



**HAL**  
open science

## Aide au diagnostic des machines tournantes par traitement du signal

Cécile Capdessus

► **To cite this version:**

Cécile Capdessus. Aide au diagnostic des machines tournantes par traitement du signal. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), 1992. Français. NNT: . tel-02187906

**HAL Id: tel-02187906**

**<https://hal.science/tel-02187906>**

Submitted on 19 Jul 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

présentée par

**Cécile CAPDESSUS**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

( Arrêté ministériel du 30 mars 1992 )

( Spécialité : Signal - Image - Parole )

---

---

**AIDE AU DIAGNOSTIC DES MACHINES TOURNANTES  
PAR TRAITEMENT DU SIGNAL**

---

---

Date de soutenance : 15 Décembre 1992

Composition du jury :

Monsieur	A. FOGGIA	Président
Monsieur	F. CASTANIE	Rapporteur
Monsieur	J. FERNANDEZ	Rapporteur
Monsieur	J.L. LACOUME	Directeur de thèse
Monsieur	M. SIDAHMED	Examineur
Monsieur	P. RUIZ	Examineur

Thèse préparée au sein du laboratoire CEPHAG/ENSIEG URA 346

# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE GRENOBLE

46 avenue F. Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex -

Tél : 76.57.45.00

ANNEE UNIVERSITAIRE 1989

Président de l'Institut  
Monsieur Georges LESPINARD

## PROFESSEURS DES UNIVERSITES

ENSERG	BARIBAUD	Michel	ENSPG	JOST	Rémy
ENSIEG	BARRAUD	Alain	ENSPG	JOUBERT	Jean-Clauc
ENSPG	BAUDELET	Bernard	ENSIEG	JOURDAIN	Geneviève
INPG	BEAUFILS	Jean-Pierre	ENSIEG	LACOUME	Jean-Louis
ENSERG	BLIMAN	Samuel	ENSHMG	LADET	Pierre
ENSHMG	BOIS	Philippe	ENSHMG	LESIEUR	Marcel
ENSEEG	BONNETAIN	Lucien	ENSHMG	LESPINARD	Georges
ENSPG	BONNET	Guy	ENSPG	LONGQUEUE	Jean-Pierr
ENSIEG	BRISSONNEAU	Pierre	ENSHMG	LORET	Benjamin
IUFA	BRUNET	Yves	ENSEEG	LOUCHET	François
ENSHMG	CAILLERIE	Denis	ENSEEG	LUCAZEAU	Guy
ENSPG	CAVAIGNAC	Jean-François	ENSIEG	MASSE	Philippe
ENSPG	CHARTIER	Germain	ENSIEG	MASSELOT	Christian
ENSERG	CHENEVIER	Pierre	ENSIMAG	MAZARE	Guy
UFR PGP	CHERADAME	Hervé	ENSIMAG	MOHR	Roger
ENSIEG	CHERUY	Arlette	ENSHMG	MOREAU	René
ENSERG	CHOVET	Alain	ENSIEG	MORET	Roger
ENSERG	COHEN	Joseph	ENSIMAG	MOSSIERE	Jacques
ENSEEG	COLINET	Catherine	ENSHMG	OBLED	Charles
ENSIEG	CORNUT	Bruno	ENSEEG	OZIL	Patrick
ENSIEG	COULOMB	Jean-Louis	ENSEEG	PAULEAU	Yves
ENSERG	COUMES	André	ENSIEG	PERRET	Robert
ENSIMAG	CROWLEY	James	ENSHMG	PIAU	Jean-Mich
ENSHMG	DARVE	Félix	ENSPG	PIC	Etienne
ENSIMAG	DELLA DORA	Jean-François	ENSIMAG	PLATEAU	Brigitte
ENSERG	DEPEY	Maurice	ENSERG	POUPOT	Christian
ENSPG	DEPORTES	Jacques	ENSEEG	RAMEAU	Jean-Jacq
ENSEEG	DEROO	Daniel	ENSPG	REINISCH	Raymond
ENSEEG	DESRE	Pierre	UFR PGP	RENAUD	Maurice
ENSERG	DOLMAZON	Jean-Marc	UFR PGP	ROBERT	André
ENSEEG	DURAND	Francis	ENSIMAG	ROBERT	François
ENSPG	DURAND	Jean-Louis	ENSIEG	SABONNADIERE	Jean-Cla
ENSHMG	FAUTRELLE	Yves	ENSIMAG	SAUCIER	Gabriele
ENSIEG	FOGGIA	Albert	ENSPG	SCHLENKER	Claire
ENSIMAG	FONLUPT	Jean	ENSPG	SCHLENKER	Michel
ENSIEG	FOULARD	Claude	ENSERG	SERMET	Pierre
UFR PGP	GANDINI	Alessandro	UFR PGP	SILVY	Jacques
ENSPG	GAUBERT	Claude	ENSHMG	SIRIEYS	Pierre
ENSERG	GENTIL	Pierre	ENSEEG	SOHM	Jean-Cla
ENSIEG	GENTIL	Sylviane	ENSIMAG	SOLER	Jean-Lou
IUFA	GREVEN	Hélène	ENSEEG	SOUQUET	Jean-loui
ENSIEG	GUEGUEN	Claude	ENSHMG	TROMPETTE	Philippe
ENSERG	GUERIN	Bernard	ENSPG	VINCENT	Henri
ENSEEG	GUYOT	Pierre	ENSERG	ZADWORN	François
ENSIEG	IVANES	Marcel			
ENSIEG	JAUSSAUD	Pierre			

.../...

PERSONNES AYANT OBTENU LE DIPLOME  
d'habilitation à diriger des recherches

BECKER	M.	DANES	F.	GHIBAUDO	G.	MULLER	J.
BINDER	Z.	DEROO	D.	HAMAR	S.	NGUYEN TRONG	B.
CHASSERY	J.M.	DIARD	J.P.	HAMAR	R.	NIEZ	J.
CHOLLET	J.P.	DION	J.M.	LACHENAL	D.	PASTUREL	A.
COEY	J.	DUGARD	L.	LADET	P.	PLA	F.
COLINET	C.	DURAND	M.	LATOMBE	C.	ROGNON	J.F.
COMMAULT	C.	DURAND	R.	LE HUY	H.	ROUGER	J.
CORNUEJOLS	G.	GALERIE	A.	LE GORREC	B.	TCHUENTE	M.
COULOMB	J.L.	GAUTHIER	J.P.	MADAR	R.	VINCENT	H.
COURNIL	M.	GENTIL	S.	MEUNIER	G.	YAVARI	A.
DALARD	F.						

# CHERCHEURS DU C.N.R.S.

ALEMANY	Antoine
ALLIBERT	Colette
ALLIBERT	Michel
ANSARA	Ibrahim
ARMAND	Michel
AUDIER	Marc
BERNARD	Claude
BINDER	Gilbert
BONNET	Roland
BORNARD	Guy
CAILLET	Marcel
CALMET	Jacques
CARRE	René
CHATILLON	Christian
CLERMONT	Jean-Robert
COURTOIS	Bernard
DAVID	René
DION	Jean-Michel
DRIOLE	Jean
DURAND	Robert
ESCUDIER	Pierre
EUSTATHOPOULOS	Nicolas
FRUCHARD	Robert
GARNIER	Marcel
GLANGEAUD	François
GUELIN	Pierre
HOPFINGER	Emile
JORRAND	Philippe
JOUD	Jean-Charles
KAMARINOS	Georges
KLEITZ	Michel
KOFMAN	Walter
KRAKOWIAK	Sacha
LANDAU	Ioan
LEJEUNE	Gérard
LEPROVOST	Christian
MADAR	Roland
MERMET	Jean
MEUNIER	Jacques
MICHEL	Jean-Marie
NAYROLLES	Bernard
PEUZIN	Jean-Claude
PIAU	Monique
RENOUARD	Dominique
SENATEUR	Jean-Pierre
SIFAKIS	Joseph
SIMON	Jean-Paul
SUERY	Michel
TEODOSIU	Christian
VACHAUD	Georges
VAUCLIN	Michel
VENNEREAU	Pierre
VERJUS	Jean-Pierre
WACK	Bernard
YONNET	Jean-Paul

SITUATION PARTICULIERE

PROFESSEURS D'UNIVERSITE

DETACHEMENT

ENSIMAG	LATOMBE	J.Claude	Détachement.....	21/10/1989
ENSHMG	PIERRARD	J.Marie	Détachement.....	30/04/1989
ENSIMAG	VEILLON	Gérard	Détachement.....	30/09/1990
ENSIMAG	VERJUS	J.Pierre	Détachement.....	30/09/1989
ENSPG	BLOCH	Daniel	Récteur à c/.....	21/12/1988

SURNOMBRE

INPG	CHIAVERINA	Jean .....	30/09/1989
ENSHMG	BOUVARD	Maurice.....	30/09/1991
ENSEEG	PARIAUD	J.Charles .....	30/09/1991

PERSONNALITES AGREES A TITRE PERMANENT A DIRIGER DES TRAVAUX DE RECHERCHE  
( DECISION DU CONSEIL SCIENTIFIQUE )

<u>ENSEEG</u>	HAMMOU MARTIN-GARIN SARRAZIN SIMON	Abdelkader Régina Pierre Jean-Paul
---------------	---	---

<u>ENSERG</u>	BOREL	Joseph
---------------	-------	--------

<u>ENSIEG</u>	DESCHIZEAUX GLANGEAUD PERARD REINISCH	Pierre François Jacques Raymond
---------------	--	--

<u>ENSHMG</u>	ROWE	Alain
---------------	------	-------

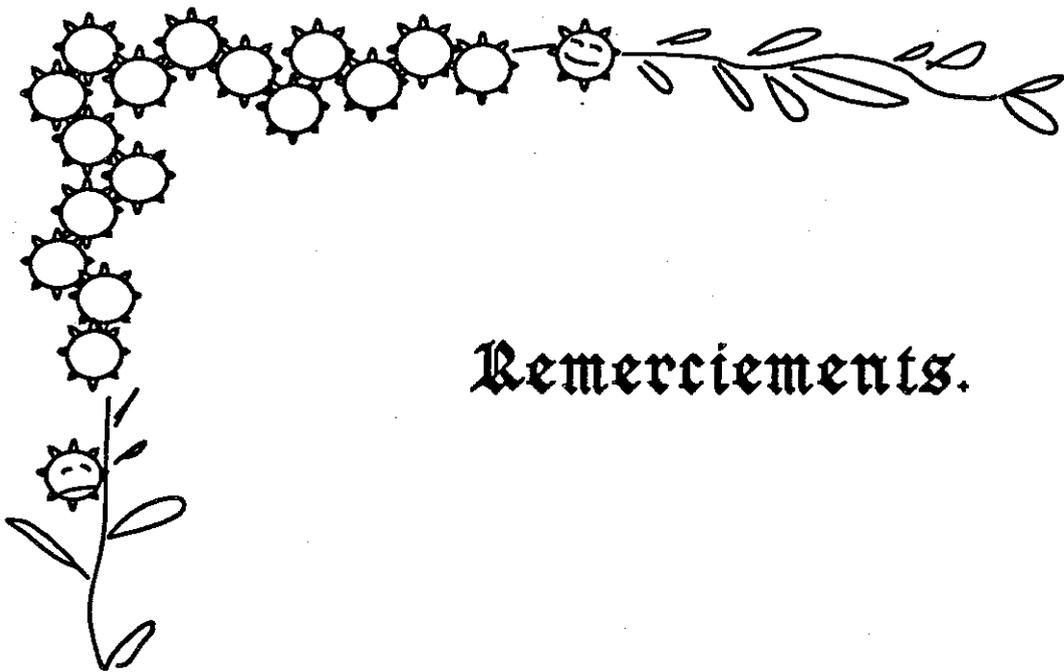
<u>ENSIMAG</u>	COURTIN	Jacques
----------------	---------	---------

<u>C.E.N.G</u>	CADET COEURE DELHAYE DUPUY JOUVE NICOLAU NIFENECKER PERROUD PEUZIN TAIEB VINCENDON	Jean Philippe Jean-Marc Michel Hubert Yvan Hervé Paul Jean-Claude Maurice Marc
----------------	--	--

Laboratoire extérieurs :

<u>C.N.E.T.</u>	DEVINE GERBER MERCKEL PAULEAU	Rodericq Roland Gérard Yves
-----------------	--	--------------------------------------

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX



Remerciements.

## Remerciements.

Je remercie de tout coeur le professeur J.L.Lacoume qui a dirigé ce travail avec clairvoyance et bienveillance. Il m'a transmis, pour longtemps j'espère, un peu de son savoir, de sa curiosité et de son goût pour les sciences.

Merci au professeur A.Foggia d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse et en être le "candide". Il n'était pas inutile qu'un intervenant extérieur replace cette étude sur les engrenages dans le cadre beaucoup plus vaste de l'analyse vibratoire des machines tournantes. Et j'espère bien que les contacts ainsi établis entre le LEG et le CEPHAG sont les premiers pas vers une collaboration durable et fructueuse entre les deux laboratoires (une collaboration un peu plus scientifique que celle que nous avons établie, Sophie et moi, en buvant nos petits cafés ensemble).

Je remercie le professeur F.Castanié d'avoir bien voulu être rapporteur sur ce travail. La pertinence de ses remarques et de ses questions m'a permis de réfléchir encore une fois sur les problèmes du diagnostic des machines tournantes et de la cyclostationnarité et d'améliorer la présentation finale du document.

Je sais qu'il n'était pas facile pour le professeur J.Fernàndez de se libérer de ses nombreuses obligations à l'université pour venir participer à ce jury. Je le remercie d'avoir subi pour ce faire tant de kilomètres et aussi plusieurs discussions en français, (vu l'état actuel de mon espagnol, et ne parlons pas du catalan !).

Je dois la plus grande gratitude à M.Sidahmed, sans qui cette thèse n'aurait pu être réalisée. Grâce à lui j'ai pu travailler sur des vibrations réelles et me familiariser avec les problèmes que posent les expérimentations en mécanique et l'enregistrement de vibrations en visitant le CETIM où j'ai toujours été fort bien accueillie (merci, Olivier !). Son intérêt pour nos résultats sur la cyclostationnarité a été d'une grande motivation pour moi durant ces trois années de thèse.

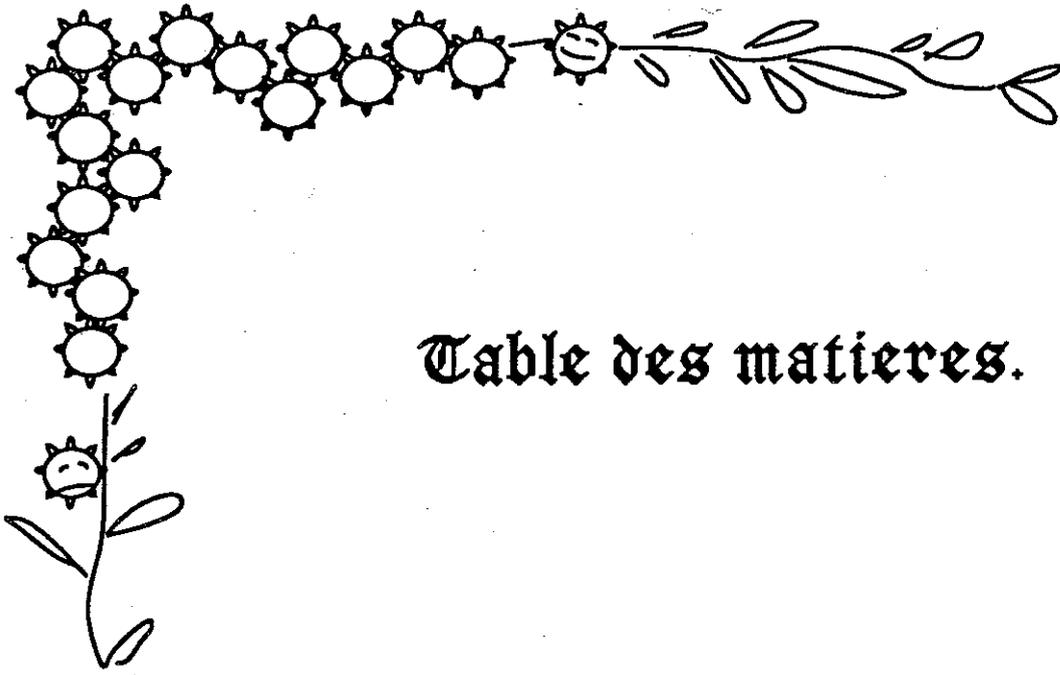
Merci à P.Ruiz de s'être intéressé à mon travail contre vents et marées (il sait de quelles tempêtes je parle) et d'avoir bien voulu participer à mon jury malgré tout ! Je lui dois le soutien moral des premiers mois de ma thèse et des dernières heures avant l'heure H!

Je ne saurais trop remercier nos chers informaticiens Régis, Marie-Christine et Daniel , ainsi que Béatrice et Zino, qui n'ont jamais manqué de patience (et il leur en a fallu !) pour me guider à travers les méandres de l'informatique. Ah, oui ! en parlant d'informatique, je dois quelques remerciements à l'osug, qui a passé tant de nuits à travailler pour moi !

Merci à M.Morey et J.P.Henrioux pour leur aide fort utile de dernière minute, la première pour la rédaction et la publication du document, le second pour un certain bruit blanc, un vrai ...

Merci à Christine Servière pour sa gentillesse, son aide dans la préparation de ma soutenance et tout le plaisir que j'ai eu à partager son bureau : je les regretterai longtemps, notre petit bureau orange et nos discussions, scientifiques ou non. N'oublions pas F.Guillet et N.Nejjar qui ont été les premiers à me supporter dans ce laboratoire et l'ont fait avec beaucoup de bonne humeur.

Merci, Dominique ! pour les petits cafés dont il a été question plus haut, et que j'ai eu grand plaisir à prendre chaque jour en compagnie de Sophie, Fred et Ahmed, ou Martine, Catherine et Jeanne.



**Table des matieres.**

## TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION .....	1
<b>1 - Modélisation des signaux d'engrenage .....</b>	<b>3</b>
1-1 Source des vibrations .....	3
1-2 Paramètres du modèle .....	4
1-3 Modèle adopté .....	6
1-4 Composante certaine. Composante aléatoire .....	9
1-5 Caractéristiques du signal. Apparition d'un défaut. Méthodes de traitement adaptées .....	11
1-6 Défauts des engrenages. Répercussion sur les vibrations. Interprétation en termes de modèle .....	12
CONCLUSION .....	13
<b>2 - Présentation des signaux réels .....</b>	<b>14</b>
2-1 Présentation des signaux réels .....	14
2-2 Structure du signal. Adéquation du modèle .....	15
2-3 Séparation des modulations. Résolution sur le spectre .....	21
2-4 Cepstre. Effet du logarithme .....	22
2-5 Application aux signaux d'engrenage. Diagnostic .....	31
CONCLUSION .....	37
<b>3 Cyclostationnarité .....</b>	<b>38</b>
3-1 Non-stationnarité des signaux d'engrenage .....	38
3-2 Autocorrélation, stationnarité et cyclostationnarité .....	40
3-3 Passage en fréquences spectrale et cyclique .....	41
3-4 Interprétation en termes de fréquences statistiquement liées .....	45
3-5 Ergodisme, cycloergodisme .....	46
3-5-1 Cas de l'autocorrélation	
3-5-2 Cas de la représentation temps-fréquence	
3-5-3 Cas de la corrélation spectrale et de l'autocorrélation cyclique	
3-5-4 Normalisation. Cohérence spectrale .....	49
CONCLUSION .....	50

<b>4 - Outil de calcul de la corrélation spectrale .....</b>	<b>51</b>
4-1 La corrélation spectrale vue comme l'intercorrélation entre les amplitudes complexes modulant deux fréquences.....	51
4-1-1 Forme asymétrique.....	52
4-1-2 Forme symétrique.....	54
4-2 Résolution de l'analyse. Relation avec la modélisation du signal.....	55
4-3 Les méthodes d'estimation de la corrélation spectrale.....	56
4-3-1 Estimation par périodogramme moyenné	
moyennage temporel.....	56
4-3-2 Estimation par périodogramme lissé	
moyennage fréquentiel.....	58
4-3-3 Propriétés de l'estimateur .....	59
4-3-3-1 Biais.....	60
4-3-3-2 Variance .....	60
4-4 Outil de calcul	
test sur des signaux synthétiques.....	61
4-4-1 Signaux utilisés.....	61
4-4-2 Résultats obtenus	
corrélation et cohérence spectrales.....	62
CONCLUSION .....	63

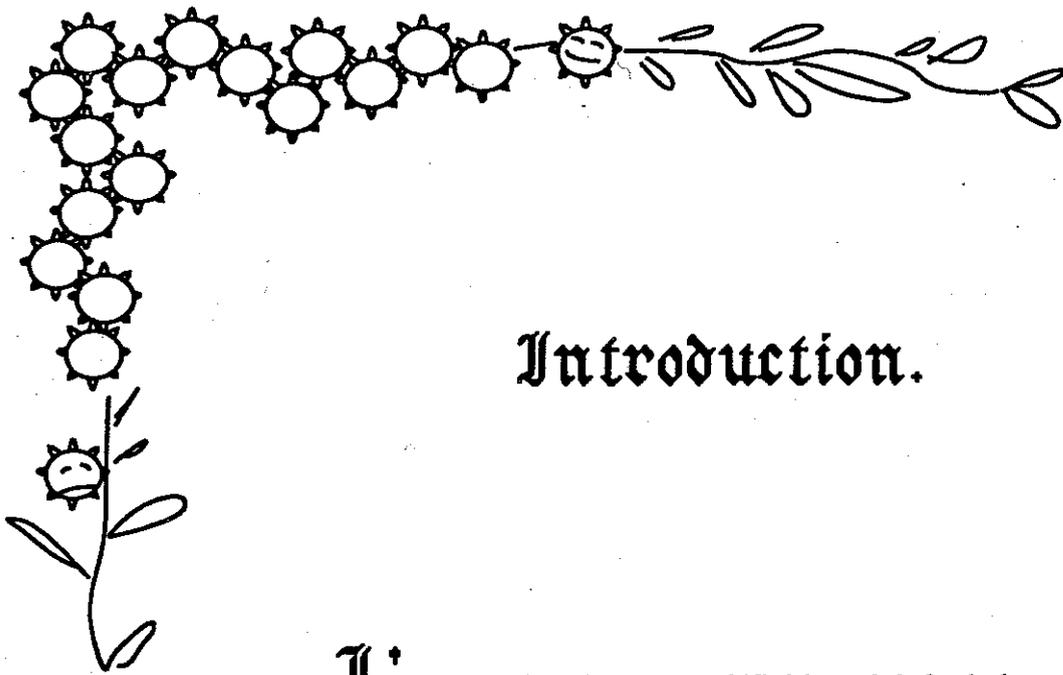
<b>5 - Corrélation spectrale. Mise en oeuvre et application aux signaux réels.....</b>	<b>70</b>
5-1 Durée du signal étudié. Influence sur l'interprétation .....	70
5-1-1 Etude du signal sur une courte durée.....	70
5-1-2 Etude du signal sur une longue durée.....	73
5-2 Détermination des fréquences de cyclostationnarité. ....	77
5-2-1 Cas d'une résolution faible. Tranches courtes du signal.....	81
5-2-2 Cas d'une résolution fine. Longues tranches de signal.....	81
5-3 Application de la corrélation spectrale aux signaux d'engrenage.....	83
5-3-1 Corrélation spectrale. Fonctionnement sur les signaux réels. ....	83
5-3-2 Cohérence spectrale. Effet de la normalisation.....	88
5-3-3 Apparition du défaut. Influence de la normalisation.....	91
CONCLUSION .....	99

<b>Conclusion.....</b>	<b>101</b>
------------------------	------------

**BIBLIOGRAPHIE..... 103**

**Annexes :**

Annexe 1A.....106  
Annexe 3A.....108  
Annexe 3B.....109  
Annexe 3C.....110  
Annexe 4A.....112  
Annexe 4B.....113



## Introduction.

L' introduction donne une définition globale de la maintenance prédictive, précisant quelle est son utilité et quelles sont les différentes phases de sa mise en pratique. Ceci permet de situer à quel niveau intervient ce travail de thèse en le replaçant dans le contexte plus général de l'analyse vibratoire.

## INTRODUCTION

L'analyse vibratoire fait partie d'un ensemble de méthodes sur lesquelles on essaye de baser des systèmes de maintenance prédictive des machines tournantes. Les autres méthodes sont l'analyse de la température, de la composition de l'huile, des grandeurs électriques [i-1] ...

La maintenance est "l'ensemble des actions permettant de maintenir un appareil dans l'état spécifié ou en mesure d'assurer un service bien déterminé" [i-2]. La maintenance corrective, qui se traduit par le remplacement ou la réparation d'éléments après leur défaillance, n'est pas toujours la solution la plus économique. En effet, la détérioration d'une partie du dispositif à maintenir peut entraîner d'autres avaries de ce dispositif [i-3]. L'intérêt de la maintenance prédictive, ou maintenance de condition, est qu'elle permet d'agir sur l'élément défectueux avant que celui-ci ne provoque une panne grave et un arrêt prolongé de l'utilisation de la machine.

La procédure de surveillance automatique d'une machine se décompose en plusieurs phases [i-4] : étude des caractéristiques de la machine et choix des paramètres représentatifs de son état, mesure de la signature initiale sur la machine en bon état de marche, fixation des seuils de test, puis mise au point d'un algorithme qui classera la machine dans l'une des catégories "machines saines" et "machines pouvant présenter un défaut".

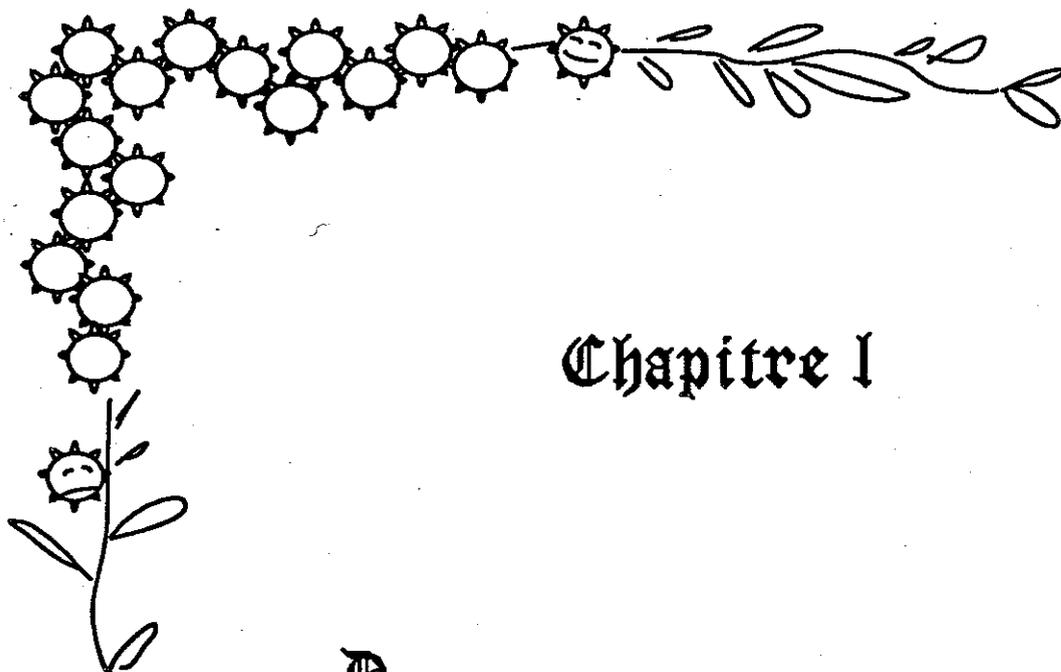
Le classement des machines par catégories peut être effectué par des méthodes de traitement de données [i-5][i-6] et ouvre la possibilité d'un diagnostic automatique [i-7]. L'objet de cette thèse est d'apporter une contribution à la définition des paramètres caractéristiques de l'état des engrenages.

Un modèle des vibrations est élaboré, basé d'une part sur une étude bibliographique du comportement vibratoire des machines, d'autre part sur les résultats obtenus par l'application à de telles vibrations de méthodes de traitement du signal classiques : analyse spectrale, cepstre. Nous nous attachons à établir un lien étroit entre le modèle et les phénomènes physiques qui génèrent les vibrations, de façon à interpréter les résultats obtenus par traitement du signal de la façon la plus réaliste possible.

Puis, à partir de ce modèle, des hypothèses sont émises sur la nature des vibrations que peut produire une machine endommagée, qui conduisent à l'essai d'une méthode moins classique adaptée aux signaux non-stationnaires : la corrélation spectrale. Cette

étude remet en cause l'hypothèse classique de stationnarité et postule que les signaux vibratoires d'engrenage appartiennent à la classe de signaux cyclostationnaires introduite par Gardner [1-8].

Nous étudions quelle forme prennent les différentes représentations au second ordre d'un signal cyclostationnaire. Nous mettons ensuite en évidence le caractère cyclostationnaire des vibrations d'engrenage et nous donnons une première analyse des caractéristiques les plus pertinentes pour la maintenance prédictive.



## Chapitre I

**D**ans ce chapitre on élabore un modèle des vibrations d'engrenage à partir d'un article de William Mark. Les principaux paramètres intervenant dans le modèle sont mis en évidence, en particulier les fréquences les plus importantes, qui sont celles de l'engrènement et de la rotation des roues. Ce modèle est ensuite réexprimé en termes plus appropriés à une utilisation en traitement du signal. On peut alors prédire, à partir de considérations purement mécaniques, quel sera l'effet sur la structure des vibrations de l'apparition d'un défaut sur l'une des roues de l'engrenage. On conclut de cette première approche théorique que pour diagnostiquer l'engrenage, il convient d'étudier la forme des modulations liées aux phénomènes de rotation.

## CHAPITRE I

### 1 - MODÉLISATION DES SIGNAUX D'ENGRENAGE

Les vibrations d'un engrenage sont produites principalement par le choc entre les dents des deux roues qui le composent. Ce choc est affaibli au maximum par une optimisation de la forme des dents : une développante de cercle légèrement corrigée pour tenir compte de la déflexion sous la charge. Mais cette optimisation n'est valable que pour une charge donnée et de plus, l'usure détériore peu à peu cette forme. D'autre part cette vibration, appelée signal d'engrènement, qui est la source du bruit rayonné par les machines, subit un filtrage et des déformations causées par la structure de la machine, entre la source et le point d'enregistrement.

#### 1-1 Source des vibrations

Le signal d'engrènement est une vibration qui correspond à la déviation de la position des roues par rapport à un mouvement de rotation parfait qui serait celui d'un engrenage idéal soumis à une charge nulle. Cette déviation est appelée erreur de transmission statique, et ses composantes sont d'une part la déformation élastique des dents sous la charge, d'autre part les déviations du profil de la dent par rapport au profil idéal. Ces dernières n'étant pas identiques sur toutes les dents d'une roue, elles peuvent se décomposer en une déviation moyenne et une composante aléatoire.

La déformation élastique des dents a deux causes : la variation périodique du nombre de dents en contact et la variation de la position du point de contact sur chaque paire de dents au cours de l'engrènement. Ces deux phénomènes résultent dans une variation périodique de la raideur des dents [1-1]. Quant aux erreurs de profil des dents, elles peuvent être intentionnelles (correction du profil en vue de compenser la déflexion sous la charge) ou être dues à des erreurs d'usinage et à l'usure.

La déformation élastique des dents et la composante moyenne de la déviation par rapport au profil résultent en une vibration périodique à la période d'engrènement, cependant que la composante aléatoire de la déviation par rapport au profil se retrouvera à la périodicité de chaque roue.

## 1-2 Paramètres du modèle

De nombreux modèles ont été proposés pour les vibrations d'un engrenage [1-2][1-3][1-4][1-5] et [1-6], mais beaucoup s'inspirent d'une étude de base qu'a effectuée W.D. Mark [1-7].

La figure (1-1), qui représente un engrenage vu au point d'engrènement et l'une de ses roues vues selon une direction perpendiculaire à son axe, permet de définir les grandeurs intervenant dans le modèle.

Les dents des deux roues n'entrent en contact que dans un plan tangent aux cylindres de base des roues, appelé plan de contact, et sur une longueur finie, ce qui définit un rectangle appelé zone de contact. Le contact entre deux dents est localisé sur une ligne appelée ligne de contact, dont les extrémités  $y_A$  et  $y_B$ , qui sont définies par les limites de la zone de contact, varient au cours du temps. L'annexe 1A définit plus précisément les différents termes utilisés.

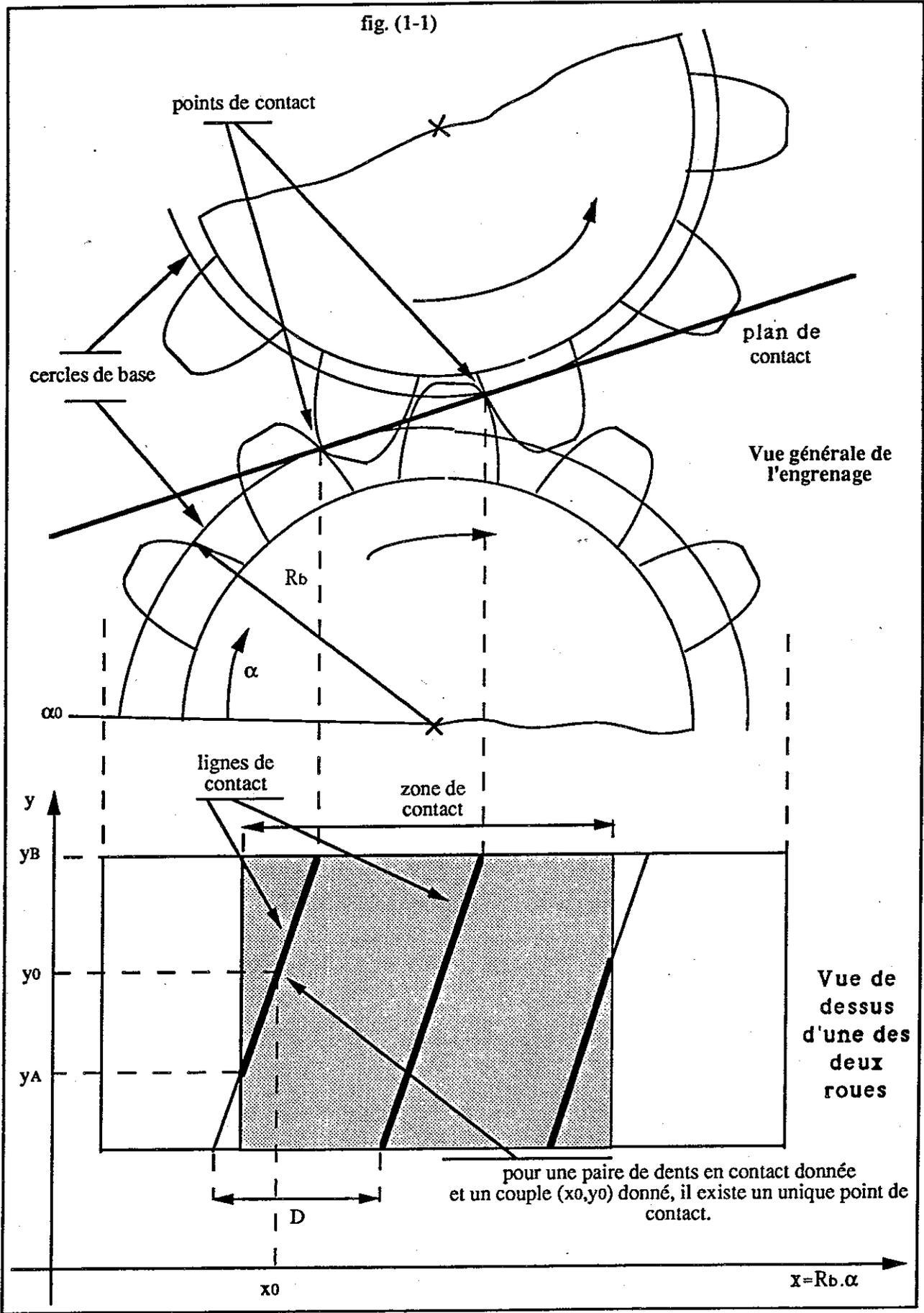
On définit un repère composé de deux variables  $x$  et  $y$ . La première  $x$  est par définition égale à  $R_b \cdot \alpha$  où  $R_b$  est le rayon du cylindre de base de la roue et  $\alpha$  sa position angulaire à partir d'une position  $\alpha_0 = 0$  choisie arbitrairement. La variable  $x$  est donc représentative de la position angulaire de la roue. La variable  $y$  définit une position dans l'espace, sur un axe parallèle à celui de la roue, et est donc indépendante du mouvement de la roue.

Remarques :

- La variable  $x$  ne dépend pas forcément du temps de façon linéaire. Ce qui veut dire que les équations donnant les vibrations de l'engrenage, écrites en fonction de la variable  $x$ , ne pourront pas forcément s'écrire de la même façon en fonction du temps. Ceci sera vrai dans deux cas seulement : si l'on suppose que  $x$  varie linéairement en fonction du temps, soit  $x = a \cdot t + b$ , ou si l'on a enregistré le signal en synchronisant l'acquisition sur la vitesse de rotation de l'engrenage, auquel cas  $x$  peut être choisie comme base de temps.

- Le choix d'un couple donné  $(x_0, y_0)$  définit une hauteur selon l'axe de la roue et une position de la roue. Ainsi, pour ce couple donné et pour une paire n°  $j$  de dents en contact, on a un et un seul point de contact. En effet, pour une position fixée de l'engrenage, à la hauteur  $y_0$  selon l'axe de l'engrenage, on ne peut rencontrer qu'un point de contact pour la paire de dents en contact choisie.

fig. (1-1)



- Un changement de la variable  $y$  revient alors à un déplacement le long de la ligne de contact de la paire de dents en question. Ce qui veut dire qu'une intégration sur la variable  $y$  à  $x$  constant entre les hauteurs  $y_A$  et  $y_B$  définissant les limites de la ligne de contact, sera une intégration sur le contact entre les dents.

- Le motif que définit sur la roue la zone de contact se reproduira périodiquement avec une période  $D$  égale à la distance, selon la variable  $x$ , entre deux points identiques de deux dents successives.

### 1-3 Modèle adopté

W.D. Mark définit le modèle à partir des grandeurs suivantes :

$W$  = charge transmise par l'engrenage, supposée constante.

$K_{Tj}(x,y)$  = Raideur locale de la jème paire de dents en contact par unité de longueur de la ligne de contact. La raideur  $K_{Tj}(x,y)$  locale de la jème paire de dents en contact est égale à  $\frac{\delta K(t)}{\delta l}$ , avec  $K(t) = \frac{F(t)}{u(t)}$ , où  $F(t)$  et  $u(t)$  sont respectivement la charge transmise et le déplacement au point considéré à l'instant  $t$ , et  $\delta l$  une portion élémentaire de la ligne de contact.

$v_j^{(.)}(x,y)$  = Déviation du profil de la dent au point de contact défini par le triplet  $(x,y,j)$  par rapport au profil idéal.

$u_j^{(.)}(x,y)$  = Déflexion sous la charge au point de contact considéré.

avec  $(.) = (1)$  ou  $(2)$ , indice de roue et  $j$  indice de paire de dents en contact.

Les deux dernières grandeurs définies sont considérées comme positives lorsqu'elles correspondent à un retrait de matériau de la dent. Elles sont représentées sur la fig. (1-2).



$$W_j(x) = \int_{\text{contact}}^{\text{ligne de}} K_{Tj}(x,y) u_j(x,y) dl \quad (1-2)$$

où  $dl$  est une portion élémentaire de la ligne de contact, et  $u_j(x,y)$  la partie due à la charge de la déviation du point de contact considéré par rapport à sa position idéale.

On a vu précédemment que pour une paire donnée de dents en contact et une position angulaire des roues fixée ( $x$  fixée), une variation de  $y$  équivaut à un déplacement le long de la ligne de contact. En remplaçant  $u_j^{(.)}(x,y)$  par son expression calculée à partir de l'équation (1-1) et en prenant en compte le fait qu'une variation de  $y$  équivaut à un déplacement sur la ligne de contact, on obtient :

$$W_j(x) = A \cdot \int_{y_{Aj}}^{y_{Bj}} K_{Tj}(x,y) (s(x) - v_j(x,y) - v_j(x,y)) dy \quad (1-3)$$

où  $A$  est une constante dépendant des caractéristiques de l'engrenage et  $y_{Aj}$  et  $y_{Bj}$  les hauteurs délimitant la ligne de contact.

La charge totale transmise  $W$ , supposée constante, se calcule par sommation sur toutes les paires de dents en contact :  $W = \sum_j W_j(x)$

On obtient ainsi une expression de l'erreur statique de transmission :

$$s(x) = \frac{W}{\sum_j \tilde{K}_{Tj}(x)} + \frac{\sum_j (\tilde{v}_{Kj}^{(1)}(x) + \tilde{v}_{Kj}^{(2)}(x))}{\sum_j \tilde{K}_{Tj}(x)} \quad (1-4)$$

$$\text{où } \tilde{v}_{Kj}^{(.)}(x) = A \int_{y_{Aj}}^{y_{Bj}} K_{Tj}(x,y) v_j^{(.)}(x,y) dy$$

$$\text{et } \tilde{K}_{Tj}(x) = A \int_{y_{Aj}}^{y_{Bj}} K_{Tj}(x,y) dy$$

et  $j$  décrit l'ensemble des paires de dents en contact.

Le premier terme représente la déformation causée par la charge et le second prend en compte les déformations de la dent.

#### 1-4 Composante certaine. Composante aléatoire

Les termes concernant les déviations par rapport au profil comprennent une composante qui se retrouve identique pour toutes les dents, (cela peut être par exemple la correction intentionnelle du profil), et une composante aléatoire qui varie d'une dent à l'autre, due aux erreurs d'usinage et aux effets de l'usure. Ceci peut être traduit par une décomposition du second terme de l'erreur de transmission :

$$\tilde{v}_{Kj}^{(\cdot)}(x) = \tilde{m}_K^{(\cdot)}(x) + \tilde{r}_{Kj}^{(\cdot)}(x)$$

où  $\tilde{m}_K^{(\cdot)}(x)$  est la moyenne des  $\tilde{v}_{Kj}^{(\cdot)}(x)$  sur toutes les dents de la roue ( $\cdot$ ), cette moyenne étant effectuée pour l'engrenage en bon état de fonctionnement. Ce qui signifie que l'apparition éventuelle d'un défaut affectant les vibrations ne pourra se manifester que dans le terme aléatoire  $\tilde{r}_{Kj}^{(\cdot)}(x)$ , qui ne sera alors plus forcément centré.

L'égalité (1-4) peut alors s'écrire :

$$s(x) = s_K(x) (W + s_m(x) + s_{r1}(x) + s_{r2}(x))$$

$$\text{avec } s_K(x) = \frac{1}{\sum_j \tilde{K}_{Tj}(x)}$$

$$s_m(x) = \sum_j (\tilde{m}_K^{(1)}(x) + \tilde{m}_K^{(2)}(x))$$

$$s_{r1}(x) = \sum_j (\tilde{r}_{Kj}^{(1)}(x)) \text{ (resp. } s_{r2}(x) \text{ et } \tilde{r}_{Kj}^{(2)}(x))$$

On peut étudier les périodicités des différents termes entrant en jeu. Rappelons d'abord que les termes surmontés d'un tilde sont obtenus par intégration le long des lignes de contact. Or, le nombre de paires de dents en contact varie au cours du temps, c'est pourquoi le nombre et la longueur des lignes de contact varient également.

Cependant, si l'on considère que l'ensemble de ces lignes constituent un motif dont l'aspect varie au cours du temps, on remarquera que celui-ci va se reproduire identique à lui-même avec une périodicité de période  $D$  selon la variable  $x$ , caractéristique de la position angulaire des roues. Rappelons que  $D$ , définie sur la fig. (1-1), est la distance entre deux points identiques de deux dents consécutives selon la variable  $x$ . Si  $x$  peut être assimilé au temps,  $D$  est appelé période d'engrènement et correspond à la durée de passage d'une dent au point d'engrènement.

Ainsi les fonctions qui sont obtenues par intégration sur les lignes de contact d'un terme qui ne varie pas d'une dent à l'autre seront périodiques de période  $x=D$ . Donc les fonctions  $s_m(x)$  et  $s_K(x)$ , de par leur définition, sont périodiques selon la variable  $x$  de période  $x=D$ .

Seuls les termes  $s_{r1}(x)$  et  $s_{r2}(x)$  ont des périodicités différentes, puisque les  $\tilde{r}_{Kj}^{(.)}(x)$  varient d'une paire de dents à l'autre, ce qui signifie que leur intégration sur la zone de contact n'est pas périodique à la période  $D$ . Chaque terme  $s_{r(.)}(x) = \sum_j (\tilde{r}_{Kj}^{(.)}(x))$  est périodique à la période  $N^{(.)}D$ , où  $N^{(.)}$  est le nombre de dents de la roue concernée. Et le terme somme  $s_{r1}(x) + s_{r2}(x)$  est périodique à la période  $ND$ , où  $N$  est le plus petit multiple commun des deux entiers  $N^{(.)}$ .

Ainsi, le modèle que nous utiliserons peut s'exprimer, en termes de traitement du signal, par :

$$s(x) = s_K(x) (W + s_m(x) + s_{r1}(x) + s_{r2}(x))$$

où les signaux  $s_K(x)$  et  $s_m(x)$  sont périodiques de période  $D$ ,  $D$  étant la distance selon la variable  $x$  entre deux points identiques de deux dents successives, et les signaux  $s_{r1}(x)$  et  $s_{r2}(x)$  sont périodiques de périodes respectives  $N^{(.)}D$ .

## **1-5 Caractéristiques du signal. Apparition d'un défaut.**

### **Méthodes de traitement adaptées**

La vibration produite par l'engrenage est donc composée principalement d'un terme périodique dû aux variations de l'élasticité des dents, dont la période, appelée période d'engrènement, est la durée  $T_e$  de passage d'une dent complète en un point donné.

