_j}{2\sqrt{P_i P_j}} \langle (\hat{x}_i + \hat{x}_j)^2 \rangle - \frac{P_i}{2\sqrt{P_i P_j}} \langle \hat{x}_i^2 \rangle - \frac{P_j}{2\sqrt{P_i P_j}} \langle \hat{x}_j^2 \rangle \quad (4.30)$$

où P_i désigne la puissance optique dans le mode i .

Toutefois, avec une détection homodyne simple, il est impossible de mesurer la matrice de covariance complète Γ . En effet, pour obtenir les matrices Γ_{px} et Γ_{xp} il faudrait pouvoir utiliser des mesures du type $\langle (\hat{x}_i + \hat{p}_j)^2 \rangle$. Or, avec nos modes comprimés, une telle mesure n'a pas de dépendance en phase, on ne peut donc pas en extraire les informations désirées avec notre technique. Nous pouvons pallier cela avec la détection homodyne spectralement résolue.

4.3.2 Détection homodyne spectralement résolue

La détection homodyne spectralement résolue consiste, après que les faisceaux ont franchi la lame semi-réfléchissante, à séparer le faisceau en un certain nombre de bandes de fréquences grâce à un réseau et à les envoyer séparément vers des diodes dont les photo-courants sont soustraits. Pour chaque bande de fréquences, cela revient à faire une détection homodyne avec un oscillateur local non-nul uniquement dans cette bande de fréquences.

Le principe expérimental est présenté en figure 4.12 : après le mélange sur la lame semi-réfléchissante, chaque faisceau est envoyé sur un réseau qui sépare les longueurs d'ondes. Des barrettes de microlentilles focalisent chaque bande spectrale sur une diode. Les photocourants de chaque paire de diodes sont soustraits deux à deux pour obtenir les photocourants proportionnels aux quadratures.

4.3.3 Limitations de l'homodyne

L'équation (4.28) est valable dans le cas idéal où les faisceaux sont parfaitement identiques spatialement, où la lame séparatrice est exactement semi-réfléchissante, où le signal quantique à mesurer ne subit pas de pertes pendant

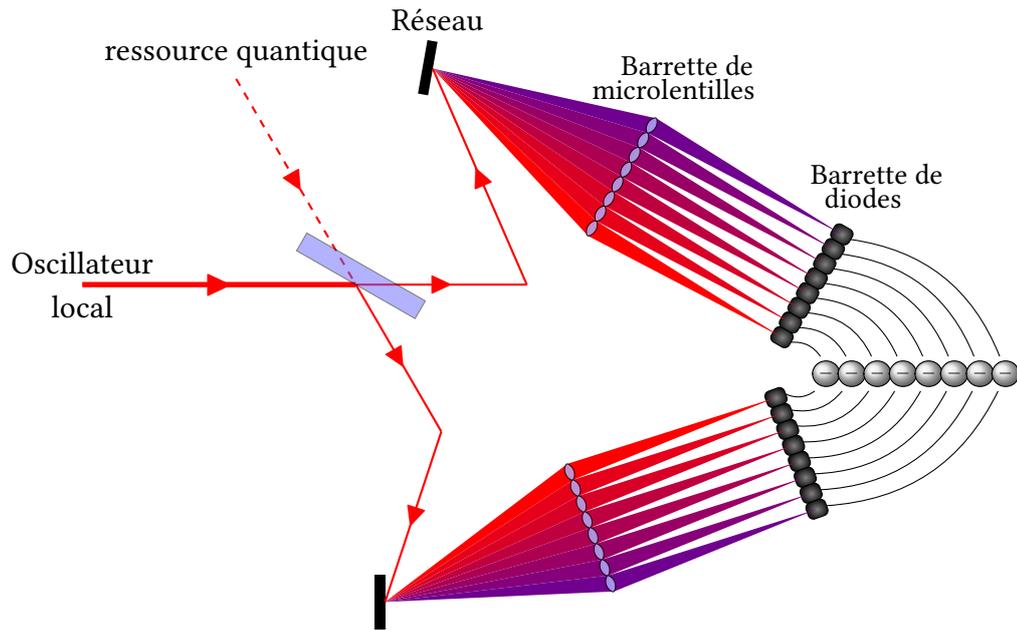


FIGURE 4.12 – La détection homodyne multipixel

sa propagation. De plus, il faut tenir compte d'un autre facteur : comme le courant \hat{i} est relativement faible, il faut l'amplifier, ce qui introduit du bruit d'origine électronique.

Nous étudions ici un peu plus en détail ces différents facteurs, car ce sont eux qui sont cruciaux pour la qualité du dispositif de mesure.

Les pertes optiques

À proprement parler, les pertes optiques ne sont pas imputables à la détection homodyne. Cependant, la plupart des défauts de la détection qui vont être évoqués dans les paragraphes suivants sont équivalents à des pertes optiques, ce qui justifie leur description ici. De manière générale, même si les pertes optiques ont plusieurs origines (dans notre cas : réflexion imparfaite sur les miroirs du chemin optique, transmission imparfaite à travers les lentilles et le cristal du soustracteur), il est toujours possible de les agréger en une seule source de pertes optiques, comme schématisé en figure 4.13.

Sur ce schéma est introduite l'efficacité η , qui est le coefficient de transmission (en intensité) de cette lame séparatrice fictive. La fonction de Wigner W est affectée de la manière suivante [Leonhardt, 1997] :

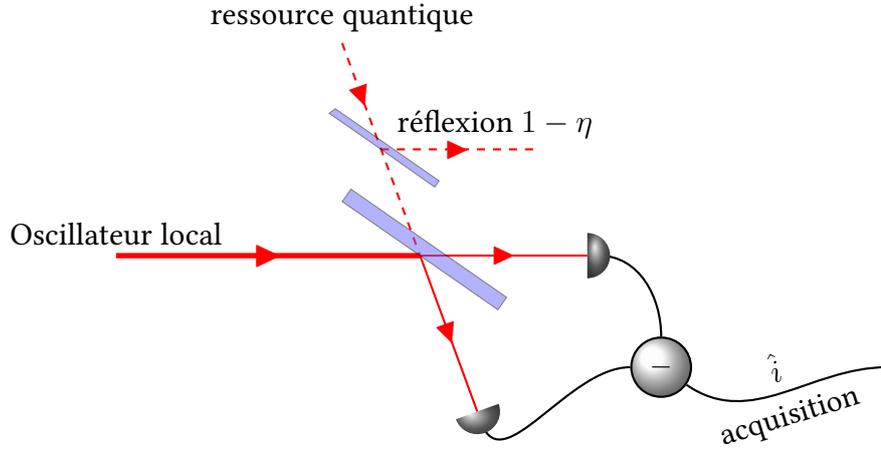


FIGURE 4.13 – Détection homodyne avec pertes optiques

$$W(x,p) \mapsto W_{pertes}(x,p) = \frac{1}{\pi\eta(1-\eta)} \iint W\left(\frac{x'}{\sqrt{\eta}}, \frac{p'}{\sqrt{\eta}}\right) e^{-\frac{(x-x')^2+(p-p')^2}{1-\eta}} dx' dp' \quad (4.31)$$

Cette équation est la convolution de la fonction de Wigner avant les pertes W par une gaussienne de largeur $\sqrt{1-\eta}$. Cela va « lisser » la fonction de Wigner, ce qui porte en particulier préjudice à ses parties négatives, le cas échéant.

Le mauvais recouvrement spatial ou spectral

Dans l'équation (4.25), on a utilisé une base modale commune pour décomposer l'oscillateur local et le signal, mais ce n'est pas obligatoire. Supposons que la base modale pour le signal soit \mathbf{u}_n et que nous nous intéressons plus particulièrement au mode \mathbf{u}_0 . L'oscillateur local est dans un mode \mathbf{v}_0 . Alors les équations précédentes se ré-écrivent ⁴ [Jacquard, 2017] :

$$\hat{i} = \left(\sum_n \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_0 \rangle \alpha \hat{a}_n^{s\dagger} + h.c. \right) = \sqrt{N_{lo}} \left(\sum_n |\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_0 \rangle| \hat{x}_n^{\varphi_n} \right) \quad (4.32)$$

avec $\varphi_n = \phi_{lo} + \text{Arg}[(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_0)]$ et on définit le recouvrement entre modes : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Si le recouvrement spatial est parfait, il est égal au recouvrement spectral :

4. avec un léger changement d'écriture : \hat{i} est maintenant un opérateur sur le mode signal seulement.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int \mathbf{u}^*(\omega) \mathbf{v}(\omega) d\omega \quad (4.33)$$

Mais en général, le mauvais recouvrement peut être d'origine spectrale, spatiale, ou dû à la polarisation. Le recouvrement complet est donc une intégrale sur le spectre, sur le plan transverse, et sur la polarisation. On écrit donc :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{pol \in x, y} \int u_{pol}^*(\omega, \mathbf{r}_\perp) v_{pol}(\omega, \mathbf{r}_\perp) d\omega d\mathbf{r}_\perp \quad (4.34)$$

Supposons un recouvrement incorrect, par exemple dû à un diamètre de l'oscillateur local plus grand que celui du signal. Pour simplifier, supposons un signal monomode dans le premier mode \mathbf{u}_0 . Le photocourant recueilli est :

$$\langle \hat{i} \rangle = \sqrt{N_{Lo}} \left(\overbrace{|\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0 \rangle| \langle \hat{x}_0^{\varphi_0} \rangle}_{\text{signal}} + \sum_{n>0} \overbrace{|\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_0 \rangle| \langle \hat{x}_n^{\varphi_n} \rangle}_{\text{autres modes}} \right) \quad (4.35)$$

Comme certains des $\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_0 \rangle$ sont non-nuls, ils font intervenir des quadratures de modes. Souvent, ces autres modes ne contiennent que du vide, par exemple en cas de mauvais recouvrement spatial. La mesure finale est comme mélangée avec du vide, ce qui est équivalent à des pertes optiques comme décrites à l'équation (4.31) avec un paramètre d'efficacité :

$$\eta_{\text{recouvrement}} = |\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0 \rangle|^2 \quad (4.36)$$

Les sources de mauvais recouvrement dans notre expériences sont au nombre de trois. La première a trait au recouvrement spatial : les faisceaux doivent être correctement superposés sur la lame semi-réfléchissante de la détection homodyne. Nous optimisons ce recouvrement en faisant interférer le faisceau d'oscillateur local avec un faisceau d'égale intensité injecté dans le chemin optique du signal. Le contraste des franges d'interférences est égal à $|\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0 \rangle|$, on peut donc directement en déduire le paramètre $\eta_{\text{recouvrement}}$ à l'aide de l'équation (4.36).

Ensuite vient le recouvrement spectral, entre le spectre du mode étudié et le spectre de l'oscillateur local. Pour les premiers modes de la famille Hermite-Gauss, notre façonneur d'impulsion nous assure une très haute fidélité et donc un bon recouvrement. En revanche, dès que l'ordre du mode est élevé, il a une partie non-négligeable de sa puissance dans les ailes, là où le faisceau d'oscillateur local n'en dispose pas. Il est alors impossible d'obtenir une bonne fidélité, à moins d'élargir spectralement l'oscillateur local (voir 4.3.5).

Bruit électronique

Après la soustraction de photocourants, le courant résultant est amplifié par un étage d'amplification électronique. Cette amplification ajoute du bruit au signal. On rend compte du bruit en ajoutant un terme au photocourant :

$$i(t) = Ax(t) + i_e(t) \quad (4.37)$$

On a posé A le coefficient d'amplification, i_e le courant équivalent au bruit électronique et $x(t)$ le résultat de la mesure de quadrature à l'instant t . On mesure la qualité de l'amplificateur par la quantité de bruit qu'il ajoute. Le courant $i_e(t)$ a une densité spectrale de puissance que l'on note S_e . On parle aussi de bruit d'obscurité car ce bruit est présent même lorsque qu'aucun faisceau n'arrive sur les photodiodes.

Le bruit de grenaille S est utilisé pour quantifier la force du signal. Il est égal à la densité spectrale de puissance pour le signal $i(t)$, calculé avec l'état quantique vide en entrée de la détection homodyne. C'est le bruit du vide. Le rapport entre ces deux grandeurs S et S_e est nommé séparation obscurité-grenaille, ou *clearance* en anglais. On peut montrer [Appel, 2007 ; Kumar, 2012] que le bruit électronique est équivalent à une perte optique avant la détection homodyne causée par lame séparatrice de transmission :

$$\eta_{elec} = 1 - \frac{S_e}{S} \quad (4.38)$$

L'efficacité quantique des photodiodes

Les photodiodes n'ont jamais une efficacité de détection de 100 %. Cependant, à nos longueurs d'onde, il est possible de trouver dans le commerce des photodiodes d'efficacité supérieure à 90 %. En choisissant des diodes triées, il est même possible d'obtenir $\eta_{det} > 97$ %.

Efficacité totale

Les différentes efficacités sont agrégées pour donner une efficacité totale à insérer dans l'équation (4.31) :

$$\eta_{totale} = \eta_{elec}\eta_{recouvrement}\eta_{det}\eta_{opt} \quad (4.39)$$

où η_{opt} se rapporte aux pertes optiques (transmission ou diffusion parasite sur des miroirs imparfaits).

4.3.4 Construction d'une détection multipixel efficace

En 2014, une première version de détection homodyne spectralement résolue a été construite. Dans sa thèse [Cai, 2015], Y. Cai en donne toutes les caractéristiques techniques : un réseau avec 2400 traits/mm (Spectrogon modèle 715.704.1301 d'efficacité 92 %) utilisé avec une barrette de photodiode de 16 pixels (Hamamatsu modèle S8558 d'efficacité quantique 90 %). Les signaux des 8 diodes centrales sont ensuite amplifiés grâce à des amplificateurs réalisés par l'atelier électronique du laboratoire. Les signaux électriques résultants sont ensuite soustraits et envoyés à l'ordinateur.

Cette détection a été utile (notamment pour les travaux de V. Thiel [Thiel, 2015]), mais elle souffre d'une limitation majeure : ses pertes optiques sont très élevées. Cela fait perdre tout espoir d'obtenir des valeurs négatives de la fonction de Wigner. Nous avons donc décidé d'en construire un nouveau modèle.

La première amélioration à apporter est l'acquisition d'une barrette de photodiodes dotée d'une plus grande efficacité quantique. Cela implique de développer aussi une barrette de microlentilles adaptée et une électronique sur-mesure. L'autre optimisation est d'effectuer la soustraction des photocourants directement après la diode, pour éviter d'ajouter le bruit électronique d'amplification.

Barrette de photodiodes

Il n'existe pas dans le commerce une barrette de photodiodes dotée d'une haute efficacité quantique. Nous avons donc fait construire une barrette, à l'aide de diodes Hamamatsu modèle S3883. Dans le catalogue, ces diodes ont une efficacité quantique de 92 %, mais nous avons pu en obtenir avec une efficacité supérieure, directement sous forme de puces. Nous comptons donc sur 95 % d'efficacité quantique. Le défi est maintenant de les assembler en barrettes. Nous avons eu recours à une société d'assemblage électronique : HCM.SYSTREL (groupe SERMA).

Nous avons opté pour une barrette de 8 diodes. Ces puces sont des carrés de 2,2 mm de côté et l'aire photosensible est un disque de diamètre 1,5 mm. Pour tenir dans le boîtier LCC84 (le plus large des boîtiers standards), il a fallu les aligner le long de la diagonale, comme présenté en figure 4.14.

Avec un écart de 0,3 mm entre chaque puce, l'écart d'un centre de diode au suivant est de 2,5 mm. La cathode, placée sous la puce, est en contact électrique avec une longue plage conductrice. Cette plage conductrice est reliée par soudeure par boule (*ball bonding*) aux contacts du boîtier, qui transmet ensuite le signal aux broches. De même, on relie l'anode (la surface photo-sensible) à une autre plage conductrice par *bonding* et cette plage est ensuite connectée à un contact du boîtier. Sur la figure 4.14 sont représentés tous ces éléments. Fina-

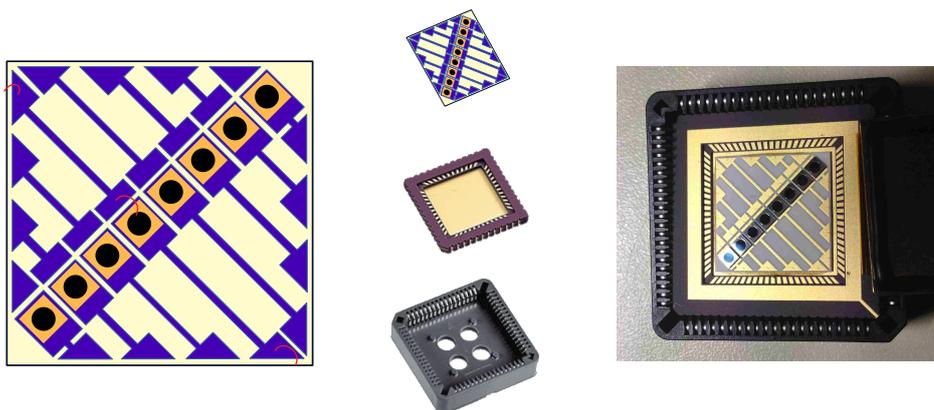


FIGURE 4.14 – La barrette de photodiodes. À gauche, la plage en céramique (jaune pâle) et les plages conductrices (bleu) sur lesquels ont été collées par brasage les diodes S8338 achetées sous forme de puces. La partie photosensible est en noir. En rouge figurent les fils de *ball bonding*. Toutes ces couleurs sont arbitraires car choisies pour leur lisibilité. Au centre, un éclaté de l'assemblage : la plage en céramique est insérée dans le mini-boîtier LCC84, lui-même fixé dans un réceptacle 8484-1B1-RK-TP. À droite, une photographie de la barrette.

lement, on obtient une barrette de photodiodes avec 8 broches correspondant aux 8 anodes et 8 broches correspondant aux 8 cathodes.

Réseau et lentille cylindrique

La barrette de diodes est longue de 2 cm (8 fois 2,5 mm). Il faut donc étaler le faisceau sur cette longueur. L'étalement dépend directement de l'élément dispersif utilisé. Avec un réseau à 400 traits/mm, 193 cm de propagation sont nécessaires pour étaler un spectre de largeur 11 nm (FWHM) sur 2 cm⁵. Avec un réseau à 1820 traits/mm, 30 cm de propagation suffisent.

Pour être plus précis, cette distance de propagation dépend de la proportion de lumière que l'on veut voir arriver dans les 2 cm. On peut s'imposer de collecter une portion du spectre correspondant à une largeur de 6 écarts-types (on parle de règle des 6σ). Dans ce cas, les pertes ne sont que de 0,3 %, mais les diodes aux extrémités de la barrette ne collectent que 1 % de l'intensité incidente. Le bruit électronique est alors trop grand par rapport au signal et cela équivaut à des pertes (voir le paragraphe sur le bruit électronique en 4.3.3). On peut donc plutôt utiliser un critère équivalent à 5σ qui donne 1,2 % de pertes mais 2,4 % sur les diodes latérales.

5. En appliquant la règle des 6σ décrite ci-dessous.

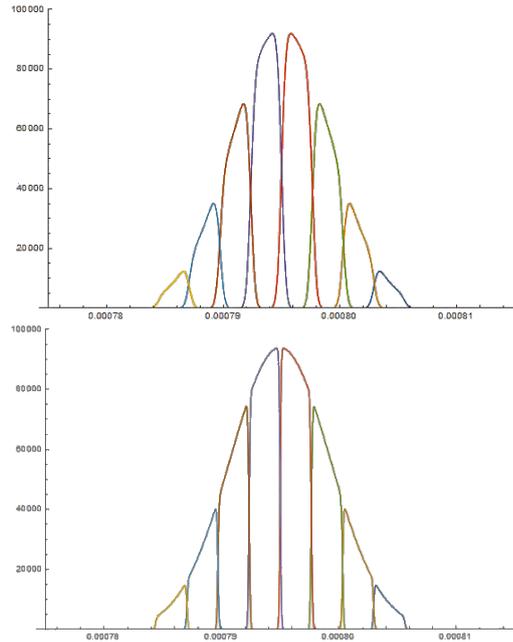


FIGURE 4.15 – Longueurs d’ondes reçues par chacune des diodes de la barrette. *En haut*, les courbes sont obtenues pour un réseau à 1820 traits/mm, une distance de propagation de 30 cm, un *waist* incident de 0,57 mm. *En bas*, un miroir cylindrique a été ajouté après le réseau, de distance focale 36 cm. Le recouvrement spectral est diminué.

Le spectre se répartit sur les diodes. La séparation n’est pas parfaite : il y a un recouvrement spectral entre les longueurs d’ondes reçues par une diode et celles reçues par ses voisines. Pour le visualiser, nous présentons en figure 4.15 (en haut) les spectres reçus par chaque diode. Nous avons utilisé le critère à 5σ et un *waist* d’entrée égal à 0,57 mm. Chaque courbe est obtenue en intégrant le faisceau sur une largeur de 2,5 mm. Le recouvrement entre modes adjacents est proportionnel à la largeur spectrale et au *waist* du faisceau. Il est inversement proportionnel à la longueur d’étalement (20 mm dans notre cas).⁶ Ce recouvrement est gênant pour les mesures, il nous faut donc le minimiser.

La solution est simple : il faut rajouter un miroir cylindrique (ou une lentille)

6. La formule du recouvrement \mathcal{R} entre le spectre \mathcal{A}_n et son voisin \mathcal{A}_{n+1} est égale à

$$\mathcal{R} = \int |\mathcal{A}_n(x, \lambda)|^2 |\mathcal{A}_{n+1}(x, \lambda)|^2 dx = \frac{\ln 2}{\sqrt{\pi/2}} \cdot \frac{\bar{\Delta}\lambda}{\text{Étal}} \cdot 5 \cdot w_{in}$$

où j’ai noté w_{in} le *waist* à l’entrée (chez nous 0,57 mm), $\bar{\Delta}\lambda$ la FWHM spectrale (11 nm). Le 5 est dû à la règle du 5σ , ce serait un 6 pour la règle du 6σ , etc. Avec nos valeurs numériques, cela donne 0,17 nm, à comparer avec le recouvrement d’un mode avec lui-même : 1.5 nm.

à la distance du réseau où l'étalement est suffisant. La longueur focale f_{cyl} de ce miroir doit être prise égale à cette distance de propagation. Alors, le couple réseau-miroir marche exactement comme pour la ligne $4f$ utilisée pour la mise en forme d'impulsions (voir 2.2.2). Pour que l'ajout du miroir cylindrique soit efficace, il faut tout de même s'assurer que pour un faisceau monochromatique, le *waist* dans le plan focal du miroir cylindrique soit plus petit que le *waist* d'entrée. Cela pose une limite maximale : f_{cyl} doit être plus petit que $f_{max} = w_{in}^2 / \pi \lambda$. Dans notre cas, $f_{max} = 126$ cm. Il faut donc une longueur de propagation plus courte que cela, donc un élément suffisamment dispersif. Dans cette configuration, le recouvrement est maintenant convenablement réduit ⁷. Avec une largeur spectrale de 10 nm et un réseau à 1820 traits/mm, l'ajout d'un miroir cylindrique de focale 36 cm réduit le recouvrement de 70 %. Les spectres correspondants sont présentés en figure 4.15.

Barrette de microlentilles

Pour s'assurer que toute la lumière arrive sur une des photodiodes de la barrette et non pas dans l'espace qui les sépare, nous avons recours à une barrette de microlentilles. Il s'agit simplement de lentilles accolées, en nombre égal à celui des diodes.

Il faut que l'écart entre les axes optiques de deux lentilles adjacentes corresponde à l'écart entre deux diodes adjacentes, soit 2,5 mm dans notre cas. Comme il n'existe pas de réseau de microlentilles avec une période de 2,5 mm, nous avons dû en faire construire sur mesure. Pour cela, nous avons eu recours au services de PowerPhotonic, une entreprise qui propose la fabrication d'optiques usinées. Nous avons créé un profil d'épaisseur correspondant à la barrette de lentilles désirée. Il est représenté en figure 4.16.

Les limites techniques de l'outil LightForge de PowerPhotonic permettent d'usiner une focale de 30 mm au minimum. C'est cette valeur de 30 mm que nous avons retenue pour assurer une focalisation du faisceau dans la zone photosensible.

Amplificateur électronique à plusieurs voies

Pour recueillir les signaux de détection homodyne, il a fallu mettre en place un circuit intégré de lecture. Pour le premier système multipixel de 2014, le

7. Il vaut maintenant

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{\pi}w_{in}G}$$

où G désigne la puissance dispersive du réseau (2,6 mrad/nm pour 1820 traits/mm; 0,41 mrad/nm pour 400 traits/mm).

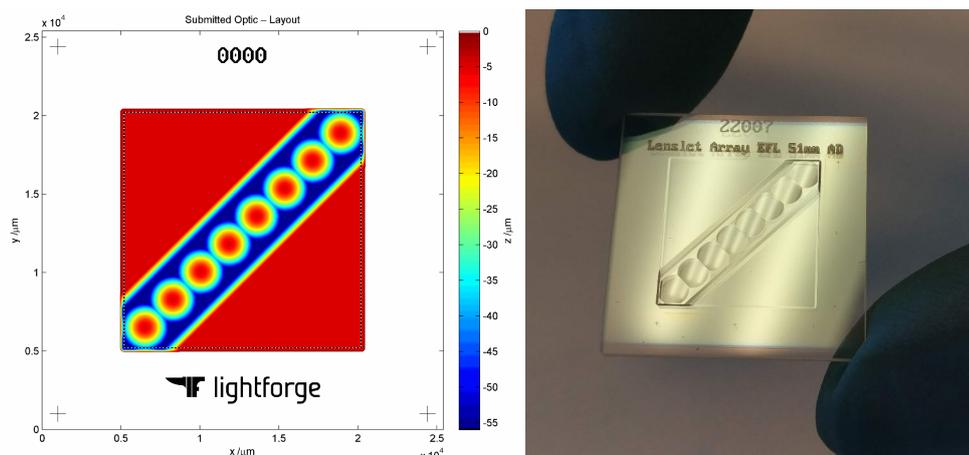


FIGURE 4.16 – Plan avec cote de la barrette de microlentilles préparée par nos soins. La réalisation a été confiée à LightForge. L'écart entre deux lentilles adjacentes (le *pitch*) est de 2,5 mm.

choix avait été fait de répliquer l'amplificateur utilisé dans le cas à une seule diode [Cai, 2015]. Les huit amplificateurs sont placés dans un boîtier et ce pour chaque barrette de photodiodes. Ensuite, on effectue huit soustractions, à partir des seize signaux issus des deux boîtiers, dont les résultats sont acquis par l'ordinateur.

Nous avons choisi de ne pas procéder ainsi, mais de développer un système avec moins de bruit électronique. Le premier changement est de faire la soustraction directement à la sortie des barrettes de photodiodes et d'amplifier seulement après la soustraction le signal obtenu. L'amplification se fait par un schéma à transimpédance, qui est le même que celui utilisé dans le détecteur à une seule paire de diodes. La deuxième amélioration consiste à rassembler les huit circuits d'amplification sur la même carte électronique, pour pouvoir enfermer la carte dans une boîte protectrice. De cette manière, le circuit est complètement isolé du bruit ambiant du laboratoire. Enfin, des composants à bas bruit ont été choisis (technologie cms).

Avec un circuit de lecture ainsi préparé, dont nous présentons la carte électronique en figure 4.17, nous nous attendons à de meilleures performances en termes de bruit électronique.

La phase de test a montré que le nouveau circuit était en effet plus performant que l'ancien pour les bruits environnementaux. En revanche, un problème majeur est à contourner : la diaphonie entre les voies (*cross-talk*). L'enchevêtrement des éléments des différentes voies cause un mélange indésirable entre les signaux.