Cette composante de la vibration existe quels que soient la qualité et l'état d'usure de l'engrenage. Ce terme de base est modulé en amplitude par la somme de deux termes respectivement liés à la forme des dents des deux roues. Cette forme peut varier d'une dent à l'autre et pour chacune des deux roues, la modulation qui en résulte est périodique à la période de rotation de la roue.

L'apparition d'un défaut sur une ou plusieurs dents d'une des deux roues se manifesterait donc par une évolution de la forme de la modulation correspondante.

Les méthodes les plus couramment utilisées pour diagnostiquer un engrenage par analyse vibratoire sont le niveau vibratoire global, le moyennage synchrone, l'analyse spectrale, le cepstre.

Le moyennage synchrone consiste à additionner des tranches de signal correspondant à la période de rotation de l'une des deux roues, de façon à ne conserver du signal que l'information concernant cette roue. L'analyse spectrale, comme on le verra, donne des renseignements précieux sur la structure du signal, mais est en fait peu adaptée au diagnostic. C'est par l'analyse spectrale complétée du cepstre qu'on obtient en matière de diagnostic les résultats les plus probants.

Après une présentation des signaux réels, nous étudierons leur structure par l'application de ces méthodes classiques et nous montrerons comment cette étude préliminaire nous conduit à essayer des méthodes de traitement du signal adaptées aux signaux non-stationnaires, et plus particulièrement aux signaux cyclostationnaires. Il sera intéressant, en dernier lieu, de comparer ces différentes méthodes pour déterminer de quelle façon elles se complètent mutuellement et s'adaptent aux signaux traités.

## 1-6 Défauts des engrenages. Répercussion sur les vibrations. Interprétation en termes de modèle

Les défauts de forme affectant un engrenage peuvent être soit des défauts de fabrication, soit des transformations subies au cours de l'utilisation de la pièce.

### Défauts d'usinage :

Dans la première catégorie de défauts on compte les défauts d'usinage, les défauts de la matière provenant d'une erreur dans la composition du matériau, d'une inclusion de gaz accidentelle, d'un problème apparu lors d'un traitement du matériau par la chaleur. Un défaut d'usinage classique est celui qui apparaît du fait que l'instrument d'usinage a un nombre de dents différent de celui de la roue à usiner : ceci se traduit sur la forme de la roue par des déviations par rapport au profil idéal régulièrement réparties sur les dents de la roue, et dans les vibrations du réducteur par l'apparition de composantes appelées composantes fantômes, à des fréquences proportionnelles à la fréquence d'engrènement mais différentes des fréquences de rotation des roues.

### Défauts dus à l'usure :

L'usure par fatigue est une déformation irréversible du matériau due à l'effet périodique de la charge : les dents des roues subissent une déformation périodique due à la charge mais tant qu'il n'y a pas d'usure par fatigue, cette déformation est provisoire et reste réversible. Lorsqu'il y a usure par fatigue, les dents subissent une déformation irréversible.

Les défauts qui affectent la surface des dents peuvent être provoqués par une mauvaise lubrification du réducteur. La surface d'une dent, si elle subit une forte pression en l'absence relative de lubrifiant, peut durcir. Ensuite, les dents avec lesquelles elle entrera en contact à la suite de ce durcissement étant moins résistantes, elles vont subir un retrait de matériau et leur surface deviendra inégale. De plus, les particules retirées à ces surfaces se retrouvent dans le lubrifiant et peuvent causer d'autres dégâts sur les dents saines.

Ces défauts de surface peuvent également provenir d'une oxydation provoquée par un réchauffement du lubrifiant lorsque le réducteur tourne à une vitesse élevée. Les surfaces se recouvrent d'un film de métal oxydé, plus résistant que le métal original, et

qui s'élimine peu à peu : il s'agit d'une forme mineure d'usure. Les surfaces étant rigidifiées par l'oxydation, elles résistent moins bien aux distorsions que provoque la charge. C'est pourquoi petit à petit la surface des dents se craquelle à une échelle microscopique.

Le défaut apparaissant sur l'engrenage étudié est un défait de surface, un écaillage affectant l'une des roues du réducteur et provoqué volontairement au cours de l'expérimentation. Sachant qu'il se rapporte à la surface des dents, on peut, en étudiant le modèle mécanique choisi précédemment, déterminer de quelle façon son apparition affectera les vibrations.

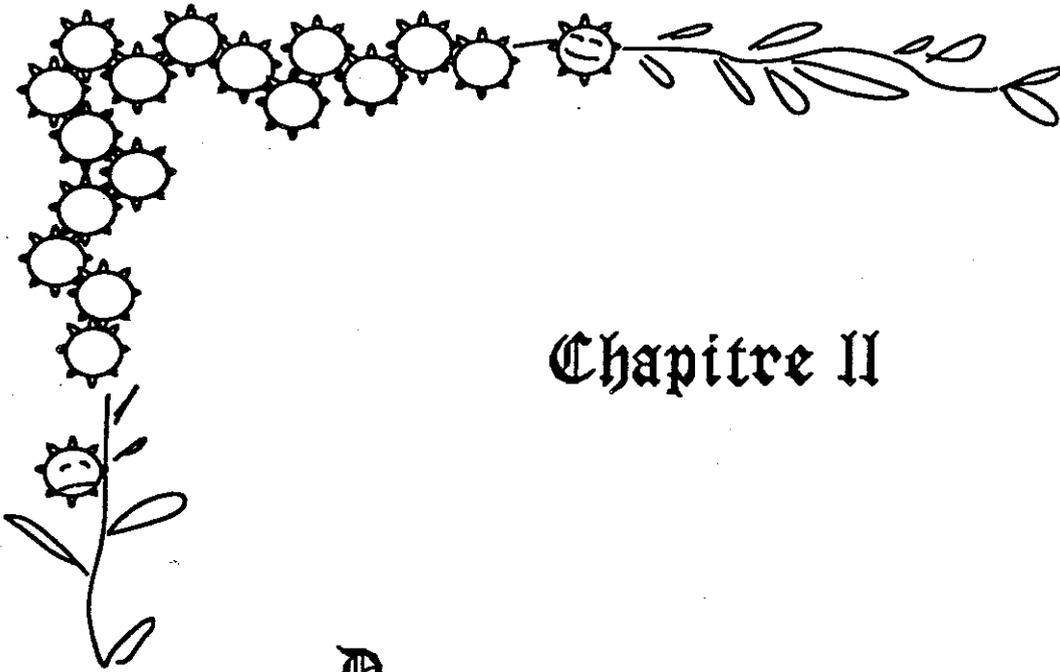
Reprenons le modèle des vibrations (équation (1-4)) :

$$s(x) = \frac{W}{\sum_j \tilde{K}_{Tj}(x)} + \frac{\sum_j (\tilde{v}_{Kj}^{(1)}(x) + \tilde{v}_{Kj}^{(2)}(x))}{\sum_j \tilde{K}_{Tj}(x)}$$

On se souvient que dans ce modèle, les termes se rapportant à la forme de la surface des dents, (indépendamment des déformations causées par la charge, qui apparaissent dans les termes concernant la raideur des dents), sont les termes  $\tilde{v}_{Kj}^{(1)}(x)$  et  $\tilde{v}_{Kj}^{(2)}(x)$ . Ceux-ci peuvent encore se décomposer en la somme d'un terme moyen, périodique à la fréquence d'engrènement, qui est calculé sur le réducteur sain et n'évolue pas au cours du temps, et de deux termes périodiques aux fréquences de rotation des roues. C'est dans l'un de ces deux termes, qu'on a appelés dans le modèle final  $s_{r1}(x)$  et  $s_{r2}(x)$ , que se manifesterà l'apparition du défaut. Celui-ci affectera celui des deux termes qui se rapporte à la roue abîmée.

## CONCLUSION

Le modèle ainsi établi, en lien étroit avec les phénomènes mécaniques de l'engrènement et de la rotation, va nous permettre d'interpréter le fonctionnement des différentes méthodes de traitement du signal que nous avons appliquées aux vibrations étudiées ainsi que les résultats obtenus.



## Chapitre II

**D**ans ce chapitre, on présente les vibrations enregistrés sur une expérimentation réalisée sur des engrenages industriels (laminoirs). Une première étude de ces vibrations est menée et l'application de méthodes de traitement du signal classiques, comme l'analyse spectrale ou le cepstre, permet de confirmer l'adéquation du modèle choisi aux signaux réels. On montre comment le cepstre permet de séparer l'information liée respectivement aux deux roues de l'engrenage, et peut être utilisé pour établir un diagnostic précoce de l'engrenage, puisqu'on met le défaut en évidence plusieurs jours avant qu'il n'apparaisse sur le signal temporel ou le spectre.

*Signal réel*

## CHAPITRE II

### 2 - PRÉSENTATION DES SIGNAUX RÉELS. APPLICATION DE MÉTHODES CLASSIQUES

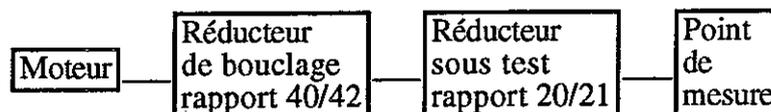
Certaines méthodes classiques d'analyse vibratoire sont déjà utilisées pour le diagnostic des machines tournantes, roulements ou engrenages. Les plus simples sont la mesure du niveau global de vibration du dispositif surveillé [2-1] et le calcul du facteur de crête ou du kurtosis [2-2][2-3].

Lorsque l'acquisition du signal vibratoire a été synchronisée sur la vitesse de rotation de la machine surveillée, on peut pratiquer un moyennage synchrone (voir annexe 3C) qui peut être associé à des techniques de filtrage et de démodulation [2-4][2-5]. Certaines méthodes de diagnostic [2-6] nécessitent l'acquisition des vibrations en plusieurs points du dispositif. De toutes les méthodes classiques, celle qui a donné sur les signaux que présente cette thèse les résultats les plus probants est l'analyse de cepstre [2-7]. Nous allons montrer comment le cepstre permet de diagnostiquer de façon précoce l'apparition du défaut et de mettre en évidence la structure du défaut.

#### 2-1 Présentation des signaux réels

Les vibrations d'engrenage sur lesquelles nous avons travaillé nous ont été fournies par le C.E.T.I.M. Ces signaux ont été fournis à plusieurs laboratoires dans le cadre du GdR traitement du signal et des images. Ils ont déjà fait l'objet de plusieurs études [2-8][i-5][i-6]. Elles ont été enregistrées dans les conditions suivantes :

Dispositif d'enregistrement :



- Le réducteur étudié est composé de deux roues comportant respectivement 20 et 21 dents.

- L'arbre d'entraînement du réducteur de test tourne à la vitesse de 1000 tours/min, soit 16,67 Hz. Les fréquences de rotation des deux roues sont donc très proches l'une de l'autre et de l'ordre de 16,67 Hz et la fréquence d'engrènement de l'ordre de 330 Hz.
- Un enregistrement a été effectué chaque jour pendant 10 jours, la machine ayant tourné en permanence durant les dix jours.
- La fréquence d'échantillonnage est de 20 kHz.
- Chaque enregistrement comporte 60 000 points, et couvre donc une durée de 3 s, soit à peu près 50 périodes de rotation.
- Au cours de l'expérimentation l'engrènement passe de l'état de bon fonctionnement à celui d'engrènement détérioré. On sait que le défaut qui apparaît est un écaillage.

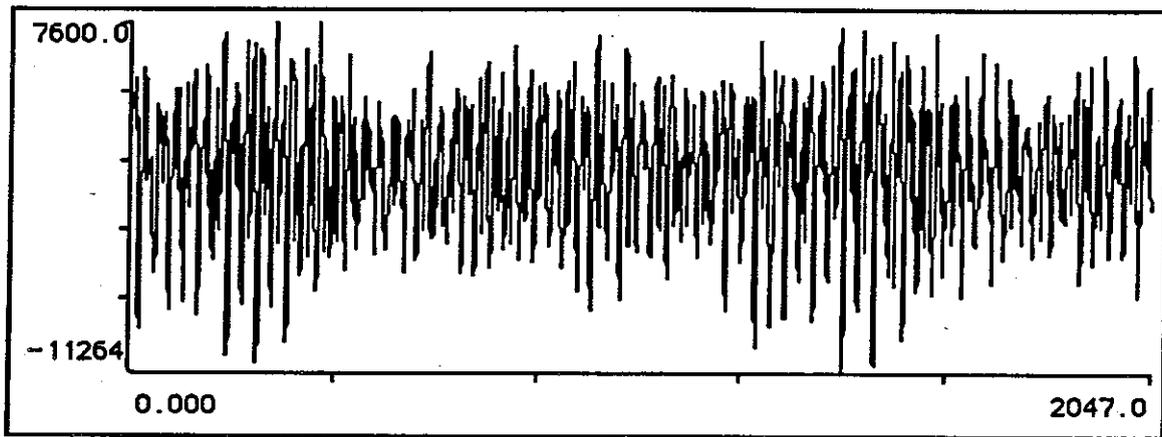
## 2-2 Structure du signal. Adéquation du modèle

D'après le modèle, il devrait apparaître une oscillation rapide à la fréquence d'engrènement, modulée par deux phénomènes périodiques aux fréquences de rotation des roues.

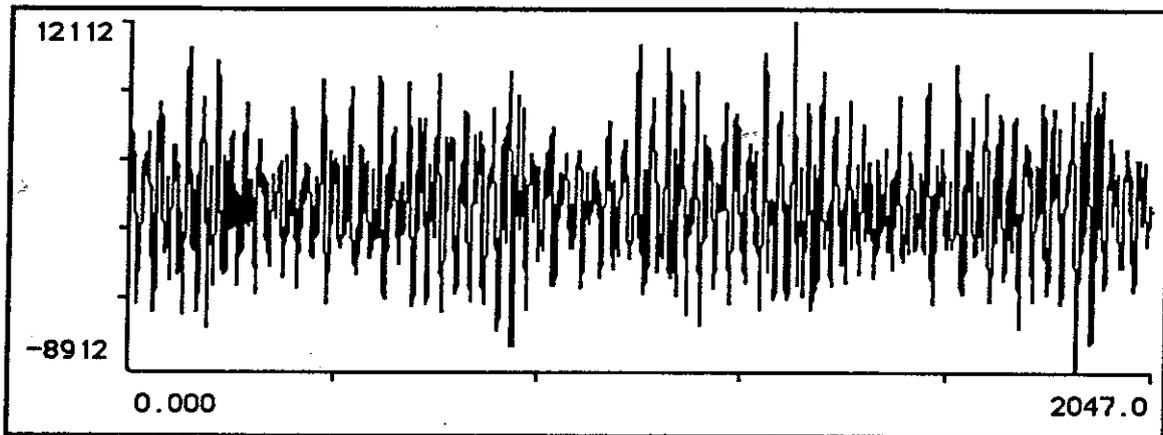
L'observation du signal temporel (fig. (2-1)) laisse supposer la présence d'une fréquence élevée, correspondant à l'oscillation la plus rapide, modulée par une fréquence lente comprenant une quarantaine d'oscillations de la précédente. D'après notre modèle, l'oscillation rapide pourrait être le phénomène d'engrènement, mais il devrait apparaître deux fréquences de modulations différentes. Cependant, compte tenu du fait que les deux roues comportent respectivement 20 et 21 dents, leurs fréquences de rotation sont très proches et il est logique que leur superposition se traduise dans le signal temporel par des battements dont la période est largement supérieure à la durée de signal visualisée.

L'aspect du spectre confirme l'hypothèse des modulations. En effet, la présence des modulations sur le signal temporel se traduit dans le spectre par l'apparition de bandes latérales autour des harmoniques de la fréquence d'engrènement  $f_e$ . Le signal d'engrènement et les phénomènes de modulation étant périodiques, leurs spectres respectifs sont des spectres de raies. Le produit en temps de ces deux phénomènes se traduit en fréquence par une convolution entre leurs représentations fréquentielles.

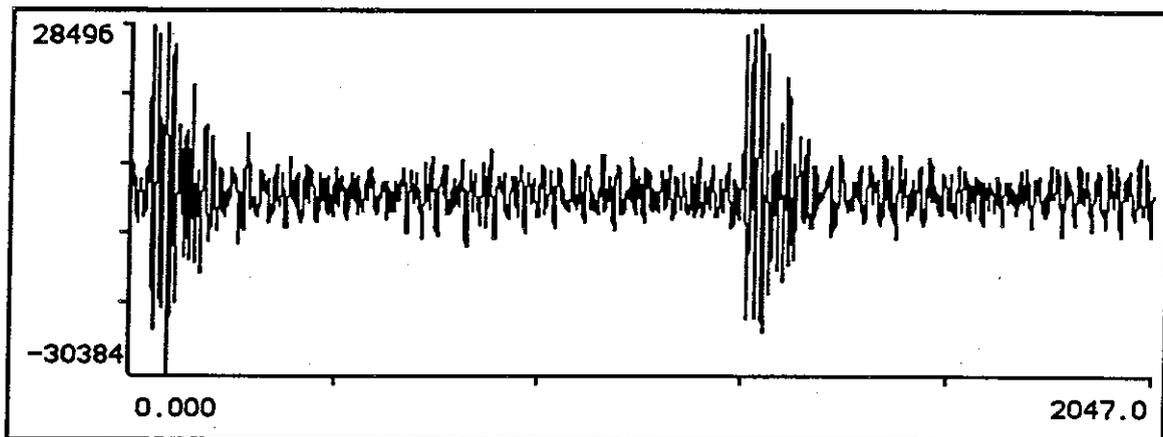
## Signal temporel.



2eme jour.



10eme jour.



13eme jour.

fig.(2-1)

Les bandes latérales sont donc des motifs convolués avec les harmoniques d'engrènement composés de raies harmoniques espacées d'une distance égale aux fréquences de rotation des roues. Et la proportionnalité entre les fréquences d'engrènement et de rotation se traduit par un rapport de proportionnalité entre l'espacement des harmoniques du spectre de l'engrènement et l'espacement des harmoniques des bandes latérales traduisant les phénomènes de modulation.

La figure (2-2) illustre l'apparition des bandes latérales. On observe en temps et en fréquence un signal  $s(t) = s_p(t).s_m(t)$  composé d'une porteuse  $s_p(t)$  périodique de fréquence  $f_p$  modulée par un signal  $s_m(t)$  périodique de fréquence  $f_m$  ayant un rapport de proportionnalité entier avec  $f_p$  :  $f_p = N.f_m$  et  $N$  entier naturel. On voit comment, par convolution, le spectre de raies de la modulation se retrouve autour de chaque harmonique du spectre de raies de la porteuse. C'est ce motif qu'on appelle bandes latérales.

Du fait de la proportionnalité entre les fréquences on peut faire deux remarques :

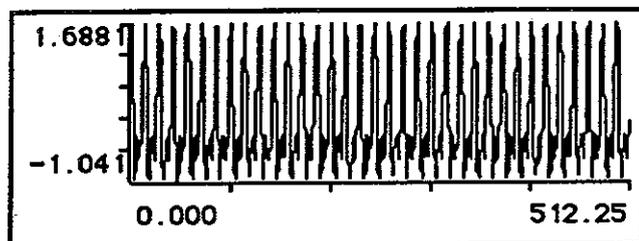
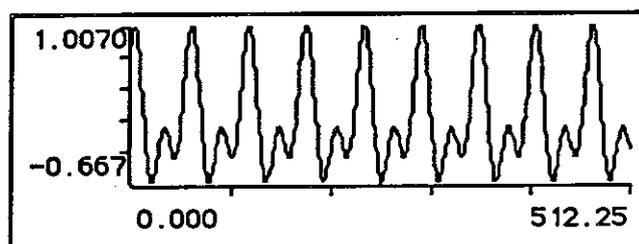
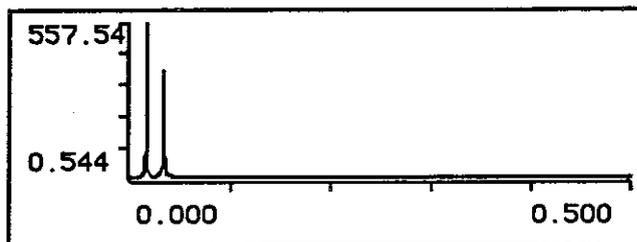
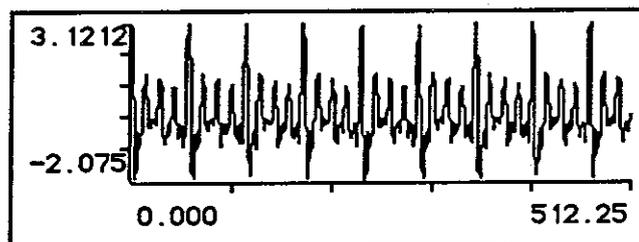
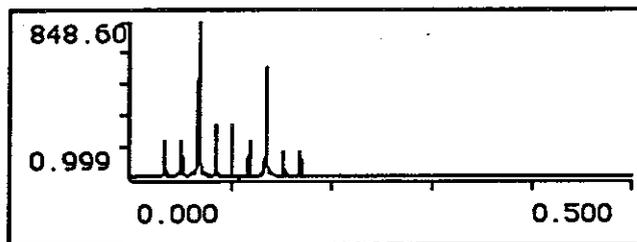
D'une part, on verra apparaître les raies des bandes latérales à des endroits régulièrement espacés séparant deux harmoniques d'engrènement successifs en  $N$  parts égales.

D'autre part, si la largeur de bande du spectre de la modulation est supérieure à la fréquence d'engrènement il va y avoir recouvrement entre deux bandes latérales voisines, c'est-à-dire superposition entre ces deux bandes à mi-distance entre les deux harmoniques d'engrènement autour desquels elles se trouvent, puisque du fait de la proportionnalité, elles tomberont aux mêmes positions.

## Apparition des bandes latérales

temps

fréquence

 $s_p(t)$  $S_p(f)$  $s_m(t)$  $S_m(f)$  $s_p(t) * (1 + s_m(t))$  $S_p(f) * (\delta(f) + S_m(f))$ 

$s_p(t)$  est périodique de fréquence  $f_p =$

$s_m(t)$  est périodique de fréquence  $f_m =$    $= f_p / 4$

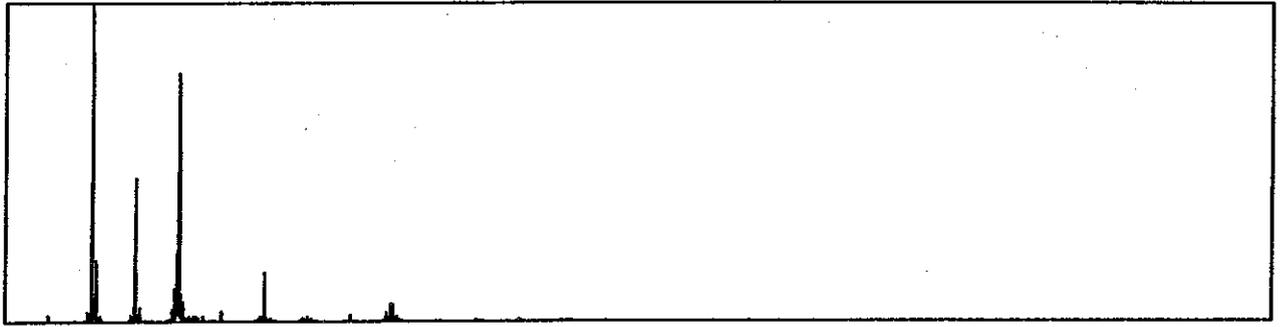
Les bandes latérales dues aux modulations sont régulièrement espacées entre les harmoniques du fondamental, du fait de la proportionnalité entre les fréquences, et il y a superposition entre les bandes latérales à mi-distance entre les harmoniques de la porteuse.

fig (2-2)

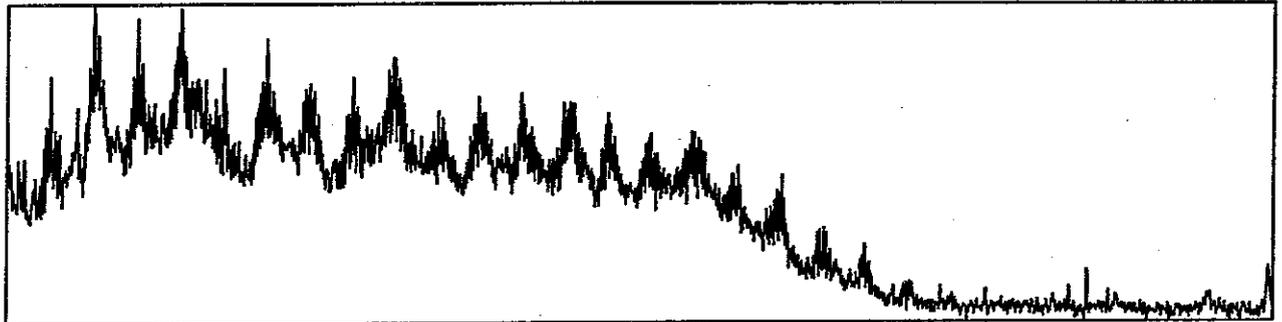
Le spectre du signal d'engrenage est visualisé figure (2-3). On voit bien apparaître les harmoniques du phénomène d'engrènement. Le second est le plus important, ce qui explique que sur le signal temporel on voie apparaître une quarantaine d'oscillations par période de rotation au lieu d'une vingtaine qui correspond au rapport entre les fréquences.

La prépondérance relative dans le spectre de l'harmonique d'ordre 2 peut être attribuée à deux phénomènes : d'une part le dispositif d'expérimentation comprend un réducteur d'entraînement dont le rapport de réduction est égal au double de celui du réducteur étudié, et qui contribue donc aux vibrations aux fréquences harmoniques de  $2f_e$ . D'autre part, comme on peut le voir sur le modèle, la modulation comprend, outre les termes aux fréquences de rotation des roues, un terme  $s_m(x)$  périodique à la période d'engrènement dont le produit avec la porteuse va renforcer les harmoniques pairs du spectre.

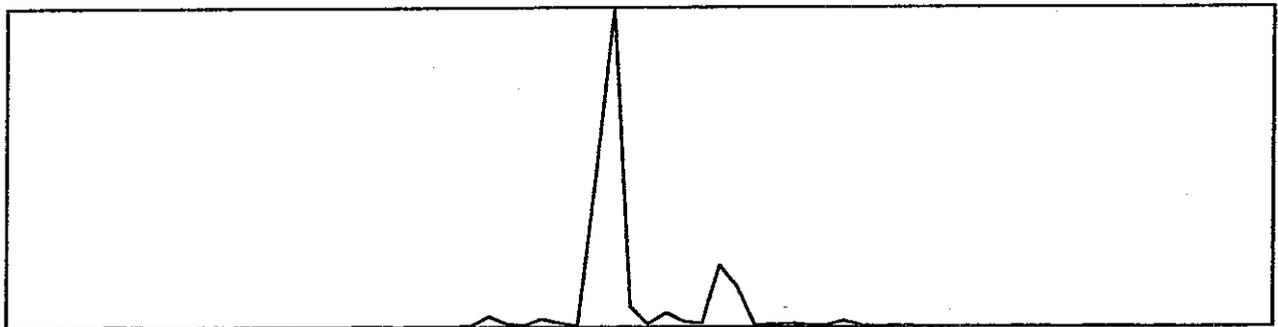
Autour de ces harmoniques on remarque bien les bandes latérales : cependant, il est impossible sans examen plus approfondi de discerner deux séries de ces bandes latérales correspondant aux deux modulations. Du fait de la proximité de leurs deux fréquences, l'œil n'en distingue qu'une.



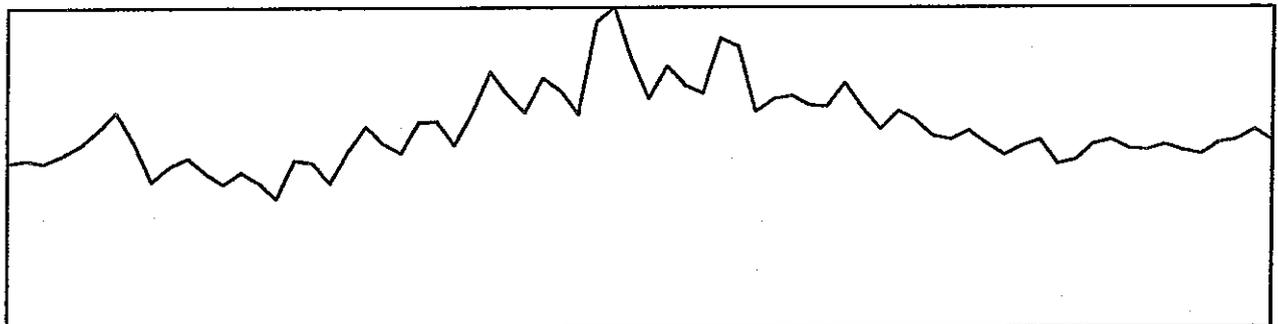
Spectre lineaire



Spectre logarithmique



Spectre lineaire filtre autour du second harmonique



Spectre logarithmique filtre autour du second harmonique

Deuxieme jour de l'experimentation.  
Calcul sur 4096 points. 28 moyennes.

fig (2-3)

### 2-3 Séparation des modulations. Résolution sur le spectre

Si l'on se borne à une simple étude du signal temporel et de sa composition fréquentielle par analyse de Fourier on a peu de chances de voir apparaître les deux modulations séparément dans le cas particulier étudié ici.

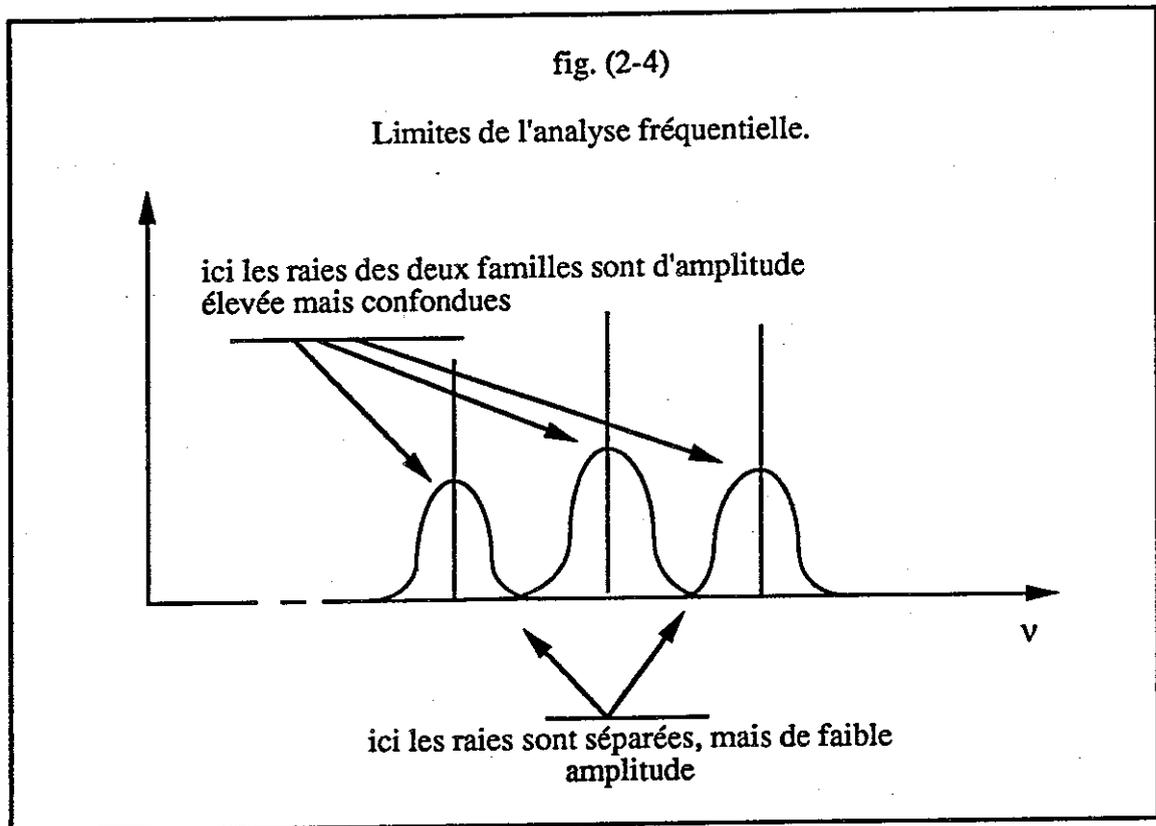
#### En temps :

En effet, les fréquences de rotation des deux roues étant égales respectivement à 16,67 Hz et  $\frac{21}{20} \cdot 16,7$  Hz, la fréquence des battements que fera apparaître la superposition des deux dans le signal temporel sera de 0,83 Hz, ce qui signifie un peu plus de deux périodes sur la durée de 3 s du signal dont on dispose.

#### En fréquence :

Ce qu'on peut observer sur le spectre du signal dépend de la résolution donnée par le nombre de points sur lequel on travaille. L'obligation qu'on a de moyenniser ce spectre sur plusieurs tranches de signal pour améliorer son estimation nous oblige à le calculer sur un nombre assez réduit de points.

En supposant par exemple qu'une tranche comprenne 4096 points, la résolution fréquentielle obtenue est  $\Delta f = 4,88$  Hz, ce qui est nettement insuffisant pour séparer les premières raies des deux bandes latérales puisqu'elles sont à une distance fréquentielle de 0,83 Hz. L'ordre des premiers harmoniques de ces bandes qu'on pourra séparer est l'entier  $n$  tel que  $0,83 \cdot n > 4,88$  soit  $n = 6$ . Or, plus on s'éloigne de l'harmonique d'engrènement, plus l'amplitude des raies de modulation s'affaiblit. Ce qui veut dire que si notre résolution fréquentielle nous permet de séparer les raies d'ordre 6, celles-ci sont d'amplitude si faible qu'on ne les distingue plus. Ce problème est illustré par la fig. (2-4).



#### Autocorrélation :

On verra dans un paragraphe ultérieur que l'autocorrélation ne permet pas non plus d'étudier les modulations car elles y sont masquées par le phénomène de l'engrènement.

#### 2-4 Cepstre. Effet du logarithme

L'opérateur cepstre est une méthode de traitement non linéaire [2-9][2-10] qui permet, par un changement d'échelle en fréquence, de faire apparaître en temps des informations qui ne sont pas décelables sur l'autocorrélation.

Le cepstre de puissance d'un signal  $s(t)$  est donné par [2-11][2-12]

$$C_{ss}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\log_{10}(|S(f)|^2)\}$$

où  $\mathcal{F}^{-1}$  symbolise la transformée de Fourier inverse et  $S(f)$  est la transformée de Fourier de  $s(t)$ . Le cepstre diffère de l'autocorrélation par l'utilisation en fréquence d'un changement d'échelle non linéaire par passage au logarithme. En effet, l'autocorrélation du signal est la transformée de Fourier inverse du spectre de puissance du signal et le cepstre la transformée de Fourier inverse du spectre logarithmique du signal.

De même que l'autocorrélation, le cepstre est fonction du temps. C'est donc le fait de prendre le logarithme du cepstre qui fait ressortir les modulations. Le logarithme agit de deux façons :

Rehaussement des bandes latérales :

Il a pour premier effet de rehausser l'amplitude des bandes latérales par rapport à celle des raies d'engrènement. Ainsi, l'information contenue dans la partie des bandes latérales qui se trouve à mi-distance entre deux harmoniques d'engrènement prend de l'importance. Or, on a vu précédemment que c'est dans cette partie du spectre que les deux modulations sont séparées.

Ceci est illustré par la figure (2-5) qui représente, l'une en dessous de l'autre, une portion du spectre de puissance et du spectre logarithmique comprise entre deux raies d'engrènement. Les lignes verticales tracées par dessus indiquent les canaux où doivent tomber les raies dues aux modulations : 20 pour l'une, 21 pour l'autre. Cette figure met en évidence qu'à proximité des harmoniques d'engrènement, les raies des deux modulations sont trop proches pour que la résolution spectrale permette de les séparer. Lorsqu'on s'éloigne de ces harmoniques, l'information a une si faible amplitude dans le spectre de puissance qu'il est impossible de rien discerner, alors que sur le spectre logarithmique, les raies centrales, dont l'amplitude est rehaussée, apparaissent nettement séparées.

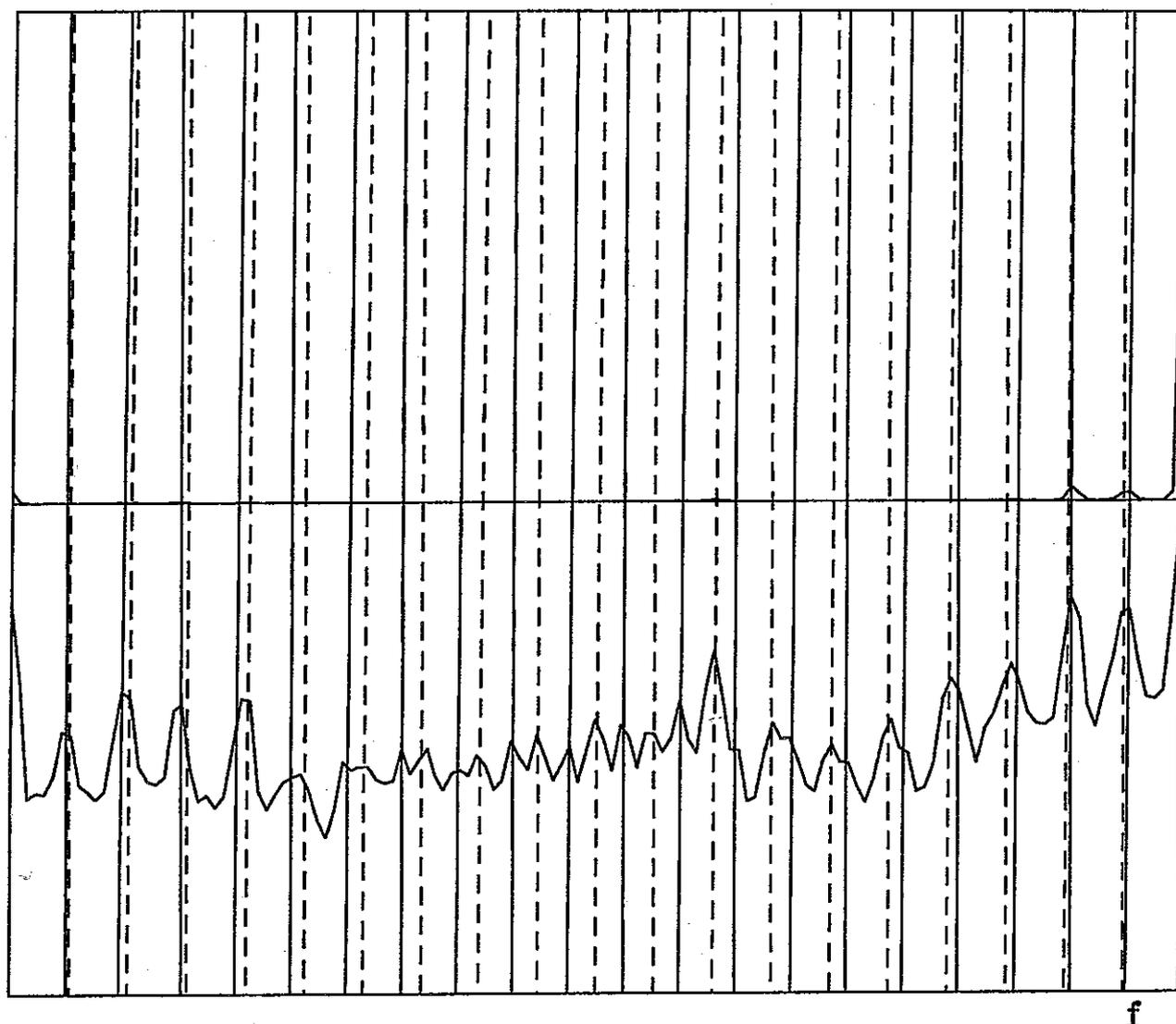


Image du haut : spectre lineaire  
 Image du bas : spectre logarithmique

Position des harm. de la roue a 21 dents : \_\_\_\_\_

Position des harm. de la roue a 20 dents : - - - - -

Jour 2. Portion du spectre comprise entre les  
 premier et second harmoniques

Fig. (2-5)

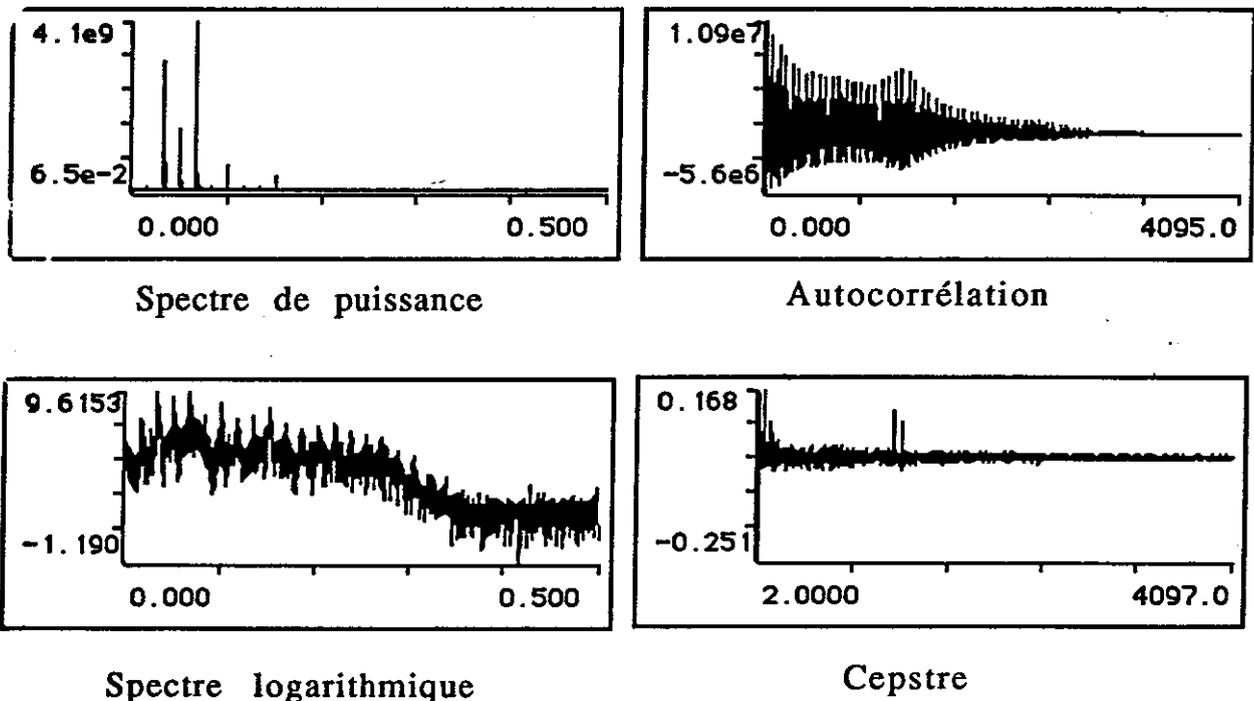
Elargissement de la bande fréquentielle :

Le deuxième effet se conçoit bien lorsqu'on compare le cepstre à l'autocorrélation, c'est ce qu'illustre la figure (2-6). Le logarithme, en transformant l'échelle des amplitudes, change l'aspect de l'enveloppe du spectre de raies de l'engrènement. Celui-ci devient plus large bande dans le spectre logarithmique et donc plus étroit en temps après transformée de Fourier inverse.

Ainsi, dans l'autocorrélation, le phénomène de l'engrènement couvre en temps une durée supérieure aux périodes de rotation, masquant ainsi les raies qui apparaissent pour les phénomènes de rotation. Dans le cepstre, par contre, le phénomène de l'engrènement est plus étroit, et donc localisé près de zéro, sur une durée inférieure aux périodes de rotation, ce qui permet de voir apparaître les raies correspondant à la rotation des roues.

fig. 2-6

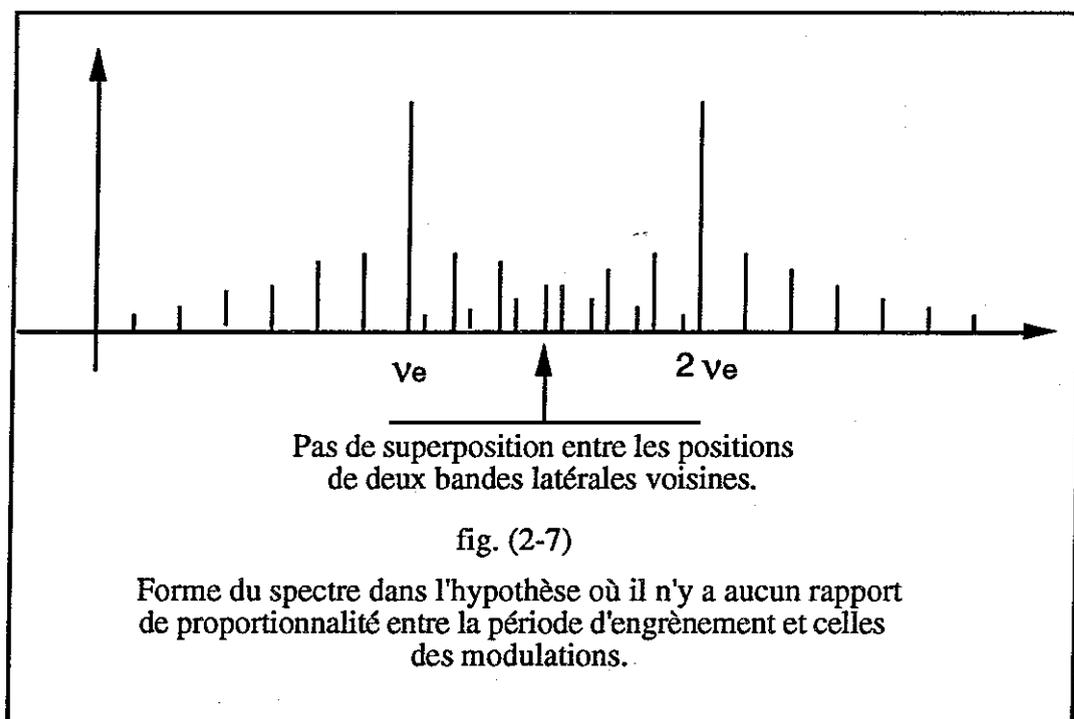
Comparaison du cepstre avec l'autocorrélation.