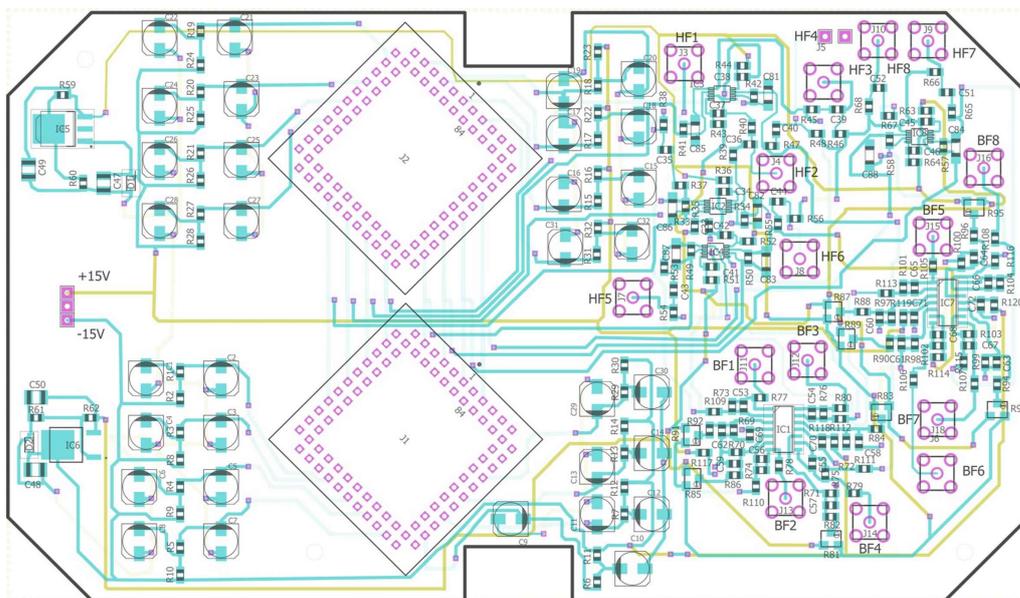


FIGURE 4.17 – La carte électronique

Cela demande une adaptation et une nouvelle version du circuit de lecture est en cours de développement.

4.3.5 Élargissement spectral avec une fibre multimode

Les supermodes produits par le SPOPO ne sont pas tous de même largeur spectrale : elle croît avec l'ordre du mode, à l'instar des fonctions de Hermite-Gauss, dont la variance du mode n vaut $\sqrt{n+1}$ fois celle du premier mode. Comme notre oscillateur local gaussien est de largeur fixe, plus le mode est d'ordre élevé, plus il est difficile de le reproduire de manière satisfaisante. Cela est équivalent à des pertes optiques, ce qui décroît le *squeezing* mesuré dans le cas d'un état comprimé, ou rend la fonction de Wigner positive dans le cas d'un état photo-soustrait.

Le moyen de remédier à cela nous a été fourni par N. Joly, du Max Planck Institut d'Erlangen : utiliser une fibre à cristal photonique. Il s'agit d'une fibre à cœur solide structurée en cristal photonique, dans laquelle l'impulsion s'élargit par effet d'automodulation de phase [Hammer, 2016 ; Joly, 2012]. L'élargissement du spectre est d'autant plus marqué que la fibre est longue et l'intensité élevée.

Nous avons testé cette fibre au laboratoire, le résultat est présenté en figure 4.18. La légende indique la puissance injectée dans la fibre (par exemple 50 mW pour la courbe rouge) ainsi que la puissance en sortie de fibre (16 mW pour la

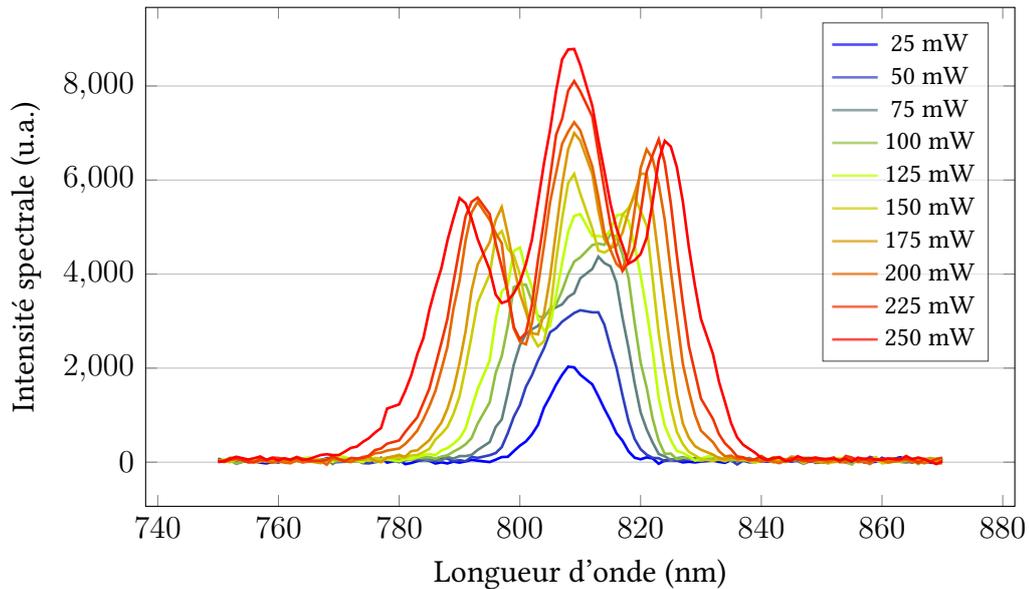


FIGURE 4.18 – La forme spectrale à la sortie de la fibre à cristal photonique. La légende indique la puissance en entrée et en sortie de la fibre. Plus la puissance est élevée, plus le spectre s'étend sur une large bande spectrale.

courbe rouge). Le taux de transmission ne dépend pas de la puissance en entrée et vaut environ 30 %. En revanche, la forme spectrale dépend fortement de la puissance en entrée. Pour des faibles puissances, le spectre est gaussien (comme le spectre en entrée). Quand on augmente la puissance, il s'élargit et commence à devenir moins gaussien, comme sur la courbe rouge, puis jaune. À partir de 100 mW, il commence à se former un creux dans le spectre, lui donnant une forme de dos de chameau. Puis, vers 150 mW, un deuxième creux apparaît. Plus la puissance en entrée est importante, plus le spectre en sortie s'étend sur une large plage de longueurs d'onde, tant et si bien qu'avec 250 mW injectés dans la fibre, le spectre s'étend sur environ 50 nm.

L'amplitude de cet élargissement spectral dépend de la longueur de fibre utilisée : une fibre plus longue étire davantage le spectre, mais au détriment de la transmission. Pour les mesures présentées en figure 4.18, nous avons utilisé un morceau de fibre long d'environ 3 cm. Les spectres obtenus sont excessivement larges pour l'usage que nous voulons en faire, il est donc prévu d'utiliser un morceau de fibre plus court quand nous installerons la fibre dans le chemin de l'oscillateur local.

Ces premiers essais sont concluants : la fibre va permettre d'élargir suffisamment le spectre pour obtenir un recouvrement spectral optimal avec un grand nombre de supermodes.

4.4 Résultats de mesure

Tous les outils nécessaires au contrôle de la forme spectrale des supermodes ont été implémentés au cours de ce travail de thèse. Le façonneur d'impulsions à 400 nm a été construit et a des performances satisfaisantes. Les éléments de la détection homodyne multipixel ont été rassemblés : un réseau en transmission de haute efficacité, une barrette de photodiodes à haute efficacité quantique, une barrette de microlentilles. Seule l'électronique d'amplification des signaux homodynes n'a pas donné les résultats espérés.

Il nous est donc impossible pour le moment de mesurer des états issus d'une mise en forme spectrale de la pompe, car la détection multipixel est nécessaire pour reconstruire la matrice de covariance complète Γ et en déduire l'état. Il y a tout de même un cas particulier qui nous est accessible : le cas sans phase spectrale de la pompe. En effet, si la phase spectrale de la pompe est constante, les sous-matrices Γ_{px} et Γ_{xp} sont nulles. Le reste de la matrice de covariance est mesurable avec une détection homodyne habituelle.

Nous avons donc préparé une telle forme spectrale : la pompe alternée, déjà présentée dans le paragraphe 4.1.4 en page 83. Rappelons les résultats issus de la théorie : les éléments anti-diagonaux des matrices de covariances Γ_X et Γ_P sont proches de 0. Les simulations sont présentées dans la partie haute de la figure 4.19 et les résultats expérimentaux dans la partie basse.

Tout d'abord, nous constatons que cette anti-diagonale faible se retrouve bien dans nos mesures⁸. De plus, l'aspect des matrices avec et sans phase alternée est différent, ce qui prouve que la mise en forme de la pompe a bien un effet sur les modes de l'état de sortie.

8. En revanche, la théorie prédit des signes opposés pour les éléments situés de part et d'autre de l'anti-diagonale, tandis qu'ils sont de même signe sur les mesures expérimentales. L'explication est la suivante : la reconstruction des matrices de covariances nécessite de faire des hypothèses, puisque nous n'avons pas accès aux phases relatives entre les modes. La reconstruction présentée ici est fondée sur l'hypothèse que les états sont tous comprimés selon la quadrature p . Or, les états sont alternativement comprimés sur p et sur q , comme nous l'avons vu précédemment.

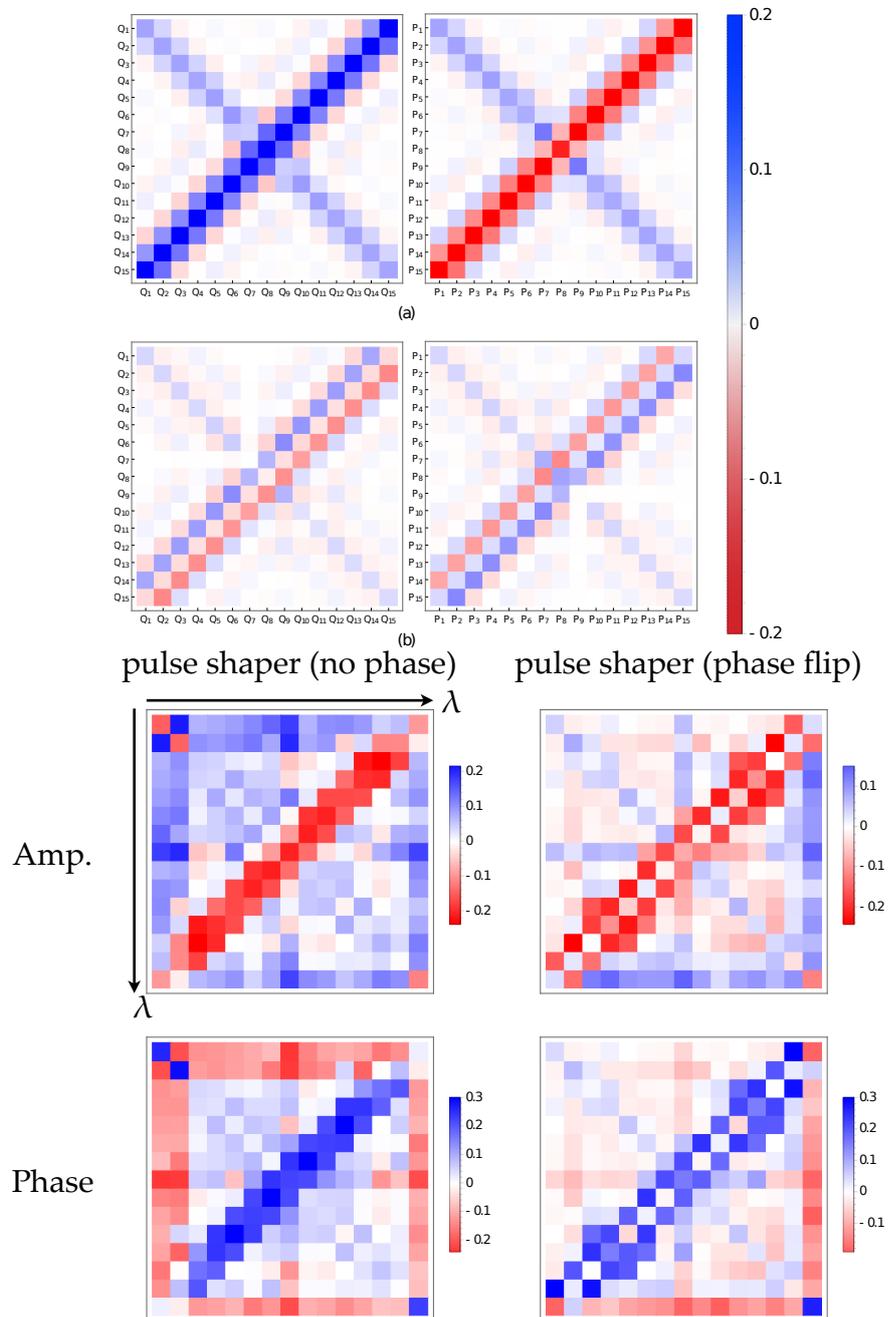


FIGURE 4.19 – Matrices de covariance obtenues lorsque la pompe a une phase alternée. *En haut*, les prédictions issues de la simulation de F. Arzani [Arzani, 2018a]. *En bas*, les résultats de nos mesures expérimentales.

Chapitre 5

Soustraction de photon au laboratoire

Plan du chapitre

5.1 Généralités sur la soustraction de photon	112
5.1.1 Cas monomode	113
5.1.2 Cas multimode	114
5.1.3 Effet de la soustraction sur un état gaussien	117
5.2 Réalisation expérimentale	121
5.2.1 Construction	121
5.2.2 Tomographie du soustracteur	124
5.3 Dégaussification par soustraction de photon	130
5.3.1 Remarques préparatoires	130
5.3.1.1 Acquisition de données et inférence de la phase	130
5.3.1.2 Inférence du mode temporel	130
5.3.1.3 Kurtosis	131
5.3.1.4 Tomographie d'état	132
5.3.2 Soustraction dans un supermode	132
5.3.3 Soustraction dans une superposition de supermodes	137
5.4 Soustraction dans un cluster	140
5.4.1 Création des canevas quantique	140
5.4.2 Soustraction dans les nœuds d'un canevas quantique	142
5.5 Conclusion	146

Dans ce chapitre 5, nous allons présenter les résultats de la soustraction de photon sur des états non-classiques. La soustraction sur un état multimode a été étudiée théoriquement dans notre groupe [Averchenko, 2014; Averchenko, 2016; Walschaers, 2017a; Walschaers, 2017b], les résultats principaux seront présentés dans la première partie du chapitre. Le soustracteur de photons a

été monté et caractérisé, cela a donné lieu à un article [Ra, 2017] dont nous reprenons les principaux résultats. Enfin, ce soustracteur a été utilisé sur des états multimodes, pour obtenir des fonctions de Wigner non-gaussiennes. Nous avons, au cours des quelques derniers mois, obtenu un grand nombre de résultats qui sont présentés ici pour la première fois ¹.

5.1 Généralités sur la soustraction de photon

Les termes « soustraction de photon » semblent parler d’eux-mêmes : on saisit un des photons, et on le retire du faisceau. Ce processus conduit pourtant à des observations expérimentales surprenantes. Par exemple, en enlevant un photon, il arrive que le nombre moyen de photons dans le faisceau soit augmenté [Parigi, 2007]. Ou encore : soustraire puis ajouter un photon n’est pas équivalent à ajouter puis soustraire un photon... Et aucune de ces deux séquences ne donne le même état qu’avant manipulation !

La définition rigoureuse de la soustraction de photon part du constat que dans la base de Fock, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ (1.9). La soustraction est liée à l’opérateur \hat{a} : soustraire un photon à un état $|\psi\rangle$, c’est lui appliquer l’opérateur \hat{a} , à une normalisation près. Cette normalisation est une division par le nombre moyen de photons dans l’état initial $|\psi\rangle$. Plus précisément, pour un mode donné, d’opérateur associé \hat{a} , on définit donc l’opérateur de soustraction dans ce mode :

$$\mathcal{S}_{\hat{a}}[\hat{\rho}] = \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \quad (5.1)$$

Cet opérateur ne préserve pas la trace, qui vaut :

$$P = \text{Tr}(\mathcal{S}_{\hat{a}}[\hat{\rho}]) = \text{Tr}(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}) = \langle \hat{N} \rangle \quad (5.2)$$

Cela vient du fait que cette opération ne s’obtient pas par une évolution unitaire de type (1.30). Nous allons voir qu’en effet, nous la réalisons de manière non-déterministe, à l’aide d’un séparateur de faisceau et d’un détecteur de photons.

Puisque nous avons affaire à des ressources multimodes, considérons maintenant la soustraction dans la combinaison de deux modes, par exemple dans le mode d’opérateur $(\hat{a}_1 + \hat{a}_2)/\sqrt{2}$. Son opérateur de soustraction est $\mathcal{S}_{(\hat{a}_1 + \hat{a}_2)/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\mathcal{S}_{\hat{a}_1} + \mathcal{S}_{\hat{a}_2} + \hat{a}_1\hat{\rho}\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1\hat{\rho}\hat{a}_2^\dagger)$, il contient des termes croisés $\hat{a}_i\hat{\rho}\hat{a}_j^\dagger$ qui le différencient de la simple somme $(\mathcal{S}_{\hat{a}_1} + \mathcal{S}_{\hat{a}_2})/2$. Cette différence est tout à fait semblable à celle qui existe entre la superposition cohérente de deux états quantiques et leur mélange statistique. Nous verrons que toute soustraction de photon se décompose comme un mélange statistiques de soustractions pures, c’est-à-dire de soustractions du type (5.1).

1. Un article est en préparation.

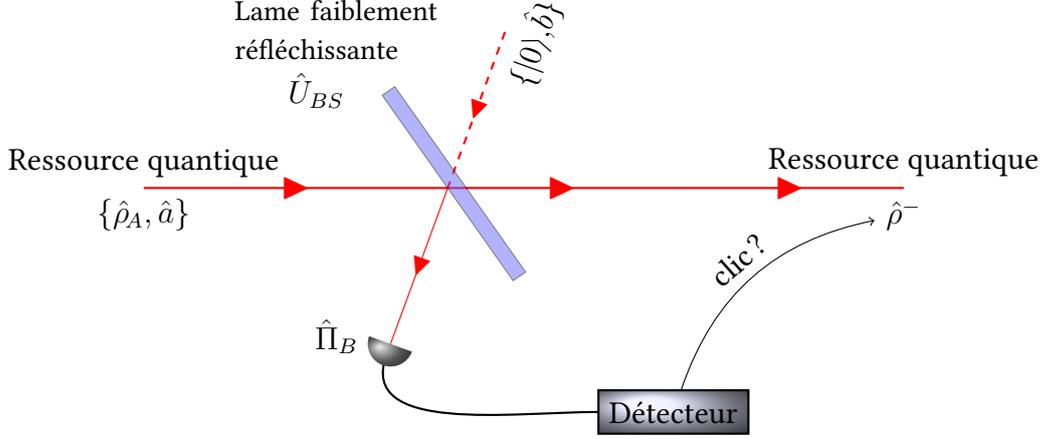


FIGURE 5.1 – Soustraction de photon à l’aide d’une lame séparatrice.

5.1.1 Cas monomode : le modèle de la lame séparatrice

Pour soustraire un photon, le dispositif employé revient souvent à celui présenté sur la figure 5.1 : une lame faiblement réfléchissante envoie une partie du faisceau incident vers un détecteur de photon. Lorsque celui-ci détecte un photon, alors on sait que l’état transmis a perdu un photon. On conditionne la suite de l’expérience, en particulier les mesures de l’état soustrait, au succès de la soustraction [Wenger, 2004b; Wenger, 2004a]. On parle donc de soustraction annoncée.

En termes plus mathématiques, on a affaire à un système à deux modes qui se mélangent : le mode qui va subir la soustraction, dont on notera \hat{a} l’opérateur d’annihilation, et le mode auxiliaire d’opérateur \hat{b} . Initialement, le premier porte la ressource $|\psi\rangle$ et le second est vide. Ces deux modes sont mélangés par une lame séparatrice. On note le coefficient de réflexion θ et on suppose $\theta \ll 1$. Leur interaction sur la lame partiellement réfléchissante s’exprime sous forme de transformation unitaire :

$$\hat{U}_{BS} = \exp \left[i\theta(\hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{b} \hat{a}^\dagger) \right] \approx \mathbb{1} + i\theta(\hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{b} \hat{a}^\dagger) \quad (5.3)$$

Le mode auxiliaire est envoyé vers un détecteur de photons. La détection est modélisée par un opérateur de détection $\hat{\Pi}_B$. Il s’agit d’un détecteur de photons uniques qui ne réagit que lorsque l’état en entrée est $|1\rangle$ sur le mode auxiliaire : $\hat{\Pi}_B = |1\rangle\langle 1|_B$.

L’état du système à deux modes avant la lame séparatrice est $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |0\rangle\langle 0|_B$. On note $\hat{\rho}_A = |\psi\rangle\langle\psi|$ la ressource dans le mode principal. Après le séparateur, l’état du système est $\hat{U}_{BS}\hat{\rho}\hat{U}_{BS}^\dagger$. Si on se restreint aux moments où le détecteur a été activé, l’état résultant est :

$$\hat{\rho}^- \propto \text{Tr}_B \left(\hat{\Pi}_B \hat{\rho} \right) = \text{Tr}_B \left(|1\rangle\langle 1|_B \hat{U}_{BS} \hat{\rho} \hat{U}_{BS}^\dagger \right) = \theta^2 \hat{a} \hat{\rho}_A \hat{a}^\dagger = \theta^2 \mathcal{S}_a[\hat{\rho}_A] \quad (5.4)$$

On retrouve l'opérateur de soustraction \mathcal{S} comme présenté en (5.1). Comme précédemment, il faut normaliser. Le facteur de normalisation est égal à $\theta^2 \langle \hat{N} \rangle$, qui est le nombre moyen de photons réfléchis par la lame. L'état conditionné est donc un état photo-soustrait.

5.1.2 Cas multimode

Séparateur multimode

On s'intéresse maintenant à la généralisation multimode de la lame séparatrice, c'est-à-dire une opération de couplage entre les modes du faisceau entrant et les modes d'un faisceau auxiliaire. On appelle cela un séparateur multimode. Il est toujours possible [Averchenko, 2016] de trouver une base de modes $\mathbf{w}_1^A, \mathbf{w}_2^A, \dots$ du faisceau signal (dont on écrit les opérateurs associés $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$) et une base de modes du deuxième faisceau $\mathbf{w}_1^B, \mathbf{w}_2^B, \dots$ (opérateurs associés $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots$) tels que les modes sont couplés deux à deux. On les appellera modes propres du séparateur. Chaque mode \mathbf{w}_n^A est couplé au mode \mathbf{w}_n^B (et seulement au mode \mathbf{w}_n^B) avec une force de couplage θ_n qui est l'analogie de la réflexivité du cas monomode. Dans cette base, l'équivalent multimode de l'équation (5.3) est :

$$\hat{U}_{BS} = \exp \left[i \sum_n \theta_n (\hat{b}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{b}_n \hat{a}_n^\dagger) \right] \approx \hat{\mathbb{1}} + i \sum_n \theta_n (\hat{b}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{b}_n \hat{a}_n^\dagger) \quad (5.5)$$

Détecteur de photons

Dans ce qui précède, on suppose que tous les photons réfléchis vont vers le détecteur et que celui-ci prend en compte tous les photons réfléchis par le séparateur. Un modèle plus précis doit inclure le fait que l'efficacité de détection n'est pas égale à 100 % et que cette efficacité dépend éventuellement de la longueur d'onde. On décrit cela par les modes propres du détecteur. En effet, le détecteur a des modes propres $\mathbf{w}_1^D, \mathbf{w}_2^D, \dots$, qui ont des efficacités de détections γ_m [TualleBrouri, 2009]. Un détecteur idéal a une efficacité parfaite pour tous les modes. On modélise² la détection par un mélange statistique d'opérateurs

2. On peut raffiner le modèle en introduisant les opérateurs de Kraus ou en intégrant le fait que le détecteur ne fait pas de différence entre un état à 1 photon et un état à plusieurs photons,

de détection dans des modes \mathbf{w}_m^D , avec des efficacités de détections γ_m avec $0 \leq \gamma_m \leq 1$:

$$\hat{\Pi} = \sum_m \gamma_m |1_m\rangle \langle 1_m|_D \quad (5.6)$$

État conditionné par la réussite de la soustraction

Nous allons nous intéresser à l'état que l'on mesure après le soustracteur dans le cas où le détecteur a annoncé le succès de la soustraction. On parle d'*état annoncé* ou *conditionné* car il est conditionné par la détection d'un photon dans le faisceau auxiliaire. On le calcule en faisant la trace sur les modes du faisceau auxiliaire de l'état projeté sur le détecteur, après la séparatrice :

$$\hat{\rho}^- \propto \text{Tr}_B \left(\hat{\Pi}_B \hat{U}_{BS} \hat{\rho} \hat{U}_{BS}^\dagger \right) \quad (5.7)$$

Cette équation est analogue à (5.4), à ceci près que la trace est faite non plus sur un unique mode mais sur tous les modes du faisceau auxiliaire. Les modes \mathbf{w}_m^D de détection et les modes propres \mathbf{w}_j^B du séparateur multimode sont deux bases modales de ce même faisceau. Leurs recouvrements $(\mathbf{w}_j^B, \mathbf{w}_m^D)$ vont donc jouer un rôle. En remplaçant dans l'équation (5.7) les expressions issues de (5.5) et (5.6), on trouve :

$$\hat{\rho}^- = \sum_{i,j} \chi_{ij} \hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger / P \quad (5.8)$$

avec

$$\chi_{ij} = \sum_m \gamma_m (\mathbf{w}_j^B, \mathbf{w}_m^D) \theta_j^* \theta_i (\mathbf{w}_m^D, \mathbf{w}_i^B) \quad (5.9)$$

et

$$P = \sum_{i,j} \chi_{ij} \text{Tr}(\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger) \quad (5.10)$$

Avec la somme de fréquences

La somme de fréquences décrite en 2.3.4 agit comme un séparateur multimode. Rappelons que son opérateur d'évolution unitaire est (au premier ordre) :

$$\hat{U}_{SFG} = \hat{\mathbb{1}} + G \sum_{n,m} L_{SFG}(\omega_n, \omega_m) \hat{a}_{s,n} \hat{a}_{c,m}^\dagger + h.c. \quad (2.25)$$

c'est-à-dire en utilisant $\mathbb{1} - |0\rangle\langle 0|$ au lieu de $|1\rangle\langle 1|$. Notre modèle simple suffit à éclairer la situation, nous n'irons donc pas plus loin dans cette voie déjà développée ailleurs [Barnett, 1998; TualleBrouri, 2009].

avec $\hat{a}_{s,n}$ les opérateurs d'annihilation dans le faisceau de signal et $\hat{a}_{c,m}^\dagger$ les opérateurs de création dans le mode complémentaire (converti à la fréquence double $2\omega_0$). G est un facteur de proportionnalité qui dépend des paramètres du cristal et de la pompe.

Pour identifier cette équation à l'équation (5.5), il faut diagonaliser L_{SFG} . Cela nous donne les modes propres de l'interaction de somme de fréquences. Sa décomposition de Schmidt s'écrit :

$$L_{SFG}(\omega_s, \omega_c) = \sum_k \sqrt{\sigma_k} w_k(\omega_c) v_k^*(\omega_s) \quad (5.11)$$

On effectue alors les changements de base correspondant aux modes du signal w_k et du complémentaire v_k pour trouver les opérateurs création et annihilation dans ces nouvelles bases modales :

$$\hat{s}_k = \sum_n v_k^*(\omega_n) \hat{a}_{s,n} \quad \text{et} \quad \hat{c}_k^\dagger = \sum_n w_k(\omega_m) \hat{a}_{c,m}^\dagger \quad (5.12)$$

De telle sorte que

$$\hat{U}_{SFG} = \hat{\mathbb{1}} + G \sum_k \sqrt{\sigma_k} (\hat{s}_k \hat{c}_k^\dagger + \hat{c}_k \hat{s}_k^\dagger) \quad (5.13)$$

D'un point de vue quantique, l'équation (5.13) correspond à une somme de processus de création d'un photon dans le mode du complémentaire et d'annihilation d'un photon dans le mode du signal, avec des efficacités relatives σ_k . On reconnaît le séparateur de l'équation (5.5), où les forces de couplage θ_n sont proportionnelles aux coefficients $\sqrt{\sigma_k}$ issus de la diagonalisation de L_{SFG} .