Signal enregistré le second jour.

Remarque :

Il faut noter que la proportionnalité entre les fréquences d'engrènement et de rotation est essentielle dans le fonctionnement du cepstre. En effet, si cette proportionnalité n'existait pas, les bandes latérales ne formeraient plus deux familles de raies s'étendant sur toute la largeur de bande du signal, mais des groupes de raies de même périodicité distribués à des intervalles sans rapport avec cette proportionnalité, et translatés par rapport à l'origine des fréquences. Ainsi, deux bandes latérales voisines se croiseraient sans recouvrement, c'est ce qui est illustré par la figure (2-7).



La figure (2-8) illustre l'importance de la proportionnalité. La fig. (2-8) (a) montre l'aspect du spectre dans trois cas de figure :

- (1) la porteuse est un signal périodique non sinusoïdal, comprenant donc plusieurs harmoniques, et sa fréquence est proportionnelle à celle de la modulation.
- (2) la porteuse se réduit à son seul fondamental, et sa fréquence est proportionnelle à celle de la modulation.
- (3) la porteuse se réduit à son seul fondamental, et sa fréquence n'est pas proportionnelle à celle de la modulation.

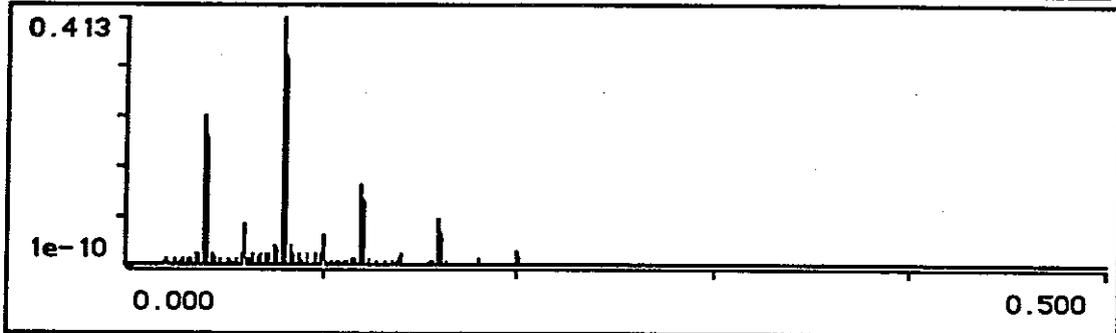
On peut décrire quelle forme prend le cepstre dans ces trois cas (fig. (2-8)(b)). Dans le premier cas, du fait de la proportionnalité entre les fréquences de la porteuse et de la modulation, les bandes latérales se présentent en fréquence comme une famille de raies harmoniques dont le fondamental est la fréquence de la modulation et qui s'étend sur tout le spectre. Le fait que ce phénomène s'étende sur la totalité du spectre rend optimale la résolution avec laquelle on peut le détecter en temps dans le cepstre.

Dans le second cas, le phénomène se présente exactement de la même façon, excepté sa largeur de bande. En effet, la porteuse ne comportant qu'un harmonique, on peut étudier dans ce cas quel est le résultat dans le cepstre lorsque la largeur de bande du phénomène dans le spectre est seulement égale à celle de la modulation. La résolution avec laquelle on détecte le phénomène dans le cepstre est alors bien détériorée. Sa largeur de bande dans le spectre étant cinq fois moins étendue que dans le premier cas, (puisque la porteuse comportait cinq harmoniques), la résolution dans le cepstre est cinq fois moins bonne.

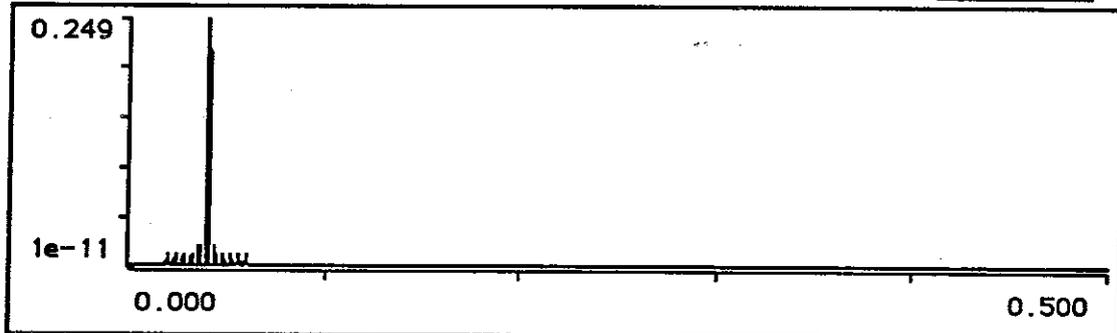
Le dernier cas présenté ajoute à ce problème de résolution un problème de déphasage : en effet, les fréquences de la porteuse et de la modulation n'étant pas harmoniques, la série de raies présente sur le spectre un déphasage par rapport à l'origine qui induira sur le cepstre une distorsion, liée à ce déphasage, sur la forme du pic dû à la modulation. On peut remarquer de plus que dans ce dernier cas, si la porteuse comporte plusieurs harmoniques, le déphasage par rapport à l'origine des bandes latérales dépendra de l'ordre de l'harmonique autour duquel elles se trouvent, et ne sera donc pas le même d'une série de bandes latérales à l'autre. Ainsi le cepstre, au lieu de détecter un unique phénomène périodique sur la totalité du spectre détectera plusieurs phénomènes périodiques à la même fréquence, mais déphasés les uns par rapport aux autres.

Modulation. Fondamental : 0.004

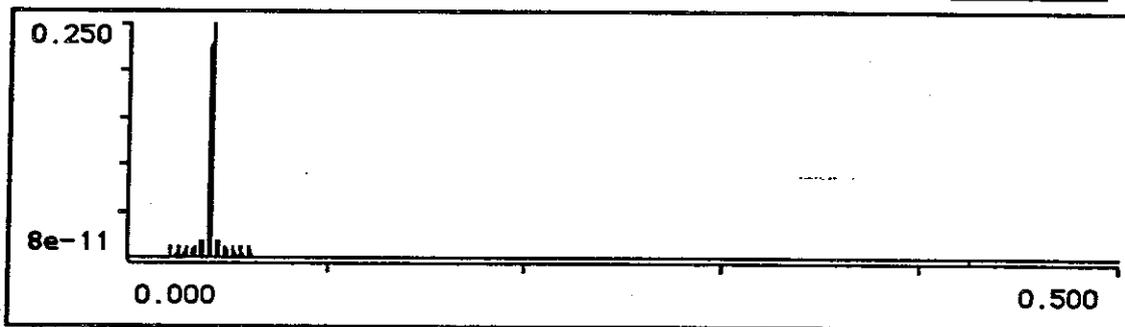
Porteuse comprenant 5 harmoniques. Fondamental : 0.04



porteuse avec un seul harmonique, fondamental : 0.04



porteuse avec un seul harmonique, fondamental : 0.041

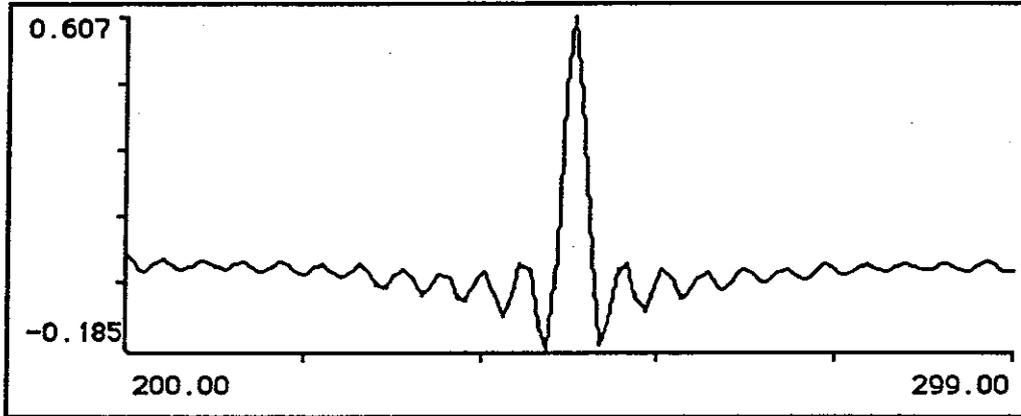


Spectres de puissance.

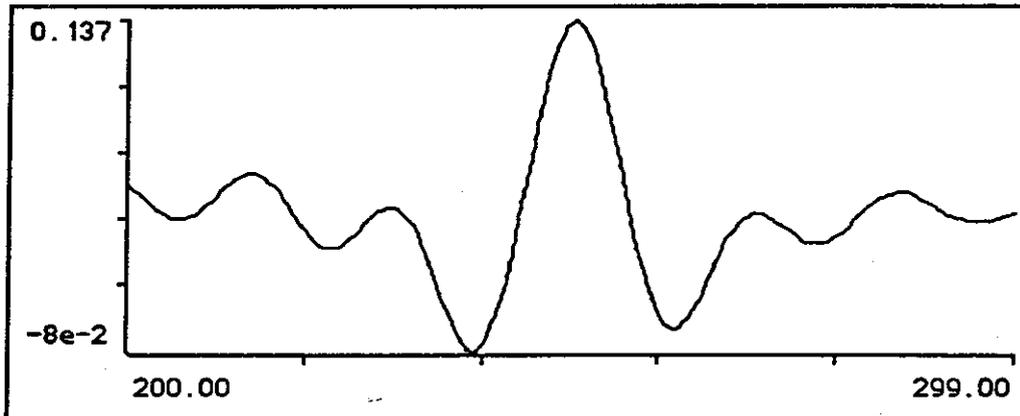
fig. (2-8)(a)

modulation :

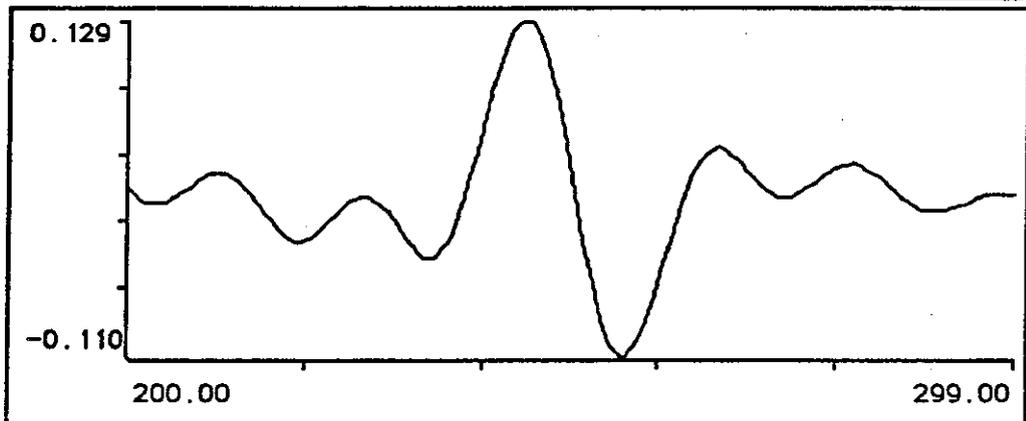
porteuse avec plusieurs harmoniques, fondamental :



porteuse avec un seul harmonique, fondamental :



porteuse avec un seul harmonique, fondamental :



visu : origine =

longueur =

fig. (2-8)(b)

C'est dans le premier cas qu'on a la meilleure résolution dans le cepstre, puisqu'il apparaît à la période  $1/f_r$  une raie pure convoluée avec une fonction de largeur  $1/n.\Delta f$ , où  $\Delta f$  est la largeur de bande de la modulation et  $n$  le nombre d'harmoniques de la porteuse.

Dans le second cas, la raie apparaît au bon endroit mais elle est plus large, du fait qu'en fréquence le phénomène n'apparaît qu'une fois et qu'il est donc à bande étroite. En effet, si la largeur de bande de la modulation est  $\Delta f$ , la largeur de la raie apparaissant dans le cepstre est de l'ordre de  $1/\Delta f$  dans le second cas, tandis qu'elle était de l'ordre de  $1/n.\Delta f$  dans le premier cas.

Dans le troisième cas, il apparaît un terme  $\exp(2\pi j.k.df.t)$ , où  $df$  est le déphasage du phénomène périodique par rapport à l'origine, dont les maxima ne tombent pas aux mêmes positions que les raies du cepstre, et de ce fait perturbent l'information. Si dans ce troisième cas la porteuse comprend plusieurs harmoniques, pour chaque harmonique d'ordre  $k$ , la translation du motif de modulation par rapport à l'origine est de  $k.df$ ; le pic qui apparaît en temps est alors pondéré par  $\exp(2\pi j.k.df.t)$ . Ainsi le résultat, au lieu d'être amélioré par l'ajout d'harmoniques de la porteuse, comme dans le cas où les fréquences sont proportionnelles, est toujours aussi faux.

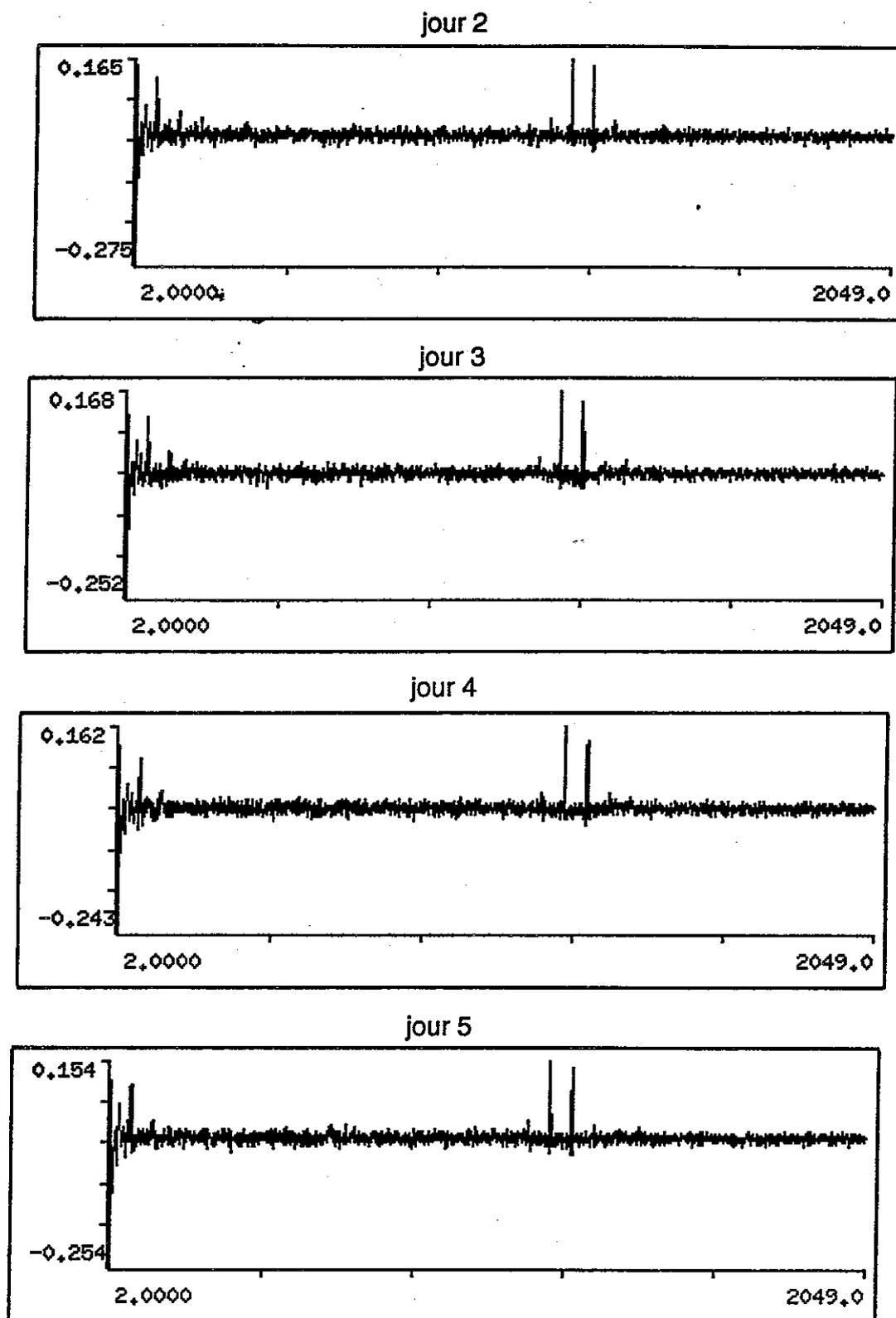
## 2-5 Application aux signaux d'engrenage. Diagnostic

On a vu dans le premier chapitre, en étudiant le modèle mécanique du signal, que s'il apparaît un défaut d'écaillage sur l'une des deux roues, la perturbation qu'il entraînera sur le signal sera une transformation de la forme de la modulation correspondant à cette roue.

D'autre part, on peut supposer que le défaut étant localisé sur une dent ou quelques dents voisines, cette perturbation sera de courte durée par rapport à la période de rotation de la roue et se manifestera donc dans le spectre de la modulation par un rehaussement des harmoniques d'ordre élevé.

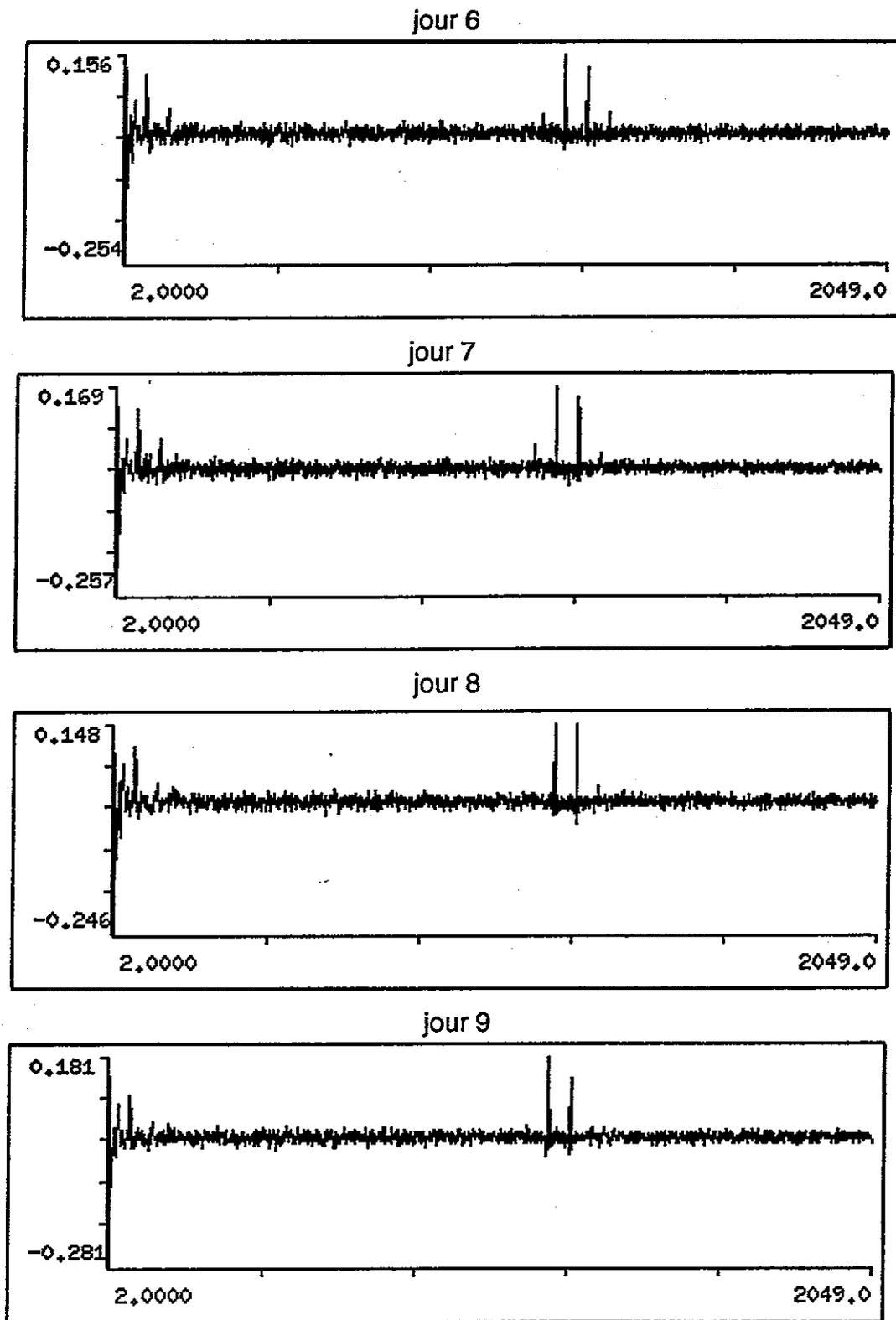
Le cepstre étant un moyen de quantifier dans le spectre la présence des raies appartenant à chacun des phénomènes périodiques de l'engrènement et des modulations, il s'avère être particulièrement adapté à l'étude de l'évolution relative de la forme et de l'importance des modulations, et donc pour tenter de diagnostiquer l'engrenage.

La figure (2-9) représente les cepstres calculés pour chaque jour de l'expérimentation, le spectre de puissance étant moyenné sur plusieurs tranches en vue d'améliorer son estimation. Si l'on calcule pour chaque cepstre le rapport entre les positions des deux raies qui apparaissent au centre, on trouve bien  $21/20$ , ce qui confirme qu'elles sont représentatives respectivement des deux phénomènes de modulations.



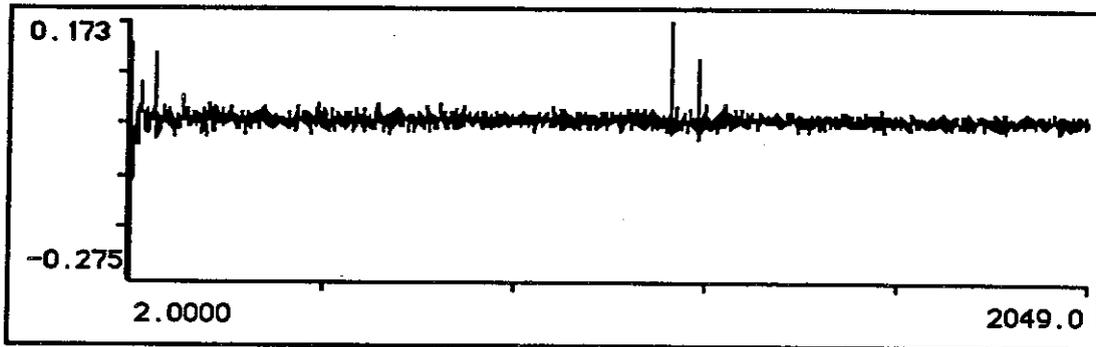
Cepstres de puissance pour jours 1 4.

fig. (2-9)(a)

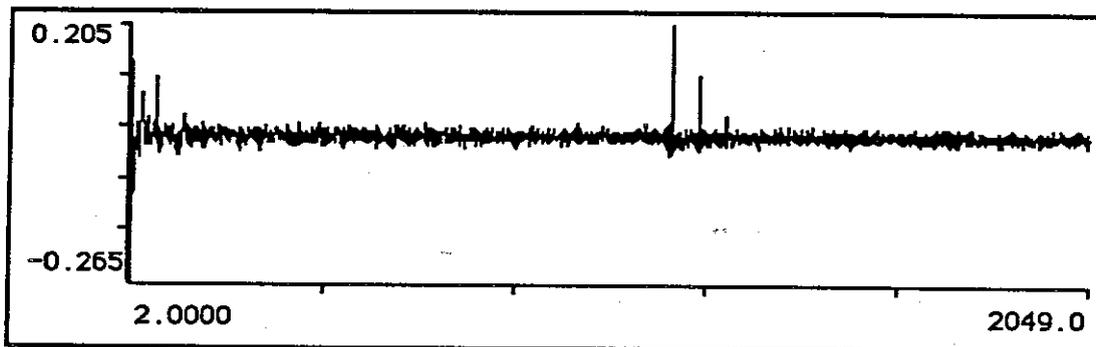


Cepstres de puissance pour les jours 5 8.

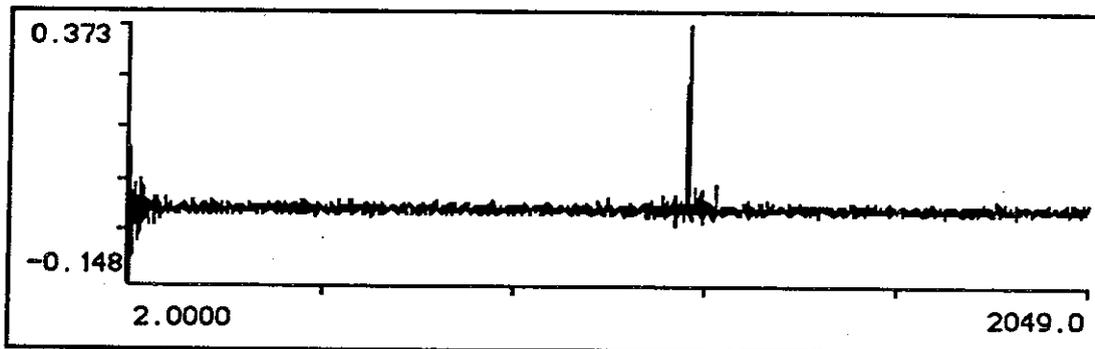
jour 10



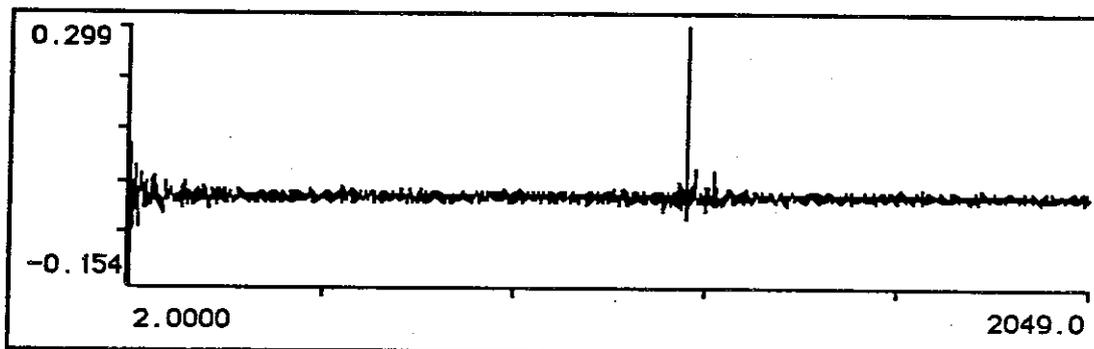
jour 11



jour 12



jour 13



cepstres de puissances des jours 10 a 13

fig. (2-9)(c)

Le tableau ci-dessous présente le rapport des positions pour chaque jour de l'expérimentation.

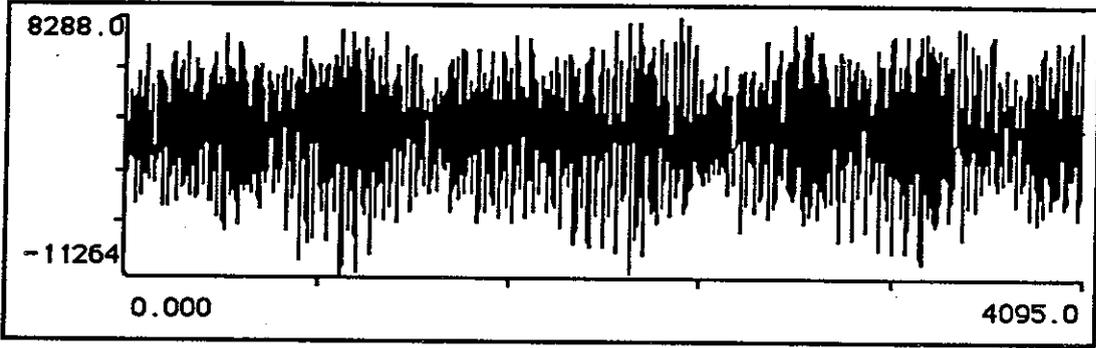
Jour d'expérimentation	Valeur du rapport
02	1,049
03	1,050
04	1,049
05	1,049
06	1,049
07	1,049
08	1,050
09	1,050
10	1,050
11	-
12	-
13	-

On peut remarquer que dès le dixième jour, la raie correspondant à la roue à 20 dents commence à s'élever relativement à la raie due à la roue à 21 dents. Si l'on se fie à l'hypothèse, suggérée par le modèle, que l'apparition d'un écaillage sur une roue élargit les bandes latérales correspondantes, l'effet du défaut sur le cepstre sera de faire augmenter l'amplitude de la raie concernée. Cette hypothèse est réaliste, puisque si un défaut apparaît sur l'une des deux roues, il se manifestera à chaque passage au point d'engrènement de la dent abîmée, c'est-à-dire à la fréquence de rotation de cette roue.

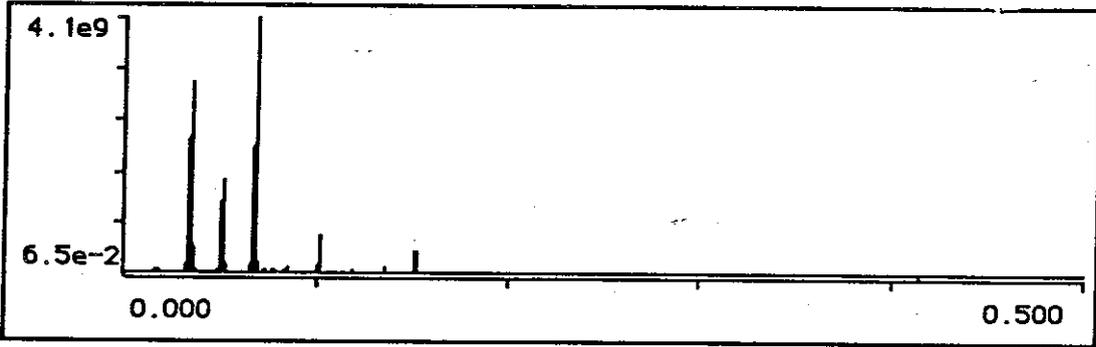
Il semblerait donc que la variation d'amplitude observée révèle la présence d'un défaut d'écaillage sur la roue à 20 dents. Cette hypothèse est confirmée par ce qu'on sait de l'expérimentation : c'est bien la roue à 20 dents qui se détériore. La figure (2-10) illustre l'efficacité du cepstre en mettant en parallèle les cepstre, spectre, signal temporel et autocorrélation, pour qu'on voie bien qu'au dixième jour, le défaut n'est réellement détectable qu'à partir du cepstre.

En effet, celui-ci met en évidence la présence des deux modulations, permet de mesurer les périodes respectives de ces modulations avec une précision égale à la période d'échantillonnage, soit  $\frac{1}{20\,000}$  s et d'évaluer l'importance relative de leur contribution aux vibrations.

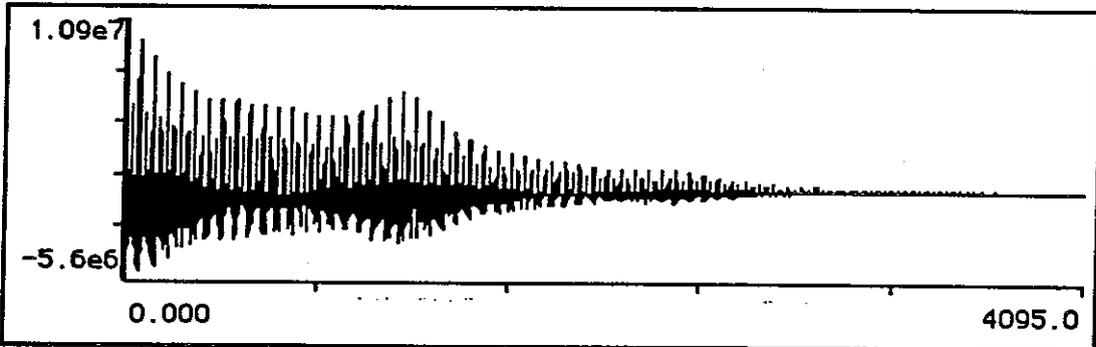
Efficacité du cepstre pour le diagnostic.  
Comparaison avec le signal temporel, le spectre, et l'autocorrélation.



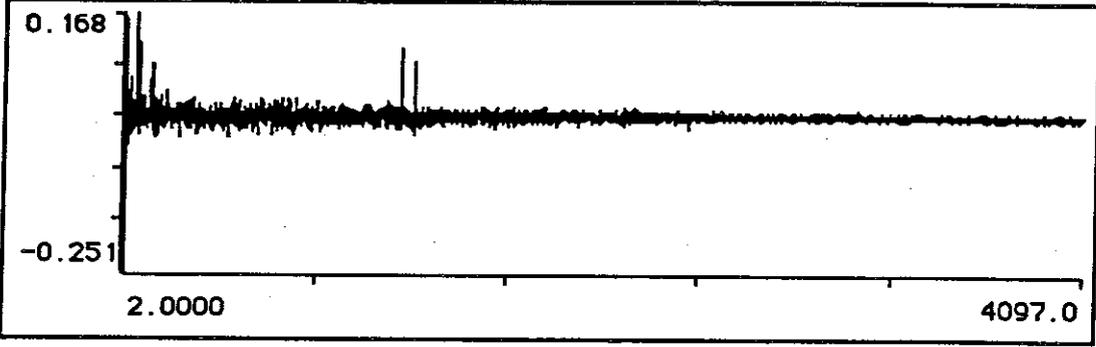
Signal temporel enregistré le 2<sup>nd</sup> jour



Spectre de puissance.



Autocorrélation.



Cepstre.

fig. (2-10)

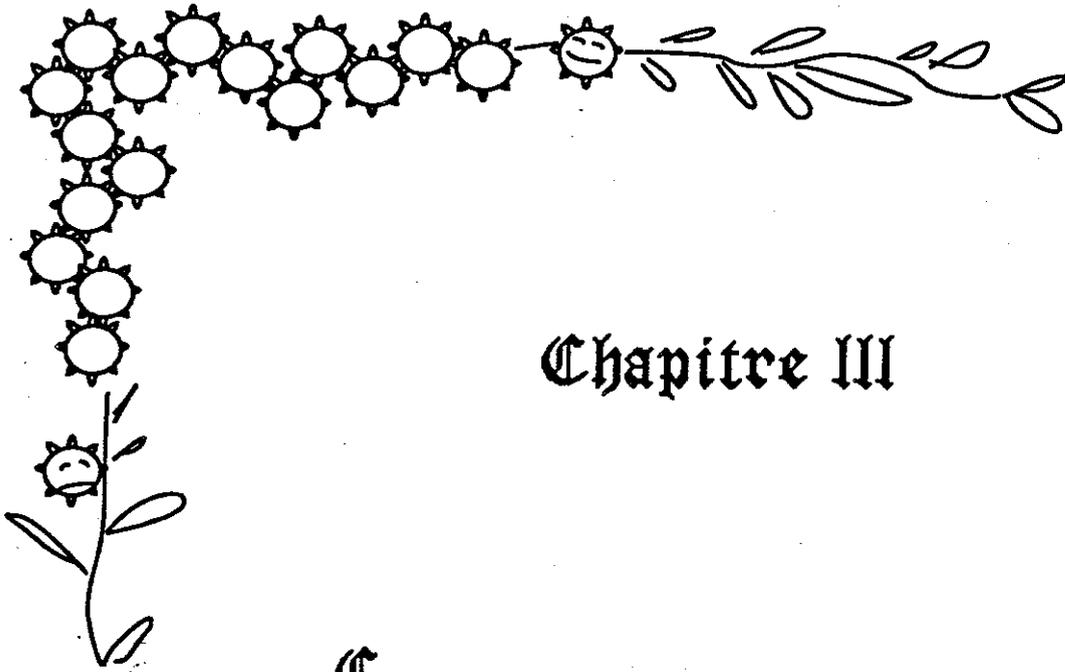
## CONCLUSION

L'analyse de cepstre s'avère être un complément important du spectre dans l'étude des vibrations d'engrenage. En effet, l'état d'usure d'un réducteur est fortement lié aux phénomènes de modulation que présentent les vibrations d'engrenage. Or, ces modulations sont de faible énergie par rapport au signal d'engrènement, ce qui rend leur détection difficile. Dans le spectre, leur présence se traduit par des séries de raies, mais la durée du signal étudié n'offre pas toujours une résolution suffisante en fréquence pour qu'on puisse séparer les différentes séries de raies et les attribuer aux phénomènes qui en sont la cause.

L'analyse de cepstre, classiquement utilisée pour la détection des modulations (Randall) a permis de mettre en évidence la présence de deux modulations là où le spectre n'en montrait qu'une, et de déterminer avec précision les fréquences de ces modulations. L'exemple traité mettant particulièrement bien en relief l'efficacité du cepstre pour la séparation des modulations, du fait du faible rapport de réduction de l'engrenage étudié, nous avons utilisé cette application pour détailler l'effet du cepstre sur le signal et mettre en évidence le rôle de la proportionnalité entre les fréquences d'engrènement et de modulation dans la résolution du cepstre.

On montre aussi comment l'apparition d'un défaut sur la roue à 20 dents provoque une augmentation de l'amplitude de la raie correspondante dans le cepstre, alors que ce défaut ne se manifeste pas encore dans le signal temporel.

L'analyse de cepstre permet donc dans ce cas de détecter la présence d'un défaut et de déterminer quelle est la roue abîmée.



## Chapitre III

Ce chapitre justifie de façon empirique l'utilité d'une étude non-stationnaire du signal d'engrenage, et plus particulièrement d'une approche cyclostationnaire de ce signal. On donne la définition et les principales propriétés des signaux cyclostationnaires, et l'on fait une étude des paramètres les plus pertinents pour l'étude de ces signaux, soit l'autocorrélation cyclique et la corrélation spectrale.

## CHAPITRE III

### 3 - CYCLOSTATIONNARITE.

Dans ce chapitre nous développons les arguments qui nous font supposer que le signal est non-stationnaire et appartient à la classe des signaux cyclostationnaires. Puis nous donnons la définition et les principales propriétés de la cyclostationnarité.

#### 3-1 Non-stationnarité des signaux d'engrenage.

Jusqu'à présent, en étudiant le signal par l'analyse spectrale et le cepstre, nous l'avons implicitement supposé stationnaire et ergodique. En effet, si le signal contenait une composante non-stationnaire, celle-ci a été supprimée par moyennage temporel. Or, la structure du signal, en particulier les modulations qu'il contient, semble le rendre non-stationnaire.

Un signal stationnaire a pour particularité de ne contenir que des composantes fréquentielles décorréelées, du fait que son autocorrélation ne dépend pas du temps (annexe 3A). Les vibrations d'un engrenage étant la somme de composantes fréquentielles provenant d'un seul et même phénomène physique, l'engrènement, on peut supposer que ces composantes ne sont pas décorréelées les unes des autres. Cependant, la présence de périodicités dans le signal nous amène à penser que sa non-stationnarité prend une forme particulière qui est la cyclostationnarité (Gardner [3-1], [3-2], [3-3], [3-4], Raoof [3-6]).

En effet, rappelons que les vibrations de l'engrenage sont produites par l'erreur statique de transmission,  $s(x)$ , dont l'expression ne dépend pas directement du temps mais de la position angulaire de la roue, et que c'est seulement en supposant que le mouvement de la roue dépend linéairement du temps ou qu'on a effectué une acquisition synchrone qu'on peut l'exprimer en fonction de  $t$ .

On peut donc interpréter l'autocorrélation du signal en se ramenant à des positions angulaires des roues. L'autocorrélation du signal vibratoire  $x(t)$  est donnée par :

$$R_x(t, \tau) = E \left[ x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right].$$

Or, la valeur du signal à une date  $t$  donnée correspond à une position angulaire donnée de la roue. La date  $t$  centrale peut donc être considérée comme une position

angulaire centrale et la distance temporelle  $\tau$  comme une distance angulaire entre deux points de la roue. Ceci est illustré par la figure (3-1).

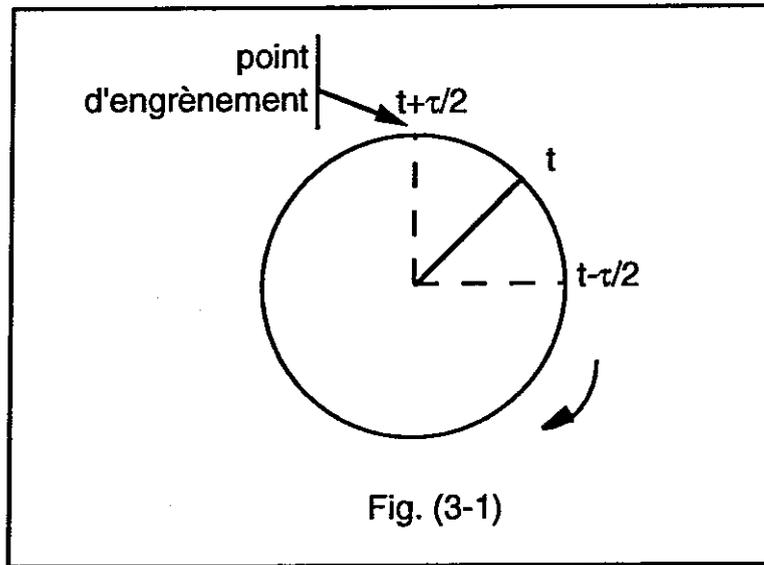


Fig. (3-1)

Ainsi, si les caractéristiques des dents, leur forme originale et leurs défauts, ne varient pas d'une dent à l'autre, on peut supposer que la corrélation entre deux points de la roue séparés par une distance angulaire fixée  $\tau$  ne changera pas lorsque la position angulaire centrale  $t$  varie. Mais il est plus réaliste de supposer que les dents de chaque roue n'ont pas toutes exactement le même profil et que la corrélation entre les vibrations produites pour deux positions angulaires  $(t + \frac{\tau}{2})$  et  $(t - \frac{\tau}{2})$  dépendra de la position angulaire centrale  $t$ . Cependant, la périodicité du mouvement de la roue induit une périodicité de la position angulaire centrale  $t$ , d'où l'éventualité d'une périodicité selon  $t$  de l'autocorrélation.

Nous allons présenter des méthodes de traitement du signal adaptées aux signaux non-stationnaires, et après avoir étudié le lien entre les différentes méthodes et leur rapport avec les caractéristiques du signal, nous montrerons comment on peut les appliquer au modèle, mettre en évidence la cyclostationnarité des vibrations, et déterminer les fréquences de cette cyclostationnarité.

### 3-2 Autocorrélation, stationnarité et cyclostationnarité.

La fonction d'autocorrélation d'une fonction aléatoire du temps  $x(t)$  est définie par  $R_x(t, \tau) = E[x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2})]$  si l'on choisit sa définition symétrique,  $R_x(t, \tau) = E[x(t) \cdot x^*(t - \tau)]$  si l'on choisit sa définition asymétrique.

Les  $E[.]$  représentent une moyenne statistique, c'est-à-dire une moyenne sur toutes les valeurs que peut prendre le produit  $x(t + \tau/2) \cdot x^*(t - \tau/2)$  (resp.  $x(t) \cdot x^*(t - \tau)$ ) pour un couple  $(t, \tau)$  donné, pondérée par la probabilité associée à ces valeurs, ou encore moyenne sur l'ensemble des réalisations possibles du signal (moyenne d'ensemble).

Dans le cas général, cette autocorrélation dépend donc de la date moyenne à laquelle on se place,  $t$ , et de l'écart entre les deux instants d'observation,  $\tau$ . Le comportement de l'autocorrélation vis-à-vis de la variable  $t$  définit ses propriétés de stationnarité, cyclostationnarité ou non-stationnarité au sens large.

#### Stationnarité :

Un signal est dit stationnaire au second ordre si ses propriétés statistiques (moyenne, variance) ne varient pas au cours du temps, ce qui se traduit par le fait que son autocorrélation  $R_x(t, \tau) = R_x(\tau)$  ne dépend que de  $\tau$ .

#### Cyclostationnarité :

Un signal est purement cyclostationnaire si son autocorrélation dépend de  $t$  de façon périodique. La fréquence  $\alpha$  de cette périodicité est la fréquence de cyclostationnarité du signal. On montre en annexe 3B qu'un tel signal peut contenir des composantes fréquentielle corrélées.

#### Cyclostationnarité au sens large :

Un signal est cyclostationnaire au sens large si son autocorrélation présente plusieurs périodicités par rapport à  $t$ , mais avec des périodes n'ayant aucun rapport de proportionnalité. Il a alors plusieurs fréquences de cyclostationnarité  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  qui sont les fréquences respectives de ces périodicités.

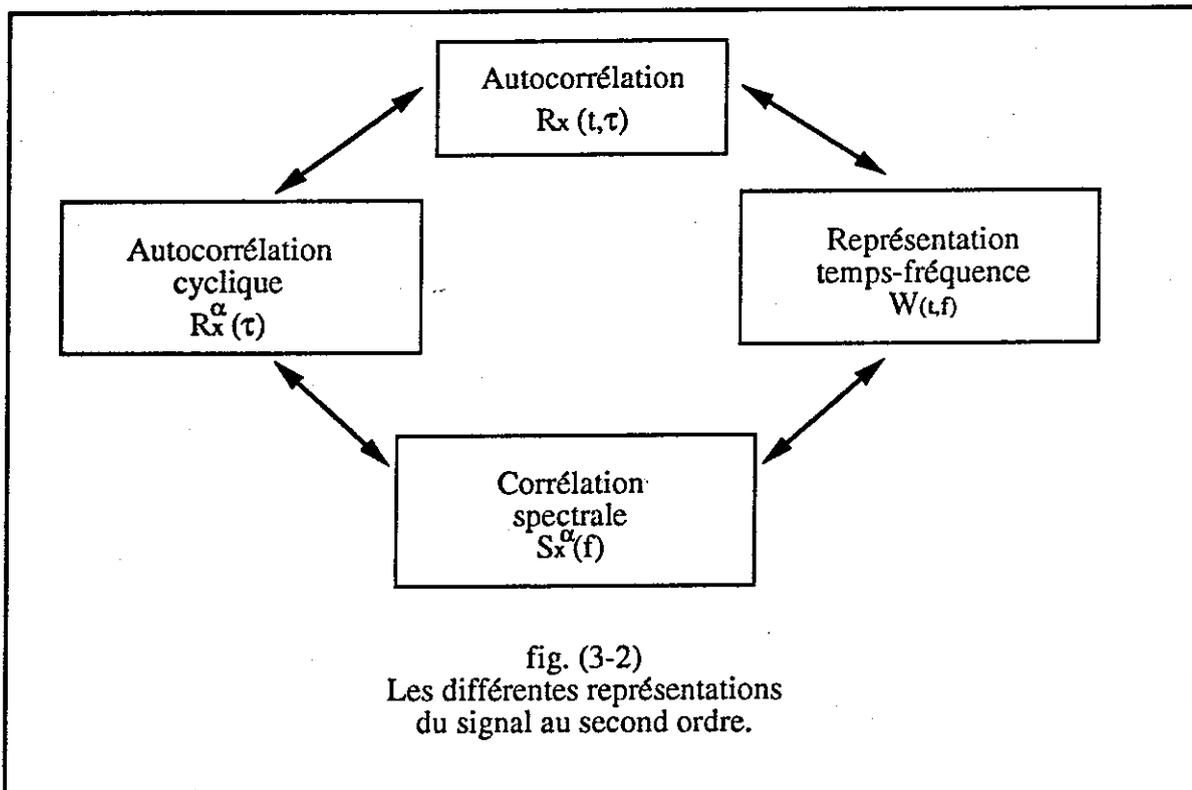
L'autocorrélation du signal étant fonction des deux variables  $t$ , le temps, et  $\tau$ , la distance temporelle entre les deux variables dont on étudie le lien, on peut s'intéresser à sa composition fréquentielle suivant chacune de ces deux variables. L'étude de la composition fréquentielle selon la variable  $\tau$  fait apparaître les périodicités contenues dans

le signal, tandis que l'étude de la composition fréquentielle selon la variable  $t$  met en évidence la présence de périodicités sous-jacentes, telles que celles introduites par des phénomènes de modulations.

### 3-3 Passage en fréquences spectrale et cyclique.

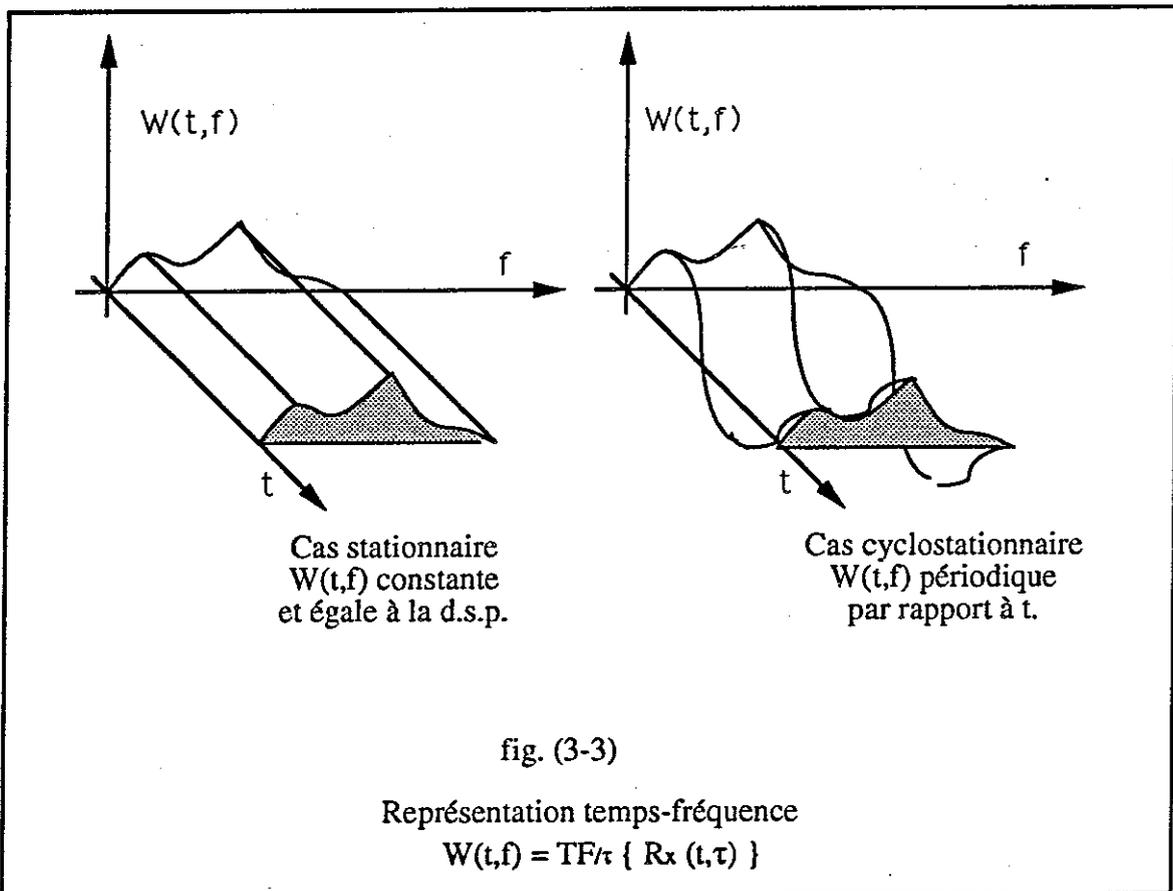
On vient de voir que l'autocorrélation d'un signal non-stationnaire dépend à la fois de  $t$  et de  $\tau$ . On peut donc étudier son contenu fréquentiel selon ces deux variables, ce qui revient à étudier les différentes représentations du signal au second ordre. La figure (3-2) représente ces différentes grandeurs et met en évidence les transformations qui les lient.

Le passage en fréquence à partir de la variable  $\tau$  donnera  $f$ , *fréquence spectrale*, et le passage en fréquence à partir de  $t$  donnera  $\alpha$ , *fréquence cyclique*. Une simple étude en fréquence spectrale donne la densité spectrale de puissance du signal, d'où l'appellation de fréquence spectrale. L'étude du signal en fréquence cyclique met en évidence ses propriétés de cyclostationnarité, d'où l'appellation de fréquence cyclique.



Passage en fréquence spectrale (fig. 3-3):  $W(t,f) = \text{TF}_{/\tau} \{ R_x(t,\tau) \}$

On calcule la transformée de Fourier par rapport à  $\tau$  seulement. On obtient une fonction de  $f$ , fréquence spectrale, et du temps. C'est une représentation temps-fréquence du signal. Si le signal  $x(t)$  contient des périodicités, des raies apparaissent selon  $f$ . Si ce signal est cyclostationnaire, cette fonction est périodique en  $t$ . Dans le cas stationnaire, elle est constante par rapport à  $t$  et égale à la densité spectrale de puissance :  $W(t,f) = \gamma(f)$ .



Etude en fréquence cyclique (fig. 3-4) :  $R_x^\alpha(\tau) = \text{TF}_t \{R_x(t, \tau)\}$

On calcule la transformée de Fourier par rapport à  $t$  seulement. La fonction qui en résulte  $R_x^\alpha(\tau)$  dépend de l'espacement  $\tau$  et de la fréquence cyclique  $\alpha$ . Les différentes fonctions de  $\tau$  obtenues pour les différentes valeurs de  $\alpha$  sont les valeurs de l'autocorrélation cyclique du signal  $x(t)$ . Celle-ci donne les différentes composantes de l'autocorrélation du signal qui peut s'écrire :

$$R_x(t, \tau) = \sum_{\alpha} R_x^\alpha(\tau) \cdot \exp(2\pi j \alpha t),$$

les  $\alpha$  étant les fréquences de cyclostationnarité du signal.

Les différentes valeurs de l'autocorrélation cyclique du signal pour ses fréquences de cyclostationnarité sont donc les coefficients de la décomposition en série de Fourier de son autocorrélation qui est, pour un signal cyclostationnaire, périodique ou presque périodique.

Si cette autocorrélation cyclique n'est non nulle que pour la valeur nulle de  $\alpha$ , l'autocorrélation ne dépend pas de  $t$  et le signal est stationnaire.

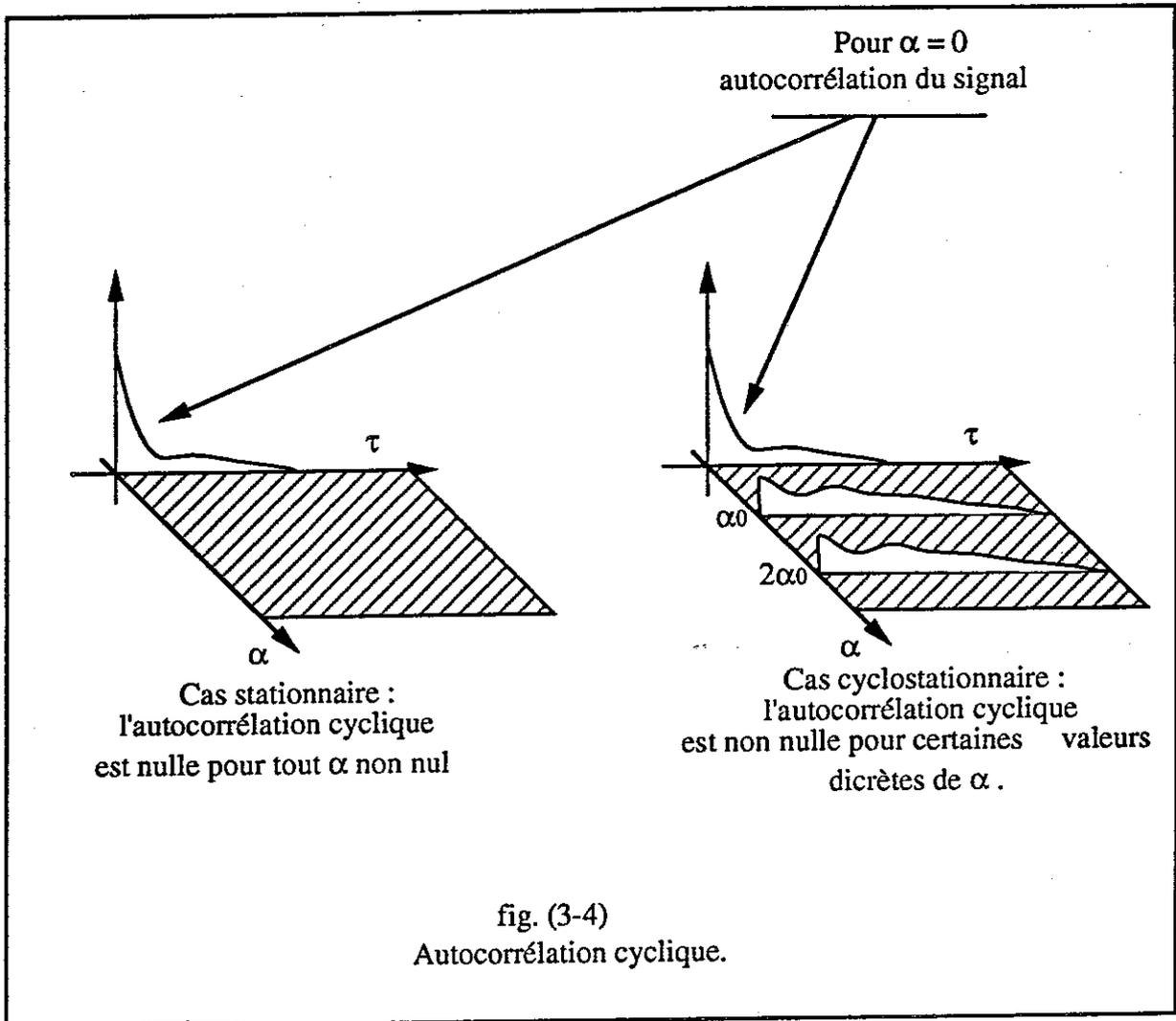
Si l'autocorrélation cyclique est non nulle pour des valeurs discrètes de  $\alpha$ , le signal est cyclostationnaire.

Si les valeurs  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  de la fréquence cyclique pour lesquelles elle est non nulle sont harmoniques d'un même fondamental, le signal est purement cyclostationnaire.

Si elle est non nulle quelle que soit la fréquence cyclique, le signal est non-stationnaire au sens large.

Remarque :

La valeur de l'autocorrélation cyclique obtenue pour la fréquence cyclique nulle est l'autocorrélation du signal, c'est-à-dire l'autocorrélation de sa composante stationnaire.



Etude du signal en fréquences spectrale et cyclique :

$$S_x^\alpha(f) = \text{TF}_{f, \tau} \{R_x(t, \tau)\}$$

On calcule la transformée de Fourier par rapport aux deux variables. On obtient alors la corrélation spectrale du signal, qui se comporte vis-à-vis de la fréquence cyclique  $\alpha$  de la même façon que l'autocorrélation cyclique.

Sa valeur pour la fréquence cyclique nulle est la densité spectrale de puissance du signal, et si elle est nulle pour toute autre valeur de la fréquence cyclique, alors le signal est stationnaire. Si elle est non nulle pour des valeurs discrètes de la fréquence cyclique, le signal est cyclostationnaire.

Les deux fonctions qui caractérisent le mieux les signaux cyclostationnaires sont donc l'autocorrélation cyclique et la corrélation spectrale. En effet, ce sont les deux

paramètres qui mettent en évidence la périodicité de l'autocorrélation caractérisant la cyclostationnarité du signal. Par ailleurs on a vu qu'un signal cyclostationnaire comprend des composantes spectrales corrélées. La corrélation spectrale est comme on va le voir dans le paragraphe qui suit, une mesure de ces liens entre composantes fréquentielles du signal, d'où son nom.

### 3-4 Interprétation en termes de fréquences statistiquement liées.

Soit  $x(t)$  un signal aléatoire. Il contient des composantes fréquentielles, discrètes s'il est périodique ou presque périodique, continues dans le cas inverse. Dans le produit croisé  $x(t).x^*(t-\tau)$  apparaîtra la somme de tous les produits croisés des différentes composantes fréquentielles du signal. Pour deux composantes  $a(t).e^{2\pi j f_a t}$  et  $b(t).e^{2\pi j f_b t}$  où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions aléatoires du temps centrées, dans le produit croisé  $x(t).x^*(t-\tau)$  apparaîtront les termes :

$$(1) E [a(t).a^*(t-\tau)] . e^{2\pi j f_a \tau} + E [b(t).b^*(t-\tau)] . e^{2\pi j f_b \tau}$$

$$(2) E [a(t).b^*(t-\tau)] . e^{(2\pi j (f_a - f_b)t + f_b \tau)} + E [b(t).a^*(t-\tau)] . e^{(2\pi j (f_b - f_a)t + f_a \tau)}$$

Si les fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  sont totalement décorréliées, les moyennes statistiques  $E [a(t).b^*(t-\tau)]$  et  $E [b(t).a^*(t-\tau)]$  sont nulles, et aucun des termes ne dépend de  $t$ . Le signal composé par la somme de ces deux fréquences est alors stationnaire et ne fait apparaître aucun pic dans la corrélation spectrale.

Si au contraire ces fonctions sont statistiquement liées, la moyenne statistique de leur produit croisé est non nulle et le terme (2) dépend de  $\tau$  et de  $t$ . Si les intercorrélations  $E [a(t).b^*(t-\tau)]$  et  $E [b(t).a^*(t-\tau)]$  sont constantes par rapport à  $t$ , alors il apparaît une raie en fréquence cyclique pour les valeurs  $\alpha_1 = f_b - f_a$  et  $\alpha_2 = f_a - f_b$  de la fréquence cyclique, ce qui veut dire que le signal est cyclostationnaire.

On voit donc que la corrélation spectrale est une mesure du degré de corrélation entre les différentes composantes fréquentielles du signal, d'où son nom. S'il apparaît des liens entre harmoniques pour des valeurs tout-à-fait quelconques de la fréquence cyclique, le signal est non-stationnaire dans le sens le plus large. Mais si ces liens entre harmoniques n'apparaissent que pour des fréquences cycliques discrètes, alors le signal est cyclostationnaire.

### 3-5 Ergodisme, cycloergodisme.

Dans le cas où l'on travaille sur un signal stationnaire, on le suppose ergodique, ce qui permet de substituer aux moyennes statistiques des moyennes temporelles. Ainsi l'autocorrélation d'un signal stationnaire et ergodique est-elle donnée par :

$$R_x(t, \tau) = R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt$$

Remarque :

A partir de maintenant on travaillera avec la définition asymétrique de l'autocorrélation, ce qui n'enlève rien à la généralité du problème et simplifie les expressions.

Cependant, on ne travaille jamais sur une durée de signal infinie, et si l'on veut estimer la densité spectrale de puissance du signal par transformée de Fourier de l'autocorrélation, on commet une erreur d'estimation qui peut être atténuée par moyennage sur plusieurs tranches de signal ou par lissage fréquentiel. Il est intéressant d'étudier, pour les signaux cyclostationnaires, comment se fait le passage des moyennes statistiques aux moyennes temporelles dans les quatre cas de figure énumérés précédemment : autocorrélation, représentation temps-fréquence, corrélation spectrale et autocorrélation cyclique. Nous étudierons ensuite dans le paragraphe suivant les problèmes que pose l'estimation de paramètres caractérisant la cyclostationnarité.

#### 3-5-1 Cas de l'autocorrélation :

Pour un signal stationnaire, l'autocorrélation ne dépend que de  $\tau$ , elle est constante par rapport à la variable  $t$  et pour chaque  $\tau$ , sa valeur peut être calculée par une intégration du produit croisé sur  $t$  sur l'une des réalisations plutôt que par moyennage sur l'ensemble des réalisations.

Pour un signal purement cyclostationnaire, l'autocorrélation est périodique en  $t$ . Ainsi, en le supposant cycloergodique, on peut remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne synchrone du produit croisé sur la variable  $t$ , c'est-à-dire en sommant sur une seule réalisation des tranches successives de signal de durée égale à la période de cyclostationnarité. Dans le cas cyclostationnaire l'autocorrélation sera donc égale à :

$$R_x(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(t+nT) \cdot x^*(t-\tau+nT)$$

où  $T$  est la période de cyclostationnarité du signal.

Remarque :

Si le signal est cyclostationnaire au sens large, et a donc plusieurs périodes de cyclostationnarité non-proportionnelles entre elles, son autocorrélation sera égale à :

$$R_x(t, \tau) = \sum_{\alpha} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(t+nT_{\alpha}) \cdot x^*(t-\tau+nT_{\alpha})$$

où les  $T_{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$  sont ces différentes périodes.

### 3-5-2 Cas de la représentation temps-fréquence :

En effectuant une transformée de Fourier en  $\tau$  de l'autocorrélation  $R_x(t, \tau) = \langle x(t) \cdot x^*(t-\tau) \rangle$  on obtient une représentation temps-fréquence qui sera, de même que l'autocorrélation, périodique en  $t$  si le signal est cyclostationnaire. Pour la calculer par moyennage temporel, il faudra donc de la même façon effectuer une moyenne simple pour le signal stationnaire, une moyenne synchrone pour le signal cyclostationnaire, soit :

$$\bullet W(t, f) = \gamma(f) = TF_{/\tau} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) dt \right\}$$

pour un signal stationnaire,

$$\bullet W(t, f) = TF_{/\tau} \left\{ \sum_{\alpha} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_n x(t + \frac{\tau}{2} + nT_{\alpha}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2} + nT_{\alpha}) \right\}$$

pour un signal cyclostationnaire.

Dans le cas pratique où la réalisation utilisée est de durée finie, on ne peut qu'estimer la composition fréquentielle du signal. Il faut, dans le cas stationnaire, soit lisser le spectre, soit moyenner sur plusieurs tranches pour améliorer l'estimation. Dans le cas cyclostationnaire, cette remarque est toujours vraie, sauf que pour  $t \neq 0$ , on n'a pas un spectre de puissance mais une représentation fréquentielle qui a une phase, ce qui oblige à prendre des précautions dans le cas où l'on moyenne sur plusieurs tranches, comme on le verra dans un chapitre ultérieur.

### 3-5-3 Cas de la corrélation spectrale et de l'autocorrélation cyclique :

Le moyennage synchrone, qu'on l'effectue sur le signal même pour isoler certaines de ses périodicités, ou sur son produit croisé, pour estimer son autocorrélation, ne peut être effectué que si l'on connaît à priori la fréquence du signal, dans le premier cas, celle de cyclostationnarité dans le second. L'annexe 3C donne plus de détails sur le moyennage synchrone.

D'autre part on travaille en général sur des signaux numérisés et la pratique du moyennage synchrone suppose que l'acquisition du signal a été calée sur la fréquence à étudier. D'où l'utilité d'étudier par transformée de Fourier la composition fréquentielle de l'autocorrélation selon la variable  $t$ , ce qui ne suppose aucune synchronisation préalable de l'acquisition et permet de déterminer les fréquences de cyclostationnarité du signal.

La transformée de Fourier selon  $t$  de l'autocorrélation donnera l'autocorrélation cyclique, et celle de la représentation temps-fréquence donnera la corrélation spectrale. Dans ce dernier cas, la transformation de Fourier étant une opération linéaire, comme le moyennage synchrone, on aura toujours besoin, pour estimer les fréquences spectrales, de moyenner sur plusieurs tranches de signal ou de faire un lissage fréquentiel.

### 3-5-4 Normalisation. Cohérence spectrale.

Dans le cas de signaux complexes où apparaissent des séries d'harmoniques d'amplitudes différentes, il est intéressant d'effectuer une normalisation de façon à pouvoir détecter des liens apparaissant entre des harmoniques de très faible amplitude, car on verra que c'est sur des harmoniques de très faible amplitude qu'est localisée l'information concernant l'apparition du défaut. C'est pourquoi pour l'étude des signaux réels on se concentrera plus particulièrement sur la cohérence spectrale.

La valeur de la cohérence spectrale pour le couple  $(f, \alpha)$  est donnée par :

$$C_x^\alpha(f) = \frac{S_x^\alpha(f)}{\sqrt{\left|S_x(f+\frac{\alpha}{2})\right| \cdot \left|S_x(f-\frac{\alpha}{2})\right|}} = \frac{E[X(f+\frac{\alpha}{2}) \cdot X^*(f-\frac{\alpha}{2})]}{\sqrt{E\left[\left|X(f+\frac{\alpha}{2})\right|^2\right] \cdot E\left[\left|X(f-\frac{\alpha}{2})\right|^2\right]}}$$

Ainsi, si deux composantes fréquentielles  $X(f_1)$  et  $X(f_2)$  de faible énergie relativement au niveau global du spectre sont fortement corrélées, ce lien apparaîtra nettement dans la cohérence spectrale alors qu'il aurait été masqué dans la corrélation spectrale.

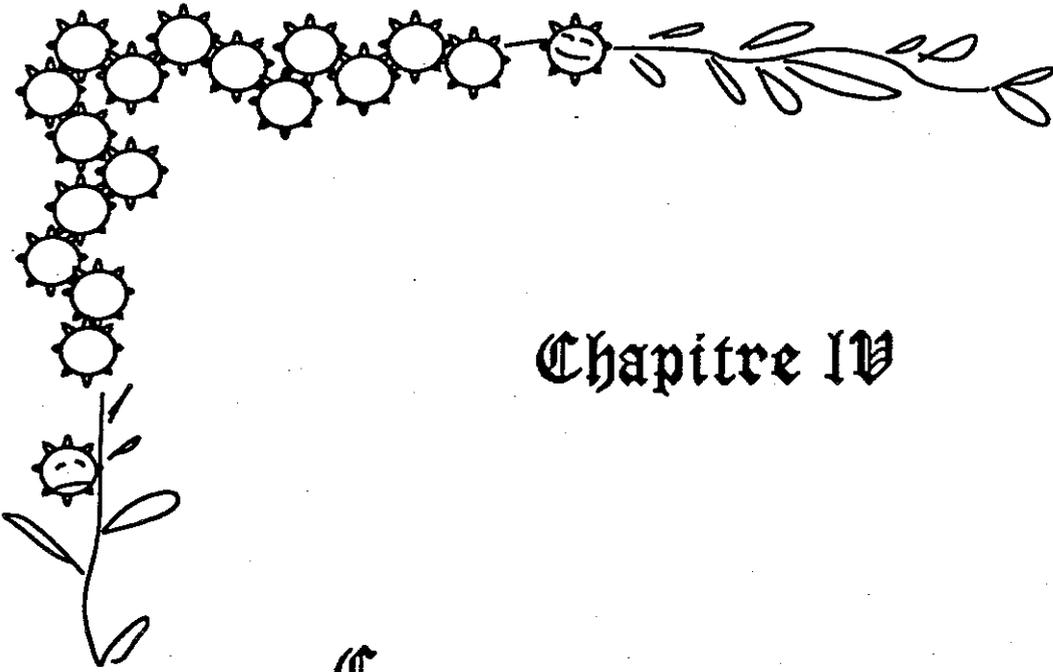
#### Remarque :

Il faut s'assurer que le dénominateur n'est pas nul, ce qui se traduit lors du calcul de la cohérence spectrale par le choix d'un seuil d'énergie pour les composantes du spectre, au dessous duquel on ne calcule pas la cohérence spectrale et on lui donne arbitrairement la valeur nulle ou une valeur très faible.

L'utilisation de ce seuil a pour autre utilité de supprimer l'apparition de pics pour les valeurs de la fréquence spectrale où en réalité il n'y a pas d'information. L'apparition de ces pics n'est due qu'à la très faible énergie des composantes étudiées, qui se traduit par la faiblesse du dénominateur, et ne présentent aucun intérêt : il faut donc les supprimer puisqu'elles n'apportent aucune information intéressante et parasitent la représentation de la cohérence spectrale.

## CONCLUSION.

L'analyse des vibrations de machines tournantes a été principalement développée dans le cas stationnaire. L'introduction de méthodes d'étude adaptées aux signaux cyclostationnaires permet de prendre en compte certaines caractéristiques des vibrations d'engrenages qui n'avaient pas précédemment retenu l'attention. Ces nouvelles méthodes étendent l'éventail des traitements adaptés à l'analyse vibratoire.



## Chapitre IV

Ce chapitre concerne l'estimation de la corrélation spectrale d'un signal cyclostationnaire. La corrélation spectrale est envisagée comme un interspectre entre deux versions translatées en fréquence du signal, ce qui permet de se ramener aux méthodes classiques d'estimation d'un interspectre. On donne les résultats obtenus sur des signaux cyclostationnaires synthétiques pour l'une de ces méthodes d'estimation, la méthode du périodogramme lissé.

## CHAPITRE IV

### 4 - OUTIL DE CALCUL DE LA CORRÉLATION SPECTRALE

La corrélation spectrale étant une mesure du degré de corrélation des différentes composantes spectrales d'un signal, ou encore un interspectre entre deux versions du signal décalées en fréquence, nous pouvons nous rapporter aux méthodes classiques d'analyse interspectrale pour étudier les différentes possibilités d'estimation : méthodes d'estimation par périodogramme moyenné ou périodogramme lissé.

Dans ce chapitre, un exemple simple de signal cyclostationnaire nous permet d'exposer les différentes formes (symétrique ou asymétrique) que peut prendre la corrélation spectrale et de débattre des problèmes de résolution fréquentielle. Puis nous développons un outil d'estimation de la corrélation spectrale et de la cohérence spectrale que nous testons sur des signaux synthétiques.

#### 4-1 La corrélation spectrale vue comme l'intercorrélation entre les amplitudes complexes modulant deux fréquences.

Soit  $x(t)$  un signal aléatoire, on a vu au chapitre 3 que la corrélation spectrale de ce signal est une mesure du degré de corrélation entre ses différentes composantes fréquentielles. Les deux formes possibles de l'autocorrélation, symétrique ou asymétrique, donnent deux formes possibles de la corrélation spectrale. Nous allons mettre en évidence sur un exemple simple de signal cyclostationnaire quelles formes peut prendre la corrélation spectrale dans ces deux cas de figure et présenter les résultats obtenus sur des simulations.

Considérons un signal  $x(t)$  comportant deux composantes fréquentielles aux fréquences  $f_a$  et  $f_b$  d'amplitudes complexes respectives  $a(t)$  et  $b(t)$ , soit  $x(t) = a(t).e^{2\pi j f_a t} + b(t).e^{2\pi j f_b t}$  où les  $a(t)$  et  $b(t)$  sont deux signaux passe-bas, aléatoires et à valeurs complexes supposés stationnaires au second ordre et conjointement stationnaires. Examinons la forme de la corrélation spectrale de ce signal.

#### 4-1-1 Forme asymétrique.

L'autocorrélation du signal  $x(t)$  est :  $R_x(t, \tau) = E[x(t).x^*(t-\tau)]$ .

$$R_x(t, \tau) = \Gamma_a(\tau).e^{2\pi j f_a \tau} + \Gamma_b(\tau).e^{2\pi j f_b \tau} \\ + \Gamma_{ab}(\tau).e^{2\pi j (f_a - f_b)t}.e^{2\pi j f_b \tau} + \Gamma_{ba}(\tau).e^{2\pi j (f_b - f_a)t}.e^{2\pi j f_a \tau}$$

où les  $\Gamma_{ab}(\tau) = E[a(t).b^*(t)]$ , etc... sont des intercorrélations.

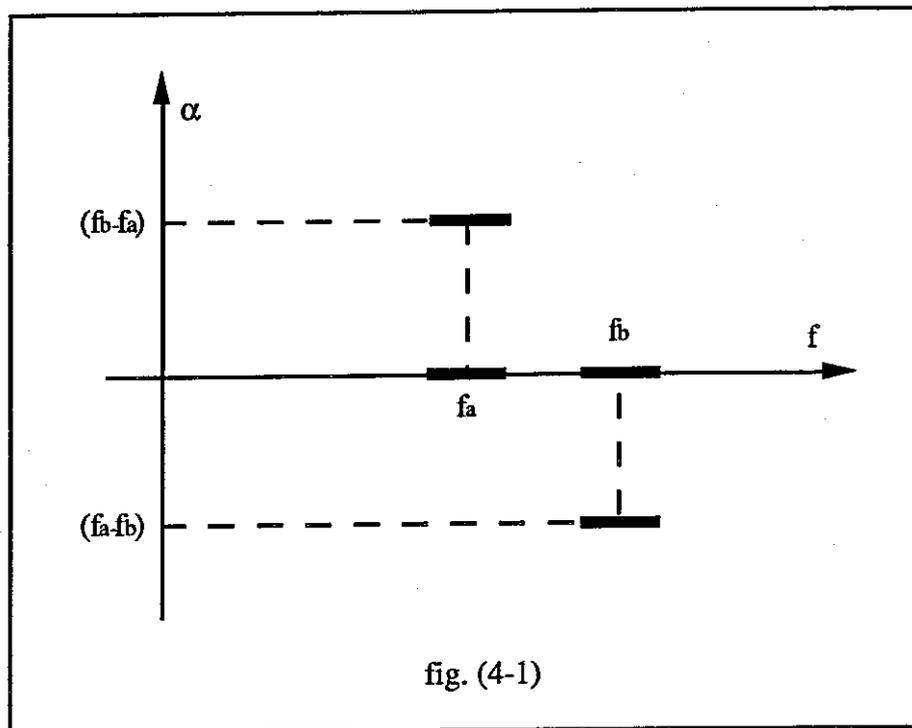
La corrélation spectrale, qui est la transformée de Fourier de l'autocorrélation selon les deux variables  $t$  et  $\tau$  est donnée par :

$$S_x^\alpha(f) = \gamma_a(f-f_a).\delta(\alpha) + \gamma_b(f-f_b).\delta(\alpha) + \gamma_{ab}(f-f_b).\delta(\alpha-(f_a-f_b)) + \gamma_{ba}(f-f_a).\delta(\alpha-(f_b-f_a))$$

où  $\delta(\cdot)$  symbolise une impulsion de Dirac, et les  $\gamma_{ab}(f)$  sont les densités interspectrales de puissance.

Si les signaux  $a(t)$  et  $b(t)$  sont corrélés, cette expression est non nulle pour des valeurs discrètes de  $\alpha$ , ce qui veut dire que le signal est cyclostationnaire, et sa fréquence de cyclostationnarité est égale à  $\alpha = (f_a - f_b)$ . On remarquera que si les signaux  $a(t)$  et  $b(t)$  n'étaient pas conjointement stationnaires, leur intercorrélation dépendrait de  $t$  et la corrélation spectrale du signal ne serait alors pas forcément discrète en  $\alpha$ . Si  $a(t)$  et  $b(t)$  sont totalement décorrelés, la corrélation spectrale du signal n'est non-nulle que pour la valeur nulle de la fréquence cyclique et le signal est stationnaire.

La figure (4-1) représente schématiquement la corrélation spectrale de ce signal.



$A_1 = \gamma_a(f-f_a)$  est la d.s.p. de  $a(t)$ , amplitude complexe de la composante à la fréquence  $f_a$ .  $A_2 = \gamma_b(f-f_b)$  est la d.s.p. de  $b(t)$ , amplitude complexe de la composante à la fréquence  $f_b$ . Le terme  $B_1 = \gamma_{ab}(f-f_b)$ , qui apparaît pour la fréquence spectrale  $f_a$  et la fréquence cyclique  $(f_b-f_a)$  caractérise la relation statistique entre  $f_a$  et  $f_b+\alpha = f_a-(f_b-f_a) = f_b$ .

Ainsi, la forme asymétrique de la corrélation spectrale se lit de la façon suivante : Sur une ligne parallèle à l'axe des fréquences cycliques et coupant l'axe des fréquences spectrales à la fréquence  $f$ , apparaissent les liens statistiques entre la composante du signal à cette fréquence  $f$  et chacune des autres composantes fréquentielles. Au point de coordonnées  $f$  et  $\alpha$  apparaît l'intensité du lien statistique entre les composantes centrées sur les fréquences  $f$  et  $f+\alpha$ .

#### 4-1-2 Forme symétrique.

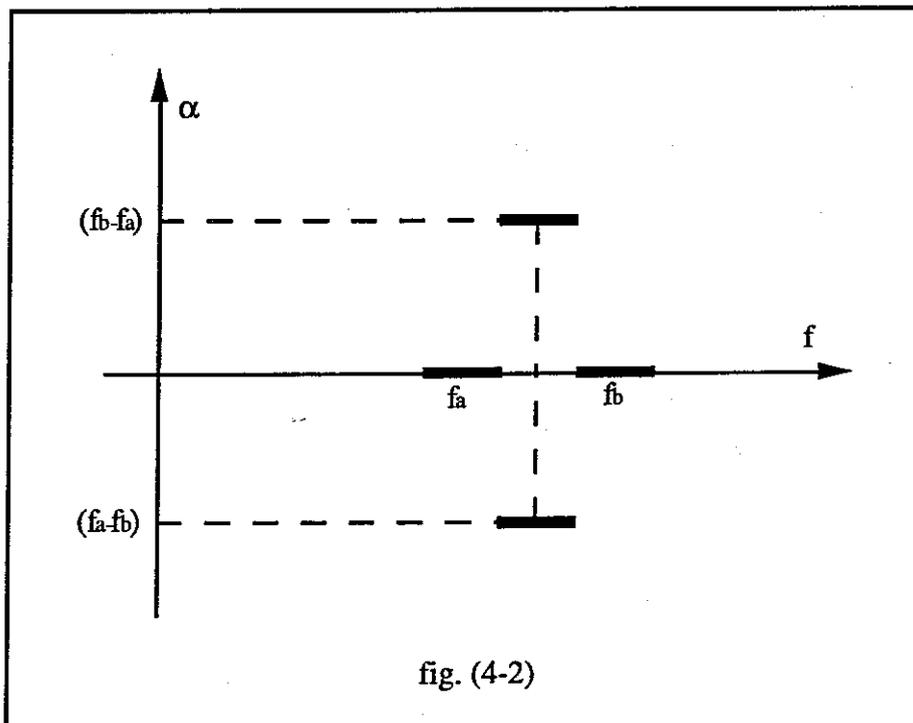
L'autocorrélation du signal  $x(t)$  est donnée par :  $R_x(t, \tau) = E[x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2})]$ .

$$R_x(t, \tau) = \Gamma_a(\tau) \cdot e^{2\pi j f_a \tau} + \Gamma_b(\tau) \cdot e^{2\pi j f_b \tau} \\ + \Gamma_{ab}(\tau) \cdot e^{2\pi j (f_a - f_b) t} \cdot e^{2\pi j (\frac{f_a + f_b}{2}) \tau} + \Gamma_{ba}(\tau) \cdot e^{2\pi j (f_b - f_a) t} \cdot e^{2\pi j (\frac{f_a + f_b}{2}) \tau}$$

La corrélation spectrale est alors donnée par :

$$S_x^\alpha(f) = \gamma_a(f - f_a) \cdot \delta(\alpha) + \gamma_b(f - f_b) \cdot \delta(\alpha) \\ + \gamma_{ab}(f - (\frac{f_a + f_b}{2})) \cdot \delta(\alpha - (f_a - f_b)) + \gamma_{ba}(f - (\frac{f_a + f_b}{2})) \cdot \delta(\alpha - (f_b - f_a))$$

La figure (4-2) représente schématiquement la corrélation spectrale dans ce second cas.



$A_1 = \gamma_a(f - f_a)$  est la d.s.p. de  $a(t)$ , amplitude complexe de la composante à la fréquence  $f_a$ .  $A_2 = \gamma_b(f - f_b)$  est la d.s.p. de  $b(t)$ , amplitude complexe de la composante à la fréquence  $f_b$ . Le terme  $B_1 = \gamma_{ab}(f - (\frac{f_a + f_b}{2}))$ , qui apparaît pour la fréquence spectrale

$f = \left(\frac{f_a+f_b}{2}\right)$  et la fréquence cyclique  $\alpha = (f_b-f_a)$  caractérise la relation statistique entre les composantes du signal aux fréquences  $f-\frac{\alpha}{2} = f_a$  et  $f+\frac{\alpha}{2} = f_b$ .

Ainsi, la forme symétrique de la corrélation spectrale se lit de la façon suivante : Sur une ligne parallèle à l'axe des fréquences cycliques et coupant l'axe des fréquences spectrales à la fréquence  $f$ , apparaissent les liens statistiques entre les composante du signal aux fréquences symétriques par rapport à  $f$ . Au point de coordonnées  $f$  et  $\alpha$  apparaît l'intensité du lien statistique entre les composantes centrées sur les fréquences  $f-\frac{\alpha}{2}$  et  $f+\frac{\alpha}{2}$ .

Nous avons choisi pour cette étude la forme symétrique de la corrélation spectrale. Les deux formes apportent la même information sur le signal, mais la forme symétrique permet plus facilement de limiter la représentation de la corrélation spectrale aux fréquences spectrale et cyclique positives en tenant compte des symétries que présente cette fonction pour un signal à valeurs réelles.

#### **4-2 Résolution de l'analyse. Relation avec la modélisation du signal**

Nous avons vu que la corrélation spectrale (en  $f,\alpha$ ) décrit les relations statistiques entre les composantes du signal "centrées" sur les fréquences  $f+\frac{\alpha}{2}$  et  $f-\frac{\alpha}{2}$ . La résolution de l'analyse précise cette notion de centrage. Elle doit être fixée en fonction des propriétés que l'on veut faire ressortir compte tenu du modèle du signal analysé.

La détermination du lien statistique entre deux composantes s'effectue par moyennage, soit sur plusieurs tranches de signal d'une durée  $D$  inférieure à la durée totale du signal, soit sur plusieurs canaux de fréquence. En fixant la résolution fréquentielle  $\Delta f \cong \frac{1}{D}$  en fréquence spectrale nous fixons la largeur de bande de la modulation de chaque composante fréquentielle. La valeur de cette largeur de bande  $\Delta f$  (ou de la durée  $D$ ) caractérise le pouvoir de résolution de l'analyseur.

Le choix de  $\Delta f$  est important car il va conditionner le type de propriété du signal mis en valeur sur la corrélation spectrale. Il doit être fait en s'appuyant sur le modèle du signal. Ainsi, dans l'étude des vibrations de l'engrenage, nous serons amenés à considérer deux types de résolutions dénommées résolution faible et résolution forte.

Dans la résolution faible la bande d'analyse  $\Delta f$  est supérieure à la fréquence de rotation. La corrélation spectrale décrira alors les relations statistiques entre les modulations (par les fréquences de rotation) des différentes raies d'engrènement. Dans la résolution forte la bande d'analyse  $\Delta f$  est inférieure à la fréquence de rotation. La corrélation spectrale décrit alors les relations statistiques entre les bandes latérales, dues aux phénomènes de rotation, de chaque raie d'engrènement.

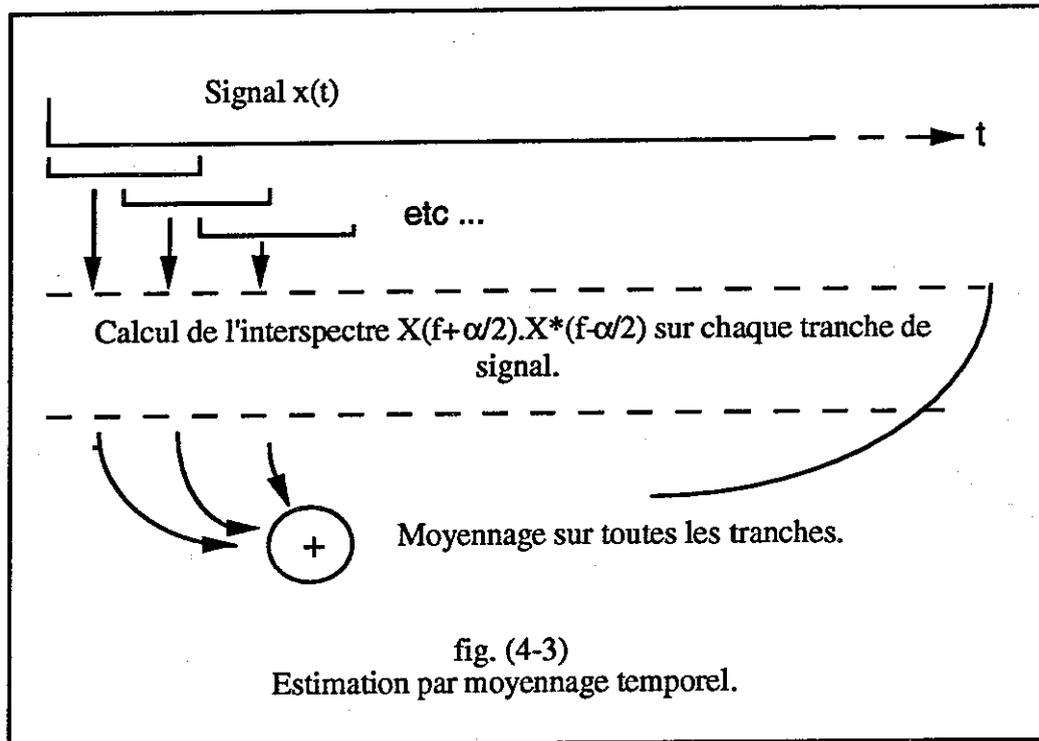
### 4-3 Les méthodes d'estimation de la corrélation spectrale

Nous avons vu que l'estimation de la corrélation spectrale se ramène à l'estimation des densités spectrales de puissance  $\gamma_a(f)$  et  $\gamma_b(f)$  et des densités interspectrales de puissance  $\gamma_{ab}(f)$ . Nous allons donc retrouver, dans l'estimation de la corrélation spectrale, les deux familles de méthodes connues en analyse interspectrale : le périodogramme moyenné et le périodogramme lissé.

#### 4-3-1 Estimation par périodogramme moyenné : moyennage temporel.

Comme dans le cas de l'analyse spectrale ou interspectrale, la méthode du périodogramme moyenné repose sur un moyennage temporel.

La figure (4-3) donne un schéma de l'estimation par moyennage temporel. Celle-ci consiste à découper le signal en tranches pouvant comporter entre elles un certain recouvrement et à effectuer sur chaque tranche de signal une transformée de Fourier à court terme. La corrélation entre deux composantes fréquentielles (deux canaux de fréquence) est alors donnée par la moyenne sur toutes les tranches de la valeur du produit entre les amplitudes complexes de ces deux canaux de fréquence.



L'estimation par moyennage temporel pose un problème de correction de phase. En effet, on effectue une moyenne sur les valeurs que prend le terme  $[X_T(f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(f - \frac{\alpha}{2})]_n$  sur chaque tranche  $n$  de signal.  $T$  est la longueur des tranches,  $X_T(f)$  symbolise la transformée de Fourier à court terme du signal  $x(t)$  sur une tranche de durée  $T$  à la fréquence  $f$ . Or, les tranches de signal sont décalées les unes par rapport aux autres d'une durée proportionnelle au recouvrement choisi.

Appelons  $T_r$  le recouvrement, et  $n$  le numéro d'une tranche. Entre la première tranche de signal étudiée et la tranche  $n$  on a effectué une translation de durée  $n \cdot T_r$ . Or, une translation en temps induit un déphasage en fréquence, ce déphasage étant proportionnel à la fréquence concernée.