Sélectivité modale

L'équation (5.8) fait intervenir la matrice de soustraction χ_{ij} . Si l'on connaît les modes propres du séparateurs utilisés pour écrire l'équation (5.5) et si le détecteur est idéal ($\gamma_m = 1$ dans tous les modes), alors la matrice est diagonale dans la base de ces modes de séparateurs. En pratique, on ne connaît pas expérimentalement les modes de soustraction : il faut donc les extraire de la matrice χ_{ij} . Celle-ci a des propriétés analogues à celle d'une matrice densité. Tout comme la matrice densité en (1.16), on peut la diagonaliser. Il existe une base propre dont les opérateurs d'annihilation sont notés $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots$ et avec lesquels on peut écrire :

$$\hat{\rho}^- \propto \sum_{i,j} \chi_{ij} \hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger = \sum_n p_n \hat{A}_n \hat{\rho} \hat{A}_n^\dagger \quad (5.14)$$

On définit un nombre de Schmidt $K = 1 / \sum_n p_n^2$, que l'on interprète comme le nombre effectif de modes de soustraction [Brecht, 2014]. Quand celui-ci est grand, le processus de soustraction est impur et les états photo-soustraits sont eux-mêmes impurs. Pour conserver la pureté des états qui subissent l'action de notre soustracteur, il nous faut réduire autant que possible le nombre effectif de modes de soustraction. Pour quantifier cela, on ré-écrit :

$$\mathcal{S}[\hat{\rho}] = p_0 \hat{A}_0 \hat{\rho} \hat{A}_0^\dagger + \sum_{n \geq 1} \hat{A}_n \hat{\rho} \hat{A}_n^\dagger \quad (5.15)$$

avec $p_0 > p_1 > \dots$, et on appelle p_0 la *sélectivité modale*. Plus p_0 est proche de 1 et plus K est proche de 1. Si l'on suppose que l'état en entrée $\hat{\rho}$ est pur, alors chaque élément $\hat{A}_n \hat{\rho} \hat{A}_n^\dagger$ dans l'équation (5.14) est pur : la pureté de l'état de sortie est donc celle du soustracteur. Autrement dit, appliqué à des états purs, plus la sélectivité modale est bonne, plus notre soustracteur conserve la pureté des états sur lesquels il opère.

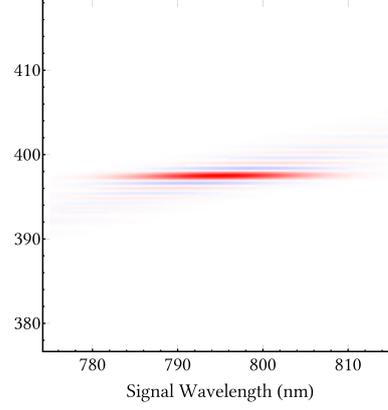
La lame séparatrice a une très faible sélectivité modale. Une explication est la suivante : elle ne mélange pas les fréquences, ce qui fait que les bases \mathbf{w}^A et \mathbf{w}^B définies en (5.5) sont les modes monochromatiques. Les coefficients θ_n dépendent du traitement qu'a reçu la lame, mais dans notre cas de revêtements large-bande, ils sont égaux sur toute la bande spectrale d'utilisation de la lame. On a donc un très grand nombre de modes de soustraction effectif, tous avec le même poids dans la décomposition, ce qui donne un nombre de Schmidt élevé.

Au contraire, la séparation des faisceaux par somme de fréquences peut être réglée pour obtenir un coefficient dominant $\sigma_0 \gg \sigma_{k \geq 1}$ et donc une bonne sélectivité modale. On peut modifier la répartition des σ_k en ajustant la distribution spectrale jointe L_{SFG} pour la rendre séparable. Tout comme pour la conversion paramétrique descendante, cela se fait en changeant les conditions d'accord de phase dans le cristal.

La figure 5.2 présente la distribution spectrale jointe calculée pour un faisceau d'adressage de 11 nm de largeur à mi-hauteur, dans un cristal de BiBO de 2 mm de long. L'accord de phase est étroit et horizontal, ce qui tend à rendre la distribution séparable : nous obtenons des nombres de Schmidt inférieurs à 1,1. Ainsi, notre soustracteur multimode à base de somme de fréquences permet de choisir le mode de soustraction et est donc adapté à la manipulation de faisceaux multimodes, tandis que le dispositif habituel à base de lame séparatrice a une très faible sélectivité modale, qui nuit à la pureté de l'état.

5.1.3 Effet de la soustraction sur un état gaussien

La soustraction de photon sur un état gaussien (à l'exception des états cohérents) a deux effets intéressants : elle modifie la statistique de l'état pour la


 FIGURE 5.2 – La distribution spectrale jointe L_{SFG} . Tiré de [Jacquard, 2017].

rendre non gaussienne et elle modifie l'intrication. Ces effets ont été étudiés par M. Walschaers et sont présentés dans deux articles de notre groupe [Walschaers, 2017b; Walschaers, 2017a], dont nous allons maintenant présenter le formalisme et les principaux résultats.

Formalisme

Dans une base de modes \mathbf{u}_j , on peut écrire n'importe quel mode \mathbf{v} du champ à l'aide de coefficients réels : $\mathbf{v} = \sum_j (x_j + ip_j)\mathbf{u}_j$. On le représente par un vecteur réel \underline{f} :

$$\underline{f} = (x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m)^T \in \mathbb{R}^{2m} \quad (5.16)$$

L'espace \mathbb{R}^{2m} est l'espace des phases. Il a une structure symplectique qui se traduit par la matrice J telle que $J^2 = -I$, dont l'action est :

$$J \cdot \underline{f} = J \cdot (x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m)^T = (p_1, \dots, p_m, -x_1, \dots, -x_m)^T \quad (5.17)$$

Tout \underline{f} normé ($\|\underline{f}\| = 1$) est un mode dans lequel on peut faire la quantification canonique comme en (1.4), c'est-à-dire définir les quadratures $\hat{x}_{\underline{f}}$ et $\hat{p}_{\underline{f}}$ et leur commutateur. On introduit la notation Q pour les quadratures :

$$Q[\underline{f}] = \hat{x}_{\underline{f}} \quad \text{et} \quad Q[J\underline{f}] = \hat{p}_{\underline{f}} \quad (5.18a)$$

$$[Q[\underline{f}_1], Q[\underline{f}_2]] = -2i (\underline{f}_1, J\underline{f}_2) \quad (5.18b)$$

et les opérateurs d'annihilation et création sont :

$$\hat{a}_{\underline{f}} = (Q[\underline{f}] + iQ[J\underline{f}]) / 2 \quad \text{et} \quad \hat{a}_{\underline{f}}^\dagger = (Q[\underline{f}] - iQ[J\underline{f}]) / 2 \quad (5.19)$$

Un état gaussien est complètement défini par sa matrice de covariance Γ (définie en (1.46)) et les valeurs moyennes de ses quadratures. La fonction de Wigner d'un état gaussien à m modes centré en $\underline{0}$ de matrice de covariance Γ s'écrit $W_0(\underline{\beta}) = (2\pi)^{-m}(\det \Gamma)^{-1/2} \exp(-\underline{\beta}^T \Gamma^{-1} \underline{\beta}/2)$, où $\underline{\beta}$ est la variable de position dans l'espace des phases \mathbb{R}^{2m} qui regroupe les x_i et p_i utilisés précédemment.

Une soustraction de photon dans le mode \underline{g} sur l'état $\hat{\rho}$, supposée parfaitement sélective en mode comme en (5.1), s'écrit :

$$\hat{\rho}^- = \hat{a}_{\underline{g}} \hat{\rho} \hat{a}_{\underline{g}}^\dagger / \text{Tr} \left(\hat{a}_{\underline{g}}^\dagger \hat{a}_{\underline{g}} \hat{\rho} \right) \quad (5.20)$$

Si l'on soustrait un photon dans le mode \underline{g} depuis un état gaussien de matrice de covariance Γ , la fonction de Wigner de l'état résultant est :

$$W^-(\underline{\beta}) = \frac{1}{2} \left(\underline{\beta}^T \Gamma^{-1} A_g^- \Gamma^{-1} \underline{\beta} - \text{Tr} [\Gamma^{-1} A_g^-] + 2 \right) W_0(\underline{\beta}) \quad (5.21)$$

Où l'on a défini une matrice auxiliaire³ :

$$A_g^- = 2 \frac{(\Gamma - \mathbb{1})(P_g + P_{Jg})(\Gamma - \mathbb{1})}{\text{Tr} [(\Gamma - \mathbb{1})(P_g + P_{Jg})]} \quad (5.22)$$

et P_g est le projecteur sur le mode \underline{g} . L'équation (5.21) est l'outil qu'il nous faut pour analyser l'intrication de l'état et son caractère non-gaussien.

Soustraction et négativité

On voit dans l'équation (5.21) que la fonction de Wigner de l'état photo-soustrait prend des valeurs négatives si et seulement s'il existe $\underline{\beta}$ tel que $\underline{\beta}^T \Gamma^{-1} A_g^- \Gamma^{-1} \underline{\beta} - \text{Tr} [\Gamma^{-1} A_g^-] + 2 < 0$. On peut montrer que cela est équivalent à la condition :

$$\underline{g}^T \Gamma^{-1} \underline{g} + (J\underline{g})^T \Gamma^{-1} J\underline{g} > 2 \quad (5.23)$$

Connaissant la matrice de covariance, ce critère permet de prédire dans quels modes la soustraction va rendre la fonction de Wigner négative.

3. Si la sélectivité modale est imparfaite comme en 5.15 et que l'on est en présence d'un mélange statistique de soustractions dans les modes $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots$, alors cette matrice devient :

$$A_{\text{mix}}^- = 2(\Gamma - \mathbb{1}) \frac{\sum_n p_n (P_{g_n} + P_{Jg_n})}{\text{Tr} [(\Gamma - \mathbb{1}) \sum_n p_n (P_{g_n} + P_{Jg_n})]} (\Gamma - \mathbb{1})$$

Soustraction et intrication

Analyser l'intrication à partir de la fonction de Wigner revient à déterminer si elle est factorisable. Une fonction de Wigner est complètement séparable si elle peut s'écrire

$$W(\underline{\beta}) = \int d\lambda p(\lambda) W_\lambda^{(1)}(\overbrace{\beta_1}^{x_1}, \overbrace{\beta_{m+1}}^{p_1}) \dots W_\lambda^{(m)}(\beta_m, \beta_{2m}) \quad (5.24)$$

Un état est intriqué quand sa fonction de Wigner n'est pas complètement séparable. On dit qu'un état est *passivement séparable* si l'on peut trouver une base modale dans laquelle il est complètement séparable. Lorsqu'un état n'est pas passivement séparable, alors on parle d'intrication *inhérente*.

Pour analyser la nature de l'intrication dans un état de vide comprimé multimode photo-soustrait, on part de l'équation (5.21). La fonction de Wigner de l'état soustrait $W^-(\underline{\beta})$ est égale à celle de l'état gaussien de départ $W_0(\underline{\beta})$ multipliée par un polynôme en $\underline{\beta}$. Par conséquent, pour les états purs, on ne peut espérer factoriser $W^-(\underline{\beta})$ que dans la base où $W_0(\underline{\beta})$ est factorisée, car pour les états purs il existe une unique base qui factorise l'état (nous l'avons appelée base des supermodes). Il faut donc que ce polynôme en $\underline{\beta}$ soit factorisé aussi dans cette base. On peut montrer⁴ [Walschaers, 2017b] que ce n'est le cas que sur une base qui comprend \underline{g} comme élément. On en conclut que la fonction de Wigner $W^-(\underline{\beta})$ est séparable si et seulement si la soustraction a lieu dans un des modes qui factorisent $W_0(\underline{\beta})$.

Dans le cas contraire, si l'on soustrait dans un mode qui n'est pas un supermode, le vide comprimé photo-soustrait contient de l'intrication inhérente. C'est une différence notable avec l'intrication présente dans les états cluster de la partie 3.2, qui sont passivement séparables. Toutefois, cette conclusion ne s'étend pas aux états impurs, pour lesquels nous n'avons pas de résultat équivalent.

4. La preuve repose sur l'argument suivant : dans la base des supermodes, la matrice Γ est diagonale. Le premier terme du facteur polynômial dans (5.21) est $\underline{\beta}^T \Gamma^{-1} A_g^- \Gamma^{-1} \underline{\beta}$, qui est proportionnel à $\underline{\beta}^T (\mathbb{1} - \Gamma^{-1})(P_g + P_{Jg})(\mathbb{1} - \Gamma^{-1}) \underline{\beta}$. La matrice $(\mathbb{1} - \Gamma^{-1})$ est diagonale, donc $\underline{\beta}^T (\mathbb{1} - \Gamma^{-1})(P_g + P_{Jg})(\mathbb{1} - \Gamma^{-1}) \underline{\beta}$ est factorisable dans cette base si et seulement si $\underline{\beta}^T (P_g + P_{Jg}) \underline{\beta}$ est factorisable, ce qui n'arrive que lorsque \underline{g} est un élément de la base.

5.2 Réalisation expérimentale

5.2.1 Construction

La soustraction de photon est réalisée à partir d'une somme de fréquences, présentée en 2.3.4 ainsi que dans ce chapitre en page 115. Nous utilisons un cristal de BiBO long de 2,5 mm. La génération de somme de fréquences est de type I, les deux faisceaux entrants sont polarisés verticalement. Le diamètre de chaque faisceau en entrée est de 1,6 mm, il se propagent parallèlement avant d'entrer dans une lentille plano-convexe de longueur focale 200 mm. Il sont distants de 10 mm horizontalement et 7,5 mm verticalement⁵, symétriques par rapports à l'axe optique de la lentille, comme présenté en figure 5.3. Après cette lentille, les deux faisceaux convergent en un même point du plan focal, sur lequel on place le cristal. Cette configuration est telle que les faisceaux arrivent avec un angle horizontal de $\theta_h = 2,9^\circ$ et vertical $\theta_v = 2,1^\circ$.

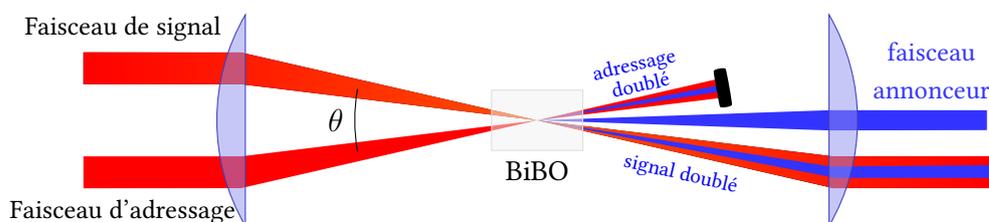


FIGURE 5.3 – La configuration des faisceaux. Les deux faisceaux sont polarisés verticalement. Cette illustration peut être une vue de dessus (auquel cas $\theta = \theta_h$) ou de côté ($\theta = \theta_v$).

L'interaction des deux faisceaux dans le cristal crée un faisceau annonceur de longueur d'onde moyenne 397,5 nm émis dans la direction médiane, c'est-à-dire selon l'axe optique. Il y a aussi du doublage de fréquence dans chacun des deux faisceaux : un faisceau d'adressage doublé dans la direction du faisceau d'adressage, un faisceau de signal doublé dans celle du signal. L'orientation du cristal, et plus précisément sa rotation autour d'un axe horizontal perpendiculaire à l'axe optique, permet d'ajuster les longueurs d'ondes centrales de ces trois faisceaux créés. On centre le faisceau annonceur à $\lambda_0/2 = 397,5$ nm. Sa largeur à mi-hauteur est de 0,70 nm. Comme les deux autres faisceaux traversent le cristal avec des angles différents, leurs longueurs d'ondes centrales sont différentes. Le faisceau d'adressage doublé est centré en 395,3 nm et a une largeur

5. Nous avons utilisé d'autres valeurs par le passé, notamment les 13 mm (horiz.) et 2,5 mm (vert.) mentionnés par C. Jacquard et utilisés pour les mesures de tomographie de [Ra, 2017] reprises en 5.2.2. Je donne ici les conditions utilisées pour les mesures les plus récentes présentées en 5.3.2 et 5.4.

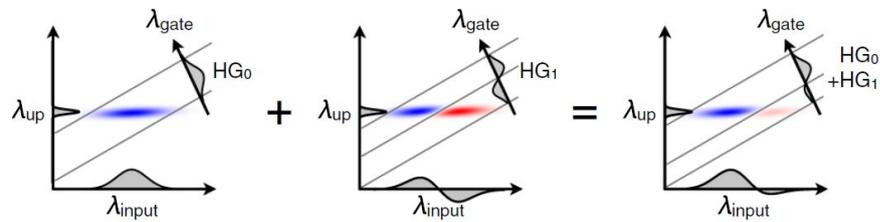


FIGURE 5.4 – La distribution spectrale jointe et sa version schématisée avec plusieurs formes spectrales pour le faisceau d’adressage. Tiré de [Ra, 2017].

de 0,5 nm. Le faisceau de signal doublé, quant à lui, est centré en 398,6 nm avec une largeur de 0,6 nm.

Ainsi construite, la distribution spectrale jointe est telle que la forme spectrale du faisceau d’adressage se répercute directement sur le faisceau de signal, comme on peut le voir sur la figure 5.4. Du fait de la direction des axes, cette forme spectrale se reproduit avec une symétrie autour de la longueur d’onde centrale. Cela n’a pas d’influence sur les fonctions paires (par rapport à la longueur d’onde centrale λ_0) mais ajoute un facteur -1 aux fonctions impaires.

On place également un filtre spectral sur le chemin du faisceau, ce qui a pour effet de réduire encore sa largeur spectrale à 0,35 nm, au prix de la perte de 50 % de la puissance. Ensuite, comme présenté sur la figure 5.5, ce faisceau annonceur est injecté dans une fibre monomode dont le cœur a un diamètre de 2 μm . L’efficacité du couplage est de 50 %. Cette fibre envoie le signal vers un détecteur de photons Hamamatsu modèle C13001-01 d’efficacité de détection 40 %. Avec tous ces facteurs pris en compte, on espère avoir environ 100 détections de photon par seconde.

La principale difficulté est le taux de fausses détections. Tout d’abord, le détecteur a un bruit d’obscurité : il se déclenche parfois en l’absence de tout photon incident. Heureusement, ce bruit est très faible avec ce détecteur : environ 10 coups par seconde. De plus, nous avons installé un système qui discrimine les signaux de détection en fonction de leur instant d’arrivée, pour éliminer les événements qui ne sont pas synchrones avec les photons à détecter. Cela permet d’atténuer le bruit d’obscurité du détecteur en-dessous de 1 cp/s.

La principale source de fausses détections provient du faisceau d’adressage doublé. Le faisceau d’adressage a typiquement une puissance de 1 mW, ce qui génère un faisceau doublé de 1 μW , soit $2 \cdot 10^{12}$ photons par seconde. La surface et l’intérieur du cristal présentent des défauts, qui envoient une petite fraction de ces photons dans toutes les directions, y compris dans la direction de la fibre monomode. Typiquement, cela va causer plusieurs milliers de coups parasites par seconde dans notre détecteur, ce qui noie largement le signal.

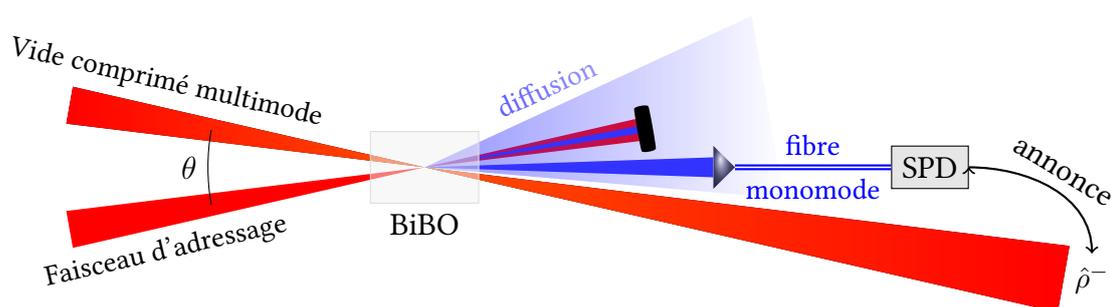


FIGURE 5.5 – Le schéma de la soustraction. Le vide comprimé qui va subir la soustraction est de faible intensité, il ne génère pas de faisceau doublé. En revanche, le faisceau d'adressage est intense et génère un intense faisceau doublé, dont une partie se diffuse dans toutes les directions à cause d'impuretés dans le cristal (*c.f.* figure 5.6). Le faisceau engendré par somme de fréquences traverse un filtre (non représenté) puis est injecté dans une fibre monomode et envoyé vers un détecteur de photons uniques (SPD). Ce détecteur annonce le succès de la détection, auquel est conditionné la mesure de l'état.

Ces photons indésirables ont la même polarisation, le même moment d'arrivée et la même direction que les photons de signal, ce qui les rend très difficile à écarter. Comme nous l'avons vu ci-dessus, nous avons contourné ce problème en augmentant l'angle θ : ainsi, le faisceau d'adressage doublé s'excentre et se sépare spectralement du faisceau annonceur. Cela est efficace, mais est limité d'une part par l'ouverture des optiques utilisées (standard : un pouce) et par les déformations de la distribution jointe d'amplitude que cela cause. L'autre facteur clé est la recherche dans le cristal d'un « point propre » : un point où la diffusion de photons indésirables est minimale.

En effet, nous nous sommes rendus compte que les cristaux ne sont pas homogènes : certains points diffusent plus que d'autres. Cela est bien visible sur la figure 5.6, qui présente les photographies de deux cristaux éclairés latéralement par une lampe. Les points les plus visibles génèrent plusieurs millions de coups par seconde dans notre détecteur quand le faisceau d'adressage de puissance 1 mW y passe. La monture du cristal étant équipée de vis micrométriques, il nous est possible de changer sa position pour rechercher un point optimal. La recherche d'un point propre prend souvent plusieurs heures car même en-dehors de quelques points très brillants, le nombre moyen de photons indésirables est toujours de plusieurs centaines de coups par seconde. On peut facilement trouver des points sous les 100 cps/s, en revanche les points sous les 10 cps/s sont très rares, voire impossibles à trouver si le cristal a été trop utilisé.

L'usure du cristal semble être le fait d'effets photoréfractifs dans le BiBO, phénomène qui a été très peu étudié jusqu'à présent. Nous avons remarqué

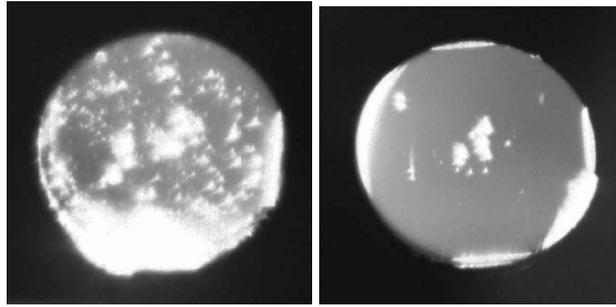


FIGURE 5.6 – Deux cristaux. Photographies des cristaux éclairés latéralement par une lampe. Le cristal de gauche a été utilisé plusieurs mois et traversé par des faisceaux intenses. Il s’agit de celui utilisé pour toutes les mesures de la partie 5.2.2. Celui de droite est neuf au moment de la prise de vue. Il a par la suite été utilisé pour les mesures des parties 5.3 et 5.4.

qu’un point propre, s’il était traversé par plus de 10 mW de puissance optique, n’était généralement plus utilisable. Il est également abîmé si l’on fait passer à la fois le faisceau d’adressage et le faisceau de signal avec des puissances de l’ordre de 1 mW chacun, comme il est d’usage pour l’alignement. Enfin, ces dommages n’apparaissent qu’après des temps d’exposition de l’ordre de la seconde. Mais même neufs, les cristaux ne sont pas entièrement propres, comme en atteste le cristal de droite de la figure 5.6. Tout ceci nous oblige à prendre de grandes précautions : une fois un point propre repéré, en-dehors des temps de mesures il est mis en sécurité en translatant le cristal de quelques millimètres. Autant que possible, nous essayons de ne pas perdre la trace du point propre, car si retrouver le point de la veille en faisant la translation inverse est aisé, rechercher un nouveau point est fastidieux.

Finalement, nous avons toujours réussi à trouver un point propre pour lequel le nombre de photons indésirables par seconde était de l’ordre de 7 cps/s pour 1 mW de puissance dans le faisceau d’adressage.

5.2.2 Tomographie du soustracteur

Pour caractériser le soustracteur que nous avons préparé, nous utilisons la tomographie de processus quantique à base d’états cohérents [Lobino, 2008; Fedorov, 2015a]. En sondant un processus quantique avec des états cohérents et en mesurant les résultats (à la fois en terme d’états de sortie et de probabilités de succès), on peut caractériser complètement un processus quantique. En général, cette caractérisation est très complexe car il faut être en mesure de mesurer l’état de sortie. Mais puisque l’opération de soustraction laisse un état cohérent inchangé ($\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \propto |\alpha\rangle$), nous pouvons nous dispenser de la mesure de

l'état de sortie. La tomographie du soustracteur devient relativement simple : il suffit de mesurer les probabilités de succès.

Dans une base de référence \vec{u} , un état cohérent multimode est le produit d'états cohérents dans chaque mode :

$$|\alpha\rangle = |\mathbf{u}_1: \alpha_1\rangle \otimes |\mathbf{u}_2: \alpha_2\rangle \otimes \cdots \quad (5.25)$$

et son nombre moyen de photons est $\alpha_\infty^2 = \sum_\ell |\alpha_\ell|^2$. Quand cet état subit la soustraction \mathcal{S} de l'équation (5.14), il reste égal à lui-même, à un facteur multiplicatif près, que l'on interprète comme la probabilité de succès de la soustraction. D'après l'équation (5.10), cette probabilité de succès vaut :

$$P(|\alpha\rangle) = \sum_{i,j=0}^{d-1} \chi_{ij} \alpha_i \alpha_j^* \quad (5.26)$$

Par conséquent, on peut retrouver les éléments de la matrice en mesurant ce taux de succès P , qui est proportionnel au nombre de coups par seconde donnés par le détecteur de photons. On retrouve les éléments diagonaux en sondant le soustracteur avec un état cohérent $|\beta\rangle$ dans un seul mode :

$$\chi_{ii} = P(|\mathbf{u}_i: \beta\rangle) / |\beta|^2 \quad (5.27)$$

Les éléments extra-diagonaux se retrouvent en sondant le soustracteur avec un état cohérent réparti sur deux modes, avec et sans phase entre ces modes :

$$\chi_{ij} = \frac{P(|\mathbf{u}_i: \beta/\sqrt{2}\rangle \otimes |\mathbf{u}_j: \beta/\sqrt{2}\rangle) + i \cdot P(|\mathbf{u}_i: \beta/\sqrt{2}\rangle \otimes |\mathbf{u}_j: i\beta/\sqrt{2}\rangle)}{|\beta|^2} \quad (5.28)$$

Il faut donc d^2 mesures pour obtenir la matrice de soustraction complète. Nous avons fait ces mesures pour caractériser notre soustracteur, pour plusieurs formes différentes données au faisceau d'adressage. Ces mesures ont donné lieu à un article [Ra, 2017], dont nous allons maintenant résumer les résultats.

Pour prendre les mesures, nous avons utilisé deux bases modales : celle des bandes de fréquences et celle des fonctions d'Hermite-Gauss. Un faisceau cohérent de sonde a été injecté à la place du faisceau de signal issu du SPOPO. Ce faisceau de sonde est mis en forme par un façonneur d'impulsions⁶ et est atténué par un filtre à densité neutre de telle sorte qu'il contient en moyenne 1 photon par impulsion. Ces précautions sont prises pour caractériser le soustracteur dans le régime dans lequel nous allons l'employer, c'est-à-dire pour des

6. En fait, il s'agit de l'oscillateur local, qui est détourné vers le soustracteur puisqu'aucune détection homodyne n'est réalisée ici.