Le déphasage induit par un retard  $n \cdot T_r$  sur une composante à la fréquence  $f$  est égal à  $e^{2\pi j f n \cdot T_r}$ , ce qui veut dire que la valeur du produit croisé calculée sur la  $n$ ème tranche de signal sera déphasée par rapport à la première tranche de :  $(e^{2\pi j (f + \frac{\alpha}{2}) n \cdot T_r}) (e^{2\pi j (f - \frac{\alpha}{2}) n \cdot T_r})^*$ , soit  $e^{2\pi j \alpha n \cdot T_r}$ . Donc, la moyenne sur les différentes tranches est donnée par

$$\sum_{n=0}^N [X_T(f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(f - \frac{\alpha}{2})]_n = \sum_{n=0}^N X_T(f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(f - \frac{\alpha}{2}) \cdot e^{2\pi j \alpha n \cdot T_r}$$

$$= X_T(f+\frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(f-\frac{\alpha}{2}) \cdot \sum_{n=0}^N e^{2\pi j \alpha n \cdot T_r}$$

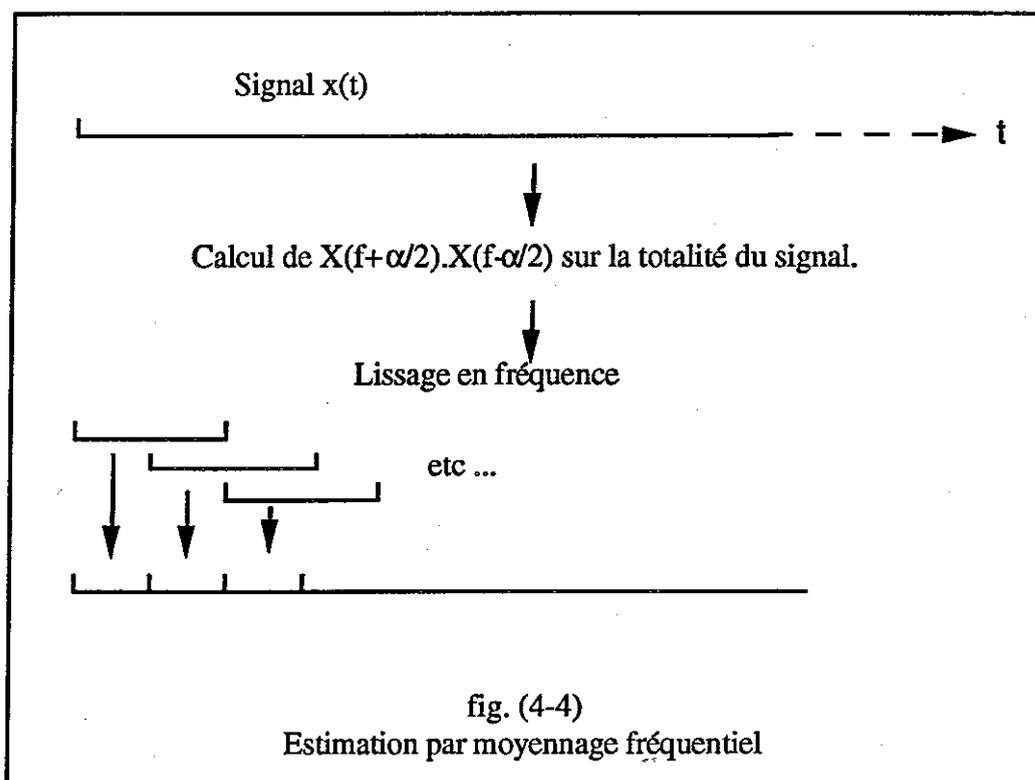
ce qui n'a aucune raison de converger vers la valeur qu'on veut estimer, à moins que la fréquence cyclique  $\alpha$  pour laquelle on estime la corrélation spectrale soit inversement proportionnelle à la durée choisie pour le recouvrement.

Il faut donc, lorsqu'on estime la corrélation spectrale par moyennage temporel, effectuer une correction de phase sur les produits croisés avant d'en prendre la moyenne. Cette correction est possible : en effet, on travaille sur des signaux numérisés et la durée du recouvrement correspond à un nombre d'échantillons qu'on connaît, et donc à un déphasage en fréquence qu'on sait calculer pour chaque tranche.

Cependant un autre problème se pose. En effet lorsqu'on calcule la TFD du signal, on détermine quelle est son énergie dans des canaux contigus de fréquences dont la position et la largeur de bande sont donnés par la fréquence d'échantillonnage et la durée de signal choisies et n'ont aucun rapport avec la composition fréquentielle "physique" du signal. Or les signaux vibratoires d'engrenage, étant périodiques, ont un spectre de raies, et ces raies ne tombent pas forcément exactement au centre de l'un des canaux sur lesquels on travaille, ce qui veut dire que la correction apportée à chacune des composantes fréquentielles "physique" du signal sera seulement approximativement proportionnelle à sa fréquence et un peu inexacte. C'est pour cette raison et pour des raisons de rapidité de calcul que nous avons choisi d'estimer la corrélation spectrale par moyennage fréquentiel.

#### 4-3-2 Estimation par périodogramme lissé : moyennage fréquentiel.

La méthode du périodogramme lissé repose sur un moyennage fréquentiel. La figure (4-4) donne un schéma de l'estimation par moyennage fréquentiel. Celle-ci consiste à calculer un interspectre lissé entre deux versions décalées en fréquence du signal original. Le décalage en fréquence de  $\pm \frac{\alpha}{2}$  est effectué en temps en multipliant le signal par une exponentielle complexe. Puis on calcule la TF de chacune des deux versions sur toute la durée du signal et un interspectre lissé de ces deux signaux.



Cette méthode permet donc d'éviter le problème de correction de phase que soulève l'estimation par moyennage temporel. Par ailleurs il est plus rapide de calculer de longues TFD et d'effectuer un lissage que de calculer des TFD sur toutes les tranches. Le seul inconvénient est que l'on doit stocker des tableaux beaucoup plus importants durant les calculs, puisqu'ils ont pour dimensions le nombre d'échantillons du signal et le nombre de valeurs de la fréquence cyclique pour lesquelles on effectue le calcul, tandis que les tableaux stockés pour l'estimation par moyennage temporel ont seulement pour première dimension le nombre d'échantillons d'une tranche.

#### 4-3-3 Propriétés de l'estimateur (cf. [4-2]).

Par analogie avec l'analyse spectrale et interspectrale on obtient les résultats suivants pour le biais et la variance de l'estimateur choisi, qui peut s'écrire :

$\hat{S}_x^\alpha(f) = \int X_T(u+\frac{\alpha}{2}).X_T^*(u-\frac{\alpha}{2}).F(u-f).du$ , où  $F(f)$  est la fonction d'apodisation réalisant le lissage ( $T$  est la durée sur laquelle on étudie le signal).

### 4-3-3-1 Biais

La moyenne de l'estimateur est :

$$E [\hat{S}_x^\alpha(f)] = \int F(f-u) \cdot S_x^\alpha(u) \cdot du$$

Cet estimateur est biaisé : sa moyenne n'est pas la valeur de  $S_x^\alpha(f)$  mais une valeur lissée sur la largeur  $\Delta f$  de la fonction d'apodisation  $F(f)$ . Selon la valeur de  $\Delta f$  la signification de  $S_x^\alpha(f)$  pourra être différente comme nous l'avons montré en 4-2.

L'estimateur défini précédemment s'écrit, en appelant  $T$  la durée totale du signal :

$$\hat{S}_x^\alpha(f) = \int X_T(u + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(u - \frac{\alpha}{2}) \cdot F(u-f) \cdot du.$$

$\Delta f$  est la largeur de bande équivalente de  $F(f)$  :

$$\Delta f = \frac{(\int F(f) \cdot df)^2}{\int |F(f)|^2 \cdot df}$$

Remarque :

Nous donnons la formule en fréquence continue, en réalité nous travaillons en fréquences discrètes avec un pas en fréquence très petit.

### 4-3-3-2 Variance (cf. [4-2])

En écrivant le nombre complexe  $S_x^\alpha(f)$  en module et phase nous obtenons, par extension des résultats connus en analyse spectrale et interspectrale :

$$S_x^\alpha(f) = |S_x^\alpha(f)| \cdot e^{j \Phi_{S_x^\alpha}(f)}$$

$$\text{Var} [\hat{S}_x^\alpha(f)] = |S_x^\alpha(f)|^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{|C_x^\alpha(f)|^2} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta f \cdot T}$$

$$\text{Var} [\hat{\Phi}_{S_x^\alpha}(f)] = \frac{1}{2 \cdot \Delta f \cdot T} \cdot \left( \frac{1}{|c|^2} - 1 \right)$$

$$\text{Covar} [|S_x^\alpha(f)|, \Phi_{S_x^\alpha}(f)] = 0$$

Dans ces relations :

$T$  = Durée totale du signal traité.

$\Delta f$  = Largeur de bande de la fonction d'apodisation  $F(f)$ .

Il apparaît dans ces formules un paramètre important déjà introduit au paragraphe 3-5-4 et qui est la cohérence spectrale :

$$C_x^\alpha(f) = \frac{\gamma_{ab}(f)}{(\gamma_a(f) \cdot \gamma_b(f))^{1/2}}$$

Cette relation montre que la cohérence spectrale est la cohérence classique des modulations  $a(t)$  et  $b(t)$ . La cohérence spectrale jouit donc de toutes les propriétés des cohérence classiques.

Pour  $\alpha = 0$  la corrélation spectrale est la densité spectrale de puissance. Alors :

$$C_x^\alpha(f) = 1 \text{ et } \text{Var} [\hat{S}_x^\alpha(f)] = \left| S_x^\alpha(f) \right|^2 \cdot \frac{2}{T \cdot \Delta f}$$

$$\text{Var} [\Phi_{S_x^\alpha(f)}] = 0$$

qui sont les propriétés d'un estimateur de densité spectrale de puissance.

En conclusion, l'estimateur de la corrélation spectrale présente les propriétés des estimateurs spectraux habituels. En particulier on retrouve l'antagonisme biais/variance. En effet, pour diminuer le biais on serait tenté de diminuer  $\Delta f$ , ce qui fait augmenter la variance. Nous avons vu qu'ici le choix de  $\Delta f$  doit être fait à la lumière du modèle du signal traité et de l'objectif poursuivi.

#### 4-4 Outil de calcul : test sur des signaux synthétiques

##### 4-4-1 Signaux utilisés.

Trois cas de figure sont envisagés. Le signal est chaque fois composé de deux fréquences porteuses  $f_a$  et  $f_b$  modulées chacune par un bruit aléatoire filtré (et donc de largeur de bande limitée). Le signal est donc de la forme :

$$x(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_a t) + b(t) \cdot \cos(2\pi f_b t),$$

où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions aléatoires du temps générées par filtrage passe-bas d'un bruit blanc gaussien.

Les trois possibilités testées sont :

- (1)  $a(t)$  et  $b(t)$  sont totalement décorrélés.  $E[a(t).b(t)]=0$ .
- (2)  $b(t) = a(t)$ .
- (3)  $a(t)$  et  $b(t)$  sont partiellement corrélés : en l'occurrence  $b(t) = \frac{1}{2}[a(t) + c(t)]$ , où  $a(t)$  et  $c(t)$  sont totalement décorrélés.

#### 4-4-2 Résultats obtenus : corrélation et cohérence spectrales.

Les signaux synthétiques comportent chacun 2048 échantillons. La corrélation spectrale et la cohérence spectrale sont calculées sur toute la durée du signal par moyennage fréquentiel. Le lissage est effectué sur 50 échantillons en fréquence avec une fenêtre de Hamming. (Ce qui correspond à peu près à la largeur de bande des bruits filtrés).

La figure (4-5) représente dans les trois cas étudiés la corrélation spectrale tracée en courbes de niveau et les valeurs qu'elle prend pour la fréquence cyclique nulle et la fréquence de cyclostationnarité  $\alpha = (f_a - f_b)$ . La figure (4-6) représente les mêmes courbes mais pour la cohérence spectrale. La cohérence spectrale est mise artificiellement à zéro pour toutes les fréquences dont l'énergie est inférieure à un certain seuil. Etant données les propriétés de symétrie que présente la corrélation spectrale lorsqu'on la calcule sur un signal réel, (cf. annexe 4A), nous ne les représentons que pour les valeurs positives des fréquences spectrale et cyclique.

##### 1er cas : $a(t)$ et $b(t)$ sont décorrélés (fig. (4-5)(a) et (4-6)(a)):

La corrélation spectrale présente un interspectre de faible énergie pour la fréquence  $\alpha = (f_a - f_b)$  et après normalisation la cohérence spectrale présente pour cette même fréquence cyclique un pic d'amplitude au maximum égale à 0.3, ce qui est négligeable.

##### 2ème cas : $b(t) = a(t)$ (fig. (4-5)(b) et (4-6)(b)):

Dans ce cas pour la fréquence cyclique  $\alpha = (f_a - f_b)$  on obtient sur la corrélation spectrale la densité spectrale de puissance de  $a(t)$  et sur la cohérence spectrale l'unité. (La d.s.p. normalisée par elle-même).

##### 3ème cas : $a(t)$ et $b(t)$ sont partiellement corrélés (fig. (4-5)(c) et (4-6)(c)):

La cohérence observée pour la fréquence cyclique  $\alpha = (f_a - f_b)$  est alors non-négligeable mais inférieure à un.

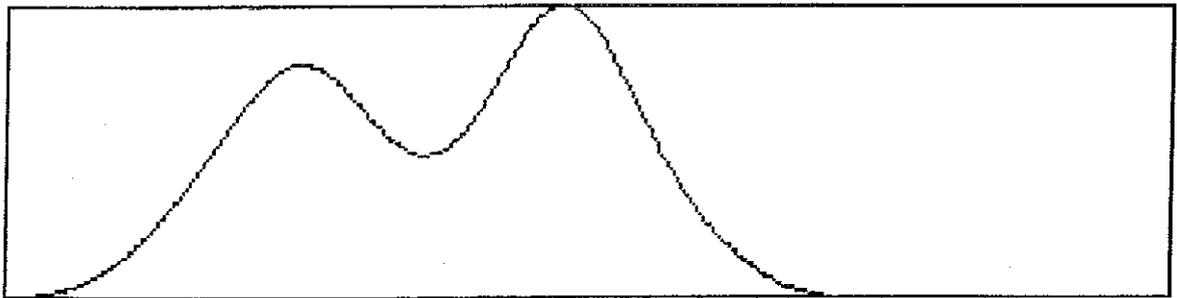
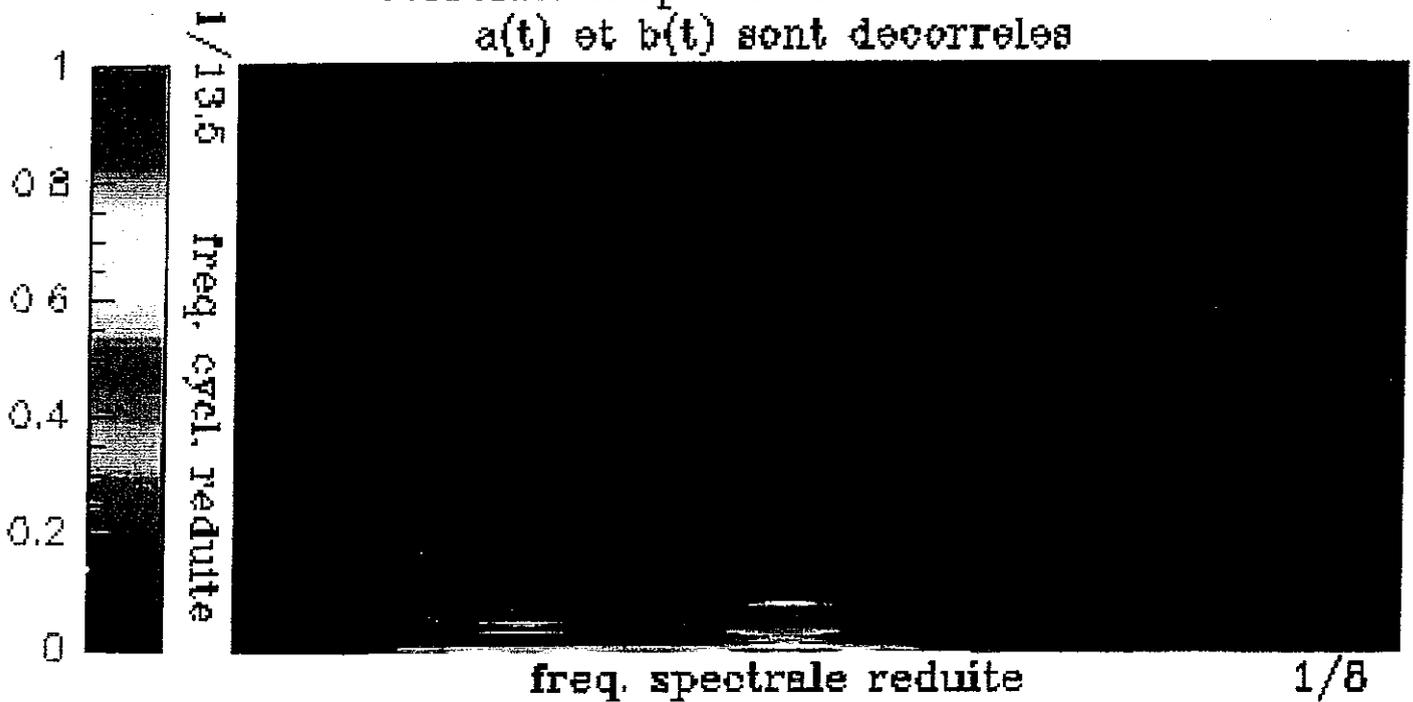
## CONCLUSION

Nous avons donc construit, caractérisé et testé un outil de calcul de la corrélation spectrale. Notre choix s'est porté sur l'estimation par lissage en fréquence pour des raisons liées d'une part à la rapidité des calculs et d'autre part à un problème de phase que soulève l'estimation par moyennage temporel. Un algorithme du programme d'estimation et la description des paramètres utilisés sont donnés en annexe 4B, ainsi que les critères utilisés d'un point de vue pratique pour le choix des paramètres d'étude du signal.

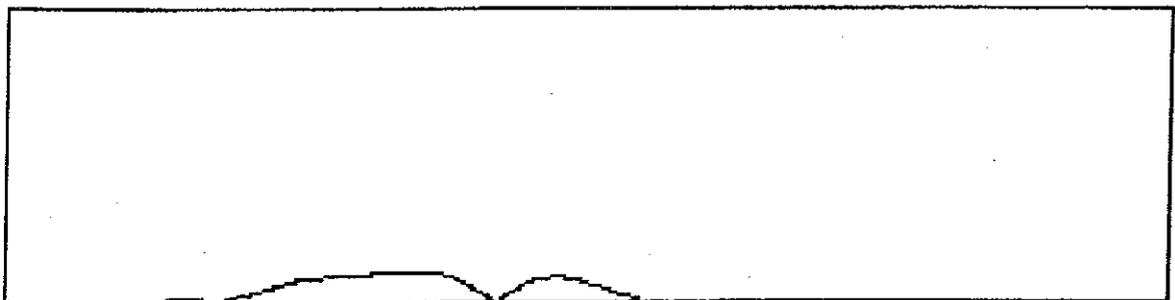
Nous avons montré l'importance du pouvoir de résolution  $\Delta f$  dans la mesure de la corrélation spectrale. Le choix de cette résolution  $\Delta f$  est fixé par le modèle des signaux et par l'objectif poursuivi.

fig. (4-5)(a)

Correlation spectrale dans le cas ou  
a(t) et b(t) sont decorreles



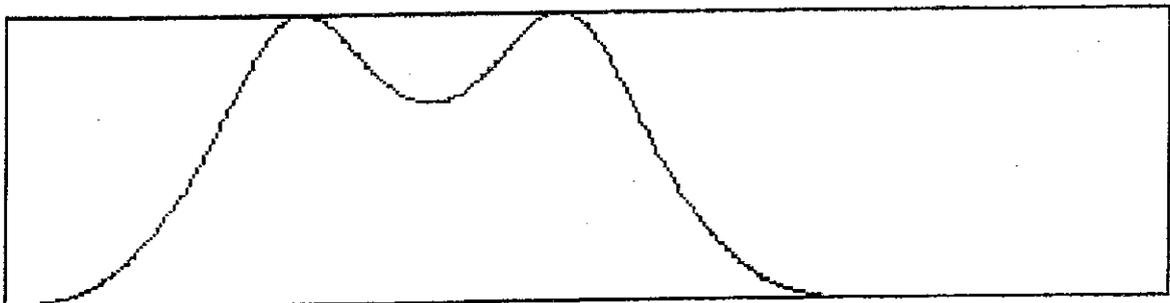
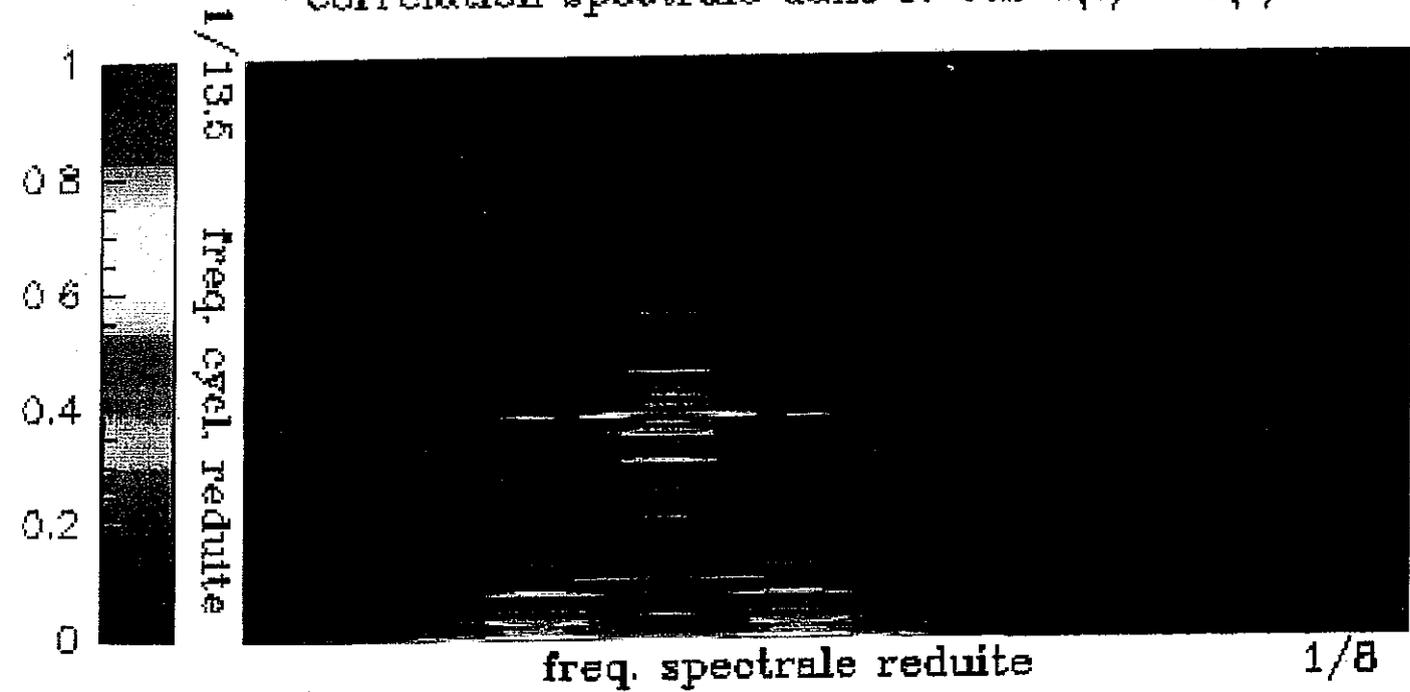
Coupe a la frequence cyclique nulle :  
spectre de puissance du signal



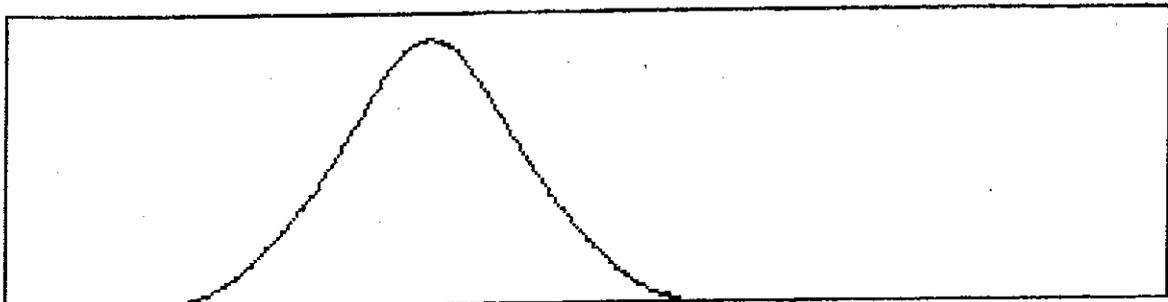
Coupe a la frequence cyclique egale a  
la difference entre les frequences des porteuses

fig. (4-5)(b)

Correlation spectrale dans le cas  $a(t) = b(t)$



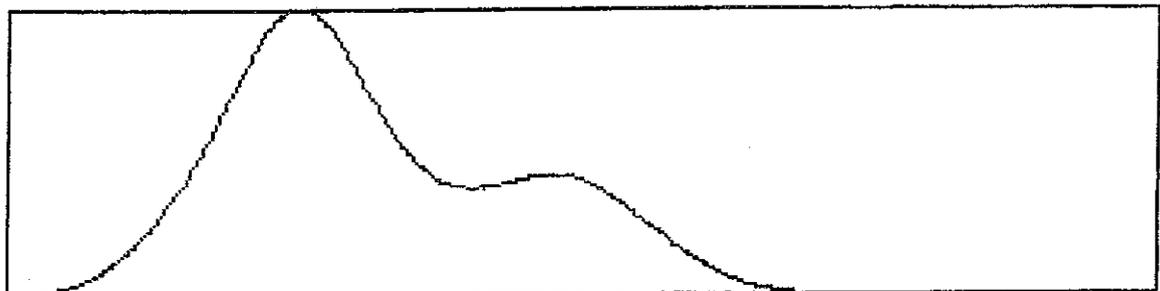
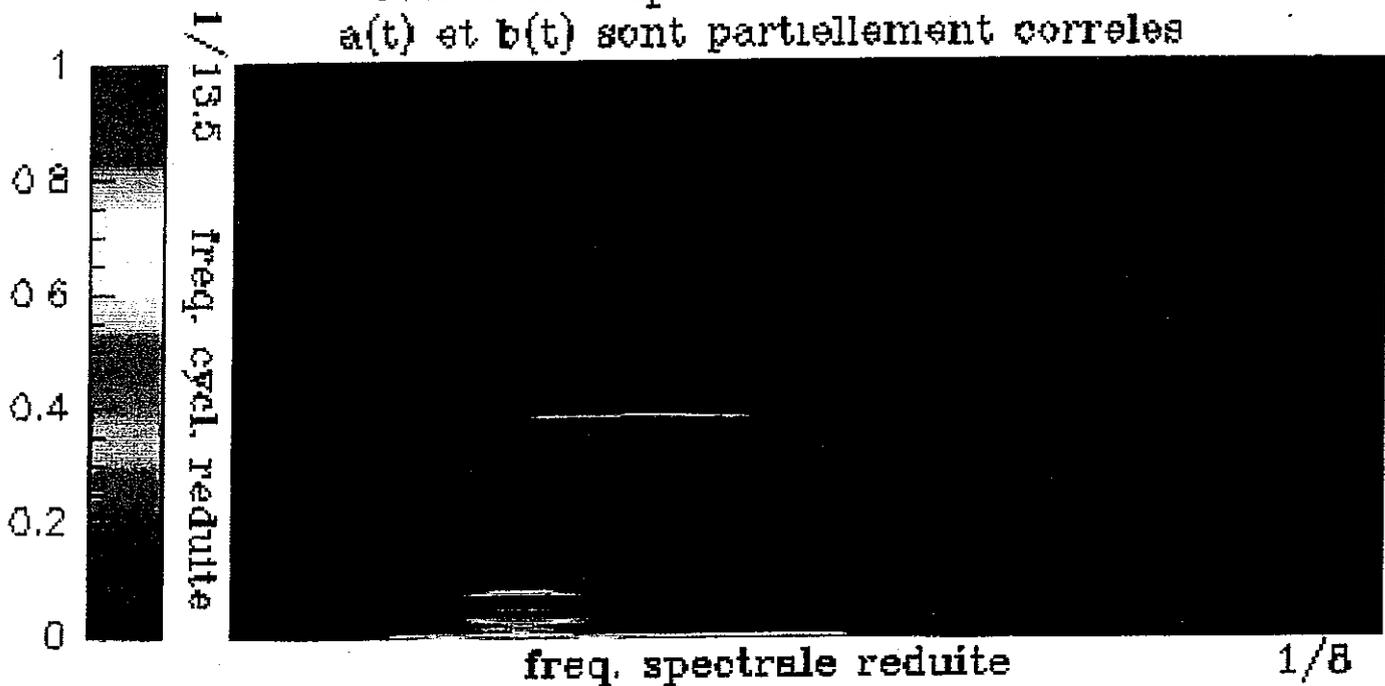
Coupe a la frequence cyclique nulle :  
spectre de puissance du signal



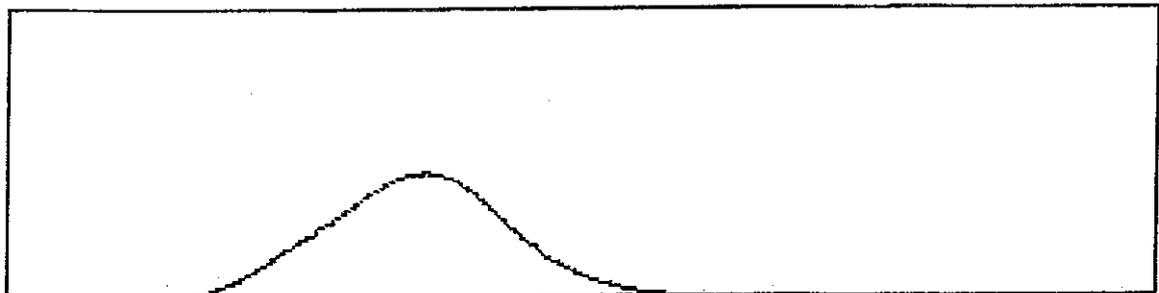
Coupe a la frequence de cyclostationnarite du signal

fig. (4-5)(c)

Correlation spectrale dans le cas ou  
 $a(t)$  et  $b(t)$  sont partiellement correles



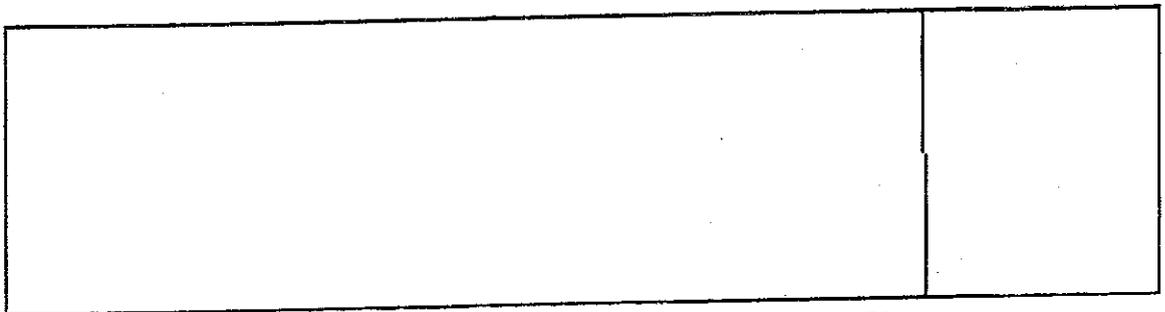
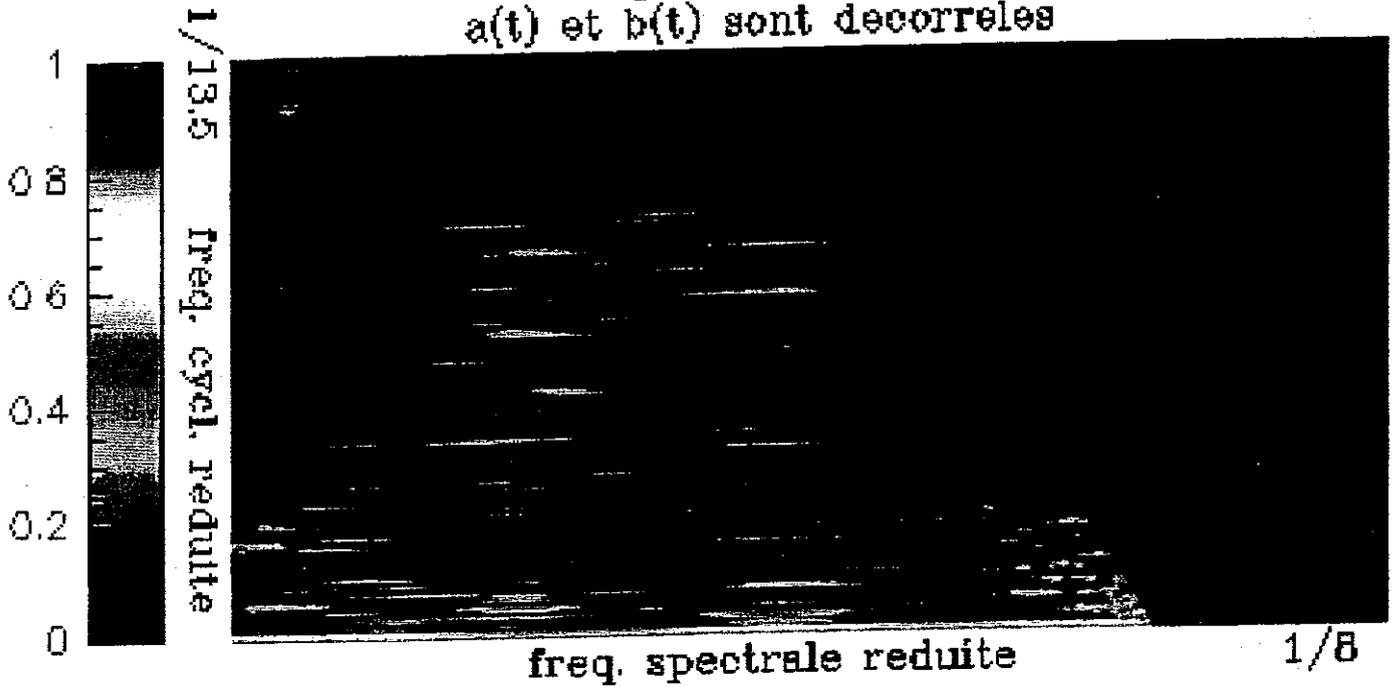
Coupe a la frequence cyclique nulle :  
 spectre de puissance du signal



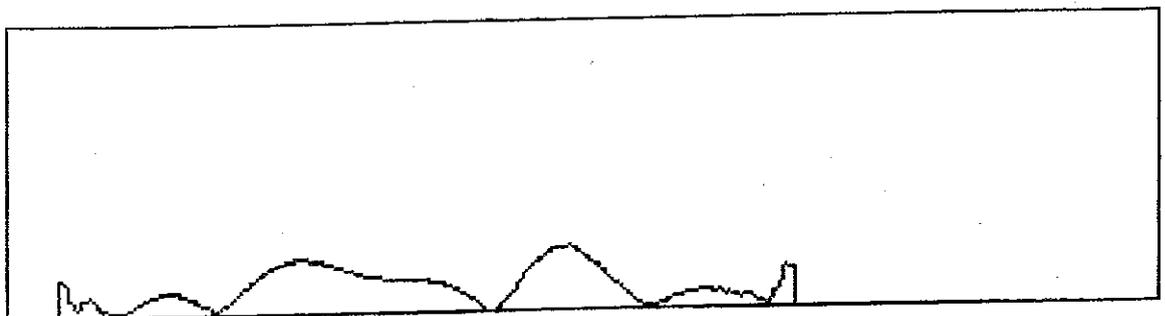
Coupe a la frequence cyclique egale a  
 la difference entre les frequences des porteuses

fig. (4-6)(a)

Coherence spectrale dans le cas ou  
a(t) et b(t) sont decorreles

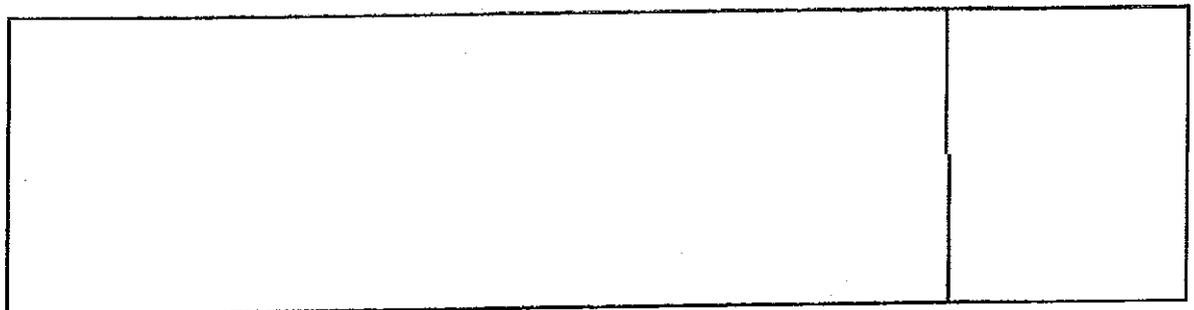
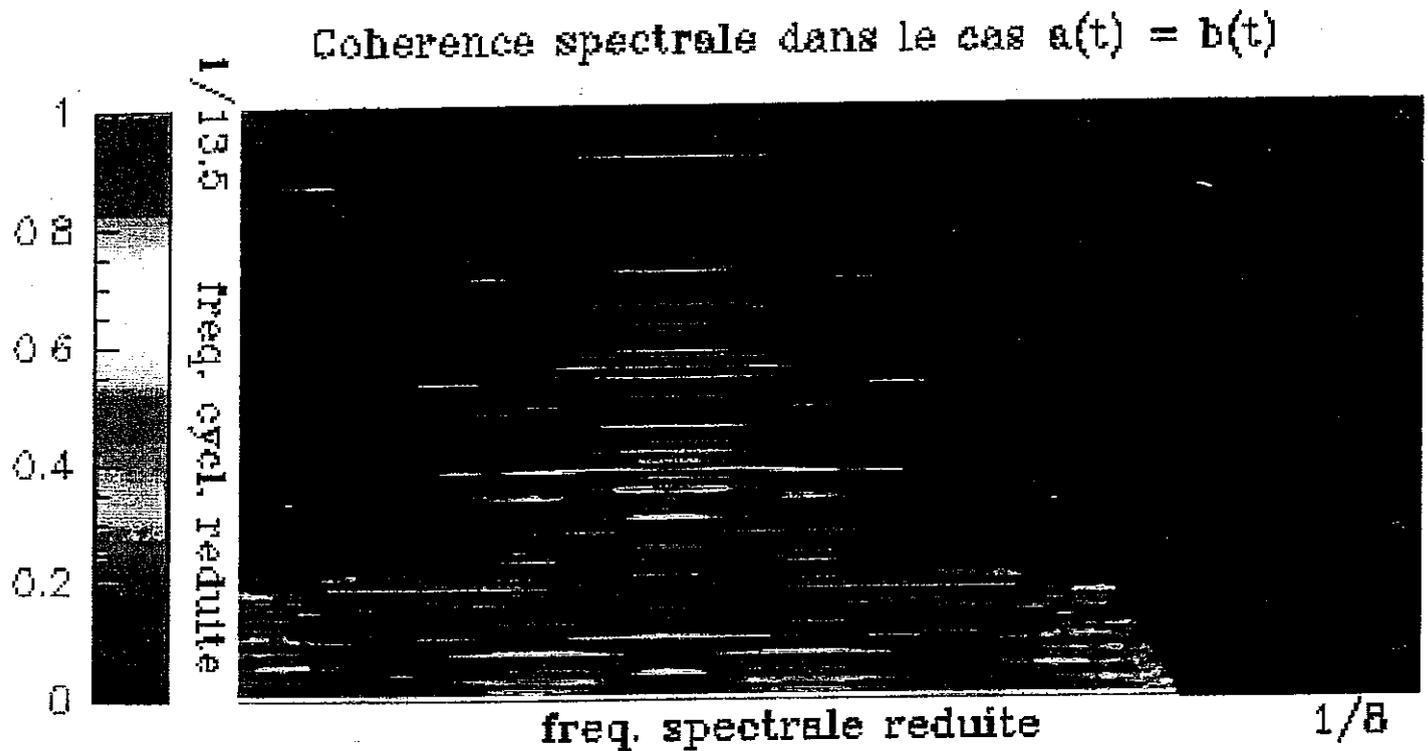


Coupe a la frequence cyclique nulle :



Coupe a la frequence cyclique egale a  
la difference entre les frequences des porteuses

fig. (4-6)(b)



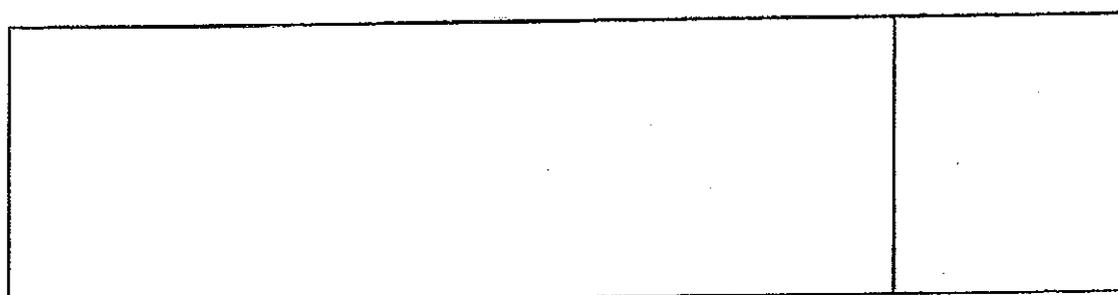
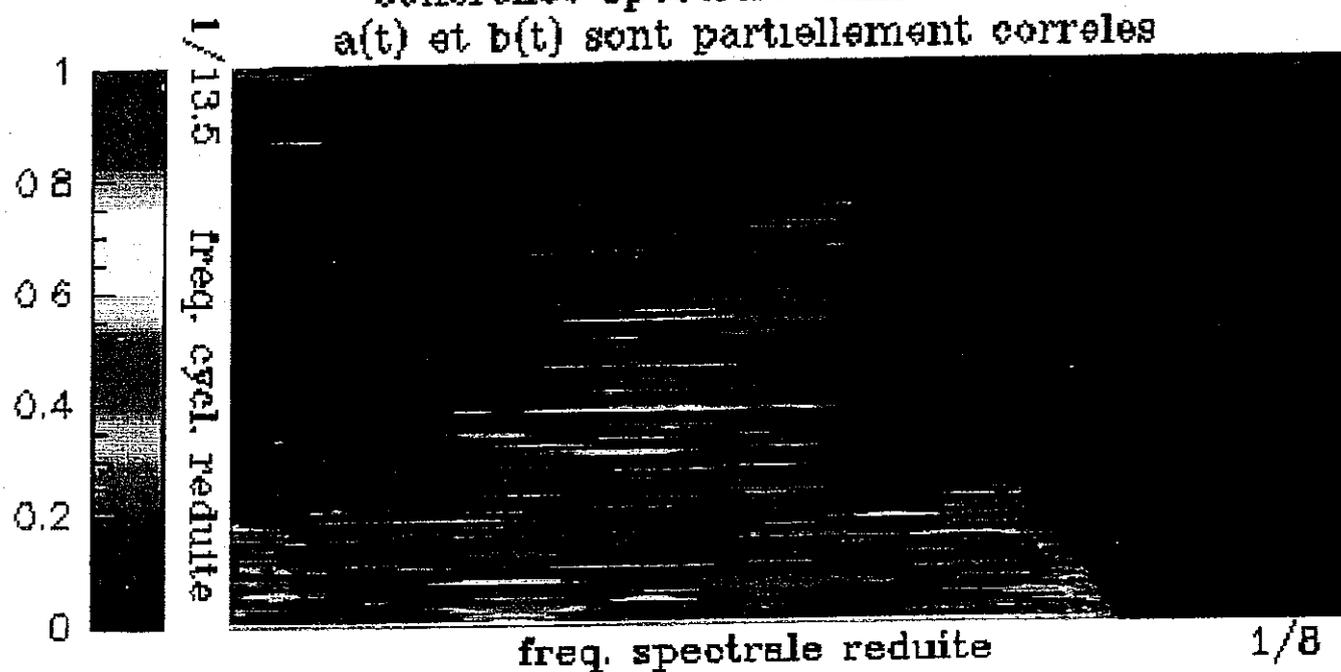
Coupe a la frequence cyclique nulle :



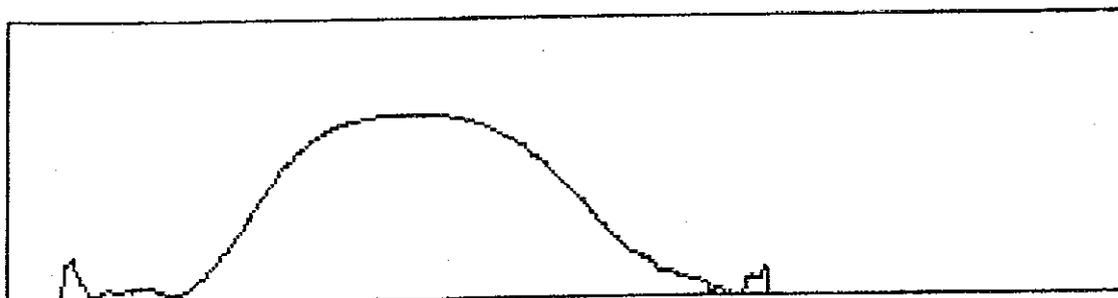
Coupe a la frequence de cyclostationnarite du signal

fig. (4-6)(c)

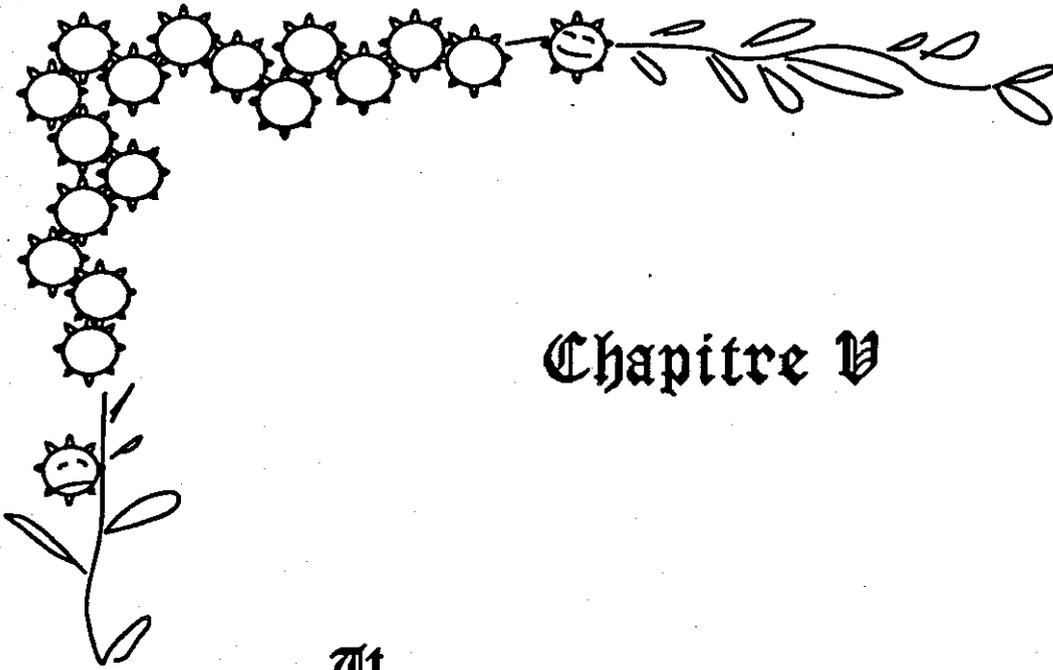
Coherence spectrale dans le cas ou  
a(t) et b(t) sont partiellement correles



Coupe a la frequence cyclique nulle :



Coupe a la frequence cyclique egale a  
la difference entre les frequences des porteuses



## Chapitre V

Une étude cyclostationnaire plus théorique des signaux d'engrenage est conduite à partir du modèle élaboré au premier chapitre. On met en évidence deux modes d'étude possibles, correspondant à deux résolutions fréquentielles différentes, qui mettent en évidence différentes fréquences de cyclostationnarité. On montre comment l'étude haute résolution, où interviennent deux fréquences de cyclostationnarité distinctes, permet de séparer l'information concernant la rotation des deux roues et d'établir un diagnostic précoce du système, avec la même efficacité que par l'utilisation du cepstre.

## CHAPITRE V

### 5 - CORRÉLATION SPECTRALE. MISE EN OEUVRE ET APPLICATION AUX SIGNAUX REELS.

Dans ce chapitre, nous mettons en évidence la cyclostationnarité des signaux d'engrenage à partir du modèle du signal, et nous présentons les résultats obtenus sur les signaux réels. Deux études sont menées successivement, l'une avec une faible résolution spectrale, qui met en évidence une seule fréquence de cyclostationnarité, l'autre une meilleure résolution spectrale, qui révèle deux fréquences de cyclostationnarité. Dans ce second cas, nous montrons comment l'information relative aux deux roues peut être séparée et de quelle façon la corrélation spectrale peut être interprétée à des fins de diagnostic.

#### 5-1 Durée du signal étudié. Influence sur l'interprétation

Reprenons le modèle adopté pour le signal :

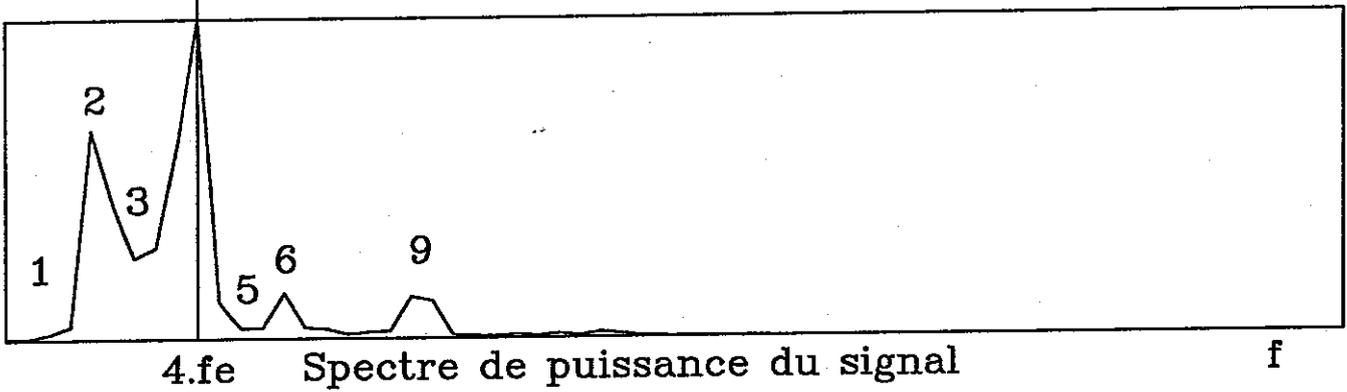
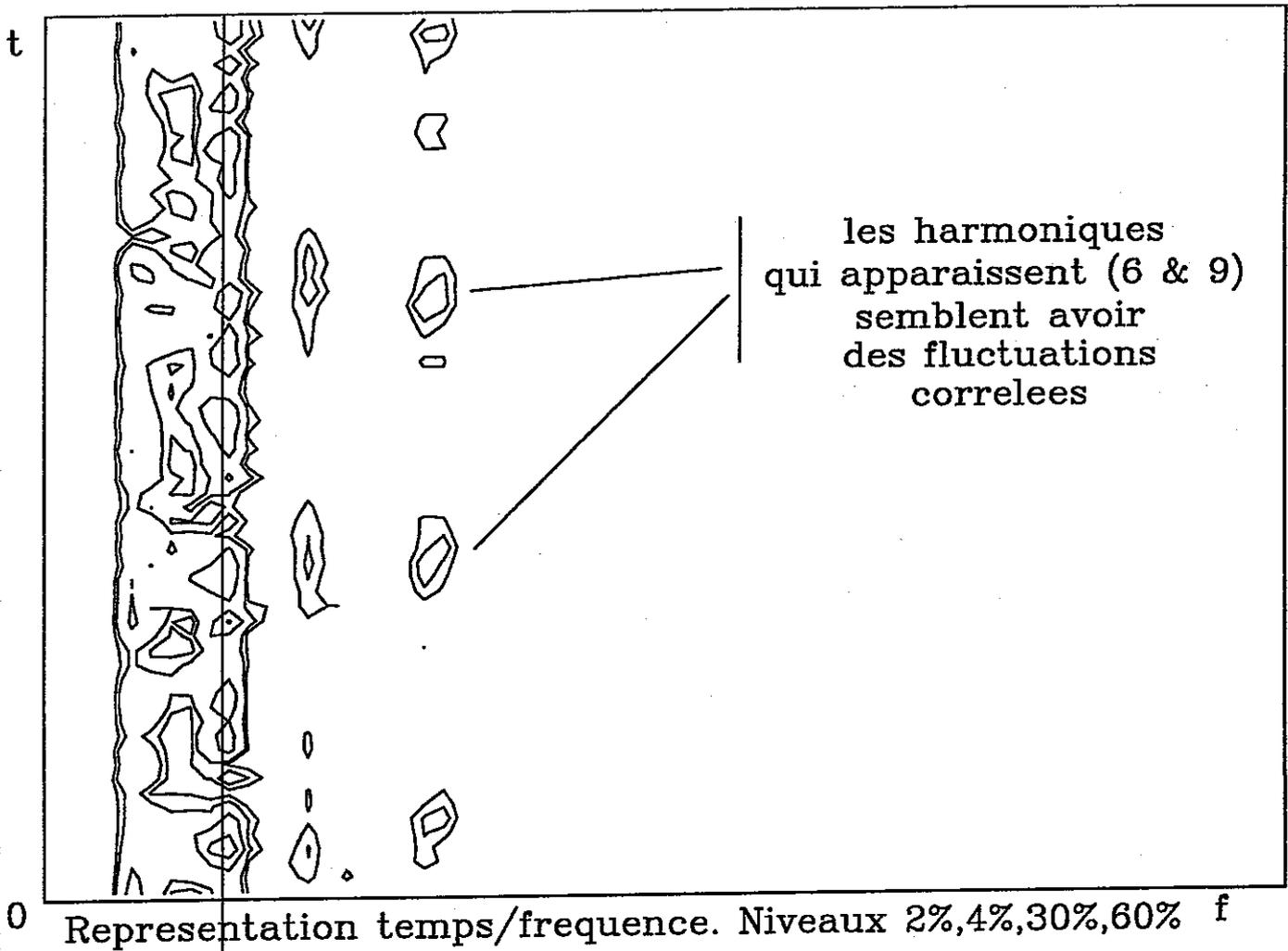
$$s(t) = s_k(t) \cdot (W + s_m(t) + s_{r1}(t) + s_{r2}(t))$$

où  $s_k(t)$  et  $s_m(t)$  sont périodiques à la période d'engrènement et les  $s_{r(.)}(t)$  périodiques aux périodes de rotation. Rappelons ici que les fonctions  $s_{r1}(t)$  et  $s_{r2}(t)$  décrivent respectivement les déviations du profil des dents par rapport au profil idéal pour chacune des deux roues, et que  $s_m(t)$  est la composante moyenne de cette déviation pour les deux roues calculée pour l'engrenage en bon état de fonctionnement. Le terme  $s_k(t)$  dépend de la raideur des paires de dents en contact.

##### 5-1-1 Etude du signal sur une courte durée.

Les phénomènes liés à la rotation étant des phénomènes lents, selon la durée de signal choisie on détectera leur périodicité ou non. En effet, si l'on étudie la composition fréquentielle du signal sur une durée inférieure à la période de rotation de la roue la plus rapide, les modulations  $s_{r1}(t)$  et  $s_{r2}(t)$  n'apparaîtront pas dans le spectre comme des bandes latérales. Dans le spectre de puissance du signal, elles seront éliminées par moyennage temporel ou lissage fréquentiel, et dans la représentation temps-fréquence, elles se retrouvent sous forme de fluctuations de l'amplitude des harmoniques d'engrènement.

Jour 02



Transformee de Fourier sur 128 points  
Recouvrement 64 points

Fig. (5-1)

La figure (5-1) illustre ceci par la présentation conjointe d'une représentation temps-fréquence et du périodogramme moyenné associé. La représentation temps-fréquence est une transformée de Fourier glissante. Chaque TF est calculée sur 128 points avec un recouvrement de 64 points entre deux tranches successives de signal. 128 échantillons représentent environ quatre ou cinq périodes d'engrènement et un quart de période de rotation, ce qui veut dire que la résolution fréquentielle est suffisante pour séparer les harmoniques de la fréquence d'engrènement, mais que les modulations d'amplitude de ces harmoniques ne sont pas détectables sur le spectre de puissance et apparaissent sur la représentation temps-fréquence sous formes de variations de l'énergie des différents canaux de fréquence.

Ceci peut se traduire sur le modèle par l'hypothèse :

$$s_{r1}(t) + s_{r2}(t) = s_r(t),$$

avec  $s_r(t)$  signal aléatoire non périodique et que nous supposons stationnaire.

Ainsi, on observe le signal avec une résolution fréquentielle telle que les fréquences dont on évalue le lien statistique sont les harmoniques de la fréquence d'engrènement et leurs fluctuations la somme des modulations dues aux deux roues.

Le modèle devient donc :

$$s(t) = s_k(t) \cdot (W + s_m(t) + s_r(t))$$

### 5-1-2 Etude du signal sur une longue durée

Lorsqu'on étudie le signal sur une durée nettement supérieure à la période de rotation des roues, la périodicité des phénomènes  $s_{r1}(t)$  et  $s_{r2}(t)$  est détectée et, comme on l'a vu dans le chapitre 2, ceux-ci apparaissent dans le spectre de puissance sous forme de bandes latérales. Dans ce cas les temps de calcul seraient trop longs et les fichiers trop importants à stocker lorsqu'on estime la corrélation spectrale si l'on étudiait la totalité du signal. C'est pourquoi nous filtrerons au préalable une partie du signal localisée autour de l'un des harmoniques d'engrènement (fig. (5-2)). Ceci se traduit en termes de modèle par :

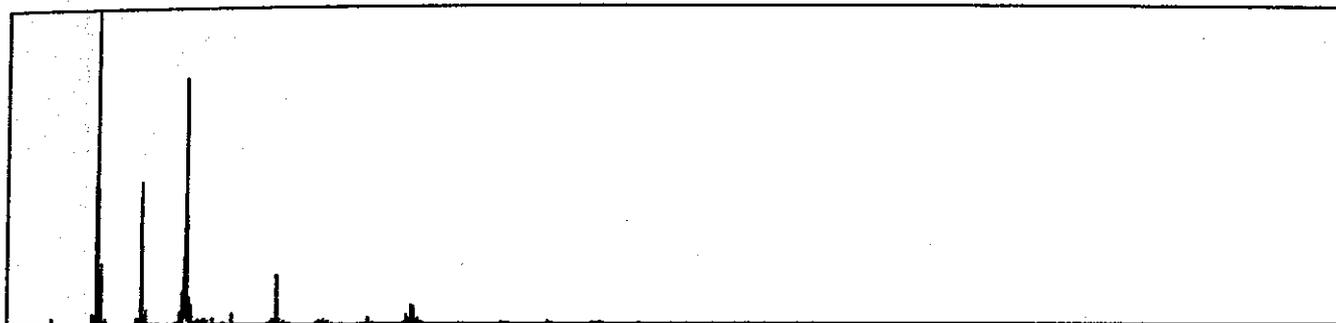
$$s(t) = (W + s'_m(t) + s_{r1}(t) + s_{r2}(t)) \cdot \cos(2\pi j f_e t)$$

si l'on ramène par démodulation la bande fréquentielle entourant l'harmonique d'ordre  $n$  choisi autour de la position de l'harmonique d'ordre 1 :  $f_e$ . Le modèle écrit sous cette forme ne prend pas en compte un éventuel recouvrement entre bandes latérales voisines.

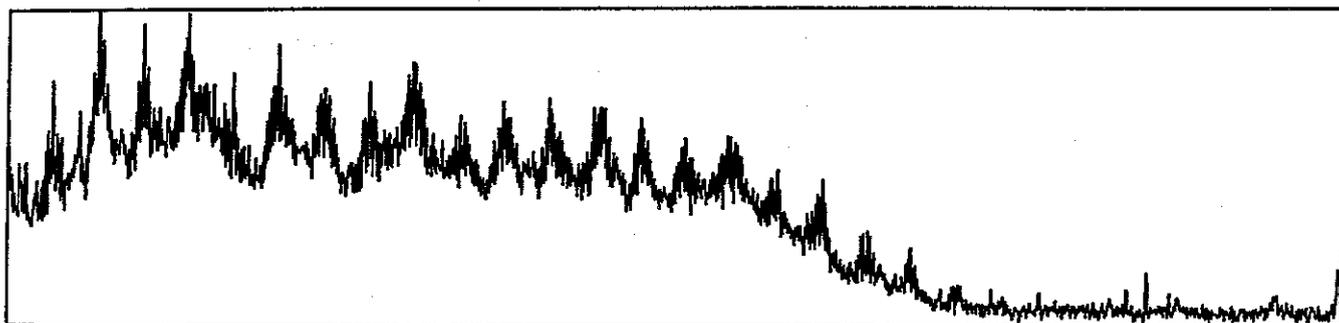
Le terme  $s'_m(t)$  est dû à la contribution de  $s_m(t)$ , ce terme n'est pas égal à  $s_m(t)$  lui-même à cause du filtrage qu'a subi le signal. On a vu que la fonction  $s_m(t)$  étant périodique de fréquence  $f_e$ , elle contribue au spectre du signal aux emplacements des harmoniques d'engrènement. Le filtrage du signal autour de l'harmonique d'engrènement d'ordre  $n$  conserve donc la contribution de  $s_m(t)$  à l'emplacement de cet harmonique, et  $s'_m(t)$  est le résultat de ce filtrage.

La figure (5-3) donne une représentation temps-fréquence du signal et son périodogramme moyenné calculés avec une bonne résolution fréquentielle : chaque TFD est calculée sur 4096 points avec un recouvrement de 2048 points. La raie d'amplitude la plus élevée est l'harmonique d'engrènement autour duquel on a filtré et les autres raies, dont on peut observer les fluctuations au cours du temps, sont un mélange des deux modulations.

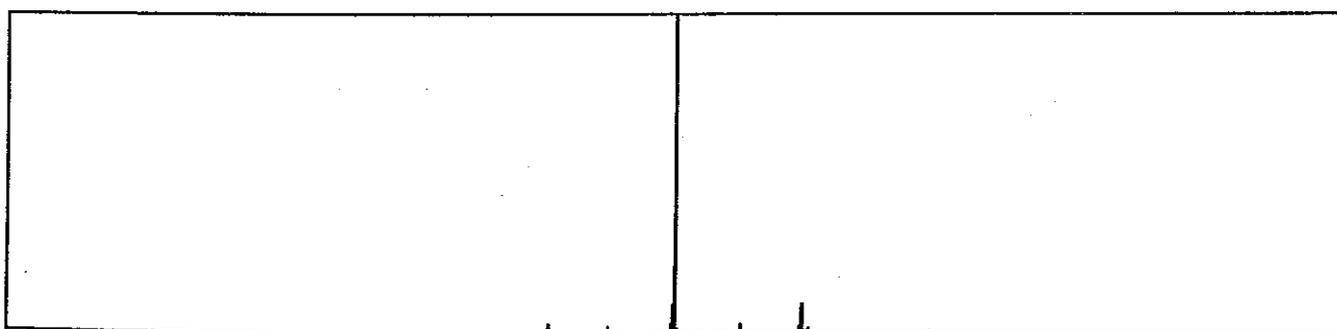
Jour 02



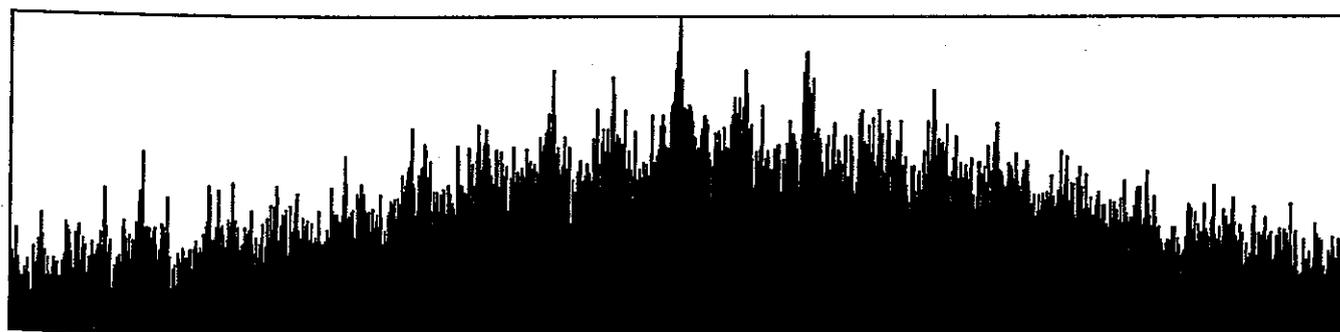
Spectre de puissance du signal bonne resolution.



Spectre logarithmique meme resolution

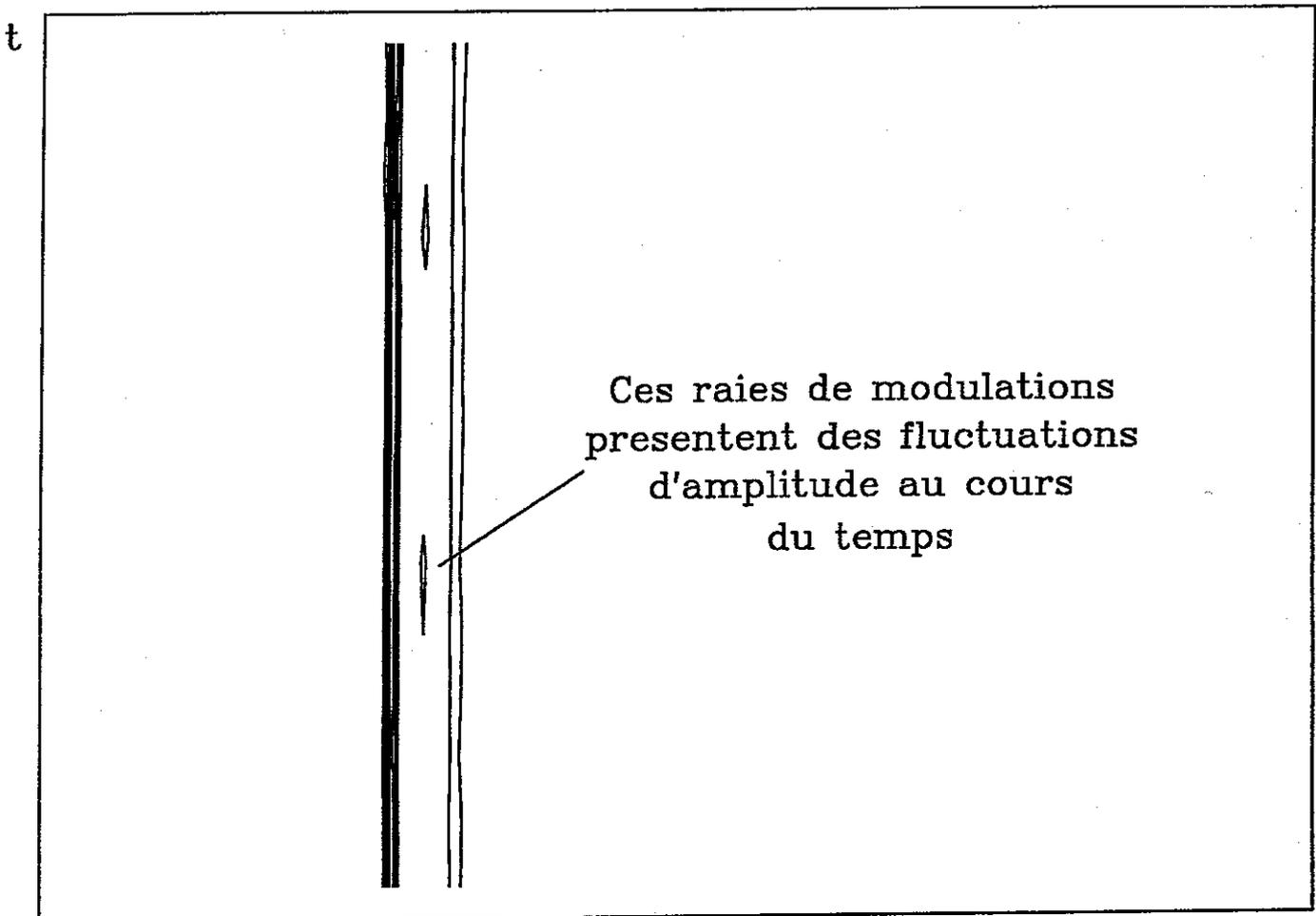


Spectre du signal filtre autour du 2nd harmonique d'engrenement

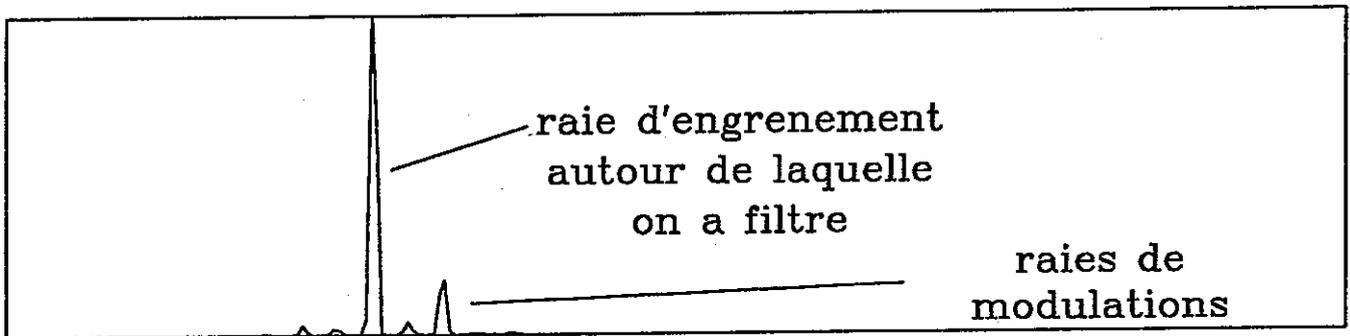


Meme spectre en echelle logarithmique

Fig. (5-2)



Representation temps/frequence. Niveaux 5%,30%,55%,80%



Spectre de puissance du signal

Transformee de Fourier sur 512 points  
Recouvrement 256 points

Fig. (5-3)

## 5-2 Détermination des fréquences de cyclostationnarité.

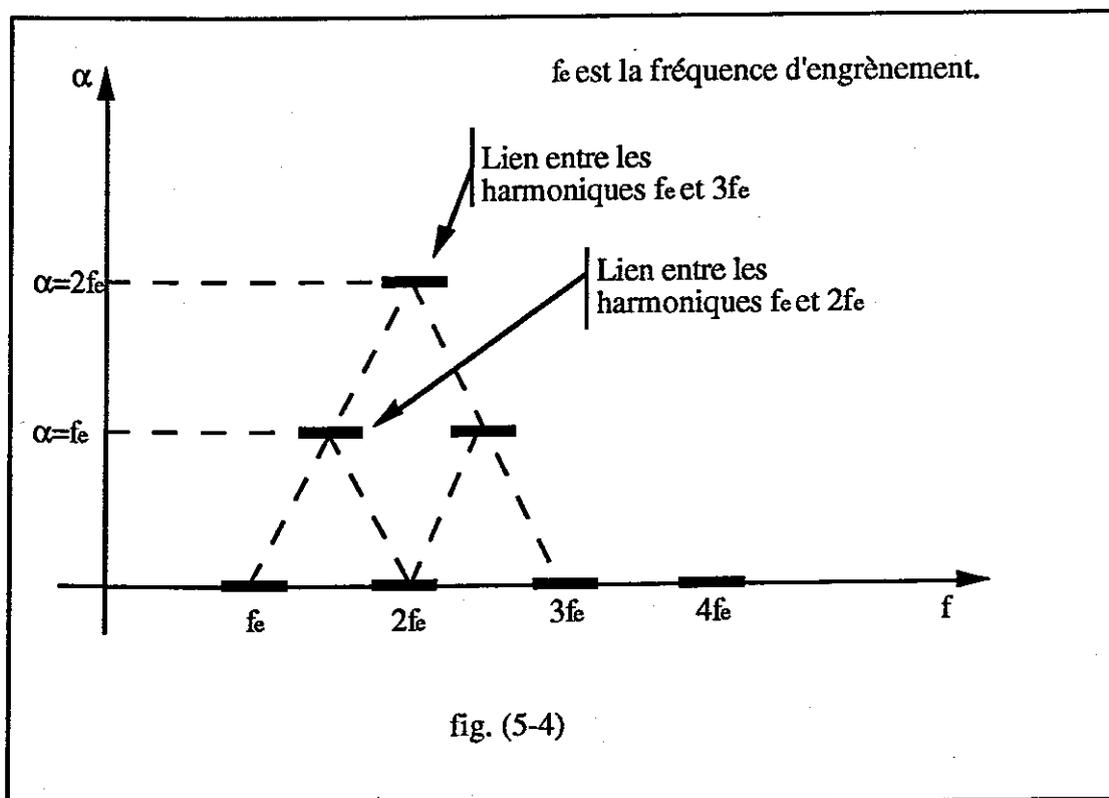
### 5-2-1 Cas où l'on choisit une faible résolution.

Dans ce cas le modèle prend la forme :

$$s(t) = s_k(t) \cdot (W + s_m(t) + s_r(t))$$

On a choisi dans la première partie de considérer que  $s_m(t)$  est une moyenne effectuée sur toutes les dents des deux roues lorsque l'engrenage est en bon état. Ce terme ne varie pas au cours du temps, ne change pas d'un jour sur l'autre, il est certain, périodique, et du fait de sa périodicité, intervient aux emplacements  $pf_e$  des harmoniques d'engrènement. La partie aléatoire du signal est celle due à la présence du terme  $s_r(t)$  et c'est celle qui nous intéresse.

La partie du signal composée par le fondamental et cette modulation est  $s'(t) = s_k(t) \cdot s_r(t)$ , où  $s_k(t)$  est périodique et a donc un spectre de raies. On se ramène ainsi à l'étude d'un signal composé d'une série de fréquences porteuses (les fréquences  $pf_e$ ), modulées par un même bruit aléatoire  $s_r(t)$ . Ainsi, comme on l'a vu au chapitre 4, sur les simulations, le signal sera cyclostationnaire de fréquence  $f_e$ , et sa corrélation spectrale sera non nulle pour chaque valeur de la fréquence cyclique égale à un multiple  $pf_e$  de cette fréquence, ce qui est illustré par la figure (5-4).



La figure (5-5)(a) montre d'une part une représentation temps fréquence du signal enregistré le deuxième jour et un tracé en courbes de niveau de sa cohérence spectrale. Pour la représentation temps-fréquence, (transformée de Fourier glissante), la fenêtre temporelle est choisie suffisamment courte (256 échantillons) pour que les modulations aux fréquences de rotation des roues apparaissent comme des fluctuations de l'amplitude des composantes fréquentielles du signal.

On voit bien un certain parallélisme, révélant une corrélation, entre les fluctuations des différents harmoniques d'engrènement. Cette corrélation entre les harmoniques se traduit sur la corrélation spectrale par l'apparition de pics en fréquence cyclique pour les valeurs harmoniques de la fréquence d'engrènement. Lorsqu'on étudie le signal en choisissant une faible résolution fréquentielle, il se révèle donc cyclostationnaire, mais dans ce cas la corrélation spectrale ne permet pas de séparer les deux roues.

La figure (5-5)(b) montre un tracé en courbes de niveaux de la cohérence spectrale du signal enregistré le dernier jour de l'expérimentation. On remarquera que cette fonction n'est plus discrète en fréquence cyclique et que le signal n'est plus cyclostationnaire : ceci veut dire que le signal modulant la fréquence d'engrènement et ses harmoniques n'est plus décorrélé en fréquence. On peut l'expliquer de la façon suivante : lorsque le défaut apparaît, sur le signal apparaît un pic périodique qui change la physionomie du signal comme si l'on avait pondéré chacune de ses périodes par une fenêtre étroite. Cette "pondération" en temps se traduit en fréquence par un "lissage", et donc un "mélange" des composantes fréquentielles voisines, c'est pourquoi deux canaux de fréquences ne sont alors plus indépendants. On remarquera cependant que cette particularité de la cohérence spectrale n'apparaît que lorsque le défaut est visible sur le signal temporel, et qu'elle ne s'avère donc pas utile pour le diagnostic précoce du réducteur.

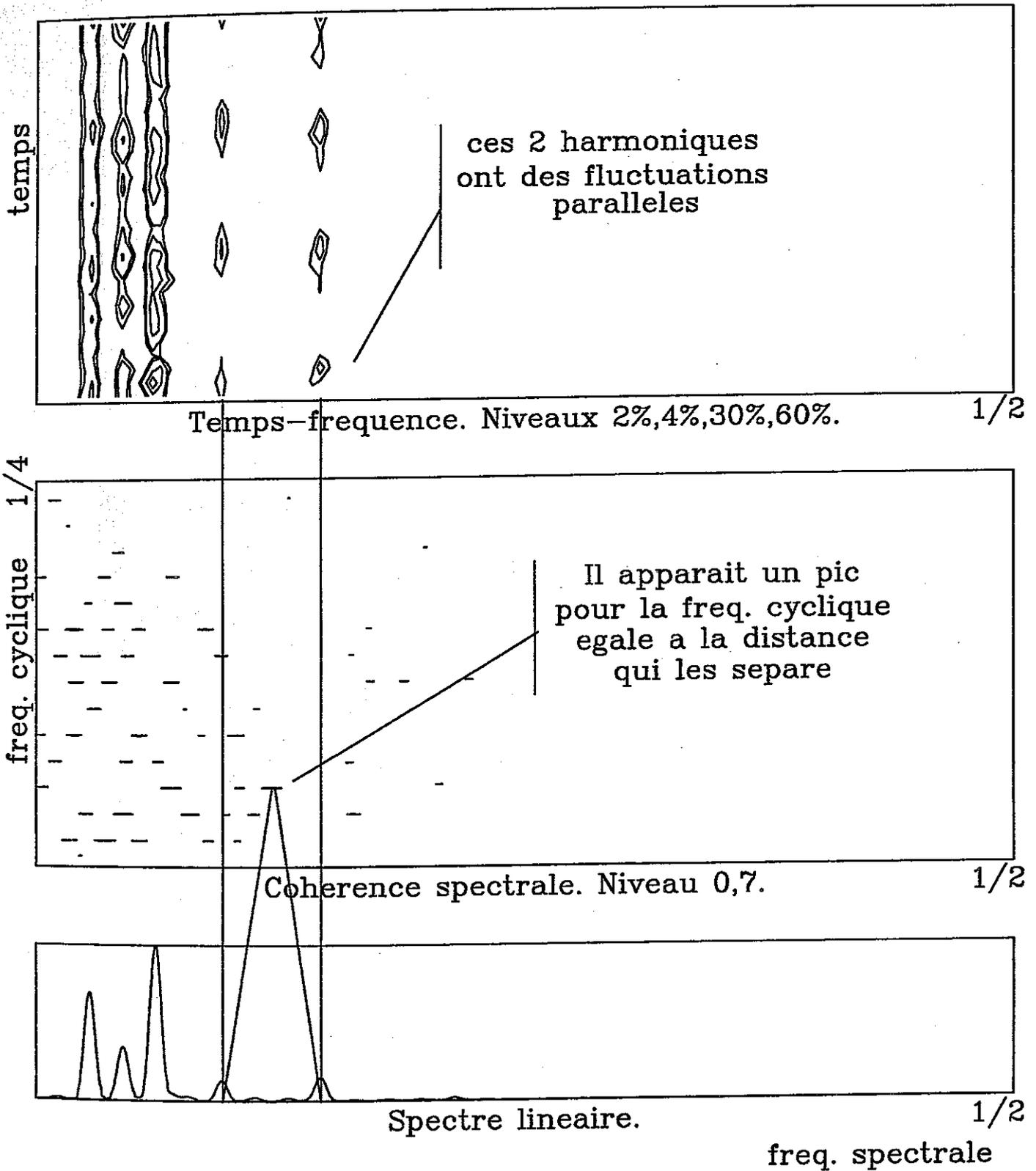


Fig. (5-5)(a)

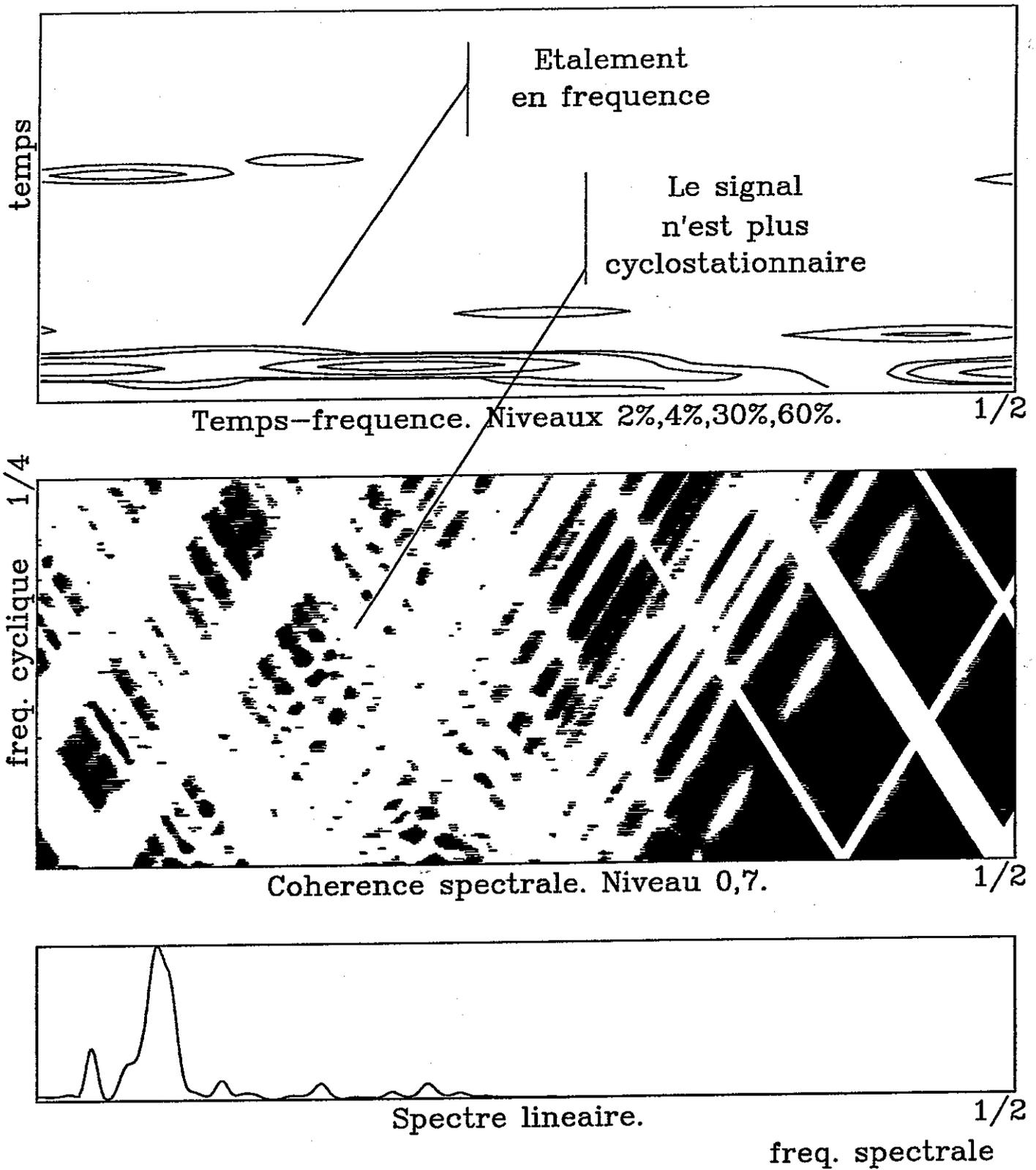


Fig. (5-5)(b)

### 5-2-2 Cas d'une résolution fine : longues tranches de signal.

Dans le cas où l'on a une résolution fréquentielle suffisante pour séparer les modulations, c'est-à-dire une durée de signal au moins égale au plus petit multiple commun des périodes de rotation des roues, le modèle devient, après filtrage et sous-échantillonnage du signal :

$$s(t) = (W + s'_m(t) + s_{r1}(t) + s_{r2}(t)) \cdot \cos(2\pi j f_e t)$$

Les termes  $s_{r1}(t)$  et  $s_{r2}(t)$  étant périodiques de fréquences respectives  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$ , on peut les écrire :

$$s_{r1}(t) = \sum_p a_p \left( f - \frac{p}{T_{r1}} \right)$$

$$s_{r2}(t) = \sum_q a_q \left( f - \frac{q}{T_{r2}} \right)$$

Le spectre complexe du signal est alors donné par :

$$S(f) = \frac{1}{2} (\delta(f-f_e) + \delta(f+f_e)) * \left( W \cdot \delta(f) + S'_m(f) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_p A_p(f-f_{r1}) + \frac{1}{2} \sum_q B_q(f-f_{r1}) \right)$$

Les fréquences  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$  étant inversement proportionnelles à  $f_e$ , les deux derniers termes de la modulation formeront dans le spectre, comme on l'a vu au chapitre 2, des bandes latérales autour des harmoniques d'engrènement, formant deux familles de raies ininterrompues sur tout le spectre, périodiques de périodes respectives  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$ .

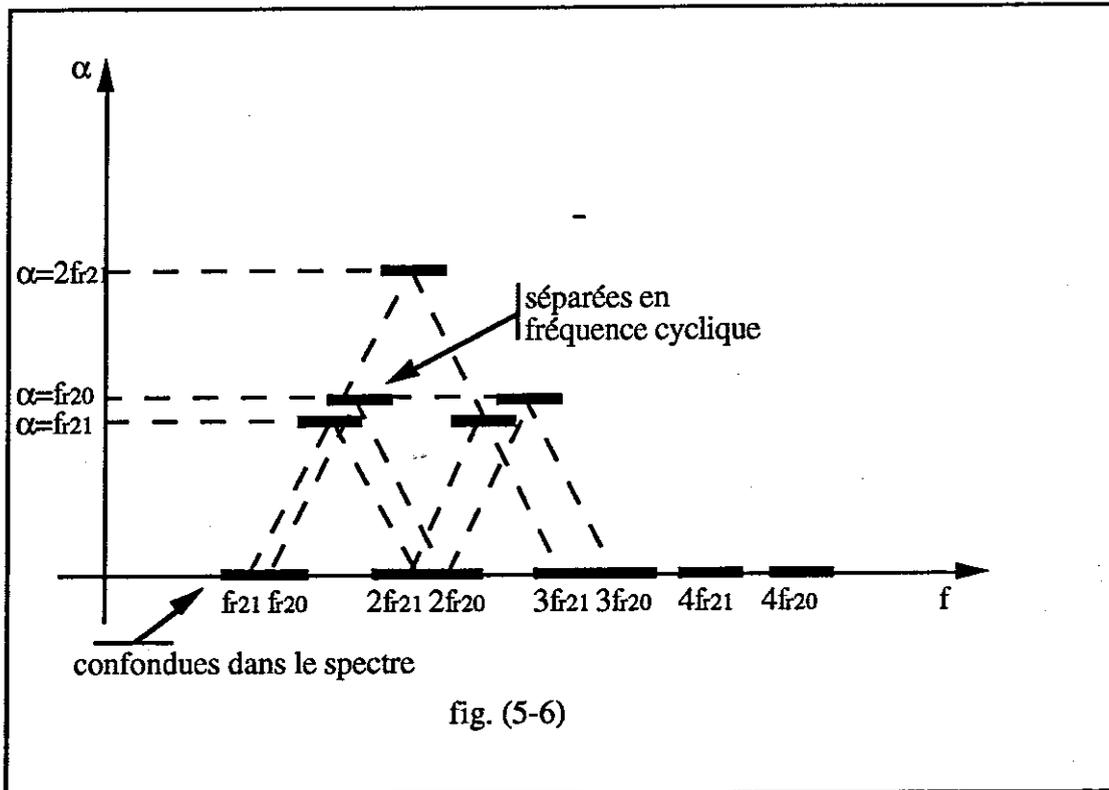
Le spectre complexe de  $s(t)$  peut donc s'écrire :

$$S(f) = \sum_p A'_p(f - p f_{r1}) + \sum_q B'_q(f - q f_{r2}),$$

où les  $A'_p(f)$  et  $B'_q(f)$  sont calculés en tenant compte de la pondération de chaque bande latérale par l'amplitude de l'harmonique d'engrènement duquel elle dépend, du chevauchement entre bandes latérales voisines et des termes apparaissant aux positions des harmoniques d'engrènement du fait de la présence du terme  $W \cdot \delta(f) + S'_m(f)$ . Les fonctions  $A'_p(f)$  et  $B'_q(f)$  sont des fonctions aléatoires dont la largeur de bande est inférieure à  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$ .

Par comparaison de ce modèle avec les cas étudiés au chapitre 4, on voit qu'il va apparaître deux fréquences de cyclostationnarité qui sont les fréquences de rotation des roues  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$ , et éventuellement des fréquences de cyclostationnarité  $p.f_{r1}-q.f_{r2}$  qui apparaîtront si les fonctions  $A'_p(f)$  et  $B'_q(f)$  sont corrélées pour certaines valeurs de  $p$  et  $q$ .

Si l'on se réfère au modèle mécanique du signal, on voit que les termes  $A'_p(f)$  et  $B'_q(f)$  dépendent directement de la forme de la surface des roues (roue 1 pour les  $A'_p(f)$  et roue 2 pour les  $B'_q(f)$ ). Or, il n'y a pas de raison particulière pour qu'une fonction décrivant la forme des dents de l'une des deux roues soit corrélée avec une fonction décrivant la forme des dents de l'autre roue. Ainsi, on peut supposer que quels que soient  $p$  et  $q$ ,  $E[A'_p(f).B'^*_q(f)]$  sera toujours nulle, ce qui veut dire que les seules fréquences de cyclostationnarité qui apparaîtront sont les fréquences  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$ . (Fig. (5-6)).



Dans les paragraphes qui suivent, nous étudierons la forme que prennent la corrélation spectrale et la cohérence spectrale et quelles différences essentielles introduit la normalisation, puis nous pourrons comparer les résultats obtenus pour les deux fréquences de cyclostationnarité et les résultats obtenus pour des jours différents de l'expérimentation.

### 5-3 Application de la corrélation spectrale aux signaux d'engrenage

#### 5-3-1 Corrélation spectrale. Fonctionnement sur les signaux réels.

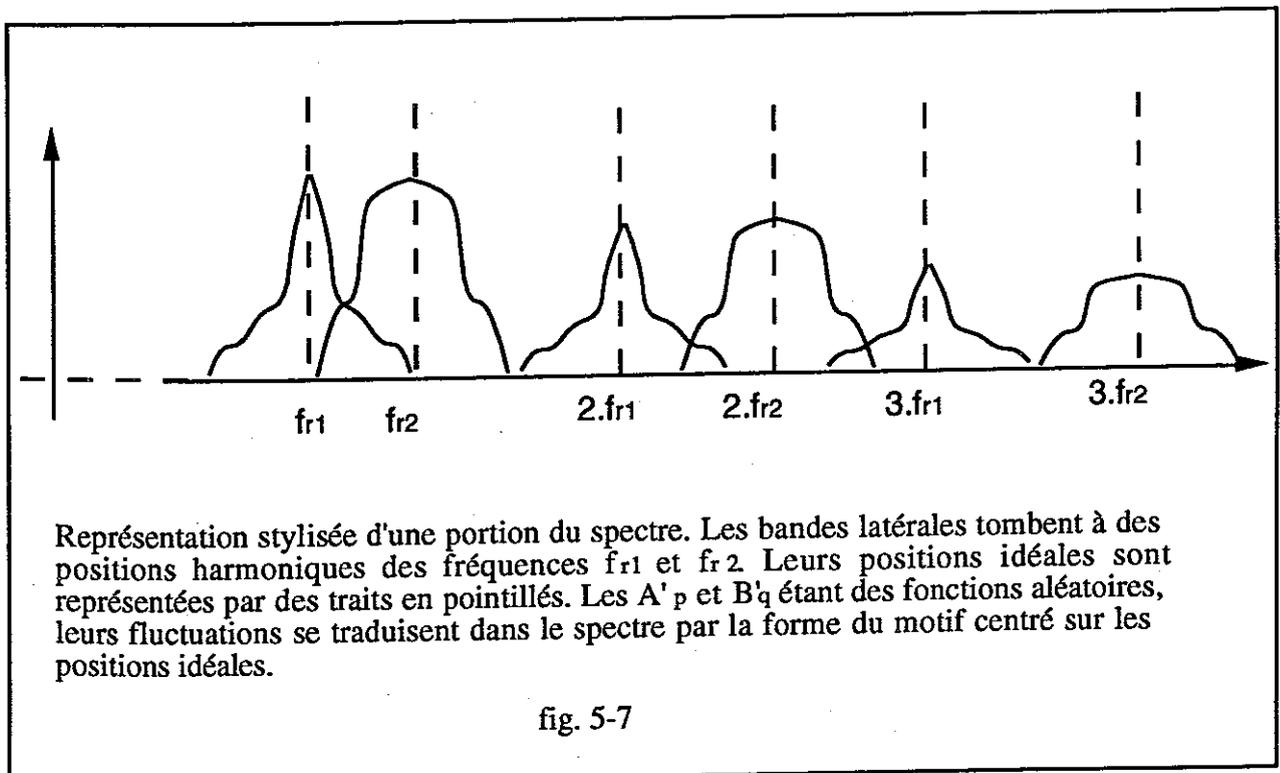
On peut détailler de quelle façon la corrélation spectrale, du fait de la présence des deux fréquences de cyclostationnarité,  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$ , permet de séparer l'information liée respectivement à chacune des deux roues.