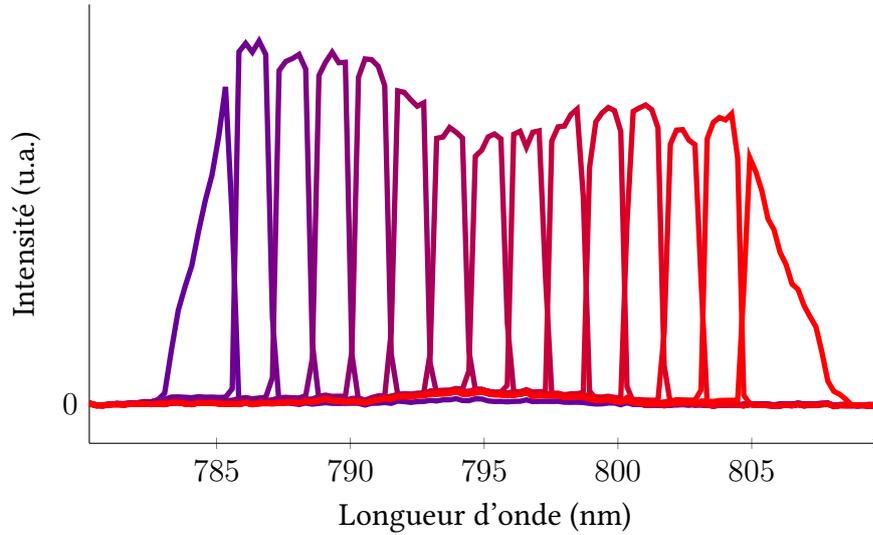


FIGURE 5.7 – La base des bandes de fréquences. Le spectre a été divisé en 15 bandes de fréquences, qui sont les modes dans lesquels on envoie des états cohérents grâce au façonneur d’impulsions pour sonder le processus de soustraction. En mesurant le nombre de photons soustraits, on obtient la matrice de soustraction χ_{ij} dans cette base, grâce à (5.27) et (5.28).

états à faible nombre moyen de photons. En effet, l’équation (5.14) n’est valable que lorsqu’un seul photon est soustrait ; or, un état avec un plus grand nombre de photons autoriserait la soustraction de plusieurs photons. Toutefois nous travaillons avec des états cohérents, qui sont laissés inchangés par la soustraction d’un ou plusieurs photons. La théorie prédit que dans ce cas, le nombre moyen de photons dans le faisceau n’a pas d’influence sur la mesure. Ainsi, pour accélérer la prise de mesure, nous avons fait en sorte de pouvoir changer de filtre atténuateur pour obtenir 90 photons par impulsion. Le faisceau d’adressage, quant à lui, a une puissance de 1 mW, soit 5×10^7 photons par impulsion.

Tomographie dans la base des bandes de fréquences

Dans la base des bandes de fréquences (dont les intensités spectrales sont présentées en figure 5.7), on obtient les résultats présentés en figure 5.8 : le faisceau d’adressage prend la forme des fonctions d’Hermite-Gauss ψ_0 , ψ_1 et ψ_2 . La sélectivité modale du soustracteur est de 0,92, 0,92 et 0,90, respectivement.

On constate que la forme spectrale du mode de soustraction est proche de celle du faisceau d’adressage. C’est bien ce à quoi nous nous attendions au vu de la figure 5.4 et cela montre que nous sommes capables de choisir le mode spectral dans lequel la soustraction a lieu.

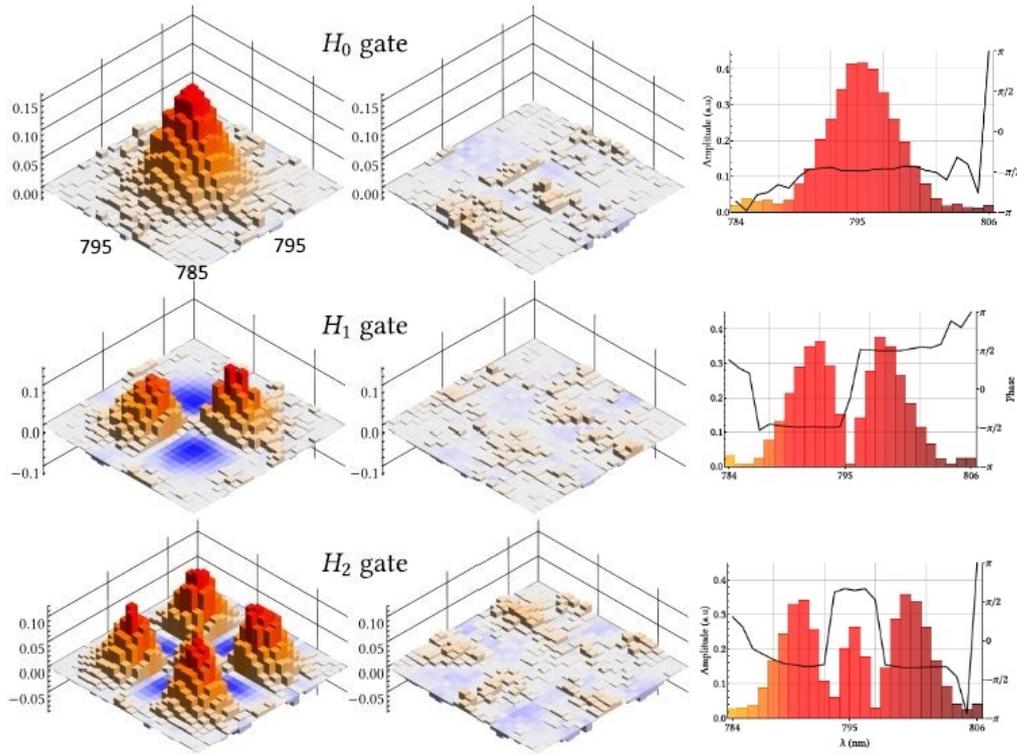


FIGURE 5.8 – Tomographie de processus quantiques dans la base des bandes de fréquences. La tomographie du soustracteur a été faite en divisant le spectre en 25 bandes de fréquences. *En haut*, le faisceau d’adressage est mis en forme dans un spectre gaussien. La matrice de gauche est la partie réelle de χ_{ij} , celle de droite est sa partie imaginaire. Le mode propre dominant issu de la diagonalisation de χ_{ij} est représenté à droite, il est associé à la valeur propre $p_0 = 0,92$. *Au milieu*, les mêmes résultats pour un faisceau d’adressage en forme de fonction d’Hermite-Gauss d’indice 1. La sélectivité modale vaut $p_0 = 0,92$. *En bas*, les mêmes résultats pour un faisceau d’adressage en forme de fonction d’Hermite-Gauss d’indice 2. La sélectivité modale vaut $p_0 = 0,90$. Tiré de [Jacquard, 2017].

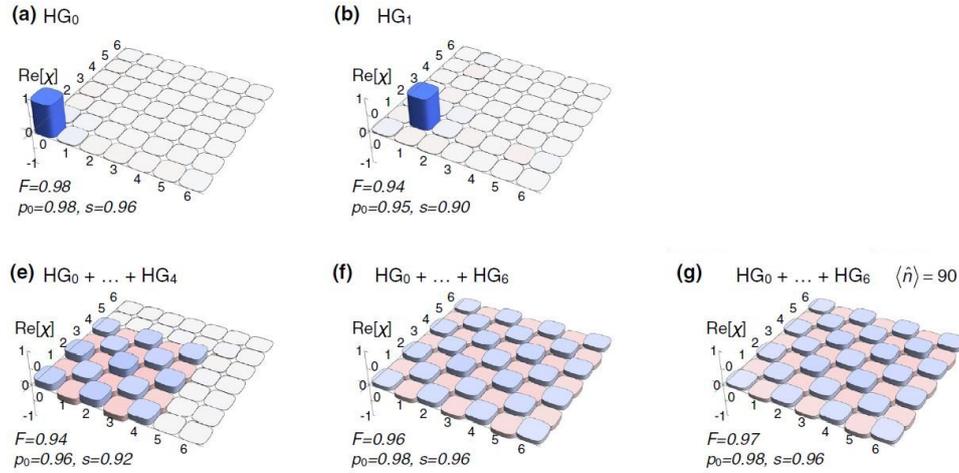


FIGURE 5.9 – Tomographie de processus quantiques dans la base des fonctions d’Hermite-Gauss. Ces diagrammes présentent la partie réelle de la matrice χ_{ij} pour différents processus quantiques. La forme du faisceau d’adressage est indiquée pour chaque matrice, ainsi que la sélectivité modale p_0 , la pureté s et la fidélité au soustracteur idéal F . Les numéros des lignes et colonnes sont l’ordre des HG. Seule la partie réelle est présentée, la partie imaginaire étant très proche de 0. Tiré de [Ra, 2017].

Tomographie dans la base des fonctions d’Hermite-Gauss

Nous avons réalisé une seconde fois la tomographie du soustracteur, mais dans la base des fonctions d’Hermite-Gauss (HG) cette fois. L’objectif est de vérifier qu’en conditions d’utilisation (c’est-à-dire en soustrayant dans des modes d’Hermite-Gauss, puisque c’est la forme que prennent nos supermodes), le soustracteur a bien le comportement espéré. Ces résultats sont visibles en figure 5.9. Nous avons retenu une famille de largeur 4 nm (à mi-hauteur du mode gaussien), de telle sorte que notre façonneur d’impulsions est capable de reproduire les 7 premiers modes de la famille avec une excellente fidélité (voir la figure B.1 en annexe B).

La matrice présentée en 5.9 (a) est mesurée avec un faisceau d’adressage gaussien, c’est donc le même processus de soustraction que celui mesuré dans la partie supérieure de la figure 5.8. Seule la partie réelle est représentée, la partie imaginaire étant négligeable. Cette fois-ci, la sélectivité modale est de 0,98, c’est-à-dire meilleure que lorsqu’elle est mesurée dans la base des bandes de fréquences. Dans ce sous-espace généré par les 6 premières fonctions d’Hermite-Gauss, la matrice est plus pure que dans le sous-espace généré par les bandes de fréquences. Comme les modes qui nous intéressent sont précisément de la

famille des Hermite-Gauss, c'est une bonne nouvelle : la pureté du soustracteur sera excellente.

En (b), on a l'analogie de la partie intermédiaire de la figure 5.8, c'est-à-dire une soustraction avec un faisceau d'adressage de la forme ψ_1 . La sélectivité modale est une fois de plus très bonne, égale à 0,95.

Les coefficients extra-diagonaux nous renseignent sur la cohérence du processus : avec le faisceau d'adressage dans une superposition de deux modes de la base de mesure, un processus très peu sélectif donne des coefficients extra-diagonaux nuls, tandis qu'un processus de sélectivité modale égale à 1 exhibe des coefficients extradiagonaux du même ordre de grandeur que les coefficients diagonaux.

Ces coefficients extra-diagonaux sont bien visibles en (e) et (f) où l'on a préparé le faisceau d'adressage comme superposition⁷ des 5 puis 7 premiers modes de la base : $\mathcal{A}_5^{\text{soustr}}(\omega) = \sum_{j=0}^4 \psi_j(\omega)/\sqrt{5}$ et $\mathcal{A}_7^{\text{soustr}}(\omega) = \sum_{j=0}^6 \psi_j(\omega)/\sqrt{7}$. Le processus présente toujours une sélectivité modale élevée, de 0,94 et 0,96 respectivement.

Enfin, en (g), on montre la même mesure qu'en (f) avec un nombre de photons plus élevé. Les mesures (a) à (f) ont été prises avec un nombre moyen de photons dans le faisceau de signal de l'ordre de 1. Pour (g), on envoyait en moyenne 90 photons dans le soustracteur. On constate que le processus mesuré ne dépend pas du nombre de photons utilisés pour le sonder, comme prévu par les équations (5.27-5.28). Il est donc possible de faire la tomographie cohérente de notre soustracteur de manière accélérée : en augmentant le nombre de photons, on augmente le nombre de détections et donc de points de mesure, ce qui permet de diminuer le temps d'acquisition.

De tous ces résultats, nous pouvons conclure que notre soustracteur est proche du soustracteur idéal.

7. On a fait une superposition avec coefficients égaux sur le faisceau d'adressage, on s'attend donc à ce que le premier mode de soustraction ait pour opérateur $\hat{a}_0 = \sum_{j=0}^4 (-1)^j \hat{a}_{\psi_j} / \sqrt{5}$, en raison du facteur (-1) qui apparaît pour les modes impairs.

5.3 Dégaussification par soustraction de photon

5.3.1 Remarques préparatoires

5.3.1.1 Acquisition de données et inférence de la phase

La détection homodyne permet de mesurer une quadrature \hat{x}^θ , où l'angle θ dépend de la phase relative entre signal et oscillateur local. En pratique, nous ne connaissons pas ces phases de manière certaine.

Pour retrouver la phase de mesure de la quadrature, nous nous servons de l'état comprimé lui-même. Nous mesurons les quadratures en continu, même quand aucune soustraction n'est annoncée. Nous déclenchons des mesures à un rythme de 1 kHz, qui s'ajoutent aux mesures déclenchées par la détection de photon. Ces mesures se font donc sur du vide comprimé, étant donné la faible probabilité de soustraction de photon (0,1 %). Chaque mesure consiste en 1000 échantillons, étalés sur 2 μ s, que nous appelons « segment ». Pour chaque segment, on évalue la variance.

Pendant l'acquisition, on balaie la tension appliquée à la cale piézoélectrique placée dans le chemin de l'oscillateur local selon un motif périodique triangulaire, de période 0,1 s. La phase de l'oscillateur local est balayée sur une amplitude de $3,5\pi$. La relation entre la tension appliquée et la phase donnée au faisceau est connue et étalonnée. En la comparant aux variations de la variance des quadratures, on peut estimer la phase avec une précision inférieure à 15° .

L'appareil d'acquisition est un oscilloscope Teledyne LeCroy. Tous les 15000 segments, c'est-à-dire toutes les 15 secondes, les données acquises sont transférées à l'ordinateur. Cela cause une interruption du suivi de la phase car le transfert des données nécessite une quinzaine de secondes. Quand l'acquisition reprend, la phase est de nouveau estimée mais elle est définie à π près. Nous sommes donc dans l'obligation de poser l'hypothèse que l'état mesuré est symétrique, à cause de cette indétermination de la phase absolue.

Pendant une tournée de 15000 segments, le nombre de quadratures acquises sur un déclenchement par détection de photons est de l'ordre de quelques centaines. Il faut donc quelques minutes pour acquérir un millier de points.

5.3.1.2 Inférence du mode temporel

Notre oscilloscope acquiert des valeurs de tension à une cadence de 500 MHz. Nous avons donc des mesures de quadratures au fil du temps : $x(t)$. La question est de savoir quelles mesures retenir pour que les valeurs correspondent à une détection conditionnée à la soustraction de photon. Il ne faut pas se contenter de garder uniquement les mesures synchrones avec l'annonce, car le mode du photon est donné par la cavité et non par le détecteur qui est beaucoup plus rapide

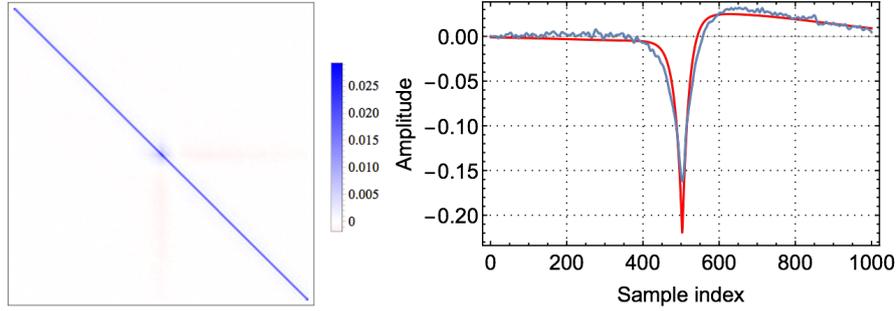


FIGURE 5.10 – À gauche, la fonction d’auto-corrélation temporelle $\langle x(t)x(t') \rangle$ présentée sous forme de matrice. À droite, la fonction propre associée à la plus grande valeur propre. L’échelle des abscisses représente les temps d’échantillonnage de l’oscilloscope, c’est-à-dire des multiples de 2 ns.

[Morin, 2013]. Pour en extraire la mesure de la quadrature, il faut faire une pondération de ce signal homodyne par un mode temporel $f : x_f = \int f(t)x(t) dt$. On sait que dans le cas d’un état issu d’une cavité, la forme temporelle doit en première approximation avoir une forme d’exponentielle décroissante $\exp(-|t|)$ [Morin, 2014 ; Nielsen, 2007].

Pour retrouver expérimentalement le mode temporel optimal, nous procédons de la manière suivante : nous construisons la fonction d’auto-corrélation temporelle $\langle x(t)x(t') \rangle$ du signal homodyne $x(t)$, puis nous en extrayons le mode propre dominant. Nous l’approximons par un mode qui est ensuite utilisé comme mode temporel. La figure 5.10 montre une telle matrice (à gauche), ainsi que le premier mode propre (à droite, en bleu). L’approximation de ce mode qui servira pour extraire les quadratures est en rouge.

Le mode temporel ressemble à la forme d’exponentielle décroissante $-\exp(-|t|)$, à une différence près : elle prend des valeurs positives et négatives. La raison en est la suivante : le signal issu de la détection homodyne passe par un filtre passe-haut avant d’atteindre l’oscilloscope, il doit donc être de moyenne temporelle nulle. En revanche, nous n’avons pas trouvé d’explication à l’asymétrie de la fonction.

5.3.1.3 Kurtosis

Nous nous servons de la kurtosis comme indicateur du caractère non-gaussien. On définit la kurtosis K par :

$$K = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^4}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2\right)^2} \quad (5.29)$$

où les x_i sont les résultats de mesure des quadratures, sans distinction de phase. C'est donc l'aspect non-gaussien de la distribution moyennée en phase que l'on inspecte. Une valeur de $K = 3$ correspond au cas gaussien. Une valeur différente de 3 atteste de la nature non-gaussienne de la distribution.

5.3.1.4 Tomographie d'état

Les mesures expérimentales se présentent sous la forme de résultats de mesure de quadratures x_{θ_i} dont on connaît l'angle de quadrature θ_i . Les quadratures étant les projections marginales de la fonction de Wigner, on peut considérer que toutes ces mesures sont autant de « vues de côté ». À partir de ces échantillons, on veut reconstruire la fonction de Wigner. Nous utilisons la technique de l'estimateur du maximum de vraisemblance [Lvovsky, 2004].

Il s'agit d'un algorithme itératif, qui travaille sur la matrice densité $\hat{\rho}$. En utilisant une matrice densité de taille finie plutôt que la fonction de Wigner, le problème est un peu simplifié, mais cela oblige à poser une hypothèse sur le nombre maximal de photons à considérer. L'algorithme s'initialise avec la matrice identité $\rho^{(0)} = \hat{\mathbb{1}}$. À chaque étape, on dispose de la matrice densité reconstruite à l'étape précédente, $\rho^{(k)}$ et on la transforme en une matrice un peu plus adaptée, au sens de la vraisemblance. Cette transformation s'écrit explicitement $\tilde{\rho}^{(k+1)} = R^{(k)} \rho^{(k)} R^{(k)}$. Il faut encore normaliser pour obtenir une matrice densité $\rho^{(k+1)} = \tilde{\rho}^{(k+1)} / \text{Tr}(\tilde{\rho}^{(k+1)})$. L'opérateur d'itération est $R^{(k)} = \sum_i^N \frac{|\theta_i, x_{\theta_i}\rangle \langle \theta_i, x_{\theta_i}|}{\langle \theta_i, x_{\theta_i} | \rho^{(k)} | \theta_i, x_{\theta_i} \rangle}$. Cette technique assure que la vraisemblance que ρ soit à l'origine de l'ensemble de mesures $\{x_{\theta_i}, \theta_i\}$ augmente à chaque itération.

Il existe d'autres techniques de reconstruction de l'état, dont la transformée de Radon inverse [Leonhardt, 1997 ; Sarkissian, 2015]. Ces techniques permettent une reconstruction directe, qui ne nécessite donc aucune hypothèse sur le nombre de photons présents dans l'état mesuré. Cependant, la technique que nous utilisons est plus robuste aux bruits expérimentaux [Lvovsky, 2004].

5.3.2 Soustraction dans un supermode

Les supermodes sont la base sur laquelle l'état de sortie du SPOPO est séparable. En bonne approximation, il s'agit de la famille des fonctions d'Hermite-Gauss, de largeur 6,5 nm (FWHM du mode gaussien) et centrée en $\lambda_0 = 795$ nm.

États comprimés photo-soustraits avec pertes

Nous avons déjà présenté en 1.2.6 l'effet de la soustraction de photon sur un état de vide comprimé. La fonction de Wigner attendue est :

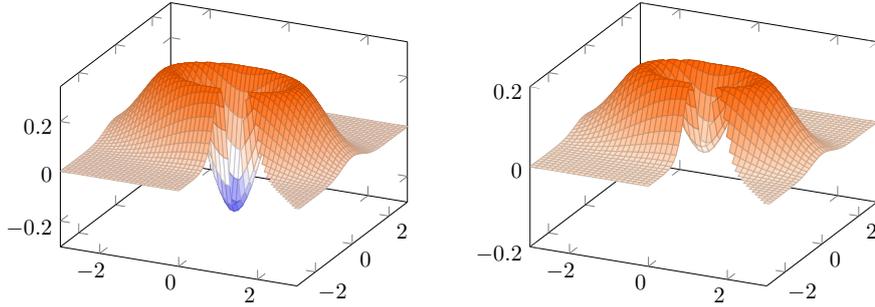


FIGURE 5.11 – État comprimé photo-soustrait. À *gauche* dans le cas idéal de l'équation (1.29). À *droite*, avec des pertes.

$$W_{\hat{a}|\xi}(x,p) = W_{|\xi}(x,p) \left(\frac{x^2}{e^{-2\xi}} + \frac{p^2}{e^{+2\xi}} - 1 \right) \quad (1.29)$$

Cette équation est valable pour un état pur et une détection parfaite. Dans un cas plus réaliste, il faut intégrer les pertes optiques et les imperfections (mauvais recouvrement des modes, bruit électronique). Comme nous l'avons vu en 4.3, cela correspond à un mélange avec du vide. Dans le cas pur, la fonction de Wigner est négative autour de l'origine. Avec des pertes ou des imperfections, la valeur en (0,0) devient moins négative voire positive, comme illustré en figure 5.11.

Dans notre expérience, les imperfections sont de plusieurs sortes. Tout d'abord, l'état avant soustraction n'est pas parfaitement pur, sa pureté est de l'ordre de 0,8. Comme nous l'avons vu page 42, plus la pompe est intense, plus l'état est impur. Nous avons donc utilisé une puissance de pompe assez faible : environ 40 mW (le seuil étant supérieur à 200 mW). Ensuite, il y a des imperfections dues au soustracteur. Ce sont en particulier les fausses détections, quand le détecteur est déclenché par un photon parasite : l'état est faussement annoncé et la détection homodyne mesure un état de vide comprimé au lieu de mesurer un état soustrait. Enfin, certaines imperfections sont dues à la détection. L'adaptation de mode entre le signal et l'oscillateur local n'est pas parfaite : on la mesure avec le contraste homodyne, c'est-à-dire le contraste obtenu en faisant interférer des faisceaux cohérents de même intensité dans les chemins optiques du signal et de l'oscillateur local sur la lame séparatrice. Nous sommes capables d'obtenir un contraste homodyne égal à 95,5 % dans le meilleur des cas mais cela nécessite des réalignements réguliers. Pour cela, il faut optimiser le recouvrement spatial, en prenant garde à ce que les faisceaux soient bien superposés. Il faut aussi optimiser le recouvrement temporel, ce que nous faisons grâce à une plate-forme

de translation robotisée, capable de changer la longueur du chemin de l'oscillateur local de manière très précise. La phase spectrale quadratique est aussi adaptée, en utilisant le façonneur d'impulsions pour donner à l'oscillateur local une phase quadratique qui correspond à celle du signal. Puisque ce contraste n'est pas égal à 100 %, cela va dégrader la qualité de l'état obtenu, de la même manière que des pertes optiques (voir page 100). Enfin, la détection homodyne elle-même a un certain niveau de bruit électronique, que nous avons réduit au minimum (voir page 101).

Soustraction dans HG0

Nous commençons par soustraire dans le premier supermode, celui qui est le plus comprimé. Sa forme spectrale est une gaussienne centrée en 795 nm, de largeur 6,5 nm. La mesure a été faite avec 50 mW de pompe et $-2,3$ dB de squeezing⁸. Comme nous l'avons mentionné plus haut, c'est un niveau de compression inférieur à ceux que nous avons utilisés par le passé ($-4,7$ dB dans [Cai, 2017]), qui permet d'avoir une pureté assez élevée : 0,91 pour ce mode HG0. Le faisceau d'adressage a une puissance d'environ 1 mW, le taux de fausses détections est 7 cps/s et le taux de photons annonceurs est 100 cps/s. L'oscilloscope acquiert 15000 segments en 23 s, parmi lesquels 800 sont liés à une annonce du détecteur du photon. En ajoutant la quinzaine de secondes nécessaire au transfert des données de l'oscilloscope vers l'ordinateur et la répétition des phases d'acquisition-transfert, il faut un quart d'heure pour acquérir assez de points pour reconstruire la fonction de Wigner.

La figure 5.12 présente les résultats de mesure. En haut, nous présentons les résultats de mesure des quadratures, ordonnés par la phase de mesure. Cette phase de mesure étant définie à π près, nous les avons aléatoirement assignés dans $[0, \pi]$ ou dans $[\pi, 2\pi]$. En bas est représentée la fonction de Wigner reconstruite selon la méthode exposée en 5.3.1.4.

À gauche, les mesures sont prises en coupant le faisceau d'adressage. Ce sont les mesures directes de l'état sans soustraction. À droite, le faisceau d'adressage est présent et prend la forme d'une gaussienne HG0. Ce sont les mesures conditionnées de l'état après soustraction. La fonction de Wigner à l'origine prend la valeur $W(0,0) = -0,108/2\pi$. Nous avons donc produit un état quantique à fonction de Wigner négative. Pour un état d'entrée pur, une soustraction idéale et une détection sans pertes, la fonction de Wigner prendrait la valeur de $-1/2\pi$. Nous pouvons corriger les pertes dues à la détection homodyne (que nous évaluons à 12,5 %) en les intégrant dans l'algorithme de reconstruction, on trouve alors $W(0,0) = -0,24/2\pi$.

8. Valeur non corrigée des pertes. Par ailleurs, l'anti-squeezing est de 3,19 dB.

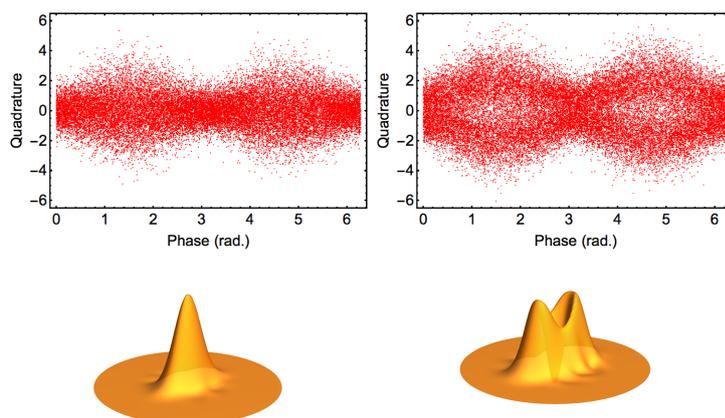


FIGURE 5.12 – Les résultats de mesure de quadratures sur HG0. À gauche, sans soustraction, À droite, après soustraction dans HG0.

Soustraction dans HG1

Pour le mode HG1, les résultats sont présentés en figure 5.13. À gauche, l'état sans soustraction : le squeezing est de $-1,7$ dB (antisqueezing 2,6 dB) et la pureté de l'état vaut 0,90. La partie droite présente la détection conditionnée lorsque l'on a donné au faisceau d'adressage la forme spectrale du mode HG1.

Cette fois, la valeur de la fonction de Wigner en $(0,0)$ n'est pas négative, elle vaut $0,01/2\pi$. Toutefois, en corrigeant les pertes sur la détection homodyne, elle devient négative : elle vaut alors $-0,11/2\pi$.

Soustraction dans l'un ou l'autre des 3 premiers modes

Après soustraction dans HG0, on a bien un état non-gaussien (voir figure 5.12), mais il faut vérifier que la soustraction dans un mode n'affecte en effet que ce mode-là. Pour ce faire, nous réalisons les mesures de tous les modes, conditionnées aux soustractions dans chacun des modes. Les résultats sont présentés sous forme de tableau en figure 5.14.