Le spectre complexe du signal est composé de deux séries de raies et s'écrit :

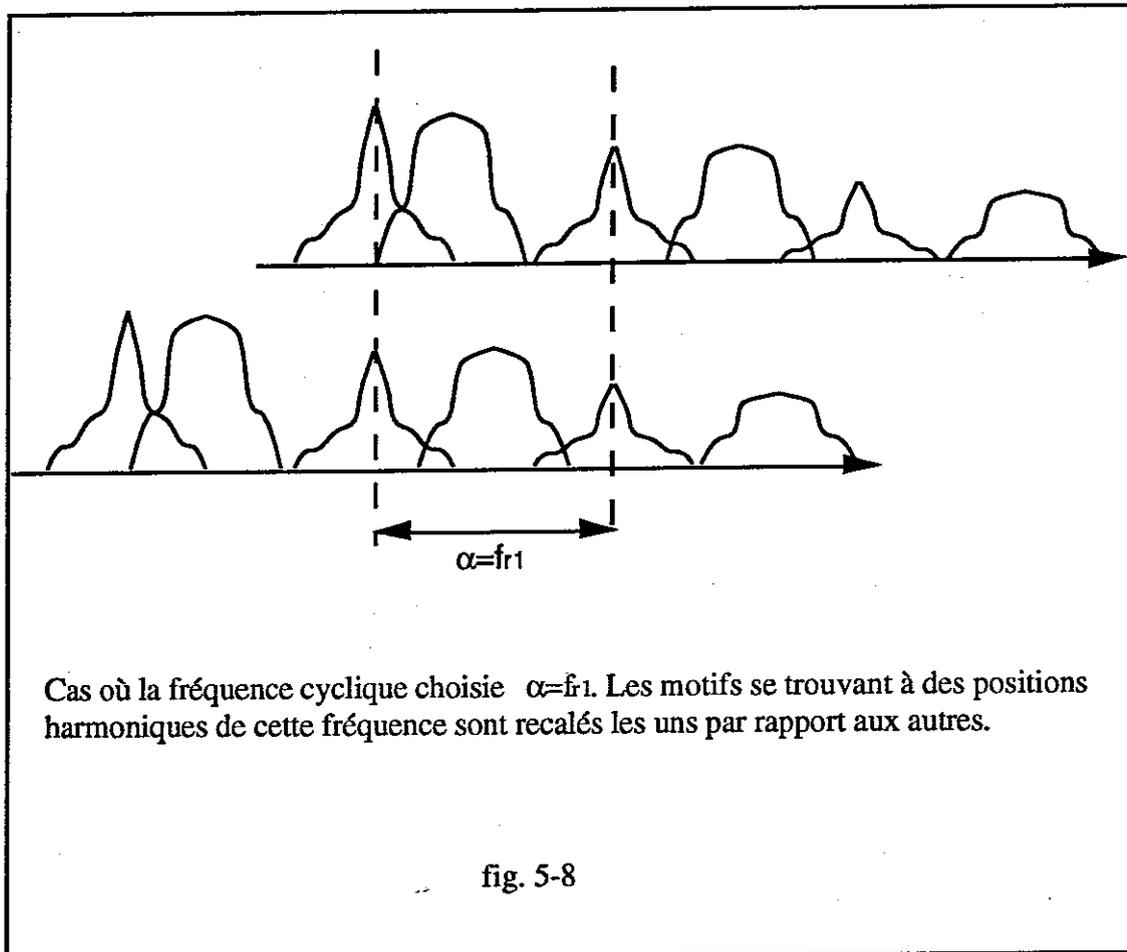
$$S(f) = \sum_p A'_p(f - pf_{r1}) + \sum_q B'_q(f - qf_{r2}),$$

Les  $A'_p(f)$  et  $B'_q(f)$  sont des fonctions aléatoires centrées respectivement sur les fréquences  $p.f_{r1}$  et  $q.f_{r2}$  et distribuées autour de ces fréquences sur une bande de fréquence que nous appellerons  $\Delta f$ .

Lorsqu'on calcule la transformée de Fourier du signal sur une durée suffisante pour séparer  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$ , les fluctuations aléatoires de ces deux fonctions se traduisent dans le spectre par l'aspect du motif qu'elles font apparaître aux fréquences  $p.f_{r1}$  et  $q.f_{r2}$ . La figure (5-7) est une représentation stylisée de l'enveloppe d'une portion du spectre complexe.



Lorsqu'on calcule la corrélation spectrale pour une fréquence cyclique multiple de l'une des deux fréquences de cyclostationnarité, on calcule un interspectre entre deux versions du signal décalées de telle sorte que pour la série de raies correspondant à la fréquence cyclique choisie les motifs se recalent les uns en face des autres, tandis que pour l'autre ils sont décalés. (fig. (5-8)).



On effectue alors un produit de ces deux spectres complexes, puis un lissage sur un nombre de canaux représentant une bande fréquentielle de largeur inférieure à  $\min(f_{r1}, f_{r2})$  mais supérieure à  $f_{r1} - f_{r2}$ . Ainsi, pour la roue correspondant à la fréquence cyclique choisie, on obtiendra une estimation du module au carré de la modulation, tandis que pour l'autre roue, on lissera un interspectre décalé qui tendra vers zéro. C'est ainsi que la corrélation spectrale permet de séparer l'information concernant les deux roues.

### Corrélation spectrale. Représentation pour trois valeurs.

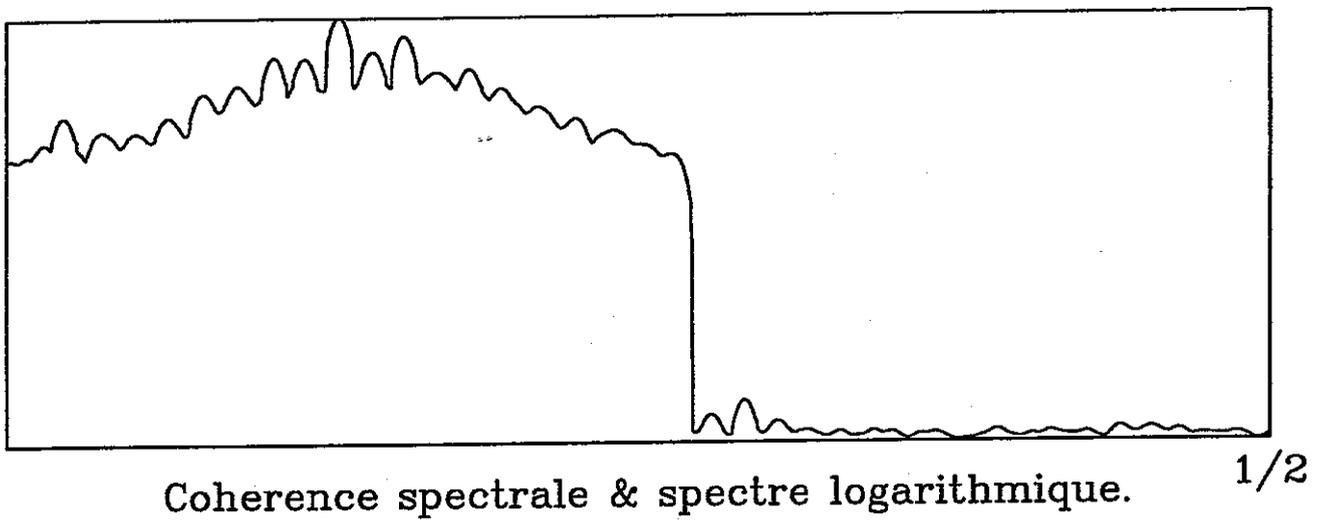
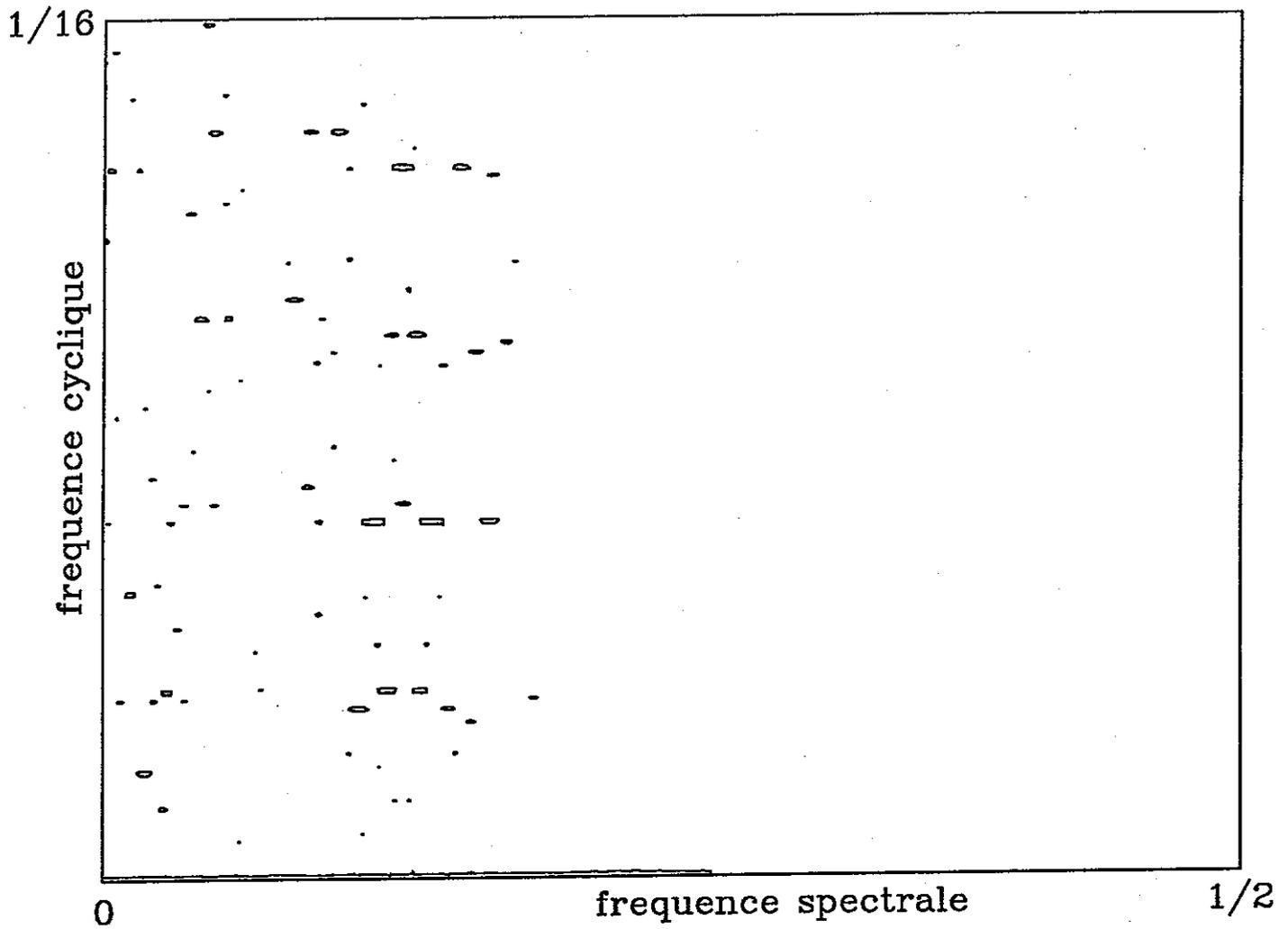
La figure (5-9)(a) est une représentation globale de la cohérence spectrale en courbes de niveaux. On voit apparaître des phénomènes discrets pour les fréquences cycliques égales aux harmoniques respectifs des deux fréquences de rotation des roues, mais pas pour les fréquences sommes ou différences de ces harmoniques, ce qui confirme l'hypothèse que les modulations liées aux deux roues sont indépendantes l'une de l'autre (hypothèse réaliste d'un point de vue mécanique) et que le signal est cyclostationnaire pour les deux fréquences de rotation, et permet de séparer l'information relative aux deux roues.

Après avoir étudié de façon systématique la forme et l'amplitude de ces pics pour plusieurs harmoniques (en fréquence cyclique) de ces fréquences de rotation, nous avons conclu que les résultats les plus intéressants étaient obtenus pour les harmoniques d'ordre deux de ces deux fréquences. C'est pourquoi les coupes des corrélations et cohérence spectrales que nous montrerons sont celles que l'on obtient pour ces valeurs de la fréquence cyclique.

La figure (5-9)(b) présente des courbes obtenues sur l'enregistrement du deuxième jour de l'expérimentation filtré autour du second harmonique d'engrènement sur une largeur de bande équivalente à la fréquence d'engrènement.

Les trois courbes sont les valeurs respectives que prend la corrélation spectrale pour les trois valeurs de la fréquence cyclique :  $\alpha = 0$ , (spectre de puissance),  $\alpha = 2.f_{r20}$ , et  $\alpha = 2.f_{r21}$ . La fréquence cyclique étant égale pour chacune des deux roues au double de sa fréquence de rotation, il apparaît un pic à la fréquence spectrale  $f$  si  $f$  est telle que les deux fréquences  $f - f_{r(i)}$  et  $f + f_{r(i)}$  (c'est-à-dire  $f - \frac{\alpha}{2}$  et  $f + \frac{\alpha}{2}$ ) tombent à des positions harmoniques de  $f_{r(i)}$ , puisqu'on détecte les liens apparaissant entre les harmoniques de la modulation correspondante. Ce qui veut dire que la fréquence  $f$  elle-même est un multiple entier de  $f_{r(i)}$ .

On constate effectivement sur les courbes que les pics des deux courbes correspondant à  $\alpha = 2.f_{r20}$  et  $\alpha = 2.f_{r21}$  tombent à des positions correspondant aux pics du spectre, pour autant qu'on peut en juger, sachant que la résolution en fréquence spectrale est beaucoup moins bonne qu'en fréquence cyclique.



Niveau 0.7

Jour 2 filtre autour du 2nd harmonique d'engrenement

fig. (5-9)(a)

Jour 02

Jour 02. Signal filtre autour du 2nd harmonique.

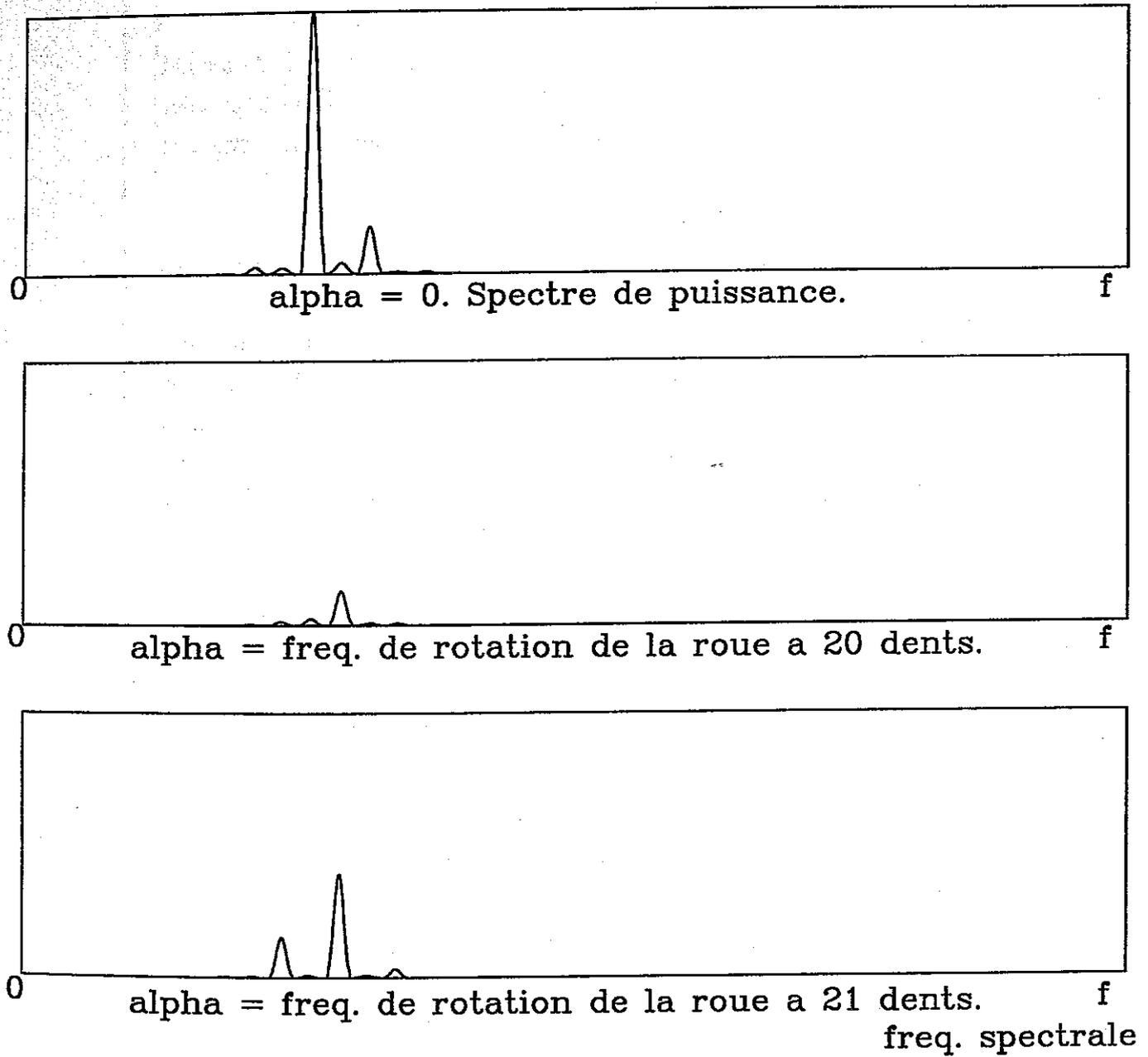


Fig. (5-9)(b)

### Paramètres choisis. Résolution en fréquences spectrale et cyclique.

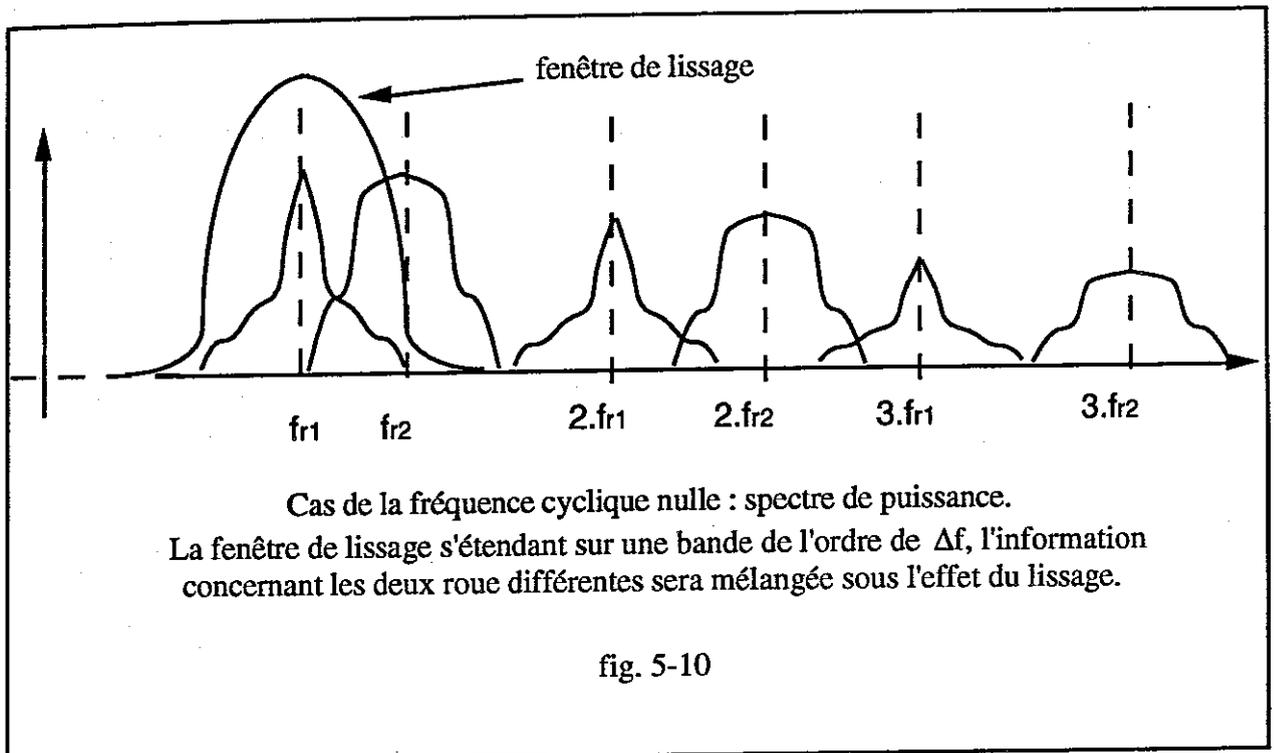
Le signal original comprend 60 000 échantillons. Après filtrage autour du second harmonique d'engrènement, et démodulation pour centrer le signal filtré sur le premier harmonique d'engrènement, le signal comprend 4096 échantillons, et la fréquence d'échantillonnage est égale à 1250 Hz.

La résolution en fréquence cyclique est la résolution maximale qu'autorisent ces valeurs, soit  $\Delta\alpha = 0,3$  Hz. La résolution spectrale est moins bonne du fait du lissage. La largeur de la fenêtre de lissage est choisie de façon optimale compte tenu des fréquences étudiées (fréquences de rotation des roues) et de la nécessité d'effectuer un certain nombre de moyennes pour avoir une estimation correcte. La fenêtre a pour largeur de bande 50 échantillons en fréquence, ce qui correspond approximativement à la valeur des fréquences de rotation des roues. La résolution en fréquence spectrale est donc égale à  $\Delta f = 50 \cdot \Delta\alpha = 15$  Hz.

Il est donc impossible dans le spectre de puissance de séparer les deux fréquences de rotation, celles-ci sont séparées en fréquence cyclique.

### 5-3-2 Cohérence spectrale. Effet de la normalisation.

Pour la fréquence cyclique nulle on obtient le spectre de puissance du signal. On remarque alors que le lissage autour d'une fréquence donnée peut contenir de l'information aussi bien liée à une roue qu'à l'autre et qu'on ne sépare pas du tout l'information concernant les deux roues. (fig. (5-10)).



Or, on obtient la cohérence spectrale en normalisant la corrélation spectrale par des valeurs du spectre de puissance. Autrement dit, dans la cohérence spectrale, la séparation des roues n'est plus réalisée, car le dénominateur introduit toujours un mélange des deux signaux  $s_{r1}$  et  $s_{r2}$ .

La figure (5-11) représente pour le même signal qu'au paragraphe précédent le spectre de puissance et les coupes de la cohérence et de la corrélation spectrales pour la fréquence cyclique égale au double de la fréquence de rotation de la roue à 21 dents.

Vibration enregistrée le deuxième jour de l'expérimentation  
filtrée autour du second harmonique d'engrènement.

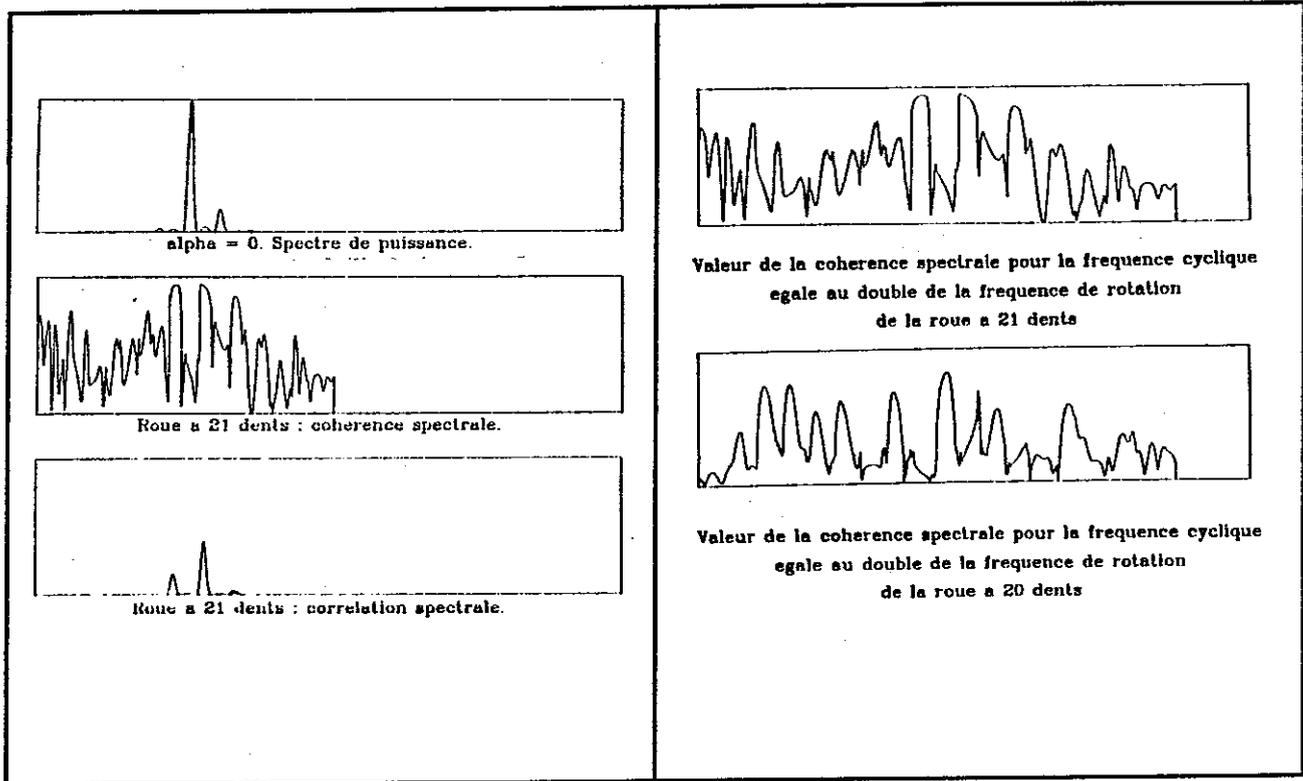


Fig. (5-11)

Fig. (5-12)

On voit que dans la corrélation spectrale comme dans la cohérence spectrale, trois liens sont mis en évidence. Ce que nous appelons "lien" est le fait que les amplitudes complexes de deux composantes fréquentielles soient corrélées. Comme on a choisi pour la fréquence cyclique l'harmonique d'ordre 2 de la fréquence de rotation de la roue concernée, les liens qu'on fait apparaître ne concernent pas deux harmoniques successifs de la fréquence de rotation mais deux harmoniques séparés par un harmonique intermédiaire, et les pics représentatifs de ces liens apparaissent en fréquence spectrale à la position de cet harmonique intermédiaire.

Dans la corrélation spectrale, l'amplitude des pics correspondants est d'autant plus élevée que les composantes dont ils représentent le lien sont de forte énergie. La cohérence spectrale est une caractérisation beaucoup plus sûre de l'intensité de ces liens, puisque du fait de la normalisation elle donne autant d'importance aux liens apparaissant entre des harmoniques de faible énergie qu'à ceux apparaissant entre les harmoniques prépondérants.

La figure (5-12) représente les valeurs de la cohérence spectrale de ce même signal pour les fréquences cycliques  $\alpha = 2.f_{r20}$  et  $\alpha = 2.f_{r21}$ . Comme on le verra par la suite, les trois liens détectés pour la roue à 21 dents sont une caractéristique qui reste stable au cours de l'expérimentation, tandis que de nouveaux liens apparaissent sur la courbe caractérisant l'état de la roue à 20 dents, celle qui se détériore. La résolution en fréquence spectrale est insuffisante pour qu'on puisse attribuer chaque courbe à la roue correspondante, c'est la valeur de la fréquence cyclique qui nous donne ce renseignement.

### 5-3-3 Apparition du défaut. Influence de la normalisation.

On a vu que l'apparition d'un défaut sur la roue  $i$  rend la forme de la modulation plus abrupte, et fait donc apparaître dans son spectre des harmoniques d'ordre plus élevé. Ces harmoniques étant de faible énergie, la corrélation spectrale ne met pas en relief leur apparition par détection de liens entre eux.

Par contre, la cohérence spectrale, étant normalisée, détecte ces liens, et donc, la présence des harmoniques concernés. On verra donc pour les coupes aux fréquences cycliques multiples de la fréquence de cyclostationnarité de la roue correspondante  $f_{ri}$  un élargissement de la bande du motif obtenu. Mais du fait que le facteur de normalisation contient de l'information liée aux deux roues, et va donc augmenter en énergie dans certaines zones lors de l'apparition du défaut, on observera pour les fréquences cycliques

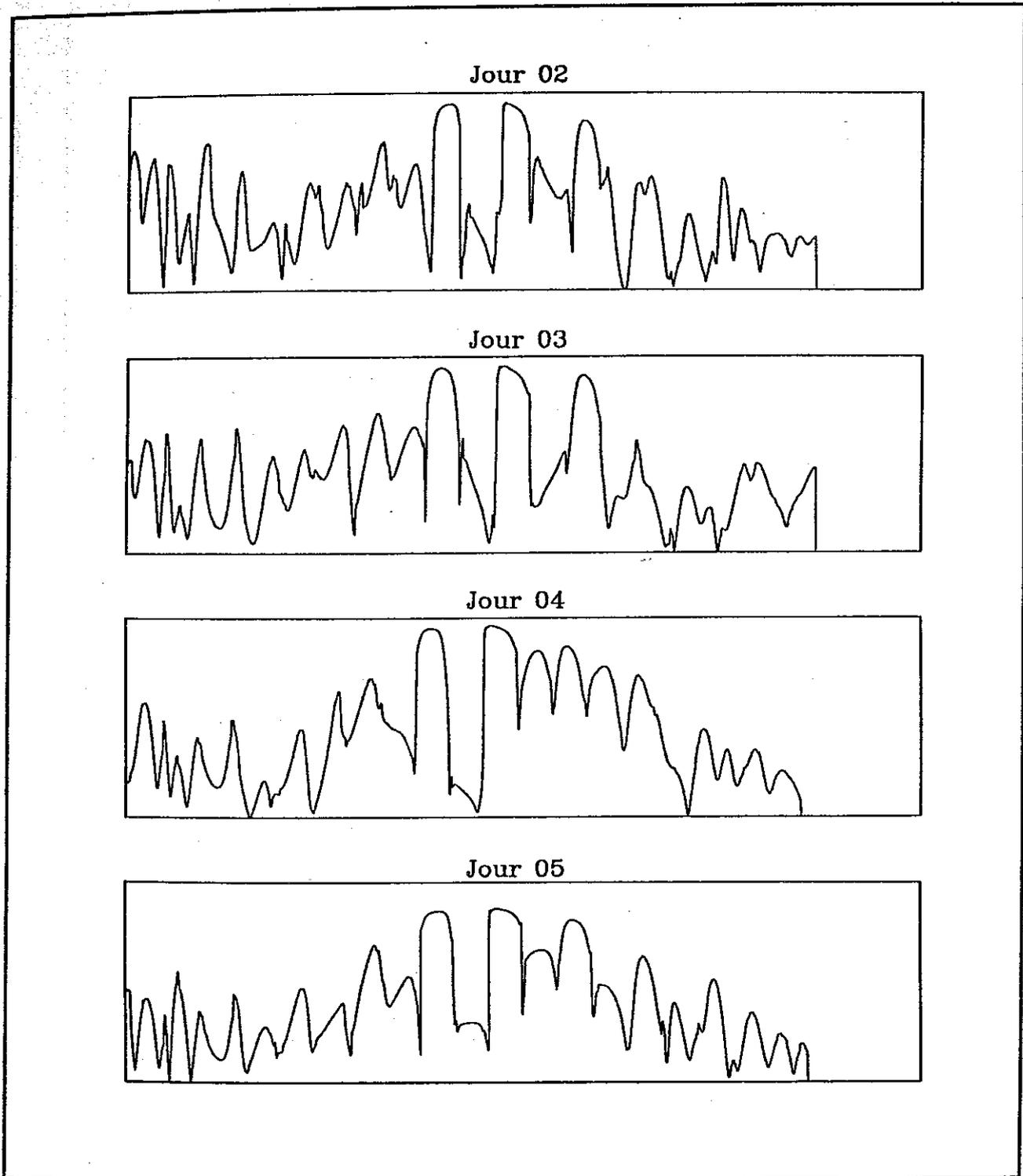
multiples de la fréquence de rotation de l'autre roue, une diminution de la cohérence spectrale.

La figure (5-13) représente les valeurs que prend la coupe de la cohérence spectrale pour chaque jour d'expérimentation pour le signal filtré autour du second harmonique d'engrènement et en effectuant un lissage fréquentiel sur 50 points. Ceci pour les fréquences cycliques  $\alpha = 2.f_{r20}$  et  $\alpha = 2.f_{r21}$ .

Pour la roue à 20 dents, qui est celle qui se détériore, à partir du dixième jour il apparait de nouveaux liens pour des bandes latérales éloignées de l'harmonique central (harmonique d'engrènement autour duquel on a filtré), ce qui signifie qu'il apparait dans le spectre de la modulation des harmoniques d'ordre plus élevé que ceux qu'elle contient lorsque le réducteur est en bon état de fonctionnement.

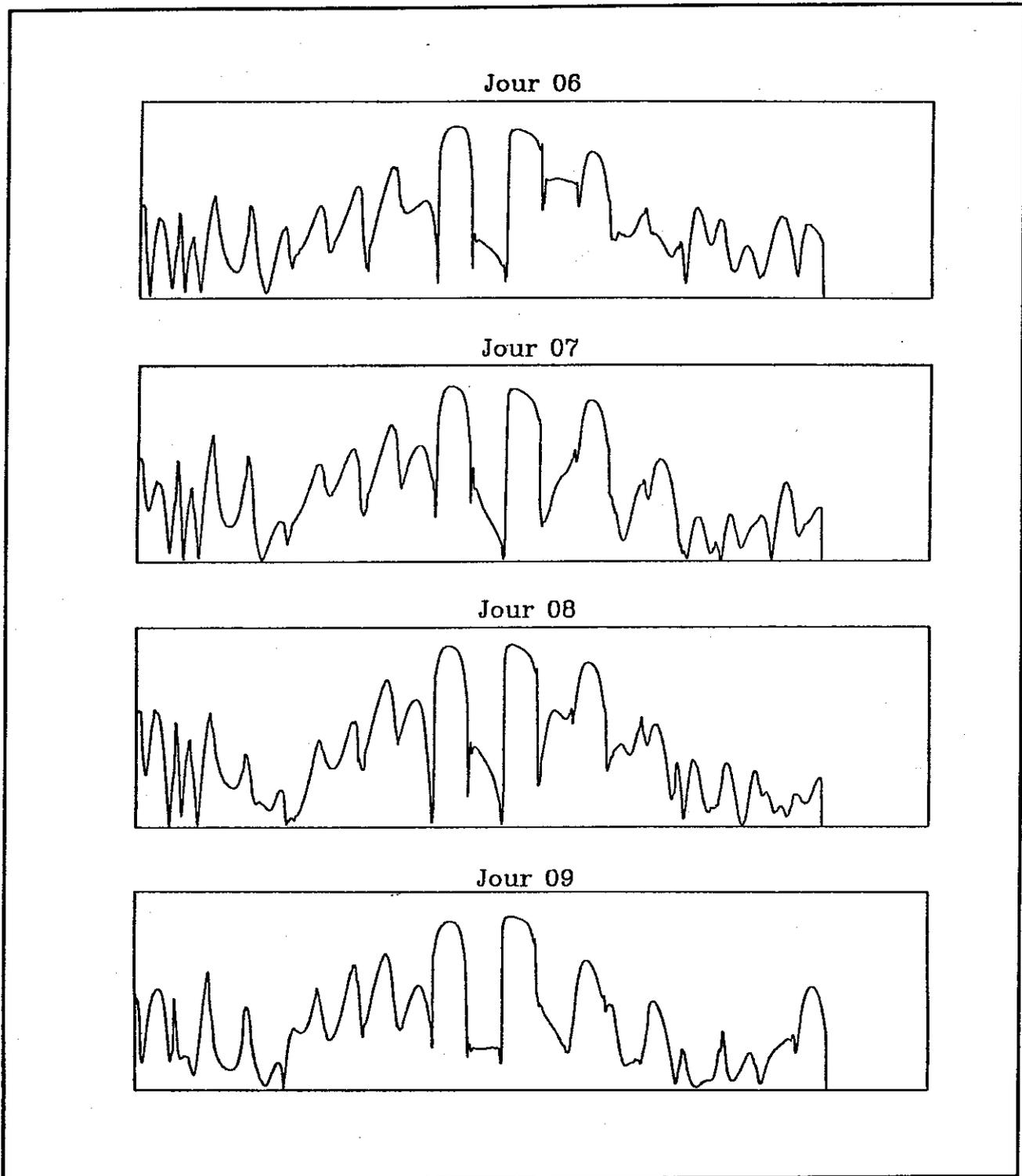
Pour la roue à 21 dents, qui reste en bon état, on observe peu de différences d'un jour sur l'autre, les trois mêmes liens apparaissent pour chaque jour de l'expérimentation. Sur les derniers jours, on observe une légère détérioration des pics représentatifs de ces liens. Celle-ci provient de la normalisation par le spectre de puissance, qui, comme on l'a vu change d'aspect lors de l'apparition du défaut.

La figure (5-15) représente les mêmes courbes que les figures (5-13) et (5-14) mais sous une forme plus facile à interpréter. Chacune des deux surfaces se rapporte à l'un des deux roues. Sur l'axe vertical sont représentés les différents jours de l'expérimentation. Sur l'axe horizontal, la fréquence spectrale. Chaque courbe est une coupe de la cohérence spectrale pour une fréquence cyclique donnée. Elle est donc fonction de la fréquence spectrale, à fréquence cyclique constante. Pour chacune des deux roues, la fréquence cyclique choisie est égale au second harmonique de la fréquence de rotation de la roue concernée. Le signal ayant été filtré autour de l'un des harmoniques d'engrènement avant le traitement, la position de cet harmonique est au centre de l'axe horizontal. Ainsi, des liens apparaissant à des positions excentrées détectent la présence de bandes latérales d'ordre élevé. On voit ainsi apparaître des bandes latérales d'ordre élevé dès le 9ième jour d'expérimentation pour la roue à 20 dents.



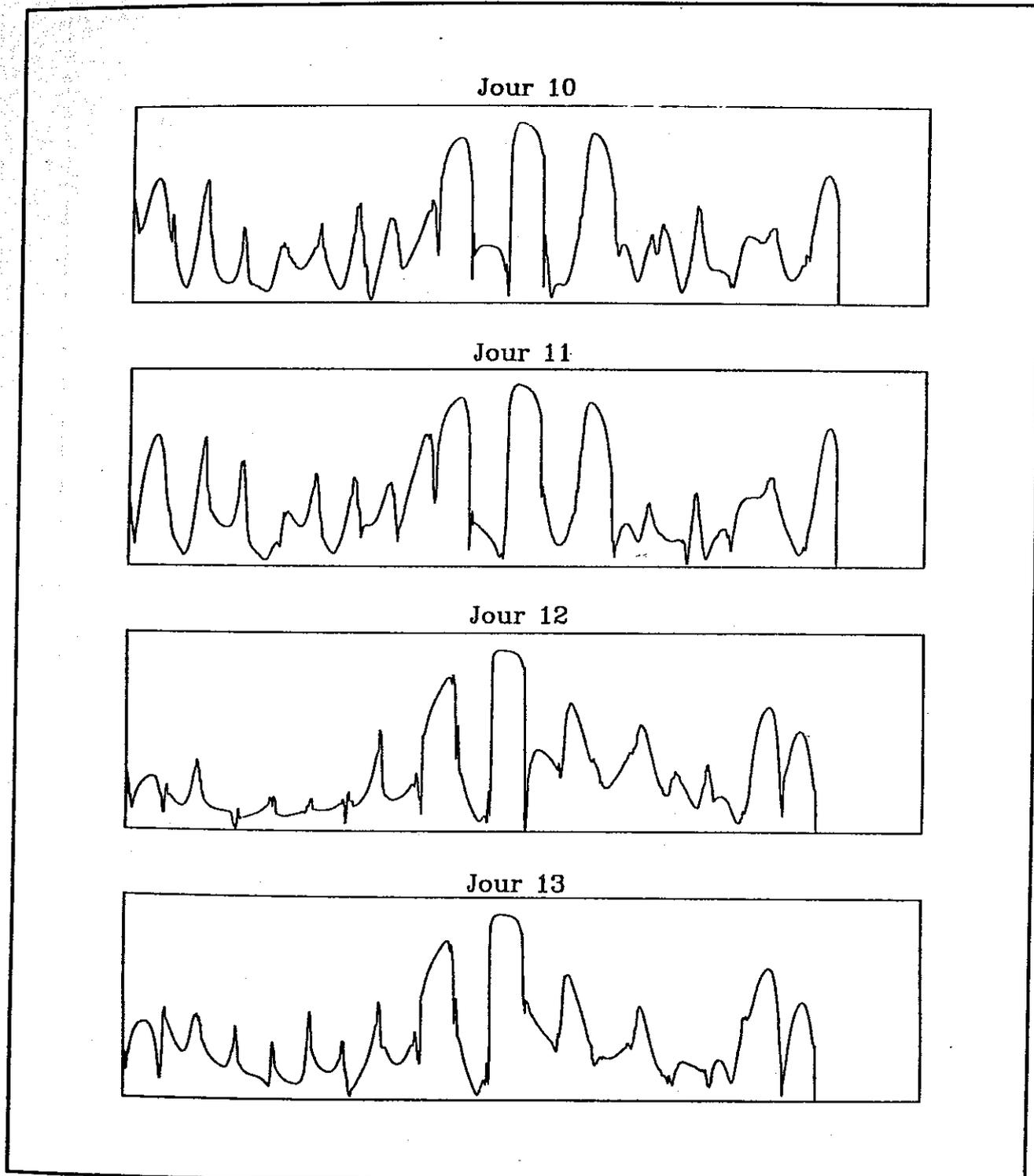
Fichiers filtrés autour du second harmonique d'engrènement.  
Valeur de la cohérence spectrale pour la fréquence cyclique égale au double  
de la fréquence de rotation de la roue à 21 dents.

Fig. (5-13)(a)



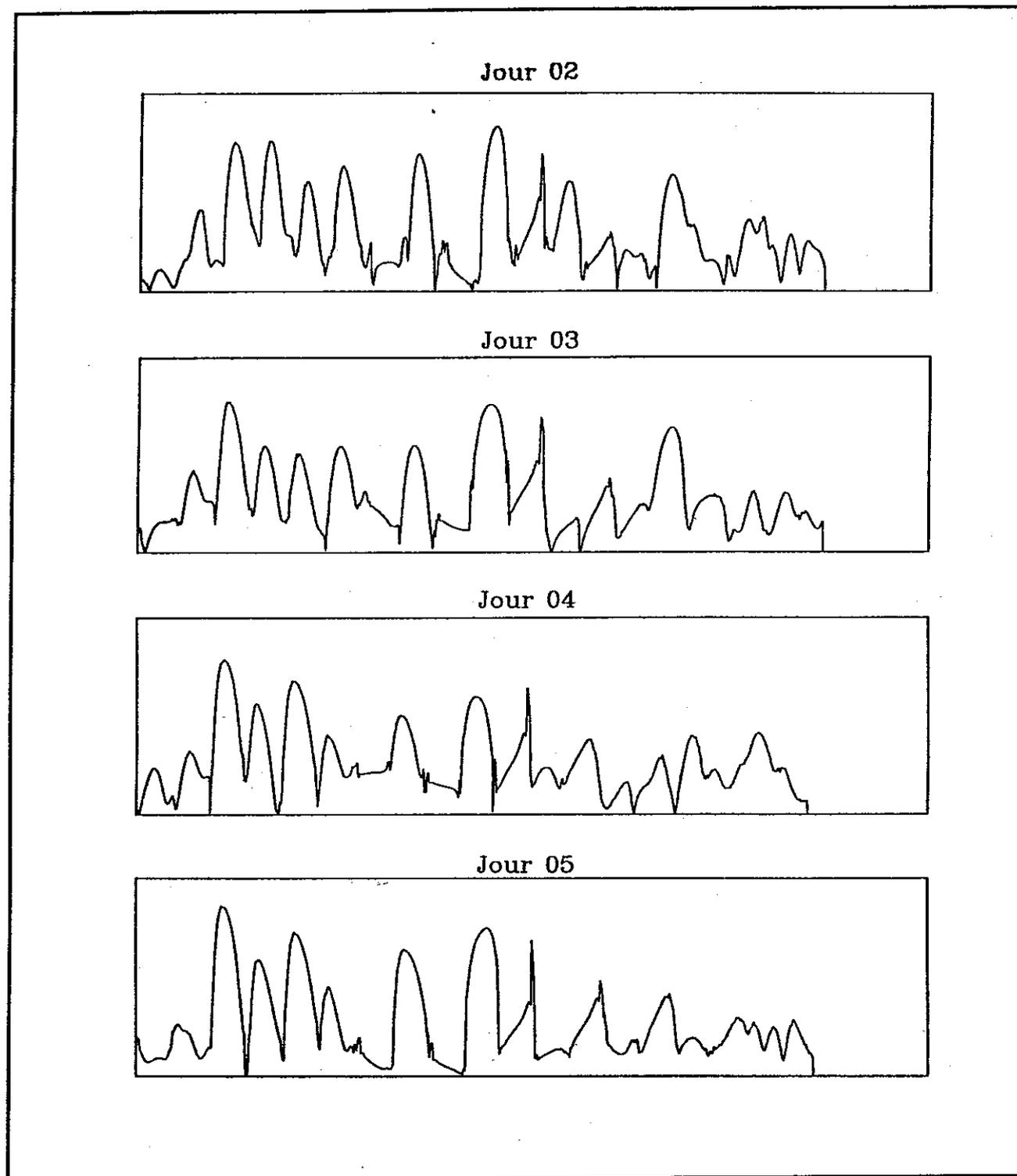
Fichiers filtrés autour du second harmonique d'engrènement.  
Valeur de la cohérence spectrale pour la fréquence cyclique égale au double  
de la fréquence de rotation de la roue à 21 dents.

Fig. (5-13)(b)



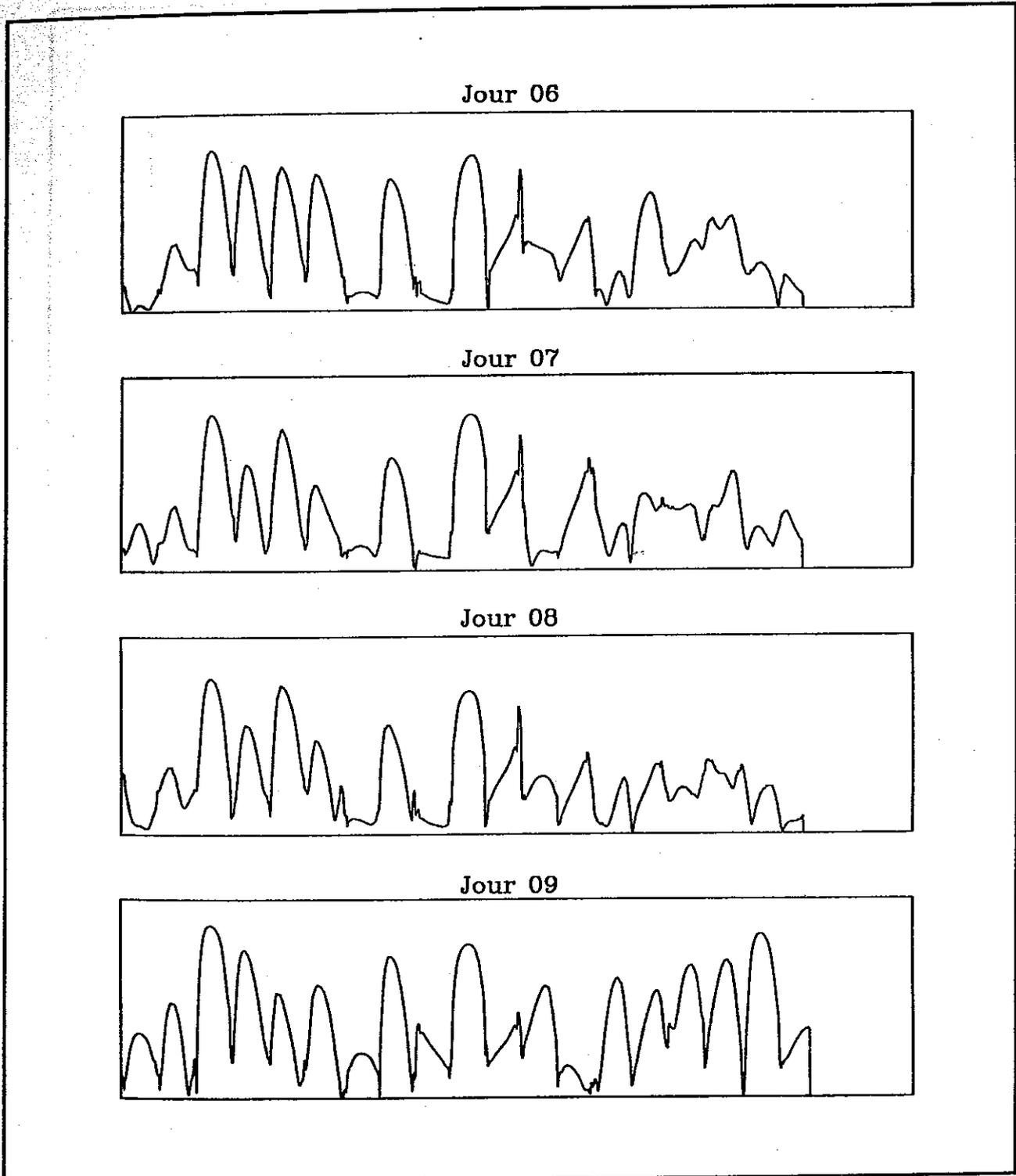
Fichiers filtrés autour du second harmonique d'engrènement.  
Valeur de la cohérence spectrale pour la fréquence cyclique égale au double  
de la fréquence de rotation de la roue à 21 dents.

Fig. (5-13)(c)



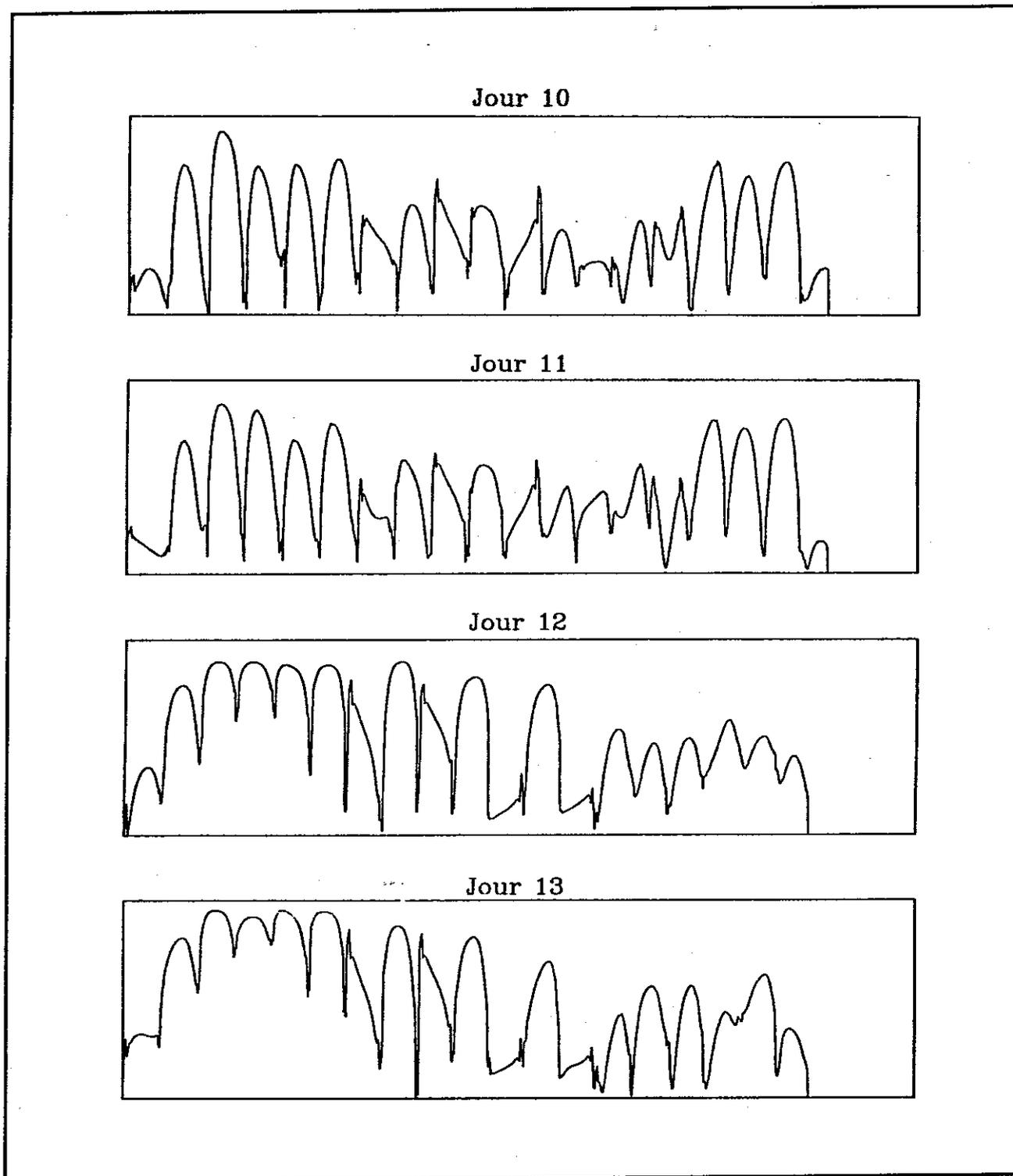
Fichiers filtrés autour du second harmonique d'engrènement.  
Valeur de la cohérence spectrale pour la fréquence cyclique égale au double  
de la fréquence de rotation de la roue à 20 dents.

Fig. (5-14)(a)



Fichiers filtrés autour du second harmonique d'engrènement.  
Valeur de la cohérence spectrale pour la fréquence cyclique égale au double  
de la fréquence de rotation de la roue à 20 dents.

Fig. (5-14)(b)



Fichiers filtrés autour du second harmonique d'engrènement.  
Valeur de la cohérence spectrale pour la fréquence cyclique égale au double  
de la fréquence de rotation de la roue à 20 dents.

Fig. (5-14)(c)

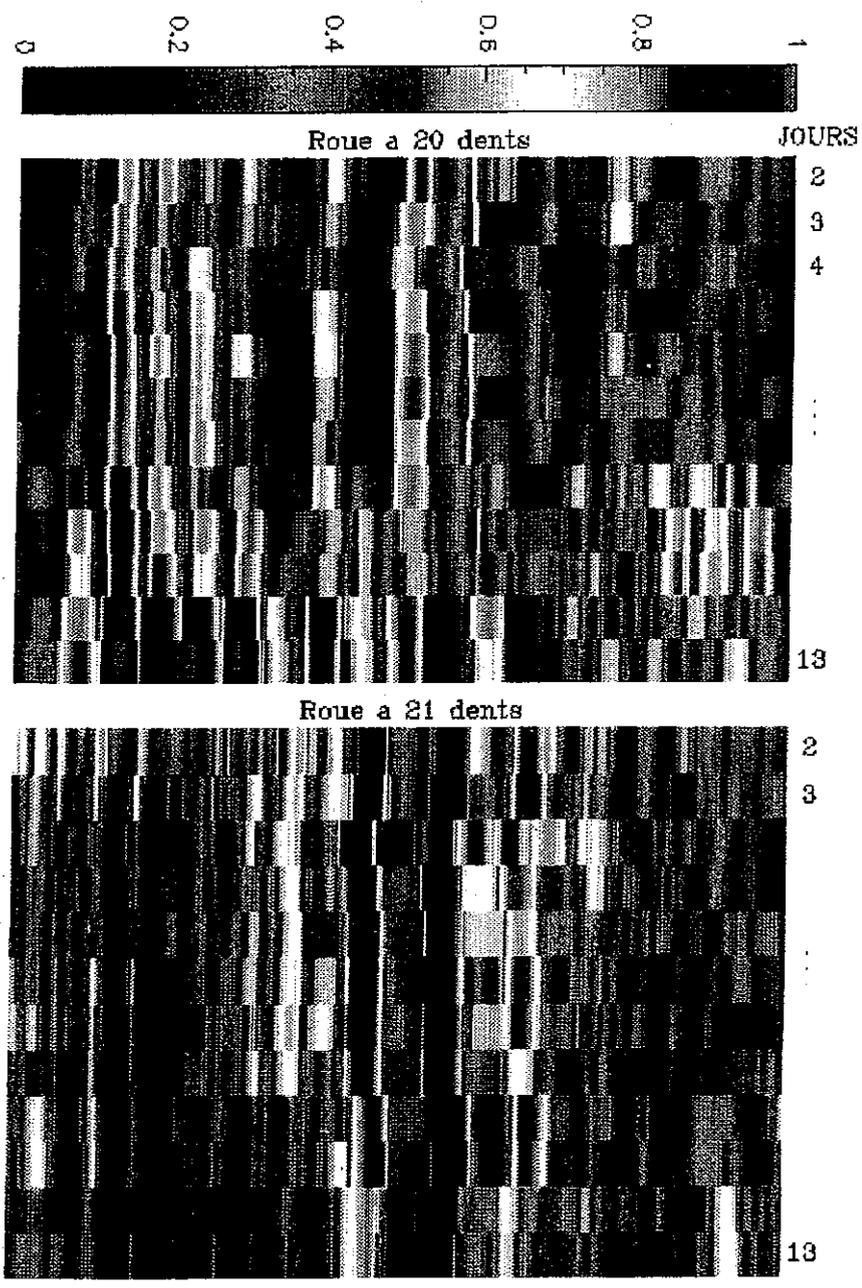


fig. (5-15)

## CONCLUSION

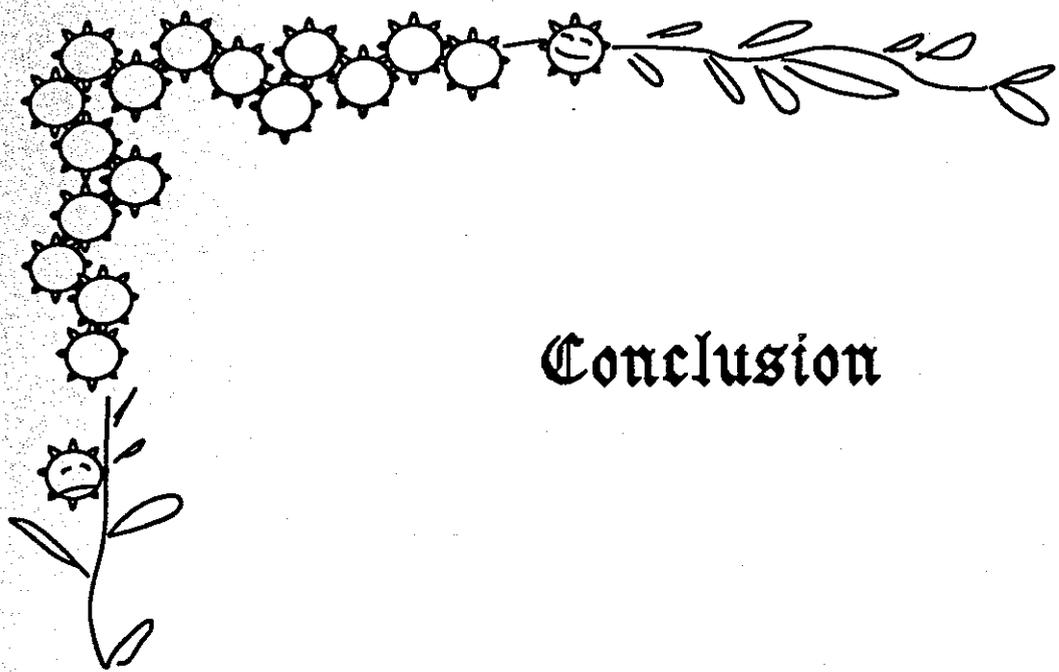
Les vibrations d'engrenage sont donc bien cyclostationnaires, comme le laissait supposer la structure du modèle. Le choix de la longueur des tranches de signal étudiées dépend des caractéristiques du signal que l'on veut mettre en évidence. En effet, selon qu'on choisit une résolution spectrale fine, permettant de séparer les modulations, ou une résolution grossière, (on les considère alors comme des fluctuations aléatoires des harmoniques d'engrènement), le signal est cyclostationnaire à différentes fréquences.

Dans le cas d'une faible résolution, il est purement cyclostationnaire à la fréquence d'engrènement. Les variations d'amplitude des harmoniques d'engrènement, qu'on peut constater sur une représentation temps-fréquence du signal, sont corrélées d'un harmonique d'engrènement à l'autre. Cette corrélation se traduit par l'apparition sur les corrélation et cohérence spectrales de pics en fréquence cyclique pour les valeurs harmoniques de la fréquence d'engrènement.

L'étude du signal avec une résolution plus fine s'avère plus intéressante pour l'aide au diagnostic de l'engrenage. En effet, le signal est alors cyclostationnaire au sens large et présente deux fréquences de cyclostationnarité qui sont les fréquences de rotation des deux roues du réducteur. La corrélation spectrale permet de séparer en fréquence cyclique l'information concernant les deux roues différentes, mais l'absence de normalisation pose un problème pour la détection des liens statistiques entre harmoniques de faible amplitude. Or, l'information concernant le défaut est justement localisée sur des harmoniques de la fréquence de rotation correspondante d'ordre élevé et de faible énergie.

C'est finalement l'étude de la cohérence spectrale du signal pour une résolution fine qui donne les renseignements les plus intéressants. La normalisation par les valeurs du spectre de puissance permet de mettre en évidence la présence de liens entre harmoniques de faible énergie, et de ce fait de révéler l'existence d'harmoniques d'ordre élevé dont l'apparition est liée à celle du défaut. C'est ainsi qu'on voit évoluer l'aspect de la cohérence cyclique pour les fréquences cycliques harmoniques de la fréquence de rotation de la roue détériorée. Il faut cependant noter que ce résultat a été obtenu sur une unique expérimentation et qu'il n'est d'une part peut-être pas optimal, d'autre part peut-être pas généralisable.

La cyclostationnarité des signaux d'enrenage pourrait être par ailleurs utilisée pour d'autres applications, dans le cas où deux ou trois réducteurs sont enregistrés sur un même capteur (boîte de vitesse). La corrélation spectrale pourrait alors permettre de séparer l'information liée aux différents réducteurs.



## Conclusion

## CONCLUSION.

L'analyse vibratoire acquiert une importance grandissante dans le milieu industriel. Les possibilités d'application sont diverses et comprennent entre autre : la surveillance de dispositifs de production durant le fonctionnement en vue d'une maintenance économique et préventive, la surveillance en vol des boîtes de vitesse d'hélicoptères, la détection de défauts sur les boîtes de vitesse neuves sortant en fin d'une chaîne de production et sur les divers éléments au cours de la fabrication, la réduction de bruit [c-1].

Nous avons élaboré à partir d'une connaissance des phénomènes mécaniques un modèle des vibrations du réducteur. Celui-ci nous a permis de déterminer de quelle façon l'apparition d'un défaut sur l'une des roues du réducteur modifie l'aspect des vibrations et de montrer comment cette transformation apparait sur les modulations que contient le signal, modulations périodiques aux fréquences de rotation des roues.

Nous avons testé diverses méthodes qui sont utilisées dans l'industrie : niveau vibratoire global, moyennage synchrone, analyse spectrale et cepstre. Nous avons présenté les résultats obtenus avec le cepstre, qui sont les plus convaincants en matière de diagnostic. Nous montrons comment le cepstre, en agissant de façon non linéaire sur le spectre de puissance, donne une importance accrue aux modulations, permet ainsi de détecter de façon précoce l'apparition du défaut et de déterminer quelle roue il affecte, et peut donc être utilisé efficacement à des fins de maintenance préventive. L'analyse cepstrale nous a par ailleurs permis de confirmer l'adéquation du modèle choisi à la nature des vibrations.

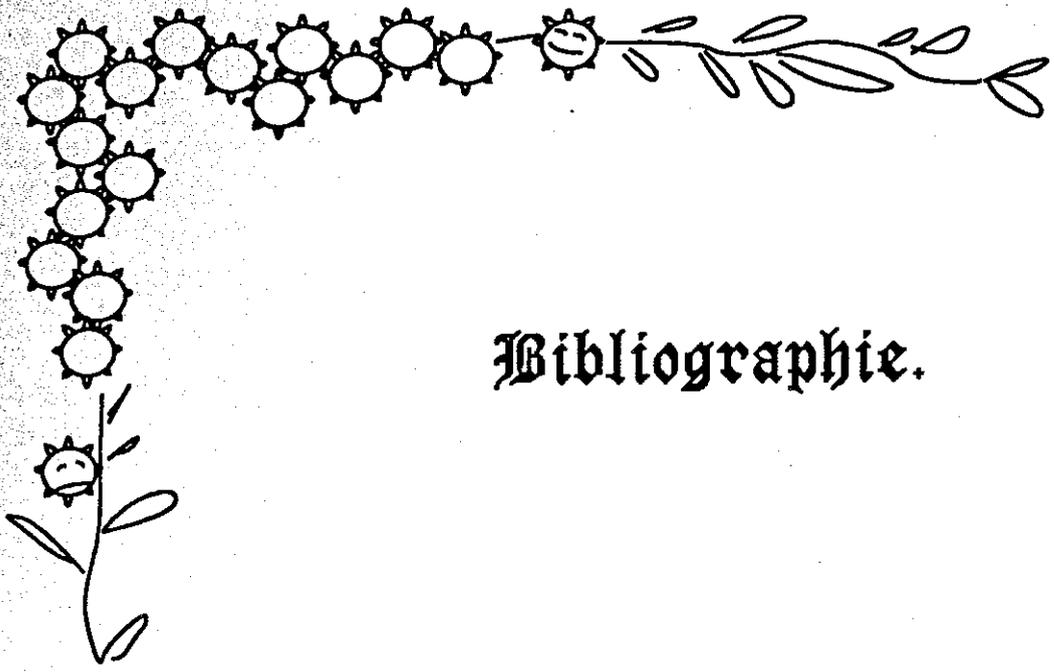
L'étude du modèle nous portant à penser que le signal était non stationnaire, nous l'avons ensuite étudié par l'application de la corrélation spectrale et de la cohérence spectrale, méthodes adaptées aux signaux cyclostationnaires. Les signaux cyclostationnaires sont une classe de signaux qui peuvent contenir des composantes fréquentielles corrélées entre elles, contrairement aux signaux stationnaires, mais à condition que ces composantes soient distantes en fréquence de certaines valeurs discrètes qui sont les fréquences de cyclostationnarité du signal.

Les vibrations d'engrenage, selon qu'on les observe avec une faible ou une bonne résolution en fréquence, sont cyclostationnaires à des fréquences différentes. Dans le cas d'une faible résolution, le signal est purement cyclostationnaire à la fréquence d'engrènement du réducteur. Dans le cas d'une résolution fréquentielle fine, le signal est

cyclostationnaire au sens large et ses fréquences de cyclostationnarité sont les fréquences de rotation des deux roues qui le composent.

Ce deuxième cas s'est avéré être le plus intéressant sur les signaux que nous présentons, puisque la cohérence spectrale permet de séparer l'information liée aux deux roues et de mettre en évidence l'apparition d'harmoniques d'ordre élevé de la modulation correspondant à la roue abîmée.

Ce pendant l'utilisation de la corrélation spectrale sur des signaux d'engrenage pourraient avoir d'autres applications, lors de l'étude de vibrations produites par plusieurs réducteurs tournant en même temps puisqu'elle permet de mettre en évidence les diverses familles d'harmoniques présentes dans le signal.



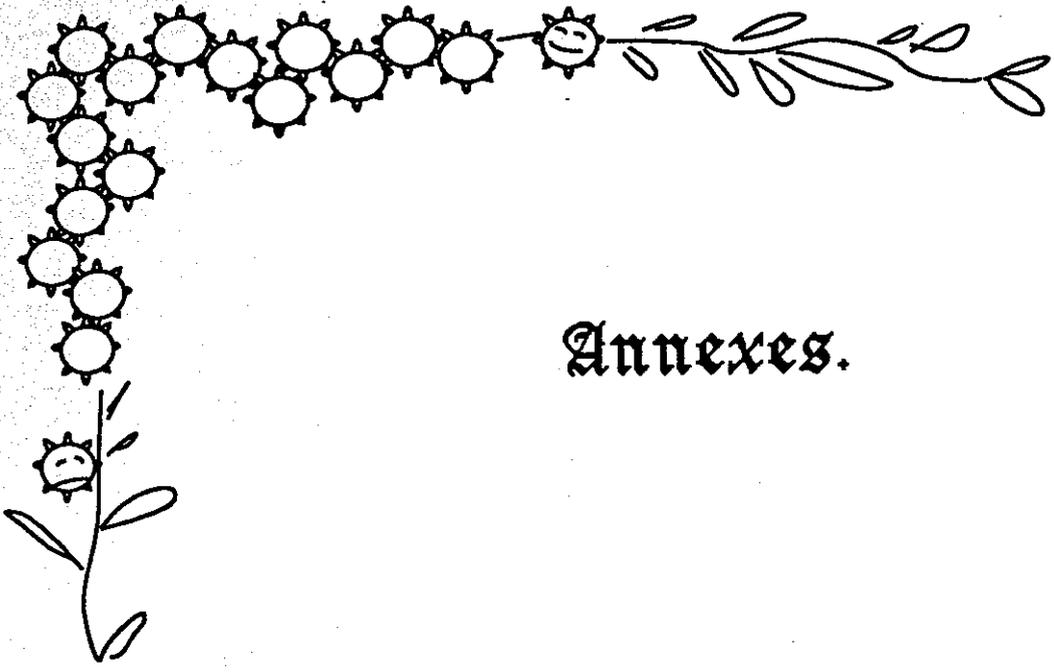
**Bibliographie.**

## BIBLIOGRAPHIE

- [i-1] COUDRAY, GUESDON "Surveillance des machines" Da. 1983, Vol.84, 33p.
- [i-2] MORYSSE "Maintenance préventive des machines tournantes" Bulletin technique du bureau Veritas, N°3, 1988.
- [i-3] BAPS "La maintenance prédictive, un impératif industriel" Achats et Entretien, N° 351-04-83, pp. 31-42.
- [i-4] GAILLOCHET "Surveillance des machines" CETIM, Rapport n°15J041, Août 1980, 42p.
- [i-5] POUBLAN "Reconnaissance automatique de signaux à évolution continue" Thèse présentée à l'Institut National Polytechnique de Toulouse le 20 Décembre 1991.
- [i-6] POUBLAN, CASTANIE "Surveillance de machines tournantes par analyse des vibrations, cas des réducteurs à engrenages" Journées CETIM-GRECO Tdsi, Senlis, 7-8 Mars 1990.
- [i-7] TOYOTA, MAEKAWA, NAKASHIMA "Automatic Diagnosis for Malfunctions of Rotating Machines by Fault-Matrix" Bull, Japan Soc. of Prec. Engg., Vol. 16, N°2 (June 1982)
- 
- [1-1] BOUMEDIENE "Estimation de la raideur d'une paire de dents d'engrenages droits au cours de l'engrènement" Novembre 1983, Bulletin technique du bureau Veritas.
- [1-2] KUBO, KIYONO, FUJINO "On Analysis and Prediction of Machine Vibration Caused by Gear Meshing" Bulletin of JSME, Vol. 29, N° 258, December 1986.
- [1-3] WHITE "Simulation and Analysis of Machinery Fault Signals" Journal of Sound and Vibration, Da. 1984, N° 93(1), pp. 95-116
- [1-4] RANDALL "A New Method of Modeling Gear Faults" Journal of Mechanical Design, April 1982, Vol. 104, pp. 259-267.
- [1-5] SAVIC, OGNJANOVIC "Vibration and Noise Due to Gear Meshing" Condition Monitoring, Da. 84, pp.243-255.
- [1-6] "Mechanical Signature Analysis. Theory and Applications" 1986, Ed. Braun.
- [1-7] MARK "Analysis of the Vibratory Excitation of Gear Systems : Basic Theory" J. Acoust. Soc. Am., Mai 1978, Vol. 63(5), pp. 1409-1430.
- [1-8] LIPOVSZKY, SOLYOMVÁRI, VARGA "Vibration Testing of Machines and their Maintenance", 1990, Elsevier.
- 
- [2-1] HENNUIT "La mesure et l'analyse des vibrations mécaniques appliquées aux moteurs thermiques et au matériel roulant. Diagnostic des anomalies fonctionnelles" Revue M Tijdschrift, Vol. 20, N° 3, pp. 257-269.

- [2-2] "Diagnostic des roulements, engrenages" Brüel & Kjaer, French BA 7123-12 (based on English BA 7075-12).
- [2-3] GUESDON GARCIN BOCQUET "Surveillance des machines par analyse des vibrations" CETIM-Informations n°65.
- [2-4] Mc FADDEN "Detecting Fatigue Cracks in Gears by Demodulation of the Meshing Vibration" Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Avril 1986, Vol. 108, pp. 165-170.
- [2-5] Mc FADDEN, SMITH "A Signal Processing Technique for Detecting Local Defects in a Gear from the Signal Average of the Vibration" Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 199, N°C4, pp. 287-292.
- [2-6] REDDY "Importance of Phase Measurements in Mechanical Fault Diagnosis of Rotating Machinery" IE(I) Journal-ME, Juillet 1984, Vol. 65, pp. 10-13.
- [2-7] RANDALL "Applications de l'analyse cepstrale à l'interprétation des signaux acoustiques vibratoires issus des machines" Colloque GRETSI, 1977, pp. 31-1 à 31-6.
- [2-8] SIDAHMED, GRENIER "Surveillance et diagnostic de réducteurs à engrenages" Le traitement du signal en mécanique, recueil de conférences, Mars 1990, pp. 29-41.
- [2-9] OPPENHEIM, SCHAFER, STOCKHAM "Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals" IEEE transactions on audio and electroacoustics, Septembre 1968, Vol. AU-16, N°3, pp. 437-466.
- [2-10] BALLUET "Les opérateurs cepstres. Application à la séparation d'échos rapprochés" Thèse de l'INPG, 1979, pp. 1-125.
- [2-11] RANDALL "Cepstrum Analysis and Gearbox Fault Diagnosis" Edition 2, Bulletin Technique, Brüel & Kjaer application note, 1980, pp. 1-19.
- [2-12] CAPDESSUS, SIDAHMED "Analyse des vibrations d'un engrenage : cepstre, corrélation, spectre" Traitement du Signal, Vol. 8, N°5, pp. 365-371.
- [3-1] GARDNER "Statistical Spectral Analysis. A Non Probabilistic Theory" 1988 by Prentice-Hall, Inc.
- [3-2] GARDNER, CHEN "Selective Source Location by Exploitation of Spectral Coherence" IEEE/ASSP Fourth Workshop on Spectrum Estimation and Modeling, Minneapolis, August 3-5, 1988, pp. 271-276.
- [3-3] GARDNER, "Exploitation of Spectral Correlation in Cyclostationary Signals" IEEE/ASSP Fourth Workshop on Spectrum Estimation and Modeling, Minneapolis, August 3-5, 1988, pp. 1-6.
- [3-4] GARDNER "Exploitation of Spectral Redundancy in Cyclostationary Signals" IEEE Sp Magazine, Avril 1991, pp. 14-36.

- [3-5] BRAUN, SETH "Analysis of Repetitive Mechanism Signatures" Journal of Sound and Vibration, 1980, Vol. 70(4), pp. 513-526.
- [3-6] RAOOF "Etude de la fonction de corrélation spectrale" juillet 1990, rapport de stage de DEA, CEPHAG.
- [4-1] DE MAGNEE "Analyse des vibrations pour la surveillance de machines rotatives" Achats et Entretien, N° 330-05-81, pp. 35-46.
- [4-2] JENKINS, WATTS "Spectral analysis and its applications", 1968, Holden-Day.
- [c-1] DEROU "Contribution à l'étude des vibrations des machines synchrones", Thèse INPG, 1992.

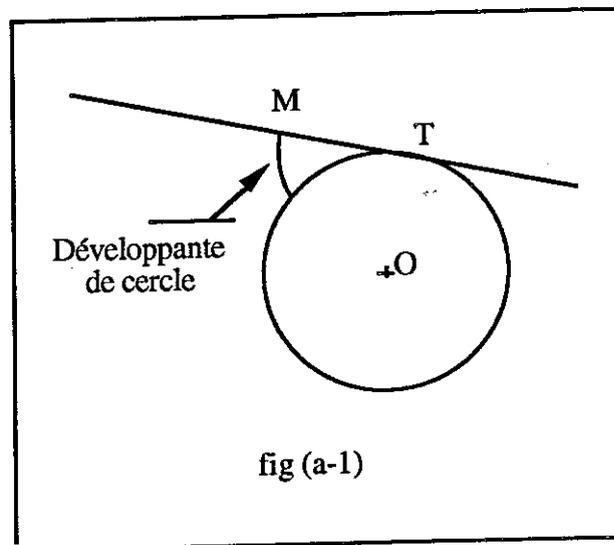


**Annexes.**

## Annexe 1A

Définition de certains termes concernant les engrenages.Cercle de base :

Pour éviter le glissement entre les dents en contact on les usine en leur donnant pour forme une développante de cercle. La développante de cercle est définie comme le montre la figure (a-1), par la trajectoire d'un point fixe quelconque M d'une droite tangente T à un cercle et animée sur ce cercle d'un mouvement de roulement sans glissement. La trajectoire de M est alors une développante du cercle considéré.



Le cercle dont la développante est le profil des dents d'une roue de l'engrenage est appelé cercle de base de cette roue.

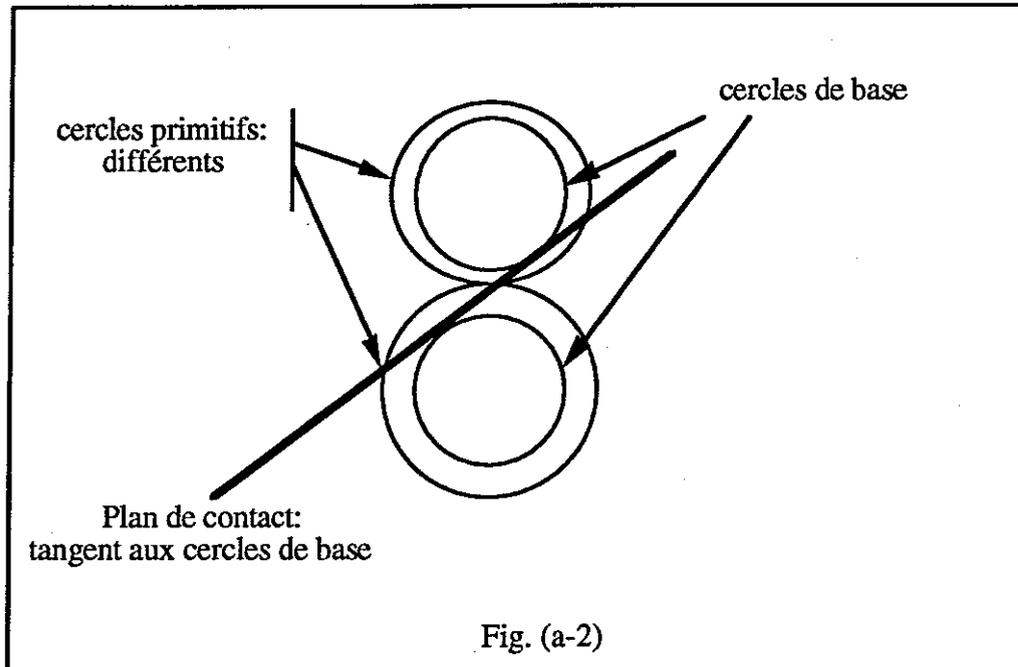
Plan de contact.

Les cercles de base de chaque roue définissent la forme des dents : le point de contact appartient, pour chacune de deux dents en contact, à une tangente au cercle de base de la roue correspondante. D'autre part, les surfaces des deux dents sont tangentes l'une à l'autre en ce point. Les deux tangentes aux deux cercles de base se confondent en une unique droite tangente aux cercles de base, et sur laquelle se trouve tout point de contact. (Voir fig. (a-2)).

Ceci est vrai pour une coupe de l'engrenage selon une direction perpendiculaire aux axes des roues. Si l'on rétablit l'épaisseur du dispositif, la droite de contact donne un

plan de contact, tangent aux cylindres de bases (cylindres parallèles aux axes des roues générés par les cercles de base), et c'est dans ce plan de contact que se trouvent tous les points de contact.

Les contacts n'ont lieu que sur une portion limitée de ce plan qui est la zone de contact.



Ceci explique qu'on puisse définir une variable  $x$  par le produit de la position angulaire d'une des roues et du rayon de son cercle de base en prenant indifféremment l'une ou l'autre roue.

### Annexe 3A

Un signal stationnaire ne peut contenir que des composantes fréquentielles décorréliées. En effet, si le signal est stationnaire, son autocorrélation ne dépend pas du temps :  $R_x(t, \tau) = R_x(\tau)$ .

$R_x(t, \tau) = E[x(t) \cdot x^*(t - \tau)]$ , et  $x(t)$  peut s'écrire comme transformée de Fourier inverse de sa représentation fréquentielle.

$$x(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta f} \int_{\Delta f} X(f_1) \cdot e^{2\pi j f_1 t} df_1$$

$$x^*(t - \tau) = \left( \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta f} \int_{\Delta f} X(f_2) \cdot e^{2\pi j f_2 (t - \tau)} df_2 \right)^*$$

$$\text{D'où } R_x(t, \tau) = E \left[ \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta f^2} \int_{\Delta f} \int_{\Delta f} X(f_1) \cdot X^*(f_2) \cdot e^{2\pi j (f_1 t - f_2 (t - \tau))} df_2 df_1 \right]$$

$$R_x(t, \tau) = \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta f^2} \int_{\Delta f} \int_{\Delta f} E[X(f_1) \cdot X^*(f_2)] \cdot e^{2\pi j (f_1 - f_2) t} \cdot e^{2\pi j f_2 \tau} df_2 df_1$$

Posons  $\alpha = f_2 - f_1$ , l'expression devient alors :

$$R_x(t, \tau) = \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta f^2} \int_{\Delta f} \int_{\Delta f} E[X(f_2 - \alpha) \cdot X^*(f_2)] \cdot e^{-2\pi j \alpha t} \cdot e^{2\pi j f_2 \tau} df_2 d\alpha$$

Or, ce terme ne doit pas dépendre du temps, mais seulement de  $\tau$ . Donc, comme l'apparition de  $t$  est l'effet d'une transformation de Fourier de l'expression selon  $\alpha$ , le fait que celle-ci est constante par rapport à  $t$  doit se traduire par le fait que le terme  $E[X(f_2 - \alpha) \cdot X^*(f_2)]$  est nul pour tout  $\alpha$  sauf  $\alpha = 0$ .

Donc, quels que soient  $(f_1, f_2)$ , le terme  $E[X(f_1) \cdot X^*(f_2)]$  est nul sauf dans le cas particulier  $f_1 = f_2$  (spectre de puissance).

### Annexe 3B

Un signal cyclostationnaire peut contenir que des composantes fréquentielles corrélées. En effet, si le signal est cyclostationnaire, son autocorrélation dépend pas du temps de façon périodique :  $R_x(t, \tau)$  périodique par rapport à  $t$  de fréquence  $\alpha_0$ .

$R_x(t, \tau)$  peut s'écrire, (voir annexe 3A) :

$$R_x(t, \tau) = \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta f^2} \int_{\Delta f} \int_{\Delta f} E[X(f_2 - \alpha) \cdot X^*(f_2)] \cdot e^{-2\pi j \alpha t} \cdot e^{2\pi j f_2 \tau} df_2 d\alpha$$

avec  $\alpha = f_2 - f_1$ .

Or, ce terme doit dépendre du temps de façon périodique à la fréquence  $\alpha = \alpha_0$ .

Ceci se traduit par le fait que le terme  $E[X(f_2 - \alpha) \cdot X^*(f_2)]$  est nul pour tout  $\alpha$  sauf  $\alpha = \alpha_0$  et  $\alpha = 0$ .

Donc un signal cyclostationnaire peut contenir des composantes fréquentielles  $f_2$  et  $f_1$  corrélées. Ces deux composantes doivent satisfaire à la condition  $f_2 - f_1 = \alpha_0$ ,  $\alpha_0$  étant la fréquence de cyclostationnarité du signal.

### Annexe 3C

#### Moyennage synchrone.

Le moyennage synchrone est une méthode couramment utilisée dans l'industrie pour l'analyse vibratoire des machines tournantes. Il permet entre autres de se libérer des problèmes que causent les variations de vitesse de la machine, d'estimer la densité spectrale de puissance des vibrations avec une précision accrue et une meilleure robustesse vis-à-vis du bruit et d'étudier séparément les vibrations de plusieurs machines différentes ou des deux roues d'un engrenage.

#### Principe :

L'idée est de synchroniser l'acquisition du signal sur la vitesse de rotation de l'un des éléments de la machine. Ceci nécessite l'utilisation d'un tachimètre qui transmet au système d'acquisition l'information nécessaire à la synchronisation de la fréquence d'échantillonnage. Cette information consiste en un ou plusieurs tops par tour de l'élément sur lequel se trouve le tachimètre. Après l'acquisition, toutes les fréquences dont la fréquence d'échantillonnage choisie est un multiple entier sont constantes dans l'enregistrement et une période de ces fréquences représente un nombre entier d'échantillons.

#### Variations de vitesse de l'élément tournant :

La fréquence d'échantillonnage étant recalée sur la vitesse de rotation de l'élément étudié, les variations de vitesse de cet élément n'apparaissent plus sur le signal. Ainsi, lorsqu'on estime le spectre de puissance de ce signal par FFT, les raies harmoniques dues aux vibrations de l'élément en question tombent toujours dans les mêmes canaux, ce qui permet de connaître avec une grande précision leur position dans le spectre.

Estimation de la densité spectrale de puissance :

Si en plus la fréquence d'échantillonnage a été choisie de sorte que chaque période des vibrations contienne un nombre d'échantillons égal à une puissance de deux, chaque raie tombe exactement au centre d'un canal.

On peut encore améliorer ces résultats grâce au moyennage synchrone. Celui-ci consiste à moyenner le signal sur plusieurs tranches ayant pour durée la période de rotation de l'élément étudié. Ainsi, les vibrations des éléments qui sont à d'autres fréquences sont atténués par ce moyennage, de même que les bruits aléatoires parasitant le signal.

L'avantage du moyennage synchrone par rapport à un simple moyennage du spectre de puissance sur plusieurs tranches est que dans ce dernier on ne conserve pas l'information de phase du signal et le bruit est plutôt nivelé que supprimé. On peut d'ailleurs pratiquer un équivalent du moyennage synchrone sur le signal fréquentiel, en effectuant un moyennage du spectre complexe qui lui, contient encore l'information de phase.

### Annexe 4A

#### Symétries que présente la corrélation spectrale d'un signal à valeurs réelles.

Soit un signal  $x(t)$  à valeurs réelles. Sa corrélation spectrale est donnée par :

$$S_x^\alpha(f) = E[X(f+\frac{\alpha}{2}) \cdot X^*(f-\frac{\alpha}{2})], \text{ où } X(f) \text{ est la transformée de Fourier de } x(t).$$

Celle-ci présente certaines symétries du fait que  $x(t)$  est réel. En effet,  $X(-f) = X^*(f)$ .

En conséquence de quoi la corrélation spectrale présente les symétries suivantes :

$$S_x^\alpha(-f) = S_x^\alpha(f)$$

$$S_x^{-\alpha}(f) = (S_x^\alpha(f))^*$$

C'est pourquoi nous pouvons nous contenter de la représenter pour les valeurs positives de  $f$  et de  $\alpha$ .

Annexe 4B

Algorithme du programme d'estimation de la corrélation spectrale par périodogramme lissé.

Paramètres d'entrée :

durée	Portion du fichier sur laquelle on travaille, en nombre d'échantillons, elle détermine la résolution en fréquence cyclique : $\Delta\alpha = \frac{1}{\text{durée}}$
nbspectre $\geq$ durée nbspectre = $2^n$ , n entier naturel.	Nombre d'échantillons sur lequel on va effectuer la TFD.
$f_e$	Fréquence d'échantillonnage.
$\alpha_{\min}$	Fréquence cyclique minimale.
$\alpha_{\max}$	Fréquence cyclique maximale.
fenêtre	Durée en nombre d'échantillons de la fenêtre de lissage en fréquence, elle détermine la résolution en fréquence spectrale : $\Delta f = \frac{1}{\text{fenêtre} \cdot \text{durée}} \ll \Delta\alpha$ .
seuil	Seuil de test pour le dénominateur de la cohérence spectrale.

Algorithme :

Ouverture des fichiers résultats pour la corrélation spectrale et la cohérence spectrale. Leurs dimensions sont données par le nombre de points du spectre et le nombre de fréquences cycliques étudiées.

Lecture du fichier à traiter et retrait de la moyenne.

Boucle sur la fréquence cyclique :  $\alpha$  varie de  $\alpha_{\min}$  à  $\alpha_{\max}$  par pas de  $\Delta\alpha = \frac{1}{\text{durée}}$ .

Création de deux versions du signal décalées en fréquence de  $+\frac{\alpha}{2}$  et  $-\frac{\alpha}{2}$  par multiplication du signal original par une exponentielle complexe  $e^{\pm 2\pi i \alpha t}$ .

Pondération de chacune des deux versions par une fenêtre de Hamming en vue de minimiser les rebonds dans la TFD.

Extension de chacun de ces signaux à la durée 'nbspectre' choisie pour effectuer la TFD par ajout d'échantillons nuls, puis passage en fréquence spectrale par TFD.

Calcul de l'interspectre et des autospectres des deux signaux fréquentiels obtenus, par produit complexe conjugué et lissage fréquentiel.

Stockage de l'interspectre dans le fichier des corrélations spectrales au rang correspondant à la fréquence cyclique étudiée.

Calcul de la cohérence spectrale par normalisation de la corrélation spectrale par les valeurs des autospectres (pour les fréquences dont l'amplitude est supérieure au seuil choisi) et stockage de celle-ci dans le fichier des cohérences spectrales.

Fin de la boucle sur la fréquence cycliques.