Chaque ligne correspond à un mode différent, c'est-à-dire que tous les résultats d'une même ligne sont obtenus avec la même forme spectrale de l'oscillateur local. Chaque colonne correspond à une soustraction dans un mode différent, c'est-à-dire que tous les états d'une même colonne ont subi une soustraction dans le même mode, imposé par la même forme spectrale du faisceau d'adressage. Il s'agit toujours de détections conditionnées, sauf la première colonne qui est mesurée sans faisceau d'adressage.

Dans chaque case sont présentés trois résultats : la distribution des résultats

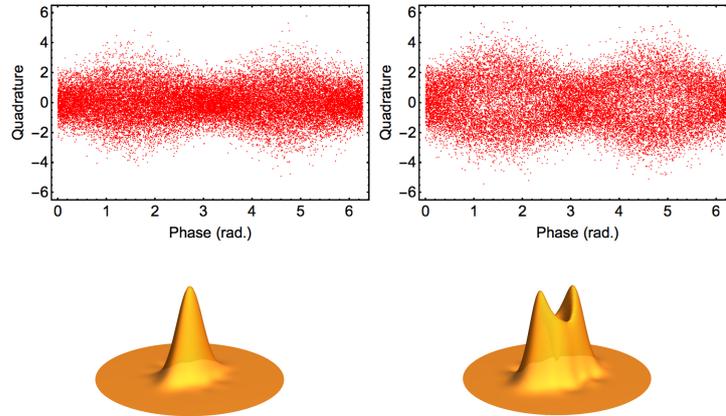


FIGURE 5.13 – Les résultats de mesure de quadratures sur HG0. À gauche, sans soustraction, À droite, après soustraction dans HG0.

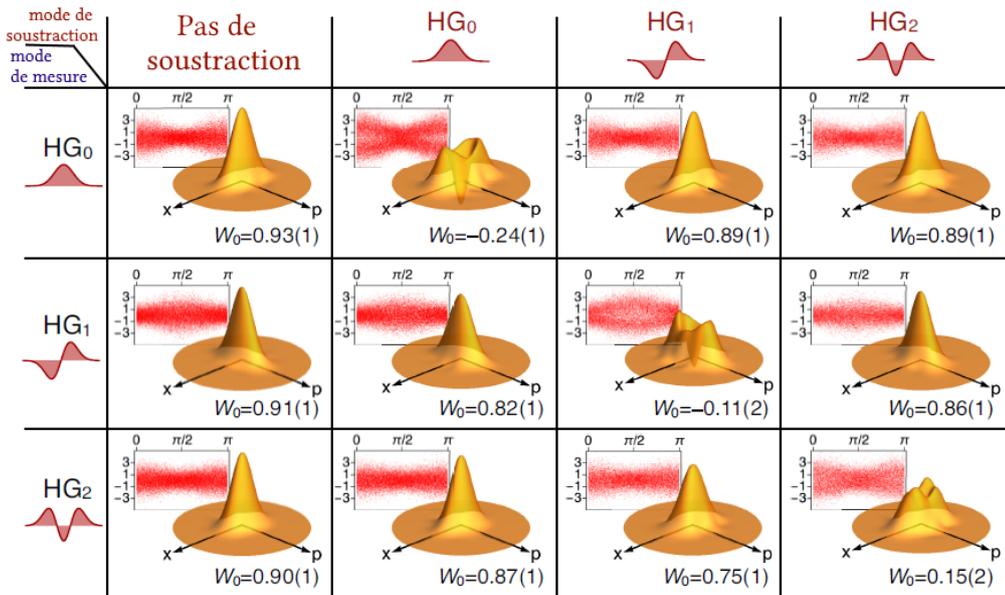


FIGURE 5.14 – Résultats de toutes les soustractions. Chaque colonne est un mode de soustraction différent, chaque ligne un mode de mesure différent. Chaque case contient la distribution des résultats de mesure de quadratures selon leur phase, la fonction de Wigner reconstruite et la valeur à l'origine normalisée de cette fonction de Wigner reconstruite : $W_0 = 2\pi W(0,0)$.

de mesure des quadratures répartis selon leur phase en abscisse (phase entre 0 et π), la fonction de Wigner reconstruite à partir de ces quadratures et corrigée des pertes et enfin la valeur en 0 de cette fonction de Wigner reconstruite : $W_0 = 2\pi W(0,0)$.

En observant les fonctions de Wigner, il est clair que le mode le plus affecté par la soustraction est celui qui correspond au faisceau d'adressage. Par exemple, pour la première colonne où le faisceau d'adressage est dans le mode HG0, le mode HG0 est clairement non-gaussien tandis que les autres modes restent gaussiens. Notre soustracteur a bien l'effet attendu sur les supermodes, ce qui confirme la bonne sélectivité modale du dispositif.

Même si la soustraction marche bien, elle n'est pas parfaite. L'adressage des modes n'est pas parfait : par exemple, les différences que nous constatons pour une mesure dans le mode HG1 (deuxième ligne) entre la mesure sans soustraction (première colonne) et la mesure avec soustraction dans le mode HG0 (deuxième colonne) sont dues à la soustraction. Le recouvrement des modes n'est pas parfait et la soustraction que nous avons programmée dans HG0 a en fait altéré HG1. Une autre limitation provient des détections parasites, qui ont pour effet de polluer l'état photo-soustrait avec l'état gaussien d'entrée. Cela affecte davantage les états non-gaussiens, en atténuant voire effaçant leur négativité. Pour les états dans lesquels on ne soustrait pas, les détections parasite adoucissent les différences entre le cas avec soustraction et sans soustraction. Pour notre exemple du mode HG1, les détections parasites qui tendent à faire ressembler l'état de la deuxième colonne à celui de la première colonne.

En conclusion, nous constatons que la soustraction implémentée dans un mode HG n affecte principalement ce même mode HG n en rendant son état non-gaussien, tandis qu'elle laisse inchangés les autres modes, en bonne approximation.

5.3.3 Soustraction dans une superposition de supermodes

En plus de soustraire dans les supermodes de manière sélective, nous pouvons soustraire dans une superposition de supermodes.

Soustraction dans HG0- i GH1 et HG0+ i GH1+HG2

Les supermodes sont comprimés alternativement sur les quadratures x et p . Si HG0 est comprimé en p , alors HG1 est comprimé en x . Par conséquent, i HG1 est comprimé en p comme HG0 et la superposition de HG0 et i HG1 est un mode qui contient également du vide comprimé en p . Nous effectuons dans ce mode une soustraction, dont les résultats sont présentés dans la partie haute de la figure 5.15.

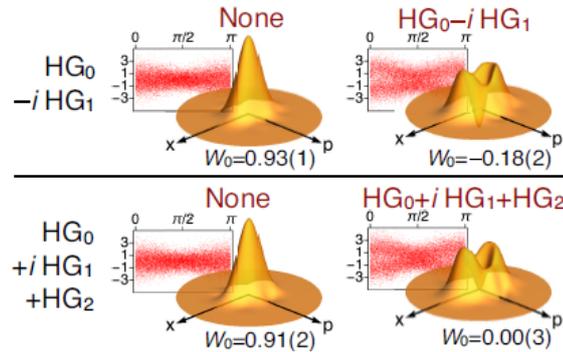


FIGURE 5.15 – Soustractions dans des combinaisons de mode contenant du vide comprimé. Chaque colonne est un mode de soustraction différent, chaque ligne un mode de mesure différent. La première colonne montre les mesures sans soustraction.

Pour ce mode $HG_0 - iHG_1$, la mesure sans conditionnement et sans faisceau d'adressage (à gauche) nous apprend qu'il contient un vide comprimé de squeezing $-1,65$ dB, de pureté $0,91$. Après soustraction (à droite sur la figure), la fonction de Wigner n'est plus gaussienne, sa valeur en $(0,0)$ est négative et vaut $W_0 = -0,06$ avant correction des pertes, ce qui donne $-0,18$ après correction des pertes.

Nous avons fait la même mesure dans la superposition de trois supermodes, avec $HG_0 + iHG_1 + HG_2$, qui contient un vide comprimé à $-1,51$ dB et dont la fonction de Wigner après soustraction est également non-gaussienne. En revanche, pour ce mode, W_0 n'est pas négatif : $0,09$ avant correction, $0,003$ après correction.

Ces mesures démontrent qu'en plus d'une bonne sélectivité modale, notre soustracteur possède bien la capacité d'agir dans une combinaison de modes.

Soustraction dans $HG_0 \pm HG_1$

Les modes HG_0 et HG_1 contiennent des états comprimés selon des quadratures opposées. Leurs superpositions $EPR_0 = HG_0 + HG_1$ et $EPR_1 = HG_0 - HG_1$ sont donc des états intriqués de type EPR [Duan, 2000], analogues à ceux décrits en 3.1.1 (mais avec un niveau de compression fini). En l'absence de soustraction, les modes EPR_0 et EPR_1 sont chacun dans un état thermique, visibles dans la première colonne de la figure 5.16 : centrés en 0, symétriques, de variances mesurées égales à $1,3$ (les fluctuations du vide sont normalisées à 1).

La deuxième colonne de la figure 5.16 rassemble les mesures pour une soustraction effectuée dans le mode EPR_0 . Contrairement à ce que nous observions pour les supermodes, ce n'est pas l'état EPR_0 qui devient non-gaussien : c'est

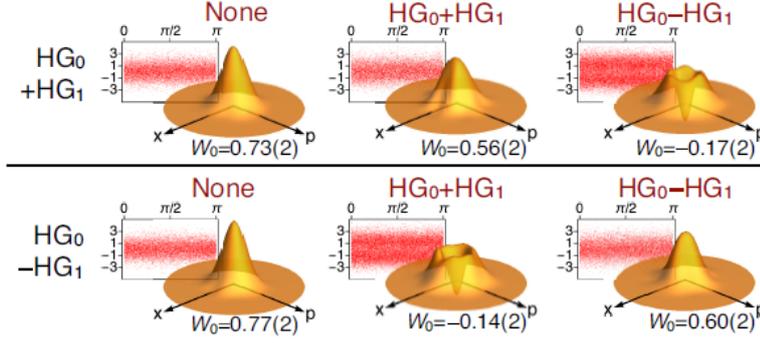


FIGURE 5.16 – Soustractions dans $HG_0 \pm HG_1$. Chaque colonne est un mode de soustraction différent, chaque ligne un mode de mesure différent. La première colonne montre les mesures sans soustraction.

EPR_1 . Sa fonction de Wigner prend une valeur négative en 0 : $W_0 = -0.08$ sans correction, $W_0 = -0.14$ avec correction. La même observation tient pour une soustraction dans EPR_1 : c'est EPR_0 qui devient non-gaussien, tandis que EPR_1 reste un état gaussien thermique. Ces mesures apportent la preuve expérimentale que la soustraction dans un mode peut affecter l'aspect gaussien de l'état dans d'autres modes.

Notons que la soustraction dans un des membres d'une paire EPR ($\approx |00\rangle + \epsilon|11\rangle$ pour nos faibles niveaux de squeezing) crée dans l'autre un état de photon unique, c'est-à-dire l'état de Fock $|1\rangle$. Cela est confirmé par nos mesures, dans lesquelles on peut constater que la distribution des quadratures ne dépend pas de la phase et présente un creux autour de 0. On l'explique par l'analogie avec la technique de préparation de photons uniques à partir de la détection d'un photon dans une paire de photons intriqués.

Un avantage de cette technique est de pouvoir mettre en forme spectralement des photons uniques [Averchenko, 2017]. En effet, si l'on soustrait un photon dans EPR_0 , on prépare un photon unique dans le mode EPR_1 , tandis qu'une soustraction dans EPR_1 prépare un photon unique dans EPR_0 . On peut trouver d'autres paires EPR , par exemple $HG_0 \pm iHG_2$, ou encore $HG_0 + iHG_1 \pm iHG_2$, qui sont autant de modes dans lesquels nous sommes capables de préparer un état de photon unique grâce à notre soustracteur ajustable en mode.

Le fait que la soustraction dans un mode affecte l'état dans les modes qui sont intriqués avec ce mode vaut également pour les états clusters, qui font l'objet de la section suivante.

5.4 Soustraction dans un cluster

5.4.1 Création des canevas quantique

Nous avons à notre disposition des états de vides comprimés dont la compression sur les premiers modes est la suivante :

mode	HG0	HG1	HG2	HG3
squeezing	-2,34 dB	-1,73 dB	-1,15 dB	-0,8 dB
anti-squeezing	3,19 dB	2,6 dB	1,99 dB	1,3 dB

Cela n'est pas le plus fort degré de compression que l'on peut obtenir, mais nous avons volontairement réduit la puissance de pompe (et donc la compression) afin d'obtenir une pureté suffisamment bonne, de l'ordre de 80 %.

Nous avons préparé deux types de canevas quantique dans lesquels nous allons soustraire des photons. Il s'agit du graphe linéaire à quatre nœuds et du graphe circulaire à quatre nœuds, présentés en figure 3.4. On obtient ces états à partir du vide comprimé multimode grâce à un changement de base, selon le protocole détaillé au paragraphe 3.2.2.

On utilise une matrice de changement de base U_c^{sq} , définie par l'équation (3.29). Pour les modes spectraux, le changement de base est fait par la matrice conjuguée $(U_c^{sq})^*$. Pour le cluster linéaire à 4 modes, cette matrice vaut :

$$(U_{lin}^{sc})^* = \begin{pmatrix} -0,344i & -0,421 & 0,531i & 0,650 \\ 0,344 & 0,765i & -0,531 & -0,119i \\ -0,765i & -0,344 & -0,119i & -0,531 \\ 0,421 & +0,344i & 0,650 & +0,531i \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Il nous faut toutefois nous souvenir qu'avec nos conventions, les supermodes ne sont pas comprimés sur la quadrature p comme nous l'avons supposé en (3.35). Au contraire, nous avons vu en (4.16) qu'ils sont alternativement comprimés sur p et sur x . Nous remédions à cela en ajoutant une phase de $\pi/2$ à tous les modes d'ordre impair⁹. La base \vec{u}_{sq} des supermodes prend pour amplitudes spectrales les fonctions d'Hermite-Gauss $\psi_n(\omega)$, présentées en annexe A.

L'amplitude spectrale du premier nœud s'écrit donc :

$$\mathcal{A}_{\text{nœud1}}(\omega) = -0,344i \cdot \psi_0(\omega) - 0,421i \cdot \psi_1(\omega) + 0,531i \cdot \psi_2(\omega) + 0,650i \cdot \psi_3(\omega) \quad (5.31)$$

9. Voir aussi la note 3 en page 4.1.2.

Cette amplitude spectrale sera employée pour l'oscillateur local pour la mesure des quadratures dans ce mode.¹⁰

Connaissant les modes des nœuds de ce cluster, il faut mesurer la variance des annulateurs $\hat{\delta}_i$ pour vérifier qu'il s'agit bien d'un canevas quantique. Les annulateurs sont définis en (3.37). Pour les mesurer avec la détection homodyne, il faut trouver des modes dont ils sont les quadratures. Pour cela, on les normalise en les divisant par $\Delta\delta_i^0$ défini en (3.40). En combinant les équations (3.37) et (3.40), on obtient l'expression des annulateurs à partir de la matrice des degrés D , de la matrice d'adjacence V et de la matrice optimisée \mathcal{O} :

$$\vec{\hat{\delta}} = W \vec{\hat{p}}^{sq} \quad \text{avec} \quad W = (I + D)^{-1/2} (I + V^2)^{1/2} \mathcal{O} \quad (5.32)$$

Il faut remarquer que W n'est pas un changement de base correct, car ce n'est pas une matrice orthogonale. Chaque annulateur est obtenu comme combinaison unitaire des quadratures : $\hat{\delta}_k = \sum_j W_{kj} \hat{p}_j^{sq}$ avec $\sum_j |W_{kj}|^2 = 1$ ¹¹. Cela nous incite à définir une nouvelle famille de modes :

$$\vec{w} = W \cdot \vec{u}_{sq} \quad (5.33)$$

Cette famille ne forme pas une base de modes car ses éléments ne sont pas orthogonaux. En revanche, chaque membre w_i de la famille est un mode correctement défini, dont la quadrature p est égale à l'annulateur normalisé $\hat{\delta}_i / \Delta\delta_i^0$.

Dans le cas de notre graphe linéaire à quatre modes, la matrice W est :

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -0.839 & 0 & 0.544 \\ 0.839 & 0 & -0.544 & 0 \\ 0 & -0.839 & 0 & -0.544 \\ 0.839 & 0 & 0.544 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Cela signifie que l'amplitude spectrale à donner à l'oscillateur local pour mesurer l'annulateur 1 est :

$$\mathcal{A}_{\text{ann1}}(\omega) = -0,839 \cdot \psi_1(\omega) + 0,544 \cdot \psi_3(\omega) \quad (5.35)$$

La variance des annulateurs normalisés doit être petite, c'est-à-dire inférieure à 1, pour qu'on soit en présence d'un canevas quantique. En pratique,

10. En revanche, si l'on veut soustraire un photon dans ce mode, il faut faire attention au facteur de symétrie évoqué en page 122 : les modes impairs ont un facteur (-1) . L'amplitude spectrale du faisceau d'adressage qui va susciter une soustraction dans le mode du nœud 1 est donc :

$$\mathcal{A}_{\text{nœud1}}^{\text{soustr}}(\omega) = -0.344i \cdot \psi_0(\omega) + 0.421i \cdot \psi_1(\omega) + 0.531i \cdot \psi_2(\omega) - 0.650i \cdot \psi_3(\omega)$$

11. La matrice n'est pas unitaire car $\sum_k |W_{kj}|^2 \neq 1$.

l'état quantique des annulateurs ressemble à des vides comprimés, dont on mesure la variance minimale qu'on compare à celle du vide. Dans notre cas, avec les facteurs de squeezing en entrée présentés plus haut, on s'attend à une compression des annulateurs de -1,43 dB (pour les annulateurs 1 et 3) et 1,95 dB (annulateurs 2 et 4).

Pour le canevas quantique en carré à quatre modes, les changements de base sont :

$$(U_{cycl}^{sc})^* = \begin{pmatrix} -0.316 & -0.632i & 0.707 & 0 \\ 0.632i & 0.316 & 0 & -0.707 \\ -0.316 & -0.632i & -0.707 & 0 \\ 0.632i & 0.316 & 0 & 0.707 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

$$\text{et } W' = \begin{pmatrix} -0,913 & 0 & 0,408 & 0 \\ 0 & 0,913 & 0 & -0,408 \\ -0,913 & 0 & -0,408 & 0 \\ 0 & 0,913 & 0 & 0,408 \end{pmatrix}$$

Pour ce graphe, les annulateurs sont comprimés de -2,11 dB (annulateurs 1 et 3) et -1,55 dB (annulateurs 2 et 4).

5.4.2 Soustraction dans les nœuds d'un canevas quantique

Un canevas quantique est un état gaussien, puisqu'il est obtenu à partir d'un état de vide comprimé multimode, qui est un état gaussien, par le moyen d'un changement de base, qui n'altère pas la nature gaussienne. Comme nous voulons obtenir des états non-gaussiens, nous effectuons une soustraction sur un des nœuds du canevas quantique.

Graphe linéaire

Les résultats de la soustraction de photon sur le graphe linéaire à 4 nœuds sont présentés en figure 5.17.

Comme les nœuds du graphes ont peu de dépendance en phase avant la soustraction, il nous est impossible de retrouver la phase au moment de la soustraction. Nous présentons donc les histogrammes des mesures de quadratures toutes phases confondues : nous avons un ensemble de points de phases indéterminées pour lesquelles nous avons pris soin de balayer la phase de l'oscillateur local afin que toutes les phases aient été mesurées avec égale probabilité. Un état non-gaussien donne lieu à une distribution de probabilité non-gaussienne et nous pouvons quantifier cela à l'aide de la kurtosis. Pour un état gaussien, la kurtosis vaut 3.

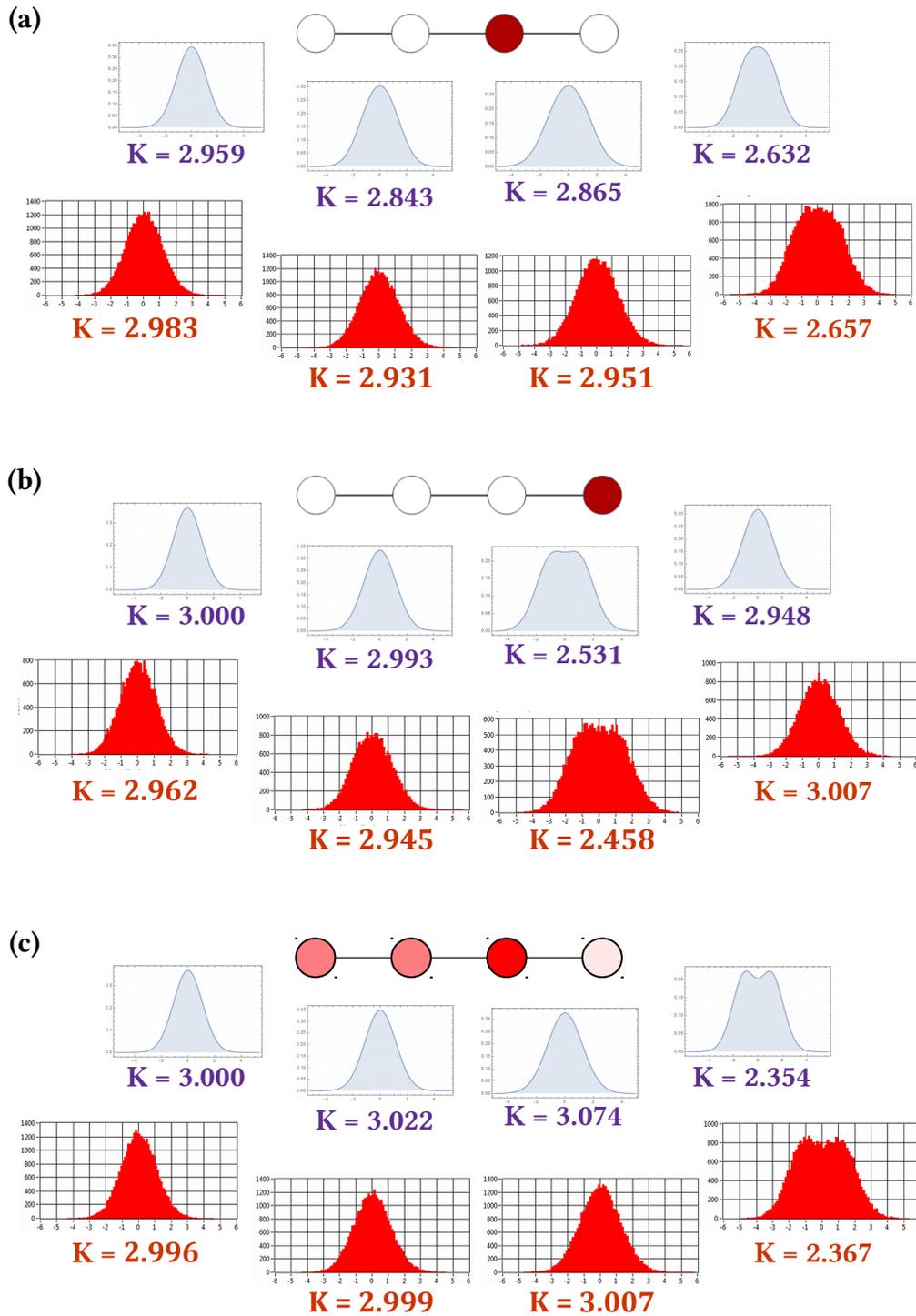


FIGURE 5.17 – Les résultats de la soustraction dans le canevas linéaire

Pour chaque soustraction, nous présentons l'histogramme mesuré (en rouge) et sa kurtosis, ainsi que la distribution de probabilité de répartition des quadratures simulée en considérant une soustraction parfaitement sélective en mode ($p_0 = 1$).

Lorsque l'on soustrait dans le nœud 3 (fig. 5.17(a)), c'est le nœud 4 qui est le moins gaussien, avec une kurtosis de 2,66. Cela est corroboré par la théorie, qui prédit qu'en effet c'est ce nœud qui doit être le moins gaussien, avec une kurtosis de 2,63. Le nœud soustrait et son voisin le nœud 2 sont légèrement non-gaussiens, avec des kurtosis similaires : 2,95 et 2,93. La théorie prédit une kurtosis inférieure, mais proche. Enfin, le nœud 1, qui est à distance 2 de la soustraction, est celui qui reste le plus proche de l'état gaussien, ce que l'on constate par sa kurtosis mesurée de 2,98.

Lorsque l'on soustrait dans le nœud 4 (fig. 5.17(b)), c'est son voisin le nœud 3 qui subit l'essentiel de la dégaussification : sa kurtosis mesurée de 2,46 est en accord avec la valeur attendue de 2,53 prédite par la théorie. Le nœud 4, duquel le photon est soustrait, reste gaussien, de même que les nœuds 1 et 2, situés à plusieurs nœuds de distance de la soustraction.

Nous n'avons pas effectué les soustractions dans les nœuds 1 et 2 car les prédictions théoriques sont les mêmes que pour les nœuds 4 et 3. Notre choix s'est arrêté sur ces derniers car les formes spectrales impliquées pouvaient être atteinte avec une plus grande fidélité par notre façonneur d'impulsions.

Enfin, nous avons également soustrait un photon dans une combinaison des nœuds (fig. 5.17(c)). Le mode de la soustraction est une superposition cohérente des modes des nœuds du graphe : $\mathcal{A}_{\text{combi}}(\omega) = -0,4i\mathcal{A}_{\text{nœud1}}(\omega) - 0,4\mathcal{A}_{\text{nœud2}}(\omega) + 0,8i\mathcal{A}_{\text{nœud3}}(\omega) + 0,2\mathcal{A}_{\text{nœud4}}(\omega)$. On constate alors que les nœuds 1, 2 et 3 ont une distribution gaussienne, alors que le nœud 4 prend une allure différente, pour laquelle il y a un creux en 0, qui est aussi présent pour la distribution simulée. Pour toutes ces mesures, la distribution mesurée correspond bien à celle issue de la théorie

Graphe carré

Les résultats de la soustraction de photon sur le graphe linéaire à 4 nœuds sont présentés en figure 5.18. Contrairement au graphe linéaire, ce n'est pas le voisin du nœud où la soustraction a eu lieu qui subit le plus de dégaussification, mais celui situé à deux arêtes de distance.

En effet, lorsque l'on soustrait dans le nœud 2 (fig. 5.18(a)), la kurtosis du nœud 4 est la plus petite des quatre. Dans nos mesures, elle vaut 2,81 et la théorie prédit 2,60. Nous expliquons cet écart par les imperfections expérimentales, en particulier par le recouvrement imparfait entre l'oscillateur local et le signal, qui était moins bon que d'habitude pour cette mesure-là. Ce recouvrement équi-

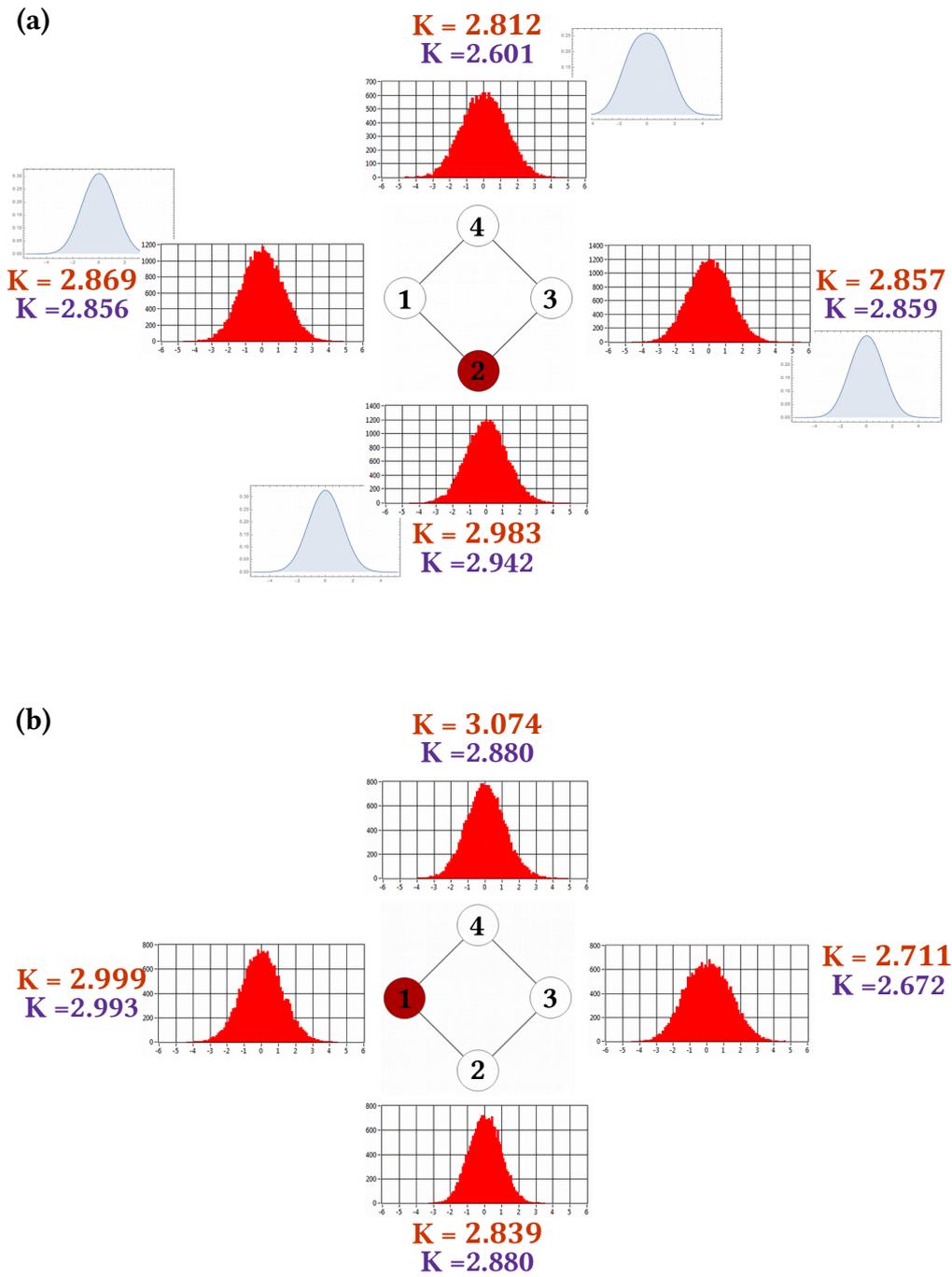


FIGURE 5.18 – Les résultats de la soustraction dans le canevas carré.

vaut à des pertes, qui effacent quelque peu le caractère non-gaussien. Les autres modes ont des résultats de mesures plus proches des prédictions théoriques. Théorie et expérience s'accordent sur le fait que c'est le mode 4 qui est le moins gaussien.

Nous avons procédé à une soustraction dans le nœud 1 (fig. 5.18(b)), qui nous mène aux mêmes constatations : c'est le nœud situé à deux arêtes de distance, c'est-à-dire le nœud 3, qui est le moins gaussien. Les mesures donnent une kurtosis de 2,71 proche de la prédiction théorique à 2,67. Le nœud 1, où a eu lieu la soustraction, présente une distribution gaussienne. Les nœuds 2 et 3 sont supposés avoir la même kurtosis, mais on mesure une distribution gaussienne pour le mode 4 et moins gaussienne pour le mode 2.

Nous n'avons pas mesuré la soustraction dans les nœuds 3 et 4, car les prédictions théoriques sont les mêmes que pour 1 et 2. On pourrait croire que pour ce graphe cyclique, il était également superflu de mesurer à la fois 3 et 4, mais la matrice de changement de base en (5.36) nous apprend que cette invariance cyclique ne se retrouve pas dans la structure du graphe.

5.5 Conclusion

Les états soustraits présentent des caractéristiques qui témoignent de la qualité de notre soustracteur : fonction de Wigner négative pour la soustraction dans un supermode, ressemblance avec un photon unique pour la soustraction dans un état EPR et distributions de probabilité proches de celles prévues par la théorie pour la soustraction dans les canevas quantiques. La bonne correspondance avec la théorie signale également la bonne compréhension que nous avons des états produits.

Conclusion et perspectives

Cette thèse contient deux avancées marquantes, sur lesquelles nous voulons mettre l'accent en guise de conclusion. La première a fait l'objet du chapitre 5, où nous rapportons la première production d'états multimodes non-gaussiens à partir de vide comprimé photo-soustrait. La deuxième est au cœur du chapitre 4 : il s'agit du développement des outils nécessaires à l'ingénierie modale d'états gaussiens multimodes, de manière efficace et rapide.

Expérimentalement, tous ces progrès expérimentaux sont permis par l'extension continue de l'installation optique. Ils sont donc la continuation des travaux des doctorants¹² qui se sont succédés autour de la table optique : Olivier Pinel [Pinel, 2010] pour le montage du SPOPO et la production des premiers états comprimés, guidé par la théorie élaborée par Giuseppe Patera [Patera, 2008]; Renné Medeiros de Araújo [Medeiros, 2012] pour la forme actuelle du SPOPO qui a permis d'obtenir des états suffisamment comprimés pour explorer l'aspect multimode et intriqué du peigne de fréquences produit; Cai Yin [Cai, 2015] pour l'étude expérimentale des canevas quantiques et Clément Jacquard [Jacquard, 2017] pour la préparation, l'installation et la tomographie du soustracteur de photon.

C'est en s'appuyant sur tous ces jalons posés auparavant qu'il nous a été possible de produire des états de vide comprimé multimode photo-soustrait. Par le passé, du vide comprimé photo-soustrait avait déjà été produit ailleurs [Wenger, 2004b], mais jamais en utilisant plus de deux modes comprimés. Outre la possibilité de dégaussifier l'état dans un mode, notre dispositif permet également de soustraire un photon *dans une superposition cohérente de supermodes*, ce qui est nouveau. De plus, nous pouvons choisir librement le mode dans lequel la soustraction a lieu. Cette versatilité permet de créer de nouveaux types d'états, par exemple lorsque l'on soustrait dans les nœuds d'un canevas quantique. En particulier, nous pouvons créer des états présentant de l'intrication inhérente entre les modes, c'est-à-dire une intrication qui ne peut pas être défaire par changement de base. Enfin, relevons que ces états de vide comprimé

12. Et des post-doctorants qui les ont assistés : Jinxia Feng, Jonathan Roslund et Young-Sik Ra, dont le post-doctorat coïncide avec ma thèse.

multimode photo-soustrait ont attiré l'attention pour leur utilité potentielle en simulation quantique : sous certaines conditions, leur échantillonnage est une tâche pour laquelle on peut démontrer un avantage quantique [Chabaud, 2017].

La deuxième avancée présentée dans cette thèse est liée à l'ingénierie d'états quantiques par mise en forme de la pompe. Nous avons vu que la forme spectrale de la pompe détermine l'état de sortie du SPOPO, mais que la relation entre cette forme spectrale et celle des supermodes n'est pas immédiate. Ainsi, pour obtenir une certaine propriété des états de sortie, il faut passer par un algorithme d'optimisation, le plus souvent un algorithme itératif. En situation expérimentale, cet algorithme inclut à chaque itération une mesure de l'état et une extraction de ses propriétés, afin de calculer la façon de changer ses paramètres. Il est donc nécessaire que la mesure de l'état soit efficace et rapide. Pour accomplir cela, nous avons préparé une détection multipixel capable d'acquiesir toute la matrice de covariance de l'état en une seule prise de mesure, ce qui accélère grandement le temps de mesure. Pour le cas des canevas quantiques, nous avons développé dans le chapitre 3 une technique de détermination de la base modale plus rapide que la manière utilisée antérieurement (car elle évite le recours à un algorithme d'optimisation évolutionniste). Une fois la détection homodyne multipixel fonctionnelle, la voie sera ouverte pour la création d'états quantiques aux propriétés optimisées.

On voit se dessiner les pistes pour le devenir de l'expérience. La versatilité de la mise en forme de la pompe sera exploitée pour créer des états sur mesure. En particulier, on cherchera à produire un canevas quantique à partir des bandes de fréquences : si les nœuds du canevas ont pour forme spectrale les bandes de fréquences, ils sont séparables avec un simple réseau. Cela en ferait un état de choix et il semble que de tels états soient accessibles par mise en forme de la pompe.

Annexes

La [première annexe](#) présente la table optique dont sont issus les résultats expérimentaux sur lesquels s'appuie cette thèse. La [deuxième annexe](#) concerne les fonctions d'Hermite-Gauss. La [troisième annexe](#) détaille le fonctionnement du façonneur d'impulsion et en particulier des masques de phase utilisés au cours de mon travail doctoral.

Annexe A

Description de l'expérience

Pour rendre plus concrète la lecture de cette thèse, le lecteur trouvera ici des prises de vue du dispositif expérimental utilisé au laboratoire, schématisé en figure A.1. La figure A.2 présente une photo de la table complète et la figure A.3 présente le façonneur d'impulsion pour le faisceau de pompe.

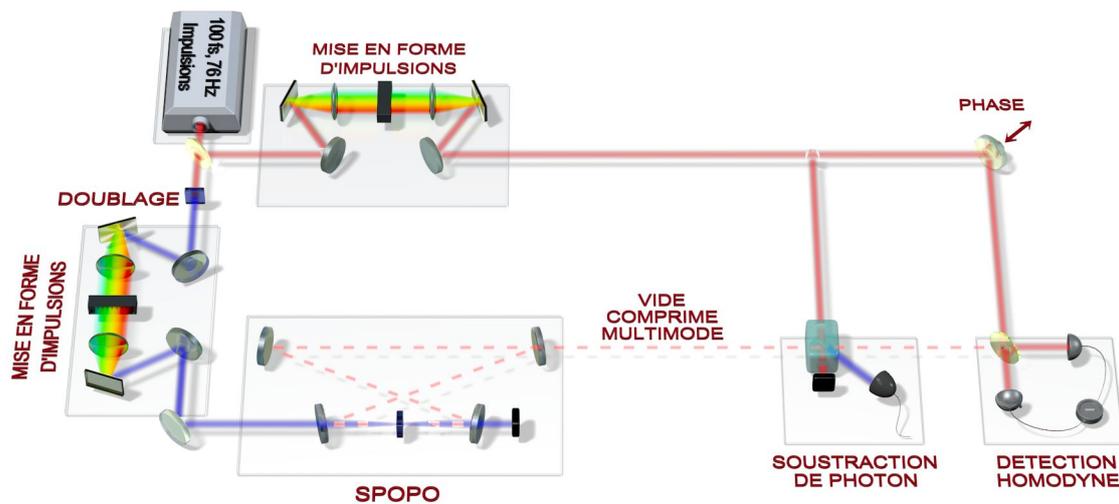
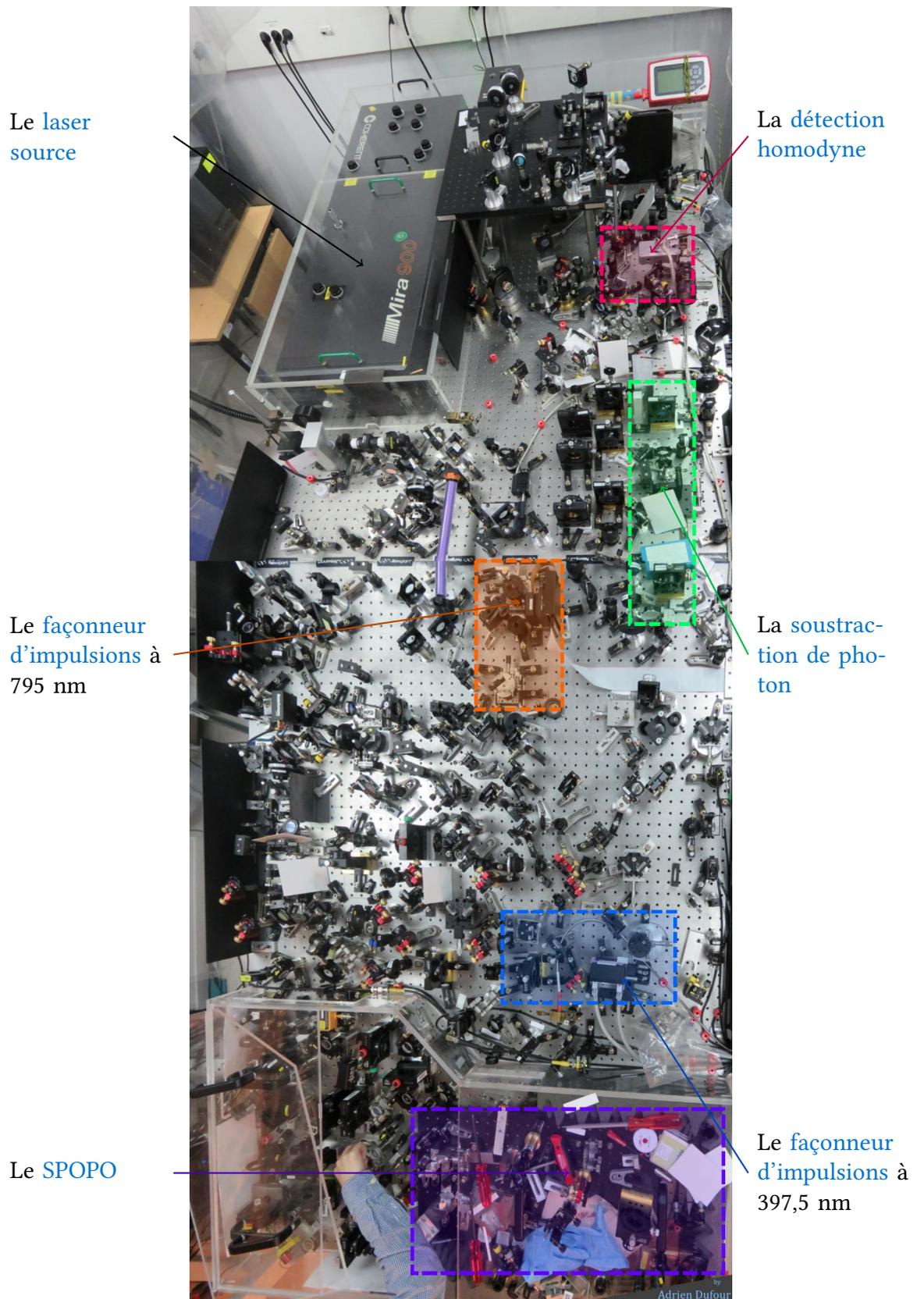


FIGURE A.1 – Schéma de l'expérience.

FIGURE A.2 – La table complète.



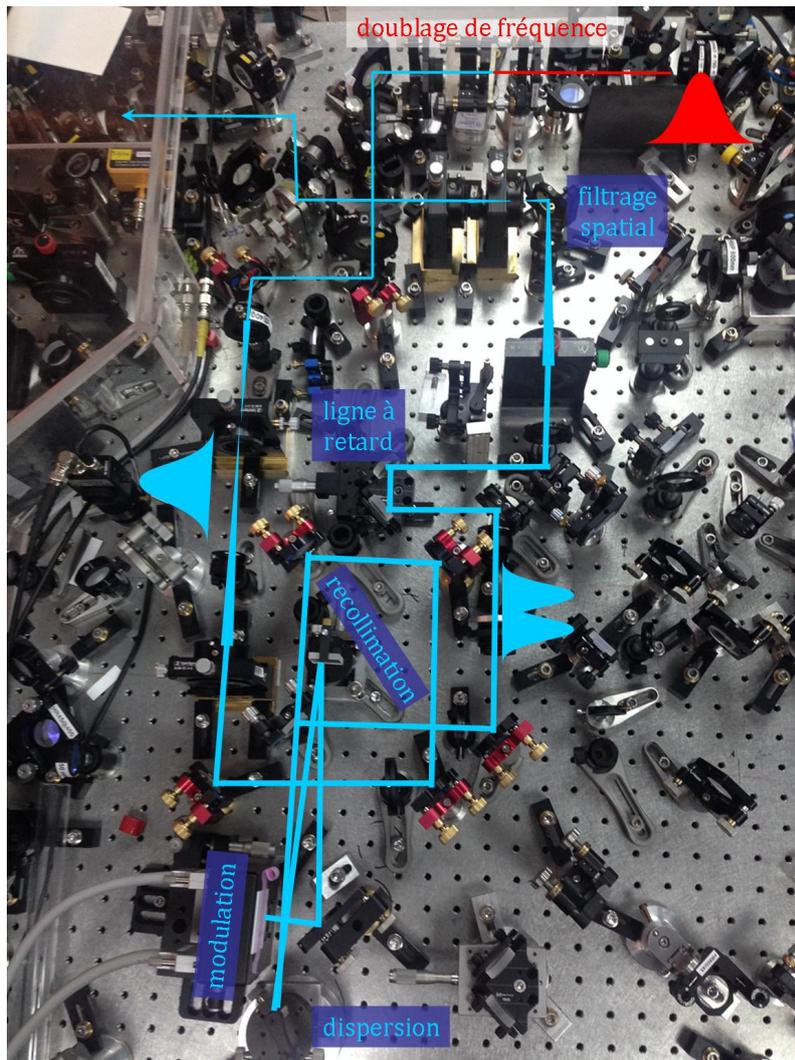


FIGURE A.3 – Le façonneur d’impulsion pour le faisceau de pompe. Son principe de fonctionnement est présenté en 2.2 et ses performances sont détaillées en 4.2.

Annexe B

Fonctions de Hermite-Gauss

J'ai souvent fait appel aux fonctions de Hermite-Gauss dans cette thèse. Il me semble donc utile de donner leurs principales propriétés, d'autant plus que la documentation en français à ce sujet est pour le moins lacunaire et que les multiples conventions d'écriture n'arrangent rien à l'affaire.

B.1 Les polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite sont tout simplement les dérivées du carré de la gaussienne divisées par le carré de la gaussienne. Avec la gaussienne $e^{-x^2/2}$, cela donne la forme dite physique :

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} / e^{-x^2}$$

qui s'écrit explicitement :

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière de $n/2$. En prenant plutôt comme définition « les dérivées de la gaussienne divisées par la gaussienne » on obtient la forme probabiliste, mais elle ne diffère que d'un facteur d'échelle avec la forme physique, je n'en parle donc pas plus.

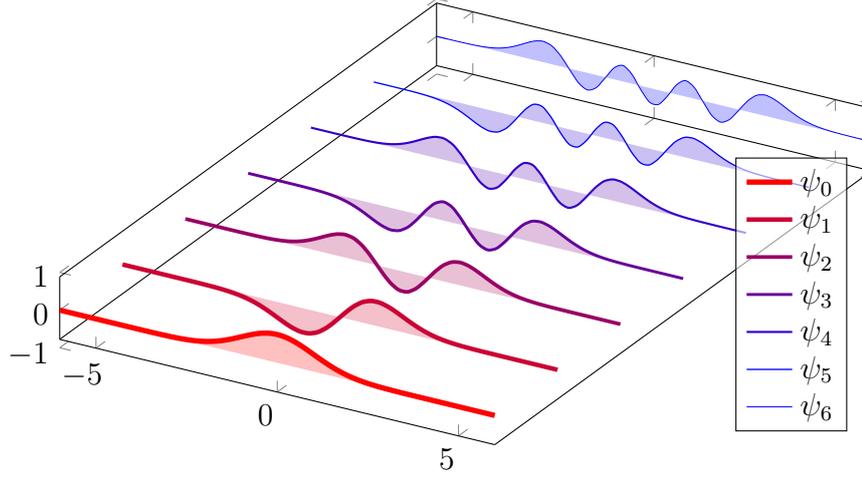
Les premiers polynômes d'Hermite sont $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12\dots$

B.2 Les fonctions d'Hermite-Gauss

Les fonctions d'Hermite-Gauss sont les dérivées du carré de la gaussienne divisées par la gaussienne :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}$$

Ils forment une famille orthogonale représentée ci-dessous :



Comme nous parlons ici de champ mais que nous mesurons le plus souvent des intensités, nous aurons souvent affaire à $|\psi_n|^2$, qui est proportionnel à $H_n(x)^2 e^{-x^2}$. Cela, et l'existence de la forme probabiliste, est souvent à l'origine d'erreurs d'un facteur $\sqrt{2}$ dans les calculs et les simulations

Les fonctions d'Hermite-Gauss sont normalisées par l'intégrale de leur intensité : $\int |\psi_n|^2 = 1$. Dans la définition (B.2) le premier mode est une gaussienne centrée en 0, d'écart-type en amplitude égal à 1. Nous pouvons en prendre une version de largeur ou de centre différents :

$$\psi_n^{[\omega_0, \Delta_\omega]}(\omega) = \psi_n \left(\frac{\omega - \omega_0}{\sqrt{2\Delta_\omega}} \right) / \sqrt{\Delta_\omega \sqrt{2}}$$

On caractérise cette famille par le centre et la largeur de la gaussienne qui en est le premier membre :

$$\psi_0^{[\omega_0, \Delta_\omega]}(\omega) = \exp \left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\Delta_\omega^2} \right) / \sqrt{\Delta_\omega \sqrt{2\pi}}$$

Les conventions pour définir la largeur d'une gaussienne sont les suivantes :

- Avec la *variance de l'intensité* Δ_ω comme ci-dessus. C'est la convention la plus utilisée dans cette thèse, qui utilise la largeur définie en (2.1).

L'avantage est qu'en passant au domaine temporel, on retrouve une écriture analogue, avec la largeur temporelle Δ_t . En effet, la transformée de Fourier donne la forme temporelle du mode s'écrit $\mathcal{F}(\psi_0^{[\omega_0=0, \Delta_\omega]}) = \psi_0^{[0, \Delta_t]}(t) \propto \exp\left(-\frac{t^2}{4\Delta_t^2}\right)$ avec $\Delta_t = 1/2\Delta_\omega$.

- Avec la *largeur à mi-hauteur* $\Delta_\omega^{\text{FWHM}}$. Cette largeur est calculée sur l'intensité, autrement dit il s'agit de la distance entre les deux points où l'intensité vaut la moitié du maximum. Cette grandeur est très facilement visible au spectromètre, d'ailleurs cette convention est presque exclusivement réservée au domaine spectral. Le rapport entre cette largeur et la précédente est $\Delta_\omega^{\text{FWHM}}/\Delta_\omega = 2\sqrt{2} \ln 2 \approx 2.355$.
- Avec le *waist* w : cette convention est d'usage dans le domaine spatial pour mesurer le rayon d'un faisceau. Il est défini comme le rayon à $1/e^2$ (13,5 %) de l'intensité.

B.3 Propriétés remarquables

Les fonctions d'Hermite-Gauss apparaissent à plusieurs reprises dans cette thèse. Les raisons à cela se résument à trois propriétés, que nous détaillons maintenant.

B.3.1 Fonctions propres de l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique quantique décrit l'évolution d'un état quantique placé dans un potentiel quadratique. Pour la fonction d'onde, cela revient à résoudre l'équation différentielle.

$$\psi_n''(x) + (E - x^2)\psi_n(x) = 0$$

qui n'a de solution que si $E = 2n + 1$, et ces solutions sont justement les ψ_n . C'est pourquoi la fonction d'onde d'un état de Fock est une fonction d'Hermite-Gauss (voir page 14).

B.3.2 Fonctions propres de la transformée de Fourier

On définit¹ la transformée de Fourier par

$$\mathcal{F} : g \mapsto \mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(t) e^{i\omega t} dt$$

Les fonctions d’Hermite-Gauss sont fonctions propres de \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}[\psi_n] = i^n \psi_n$$

Comme les cavités optiques comprennent toujours des lentilles ou miroirs concaves, dont l’action sur le faisceau se ramène à une transformée de Fourier, l’invariance décrite ci-dessous fait des fonctions d’Hermite-Gauss une base utile pour leur étude.

B.3.3 Convolution par une gaussienne

La dernière propriété porte sur les polynômes d’Hermite H_n : ils sont invariants par convolution avec une gaussienne [[Gradshteyn, 2007](#), p.838, eq.7.374.10] :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2u}} H_n(x) dx = (2\pi u)^{\frac{1}{2}} (1-2u)^{\frac{n}{2}} H_n\left(y(1-2u)^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{avec } 0 \leq u < \frac{1}{2}$$

C’est pour cette raison que les fonctions d’Hermite-Gauss interviennent comme formes spectrales des supermodes en 4.1.2 : ils sont fonctions propres de la décomposition de Schmidt de la distribution bivariée utilisée en (4.16). Le calcul complet se trouve dans l’annexe de la thèse de G. Patera [[Patera, 2008](#)]

B.4 Réalisation expérimentale

Pour obtenir expérimentalement des spectres d’Hermite-Gauss, il nous suffit d’utiliser le façonneur d’impulsions. Le seul obstacle est le suivant : la largeur spectrale augmente avec l’ordre du mode, tandis que le spectre en entrée est de largeur fixe. Il faudra donc faire un compromis entre la puissance de sortie et la fidélité de la mise en forme (à ce sujet, voir aussi le paragraphe sur la couche 4 en page 90).

Dans notre cas, le faisceau de l’oscillateur local est gaussien, de largeur à mi-hauteur $\Delta_{\omega}^{\text{FWHM}} = 10$ nm. Nous cherchons à reproduire la famille de modes

1. On notera que la convention retenue pour la transformée de Fourier est d’importance. Ici nous avons pris la transformation la plus standard dans la communauté de l’optique quantique. Pour la définition $\tilde{\mathcal{F}}[g](k) = \int g(x) e^{-ikx} dx$ qui est couramment employée ailleurs, les $\{\psi_n\}$ sont toujours fonctions propres mais les valeurs propres associées sont $\{\sqrt{2\pi}(-i)^n\}$.

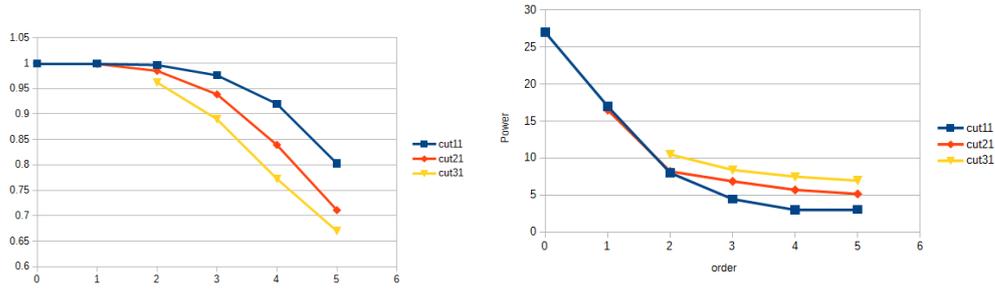


FIGURE B.1 – Fidélité (à gauche) et puissance de sortie (à droite) pour les modes HG0 à HG6. Les courbes bleues, oranges et jaunes correspondent respectivement à des seuils κ de 0,11, 0,21 et 0,31. La puissance en entrée est de 40 mW.

d’Hermite-Gauss de 7 nm de largeur. La figure B.1 présente les valeurs de la puissance en sortie et de la fidélité, mesurées sur la façonneur d’impulsions de l’oscillateur local.

La fidélité est calculée sur l’intensité spectrale $I(\lambda)$ seulement :

$$\mathcal{F} = \int I_{mes}(\lambda) \cdot I_{HG}(\lambda) d\lambda / \sqrt{\int I_{mes}^2(\lambda) d\lambda \cdot \int I_{HG}^2(\lambda) d\lambda}$$

Annexe C

Diffraction par le SLM

La répartition de l'intensité dans les différents ordres de diffraction est dictée par le profil $\varphi(x)$ des traits du réseau imprimé sur le SLM [Albero, 2012]. La proportion dans l'ordre k est donnée par le coefficient de Fourier a_k :

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\varphi(x)] \exp[-ikx] dx \quad (\text{C.1})$$

Pour notre réseau en échelle, la proportion de lumière diffractée dans l'ordre 1 dépend en sinus cardinal de la profondeur de trait du réseau. Pour une profondeur de 0, autrement dit pour un réseau plat, aucune lumière n'est diffractée, et pour une profondeur de 2π , toute la lumière va dans l'ordre 1. L'ajout de la phase se fait par translation du motif, comme on peut le voir sur la figure C.1.

Autres formes que le réseau en échelle

Notre but est de répartir la lumière entre les ordres de diffraction 0 et 1. Pour une diffraction t_1 dans l'ordre 1 et le reste dans l'ordre 0, la formule (C.1) donne le profil de phase :

$$\exp[i\varphi(x)] \propto t_0 + t_1 e^{ikx}$$

Les profils obtenus sont présentés en figure C.2. Toutefois, il nous est indifférent que les ordres de diffraction supérieurs reçoivent ou non de la lumière, puisque nous disposons d'un filtrage spatial qui sélectionne l'ordre 0 uniquement. Nous avons donc utilisé un réseau en échelle pour toutes les situations, en nous contentons de modifier la profondeur du réseau.

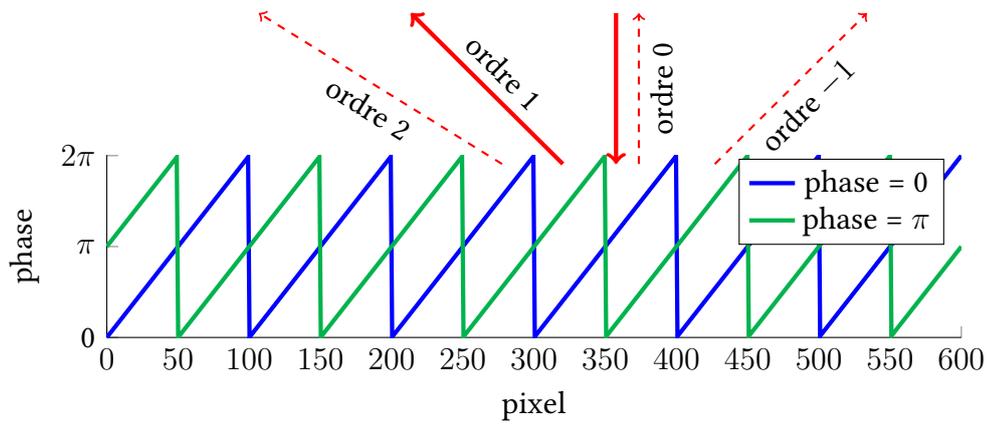


FIGURE C.1 – Deux réseaux en échellette. Les deux réseaux diffèrent par la phase qu’ils imposent au faisceau diffracté. La profondeur du réseau, égale à 2π , assure une diffraction complète dans l’ordre 1.

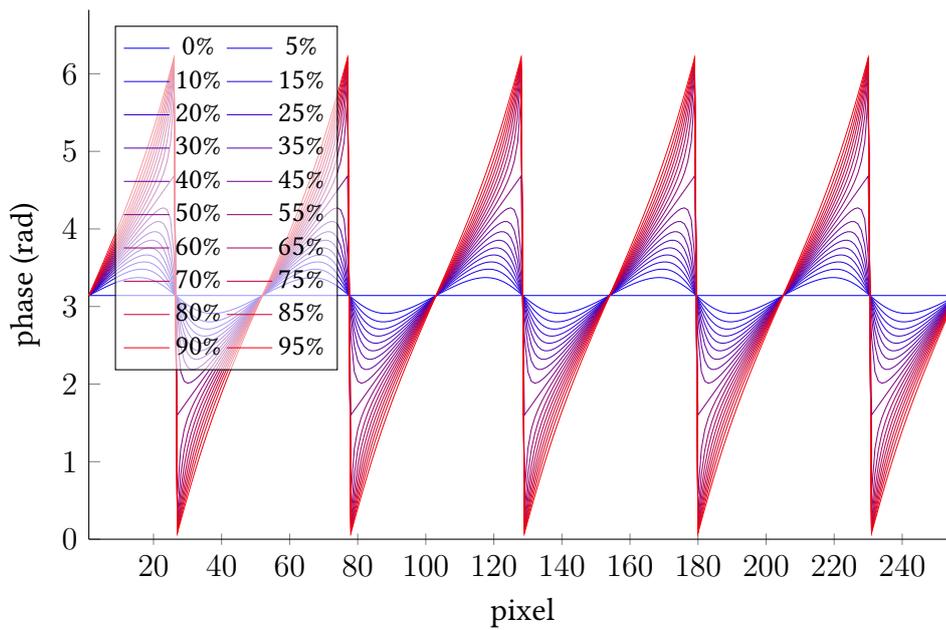


FIGURE C.2 – Aspects des profils de phase issus de la formule (C.1) pour une diffraction uniquement dans l’ordre 1, présentés pour différentes valeurs de la diffraction t_1 . On remarque que pour $t_1 = 50\%$ et $t_1 = 100\%$ on retrouve le réseau en échellette de la figure C.1. Pour des faibles valeurs de diffractions le réseau est plus doux et ressemble à une sinusoïde, tandis qu’entre 50 % et 100 % le profil est au contraire plus pointu, ce qui rend moins fidèlement reproductible sur le SLM.

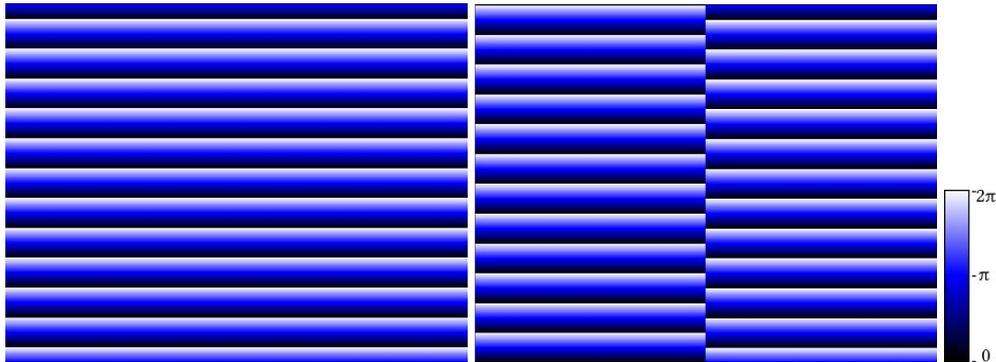


FIGURE C.3 – Masques de phase à 600 lignes de pixels et 350 colonnes, l'écran du SLM est en fait large de 792 colonnes mais les 442 autres colonnes ne reçoivent pas de lumière et ne sont donc pas représentées. À gauche, masque de phase pour une diffraction de toute la lumière dans l'ordre 1. À droite, Masque de phase du spectre à saut de phase utilisé pour les résultats de la figure 4.19.

Masques de phase utilisés

Les figures C.3-C.4-C.5 présentent des masques de phase complets utilisés dans nos expériences. Sur la figure C.3, on voit la forme en échelonne du réseau adopté, avec ses sauts de phase. Sur la figure C.4, la forme prise par le saut de phase (parabole, droite) reflète directement la phase spectrale imposée par le masque de phase.

Étalonnage

L'étalonnage de couche 3 (correspondance pixel-longueur d'onde) est fait quotidiennement avec un programme LabView. Celui-ci lance une série de mesures spectrales : à chaque étape, une colonne de pixels est activée, la longueur d'onde maximale est relevée, et à la fin de cette série spectrale une approximation linéaire de la relation entre pixels et longueurs d'onde est obtenue. Cette méthode permet de minimiser les erreurs dans l'adressage d'une longueur d'onde particulière : l'erreur entre le longueur d'onde demandée et la longueur d'onde obtenue est inférieure à 0,1 nm.

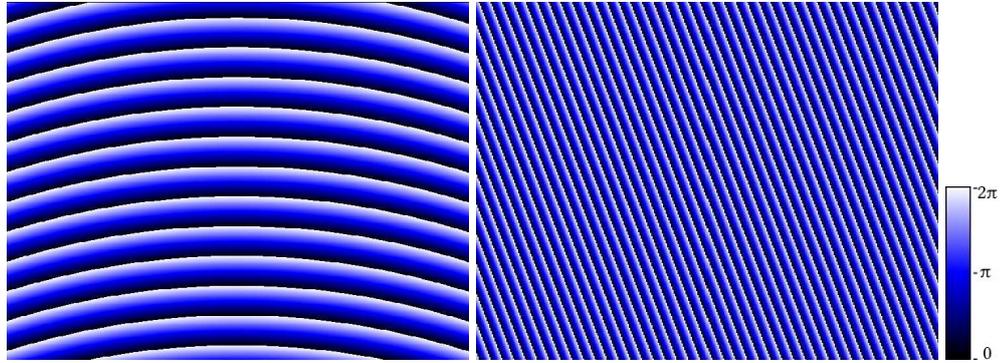


FIGURE C.4 – À gauche, un masque de phase qui impose une phase quadratique de $\phi_2 = -3500fs^2$. À droite, le masque impose une phase spectrale linéaire correspondant à un retard de $1900fs^2$.

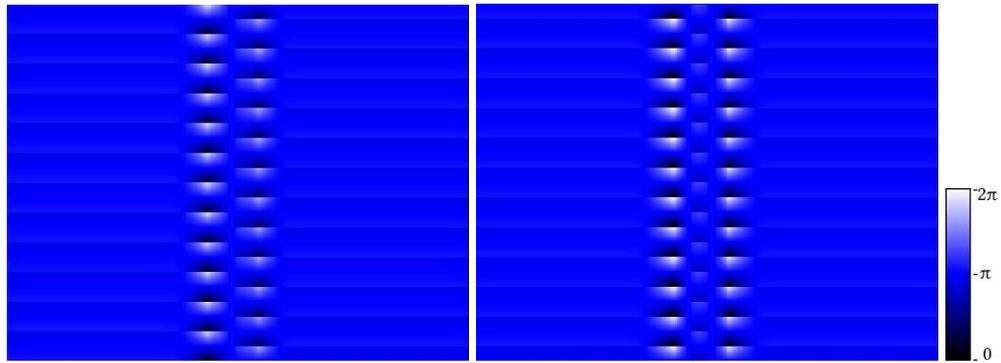


FIGURE C.5 – À gauche, le masque de phase qui génère HG1. À droite, le masque pour HG2.

Bibliographie

- [Aasi, 2013] Junaid AASI, J ABADIE, BP ABBOTT, Richard ABBOTT, TD ABBOTT, MR ABERNATHY, Carl ADAMS, Thomas ADAMS, Paolo ADDESSO, RX ADHIKARI et coll. « Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light ». *Nature Photonics* 7.8 (2013), p. 613-619. DOI : [10.1038/nphoton.2013.177](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.177) (cité pages 2 et 13).
- [Abbott, 2016] ABBOTT ET COLL. « Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger ». *Phys. Rev. Lett.* 116 (6 fév. 2016), p. 061102. DOI : [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102) (cité page 2).
- [Agostini, 2004] Pierre AGOSTINI et Louis F. DIMAURO. « The physics of attosecond light pulses ». *Reports on Progress in Physics* 67.8 (2004), p. 813-855. DOI : [10.1088/0034-4885/67/8/C01](https://doi.org/10.1088/0034-4885/67/8/C01) (cité page 1).
- [Akturk, 2005] Selcuk AKTURK, Xun GU, Pablo GABOLDE et Rick TREBINO. « The general theory of first-order spatio-temporal distortions of Gaussian pulses and beams ». *Opt. Express* 13.21 (oct. 2005), p. 8642-8661. DOI : [10.1364/OPEX.13.008642](https://doi.org/10.1364/OPEX.13.008642) (cité page 28).
- [Akturk, 2006] Selcuk AKTURK, Xun GU, Mark KIMMEL et Rick TREBINO. « Extremely simple single-prism ultrashort-pulse compressor ». *Opt. Express* 14.21 (oct. 2006), p. 10101-10108. DOI : [10.1364/OE.14.010101](https://doi.org/10.1364/OE.14.010101) (cité page 27).
- [Akturk, 2010] Selcuk AKTURK, Xun GU, Pamela BOWLAN et Rick TREBINO. « Spatio-temporal couplings in ultrashort laser pulses ». *Journal of Optics* 12.9 (2010), p. 093001. DOI : [10.1088/2040-8978/12/9/093001](https://doi.org/10.1088/2040-8978/12/9/093001) (cité page 28).

- [Albero, 2012] Jorge ALBERO, Ignacio MORENO, Jeffrey A. DAVIS, Don M. COTTRELL et David SAND. « Generalized phase diffraction gratings with tailored intensity ». *Opt. Lett.* 37.20 (oct. 2012), p. 4227-4229. DOI : [10 . 1364 / OL . 37 . 004227](https://doi.org/10.1364/OL.37.004227) (cité page 161).
- [Appel, 2007] Jürgen APPEL, Dallas HOFFMAN, Eden FIGUEROA et A. I. LVOVSKY. « Electronic noise in optical homodyne tomography ». *Phys. Rev. A* 75 (3 mar. 2007), p. 035802. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 75 . 035802](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.035802) (cité page 101).
- [Arrighi, 2016] Pablo ARRIGHI et Simon PERDRIX. « Modèles de calcul quantiques ». In : *Informatique Mathématique - une photographie en 2016*. Sous la dir. de Loïc MAZO ÉTIENNE BAUDRIER. CNRS Editions, 2016. ISBN : 978-2-271-09335-6. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01467253> (cité page 72).
- [Arzani, 2018a] Francesco ARZANI. « Measurement Based Quantum Information with Optical Frequency Combs ». Thèse de doct. Université de recherche Paris Sciences et Lettres, 2018 (cité pages 44, 58, 76, 81, 87, 88, 89, 94, et 110).
- [Arzani, 2018b] Francesco ARZANI, Claude FABRE et Nicolas TREPS. « Versatile engineering of multimode squeezed states by optimizing the pump spectral profile in spontaneous parametric down-conversion ». *Phys. Rev. A* 97 (3 mar. 2018), p. 033808. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 97 . 033808](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.033808) (cité pages 84 et 89).
- [Aspect, 1982] Alain ASPECT, Jean DALIBARD et Gérard ROGER. « Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers ». *Phys. Rev. Lett.* 49 (25 déc. 1982), p. 1804-1807. DOI : [10 . 1103 / PhysRevLett . 49 . 1804](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.1804) (cité page 2).
- [Aspect, 2005] Alain ASPECT. « Une nouvelle révolution quantique ». In : Édouard BRÉZIN et Sébastien BALIBAR. *Demain la physique*. Odile Jacob, 2005. Chap. 5. ISBN : 978-2-7381-9713-9 (cité pages 2 et 73).
- [Autonne, 1915] Léon AUTONNE. *Sur les matrices hypohermitiennes et sur les matrices unitaires*. T. 38. Rey, 1915 (cité pages 44 et 77).

- [Averchenko, 2014] V. AVERCHENKO, V. THIEL et N. TREPS. « Nonlinear photon subtraction from a multimode quantum field ». *Physical Review A* 89.6 (juin 2014), p. 063808. ISSN : 1050-2947. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 89 . 063808](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.063808) (cité page 111).
- [Averchenko, 2016] V. AVERCHENKO, C. JACQUARD, V. THIEL, Fabre C. et Treps N. « Multimode theory of single-photon subtraction ». *New Journal of Physics* 18.8 (2016), p. 083042. DOI : [10 . 1088 / 1367 - 2630 / 18 / 8 / 083042](https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/8/083042) (cité pages 111 et 114).
- [Averchenko, 2017] Valentin AVERCHENKO, Denis SYCH, Gerhard SCHUNK, Ulrich VOGL, Christoph MARQUARDT et Gerd LEUCHS. « Temporal shaping of single photons enabled by entanglement ». *Phys. Rev. A* 96 (4 oct. 2017), p. 043822. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 96 . 043822](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.043822) (cité page 139).
- [Barnett, 1998] S. BARNETT, L. PHILLIPS et D. PEGG. « Imperfect photodetection as projection onto mixed states ». *Optics communications* December (1998), p. 45-49. DOI : [10 . 1016 / S0030 - 4018 \(98\) 00511 - 2](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(98)00511-2) (cité page 115).
- [Bartlett, 2002] Stephen D. BARTLETT, Barry C. SANDERS, Samuel L. BRAUNSTEIN et Kae NEMOTO. « Efficient Classical Simulation of Continuous Variable Quantum Information Processes ». *Phys. Rev. Lett.* 88 (9 fév. 2002), p. 097904. DOI : [10 . 1103 / PhysRevLett . 88 . 097904](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.097904) (cité page 21).
- [Bennett, 1984] Charles H. BENNETT et Gilles BRASSARD. « Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing ». *Theoretical Computer Science* 560 (1984). Theoretical Aspects of Quantum Cryptography – celebrating 30 years of BB84, p. 7-11. ISSN : 0304-3975. DOI : [10 . 1016 / j . tcs . 2014 . 05 . 025](https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.05.025) (cité page 2).
- [Bennett, 1993] Charles H. BENNETT, Gilles BRASSARD, Claude CRÉPEAU, Richard JOZSA, Asher PERES et William K. WOOTTERS. « Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels ». *Phys. Rev. Lett.* 70 (13 mar. 1993), p. 1895-1899. DOI : [10 . 1103 / PhysRevLett . 70 . 1895](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895) (cité page 2).

- [Bloch, 1962] Claude BLOCH et Albert MESSIAH. « The canonical form of an antisymmetric tensor and its application to the theory of superconductivity ». *Nuclear Physics* 39 (1962), p. 95-106. ISSN : 0029-5582. DOI : [10 . 1016 / 0029 - 5582 \(62\)90377-2](https://doi.org/10.1016/0029-5582(62)90377-2) (cité page 60).
- [Bouwmeester1997] Dik BOUWMEESTER, Jian-Wei PAN, Klaus MATTLE, Manfred EIBL, Harald WEINFURTER et Anton ZEILINGER. « Experimental quantum teleportation ». *Nature* 390.6660 (1997), p. 575. DOI : [10 . 1038 / 37539](https://doi.org/10.1038/37539) (cité page 2).
- [Braunstein, 2005] S. BRAUNSTEIN. « Squeezing as an irreducible resource ». *Physical Review A* 71.5 (mai 2005), p. 055801. ISSN : 1050-2947. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 71 . 055801](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.055801) (cité page 60).
- [Brecht, 2014] Benjamin BRECHT, Andreas ECKSTEIN, Raimund RICKEN, Viktor QUIRING, Hubertus SUCHE, Linda SANSONI et Christine SILBERHORN. « Demonstration of coherent time-frequency Schmidt mode selection using dispersion-engineered frequency conversion ». *Physical Review A* 90.3 (sept. 2014), p. 030302. ISSN : 1050-2947. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 90 . 030302](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.030302) (cité page 117).
- [Cai, 2015] Yin CAI. « Quantum Coherent Control with an Optical Frequency Comb ». Thèse de doct. ENS, 2015 (cité pages 102, 106, et 147).
- [Cai, 2017] Y CAI, J ROSLUND, G FERRINI, F ARZANI, X XU, C FABRE et N TREPS. « Multimode entanglement in reconfigurable graph states using optical frequency combs ». *Nature communications* 8 (2017), p. 15645. DOI : [10 . 1038 / ncomms15645](https://doi.org/10.1038/ncomms15645) (cité pages 3 et 134).
- [Caves, 1981] Carlton M. CAVES. « Quantum-mechanical noise in an interferometer ». *Phys. Rev. D* 23 (8 avr. 1981), p. 1693-1708. DOI : [10 . 1103 / PhysRevD . 23 . 1693](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.1693) (cité page 13).
- [Chabaud, 2017] U. CHABAUD, T. DOUCE, D. MARKHAM, P. van LOOCK, E. KASHEFI et G. FERRINI. « Continuous-variable sampling from photon-added or photon-subtracted squeezed states ». *Phys. Rev. A* 96 (6 déc. 2017), p. 062307. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 96 . 062307](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.062307) (cité page 148).

- [Chanteloup, 1998] Jean-Christophe CHANTELOUP. « Contrôle et mise en forme des fronts de phase et d'énergie d'impulsions brèves ultra-intenses ». Thèse de doct. Ecole Polytechnique X, déc. 1998. URL : <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00003140> (cité page 28).
- [Chen, 2014] Moran CHEN, Nicolas C. MENICUCCI et Olivier PFISTER. « Experimental realization of multipartite entanglement of 60 modes of a quantum optical frequency comb ». *Physical Review Letters* 112.12 (2014), p. 120505. ISSN : 0031-9007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.112.120505](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.120505) (cité page 2).
- [Corkum, 1994] P. B. CORKUM, N. H. BURNETT et M. Y. IVANOV. « Subfemtosecond pulses ». *Opt. Lett.* 19.22 (nov. 1994), p. 1870-1872. DOI : [10.1364/OL.19.001870](https://doi.org/10.1364/OL.19.001870) (cité page 1).
- [Sarkissian, 2015] Henri DER SARKISSIAN. « Tomography and discrete geometry using the Mojette transform ». Thèse de doct. Université de Nantes, juin 2015. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01217874> (cité page 132).
- [Deutsch, 1985] David DEUTSCH. « Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer ». *Proc. R. Soc. Lond. A* 400.1818 (1985), p. 97-117. DOI : [10.1098/rspa.1985.0070](https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0070) (cité page 2).
- [Diddams, 2000] Scott A. DIDDAMS, David J. JONES, Jun YE, Steven T. CUNDIFF, John L. HALL, Jinendra K. RANKA, Robert S. WINDELER, Ronald HOLZWARH, Thomas UDEM et T. W. HÄNSCH. « Direct Link between Microwave and Optical Frequencies with a 300 THz Femtosecond Laser Comb ». *Phys. Rev. Lett.* 84 (22 mai 2000), p. 5102-5105. DOI : [10.1103/PhysRevLett.84.5102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.5102) (cité pages 1 et 29).
- [DiVincenzo, 2000] David P DiVINCENZO. « The physical implementation of quantum computation ». *Fortschritte der Physik: Progress of Physics* 48.9-11 (2000), p. 771-783 (cité page 2).
- [Drever, 1983] R. W. P. DREVER, J. L. HALL, F. V. KOWALSKI, J. HOUGH, G. M. FORD, A. J. MUNLEY et H. WARD. « Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator ». *Applied Physics B* 31.2 (juin 1983), p. 97-105. DOI : [10.1007/BF00702605](https://doi.org/10.1007/BF00702605) (cité page 48).

- [Duan, 2000] Lu-Ming DUAN, G. GIEDKE, J. I. CIRAC et P. ZOLLER. « Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems ». *Phys. Rev. Lett.* 84 (12 mar. 2000), p. 2722-2725. DOI : [10 . 1103 / PhysRevLett . 84 . 2722](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2722) (cité page 138).
- [Einstein, 1935] Albert EINSTEIN, Boris PODOLSKY et Nathan ROSEN. « Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? » *Physical review* 47.10 (1935), p. 777. DOI : [10 . 1103 / PhysRev . 47 . 777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777) (cité page 52).
- [Ekert, 1991] Artur K. EKERT. « Quantum cryptography based on Bell's theorem ». *Phys. Rev. Lett.* 67 (6 août 1991), p. 661-663. DOI : [10 . 1103 / PhysRevLett . 67 . 661](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661) (cité page 2).
- [Fabre, 2000] Claude FABRE, Matthias VAUPEL, Nicolas TREPS, Pierre-François COHADON, Catherine SCHWOB et Agnès MAITRE. « Cw optical parametric oscillators: single mode or multimode? » *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* 1.5 (2000), p. 553-559. DOI : [10 . 1016 / S1296 - 2147 \(00\) 00154 - 2](https://doi.org/10.1016/S1296-2147(00)00154-2) (cité page 48).
- [Fedorov, 2015a] Ilya A FEDOROV, Aleksey K FEDOROV, Yury V KUROCHKIN et A I LVOVSKY. « Tomography of a multimode quantum black box ». *New Journal of Physics* 17.4 (2015), p. 043063. ISSN : 1367-2630. DOI : [10 . 1088 / 1367 - 2630 / 17 / 4 / 043063](https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/4/043063) (cité page 124).
- [Fedorov, 2015b] M V FEDOROV. « Schmidt decomposition for non-collinear biphoton angular wave functions ». *Physica Scripta* 90.7 (2015), p. 074048. DOI : [10 . 1088 / 0031 - 8949 / 90 / 7 / 074048](https://doi.org/10.1088/0031-8949/90/7/074048) (cité page 80).
- [Fedrici, 2017] Bruno FEDRICI. « Solutions évolutives pour les réseaux de communication quantique ». Thèse de doct. Université Côte d'Azur, 2017. URL : <http://www.theses.fr/2017AZUR4117> (cité page 72).
- [Ferrini, 2015] Giulia FERRINI, Jonathan ROSLUND, Francesco ARZANI, Yin CAI, Claude FABRE et Nicolas TREPS. « Optimization of networks for measurement-based quantum computation ». *Physical Review A* 91.3 (2015), p. 032314. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 91 . 032314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.032314) (cité pages 63 et 66).

- [Ferrini, 2016] Giulia FERRINI, Jonathan ROSLUND, Francesco ARZANI, Claude FABRE et Nicolas TREPS. « Direct approach to Gaussian measurement based quantum computation ». *Physical Review A* 94.6 (2016), p. 062332. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 94 . 062332](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.062332) (cité page 64).
- [Feynman, 1982] Richard P FEYNMAN. « Simulating physics with computers ». *International journal of theoretical physics* 21.6-7 (1982), p. 467-488. DOI : [10 . 1007 / BF02650179](https://doi.org/10.1007/BF02650179) (cité page 2).
- [Fukui, 2018] Kosuke FUKUI, Akihisa TOMITA, Atsushi OKAMOTO et Keisuke FUJII. « High-Threshold Fault-Tolerant Quantum Computation with Analog Quantum Error Correction ». *Phys. Rev. X* 8 (2 mai 2018), p. 021054. DOI : [10 . 1103 / PhysRevX . 8 . 021054](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.021054) (cité page 73).
- [Furusawa, 1998] A. FURUSAWA, J. L. SØRENSEN, S. L. BRAUNSTEIN, C. A. FUCHS, H. J. KIMBLE et E. S. POLZIK. « Unconditional Quantum Teleportation ». *Science* 282.5389 (1998), p. 706-709. ISSN : 0036-8075. DOI : [10 . 1126 / science . 282 . 5389 . 706](https://doi.org/10.1126/science.282.5389.706) (cité page 2).
- [Gazeau, 2009] Jean-Pierre GAZEAU. *Coherent states in quantum physics*. Wiley, 2009. DOI : [10 . 1002 / 9783527628285](https://doi.org/10.1002/9783527628285) (cité page 12).
- [Gerke, 2015] S. GERKE, J. SPERLING, W. VOGEL, Y. CAI, J. ROSLUND, N. TREPS et C. FABRE. « Full Multipartite Entanglement of Frequency-Comb Gaussian States ». *Phys. Rev. Lett.* 114 (5 fév. 2015), p. 050501. DOI : [10 . 1103 / PhysRevLett . 114 . 050501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.050501) (cité pages 2 et 55).
- [Gisin, 2012] Nicolas GISIN. *L'Impensable Hasard: Non-localité, téléportation et autres merveilles quantiques*. Avec une préf. d'Alain ASPECT. Odile Jacob, 2012. ISBN : 978-2-7381-2831-7 (cité page 2).
- [Giustina, 2015] Marissa GIUSTINA, Marijn A. M. VERSTEEGH, Sören WENGEROWSKY, Johannes HANDSTEINER, Armin HOCHRAINER, Kevin PHELAN, Fabian STEINLECHNER, Johannes KOFLE, Jan-Åke LARSSON, Carlos ABELLÁN, Waldimar AMAYA, Valerio PRUNERI, Morgan W. MITCHELL, Jörn BEYER, Thomas GERRITS, Adriana E. LITA, Lynden K. SHALM, Sae Woo NAM, Thomas SCHEIDL, Rupert URSIN, Bernhard

- WITTMANN et Anton ZEILINGER. « Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons ». *Phys. Rev. Lett.* 115 (25 déc. 2015), p. 250401. DOI : [10.1103/PhysRevLett.115.250401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250401) (cité page 2).
- [Gradshteyn, 2007] I. S. GRADSHTEYN et I. M. RYZHIK. *Table of integrals, series and products*. Sous la dir. d'A. JEFFREY et D. ZWILLINGER. Elsevier, 2007. ISBN : 9780123736376 (cité page 158).
- [Grice, 2001] W. P. GRICE, A. B. U'REN et I. A. WALMSLEY. « Eliminating frequency and space-time correlations in multiphoton states ». *Phys. Rev. A* 64 (6 nov. 2001), p. 063815. DOI : [10.1103/PhysRevA.64.063815](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.063815) (cité page 80).
- [Grosshans, 2002] Frédéric GROSSHANS et Philippe GRANGIER. « Continuous Variable Quantum Cryptography Using Coherent States ». *Phys. Rev. Lett.* 88 (5 jan. 2002), p. 057902. DOI : [10.1103/PhysRevLett.88.057902](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.057902) (cité page 2).
- [Grover, 1997] Lov K. GROVER. « Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack ». *Phys. Rev. Lett.* 79 (2 juil. 1997), p. 325-328. DOI : [10.1103/PhysRevLett.79.325](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.325) (cité page 71).
- [Grynberg, 2010] Gilbert GRYNBERG, Alain ASPECT et Claude FABRE. *Introduction to quantum optics: from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge University Press, 2010. ISBN : 9780521551120 (cité pages 3, 6, et 95).
- [Guibal, 1997] Samuel GUIBAL. « Atomes froids piégés dans un réseau lumineux : étude par spectroscopie pompe-sonde ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie (UPMC) - Paris VI, 1997 (cité page 1).
- [Hammer, 2016] Jonas HAMMER. « Spectral Wavelet Interferometry via Dispersive Fourier Transformation ». Masterarbeit. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2016 (cité page 107).
- [Hensen, 2015] Bas HENSEN, Hannes BERNIEN, Anaïs E DRÉAU, Andreas REISERER, Norbert KALB, Machiel S BLOK, Just RUITENBERG, Raymond FL VERMEULEN, Raymond N SCHOUTEN, Carlos ABELLÁN et coll. « Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres ». *Nature* 526.7575 (2015), p. 682. DOI : [10.1038/nature15759](https://doi.org/10.1038/nature15759) (cité page 2).

- [Hild, 2016] Marek Bastian HILD, Adrien DUFOUR, Georg ACHAZI, Alexander PATAS, Paul SCHEIER et Albrecht LINDINGER. « Selection of ionization paths of K₂ on superfluid helium droplets by wave packet interference ». *Chemical Physics Letters* 658 (2016), p. 109-113. ISSN : 0009-2614. DOI : [10.1016/j.cplett.2016.06.018](https://doi.org/10.1016/j.cplett.2016.06.018) (cité page 1).
- [Horodecki, 2009] Ryszard HORODECKI, Paweł HORODECKI, Michał HORODECKI et Karol HORODECKI. « Quantum entanglement ». *Rev. Mod. Phys.* 81 (2 juin 2009), p. 865-942. DOI : [10.1103/RevModPhys.81.865](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865) (cité page 54).
- [Hudson, 1974] Robin L HUDSON. « When is the Wigner quasi-probability density non-negative? » *Reports on Mathematical Physics* 6.2 (1974), p. 249-252. DOI : [10.1016/0034-4877\(74\)90007-X](https://doi.org/10.1016/0034-4877(74)90007-X) (cité page 21).
- [Humphreys, 2018] Peter C HUMPHREYS, Norbert KALB, Jaco PJ MORITS, Raymond N SCHOUTEN, Raymond FL VERMEULEN, Daniel J TWITCHEN, Matthew MARKHAM et Ronald HANSON. « Deterministic delivery of remote entanglement on a quantum network ». *Nature* 558.7709 (2018), p. 268. DOI : [10.1038/s41586-018-0200-5](https://doi.org/10.1038/s41586-018-0200-5) (cité page 2).
- [Jacquard, 2017] Clément JACQUARD. « A single-photon subtractor for spectrally multimode quantum states ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, jan. 2017. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01646428> (cité pages 38, 42, 50, 77, 99, 118, 127, et 147).
- [Joly, 2012] Nicolas JOLY. « Contribution à l'élaboration de sources spectralement étendues par propagation d'impulsions dans les fibres microstructurées ». Habilitation à diriger des recherches (HDR). Ecole normale supérieure de Cachan, Juillet 2012 (cité page 107).
- [Judson, 1992] Richard JUDSON et Herschel RABITZ. « Teaching Lasers to Control Molecules ». *Physical Review Letters* 68.10 (1992), p. 1500-1503. DOI : [10.1103/PhysRevLett.68.1500](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1500) (cité page 1).

- [Kasuya, 1978] T. KASUYA, T. SUZUKI et K. SHIMODA. « A prism anamorphic system for Gaussian beam expander ». *Applied physics* 17.2 (oct. 1978), p. 131-136. ISSN : 1432-0630. DOI : [10.1007/BF00885244](https://doi.org/10.1007/BF00885244) (cité page 28).
- [Kimble, 2008] H Jeff KIMBLE. « The quantum internet ». *Nature* 453.7198 (2008), p. 1023. DOI : [10.1038/nature07127](https://doi.org/10.1038/nature07127) (cité page 2).
- [Kolobov, 2007] Mikhail I KOLOBOV. *Quantum imaging*. Springer Science & Business Media, 2007. ISBN : 978-0-387-33988-7 (cité page 24).
- [Kumar, 2012] R. KUMAR, E. BARRIOS, A. MACRAE, E. CAIRNS, E.H. HUNTINGTON et A.I. LVOVSKY. « Versatile wideband balanced detector for quantum optical homodyne tomography ». *Optics Communications* 285.24 (2012), p. 5259-5267. ISSN : 0030-4018. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2012.07.103> (cité page 101).
- [Kurpiers, 2018] P KURPIERS, P MAGNARD, T WALTER, B ROYER, M PECHAL, J HEINSOO, Y SALATHÉ, A AKIN, S STORZ, J-C BESSE et coll. « Deterministic quantum state transfer and remote entanglement using microwave photons ». *Nature* 558.7709 (2018), p. 264. DOI : [10.1038/s41586-018-0195-y](https://doi.org/10.1038/s41586-018-0195-y) (cité page 2).
- [Laurat, 2018] Julien LAURAT. *On-demand entanglement could lead to scalable quantum networks*. 2018. DOI : [10.1038/d41586-018-05336-1](https://doi.org/10.1038/d41586-018-05336-1) (cité page 2).
- [Léger, 2018] Zacharie LÉGER, Aharon BRODUTCH et Amr HELMY. « Entanglement enhancement in multimode integrated circuit ». *Physical Review A* 97.6 (juin 2018), p. 062303. DOI : [10.1103/PhysRevA.97.062303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.062303) (cité page 73).
- [Leonhardt, 1997] Ulf LEONHARDT. *Measuring the quantum state of light*. T. 22. Cambridge university press, 1997. ISBN : 9780521497305 (cité pages 98 et 132).
- [Liao, 2017] Sheng-Kai LIAO, Wen-Qi CAI, Wei-Yue LIU, Liang ZHANG, Yang LI, Ji-Gang REN, Juan YIN, Qi SHEN, Yuan CAO, Zheng-Ping LI et coll. « Satellite-to-ground quantum key distribution ». *Nature* 549.7670 (2017), p. 43. DOI : [10.1038/nature23655](https://doi.org/10.1038/nature23655) (cité page 2).

- [Lindinger, 2004] Albrecht LINDINGER, Cosmin LUPULESCU, Mateusz PLEWICKI, Franziska VETTER, Andrea MERLI, Stefan M WEBER et Ludger WÖSTE. « Isotope selective ionization by optimal control using shaped femtosecond laser pulses ». *Physical review letters* 93.3 (2004), p. 033001. DOI : [10 . 1103/PhysRevLett . 93 . 033001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.033001) (cité page 1).
- [Lobino, 2008] Mirko LOBINO, Dmitry KORYSTOV, Connor KUPCHAK, Eden FIGUEROA, Barry C SANDERS et Alexander I. LVOVSKY. « Complete Characterization of Quantum-Optical Processes ». *Science* 322.5901 (2008), p. 563-566. ISSN : 0036-8075. DOI : [10 . 1126/science . 1162086](https://doi.org/10.1126/science.1162086). eprint : [0811 . 2784](https://arxiv.org/abs/0811.2784) (cité page 124).
- [Lvovsky, 2004] Alexander LVOVSKY. « Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography ». *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 6.6 (2004), S556. DOI : [10 . 1088 / 1464 - 4266 / 6 / 6 / 014](https://doi.org/10.1088/1464-4266/6/6/014) (cité page 132).
- [Medeiros, 2012] Renné MEDEIROS DE ARAUJO. « Génération et manipulation de peignes de fréquences quantiques multimodes ». Thèse de doct. UPMC, 2012 (cité pages 35, 41, 44, 45, 46, et 147).
- [Medeiros, 2014] R. MEDEIROS DE ARAÚJO, J. ROSLUND, Y. CAI, G. FERRINI, C. FABRE et N. TREPS. « Full characterization of a highly multimode entangled state embedded in an optical frequency comb using pulse shaping ». *Physical Review A* 89.5 (mai 2014), p. 053828. ISSN : 1050-2947. DOI : [10 . 1103 / PhysRevA . 89 . 053828](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.053828) (cité pages 65 et 97).
- [Menicucci, 2006] Nicolas MENICUCCI, Peter van LOOCK, Mile GU, Christian WEEDBROOK, Timothy RALPH et Michael NIELSEN. « Universal Quantum Computation with Continuous-Variable Cluster States ». *Physical Review Letters* 97.11 (sept. 2006), p. 110501. ISSN : 0031-9007. DOI : [10 . 1103/PhysRevLett . 97 . 110501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.110501) (cité page 2).
- [Menicucci, 2014] Nicolas C. MENICUCCI. « Fault-Tolerant Measurement-Based Quantum Computing with Continuous-Variable Cluster States ». *Phys. Rev. Lett.* 112 (12 mar. 2014), p. 120504. DOI : [10 . 1103 / PhysRevLett . 112 . 120504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.120504) (cité page 73).

- [Monmayrant, 2005] Antoine MONMAYRANT. « Façonnage et caractérisation d'impulsions ultracourtes. Contrôle cohérent de systèmes simples. » Thèse de doct. Université Paul Sabatier, 2005 (cité page 30).
- [Monmayrant, 2010] Antoine MONMAYRANT, Sébastien WEBER et Béatrice CHATEL. « A newcomer's guide to ultrashort pulse shaping and characterization ». *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 43.10 (2010), p. 103001. ISSN : 0953-4075. DOI : [10.1088/0953-4075/43/10/103001](https://doi.org/10.1088/0953-4075/43/10/103001) (cité pages 1, 30, et 32).
- [Morgner, 1991] U. MORGNER, F. X. KÄRTNER, S. H. CHE, Y. CHEN, H. A. HAUS, J. G. FUJIMOTO et E. P. IPPEN. « Sub-two-cycle pulses from a Kerr-lens mode-locked Ti:sapphire laser ». *Optics Letters* 24.6 (1991), p. 411-413. DOI : [10.1364/OL.24.000411](https://doi.org/10.1364/OL.24.000411) (cité page 1).
- [Morin, 2013] Olivier MORIN, Claude FABRE et Julien LAURAT. « Experimentally accessing the optimal temporal mode of traveling quantum light states ». *Physical Review Letters* 111.November (2013), p. 1-5. ISSN : 00319007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.111.213602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.213602) (cité page 131).
- [Morin, 2014] Olivier MORIN. « Non-Gaussian States and Measurements for Quantum Information ». Thèse de doct. UPMC, 2014 (cité pages 15 et 131).
- [Nielsen, 2007] Anne E. B. NIELSEN et Klaus MØLMER. « Single-photon-state generation from a continuous-wave nondegenerate optical parametric oscillator ». *Phys. Rev. A* 75 (2 fév. 2007), p. 023806. DOI : [10.1103/PhysRevA.75.023806](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.023806) (cité page 131).
- [Osvay, 2004] Karoly OSVAY, Attila KOVÁCS, Zsuzsanna HEINER, Gabor KURDI, Jozsef KLEBNICZKI et Marta DIVALL. « Angular dispersion and temporal change of femtosecond pulses from misaligned pulse compressors ». *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* 10.1 (jan. 2004), p. 213-220. DOI : [10.1109/JSTQE.2003.822917](https://doi.org/10.1109/JSTQE.2003.822917) (cité page 28).

- [Ourjoumtsev, 2007] Alexandre OURJOUNTSEV. « Etude théorique et expérimentale de superpositions quantiques cohérentes et d'états intriqués nongaussiens de la lumière ». Thèse de doct. UPMC, 2007 (cité page 15).
- [Parigi, 2007] Valentina PARIGI, Alessandro ZAVATTA, Myungshik KIM et Marco BELLINI. « Probing quantum commutation rules by addition and subtraction of single photons to/from a light field. » *Science (New York, N.Y.)* 317.5846 (sept. 2007), p. 1890-3. ISSN : 1095-9203. DOI : [10 . 1126 / science.1146204](https://doi.org/10.1126/science.1146204) (cité page 112).
- [Patera, 2008] Giuseppe PATERA. « Quantum properties of ultra-short pulses generated by SPOPOs: multi-mode squeezing and entanglement ». Thèse de doct. UPMC & Università dell'Insubria, 2008 (cité pages 79, 82, 147, et 158).
- [Paul, 2001] P M PAUL, ES TOMA, P BREGER, Genevive MULLOT, F AUGÉ, Ph BALCOU, HG MULLER et P AGOSTINI. « Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation ». *Science* 292.5522 (2001), p. 1689-1692. DOI : [10 . 1126/science.1059413](https://doi.org/10.1126/science.1059413) (cité page 1).
- [Pinel, 2010] Olivier PINEL. « Optique quantique multimode avec des peignes de fréquence ». Thèse de doct. UPMC, 2010 (cité pages 27 et 147).
- [Polzik, 1992] E. S. POLZIK, J. CARRI et H. J. KIMBLE. « Atomic spectroscopy with squeezed light for sensitivity beyond the vacuum-state limit ». *Applied Physics B* 55.3 (sept. 1992), p. 279-290. ISSN : 1432-0649. DOI : [10 . 1007/BF00325016](https://doi.org/10.1007/BF00325016) (cité pages 2 et 13).
- [Pretzler, 2000] G. PRETZLER, A. KASPER et K.J. WITTE. « Angular chirp and tilted light pulses in CPA lasers ». *Applied Physics B* 70.1 (jan. 2000), p. 1-9. ISSN : 1432-0649. DOI : [10 . 1007/s003400050001](https://doi.org/10.1007/s003400050001) (cité pages 28 et 31).
- [Ra, 2017] Young-Sik RA, Clément JACQUARD, Adrien DUFOUR, Claude FABRE et Nicolas TREPS. « Tomography of a Mode-Tunable Coherent Single-Photon Subtractor ». *Phys. Rev. X* 7 (3 juil. 2017), p. 031012. DOI : [10 . 1103 / PhysRevX.7.031012](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.031012) (cité pages 112, 121, 122, 125, et 128).

- [Raussendorf, 2001] Robert RAUSSENDORF et Hans J. BRIEGEL. « A One-Way Quantum Computer ». *Phys. Rev. Lett.* 86 (22 mai 2001), p. 5188-5191. DOI : [10.1103/PhysRevLett.86.5188](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5188) (cité pages 2 et 57).
- [Reddy, 2018] Dileep V. REDDY et Michael G. RAYMER. « High-selectivity quantum pulse gating of photonic temporal modes using all-optical Ramsey interferometry ». *Optica* 5.4 (avr. 2018), p. 423-428. DOI : [10.1364/OPTICA.5.000423](https://doi.org/10.1364/OPTICA.5.000423) (cité page 2).
- [Roslund, 2009] Jonathan ROSLUND, Ofer M. SHIR, Thomas BÄCK et Herschel RABITZ. « Accelerated optimization and automated discovery with covariance matrix adaptation for experimental quantum control ». *Phys. Rev. A* 80 (4 oct. 2009), p. 043415. DOI : [10.1103/PhysRevA.80.043415](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.043415) (cité pages 66 et 84).
- [Roslund, 2014] Jonathan ROSLUND, Renné Medeiros de ARAÚJO, Shifeng JIANG, Claude FABRE et Nicolas TREPS. « Wavelength-multiplexed quantum networks with ultrafast frequency combs ». *Nature Photonics* 8.2 (2014), p. 109. ISSN : 1749-4885. DOI : [10.1038/nphoton.2013.340](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.340) (cité page 3).
- [Salzmann, 2006] Wenzel SALZMANN, Ulrich POSCHINGER, Roland WESTER, Matthias WEIDEMÜLLER, Andrea MERLI, Stefan M WEBER, Franziska SAUER, Mateusz PLEWICKI, Fabian WEISE, Aldo Mirabal ESPARZA et coll. « Coherent control with shaped femtosecond laser pulses applied to ultracold molecules ». *Physical Review A* 73.2 (2006), p. 023414. DOI : [10.1103/PhysRevA.73.023414](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.023414) (cité page 1).
- [Schmidt, 1907] Erhard SCHMIDT. « Zur Theorie der linearen und nicht-linearen Integralgleichungen ». *Mathematische Annalen* 63.4 (1907), p. 433-476. DOI : [10.1007/BF01456418](https://doi.org/10.1007/BF01456418) (cité page 78).
- [Schrödinger, 1935] Erwin SCHRÖDINGER. « Discussion of probability relations between separated systems ». In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 31. 4. Cambridge University Press. Cambridge University Press, 1935, p. 555-563. DOI : [10.1017/S0305004100013554](https://doi.org/10.1017/S0305004100013554) (cité page 2).

- [Shalit, 2014] Uri SHALIT et Gal CHECHIK. « Coordinate-descent for learning orthogonal matrices through Givens rotations ». In : *International Conference on Machine Learning*. 2014, p. 548-556. URL : <http://proceedings.mlr.press/v32/shalit14.pdf> (cité page 67).
- [Shalm, 2015] Lynden K. SHALM, Evan MEYER-SCOTT, Bradley G. CHRISTENSEN, Peter BIERHORST, Michael A. WAYNE, Martin J. STEVENS, Thomas GERRITS, Scott GLANCY, Deny R. HAMMEL, Michael S. ALLMAN, Kevin J. COAKLEY, Shellee D. DYER, Carson HODGE, Adriana E. LITA, Varun B. VERMA, Camilla LAMBROCCO, Edward TORTORICI, Alan L. MIDDALL, Yanbao ZHANG, Daniel R. KUMOR, William H. FARR, Francesco MARSILI, Matthew D. SHAW, Jeffrey A. STERN, Carlos ABELLÁN, Waldimar AMAYA, Valerio PRUNERI, Thomas JENNEWEIN, Morgan W. MITCHELL, Paul G. KWIAT, Joshua C. BIENFANG, Richard P. MIRIN, Emanuel KNILL et Sae Woo NAM. « Strong Loophole-Free Test of Local Realism ». *Phys. Rev. Lett.* 115 (25 déc. 2015), p. 250402. DOI : [10.1103/PhysRevLett.115.250402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250402) (cité page 2).
- [Shor, 1997] P. SHOR. « Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer ». *SIAM Journal on Computing* 26.5 (1997), p. 1484-1509. DOI : [10.1137/S0097539795293172](https://doi.org/10.1137/S0097539795293172) (cité page 71).
- [Simon, 2000] R. SIMON. « Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems ». *Phys. Rev. Lett.* 84 (12 mar. 2000), p. 2726-2729. DOI : [10.1103/PhysRevLett.84.2726](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2726) (cité page 54).
- [Sperling, 2013] J. SPERLING et W. VOGEL. « Multipartite Entanglement Witnesses ». *Phys. Rev. Lett.* 111 (11 sept. 2013), p. 110503. DOI : [10.1103/PhysRevLett.111.110503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.110503) (cité pages 54 et 56).
- [Takagi, 1924] Teiji TAKAGI. « On an algebraic problem related to an analytic theorem of Carathéodory and Fejér and on an allied theorem of Landau ». In : *Japanese journal of mathematics: transactions and abstracts*. T. 1. The Mathematical Society of Japan. 1924, p. 83-93 (cité pages 44 et 77).

- [Thiel, 2015] Valérian THIEL. « Modal Analysis of an Ultrafast Frequency Comb ». Thèse de doct. UPMC, 2015 (cité pages 30, 95, et 102).
- [Tinsley, 2016] Jonathan N TINSLEY, Maxim I MOLODTSOV, Robert PREVEDEL, David WARTMANN, Jofre ESPIGULÉ-PONS, Mattias LAUWERS et Alipasha VAZIRI. « Direct detection of a single photon by humans ». *Nature communications* 7 (2016), p. 12172. DOI : [10.1038/ncomms12172](https://doi.org/10.1038/ncomms12172) (cité page 2).
- [Treps, 2005] N. TREPS, V. DELAUBERT, A. MAÎTRE, J. COURTY et C. FABRE. « Quantum noise in multipixel image processing ». *Physical Review A* 71.1 (jan. 2005), p. 013820. ISSN : 1050-2947. DOI : [10.1103/PhysRevA.71.013820](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.013820) (cité page 19).
- [TualleBrouri, 2009] Rosa TUALLE-BROURI, Alexei OURJOUNTSEV, Aurelien DANTAN, Philippe GRANGIER, Martijn WUBS et Anders SORENSEN. « Multimode model for projective photon-counting measurements ». *Physical Review A* 80.1 (juil. 2009), p. 013806. ISSN : 1050-2947. DOI : [10.1103/PhysRevA.80.013806](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.013806) (cité pages 114 et 115).
- [Udem, 2002] Th UDEM, R HOLZWARTH et T W HÄNSCH. « Optical frequency metrology ». *Nature* 416 (2002), p. 233-237. DOI : [10.1038/416233a](https://doi.org/10.1038/416233a) (cité pages 1 et 29).
- [Van Loock, 2007] Peter VAN LOOCK, Christian WEEDBROOK et Mile GU. « Building Gaussian cluster states by linear optics ». *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 76.3 (2007), p. 1-8. ISSN : 10502947. DOI : [10.1103/PhysRevA.76.032321](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.032321) (cité pages 61 et 63).
- [Vaughan, 2005] Joshua C VAUGHAN, Thomas HORNUNG, T FEURER et Keith A. NELSON. « Diffraction-based femtosecond pulse shaping with a two-dimensional spatial light modulator. » *Optics letters* 30.3 (2005), p. 323-325. ISSN : 0146-9592. DOI : [10.1364/OL.30.000323](https://doi.org/10.1364/OL.30.000323) (cité page 89).
- [Veitch, 2013] Victor VEITCH, Nathan WIEBE, Christopher FERRIE et Joseph EMERSON. « Efficient simulation scheme for a class of quantum optics experiments with non-negative Wigner representation ». *New Journal of Physics* 15.1 (2013), p. 013037. DOI : [10.1088/1367-2630/15/1/013037](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/1/013037) (cité page 21).

- [VernazGris, 2018] Pierre VERNAZ-GRIS, Kun HUANG, Mingtao CAO, Alexandra S SHEREMET et Julien LAURAT. « Highly-efficient quantum memory for polarization qubits in a spatially-multiplexed cold atomic ensemble ». *Nature communications* 9.1 (2018), p. 363. DOI : [10.1038/s41467-017-02775-8](https://doi.org/10.1038/s41467-017-02775-8) (cité page 2).
- [Vidal, 2002] G. VIDAL et R. F. WERNER. « Computable measure of entanglement ». *Phys. Rev. A* 65 (3 fév. 2002), p. 032314. DOI : [10.1103/PhysRevA.65.032314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.032314) (cité page 53).
- [Ville, 1948] Jean VILLE. « Théorie et applications de la notion de signal analytique ». *Câbles et Transmissions* 2A.1 (1948), p. 61-74. URL : <https://archive.org/details/VilleSigAnalytiqueCablesEtTrans1948Fr> (cité page 10).
- [Vivoli, 2016] Valentina CAPRARA VIVOLI, Pavel SEKATSKI et Nicolas SANGOUARD. « What does it take to detect entanglement with the human eye? » *Optica* 3.5 (mai 2016), p. 473-476. DOI : [10.1364/OPTICA.3.000473](https://doi.org/10.1364/OPTICA.3.000473) (cité page 2).
- [Walschaers, 2017a] Mattia WALSCHAERS, Claude FABRE, Valentina PARIGI et Nicolas TREPS. « Entanglement and Wigner Function Negativity of Multimode Non-Gaussian States ». *Phys. Rev. Lett.* 119 (18 oct. 2017), p. 183601. DOI : [10.1103/PhysRevLett.119.183601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.183601) (cité pages 111 et 118).
- [Walschaers, 2017b] Mattia WALSCHAERS, Claude FABRE, Valentina PARIGI et Nicolas TREPS. « Statistical signatures of multimode single-photon-added and -subtracted states of light ». *Phys. Rev. A* 96 (5 nov. 2017), p. 053835. DOI : [10.1103/PhysRevA.96.053835](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.053835) (cité pages 111, 118, et 120).
- [Warren, 1993] Warren S. WARREN, Herschel RABITZ et Mohammed DAHLEH. « Coherent Control of Quantum Dynamics: The Dream Is Alive ». *Science* 259 (1993), p. 1581-1509. DOI : [10.1126/science.259.5101.1581](https://doi.org/10.1126/science.259.5101.1581) (cité page 1).
- [Wasilewski, 2006] Wojciech WASILEWSKI, A. I. LVOVSKY, Konrad BANASZEK et Czesław RADZEWICZ. « Pulsed squeezed light: Simultaneous squeezing of multiple modes ». *Phys. Rev. A* 73 (6 juin 2006), p. 063819. DOI : [10.1103/PhysRevA.73.063819](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.063819) (cité pages 79 et 81).

- [Weiner, 2000] A. M. WEINER. « Femtosecond pulse shaping using spatial light modulators ». *Review of Scientific Instruments* 71.5 (2000), p. 1929. ISSN : 00346748. DOI : [10 . 1063 / 1 . 1150614](https://doi.org/10.1063/1.1150614) (cité pages 1, 30, et 31).
- [Weiner, 2011] A.M. WEINER. « Ultrafast optical pulse shaping: A tutorial review ». *Optics Communications* 284.15 (2011), p. 3669-3692. ISSN : 00304018. DOI : [10 . 1016 / j . optcom . 2011 . 03 . 084](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2011.03.084) (cité page 30).
- [Weise, 2009] Fabian WEISE et Albrecht LINDINGER. « Full control over the electric field using four liquid crystal arrays ». *Optics letters* 34.8 (2009), p. 1258-1260. ISSN : 0146-9592. DOI : [10 . 1364 / OL . 34 . 001258](https://doi.org/10.1364/OL.34.001258) (cité page 1).
- [Weise, 2011] Fabian WEISE, Georg ACHAZI et Albrecht LINDINGER. « Parametrically polarization shaped pulses guided via a hollow core photonic crystal fiber for coherent control ». *Physical Chemistry Chemical Physics* 13.19 (2011), p. 8621-8626. DOI : [10 . 1039 / C0CP02263B](https://doi.org/10.1039/C0CP02263B) (cité page 66).
- [Wenger, 2004a] Jérôme WENGER. « Dispositifs impulsionsnels pour la communication quantique à variables continues ». Thèse de doctorat dirigée par Grangier, Philippe Physique. Lasers et matière Paris 11 2004. Thèse de doct. Institut d'Optique - Université Paris Sud, 2004, 248 p. URL : <http://www.theses.fr/2004PA112082> (cité page 113).
- [Wenger, 2004b] Jérôme WENGER, Rosa TUALLE-BROURI et Philippe GRANGIER. « Non-Gaussian Statistics from Individual Pulses of Squeezed Light ». *Physical Review Letters* 92.15 (avr. 2004), p. 153601. ISSN : 0031-9007. DOI : [10 . 1103 / PhysRevLett . 92 . 153601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.153601) (cité pages 113 et 147).
- [Wigner, 1932] E. WIGNER. « On the quantum correction for thermodynamic equilibrium ». *Physical review* 40.5 (1932), p. 749. DOI : [0 . 1103 / PhysRev . 40 . 749](https://doi.org/0.1103/PhysRev.40.749) (cité page 10).
- [Witte, 2006] S. WITTE, R. Th. ZINKSTOK, A. L. WOLF, W. HOGERVORST, W. UBACHS et K. S. E. EIKEMA. « A source of 2 terawatt, 2.7 cycle laser pulses based on noncollinear optical parametric chirped pulse amplification ». *Opt. Express* 14 (18 2006), p. 8168-8177. DOI : [10 . 1364 / OE . 14 . 008168](https://doi.org/10.1364/OE.14.008168) (cité page 1).

- [Yokoyama, 2013] S. YOKOYAMA, R. UKAI, S. C. ARMSTRONG, C. SORNPHI-PHATPHONG, T. KAJI, S. SUZUKI, J. YOSHIKAWA, H. YONE-ZAWA, N. C. MENICUCCI et A. FURUSAWA. « Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain ». *Nature Photonics* 7.12 (nov. 2013), p. 982-986. ISSN : 1749-4885. DOI : [10 . 1038 / nphoton . 2013 . 287](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.287) (cité page 2).